UNIVERZITETA U BEOGRADU
PRIRODNOMATEMATIČKI FAKULTET

SLOBODAN T. VUJOŠEVIĆ

PRILOG TEORIJI HEYTINGOVIH ALGEBRI

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

BEOGRAD

0. *Uvodna razmatranja i napomene*

Tridesetih godina, u pokušajima formalne rekonstrukcije osnovnih ideja i principa intuicionističke matematike, javljaju se Heytingove algebre. Ubrzo, uočen je njihov značaj u različitim oblastima matematike, pre svega u algebri, jer radi se zapravo o algebarskim strukturama odredjene vrste, zatim u topologiji, teoriji modela, teoriji skupova, teoriji kategorija itd.

Cilj ovoga rada je da, u različitim precizno formulisanim kontekstima, ispita uslove pod kojima se u njima javljaju Heytingove algebre i mogućnosti prenosa i reformulacije odredjenih koncepata jednog u drugi matematički kontekst. Uprkos činjenici da jedan broj matematičara smatra da je teorija kategorija *apstraktna besmislica*, ona to dobrim delom omogućava.

Iz tih razloga, u prvom delu rada, Heytingove algebre su izučavane kao jednačinska (jednakosna) kategorija, tj. kategorija u kojoj je klasa objekata jednačinska klasa (varijetet). Svojstva filtera i ideala Heytingovih algebri analizirana su uporedo sa odgovarajućim svojstvima filtera i ideala u distributivnim mrežama i Booleovim algebrama (1. 6 do 1.17). S obzirom na specifičan odnos i prirodnu vezu koja postoji izmedju Booleovih i Heytingovih algebri, razmotrena je mogućnost aproksimacije Heytingovih algebri, bolje i potpunije izučavanim, Booleovim algebrama. Opisane su slobodne, injektivne i projektivne Heytingove algebre (1.23 do 1.25) i dat jedan stav reprezentacije u algebrama sa zatvorenjem (1.28).

S obzirom na značaj u intuicionističkoj logici, opisano je na kakve probleme nailazi jedna striktno intuicionistička analiza Heytingovih algebri i način na koji se one pojavlju u modelima intuicionističke logike, tj. toposima.

Algebra kongruencija JH kompletne Heytingove algebre H je analizirana kao algebra J-operatora. Pokazano je da pridruživanje $H \mapsto JH$ odredjuje funktor u kategoriji kompletnih Heytingovih algebri i da se jedinični funktor ove kategorije prirodno transformiše na funktor J. Neke osobine ovog funktora se mogu koristiti u rešavanju problema aproksimacije Heytingovih algebri Booleovim algebrama (2.17).

Ponavljanjem konstrukcije algebre J-operatora dobija se familija kompletnih Heytingovih algebri. U radu H. Simmonsa [1], postavljen je jedan broj problema u vezi sa prirodom ove familije. U ovom radu su ispitana njena svojstva u slučaju kada je polazna Heytingova algebra linearno uredjenje (2.20) i data jedna konstrukcija kompletne Heytingove algebre za koju u odgovarajućoj familiji algebri J-operatora nije moguće pojavljivanje kompletne Booleove algebre (2.41). Takodje, okarakterisane su kompletne Heytingove algebre koje se mogu aproksimirati kompletnim Booleovim algebrama.

Višestruko je naglašena analogija, tj. preciznije dualnost, kategorija kompletnih Heytingovih algebri i topoloških prostora. Algebarske osobine Heytingovih algebri karakterišu svojstva odgovarajućih topoloških prostora i obratno, niz čisto topoloških koncepata ima svoj preizraz u kategoriji kompletnih Heytingovih algebri. S tim u vezi, data je algebarska reformulacija Cantor-Bendixsonovog izvoda (2.52 i 2.53) i pokazano da je u slučaju T_0-prostora ona ekvivalentna uobičajenoj topološkoj formulaciji (2.56).

Dualnost kategorija topoloških prostora i kompletnih Heytingovih algebri ispitivana je u trećem delu rada. Odredjenom reprezentacijom funktora koji proizvoljnom topološkom prostoru pridružuje kompletnu Heytingovu algebru otvorenih skupova, konstruisani su odgovarajući adjungovani funktori kategorija skupova, distributivnih mreža i kompletnih Heytingovih algebri u kategoriju topoloških prostora. U tako dobijenim shemama adjunkcije ispitana su dejstva monada i komonada. Pokazano je da se Heytingove algebre javljaju kao podkategorija u polaznim kategorijama adjunkcije i da funktor redukcije, u svakom od posmatranih slučajeva, ima levo adjungovani funktor, tj.

da je kategorija kompletnih Heytingovih algebri reflektivna u kategorijama skupova (3.21), distributivnih ograničenih mreža (3.29) i kompletnih Heytingovih algebri (3.38). U svakom od navedenih slučajeva definisan je odgovarajući semantički funktor kategorije kompletnih Heytingovih algebri u kategoriju T-algebri i strukturalnih morfizama i dokazano da su ove kategorije izomorfne.

Dejstvom komonade dobijene su odgovarajuće kategorije u kategoriji topoloških prostora. U adjunkciji kategorija kompletnih Heytingovih algebri i topoloških prostora to su "staloženi prostori", a u adjunkciji ograničenih distributivnih mreža i topoloških prostora retrakcije Stoneovih prostora (3.68). Takodje, pokazano je da su spomenute kategorije reflektivne u kategoriji topoloških prostora.

Autor ovoga rada već više godina radi u grupi logičara koja se okuplja na seminaru za Matematičku logiku Matematičkog instituta u Beogradu, kojim rukovodi Profesor Slaviša B. Prešić, gde je od kolega Prof. Aleksandra Krona, Dr. Zorana Markovića Dr, Koste Došena dobio niz vrednih komentara, sugestija i primedbi. Dr. Žarko Mijajlović, pod čijim rukovodstvom je sačinjen ovaj rad, pružio je podršku, podstrek i značajnu pomoć prilikom izrade i ukazao kako da se izvesne ideje jasnije i potpunije sagledaju. Tokom 1980 i 1981 godine, na specijalizaciji u Oxfordu, autor je dobio niz upustava i sugestija od Prof. Dana S. Scotta na čemu mu ovom prilikom s poštovanjem zahvaljuje.

Rad ima sledeći sadržaj:

01. *O Heytingovim algebrama, uvodna razmatranja*

U klasičnom iskaznom i predikatskom računu se na prirodan način javljaju Booleove algebre (kao Lindenbaumove algebre). Njihova algebarska svojstva karakterišu prirodu ovih sistema i njihovih modela i obratno, svojstva iskaznog i predikatskog računa odredjuju algebarske osobine Booleovih algebri. Sličnu ulogu u intuicionističkoj logici imaju Heytingove algebre (Fitting, M.[1]).

Iako ih A. Heyting (1930) nije prepoznao kao odredjenu klasu algebarskih struktura ipak se, obzirom na njihov značaj u intuicionističkoj matematici, ova važna klasa algebri naziva Heytingovim algebrama. U literaturi su u upotrebi i razni drugi termini, na primer, pseudo-Booleove algebre, relativno-pseudokomplementirane distributivne mreže sa nulom, Brouwerove algebre (u radovima McKinseya i Tarskog [1],[2],[3] zapravo dualne Heytingovim algebrama u uobičajenom smislu) itd.

Kao distributivne mreže odredjene vrste, prvi put su tretirane u Birkhoffovoj teoriji mreža 1948 godine [1].

Teorija Heytingovih algebri, kao teorija prvog reda, je modelski nepotpuna, pa nije sasvim jasno kakve rezultate može dati jedna modelteoretska analiza ovih algebri, ali je sigurno da oni ne mogu biti takvi kao u, njima srodnoj, teoriji Booleovih algebri (Mijajlović, Ž.D.[2]). Kategorijalna analiza se pokazala podobnijom i izvedena je postupno u većem delu ovoga rada.

Kao jednačinska kategorija, ova klasa algebri ima veoma zanimljiv položaj u nešto široj kategoriji distributivnih mreža, pa je u radovima Balbesa [1], Balbesa i Horna [1], Chena [1],[2], Daya [1] i Halmosa [1],[2] ispitivana u tom smislu.

Niz autora se bavio problemima reprezentacije raznih klasa u klasi distributivnih mreža, Bruns [1], Chang [1], Chang i Horn [1], Drake i Thron [1], ali su to uglavnom, manje ili više, reminiscencije na dobro poznate stavove reprezentacije

M.H. Stonea [1],[3].

Značaj Heytingovih algebri u logici (intuicionističkoj i njoj bliskim) i topologiji naglašen je u klasičnim radovima McKinseya i A. Tarskog [1],[2],[3] i posebno, u monografiji H. Rasiowe i R. Sikorskog [1].

Kripkeovi modeli, tj. semantika u odnosu na koju je intuicionistička logika (prvog reda) potpuna, veoma važni u njenim razmatranjima, pokazali su se nepogodnim u zasnivanju i rekonstrukciji onog dela matematike koji zahteva upotrebu i logike višeg reda, intuicionističke analize na primer. Medjutim, iako nepotpuni, u odnosu na intuicionističku logiku, modeli tipa pramenova, ili opštije, tipa toposa, omogućavaju da se intuicionistički koncepti pogodnije ostvare. Naime, u kategoriji sa odredjenom strukturom, dovoljno bogatom da je u njoj moguća rekonstrukcija većeg dela matematike, na prirodan način se, kao istinitonosni objekat, javlja kompletna Heytingova algebra, čija priroda karakteriše unutrašnju logiku takvog matematičkog univerzuma i što je veoma značajno, takva kategorija, topos, se može dobiti polazeći od unapred zadate kompletne Heytingova algebre. To omogućava da se intuicionistički zahtevi ispune a priori, zadavanjem odgovarajuće Heytingove algebre.

Moglo bi se reći da je time nastala jedna sasvim nova oblast matematičke logike, geometrijska logika. U njoj u poslednjih nekoliko godina radi veliki broj matematičara, medju kojima su značajnije doprinose u zasnivanju dali Fourman [1], [2], Fourman i Scott [1], Freyd [1],[2], Johnstone [1],[2], Lawvere [1],[2], Osius [1], Wraith [1] i drugi.

U prvom delu ovoga rada analizirane su osobine kategorije Heytingovih algebri, razmotrena njihova veza sa Booleovim algebrama i zasnovan čitav niz koncepata, koji je u tradiciji analize distributivnih mreža. Naglašene su i neke njihove osobine koje su od posebnog značaja u izučavanju raznih, intuicionističkoj logici bliskih, formalnih logika.

1. *O Heytingovim algebrama*

Heytingova algebra $\mathbb{H} = \langle H, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ je struktura čijom se redukcijom na jezik teorije mreža dobija ograničena distributivna mreža, a binarna operacija $\rightarrow$, *relativna pseudokomplementacija* ili intuicionistička implikacija ili prosto implikacija, za proizvoljne $a,b \in H$ zadovoljava

$$\forall z \in H.\ a \wedge z \leq b \iff z \leq b \rightarrow a.$$

Osim u slučajevima kada kontekstom nije dovoljno naglašena, razlika u oznakama strukture i njenog domena u tekstu nije napravljena. Za proizvoljno $x \in H$, $x \rightarrow 0$ je *pseudokomplement* od x, u oznaci $\neg x$. Umesto $x \wedge y$ često stoji prosto xy.

Sledećim relacijama ilustrovane su neke osobine strukture Heytingovih algebri. Dokazuju se elementarno i od značaja su jer omogućavaju njihovu jednakosnu formulaciju.

Teorema 1.1 Ako je H Heytingova algebra tada za proizvoljne x,y,z H redom važi:

(i) $x(x\rightarrow y) \leq y$

(ii) $x \leq y \iff x \rightarrow y = 1$

(iii) $y \leq x \rightarrow y$

(iv) $x \leq y \implies z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$ i $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$

(v) $x(y\rightarrow z) = x(xy \rightarrow xz)$

(vi) $(x \vee y) \rightarrow z = (x\rightarrow z)(y \rightarrow z)$

(vii) $x \rightarrow yz = (x \rightarrow y)(x \rightarrow z)$

(viii) $z(xy \rightarrow x) = z$

(ix) $x(x\rightarrow y) = xy$

(x) $\neg(x\rightarrow y) = \neg\neg x \wedge \neg y.$ $\dashv$

Pritom je sa $\dashv$ označen kraj dokaza (što u prethodnom slučaju znači da je dokaz izostavljen zbog jednostavnosti). Neki dokazi u radu su izostavljeni jer su , iako najčešće ne sasvim jednostavni, deo matematičkog *folklora* ili se referencom upućuje na njihov original.

Teorema 1.2 (Z.Marković [1]) Neka je K klasa struktura u jeziku $\{\vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\}$. Za proizvoljno $H \in K$, H zadovoljava jednakosti koje definišu klasu ograničenih distributivnih mreža i jednakosti (v), (vii) i (ix) ako i samo ako K je klasa Heytingovih algebri.

Dokaz: Svaka Heytingova algebra je ograničena distributivna mreža i, prema prethodnoj teoremi, zadovoljava jednakosti (v), (vii) i (ix). Obratno, za svako $H \in K$, H je ograničena distributivna mreža i pritom, za proizvoljne $x,y,z \in H$, ako $xz \leq y$ tada redom $z(x \rightarrow y) = z(zx \rightarrow zy) = z(xyz \rightarrow yz) = z \wedge 1 = z$, pa je $z \leq x \rightarrow y$. Na sličan način, ako je $z \leq x \rightarrow y$ tada obzirom na $x(x \rightarrow y) = xy \leq y$ imamo $x \wedge z \leq y$ tj. H je Heytingova algebra. $\dashv$

Klasa struktura u odredjenom jeziku, ili odredjenog tipa, je *jednačinska* ako je zatvorena za homomorfne slike, podstrukture i direktne proizvode svojih elemenata. Značajna je sledeća karakterizacija ovih klasa struktura:

Teorema 1.3 (G.Birkhoff [1]) Klasa struktura K istog tipa je jednačinska akko postoji skup jednakosti Φ u jeziku klase K tako da je $K = \{A \mid A$ je struktura u jeziku klase K i $A \models \Phi\}$. $\dashv$

Otuda je teoremom 1.2 upravo iskazano da je klasa Heytingovih algebri jednačinska klasa (u daljem u oznaci HA). Osim posledica koje se neposredno dobijaju iz definicije jednačinskih kalasa, važne su i sledeće osobine ovih klasa, pa dakle i klase HA.

Teorema 1.4 (G.Birkhoff [1]) Ako je K jednačinska klasa tada je svaka struktura klase K subdirektni proizvod subdirektno nerastavljivih struktura klase K.

Obzirom na prethodnu teoremu, svaka Heytingova algebra se može reprezentovati subdirektnim proizvodom subdirektnone rastavljivih Heytingovih algebri.

Podsetimo da je struktura A *slobodna* u klasi K ako postoji skup $S \subseteq A$ takav da je struktura A generisana sa S i za proizvoljnu strukturu $B \subseteq K$ i funkciju $f: S \longrightarrow B$ postoji jedinstven homomorfizam $g: A \longrightarrow B$ takav da je $g \restriction S = f$. S je skup *slobodnih generatora* i struktura A, *slobodna algebra* nad S, u oznaci F(S), je do na izomorfizam odredjena kardinalnošću skupa slobodnih generatora.

Teorema 1.5 (G.Birkhoff [1]) Ako je K netrivijalna jednačinska klasa (tj. ne sadrži jedino trivijalnu strukturu) tada za svaki kardinal $\alpha > 0$ postoji algebra $F(\alpha)$, slobodna u klasi K nad skupom slobodnih generatora kardinalnosti α.

Obzirom na teoremu 1.2 u klasi HA postoji slobodna Heytingova algebra nad skupom slobodnih generatora proizvoljne kardinalnosti. Koncept slobodne strukture je veoma koristan i značajan u izučavanju svojstava raznih struktura i biće do detalja razmotren u daljem tekstu. Prethodno, definicijama i teoremama koje slede neposredno, karakterišu se neki osnovni pojmovi i koncepti i fiksira terminologoja i oznake.

Definicija 1.6 Neka je $H \in HA$, $a,b \in H$ tada je sa $(a] = \{y \in H \mid y \leq a\}$ označen *glavni ideal* generisan sa a, slično $[a) = \{y \in H \mid a \leq y\}$ je *glavni filter* generisan sa a i $[a,b] = \{y \in H \mid a \leq y \leq b\}$ je *interval* odredjen elementima a,b redom.

Primetimo da ako je $H = \langle H, \leq \rangle$ parcijalno uredjenje tada je preslikavanje $x \longmapsto (x]$ izomorfizam posmatranog uredjenja i strukture $\langle \{(x] \mid x \in H\}, \subseteq \rangle$. (Jer, za proizvoljne $x y \in H$ $x \leq y \Longleftrightarrow (x] \subseteq (y]$.) Na taj način, struktura H je reprezentovana skupom podskupova nekog skupa. Iako sasvim jednostavna, ova ideja se javlja u raznim stavovima reprezentacije o kojima će biti reči.

Lema 1.7 Za svaku ograničenu distributivnu mrežu (klasu ovih struktura u daljem označavamo sa ODM) H važi: $H \in HA$ akko svaki interval u H je Heytingova algebra.

Dokaz: Neka je $H \in HA$ i neka je $[a,b] = I$ interval u algebri H. Primetimo da za sve $x,y \in I$. $a \leq (x \to y)b \leq b$. Stoga, definišimo binarnu operaciju $\to_I$ u intervalu I tako da za sve $x,y \in I$. $x \to_I y = (x \to y)b$. Ako je $z \in I$ takvo da $x \wedge z \leq y$ tada $z \leq x \to y$, pa zbog $z \leq b$, $z \leq (x \to y)b$ tj. $z \leq x \to_I y$. Ako $z \leq x \to_I y$ tada $x(x \to y)b \leq xyb \leq y$ pa dakle $x \wedge z \leq y$ tj. $I \in HA$.

Obratno, ako je svaki interval u $H \in ODM$ Heytingova algebra tada se u H implikacija može definisati tako da za proizvoljne $x,y \in H$. $x \to y = x \to_I y$, gde je $I = [x \wedge y, 1]$. $\dashv$

Definicija 1.8 Neka je $H \in HA$. Neprazan skup $I \subseteq H$ je *ideal* u H akko za sve $x,y \in H$. $x,y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$ i $x \leq y, y \in I \Rightarrow x \in I$. Dualno, definiše se *filter* u $H \in HA$.

Ako je $S \subseteq H$, S neprazan, tada $(S] = \bigcap\{I \mid S \subseteq I$ i I je ideal u $H\}$ je ideal generisan sa S. Dualno, $[S)$ je filter generisan sa S. Pritom, jednostavno je pokazati da $(S] = \{y \in H \mid$ postoji $S' \subseteq S$ konačno, $y = \bigvee S'\}$, gde je sa $\bigvee S'$ označen supremum skupa S' u algebri H. (*Jednostavno* često znači *na uobičajeni način* pa ponekad uopšte nije jednostavno.)

Za proizvoljno $H \in HA$ sa JH je označena mreža ideala algebre H. JH je *kompletna* Heytingova algebra (KHA) i preslikavanje $x \mapsto (x]$, $x \in H$, je *utapanje* algebre H u kompletnu Heytingovu algebru JH. Jer, ako je $I \in JH$ takav da $(x] \cap I \subseteq (y]$, gde $x,y \in H$, tada za svako $i \in I$. $xi \in (x] \cap I \subseteq (y]$ pa $i \leq x \to y$ odnosno $i \in (x \to y]$. Otuda $I \subseteq (x \to y]$, tj. $(x \to y] = (x] \to (y]$. Preslikavanje $x \mapsto (x]$ dakle čuva implikaciju. Slično se pokazuje da i ostale operacije Heytingovih algebri imaju istu osobinu.

Iako *intuicionistički nepostojeći*, maksimalni i prosti ideali i filtri imaju značajnu ulogu, i predstavljaju moćno sredstvo, u izučavanju svojstava Heytingovih algebri. U daljem se pod idealom (filtrom) podrazumeva pravi ideal..

Definicija 1.9 Ideal I u Heytingovoj algebri H je: *maksimalan* akko za svako $J \in JH$. $J \neq H$ i $I \subseteq J \Rightarrow J = I$, *prost* akko $\forall x,y \in H$. $x \wedge y \in I \Rightarrow x \in I$ ili $y \in I$. Dualno, definiše se prost i maksimalan filter u H. Pritom, kada se kaže *dualno* ima se u vidu filter, a svojstva uopšte ne moraju biti dualna, tj. ne definiše se minimalni filter... osim u odredjenim slučajevima kada je dualnost sasvim strogo formulisana.

Egzistencija prostih i maksimalnih ideala (filtara) je u distributivnim mrežama, dakle i Heytingovim algebrama, posledica aksiome izbora. Bez ove pretpostavke nije moguće dokazati postojanje i izvršiti *konstrukciju* ovih objekata i ta se činjenica u literaturi često sreće. Takodje je dobro poznato da egzistencija maksimalnog ideala u proizvoljnoj Heytingovoj algebri nije dovoljna za dokaz aksiome izbora. Manje je poznat sledeći rezultat, koji karakteriše odnos ovih, intuicionistički besmislenih, hipoteza.

<u>Teorema 1.10</u> (H.J. Bell [1]) Ako u svakoj distributivnoj mreži sa najmanjim elementom postoji maksimalan pravi filter tada važi aksioma izbora.

Dokaz: Neka je A_i, $i \in I$ proizvoljna familija nepraznih skupova medju kojima makar jedan ima više od jednog elementa. U suprotnom, teorema trivijalno važi. Dalje, neka je X skup svih parcijalnih funkcija izbora, tj. neka je

$$X = \{f : \mathrm{dom}f \longrightarrow \bigcup A_i \mid \mathrm{dom}f \subseteq I \text{ i } f(i) \in A_i\}.$$

Za sve $f, g \in X$ neka je $f \subseteq g$ akko $\mathrm{dom}f \subseteq \mathrm{dom}g$ i $\forall i \in \mathrm{dom}f.\ f(i) = g(i)$. (Tj. f kao skup je podskup od g.) Označimo sa D podmrežu od PX (partitivni skup skupa X) generisanu sa skupom $\{(f] \mid f \in X\}$. Za sve $f, g \in X$

$$(f] \cap (g] = \begin{cases} (f \cup g] & \text{ako } \forall i \in \mathrm{dom}f \cap \mathrm{dom}g.\ f(i) = g(i) \\ \emptyset & \text{inače.} \end{cases}$$

Otuda, svaki elemenat mreže D je ili prazan skup ili se može predstaviti u obliku $(f_1] \cup (f_2] \cup \ldots \cup (f_n]$ za neke $f_1, \ldots, f_n \in X$. D sadrži prazan skup jer, bar jedan A_i ima više od jednog elementa, tj postoje $f, g \in X$ tako da $(f] \cap (g] = \emptyset$. Dakle D je distributivna mreža sa najmanjim elementom i po pretpostavci postoji maksimalan pravi filter F u mreži D.

Neka je $S = \{f \in X \mid (f] \in F\}$. Ako $f, g \in S$ tada $(f] \cap (g] \neq \emptyset$ pa $f \cup g \in X$. Otuda je $h = \bigcup S \in X$. Kako je $(h] \subseteq (f]$ za svako $f \in S$ to ako je $m \in F$ tada $m = (f_1] \cup \ldots \cup (f_n]$ za neke $f_1, \ldots, f_n \in X$. F je maksimalan, dakle prost (obzirom na primedbu koja neposredno sledi posle dokaza teoreme) pa za neko $i \leq n$,

$(f_i] \in F$ tj. $(h] \subseteq (f_i] \subseteq m$. Otuda, $(h]$ generiše filter F, tj u mreži D $(h]$ je *atom*, pa finkcija h nema pravu ekstenziju u skupu X, dom$h$ = I, tj. h je funkcija izbora posmatrane familije A_i, $i \in I$.$\dashv$

Prethodna teorema pokazuje da se pojmovi maksimalnog i prostog ideala (filtra) suštinski razlikuju. Na primer, u mreži podskupova D, nepraznog skupa X, lako je konstruisati prost ideal. Za proizvoljno $x \in \bigcup D$, $\{y \in D \mid x \notin y\}$ je prost ideal, što se jednostavno proverava, ali egzistencija maksimalnog ideala (filtra) je ekvivalentna aksiomi izbora, pa je dakle nezavisna od Zermelo-Fraenkelove teorije skupova. Po malo mističan i u literaturi konfuzan odnos ovih pojmova se može sasvim strogo okarakterisati. Naime, (M. Stone [2]) svaki maksimalan ideal (filter) u distributivnij mreži je prost, ali ne i obratno. Preciznije, ovi pojmovi koincidiraju u *relativnokomplementiranim distributivnim mrežama* (RKDM, u ovom slučaju ima zaista razloga za skraćenim zapisivanjem) tj. mrežama u kojima je svaki interval komplementirana distributivna mreža, jer važi sledeća

Teorema 1.11 (L. Nachbin [1]) Distributivna mreža D je relativnokomplementirana akko svaki prost ideal u D je maksimalan.

Dokaz: Neka D distibutivna mreža u kojoj je svaki prst ideal maksimalan. Predpostavimo da postoje $a_0, a_1, a_2 \in D$, $a_0 \leq a_1 \leq a_2$, tako da a_1 nije komplementirano u intervalu $[a_0, a_2]$ Otuda je $a_0 < a_1 < a_2$. Neka je $I_0 = \{x \in D \mid a_1 x \leq a_0\}$ i $I_1 = \{x \in D \mid a_2 x \leq a_1 \vee y$ za neko $y \in I_0\}$. Primetimo da su I_0, I_1 ideali i pritom, $a_0 \in I_0$, $a_1 \notin I_0$, $a_1 \in I_1$ i $I_0 \subseteq I_1$. Takodje $a_2 \notin I_1$ jer, ako pretpostavimo suprotno tj. da je $a_2 \leq a_1 \vee y$ za neko $y \in I_0$, tada ako $y_1 = y a_2 \vee a_0$ imamo $a_1 \vee y_1 = a_2$, $a_1 y_1 = a_0$ što je kontradikcija. Neka je I prost ideal u mreži D takav da $a_2 \notin I$, $I_1 \subseteq I$ i neka je $F = [(D \setminus I) \cup \{a_1\})$. Dokažimo da je ta da $F \cap I_0 = \emptyset$. Zaista, ako postoji $x \in I_0 \cap F$ tada $x \geq y a_1$ za ne ko $y \in I$. Ali, zbog $a_1 x \leq a_0$ imamo da je $a_1 y \leq a_1 x \leq a_0$ pa dakle $y \in I_0$ tj $y \in I$, što je kontradikcija. Neka je J prost ideal takav da $I_0 \subseteq J$ i $J \cap F = \emptyset$, takav ideal u disributivnoj mreži postoji na osnovu aksiome izbora, tada $J \subset I$ pa dakle J nije maksimalan jer $J \neq I$ što je, obzirom na pretpostavku, kontradikcija.

Obratno, neka je I prost ideal u relativno komplementiranoj mreži D. Za proizvoljno $J \in JD$, $I \subset J$, ako $x \in J \setminus I$, $y \in I$ tada za svako $z \in D$, x ima komplement u intervalu $[xy, x \vee z]$. Otuda $x \wedge \neg x = xy \in I$ pa kako $x \notin I$ to je $\neg x \in I \subset J$. Dakle, $x \vee z = x \vee \neg x \in J$, što znači da je $z \in J$ tj. $D = J$.⊣

Sledećih nekoliko lema podrobnije opisuju svojstva ideala (i filtara) u Heytingovim algebrama. Dokazane su i sredjene po analogiji sa odgovarajućim uobičajenim svojstvima koja se dokazuju u slučaju *Booleovih algebri* (BA).

<u>Lema 1.12</u> Ako je F maksimalan filter u Heytingovoj algebri H tada je F prost filter i $\forall x \in H.\ x \vee \neg x \in F$.

Dokaz: Ako $x \notin F$ tada kako je F maksimalan, $[F \cup \{x\}) = H$ Otuda $\exists y \in F.\ xy = 0$ pa $y \leq x \to 0$ tj. $\neg x \in F$ i konačno $x \vee \neg x \in F$ za svako $x \in H$. Obzirom na raniju primedbu, F je prost.⊣

<u>Lema 1.13</u> Ako je F maksimalan filter u $H \in HA$ tada je $H \setminus F = I$ minimalan prost ideal u H (u smislu da ne sadrži pravi prost ideal ili u smislu mreže prostih ideala algebre H).

Dokaz: Filter F je maksimalan, dakle prost, pa kako je I dualan F (dualan u strogom smislu) to je I prost ideal algebre H. Ako je $J \in JH$, J prost ideal i $J \subseteq I$ i $\exists x \in I \setminus J$ tada $x \wedge \neg x = 0 \in J$ pa $\neg x \in J$. Otuda $x \vee \neg x \in I$. Kontradikcija.⊣

<u>Lema 1.14</u> Ako je F maksimalan filter u $H \in HA$, $I = H \setminus F$, tada $\forall x \in H.\ x \in I \Longrightarrow \neg\neg x \in I$.

Dokaz: Na osnovu leme 1.13 ideal I je minimalan, pa ako $x \in I$ tada $\neg x \notin I$ ali, $\neg x \wedge \neg\neg x = 0 \in I$, pa kako je I prost ideal to $\neg\neg x \in I$.⊣

Za proizvoljnu Heytingovu algebru H, $x \in H$ je *gust* u H akko $\neg x = 0$. Sa $G_H = \{x \in H \mid \neg x = 0\}$ označen je filter gustih elemenata algebre H. Primetimo da $\forall x \in H.\ x \vee \neg x \in G_H$ i takodje da $\forall x \in H.\ \neg x = 0 \Longleftrightarrow x = 1$ akko H je Booleova algebra.

Neki primeri Heytingovih algebri: Algebra $\mathit{2}$, tj. Booleova algebra sa dva elementa je Heytingova algebra. Svaki lanac sa najmanjim i najvećim elementom je takodje Heytingova algebra. Pritom, implikacija u lancu C je definisana tako da $\forall x,y \in C.\ x \to y = 1$ ako $x \leq y$, inače $x \to y = y$. U daljem sa n je označen lanac od $n \in \omega$ elemenata.

Svakako, u ovom radu, najvažniji i najzanimljiviji primeri Heytingovih algebri su algebre otvorenih skupova *topološkog prostora*. Ako je X topološki prostor, $X \neq \emptyset$, tada je implikacija u mreži OX, otvorenih skupova prostora X, data sa: $\forall x,y \in OX.\ x \to y = int((X \setminus x) \cup y)$.

Mreža ideala JD, proizvoljne distributivne mreže D, je Heytingova algebra u kojoj je implikacija definisana tako da $\forall I,J \in JD.\ I \to J = \{x \in D \mid \forall i \in I.\ x \wedge i \in J\}$ jer, ako $x \in I \cap K$, gde je $K = \{x \in D \mid \forall i \in I.\ xi \in J\}$, tada $x = xx \in J$ pa $I \cap K \subseteq J$. Ako $L \in JD$, $I \cap K \subseteq J$ i $x \in L$ tada $\forall i \in I.\ xi \in I \cap L \subseteq J$ pa $x \in K$, odnosno $L \subseteq K$. Dakle, $K = I \to J$. Svakako, K jeste ideal, što se jednostavno proverava.

Prirodno, svaka Booleova algebra je Heytingova i kao što je poznato, $\mathit{2} \in BA$ je jedina subdirektno nerastavljiva Booleova algebra, ali u klasi HA postoji veoma mnogo subdirektno nerastavljivih Heytingovih algebri. Naime, za proizvoljno $H \in HA$, algebra $H \oplus 1$ (čiji je domen disjunktna unija domena algebre H i $\{1\}$ i u kojoj je $\forall x,y \in H.\ x \leq y \Longleftrightarrow x \leq_{H+1} y$ i $\forall x \in H.\ x < 1$) je takodje Heytingova algebra i pritom subdirektno nerastavljiva. Otuda, Birkhoffova teorema reprezentacije (1.4) nema poseban značaj jer, iako je klasa HA jednačinska, tj. svaka Heytingova algebra se može reprezentovati sub direktnim proizvodom subdirektno nerastavljivih Heytingovih algebri, ipak se obzirom na njihov broj, malo toga može reći o njenim faktorima. U slučaju klase BA, $\mathit{2}$ je jedina subdirektno nerastavljiva algebra pa se svaka Booleova algebra može reprezentovati kao subdirektni proizvod (podalgebra) stepena algebre $\mathit{2}$. Ipak, algebra $\mathit{2}$ ima značajnu ulogu u izučavanju osobina klase HA.

Homomorfizmi Heytingovih algebri su definisani na uobičajen način.

Lema 1.15 Neka je H Heytingova algebra i $f: H \longrightarrow 2$ funkcija tada: $F = \{x \in H \mid f(x) = 1\}$ je maksimalan filter u H akko f je homomorfizam algebre H na 2.

Dokaz: Pokažimo da je f homomorfizam. Redom imamo:

f je monotono preslikavanje jer, ako $x \leq y$ i $f(y) = 0$ tada $y \in \{x \in H \mid f(x) = 0\} = H \setminus F$. Ali $H \setminus F$ je na osnovu 1.13 ideal u algebri H pa $x \in H \setminus F$ tj $f(x) = 0$. Otuda $f(x) \leq f(y)$.

Za sve x,y H, ako $f(x) = 1$ ili $f(y) = 1$ tada $f(x \vee y) \leq f(x) \vee f(y)$. Neka je $f(x) = f(y) = 0$ tada $x, y \in H \setminus F$ pa $x \vee y \in H \setminus F$, tj. $f(x \vee y) = 0$.

Ako $f(x \wedge y) = 1$ tada jasno $f(x) \wedge f(y) \leq f(x \wedge y)$. Ako $f(xy) = 0$ tada $xy \in H \setminus F$, pa kako je $H \setminus F$ prost ideal $x \in H \setminus F$ ili $y \in H \setminus F$. Otuda $f(x) = 0$ ili $f(y) = 0$ tj. $f(x) \wedge f(y) \leq f(x \wedge y)$.

Dokažimo još da je $\forall x, y \in H.\ f(x) \rightarrow f(y) \leq f(x \rightarrow y)$. Ako $f(x) \rightarrow f(y) = 0$ tada nejednakost važi trivijalno. Stoga neka je $f(x) \rightarrow f(y) = 1$ tj. $f(x) \leq f(y)$. Ako $f(x) = 0$ tada $x \notin F$ pa kako je F maksimalan to $x \vee \neg x \in F$. Ali, F je prost filter pa $\neg x \in F$ tj. $f(\neg x) = 1$. Zbog $\neg x \leq x \rightarrow y$ imamo $f(x \rightarrow y) = 1$. Neka $f(x) = 1$, tada $f(y) = 1$ pa zbog $y \leq x \rightarrow y$ imamo $f(x \rightarrow y) = 1$. Konačno $\forall x, y \in H.\ f(x) \rightarrow f(y) \leq f(x \rightarrow y)$.

Neka je f homomorfizam, tada $H \setminus F = \{x \in H \mid f(x) = 0\}$ je prost ideal u algebri H jer, ako $xy \in H \setminus F$ tada $f(xy) = 0$ pa $f(x) \wedge f(y) = 0$ tj. $f(x) = 0$ ili $f(y) = 0$. Osim toga, ako $x \in H \setminus F$ tada $f(\neg\neg x) = \neg\neg f(x) = 0$ tj. $\neg\neg x \in H \setminus F$. Otuda, ako $\neg x = 0$ tada $x \notin H \setminus F$. F je dakle prost filter i ako $\neg x = 0$ tada $x \in F$. Dokažimo da je F maksimalan. Neka je $F \subseteq G$, G filter u H i $x \in G \setminus F$. Kako $\neg(x \vee \neg x) = 0$ to $x \vee \neg x \in F$ pa kako je F prost to $\neg x \in F$. Otuda $x \wedge \neg x = 0 \in G$, tj. $G = H$. $\dashv$

Moguće da je prethodni dokaz dat sa isuviše mnogo detalja. Ipak, on na odredjeni način ilustruje svojstva srukture Heytingovih algebri, posebno implikacije u njima. Sledeći primer je zanimljiv i jednostavno se dokazuje.

Primer 1.16 Neka je $H \in HA$ i $f: H \longrightarrow 3$ funkcija, tada

f je homomorfizam akko $F_1=\{x\in H \mid f(x)\geq 1\}$ je maksimalan filter u H i $F_2=\{x\in H \mid f(x)=2\}$ je prost filter u H i $\forall x\in H.$ $x\notin F_1 \Longrightarrow \neg x\in F_2$ i $\forall x,y\in H.$ $x,y\in F_1\setminus F_2 \Longrightarrow x\rightarrow y\in F_2.$ ⊣

Klasu Heytingovih algebri moguće je tretirati kao kategoriju u kojoj je HA klasa objekata, a morfizmi homomorfizmi Heytingovih algebri. Pritom su koncepti monomorfizma, epimorfizma i izomorfizma definisani u smislu teorije kategorija. Odgovarajući klasični morfizmi (tj. morfizmi u klasičnom smislu) su redom: homomorfizam 1-1, "na" i izomorfizam.

<u>Lema</u>: Morfizam $f:H_1\longrightarrow H_2$ Heytingovih algebri je monomorfizam u kategoriji HA akko f je 1-1 homomorfizam.

Dokaz: Neka je $f(x)=f(y)$ za neke $x,y\in H_1$. Klasa HA je jednačinska (klasa i kategorija su označene na isti način ali je uvek iz konteksta jasno o kojem se od ovih koncepata radi) pa za proizvoljno $\{a\}$ postoji slobodna algebra $F(\{a\})$ nad klasom HA. Otuda, postoje morfizmi $f_0,f_1:F(\{a\})\longrightarrow H_1$ takvi da $f_0(a)=x$ i $f_1(a)=y$. Otuda $f\circ f_0(a)=f(x)=f(y)=f\circ f_1(a)$, pa kako je f monomorfizam to $f_0(a)=f_1(a)$ tj $x=y$. Obratno trivijalno važi.⊣

U kategoriji HA epimorfizam nije obavezno homomorfizam "na", pa dakle i mono-epimorfizam nije obavezno izomorfizam, obratno je trivijalno zadovoljeno.

<u>Definicija 1.18</u> Neka su $H,H_1\in HA$, tj. H,H_1 su objekti kategorije Heytingovih algebri, tada

H je *retrakt* objekta H_1 u kategoriji HA ako postoje morfizmi $f:H_1\longrightarrow H$ i $g:H\longrightarrow H_1$ tako da $f\circ g=1_H$ (identitet u algebri H).

Podobjekt objekta H u kategoriji HA je monomorfizam $f:H_1\longrightarrow H$.

Heytingova algebra H je *injektivna* u kategoriji HA akko za svaki monomorfizam $f:H_1\longrightarrow H_2$ i svaki morfizam $g:H_1\longrightarrow H$ postoji morfizam $h:H_2\longrightarrow H$ takav da $h\circ f=g$.

$H\in HA$ je *projektivna* algebra akko za svaki epimorfizam $f:H_2\longrightarrow H_1$ i svaki morfizam $g:H\longrightarrow H_1$ postoji morfizam $h:H\longrightarrow H_2$

tako da $f \circ h = g$.

Distinkcija izmedju pojmova podobjekta i podstrukture u kategoriji HA nema značaja jer, obzirom da je HA jednačinska kategorija, tj. klasa objekata u HA je jednačinska klasa, to za svaki podobjekt $j: H_1 \longrightarrow H$ objekta $H \in HA$, $j[H_1]$ je, zbog prethodne leme, podstruktura od H izomorfna sa H_1, pa se iz klase izomorfnih podobjekata može izabrati predstavnik, inkluzija. Obratno je trivijalno, svaka podstruktura je podobjekt odgovarajućeg objekta.

Ako je H_1 podstruktura od H i $h: H \longrightarrow H_1$ epimorfizam takav da $h \upharpoonright H_1 = 1_{H_1}$ tada, kako je inkluzija $H_1 \hookrightarrow H$ morfizam u kategoriji HA, H_1 je retrakt Heytingove algebre H. Obratno, ako su $f: H \longrightarrow H_1$ i $g: H_1 \longrightarrow H$ takvi da $f \circ g = 1_{H_1}$ tada $g_1: H_1 \rightarrow g[H_1]$ definisano tako da za sve $x \in H_1$. $g_1(x) = g(x)$ je izomorfizam i $g_1 \circ f: H \longrightarrow g[H_1]$ je epimorfizam takav da $g_1 \circ f \upharpoonright g[H_1] = 1_{g[H_1]}$. Otuda, "$h$ je retrakcija" u kategoriji HA ima klasično značenje, tj. H_1 je podstruktura od H i $h \upharpoonright H_1 = 1_{H_1}$.

Takodje, pojam injektivnog objekta u kategoriji HA ima klasično značenje, tj. ako je $H_1 \hookrightarrow H_2$ tada se svaki homomorfizam $h: H_1 \longrightarrow H$ može jedinstveno proširiti do homomorfizma $g: H_2 \longrightarrow H$.

Obzirom da epimorfizmi u kategoriji HA nisu obavezno "na" to se u HA razmatra i problem *slabe* projektivnosti. Prilično je izučen posebno u konačnim Heytingovim algebrama tj konačnim distributivnim mrežama (R. Balbes, A. Horn [1]).

Razmatranje kalse Heytingovih algebri kao kategorije ima za cilj njeno uporedjivanje sa raznim drugim kategorijama, to je uglavnom predmet ovoga rada, što se u strogom smislu svodi na izučavanje *funktora* koji se u kategoriji Heytingovih algebri mogu definisati. Prirodno, zanimljiva su svojstva objekata i morfizama koja funktori čuvaju (prezerviraju) i taj pojam upotrebljavamo u standardnom smislu, ali će pre svega biti izučavana svojstva kategorije HA koja funktori *reflektuju*. Preciznije, funktor $F: HA \longrightarrow C$ u proizvoljnu kategoriju C, reflektuje osobinu "φ" objekata ili morfizama kada: ako objekt FH (ili morfizam Ff) ima osobinu φ tada H ili f ima takodje osobinu φ. U suštini radi se o veoma čestom konceptu aproksimacije nedovoljno poznatog ili nepogodnog za rad matematičkog objekta nekim već izučenim i dobro poznatim objektom. U slučaju kategorije HA zgodno je razmotriti mogućnost aproksimacije njenih objekata Booleovim algebrama.

<u>Definicija 1.19</u> Podkategorija $\mathcal{B}$ kategorije $\mathcal{A}$ je refleķtivna (u kategoriji $\mathcal{A}$) ako postoji funktor $F:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$, reflektor, takav da:

Postoji prirodna transformacija $t:I_{\mathcal{A}}\longrightarrow F$ jediničnog funktora $I_{\mathcal{A}}$ kategorije $\mathcal{A}$ na funktor F.

Za svaki objekt $B\in\mathcal{B}$ i morfizam $f:A\longrightarrow B\in\mathcal{A}$ postoji jedinstven morfizam $f_1:FA\longrightarrow B\in\mathcal{B}$ takav da $f_1\circ t_A=f$, tj. dijagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t_A"'] & & B \\ & FA \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

komutira.

Jednostavno je pokazati da: $\mathcal{B}$ je refleķtivna u $\mathcal{A}$ akko postoji funkcija F koja svakom objektu $A\in\mathcal{A}$ pridružuje $FA\in\mathcal{B}$ i funkcija t koja svakom objektu $A\in\mathcal{A}$ pridružuje morfizam $t_A:A\longrightarrow FA$ tako da za svaki objekt $B\in\mathcal{B}$ i morfizam $f:A\longrightarrow B\in\mathcal{A}$ postoji jedinstven morfizam $f_1:FA\longrightarrow B$ takav da $f_1\circ t_A=f$.

<u>Definicija 1.20</u> Neka je $H\in HA$, za svako $x\in H$ element $\neg\neg x$ je *regularan* u H i $RH=\{\neg\neg x \mid x\in H\}$ je skup regularnih elemenata u strukturi H.

Skup RH je domen strukture $RH=\langle RH,\vee_R,\wedge_R,\rightarrow_R,0_R,1_R\rangle$ u kojoj su operacije indukovane uredjenjem u Heytingovoj algebri H. Preciznije, $\forall x,y\in RH,\ x\vee_R y=\neg\neg(x\vee y)$, $x\wedge_R y=xy$, $x\rightarrow_R y=\neg\neg(\neg x\vee y)$, $0_R=0$, $1_R=1$. Struktura RH je Booleova algebra i preslikavanje $t_H:H\longrightarrow RH$ definisano sa: $\forall x\in H.\ t_H(x)=\neg\neg x$ je homomorfizam (u kategoriji HA) "na".

<u>Lema 1.21</u> Binarna relacija s_G u strukturi $H\in HA$ definisana tako da $\forall x,y\in H.\ x\ s_G y \Longleftrightarrow \exists u\in G_H.\ xu=yu$, gde je G_H filter gustih elemenata u H, je kongruencija i pritom $RH\cong H/_{G_H}$.

Dokaz: Za sve $x,y\in H$, ako $x\ s_G\ y$ tada $t_H(x)=\neg\neg x=$

$=\neg\neg x \wedge \neg\neg u =$(za neko $u \in G_H$)$=\neg\neg(x \wedge u)=\neg\neg(y \wedge u)=t_H(y)$. Obratno, ako $t_H(x)=t_H(y)$ tada $\neg\neg x=\neg\neg y$ tj. $\neg x=\neg y$, ali tada imamo da $x(x\vee\neg x)(y\vee\neg y)=y(x\vee\neg x)(y\vee\neg y)$ i pritom $x\vee\neg x, y\vee\neg y\in G_H$, tj. $x \; s_G \; y$. ⊣

Primetimo da preslikavanje t_H, $H\in HA$ čuva proizvoljne supremume, tj. ako je $S\subseteq H$ i $\bigvee S$ postoji u H tada $\bigvee_R\{\neg\neg x \mid x\in S\}$ postoji u RH i jednak je $\neg\neg(\bigvee S)$. Ako je $H\in HA$ kompletna Heutingova algebra tada je i RH takodje kompletna Booleova algebra i supremumi (infimumi) u RH izračunavaju se u H tj. $\bigvee_R\{\neg\neg x \mid x\in S\}=\neg\neg(\bigvee S)$ za proizvoljno $S\subseteq H$.

<u>Lema 1.22</u> Za proizvoljnu Heytingovu algebru H, preslikavanje $F\longrightarrow F\cap RH$, gde je F maksimalan filter u H, je bijekcija izmedju maksimalnih filtera u H i ultrafiltera u Booleovoj algebri RH.

Dokaz: Ako je F maksimalan filter u H tada za proizvoljno $x\in H$. $x\in F \Longleftrightarrow \neg\neg x\in F$, jer ako $\neg\neg x\in F$ tada se x može dodati filtru F i pritom F ostaje pravi filter. Otuda, F je jedinstveno odredjen sa $F\cap RH$.

Ako je F maksimalan filter u H tada je F prost filter pa je i $F\cap RH$ prost filter u RH, tj. ultrafilter.

Obratno, ako je G ultrafilter u RH, on mora biti sadržan u nekom maksimalnom maksimalnom filtru F u algebri H, tako da $F\cap RH=G$ (jer, G je maksimalan u RH) pa je F jedinstveno odredjen ultrafiltrom G.

U suštini, lema pokazuje da su prostori maksimalnih filtera u H i prostor ultrafiltera u RH homeomorfni.

Dobar deo intuicije o Heytingovim algebrama formira se na primerima familija otvorenih skupova topološkog prostora, pa je terminologija dobrim delom inspirisana terminologijom u topologiji (gust, regularan,..). Istoriski, fuktor R ($\neg\neg$-operator) formulisao je K. Gödel u dokazu neprotivrečnosti klasične u intuicionističkoj aritmetici. Preslikavanje R ima funktorski karakter i pritom, R je reflektor, tj. kategorija BA je reflektivna u kategoriji HA jer važi sledeća

Teorema 1.23 Funktor $F:HA \longrightarrow BA$ je reflektor i prezervira monomorfizme tj. za svaki monomorfizam $f:H_1 \longrightarrow H_2 \in HA$, $Rf:RH_1 \longrightarrow RH_2 \in BA$ je monomorfizam Booleovih algebri.

Dokaz: Dovoljno je pokazati da za proizvoljne $H \in HA$, $B \in BA$ i morfizam $f:H \longrightarrow B \in HA$ postoji jedinstven morfizam, u kategoriji BA, $g:RH \longrightarrow B \in BA$ takav da $g \circ t_H = f$. Jednostavno, uzmimo $g = f \restriction RH$, pa ako $g_1 t_H = g t_H$ tada $\forall x \in RH$. $g(x) = g(\neg\neg x) = g t_H(x) = g_1 t_H(x) = g_1(\neg\neg x) = g_1(x)$, tj. za proizvoljno $H \in HA$, t_H je epimorfizam, a morfizam g je jedinstveno odredjen.

Dijagram

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "t_{H_1}"'] & H_2 \arrow[d, "t_{H_2}"] \\ RH_1 \arrow[r, "Rf"] & RH_2 \end{tikzcd}$$

komutira i $t_{H_2} f$ je morfizam algebre $H_1 \in HA$ na $RH_2 \in BA$ pa je $Rf:H_1 \longrightarrow H_2$ jedinstveno odredjen i pritom $Rf \circ t_{H_1} = t_{H_2} \circ f$. Kako je $f \restriction RH_1 = Rf$ i f monomorfizam to je i Rf monomorfizam. $\dashv$

Injektivni objekti u kategoriji Booleovih algebri su kompletne Booleove algebre (KBA) (R.Sikorski [1]). Obzirom na prethodnu teoremu, kompletne Booleove algebre su injektivni objekti i u kategoriji Heytingovih algebri jer važi

Teorema 1.24 Ako je $B \in KBA$ tada je B injektivna u kategoriji HA.

Dokaz: Neka je $f:H_1 \longrightarrow H_2 \in HA$ monomorfizam, $B \in KBA$ i $g:H_1 \longrightarrow B \in HA$, tada sledeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[d] \arrow[ddr, "g"] & & H_2 \arrow[d] \\ RH_1 \arrow[rr, "Rf"] \arrow[dr, "h"'] & & RH_2 \arrow[dl, "k"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Homomorfizam h je jedinstveno odredjen jer, R je reflektor. Kako, po prethodnoj teoremi, R prezervira monomorfizme to je i Rf monomorfizam. Otuda, po teoremi Sikorskog, k je jedinstveno odredjeno proširenje morfizma h, pa je i $k \circ t_{H_2}$ jedinstveno proširenje morfizma g i pritom, $g = k \circ t_{H_2} \circ f$. $\dashv$

Medjutim važi i obratno, tj. svi injektivni objekti u kategoriji HA su kompletne Booleove algebre jer važi sledeća

<u>Teorema 1.25</u> (R. Balbes, A. Horn [1]) Svaka injektivna Heytingova algebra je kompletna Booleova algebra.

Dokaz: Neka je B injektivna algebra u kategoriji HA. Algebra JB je kompletna Heytingova algebra i preslikavanje $f:B \longrightarrow JB$ definisano sa $\forall x \in B.\ f(x)=(x]$ je monomorfizam. Kako je B injektivna algebra to postoji $g:JB \longrightarrow B$ tako da $gf=1_B$ tj. B je retrakt algebre JB, pa kako je $g \restriction f[B]=1_{[B]}$ to je B kompletna Heytingova algebra. Treba još pokazati da je B Booleova algebra, tj. dovoljno je pokazati da je filter gustih elemenata u B jednak $\{1\}$. Predpostavimo suprotno, neka je $a \in B$ takav da $\neg a=0$ i $a<1$. $L=\{0,a,1\}$ je lanac u algebri B i može se proširiti do maksimalnog lanca C u algebri B. Neka je D lanac dobijen dodavanjem novog elementa s lancu C tako da $\forall x \in C \setminus \{0\}.\ 0<s<x$. $C \subset D$ pa kako je B injektivna algebra u kategoriji HA postoji morfizam $h:D \longrightarrow B$ koji proširuje inkluziju $C \hookrightarrow B$. $h[D]$ je lanac u B; $C \subseteq h[D]$ i kako je C maksimalan to je $h[D] \subseteq C$. Otuda $h(s) \in C$ i pritom $h(s) \neq 0$ jer, h je homomorfizam u kategoriji HA pa $\neg h(s)=h(\neg s)=h(0)=0$. Zbog $s<a$, $h(s) \leq h(a)=a<1$, pa ako je $x \in C \setminus \{0\}$ tada $h(s) \leq x$ i $x \rightarrow h(s)=h(x \rightarrow s)=h(s)<1$, tj. $h(s)<x$ za svako $x \in C \setminus \{0\}$. Dakle, $h(s) \in C$, što je kontradikcija. ⊣

Važno je primetiti da injektivni objekti u kategoriji HA nisu kompletiranja u modelteoretskom smislu, tj. nije tačno da za svaku $H \in HA$ postoji monomorfizam $h:H \rightarrowtail B \in HA$, gde je B injektivna u HA. Jer, B je Booleova algebra pa obzirom da je h monomorfizam, H je takodje Booleova. Medjutim, postoje Heytingove algebre koje nisu Booleove. Drugim rečima, u kategoriji HA nema *dovoljno injektivnih* objekata. Više od toga, (A. Day [1]) pokazano je da ako je K netrivijalna jednačinska podklasa klase Heytingovih algebri tada K ima dovoljno injektivnih objekata akko K je generisana sa $\{2\}$ ili K sadrži injektivnu strukturu koja nije Booleova algebra. Ako K nema dovoljno injektivnih struktura, tada su jedine injektivne strukture u K upravo kompletne Booleove algebre. Takodje, pokazano je da su jedine jednačinske podklase u HA sa dovoljno injektivnih struktura klase generisane sa $\{2\}$, $\{3\}$ i $\{2^2\oplus 1\}$.

Struktura A je slobodan objekt u kategoriji K, struktura istog tipa i morfizama tih struktura, nad skupom slobodnih generatora S ako postoji funkcija $f:S\longrightarrow A$ takva da za svaku funkciju $g:S\longrightarrow B$, B objekt kategorije K, postoji jedinstven morfizam $h:A\longrightarrow B$ takav da $h\circ f=g$. Pod odredjenim uslovima, algebarska i kategorijalna definicija slobodne strukture su ekvivalentne, tj. ako je K netrivijalna jednačinska kategorija i $S\subseteq A$, $A\in K$ i S neprazan skup, tada A je slobodna u klasi objekata kategorije K nad skupom slobodnih generatora S akko A je slobodna u kategoriji K nad skupom slobodnih generatora S. Otuda, u kategoriji odnosno klasi HA ovi koncepti koincidirju i u daljem će se ta činjenica koristiti.

Prilično malo se zna o strukturi slobodnih Heytingovih algebri sa više nego jednim slobodnim generatorom. F(1) je beskonačna (I. Nishimura [1]). Kao podalgebra mreže $(N\times N)\oplus 1$, data je sa: $F(1)=\bigcup\limits_{n=1}\{(n+1,p)\mid n\leq p\leq n+3\}\cup\{(1,1),(1,2),(1,3)\}\oplus 1$ Veoma komplikovanu deskripciju slobodnih Heytingovih algebri $F(n)$, $n\in\omega$, dao je A. Urquhart [1]. Svakako, najviše je izučena slobodna Heytingova algebra nad prebrojivim skupom generatora jer je izomorfna sa Lindenbaumovom algebrom intuicionističog iskaznog (i predikatskog) računa.

Kako je pojam projektivnog objekta definisan obzirom na epimorfizme, a oni u kategoriji HA nisu uvek homomorfizmi "na" to ima značaja i definicija *slabo projektivnih* Heytingovih algebri. Tj. $H\in HA$ je slabo projektivna ako za svaki homomorfizam "na" $f:H_1\longrightarrow H_2\in HA$ i svaki morfizam $g:H\longrightarrow H_2\in HA$ postoji $h:H\longrightarrow H_1$ tako da $f\circ h=g$. Jasno je da: svaka projektivna Heytingova algebra je slabo projektivna. Retrakcije slabo projektivnih (projektivnih) Heytingovih algebri su slabo projektivne (projektivne) Heytingove algebre. Kako je HA jednačinska kategorija to postoji slobodna Heytingova algebra $F\in HA$, pa ako je $H\in HA$ projektivna algebra u kategoriji HA tada postoji homomorfizam algebre F na H, tj. ako je H projektivna u kategoriji HA tada je H retrakt slobodne algebre u HA. Obratno, slobodne algebre u kategoriji HA su slabo projektivne. Jer, ako je $F(S)$, $S\neq\emptyset$, slobodna Heytingova algebra, homomorfizam $h:H\longrightarrow H_1$ "na" i $f:F(S)\longrightarrow H_1$ proizvoljan morfizam u kategoriji HA, tada se funkcija $g_1:S\longrightarrow H$, definisana tako da za sve $x\in S, h(g_1(x))=f(x)$, može proširiti do morfizma $g:F(S)\rightarrow H\in HA$ tako da $h\circ g=f$.

Kako u kategoriji HA postoje epimorfizmi koji nisu "na" to slobodne algebre nisu projektivne. Jer u suprotnom, ako je $g:H\longrightarrow H_1\in HA$ epimorfizam koji nije "na", tada ako je F slobodna projektivna Heytingova algebra, $y\in H_1$ proizvoljno, tada postoji $x\in F$ i morfizam $f:F\longrightarrow H_1\in HA$ takav da $f(x)=y$. Zbog projektivnosti algebre F, postoji $h:F\longrightarrow H\in HA$ tako da $g\circ h=f$, pa dakle $g(h(x))=f(x)=y$, tj. g je homomorfizam "na", što je kontradikcija.

Obzirom na izloženo, teško je dati detaljniji opis i eventualno, konstrukciju projektivnih algebri u kategoriji HA. Potpuniji opis i konstrukciju konačnih, slabo projektivnih Heytingovih algebri dali su Balbes i Horn u [1].

Kako je već ranije napomenuto, Birkhoffov stav reprezentacije, u slučaju Heytingovih algebri, nije sasvim zadovoljavajući. Nešto operativnija reprezentacija dobija se na sledeći način (J.C.C. McKinsey, A. Tarski [2]):

Booleova algebra B je *algebra sa zatvorenjem* ako je u njoj zadat operator $^c:B\longrightarrow B$ takav da za sve $x,y\in B$. $x\leq x^c$, $x\leq y \Longrightarrow x^c\leq y^c$, $x^c=x^{cc}$, $(x\vee y)^c=x^c\vee y^c$ i $0^c=0$. Za prizvoljno $x\in B$, x je *zatvoren* ako $x=x^c$ i B^c je skup zatvorenih elemenata u algebri B. $x\in B$ je *otvoren* ako $\neg x\in B^c$, a sa B^o je označen skup otvorenih elemenata u B.

Lema 1.26 Ako je B algebra sa zatvorenjem tada je B^o Heytingova algebra obzirom na uredjenje u B, a kao ograničena distributivna mreža, B^o je podalgebra algebre B.$\dashv$

Proizvoljna Heytingova algebra H je distibutivna mreža pa u kategoriji distributivnih mreža (DM) postoji *slobodna Booleova ekstenzija* algebre $H\in DM$ (A. Nerode [1]), tj.

postoji jedinstven monomorfizam $f\colon H \longrightarrow B(H) \in DM$, gde je $B(H)$ Booleova algebra, takav da za proizvoljno $g\colon H \longrightarrow H_1 \in DM$, gde $H_1 \in BA$, postoji jedinstven morfizam $h\colon B(H) \longrightarrow H_1 \in BA$ tako da $h \circ f = g$. Jednostavno je pokazati da preslikavanje $B\colon DM \longrightarrow BA$ ima funktorska svojstva i da prezervira mono i epimorfizme.

<u>Lema 1.27</u> Neka je H Heytingova algebra i neka je $H' = \{\bar{x} \in B(H) \mid x \in H\}$, tada: za svako $a \in B(H)$, $[a)_{B(H)} \cap H'$ ima najmanji element i H' je kao ograničena distributivna mreža podalgebra od $B(H)$.

Dokaz: Neka je $a \in B(H)$, tada $\bar{a} = \bigwedge_{i=1}^{n} (\bar{x}_i \vee y_i)$ za neke $x_i, y_i \in H$. Pritom, $\bar{\ }$ je komplement u $B(H)$. Dokažimo da je $u = \overline{\bigwedge_{i=1}^{n} (x_i \underset{H}{\longrightarrow} y_i)}$ najmanji elemenat u $[a)_{B(H)} \cap H'$. Očigledno je $u \in A$. Kako $x_i \underset{H}{\longrightarrow} y_i \leq \bar{x}_i \vee y_i$ za sve $1 \leq i \leq n$, to

$$u = \overline{\bigwedge_{i=1}^{n} (x_i \quad {}_H\, y_i)} \geq \overline{\bigwedge_{i=1}^{n} (\bar{x}_i \quad y_i)} = a$$

Ako je $y \in [a)_{B(H)} \cap H'$, tada $y \geq a \Longrightarrow \bar{a} \geq \bar{y} \Longrightarrow \bar{y} \leq \bar{x}_i \vee y_i$ za sve $1 \leq i \leq n$. Otuda imamo da je $\bar{y} x_i \leq y_i$ pa $\bar{y} \leq x_i \underset{H}{\longrightarrow} y_i$ odnosno $\bar{y} \leq \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i \underset{H}{\longrightarrow} y_i) = \bar{u}$, tj. $y \geq u$. (Primetimo da je $\bar{y} \in H$.) Neposredno se proverava da je H' , kao ograničena distributivna mreža, podalgebra od $B(H)$.

<u>Teorema 1.28</u> Svaka Heytingova algebra izomorfna je algebri otvorenih elemenata neke algebre sa zatvorenjem.

Dokaz: Pokazaćemo da postoji operator zatvorenja ^{c} na $B(H)$, $H \in HA$, tako da, na osnovu prethodne leme imamo da je $B(H)^c = \{\bar{x} \in B(H) \mid x \in H\}$, pa dakle $B(H)^o \cong H$. Definišimo operator $^c\colon B(H) \longrightarrow B(H)$ tako da za svako $a \in B(H)$, a^c je najmanji elemenat u $[a)_{B(H)} \cap H'$. Jasno je da za sve $a, b \in B(H)$, $a \leq b \Longrightarrow a^c \leq b^c$ i da je $a \leq a^c$. Kako je $a^c \in H'$ to imamo $a^{cc} \leq a^c$, tj. $a^{cc} = a^c$. Obzirom na prethodnu lemu, H' je distributivna podmreža od $B(H)$ pa je za sve $a, b \in H$, $a^c \vee b^c \in H'$. Ako $d \in H'$, $d \geq a$ i $d \geq b$ tada $d \geq a^c$ i $d \geq b^c$ pa $d \geq a^c \vee b^c$. Dakle $(a \vee b)^c = a^c \vee b^c$. Jasno je da $H' = B(H)^c$. $\dashv$

U dokazu stava reprezentacije Heytingovih algebri, koji je ovde izložen, nije objašnjeno zašto se za svako $a \in B(H)$ $\bar{a}$ može pretstaviti na način kako je to učinjeno u dokazu leme 1.27. To bi zahtevalo podrobnije objašnjenje konstrukcije algebre B(H) u kojoj se H, kao distributivna mreža, javlja kao presek jednog prostog neglavnog filtra i prostog neglavnog ideala. Ta je konstrukcija potpuno izvedena u magistarskom radu Ž. Mijajlovića [1].

Obzirom na njihov značaj u intuicionističkoj matematici, zanimljiva je analiza Heytingovih algebri intuicionistički dopuštenim sredstvima. Jedna takva analiza pokazuje da čitav niz koncepata u teoriji Heytingovih algebri dopušta intuicionistički preizraz. Koristeći koncept adjunkcije,(D.S. Scott i M.P. Fourman [1]) u konstrukcijama podalgebre, homomorfne slike, količnika itd, dobijaju se kanonski pretstavnici odgovarajućih klasa ekvivalencije čime se izbegava upotreba aksiome izbora, što čitavu konstrukciju čini intuicionistički prihvatljivom.

Zanimljivo je da se u ovakvom pristupu mogu definisati i Kripkeovi modeli. Naime, za proizvoljan neprazan skup X, familija $K \subseteq P(X)$ zatvorena za proizvoljne unije i preseke (po dogovoru je $\bigcap \emptyset = X$) je Kripke model (K je kompletna Heytingova algebra).

Za zadatu familiju K, na skupu X se može definisati forsing relacija tako da

(*) $\forall i,j \in X.\quad j \Vdash i$ akko $\forall p \in K (i \in p \Rightarrow j \in p)$.

Takodje, polazeći od proizvoljne refleksivne i tranzitivne relacije $\Vdash$ na X, može se odrediti odgovarajuća familija K P(X),

$$K = \{p \subseteq X \mid \forall i \in p\, \forall j \in X.\ j \Vdash i \Rightarrow j \in p\}.$$

Na tako dobijenoj familiji, forsing relacija definisana sa (*) je upravo relacija $\Vdash$. Tj. postoji obostrano jednoznačna korespondencija izmedju refleksivnih i tranzitivnih relacija skupa X i Kripkeovih modela na X.

Obzirom na topologije, intuicionistički postoje kompletne Heytingove algebre, ali, čak i konačne distributivne mreže nisu kompletne u intuicionističkom smislu. Jer, naprimer, algebra 2 je kompletna (intuicionistički) akko u logici važi slabi zakon isključenja trćeg, tj. za svaki iskaz φ, $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$, što je intuicionistički neprihvatljivo.

Problem je u tome što za proizvoljan skup X, partitivni skup P(X) intuicionistički nema uobičajeni smisao. Da se on opiše potrebno je znati šta intuicionistički pretstavlja P(1), jer, za svaki (matematički) iskaz p, skup $\{x \mid x=0 \wedge p\} \subseteq 1$ i pritom je $\{x \mid x=0 \wedge p\} = \{x \mid x=0 \wedge q\}$ akko $p \leftrightarrow q$, tj. P(1) je izomorfno Lindenbaumovoj algebri intuicionističkog iskaznog računa.

Algebra P(1) je inicijalni objekat u kategoriji kompletnih Heytingovih algebri tj. intuicionistički, može se utopiti u proizvoljnu kompletnu Heytingovu algebru (netrivijalnu tj. u kojoj $0 \neq 1$). Algebra P(1) nema pravih količnika, tj. algebra R(P(1)) je netrivijalna akko P(1) je Booleova algebra, tj. akko je logika klasična.

Obzirom da su konstrukcije proizvoda izvodljive intuicionističkim sredstvima, P(X) se može identifikovati sa proizvodom $P(1)^X$, tj. moguće je govoriti o topologijama, Kripkeovim modelima itd. na proizvoljnom skupu X.

Svakako najbolji način na koji klasični matematičar može da govori o intuicionističkoj matematici (teoriji skupova npr.) je njeno razmatranje u okviru teorije toposa. Inspirisani rezultatima Grothendieckove škole algebarske geometrije, Lawvere [1], Freyd [1], formulisali su početkom sedamdesetih godina jednostavan skup aksioma teorije toposa u okviru teorije kategorija u kojoj se, u opštem slučaju, kao unutrašnja logika toposa javlja intuicionistička logika.

<u>Definicija 1.29</u> Kategorija $\mathcal{C}$ je *topos* ako

(i) $\mathcal{C}$ sadrži terminalni objekat, tj. objekat 1 takav da za svako $A \in \mathcal{C}$ postoji jedinstven morfizam $A \longrightarrow 1 \in \mathcal{C}$,

(ii) $\mathcal{C}$ je zatvorena za fibrirane proizvode (pullbackove) tj. svaki dijagram $A \xrightarrow{g} C \xleftarrow{h} B \in \mathcal{C}$ se u kategoriji $\mathcal{C}$ može na jedinstven način dopuniti do dijagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_A} & A \\ {\scriptstyle p_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \xrightarrow{h} & C, \end{array}$$

jedinstvenog u smislu da za svaki dijagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{x_A} & A \\ {\scriptstyle x_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

u kategoriji $\mathcal{C}$, postoji jedinstveni morfizam $X \longrightarrow P \in \mathcal{C}$ takav da

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr] \arrow[drr, "x_A"] \arrow[ddr, "x_B"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, "p_B"] & A \\ & B & \end{tikzcd}$$

komutira,

(iii) Za svako $A \in \mathcal{C}$ postoji $PA \in \mathcal{C}$ (partitivni objekat objekta $A \in \mathcal{C}$) i relacija pripadnosti $\in \rightarrowtail A \times PA$ (dakle, monomorfizam u kategoriji $\mathcal{C}$) tako da za svaku relaciju $R \rightarrowtail A \times B \in \mathcal{C}$, postoji jedinstveni morfizam $R^{\downarrow} : B \longrightarrow PA$ takav da je dijagram

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, dash] \arrow[d] & A \times B \arrow[d, "A \times R^{\downarrow}"] \\ \in \arrow[r, tail] & A \times PA \end{tikzcd}$$

pullback u kategoriji .

U kategoriji skupova i funkcija (ma kakvoj, klasičnoj ili intuicionističkoj), PA je upravo partitivni skup od A, relacija $\in = \{(a,X) \mid a \in X,\ X \subseteq A\}$ upravo relacija pripadnosti, a morfizam $R^{\downarrow}$ funkcija definisana tako da $\forall b \in B.\ R^{\downarrow}(b) = \{a \in A \mid aRb\}$.

Medjutim, kategorija skupova i funkcija nije jedini topos jer, naprimer, kategorija $\mathrm{SKUP}^{\mathcal{C}}$ pramenova proizvoljne "male" kategorije $\mathcal{C}$ je topos (Freyd, P.[1]).

U proizvoljnom toposu na objektu $P(1)$ jedinstveno su odredjene operacije $\wedge : P(1) \times P(1) \longrightarrow P(1)$, $\vee : P(1) \times P(1) \longrightarrow P(1)$, $\rightarrow : P(1) \times P(1) \longrightarrow P(1)$, $\perp : 1 \longrightarrow P(1)$ i $\top : 1 \longrightarrow P(1)$, koje u opštem slučaju imaju osobine intuicionističke logike, tj. objekat $P(1)$ je (kompletna) Heytingova algebra.

Izborom kategorije $\mathcal{C}$, odredjena je unutrašnja logika toposa $\mathrm{SKUP}^{\mathcal{C}}$, što daje veoma zanimljivu i univerzalnu forsing konstrukciju (Freyd, P.[2]). Naprimer, $\mathcal{C}$ može biti kategorija otvorenih skupova OX topološkog prostora X, ili parcijalno uredjenje ili monoid ili...

02. O kompletnim Heytingovim algebrama

Već je napomenuto (Teorema 1.25) da u kategoriji Heytingovih algebri nema dovoljno injektivnih objekata. Postoji Heytingova algebra H koja se ne može utopiti u kompletnu Booleovu algebru B, tako da se svaki morfizam $H \longrightarrow B_1$, $B_1 \in BA$, može faktorisati preko tog utapanja, tj. postoje Heytingove algebre ko je nemaju aproksimaciju (refleksiju) u kategoriji KBA.

U sledećem odeljku je pokazano da je taj problem u tesnoj vezi sa prirodom algebre kongruencija proizvoljne komplet ne Heytingove algebre.

Za svaku kompletnu Heytingovu algebru H, algebra kongruencija JH je takodje kompletna Heytingova algebra u koju se po lazna algebra može utopiti (MacNab [1]). Koristeći reprezentacije J-operatora (Simmons [1]), u teoremi 2.17 pokazano je da pridruživanje $H \longrightarrow JH$ ima funktorski karakter i da postoji prirodna transformacija jediničnog funktora I_{KHA} kategorije kompletnih Heytingovih algebri na funktor $J: KHA \longrightarrow KHA$.

Ponavljanjem konstrukcije JH, polazeći od proizvoljne kompletne Heytingove algebre H, dobija se niz $J^{\alpha}H$, $\alpha \in Ord$, kompletnih Heytingovih algebri i utapanja. Ukoliko se u tom nizu pojavi kompletna Booleova algebra $B=J^{\alpha_0}H$, za neko $\alpha_0 \in Ord$, tada je B upravo refleksija kompletne Heytingove algebre H (Teorema 2.46)

U teoremi 2.41 konstruisana je kompletna Heytingova alge bra koja nema refleksiju u kategoriji kompletnih Booleovih algebri.

Formulacija kompletnih Heytingovih algebri u jeziku sa jednom infinitarnom operacijom omogućila je da se na jednostavan način naglasi analogija ovih algebri i familija otvorenih skupova topoloških prostora. Time je dobijen niz algebarskih reformulacija čisto topoloških koncepata (Isbell [1], Dowker i

Strauss [1] i Papert [1]).

U teoremi 2.53 data je formulacija Cantor-Bendixsonovog izvoda u kompletnoj Heytingovoj algebri, a u teoremi 2.56 (i njenim posledicama) je pokazano da u slučaju T_0-prostora, ova formulacija u potpunosti odgovara topološkoj.

2. *Kompletne Heytingove algebre*

Koncept kompletnih Heytingovih algebri je veoma značajan u različitim matematičkim kontekstima. Posebno u izučavanju svojstava topoloških prostora jer, familija otvorenih skupova topološkog prostora je kompletna Heytingova algebra i njena algebarska struktura karakteriše svojstva odgovarajućeg prostora i obratno. Time je motivisana reformulacija definicija datih u prvom odeljku, tj. kompletne Heytingove algebre se tretiraju kao strukture sa jednom binarnom $\wedge$, jednom infinitarnom operacijom $\bigvee$ i konstantom 1. Pritom, kompletna Heytingova algebra je stuktura iste vrste kao i Heytingova algebra u smislu u kojem je tretirana u prethodnom odeljku, ali ne i struktura istog tipa. Važno je napomenuti da je klasa kompletnih Heytingovih algebri (u oznaci KHA) jednačinska, ali u nešto širem smislu, obzirom na infinitarnu operaciju, tj. klasa KHA ima sva svojstva jednačinskih klasa istaknuta u prethodnim razmatranjima.

Struktura $H=\langle H,\wedge,\bigvee,1\rangle$ je kompletna Heytingova algebra akko $\langle H,\leq\rangle$ je kompletna mreža i pritom

$$\forall x\in H.\ x\wedge\bigvee_{i\in J} y_i = \bigvee_{i\in J}(x\wedge y_i)$$

za proizvoljnu familiju $\{y_i \mid i\in J\}\subseteq H$. Uredjenje u H je dato na uobičajeni način, tj. $\forall x,y\in H.\ x\leq y \Leftrightarrow x\wedge y=x$. Preko operacija $\wedge$, $\bigvee$ i 1, kao primitivnih, mogu se sasvim jednostavno definisati i sve ostale operacije Heytingovih algebri.

Morfizam kompletnih Heytingovih algebri je preslikavanje $f:H_1\longrightarrow H_2$ takvo da: $f(1)=1, \forall x,y\in H.\ f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$ i za proizvoljnu familiju $\{y_i \mid i\in J\}\subseteq H_1$, $f(\bigvee_{i\in J} y_i)=\bigvee f(y_i)$. Kao i u prethodnim razmatranjima, operacije u različitim kompletnim Heytingovim algebrama označene su na isti način ali, uvek je jasno u kojoj se algebri izračunavanje vrši.

Na primer, u proizvoljnom topološkom prostoru X, algebra otvorenih skupova OX je kompletna Heytingova algebra i za svaku neprekidnu funkciju $f:Y\longrightarrow X$ jedinstveno je odredjen homomorfizam $Of:OX\longrightarrow OY$ odgovarajućih kompletnih Heytingovih algebri tako da:

$$\forall x\in OX.\ Of(x)=\{t\in Y \mid f(t)\in x\}.$$

Time je definisan kontravarijantni funktor kategorije topoloških prostora i neprekidnih funkcija kao morfizama, u oznaci TOP, i kategorije kompletnih Heytingovih algebri i homomorfizama, u oznaci KHA.

<u>Problem 2.1</u> Neka je $f:OX\longrightarrow OY$ morfizam u kategoriji kompletnih Heytingovih algebri, X,Y topološki prostori. Da li postoji neprekidna funkcija $g:Y\longrightarrow X$ takva da $f=Og$, odnosno, da li je svaki morfizam algebri OX, OY oblika Og? Problem je rešen u sledećem odeljku.

Često će biti pogodno posmatrati kategoriju dualnu, u strogom smislu, kategoriji kompletnih Heytingovih algebri, u oznaci KHA^{op}. Objekti kategorije KHA^{op} su kompletne Heytingove algebre, a morfizmi su definisani na sledeći način:

<u>Definicija 2.2</u> Za svaki morfizam u kategoriji KHA, $f:H_1\longrightarrow H_2\in KHA$, jedinstveno je odredjen morfizam $f^{op}:H_2\longrightarrow H_1$ u kategoriji KHA^{op} tako da

$$\forall y\in H_2.\ f^{op}(y)=\bigvee\{x\in H_1 \mid f(x)\le y\}.$$

Kako je $f:H_1\longrightarrow H_2$ homomorfizam kompletnih Heytingovih algebri to $\forall y\in H_2.\ f\circ f^{op}(y)=\bigvee\{f(x)\mid f(x)\le y\}\le y$, odnosno, $f^{op}(y)=\max\{x\mid f(x)\le y\}$. Ako $f(x)\le y$ tada $x\le f^{op}(y)$ i takodje, ako $x\le f^{op}(y)$ tada $f(x)\le f\circ f^{op}(y)$, tj. imamo sledeću relaciju adjunkcije

$$\forall x\in H_1\ \forall y\in H_2.\ f(x)\le y \Longleftrightarrow x\le f^{op}(y).$$

Primetimo da je $f(x)=\bigwedge\{y\in H_2 \mid f(x)\le y\}$, pa, zbog adjunkcije, imamo

$$\forall x\in H_1.\ f(x)=\bigwedge\{y\in H_2 \mid x\le f^{op}(y)\}.$$

Na taj način, definicijom 2.2, za proizvoljni morfizam $f:H_1 \longrightarrow H_2 \in KHA$, jedinstveno je odredjen dualni morfizam $f^{op}:H_2 \longrightarrow H_1$ u kategoriji KHA^{op}, i obratno, sa $f^{op} \in KHA^{op}$ jedinstveno je odredjen, takodje dualni, morfizam $f \in KHA$, tj. postoji obostrano jednoznačna korespondencija izmedju morfizama kategorija KHA i KHA^{op}. Sasvim strogo, to neposredno sledi iz sledeće dve leme:

<u>Lema 2.3</u> Morfizam $f^{op}:H_2 \longrightarrow H_1 \in KHA^{op}$ ima sledeća svojstva:

(i) $f^{op}(\bigwedge_{i\in I} x_i) = \bigwedge_{i\in I} f^{op}(x_i)$ za proizvoljnu familiju $\{x_i \mid i\in I\} \subseteq H_2$,

(ii) $\forall y \in H_2.\ y \neq 1 \Longrightarrow f^{op}(x) \neq 1$,

(iii) $\forall x \in H_1\ \forall y \in H_2.\ x \rightarrow f^{op}(y) \leq f^{op}(f(x) \rightarrow y)$.

Dokaz: Svakako, implikacija $\rightarrow$ je i u kompletnim Heytingovim algebrama definisana relacijom adjunkcije, tj.

$$\forall x,y,z \in H.\quad x \wedge z \leq y \Longleftrightarrow z \leq x \rightarrow y,$$

za proizvoljno $H \in KHA$ i pritom su sva "logička" svojstva implikacije, tj. sva svojstva koja ima u Heytingovim algebrama, okarakterisana ovom relacijom.

Za proizvoljne $x \in H_1$, $y \in H_2$ neka je $x \rightarrow f^{op}(y) = z$, tada $x \wedge z \leq f^{op}(y)$, pa kako je f morfizam u kategoriji KHA imamo da je $f(x) \wedge f(z) = f(x \wedge z) \leq y$, tj. $f(z) \leq f(x) \rightarrow y$. Otuda je $z \leq f^{op}(f(x) \rightarrow y)$ i konačno $x \rightarrow f^{op}(y) \leq f^{op}(f(x) \rightarrow y)$. Svojstva (i) i (ii) se neposredno proveravaju. $\dashv$

<u>Lema 2.3</u> Za proizvoljni morfizam $f^{op}:H_2 \longrightarrow H_1 \in KHA^{op}$ preslikavanje $f:H_1 \longrightarrow H_2$ definisano tako da

$$\forall x \in H_1.\ f(x) = \bigwedge \{y \in H_2 \mid x \leq f^{op}(y)\}$$

ima sledeće osobine:

(i) $f(\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I} f(x_i)$ za proizvoljnu familiju $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq H_1$,

(ii) $f(1)=1$,

(iii) $\forall x,y \in H_1.\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

Dokaz: Osobine (i) i (ii) se direktno proveravaju. Neka je $x,y \in H_1$ i $z=f(x\wedge y)$ tada $x \wedge y \leq f^{op}(z)$ pa $y \leq x \rightarrow f^{op}(z)$ $\leq$ (zbog 2.3) $\leq f^{op}(f(x) \rightarrow z)$, tj. $f(y) \leq f(x) \rightarrow z$. Konačno,

$f(x)\wedge f(y)\leq f(x\wedge y)$ tj. osobina (iii) je dokazana.

Sasvim prirodno, izučavanje homomorfizama kompletnih Heytingovih algebri vodi razmatranju *kongruencuja* u ovim strukturama. Stoga imamo sledeću definiciju:

Definicija 2.5 Kongruencija u kompletnoj Heytingovoj algebri H je relacija ekvivalencije R na H takva da:

(i) $\forall x_1,x_2,y_1,y_2\in H.\ x_1Ry_2$ i $x_2Ry_2 \Longrightarrow x_1x_2Ry_1y_2$

(ii) za proizvoljne familije $\{x_i \mid i\in I\},\{y_i\mid i\in I\}$ elemenata algebre H

$$(\forall i\in I.\ x_iRy_i) \Longrightarrow \bigvee_{i\in I} x_i\ R\ \bigvee_{i\in I} y_i.$$

Ako je zadata kongruencija R u kompletnoj Heytingovoj algebri H, tada,na uobičajeni način,se konstruiše količnička struktura H/R čiji su elementi klase ekvivalencije $a_R=\{x\in H\mid xRa\}$, $a\in H$, relacije R i dobijena struktura jeste kompletna Heytingova algebra, a odgovarajući kanonski homomorfizam je homomorfizam kompletnih Heytingovih algebri.

Medjutim, H je kompletna Heytingova algebra pa za svako $a\in H$ postoji $\bigvee a_R\in H$. Stoga, za svako $a\in H$, neka je $j(a)=\bigvee a_R$. Očigledno, $\forall a,b\in H.\ aRj(a)$ i $aRb \Longrightarrow j(a)=j(b)$. Tako definisana funkcija $j:H\longrightarrow H$ može poslužiti u izučavanju i razmatranju svojstava kongruencija i morfizama algebre H.

Definicija 2.6 *J-operator* kompletne Heytingove algebre H je funkcija $j:H\longrightarrow H$ takva da:

(i) $\forall x\in H.\ x\leq j(x)$

(ii) $\forall x\in H.\ j^2(x)=j(x)$

(iii) $\forall x,y\in H.\ j(x\wedge y)=j(x)\wedge j(y)$.

Lema 2.7 Ako je $j:H\longrightarrow H$ J-operator kompletne Heytingove algebre H, tada postoji jedinstvena kongruencija R_j u H takva da:

$$\forall x,y\in H.\ x\wedge yR_jy \Longleftrightarrow y\leq j(x)$$

i obratno, za svaku kongruenciju R u H, jedinstveno je odredjen J-operator j_R koji zadovoljava navedenu relaciju.

Dokaz: Za zadato $j:H\longrightarrow H$ definišemo R_j tako da za proizvoljne $x,y \in H$, $xR_j y \Longleftrightarrow j(x)=j(y)$. Obratno, za zadato R, definišimo $j_R : H \longrightarrow H$ tako da $\forall x \in H.\ j_R(x) = \bigvee x_R$. Na osnovu relacije koja je u lemi pretpostavljena, jednostavno se proverava da R_j zaista jeste kongruencija u algebri H i da je j_R J-operator u H, a jedinstvenost sledi iz činjenice da $R_{j_R} = R$ i $j_{R_j} = j$. ⊣

Primer 2.8 Za svaki morfizam $f : H \longrightarrow H_1 \in KHA$, preslikavanje $j : H \longrightarrow H$ definisano sa

$$\forall x \in H.\ j(x) = \bigvee \{y \in H \mid f(y) \leq f(x)\}$$

(ima osobinu da za sve $x,y \in H.\ f(y) \leq f(x) \Longleftrightarrow y \leq j(x)$) je J-operator kompletne Heytingove algebre H (jezgro homomorfizma $f : H \longrightarrow H_1 \in KHA$).

Važnu ulogu u daljim razmatranjima imaju sledeći J-operatori:

$$\forall x \in H.\ j_a(x) = a \vee x, \quad j^a(x) = a \rightarrow x \ \text{ i } \ b_a(x) = (x \rightarrow a) \rightarrow a.$$

Ako je H algebra otvorenih skupova prostora X, tj. $H = OX$ za neko $X \in TOP$, tada količnik H_{j_a}, $a \in OX$ (odnosno količnik H/R_{j_a}), odgovara algebri otvorenih akupova topologije na zatvorenom skupu $\bar{a}$, indukovane topologijom OX. Odgovarajuća kongruencija data je sa:

$$\forall x,y \in OX.\ xR_{j_a} y \Longleftrightarrow x \vee a = y \vee a.$$

Pritom, $a_R = 0 \in H_{j_a}$.

Količnik $H_j a$ $(H/R_j a)$ odgovara topologiji na otvorenom skupu $a \in H$, indukovanoj topologijom OX i odgovarajuća kongruencija je:

$$\forall x,y \in H.\ xR_j a y \Longleftrightarrow x \wedge a = y \wedge a.$$

Pritom, $a_R = 1 \in H_j a$.

Slično, operator b_a, $a \in H$, definiše kongruenciju R_{b_a} u algebri H tako da $\forall x,y \in H.\ xR_{b_a} y \Longleftrightarrow x \rightarrow a = y \rightarrow a$. Pritom, za $a=0$, $b_0 = R$, tj. H_{b_0} je izomorfna algebri regularnih elemenata RH, algebre H.

Ako je kompletna Heytingova algebra H oblika OX, gde je $X \in TOP$, tada proizvoljno $S \subseteq X$ odredjuje J-operator algebre H jer, $\forall x \in OX.\ j_S(x)=int(S \cup x)$, jeste J-operator u algebri H (=OX) (standardni J-operator). Pritom, Ako $S=a \in OX$, tj. S je otvoren skup, tada $j_S=j_a$, a ako je $\bar{S}=a \in OX$ tada $j_S=j^a$. Jezgro homomorfizma $Of:OX \longrightarrow OY$, odredjenog neprekidnom funkcijom $f:Y \longrightarrow X \in TOP$, je standardni J-operator j_S, $S=X \setminus f[Y]$.

U prethodnim primerima, umesto količnika H/R_j stoji prosto H_j. Pritom, $H_j=\{x \in H \mid j(x)=x\}$ je skup predstavnika kl asa ekvivalencije kongruencije R_j koja odgovara operatoru j. Skup H_j je parcijalno uredjen (jer, $H_j \subseteq H$) i jednostavno se proverava da je H_j kompletna Heytingova algebra. Pritom, sup remum $\bigvee_j S$ u algebri H_j, $S \subseteq H_j$, računamo sa $\bigvee_j S=j(\bigvee S)$, pa iako je $H_j \subseteq H$, H_j nije podalgebra algebre H. Jednostavno se proverava da je preslikavanje $H \longrightarrow H_j$ definisano sa $x \longmapsto j(x)$, za svaki $x \in H$, homomorfizam kompletnih Heytingovih algebri sa jezgrom j, tj. imamo uobičajenu lemu:

Lema 2.9 Za svaki homomorfizam $f:H \longrightarrow H_1 \in KHA$ postoji jedinstven monomorfizam $h:H_j \longrightarrow H_1$, gde je j jezgro homomo rfizma f, takav da $j \circ h=f$.

Neka je JH skup svih J-operatora kompletne Heytingo ve algebre H. U JH se na prirodan način može definisati str- uktura kompletne Heytingove algebre (M. Fourman, D.S.Scott [1]). Obzirom na niz veoma zanimljivih svojstava ove strukt- ure, koja će u ovom radu do detalja biti ispitana, potrebno je dati njen potpuniji opis. On će, pre svega, omogućiti da se pokaže da je konstrukcija algebre JH funktorskog karaktera, tj. pridruživanje $J:KHA \longrightarrow KHA$ je funktor i pritom, posto ji prirodna transformacija $t:I_{KHA} \longrightarrow J$ jediničnog funktora ka tegorije KHA na funktor J. Sledeća lema karakteriše J-operatore i koristiće se u opisu strukture algebre JH, $H \in KHA$.

Lema 2.10 Preslikavanje $j:H \longrightarrow H$, je J-operator kompletne Heytingove algebre H akko

$$\forall x,y \in H.\ j(x) \rightarrow j(y)=x \rightarrow j(y).$$

Dokaz: Neka je $j \in JH$. Kako $\forall x \in H.\ x \leq j(x)$ to za sva ko $y \in H$, $j(x) \rightarrow j(y) \leq x \rightarrow j(y)$. Obzirom da $\forall x,y \in H.\ x(x \rightarrow y) \leq y$

i da je $j \in JH$, imamo da je $j(x) \wedge j(x \to y) \leq j(y)$ odnosno $j(x \to y) \leq j(x) \to j(y)$. Otuda $x \to j(y) \leq j(x \to j(y)) \leq j(x) \to jj(y) = j(x) \to j(y)$.

Obratno, neka $\forall x,y \in H.\ j(x) \to j(y) = x \to j(y)$ tada imamo $x \to j(x) = j(x) \to j(x) = 1$, tj. $x \leq j(x)$. Za $x = j(y)$ u navedenoj relaciji se dobija $jj(y) \to j(y) = 1$, tj. $\forall y \in H.\ j^2(y) = j(y)$. Neka $x \leq y$ tada $x \leq y \leq j(y)$ pa $x \to j(y) = 1$, tj. $j(x) \to j(y) = 1$ odnosno $j(x) \leq j(y)$. Dakle preslikavanje $j : H \to H$ je monotono pa imamo da je $j(x \wedge y) = j(x) \wedge j(y)$. Obzirom da $\forall x,y \in H.\ x \wedge y \leq j(x \wedge y)$ to je $x \leq y \to j(x \wedge y)$ pa $x \leq j(y) \to j(x \wedge y)$, tj. $x \wedge j(y) \leq j(x\ y)$. Istu proceduru ponovimo sa x i dobijamo konačno da za proizvoljne $x,y \in H.\ j(x) \wedge j(y) \leq j(x \wedge y)$.

Za proizvoljnu kompletnu Heytingovu algebru H, u skupu J-operatora jednostavno se definiše parcijalno uredjenje tako da za sve $j,k \in JH.\ j \leq k \iff \forall x \in H.\ j(x) \leq k(x)$. Tako definisano uredjenje ima najmanji $(\forall x \in H.\ 0(x) = x)$ i najveći $(\forall x \in H.\ 1(x) = 1)$ elemenat. Osim toga, JH je kompletna mreža jer za proizvoljno $S \subseteq JH$ postoji infimum skupa S u JH.$\dashv$

Lema 2.11 Za svaki $S \subseteq JH$, H kompletna Heytingova algebra, preslikavanje $\bigwedge S : H \to H$ definisano tako da

$$\forall x \in H.\ (\bigwedge S)(x) = \bigwedge\{j(x) \mid j \in S\}$$

je J-operator kompletne Heytingove algebre H.

Dokaz: Neka je $k = \bigwedge S$. Jasno je da za svako $x \in H$ obzirom na definiciju imamo $x \leq k(x)$. Obzirom na prethodnu lemu dovoljno je pokazati da $\forall x,y \in H.\ x \to k(y) \leq k(x) \to k(y)$. Za zadate $x,y \in H$ neka je $x \to k(y) = a$. Tada, za svako $j \in S$ imamo da je $a \wedge x \leq k(y) \leq j(y)$ pa dakle $a \wedge j(x) \leq j(a) \wedge j(x) \leq j^2(y) = j(y)$. Otuda redom, $a \wedge k(x) = \bigwedge\{a \wedge j(x) \mid j \in S\} \leq \bigwedge\{j(y) \mid j \in S\} = k(y)$.$\dashv$

Na osnovu upravo izložene leme, za svako $S \subseteq JH$, $\bigwedge S$ je infimum skupa S u mreži JH, pa je dakle JH kompletna mreža. Formalno, infinitarna disjunkcija u JH može se zadati sa $\bigvee S = \bigwedge\{k \in JH \mid \forall j \in S.\ j \leq k\}$, odnosno za svako $x \in H.\ (\bigvee S)(x) = \bigwedge\{y \mid x \leq y \text{ i } \forall j \in S.\ j(y) = y\}$, tj. $(\bigvee S)(x)$ je najmanja fiksna tačka svih operatora u skupu S koja je veća od $x \in H$. Medjutim, izračunavanje disjunkcije u mreži JH je u opštem slučaju prilično komplikovano. U odredjenom broju slučajeva računa se kao kompozicija tj. važi (Simmons[1])

Lema 2.12 Neka su j,k J-operatori kompletne Heytingove algebre H takvi da $\forall x \in H.\ j\circ k(x) \leq k\circ j(x)$ tada $j \vee k = k\circ j$.

Dokaz: Neka je $f=k\circ j$. Trivijalno, $\forall x,y \in H.\ x \leq f(x)$ i $f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$. Osim toga, kako $\forall x \in H.\ j\circ k(x) \leq f(x)$ to $jkj(x) \leq fj(x)=f(x)$ pa $f^2=kjkj \leq kf=f$, tj. f je J-operator algebre H. Jasno da je $j \leq f$ i $k \leq f$, tj. $j\vee k \leq f$. Neka je $g=j\vee k$ tako da $j \leq g$ pa dakle, $f=kj \leq kg \leq g^2=g$, tj. $f=j\vee k$.⊣

Otuda, na primer, za proizvoljne $a,b \in H$, H kompletna Heytingova algebra, imamo redom sledeće jednakosti:

$$j_a \vee j = j\circ j_a,\quad j\vee j^a = j^a\circ j,\quad j_a \vee j \vee j^b = j^b\circ j\circ j_a.$$

Posledica 2.13 $\forall a \in H,\ H \in KHA,\ j_a \wedge j^a = 0$ i $j_a \vee j^a = 1$, tj. j_a i j^a su komplementarni u H.

Da bi se pokazalo da je JH, $H \in KHA$, zaista kompletna Heytingova algebra potrebno je definisati implikaciju u algebri JH. Pritom, koristiće se osobine J-operatora b_a, $a \in H$, definisanog u primeru 2.8 jer, on omogućava da se proizvoljni J-operator predstavi na sledeći način: (Simmons[1])

Lema 2.14 Ako je $H \in KHA$ tada za svako $j \in JH$

$$j=\bigwedge\{b_a \mid a \in H_j\}.$$

Dokaz: Obzirom na lemu 2.10, $\forall x \in H.\ j(x)=b_a(x)$, gde je $a=j(x) \in H_j$, $j \in JH$. Kako $\forall a \in H_j.\ a=j(a)$ to redom za svako $x \in H$, $j(x) \leq (j(x)\rightarrow j(a))\rightarrow j(a)=(x\rightarrow j(a))\rightarrow j(a)=x\rightarrow a\rightarrow a=b_a(x)$ pa je $j(x)$ najmanji elemenat u $\{b_a(x) \mid a \in H_j\}$. Otuda imamo da je $j=\bigwedge\{b_a \mid a \in H_j\}$.⊣

Ako "implikaciju" u algebri JH, $H \in KHA$, definišemo tako da za proizvoljne $j,k \in JH.\ j \xrightarrow{..} k: H \rightarrow H$ i pritom, $\forall x \in H.\ (j \xrightarrow{..} k)(x)=j(x)\rightarrow k(x)$, tada dobijeno preslikavanje ima sledeće osobine:

(i) $\forall x \in H.\ x \leq (j \xrightarrow{..} k)(x)$. Jer, $\forall x \in H.\ (j \xrightarrow{..} k)(x) = j(x)\rightarrow k(x) \geq k(x) \geq x$.

(ii) $\forall x \in H.\ (j \xrightarrow{\cdot\cdot} k)(j \xrightarrow{\cdot\cdot} k)(x) = (j \xrightarrow{\cdot\cdot} k)(x)$. Jer, redom se dobija:

$$\begin{aligned}(j \xrightarrow{\cdot\cdot} k)^2(x) &= j(j(x) \to k(x)) \to k(j(x) \to k(x)) \\ &\leq j(j(x) \to k(x)) \to (k\ j(x) \to k(x)) \\ &\leq j(j(x) \to k(x)) \to (j(x) \to k(x)) \\ &= (j(j(x) \to k(x)) \wedge j(x)) \to k(x) \\ &= j(x) \to k(x) \\ &= (j \xrightarrow{\cdot\cdot} k)(x)\end{aligned}$$

pa je, obzirom na (i), $(j \xrightarrow{\cdot\cdot} k) = (j \xrightarrow{\cdot\cdot} k)^2$ za sve $j, k \in JH$.

Medjutim, $j \xrightarrow{\cdot\cdot} k : H \longrightarrow H$ nije obavezno J-operator kompletne Heytingove algebre H, tj. $j \xrightarrow{\cdot\cdot} k$ u opštem slučaju, ne prolazi kroz konjunkciju. Ipak, u algebri JH, $H \in KHA$, postoji najveći J-operator $j \to k$ takav da

$$\forall x \in H.\ (j \to k)(x) \leq (j \xrightarrow{\cdot\cdot} k)(x),$$

jer važi sledeća (MacNab[1])

<u>Lema 2.16</u> Neka je $f: H \longrightarrow H$ preslikavanje kompletne Heytingove algebre H, takvo da $\forall x \in H.\ x \leq f(x)$ i $f^2 = f$. Tada postoji najveći J-operator f^* takav da $\forall x \in H.\ f^*(x) \leq f(x)$.

Dokaz: Neka je $f^* = \bigwedge\{b_a \mid a \in f[H]\}$ i $\forall x \in H$ neka je $a = f(x) \in f[H]$. Tada $f^*(f(x)) \leq b_a \circ f(x)$, tj. $f^* \circ f \leq f$. Kako je $f^* \in JH$ to $\forall x \in H.\ f(x) \leq f^* f(x)$ pa $f \leq f^* \circ f$. Otuda $f^* \circ f = f$. Kako $\forall x \in H.\ x \leq f(x)$ to imamo da je $f^*(x) \leq f^* \circ f(x)$, pa dakle, $f^*(x) \leq f(x)$ za sve $x \in H$, tj. $f^* \leq f$.

Ako je $f_1 \in JH$ i $f_1 \leq f$ tada $\forall a \in f[H].\ f_1(a) \leq f(a) = a$, tj. $f_1(a) = a$, pa dakle $a \in H_{f_1}$. Otuda, na osnovu leme 2.15, se dobija da je $f_1 \leq f^*$. $\dashv$

Neka je $(j \to k)$ najveći J-operator kompletne Heytingove algebre H takav da za sve $x \in H$, $(j \to k)(x) \leq (j \xrightarrow{\cdot\cdot} k)(x)$. Obzirom na prethodnu lemu takav operator postoji, tj. $(j \to k) = (j \xrightarrow{\cdot\cdot} k)^*$.

<u>Teorema 2.17</u> Za proizvoljnu kompletnu Heytingovu algebru H redom važi:

(i) JH je kompletna Heytingova algebra,

(ii) preslikavanje $t_H : H \longrightarrow JH$, definisano tako da za svako $a \in H$, $t_H(a) = j_a$ je monomorfizam

(iii) $J : KHA \to KHA$ je funktor u kategoriji KHA.

Dokaz: (i) Obzirom na lemu 2.11, za proizvoljnu kompletnu Heytingovu algebru H, algebra JH je kompletna mreža, a operacija $\longrightarrow$ je implikacija u JH jer, za sve $j,k \in$ JH, imamo $j \wedge (j \to k) \leq j \wedge (j \overset{..}{\longrightarrow} k) \leq j \wedge k \leq k$, pa ako je $j \in$ JH, $j \wedge g \leq k$ tada $g \leq j \overset{..}{\longrightarrow} k \leq j \to k$. Mreža JH je distributivna jer, za proizvoljno $S \subseteq$ JH, $j \in$ JH imamo: $\forall s \in S.\ j \wedge s \leq \bigvee\{j \wedge s \mid s \in S\}$ što je ekvivalentno sa $s \leq j \to \bigvee\{j \wedge s \mid s \in S\}$, tj. $\bigvee S \leq j \to \bigvee\{j \wedge s \mid s \in S\}$ pa dakle $j \wedge \bigvee S \leq \bigvee\{j \wedge s \mid s \in S\}$.

(ii) Primetimo da za sve $a,b \in H$ i svako $S \subseteq H$ imamo $j_a \wedge j_b = j_{a \wedge b}$ i $\bigvee\{j_s \mid s \in S\} = j_{\bigvee S}$; otuda $t_H : H \to JH$ je homomorfizam kompletnih Heytingovih algebri i zbog, $j_a = j_b \Longleftrightarrow \forall x \in H.\ a \vee x = b \vee x \Longleftrightarrow a = b$, $t_H : H \longrightarrow JH$ je monomorfizam.

Primetimo da je preslikavanje t_H epimorfizam jer, za svako $H \in$ KHA i $f,g : JH \longrightarrow H \in$ HA takve da $f \circ t_H = g \circ t_H$ imamo da $f = g$.

Da to dokažemo, koristimo sledeću reprezentaciju proizvoljnog J-operatora $k \in$ JH:

$$k = \bigvee\{j_b \wedge j^a \mid a \in H \text{ i } b = k(a)\}.$$

Jer, za sve $a,x \in H$. $a \to x \leq a \to k(x) = k(a) \to k(x)$ pa dakle $k(a) \wedge (a \to x) \leq k(x)$. Otuda za svako $x \in H$.

$$\begin{aligned}(j_{k(a)} \wedge j^a)(x) &= (k(a) \vee x) \wedge (a \to x)\\ &= (k(a) \wedge (a \to x)) \vee (x \wedge (a \to x))\\ &\leq k(x) \wedge x = k(x),\end{aligned}$$

tj. $j_{k(a)} \wedge j^a \leq k$ za svako $a \in H$, pa dakle $\bigvee\{j_{k(a)} \wedge j^a \mid a \in H\} \leq k$. Kako $\forall a \in H.\ (j_{k(a)} \wedge j^a)(a) = (k(a) \vee a) \wedge (a \to a) = k(a)$ to imamo da je $k \leq \bigvee\{j_{k(a)} \wedge j^a \mid a \in H\}$, pa je spomenuta reprezentacija dokazana.

Primetimo da, obzirom na primedbu u lemi 2.22, za svako $a \in H$. $k^2(a) = k(a)$ pa je $k \leq b_{k(a)}$, tj. $k \leq \bigwedge\{b_{k(a)} \mid a \in H\} = p$. Kako $\forall a \in H.\ p(a) \leq b_{k(a)}(a) \leq b_{k(a)}(k(a)) = k(a)$ to imamo i sledeću reprezantaciju J-operatora $k \in$ JH:

$$k = \bigwedge\{b_{k(a)} \mid a \in H\}.$$

Kako je po pretpostavci $f \circ t_H = g \circ t_H$ to je $f(j_a^a) = g(j_a)$ pa, obzirom na posledicu 2.13 i činjenicu da su f,g homomorfizmi, imamo $f(j^a) = g(j^a)$, za svako $a \in H$. Otuda za svako $k \in$ JH,

$$\begin{aligned}f(k) &= f(\bigvee\{j_b \wedge j^a \mid a \in H \text{ i } b = k(a)\})\\ &= \bigvee\{f(j_b) \wedge f(j^a) \mid a \in H \text{ i } b = k(a)\}\\ &= \bigvee\{g(j_b) \wedge g(j^a) \mid a \in H \text{ i } b = k(a)\}\\ &= g(k),\end{aligned}$$

tj. za proizvoljnu kompletnu Heytingovu algebru H, t_H je epimorfizam. Primetimo takodje da je t_H, $H\in$ KHA, mono i epimorfizam, ali ne i izomorfizam.

Da bi se dokazalo da je preslikavanje J:KHA$\longrightarrow$KHA funktor u kategoriji KHA treba za proizvoljne $H,H_1\in$ KHA i morfizam $f:H\longrightarrow H_1$ definisati morfizam $Jf:JH\longrightarrow JH_1$ tako da dijagram

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d] & H_1 \arrow[d, "t_{H_1}"] \\ JH \arrow[r, "Jf"] & JH_1 \end{tikzcd}$$

komutira. Obzirom da je t_{H_1} epimorfizam, postoji naviše jedan takav morfizam.

Konstruisaćemo morfizam $Jf\in$ KHA. Treba napomenuti da je $t_{H_1}f[H]\subseteq RJH_1$, tj. slika algebre $H\in$ KHA, pri preslikavanju $t_{H_1}f$ je sadržana u skupu regularnih elemenata u JH_1. Nešto opštije, za svaki $g:H\longrightarrow H_1\in$KHA takav da $g[H]\subseteq RH_1$ postoji jedinstveno odrdjen morfizam $\bar{g}\in$ KHA takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & H_1 \\ & JH \arrow[u, "\bar{g}"'] \end{tikzcd}$$

komutira. Neka je za proizvoljno $j\in JH$

$$\bar{g}(j)=\bigvee\{gj(x)\wedge g(x)'\mid x\in H\},$$

gde je $g(x)'$ komplement elementa $g(x)$, a on postoji jer, po pretpostavci $g[H]\subseteq RH_1$.

<u>Lema 2.17.1</u> Za proizvoljne $j,k\in JH$, $j\leq k\Rightarrow\bar{g}(j)\leq\bar{g}(k)$ i $\bar{g}(j\wedge k)=\bar{g}(j)\wedge\bar{g}(k)$, tj. $\bar{g}$ čuva poredak (što je trivijalno) i konjunkciju.

Dokaz: Primetimo da je

$$\begin{aligned}\bar{g}(j)\wedge\bar{g}(k)&=\bar{g}(j)\wedge\bigvee\{gk(y)\wedge g(y)'\mid y\in H\}\\&=\bigvee\{\bar{g}(j)\wedge gk(y)\wedge g(y)'\mid y\in H\}\end{aligned}$$

i pritom,
$$\begin{aligned}\bar{g}(j)\wedge gk(y)\wedge g(y)'&=\bigvee\{gj(x)\wedge g(x)'\wedge gk(y)\wedge g(y)'\mid x\in H\}\\&=\bigvee\{g(j(x)\wedge k(y))\wedge g(x\vee y)'\mid x\in H\}\\&\leq\bigvee\{g(j\wedge k)(x\vee y)\wedge g(x\vee y)'\mid x\in H\}\end{aligned}$$

tako da
$$\begin{aligned}\bar{g}(j)\wedge\bar{g}(k)&\leq\bigvee\{g(j\wedge k)(x\vee y)\wedge g(x\vee y)'\mid x,y\in H\}\\&=\bar{g}(j\wedge k).\dashv\end{aligned}$$

Za svako $a\in H_1$ neka je $[a]$ jezgro homomorfizma $H\longrightarrow[a,1]$ definisanog tako da $\forall x\in H.\ x\longrightarrow a\vee g(x)$. Time je u algebri H odredjen standardni J-operator $[a]:H \longrightarrow H$ takav da

$$\forall x \in H.\ [a](x) = \bigvee\{y \in H \mid g(y) \le a \vee g(x)\}.$$

<u>Lema 2.17.2</u> Za svako $a \in H_1$ i sve $x, y \in H$

$$y \le [a](x) \iff g(y) \wedge g(x)' \le a. \dashv$$

<u>Lema 2.17.3</u> Za svako $a \in H_1$, $j \in JH$

(i) $\bar{g}([a]) \le a$

(ii) $j \le [a] \iff \bar{g}(j) \le a.$

Dokaz: (i) Za svako $x \in H$

$$g([a](x)) = g(\bigvee\{y \in H \mid g(y) \wedge g(x)' \le a\})$$
$$= \bigvee\{g(y) \mid g(y) \wedge g(x)' \le a\}.$$

Otuda, $g([a](x)) \wedge g(x)' = \bigvee\{g(x)' \wedge g(y) \mid g(y) \wedge g(x)' \le a\} \le a$, pa dakle $\bar{g}([a]) = \bigvee\{g([a](x)) \wedge g(x)' \mid x \in H\} \le a$.

(ii) Ako $j \le [a]$ tada $\bar{g}(\ )\ \bar{g}([a]) \le a$, zbog (i). Obratno, neka je $\bar{g}(j) \le a$, tada $\forall x \in H.\ gj(x) \wedge g(x)' \le \bar{g}(j) \le a$ pa na osnovu prethodne leme imamo $j(x) \le [a](x). \dashv$

Obzirom na leme 2.17.1 i 2.17.3 (ii), imamo da za svako $S \subseteq JH$, $\bar{g}(\bigvee S) = \bigvee \bar{g}(S)$, tj. $\bar{g}: JH \longrightarrow H_1$ je morfizam u kategoriji KHA. Po definiciji jezgra $[a]$ imamo da je $\bar{g}(j_a) = g(a)$, tj. dijagram

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "t_H"'] & & H_1 \\ & JH \arrow[ur, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

komutira. Otuda, za svaki morfizam $f: H \longrightarrow H_1$ postoji jedinstveno odredjen morfizam $Jf: JH \longrightarrow JH_1$ u kategoriji KHA, takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "t_H"'] & H_1 \arrow[d] \\ JH \arrow[r, "Jf"] & JH_1 \end{tikzcd}$$

komutira, tj. preslikavanje $J: KHA \longrightarrow KHA$ je funktor u kategoriji KHA i transformacija $t: I_{KHA} \longrightarrow J$ je prirodna. Time je teorema 2.17 dokazana.$\dashv$

Primetimo da ako je $f: H \longrightarrow H_1 \in KHA$ epimorfizam (na) tada je i Jf takodje epimorfizam (na).

<u>Lema 2.17.4</u> Za svaki morfizam $f: H \longrightarrow H_1$ i J-operator $k \in JH$, $Jf(k)$ je najmanji J-operator $p \in JH_1$ takav da za svako $x \in H$, $f \cdot k(x) \le pf(x)$.

Dokaz: Za proizvoljne familije $\{a_i \mid i \in I\}$, $\{b_i \mid i \in I\} \subseteq H$

$k=\bigvee\{j_{b_i}\wedge j^{a_i} \mid i\in I\}$ je najmanji J-operator kompletne Heytingove algebre H takav da za svako $i\in I$, $b_i\leq k(a_i)$. Jer, za svako $i\in I$, $k(a_i)\geq (j_{b_i}\wedge j^{a_i})(a_i)=(b_i\vee a_i)\wedge(a_i\rightarrow a_i)=b_i\vee a_i$. Neka je $k_1\in JH$ takvo da $b_i\leq k_1(a_i)$ za svako $i\in I$. Dovoljno je pokazati da za svako $i\in I$, $j_{b_i}\wedge j^{a_i}\leq k_1$. Za svako $x\in H$, $a_i\rightarrow x\leq a_i\rightarrow k_1(x)=k_1(a_i)\rightarrow k_1(x)$, pa kako je $b_i\leq k_1(a_i)$ to imamo da $b_i\wedge(a_i\rightarrow x)\leq k_1(x)$. Otuda $(j_{b_i}\wedge j^{a_i})(x)=(b_i\rightarrow x)\wedge(a_i\rightarrow x)=$ $=b_i\wedge(a_i\rightarrow x)\vee x\wedge(a_i\rightarrow x)\leq k_1(x)\vee x=k_1(x)$.

Ovo poslednje omogućava da za zadate familije $\{x_i\mid i\in I\}$ $\{y_i\mid i\in I\}\subseteq H$ odredimo najmanji J-operator $k\in JH$ takav da za svako $i\in I$, $k(x_i)=k(y_i)$. Jer, očigledno

$$k=\bigvee\{j_{x_i\vee y_i}\wedge j^{x_i\wedge y_i} \mid i\in I\}.$$

Otuda, da bi se dokazala lema, dovoljno je primetiti da, obzirom na definiciju jezgra u prethodnoj teoremi,

$$Jf(k)=\bigvee\{j_{fk(x)}\wedge j^{f(x)} \mid x\in H\}.\dashv$$

<u>Teorema 2.17.5</u> Neka je $f:H_j\rightarrow H_1\in KHA$, $j\in JH$ i $k=Jf(j)$ tada postoji jedinstven morfizam $f_j:H_j\longrightarrow H_{1k}$ takav da dijagram

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & H_1 \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ H_j & \xrightarrow{f_j} & H_{1k} \end{array}$$

komutira i ako je $K\in KHA$ takva da dijagram

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & H_1 \\ \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ H_j & \xrightarrow{g} & K \end{array}$$

komutira tada postoji jedinstveno odredjen monomorfizam $r:H_1\rightarrow K$ takav da $h=r\circ k$ i $g=r\circ f_j$.

Dokaz: Kako je $j:H\longrightarrow H_j$ epimorfizam to postoji najviše jedan morfizam $f_j:H\longrightarrow H_{1k}$. Neka je $f_j\in KHA$ definisano tako da $\forall x\in H.\ x=j(x)\Longrightarrow f_j(x)=kf(x)$. Trivijalno f_jčuva 0,1 i $\wedge$. Osim toga, $kf=kfj$. Jer, kako je $j\in JH$ to $kf\leq kfj$ i kako je $fj\leq kf$ to $kfj\leq k^2f=kf$, tj. za $f_j=kfj$ dijagram u teoremi komutira. Za svako $Y\subseteq H_1$, $k(\bigvee Y)=k(\bigvee k[Y])$ pa, za svako $X\subseteq H$ imamo redom: $f_j(\bigvee_j X)=kfj(\bigvee X)=kf(\bigvee X)=k(\bigvee f[X])=k(\bigvee kf[X])=$

$\bigvee_k f_j[X]$, tj. f_j je morfizam u kategoriji KHA.

Neka je $[l]$ jezgro homomorfizma $g\cdot j$ (=jezgro homomorfizma $h\cdot f$), $[m]$ jezgro homomorfizma h, tj. $[l]\in JH$, $[m]\in JH_1$. Kako je $j\leq[l]$ to je $fj\leq f\cdot[l]$. Kako je $[l]$ jezgro od $h\circ f$ to je $hf[l]=hf$, pa, kako je $[m]$ jezgro od h, imamo $[m]f[l]=[m]f$, odnosno $fj\leq f[l]\leq[m]f[l]\leq[m]f$. Na osnovu minimalnosti J-operatora k (tj. na osnovu prethodne leme) imamo da je $k\leq[m]$ pa dakle postoji jedinstveni monomorfizam $r:H_1\longrightarrow K\in KHA$ takav da je $h=r\cdot k$. Konačno, redom $gj=hf=rkf=rf_jj$, pa kako je j epimorfizam to $g=rf_j$.⊣

Primetimo da kada je H Booleova algebra tada je svaki J operator u H oblika j_a, $a\in H$, pa je t_H homomorfizam "na" i dakle, izomorfizam. Obratno, ako je t_H, H KHA izomorfizam tada je t_H "na" pa, $t_H[H]=JH=RJH$, tj. H je Booleova algebra.

<u>Posledica 2.18</u> Kompletna Heytingova algebra H je Booleova algebra akko $t_H:H\longrightarrow JH$ je izomorfizam.⊣

Obzirom na teoremu 2.17, za proizvoljnu kompletnu Heytingovu algebru H, algebra J-operatora u H, JH, je kompletna Heytingova algebra pa se čitava konstrukcija može ponoviti, tj. dobija se niz $H\longrightarrow JH\longrightarrow J^2H\longrightarrow\ldots\longrightarrow J^\alpha H\longrightarrow$, $\alpha\in ORD$, kompletnih Heytingovih algebri i monomorfizama. Pritom, za granične α ORD $J^\alpha H$ definiše se kao $\lim\{J^\beta H \mid \beta\leq\alpha\}$. (Konstrukcija ove granice će kasnije biti izložena.) Postoji niz nerešenih problema u vezi sa prirodom ovog niza (H.Simons [1]). U ovom radu je pokazano da priroda ovog niza karakteriše egzistenciju Booleovog omotača proizvoljne kompletne Heytingove algebre.

Na osnovu posledice 2.18, ako je za neko $\alpha\in ORD$, $J^\alpha H$ Booleova algebra tada je za svako $\beta\geq\alpha$, $J^\beta H\cong J^\alpha H$, tj. počev od α niz $J^\alpha H$, $\alpha\in ORD$, je konstantan niz Booleovih algebri i izomorfizama. Ovde će se pokazati da je za svako $H\in KHA$, $J^{\alpha_0}H$, gde je α_0 minimalni ordinal za koji je $J^\alpha H$ Booleova algebra, upravo *refleksija* algebre H u kategoriji BA, tj. u odredjenom smislu, $J^{\alpha_0}H$ je najbolja aproksimacija kompletne Heytingove algebre Booleovom algebrom.

<u>Lema 2.19</u> Za svaku konačnu kompletnu Heytingovu algeb-

ru H, (tj. konačnu distributivnu mrežu) algebra JH je minimalna Booleova algebra u koju se H može utopiti.

Dokaz: Jasno je da $JH \in BA$, jer, svi elementi u JH su oblika j_a (ili j^a), $a \in H$. JH je kompletna Booleova algebra pa obzirom na injektivnost kompletnih Booleovih algebri u kategoriji HA, za svako $B \in BA$ i monomorfizam $f: H \longrightarrow B \in HA$, postoji u kategoriji KBA morfizam $g: JH \longrightarrow B$ takav da $f = gt_H$. g je monomorfizam jer, $\forall j,k \in JH \, \exists a,b \in H.\ j = j_a$ i $k = k_b$ pa, ako $g(j) = g(k)$ tada $f(a) = f(b)$, tj. $a = b$. Otuda $j = k$. ⊣

Primer 2.20 Kako je već napomenuto, kompletno linearno uredjenje, tj. kompletan lanac sa najvećim i najmanjim elementom, je kompletna Heytingova algebra. U tom slučaju imamo:

(i) H je Booleova algebra akko H ima najviše dva elementa,

(ii) JH je Booleova algebra akko H je diskretno uredjenje,

(iii) J^2H je Booleova algebra akko

(iv) Nije poznat primer kompletne Heytingove algebre, spomenutog, a i bilo kog drugog tipa, za koju je J^3H Booleova algebra i pritom, J^2H to nije. Moguće, niz $J^{\alpha}H$ je konstantan za sve $\alpha \geq \alpha_0$ akko $\alpha_0 = 2$?

(v) Poznati su primeri kompletnih Heytingovih algebri za koje niz $J^{\alpha}H$ nikada nije konstantan (tj. $\forall \alpha \in ORD.\ J^{\alpha}H$ nije Booleova algebra).

Nije potrebno posebno objašnjavati (i). Da pokažemo da važi (ii) pretpostavimo da je $H \in KHA$ kompletno linearno uredjenje. Neka je $X = H \setminus \{1\}$ i za svako $a \in H$ neka je $r(a) = [0,a) \subseteq X$. Kako je H kompletna mreža, $\{r(a) \mid a \in H\}$ je topologija na skupu X i pritom, preslikavanje $f: H \longrightarrow OX$ definisano tako da za svako $a \in H$, $f(a) = r(a)$ je izomorfizam u kategoriji KHA (gde je OX spomenuta topologija na X). Neka je FX topološki prostor u kome je topologija OFX najmanja topologija na X u kojoj je svaki otvoren skup u prostoru X zatvoreno-otvoren skup u FX (Lawvere-Tierney-eva topologija na prostoru X). Jednostavno se proverava da je topologija OFX generisana sa $\{[a,b) \mid a,b \in H\}$ i da je homomorfizam $h: JH \longrightarrow OFX$ definisan sa: $\forall j \in JH.\ h(j) =$

$\bigcup\{[x,j(x))\mid x\in H\}$, izomorfizam koji proširuje $f:H\longrightarrow OX$, odnosno $t_{OX}f=h\cdot t_H$. Otuda, JH je Booleova algebra ako i samo ako je OFX Booleova algebra, odnosno, kako je FX T_0-prostor, FX je diskretan prostor, tj. svaka tačka u FX je otvoren skup, što znači da za svako $a\in X$ postoji $b\in H$ tako da $[a,b)=\{a\}$, tj. uredjenje u algebri H je diskretno uredjenje.

<u>Lema 2.21</u> Za svaku linearno uredjenu kompletnu Heytingovu algebru H, algebra JH je Booleova akko H je linearno dobro uredjenje.$\dashv$

Slučaj (iii) biće podrobnije razmotren kasnije. Primetimo da je algebra J^2H upravo JOFX, prostor TX T_0-prostor, pa je JOFX Booleova algebra akko za svako $A\subseteq X$ postoje $a,b\in H$ takvi da $A\cap[a,b)=\{a\}$, tj. FX je *razbacan* prostor (K. Kuratovski [1]). Naime, jedini perfektan skup u FX je prazan skup. Otuda, za svaki tip uredjenja μ, $1+\mu+1$ je kompletna Heytingova algebra. Pritom, ako $\mu=\alpha^*$, $\alpha\in\mathrm{Ord}$, JH nije Booleova algebra ali je prostor $F(1+\alpha^*)$ razbacan pa je J^2H Booleova algebra.

Ako je μ tip uredjenja realnih brojeva tada za svaki ordinal α, $J^{\alpha}H$ nije Booleova algebra (gde je $H=1+\mu+1$) (J.R. Isbell [1]). U daljem tekstu biće dati i drugi primeri ovakvih algebri.

Sledeća lema omogućava da za proizvoljne J-operatore j,k reprezentujemo implikaciju $j\rightarrow k$ u algebri JH (Simmons [1]).

<u>Lema 2.22</u> Neka je H kompletna Heytingova algebra. Za proizvoljne $p,k\in JH$ $p\rightarrow k=\bigwedge\{j_a\vee k\vee j^c\mid a\in H \text{ i } p(a)=c\}$

$$=\bigwedge\{j^c\vee b_d\mid p(a)=c \text{ i } k(a)=d \text{ i } a\in H\}.$$

Dokaz: Neka je $j_a\vee k\vee j^{p(a)}=f_a$ i $j^{p(a)}\vee b_{k(a)}=g_a$, $a\in H$. Za svako $a\in H$, $(k\vee j_a)(0)=k\circ j_a(0)=k(a)$.

<u>Primedba</u>: $\forall a\in H.\ k\leq b_a\Longleftrightarrow k(a)=a$, za proizvoljno $k\in JH$. Jer, ako $k\leq b_a$ tada, zbog $b_a(a)=a$, imamo $k(a)=a$. Obratno, ako je $k(a)=a$ tada $\forall x\in H.\ k(x)\rightarrow a=k(x)\rightarrow k(a)=x\rightarrow k(a)=x\rightarrow a$ pa dakle $b_a(k(x))=b_a(x)$. Otuda, $\forall x\in H.\ k(x)\leq b_a(k(x))=b_a(x)$ pa je pri-

medba dokazana.

Na osnovu primedbe, $k \vee j_a \leq b_{k(a)}$ pa za svako $a \in H$ imamo da je $f_a \leq g_a$ i dakle, $f = \bigwedge\{f_a \mid a \in H\} \leq \bigwedge\{g_a \mid a \in H\} = g$. Ako je $h \in JH$ proizvolno i $p \wedge h \leq k$ tada, za sve $x, a \in H$, $p(a) \wedge h(x) \leq p(a \vee x) \wedge h(a \vee x) \leq kj_a(x)$ pa dakle redom: $h(x) \leq p(a) \rightarrow kj_a(x) = j^{p(a)} kj_a(x) = (j^{p(a)} \vee k \vee j_a)(x) = f_a(x)$, tj. ako je $p \wedge h \leq k$ tada $h \leq f$. Za svako $a \in H$. $g(a) \wedge p(a) \leq g_a(a) \wedge p(a) = (p(a) \rightarrow b_{k(a)}(a)) \wedge \wedge p(a) \leq b_{k(a)}(a) = k(a)$ pa $g \wedge p \leq k$, tj. $g \leq f = p \rightarrow k$. ⊣

Obzirom na prethodnu lemu imamo i sledeću reprezentaciju negacije u algebri JH, $H \in KHA$. Za svako $k \in JH$

$$k' = \bigwedge\{j^{k(a)} \vee j_a \mid a \in H\} = \bigwedge\{j^{k(a)} \vee b_a \mid a \in H\}.$$

Da bi se izvršila karakterizacija kompletnih Heytingovih algebri čija je algebra J-operatora Booleova algebra potrebno je da se podrobnije ispitaju svojstva filtara u njima. Primetimo da je za svaki J-operator $k \in JH$, $H \in KHA$, odredjen filter $F(k) = \{x \in H \mid k(x) = 1\}$ u algebri H; filter *asociran* operatoru $k \in JH$. Na primer, filter asociran J-operatoru j^a, $a \in H$, je upravo glavni filter generisan sa $a \in H$. Asocirani filtri kompletnih Booleovih algebri su takodje glavni tako da, u opštem slučaju, ima veoma mnogo ne-asociranih filtera, tj. takvih filtera $F \subseteq H$ za koje ne postoji $k \in JH$ takav da $F = F(k)$. Ako je H linearno uredjenje, tj. linearno uredjena kompletna Heytingova algebra, tada za svako $a \in H$, $F(j_a) = 1$, tako da različiti J-operatori mogu imati isti asocirani filter.

<u>Definicija 2.23</u> Neka je $H \in KHA$. Za sve $p, k \in JH$ neka je $p \sim k \Longleftrightarrow F(p) = F(k)$, tj. akko $\forall x \in H.\ p(x) = 1 \Longleftrightarrow k(x) = 1$.

Jasno da je $\sim$ relacija ekvivalencije u algebri JH. Odgovarajuće klase ekvivalencije obzirom na relaciju $\sim$ označene su sa $\hat{F}$, gde je F odgovarajući asocirani filter, ili sa $\hat{j}$, ako je $F = F(j)$, $j \in JH$.

<u>Lema 2.24</u> Ako je F asocirani filter u kompletnoj Heytingovoj algebri H tada je klasa $\hat{F}$ zatvorena za infimume u JH.

Odnosno, F ima najmanji element.

Dokaz: Neka je $F \subseteq H$ asocirani filter u $H \in KHA$ i neka je $J \subseteq \hat{F}$ tada, $\forall x \in H.\ (\bigwedge J)(x)=1 \Leftrightarrow \forall j \in J.\ j(x)=1 \Leftrightarrow x \in F$ pa $\bigwedge J \in \hat{F}$.⊣

Lema 2.25 Za svako $X \subseteq H$, $H \in KHA$, neka je

$$f=\bigvee\{j^a \mid a \in X\},\quad g=\bigwedge\{j_a \mid a \in X\}$$

tada je f najmanji J-operator takav da $\forall a \in X.\ f(a)=1$ i pritom $f'=g$.

Dokaz: Za svako $a \in X$, $f(a) \geq j^a(a)=1$. Neka je $k \in JH$ takav da $\forall a \in X.\ k(a)=1$. Za svako $x \in H$, $a \in X$, $j^a(x)=a \to x$ pa dakle $j^a(x) \wedge a \leq x$. Otuda $j^a(x) \leq kj^a(x)=kj^a(x) \wedge k(a)=k(j^a(x) \wedge a) \leq k(x)$, tj. $j^a \leq k$ pa dakle $f \leq k$.

Za svako $X \subseteq JH$. $(\bigvee X)'=\bigwedge\{a' : a \in X\}$ pa $f'=g$ jer, za svako $a \in H$, $j_a'=j^a$.⊣

Posledica 2.26 J-operator k je najmanji elemenat u klasi $\hat{k}$ akko k je supremum skupa operatora ablika $\{j_a \mid a \in X\}$ gde je $X \subseteq H$, $H \in KHA$.

Dokaz: Neka je k najmanji elemenat u klasi $\hat{k}$ i neka je $f=\bigvee\{j_a \mid a \in F(k)\}$. Obzirom na prethodnu lemu, $f \leq k$. Kako $\forall x \in H$ $k(x)=1 \Rightarrow x \in F(k) \Rightarrow f(x)=1$ to je $f \sim k$ pa $f=k$. Obratno, ako $f=\bigvee\{j_a \mid a \in X,\ X \subseteq H\}$ tada $X \subseteq F(f)$ pa za svako $k \in JH$, $k \sim f \Rightarrow \forall a \in X.\ k(a)=1$ i obzirom na lemu $f \leq k$, tj. f je najmanji elemenat u klasi $\hat{f}$.⊣

U opštem slučaju, uredjenje u algebri JH nije odredjeno uredjenjem asociranih filtera, osim u sledećem slučaju:

Lema 2.27 Neka su $p, k \in JH$, $H \in KHA$ i p najmanji elemenat u klasi $\hat{p}$, tada $p \leq k \Leftrightarrow F(p) \subseteq F(k)$.

Dokaz: Neka je $F(p) \subseteq F(k)$ i $f=p \wedge k$ tada $\forall x \in H.\ f(x)=1 \Leftrightarrow p(x)=k(x)=1$, tj. $f \sim p$. Obzirom na minimalnost operatora p, $p \leq f$, tj. $p \leq k$. Obratno trivijalno važi.⊣

Takodje, u opštem slučaju, klase ekvivalencije relacije $\sim$ nemaju najveći elemenat. Slučajevi u kojima on postoji opisani su u sledećim lemama.

Lema 2.28 Svaki J-operator oblika b_a, $a \in H$ je supremum u klasi $\widehat{b}_a$.

Dokaz: Neka je $a \in H$ i $k \in JH$ tako da $k \sim b_a$. Dovoljno je pokazati da $k(a)=a$, jer, obzirom na primedbu u lemi 2.22, tada $k \leq b_a$. Neka je $u=k(a)$ i $v=u \to a$ (tj. treba pokazati da je $v=1$) tada $u \vee v \to a=(u \to a) \wedge (v \to a)=v \wedge (v \to a) \leq a$, tj. $b_a(u \vee v)=1$ Ali, $k \sim b_a$ pa $k(a \vee v)=k(k(a) \vee v)=k(u \vee v)=1$ i $b_a(v)=b_a(a \vee v)=1$. Kako $\forall x \in H$. $b_a(x \to a)=x \to a$ to je redom: $k(a) \to a=a \to a=b_a(v)=1$, tj. $k(a) \leq a$. ⊣

Lema 2.29 Neka je H kompletna Heytingova algebra u kojoj ne postoji beskonačan rastući lanac tada svaka klasa relacije $\sim$ ima najveći elemenat.

Dokaz: Neka je F asocirani filter u H, $H \in KHA$. Predpostavimo da je $F \neq H$ jer, ako to nije slučaj tada odgovarajuća klasa ekvivalencije relacije $\sim$ ima jedinstven elemenat 1. Neka je X skup maksimalnih elemenata u $H \setminus F$. Kako u algebri H ne postoji beskonačan rastući niz to za svako $x \in H \setminus F$ postoji $y \in X$ tako da $x \leq y$. J-operator oblika $k=\bigwedge\{b_a \mid a \in X\}$ je maksimalan J-operator za koji $F(k)=F$.

Predpostavimo da je $p \in JH$ takav da $F(p)=F$. Za svako $a \in X$, ako $a<p(a)$ tada, kako je a maksimalan u spomenutom smislu, imamo da je $p(a) \in F$ tako da $p^2(a)=p(a)=1$, tj. $a \in F$. Otuda, $p(a)=a$ pa na osnovu primedbe u lemi 2.22, imamo da za svako $a \in H$, $a \in X \Longrightarrow p \leq b_a$, tj. $p \leq k$. Treba još pokazati da $\forall x \in H$ $k(x)=1 \Longrightarrow p(x)=1$ jer, tada je $k \sim p$, tj. k je najveći J-operator u klasi $\widehat{F}$.

Neka je $x \in H$ takvo da $p(x) \neq 1$, tada $x \notin F$ pa postoji neko $a \in X$ tako da $x \leq a$. Otuda, $p(x) \leq b_a(x)=(x \to a) \to a$, tj $k(x) \neq 1$ i lema je dokazana. ⊣

Sledeće svojstvo J-operatora b_a, $a \in H$, omogućava reprezentaciju operatora oblika $k \vee b_a$, $k \in JH$, $a \in H$ (Simmons[1]).

Lema 2.30 Za svako $a \in H$, $k \in JH$, H kompletna Heytingova algebra, ako $b_a \leq k$ tada $k=b_d$, gde je $d=b_a(k(0))$.

Dokaz: Neka je $b_a \leq k$, $c=k(0)$ tada $a=b_a(0) \leq k(0)=c$ pa $\forall x \in H.\ x \to a \leq x \to c = k(x) \to c$ i dakle, $k(x) \wedge ((c \vee x) \to a) = k(x) \wedge (c \to a) \wedge (x \to a) \leq k(x) \wedge (c \to a) \wedge k(x) \to c = k(x) \wedge c \wedge a \leq a$. Otuda, $k(x) \leq ((c \vee x) \to a) \to a = j_c(x) \to a \to a = b_a(j_c(x))$, tj. $k \leq b_a \vee j_c$. Kako je $j_c \leq k$ to imamo da je $b_a j_c \leq b_a k \leq k^2 = k$. Dakle, $k = b_a \vee j_c$. Obzirom da je $d=(c \to a) \to a$ to $\forall x \in H.\ x \to d = (c \to a) \to (x \to a)$ tako da $(x \to d) \wedge (c \to a) = (c \to a) \wedge (x \to a) = (c \vee x) \to a = j_c(x) \to a$. Otuda za svako $y \in H.\ y \leq b_d(x) \Longleftrightarrow y \wedge (x \to d) \leq d \Longleftrightarrow y \wedge (x \to d) \wedge (c \to a) \leq a$ $\Longleftrightarrow y \wedge (j_c(x) \to a) \leq a \Longleftrightarrow y \leq (j_c(x) \to a) \to a = b_a j_c(x) \Longleftrightarrow y \leq k(x)$, pa dakle, $k = b_d$. $\dashv$

J-operatori oblika j_a, j^a, b_a, $a \in H$, imaju sledeće zanimljivo svojstvo (H je kompletna Heytingova algebra).

Definicija 2.31 J operator k u algebri $H \in KHA$ je *elementaran* ako $\forall x \in H.\ k(0) \leq x \Longrightarrow k(k(x) \to x) = 1$.

Lema 2.32 J-operatori j_a, j^a, b_a, $a \in H$, H kompletna Heytingova algebra, su elementarni.

Dokaz: Kako $\forall x,y \in H.\ x \leq y \to x$ to $(y \to x) \to a \leq x \to a$ pa, ako $a \leq x$ tada $((x \to a) \to (y \to a)) \wedge ((y \to x) \to a) \leq (y \to x) \to a \wedge (y \to a)$ $\leq ((y \to x) \to a) \wedge (y \to x) \leq a$. Otuda $y \to b_a(x) = (x \to a) \to (y \to a) \leq$ $b_a(y \to x)$. Za $y = b_a(x)$ dobijamo da lema važi u slučaju operatora oblika b_a, $a \in H$. $\dashv$

Lema 2.31 Neka je k elementarni J-operator u algebri H, tada za svako $p \in JH$, $k \vee p = p \circ k \circ j_a$, gde $a = k(0)$. $\dashv$

Teorema 2.33 Neka je H kompletna Heytingova algebra, k elementaran J-operator u H i $a=k(0)$, tada su sledeće činjenice ekvivalentne:

(i) k je komplementiran u algebri JH,

(ii) filter $F(k) \cap [a,1]$ je glavni

(iii) postoji $d \in H$ tako da $k = j^d \vee j_a$.

Dokaz: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Neka je k komplementiran u algebri JH tada, kako je k elementaran, $k \circ k' \circ j_a = k' \vee k = 1$, pa neka je $d = k'(a)$. Otuda $a \leq d$ i $k(d) = (k' \vee k)(0) = 1$, tj. $d \in F(k) \cap [a,1]$. Za svako $x \in F(k) \cap [a,1]$, $x = (k' \wedge k)(x) = k(x) \wedge k'(x) =$ (kako $x \in F(k)$ tj. $k(x)=1$) $= k'(x) \geq$ (jer, $a \leq x$) $\geq k'(a) = d$, tj. d generiše filter $F(k)\cap[a,1]$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Neka je $d\in H$ generatorni elemenat filtra $F(k)\cap[a,1]$. Pokazaćemo da je $k=j^d j_a$. Zaista, za proizvoljno, u daljem fiksirano, $x\in H$, neka je $y=a\vee x$. Kako je $k(x)=k(y)$ to je dovoljno dokazati da $k(y)=d\rightarrow y$. Obzirom da je k elementaran i da je $y\geq a=k(0)$ to imamo $k(k(y)\rightarrow y)=1$ pa dakle $k(y)\rightarrow y\in F(k)\cap[a,1]$, tj. $d\leq k(y)\rightarrow y$ odnosno, $k(y)\leq d\rightarrow y$. Obratno, $d\rightarrow y\leq d\rightarrow k(y)=k(d)\rightarrow k(y)=1\rightarrow k(y)=k(y)$, tj. konačno je $k(y)=d\rightarrow y$.

(iii)$\Longrightarrow$(i) je očigledno.$\dashv$

Primenom teoreme 2.33 dobija se sledeća karakterizacija kompletnih Heytingovih algebri čija je algebra J-operatora Booleova algebra.

<u>Teorema 2.34</u> Za proizvoljnu kompletnu Heytingovu algebru H sledeće činjenice su ekvivalentne:

(i) JH je Booleova algebra

(ii) $\forall a\in H.\ F(b_a)\cap[a,1]$ je glavni filter u H.

Dokaz: Ako je JH Booleova algebra tada svaki J-operator u H ima oblik b_a, $a\in H$, pa kako je b_a elementaran operator to na osnovu prethodne teoreme, $F(b_a)\cap[a,1]$ je glavni filter u algebri H.

Obratno, ako je $\forall a\in H.\ F(b_a)\cap[a,1]$ glavni filter u H tada je b_a, $a\in H$, komplementiran u JH. Na osnovu reprezentacije J-operatora u teoremi 2.17, svaki J-operator u algebri H je komplementiran, tj. JH je Booleova algebra.$\dashv$

Kategorija kompletnih Booleovih algebri (KBA) je podkategorija kompletnih Heytingovih algebri i pritom, svaki morfizam u kategoriji KHA Booleovih algebri je morfizam u kategoriji KBA, tj. funktor redukcije je obostrano jednoznačan obzirom na morfizme. Obzirom na teoremu 1.23, moglo bi se očekivati da je kategorija KBA reflektivna u kategoriji KHA. Medjutim, to bi značilo da za svaku kompletnu Heytingovu algebru H postoji KHA morfizam $f:H\longrightarrow H^*$, $H^*\in KBA$, takav da je svaki morfizam $h:H\longrightarrow B\in KHA$, $B\in KBA$, jedinstveno *rastavljiv* preko f, tj. da postoji jedinstveno odredjen morfizam u kategoriji KBA, $h^*:H^*\longrightarrow B$, takav da je $h^*f=h$; što, u opštem slučaju nije tačno. Stoga, opravdano je pitanje karakterizacije kompletnih Heytingovih algebri koje imaju KBA-refleksiju ili koje se mogu *aproksimirati*, u spomenutom smislu, kompletnom Booleovom algebrom. U rešavanju tog problema potrebno je definisati pojam *slobodne kompletne Heytingove algebre*, a ona u kategoriji KHA postoji (Benabou,J.[1]). Neki detalji i oznake u jednoj konstrukciji ove algebre, koja će do detalja i potpuno biti opisana u sledećem odeljku, korišćeni su u sledećim rezultatima, i pritom, nisu posebno objašnjeni.

Definicija 2.35 Za svaki skup X neka je $TX=OO^*X$ (videti definicije funktora O i O^* u sledećem odeljku) i za svako $x\in X$ neka je $r(x)=\{f\in O^*X \mid f(x)=1\}$, tj. $r[X]=\{r(x)\mid x\in X\}$ je predbaza prostora O^*X i preslikavanje $r:X\longrightarrow TX$ je 1-1.

Definicija 2.36 Za svaku kompletnu Heytingovu algebru $H\in ODM$, dakle kao ograničenu distributivnu mrežu, neka je O_1^*H prostor ODM-morfizama algebre H u algebru $2\in ODM$ sa topologijom indukovanom topologijom prostora O^*H. Neka je $OO_1^*=T_1$ i za svako $x\in H$, $r_1(x)=r(x)\cap O_1^*H$, tj. $r_1[H]$ je kanonska baza prostora O_1^*H i $r_1:H\longrightarrow T_1H$ je monomorfizam u kategoriji ODM. Pritom, $r_1[H]$ je skup svih kompaktnih otvorenih skupova u prostoru O_1^*H.

Lema 2.37 Za svaku kompletnu Heytingovu algebru H postoji jedinstven KHA-morfizam $h_1:T_1H\longrightarrow H$ takav da $h_1r_1=1_H$. ⊣

Posledica 2.38 Za svaku kompletnu Heytingovu algebru H postoji KHA morfizam $h:TH\longrightarrow H$ takav da $hr=1_H$.

Dokaz: Kako je $O_1^*H\subseteq O^*H$ to je restrikcija $f:TH\longrightarrow T_1H$ (definisana tako da $\forall u\in TH.\ f(u)=u\cap O_1^*H$) morfizam u kategoriji KHA. Neka je $h=h_1f$ tada $\forall x\in H.\ hr(x)=h_1fr(x)=h_1(r(x)\cap O_1^*H)=h_1r_1(x)=x$. ⊣

Lema 2.39 Za svaki skup X, kompletnu Heytingovu algebru H i funkciju $f:X\longrightarrow H$ postoji jedinstven morfizam u kategoriji KHA, $\bar{f}:TX\longrightarrow H$, takav da je $f=\bar{f}r$.

Dokaz: Funkcija $f:X\longrightarrow H$ indukuje neprekidnu funkciju

$\underline{f}:O^*H \longrightarrow O^*X$, koja opet indukuje morfizam $\underline{f}^{-1}:TX \longrightarrow TH \in$ KHA, a jednostavno se proverava da je $\underline{f}^{-1}r=rf$. Neka je $\bar{f}=h\underline{f}^{-1}$, gde je $h:TH \longrightarrow H \in$ KHA jedinstveno odredjeno, prema prethodnij lemi, tada $\bar{f}r=h\underline{f}^{-1}r=hrf=f$ pa dakle, postoji bar jedan morfizam sa osobinom spomenutom u lemi. Neka je g morfizam u kategoriji KHA takav da $gr=f$, tada kako je $gr=f=\bar{f}r$, morfizmi $\bar{f},g$ su jednaki na podbaznim skupovima prostora O^*X. Kako su $\bar{f},g$ KHA-morfizmi to je $\bar{f}=g$.⊣

<u>Posledica 2.40</u> Za svaki skup X, TX je slobodna kompletna Heytingovo algebra generisana sa X.

<u>Teorema 2.41</u> Postoji kompletna Heytingova algebra koja nema KBA-refleksiju.

Dokaz: Neka je $f:T\omega \longrightarrow B$, $B \in$ KBA, refleksija slobodne kompletne Heytingove algebre nad ω i $r:\omega \longrightarrow T\omega$ utapanje opisano u definiciji 2.35. Otuda $fr:\omega \longrightarrow B$. Poazaćemo da je tada $B \in$ KBA slobodna kompletna prebrojivo generisana Booleova algebra, koja prema Gaifman-Hales-ovom rezultatu (H.J. Bell [2]) ne postoji. Neka je $g:\omega \longrightarrow A$ proizvoljna funkcija, A KBA Kako je $T\omega$ slobodna u kategoriji KHA to postoji jedinstveno odredjen morfizam $h:T\omega \longrightarrow A \in$ KHA taka da dijagram

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "r"'] & & A \\ & T\omega \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

komutira. Kako je $f:T\omega \longrightarrow B$ refleksija to postoji jedinstveno odredjen morfizam $k:B \longrightarrow A \in$ KBA takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} T\omega \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A \\ & B \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

komutira, pa dakle, za svaku kompletnu Booleovu algebru A i funkciju $g:\omega$ A postoji jedinstven morfizam $k:B \longrightarrow A \in$ KBA takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "fr"'] & & A \\ & B \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

komutira, tj. B je slobodna algebra u kategoriji KBA.⊣

U karakterizaciji kompletnih Heytingovih algebri koje imaju KBA-refleksiju, koristiće se neki pojmovi teorije kate gorija (Mac Lane,S.[1]).

Definicija 2.42 Morfizam $f:H\longrightarrow K$ kompletnih Heytingovih algebri H,K je *univerzalan* akko

(i) f je monomorfizam

(ii) za svaki morfizam $g:H\longrightarrow L\in$ KHA postoji $k:K\longrightarrow M$ i monomorfizam $\bar{f}:L\longrightarrow M$ takvi da dijagram

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[d, "\bar{f}"] \\ K \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

komutira.

Naprimer, obzirom na Teoremu 2.17. za svaku kompletnu Heytingovu algebru H i svaki ordinal α, morfizam $t_{\alpha_H}:H\longrightarrow J^{\alpha}H$ je univerzalan u kategoriji KHA.

Lema 2.43 Neka je $f:H\longrightarrow K$ univerzalni epimorfizam u kategoriji KHA. Za svaki morfizam $g:H\longrightarrow L$ *postoji komutativan dijagram*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[d, "\bar{f}"] \\ K \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

takav da je $\bar{f}:L\longrightarrow M$ monoepimorfizam.

Dokaz: Obzirom na Teoremu 2.17.5, epimorfizam $\bar{f}:L\longrightarrow M$ postoji u kategoriji KHA. Kako je morfizam f univerzalan u kategoriji KHA to postoji komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[d] \\ K \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

takav da je $L\longrightarrow N$ monomomorfizam u kategoriji KHA. Obzirom da dijagram

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[d, "\bar{f}"'] \arrow[dr] & \\ K \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & M \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

komutira, morfizam $L\longrightarrow M$ je monomorfizam u kategoriji KHA. $\dashv$

Lema 2.44 Neka je $f:B\longrightarrow H$, $B\in$ KBA, epimorfizam u kategoriji KHA tada: f je morfizam "na" i H je kompletna Booleova algebra.

Dokaz: Neka je $A=f[B]$. Inkluzija $A \hookrightarrow H$ je, obzirom da je f epimorfizam, monoepimorfizam. Kako je $H \longrightarrow RJH$ takodje monoepimorfizam to je i $A \hookrightarrow H \longrightarrow RJH$ monoepimorfizam u kategoriji KBA, pa dakle, izomorfizam. Otuda je $A=H$.⊣

Teorema 2.45 Za svaki morfizam $f:H \longrightarrow B$, $B \in KBA$, u kategoriji kompletnih Heytingovih algebri sledeće činjenice su ekvivalentne:

(i) f je KBA-refleksija

(ii) f je univerzalni epimorfizam.

Dokaz: Neka je f KBA-refleksija. Obzirom da dijagram

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & RJH \\ & B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

komutira i da je $H \longrightarrow RJH$ monomorfizam, morfizam f je takodje monomorfizam na osnovu Teoreme 1.23. Za svaki morfizam $H \longrightarrow L$ u u kategoriji KHA postoji faktorizacija

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[d] \\ B \arrow[r] & RJL. \end{tikzcd}$$

Kako je $L \longrightarrow RJL$ monomorfizam to, obzirom na Teoremu 1.23, imamo da je i morfizam f monomorfizam, tj. f je univerzalni morfizam u kategoriji KHA. Neka su $g_1, g_2 : B \longrightarrow K$ proizvoljni morfizmi u KHA takvi da dijagram

$$H \longrightarrow B \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} K$$

komutira tada i dijagram

$$H \longrightarrow B \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} K \longrightarrow RJK$$

komutira. Kako je morfizam $B \longrightarrow RJK$ jedinstveno odredjen, to dijagram

$$B \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} K \longrightarrow RJK$$

komutira. Obzirom da je $K \longrightarrow RJK$ monomorfizam to je $g_1=g_2$, tj, morfizam f je epimorfizam.

Obratno, neka je f univerzalni epimorfizam u kategoriji KHA. Za proizvoljan morfizam $H \longrightarrow A \in KHA$, $A \in KBA$, na osnovu leme 2.43, postoji komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

takav da je morfizam $A \longrightarrow M$ monomorfizam. Obzirom na Lemu 2.44, $A \longrightarrow M$ je izomorfizam. Otuda, dijagram

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & A \\ & B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

komutira, a kako je f epimorfizam to je morfizam $B \longrightarrow A$ jedinstveno odredjen, tj. f je KBA-refleksija.$\dashv$

Na osnovu prethodnih razmatranja dobija se sledeća karakterizacija kompletnih Heytingovih algebri koje imaju kompletnu Booleovu refleksiju.

<u>Teorema 2.46</u> Za svaku kompletnu Heytingovu algebru H sledeće činjenice su ekvivalentne:

(i) H ima KBA-refleksiju

(ii) Postoji univerzalni morfizam $f: H \longrightarrow B$, $B \in KBA$,

(iii) Postoji ordinal α takav da je $J^{\alpha}H \in KBA$ i pritom je morfizam $H \longrightarrow J^{\alpha}H \in KHA$ kompletna Booleova refleksija Heytingove algebre H.

Dokaz: Na osnovu prethodne leme (i)$\Longrightarrow$(ii). Neka je sa $H \longrightarrow J^{\alpha}H, \mid \alpha$ ordinal, označeno utapanje opisano u Teoremi 2.17. Kako je $B \in KBA$ to je $J^{\alpha}B \cong B$, pa na osnovu teoreme 2.17 dijagram

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & J^{\alpha}H \\ & B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

komutira. Po pretpostavci, $H \longrightarrow B$ je univerzalni morfizam u kategoriji KHA pa postoji komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & J^{\alpha}H \arrow[d] \\ B \arrow[r] & L \end{tikzcd}$$

takav da je $J^{\alpha}H \longrightarrow L$ monomorfizam. Otuda, redom imamo

$$\begin{aligned} H \longrightarrow J^{\alpha}H \longrightarrow L &= H \longrightarrow B \longrightarrow L \\ &= H \longrightarrow J^{\alpha}H \longrightarrow B \longrightarrow L, \end{aligned}$$

pa kako je $H \longrightarrow J^{\alpha}H$ epimorfizam to je $J^{\alpha}H \longrightarrow L = J^{\alpha}H \longrightarrow B \longrightarrow L$, tj, dijagram

$$\begin{tikzcd} J^{\alpha}H \arrow[rr] \arrow[dr] & & L \\ & B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

komutira. Kako je $J^{\alpha}H \longrightarrow L$ monomorfizam to je i $J^{\alpha}H \longrightarrow B$ monomorfizam pa je za svaki ordinal α, $\mathrm{card}(J^{\alpha}H) \leq \mathrm{card}(B)$, tj. iz (ii) sledi (iii).

Pretpostavimo da je za neki ordinal α, $J^{\alpha}H \in KBA$. Obzirom na primedbu uz definiciju 2.42, morfizam $H \longrightarrow J^{\alpha}H$ je univerzalni epimorfizam u kategoriji KHA pa je, na osnovu prethodne teoreme morfizam $H \longrightarrow B = J^{\alpha}H$ refleksija algebre H u kategoriji KBA. Dakle (iii) implicira (i). $\dashv$

Posebno su zanimljive osobine J-operatora u topološkim algebrama, tj algebrama oblika OX, $X \in TOP$. Neke od razmotrenih osobina se mogu zgodno iskoristiti tako da se dobije jedna čisto algebarska formulacija Cantor-Bendixsonovog izvoda (Sacks, G.E. [1]). U razmatranjima koja slede neposredno, data je formulacija ovog koncepta u slučaju T_0-prostora. Nije jasno kako bi se ovaj rezultat mogao uopštiti na proizvoljne topološke prostore jer, pojam izolovane tačke u prostorima koji nisu T_0-prostori nema uobičajeno značenje. Naime, standardna definicija ovog pojma u takvim prostorima ne odgovara intuiciji koju o izolovanoj tački inače imamo.

Za proizvoljan zatvoren skup V topološkog prostora X neka je

$$i(V) = \{p \in V \mid p \text{ nije izolovana tačka u } V\}$$
$$s(V) = \bigcup\{Y \subseteq X \mid Y^c \in OX,\ Y \subseteq V \text{ i } i(V) = Y\},$$

tj. $i(V)$ i $s(V)$ su zatvoreni skupovi prostora X i pritom je $i(V)$ izvedeni skup od V (skup tačaka nagomilavanja skupa V), a $s(V)$ perfektni deo skupa V. Sasvim jednostavno se proverava da za proizvoljne zatvorene skupove U,V prostora X redom važi:

(i) $s(U) \subseteq U$

(ii) $s^2(U) = s(U)$

(iii) $s(U \cup V) = s(U) \cup s(V)$.

Otuda je jasno da je preslikavanje $j: OX \longrightarrow OX$ definisano tako da $\forall U \in OX.\ j(U) = s(U^c)^c$, J-operator algebre OX. Medjutim, operacije i i s se mogu na prirodan način proširiti na proizvoljnu kompletnu Heytingovu algebru.

<u>Definicija 2.47</u> Za proizvoljno $a \in H$, H kompletna Heytingo-

va algebra, $i(a)=b'_a(a)$ je *izvod* od $a\in H$. Pritom, b'_a je pseudokomplement J-operatora b_a u algebri JH.

Obzirom na Lemu 2.22, jednostavno se dobija da je za proizvoljno $a\in H$, $b'_a=j_{i(a)}\wedge j^a$. Otuda izračunavanje izvoda po definiciji najčešće nije uopšte jednostavno, ali se primenom sledeće leme može nešto pojednostaviti.

Lema 2.48 Za proizvoljno $a\in H$, $H\in KHA$,

$$i(a)=\bigwedge\{x\in H \mid a\le x \text{ i } b_a(x)=1\}.$$

U posebnom slučaju, $i(0)=\bigwedge\{x\in H \mid \neg x=0\}$.

Dokaz. Neka je $b=\bigwedge\{x\in H \mid a\le x \text{ i } b_a(x)=1\}$. Za svako $x\in H$ ako $a\le x$ i $b_a(x)=1$ tada $i(a)=b'_a(a)\le b'_a(x)=b'_a(x)\wedge b_a(x)=x$ pa dakle $i(a)\le b$.

Obratno, za svako $x\in H$, $b_a(x\vee(x\to a))=1$ tako da imamo $b\vee x\le x\vee(x\to a)$, odnosno $j_b(x)\wedge b_a(x)\le(x\wedge b_a(x))\vee((x\to a)\wedge b_a(x))$ $\le x\vee a$. Dakle, $j_b\wedge b_a\le j_a$, tj. imamo da je $j_b\wedge j^a\le b'_a$ i konačno $j_b\wedge j^a(a)\le b'_a(a)$, tj. $b\le i(a)$. ⊣

Operacija izvoda ima sledeće osobine:

Lema 2.49 Za sve $a,b\in H$, $H\in KHA$, važi

(i) $a\le i(a)$

(ii) $a\le b \Rightarrow i(a)\le i(b)$

(iii) $i(b\to a)=i(a)\vee(b\to a)$.

Dokaz: Neka $a\le b$ i $b\le x$, gde je x proizvoljan elemenat algebre H. Tada $x\to a\le x\to b$ i redom $x\to a\wedge b_b(x)=(x\to a)\wedge b=$ $(x\to a)\wedge b\wedge x=a$, pa dakle $b_b\le b_a$. Ali tada imamo da

$$b\le x \text{ i } b_b(x)=1 \Longrightarrow a\le x \text{ i } b_a(x)=1$$

pa na osnovu leme 2.48, $i(a)\le i(b)$, tj. (ii) je dokazano.

(iii) Neka je $p=b\to a$ i $k=b_p\in JH$. Tada je $b_a(p)=$ $((b\to a)\to a)\to a=b\to a=p$, tj. $b_a\le k$ pa imamo $k=b_a\vee j_p$ odnosno $k=$ $b'_a\wedge j^p$. Otuda $i(p)=k'(p)=b'_a(p)=(i(a)\vee p)\wedge(a\to p)$, pa kako je $a\le p$ to je konačno $i(b\to a)=i(a)\vee(b\to a)$.

(i) se dobija neposredno iz (iii) za b=1.

Definicija 2.50 $a\in H$, $H\in KHA$, je *perfektan* akko $i(a)=a$.

Lema 2.51 Skup $D=\{a\in H \mid a=i(a)\}$ perfektnih elemenata algebre $H\in KHA$ ima sledeće osobine:

(i) D je zatvoren za proizvoljne konjukcije

(ii) $\forall a,b\in H.\ a\in D \Longrightarrow b\rightarrow a\in D.$

Dokaz: Neka je $S\subseteq D$ proizvoljno. Tada za svako $a\in S$ važi $\bigwedge S\leq a$, pa zbog (ii) u prethodnoj lemi imamo da je $i(\bigwedge S)\leq i(a)=a$ tj. $i(\bigwedge S)\leq \bigwedge S.$ Obzirom na (i) u prethodnoj lemi $i(\bigwedge S)=\bigwedge S$, tj $\bigwedge S\in D$.

Za proizvoljne $a,b\in H$, ako $a\in D$ tada na osnovu (iii) u prethodnoj lemi imamo $i(b\rightarrow a)=a\vee(b\rightarrow a)=b\rightarrow a$, tj. $b\rightarrow a\in D.$ ⊣

Lema 2.52 Neka je $\bar{s}:H\longrightarrow H$, $H\in KHA$, preslikavanje definisano tako da $\forall x\in H.\ \bar{s}(x)=\bigwedge\{x\leq a \mid a\in D\}$. $\bar{s}$ je J-operator algebre $H\in KHA$.

Dokaz: Za svako $x\in H$, $x\leq\bar{s}(x)=\bar{s}^2(x)$. Takodje, $\forall x,y\in H.$ $x\wedge y\leq\bar{s}(x\wedge y)$, tj. $x\leq y\rightarrow\bar{s}(x\wedge y)$, pa kako je $\bar{s}(x\wedge y)$ perfektan to je $\bar{s}(x)\leq y\rightarrow\bar{s}(x\wedge y)$, tj. $y\leq\bar{s}(x)\rightarrow\bar{s}(x\wedge y)$. Isti argument takodje daje $\bar{s}(y)\leq\bar{s}(x)\rightarrow\bar{s}(x\wedge y)$. Konačno $\bar{s}(y)\wedge\bar{s}(x)\leq\bar{s}(x\wedge y)$. Suprotna nejednakost se dobija direktno. ⊣

J-operator $\bar{s}$, zbog analogije sa operatorom s definisanim ranije, nazivamo Cantor-Bendixsonovim operatorom algebre H.

Teorema 2.53 Za svaku algebru $H\in KHA$, $\bar{s}=\bigwedge\{k\in JH \mid k'=0\}$.

Dokaz: Neka je $p=\bigwedge\{k\in JH \mid k'=0\}$ i $k\in JH$ takav da $k'=0$. Za proizvoljno $x\in H$ neka je $a=k(x)$. Tada je $k(a)=a$, pa je $k\leq b_a$. Otuda $i(a)=b_a'(a)\leq k'(a)=a$ pa je a perfektan, tj. $\bar{s}(a)=a$. Kako je $x\leq a$ to je $\bar{s}(x)\leq\bar{s}(a)=k(x)$, pa dakle $\bar{s}\leq k$, tj. $\bar{s}\leq p$.

Obratno, za svako $x\in H$ neka je $a=\bar{s}(x)$, tj. a je perfektan pa $b_a'=j_a\wedge j^a=0$, odnosno $p\leq b_a$. Otuda $p(x)\leq p(a)\leq b_a(a)=a=\bar{s}(x)$, tj. imamo da je $p\leq\bar{s}.$ ⊣

Cantor-Bendixsonov operator $\bar{s}$ kompletne Heytingove algebre H je infimum filtra gustih elemenata algebre JH, pa otuda imamo:

$$JH\in KBA \text{ akko } \bar{s}=1 \text{ (u JH)}$$
$$\text{akko } \bar{s}(0)=1 \text{ (u H)}.$$

U slučaju T_0-prostora operator $\bar{s}:OX\longrightarrow OX$, $X\in Top$, zaista ima osobinu da $\forall U \in OX$. $\bar{s}(U)$=(perfektni deo od U')$'$, tj. $\bar{s}=s$. Da bi se to dokazalo, potrebno je definisati T_0-refleksiju proizvoljnog prostora $X \in$ Top.

Definicija 2.54 Za proizvoljan topološki prostor X, $x \in X$ neka je

$$x^- = \bigcap \{U \subseteq X \mid U \text{ je zatvoren skup u } X \text{ i } x \in U\}$$
$$x^o = \{U \in OX \mid x \in U\}$$
$$x^* = x^- \cap x^o,$$

tj. x^- je zatvorenje tačke x u prostoru X, x^* je zatvorenje tačke $x \in X$ u asociranom prostoru (videti 2.20) FX.

Jasno da je X T_0-prostor akko za svako $x \in X$, $x^*=\{x\}$. Za proizvoljno $A \subseteq X$ neka je $A^*=\{x^* \mid x \in A\}$. Direktno se proverava da je $OX^*=\{U^* \mid U \in OX\}$ topologija na skupu X^*. Preslikavanje $f: X \longrightarrow X^*$ definisano tako da $\forall x \in X$. $f(x)=x^*$ je neprekidna funkcija. Kao morfizam u kategoriji TOP, f je T_0-refleksija. Indukovani morfizam u kategoriji KHA, $Of: OX^* \longrightarrow OX$ je izomorfizam. Jer, primetimo da $\forall y \in X$. $y \in x^* \Longleftrightarrow y^*=x^*$. Ako $y \in x^*=x^- \cap x^o$ tada $y \in x^-$ i za svako $U \in OX$, $x \in U \Rightarrow y \in U$, tj. $x \in y^-$, pa dakle $x^-=y^-$. Otuda za svako $U \in OX$, $x \in U \Longleftrightarrow y \in U$ pa je $x^o=y^o$, tj. $y^*=x^*$, itd.

Definicija 2.55 Neka je S zatvoren skup topološkog prostora X. $x \in X$ je ispuštena tačka skupa S ako postoji $U \in OX$ takav da je $x \in S \cap U \subseteq x^*$. Takodje, neka je $d(S)=\{x \in S \mid x$ je ispuštena tačka u $S\}$.

Teorema 2.56 Neka je $X \in$ TOP i $A \in OX$ tada:

$$d(A')=A' \cap i(A) \quad \text{i} \quad i(A)=A \cup d(A').$$

Dokaz: Dovoljno je dokazati da je $d(A')=A' \cap i(A)$ jer tada $A \cup d(A')=A \cup (A' \cap i(A))=A \cup i(A)=i(A)$.

Po definiciji je $i(A)=\mathrm{int}(\bigcap\{U \in OX \mid A \subseteq U \text{ i } b_A(U)=X\})$. Ali za svako $U \in OX$, $b_A(U)=X$ akko $U \rightarrow A=A$

akko $\mathrm{int}(U' \cup A)=A$

akko $A'=(A' \cap U)^-$,

tako da je $i(A)=\mathrm{int}(\bigcap\{U \in OX \mid A \subseteq U \text{ i } A'=(A' \cap U)^-\})$. Neka je $x \in A' \cap i(A)$ i $V=\mathrm{int}(A \cup x^-)$. Dokazaćemo da je

$$x \in A' \cap i(A) \cap V \subseteq x^* \qquad (*)$$

tj. $x \in d(A')$. Primetimo da je $A' \cap V \subseteq A' \cap (A \cup x^-) = A' \cap x^- = x^-$. Ako $A' \cap V = \emptyset$ tada, obzirom da je $A \subseteq V$, $A' \subseteq V'$ i $(A' \cap (A \cup x^{-\prime}))^- = (A' \cap x^{-\prime})^- = (A \cup x^-)^{\prime -} = V^{\prime -} = A'$ pa dakle (obzirom da je $x \in A' \cap i(A)$ i $A \subseteq A \cup x^{-\prime}$) imamo da je $x \in A' \cap (A \cup x^{-\prime}) = A' \cap x^{-\prime} \subseteq x^{-\prime}$, što je kontradikcija. Otuda $A' \cap V \neq \emptyset$ pa $x^- \cap V \neq \emptyset$, tj. $x \in V$ čime je prvi deo relacije (*) dokazan. Za svako $y \in A' \cap i(A) \cap V$ imamo da je (kako je $y \in A' \cap V$) $y \in x^-$. Takodje, slično kao i malopre, imamo $y \in A' \cap \mathrm{int}(A \cup y^-)$ pa je $y \in \mathrm{int}(A \cup y^-) \cap x^-$ tako da $x \in \mathrm{int}(A \cup y^-)$ tj. $x \in A' \cap \mathrm{int}(A \cup y^-) \subseteq y^-$. Otuda $x^- = y^-$ pa $x^* = y^*$ i dakle $y \in x^*$, što dokazuje relaciju (*) u potpunosti.

Obratno, za svako $x \in X$, $x \in d(A')$ akko postoji $V \in OX$ tako da $x \in A' \cap V \subseteq x^*$. Neka je $U \in OX$ takvo da $A \subseteq U$ i $(A' \cap U)^- = A'$. Dokažimo da je $V \subseteq U$, tj. da je $x \in A' \cap i(A)$. Kako $x \in A' = (A' \cap U)^-$ i $x \in V$ to postoji $y \in A' \cap U \cap V \subseteq x^*$. Ali tada $y^* = x^*$ tako da imamo $A' \cap V \subseteq x^* = y^* \subseteq U$. Otuda konačno $V \subseteq A \cup U = U$. ⊣

<u>Definicija 2.57</u> Zatvoren skup S topološkog prostora X je perfektan ako $S \setminus d(S) = S$ (tj. $d(S) = \emptyset$). Razliku $S \setminus d(S)$ označavaćemo sa S^d.

<u>Posledica 2.58</u> Za svaki zatvoren skup $S \subseteq X$, $X \in TOP$, za svako $A \in OX$

$$S^d = i(S')' \quad \text{i} \quad i(A) = A^{\prime d \prime}.$$

Dokaz: Obzirom na prethodnu teoremu za $S = A'$ dobija se $S^d = S \cap d(A')' = (A \cup d(A'))' = i(A)'$. ⊣

<u>Posledica 2.59</u> Za svako $A \in OX$, $X \in TOP$, sledeće činjenice su ekvivalentne:

(i) A' je perfektan u smislu definicije 2.57,

(ii) A je perfektan u smislu definicije 2.50. ⊣

<u>Lema 2.50</u> Cantor-Bendixsonov operator $\bar{s}$ algebre OX, za proizvoljan topološki prostor X, ima sledeću osobinu:

Za svako $S \subseteq X$, S zatvoren u X, $\bar{s}(S')'$ je perfektan deo od S u smislu definicije 2.57. Specijalno, ako je X T_0-prostor tada je $\bar{s}$ uobičajena operacija "perfektan deo od".

Dokaz: Treba samo primetiti da za svako $S \subseteq X$, $S' \in OX$; $x \in X$ je ispuštena tačka skupa S akko x^* je izolovana tačka u skupu S^*.⊣

U slučaju T_0-prostora X^d je skup svih tačaka nagomilavanja prostora X pa je OX kompletna Booleova algebra akko je prostor X diskretan jer, tada je $X^d=\emptyset$. Algebra JOX je kompletna Booleova algebra akko je prostor X razbacan jer, u tom slučaju je $\bar{s}(X)=\emptyset$.

03. *Napomene o funktorima kategorije kompletnih Heytingovih algebri*

Reprezentacijom topološkog funktora $O:TOP \longrightarrow SKUP$ kategorije topoloških prostora u kategoriju skupova prostorom $\{0,1\}$ sa topologijom koja sadrži tri otvorena skupa, dobijeni su odgovarajući adjungovani funktori $O^*:SKUP \longrightarrow TOP$, $O_1^*:ODM \longrightarrow TOP$ kategorije ograničenih distributivnih mreža i funktor, u oznaci $O_2^*:KHA \longrightarrow TOP$, kategorije kompletnih Heytingovih algebri u kategoriju topoloških prostora.

U tako dobijenim adjunkcijama kategorija kompletnih Heytingovih algebri se javlja kao reflektivna kategorija u kategorijama skupova i funkcija i ograničenih distributivnih mreža, a kategorija topoloških Heytingovih algebri kao reflektivna podkategorija kategorije kompletnih Heytingovih algebri (redom teoreme 3.21, 3.29 i 3.38).

U prvom slučaju to daje zanimljivu konstrukciju slobodnih kompletnih Heytingovih algebri nad proizvoljnim skupom slobodnih generatora (3.21), a u slučaju ograničenih distributivnih mreža, da je svaka slobodna distributivna mreža sa nulom i jedinicom kompletna Heytingova algebra.

Pokazano je da se kategorija kompletnih Heytingovih algebri potpuno i verodostojno utapa u kategorije T-algebri i odgovarajućih morfizama, koje u ovim shemama adjunkcije na prirodan način indukuju monade ovih algebri.

Dualno u kategoriji topoloških prostora, svaka adjunkcija kontravarijantnih funktora O i O^*, odredjuje reflektivnu podkategoriju. U slučaju kategorije KHA, tj. u adjunkciji funktora O i O_2^* to je kategorija takozvanih staloženih prostora, a u slučaju kategorije ograničenih distributivnih mreža, kategorija takozvanih algebarskih prostora, tj. relativno kompaktnih Stoneovih prostora. U oba slučaja, teoreme 3.54 i 3.68, odgovarajući semantički funktor je verodostojno i potpuno utapanje ovih kategorija u kategoriju T-prostora koju indukuje komonada posmatrane adjunkcije.

Adjunkcija kontravarijantnih funktora O i O_1^* je analizirana u odnosu na uobičajenu Stoneovu dualnost (Nerode [1]). U adjunkciji funktora O i O* semantički funktor nije odredjen, tj. ostaje otvoren problem karakterizacije kategorije T-prostora koju indukuje komonada ove adjunkcije. Naime, njena formalna rekonstrukcija se može u potpunosti izvesti, ali je pitanje o kojoj se kategoriji topoloških prostora zapravo radi.

U ovim razmatranjima znatnije nego do sada, korišćena je aparatura teorije kategorija uglavnom prilagodjena onoj koja je izložena u Mac Laneovoj teoriji kategorija [1].

3. *O nekim funktorima u kategoriji kompletnih Heytingovih algebri*

Kontravarijantni funktor $O\colon TOP \longrightarrow KHA$, koji svakom topološkom prostoru pridružuje kompletnu Heytingovu algebru OX otvorenih skupova prostora X, a svakoj neprekidnoj funkciji $f\colon X \longrightarrow Y$ (dakle morfizmu u TOP) morfizam $Of\colon OY \longrightarrow OX$ u kategoriji KHA, definisan tako da $\forall y \in OY.\ Of(y) = \{t \in X \mid f(t) \in y\}$, se na prirodan način može produžiti do funktora u kategoriju ODM (ograničenih distributivnih mreža), odnosno u kategoriju SKUP (skupova). Jednostavno, kompozicijom funktora $O\colon TOP \longrightarrow KHA$ sa funktorima "redukcije" $KHA \hookrightarrow ODM$ i $ODM \hookrightarrow SKUP$, tj. funktorima koji "zaboravljaju" jedan deo (ili u potpunosti) strukture objekata i morfizama polazne kategorije, dobijaju se funktori $O\colon TOP \longrightarrow ODM$ i $O\colon TOP \longrightarrow SKUP$ (u istoj oznaci, ali je redovno precizirano o kojem se od spomenutih funktora radi). Obzirom da su funktori redukcije kovarijantni to je svaki od navedenih funktora kontravarijantan. Odredjena reprezentacija ovih funktora omogućava da se definišu odgovarajući adjungovani funktori $O^*\colon \mathcal{C} \longrightarrow TOP$ (gde je $\mathcal{C}$ bilo koja od kategorija KHA, ODM, SKUP). U svakom od spomenutih slučajeva funktor redukcije $OO^*\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ ima adjungovani funktor, tj. kategorija $OO^*\mathcal{C}$ je refléktivna u kategoriji $\mathcal{C}$. Takodje, kategorija O^*OTOP je koreflektivna u kategoriji TOP.

Ako je $C \in \mathcal{C}$ proizvoljan, ali fiksiran, objekt kategorije $\mathcal{C}$ tada sa $h^C\colon \mathcal{C} \to SKUP$ označavamo kontravarijantni funktor definisan tako da $\forall A \in \mathcal{C}.\ h^C(A) = \mathcal{C}(A,C)$ i $\forall f\colon A \longrightarrow B \in \mathcal{C}.\ h^C(f)(u) = uf$, za svako $u \in \mathcal{C}(B,C)$. Pritom je sa $\mathcal{C}(A,B)$ označen skup svih morfizama iz A u B u kategoriji $\mathcal{C}$.

U svakoj od spomenutih kategorija objekat $2 = \{0,1\}$ se javlja sa odgovarajućom strukturom, dakle kao skup, ograničena distributivna mreža ili kompletna Heytingova algebra. Pretpostavlja se da je u slučaju $2 \in$ TOP, u 2 zadata topologija $\{\emptyset, \{1\}, 2\}$ (Scottova topologija ili topologija Sierpinskog ili fuzzi ili ...) umesto uobičajene diskretne topologije.

Lema 3.1 Funktori O i h^2 (TOP$\longrightarrow$SKUP) su *prirodno ekvivalentni*, tj. postoji familija morfizama $\{t_X \mid X \in \mathrm{TOP}\}$ takva da za sve $X, Y \in$ TOP dijagram

$$\begin{array}{ccc} OY & \xrightarrow{Of} & OX \\ {\scriptstyle t_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t_X} \\ h^2(Y) & \xrightarrow{h^2 f} & h^2(X) \end{array}$$

komutira i pritom je za svako $X \in$ TOP, t_X izomorfizam, tj. bijekcija u ovom slučaju.

Dokaz: Za proizvoljan topološki prostor X i otvoren skup $U \in OX$ neka je $t_X(U)=u$, gde je $u: X \longrightarrow 2$ karakteristična funkcija skupa U, tj. $\forall x \in X.\ u(x)=1 \Longleftrightarrow x \in U$. Obzirom na pretpostavljenu topologiju u 2, neprekidne su upravo karakteristične funkcije otvorenih skupova prostora X (u diskretnoj topologiji su neprekidne karakteristične funkcije zatvoreno-otvorenih skupova), pa je t_X izomorfizam za svako X TOP. Neka je $f: X \longrightarrow Y$ neprekidna funkcija, $V \in OY$ i $v \in \mathrm{TOP}(Y,2)$ karakteristična funkcija otvorenog skupa V. Uočimo $u \in \mathrm{TOP}(X,2)$ definisano sa $u=h^2 f(v)=vf$ i odgovarajući otvoren skup $U \in OX$, tada $\forall x \in X.\ x \in U \Longleftrightarrow v(f(x))=(vf)(x)=1 \Longleftrightarrow f(x) \in V$, tj. $Of(V)=U$. Otuda je za proizvoljno $V \in OY$, $h^2 f \circ t_Y(V)=t_X \circ Of(V)$.$\dashv$

Slično, kako je 2 kompletna Heytingova algebra (ili ograničena distributivna mreža) to je za svako $X \in$ TOP na TOP$(X,2)$ indukovana struktura kompletne Heytingove algebre (ili ODM) jer za proizvoljne $u, v \in \mathrm{TOP}(X,2)$ neka je

$$\begin{aligned} u \le v \ &\text{akko}\ \forall x \in X.\ u(x) \le v(x) \\ &\text{akko}\ \forall x \in X.\ u(x)=1 \Longrightarrow v(x)=1, \end{aligned}$$

što u odgovarajućoj algebri OX znači da za sve $U, V \in OX$,

$$\begin{aligned} U \le V \ &\text{akko}\ \forall x \in X.\ x \in U \Longrightarrow x \in V \\ &\text{akko}\ U \subseteq V \end{aligned}$$

pa je indukovani poredak upravo kanonski poredak u algebri OX.

Za proizvoljnu familiju $S \subseteq \mathrm{TOP}(X,2)$ supremum $\bigvee S$ je definisan tako da za svako $x \in X$, $\bigvee S(x)=\bigvee\{u(x) \mid u \in S\}$, tj. $\bigvee S(x)=1 \Longleftrightarrow \exists u \in S.\ u(x)=1$ pa je $x \in \bigvee S$ akko $\exists U \in S.\ x \in U$, tj. $\bigvee S = \bigcup S$.

Dakle, indukovana struktura kompletne Heytingove algebre (ili ograničene distributivne mreže) na skupu TOP(X,$\mathit{2}$) odgovara upravo strukturi kompletne Heytingove algebre (ili ODM) na skupu OX, X$\in$TOP. Ukratko, kontravarijantni funktor TOP(-,$\mathit{2}$) u bilo koju od kategorija SKUP, ODM ili KHA je prirodno ekvivalentan standardnom topološkom funktoru O:TOP$\longrightarrow C$. U daljim razmatranjima neće se praviti razlika izmedju ovih funktora, tj. nekada će biti reči o otvorenim skupovima , a nekada o karakteristični funkcijama.

Kako je $\mathit{2}$ objekat svake od kategorija C to se na C(A,$\mathit{2}$), A$\in C$, može definisati topologija proizvoda (ili restrikovana topologija proizvoda) što odredjuje funktor O*:$C\longrightarrow$TOP; svakom objektu A kategorije C pridružen je prostor C(A,$\mathit{2}$). Pokazaćemo da su skupovi TOP(X,O*A) i C(A,OX) prirodno izomorfni, tj. da su O i O* adjungovani funktori.

<u>Definicija 3.2</u> Ako postoji bijekcija φ:A(A,GB)$\longrightarrow B$(FA,B) prirodna po obe promenljive, tj. uniformno definisana za proizvoljne objekte A$\in A$ i B$\in B$, tada je funktor F:$A\longrightarrow B$ *levo adjungovan* funktoru G:$A\longrightarrow B$, tj. G je desno adjungovan funktoru F.

Preslikavanje φ jedinstveno odredjuje prirodnu transformaciju t:$I_A\longrightarrow$GF jediničnog funktora I_A kategorije A na funktor GF:$A\longrightarrow A$, tj. familiju morfizama $t=\{\varphi(1_{FA})\mid A\in A\}$, a preslikavanje φ^{-1} prirodnu transformaciju s:FG$\longrightarrow I_B$ funktora FG:$B\longrightarrow B$ na jedinični finktor I_B kategorije B, tj. jedinstveno odredjuje familiju morfizama $s=\{\varphi^{-1}(1_{GB})\mid B\in B\}$. I obratno, transformacijama t i s jedinstveno je odredjeno preslikavanje φ. Transformacije t i s su redom *jedinica* adjunkcije $\langle F,G,\varphi\rangle:A\longrightarrow B$,odnosno *kojedinica* adjunkcije. Obzirom da je adjunkcija potpuno odredjena odgovarajućom jedinicom i kojedinicom to će se u buduće uglavnom koristiti i oznaka $\langle F,G,t,s\rangle:A\longrightarrow B$.

Svaka adjunkcija $\langle F,G,t,s\rangle:A\longrightarrow B$ odredjuje *monadu* u kategoriji A, tj. uredjenu trojku $T=\langle T,t,m\rangle$, gde je T=GF, t jedinica adjunkcije, a m (množenje u monadi T) prirodna transformacija $T^2\longrightarrow T$ odredjena sa $m=\{Gs_{FA}\mid A\in A\}$.

Terminologija (Mac Lane, S.[1]) je prirodna jer kada se algebra dosledno kategorizuje tada je monoid upravo funktor u odredjenoj kategoriji, jedinica (neutralni elemenat) monoida prirodna transformacija na jedinični funktor, a transformacija $m:T^2 \longrightarrow T$ upravo operacija množenja u monoidu T.

Monada T u kategoriji $\mathcal{A}$ odredjuje kategoriju $\mathcal{A}(T)$, čiji su objekti (*T-algebre*) parovi $\langle A,h\rangle$; gde je $A\in\mathcal{A}$, a $h:TA\longrightarrow A\in\mathcal{A}$ strukturalni morfizam algebre $\langle A,h\rangle$, a morfizmi $f:\langle A,h\rangle\longrightarrow\langle B,h\rangle$ odredjeni morfizmi u kategoriji $\mathcal{A}$; potpuno su opisani u 3.5. .

Funktor redukcije $S:\mathcal{A}(T)\longrightarrow\mathcal{A}$ ima levo adjungovani funktor $L:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}(T)$ takav da za svako $A\in\mathcal{A}$, $LA=\langle TA,m\rangle$ i za svaki morfizam $f\in\mathcal{A}$, $Lf=Ff$. U toj adjunkciji jedinica i kojedini su redom definisane sa: $t_A:A\longrightarrow TA$, $s_A:\langle TA,m\rangle\longrightarrow\langle A,h\rangle$ za svako $A\in\mathcal{A}$. Adjunkcija $\langle L,S,t,s\rangle:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}(T)$ indukuje istu monadu u kategoriji $\mathcal{A}$ kao i prethodna adjunkcija.

Monadom T odredjen je i *asocirani funktor* $K:\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{A}(T)$ definisan tako da $KB=\langle GB,Gs\rangle$ za svako $B\in\mathcal{B}$ i $Kg=Gg$ za svaki morfizam $g\in\mathcal{B}$. Pritom su dijagrami

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} & & \mathcal{A} \arrow[ll, "F"'] \arrow[dl, "L"] \\ & \mathcal{A}(T) \arrow[from=ul, "K"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "K"'] & & \mathcal{A} \\ & \mathcal{A}(T) \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

komutativni.

Obzirom na upravo izloženo, podkategorija $\mathcal{B}$ kategorije $\mathcal{A}$ je reflektivna u kategoriji $\mathcal{A}$ ako funktor redukcije S ima levo adjungovani funktor $T:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$; ranije spomenut kao reflektor. Takodje, za proizvoljan objekt $A\in\mathcal{A}$, refleksija objekta A u kategoriji $\mathcal{B}$ je par $\langle TA,t\rangle$, gde je $TA\in\mathcal{B}$, a $t:A\longrightarrow TA$ morfizam u kategoriji $\mathcal{A}$, tako da za svako $f:A\longrightarrow B\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$, postoji jedinstveni morfizam $g:TA\rightarrow B$ u kategoriji $\mathcal{B}$ takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"'] & & B \\ & TA \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

komutira.

Primetimo da ako je $T:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ reflektor sa jedinicom t tada za svako $A\in\mathcal{A}$, par $\langle TA,t\rangle$ je refleksija objekta A u kategoriji $\mathcal{B}$. Obratno, ako se pretpostavi da svaki objekat $A \in \mathcal{A}$ ima refleksiju $\langle TA, t\rangle$ u kategoriji $\mathcal{B}$ tada se funkcija $T:ob(\mathcal{A}) \longrightarrow ob(\mathcal{B})$ definisana na objektima kategorije $\mathcal{A}$ može produžiti do reflektora T sa jedinicom t.

Dualizacijom definicije 3.2 dobija se definicija adjunkcije kontravarijantnih funktora. Obzirom na njen značaj u daljim izlaganjima data je sa nešto više detalja.

Definicija 3.2´ Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ proizvoljne kategorije, a $F:\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ i $G:\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ kontravarijantni funktori. Ako postoji bijekcija φ koja svakom morfizmu $f:B \longrightarrow FA \in \mathcal{B}$ pridružuje morfizam u kategoriji $\mathcal{A}$, $f:A \longrightarrow GB$ takav da za sve $h:A' \longrightarrow A \in \mathcal{A}$, $k:B' \longrightarrow B \in \mathcal{B}$

$$\varphi(Fh \circ f) = \varphi f \circ h \quad \text{i} \quad \varphi(f \circ k) = Gk \circ \varphi f \tag{ad}$$

tada je kontravarijantni funktor $F:\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ adjungovan kontravarijantnom funktoru $G:\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$.

Za proizvoljno $A \in \mathcal{A}$ neka je $\varphi(1_{FA}) = t_A : A \longrightarrow GFA$. Za svaki morfizam $h:A' \longrightarrow A \in \mathcal{A}$ dijagram

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{h} & A \\ \downarrow t_{A'} & & \downarrow t_A \\ GFA' & \xrightarrow{GFh} & GFA \end{array}$$

komutira jer, obzirom na definiciju imamo $GFh \circ t_{A'} = GFh \circ \varphi(1_{FA'}) = \varphi(1_{FA'} \circ Fh) = \varphi(Fh \circ 1_{FA}) = \varphi(1_{FA}) \circ h = t_A \circ h$. Dakle, $t:I_{\mathcal{A}} \longrightarrow GF$ je prirodna transformacija, tj. jedinica adjunkcije.

Kako je za svaki morfizam $f:B \longrightarrow FA \in \mathcal{B}$, $A \in \mathcal{A}$, $\varphi(f) = \varphi(1_{FA} \circ f) = Gf \circ \varphi(1_{FA}) = Gf \circ t_A$, to je preslikavanje φ jedinstveno odredjeno transformacijom $t:I_{\mathcal{A}} \longrightarrow GF$.

Dualno, u definiciji adjunkcije preslikavanje φ je bijekcija skupova $\mathcal{B}(B,FA)$ i $\mathcal{A}(A,GB)$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, pa se adjunkcija može zadati na sledeći način: za svako $g:A \longrightarrow GB \in \mathcal{A}$ morfizam $\varphi^{-1}g:B \longrightarrow FA$ kategorije $\mathcal{B}$ je takav da za sve $h:A' \longrightarrow A \in \mathcal{A}$, $k:B' \longrightarrow B \in \mathcal{B}$,

$$\varphi^{-1}(g \circ h) = Fh \circ \varphi^{-1}g \quad \text{i} \quad \varphi^{-1}(Gk \circ g) = \varphi^{-1}g \circ k. \tag{ad*}$$

Za proizvoljno $B \in \mathcal{B}$ neka je $\varphi^{-1}(1_{GB}) = s_B : B \longrightarrow FGB$. Za svaki morfizam $k:B' \longrightarrow B$ dijagram

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "k"] \arrow[d, "s_{B'}"'] & B \arrow[d, "s_B"] \\ FGB' \arrow[r, "FGk"'] & FGB \end{tikzcd}$$

komutira, pa je $s:I_A\longrightarrow FG$ prirodna transformacija. Primetimo da za svako $g:A\longrightarrow GB\in A$, $B\in B$, $\varphi^{-1}g=\varphi^{-1}(1_{GB}\circ g)=Fg\circ\varphi^{-1}(1_{GB})=Fg\circ s_B$, tj. preslikavanje φ^{-1} je odredjeno kojedinicom adjunkcije.

Lema 3.3 Adjunkcija $\langle F,G,\varphi\rangle:A\longrightarrow B$ je potpuno odredjena kontravarijantnim funktorima $F:A\rightarrow B$ i $G:B\longrightarrow A$ i transformacijama $t:I_A\longrightarrow GF$ i $s:I_B\longrightarrow FG$. Pritom su

$$G\xrightarrow{tG}GFG\xrightarrow{Gs}G \text{ i } F\xrightarrow{Ft}FGF\xrightarrow{sF}F$$

identične transformacije funktora G odnosno F.

Dokaz: Kako je za svako $B\in B$, $s_B=\varphi^{-1}(1_{GB})$ to obzirom na definiciju adjunkcije $1_{GB}=\varphi(s_B)=Gs_B\circ t_{GB}$, tj. $G\xrightarrow{tG}GFG\xrightarrow{Gs}G$ je identična transformacija funktora G. Na sličan način se dokazuje i drugi identitet.⊣

Primetimo da adjunkciji $\langle F,G,t,s\rangle:A\longrightarrow B$ kontravarijantnih funktora F i G odgovara par adjunkcija $\langle F,G,t,s\rangle:A\longrightarrow B^{op}$ i $\langle G,F,s,t\rangle:B\longrightarrow A^{op}$ kovarijantnih funktora, pa se razmatranja u vezi sa definicijom 3.2 mogu primeniti i na adjunkciju kontravarijantnih funktora, tj. ona odredjuje monadu $T=\langle T,t,m\rangle$ u kategoriji A i komonadu $T^*=\langle T^*,s,n\rangle$ u kategoriji B. Pritom, $T=GF$ $T^*=FG$, a množenja m i n su redom odredjena sa: $m=GsF$ i $n=FtG$.

Ako je C bilo koja od kategorija SKUP, ODM ili KHA tada, obzirom na 3.1, kontravarijantni funktori $O^*:C\longrightarrow$ SKUP i $O:$ TOP $\longrightarrow$ SKUP definisani tako da $\forall A\in C$. $O^*(A)=C(A,2)$, $\forall X\in$ TOP $O(X)=$ TOP$(X,2)$ i $\forall f:A\longrightarrow B\in C$. $O^*f(u)=u\circ f$ za svako $u\in C(B,2)$ i $\forall g:X\longrightarrow Y\in$ TOP. $Og(v)=v\circ g$ za svako $v\in$ TOP$(Y,2)$, odredjuju kontravarijantne funktore (u istoj notaciji) $O^*:C\longrightarrow$ TOP i $O:$ TOP$\rightarrow C$. Jer, za svaki objekt $A\in C$, na skupu $C(A,2)$ odredjena je topologija proizvoda u kojoj je O^*f neprekidna funkcija za svaki morfizam $f\in C$. Takodje, za svaki topološki prostor X, na skupu TOP$(X,2)$ je odredjena struktura objekta kategorije C tako da je za svaku neprekidnu funkciju g, Og morfizam u kategoriji C.

Funktori O i O^* odredjuju kovarijantne funktore $T=OO^*$ i $T^*=O^*O$ kategorija C i TOP respektivno.

Za svaki objekat $A\in C$ neka je $t:A\longrightarrow TA$ definisano tako da za svako $a\in A$ i svako $v\in 0^*A$, $t(a)(v)=v(a)$. Za svaki topološki prostor X neka je $s:X\longrightarrow T^*X$ definisano tako da za svako $x\in X$ i svako $u\in 0X$, $s(x)(u)=u(x)$. Tj, transformacije t i s su definisane kao evaluacije i pritom, jednostavnosti radi, nisu posebno indeksirane odgovarajuće familije morfizama jer je uvek jasno o kojem se morfizmu radi.

<u>Teorema 3.4</u> $\langle 0^*,0,t,s\rangle:C\rightarrow TOP$ je adjunkcija kontravarijantnih funktora 0^* i 0 sa jedinicom t i kojedinicom s.

Dokaz: Pokažimo najpre da je familija t prirodna transformacija funktora $I_C\longrightarrow T$ (pa dakle, zbog simetričnosti definicije da je familija s prirodna transformacija $I_{TOP}\longrightarrow T^*$).

Neka je $f:A\longrightarrow B$ proizvoljni morfizam u kategoriji C. Treba pokazati da dijagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ TA & \xrightarrow{Tf} & TB \end{array}$$

komutira. Neka su $a\in A$, $b\in B$, $v\in 0^*A$, $w\in 0^*B$, $u\in TA$ proizvoljni ali u daljem fiksirani. Obzirom na definiciju imamo $t(a)(v)=v(a)$ i $t(b)(w)=w(b)$ tako da $t(a)(wf)=wf(a)=t(f(a))(w)$. Takodje imamo da je $(Tf)(u)=(00^*f)(u)=u(0^*f)$ tako da $(Tf)(u)(w)=u((0^*f)(w))=u(wf)$ pa dakle $(Tf)(t(a))(w)=t(a)(wf)=t(f(a))(w)$. Kako su a i w proizvoljni to je konačno $(Tf)t=tf$.

Neka je preslikavanje $\varphi:C(A,0X)\longrightarrow TOP(X,0^*A)$ definisano tako da za svako $f\in C(A,0X)$, $\varphi(f)=(0^*f)s$, i $\psi:TOP(X,0^*A)\longrightarrow C(A,0X)$ definisano sa: $\forall g\in TOP(X,0^*A)$. $\psi(g)=(0g)t$. Dokažimo da su preslikavanja φ i ψ jedna drugom inverzna.

Neka je $a\in A$ i $x\in X$ proizvoljno. Za svako $f\in C(A,0X)$ imamo $\varphi(f)(x)=((0^*f)s)(x)=(0^*f)(s(x))=s(x)f$ tako da je $\varphi(f)(x)(a)=s(x)(f(a))=f(a)(x)$. Na sličan način za svako $g\in TOP(X,0^*)$, $\psi(g)(a)(x)=g(x)(a)$. Otuda je $\psi(\varphi(f))=f$ i $\varphi(\psi(g))=g$.

<u>Lema 3.5</u> Familije morfizama definisane tako da za svako $A\in C$, $X\in TOP$

$$0^*A\xrightarrow{s}T^*0^*A\xrightarrow{0^*t}0^*A \text{ i } 0X\xrightarrow{t}T0X\xrightarrow{0s}0X$$

su jedinične transformacije 1_{0^*} i 1_0 funktora 0^* i 0. Takodje,

$$TA\xrightarrow{Tt}T^2A\xrightarrow{0s}TA \quad\text{i}\quad T^*X\xrightarrow{T^*s}T^{*2}X\xrightarrow{0^*t}T^*X$$

su jedinične transformacije 1_T i 1_{T^*} funktora T i T* respektivno.

Dokaz: Prve dve kompozicije su upravo $\varphi\psi(1_{0^*A})=1_{0^*A}$, odnosno $\psi\varphi(1_{0X})=1_{0X}$. Primenom funktora 0 odnosno 0* na prve dve kompozicije dobijaju se druge dve.⊣

Monada T i komonada T* u kategorijama C odnosno TOP odredju ju kategorije C(T) i TOP(T*) čiji su objekti T-algebre odnosno T*-algebre. Potsetimo se da je T-algebra par $\langle A,h\rangle$, gde je $A\in C$, a $h:TA\longrightarrow A\in C$ strukturalni morfizam (ili T-morfizam) takav da je

$$A\xrightarrow{t}TA\xrightarrow{h}A=1_A$$

i pritom dijagram

$$\begin{tikzcd} T^2A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "Th"'] & TA \arrow[d, "h"] \\ TA \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd}$$

komutira. Morfizmi kategorije C(T) su morfizmi $f:A\longrightarrow A'$ kategori je C takvi da dijagram

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "h"'] & TA' \arrow[d, "h'"] \\ A \arrow[r, "f"] & A' \end{tikzcd}$$

komutira i pritom, h i h' su strukturalni morfizmi T-algebri $\langle A,h\rangle$ odnosno $\langle A',h'\rangle$.

Lema 3.6 (i) Za svako $X\in$ TOP par $\langle 0X,0s\rangle$ je T-algebra, (ii) Za svako $A\in C$ par $\langle TA,m\rangle$ je T-algebra.

Dokaz: (i) $0X\xrightarrow{t}T0X\xrightarrow{0s}0X=1_{0X}$ je neposredna posledica prethodne leme. Kako je s prirodna transformacija to dijagram

$$\begin{tikzcd} T^{*2}X & T^*X \arrow[l, "s"'] \\ T^*X \arrow[u, "T^*s"] & X \arrow[l, "s"] \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

komutira. Primenom funktora 0 na navedeni dijagram, obzirom da je $0T^*=T0$ i $m0=0sT^*$, dobija se dijagram čiju egzistenciju tvrdi lema.

(ii) sledi kao poseban slučaj tvrdjenja (i) za $X=0^*A$.⊣

Definicija 3.7 Podkategorija B kategorije C je sekcija u za adjunkciju $\langle 0^*,0,t,s\rangle:C\longrightarrow$ TOP ako

(i) O(TOP) je podkategorija kategorije $\mathcal{B}$,

(ii) morfizmi t su epimorfizmi u kategoriji $\mathcal{B}$, tj. za svako $A\in\mathcal{C}$, za sve $f:TA\longrightarrow B$, $g:TA\longrightarrow B\in\mathcal{B}$, ako $ft=gt$ tada $f=g$,

(iii) svaki objekat $B\in\mathcal{B}$ je T-retraktivan, tj. postoji morfizam $h\in\mathcal{B}$ takav da $B\xrightarrow{t}TB\xrightarrow{h}B=1_B$.

Primetimo da na osnovu (ii) i (iii) za svako $B\in\mathcal{B}$ postoji u kategoriji $\mathcal{B}$ jedinstveni morfizam h takav da $ht=1_B$, u daljem T-strukturalni morfizam kategorije $\mathcal{B}$ (jer, kasnije će se pokazati da je $\langle B,h\rangle$ T-algebra). Na osnovu (i) i (iii) za svako $X\in TOP$, objekat OX ima strukturalni morfizam. Obzirom na lemu 3.6 taj morfizam je Os.

Zbog (i) funktor T se može posmatrati kao funktor $\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{B}$. Pokazaćemo da je funktor T levo adjungovan funktoru redukcije $S:\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{C}$

Teorema 3.8 Funktor T je reflektor kategorije $\mathcal{C}$ u B.

Dokaz: Neka je $f:A\longrightarrow B\in\mathcal{C}$, $A\in\mathcal{C}$, $B\in\mathcal{B}$ i k T-strukturalni morfizam objekta $B\in\mathcal{B}$. Ako je $g=k(Tf)$, tj. $g\in\mathcal{B}$ tada, obzirom da je transformacija t prirodna, imamo da je $tf=(Tf)t$ pa otuda $gt=k(Tf)t=ktf=1_Bf=f$, tj. dijagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"'] & & B \\ & TA \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

komutira. Kako je t epimorfizam u $\mathcal{B}$, postoji najviše jedan morfizam $g\in\mathcal{B}$ takav da $gt=f$ pa je par $\langle TA,t\rangle$ refleksija objekta A, odnosno funktor T je reflektor. ⊣

Time su odredjene dve adjunkcije kovarijantnih funktora, $\langle O^*,O,t,s\rangle:\mathcal{C}\longrightarrow TOP^{op}$ i $\langle T,S,t,h\rangle:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{B}$. Svaka od njih odredjuje monadu u kategoriji $\mathcal{C}$. Pokazaćemo da su te monade medjusobno jednake. Da se to učini, od koristi je odrediti kojedinicu druge adjunkcije.

Lema 3.9 Familija T-strukturalnih morfizama kategorije $\mathcal{B}$ je prirodna transformacija $TS\longrightarrow I_{\mathcal{B}}$ i kojedinica adjunkcije $\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{B}$.

Dokaz: Neka je $f:A\longrightarrow B$ proizvoljni morfizam u kategoriji $\mathcal{B}$ i h,k T-strukturalni morfizmi objekata $A,B\in\mathcal{B}$. Razmotrimo dijagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f"'] & TA \arrow[r, "h"] \arrow[d, "Tf"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "t"] & TB \arrow[r, "k"] & B \end{tikzcd}$$

Kako je t prirodna transformacija, levi kvadrat u dijagramu komutira, a obe horizontalne kompozicije su identiteti pa dakle $k(Tf)t=ktf=f=fht$. Ali, t je epimorfizam u kategoriji $\mathcal{B}$ tako da $k(Tf)=fh$, tj. desni kvadrat u dijagramu komutira. Otuda, familija T-strukturalnih morfizama je prirodna transformacija.

Obzirom na definiciju 3.2 transformacija t je jedinica adjunkcije $\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{B}$. Stoga, da bi se pokazalo da je familija T-strukturalnih morfizama kojedinica adjunkcije potrebno je dokazati da su prirodna preslikavanja

$$\mathcal{C}(A,SB) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}(TA,B)$$

indukovana transformacijom t i T-strukturalnim morfizmima medjusobno inverzna.

Neka su $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$, $f\in\mathcal{C}(A,SB)$ i $g\in\mathcal{B}(TA,B)$ proizvoljni i neka je k T-strukturalni morfizam objekta B. Morfizmi $\varphi(f)$ i $\psi(g)$ su kompozicije

$$TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{k} B \quad \text{odnosno} \quad A \xrightarrow{t} TA \xrightarrow{g} B.$$

Kako je $\psi\circ\varphi(f)=k(Tf)t$ to na osnovu dijagrama na samom početku dokaza leme, $\psi\circ\varphi(f)=f$. Da odredimo $\varphi\circ\psi(g)$ razmotrićemo dijagram

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tt"] & T^2A \arrow[r, "Tg"] & TB \arrow[r, "k"] & B \\ A \arrow[u, "t"] \arrow[r, "t"] & TA \arrow[u, "t"] \arrow[r, "g"] & B \arrow[u, "t"] & \end{tikzcd}$$

u kome, prva dva kvadrata komutiraju jer je transformacija t prirodna. Gornja horizontalna kompozicija je upravo $\varphi\circ\psi(g)$ tako da imamo $(\varphi\circ\psi(g))t=ktgt=gt$ pa dakle, kako je t epimorfizam u $\mathcal{B}$, $\varphi\circ\psi(g)=g.$ ⊣

<u>Teorema 3.10</u> Adjunkcije $\mathcal{C}\longrightarrow TOP^{op}$ i $\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{B}$ indukuju istu monadu u kategoriji $\mathcal{C}$.

Dokaz: U svakoj od adjunkcija javlja se funktor $T:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$ i jedinica je transformacija t pa je stoga još jedino potrebno pokazati da obe monade imaju isto množenje.

Neka je $A\in\mathcal{C}$ proizvoljno i $T^2A \xrightarrow{m,m'} TA$ množenja u prvoj odnosno drugoj monadi. Na osnovu leme 3.6 m je T-strukturalni morfizam objekta TA. Po definiciji, množenje m' se dobija primenom funktora redukcije S na kojedinicu $T^2A \longrightarrow TA$ što, obzirom na lemu 3.9, znači da je $m=m'$. $\dashv$

Termin, strukturalni morfizam upotrebljen je do sada u dva različita smisla. Kao T-strukturalni morfizam objekta A u kategoriji $\mathcal{B}$, tj. kao jedinstveni morfizam $h\in\mathcal{B}$ takav da $ht=1_A$ i kao strukturalni morfizam T-algebre $\langle A,h\rangle$. Opravdanje za to je sledeća

<u>Lema 3.11</u> Za svaki objekt $A\in\mathcal{B}$ sa strukturalnim morfizmom $h\in\mathcal{B}$, par $\langle A,h\rangle$ je T-algebra (sa strukturalnim morfizmom h).

Dokaz: Treba pokazati da je $A \xrightarrow{t} TA \xrightarrow{h} A = 1_A$, i da dijagram

$$\begin{tikzcd}
T^2A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "T"'] & TA \arrow[d, "h"] \\
TA \arrow[r, "h"] & A
\end{tikzcd}$$

komutira. Prva činjenica je upravo definiciono svojstvo T-strukturalnog morfizma, a komutativnost dijagrama sledi iz činjenice da je kojedinica prirodna transformacija (u adjunkciji $\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{B}$). $\dashv$

Funktor $K:\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{C}(T)$ definisan tako da $KA=\langle A,h\rangle$ i $Kf=f$ za svako $A\in\mathcal{B}$ sa strukturalnim morfizmom h i svako $f\in\mathcal{B}$, je <u>semantički funktor</u>.

<u>Lema 3.12</u> Funktor K je potpuno i verodostojno utapanje, tj. K je "na" obzirom na morfizme i 1-1 obzirom na morfizme i objekte. $\dashv$

Neka su $f,g:A\longrightarrow B\in\mathcal{C}$ proizvoljni morfizmi (moguće bilo koje kategorije). Morfizam $h:B\longrightarrow C$ je <u>kostabilizator</u> (koekvilajzer) morfizama f,g ako $hf=hg$ i za svaki $k:B\longrightarrow C'$ takav da $kf=kg$ postoji jedinstveno odredjen morfizam $h':C\longrightarrow C'$ takav da $h'h=k$.

<u>Lema 3.13</u> Za svaku T-algebru $\langle A,h\rangle$ strukturalni morfizam h je kostabilizator morfizama $m, Th: T^2A\longrightarrow TA$ u kategoriji $\mathcal{C}$.

Dokaz: Obzirom da dijagrami

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "t"] \arrow[d, "h"'] & T^2A \arrow[d, "Th"] \\
A \arrow[r, "t"] & TA
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^2A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "Th"'] & TA \arrow[d, "h"] \\
TA \arrow[r, "h"] & A
\end{tikzcd}$$

komutiraju i obzirom da je $ht=1_A$ i $mt=1_{TA}$ to komutira i dijagram

$$T^2A \underset{Th}{\overset{m}{\rightrightarrows}} TA \xrightarrow{h} A.$$

Ako su morfizmi $f:TA \longrightarrow C$, $g:A \longrightarrow C \in \mathcal{C}$ takvi da $fm=f(Th)$ i $g=ft$ ta- $f=fth$ i $g=ft$ pa je g jedinstveno odredjeno za svako $f \in \mathcal{C}$.⊣

Posledica 3.14 Ako je $P:\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ funktor u proizvoljnu kategoriju $\mathcal{A}$ tada za svaku T-algebru $\langle A,h \rangle$ morfizam Ph je kostabilizator morfizama Pm i $PTh \in \mathcal{A}$.⊣

Lema 3.15 Neka su $P,Q:\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ proizvoljni funktori i transformacija $w:PT \longrightarrow QT$ prirodna, tada za svaku T-algebru $\langle A,h \rangle$ postoji jedinstveno odredjen morfizam $v:PA \longrightarrow QA$ takav da

$$\begin{tikzcd} PTA \arrow[r, "Ph"] \arrow[d, "w"'] & PA \arrow[d, "v"] \\ QTA \arrow[r, "Qh"] & QA \end{tikzcd}$$

komutira.

Dokaz: Kako je w prirodna transformacija to je kompozicija $PT^2A \xrightarrow{Pm} PTA \xrightarrow{w} QTA \xrightarrow{Qh} QA$ jednaka kompoziciji $PT^2A \xrightarrow{w^*} QT^2A \xrightarrow{Qm} QTA \xrightarrow{Qh} QA$ što je, obzirom na posledicu 3.14 jednako sa kompozicijom $PT^2A \xrightarrow{w} QT^2A \xrightarrow{QTh} QTA \xrightarrow{Qh} QA$ koja je, obzirom na prirodnost transformacije w, jednaka kompoziciji $PT^2A \xrightarrow{PTh} PTA \xrightarrow{w} QTA \xrightarrow{Qh} QA$ pa dakle dijagram

$$PT^2A \underset{PTh}{\overset{Pm}{\rightrightarrows}} PTA \xrightarrow{w} QTA \xrightarrow{Qh} QA$$

komutira pa, obzirom na Posledicu 3.14, postoji jedinstveno odredjen morfizam $v:PA \longrightarrow QA \in \mathcal{A}$ takav da $(Qh)w=v(Ph)$.⊣

U svakom od slučajeva C i TOP odredićemo kategoriju $\mathcal{B}$ koja je sekcija odgovarajuće kategorije obzirom na odredjenu adjunkciju.

Funktor $O^*:SKUP \longrightarrow TOP$ je definisan tako da za svaki skup A, $O^*A=(A,2)$ sa topologijom proizvoda. Treba definisati funktor O^* za proizvoljnu funkciju $f:A \longrightarrow B$, i pokazati da je funkcija $O^*f:O^*B \longrightarrow O^*A$ neprekidna. Da bi se to učinilo potrebno je podrobnije opisati topologiju prostora O^*A.

Za svako $x\in A$ neka je $r(x)=\{p\in O^*A \mid p(x)=1\}$. Familija $r[A]=\{r(x) \mid x\in A\}$ je podbaza prostora O^*A, a $r:A\to OO^*A$ je jedno indeksiranje te baze. Za svaku funkciju $f:A\longrightarrow B$ i svako $x\in A$ imamo da $r(f(x))=\{q\in (B,2) \mid qf(x)=1\}=\{q\in (B,2) \mid O^*f(x)=1\}=(O^*f)^{-1}(r(x))$, tj. O^*f je neprekidna funkcija. Pritom, r koje se u jednakosti javlja sa leve strane je definisano na skupu B, tj. $r:B\longrightarrow OO^*B$.

Time je u kategoriji skupova definisana prirodna transformacija r jediničnog funktora na funktor $T=OO^*$. Primetimo takodje, da je r upravo evaluacija t definisana ranije (u 3.3). Jer, za svako $x\in A$ odredjena je neprekidna funkcija $t(x):O^*A\longrightarrow 2$ koju možemo posmatrati kao otvoren skup $\{p\in O^*A \mid t(x)(p)=1\}$ u prostoru O^*A. Kako je $t(x)(p)=p(x)$ to je $t(x)(p)=1$ akko $p(x)=1$, tj.kao otvoren skup, $t(x)$ je upravo $r(x)$. Dakle, r je jedinica u adjukciji funktora O^* i O.

Treba još odrediti i kojedinicu adjunkcije, tj. prirodnu transformaciju jediničnog funktora kategorije TOP na funktor $T^*=O^*O$.

<u>Definicija 3.16</u> Za svaki topološki prostor X za svako $x\in X$ neka je p_x funkcija $OX\longrightarrow 2$ definisana tako da za svaki otvoren skup $U\in OX$, $p_x(U)=1$ akko $x\in U$. Neka je $c:X\longrightarrow T^*X$ definisano tako da $\forall x\in X.\ c(x)=p_x$.

<u>Lema 3.17</u> Za svako $X\in TOP$ funkcija c je neprekidna i otvorena kao preslikavanje $X\longrightarrow c[X]$. c je 1-1 akko X je T_0-prostor. Familija funkcija c, $X\in TOP$ je upravo transformacija s, tj. kojedinica adjunkcije funktora O^* i O.

Dokaz: Za sve $U\in OX$, $x\in X$; $x\in c^{-1}(r(U))$ akko $p_x\in r(U)$ akko $x\in U$ pa dakle $c^{-1}(r(U))=U$..Kako je $r(U)$ podbazni skup c je neprekidna <u>relativno otvorena</u> funkcija.

Za sve $x,y\in X$, $p_x=p_y$ akko $x^-=y^-$ tj. c je 1-1 akko je prostor X T_0-prostor.

Neka je u karakteristična funkcija otvorenog skupa U. Obzirom na definiciju transformacije s imamo redom:

$c(x)(U)=1$ akko $p_x(U)=1$ akko $u(x)=1$ akko $s(x)(u)=1$,

ako identifikujemo U i u, $c=s$. ⊣

Obzirom na lemu i razmatranja koja joj neposredno prethode imamo sledeću teoremu.

Teorema 3.18 $\langle O^*,O,r,c\rangle$:SKUP⟶TOP je adjunkcija kontravarijantnih funktora O* i O. ⊣

Pokazaćemo da je kategorija KHA sekcija u kategoriji skupova za adjunkciju odredjenu u prethodnoj teoremi. Kako je za svaki topološki prostor X algebra OX kompletna Heytingova algebra to je uslov (i) definicije 3.7 zadovoljen. Uslovi (ii) i (iii) dokazani su u sledeće dve leme:

Lema 3.19 Funkcija r je epimorfizam u kategoriji KHA.

Dokaz: Neka su f,g:TA⟶H morfizmi u kategoriji KHA takvi da $fr=gr$. Dakle, morfizmi f i g su jednaki na podbaznim skupovima prostora O*A pa, obzirom da su f i g morfizmi u kategoriji KHA, tj. prolaze kroz konjunkciju, f i g su jednaki na baznim skupovima prostora O*A, a obzirom da prolaze kroz proizvoljne disjunkcije jednaki su na čitavoj algebri TA. ⊣

Lema 3.20 Za svako H∈KHA postoji jedinstveno odredjen morfizam h:TH⟶H takav da je $hr=1_H$.

Dokaz: Za svako $a\in H$ neka je $h(r(a))=a$ i za svaki bazni otvoren skup $U=r(a_1)\cap\ldots\cap r(a_n)$ prostora O*H neka je $h(U)=a_1\wedge\ldots\wedge a_n$. Takodje, za svako $S\in TH$ neka je $h(S)=\bigvee h(A)$, gde je A bilo koja familija baznih otvorenih skupova prostora O*H takva da $S=\bigcup A$. Dokaz da je morfizam h dobro definisan biće dat kasnije (u 3.28). Po konstrukciji h je morfizam u KHA i $hr=1_H$. Jedinstvenost sledi iz prethodne teoreme. ⊣

Teorema 3.21 Kategorija KHA je sekcija u kategoriji skupova za adjunkciju $\langle O^*,O,r,c\rangle$. Funktor T:SKUP⟶KHA je reflektor i za svaki skup A, TA je slobodna kompletna Heytingova algebra nad skupom slobodnih generatora A, a funktor $K:KHA\longrightarrow SKUP(T)$ (semantički funktor) je izomorfizam.

Dokaz: Obzirom na 3.12, dovoljno je pokazati da je funktor K potpun i da je svaka T-algebra slika neke kompletne Heytingove algebre. Ovo poslednje se može dobiti kao neposredna posledica Beckove teoreme (Mac Lane, S.[1]) jer, kako je već napomenuto, kategorija KHA je jednačinska u širem smislu pa su sve pretpostavke Beckove teoreme ispunjene. Ovde će biti dat direktan dokaz.

Neka je $\langle A,h\rangle$ T-algebra. Konstruisaćemo operacije $\wedge$ i $\vee$ na A, zatim (ii) pokazati da je $\langle A,\wedge,\vee,h(0),h(1)\rangle$ distributivna mreža i h homomorfizam distributivnih mreža, (iii) konstruisati operaciju $\bigvee:PA\longrightarrow A$ i pokazati da je $\bigvee$ infinitarna disjunkcija na A, tj. da je A kompletna mreža i (iv) da je A kompletna Heytingova algebra i h morfizam u KHA.

Primedba: Neka su $\wedge',\vee'$ operacije u mreži TA tada postoje jedinstvene operacije $\wedge,\vee$ u A takve da

(*) $\quad h(a\wedge' b)=h(a)\wedge h(b)$ i $h(a\vee' b)=h(a)\vee h(b)$

za sve $a,b\in TA$.

Neka je $\wedge''$ odgovarajuća operacija u T^2A. Obzirom da dijagram

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "h"'] & T^2A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "Th"] & TA \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "r"] & TA \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd}$$

komutira to imamo (a) $hr=1_A$ i $hm=hTh$ i

(b) $rh=Th\,r'$.

Kako je $\langle TA,m\rangle$ takodje T-algebra to $mr'=1_{TA}$ i kako su Th i m homomorfizmi u KHA to za sve $u,v\in T^2A$

(c) $Th(u\wedge'' v)=Th(u)\wedge' Th(v)$ i

$m(u\wedge'' v)=m(u)\wedge' m(v)$.

Otuda, ako je $\wedge$ bilo koja operacija u A sa osobinom (*) tada, zbo (a) za sve $a,b\in A$, $a\wedge b=hr(a)\wedge hr(b)=h(r(a)\wedge' r(b))$ što pokazuje d postoji najviše jedna takva operacija i, više od toga, kako se or može konstruisati.

Definišimo $\wedge$ tako da za sve $a,b\in A$, $a\wedge b=h(r(a)\wedge' r(b))$ i dokažimo da je relacija (*) zadovoljena. Neka su $x,y\in TA$ proizvoljni i neka je $u=r'(x)$ i $v=r'(y)$ tada zbog (b) i $mr'=1_{TA}$ imamo

(d) $\quad rh(x)=Th(u)$ i $rh(y)=Th(v)$ i

(e) $\quad m(u)=x$ i $m(v)=y$.

Otuda redom imamo $h(x)\wedge h(y)=h(rh(x)\wedge' rh(y))$ (po definiciji)

$$\begin{aligned} &=h(Th(u)\wedge' Th(v)) && \text{zbog (d)}\\ &=hTh(u\wedge'' v) && \text{zbog (c)}\\ &=hm(u\wedge'' v) && \text{zbog (a)}\\ &=h(m(u)\wedge' m(v)) && \text{zbog (c)}\\ &=h(x\wedge' y). \end{aligned}$$

Analogno se konstruiše i operacija $\vee$. Obzirom na relaciju (*), $\langle A,\wedge,\vee,h(0),h(1)\rangle$ je distributivna mreža i h je homomorfizam distributivnih mreža tj. (i) i (ii) je dokazano.

Da pokažemo da važi (iii) dokazaćemo da za svaku T-algebru $\langle A,h\rangle$ postoji jedinstvena operacija $\bigvee:PA\longrightarrow A$ takva da za svaki podskup S od PA, $h(\bigvee' S)=\bigvee h[S]$, gde je $\bigvee'$ infinitarna disjunkcija u algebri TA.

Primetimo da je P=partitivni skup od ( ), funktor u kategoriji skupova. Za svaku funkciju $f:A\longrightarrow B$, TA i TB su kompletne Heytingove akgebre i Tf morfizam u kategoriji KHA koji čuva supremume tako da dijagram

$$\begin{array}{ccc} PTA & \xrightarrow{PTh} & PTB \\ {\scriptstyle\bigvee}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bigvee} \\ TA & \xrightarrow{Th} & TB \end{array}$$

komutira, tj. $\bigvee:PT\longrightarrow T$ je prirodna transformacija, što obzirom na lemu 3. 15, znači da postoji jedinstveno odredjen morfizam $\bigvee:PA\longrightarrow A$ takav da dijagram

$$\begin{array}{ccc} PTA & \xrightarrow{Ph} & PA \\ {\scriptstyle\bigvee'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bigvee} \\ TA & \xrightarrow{h} & A \end{array}$$

komutira, čime je (iii) dokazano.

Dokažimo (iv) tj. da za svaku T-algebru $\langle A,h\rangle$ indukovana mreža $\langle A,\wedge,\vee,h(0),h(1)\rangle$ je kompletna Heytingova algebra i da je h morfizam u kategoriji KHA.

Neka su $\wedge'$ i $\bigvee'$ odgovarajuće operacije u algebri TA i $\bigvee$ indukovana operacija $PA\longrightarrow A$. Za svako $S\subseteq A$ i $x\in S$ imamo da je $r(x)\leq \bigvee' r[S]$ tako da $x=hr(x)\leq h(\bigvee' r[S])=\bigvee hr[S]=\bigvee S$. Takodje za svako $a\in A$ imamo redom: $a\wedge\bigvee S=hr(a)\wedge h(\bigvee' r[S])$

$$\begin{aligned} &=h(r(a)\wedge' \textstyle\bigvee' r[S])\\ &=h(\textstyle\bigvee'\{r(a)\wedge' r(x)\mid x\in S\})\\ &=\textstyle\bigvee\{h(r(a)\wedge' r(x))\mid x\in S\} \end{aligned}$$

$$=\bigvee\{hr(a)\wedge hr(x) \mid x\in S\}$$
$$=\bigvee\{a\wedge x \mid x\in S\}.$$

Otuda, ako za svako $x\in S$, $x\leq y$ tada $y\wedge\bigvee S=\bigvee\{x\wedge y \mid x\in S\}=\bigvee S$, tj. $\bigvee S\leq y$ pa je $\bigvee S$ supremum od S. Osim toga, obzirom na dokaz činjenice (iii), h je morfizam u kategoriji KHA.

Na osnovu leme 3.12, semantički funktor K je verodostojan i utapanje ali nije odmah jasno da je potpun. Dokaz njegove potpunosti biće dat u 3.30.$\dashv$

R.Pare [1] je posmatrao adjunkciju $\langle F,S,t,s\rangle$, gde je S redukcija a $F:SKUP\longrightarrow TOP$ Stone-Čechova kompaktifikacija diskretnog topološkog prostora. Dobijeni rezultat je nešto opštiji, u odredjenom smislu, iako ne pretstavlja uopštenje Pareovóg rezultata.

Topologija prostora 0^*X je topologija proizvoda Scottovog prostora 2, ali se na prirodan način javljaju sledeće dve topologije: topologija proizvoda na skupu $(X,\bar{2})$, gde je $\bar{2}$ diskretan prostor na 2 i asocirana topologija prostora 0^*X, tj. topologija (minimalna) u kojoj je svaki otvoren skup u 0^*X zatvoreno-otvoren. Neka su cl_1, cl_2 i cl_3 redom operatori zatvorenja u prostorima 0^*X, $(X,\bar{2})$ i asociranom prostoru (pritom, X je proizvoljan skup), tada za svako $A\subseteq 0^*X$, $A\subseteq cl_3(A)\subseteq cl_2(A)\subseteq cl_1(A)$. Jer, svaki podbazni skup u prostoru 0^*X je zatvoreno-otvoren u prostoru $(X,\bar{2})$, a ovi zatvoreno -otvoreni skupovi čine bazu prostora $(X,\bar{2})$. Dakle, topologija prostora 0^*X je sadržana u topologiji prostora $(X,\bar{2})$, a ova opet u topologiji asociranog prostora prostoru 0^*X.

U specijalnom slučaju, ako je $X=0Y$, gde je Y proizvoljan topološki prostor, tada je $0^*X=T^*Y$ i kako je $s[Y]$ podskup od T^*Y imamo redom: $s[Y]\subseteq cl_3(s[Y])\subseteq cl_2(s[Y])\subseteq cl_1(s[Y])$.

Razmotrićemo odnos kategorija ODM i TOP. Već je ranije napomenuto da postoje funktori (kontravarijantni) $0:TOP\rightarrow ODM$ i $0_1^*:ODM\longrightarrow TOP$. Definisaćemo prirodne transformacija i jediničnih funktora I_{ODM} i I_{TOP} na funktore $T_1=00_1^*$ i $T_1^*=0_1^*0$ respektivno, tj. odredićemo adjunkciju funktora 0_1^* i 0.

Za svaku distributivnu mrežu D, skup svih morfizama

$(D,2)=O_1^*D$ je podskup od O^*D. Pretpostavićemo da je u O_1^*D zadata topologija indukovana topologijom prostora O^*D. Na taj način je definisan kontravarijantni funktor $O_1^*:ODM \longrightarrow TOP$.

Za svaku distributivnu mrežu D postoji obostrano jednoznačna korespodencija izmedju skupova $(D,2)$, $I(D)$ i $F(D)$ svih morfizama mreže D u mrežu 2, svih prostih ideala u D i svih prostih filtera u mreži D. Ako je I ideal u D i F filter u D takvi da $I \cap F=\emptyset$ tada postoji morfizam $p\in(D,2)$ takav da $p[I]=\{0\}$ i $p[F]=\{1\}$. Za proizvoljne a,b D, ako nije $b\leq a$ tada postoji morfizam $p\in(D,2)$ takav da $p(a)=0$ i $p(b)=1$.

<u>Definicija 3.22</u> Za svako $a\in D$, $D\in ODM$ neka je $r_1(a)=r(a)\cap O_1^*D=\{p\in O_1^*D \mid p(a)=1\}$, tj. $r_1[D]$ je podbaza topologije prostora O_1^*D.

Slično kao u 3.14, jednostavno se pokazuje da je transformacija r_1 upravo evaluacija t, tj. da je $r_1:I_{ODM}\longrightarrow T_1$ prirodna transformacija, tj. jedinica adjunkcije funktora O_1^* i O. Takodje treba pokazati da je za svako $D\in ODM$, $r_1:D\longrightarrow T_1D$ morfizam u kategoriji ODM. Više od toga, važi sledeća

<u>Lema 3.23</u> Za svaku distributivnu mrežu D, r_1 je monomorfizam u kategoriji ODM, a $r_1[D]$ je upravo familija kompaktnih otvorenih skupova prostora O_1^*D. Posebno $r_1[D]$ je baza prostora O_1^*D zatvorena za konačne konjunkcije (preseke).

Dokaz: Obzirom na primedbu koja neposredno prethodi definicuji 3.22, r_1 je monomorfizam u kategoriji ODM, pa je $r_1[D]$ zatvoren za konačne preseke i proizvoljne unije, tj. $r_1[D]$ je baza prostora O_1^*D. Sasvim jednostavno, svaki kompaktan otvoren skup prostora O_1^*D je elemenat od $r_1[D]$. Obratno takodje sledi na osnovu spomenute primedbe.$\dashv$

Kojedinica c u adjunkciji $\langle O^*,O,r,c\rangle$ je takodje kojedinica u adjunkciji kontravarijantnih funktora O_1^* i O, naime važi sledeća

<u>Lema 3.24</u> Sa svaki topološki prostor X, $c[X]\subseteq T_1^*X\subseteq T^*X$.

Dokaz: Neka je $D=OX$, $X\in TOP$, tada $T_1^*X=O_1^*D\subseteq O^*D=T^*X$.

Jednostavno se proverava (kao u 3.16) da je za svako $x \in X$, p_x morfizam algebre D u 2, tako da je $c[X] \subseteq T_1^* X$. $\dashv$

Dakle, neprekidna funkcija $c: X \longrightarrow T_1^* X$ je upravo evaluacija s, tj. prirodna transformacija jediničnog funktora kategorije TOP na funktor T_1^*. Otuda važi sledeća

Teorema 3.25 $\langle O_1^*, O, r_1, c \rangle$: ODM $\longrightarrow$ TOP je adjunkcija kontravarijantnih funktora O_1^* i O. $\dashv$

Pokazaćemo da kategorija KHA zadovoljava sve uslove definicije 3.7, tj. da je kategorija KHA sekcija u kategoriji ODM za adjunkciju $\langle O_1^*, O, r_1, c \rangle$. Jer, za svako $X, f \in$ TOP, $OX, Of \in$ KHA, tj uslov (i) je trivijalno zadovoljen. Da se dokaže (ii) dovoljno je primetiti da je r_1 epimorfizam u kategoriji KHA, što je potpuno isto kao i dokaz leme 3.19. Ostaje dakle da se dokaže da je zadovoljen i uslov (iii).

Lema 3.26 Neka su A, B podskupovi od H, $H \in$ KHA i neka je $\bigcup r_1[A] = \bigcup r_1[B]$ tada $\bigvee A = \bigvee B$.

Dokaz: Za svako $a \in A$, $r_1(a)$ je kompaktan podskup od $O_1^* H$ i pokriven je sa r_1 B pa dakle postoje $b_1, \ldots, b_n$ B takvi da je $r_1(a) \subseteq r_1(b_1) \cup \ldots \cup r_1(b_n)$. Otuda $a \leq b_1 \vee \ldots \vee b_n$, tj. $\bigvee A \leq \bigvee B$. I na isti način, $\bigvee B \leq \bigvee A$.

Teorema 3.27 Za svako $H \in$ KHA postoji jedinstveno odredjen morfizam $h: T_1 H \longrightarrow H$ takav da je $hr_1 = 1_H$.

Za svaku distributivnu mrežu D, ako postoji morfizam u kategoriji ODM, $h: T_1 D \longrightarrow D$ takav da je $hr_1 = 1_D$ tada je D kompletna Heytingova algebra i h je morfizam u kategoriji KHA, odredjen u prethodnom delu tvrdjenja.

Dokaz: Za svako $U \in T_1 H$ neka je $h(U) = \bigvee A$, gde je A proizvoljan podskup od H takav da je $U = \bigcup r_1[A]$. Preslikavanje h je dobro definisano obzirom na prethodnu lemu. Pokazaćemo da je h morfizam u kategoriji KHA.

Kako je $r_1(0) = \emptyset$ i $r_1(1) = T_1 H$ to imamo da je $h(\emptyset) = 0$ i $h(T_1 H) = 1$. Neka su $U, V \in T_1 H$ proizvoljni i neka su $A, B \subseteq H$ takvi da je $U = \bigcup r_1[A]$ i $V = \bigcup r_1[B]$. Takodje pretpostavimo da je $C = \{a \wedge b \mid a \in A \text{ i } b \in B\}$. Jednostavno se proverava da je $U \cap V = \bigcup r_1[C]$, pa obzirom na distributivnost, redom imamo: $h(U)\wedge h(V)=h(U)\wedge\bigvee B=$ $\bigcup\{h(U)\wedge b\mid b\in B\}=\bigcup\{\bigvee\{a\wedge b\mid a\in A\}\mid b\in B\}=\bigvee C=h(U\cap V)$.

Za svako $S\subseteq T_1H$, za proizvoljno $U\in S$ neka je $A(U)\subseteq H$ takav da $U=\bigcup r_1[A(U)]$ i neka je $A=\bigcup\{A(U)\mid U\in S\}$, tada $\bigcup S=\bigcup r_1[A]$ tako da redom imamo: $h(\bigcup S)=\bigvee A=\bigvee\{\bigvee A(U)\mid U\in S\}=\bigvee\{h(U)\mid U\in S\}=$ $\bigvee h[U]$. Time je dokazano da je h morfizam u kategoriji KHA, a obzirom na definiciju, trivijalno je zadovoljeno $hr_1=1_H$. H je jedinstveno odredjen obzirom da je r_1 epimorfizam u kategoriji KHA čime je dokazan prvi deo teoreme.

Dokažimo da je D kompletna Heytingova algebra. Pretpostavimo da je $A\subseteq D$ i da je $U=\bigcup r_1[A]$. Neka je $b=h(U)$ tada $a\in A\Longrightarrow$ $r_1(a)\subseteq U\Longrightarrow a=hr_1(a)\leq h(U)=b$, tj. b je gornje ograničenje skupa A. Ako je c proizvoljno gornje ograničenje za A tada $U\subseteq r_1(c)$ pa $b=h(U)\leq hr_1(c)=c$, tj. $b=\bigvee A$ i D je kompletna mreža.

Da bi smo pokazali da je D kompletna Heytingova algebra dokazaćemo da se u D može definisati implikacija.

Za sve $a,b\in D$ neka je $a\rightarrow b=h(U)$, gde je $U=r_1(a)\rightarrow r_1(b)=$ $\mathrm{int}(r_1(a)'\vee r_1(b))$, tada $a\wedge(a\rightarrow b)=hr_1(a)\wedge h(U)=h(r_1(a)\cap U)\leq$ $hr_1(b)=b$ i obratno, za svako $x\in D$, $x\wedge a\leq b\Longrightarrow r_1(x)\cap r_1(a)\subseteq r_1(b)$ $\Longrightarrow r_1(x)\subseteq U\Longrightarrow x=hr_1(x)\leq h(U)=a\rightarrow b$, tj. $\rightarrow$ je implikacija u D.

Konačno, za svako $A\subseteq D$, $h(\bigcup r_1[A])=\bigvee A$, tj. h je morfizam u kategoriji KHA.$\dashv$

<u>Posledica 3.28</u> Za svako $H\in$ KHA postoji jedinstveno odredjen morfizam $k:TH\longrightarrow H$ takav da je $kr=1_H$.

Dokaz: Kako je O_1^*H podprostor od O^*H to je restrikcija $f:TH\longrightarrow T_1$, $\forall U\in TH.\ f(U)=U\cap O_1^*H$, morfizam u kategoriji KHA, zapravo, $r_1=fr$. Neka je $k=hf$, gde je h morfizam u KHA odredjen u prvom delu prethodne teoreme, tada je k morfizam u KHA i pritom $kr=hfr=hr_1=1_H$. Obzirom da je r epimorfizam u kategoriji KHA to je k jedinstveno odredjen.$\dashv$

Obzirom na posledicu 3.28, lema 3.20 je u potpunosti dokazana.

<u>*Teorema* 3.29</u> Kategorija KHA je sekcija u kategoriji ODM za adjunkciju O_1^*, O, r_1, c. Funktor T_1:ODM$\rightarrow$KHA je reflektor i semantički funktor K_1:KHA$\longrightarrow$ODM(T_1) je izomorfizam. Svaka slobodna ograničena distributivna mreža je Heytingova algebra.

Ako je semantički funktor K potpun, tada obzirom na sadržaj leme 3.27, K je izomorfizam. Traba dakle pokazati da je K potpun, tj. "na" obzirom na morfizme.

<u>Lema 3.30</u> Neka su H i K kompletne Heytingove algebre i h,k odgovarajući T_1-strukturalni morfizmi. Označimo sa h_1,k_1 redom kompozicije

$$TH \longrightarrow T_1H \xrightarrow{h} H \quad i \quad TK \longrightarrow T_1K \xrightarrow{k} K$$

gde su $TH \longrightarrow T_1H$ i $TK \longrightarrow T_1K$ odgovarajuće restrikcije, tj. h_1 i k_1 su T-strukturalni morfizmi algebri H,K respektivno.

(i) Za svaku funkciju $f:H \longrightarrow K$, ako komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} TH \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "h_1"'] & TK \arrow[d, "k_1"] \\ H \arrow[r, "f"] & K \end{tikzcd}$$

tada je f morfizam u kategoriji ODM i dijagram

$$\begin{tikzcd} T_1H \arrow[r, "T_1f"] \arrow[d, "h"'] & T_1K \arrow[d, "k"] \\ H \arrow[r, "f"] & K \end{tikzcd}$$

komutira.

(ii) Ako je $f:H \longrightarrow K$ morfizam u kategoriji ODM i prethodni dijagram komutira tada je f morfizam u kategoriji KHA.

Dokaz: (i) Ako prvi dijagram komutira tada komutira i dijagram

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "r_1"'] & TH \arrow[r, "Tf"] \arrow[d] & TK \arrow[d] \\ & T_1H \arrow[r, "T_1f"] \arrow[d, "h"'] & T_1K \arrow[d, "k"] \\ & H \arrow[r, "f"] & K \end{tikzcd}$$

i posebno, donji kvadrat komutira i pritom $f= kT_1fr_1$, tj. f je morfizam u kategoriji ODM (jer, $k,T_1f,r_1 \in$ ODM).

(ii) Neka je $A \subseteq H$ proizvoljno i neka je $U=\bigcup r_1[A]$ tako da je $h(U)=\bigvee A$. Otuda, $Tf(U)=\bigcup r_1f[A]$ tako da $(r_1T_1f)(U)=\bigvee f[A]$, pa dakle $f(\bigvee A)=fh(U)=(kT_1f)(U)=\bigvee f[A]$, tj. f je morfizam u kategoriji KHA. $\dashv$

Obzirom na prethodnu lemu i definiciju morfizama u kategorijama SKUP(T), odnosno ODM(T_1^*), svaki morfizam u ovim kategorijama je morfizam u KHA, tj. semantički funktor K je potpun u oba slučaja. To upotpunjuje dokaze teorema 3.21 i 3.29.

Za proizvoljnu distributivnu mrežu D, prostor O_1^*D je upravo Stoneov prostor mreže D. Familija GO_1^*D kompaktnih otvorenih skupova prostora O_1^*D je mreža izomorfna sa D. Obratno, za svaki Stoneov prostor X, tj T_0-prostor za bazom koja je prsten kompaktnih otvorenih skupova i osobinom da proizvoljne neprazne familije $\{X_i \mid i\in I\}$ i $\{Y_j \mid j\in J\}$ ako

$$\bigcap_{i\in I} X_i \subseteq \bigcup_{j\in J} Y_j$$

tada postoje konačni $\bar{I}\subseteq I$ i $\bar{J}\subseteq J$ takvi da je $\bigcap_{i\in\bar{I}} X_i \subseteq \bigcup_{j\in\bar{J}} Y_j$, prostori X i O_1^*GD su homeomorfni.

Zanimljivo je da su i prostori oblika O*X takodje Stoneovi prostori.

Lema 3.31 | Za svaki skup X, prostor O*X je Stoneov prostor.

Dokaz: Neka je D distributivna mreža kofinitnih podskupova od X, tj. skupova sa konačnim komplementom. Dokazaćemo da su prostori O*X i O_1^*D homeomorfni.

Neka je p O_1^*D. Za svako $Y=X-\{a_1,\dots,a_n\}=\{a_1\}'\cap\dots\cap\{a_n\}'$ imamo da je $p(Y)=p(\{a_1\}')\wedge\dots\wedge p(\{a_n\}')$, pa p odredjuje funkciju $f\in O^*X$ tako da $\forall a\in X.\ f(a)=p(\{a\}')$ i obratno, svaka funkcija f odredjuje jedan morfizam $p\in(D,2)$, tj. $p\in O_1^*D$.

Bijekcija $f\longmapsto p$ je homeomorfizam prostora O*X i O_1^*D jer, svaki bazni otvoren skup prostora O_1^*D je oblika

$$r_1(Y)=\{p\in O_1^*D \mid p(Y)=1\}=\{p\in O_1^*D \mid f(a_1)=\dots=f(a_n)=1\}$$

pa je slika baznog skupa $r_1(Y)$ pri definisanoj bijekciji skup $r(a_1)\cap\dots\cap r(a_n)$, tj. bazni skup prostora O*X.$\dashv$

Asocirani prostor FX Stoneovog prostora X je prostor sa minimalnom topologijom u kojoj je svaki kompaktan otvoren skup prostora X zatvoreno otvoren, u oznaci FOX.

Lema 3.32 Za svaku distributivnu mrežu D skup

$$\{r_1(a)-r_1(b) \mid a,b\in D,\ b\le a\}$$

je baza prostora FO_1^*D.

Dokaz: Familija skupova oblika

$$A=r_1(x_1)\cap\ldots\cap r_1(x_m)\cap r_1(y_1)'\cap\ldots\cap r_1(y_n)',$$

gde su $x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n\in D$, je baza prostora FO_1^*D. Kako je $A= r_1(x)\cap r_1(y)'=r_1(a)-r_1(b)$, gde $x=x_1\wedge\ldots\wedge x_m$, $y=y_1\vee\ldots\vee y_n$, $a=x\vee y$ i $b=x\wedge y$ to je lema dokazana. $\dashv$

Za proizvoljan skup X, prostor O^*X je Stoneov prostor, a njemu asocirani prostor je $(X,\bar{2})$.

Lema 3.33 Za svaki skup X, $FO^*X=(X,\bar{2})$.

Dokaz: Kompaktni otvoreni skupovi prostora O^*X su oblika $V=U_1\cup\ldots\cup U_m$, gde je svaki U_k oblika $U_k=r(a_1)\cap\ldots\cap r(a_n)$ za neke $a_1,\ldots,a_n\in X$, $k=1,\ldots,m$. Svaki takav skup je zatvoreno-otvoren u $(X,\bar{2})$, tj. $OFO^*X\subseteq O(X,\bar{2})$.

Obratno, svaki skup $r(a)$, $a\in X$, je kompaktan i otvoren u prostoru O^*X, pa asocirana topologija na O^*X mora da sadrži skupove $r(a)$, $r(a)'$, $a\in X$, što je kanonska podbaza prostora $(X,\bar{2})$, pa dakle $O(X,\bar{2})\subseteq OFO^*X$. $\dashv$

Funktoru $O:TOP\longrightarrow KHA$ konstruisaćemo adjungovani funktor $O_2^*:KHA\longrightarrow TOP$ i ispitati prirodu dobijene adjunkcije.

Definicija 3.34 Morfizam $H\to 2$ kompletne Heytingove algebre H je tačka u algebri H. Na skupu O_2^*H zadata je topologija indukovana topologijom prostora O_1^*H (ili O^*H). Prostor O_2^*H je prostor tačaka algebre H.

Svaki morfizam $f:H\longrightarrow 2\in KHA$ je morfizam u kategoriji ODM ali jasno, obratno ne mora da važi. Šta više, O_2^*H može biti prazan. Ako je H oblika OX, $X\in TOP$, tada za svako $x\in X$, p_x jeste tačka u algebri H, tj. svakoj tački prostora odgovara tačka u H. Medjutim, različitim tačkama u X može odgovarati jedna ista tačka u algebri H i moguće je da postoje tačke u H kojima ne odgovara niti jedna tačka u prostoru X. O ovom fenomenu biće još govora u daljem tekstu.

Prethodnom definicijom odredjen je fuktor $0_2^*: KHA \longrightarrow TOP$ koji jr očigledno kontravarijantan i kovarijantni funktori $T_2 = 00_2^*: KHA \longrightarrow KHA$ i $T_2^* = 0_2^* 0: TOP \longrightarrow TOP$. Prirodne transformacije, jedinicu i kojedinicu adjunkcije, $I_{KHA} \longrightarrow T_1$ i $I_{TOP} \longrightarrow TOP$ odredićemo slično kao i u prethodnim adjunkcijama.

<u>Lema 3.35</u> Za svaki topološki prostor X, $c[X] \subseteq T_2^*X \subseteq T_1^*X \subseteq T^*X$.

Dokaz: Isti kao u 3.24, odnosno 3.16. $\dashv$

Takodje, jednostavno se proverava da je $c: X \longrightarrow T_2^*X$ upravo evaluacija s, pritom podsetimo se da je $\forall x \in X.\ c(x) = p_x$.

<u>Definicija 3.36</u> Za svako $a \in H$, $H \in KHA$, neka je

$$r_2(a) = r(a) \cap 0_2^*H = r_1(a) \cap 0_2^*H = \{p \in 0^*H \mid p(a) = 1\}$$

tako da je $r_2[H]$ podbaza prostora 0_2^*H i $r_2: H \longrightarrow T_2H$ evaluacija.

Morfizmi $r: X \longrightarrow TX$, $X \in SKUP$, $r_1: D \longrightarrow T_1D$, $D \in ODM$ odredjuju redom podbazu $r[X]$ prostora 0^*X, odnosno bazu prostora 0_1^*D. U slučaju morfizama $r_2: H \longrightarrow T_2H$, $H \in KHA$ imamo takodje nešto više.

<u>Lema 3.37</u> Za svako $H \in KHA$, morfizam $r_2: H \longrightarrow T_2H$ homomorfizam "na" u kategoriji KHA.

Dokaz: Trivijalno, r_2 je morfizam u kategoriji ODM i $r_2[H]$ je baza prostora 0_2^*H.

Za svako $X \subseteq H$ i $p \in 0_2^*H$ imamo redom

$$\begin{aligned} p \in r_2(\vee X) \ &\text{akko} \ \vee p[X] = p(\vee X) = 1 \\ &\text{akko} \ \exists x \in X.\ p(x) = 1 \\ &\text{akko} \ p \in \bigcup r_2[X], \end{aligned}$$

tako da je $r_2(\vee X) = \bigcup r_2[X]$, tj. r_2 je morfizam u KHA.

Takodje, za svako $U \in T_2H$, kako je $r_2[H]$ baza prostora 0_2^*H, postoji $X \subseteq H$ takav da je $U = \bigcup r_2[X]$, tj. $U = r_2(\vee X)$ i dakle, morfizam r_2 je "na".

<u>Teorema 3.38</u> $\langle 0_2^*, 0, r_2, c \rangle$ je adjunkcija kontravarijan-

tnih funktora O_2^* i O.⊣

Pokazaćemo da je odgovarajuća sekcija u kategoriji KHA, za adjunkciju $\langle O^*, O, r_2, c\rangle$ kategorija topoloških Heytingovih algebri, tj. algebri Oblika OX, $X \in$ TOP, u oznaci THA.

Lema 3.39 Za svako $H \in$ KHA sledeće činjenice su ekvivalentne: (i) $H \in$ THA

(ii) Za sve $a, b \in H$, ako $b \nleq a$ tada postoji $p \in T_2^* H$ tako da $p(a)=0$ i $p(b)=1$.

(iii) Morfizam $r_2 : H \longrightarrow T_2 H$ je monomorfizam, pa dakle izomorfizam.

Dokaz: Neka je $H = OX$, $X \in$ TOP. Za proizvoljne otvorene skupove U, V prostora X, ako $V \nsubseteq U$ tada postoji $x \in V - U$ pa dakle, $p_x(U)=0$ i $p_x(V)=1$, tj. (i) $\Rightarrow$ (ii).

Neka su $a, b \in H$ proizvoljni. Možemo pretpostaviti da $b \nleq a$ pa obzirom na (ii) postoji $p \in r_2(b) - r_2(a)$, tj. $r_2(a) \neq r_2(b)$. Dakle (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i) je trivijalno.⊣

Teorema 3.40 Kategorija THA je sekcija u KHA za adjunkciju $\langle O^*, O, r_2, c\rangle$. Semantički funktor je izomorfizam, a funktor $T_2 : \text{KHA} \longrightarrow \text{THA}$ je reflektor.

Dokaz: Uslov (i) definicije 3.7 je trivijalno zadovoljen. Obzirom na lemu 3.37, r_2 je epimorfizam u kategoriji THA, tj važi i (ii), a kako je r_2 izomorfizam to je zadovoljen i uslov (iii).

Za svaku T_2-algebru $\langle H, h\rangle$, H je kompletna Heytingova algebra i h morfizam u KHA takav da je $H \xrightarrow{r_2} T_2 H \xrightarrow{h} H = 1_H$. Obzirom da je r_2 injektivan to je $H \in$ THA, tj. semantički funktor K je izomorfizam. U ovom slučaju K je trivijalno potpun.⊣

Da je T_2 reflektor, jasno je i inače, ali, direktan dokaz daje nešto stroži rezultat.

Lema 3.41 Za svaki morfizam $f : H \longrightarrow OX \in$ KHA, $X \in$ TOP, postoji jedinstveno odredjen morfizam $g : T_2 H \longrightarrow OX \in$ THA takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "r_2"'] & & OX \\ & T_2H \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

komutira i postoji jedinstveno odredjena neprekidna funkcija $u:X\longrightarrow O_2^*H$ takva da je $g=u^{-1}$.

Dokaz: Kako je r_2 epimorfizam ("na") postoji najviše jedan takav morfizam g.

Za svako $x\in X$ neka je $u(x)=p_x f$ tako da $u:X\longrightarrow O_2^*H$ i za svako $a\in H$, $u^{-1}(r_2(a))=f(a)$, što se neposredno proverava. Kako je $O_2^*H=r_2[H]$, funkcija u je neprekidna i $g=u^{-1}$ je morfizam u KHA takav da spomenuti dijagram komutira.

Neka je $v:X\longrightarrow O_2^*H$ neprekidna funkcija takva da je $v^{-1}=g$. Tada za sve $x\in X$, $a\in H$, $v(x)\in r_2(a)$ akko $x\in g(r_2(a))$ akko $u(x)\in r_2(a)$, tj. $u(x)^-=v(x)^-$, pa kako je O_2^*H T_0-prostor to imamo da je konačno $u(x)=v(x)$.⊣

U svakoj od do sada razmotrenih adjunkcija komonada T^* indukuje sekciju TOP(T^*) (ili T_1^*, T_2^*) u kategoriji TOP, odnosno sekciju koja odgovara kategoriji T^*-prostora. U poslednja dva slučaja odredićemo precizno sekciju koja odgovara posmatranoj adjunkciji, a pitanje sekcije za adjunkciju $\langle O^*,O,r,c\rangle$ ostaje otvoreno.

Kako morfizmima distributivnih mreža odgovaraju prosti ideali to tačkama kompletnih Heytingovih algebri odgovaraju neki prosti ideali. Pokazaćemo da su to upravo glavni prosti ideali, što na prirodan način vodi definiciji *staloženih prostora*, tj. sekciji u kategoriji TOP za adjunkciju $\langle O_2^*,O,r_2,c\rangle$.

Definicija 3.42 (i) $a\in H$, $H\in$ KHA, je $\wedge$-nerastavljiv ako $a\neq 1$ i $\forall x,y\in H.\ x\wedge y\leq a \Longrightarrow x\leq a$ ili $y\leq a$, tj. ako je ideal $[0,a]$ prost ideal.

(ii) $S\subseteq X$, $X\in$ TOP, je nesvodljiv ako $S\neq\emptyset$ i za sve otvorene skupove $U,V\in OX$, $S\cap U\neq\emptyset$ i $S\cap V\neq\emptyset \Longrightarrow S\cap(U\wedge V)\neq\emptyset$.

Lema 3.43 Otvoren skup U prostora X je $\wedge$-nerastavljiv u algebri OX akko skup U' je nesvodljiv u prostoru X.

Svakoj tački x prostora X odgovara zatvoren nesvodljiv skup x^- i tačka p_x u algebri OX. Obzirom da za sve $x,y \in X$, $p_x = p_y$ akko $x^- = y^-$ to je tačka p_x u OX odredjena sa x^-, tj. $\wedge$-nerastavljivim skupom $x^{-\prime}$ algebre OX. Opštije, važi:

Lema 3.45 Neka je a $\wedge$-nerastavljiv elemenat kompletne Heytingove algebre H tada je funkcija $p_a : H \longrightarrow 2$ definisana sa

$$p_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako } x \quad a \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

tačka u algebri H.

Dokaz: Ideal $[0,a]$ je prost u H pa je p_a morfizam u kategoriji ODM. Za svako $S \subseteq H$, $p_a[S] = 0$ akko $\forall x \in S.\ x \leq a$
akko $\bigvee S \leq a$
akko $p_a(\bigvee S) = 0$

tako da je $\bigvee p_a[S] = p_a(\bigvee S)$, tj. p_a je tačka algebre H. $\dashv$

Otuda, za svako $x \in X$, $A = x^{-\prime}$ je $\wedge$-nerastavljiv elemenat algebre OX. Odgovarajuća tačka p_A algebre OX je takva da za svako $U \in OX$, $p_A(U) = 1$ akko $U \nsubseteq x^{-\prime}$ akko $x \in U$ akko $p_x(U) = 1$ tako da je p_A upravo tačka p_x.

Svakom morfizmu $p \in ODM$ algebre OX, $X \in TOP$, odgovara jedan prost filter otvorenih skupova prostora X. Neka je $k(p) = \bigcap \{U' \mid U \in OX \text{ i } p(U) = 0\}$, tj. $k(p)$ je skup tačaka nagomilavanja filtra odredjenog morfizmom $p : OX \longrightarrow 2 \in ODM$. Otuda je komplement $k(p)' = \bigcup \{U \in OX \mid p(U) = 0\}$ pa se čitava stvar može uopštiti na proizvoljnu kompletnu Heytingovu algebru, tj. za svaki morfizam $p : H \longrightarrow 2$ u kategoriji ODM, $H \in KHA$, neka je $k(p)' = \bigvee \{x \in H \mid p(x) = 0\}$.

Lema 3.46 Morfizam $p : H \longrightarrow 2 \in ODM$, $H \in KHA$ je tačka algebre H akko $p(k(p)') = 0$.

Dokaz: Ako je p tačka u H tada $p(k(p)') = \bigvee p(\{x \in H \mid p(x) = 0\}) = 0$. Obratno, ako $p(k(p)') = 0$ tada za svako $S \subseteq H$ redom imamo $p[S] = \{0\} \Longrightarrow \bigvee S \leq k(p)' \Longrightarrow p(\bigvee S) = 0$ tako da $p(\bigvee S) \leq \bigvee p[S]$, tj. p je tačka u algebri H. $\dashv$

Obzirom na prethodne dve leme, postoji obostrano jednoznačna korespondencija izmedju $\wedge$-nerastavljivih elemenata i tačaka algebre $H \in KHA$. Jer, ako je $a \in H$ $\wedge$-nerastavljiv tada je p_a

tačka algebre H i pritom $k(p_a)' = \bigvee\{x \in H \mid x \leq a\} = a$. Obratno, za svako $x \in H$, $p(x)=0$ akko $x \leq k(p)'$ pa je $a = k(p)'$ $\wedge$-nerastavljiv elemenat u H i $p = p_a$.

Definicija 3.47 Prostor X je *staložen* ako je T_0 i svaki zatvoren nesvodljiv skup u X je oblika x^-, $x \in X$.

Lema 3.48 Svaki zatvoren nesvodljiv skup u X, $X \in$ TOP, je oblika x^-, $x \in X$, akko svaka tačka u OX glavni filter, tj. $c[X] = T_2^* X$.

Dokaz: ($\Longrightarrow$) Skup $k(p)$ je zatvoren i nesvodljiv pa postoji $x \in k(p)$ tako da $k(p) = x^-$. Otuda $p = p_x$ za svako $p \in T_2^* X$, tj. $T_2^* X = c[X]$.

Obratno, pretpostavimo da je $T_2^* X = c[X]$. Neka je p tačka u algebri OX i $S = k(p)$. Uočimo $x \in X$ tako da je $p_x = p$ tada za svako $U \in OX$, $S \cap U \neq \emptyset$ akko $p(U) = 1$ akko $x \in U$ pa dakle $S = x^-$. $\dashv$

Posledica 3.49 Prostor X je staložen akko evaluacija $c : X \longrightarrow T_2^* X$ je homeomorfizam. $\dashv$

Neka je STOP kategorija staloženih prostora (i neprekidnih funkcija. Pokazaćemo da je STOP sekcija u kategoriji TOP obzirom na adjunkciju $\langle O_2^*, 0, r_2, c \rangle$, tj. da su svi uslovi definicije 3.7 zadovoljeni.

Lema 3.50 Za svaku kompletnu Heytingovu algebru H prostor $O_2^* H$ je staložen.

Dokaz: Trivijalno, $O_2^* H$ je T_0-prostor. Neka je S zatvoren nesvodljiv skup u $O_2^* H$ i neka je preslikavanje $p : H \longrightarrow 2$ definisano tako da $\forall x \in H.\ p(x) = 1$ akko $S \cap r_2(x) \neq \emptyset$. Jednostavno se proverava da je p tačka u algebri H (nesvodljivost skupa S obezbedjuje da prolazi kroz $\wedge$). Kako je $OO_2^* H = r_2[H]$ to za svako $U \in OO_2^* H$, $p \in U$ akko $S \cap U \neq \emptyset$ pa dakle $S = p^-$, tj. prostor $O_2^* H$ je staložen. $\dashv$

Sledeća lema omogućava da se dokaže da je evaluacija epimorfizam u kategoriji STOP

<u>Lema 3.51</u> Za svako $X \in \mathrm{TOP}$, $OX \xrightarrow{r_2} T_2OX \xrightarrow{Oc} OX = 1_{OX}$ i $T_2OX \xrightarrow{Oc} OX \xrightarrow{r_2} T_2OX = 1_{T_2OX}$.

Dokaz: Obzirom na 3.3, $Ocr_2 = 1_{OX}$ pa $r_2Ocr_2 = r_2$. Obzirom da je r_2 epimorfizam u kategoriji KHA (tj. "na"), $r_2Oc = 1_{T_2OX}$.$\dashv$

<u>Posledica 3.52</u> Morfizmi c su epimorfizmi u kategoriji STOP.

Dokaz: Više od toga, c su T_0-epimorfizmi jer, za proizvoljne $f,g : T_2^*X \longrightarrow Y$, Y T_0-prostor, ako $fc = gc$ tada

$$OY \xrightarrow{Of} OT_2^*X \xrightarrow{Oc} OX = k,$$

pa zbog prethodne leme $Of = r_2k = Og$. Otuda za svako $p \in O_2^*X$ imamo da je $f(p)^- = g(p)^-$, pa kako je Y T_0-prostor to je $f = g$.$\dashv$

Obzirom na lemu 3.50 uslov (i) definicije 3.7 je zadovoljen, (ii) sledi iz 3.51, a (iii) na osnovu 3.49, tj. kategorija STOP je sekcija u kategoriji TOP za adjunkciju $\langle O_2^*, O, r_2, c\rangle$.

Da dokažemo da je semantički funktor izomorfizam, primetimo da važi

<u>Lema 3.53</u> Topološki prostor X je staložen akko postoji neprekidna funkcija $h : T_2^*X \longrightarrow X$ takva da je $hc = 1_X$. Tj. za svaki T_2^*-prostor $\langle X, h\rangle$, X je staložen prostor.

Dokaz: Ako je X staložen prostor tada je $c : X \longrightarrow T_2^*X$ homeomorfizam pa možemo uzeti da je $h = c^{-1}$. Obratno, ako takvo h postoji tada je c injektivno pa je, obzirom na 3.17, X T_0-prostor. Takodje, $chc = c1_X = c = 1_{T_2^*X}c$ pa na osnovu 3.52, $ch = 1_{T_2^*}$. Otuda c je homeomorfizam pa je obzirom na 3.49 prostor X staložen.$\dashv$

<u>Teorema 3.54</u> Kategorija STOP je sekcija u kategoriji TOP za adjunkciju $\langle O_2^*, O, r_2, c\rangle$, semantički funktor je izomorfizam, a $T_2^* : \mathrm{TOP} \longrightarrow \mathrm{STOP}$ je reflektor.

Svaki Hauzdorfov prostor je staložen, tj. $T_2 \Longrightarrow$ staložen $\Longrightarrow T_0$. Za svaki beskonačan skup X, prostor u kome su zatvoreni skupovi samo konačni skupovi (i X) je T_1-prostor ali nije staložen, tj. staloženi i T_1-prostori nisu uporedivi.

Za proizvoljan staložen prostor X i svaki otvoren skup U OX neka je

$$j(U)=\bigcup\{V\in OX \mid \exists x_1,..,x_n\in X.\ \mathrm{int}(V-\{x_1,..,x_n\})\subseteq U\}.$$

Obzirom da je za sve $V,W\in OX$, $\mathrm{int}(V-\{x_1,..,x_n\})\cap \mathrm{int}(W-\{y_1,..,y_m\}) = \mathrm{int}(W\cap V-\{x_1,..,x_n,y_1,..,x_m\})$, operacija j je J-operator algebre OX. Fiksne tačke ovog operatora čine kompletnu Heytingovu algebru koperfektnih otvorenih skupova prostora X (jer, ako je X T_1-prostor to su upravo komplementi perfektnih skupova u X), u oznaci OX_j.

Svakoj tački $p\in OX_j$ odgovara tačka $pj=f$ algebre OX. Kako je prostor X staložen to postoji $x\in X$ tako da je $f=p_x$. Ako pretpostavimo da je $U=\mathrm{int}(X-\{x\})$ tada je $f(U)=0$, medjutim, $j(U)=X$ pa mora biti $pj(U)=f(U)=1$ što je kontradikcija. Dakle u algebri OX nema tačaka.

Intuicionistički, algebra P(1) se može utopiti u algebru JP(1). Za svaki iskaz p, p_p je fiksna tačka operatora b_0 algebre JP(1) pa je kompozicija $P(1)\longrightarrow JP(1)\longrightarrow JP(1)_{b_0}$ monomorfizam i algebra $JP(1)_{b_0}$ je kompletna Booleova algebra.

Ako algebra $JP(1)_{b_0}$ sadrži tačku tada je matematika klasična. Dakle, intuicionistički postoji veoma mnogo kompletnih Heytingovih algebri bez tačaka.

Odredićemo još i sekciju u kategoriji TOP za adjunkciju $\langle O_1^*,O,r_1,c\rangle$. Pokazaće se da je to ustvari kategorija relativno kompaktnih Stoneovih prostora. Pritom, umesto sa relatinom kompaktnošću, radiće se sa takozvanom "vay below" relacijom. Ovu relaciju definisao je Scott ([1]) u analizi neprekidnih mreža.

<u>Definicija 3.55</u> Za proizvoljne otvorene skupove $U,V\in OX$ prostora X, $V\ll U$ akko svako otvoreno pokrivanje od U sadrži konačno pokrivanje od V.

<u>Lema 3.56</u> Za svako $X\in TOP$ i sve $U,V\in OX$ sledeće činjenice su ekvivalentne:

(i) $V\ll U$

(ii) Za svako $p \in T_1^*X$, ako $p(V)=1$ tada $k(p) \cap U \neq \emptyset$.

Dokaz: Neka je $p \in T_1^*X$ takvo da $k(p) \cap U = \emptyset$. Tada $U \subseteq k(p)' = \bigcup \{W \in OX \mid p(W)=0\}$ pa na osnovu (i) postoji otvoren skup W takav da $V \subseteq W$ i $p(W)=0$, pa dakle i $p(V)=0$.

Obratno, neka je S proizvoljno otvoreno pokrivanje od U i neka je I ideal u OX generisan sa S. Treba pokazati da je $V \in I$.

Ako $V \notin I$ tada postoji $p \in T_1^*X$ takvo da $p(V)=1$ i $p[I]=\{0\}$. Zbog (ii), ako $p(V)=1$ tada postoji $W \in S$ tako da $W \cap k(p) \neq \emptyset$. Kako je $W \in I$ to $p(W)=0$ pa dakle $W \subseteq k(p)'$, što je kontradikcija. ⊣

Definicija 3.57 Prostor X je *relativno kompaktan* ako

(i) Za svako $x \in X$, $U \in OX$, ako $x \in U$ tada postoji $V \in OX$ tako da $V \ll U$ i $x \in V$.

(ii) Za sve $U_1, U_2, V_1, V_2 \in OX$

$$V_1 \ll U_1 \text{ i } V_2 \ll U_2 \qquad V_1 \cap V_2 \ll U_1 \cap U_2.$$

Prostor X je *algebarski* ako je kompaktan, staložen i relativno kompaktan.

Primer 3.58 Svaki kompaktan Hausdorffov prostor je algebarski i svaki Stoneov prostor je takodje algebarski.

Dokaz: Ako je X kompaktan Hausdorffov prostor tada je X staložen i regularan i njegovi kompaktni podskupovi su upravo zatvoreni skupovi. Otuda za sve $U, V \in OX$, $V \ll U$ akko $V^- \subseteq U$ tj, X je relativno kompaktan.

Ako je X Stoneov prostor tada je X kompaktan i staložen i za sve $U, V \in OX$, $V \ll U$ akko postoji kompaktan otvoren skup W takav da $V \subseteq W \subseteq U$, tj. X je relativno kompaktan. ⊣

Definicija 3.59 Neprekidna funkcija $f: X \longrightarrow Y$, X,Y algebarski prostori, je algebarska ako za sve $U, V \in OY$,

$$V \ll U \implies f^{-1}(V) \ll f^{-1}(U).$$

Obzirom na prethodni primer imamo sledeći:

Primer 3.60 Neprekidna funkcija kompaktnih Hausdorffovih prostora je algebarska. Neprekidna funkcija Stoneovih prostora je algebarska akko inverzna slika svakog kompaktnog otvorenog sku pa je kompaktan otvoren skup.

Dokaz: U prvom slučaju, inverzna slika preseka zatvorenih skupova je presek inverznih slika, pa je svaka neprekidna funkcija algebarska.

Pretpostavimo da je $f:X\longrightarrow Y$ algebarska funkcija Stoneovih prostora X,Y i $W\subseteq Y$ kompaktan otvoren skup, tada $W\ll W$ pa dakle $f^{-1}(W)\ll f^{-1}(W)$, tj. $f^{-1}(W)$ je kompaktan skup. Obratno je trivijalno zadovoljeno.⊣

Pokazaćemo da je kategorija ATOP, algebarskih prostora i algebarskih funkcija sekcija kategorije TOP za adjunkciju funktora O_1^* i O. Uslov (i) definicije 3.7 zadovoljen je na osnovu sledeće leme.

Lema 3.61 Za svaku distributivnu mrežu D, prostor O_1^*D je algebarski i za svaki morfizam $f\in$ ODM, preslikavanje O_1^*f je algebarsko.

Dokaz: Na osnovu prethodnih primera.

Uslov (ii) definicije 3.7 takodje važi jer, imamo sledeću lemu:

Lema 3.62 Za svako $X\in$ TOP, preslikavanje $f:X\longrightarrow T_1X$ je epimorfizam u kategoriji ATOP.

Dokaz: Neka je Y proizvoljan algebarski prostor i neka je funkcija $f:T_1X\longrightarrow Y$ algebarska. Označimo sa $g\in$ KHA sledeću kompoziciju $OY\xrightarrow{f-1} OT_1^*X\xrightarrow{c-1} OX.$

Dokažimo da za svako $p\in T_1^*X$ i $U\in OY$, $f(p)\in U$ akko $k(pg)\cap U\neq\emptyset$, tj. da je $k(pg)=f(p)^{-}$.

Neka je $f(p)\in U$. Obzirom da je Y algebarski prostor to postoji $V\in OY$ tako da $f(p)\in V\ll U$, tj. kako je f algebarska funkcija, $p\in f^{-1}(V)\ll f^{-1}(U)$. $r_1[OX]$ je baza prostora T_1^*X pa postoji $W\in OX$ tako da $p\ r_1(W)\subseteq f^{-1}(V)$. Otuda $p(W)=1$ i, na osnovu leme 3.5, $W=c^{-1}r_1(W)\subseteq c^{-1}f^{-1}(W)=g(V)$, tj. $pg(V)=1$. Dakle, zbog leme 3.56, $k(pg)\cap U\neq\emptyset$.

Obratno, pretpostavimo da je $k(pg)\cap U\neq\emptyset$, tj. postoji V ($V\in OY$) tako da $pg(V)=1$ i $V\ll U$. Kako je f algebarska funkcija imamo da je $f^{-1}(V) \ll f^{-1}(U)$. Neka je $\mathcal{W}=\{W \in OX \mid r_1(W) \subseteq f^{-1}(U)\}$, tj. $r_1[\mathcal{W}]$ pokriva $f^{-1}(U)$ pa postoji $W \in \mathcal{W}$ tako da $f^{-1}(W) \subseteq r_1(W)$. Otuda se dobija da je $g(V)=c^{-1}f^{-1}(V) \subseteq c^{-1}r_1(W)=W$ tako da $p(W)=1$ i dakle, $p \in r_1(W) \subseteq f^{-1}(U)$.

Pretpostavimo da je $f_1: T_1^*X \longrightarrow Y$ takvo da $fc=f_1c$. Tada $O(fc)=g=O(f_1c)$ pa za sve $p \in T_1^*X$, $f(p)^-=k(pg)=f_1(p)^-$. Kako je Y T_0prostor to je konačno $f=f_1$.$\dashv$

Lema 3.63 Za svako $X \in ATOP$, $p \in T_1^*X$, skup $k(p)$ je zatvoren i nesvodljiv u prostoru X.

Dokaz: $k(p)$ je zatvoren i kako je X kompaktan $k(p) \neq \emptyset$. Treba još dokazati da je $k(p)$ nesvodljiv.

Ako je $U \in OX$ takav da $k(p) \cap U \neq \emptyset$ tada postoji $x \in k(p) \cap U$ i postoji $V \in OX$ tako da $x \in V \ll U$, tj. takvo da $p(V)=1$. Otuda, ako su U_1 i U_2 otvoreni skupovi koji sa $k(p)$ imaju neprazan presek tada postoje otvoreni skupovi V_1, V_2 takvi da $V_1 \ll U_1$ i $V_2 \ll U_2$ i $p(V_1 \cap V_2)=p(V_1) \wedge p(V_2)=1$. Kako je X relativno kompaktan prostor $V_1 \cap V_2 \ll U_1 \cap U_2$ i konačno, obzirom na lemu 3.56, $k(p)$ ima neprazan presek sa $U_1 \cap U_2$.$\dashv$

Prethodna lema omogućava da se na algebarskim prostorima definišu strukturalni morfizmi.

Definicija 3.64 Za svaki algebarski prostor X neka je $h: T_1^*X \longrightarrow X$ funkcija definisana tako da za sve $p \in T_1^*X$,

$$h(p)^-=k(p).$$

Definicija je korektna jer, prostor X je staložen, a $k(p)$ zatvoren i nerazloživ skup u X.

Sledeća lema pokazuje da je uslov (iii) definicije 3.7 takodje zadovoljen.

Lema 3.65 Za svako $X \in ATOP$, funkcija $h: T_1^*X \longrightarrow X$ je algebarska i pritom, $hc=1_X$.

Dokaz: Za svako $x \in X$, $k(p_x)=x^-$ pa dakle $hc=1_X$. Treba još pokazati da je h neprekidna funkcija i algebarska.

Pokazaćemo da je za proizvoljno $U \in OX$, $Oh(U)=h^{-1}(U)=\bigcup\{r_1(V) \mid V \ll U\}$, tj. da je $h^{-1}(U)$ otvoren skup.

Ako je $p\in h^{-1}(U)$ tada je $x=h(p)\in U$ pa postoji $V\ll U$ tako da $x\in V$. Primetimo da je $p\in r_1(V)$ jer, ako pretpostavimo suprotno, tada $p(V)=0$ pa dakle $x=h(p)\in k(p)\cap V'$. Obratno, ako je $V\ll U$ tada, obzirom na lemu 3.56, za svako $p\in T_1^*X$,

$$\begin{aligned} p\in r_1(V) &\Rightarrow k(p)\cap U\neq\emptyset \\ &\Rightarrow h(p)\in U \\ &\Rightarrow p\in h^{-1}(U) \end{aligned}$$

što dokazuje spomenutu jednakost.

h je algebarska funkcija jer, za proizvoljne $U,V\in OX$ takve da $V\ll U$, za svako $p\in T_1^*X$ imamo da

$$h(p)\in V \Rightarrow k(p)\cap V\neq\emptyset \Rightarrow p(V)=1$$

pa, obzirom na lemu 3.56,

$$p(V)=1 \Rightarrow k(p)\cap U\neq\emptyset \Rightarrow h(p)\in U,$$

što znači da je $h^{-1}(V)\subseteq r_1(V)\subseteq h^{-1}(U)$. Kako je $r_1(V)$ kompaktan otvoren skup u prostoru T_1^*X to konačno imamo da je $h^{-1}(V)\ll h^{-1}(U)$ tj. h je algebarsko preslikavanje.$\dashv$

Da se pokaže da su kategorije ATOP i TOP(T_1^*) izomorfne, tj. da je semantički funktor uzomorfizam, treba pokazati da se svaki T_1^*-prostor (X,h) sastoji od algebarskog prostora X i T_1^*-strukturalnog morfizma $h\in$ ATOP, definisanog u 3.64.

Obzirom da,za proizvoljne $X,Y\in$ ATOP sa odgovarajućim strukturalnim morfizmima h,k i za svaku neprekidnu funkciju $f:X\longrightarrow Y$, ako dijagram

$$\begin{tikzcd} T_1^*X \arrow[r, "T_1^*f"] \arrow[d, "h"'] & T^*Y \arrow[d, "k"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

komutira tada je f algebarska funkcija, semantički funktor je potpun.

<u>Teorema 3.67</u> Prostor X je algebarski akko postoji neprekidna funkcija $h:T_1^*X\longrightarrow X$ takva da $hc=1_X$.

Za svaki algebarski prostor X postoji tačno jedna funkcija h sa spomenutom osobinom i ta funkcija je algebarska.

Dokaz: Obzirom na prethodnu lemu, dovoljno je pokazati da je za svaki T^*-prostor (X,h), X algebarski prostor i da je h odredjeno sa 3.64.

Pokazaćemo najpre da je za svaki T*-prostor (X,h) uslovom $hc=1_X$ preslikavanje h jedinstveno odredjeno.

Za svako $U\in OX$, obzirom na uslov $hc=1_X$, imamo da je

$$A=h^{-1}(U)\cap c[X]\subseteq r_1(U)$$

pa, kako je $r_1(U)$ zatvoreno-otvoren skup u asociranoj topologiji prostora T_1^*X, $h^{-1}(U)^= \cap c[X]^= = A^= \subseteq r_1(U)$, gde je $\cdot^=$ operator zatvorenja u asociranoj topologiji prostora T_1^*X.

Kako je za proizvoljno $X\in TOP$, $T^*X=c[X]^=$, to imamo da je

$$h^{-1}(U)\subseteq A^= \subseteq r_1(U),$$

što znači da za svako $p\in T_1^*X$, $h(p)\in U \Longrightarrow p(U)=1$ pa dakle, $h(p)\in k(p)$.

Obratno, za svako $x\in k(p)$, $c(x)\in p^-$ tako da redom imamo: $x\in U \Longrightarrow hc(x)\in U \Longrightarrow c(x)\in h^{-1}(U) \Longrightarrow p\in h^{-1}(U) \Longrightarrow h(p)\in U$ pa dakle $k(p)=h(p)^-$.$\dashv$

Ova jednakost pokazuje da je, obzirom da je X T_0-prostor, $h(p)$ jedinstveno odredjeno za svako $p\in T^*X$. Zatim, da je X kompaktan prostor, jer svaki prost filter otvorenih skupova u X ima tačku nagomilavanja i da je prostor X staložen, jer je svaki zatvoren nesvodljiv skup u X oblika $k(p)$ za neku tačku p algebre OX. Ostaje dakle da se pokaže da je X relativno kompaktan prostor.

Za svako $x\in U$, $U\in OX$, kako je $hc=1_X$ to je $c(x)\in h^{-1}(U)$, pa postoji neko $V\in OX$ tako da

$$c(x)\in r_1(V)\subseteq h^{-1}(U).$$

Otuda, $x\in V$ i za svako $p\in T_1^*X$,

$$p(V)=1 \Longrightarrow h(p)\in U \Longrightarrow k(p)\cap U\neq\emptyset,$$

pa obzirom na 3.56, $V\ll U$.

Konačno, za proizvoljne $U_1,U_2,V_1,V_2\in OX$, $V_1\ll U_1$ i $V_2\ll U_2$ imamo redom: $\forall p\in T_1^*X.\ p(V_1\cap V_2)=1 \Longrightarrow p(V_1)=p(V_2)=1$

$$\Longrightarrow k(p)\cap U_1\neq\emptyset \text{ i } k(p)\cap U_2\neq\emptyset$$
$$\Longrightarrow h(p)\in U_1\cap U_2$$
$$\Longrightarrow k(p)\cap(U_1\cap U_2)\neq\emptyset,$$

pa dakle $V_1\cap V_2\ll U_1\cap U_2$, tj. X je relativno kompaktan prostor.$\dashv$

Obzirom na prethodna razmatranja dokazana je sledeća

Teorema 3.68 Kategorija ATOP je sekcija u kategoriji TOP za adjunkciju $\langle O_1^*, O, r_1, c\rangle$. Semantički funktor je izomorfizam kategorija ATOP i TOP(T_1^*) i T_1^*:TOP$\longrightarrow$ATOP je reflektor.⊣

Posledica 3.69 Klasa algebarskih prostora je zatvorena za retrakcije.

Prostor je algebarski akko je retrakt Stone-ovog prostora.

Dokaz: Neka su f:X$\longrightarrow$Y i g:Y$\longrightarrow$X neprekidne funkcije takve da je $gf=1_X$ i Y algebarski prostor. Dokažimo da je tada i prostor X takodje algebarski.

Neka je k strukturalni morfizam prostora Y takav da $kc=1_Y$. Kako je transformacija c prirodna to je $cf=(T_1^*f)c$.

Neka je $h=gk(T_1^*f)$, tada $hc=gk(T^*f)c=gkcf=1_X$, pa je X algebarski prostor obzirom na teoremu 3.67.

Obzirom na primer 3.58 i upravo dokazanu činjenicu, prostor je algebarski akko je retrakcija Stone-ovog prostora.⊣

Beograd, 13 decembar 1981 godine.

4. *Bibliografija*

Balbes, R.

[1] Projective and Injective Distributive Lattices, Pacific J. Math., 21 (1967), 405-420.

Balbes, R., Horn, A.

[1] Injective and Projective Heyting Algebras, Trans. of the Amer. Math. Soc., 148 (1970), 549-559.

Birkhoff, G.

[1] Lattice Theory, Providence, Amer. Math. Soc., (1967).

Bruns, G.

[1] Ideal Representations of Stone Lattices, Duke Math. J., 32(1965), 555-556.

Chang, C.C.

[1] On the Representation of α-complete Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 208-218.

Chang, C.C., Horn, A.

[1] Prime Ideal Characterization of Generalized Post Algebras, Proceedings of the symp. on pure math. Amer. Math. Soc., 2 (1961), 43-48.

Chen, C.C.

[1] Free Boolean Extensions of Distributive Lattices, Nanta Math., 1 (1966/67), 1-14.

Chen, C.C., Grätzer, G.

[1] Stone Lattices I: Construction Theorems, Canad. J. Math., 21 (1969), 884-896.

Choe, T.H.

[1] Injective Compact Distributive Lattices, Proc. Amer. Math. Soc., 37(1973),241-245.

[2] Projective Compact Distributive Lattices, Proc. Amer. Math. Soc., 39(1973), 606-608.

Crawley, P.

[1] Lattices whose Congruences form a Boolean algebra, Pacific J. Math. 10(1960), 787-795.

[2] Regular embeddings which preserve lattice structure, Proc. Amer. Math. Soc., 13(1962), 748-752.

Day, A.

[1] Injectivity in Equational Classes of Algebras, Canad. J. Math., 24(1972), 209-220.

Dowker, C.H., Strauss, D.

[1] Products and sums in the category of frames, Lecture notes 540, Springer (1977).

Drake, D., Thron, W.J.

[1] On the representation of an abstract lattice and the family of closed subsets of a topological space, Trans. Amer. Math. Soc., 120(1965), 57-71.

Ellerman, D.P.

[1] Sheaves of Structures and generalized Ultraproducts, Annals of Math. Logic., 7(1974).

Fitting, M.

[1] Intuitionistic logic, Model theory and Forcing, North-Holland, 1969.

Fourman, M.P.

[1] The logic of topoi, Handbook of Math. Logic (ed. Barwise), 1053-1090, North-Holland, 1977.

[2] Sheaf models for set theory, Journal of pure and aplied algebra, 19(1980), 91-101.

Fourman, M.P., Scott, D.S.

Sheaves and logic, Applications of sheaves, Proceedings (eds., Fourman, Mulvey, Scott), Lecture Notes 753, springer 1979.

Freyd, P.J.

[1] Aspects of Topoi, Bull. Austral. Math. Soc., 7(1972), 1-76.

[2] Abelian categories, Harper and Row, New York, 1964.

Galvin, F., Jónsson, B.

[1] Distributive sublattices of a free lattice, Canad. J. Math. 13(1961), 265-272.

Glivenko, V.

[1] Sur quelques points de la logique de M. Brouwer, Bull. Acad. des Sci. de Belgique, 15(1929), 183-188.

Halmos, P.R.

[1] Injective and projective Boolean algebras, Lattice Theory, Proceedings of symp. in pure math. 2 Amer. Math. Soc., Providence, 1961.

[2] Lectures on Boolean algebras, Princeton, 1963.

Horn, A.

[1] The separation theorem of intuitionistic propositional calculus, J.S.L., 27(1962), 391-399.

[2] A property of free Boolean algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 19(1068), 142-143.

Horn, A., Tarski, A.

[1] Measures on Boolean algebras, Tran. Amer. Math. Soc., 64(1948), 469-497.

Isbell, J.R.

[1] Atomless parts of spaces, Math. Scand., 31(1972), 5-32.

Johnstone, P.T.

[1] Topos Theory, Academic Press, 1977.

[2] Conditions related to De Morgan's Law, Lecture Notes in Math., 753, Springer 1979.

Jónsson, B.

[1] Universal relational systems, Math. Scand. , 4 (1956), 193-208.

[2] Algebras whose congruence lattices are distributive, Math. Scand. 21(1967), 110-121.

Lawvere, F.W.

[1] Quantifiers and Sheaves, Actes de Congres international des Math., Nice, 1(1970), 329-334.

Lawvere, F.W., Tierney, M.

[1] Lectures on elementary topoi, Reports of the Midwest Category Seminar (ed. Gray), Lecture Notes in Math. 195 (1971), 248-255, Springer.

MacLane, S.

[1] Categories for the working mathematician, 1971, Springer.

MacNab, D.S.

[1] Modal operators on Heyting algebras, Preprint.

Marković, Z.M.

[1] Model theory for intuitionistic logic, Ph.D. University of Pennsylvania (1979).

McKinsey, J.C.C., Tarski, A.

[1] The algebra of topology, Ann. of Math. 45(1944), 141-191.

[2] On closed elements in closure algebras, Ann. of Math., 47(1946), 122-162.

[3] Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting, J.S.L., 13(1948), 1-15.

Mijajlović , Ž.D.

[1] Booleove algebre u logici, Magistarski rad, Beograd, 1973.

[2] Prilog teoriji modela i Booleovih algebri, doktorska disertacija, Beograd, 1977.

Nachbin, L.

[1] Une propriété caractéristique des algebres Booliennes, Portugal. Math. 6(1947), 115-118.

[2] On a characterization of the lattice of ideals of a Boolean ring, Fund. Math. 36(1949), 137-142.

Nerode, A.

[1] Some Stone spaces and recursion theory, Duke Math. J., 26(1959), 397-406.

Osius, G.

[1] Logical and Set Theoretical tools in Elementary Topoi, Model Theory and Topoi (ed. Lawvere), Lecture notes in Math., 445(1975), Springer.

Ore, O.

[1] Galois connections, Trans. Amer. Math. Soc., 55 (1944), 493-513.

Papert, S.

[1] An abstract theory of topological subspaces, Proc. Cambridge Phil. Soc., 60(1964), 197-203.

Powel, .

[1] Extending Gödel's negative interpretation to ZF, J.C.L., 40, no 2(1975), 221-229.

Priestley, H.A.

[1] Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces, Bull. London Math. Soc., 2(1970).

Rasiowa, H., Sikorski, R.

[1] The Mathematics of Metamathematics, Monogr. Mat. Tom 41, PWN, Warsaw (1973).

Sacks, G.E.

[1] Saturated Model Theory, W.A. Benjamin, inc., Reading, Massachusetts, 1972.

Scott, D.S.

[1] Continuous lattices, Toposes, Algebraic geometry and Logic (ed. Lawvere), Lect. Notes in Math., 274(1972), Springer.

[2] Identity and existence in intuitionistic logic, Lecture Notes 753(1979), Springer.

[3] Extending the topological interpretation to intuitionistic analusis, part I, Compositio Math. 20(1968).

[4] Data types as lattices, Siam J. Computing, 5(1976).

Sikorski, R.

[1] A theorem on extensions of homomorphisms, Ann. Soc. Pol. Math., 21(1948), 332-335.

[2] On the representation of Boolean algebras as fields of sets, Fund. Math. 35(1948), 247-256.

[3] Closure algebras, Fund. Math. 36(1949), 165-206.

[4] Closure homomorphisms and interior mappings, Fund. Math. 41(1954), 12-20.

[5] Boolean algebras, Springer (1969).

Simmons, H.

[1] A framework for topology, Logic Colloquium 77 (eds. Macintyre, Pacholski, Paris), North-Holland (1978).

Stone, M.H.

[1] The representation theorem for Boolean algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 40(1936), 37-111.

[2] Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. 41(1937), 375-481.

[3] Topological reprezentations of distributive lattices and Browerian logics, Casopis Pest. Mat. 67(1937)1-25.

Tarski, A.

[1] Prime ideal theorem for Boolean algebras and the Axiom of choice, Bull. Amer. Math. Soc. 60 (1954).

[2] Lattice-theoretical fixed point theorem and its applications, Pacific J. Marh. 5 (1955), 285-310.

Urquhart, A.

[1] Free Heyting algebras, Algebra Universalis, 3 (1973), 94-97.

[2] Free distributive pseudocomplemented lattices, Algebra Universalis, 3(1973), 13-15.

Wraith, G.C.

[1] Lectures on elementary topoi, Model theory and topoi (ed. Lawvere), Lecture Notes in Math. 445(1975), Springer.

Bell, J.L. (Fremlin, D.H.)

[1] The maximal ideal theorem for lattices of sets, Bull. London Math. Soc., 4(1972), 1-2.

[2] Boolean-valued models and independence proofs in set theory, Clarendon Press, Oxford (1977).

Benabou, J.

[1] Treillis locaux et paratopologies, Séminaire C. Ehresmann, 1958/59, Fac. des Sciences de Paris, 1969.