O primjeni matematičke teorije sprovođenja toplote na probleme kosmičke fizike.

Napisao

Dr. Milutin Milanković.

(Preštampano iz 200. knjige „Rada“ Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti.)

U ZAGREBU.
TISAK DIONIČKE TISKARE
1913.

Matematička teorija sprovođenja toplote uživala je od postanka svoga[1] osobitu pažnju matematikâ, te je ubrzo postala zajednička oblast čiste matematike i teorijske fizike. Iz nje se razvila teorija Fourierovih redova i Fourierovih integrala, a znatan dio radova, koji se bave tom teorijom, ima više matematičkoga interesa negoli fizikalnoga. Jedan pogled na prijegled glavnije literature o tome predmetu uvjerava nas o tome[2]. Interesantno je međutim, da se baš u početku razvitka te teorije veoma mnogo očekivalo od njenih praktičnih primjena. Kada je Fourier svoju matematičku teoriju primijenio na geofizikalni problem hlađenja zemaljske kugle[3], ta su njegova ispitivanja, kojih direktna praktična vrijednost nije mogla biti velika zbog nepoznavanja fizikalnih prilika u unutrašnjosti zemlje, dočekali s velikim interesom geofizici[4]. Toga interesa nije ni dandanas sasvim nestalo, i ako se sada bolje uviđaju teškoće ispitivanja gornjega fenomena. *W. Thomson* (Lord *Kelvin)* se uz primjenu Fourierove

---

[1] O počecima njenim, koji datiraju od godine 1804., vidi: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. V. Artikel 4. „Wärmeleitung" von Hobson und Diesselhorst pag. 165. ff.

[2] Važniji radovi o matematičkoj teoriji sprovođenja toplote navedeni su prijegledno u Winkelmann, Handbuch der Physik, zweite Auflage, Bd. III. Leipzig 1906. pag. 444. ff.

[3] Oeuvres de Fourier, Tome II. Paris 1890.

[4] Resal, Traité de Physique mathématique. 2. Éd. Tome II. Paris 1888. navodi (str. 48.), da je slavni geolog ondašnjega doba É. de Beaumont pripisivao veliku važnost ispitivanju Fourierovu.

teorije, no polazeći od drugih pretpostavaka, bavio istim problemom[1]; *Poincaré* je opširno progovorio o Fourieru i o Thomsonovu ispitivanju[2], a *Boussinesq* je dao „slavnoj teoriji Fourierovoj hlađenja zemlje“ veoma elegantan matematički oblik[3].

Osim toga se matematička teorija sprovođenja toplote bavila već u prvim počecima svojima još jednim pitanjem geofizike: problemom varijacija temperature u gornjim slojevima zemaljske kore. *Poisson* se u svome klasičnom djelu o matematičkoj teoriji toplote bavio podrobno tim fenomenom[4], a i *W. Thomson* posvetio mu je svoju pažnju[5].

Pri svem tom čini mi se, da se polje primjena matematičke teorije sprovođenja toplote na probleme kosmičke fizike može znatno proširiti. Termičke prilike onih članova našega planetskoga sistema, koji nijesu opkoljeni osjetnim atmosferama, kao što je n. pr. zemljin mjesec, mogu se bez hipotetičkih pretpostavaka ispitivati s pomoću navedene teorije, jer učini li se opravdana pretpostavka, da je površina posmatranoga kosmičkoga tijela kruta i bez vlastite toplote, to će temperatura njena zavisjeti očito o ova tri utjecaja: a) od radijacije sunca, koju ćemo ukratko nazvati insolacijom i po kojoj se za boravka sunca nad horizontom uočenoga mjesta površine dovode na tu površinu određene toplotne množine; — b) od zračenja toplotnih množina sa posmatrane površine u interplanetarni prostor, a taj ćemo utjecaj nazvati ukratko radijacijom; — c) od sprovođenja toplotnih množina sa površine posmatranoga tijela u njegovu unutrašnjost i obratno, a taj ćemo utjecaj zvati kondukcijom.

Kako su zakoni, koji regulišu ta tri utjecaja, dovoljno poznati, to je moguće formirati diferencijalne jednačine, kojih bi integracija dala temperaturu odabranoga mjesta površine kao funkciju vremena.

---

[1] Lord Kelvin, Mathematical and Physical Papers, Cambridge.

[2] Poincaré, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques. Paris 1911. pag. 209. suiv.

[3] Boussinesq, Problème du refroidissement de la croûte terrestre, traité an même point de vue que l' a fait Fourier, mais par une méthode d' intégration beaucoup plus simple; Comptes rendus. Tome 130. (1900.) pag. 1652.

[4] Poisson, Théorie mathématique de la chaleur. Paris 1835.

[5] W. Thomson, Problems relating to underground temperatures; Phil. Mag. (5) 5. (1878.) pag. 370. — Lord Kelvin: Loc. cit.

Zadatak, koji sam sebi pri izradbi ove radnje stavio, ovaj je: da formiram te diferencijalne jednačine; da proučivši matematičko oruđe, koje nam stoji na raspoloženje, ispitam slučajeve, u kojima je integracija tih diferencijalnih jednačina moguća — s jednom riječju: da sistematički sredim i usavršim za specijalnu upotrebu matematički aparat za kasnije konkretne primjene.

Uočimo dakle neko kosmičko tijelo krute površine, a takovih dimenzija, da elemenat njegove površine, kojega termičke prilike ispitujemo, možemo smatrati za ravan, onda mora temperatura u kojegod tačke toga tijela u blizini posmatranoga elementa zadovoljavati Fourierovu parcijalnu diferencijalnu jednačinu[1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

gdje x označuje odstojanje kojegod tačke tijela od granične površine, koja je sada zamijenjena ravninom, u temperaturu tijela u toj tački u vremenu t, a a^2 koeficijenat sprovođenja temperature posmatranoga tijela. Označimo li sa k sposobnost sprovođenja toplote sa s specifičnu toplotu, a sa ρ gustinu supstancije posmatranoga tijela, to postoji relacija:

$$a^2 = \frac{k}{s\rho}. \tag{2}$$

Temperatura granične površine funkcija je navedenih triju utjecaja, pa je naš sada najbliži zadatak, da tim utjecajima dademo matematički oblik.

Po prvom utjecaju, dakle po insolaciji, neka prima jedinica neke površine u jedinici vremena toplotnu množinu $\frac{dq_1}{dt}$. Označimo li sa I onu toplotnu množinu, koju sunce šalje u jedinici vremena na posmatranu jedinicu površine, to postoji jednačina

$$\frac{dq_1}{dt} = A_0 I,$$

---

[1] Vidi n. pr. Weber H., Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik. 4. Aufl. Bd. II. Braunschweig 1912. pag. 90.

*

gdje A_0 označuje apsorpcionu sposobnost površine posmatranoga tijela. Veličina I zavisi, — uz pretpostavku, da posmatrano tijelo nije opkoljeno atmosferom — samo o relativnom položaju uočenoga elementa površine prema suncu; pa kako nam zakoni kretanja nebeskih tijela određuju taj položaj, to je veličina I poznata funkcija vremena, a to ću označiti sa:

$$I = I(t),$$

tako da je:

$$(3) \qquad \frac{dq_1}{dt} = A_0 I(t).$$

Kako insolacija ne može biti negativna, to je i funkcija $I(t)$ ili pozitivna ili ravna nuli.

Ja sam se u radnji: „О распореду сунчеве радијације на површини земље[1] podrobno bavio ispitivanjem funkcije $I(t)$ uzev, kao što se vidi iz natpisa radnje, zemlju kao objekat insolacije. Ali se moja ispitivanja mogu primijeniti na svako kosmičko tijelo, koje opisuje oko sunca Keplerovu elipsu, a to su, dozvolivši neznatna zanemarenja, svi članovi našega planetskoga sistema. Tako nam citirana radnja daje sredstvo, da odredimo funkciju $I(t)$. Označimo li sa T vrijeme obilaženja (revolucije) posmatranoga kosmičkoga tijela oko sunca, to sljeduje iz navedene radnje, da je funkcija $I(t)$ periodička funkcija sa periodom T.

Po drugom utjecaju, dakle po radijaciji, neka gubi jedinica uočene površine u jedinici vremena toplotnu množinu $\frac{dq_2}{dt}$. Kada bi posmatrano tijelo bilo apsolutno crno ili, kao što je bolje reći, kada bi bio savršen radijator[2], onda bi radijacija njegova bila regulisana Stefanovim zakonom, prema kojem bi bilo:

$$(3) \qquad \frac{dq_2}{dt} = \sigma\, T_0{}^4,$$

---

[1] „Глас Српске Краљевске Академије“. Први разред 37.

[2] O prijedlogu, da se dosada uobičajeni naziv „apsolutno crno tijelo“ zamijeni boljim „savršen radijator“, vidi Poynting, Die Strahlung im Sonnensystem; Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik. Bd. II. (1905.) pag. 44.

pri čemu T_0 označuje apsolutnu temperaturu površine, a σ jedan konstantni koeficijenat[1]. Pri tome smo uzeli, da je temperatura interplanetarnoga prostora, u koji tijelo radijira svoju toplotu, jednaka apsolutnoj nuli.

No Stefanov zakon važi, kao što su *Boltzmann* teorijski[2], a *Schnebeli, Lummer, Pringsheim* i *Kurlbaum* eksperimentalno[3] dokazali, samo za savršene radijatore. Za nepotpune radijatore čini se da su zakoni radijacije komplikovaniji. *Paschen*[4] dolazi do zaključka, da je zakon radijacije za takova tijela, bolje negoli Stefanovim zakonom, formulisan jednačinom:

$$\text{(5)} \qquad \frac{dq_2}{dt} = c\, T_0^{\varepsilon},$$

gdje su c u ε konstante, koje zavise o prirodi površine posmatranoga tijela. *Siegl*[5] je te konstante odredio za različite zemlje, kamenja, vodu i led, dakle za materije, koje baš u našem slučaju dolaze u obzir. Prema njegovim ispitivanjima varijira eksponenat ε za te materije između vrijednosti 4·083 (za bazaltnu lavu) i vrijednosti 4·382 (za šljunak), a koeficijenat c između vrijednosti $0{\cdot}0389.10^{-12}$ (za šljunak) i vrijednosti $0{\cdot}589.10^{-12}$ (za bazaltnu lavu).

Ja ću u ovom, što sljeduje, uzeti u obzir jednačinu (5), koja za savršen radijator prelazi u jednačinu (4). Označimo li temperaturu površine posmatranoga tijela, mjerenu u Celsiusovim stepenima, sa u_0, to je zakon radijacije predstavljen izrazom:

$$\text{(6)} \qquad \frac{dq_2}{dt} = c\,(273 + u_0)^{\varepsilon}.$$

---

[1] Koeficijenat σ je za jedinice: gramkalorija, minuta i cm² po ispitivanjima *Kurlbaumovim* $\sigma = 0{\cdot}768 \times 10^{-10}$, a po ispitivanjima *Bauera* i *Moulina* $\sigma = 0{\cdot}763 \times 10^{-10}$, određen je dakle dovoljnom tačnosti. Vidi o tome: Kurlbaum, Ueber eine Methode zur Bestimmung der Strahlung in absolutem Masse. Wied. Annalen *65.* (1898.) pag. 746.; Bauer et Moulin, La constante de la loi de Stephan. Journal de Physique (4) *9.* (1910.) pag. 468.

[2] Wied. Annalen *65.* (1898.) pag. 746.

[3] Vidi Chwolson, Traité de Physique. Tome II. Paris 1906. pag. 72.

[4] Wied. Annalen. *49.* (1893.) pag. 50. — Ibid. *58.* (1896.) pag. 455. — Ibid. *60.* (1897.) pag. 662.

[5] Siegl, Ueber das Emissionsvermögen von Gesteinen, Wasser und Eis. Wiener Sitzungsberichte, Bd. CXVI. Abt. IIa (1907.) pag. 1203.

Po trećem utjecaju, t. j. kondukciji, dobiva jedinica uočene površine u jedinici vremena toplotnu množinu $\frac{dq_3}{dt}$, koja je, prema osnovnim principima matematičke teorije sprovođenja toplote[1], jednaka produktu sposobnosti provođenja toplote k i gradijenta temperature $\frac{\partial u}{\partial x}$ na površini. Zato je:

$$(7) \qquad \frac{dg_3}{dt} = k \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\}_{x=0}.$$

Na površini tijela ukazaće se u uočenom momentu poradi navedena tri utjecaja ona temperatura u_0, kod koje je pridolaženje toplotnih množina ka površini jednako odilaženju. Kako prema pređašnjem pridolaze na površinu toplotne množine $\frac{dq_1}{dt}$ i $\frac{dq_3}{dt}$, a odilazi toplotna množina $\frac{dq_2}{dt}$, to će postojati jednačina:

$$(8) \qquad \frac{dq_.}{dt} + \frac{dq_3}{dt} = \frac{dq_2}{dt}.$$

ili, uzevši u obzir jednačine (3), (6) i (7):

$$(9) \qquad A_0 I(t) = c\,(273 + u_0)^{\varepsilon} - k\,\frac{\partial u_0}{\partial x}.$$

Ova jednačina daje nam jedan od graničnih uslova, potrebnih za integraciju jednačine (1). Drugi granični uslov dobije se u problemima ove vrste time, da se zahtijeva, da sa rastućim x ne raste u u beskonačnost. Tako nam isto i inicijalan raspored temperature ne mora biti zadan zbog periodiciteta funkcije $I(t)$, jer će se poradi toga i temperatura površine mijenjati periodički, a mi proučavamo samo ona stanja, koja su toliko udaljena od inicijalnoga momenta, da na njih ne utječe inicijalni raspored.

Ispitivanje termičkih prilika na površinama kosmičkih tjelesa, neopkoljenih atmosferama, redukuje se prema tome na riješenje ovoga matematičkoga zadatka:

Neka se nađe partikularni integral $u = f(x, t)$ parcijalne diferencijalne jednačine:

---

[1] Vidi n. pr. Weber H.: Loc. cit. pag. 80: Gl. (2).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{10}$$

koji zadovoljava ove granične uslove:

$$\begin{cases} \text{za } x = 0 \\ A_0 I(t) = c\,(273 + u)^{\varepsilon} - k \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \text{za } x = \infty \\ u = \text{konačno} \end{cases} \tag{12}$$

Pri tome je $I(t)$ poznata periodična funkcija sa periodom T, koja ne može nikada postati negativna.

Riješivši ovaj zadatak, daje nam izraz $u_0 = f(0, t)$ temperaturu površine posmatranoga tijela kao funkciju vremena.

Do danas nije pošlo za rukom riješiti naprijed izloženi problem u njegovoj potpunosti; ali je moguće, kao što će se vidjeti po onom, što sljeduje, riješiti ga u nekim specijalnim slučajevima. Osim toga je moguće razviti i za općeni njegov slučaj metodu, koja daje aproksimativno riješenje. Te ću slučajeve sada izložiti.

Prvi specijalni slučaj. Insolacija površine je konstantna, t. j.

$$I(t) = C, \tag{13}$$

gdje C označuje jednu konstantu.

U ovom su slučaju jednačina (10) a i granični uslovi (11) i (12) zadovoljeni izrazom:

$$u = \left(A_0 \frac{C}{c}\right)^{-\varepsilon} - 273, \tag{14}$$

koji kazuje, da je temperatura tijela konstantna i u svim posmatranim tačkama jednaka. Ovaj slučaj nastupa, dakako, u stacionarnom stanju, t. j. kada je posmatrano stanje toliko udaljeno od inicijalnoga, da inicijalni raspored temperature u tijelu ne utječe više na posmatrano stanje ili kada inicijalni raspored temperature već zadovoljava jednačinu (14).

Veoma važan slučaj kosmičke fizike, koji odgovara gornjim pretpostavkama, slučaj je srednjih godišnjih temperatura kao posljedice srednjega stanja insolacije. Srednje godišnje stanje insolacije kojih god tačaka površine zemlje ili drugih planeta našega sunčanoga sistema konstantno je, ako se pod godinom razumije vrijeme revolucije posmatrane planete oko sunca. Za takove jedne godine mijenja se doduše gradijenat temperature $\frac{\partial u}{\partial x}$ na površini, ali on osciluje pri tome s podjednakom pozitivnom i negativnom amplitudom oko vrijednosti nule, tako da su toplotne množine, koje za tople polugodine struje sa površine tijela u njegovu unutrašnjost, jednake onim toplotnim množinama, koje za hladne polugodine struje iz unutrašnjosti ka površini. Zato je godišnji efekat kondukcije ravan nuli, i on se može pri ispitivanju godišnjih temperatura zanemariti.

Drugi specijalni slučaj. Član se $k \frac{\partial u}{\partial x}$ jednačine (11) može zanemariti, tako da ona dobije ovaj oblik:

$$(15) \qquad \begin{cases} \text{za } x = 0 \\ A_0 I(t) = c\,(273 + u)^{\varepsilon}. \end{cases}$$

To nastupi onda, kada je sposobnost sprovođenja toplote k posmatranoga tijela beskonačno mala, t. j. kada imamo posla sa potpunim izolatorom toplote.

U tom je slučaju jednačinom (15) već određena temperatura površine, pa nam ostaje samo da odredimo temperaturu u koje god tačke u unutrašnjosti tijela kao funkciju vremena.

Riješivši jednačinu (15) po u, dobijemo temperaturu površine kao funkciju vremena:

$$(16) \qquad u = \left[\frac{A_0}{c}\; I(t)\right]^{-\varepsilon} - 273 = f(t).$$

Kako je $I(t)$ bila periodična funkcija sa periodom T, to je i $f(t)$ periodična funkcija iste periode, pa ako funkcija $f(t)$ ne postaje nigdje diskontinuirana, to se posmatrani slučaj svodi na klasički slučaj Poissonov; njegove ćemo rezultate ukratko rekapitulisati, jer će nam oni biti potrebni pri ispitivanju onoga specijalnoga slučaja, koji sljeduje.

Izrazimo li vrijeme t funkcije $f(t)$ u lučnoj mjeri, pomnoživ ga sa $\frac{2\pi}{T}$ tako, da perioda T odgovara luku 2π, onda možemo funkciju $f(t)$ razviti u Fourierov red:

$$(17)\quad f(t) = \alpha + \sum_m \beta_m \cos \frac{2m\pi}{T}\, t + \sum \gamma_m \sin \frac{2m\pi}{T}\, t,$$

pri čemu je:

$$(18)\quad \left|\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{dt} \\ \beta_m &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2m\pi}{T}\, t\,\mathrm{dt} \\ \gamma_m &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2m\pi}{T}\, t\,\mathrm{dt} \end{aligned}\right.$$

i gdje m označuje cijele brojeve 1, 2, 3 . . . i t. d.

Granični uslov (15) našega problema dobije prema tome ovaj oblik:

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{za } x = 0 \\ &u = \alpha + \sum_m \beta_m \cos \frac{2m\pi}{T}\, t + \sum_m \gamma_m \sin \frac{2m\pi}{T}\, t. \end{aligned}\right.$$

Integral jednačine (10), koji zadovoljava granične uslove (19) i (12), predstavljen je, kao što ćemo se odmah uvjeriti, ovim izrazom:

$$(20)\qquad u(x_1 t) = \alpha + \sum_m \beta_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}} \cos\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) + \sum_m \gamma_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}} \sin\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right).$$

U stvari sljeduje iz gornje jednačine:

$$(21)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{2\pi}{T}\sum_m m\beta_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}} \sin\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) + \frac{2\pi}{T}\sum_m m\gamma_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}} \cos\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right);$$

$$(22)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\left\{\sum_m \sqrt{m}\,(\beta_m - \gamma_m)\, e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}} \sin\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_m \sqrt{m}\,(\beta_m + \gamma_m) e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}} \cos\left(\frac{2m\pi}{T} - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)\right\};$$

$$(22^{a})\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{a^2}\frac{\pi}{T}\left\{-\sum_m m\beta_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}} \sin\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) + \sum_m m\gamma_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}} \cos\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)\right\}.$$

Stavimo li vrijednosti (21) i (22) u jednačinu (10), to vidimo, da je ona zadovoljena. Tako su isto funkcijom (20) zadovoljeni i granični uslovi (19) i (12). Zato nam ona predstavlja riješenje proučavanoga specijalnoga slučaja.

Treći specijalni slučaj. Funkcija $I(t)$ osciluje s malenim amplitudama oko jedne konstantne pozitivne vrijednosti. U ovom će slučaju i temperatura u površine posmatranoga tijela oscilovati s malenim oscilacijama oko jedne srednje vrijednosti u_0, pa zato možemo staviti:

$$(23) \qquad u = u_0 + \Delta u,$$

pri čemu je u_0 konstantno, a Δu malo. Veličinu u_0 odredit ćemo kasnije.

Granični uslov (11) dobije sada ovaj oblik:

$$(24) \qquad \begin{cases} \text{za } x = 0 \\ A_0 I(t) = c\,(273 + u_0 + \Delta u)^{\varepsilon} - k\,\dfrac{\partial u}{\partial x}. \end{cases}$$

U izrazu $c\,(273 + u_0 + \Delta u)^{\varepsilon}$ je Δu veoma malo, pa zato možemo taj izraz razviti u red i zanemariti sve više potencije od Δu. Na taj način dobijemo:

$$\begin{aligned} c\,(273 + u_0 + \Delta u)^{\varepsilon} &= c\,[(273+u_0)^{\varepsilon} + \varepsilon\,(273+u_0)^{\varepsilon-1}\Delta u] = \\ &= c\,(273+u_0)^{\varepsilon} - c\varepsilon\,(273+u_0)^{\varepsilon-1}u_0 + c\varepsilon\,(273+u_0)^{\varepsilon-1}u. \end{aligned}$$

Uvedimo, kratkoće radi, ove oznake:

$$(25) \qquad \begin{cases} c\,(273+u_0)^{\varepsilon} - c\varepsilon\,(273+u_0)^{\varepsilon-1}u_0 = -\,hv_0 \\ c\varepsilon\,(273+u_0)^{\varepsilon-1} = h \end{cases}$$

onda je:

$$(26) \qquad c\,(273 + u_0 + \Delta u)^{\varepsilon} = h\,(u - v_0),$$

pa granični uslov (24) dobije ovaj oblik:

$$\begin{cases} \text{za } x = 0 \\ A_0 I(t) = h(u - v_0) - k \dfrac{\partial u}{\partial x}. \end{cases}$$

Stavimo:

$$v_0 + \frac{A_0}{h} I(t) = \varphi(t); \tag{27}$$

to je uslov na površini izražen sa:

$$\begin{cases} \text{za } x = 0 \\ \varphi(t) = u - \dfrac{k}{h} \dfrac{\partial u}{\partial x}. \end{cases} \tag{28}$$

Naš se problem sada svodi na ovaj:

Valja naći partikularni integral jednačine (10), koji zadovoljava uslove (12) i (28).

Boussinesq[1] je pokazao, ako jedna funkcija $u(x_1 t)$ zadovoljava jednačinu (10), da je ista jednačina zadovoljena i funkcijom:

$$\varphi(x,t) = u(x,t) - \frac{k}{h} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}. \tag{29}$$

U stvari je:

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{k}{h} \frac{\partial^1 u(x,t)}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{k}{h} \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3},$$

tako da je:

---

[1] Boussinesq, Réduction de certains problèmes d' échauffement ou de refroidissement par rayonnement, au cas plus simple de l' échauffement ou du refroidissement des mêmes corps par contact. Comptes Rendus *130.* (1900.) p. 1579.

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-$$

$$-\frac{k}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\};$$

no kako je jednačina (10) zadovoljena funkcijom $u(x,t)$, to sljeduje, da je:

$$(30)\qquad \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}=0.$$

Ako smo prema tome našli funkciju $\varphi(x,t)$, koja zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu (30) i uslove:

$$(31)\qquad \varphi(0,t)=v_0+\frac{A_0}{h}I(t)$$

$$(32)\qquad \varphi(\infty,t)=\text{konačno},$$

to ćemo naći traženu funkciju $u(x,t)$ integrujući diferencijalnu jednačinu (29), a pazeći na uslov (12).

Određenje funkcije $\varphi(x,t)$, koja zadovoljava gornje uslove, riješeno je u pređašnjem specijalnom slučaju, u drugom. Razvijemo li dakle zadatu funkciju $\varphi(0,t)$ u Fourierov red, razvivši $I(t)$ u takov red, to dobijemo:

$$(33)\qquad \varphi(0,t)=v_0+\frac{A_0}{h}\alpha+\frac{A_0}{h}\sum_m\beta_m\cos\frac{2m\pi}{T}t+$$

$$+\frac{A_0}{h}\sum_m\gamma_m\sin\frac{2m\pi}{T}t,$$

pri čemu je:

$$(34)\quad \left| \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} I(t)\,\mathrm{dt} \\ \beta_m &= \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} I(t)\cos\frac{2m\pi}{T}\,t\,\mathrm{dt} \\ \gamma_m &= \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} I(t)\sin\frac{2m\pi}{T}\,t\,\mathrm{dt} \end{aligned} \right.$$

pa je funkcija $\varphi(x,t)$ data izrazom

$$(35)\qquad \varphi(x,t) = v_0 + \alpha\frac{A_0}{h} +$$

$$+\frac{A_0}{h}\sum_m \beta_m\, e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}\cos\left(\frac{2m\pi}{T}\,t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} +\right.$$

$$\left.+\frac{A_0}{h}\sum_m \gamma_m\, e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}\sin\left(\frac{2m\pi}{T}\,t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right).\right.$$

Funkcija $u(x,t)$ određena je diferencijalnom jednačinom (29), t. j. jednačinom:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{h}{k}\,u(x,t) = -\frac{h}{k}\,\varphi(x,t).$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina oblika:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + Pu = Q,$$

pri čemu je:

$$P = -\frac{h}{k}$$

$$Q = -\frac{h}{k}\,\varphi(x,t),$$

pa je njen opšti integral predstavljen izrazom:

$$u = C e^{-\int P dx} + e^{-\int P dx}\int Q e^{\int P dx}\,dx.$$

Po tome možemo veličinu C staviti jednaku kojoj god funkciji od t; no kako se obaziremo na uslov (12), to valja staviti $C = 0$. Na taj način dobijemo:

$$u(x_1t) = -\frac{h}{k}\, e^{\frac{h}{k}x}\int \varphi(x,t)\, e^{-\frac{h}{k}x}\,dx \tag{36}$$

ili, s obzirom na jednačinu (35),

$$u(x,t) = -\frac{h}{k}\left(v_0 + \alpha\frac{A}{h}\right) e^{\frac{h}{k}x}\int e^{-\frac{h}{k}x}\,dx$$

$$-\frac{A_0}{k}\, e^{\frac{h}{k}x}\sum_m \beta_m \int e^{-\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)x}\cos\left(\frac{2m\pi}{T}\,t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)dx$$

$$-\frac{A_0}{k}\, e^{\frac{h}{k}x}\sum_m \gamma_m \int e^{-\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)x}\sin\left(\frac{2m\pi}{T}\,t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right.dx.$$

Stavimo li, kratkoće radi,

$$\left|\begin{aligned} &\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} = a_m\\ &\frac{2m\pi}{T}\,t = b_m\\ &\frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} = c_m \end{aligned}\right. \tag{37}$$

to dobijemo:

$$(38) \qquad u(x,t) = v_0 + \alpha \frac{A_0}{h} - \frac{A_0}{k} e^{\frac{h}{k}x} \sum_m \beta_m \int e^{-a_m x} \cos(b_m - c_m x)\,\mathrm{dx} -$$

$$- \frac{A_0}{k} e^{\frac{h}{k}x} \sum_m \gamma_m \int e^{-a_m x} \sin(b_m - c_m x)\mathrm{dx}.$$

Kako je:

$$\int e^{-a_m x} \cos(b_m - c_m x)\mathrm{dx} = \cos b_m \int e^{-a_m x} \cos c_m x\,\mathrm{dx} +$$

$$+ \sin b_m \int e^{-a_m x} \sin c_m x\,\mathrm{dx}$$

$$\int e^{-a_m x} \sin(b_m - c_m x)\,\mathrm{dx} = \sin b_m \int e^{-a_m x} \cos c_m x\,\mathrm{dx} -$$

$$- \cos b_m \int e^{-a_m x} \sin c_m x\,\mathrm{dx}$$

pa kako je:

$$\int e^{-a_m x} \cos c_m x\,\mathrm{dx} = - \frac{e^{-a_m x}}{a_m{}^2 + c_m{}^2} \left\{ a_m \cos c_m x - c_m \sin c_m x \right\}$$

$$\int e^{-a_m x} \sin c_m x\,\mathrm{dx} = - \frac{e^{-a_m x}}{a_m{}^2 + c_m{}^2} \left\{ a_m \sin c_m x + c_m \cos c_m x \right\}$$

$$\int e^{-a_m x} \cos(b_m - c_m x)\,\mathrm{dx} = - \frac{e^{-a_m x}}{a_m{}^2 + c_m{}^2} \left\{ a_m \cos(b_m - c_m x) + \right.$$

$$\left. + c_m \sin(b_m - c_m x) \right\}$$

$$\int e^{-a_m x} \sin(b_m - c_m x)\,\mathrm{dx} = - \frac{e^{-a_m x}}{a_m{}^2 + c_m{}^2} \left\{ a_m \sin(b_m - c_m x) - \right.$$

$$\left. - c_m \cos(b_m - c_m x) \right\}.$$

Stavimo li gornje vrijednosti u jednačinu (38), to dobijemo:

$$u(x,t) = v_0 + \alpha \frac{A_0}{h} + \frac{A_0}{k} \sum_m \frac{\beta_m}{a_m{}^2 + c_m{}^2} e^{\left(\frac{h}{k} - a_m\right)x} \left\{ a_m \cos(b_m - c_m x) + c_m \sin(b_m - c_m x) \right\} +$$

$$+ \frac{A_0}{k} \sum_m \frac{\gamma_m}{a_m{}^2 + c_m{}^2} e^{\left(\frac{h}{k} - a_m\right)x} \left\{ a_m \sin(b_m - c_m x) - c_m \cos(b_m - c_m x) \right\}.$$

Uzevši još u obzir jednačine (37), to dobijemo konačno jednačinu:

$$(39) \quad u(x,t) = v_0 + \alpha \frac{A_0}{h} + \frac{A_0}{k} \sum_m \frac{\beta_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}}{\frac{h^2}{k^2} + \frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} + \frac{2}{a^2}\frac{m\pi}{T}} \left\{ \left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \right) \cos\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \sin\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{A_0}{k} \sum_m \frac{\gamma_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}}{\frac{h^2}{k^2} + \frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} + \frac{2}{a^2}\frac{m\pi}{T}} \left\{ \left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \right) \sin\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \right) - \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \cos\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \right) \right\},$$

oja rješava stavljeni problem.

Temperaturu površine dobijemo, ako u gornjoj jednačini stavimo $x = 0$, pa je zato ona predstavljena izrazom:

$$
\begin{aligned}
(40) \qquad & u = v_0 + \varkappa \frac{A_0}{h} + \\
& + \frac{A_0}{k} \sum_m \frac{\beta_m}{\frac{h^2}{k^2} + \frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} + \frac{2}{a^2}\frac{m\pi}{T}} \left\{ \left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) \cos\frac{2m\pi}{T} t + \right. \\
& \left. + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \sin\frac{2m\pi}{T} t \right\} + \\
& + \frac{A_0}{k} \sum_m \frac{\gamma_m}{\frac{h^2}{k^2} + \frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} + \frac{2}{a^2}\frac{m\pi}{T}} \left\{ \left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) \sin\frac{2m\pi}{T} t - \right. \\
& \left. - \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \cos\frac{2m\pi}{T} t \right\}.
\end{aligned}
$$

Srednja vrijednost u_0 temperature na površini, koju imamo još da odredimo, nastupa onda, kada nestane trigonometrijskih članova gornje jednačine, jer svakoj njihovoj pozitivnoj vrijednosti odgovara i tako ista negativna. Zato se ima u_0 odrediti iz jednačine:

$$u_0 = v_0 + \varkappa \frac{A_0}{h}$$

ili

$$h(u_0 - v_0) = \alpha A_0.$$

Stavimo li u jednačini (26) $\Delta u = 0$ $u = u_0$, to dobijemo

$$c(273 + u_0)^{\varepsilon} = h(u_0 - v_0).$$

Iz posljednjih dviju jednačina sljeduje jednačina:

$$(41) \qquad c(273 + u_0)^{\varepsilon} = A_0 \varkappa,$$

koja određuje temperaturu u_0.

Veličina $\varkappa$ je prvi član Fourierova reda, u koji smo razvili funkciju $I(t)$, pa nam ona zato predstavlja srednju vrijednost insolacije, koja osciluje oko te srednje vrijednosti. Iz jednačine

(41) sljeduje, da je srednja temperatura u_0 površine jednaka onoj temperaturi, koju bi površina imala pri konstantnom srednjem stanju insolacije, u kojem se ne bi pokazao utjecaj kondukcije.

Uzmimo sada — jednostavnosti radi i da bismo slijedeće rezultate mogli lakše pregledati —, da je funkcija $I(t)$ jednostavna oscilacija, t. j. da se Fourierov red redukuje na dva člana, da je dakle:

$$I(t) = \alpha + \beta_1 \cos \frac{2\pi}{T} t. \tag{42}$$

U ostalom sve, što sljeduje, moći će se bez teškoća raširiti i na općeni slučaj, kada Fourierov red ima makar koji broj članova.

Valja dakle u jednačini (39) staviti:

$$m = 1 \quad \gamma m = 0.$$

Na taj način dobijemo:

$$u(x,t) = v_0 + \alpha \frac{A_0}{h} + \tag{43}$$

$$+ \frac{A_0}{k} \frac{\beta_1 e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}}}{\frac{h^2}{k^2} + \frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{\pi}{T}} + \frac{1}{a^2}\frac{2\pi}{T}} \Bigg| \left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right) \Bigg| ;$$

po toj se jednačini možemo lako uvjeriti o ispravnosti dosadanjih rezultata.

Temperatura površine data je u posljednjem slučaju izrazom:

$$(44) \qquad u = v_0 + \varkappa \frac{A_0}{h} +$$

$$+ \frac{A_0}{k} \frac{\beta_1}{\frac{h^2}{k^2} + \frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{\pi}{T}} + \frac{1}{a^2}\frac{2\pi}{T}} \left\{ \left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right) \cos\frac{2\pi}{T} t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}} \sin\frac{2\pi}{T} \right\} t.$$

Pitajmo, kada nastupaju i koliki su ekstremi u_{max} i u_{min} gornje temperature!

Oni nastupaju za $t = t_1$, pri čemu su t_1 korijeni ove jednačine:

$$(45) \qquad -\left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right) \sin\frac{2\pi}{T} t_1 + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}} \cos\frac{2\pi}{T} t_1 = 0$$

ili:

$$\operatorname{tang} \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{1}{1 + \frac{ha}{k}\sqrt{\frac{T}{\pi}}};$$

no kako je prema jednačini (2) $\frac{a}{k} = \frac{1}{as\rho}$, to su vremena ekstrema data jednačinom:

$$(46) \qquad \operatorname{tang} \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{1}{1 + \frac{h}{as\rho}\sqrt{\frac{T}{\pi}}}.$$

Ekstremi insolacije I nastupaju za vrijednost:

$$t = 0, \quad T, \quad 2\,T, \quad 3\,T\,\ldots$$

$$t = \frac{T}{2}, \quad \frac{3}{2}\,T, \quad \frac{5}{2}\,T\,\ldots;$$

ekstremi temperature na površini tijela nastupaju u ista vremena samo kada je $a = 0$; inače zakašnjavaju prema jednačini (45), pa njihovo maksimalno zakašnjavanje (za $a = \infty$) jest $\frac{T}{4}$.

Kvadriramo li jednačinu (45), to dobijemo:

$$\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right)^2\left(1-\cos^2\frac{2\pi}{T}\,t_1\right)-2\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right)\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\sin\frac{2\pi}{T}\,t_1\,\cos\frac{2\pi}{T}\,t_1+$$

$$+\frac{1}{a^2}\frac{\pi}{T}\left(1-\sin^2\frac{2\pi}{T}\,t_1\right)=0;$$

odatle sljeduje:

$$\left\{\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right)\cos\frac{2\pi}{T}\,t_1+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\sin^2\frac{\pi}{T}\,t_1\right\}^2=\frac{h^2}{k^2}+\frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{\pi}{T}}+\frac{1}{a^2}\frac{2\pi}{T}. \tag{47}$$

Kvadriranje jednačine (44) daje:

$$\left(u-v_0-\alpha\frac{A_0}{h}\right)^2=\frac{A_0{}^2}{k^2}\frac{\beta_1{}^2}{\left(\frac{h^2}{k^2}+\frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{\pi}{T}}+\frac{1}{a^2}\frac{2\pi}{T}\right)^2}\left\{\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right)\cos\frac{2\pi}{T}\,t+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\sin\frac{2\pi}{T}\,t\right\}.$$

Ekstremi u_{max} i u_{min} nastupaju za $t=t_1$, pa zato dobijemo njihove vrijednosti, ako u gornjoj jednačini zamijenimo t sa vrijednošću t_1 iz jednačine (47); oni su dakle dati jednačinom:

$$\left(u_{min}^{max}-v_0-\alpha\frac{A_0}{h}\right)^2=\frac{A_0{}^2}{k^2}\frac{\beta_1{}^2}{\frac{h^2}{k^2}+\frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{\pi}{T}}+\frac{1}{a^2}\frac{2\pi}{T}}$$

ili jednačinom:

$$\left(u_{min}^{max} - v_0 - \alpha\,\frac{A_0}{h}\right)^2 = \frac{{A_0}^2}{h^2}\,\frac{{\beta_1}^2}{1 + \frac{2k}{ah}\sqrt{\frac{\pi}{T}} + \frac{k^2}{a^2h^2}\,\frac{2\pi}{T}}.$$

Uzmemo li još u obzir, da je $\frac{k}{a} = a s \rho$, to dobijemo:

$$u_{max} = v_0 + \alpha\,\frac{A_0}{h} + \frac{A_0}{h}\,\beta_1\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2as\rho}{h}\sqrt{\frac{\pi}{T}} + \frac{a^2s^2\rho^2}{h^2}\,\frac{a\pi}{T}}}, \tag{48}$$

$$u_{min} = v_0 + \alpha\,\frac{A_0}{h} + \frac{A_0}{h}\,\beta_1\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2as\rho}{h}\sqrt{\frac{\pi}{T}} + \frac{a^2s^2\rho^2}{h^2}\,\frac{2\pi}{T}}}. \tag{49}$$

Kada ne bi bilo kondukcije, t. j. kada bi bilo $a = 0$, onda bi temperatura površine oscilovala oko srednje vrijednosti

$$u_0 = v_0 + \alpha\,\frac{A_0}{h}$$

amplitudama

$$\pm\,\frac{A_0}{h}\,\beta_1.$$

Utjecaj kondukcije umanjuje dakle amplitude u razmjeri:

$$1 : \sqrt{1 + \frac{2as\rho}{h}\sqrt{\frac{\pi}{T}} + \frac{a^2s^2\rho^2}{h^2}\,\frac{2\pi}{T}}.$$

Općeni slučaj može se, kao što smo već spomenuli, riješiti samo sukcesivnim aproksimacijama. Zato valja, služeći se naprijed izloženim rezultatima — n. pr. zanemariv utjecaj kondukcije pa upotrijebiv jednačinu (16) —, odrediti približno tok temperature na površini. To prvo približno riješenje neka bude:

$$u = f(t).$$

Razvijemo li sada funkciju $f(t)$ u Fourierov red jednaačinam (17) i (18), onda nam jednačina (22) daje, ako u nju stavimo $x = 0$, gradijenat temperature na površini:

$$(50)\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\}_{x=0} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\left\{\sum_m \sqrt{m}\,(\beta_m - \gamma_m) \sin \frac{2m\pi}{T}\, t - \right.$$

$$\left. - \sum_m \sqrt{m}\,(\beta_m + \gamma_m) \cos \frac{2m\pi}{T}\, t \right\},$$

pa njime i jednačinom (11), t. j.

$$(51)\qquad A_0 I(t) = c\,(273 + u)^{\varepsilon} - k \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\}_{x=0},$$

možemo odrediti bolju vrijednost temperature na površini $u = f_1(t)$; njome možemo dosadanji postupak ponoviti, dok ne dobijemo riješenje, kojega nas tačnost zadovoljava.

О кинематичној симетрији и њеној примени на квалитативна решења проблема динамике.

од
Д-Р МИЛУТИНА МИЛАНКОВИЋА,
ВАНР. ПРОФ. УНИВЕРСИТЕТА.

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 26. јуна 1911.)

Кинематика се може сматрати за једну раширену геометрију у којој се, осим просторних елемената појављује још и време, па је за то могуће из појма геометријске симетрије едификовати појам кинематичне симетрије увађањем времена као новог елемента.

Ми ћемо у овој радњи да прецизирамо појам кинематичне симетрије, да испитамо све могуће случајеве такве симетрије, да проведемо класификацију тих случајева и да покажемо да се на тај начин добивени резултати могу употребити за квалитативна решења проблема динамике.

Да би смо избегли сваку нејасноћу, а оштрије обележили циљ ове радње, изложићемо шта разумевамо под квалитативним решењима у проблемима динамике и покушати да групишемо та квалитативна решења у најважније категорије. Ако је при проучавању проблема кретања n материјалних тачака — а на овај проблем даду се свести сви проблеми динамике — могуће координате тих тачака изразити као функције времена t, то онда такове решење називамо *потпуним решењем* динамичкога проблема, јер нам оно открива све особине проучаванога кретања. Но у великој множини динамичних проблема није могуће — према данашњем стању математике — добити потпуно решење, па је специјално у тим случајевима, у којима су обичне методе динамике неупотребљиве, важно одредити макар неке особине проучаваног кретања. Налажење таковиx особина проучаванога кретања називамо *квалитативним решењем*, па према томе да ли се те особине односе на природу кретања, на његов стабилитет, на његове просторне границе, на његове кинематичке границе или на геометријске особине путања разликујемо следеће главне категорије квалитативних решења у проблемима динамике.

I. По природи својој делимо кретања у сређена и несређена. Ако посматрани систем тачака после интервала времена T сачињава исту такву констелацију (т. ј. међусобни релативни положај тачака) као и у почетку тога интервала, онда називамо кретање периодичним, а T периодом. Ако се при томе исте констелације дешавају на истом месту простора, онда називамо кретање апсолутно периодично, а иначе релативно периодично. Приближује ли се посматрани систем бесконачно једној одређеној констелацији, а да ју у коначном интервалу времена не заузме, онда називамо кретање асимптотским кретањем. И овде можемо разликовати апсолутно и релативно асимптотско кретање. Периодична и асимптотска кретања зовемо одређенима, а остала неодређенима. Одредити, према томе, природу проучаванога кретања, значи одредити којој од наведених класа при-пада проучавано кретање, па таква одредба представља једно квалитативно решење. Одредба периоде T код периодичног кретања може се сматрати као специјално квалитативно решење, јер нам оно даје констелацију за време $t = t_0 + n\,T$ где је t_0 иницијалан моменат, а n произвољан цео број. Исто је тако одредба асимптотног положаја специјално квантитативно решење које одговара вредности независне варијабилне $t = \infty$. У многим ће случајевима квалитативна решења омогућити налажење оваквих специјалних квантитативних решења.

2. Ако је при једном одређеном кретању једнога система материјалних тачака могуће једним бесконачно маленим импулсом на једној од тих тачака изазвати такову кретање, које се коначно разликује од првога, онда ово прво кретање зовемо нестабилним. У многим случајевима могуће је без познавања потпуног решења проучаванога кретања одредити да ли је оно нестабилно у горњем смислу, па та одредба представља једну нову категорију квалитативних решења.

3. Често пута је могуће одредити границу између којих варирају дистанције посматраних материријалних тачака; ако те дистанције, које сматрамо за позитивне, остају увек коначне т.ј. ако ниједна од њих не постане нити равна нули нити бесконачно велика, онда не долази никад до сукоба двеју тачака нити се иједна бесконачно удаљује од осталих, па зато велимо да је посматрани систем стабилан у најширем смислу речи. Одређивање тих граница, између којих дистанције посматраних тачака варирају, представља једну нову категорију квалитативних решења, па ће у извесним случајевима бити могуће ограничити онај део простора у којем се посматране тачке крећу а не остављају га. У случају асимптотскога кретања указује се кадшто и могућност да се одреде оне површине којима се посматране материјалне тачке асимптотски приближују. Ову категорију квалитативних решења можемо обележити као одређивање граница просторних елемената кретања.

4. Аналого пређашњем случају обухватаће следећа категорија квалитативних решења одређивање граница кинематичних елемената кретања т. ј. брзина и акцелерација. Ако је доња граница акцелерације једне посматране материјалне тачке позитивна или равна нули, онда је кретање тачке увек убрзано, ако је горња граница акцелерације негативна или равна нули, увек успорено.

5. Путање посматраних тачака су често геометријски облици (Gebilde), па ће сва квалитативна решења геометријске природе, која се односе на те путање, бити уједно и квалитативна решења динамичког проблема. Геометријске релације о таковим елементима путања посматраних тачака, кроз које оне у исти мах пролазе, дакле геометријске релације о истовременим тангентама путања или — што излази на исто — о моментаним правцима кретања, о моментанима радиусима кривине, о моментаним положајима оскулационих равнина итд. представљају — и ако је из њих време елиминисано — квалитативна решења кинематске природе, па нас могу у извеснима случајевима упознати са интимном природом проучаванога кретања.

Ово су главне категорије квалитативних решења у проблемима динамике.

Кинематична симетрија. — Уочимо, сада, путању једне мобилне тачке, која се креће у једној равни; одаберимо на тој путањи једну непомичну тачку M_0, па означимо одстојање произвољне тачке M те путање од тачке M_0, мерено по луку путање, са s, где s може бити позитивно или негативно према томе на којој страни од M_0 лежи посматрана тачка M, то ће геометријски облик путање бити одређен ако нам њен радиус кривине ϱ буде познат као функција од s. Зато зовемо једначину:

$$\varrho = f_0(s) \qquad \cdots\cdots \; 1)$$

природном једначином путање, јер она одређује облик путање без координатног система.

Тачка M нека сада представља мобилну тачку, онда ће положај њен на путањи бити у свако доба одређен ако s буде познато као функција од t:

$$s = f_1(t) \qquad \cdots\cdots \; 2)$$

Једначине 1) и 2) одређују кретање мобилне тачке, при чему се не узима у обзир оријентација путање у њеној равнини; оне се могу заменити једначинама:

$$\left.\begin{aligned} s &= f_1(t) \\ \varrho &= f_2(t) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \; 3)$$

које одређују облик путање ако се t сматра за параметар.

Означимо ли са m масу посматране мобилне тачке, а са P_t и P_ϱ тангенцијалну, односно центрипеталну компоненту силе P, која на ту тачку дејствује, то су динамичке једначине изражене са:

$$\left.\begin{aligned} P_t &= m\frac{d^2s}{dt^2} = m f_1''(t) \\ P_\varrho &= m\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\varrho} = m\frac{f_1'^2(t)}{f_2(t)} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \; 4)$$

Помоћу једначина 3) и 4) могу се из познатога кретања извести силе које га изазивају и обратно.

Кретање посматране тачке назваћемо *кинематички симетрично,* ако је могуће одабрати једну нумеричну вредност t_0 тако да су у исти мах задовољене обе једначине:

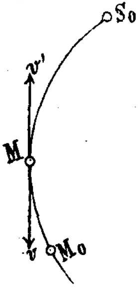
$$\left.\begin{aligned} f_1^2(t_0 - \tau) &= f_1^2(t_0 + \tau) \\ f_2^2(t_0 - \tau) &= f_2^2(t_0 + \tau) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots 5)$$

за сваку вредност од τ.

Према томе какове знакове дајемо другим коренима обеју страна горњих једначина имамо четири разна случаја кинематичне симетрије, па ћемо их испитивати сваки за себе:

1. Са вредности t_0 задовољене су идентично ове две једначине:

$$\left.\begin{aligned} f_1(t_0 - \tau) &= f_1(t_0 + \tau) \\ f_2(t_0 - \tau) &= f_2(t_0 + \tau) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots 6)$$



Сл. 1.

онда се у лучном одстојању

$$s_0 = f_1(t_0)$$

од тачке M_0 налази на путањи тачка S_0 која има ове особине: брзина мобилне тачке:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

има у положају S_0 нумеричку вредност $f'(t_0)$. Из једначине 6) следује:

$$f_1'(t_0 - \tau) = - f_1'(t_0 + \tau) \cdots\cdots 7)$$

па ако у овој једначини ставимо $\tau = 0$, то добивамо

$$f_1'(t_0) = 0 \qquad \cdots\cdots 8),$$

што значи да је брзина мобилне тачке у положају S_0 једнака нули.

Из једначина 6) следује да су лучна одстојања мобилне тачке од тачке M_0, која одговарају моментима $(t_0 - \tau)$ и $(t_0 + \tau)$ а и радиуси кривине путањине који одговарају тим моментима исти, па како то важи за свако τ, то се мобилна тачка, пошто је достигла положај S_0, у којем јој је брзина равна нули, враћа истом путањом којом је дошла у S_0 и треба за повратак из S_0 у произвољну тачку путање исто толико времена колико је требала да из те тачке дође у S_0. Из једначине 7) следује даље да је брзина при другом пролазу у произвољној тачки путање једнака брзини што ју је мобилна тачка имала при првом пролазу, но противнога је правца.

Овај случај назваћемо случајем *идентичне кинематичке симетрије*, а тачку S_0 амплитудним положајем или положајем симетрије таковога кретања. Таково је н. пр. кретање тела баченога вертикално у вис, ако се не узме у обзир отпор ваздуха, или кретање математскога клатна; у оба случаја је највиша тачка амплитудни положај кретања.

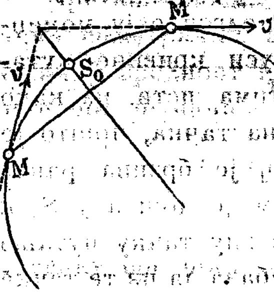
2. Са вредности t_0 задовољене су идентично ове две једначине:

$$\left.\begin{aligned} f_1(t_0 - \tau) &= - f_1(t_0 + \tau) \\ f_2(t_0 - \tau) &= f_2(t_0 + \tau) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 9),$$

онда се у лучном одстојању:

$$s_0 = f_1(t_0)$$

од тачке M_0 налази на путањи тачка S_0 која има следеће особине:



Сл. 2.

Две тачке M и M' које имају исто лучно одстојање од тачке S_0, но противнога знака, тако да се налазе на различитим странама тачке S_0, имају исте радиусе кривине и конкавне су, због истих знакова тих радиуса, на исту страну. Путања је симетрична према нормали у тачки S_0. Диференцирамо ли другу од једначина 9) по параметру τ, то добијамо:

$$f_2'(t_0 - \tau) = - f_2'(t_0 + \tau),$$

па ставимо ли у овој једначини $\tau = o$, то имамо

$$f'_2(t_0) = o \qquad 10)$$

или

$$\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)_{t_0} = o \qquad 10^*)$$

што казује, да радиус кривине достизава у тачки S_0 своју екстремну вредност.

Из прве једначине 9) следује, да мобилна тачка треба исто толико времена да из M дође у S_0 колико из S_0 у симетрични положај M', а диференцијацијом те једначине добивамо једначину:

$$f_1'(t_0 - \tau) = f_1'(t_0 + \tau) \qquad 11)$$

која казује да су брзине у тачкама M и M' једнаке. Поновна диференцијација даје:

$$f_1''(t_0 - \tau) = -f_1''(t_0 + \tau)$$

па ставимо ли у овој једначини $\tau = o$, то добивамо:

$$f_1''(t_0) = o \qquad 12)$$

На исти се начин може доказати да у тачки S_0 ишчезавају сви парни диференцијални квоцијенти функције f_1, а непарни функције f_2. Једначину 12) можемо писати и у облику:

$$\left.\frac{dv}{d\tau}\right\}_{t_0} = o \qquad 12^*)$$

што казује да брзина мобилне тачке достизава у положају S_0 своју екстремну вредност. Из једначина 4) следује да је у томе положају тангенцијална компонента силе P, која утиче на мобилну тачку, равна нули, па је у томе положају та сила нормална на путању.

Овај случај, у којем је путања мобилне тачке симетрична према нормали тачке S_0 назваћемо покраћено случајем *нормалне кинематичне симетрије*, а тачку S_0 положајем симетрије таковога кретања. Таково је н. пр. кретање тела баченога косо у вис; највиша тачка путање је положај симетрије.

3°. Са вредности t_0 задовољене су идентично ове две једначине:

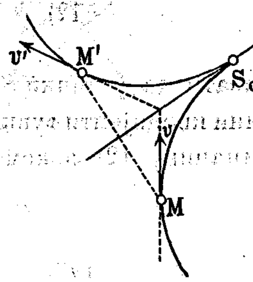
$$\left.\begin{aligned} f_1(t_0 - \tau) &= f_1(t_0 + \tau) \\ f_2(t_0 - \tau) &= -f_2(t_0 + \tau) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 13)$$

знак минус у другој једначини значи, да је путања у две кореспондирајуће тачке конкавна на две противне стране.

Лагано је увидети да је у овом случају путања симетрична према тангенти у тачки S_0, која се налази у лучном одстојању:

$$s_0 = f_1(t_0)$$

од тачке M_0.



Сл. 3.

Диференцијацијом прве једначине 13) добивамо:

$$f_1'(t_0 - \tau) = - f_1'(t_0 + \tau) \qquad 14),$$

што казује да симетричним тачкама одговарају исте брзине но противнога знака. Ставимо ли у горњој једначини $\tau = o$, то добивамо

$$f_1'(t_0) = o \qquad 15)$$

т. ј. брзина у тачки S_0 равна је нули. Овај случај назваћемо покраћено случајем *тангенцијалне кинематичне симетрије*, а тачку S_0 положајем симетрије таковога кретања.

4°. Са вредности t_0 задовољене су идентично ове две једначине:

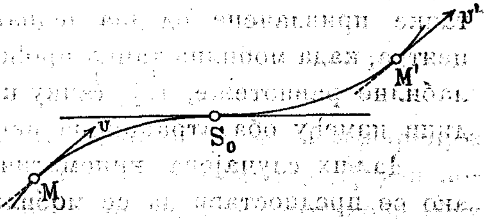
$$\left.\begin{aligned} f_1(t_0 - \tau) &= -f_1(t_0 + \tau) \\ f_2(t_0 - \tau) &= -f_2(t_0 + \tau) \end{aligned}\right\} \qquad 16)$$

Онда је путања централно симетрична према тачки S_0, која се налази у лучном одстојању:

$$s_0 = f_1(t_0)$$

од тачке M_0.

У тачки S_0 мења радиус кривине путањине свој знак, зато мора у тој тачки и центрипетална сила P_ρ мењати свој знак. Предпоставимо ли да се сила P, која утиче на мобилну тачку, мења континуирно, онда мора њена компонента P_ρ у положају S_0 бити равна нули, јер мења на томе месту свој знак. Ако је брзина мобилне тачке у положају S_0 коначна, онда мора, због једначина 4), радиус кривине путање у тачки S_0 бити бесконачно велики; тачка S_0 је инфлексионална тачка.



Сл. 4.

Диференцијацијом прве од једначина 9) добивамо:

$$f_1'(t_0 - \tau) = f_1'(t_0 + \tau) \qquad 17),$$

што казује да симетричним положајима одговарају исте брзине. Поновна диференцијација даје:

$$f_1''(t_0 - \tau) = - f_1''(t_0 + \tau),$$

па ставимо ли у овој једначини $\tau = o$, то добивамо

$$f_1''(t_0) = o \qquad 18)$$

зато — исто као и у случају 2° — достизава брзина мобилне тачке у положају S_0 своју екстремну вредност, а тангенцијална компонента силе P ишчезава. Како је у овоме случају и центрипетална компонента силе P у тачки S_0 равна нули, то је тачка S_0 положај лабилне равнотеже мобилне тачке.

Овај случај назваћемо покраћено случај *инфлексионалне кинематичне симетрије*, а инфлексионалну тачку S_0 положајем симетрије таковога кретања. Овај случај може настати н. пр. при кретању мобилне тачке привлачене од два једнако јака атракциона центра, када мобилна тачка прође кроз положај своје лабилне равнотеже, т. ј. тачку која се налази у средини између оба атракциона центра.

Даљих случајева кинематичне симетрије нема, ако се предпостави да се мобилна тачка креће под утицајем силе која се континуирно мења. Јер када би путања била симетрична према једној правој, која није ни тангента ни нормала у тачки симетрије S_0, онда би путања имала у тој тачки један угао, а то значи да би мобилна тачка пролазећи кроз тај положај морала бити изложена једној моментаној сили, но тај је случај искључен горњим предпоставкама.

Положаји симетрије стоје у уској вези са *кинетичном енергијом* или живом силом мобилне тачке

$$L=\frac{mv^2}{2}$$

као што из следећега следује.

Диференцијацијом прве од једначина 5) следује:

$$f_1(t_0-\tau)\,f_1'(t_0-\tau)=-f_1(t_0+\tau)\,f_1'(t_0+\tau).$$

Квадрирамо ли ову једначину и узмемо ли опет у обзир једначине 5), то добивамо:

$$f_1'^2(t_0-\tau)=f_1'^2(t_0+\tau),$$

а поновном диференцијацијом

$$f_1'(t_0-\tau)\,f_1''(t_0-\tau)=-f_1'(t_0+\tau)\,f_1''(t_0+\tau).$$

Ставимо ли у горњој једначини $\tau=o$, то добивамо

$$f_1'(t_0)\cdot f_1''(t_0)=o,$$

која једначина казује да је у положајима симетрије или:

$$f_1'(t_0) = o$$

или:

$$f_1''(t_0) = o$$

Са првима изводом ишчезавају и сви непарни, а са другим и сви парни изводи функције f_1 у положају симетрије. Горње једначине казују такође да је у положајима симетрије или брзина мобилне тачке једнака нули или њена акцелерација, што, у осталом, следује синтетички и из пређашњих испитивања, где су сва четири случаја кинеметичне симетрије испитивана сваки за себе.

Кинетична енергија мобилне тачке достизава своје екстремне вредности када је

$$\frac{dL}{dt} = o$$

т. ј.

$$mv\frac{dv}{dt} = o$$

дакле или $v = o$ или $\frac{dv}{dt} = o$, т. ј. када је такође или брзина мобилне тачке или њена акцелерација равна нули. Зато можемо да кажемо:

Кинетична енергија мобилне тачке достизава у положајима кинематичне симетрије своје екстремне вредности.

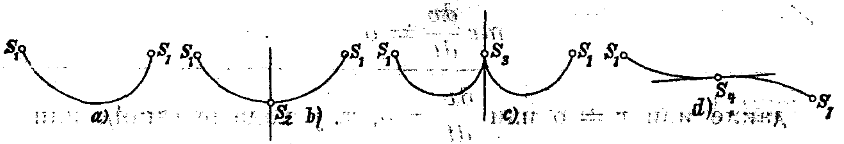
Пролази ли мобилна кроз најмање *два положаја кинематичне симетрије*, онда њено кретање добива — као што ћемо видети — периодичан карактер. Особине таковога кретања зависе од тога којима случајевима кинематичне симетрије припадају та два положаја, па је број свих могућих комбинација дњају и двају од позната четири случаја — при чему се сваки случај може комбиновати са самим собом — једнак $\frac{1}{2}\,5 \times 4 = 10$.

Тих десет случајева *периодичких и симетричних кретања* можемо груписати у три категорије које ћемо назвати осцилациона, циркулациона и ундулациона кретања и која ћемо испитати свако за себе.

Осцилациона кретања мобилне тачке су она за која се може доказати да мобилна тачка пролази кроз два положаја идентичне кинематичне симетрије или барем кроз један положај идентичне кинематичне симетрије и још барем један положај симетрије друге врсте.

На тај начин могу настати следеће четири врсте осцилационих кретања, којих су путање и положаји симетрије у слици 5. шематски представљене.

У тој слици су положаји идентичне симетрије означени са S_1, нормалне са S_2, тангенцијалне са S_3,



Сл. 5.

а инфлексионалне са S_4. Та означења употребићемо и у следећим сликама.

Тачке S_2, S_3, S_4 проузрокују да у свима случајевима имамо по два положаја идентичне кинематичне симетрије. Нека обе те тачке S_1 у сваком од горњих случајева одговарају параметрима t_0 и t_1. Онда је према једначинама 6):

$$f_1(t_0-\tau)=f_1(t_0+\tau), \qquad f_1(t_1-\tau)=f_1(t_1+\tau)$$
$$f_2(t_0-\tau)=f_2(t_0+\tau), \qquad f_2(t_1-\tau)=f_2(t_1+\tau)$$

ове једначине важе за свако τ. Ставимо ли у две леве од горњих једначина

$$\tau = t_0 - t,$$

а у две десне

$$\tau = t_1 - 2t_0 + t,$$

то добивамо једначине

$$f_1(t) = f_1(2t_0 - t) \qquad f_1(2t_0 - t) = f_1[t + 2(t_1 - t_0)]$$

$$f_2(t) = f_2(2t_0 - t) \qquad f_2(2t_0 - t) = f_2[t + 2(t_1 - t_0)]$$

или ако ставимо

$$2(t_1 - t_0) = T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 19)$$

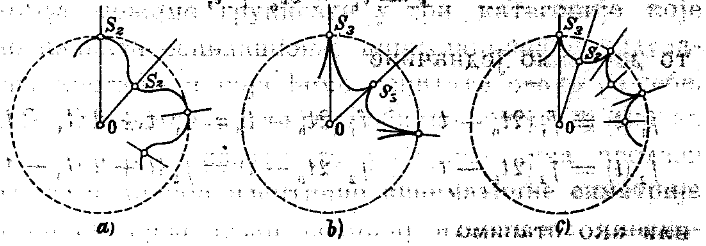
$$\left. \begin{array}{l} f_1(t) = f_1(t + T) \\ f_2(t) = f_2(t + T) \end{array} \right\} \quad . \; . \; 20)$$

Ове једначине казују да је кретање мобилне тачке периодично, а периода му је T. Мобилна тачка осцилира по својој путањи; интервалим времена T одговарају сасвим иста кретања. Кретање математскога клатна по равним кривама је репрезентанат ове врсте кретања.

Циркулациона кретања мобилне тачке су она за која се може доказати да мобилна тачка пролази кроз барем два положаја нормалне или два положаја тангенцијалне, или кроз један положај нормалне и један положај тангенцијалне симетрије, а не пролази ни кроз положаје идентичне ни инфлексионалне симетрије.

На тај начин могу настати следеће три врсте циркулационих симетричних кретања којих су путање и положаји симетрије представљени шематски у слици 6.

Аналогно пређашњем случају може се доказати, а следује, у осталом, из слике, да су оваква кретања



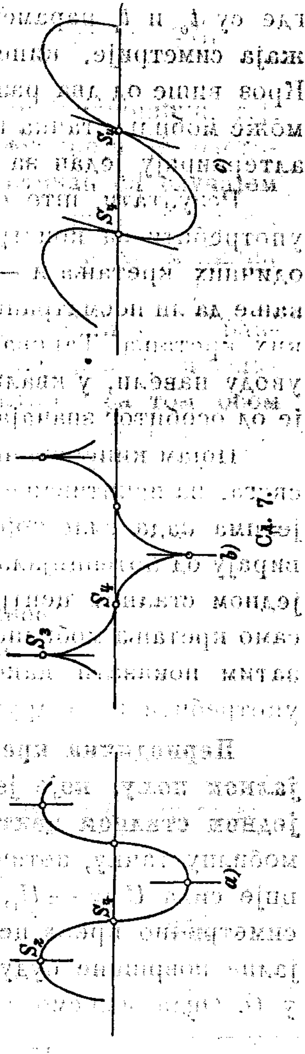
Сл. 6.

релативно периодична са периодом $T = 2\ (t_1 - t_0)$, где су t_0 и t_1 параметри који одговарају двема консекутивним положајима симетрије. У интервалима T изваћа мобилна тачка кинематска конгруентна кретања, крећући се у кружној површини које центрум лежи у O, пресеку оса кинематичних симетрија. Затварају ли осе симетрије двају консекутивних положаја симетрије један угао, који је аликвотни део пунога угла, онда је путања мобилне тачке затворена.

На кретање ове врсте наилази се често пута у небеској механици, Кеплерова елипса је репрезентант случаја *a)* а случај *c)* појављује се у астероидном проблему; **Hill**-ов сателит „of the last lunation“ изваћа таково кретање. И кретање кружног математског клатна, које смо навели као пример за осцилационо кретање, може бити циркулационо. Ако је иницијална брзина клатна такова, да оно не достигне највишу тачку круга, у којем се креће, онда је његова амплитудна тачка положај идентичне кинематичке симетрије; у случају да је иницијална брзина такова да клатно таман достизава највишу тачку круга, онда бесконачно малени прираст брзине мења осцилациони карактер кретања у циркулациони.

Ундулациона кретања мобилне тачке су она, за која се може доказати да мобилна тачка пролази кроз најмање два положаја кинематичне симетрије од којих је барем један инфлексионалан, а други није положај идентичне кинематичне симетрије.

На тај начин могу настати следеће три врсте ундулационих симтричних кретања којих су путање и положајима симетрије представљене шематски у сл. 7.



Сл. 7.

Аналогно пређашњем може се доказати, а следује, у осталом директно из слике, да су и оваква кретања релативно периодична са периодом $T = 2 (t_1 - t_0)$ где t_0 и t_1 одговарају двема консекутивним положајима симетрије. У интервалима T извађа мобилна тачка кинематска конгруентна кретања; сви положаји инфлексионалне симетрије леже у истој правој, путања мобилне тачке има таласаст облик.

Овакова кретања могу настати састављањем осцилационога кретања са транслаторним.

Досадање резултате можемо рекапитулирати овако: *може ли се доказати да мобилна тачка про-*

лази кроз два разна положаја кинематичне симетрије, то ће њено кретање имати периодичан карактер; мобилна тачка извађаће у интервалима $T = 2(t_1 - t_0)$, где су t_0 и t_1 параметри двају консекутивних положаја симетрије, кинематички конгруентна кретања. Кроз више од два разноврсна положаја симетрије не може мобилна тачка пролазити; такова два положаја алтернирају један за другим.

Резултати, што смо их до сада извели, могу се употребити за конструкцију неких категорија периодичних кретања и — што је важније — на испитивање да ли посматрани систем има такових периодичких кретања. Такова одредба спада, као што смо у уводу навели, у квалитативна решења динамике, па је од особитог значаја за проблеме небеске механике.

Појам кинематичне симетрије употребићемо, пре свега, на испитивање периодичних кретања у случајевима када силе које утичу на мобилну тачку деривирају од потенцијала чије је поље симетрично према једном сталном центру или једној оси. Посматраћемо само кретања мобилне тачке у једној равни, па ћемо, затим показати како се добивени резултати могу употребити и за друге неке случајеве.

Периодична кретања мобилне тачке у потенцијалном пољу, које је централно симетрично према једном сталном центру. Нека силе, које утичу на мобилну тачку, потичу од потенцијала U, или функције сила $U = -U_1$, па нека је то поље централно симетрично према центру O, т. ј. нека еквипотенцијалне површине буду концентричне кугле са центром у O. Онда можемо ставити

$$U = U(r) \quad \ldots\ldots \quad 21)$$

где је r одстојање мобилне тачке од центра O.

Резултанта P сила, које утичу на мобилну тачку M, једнака је:

$$P = \frac{dU}{dr} \quad \ldots\ldots\ 22),$$

стоји нормално на еквипотенцијалној површини, т. ј. пролази увек кроз центар O, а функција је одстојања r. Овај је случај дакле идентичан са случајем централних сила t, када је сила функција одстојања мобилне тачке од центра сила. Зато ће се мобилна тачка кретати у равни која пролази кроз O и кроз њену иницијалну брзину. Фиксирамо ли у тој равнини једну поларну осу, која пролази кроз O, па означимо ли угао, што га радиусвектор r са том осом затвара са φ, то је према познатој једначини површина:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C \quad \ldots\ 23),$$

где C означава константу површина.

Теорема живе силе даје једначину:

$$\frac{mv^2}{2} = U(r) + h \quad \ldots\ldots\ 24)$$

где v означава брзину мобилне тачке а h константу живе силе. Како је:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ 25),$$

то из горњих једначина следује:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\,U(r) - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2}{m}\,h \quad \ldots\ 26)$$

Интеграција ове једначине, која се ограничава на квадратуре, даје једначину кретања мобилне тачке по радиусвектору r:

$$r = \Phi(t) \quad \cdots\cdots \; 27)$$

Геометријску представу ове једначине у ортогоналном координатном систему, где осу абсциса узимамо за осу t, а осу координата за осу r, назваћемо диаграмом радиусвектора.

Нека $r = r_0$ одговара једној екстремној вредности од r, т. ј. нека представља једну максималну или минималну ординату диаграма, онда је

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r = r_0} = 0 \quad \cdots\cdots \; 28)$$

а r_0 представља један реалан корен једначине

$$U(r) - \frac{m\,C^2}{2\,r^2} + h = 0 \quad \cdots\cdots \; 29),$$

разрешене по r. Тангента диаграма у тачки $r = r_0$ паралелна је оси t, а како, према једначини 26) једнаким ординатама лево и десно од те тачке одговарају и једнаки нагиби тангената диаграма према абсцисној оси, то ће диаграм бити симетричан према ординати тачке $r = r_0$.

Из једначина 23) и 26) следује:

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = \frac{C^2 m}{2r^2\,U(r) + 2hr^2 - C^2 m} \quad \cdots\cdots \; 30),$$

а то значи да симетричним тачкама диаграма одговарају једнаке промене $\frac{d\varphi}{dr}$. Зато ће и путања мобилне тачке бити симетрична према радиусвектору

$r = r_0$, а како према једначинама 25) и 26) следује да симетричним положајима одговарају једнаке брзине, то ће кретање мобилне тачке бити кинематички симетрично обзиром на радиусвектор $r = r_0$.

Ако је константа површина

$$C = O$$

онда се мобилна тачка креће у правој која пролази кроз O, а једначина 29) добива облик:

$$U(r) + h = O.$$

Ако је $r = r_0$ један реални корен те једначине који одговара максималном или минималном одстојању мобилне тачке од центра O, онда је брзина мобилне тачке у положају $r = r_0$, према једначини 24), равна нули и она мења, достигувши тај положај симетрије, правац свога кретања и враћа се истим путем натраг. Зато такав положај одговара случају идентичне кинематичне симетрије.

Ако је константа површина

$$C \gtrless O$$

онда је сваки максимални или минимални радиусвектор $r = r_0$ нормалан на путању, па су зато положаји мобилне тачке, који одговарају екстремним вредностима радиусвектора, положаји нормалне кинематичне симетрије.

Положаји мобилне тачке, који одговарају екстремним вредностима радиусвектора, су положаји идентичне или нормалне кинематичке симетрије према томе дали је $C = O$ или $C \gtrless O$. Довољни динамички критериум за први случај је да је $v = O$, јер је тада ео ipso $C = 0$, а за други случај да је вектор брзине нормалан на радиусвекор и да је у томе положају $P = \frac{dU}{dr} \gtrless 0$, јер онда мора на томе месту путања бити или конвексна или конкавна према центру O, а не може имати инфлексионалну тачку.

Лева страна једначине 24) есенцијелно је позитивна, па због тога не може мобилна тачка изаћи из онога дела простора за који је $U(r) + h$ позитивно.

Сферна површина:

$$U(r) + h = 0$$

гранична је површина тога простора па репрезентира — ако јој радиус није безконачно велик — квалитативно решење које смо назвали опредељењем просторних граница кретања. Из пређашњега следује да положаји идентичне симетрије леже на таковој пространој граници кретања.

Кретање мобилне тачке абсолутно је периодично са периодом T ако се она у времену $t + \tau$ налази на истом месту у којем се је налазила у времену t, т. ј. ако потпуно решење проблема:

$$x = f_1(t)$$
$$y = f_2(t)$$
$$z = f_3(t),$$

где x, y, z означавају координате мобилне тачке, задовољава условима:

$$f_1(t) = f_1(t + T)$$
$$f_2(t) = f_2(t + T)$$
$$f_3(t) = f_3(t + T).$$

Пролази ли мобилна тачка кроз два положаја кинематичне симетрије, од којих је барем један положај идентичне кинематиче симетрије, то ће она, према пређашњем, пролазити кроз још један положај идентичне кинематичне симетрије, а њено кретање имаће осцилаторан карактер па бити абсолутно периодично. Може ли се доказати да мобилна тачка пролази кроз два положаја нормалне кинематичне симетрије, тада ће њено кретање бити циркулационо и абсолутно периодично онда ако је угао, што га осе тих двеју положаја симетрије затварају, аликвотни део пунога угла.

Горњи закључци могу се и обрнути. Изваћа ли мобилна тачка апсолутно периодично кретање, онда оно мора бити или осцилационо, у коме случају путања има два положаја идентичне кинематичне симетрије, или је путања затворена равна крива; но свака затворена равна крива (ако није круг са центром у O) има барем једно минимално и једно максимално одстојање од центра O, дакле барем два положаја нормалне кинематичке симетрије.

У централно-симетричном потенцијалном пољу су сва периодична кретања мобилне тачке симетрична кретања. Мобилна тачка не може у таквоме пољу описати затворену асиметричну криву.

Ако је сила P, која утиче на мобилну тачку, континуирна, онда ће и путања мобилне тачке бити континуирана линија; она ће моћи имати крајњих тачака на местима где брзина мобилне тачке изчезава, дакле на просторним границама кретања, па ће те тачке бити положаји практичне кинематске симетрије и представљати минимална или максимална одстојања мобилне тачке од центра сила. Свака континуирана крива мора имати барем једно минимално или барем једно максимално одстојање од центра сила ако му се асимптотски не приближује секући радиусвектор под углом који није једнак $\frac{\pi}{2}$; но свако максимално или минимално одстојање од центра представља положај симетрије, па зато можемо да кажемо:

Путања мобилне тачке која се креће под утицајем једне континуиране централне силе, мора бити или симетрична или се мора асимптонски приближавати центру сила.

Периодична кретања мобилне тачке у потенцијалном пољу које је аксијално симетрично. Мобилна тачка нека се креће у једној равни, а силе које на њу утичу нека деривирају од потенцијала $U_1 = -U$ који је симетрично поразмештан обзиром на осу Y. Нека дакле функција

$$U = U(x, y)$$

остаје при субституцији

$$x = -x$$

инваријантна т. ј. нека буде:

$$U(x, y) = U(-x, y) \;\ldots\ldots\; 31)$$

или

$$\frac{dU(x, y)}{dx} = -\frac{dU(-x, y)}{dx}$$

ставимо ли у горњој једначини:

$$x = 0$$

то добивамо:

$$\left.\frac{dU}{dx}\right\}_{x=0} = 0 \;\ldots\ldots\; 32)$$

т. ј. у тачкама осе Y изчезава компонентна X силе P која утиче на мобилну тачку. Ако сила P није равна нули, онда она пада у праву осе Y па еквипотенцијалне линије

$$U(x_1 y) = const$$

пресецају нормално осу Y и достизавају у њој своја екстремна одстојања од осе X.

Ако у којој тачки осе Y еквипотенцијалне линије не пресецају ову нормално него косо то се, због симетрије, секу у тој тачки две еквипотенцијалне линије или, боље рећи та је тачка двострука па има две нормале, како би сила P морала пасти и у једну и у другу од тих нормала то она изчезава: посматрана тачка осе Y је положај равнотеже мобилне тачке. Исто то важи и за она места осе Y где ју еквипотенцијалне линије тангирају.

Једначине кретања мобилне тачке:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt} &= \frac{dU}{dx} \\ m\frac{dy^2}{dt^2} &= \frac{dU}{dy} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 33)$$

такође су инваријантне према субституцији

$$x = -x$$

па ће при одабраним иницијалним условима дозволити кинематички симетрична кретања мобилне тачке. Ти услови морају бити такове природе да мобилна тачка пресече нормално осу симетрије, јер онда прелази симетрично из једног дела поља у други симетрични део. Због тога ће јој путања бити симетрична, а према једначини живе силе

$$\frac{mv^2}{2} = U(x, y) + h \quad \ldots \quad 34)$$

која при субституцији $x = -x$ остаје инваријантна, одговараће симетричним тачкама путање исте брзине.

Иницијални услови који дозвољавају симетрична кретања су ови

$$\left\{\begin{array}{l} t = t_0 \\ x = o \quad y = b \quad \frac{dx}{dt} = v_1 \quad \frac{dy}{dt} = o \end{array}\right.$$

јер условљавају нормални прелаз мобилне тачке преко осе Y. Интеграли једначина кретања:

$$\left.\begin{array}{l} x = f_1(t, b, v_1) \\ y = f_2(t, b, v_1) \end{array}\right\} \quad 35)$$

садржаваће још две константе b и v_1 које се могу произвољно одредити. Одреде ли се ове тако да при једном од следећих пролаза мобилне тачке кроз осу Y њен правац брзине буде опет нормалан на ту осу, то ће тај пролаз представљати други положај нормалне кинематичне симетрије. Симетрале обају положаја поклапају се, па је кретање мобилне тачке абсолутно периодично.

Такова периодична кретања добивају се, дакле, на овај начин: константе b и v_1 одреде се тако да ако је t_1 један реални корен једначине:

$$f_1(t_1, b_1, v_1) = o \quad \ldots \quad 36)$$

при чему је $t_1 \gtrless t_0$,

буде

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t = t_1} = o$$

т. ј.

$$f_2{}' \, (t_1, b, v_1) = o \quad \ldots \quad 37)$$

Скуп парова реалних корена b и v_1 једначина 36) и 37) даје сва периодична решења ове категорије. Периода је тих кретања

$$T = 2 \, (t_1 - t_0)$$

Овај начин конструкције периодичких кретања предпоставља могућност интеграције једначина кретања. У случајевима, у којима та интеграција није могућа, поступа се овако: при одабраноме b и v_1, конструише се путања мобилне тачке помоћу механичке квадратуре, па се онда v_1 варира тако дуго док путања у једном од следећих пролаза не пресече нормално осу Y.

Поља овакве врсте настају н. пр. ако на мобилну тачку дејствују атракциона центра која леже у једној правој њене равнине кретања. Често пута испитивани случај, када је мобилна тачка привлачена од два стална центра по Newton-овом закону, спада у ову категорију.

Од веће је важности за проблеме небеске механике следећи случај:

Периодична кретања мобилне тачке у ротирајућем потенцијалном пољу, које је аксијално симетрично. Посматрано поље нека буде равно, аксијално симетрично према оси x, па нека ротира око једне осе која у једној тачки осе x нормално продире равнину поља, у којој се мобилна тачка креће. Вектор ротације нека буде $\mathfrak{w}$

$$\mathfrak{w} = n \, \mathfrak{a}_0 \quad \ldots . \quad 38)$$

где је $\mathfrak{a}_0$ јединични вектор нормалан на равнину кретања, а наперен на ону страну њену, са које посматрано ротација следује у позитивном смислу т. ј. обратно сказаљки на сату. n је онда интензитет угловне брзине, па нека n буде константно; касније ћемо се упознати са случајевима где се n са временом мења.

Посматрамо ли сада релативно кретање мобилне тачке обзиром на осу x која са равнином ротира, то ју можемо, према теорији релативнога кретања, сматрати за непомичну ако на мобилној тачки осим силе $\mathfrak{P}$, изазване потенцијалним пољем U,

$$\mathfrak{P} = \mathrm{grad}\, U \quad . \quad . \quad 39)$$

додамо још две фиктивне силе: центрифугалну и Coriolis-ову силу.

Одаберемо ли продирну тачку осе ротације са равнином кретања за почетну тачку ортогоналног координатног система X—Y, па означимо ли вектор положаја мобилне тачке са $\mathfrak{r}$, а његов интензитет са r, то је центрифугална сила $\mathfrak{f}$ једнака

$$\mathfrak{F} = \frac{m\,(nr)^2}{r}\,\mathfrak{r}_0 = mn^2r\,\mathfrak{r}_0 \quad . \; . \; . \quad 40)$$

а Coriolis-ова сила $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{C} = -2m\,[\mathfrak{w}\mathfrak{v}] = 2mn\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0] \quad . \; . \; . \quad 41)$$

где $\mathfrak{v}$ представља вектор релативне брзине мобилне тачке у ротирајућем систему.

Једначина кретања мобилне тачке биће, према томе

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathrm{grad}\, U + mn^2r\mathfrak{r}_0 + 2mn\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0] \quad 42)$$

како је

$$n^2 r \mathfrak{r}_0 = \text{grad}\frac{n^2}{2} r^2$$

то је

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \text{grad}\left(\frac{U}{m} + \frac{n^2}{2} r^2\right) + 2n[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0] \quad \ldots\ 43)$$

Уведемо ли скаларну вредност V

$$V = \frac{U}{m} + \frac{n^2}{2} r^2 \quad \ldots\ 44)$$

то једначина кретања добива овај једноставни облик

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \text{grad}\, V + 2n\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0] \quad \ldots\ 45)$$

Помножимо ли ову једначину скаларно са

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt},$$

то добивамо

$$\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = (\mathfrak{v}\nabla)V \quad \ldots\ 46)$$

Субстанцијелна промена скалара V на мобилној тачки је

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt} + (\mathfrak{v}\nabla)\,V$$

но како је стационарна промена

$$\frac{dV}{dt} = 0,$$

то једначина 46) добива облик

$$\mathfrak{v}d\mathfrak{v} = dV$$

па њена интеграција даје

$$v^2 = 2V - C \quad . \; . \; . \quad 47)$$

где v означава интензитет релативне брзине мобилне тачке. Како је v^2 есенцијелно позитивна величина, то мобилна тачка неће изаћи из онога дела равнине за који је $2V - C$ позитивно, па зато је

$$2V - C = 0 \quad . \; . \; . \quad 48)$$

једначина граничне криве, па представља, ако је крива затворена, квалитативно решење проблема, које смо назвали определењем просторних граница кретања.

Потенцијал U је симетричан према оси X, дакле инваријантан при субституцији

$$y = -y$$

а како је

$$r^2 = x^2 + y^2$$

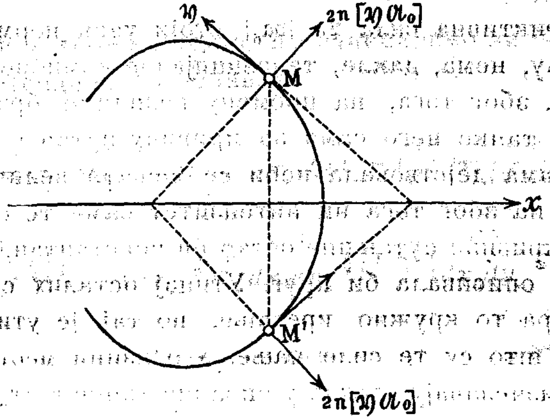
то ће и скалар V бити инваријантан при тој субституцији дакле такође симетричан према оси X.

Зато ће кретање мобилне тачке бити таково као када би јој маса била једнака јединици, а она се кретала у непомичном потенцијалном пољу V, које је симетрично према оси X, и кад би на њу, осим тога, дејствовала фиктивна сила $2n\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0]$. Ова фиктивна сила стоји нормално на вектору $\mathfrak{a}$ па лежи зато у равнини кретања.

Питајмо сада када ће у овоме случају мобилна тачка изваћати кинематички симетрична кретања.

Када на мобилну тачку не би утицала сила $2n\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0]$ било би њено кретање кинематички симетрично увек онда када би њена путања нормално пресекла осу X.

Узмимо, дакле, да мобилна тачка извађа таково кинематички симетрично кретање према оси X, па испитајмо да ли је таково кретање могуће под утицајем фиктивне силе $2n\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0]$. У двема симетричним тачкама M и M' такове кинематички симетричне путање биле



Сл. 8.

би брзине мобилне тачке једнаке, њихове праве симетричне према X, но не њихови правци, јер ако је н. пр. брзина у положају M' наперена према оси симетрије онда је брзина у положају M наперена од те оси. Интензитети фиктивне силе $2n[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0]$ су у оба положаја исти, у оба положаја стоје те силе нормално на путању, а наперене су на ону страну са које посматрамо вектор $\mathfrak{v}$ надовезан на $\mathfrak{a}_0$ даје позитиван смисао обилажења, зато ће те силе у оба положаја бити симетрично наперене према оси X.

Симетричним положајима кинематско симетричних путања одговарају симетричне фиктивне силе.

Те силе ће променити, додуше, облик путање но неће уништити њену симетрију. Услов за кинематску симетрију и периодицитет кретања остају исти као и у пређашњем случају. Свака тачка осе X може постати положај кинематске симетрије, па узмогне ли се иницијална брзина мобилне тачке тако одредити да ова пролази кроз два положаја кинематске симетрије, то ће кретање њено у мобилном систему бити периодично.

Фиктивна сила $2n\,[\mathfrak{v}\mathfrak{c}_0]$ стоји увек нормално на путању, нема, дакле, тангенцијалне компоненте и не утиче, због тога, на промену величине брзине мобилне тачке него само на кривину путање. Када би она сама дејствовала неби се мењала величина брзине, па због тога ни интензитет саме те силе, радиус кривине путањине остао би константан, мобилна тачка описивала би круг. Утицај осталих сила пертурбира то кружно кретање, но тај је утицај тим мањи што су те силе мање. У близини места где те силе изчезавају, дакле у околини тачке $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0$ $(x=x_0,$ $y=y_0)$, где је

$$\operatorname{grad} V \Big\}_{\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0} = \frac{dV}{dx_0}\,\mathfrak{i} + \frac{dV}{dy_0}\,\mathfrak{j} = o \qquad 49)$$

т. ј. у близини положаја равнотеже поља V моћи ће се периодична кретања директно одредити, као што из следећег следује.

Ако је поље континуирно, то је у близини тих места

$$\operatorname{grad} V = \frac{dV}{dx}\,\mathfrak{i} + \frac{dV}{dy}\,\mathfrak{j}$$

веома малено, па се може развити по Taylor-овом реду

Означимо ли

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{s}$$

т. ј.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta \end{aligned}\right\} \quad \ldots 50)$$

$$\mathfrak{r} = \xi \mathfrak{i} + \eta \mathfrak{j}$$

то је ξ и η веома малено, па занемаримо ли њихове друге потенције, то добивамо

$$\operatorname{grad} V = \left(\frac{dV}{dx_0} + \frac{d^2V}{dx_0^{\,2}}\xi + \frac{d^2V}{dx_0 dy_0}\eta\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{dV}{dy_0} + \frac{d^2V}{dx_0 dy_0}\xi + \frac{d^2V}{dy_0^{\,2}}\eta\right)\mathfrak{j} = \left(\frac{d^2V}{dx_0^{\,2}}\xi + \frac{d^2V}{dx_0 dy_0}\eta\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{d^2V}{dx_0 dy_0}\xi + \frac{d^2V}{dy_0^{\,2}}\eta\right)\mathfrak{j} \quad \ldots 51)$$

а како је, осим тога

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}\mathfrak{i} + \frac{d^2\eta}{dt^2}\mathfrak{j} \quad \ldots 52)$$

$$2n\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0] = 2n\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{d\xi}{dt} & \frac{d\eta}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2n\left(\frac{d\eta}{dt}\mathfrak{i} - \frac{d\xi}{dt}\mathfrak{j}\right) \quad \ldots 53)$$

то једначина кретања 45) растављена у две скаларне једначине добива овај облик

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\frac{d\eta}{dt} - \frac{d^2V}{dx_0^{\,2}}\xi - \frac{d^2V}{dx_0 dy_0}\eta &= o \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n\frac{d\xi}{dt} - \frac{d^2V}{dx_0 dy_0}\xi - \frac{d^2V}{dy_0^{\,2}}\eta &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots 54)$$

Ове хомогене линеарне диференцијалне једначине дозвољавају периодична решења: ξ и η биће периодичне функције од t, па ће се иницијални услови моћи тако одабрати да ξ и η остане увек малено.

Пример за оваковe случајеве периодичних кретања су периодична кретања у „астероидичном проблему.“

Под „астероидичним проблемом“ разумевамо испитивање кретања једне безконачно малене масе (астероида) привлачене по Newton-овом закону од две коначне масе, које се, услед међусобног привлачења по истом закону, крећу око заједничког тежишта у концентричним круговима истом, константном, угловном брзином, а чије кретање не пертурбира мала маса, која се креће у истој равнини у којој се крећу обе коначне масе.

Обе коначне масе изазивају једно потенцијално поље, аксијално симетрично према правој која кроз њих пролази. То поље је перманентно а ротира константном, угловном брзином око тежишта коначних маса. Сваки нормални пролаз астероида кроз осу симетрије тога поља биће положај нормалне кинематске симетрије. Такове пролазе назива Poincaré „conjonction symétrique“ или „opposition symétrique“ према томе дали се астероид налази између коначних маса или изван њих.[1]) Два такова пролаза условљавају периодично кретање.

У близини положаја равнотеже сложенога поља V могу се периодична кретања, према пређашњем, директно одредити, па су једначине 54) идентичне са Hill-овим једначинама за периодична кретања у близини центара либрације.

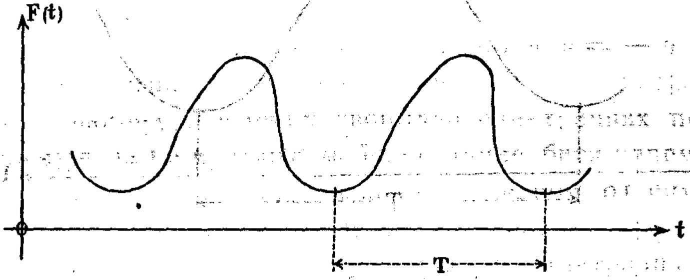
---

[1]) Види н. пр. Poincaré, Leçons de Mécanique céleste. Paris. 1905. Tome I. стр. 198.

О симетрично периодичним функцијама. Функцију F независне варијабилне t називамо периодичном са периодом T ако она задовољава једначину

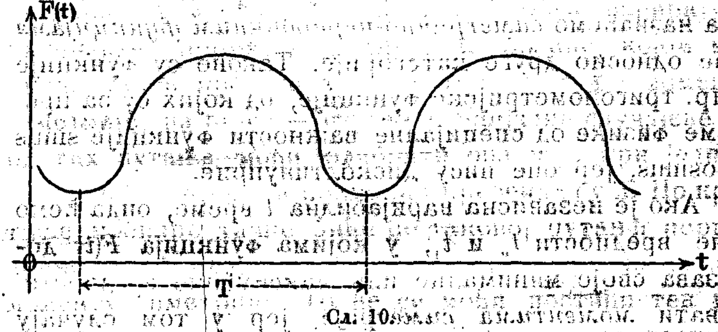
$$F(t) = F(t + nT),$$

где је n произвољан цео број. Геометријска представа овакове функције у ортогоналном координатном систему, где абсцисну осу узимамо за осу t, биће једна таласаста линија (сл. 9), састављена из самих конгруентних делова који одговарају интервалу T.



Сл. 9.

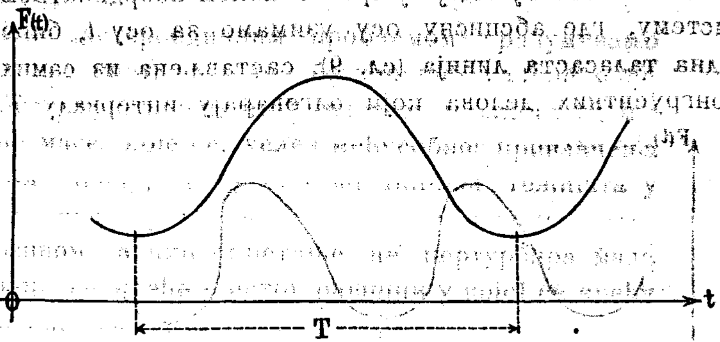
Обично се узима да се почетци интервала подударају са минималним вредностима функције $F(t)$. За проблеме динамике су од особите важности оне периодичне функције код којих су такове геометријске представе симетричне линије. Онда сваки интервал има два положаја симетрије S_1 и S_2 (сл. 10) па свака



Сл. 10.

минимална и максимална вредност функције $T(t)$ одговара таковом једном положају симетрије.

Још је важнији случај када су делови горње криве конвексни у позитивном смислу ординантне осе конгруентни деловима конвексним у негативном правцу те осе. Онда та крива има, осим наведених



Сл. 11.

положаја симетрије S_1 и S_2 који одговарају минималним и максималним вредностима функције $F(t)$, још у сваком интервалу по два положаја S_3 инфлексионалне симетрије који одговарају средњој вредности функције $F(t)$. (сл. 11).

Ове последње две категорије периодичних функција назваћемо *симетрично-периодичним функцијама* прве односно друге категорије. Такове су функције н. пр. тригонометријске функције, од којих су за проблеме физике од специјалне важности функције sinus и cosinus, јер оне нису дисколтинуирне.

Ако је независна варијабилна t време, онда ћемо њене вредности t_0 и t_1, у којима функција $F(t)$ достизава своје минималне или максималне вредности, назвати *моментима симетрије*, јер у том случају функција $F(t)$ добива у истим временским одстојањима прије и после тога момента исте вредности, па је феномен, представљен таковом функцијом, симетричан према том моменту.

Периодична кретања мобилне тачке у симетричном потенционалном пољу које је симетрично-периодична функција времена. Посматрано потенцијално поље нека буде симетрично-периодична функција времена са периодом T па нека буде увек симетрично према оси X т. ј. нека потенцијална функција

$$U = U\,(x,\ y,\ t)$$

буде инваријантна према субституцији $y = -y$.

Из дефиниције симетрично-периодичних функција и из напред изведених својстава симетричних поља следује да ће кретање мобилне тачке бити кинематски симетрично онда када она у једном од симетричних момената времена прође нормално кроз осу X, јер онда ће она у два произвољна симетрична положаја M и M' према оси X наићи на исте вредности потенцијалне функције U. Кретање мобилне тачке биће периодично ако она у два разна момента симетрије прође нормално кроз осу X.

Кроз сваку тачку осе X моћи ће се положити безконачно много симетричних путања варирајући интензитет нормалне иницијалне брзине, којом мобилна тачка пролази кроз ту тачку осе X у моменту симетрије, па ће се — изузев специјалне случајеве — од тих путања моћи одабрати она која при једном од следећих пролаза нормално пресеца осу X. Но кретање мобилне тачке биће по таковој путањи периодично само онда ако се и тај други пролаз деси у моменту симетрије. То ће се моћи постићи тек избором прве пролазне тачке, па се зато периодичне путање могу положити само кроз неке од тачака осе X.

Периодична кретања мобилне тачке у ротирајућем симетричном пољу које је симетрично-периодична функција вршена. Ротира ли прије посматрамо поље око једне осе, која је нормална на његову равнину, то треба ефективним силама, које на мобилну тачку утичу, додати још две фиктивне силе: центрифугалну силу и Coriolis-ову силу. Ако је угловна брзина ротације n константна, онда не мења — као што смо показали — центрифугална сила $mn^2 r\mathfrak{r}_0$ ни симетрију поља ни услове за кинематски симетрични кретања; исто је тако и Coriolis-ова сила $2mn\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0]$ за кинематски симетрична кретања симетрична па не уништава такова кретања ако су остали услови за њих испуњени.

Питајмо сада када ће те фиктивне силе дозволити кинематски симетрична кретања ако угловна брзина n није константна већ функција времена?

Посматрано поље U је симетрично-периодичка функција времена зато би, према пређашњем, мобилна тачка извела кинематски симетрична кретања када би у моменту симетрије функције времена U нормално прошла кроз осу X. Да та мобилна тачка при пролазима кроз два симетрична положаја M и M' према оси X наиђе на једнаке фиктивне силе, очито је потребно да је и угловна брзина n симетрично-периодична функција времена t, па да се њен моменат симетрије подудара са моментом пролаза мобилне тачке кроз осу X, дакле са моментом симетрије функције U.

Периодична кретања мобилне тачке настаће ако она при једном од следећих пролаза кроз осу X прође нормално кроз њу и ако је моменат тога прелаза моменат симетрије функција времена U и n.

За симетрично периодична кретања мобилне тачке потребно је, према томе, да су периоде симетрично-периодичних функција времена U и n комензурабле и да оне имају заједничких момената симетрије или као што би се могло покраћено да каже, да су обе функције *синхронизиране.*

Пример за ову категорију периодичних кретања пружа нам проблем трију тела у равнини ако је једна од маса безконачно малена; онда она не пертурбира кретање осталих двају коначних маса, па зато ове изваћају око њиховог заједничког тежишта Kepler-ове елипсе. Положимо ли кроз те две масе осу X нашега координатног система, то ће потенцијално поље, изазвано тим масама, бити симетрично према тој оси, а функција одстојања тих двају тела, које се мења временом. Како је релативно кретање једнога од коначних тела око другога кретања по Kepler-овој елипси, дакле кинематски периодично кретање са два положаја симетрије, то ће одстојање тих тела, а према томе и функција U бити симетрично-периодична функција времена t са моментима симетрије када одстојање достизава своју максималну или минималну вредност. Углова брзина n такође је симетрично-периодична функција времена па достизава своју максималну вредност када су коначна тела најближа, а минималну вредност када су најдаља; функције времена U и n имају исту периоду па се зато синхронизиране. Трећа, безконачно малена, маса изваћа ће периодична кретања ако прође у два момента, која се подударају са моментима симетрије функција времена U и n, нормално кроз осу X, т. ј. ако ступи са остале две масе у симетричне конјункције или опозиције у моменту када се коначне масе налазе у максималном или минималном међусобном одстојању.

Конструкција нових случајева периодичних кретања. Досадање резултате можемо употребити за конструкцију нових случајева периодичних кретања у проблему трију и проблему четири тела. Принцип конструкције биће као у досадањим случајевима: тела ће се ставити у такав иницијалан положај са таквим иницијалним брзинама да тај положај буде положај кинематске симетрије. Условом те симетрије неће у опште бити одређене све иницијалне константе, па ће се још неодређене од тих констаната тако одредити да условљавају још један положај кинематске симетрије и, због тога, периодично кретање посматраних тела.

У проблему трију тела ми смо, до сада, предпоставили да је једна од маса безконачно малена, па смо том предпоставком осигурали симетрију потенцијалног поља изазваног масама посматраних тела. Напуштајући ту претпоставку можемо положај кинематске симетрије у иницијалном моменту остварити па два начина.

Прво, да све три масе ставимо у иницијалном моменту у једну праву, па им дамо паралелне иницијале брзине нормално на ту праву. Ако буде могуће иницијалну констелацију тако удесити да сва три тела дођу, после извесног времена, опет у исту праву и пресеку ју нормално, онда ће и тај положај бити положај кинематске симетрије; кретања посматраних тела биће периодична. Са овом категоријом периодичних кретања бавио се је Griffin, Certain periodic orbits of k finite bodies revolving about a relatively large central mass; Transactions of the American Mathematical Society 9. Специјалан је случај ове категорије када сва три тела остану увек у истој правој; онда добивамо познато егзактно решење Lagrange-ово.

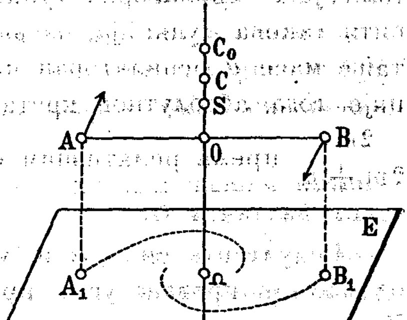
Други начин да у иницијалном моменту остваримо положај кинематске симетрије је овај: Две од маса посмараних тела одаберу се једнаке:

$$m_1 = m_2 = m,$$

трећа, такође коначна маса,

$$m_3 = \mu$$

стави се у иницијалном моменту на симетралу првих двеју, а иницијалне брзине одаберу се тако да она на тој симетрали увек и остане. У то име се иницијалне брзине маса m управе нормално на иницијалну равнину трију тела тако да сачињавају један векторски спрег; иницијална брзина масе μ узме се равна нули. Означимо ли иницијални положај масе μ са C_0, а инваријабилни положај тежишта свих трију маса са S то је права C_0S једна непомична права простора према којој остају масе m, због симетрије иницијалног положаја и иницијалних брзина, непрестано симетричне. Из тога ће разлога и резултанта сила, којом дејствују масе m на масу μ падати увек у праву C_0S, па ће се зато маса μ кретати непрестано по прави C_0S.



Сл. 12.

Означимо ли моментане положаје маса m са A и B, а тачку која полови дужину AB са O, то ће брзина масе μ расти или опадати према томе дали се она приближује или удаљује од тачке O; у тој тачки, у којој је интензитет узрока промене брзине раван нули, достизава брзина масе μ свој максимум. Релативно кретање масе μ према тачки O имаће осцилаторан карактер. Тачка O није непомична у простору, него се и она креће по истој правој CS по којој се креће и маса η, но то је кретање таково да тежиште S свих трију маса остане непоремећено. Означимо ли одстојање масе μ од тачке O са z, а од тежишта S са φ, то је, према закону о кретању тешишта:

$$\varphi = \frac{2m}{2m+\mu} z.$$

Како је z осцилаторна функција времена, то ће и φ бити такова функција, па зато има и абсолутно кретање масе μ осцилаторан карактер само су осцилације тога абсолутног кретања умањење у размери $\frac{2m}{2m+\mu}$ према релативним осцилацијама маса μ обзиром на тачку O.

Релултанта сила, које утичу на једну или другу од маса m пролазе увек кроз праву C_0S простора. Кретање тих маса у правцу C_0S има исти осцилаторни карактер као и кретање масе μ са заједничким моментима амплитудних положаја, а кретање пројекција A_1 и B_1 тих маса на једну непомичну равнину E нормалну на праву C_0S следоваће по закону површина и бити таково као када би те тачке A_1 и B_1 биле привлачене од тачке Ω, (продорне тачке праве C_0S и равнине E) једном централном силом, но та сила не зависи само од одстојања маса m од праве C_0S него и од положаја масе μ према масама m дакле посредно и од времена. Ако су кретања посматраних маса симетрично периодична, онда можемо кретања фиктивних тачака A_1 и B_1 сматрати као кретања у једном централно симетричном пољу које је симетрично-периодична функција времена, па ће услов за таково периодично кретање бити да те тачке прођу, осим у иницијалном моменту, у једном моменту симетрије кроз положаје симетрије који се, према пређашњем, подударају са максималним или минималним одстојањима тих тачака од тачке Ω. Услов за периодична кретања биће, према томе, тај, да масе m достигну — осим у иницијалном моменту — своје максимално или минимално одстојање од праве C_0S у ономе моменту када маса μ прође проз своје положаје симетрије, т. ј. када њена кинетична енергија достигне своју екстремну вредност, дакле прође кроз тачку O или достигне своју максималну елотацију од те тачке. Покраћено можемо казати да кретања у правцу C_0S и нормално на тај правац морају бити синхронизирана.

Та синхронизација се постизава мењањем интензитета иницијалних брзина маса m или мењањем иницијалног одстојања масе μ од маса m, па се може провести на бесконачно много начина: кретање ће бити синхронизирано ако се n-ти пролаз масе μ кроз тачку O или кроз један од њених амплитудних положаја подудари са r-тим екстремним одстојањем маса m од осе C_0S, при чему су n и r произвољни цели бројеви.

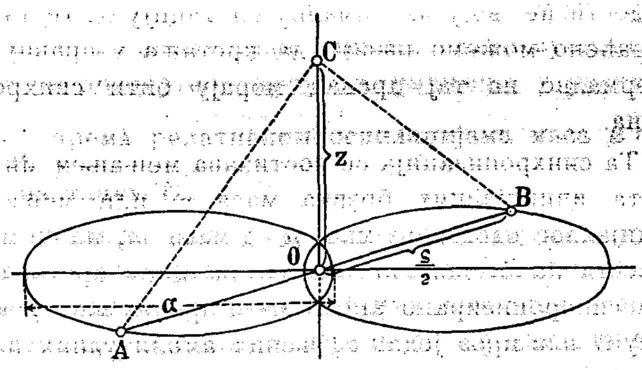
Из резултата наше радње: О општим интегралима проблема n тела[1]) следује да се посматрана три тела не могу никада сукобити, јер би у моменту

---

[1]) Глас LXXXIII.

сукоба, који би се могао десити само на правој C_0S, хетераптични збир вектора квантитета кретања, који би се у томе моменту секли сви у једној тачки, дегенерисао на један једини вектор, а то не може да буде, јер иницијални вектори квантитета кретања дају — према одабраним иницијалним условима — један векторски спрег.

Специјални случајеви. Ако је маса μ бесконачно малена онда она неће претурбирати кретање маса m, па ће ове, не прекораче ли интензитети њихових иницијалних брзина извесну граничну вредност, описивати око заједничког им тежишта Kepler-ове елипсе. Њихово кретање биће, дакле, познато, па ће за потпуно решење проблема требати да се реши још само једна диференцијална једначина. Означимо, у то име, одстојање m са ϱ, одстојање масе μ од равнине у



Сл. 13.

којој се крећу масе m са z, велику осу елипса што их описују свака од маса m са a, двоструки нумерички ексцентрицитет тих елипса са ε, то је велика полуоса елипсе, што ју описује једна од маса m при своме релативном кретању око друге масе, једнака a, а њен нумерички ексцентрицитет једнак је ε; та ће се маса кретати око друге тако као кад би ова друга била непомична, а привлачила прву силом:

$$\frac{2fm^2}{\varrho^2}$$

где f означава гравитациону константу. Зато ће однос између одстојања ϱ маса m и времена t бити регулисан једначином[1]:

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2fm}}\frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{a^2\varepsilon^2 - (a-\varrho)^2}} \cdots\cdots 55)$$

помоћу које се познатим начином одређује ϱ као функција времена t. ϱ ће бити симетрично-периодична функција од t, а њезина периода T је време релативног обилажења једне од маса m око друге, дакле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{2fm}} \cdots\cdots 56).$$

Сила, која утиче на масу μ, једнака је:

$$2f\frac{m\mu}{\overline{CB}^2}\cdot\frac{\overline{OC}}{\overline{CB}} = 2fm\mu\frac{z}{\left(\frac{\varrho^2}{4}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

па је зато диференцијална једначина кретања масе μ

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -2fm\frac{z}{\left(\frac{\varrho^2}{4}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdots\cdots 57)$$

---

[1] Види н. пр. Appell, Traité de Mécanique rationelle. Deuxième édit. Paris 1902. Tome I, стр. 401.

Елиминишемо ли из једначина 55) и 57) време t, то добивамо:

$$\frac{d^2z}{d\rho^2} = -a \frac{\rho^2 z}{\left(\frac{\rho^2}{4} + z^2\right)^{\frac{3}{2}} [a^2\varepsilon - (a-\rho)^2]} \quad \ldots\ldots 58)$$

Интеграција ове једначине не полази за руком, па зато није могуће одредити z као функцију времена t, но поред свега тога следују из пређашњих резултата следеће карактерне особине те функције

$$z = \Phi(t).$$

Маса μ осцилира око тачке O, па ће због тога и горња функција имати исцилаторан карактер. Она ће постати периодична и то симетрично-периодична ако у моменту симетрије поља, изазванога масама m, кинетична енергија масе μ достигне своју екстремну вредност. Одаберемо ли као почетни моменат за мерење времена т. ј. за време $t = o$ моменат када се масе m налазе у максималном или минималном међусобном одстојању, то су моменти симетрије варијабилнога поља кинематских маса моменти

$$o, \frac{T}{2}, T, \frac{3}{2}T, 2T \ldots\ldots$$

једном речи вредности

$$t = \frac{n}{2} T,$$

где је произвољан цео број, или

$$t = \pi n \sqrt{\frac{a^3}{2fm}}.$$

Кинематична енергија масе μ достизава своје екстремне вредности при пролазу те масе кроз тачку O, т. ј. за

$$z = \Phi(t) = o$$

или при екстремним елонгацијама масе μ од тачке O, т. ј. за:

$$\frac{dz}{dt} = \Phi'(t) = o$$

зато можемо да кажемо:

Изчезава ли функција $\Phi(t)$ или њен први извод $\Phi'(t)$ у једном моменту

$$t = \pi n \sqrt{\frac{a^3}{2fm}}, \quad \ldots\ldots 59)$$

где је n произвољан цео број, то је та функција симетрично периодичка функција.

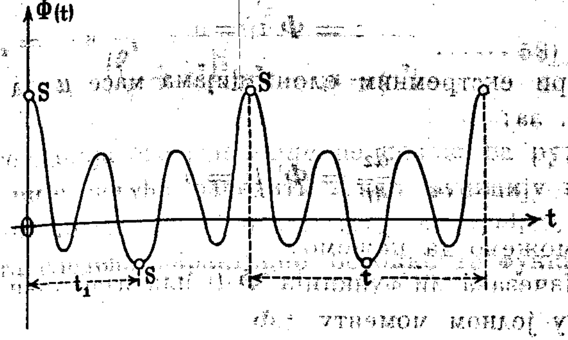
Једна периода функције $\Phi(t)$ садржаваће у себи два пута толико осцилација те функције колико осцилација изводе маса μ око тачке O од иницијалног момента па до првог следећег момента кинематске симетрије. Одаберемо ли абсцисну осу за осу t, а ординатну осу за осу $\Phi(t)$ то ће геометријска представа функције $\Phi(t)$ имати облике представљене шематски у сл. 14 и 15.

Ако је t_1 први моменат иза иницијалног момента који задовољава једначину 59), то ће ако:

а) у њему изчезава први извод $\Phi'(t)$ функције $\Phi(t)$ периода τ те функције бити

$$\tau = 2t_1,$$

и она ће спадати у прву категорију симетрично-периодичних функција, т. ј. њени делови са једне стране осе *t* неће бити конгруентни њеним деловима са друге стране осе *t* (сл. 14)

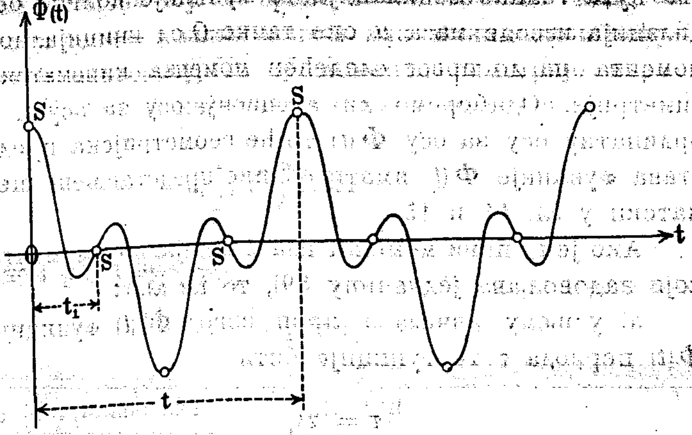


Сл. 14.

б) у њему изчезава функција *Φ* (*t*) периода *τ* те функције бити

$$\tau = 4t_1$$

и она ће спадати у другу категорију симетрично-периодичних функција, т. ј. њени делови са једне стране



Сл. 15.

осе *t* биће конгруентни њеним деловима са друге стане осе *t* (сл. 15).

Ако је ексцентрицитет ε раван нули, што се може избором иницијалних констаната увек да постигне, онда се обе масе крећу на кругу радиуса a па сила која утиче на масу μ зависи само од одстојања z. Зато у овоме случају једначина кретања те масе добива облик:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -2fm\frac{z}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots 60)$$

Помножимо ли обе стране ове једначине са dz па интегришемо, то добивамо:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2fm\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} + C$$

Означимо ли иницијално одстојање масе μ од тачке O са h то је

$$\left\{\begin{array}{l} \text{за } t = o \\ z = h \quad \dfrac{dz}{dt} = o \end{array}\right.$$

којим условом можемо одредити константу C. Зато је

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4fm\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) \ldots\ldots 61)$$

Уведемо ли као нову варијабилну одстојање ξ масе μ од једне од маса m, т. ј.

$$a^2 + z^2 = \xi^2 \quad \ldots\ldots 62)$$

па означимо још

$$a^2 + h^2 = k^2 \quad \ldots\ldots 63)$$

то горња диференцијална једначина добива облик:

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = 4fm\,\frac{(\xi^2 - a^2)(k - \xi)}{k\xi^3}$$

Одавде следује:

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{fm}}\int\frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi(\xi^2 - a^2)(k - \xi)}} \quad \cdots\cdots\ 64)$$

Време t изражава се елиптичним интегралом као функција координате ξ посматране мобилне тачке μ, па ће се, због тога, та координата ξ моћи изразити помоћу елиптичних функција као функција времена t. Но како је

$$z = \Phi(t) = \sqrt{\xi^2 - a^2}$$

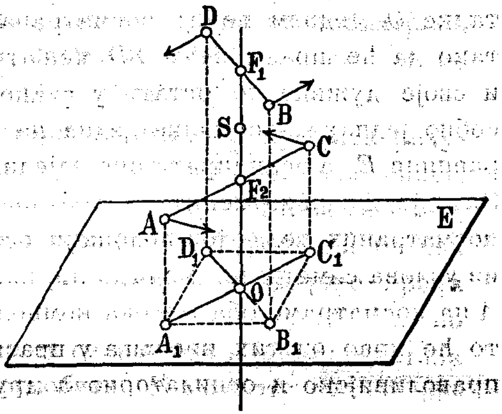
то можемо да кажемо:

функција $z = \Phi(t)$

дегенерише у случају $\varepsilon = o$ на елиптичне функције.

Један специјалан случај проблема четири тела за који се може помоћу кинематске симетрије доказати периодицитет кретања је овај:

Четири тела A, B, C, D једнаке масе распоређена су у иницијалном моменту тако да пројекције њихове на једну непомичну равнину E леже на угловима једнога квадрата $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$. Два и два од тих тела којих пројекције леже на истој дијагонали тога квадрата једнако су удаљена од равнине E тако да су праве AC и BD у иницијалном моменту укрштене праве нормалне једна на другу, а паралелне равнини E. Иницијалне брзине су истога интензитета, поралне равнини E, нормалне на праве AC и BD, а наперене тако да заокрећу обе праве у истоме смислу. Оне, дакле, сачињавају два векторска спрега којих су осе нормалне на равнину E. Иницијални распоред је такав да су масе и брзине симетричне према правој $F_1 F_2$ која спаја средине права AC и BD у иницијалном моменту и која је, према томе, једна одређена права простора.



Сл. 16.

Да испитамо природу кретања раставимо га у два компонентална кретања, од којих је једно паралелно оси F_1 F_2, а друго равнини E. Што се тиче првога од ових кретања, то су силе, које у правцу осе F_1 F_2 дејствују на посматрана четири тела истога интензитета, а наперене према заједничком тежишту S маса које је непомично у простору. Друго компонентално кретање неће, као што ћемо одмах видети, реметити једнакост тих сила, па ће због тога праве AC и BD остати непрестано паралелне равнини E а осцилирати око тежишта S.

Што се тиче другога компоненталног кретања, представљеног кретањем пројекција A_1, B_1, C_1, D_1, то су положаји тих пројекција, њихове фиктивне масе и силе које на њих утичу симетричне према оси F_1 F_2 или према продорној тачки O те осе са равнином E, па ће та централна симетрија остати очувана у свима следећим моментима. Зато ће пројекције A_1, B_1, C_1, D_1 посматраних тела на равнину E ограничавати увек један квадрат са центрумом у O, па ће се те пројекције кретати по принципу површина око тачке O. Једном речи: посматрана тела кретаће се тако да ће праве AC и BD мењати своје положаје и своје дужине но остати у сваком моменту међусобно једнаке, нормалне једна на другу, паралелне равнини E, а осцилирати око заједничког тежишта S. Зато је довољно испитати кретање само једнога од посматраних тела, јер положаји осталих добивају се из услова симетрије. Уочимо ли, н. пр., кретање тела A па посматрамо оба његова компонентална кретања, то ће прво од тих кретања у правцу осе $F_1 F_2$ бити праволинијско и осцилаторно а друго, кретање пројекције A_1 равно кретање под утицајем једне централне силе која пролази кроз тачку O. Та сила не зависи само од другог него и од првог компоненталног кретања. Но иницијалан моменат је за оба компонентална кретања моменат кинематске симетрије, јер се пројекција тачке A на осу $F_1 F_2$ налази у максималном одстојању од тачке S, око које она осцилира, дакле у амплитудном положају, а и пројекција A_1 налази се, јер јој је иницијална брзина нормална на радиусвектор OA_1, у положају нормалне кинематске симетрије. Зато ће кретање тела A, а према томе и свих осталих тела бити периодично ако она за време кретања дођу у још један положај кинематске симетрије. То ће наступити онда ако у моменту када се праве AC и BD налазе у максималном међусобном одстојању (у ампитудном положају) или када се секу, пројекције A_1, B_1, C_1, D_1 дођу у своје максимално или минимално одстојање од тачке O.

Та синхронизација обају компоненталних кретања може се постићи избором иницијалних констаната, па остаје још да докажемо да ће кретање бити стабилно у ширем смислу речи, т. ј. да се посматрана тела неће за време кретања сукобити него да ће њихова одстојања остати коначна.

Иницијални вектори квантитета кретања редукују се, према пређашњем, на један векторски спрег, којега је оса нормална на равнину E и која се може, због тога, положити у осу $F_1 F_2$. Сукобе ли се два од посматраних тела, то се, због симетрије према оси $F_1 F_2$, тај сукоб може десити само у тој оси, но из истога разлога морају се у истом моменту и остала два тела у тој оси сукобити. У моменту сукоба редукују се, према томе, вектори квантитета кретања на два појединачна вектора који секу осу $F_1 F_2$ или на један једини вектор ако се сва четири тела у истој тачки сукобе. Ни у једном ни у другом, од ових двају случајева не дају вектори квантитета кретања један векторски спрег којега би оса пала у осу $F_1 F_2$ као што то захтевају иницијални услови, па је, због тога, сукоб немогућ; кретање је стабилно.

Леже ли ова четири тела у иницијалном моменту у истој равнини онда овај случај дегенерише на једно од егзактних решења Laplace-ових. Посматрана тела описују у томе случају елипсе, ограничавајући увек један квадрат који мења свој положај и величину.

Примедба о вредности специјалних решења у проблемима небеске механике. У доба, када се је још могло мислити на могућност општих решења проблема небеске механике, није специјалним решењима давана особита вредност. Сам Lagrange, који је нашао прва специјална решења у проблему трију тела, рекао је за њих[1]: „Cette recherche n' est à la vérité que de pure curiosité".

Тек сто година касније, када је Hill-у пошло за руком да нађе нове категорије периодичних решења проблема трију тела,[2]) која су у тесној вези са Lagrange-овим решењима, почело се је о њиховој вредности друкчије мислити. Говорећи о радовима Hill-овим вели Poincaré[3]): „Dans cette ocuvre malheureusement inachevée il est permis d' apercevoir le germe de la plupart des progrès que la Science a faits depuis". А на једном другом месту,[4]): „D' ailleurs ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c' est qu' elles sont, pour ainsi dire, lá seule bréche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable". У једној радњи, која се бави једним специјалним случајем проблема трију тела[5]) вели Haerdtl: „Dass wir uns heute von den Bewegungserscheinungen in einem System von mehr als zwei Körper keine oder eine nur höchst unvollkommene Vorstellung zu machen im Stande sind, glaube ich kann nicht geleugnet werden, und ich erblicke mit Gyldén hierin eine Hauptursache wesshalb uns die Lösung des Problems der drei Körper so schwierig erscheint. Von Gyldén ist auch meines Wissens zuerst auf einen Weg hingewiesen worden auf dem diesem Uebelstand möglicherweise abgeholfen und die Erweiterung unseres Vorstellungsgebietes erreicht werden könnte, nämlich

---

[1]) Lagrange, Oeuvres VI, стр. 230.

[2]) American Journal of Mathematics t. I, Acta mathematica t. VIII.

[3]) Poincaré, Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste стр. 3.

[4]) Jbid. стр. 82.

[5]) Haerdtl, Skizzen zu einem speciellen Fall des Problems der drei Körper. (1892). Abhandlungen der mathem-physik. Classe der königl. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 17.

die Untersuchung einer Reihe von Specialfällen dieses Problems....«

Тако се данас, после неуспелих покушаја читавог једног столећа да се проблем трију тела у свој потпуности реши, радови научењака на том пољу ограничавају већим делом на испитивање специјалних случајева и на класификацију њихову у категорије. Нарочита пажња обраћа се периодичним решењима а та би се према нашој дефиницији симетрично-периодичних функција, могла класификовати прије свега у две главне категорије; у симетрично и асиметрично периодична решења. Прва категорија биће ваљда од веће важности него друга, јер сва до сада нађена периодична решења припадају тој категорији. Теорија кинематске симетрије, коју смо у овој радњи покушали да скицирамо, може послужити као корисно оруђе при налажењу и испитивању периодичних решења те категорије.

О ОПШТИМ ИНТЕГРАЛИМА ПРОБЛЕМА n ТЕЛА

од

Д-Р МИЛУТИНА МИЛАНКОВИЋА

ВАНР. ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА.

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 15. октобра 1910.)

У овој ћемо радњи, саопштавајући један део наших испитивања о механици дискретних материјалних тачака, прије свега предузети такове формулисање општих интеграла проблема n тела у којему је њихово геометриско значење јасније изражено него у облику у којему се ти интеграли у аналитичној механици приказују. То формулисање послужиће нам да поставимо неке теореме о положајима оскулационих равнина путања, као и о правцима и величинама брзина у проблему двају и проблему трију тела. Указаће се међутим и могућност да неке од постављених теорема раширимо и на случај када број посматраних тела изнаша четири и да формулишемо један једини критеријум који обухвата сва егзактна решења проблема трију дела. Овај део наших испитивања обухвата *општи* проблем n тела, о којему се о привлачивим силама између појединих тачака посматраног система не морају никакве специјалне претпоставке чинити, па се зато разуме само по себи да следећа излагања задржавају потпуно своју вредност и за случај када између појединих тачака посматранога система дејствују силе *Newton*-ове гравитације.

Прије, но што приступимо излагању резултата тих испитивања, неће бити сувишно читаоца упозорити да смо при тима излагањима избегавали потпуно употребу којег одређеног координатног система. То нас је навело да се послужимо језиком векторске анализе, која геометријски карактер механичких проблема јасније изражава него аналитичка механика. О тој употреби векторске анализе у следећим излагањима ваља још ово да наведемо:

Векторска анализа, развијајући се у два разна правца, који се обично називају *Grassmann*-ов и *Hamilton-Neaviside*-ов,[1]) није још добила потпуно устаљен облик, но она се у ономе облику, који јој даје овај други правац, све више и више удомаћује, па ћемо се за то послужити у следећим излагањима векторском анализом тога правца. При томе ћемо се послужити и појмом везаних вектора,[2]) т. ј. такових, који се могу само дуж свога правца да помакну, апстрахирајући од *Grassmann*-ове дефиниције тих вектора као продуката двеју тачака. То ће нас ставити у могућност да се користимо свим тековинама тео-

---

[1]) Види о томе н. пр. Jahnke, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Leipzig, 1905. стр. 111: Die geometrische und die physikalische Richtung der Vektorenrechnung.

[2]) Budde, Allgemeine Mechanik der Punkte und starrer Systeme. Berlin 1890—91 назива их „*linienflüchtige Vektoren*“.

Timmerdiug употребљава у своме чланку у „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ vierter Band, erster Teilband назив „*Linienteile*“.

И *Appell* провађа у најновијем издању своје Traité de mécanique rationelle, Paris 1909. класификацију вектора на слободне и везане, разликујући три категорије:

1^0 vecteurs non localisés ou vecteurs libres
2^0 vecteurs localisés sur une droite ou glissant sur une droite
3^0 vecteurs localisés en un point ou liés à un point.

Ову трећу категорију вектора нећемо требати.

рије везаних вектора, створеним у кинематици и статици крутих тела, употребљавајући векторску анализу као оруђе за описивање операција са тим величинама.

Прва добит од употребе векторских представа биће та, да ћемо главне теореме динамике дискретних материјалних тачака, како се они обично формулишу у аналитичној механици, т. ј. теорему о одржању квантитета кретања, о кретању тежишта, теорему површина, а и дефиницију *Laplace*-ове инвариабилне равнине моћи свести на једну једину теорему, у којој ће бити уједно кондензовани сви познати интеграли проблема n тела, осим интеграла живе силе. Та теорема послужиће нам онда за даља излагања.

Формулисање општих интеграла проблема n тела помоћу векторске анализе.

Уочимо систем од n материјалних тачака, које се међу собом привлаче или одбијају и на које не делују никакве спољне силе. О унутарним силама тога система не чинимо другу претпоставку доли ту, да су у посматраном интервалу континуирне. Масе тих тачака нека буду означене са $m_1, m_2, m_3, \dots m_n$, а моментани положај њихов нека буде одређен њиховим радиусвекторима $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3 \dots \mathfrak{r}_n$ од једне тачке сравнивања O, одабране произвољно у простору.

Означимо са $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3 \dots \mathfrak{v}_n$ векторе брзина, а са $\mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_2\ \mathfrak{p}_3 \dots \mathfrak{p}_n$ векторе акцелеранција посматраних тачака, онда постоје једначине:

$$\frac{d\mathfrak{r}_i}{dt} = \mathfrak{v}_i \qquad i = 1, 2, \dots n \dots 1)$$

$$\frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{v}_i}{dt} = \mathfrak{p}_i \quad i = 1, 2, \dots n \dots 2)$$

Исто тако постоје једначине:

$$m_i \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2} = m_i \mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i \quad i = 1, 2, \ldots n \quad \ldots 3)$$

где $\mathfrak{P}_i$ означава резултанту унутарњих сила, које дејствују на тачку m_i. Ако нам је закон, по којем дејствују те унутарње силе, познат, онда једначине 3) дају једначине кретања. Таквих векторских једначина имамо *n* на броју, те су еквивалентне 3 *n* једначинама између скаларних величина. Њихова интеграција даје радиусвекторе као функције времена:

$$\mathfrak{r}_i = F(t) \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots n \qquad \ldots 4)$$

Та интеграција даје се само у неким специјалним случајевима провести. За случај *Newton*-ове гравитације она је у главном немогућа, ако је број посматраних материјалних тачака већи од два. Аналитична механика познаје у томе случају само десет интеграла и то: три интеграла, која изражавају закон о одржању квантитета кретања, три интеграла, која са прва три одређују кретање тежишта, три интеграла, која изражавају теорему површина и један интеграл, који изражава закон о одржању живе силе. Првих девет интеграла могу се изразити са три векторске једначине и свести у једну теорему о векторима квантитета кретања.

У то име уочимо две произвољне тачке m_i и m_k посматраног система, то постоји по принципу акције и реакције, прије свега, једначина:

$$m_i \mathfrak{p}_{ik} + m_k \mathfrak{p}_{ki} = 0 \quad \ldots 5)$$

где $\mathfrak{p}_{ik}$ и $\mathfrak{p}_{ki}$ означавају векторе међусобних акцелерација тих двеју тачака.

Та једначина казује, да су вектори $m_i \mathfrak{p}_{ik}$ и $m_k \mathfrak{p}_{ki}$ једнаки а противнога правца, но та два вектора везани су, према наведеном принципу, и на исту праву, а то можемо изразити једначином:

$$m_i [\mathfrak{r}_i \mathfrak{p}_{ik}] + m_k [\mathfrak{r}_k \mathfrak{p}_{ki}] = 0. \quad \ldots 6)$$

Ова једначина казује да је збир статичних момената вектора $m_i \mathfrak{p}_{ik}$ и $m_k \mathfrak{p}_{ki}$ обзиром на тачку O раван нули, па ће једначина 6), узев у обзир једначину 5), моћи бити задовољена само онда, ако су оба вектора $m_i \mathfrak{p}_{ik}$ и $m_k \mathfrak{p}_{ki}$ везана на исту праву.

Оваквих једначина 5) и 6) можемо да поставимо за сваку комбинацију двеју тачака посматранога система, па ћемо зато добити $\frac{n(n-1)}{2}$ једначина типуса 5) и исто толико једначина типуса 6).

Саберемо ли све једначине типуса 5), па саставимо ли све векторе $\mathfrak{p}_{i1}, \mathfrak{p}_{i2}, \mathfrak{p}_{i3}, \ldots \mathfrak{p}_{in}$, који дејствују на тачку m_i, у један једини вектор $\mathfrak{p}_i$, то добивамо једначину:

$$\sum_i m_i \mathfrak{p}_i = 0 \quad \ldots 7)$$

Исто тако добивамо сабирањем једначина типуса 6) једначину

$$\sum_i m_i [\mathfrak{r}_i \mathfrak{p}_i] = 0 \quad \ldots 8)$$

Као што је познато, називају се продукти вектора брзина појединих тачака и њихових маса т. ј. вектори $m_1 \mathfrak{v}_1, m_2 \mathfrak{v}_2, m_3 \mathfrak{v}_3 \ldots m_n \mathfrak{v}_n$ векторима квантитета кретања тачака $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$. Ми ћемо их називати покраћено квантитетима кретања и сматрати за векторе везане на праву.[1])

При операцији са тима векторима могу се они само у њиховој прави помакнути, па се састављају на исти начин као и силе које дејствују на круто тело. *Budde* назива тај начин састављања *heteraptische Summation* и ми ћемо тај назив, краткоће ради, где-где употребити. Исти писац употребљава за хетераптично сабирање знак $\overset{*}{+}$, а за сабирање слободних вектора знак $\overset{\frown}{+}$; ми ћемо се међутим послужити уобичајеним знаковима векторске анализе, имајући на уму да се квантитети кретања имају сматрати за везане векторе и да су за њихово сабирање потребне две векторске операције, као што ће се из следећег видети.

Проведимо сада хетераптично сабирање вектора квантитета кретања тачака посматранога система употребив тачку сравнивања О за редукциону тачку. У то име надовежимо на тачку О векторе:

$$+ m_1 \mathfrak{v}_1, - m_1 \mathfrak{v}_1, + m_2 \mathfrak{v}_2, - m_2 \mathfrak{v}_2 \ldots . + m_n \mathfrak{v}_n, - m_n \mathfrak{v}_n$$

чији је хетераптични збир очито раван нули. Вектори $+ m_1 \mathfrak{v}_1, + m_2 \mathfrak{v}_2 \ldots . . + m_n \mathfrak{v}_n$ који дејствују сада на исту тачку О могу се хетераптично сабрати у један поларни вектор $\mathfrak{A}$, па је тај хетераптични збир, у овоме случају, раван векторијелном збиру, зато је:

$$\sum_i m_i \mathfrak{v}_i = \mathfrak{A} \qquad \ldots . 9)$$

---

[1] *Newton* је називао те векторе покретним силама. Тај назив, који се је изобичајио, био би у овоме случају згоднији него назив „квантитет кретања“, јер назив сила истиче већ својство вектора везаног на праву. И *H. Grassmann* је у својој *Bewegungslehre* називао квантитет кретања укратко силом.

Заостали вектори $-m_1\mathfrak{v}_1, -m_2\mathfrak{v}_2 \ldots\ldots -m_n\mathfrak{v}_n$ сачињавају са квантитетима кретања векторске спрегове, који се могу потпуно представити аксијалним векторима:

$$m_1[\mathfrak{r}_1\mathfrak{v}_1],\ m_2[\mathfrak{r}_2\mathfrak{v}_2], \ldots\ldots\ldots m_n[\mathfrak{r}_n\mathfrak{v}_n]$$

Хетераптични збир тих векторијалних спрегова може бити представљен слободним аксијалним вектором $\mathfrak{B}$ који је једнак векторијалном збиру горњих аксијалних вектора:

$$\sum_i m_i[\mathfrak{r}_i\mathfrak{v}_i] = \mathfrak{B} \quad \ldots\ldots 10)$$

На тај начин смо успели да хетераптични збир вектора квантитета кретања представимо поларним вектором $\mathfrak{A}$, и слободним аксијалним вектором $\mathfrak{B}$[1]).

Диференцирајмо сада једначине 9) и 10) по времену, то добивамо:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\mathfrak{v}_i = \sum_i m_i\mathfrak{p}_i \quad \ldots 11)$$

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i[\mathfrak{r}_i\mathfrak{v}_i] = \sum_i m_i[\mathfrak{v}_i\mathfrak{v}_i] + \sum_i m_i[\mathfrak{r}_i\mathfrak{p}_i] =$$

$$= \sum_i m_i[\mathfrak{r}_i\mathfrak{p}_i] \quad \ldots\ldots 12)$$

Из ових једначина следује, обзиром на једначине 7) и 8):

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = 0 \quad \ldots\ldots 13)$$

---

[1]) Употребив начин писања *Budde*-а, тај би се резултат могао изразити једначином:

$$m_1\mathfrak{v}_1 \overset{*}{+} m_2\mathfrak{v}_2 \overset{*}{+} \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{*}{+} m_n\mathfrak{v}_n = \mathfrak{A} \overset{*}{+} \mathfrak{B}$$

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = 0 \qquad \ldots . . 14)$$

Ове две једначине казују да су вектори $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ независни од времена, зато можемо да пишемо:

$$\mathfrak{A} = \text{const.} \qquad \ldots . 15)$$

$$\mathfrak{B} = \text{const.} \qquad \ldots . 16)$$

имајући на уму да се константност тих вектора односи на време, а да се, као што је лагано увидети, вектор $\mathfrak{B}$ мења ако редукциона тачка O мења свој положај. Вектор $\mathfrak{A}$ независан је и од положаја редукционе тачке. Та два вектора имају своје одређено механичко значење као што ћемо сада показати:

Нека нам, у то име, тачка S, радиусвектора $\mathfrak{r}_0$, представља заједничко тежиште или центрум маса посматранога система, онда је, према самој дефиницији тежишта:

$$\mathfrak{r}_0 \sum_i m_i = \sum_i m_i \mathfrak{r}_i \qquad \ldots . . 17)$$

Диференцирамо ли ову једначину по времену *t*, то добивамо:

$$\frac{d\mathfrak{r}_0}{dt} \sum_i m_i = \sum_i m_i \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt} = \sum_i m_i \mathfrak{v}_i = \mathfrak{A} \quad \ldots 18)$$

Израз $\frac{d\mathfrak{r}_0}{dt}$ представља и вектор брзине $\mathfrak{v}_0$ тежишта S, а израз $\sum_i m_i$ целокупну масу *M* посматранога система, па је зато значење вектора $\mathfrak{A}$ изражено једначином:

$$\mathfrak{A} = M . \mathfrak{v}_0 \qquad \ldots . 19)$$

т. ј. вектор $\mathfrak{A}$ представља квантитет кретања тежишта S, ако се замисли да је у њему читава маса концентрована.

Из горње једначине следује:

$$\mathfrak{v}_0 = \frac{1}{M}\mathfrak{A}, \quad \ldots\ldots 20)$$

па како су величине $\mathfrak{A}$ и M константне величине, то се тежиште система креће праволинијски, једнаком брзином.

Означимо ли са $\mathfrak{a}$ радиусвектор иницијалног положаја тежишта, т. ј. вредност његову за време $t = 0$, то интеграцијом једначине 18) или 20) следује векторска једначина:

$$\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{a} + \frac{t}{M}\mathfrak{A} \quad \ldots . 21),$$

која одређује кретање тежишта.

Значење вектора $\mathfrak{B}$ произилази из следећих разматрања:

Означимо радиусвекторе тачака $m_1, m_2 \ldots\ldots m_n$, узете од тежишта система са $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2 \ldots\ldots\ldots \mathfrak{f}_n$, то је:

$$\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{f}_i \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

Зато је:

$$\mathfrak{B} = \sum_i m_i [\mathfrak{r}_i \mathfrak{v}_i] = [\mathfrak{r}_0 \sum_i m_i \mathfrak{v}_i] + \sum_i [\mathfrak{f}_i m_i \mathfrak{v}_i] =$$

$$= [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{A}] + \sum_i [\mathfrak{f}_i (m_i \mathfrak{v}_i)] \ldots\ldots\ldots 22)$$

Ова једначина казује да се вектор $\mathfrak{B}$ даде представити као збир двају аксијалних вектора: први од њих представља статични моменат квантитета кретања тежишта система, ако је у њему читава маса M концетрована, обзиром на тачку O, а други представља збир статичних момената квантитета кретања појединих тачака система обзиром на тежиште S, сматрано за непомично у проматраноме моменту.

Векторска једначина:

$$\mathfrak{B} = \sum_i m_i [\mathfrak{r}_i \mathfrak{v}_i]$$

дозвољава још једну интерпретацију:

Како је:

$$\mathfrak{v}_i = \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt},$$

то се може и да пише:

$$\mathfrak{B} = \sum_i m_i \frac{[\mathfrak{r}_i \, d\mathfrak{r}_i]}{dt}$$

Векторијални продукат $[\mathfrak{r}_i \, d\mathfrak{r}_i]$ представља двоструку управљену површину $\delta\mathfrak{f}_i$ што ју радиусвектор $\mathfrak{r}_i$ тачке m_i опише у бесконачно маленом времену dt, зато се квоциенат:

$$\frac{1}{2} \frac{[\mathfrak{r}_i \, d\mathfrak{r}_i]}{dt} = \mathfrak{c}_i$$

назива вектором секторске брзине тачке m_i.

Једначина:

$$\mathfrak{B} = 2 \sum_i m_i \frac{\delta\mathfrak{f}_i}{dt} = 2 \sum_i m_i \mathfrak{c}_i \ldots\ldots\ldots\ldots 23)$$

даје значење вектора $\mathfrak{B}$ као двоструки збир вектора секторских брзина појединих тачака система, помножених са масама тих тачака и казује да је тај збир константан.

Аналитичка механика није у стању да горњу теорему тако опћенито формулише, јер не може да изразује директно векторске операције, него се служи пројекцијама секторских површина на три равнине. Из векторске једначине 23) могу се извести познате три скаларне једначине аналитичне механике, које изражавају принцип површина, ако се она помножи скаларно са јединичним векторима $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$.

Положимо кроз тачку O једну произвољну равнину *E*. Аксијални јединични вектор, нормалан на ту равнину, нека буде означен са $\mathfrak{e}_0$. Помножимо ли са тим вектором једначину 23) скаларно, то добивамо:

$$\sum_i m_i \frac{\delta\mathfrak{f}_i \cdot \mathfrak{e}_0}{dt} = \frac{1}{2}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{e}_0 \qquad \ldots . 24)$$

Скаларни продукат $\delta\mathfrak{f}_i \cdot \mathfrak{e}_0$ представља пројекцију површине $\delta\mathfrak{f}_i$ на равнину E или површииу dF_i, што ју пројекција радиусвектора $\mathfrak{r}_i$ опише по равнини E у бесконачно маленом времену *dt*. Скаларни продукат $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{e}_0$ представља пројекцију вектора $\mathfrak{B}$, на нормалу равнине E, па како је вектор $\mathfrak{B}$, према пређашњем, независан од времена, то је и та пројекција константна скаларна величина, рецимо 2 C. Једначина 24) добива према томе облик:

$$\sum_i m_i \frac{dF_i}{dt} = C \qquad \ldots\ldots . 25)$$

па изражава принцип површина језиком аналитичне механике.

Рекли смо да константа 2 C представља пројекцију вектора $\mathfrak{B}$ на нормалу равнине E; та ће пројекција имати своју највећу вредност ако равнина E буде нормална на вектор $\mathfrak{B}$. Равнина, која има својство, да за њу леви збир једначине 25) достигне највећу могућу вредност зове се инвариабилна равнина *Laplace*-ова, па зато можемо да кажемо:

Инвариабилна равнина *Laplace*-ова за тачку О нормална је на вектор $\mathfrak{B}$.

Из свега досадањег следује да једначина 16) изражава у потпуној опћенитости закон површина и дефинише положај *Laplace*-ове равнине, нормалне на вектор $\mathfrak{B}$.

Резултате досадањих излагања можемо да резумирамо у теорему:

Теорема: *Сматрају ли се моментани вектори квантитета кретања материјалних тачака система, на који не дејствују никакове спољне силе, за векторе везане на праве, то се они даду по познатим правилима редукције везаних вектора (или хетераптичке сумације) помоћу једне непомичне тачке О редуковати на један поларан вектор* $\mathfrak{A}$ *и један аксијалан вектор* $\mathfrak{B}$, *па означимо ли са* $\mathfrak{r}_0$ *радиусвектор тежишта система, узет од тачке О, а са* $\mathfrak{a}$ *његову иницијалну вредност (за време* $t = o$), *то, за време читавог кретања, постоје векторске једначине:*

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \text{const.} \\ \mathfrak{B} &= \text{const.} \\ \mathfrak{r}_0 &= \mathfrak{a} + \frac{t}{M}\mathfrak{A} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots 26)$$

Иницијалним условима одређени су константни вектори $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, *и* $\mathfrak{a}$, *па како је за њихову одредбу потребно девет скаларних констаната, независних једна од друге, то горње једначине представљају девет општих интеграла проблема n тела, те прва од њих изражава* *закон о одржању квантитета кретања, друга закон површина, а трећа одређује кретање тежишта.*

Према законима о редукцији везаних вектора, могу се вектори квантитета кретања свих посматраних тачака према различитом избору редукционе тачке O на небројено много начина свести на два укрштена вектора, која не мењају своју вредност за време кретања.

Даду ли се вектори квантитета кретања редуковати на један једини поларни вектор, то је тај вектор независан од редукционе тачке, везан на једну непомичну праву простора и константан за време кретања.

Помножимо ли једначину:

$$m_i \frac{d\mathfrak{v}_i}{dt} = \mathfrak{P}_i$$

скаларно са $\mathfrak{v}_i = \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt}$ то добивамо:

$$m_i \mathfrak{v}_i d\mathfrak{v}_i = \mathfrak{P}_i d\mathfrak{r}_i$$

Замислимо да смо овакове једначине поставили за све тачке система па сабрали, то следује:

$$\sum_i m_i \mathfrak{v}_i d\mathfrak{v}_i = \sum_i \mathfrak{P}_i d\mathfrak{r}_i$$

Десна страна ове једначине представља збир елементарних радња читавога система, па ако су силе $\mathfrak{P}_i$ само функције положаја система, онда је тај збир диференцијал функције сила *U*.

$$\sum_i m_i \mathfrak{v}_i d\mathfrak{v}_i = d\,U$$

Интеграција ове једначине даје:

$$\frac{1}{2}\sum m_i \mathfrak{v}_i^2 = U + C \quad \ldots\ldots 27)$$

где С означава интеграциону константу. У овој једначини долазе само скаларни продукти, па је зато та једначина скаларна, а представља десети познати општи интеграл проблема *n* тела: интеграл живе силе.

Често пута је од користи посматрати кретање тачака система обзиром на тежиште система, т. ј. одабрати тачку сравнивања О у тежишту самом, па како се оно креће, према пређашњем, једнаком брзином $\mathfrak{v}_0$, то ће релативне брзине појединих тачака система бити представљене векторима:

$$(\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0) \qquad i = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots\ldots n\,,$$

а њихови квантитети кретања векторима:

$$m_i\,(\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0) \qquad i = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots n$$

Вектор $\mathfrak{A}$ биће у овоме случају једнак:

$$\mathfrak{A}_0 = \sum_i m_i\,(\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0) = \sum_i m_i\,\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0 \sum_i m_i.$$

Из једначине 18) следује:

$$\mathfrak{v}_0 \sum_i m_i = \sum_i m_i\,\mathfrak{v}_i,$$

зато је:

$$\mathfrak{A}_0 = 0 \qquad \ldots\ldots 28)$$

Ова једначина казује, да се код релативног кретања обзиром на тежиште вектори квантитета кретања редукују на један векторски спрег. Тај спрег представљен је аксијалним вектором:

$$\mathfrak{B}_0 = \sum_i m_i\,[\mathfrak{r}_i(\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0)] = \sum_i m_i\,[\mathfrak{r}_i\,\mathfrak{v}_i] + [\mathfrak{v}_0 \sum_i m_i\,\mathfrak{r}_i]$$

Како је:

$$\sum_i m_i \mathfrak{f}_i = \sum_i m_i (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_0) = \sum_i m_i \mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_0 \sum_i m_i$$

то је обзиром на једначину 17):

$$\sum_i m_i \mathfrak{f}_i = 0,$$

а

$$\mathfrak{B}_0 = \sum_i m_i [\mathfrak{f}_i \mathfrak{v}_i] \ldots\ldots\ldots\ldots 29)$$

Ову би исту вредност добили када би сматрали тежиште за непомично; зато је вектор $\mathfrak{B}$ независан од кретања тежишта.

Особине кретања у општем проблему двају тела

Под општим проблемом двају тела разумевамо испитивање кретања двеју материјалних тачака, које се привлаче или одбијају по произвољном закону и на које не дејствују никакове спољне силе. У томе случају могуће је, на темељу опште теореме, представљене једначинама 26), извести некоја општа својства кретања, која се тичу моментаних положаја оскулационих равнина путања и праваца кретања.

О оскулационим равнинама путања. Једначинама 7) и 8) изразили смо да се силе $\mathfrak{P}_1 = m_1 \mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{P}_2 = m_2 \mathfrak{p}_2$, којима дејствују посматране тачке једна на другу, држе у равнотежи, па да су зато везане и на исти правац који спаја моментане положаје тачака m_1 и m_2. Вектори акцелерација $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ добивају се деобом везаних вектора $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ са скаларним величинама m_1 и m_2, па зато и они падају у исти правац. Позната је особина криволинијског кретања, да вектор акцелерације пада у оскулациону равнину путање, из чега следује, да моментани положаји оскулационих равнина путања обеју тачака пролазе кроз праву, која спаја моментане положаје њихове. Зато следује:

Теорема: *Моментани положаји оскулационих равнина путања двају тела (материјалних тачака), која се привлаче по произвољном закону и на која не дејствују никакове спољне силе, секу се увек у правој која спаја моментане положаје тих тачака.*

О моментанима правцима кретања. Према општој теореми, представљеној једначинама 26), дефинисан је типус, на који се даду свести моментани вектори квантитета кретања, иницијалним деловима, па према томе какови су ти иницијални услови, разликујемо четири разна случаја, у којима се иницијални вектори квантитета кретања редукују на нулу, на један векторски спрег, на два укрштена вектора. Те случајеве испитиваћемо сваки за себе.

1⁰ Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на нулу, т. ј.:

$$\mathfrak{A} = 0 \qquad \mathfrak{B} = 0$$

онда је:

$$\mathfrak{r}_0 = a = \text{const.}$$

Тежиште система је непомично, вектори квантитета кретања леже у истој правој, која пролази кроз непомични положај тежишта; моментани правци кретања добивају се деобом вектора квантитета кретања са скаларним величинама m_1 и m_2, па се зато оба тела крећу истоме правцу брзинама инверзно пропорционалним њиховим масама. Сукоб се може десити у непомичном тежишту система.

На овај се случај даде свести и случај када иницијални вектори квантитета кретања дају један једини вектор који пролази кроз тежиште система. Јер посматрамо ли сада релативна кретања обзиром на тежиште, т. ј. одаберемо ли тежиште за редукциону тачку, то је обзиром на једначине (28 и 29):

$$\mathfrak{A}_0 = 0 \qquad \mathfrak{B}_0 = 0$$

Оба тела крећу се на једној правој брзинама инверзно пропорционалним њиховим масама, а та права креће се у простору транслаторно једнаком брзином. Путање обеју тачака леже у једној те истој равни; сукоб се може десити у путањи тежишта система.

Овај случај може настати распрштењем једнога тела, које се креће транслаторно једнаком брзином, у два тела; јер пре распрштења дају вектори квантитета кретања један вектор који пролази кроз тежиште система, а тај се вектор не мења под утицајем унутарњих сила.

2°. Иницијални вектори квантитета кретања даду се редуковати на један једини вектор $\mathfrak{A}$. Одаберемо ли, дакле, редукциону тачку O у прави тога вектора, то је:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{m}_2 \mathfrak{v}_2$$

$$\mathfrak{B} = 0$$

Вектор — $\mathfrak{A}$ држи се у равнотежи са векторима $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{m}_2 \mathfrak{v}_2$, т. ј. та три вектора редукују се на нулу. Према познатим законима о састављању везаних вектора морају се та три вектора сећи у једној тачки, а како је вектор $\mathfrak{A}$ у простору фиксиран, то из тога следује, да се вектори $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{m}_2 \mathfrak{v}_2$, а према томе и вектори $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$, секу увек у једној у простору фиксираној правој. Оба ова вектора представљају и моментане правце кретања, који неће моћи оставити равнину иницијалних праваца кретања, па зато можемо да формулишемо теорему:

Теорема. *Даду ли се иницијални вектори квантитета кретања двају тела редуковати на један једини вектор, то се оба тела крећу у једној равни, која садржава тај вектор, а њихови моментани правци кретања секу се увек у непомичној правој тога вектора.*

И у овоме случају могуће је, на темељу опште теореме, испитати могућност сукоба тих двеју тачака. Не пролази ли вектор $\mathfrak{A}$ кроз тежиште система, тада се ово креће по једној у простору фиксираној правој, рецимо $\mathfrak{N}$, паралелно везаном вектору $\mathfrak{A}$. Како се моментани правци кретања секу увек у вектору $\mathfrak{A}$, то би се сукоб могао десити само у тој правој, но како тежиште система не може да остави праву $\mathfrak{N}$, то би се сукоб морао у исто време десити и у правој $\mathfrak{N}$. Сукоб је дакле у посматраноме коначном простору немогућ, но оба тела могу проћи бесконачно близу једно поред другог. Пролази ли вектор $\mathfrak{A}$ кроз тежиште система, тада се овај случај свађа на пређашњи.

3°. Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на један спрег:

$$\mathfrak{A} = m_1 \mathfrak{v}_1 + m_2 \mathfrak{v}_2 = o$$

Тежиште система је непомично; оба тела кретаће се у равнини њихових иницијалних брзина која је у овоме случају идентична са *Laplace*-овом инвариабилном равнином за произвољну тачку простора; моментани правци кретања увек су међусобно паралелни, па је зато могуће заменити у горњој једначини векторске вредности $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$ са њиховим скаларним износима. Величине тих брзина инверзно су пропорционалне масама m_1 и m_2. Сукоб обеју тачака није могућ.

Ако се оба тела привлаче силом P, која зависи само од њиховог међусобног одстојања, па ако су иницијалне брзине v_1 и v_2 нормалне на праву, што спаја оба тела, а представљене величинама:

$$v_1^2 = l\,\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{P}{m_1+m_2};\quad v_2^2 = l\,\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{P}{m_1+m_2},$$

где l означава иницијално одстојање обеју тела, тада су радиуси кривине ϱ_1 и ϱ_2 путања у иницијалном моменту:

$$\varrho_1 = \frac{m_1 v_1^2}{P} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,l \quad \varrho_2 = \frac{m_2 v_2^2}{P} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,l$$

Центрум кривине обеју путања пада у заједничко тежиште, па ће зато оба тела описивати око непомичнога заједничкога тежишта концентричне кругове.

4°. Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на два укрштена вектора.

Овај случај даде се, помоћу једначина 28) и 29), свести на пређашњи случај 3°, ако се посматрају релативна кретања обеју материјалних тачака око њиховог заједничког тежишта. Зато се ово кретање састоји из два: оба тела крећу се по законима претходног случаја у инвариабилној равни њиховога заједничког тежишта, а ова раван креће се транслаторном брзином у правцу вектора $\mathfrak{A}$. Подударају ли се правци вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, на који се даду редуковати квантитети кретања, употребив заједничко тежиште као редукциону тачку т. ј. пролази ли централна оса вектора квантитета кретања кроз тежиште система, па одговарају ли иницијалне брзине специјазним условима пређашњега случаја, онда описују оба тела хеликсе исте висине хода, обавијене око концентричних кружних цилиндера. Ако су обе масе једнаке, онда су оба ова хеликса конгруентна и леже диаметрално на истоме цилиндеру, тако, да су увијена један у други.

Сукоб обеју материјалних тачака је немогућ, јер би у томе случају хетераптични збир вектора квантитета кретања дегенерисао на један једини вектор.

Особине кретања у општем проблему трију тела.

Под општим проблемом трију тела разумевамо испитивање кретања трију материјалних тачака m_1, m_2 и m_3, које се привлаче или одбијају по произвољном закону и на које не дејствују никакове спољне силе. Сва следећа извађања важе дакле и за случај *Newton*-ове гравитације, на који ћемо се случај такође специјално обазрети.

Означења. Означимо углове троугла, што га посматране три материјалне тачке склапају, са A, B и C, а стране троугла, сматране за векторе, са $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, при чему $\mathfrak{a}$ лежи наспрам A, $\mathfrak{b}$ наспрам B, а $\mathfrak{c}$ наспрам C. Позитивни правац обилажења нека иде од A ка B ка C. Употребив *Grassmann*-ову дефиницију диференције тачака можемо и да пишемо:

$$\mathfrak{a} = C - B \quad \mathfrak{b} = A - C \quad \mathfrak{c} = B - A \quad \ldots 30)$$

Масе материјалних тачака у угловима A, B, C нека буду означене са m_1 m_2 m_3.

S нека буде заједничко тежиште те три масе m_1, m_2, m_3, а радиусвектори повучени од њега према тим масама т. ј. тачкама A, B, C нека буду означени са $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_3$.

Употребив *Grassmann*-ову дефиницију диференције тачака можемо да пишемо:

$$\mathfrak{s}_1 = A - S,\quad \mathfrak{s}_2 = B - S,\quad \mathfrak{s}_3 = C - S \ldots\ldots 31)$$

Исто тако нека представљају $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_0$ радиус-векторе тачака A, B, C, S од од произвољне тачке простора O т. ј.

$$\mathfrak{r}_1 = A - O,\quad \mathfrak{r}_2 = B - O,\quad \mathfrak{r}_3 = C - O,\quad \mathfrak{r}_0 = S - O \ldots 32)$$

Према дефиницији тежишта постоји једначина:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\,\mathfrak{r}_0 = m_1\,\mathfrak{r}_1 + m_2\,\mathfrak{r}_2 + m_3\,\mathfrak{r}_3$$

а обзиром на једначине 32):

$$(m_1 + m_2 + m_3)\,S = m_1\,A + m_2\,B + m_3\,C \ldots\ldots 33)$$

која изражава уједно фундаменталну једначину *Moebius*-овог барицентричног рачуна. Ту једначину можемо писати и у облику:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\,(S - S) = m_1\,(A - S) + m_2\,(B - S) + m_3\,(C - S),$$

па је обзиром на једначине 31):

$$m_1\,\mathfrak{s}_1 + m_2\,\mathfrak{s}_2 + m_3\,\mathfrak{s}_3 = o \ldots\ldots 34)$$

Сила, којом дејствује тачка C на тачку B, т. ј. унутарња сила у позитивном правцу вектора $\mathfrak{a}$ нека буде означена са $\mathfrak{P}_a$, а сила којом дејствује тачка B на тачку C, т. ј. унутарња сила у негативном правцу вектора $\mathfrak{a}$ нека буде означена са $-\mathfrak{P}_a$, јер су ове две силе једнаке, а противнога правца. Исто тако нека $\mathfrak{P}_b$ и $\mathfrak{P}_c$ представљају унутарње силе у позитивном правцу вектора $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$, а $-\mathfrak{P}_b$ и $-\mathfrak{P}_c$ силе у негативном правцу тих вектора.

Пол гравитације. Саставимо унутарње силе које делују на материјалне тачке $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ и $\mathfrak{m}_3$, па их означимо редом са $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{P}_3$, онда постоје једначине:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P}_1 &= \mathfrak{P}_c - \mathfrak{P}_b\\ \mathfrak{P}_2 &= \mathfrak{P}_a - \mathfrak{P}_c\\ \mathfrak{P}_3 &= \mathfrak{P}_b - \mathfrak{P}_a\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots 35)$$

Сматрамо ли сада те силе у посматраноме моменту за везане векторе, то је аналогно пређашњим ознакама:

$$\mathfrak{A}_p = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 = 0 \ldots\ldots 36)$$

$$\mathfrak{B}_p = [\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{P}_1] + [\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{P}_2] + [\mathfrak{r}_3\,\mathfrak{P}_3] = [(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3)\,\mathfrak{P}_a] +$$
$$+ [(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1)\,\mathfrak{P}_b] + [(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)\,\mathfrak{P}_c]$$

Из једначина 30) и 32) следује:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2 \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3 \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1,$$

зато је:

$$\mathfrak{B}_p = [\mathfrak{P}_a\,\mathfrak{a}] + [\mathfrak{P}_b\,\mathfrak{b}] + [\mathfrak{P}_c\,\mathfrak{c}] = 0 \ldots 37),$$

јер вектори $\mathfrak{P}_a$ и $\mathfrak{a}$, па $\mathfrak{P}_b$ и $\mathfrak{b}$, па $\mathfrak{P}_c$ и $\mathfrak{c}$ имају исте правце.

Једначине 36) и 37) казују, да је хетерагитични збир везаних вектора $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{P}_3$ раван нули, а из тога следује, да би се силе $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{P}_3$, кад би, без промене свога међусобнога положаја, дејствовале на круто тело, држале у равнотежи.[1]) Зато се силе $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{P}_3$ секу у једној те истој тачки, равнине трију тела m_1, m_2 и m_3. Ту тачку назваћемо *полом гравитације*, а означити ћемо ју са словом Ω.

Падају ли сва три тела у исти правац, тада падају и силе $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{P}_3$ у исти правац, па се не секу. У овоме случају дефинишемо пол гравитације као граничан положај пола гравитација троугла ABC, када се тачке A, B, C приближују једној правој.

Ако се посматрана три тела привлаче, онда падају силе $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{P}_3$ у унутарње углове троугла трију тела, па зато лежи пол гравитације у томе случају у троуглу, а леже ли сва три тела у истоме правцу, између оба крајња тела.

Критериум познатих егзактних решења проблема трију тела. Испитивајмо услове под којима пол гравитације Ω пада у тежиште S посматраних трију маса m_1, m_2 и m_3. Ти ће услови бити изражени векторским једначинама:

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{P}_1 &= \mathfrak{P}_b - \mathfrak{P}_c = \lambda\mathfrak{r}_1 \\ -\mathfrak{P}_2 &= \mathfrak{P}_c - \mathfrak{P}_a = \mu\mathfrak{r}_2 \\ -\mathfrak{P}_3 &= \mathfrak{P}_a - \mathfrak{P}_b = \nu\mathfrak{r}_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 38)$$

где λ, μ, ν означавају скаларне факторе, јер ако су горње једначине задовољене, онда се праве радиусвектора $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ и $\mathfrak{r}_3$ подударају са правама сила $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{P}_3$, па се зато и тачке S и Ω поклапају. Саберемо ли горње три једначине, то добивамо:

---

[1]) Употребив ознаке Budde-ове (види наше примедбе на стр. 2 и 7) могле би се операције изведене једначинама 36) и 37) једном једначином изразити: Једначине 35) могу се писати у облику: $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_c \overset{*}{-} \mathfrak{P}_b$; $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_a \overset{*}{-} \mathfrak{P}_c$ $\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{P}_b \overset{*}{-} \mathfrak{P}_a$, а одатле следује директно: $\mathfrak{P}_1 \overset{*}{+} \mathfrak{P}_2 \overset{*}{+} \mathfrak{P}_3 \overset{*}{=} 0$. Ова једначина садржава у себи једначине 36) и 37).

$$\lambda\mathfrak{f}_1 + \mu\mathfrak{f}_2 + \nu\mathfrak{f}_3 = 0 \ldots\ldots 39)$$

Ова једначина казује, да су вектори $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ и $\mathfrak{f}_3$ компланарни; сравнимо ли ју са једначином 34), то видимо да ће — ако сва три посматрана тела не леже у истој правој — она моћи бити задовољена само онда ако је:

$$\lambda = km_1 \qquad \mu = km_2 \qquad \nu = km_3$$

где k означава један произвољни константни скаларни фактор. Тако услови, да тачке Ω и S падну заједно добивају облик:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_b - \mathfrak{P}_c &= km_1\mathfrak{f}_1 \\ \mathfrak{P}_c - \mathfrak{P}_a &= km_2\mathfrak{f}_2 \\ \mathfrak{P}_a - \mathfrak{P}_b &= km_3\mathfrak{f}_3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots 40)$$

Ови услови важе према учињеним предпоставкама само онда када сва три тела не леже у истој правој. Но како смо за случај, да сва три тела леже у истој правој, пол гравитације дефинисали као гранични положај пола троугла ABC када се тачке A, B и C приближују истој правој, то ће једначине 40) важити и за тај случај.

Горњима једначинама можемо дати и други облик, ако векторе $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ и $\mathfrak{f}_3$ изразимо векторима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$. Замислимо у тежишту S концентрисану масу

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

то је моменат те масе обзиром на коју год тачку E, равнине трију тела, једнак збиру момената маса m_1, m_2 и m_3, размештених у угловима A, B и C обзиром на ту исту тачку E. Ово познато својство добија се — у смислу *Grassmann*-овог векторског рачуна, —

и мултипликацијом једначине 33) са тачком E. Заменемо ли тачку E редом са тачкама A, B и C, то добивамо једначине:

$$\left.\begin{aligned} M\mathfrak{f}_1 &= m_3\mathfrak{b} - m_2\mathfrak{c} \\ M\mathfrak{f}_2 &= m_1\mathfrak{c} - m_3\mathfrak{a} \\ M\mathfrak{f}_3 &= m_2\mathfrak{a} - m_1\mathfrak{b} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots 41)$$

а обзиром на једначине 40):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_b - \mathfrak{P}_c &= \frac{k}{M} m_3 m_1 \mathfrak{b} - \frac{k}{M} m_1 m_2 \mathfrak{c} \\ \mathfrak{P}_c - \mathfrak{P}_a &= \frac{k}{M} m_1 m_2 \mathfrak{c} - \frac{k}{M} m_2 m_3 \mathfrak{a} \\ \mathfrak{P}_a - \mathfrak{P}_b &= \frac{k}{M} m_2 m_3 \mathfrak{a} - \frac{k}{M} m_3 m_1 \mathfrak{b} \end{aligned}\right| \ldots\ldots 42)$$

Праве сила $\mathfrak{P}_a$, $\mathfrak{P}_b$, $\mathfrak{P}_c$ и вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ подударају се, зато ће горње једначине — не леже ли сва три тела у истој правој — бити задовољене, ако је:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_a &= k' m_2 m_3 \mathfrak{a} \\ \mathfrak{P}_b &= k' m_3 m_1 \mathfrak{b} \\ \mathfrak{P}_c &= k' m_1 m_2 \mathfrak{c} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 43),$$

при чему смо константу $\frac{k}{M}$ заменили са константом k'.

Испитивајмо сада случајеве када се посматрана три тела привлаче силама које су пропорционалне њиховима масама и које су иначе само функција њихових одстојања, т. ј. абсолутних износа a, b, c, вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ када је дакле:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P}_a &= m_2 m_3 \varphi(a)\, \mathfrak{a}_0 \\ \mathfrak{P}_b &= m_3 m_1 \varphi(b)\, \mathfrak{b}_0 \\ \mathfrak{P}_c &= m_1 m_2 \varphi(c)\, \mathfrak{c}_0\end{aligned}\right\} \ldots\ldots 44),$$

при чему $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ $\mathfrak{c}_0$ означују јединачне векторе, те је

$$\mathfrak{a} = a\,\mathfrak{a}_0 \quad \mathfrak{b} = b\,\mathfrak{b}_0 \quad \mathfrak{c} = c\,\mathfrak{c}_0$$

Износе a, b, c узимамо увек позитивне. Случајеве, када посматрана три тела не леже и када леже у истој правој, испитиваћемо сваки за себе.

Не леже ли тела у истоме правцу, тада можемо да применимо једначине 43). Сравнимо ли те једначине са једначинама 44), које можемо писати и у облику:

$$\mathfrak{P}_a = m_2 m_3 \frac{\varphi(a)}{a}\, \mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{P}_b = m_3 m_1 \frac{\varphi(b)}{b}\, \mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{P}_c = m_1 m_2 \frac{\varphi(c)}{c}\, \mathfrak{c}$$

то добивамо:

$$\frac{\varphi(a)}{a} = k, \quad \frac{\varphi(b)}{b} = k, \quad \frac{\varphi(c)}{c} = k$$

Услови да пол гравитације Ω падне у тежиште S изражени су дакле једначинама:

$$\frac{\varphi(a)}{a} = \frac{\varphi(b)}{b} = \frac{\varphi(c)}{c} \quad \ldots 45)$$

Падају ли сва три тела у један те исти правац, онда нам ваља употребити једначине 40). Јединични вектори $\mathfrak{a}_0$ $\mathfrak{b}_0$ $\mathfrak{c}_0$ падају сада у исту праву, а правац њихов зависи од реда тачака А, В и С. Узмимо, да су тела распоређена по правој тако, да у позитивном правцу јединичног вектора $\mathfrak{c}_0$ долази прво тело m_1 па тело m_2 па тело m_3, а да тежиште лежи између m_1 и m_2, онда је:

$$\mathfrak{a}_0 = - \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{c}$$

и

$$\mathfrak{P}_a = + m_2 m_3 \varphi(a) \mathfrak{c}_0$$

$$\mathfrak{P}_b = - m_3 m_1 \varphi(b) \mathfrak{c}_0$$

$$\mathfrak{P}_c = + m_1 m_2 \varphi(c) \mathfrak{c}_0$$

Означимо још:

$$\mathfrak{f}_1 = s_1 \mathfrak{c}_0 \qquad \mathfrak{f}_2 = s_2 \mathfrak{c}_0 \qquad \mathfrak{f}_3 = s_3 \mathfrak{c}_0$$

где s_1, s_2, s_3 означавају скаларне величине, при чему је према утврђеном реду тачака s_1 негативно, а s_2 и s_3 позитивно, па ставимо све горње вредности у једначине 40), то добивамо:

$$\left.\begin{aligned} - m_3 \varphi(b) - m_2 \varphi(c) &= k s_1 \\ m_1 \varphi(c) - m_3 \varphi(a) &= k s_2 \\ m_2 \varphi(a) + m_1 \varphi(b) &= k s_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots . 49)$$

Једначине 41) прелазе, у овоме случају, у скаларне једначине:

$$M s_1 = - m_3 b - m_2 c$$

$$M s_2 = m_1 c - m_3 a$$

$$M s_3 = m_2 a + m_1 b$$

Субституцијом ових једначина у једначине 46) добивамо:

$$m_3 \varphi(b) + m_2 \varphi(c) = \frac{k}{M}(m_3 b + m_2 c)$$

$$m_1 \varphi(c) - m_3 \varphi(a) = \frac{k}{M}(m_1 c - m_3 a)$$

$$m_2 \varphi(a) + m_1 \varphi(b) = \frac{k}{M}(m_2 a + m_1 b)$$

Од ових трију једначина само су две независне, јер трећа следује из осталих двеју. Из прве и треће од њих добивамо:

$$\frac{m_2 \varphi(a) + m_1 \varphi(a+c)}{m_2 a + m_1 (a+c)} = \frac{m_3 \varphi(a+c) + m_2 \varphi(c)}{m_3 (a+c) + m_2 c}$$

или:

$$m_1 [c\varphi(a+c) - (a+c)\varphi(c)] + m_2 [c\varphi(a) - a\varphi(c)] +$$
$$+ m_3 [(a+c)\varphi(a) - a\varphi(a+c)] = 0 \quad \ldots 47)$$

Ако је функција φ хомогена функција n-тог степена свога аргумента, то можемо горњој једначини, делећи ју са c^{n+1}, дати облик:

$$m_1 [\varphi(1 + \frac{a}{c}) - (1 + \frac{a}{c})\varphi(1)] + m_2 [\varphi(\frac{a}{c}) - \frac{a}{c}\varphi(1)] +$$
$$+ m_3 [(1 + \frac{a}{c})\varphi(\frac{a}{c}) - \frac{a}{c}\varphi(1 + \frac{a}{c})] = 0$$

Ставимо ли:

$$\frac{a}{c} = z$$

то је услов, да пол гравитације Ω падне у тежиште S изражен једначином:

$$m_1 [\varphi(1+z) - (1+z)\varphi(1)] = m_2 [\varphi(z) - z\varphi(1)] +$$
$$+ m_3 [(1+z)\varphi(z) - z\varphi(1+z)] = 0 \quad \ldots 48)$$

Ако је међусобна атракција појединих тела пропорционална *n*-тој потенцији њиховог одстојања т. ј. ако је

$$\varphi(x) = x^n,$$

то услов 45) добија облик:

$$a^{n-1} = b^{n-1} = c^{n-1}$$

или:

$$a = b = c \qquad \ldots 49)$$

т. ј. три посматрана тела леже на врховима истостранога троугла. Леже ли сва три тела на истој правој, то према услову 48) постоји између њихових одстојања релација:

$$m_1 [(1 + z)^n - (1 + z)] + m_2 [z^n - z] + m_3 [(1 + z) z^n - \\ - z (1 + z)^n] = 0 \qquad \ldots 50)$$

Овој једначини може се дати и облик:

$$(m_1 - m_3 z) [m_2 + m_3 (1 + z)^n] = [m_2 + m_3 (1 + z)] \\ (m_1 - m_3 z^n) \qquad \ldots 51)$$

Обратимо још нарочиту пажњу случају када између посматраних трију тела дејствују силе *Newton*-ове гравитације. У томе је случају:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2},$$

па услов 45) добива облик

$$a = b = c \qquad \ldots 52)$$

т. ј. и у овоме случају леже посматрана три тела на врховима истостранога троугла.

Услов 48), који предпоставља да сва три тела леже на истој правој добива облик:

$$m_1 z^2 [1 - (1 + z)^3] + m_2 (1 + z)^2 (1 - z^3) +$$
$$+ m_3 [(1 + z)^3 - z^3] = 0 \qquad 53)$$

Једначине 49), 51) и 52), 53) одређују потпуно оне констелације трију тела у којима, једино, тачке *Ω* и S падају заједно; прве две једначине важе за случај када између посматраних трију тела дејствују силе, пропорционалне *n*-тој потенцији њиховог одстојања, а друге две једначине важе за случај када између тела дејствују силе *Newton*-ове гравитације.

Сравнимо ли ове једначине са једначинама *Laplace*-овим, које карактеризују оне констелације трију тела при којима је егзактна интеграција њихових једначина кретања могућа, ако између њих дејствују привлачне силе као што је горе наведено, то видимо, да су наше једначине потпуно једнаке једначинама *Laplace*-овим.[1] Како су те констелације једине, за које је решење проблема трију тела до сада успело, то следује:

Теорема: *Потребни и довољни критериум, да се проблем трију тела — која се привлаче пропорционално произвољној потенцији њиховог одстојања (случај Newton-ове гравитације овде је садржан) — може, према данашњем стању науке, егзактно да реши, одређен је условом, да та три тела сачињавају увек такову констелацију, у којој пол гравитације пада у тежиште система.*

Могуће је доказати, да горњи критериум важи и за случајеве када се силе, којима се посматрана три тела привлаче, владају и по којем другоме закону, но испитивање тога случаја изалази изван оквира ове радње.

---

[1] Упореди: Laplace, Traité de mécanique céleste. Tome quatrième Chapitre VI. Sur quelques cas ou l'on peut rigouresement obtenir le mouvement d' un système de corps qui s' attirent. (стр. 307—313 издања француске академије).

О оскулационима равнинама путања. Силе $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{P}_3$, које дејствују на посматрана три тела, секу се у полу гравитације који лежи у равнини тих трију тела, зато се и вектори акцелерација секу у тој тачки. Према познатоме својству криволинијскога кретања пролазе кроз те векторе и моментани положаји оскулационих равнина путања тих трију тела. Зато следује:

Теорема: *Моментани положаји оскулационих равнина путања трију тела (материјалних тачака), која се привлаче по произвољном закону и на која не дејствују никакове спољне силе, секу је увек у једној тачки равнине тих трију тела: у полу гравитације.*

Ако између та три тела дејствују силе које привлаче, онда та тачка лежи у троуглу што га та три тела ограничавају.

Из пређашњега следује такође и ово:

У моменту, када се посматрана три тела налазе на врховима истостранога троугла, секу се оскулационе равнине њихових путања у њиховом заједничком тежишту.

О моментанима правцима кретања. Према општој теореми, представљеној једначинама 26) дефинисан је типус, на који се даду свести моментани вектори квантитета кретања, иницијалним деловима, па према томе какови су ти иницијални услови разликујемо, као и при испитивању проблема двају тела, четири разна случаја, у којима се иницијални вектори квантитета кретања редукују на нулу, на један једини вектор, на један векторски спрег, на два укрштена вектора. Те случајеве испитиваћемо сваки за себе.

1° Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на нулу, т. ј.:

$$\mathfrak{A} = 0 \quad , \quad \mathfrak{B} = 0$$

$$\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{a} = \text{const.}$$

Тежиште система је непомично. Према познатима законима о састављању везаних вектора, задовољавају три везана вектора, која се редукују на нулу, (држе у равнотежи) овим деловима: они леже у истој равни и секу се у једној те истој тачки.[1]) Зато ће се и за време кретања моментани вектори квантитета кретања $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$ и $m_3 \mathfrak{v}_3$ сећи у једној тачки равни трију тела. Ти вектори дају и моментане правце кретања, па зато следује:

Теорема: *Редукују ли се иницијални вектори квантитета кретања трију тела на нулу, то се та три тела крећу у истој равни, а њихови моментани правци кретања секу се и истој тачки.*

Разуме се само по себи да тачка пресека тих трију права може у извесноме моменту лежати и у бесконачности; онда су моментани правци кретања паралелни.

Сукобе ли се два од посматраних трију тела, то моментани правац трећега мора пролазити кроз непомично тежиште система. Могућ је и случај, да се сва три тела у један мах сукобе, а такав се сукоб може само десити у непомичном тежишту система.

На овај се случај даде свести и случај када иницијални вектори квантитета кретања дају један једини вектор, који пролази кроз тежиште система. Јер посматрамо ли сада релативна кретања обзиром на тежиште т. ј. одаберемо ли тежиште за редукциону тачку, то је обзиром на једначине 28) и 29):

$$\mathfrak{A}_0 = 0 \qquad \mathfrak{B}_0 = 0$$

---

[1]) **Види н. пр. Appell, Traité de mécaniquc rationelle I, Paris 1902 № 107.**

Релативне путање, обзиром на тежиште, лежаће у једној равни, а моментани правци тога релативнога кретања сећи ће се у истој тачки.

Овај случај може настати распрштењем једнога тела, које се креће праволинијски једнаком брзином, у три тела, јер прије распрштења дају вектори квантитета кретања један вектор, који пролази кроз тежиште система, а тај се вектор не мења под утицајем унутарњих сила.[1])

2°. Иницијални вектори квантитета кретања даду се редуковати на један једини вектор $\mathfrak{A}$. Одаберемо ли, дакле, редукциону тачку O у прави тога вектора, то је:

$$\mathfrak{A} = m_1 \mathfrak{v}_1 + m_2 \mathfrak{v}_2 + m_3 \mathfrak{v}_3$$
$$\mathfrak{B} = 0$$

Вектор — $\mathfrak{A}$ држи се у равнотежи са векторима $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$ и $m_3 \mathfrak{v}_3$ т. ј. та четири вектора редукују се на нулу. Према познатима законима о састављању везаних вектора сачињавају праве тих вектора уједно и четири генератрисе истога система једне те исте витоперне површине (surface reglée, Regelfläche) другога реда.[2]) Положај вектора $\mathfrak{A}$ фиксиран је у простору, па зато следује:

Теорема: *Даду ли се иницијални вектори квантитета кретања трију тела редуковати на један једини вектор, тада сачињавају увек моментани правци кретања тих трију тела са непомичном правом тога вектора четири генератрисе истога система једне витоперне површине другога реда.*

---

[1]) О овоме смо случају опширније реферисали: „Особина кретања у једноме специјализираном проблему трију тела“. LXXIX књига „Гласа Српске Краљевске Академије“.

[2]) Види н. пр. Appell, Traité de mécanique rationele. I. Paris 1902. № 107.

Сече ли моментани правац кретања једнога од посматраних тела, н. пр. m_3 непомичну праву вектора $\mathfrak{A}$, онда типус од четири укрштена вектора: $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$, $m_3 \mathfrak{v}_3$ и $-\mathfrak{A}$, који се редукују на нулу, дегенерише на три вектора $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$ и $(m_3 \mathfrak{v}_3 - \mathfrak{A})$, а ови се морају сећи у истој тачки, па се зато и вектори $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$ морају сећи; витопера површина дегенерише на две равни које се секу. Зато следује:

Правило. *У моменту када правац кретања једнога од трију посматраних тела пресече везани вектор* $\mathfrak{A}$, *секу се међусобно и моментани правци кретања осталих двају тела.*

О могућности сукоба посматраних тела — која сматрамо за материјалне тачке без димензије — даду се формулисати ови закључци:

У моменту, када се два од посматраних три тела сукобе, н. пр. m_1 и m_2 дегенерише типус од четири укрштена вектора: $m_1 \mathfrak{v}_1$ $m_2 \mathfrak{v}_2$, $m_3 \mathfrak{v}_3$ и $-A$ на три $(m_1 \mathfrak{v}_1 + m_2 \mathfrak{v}_2)$, $m_3 \mathfrak{v}_3$ и $\mathfrak{A}$, а ови се морају сећи у истој тачки, па ће зато вектор $m_3 \mathfrak{v}_3$, а према томе и моментани правац кретања тела m_3 сећи вектор $-\mathfrak{A}$. Сукоб је могућ само онда ако моментани правац кретања једнога од трију тела пресече, или је паралелан везаном вектору $\mathfrak{A}$.

Не пролази ли везани вектор $\mathfrak{A}$ кроз тежиште система, тада се сва три тела не могу у исти мах сукобити, јер се тежиште система креће на једној у простору фиксираној правој $\mathfrak{N}$, паралелној вектору $\mathfrak{A}$, но коначно удаљеној од њега, па би се сукоб морао десити у исто време и у $\mathfrak{A}$ и у $\mathfrak{N}$.

Пролази ли вектор $\mathfrak{A}$ кроз тежиште система, тада се овај случај свађа на предходни.

3°. Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на један спрег:

$$\mathfrak{A} = m_1 \mathfrak{v}_1 + m_2 \mathfrak{v}_2 + m_3 \mathfrak{v}_3 = 0.$$

Горња једначина казује да је тежиште система непомично и да су вектори квантитета кретања компланарни. Зато важи за моментане правце кретања:

Теорема. *Даду ли се иницијални вектори квантитета кретања трију тела редуковати на један векторски спрег, тада су моментани правци кретања тих трију тела увек компланарни.*

4°. Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на два укрштена вектора или на један појединачни вектор и један спрег.

Посматрамо ли релативна кретања, обзиром на тежиште, то је према једначини 28):

$$\mathfrak{A} = 0$$

Овај се случај сваћа, дакле, на пређашњи, те су моментани правци релативног кретања обзиром на тежиште увек компланарни.

Како се, према пређашњем, вектори квантитета кретања могу редуковати и на два укрштена вектора $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, фиксирана у простору, то се вектори: $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$, $m_3 \mathfrak{v}_3$, $-\mathfrak{A}_1$ и $-\mathfrak{A}_2$ редукују на нулу. Према познатим законима о редукцији везаних вектора, морају свих тих пет вектора припадати једној линеарној конгруенцији.[1] Како овај случај представља општи случај кретања трију тела, а предходни су специјалне врсте његове, то следује:

Теорема: *Моментани правци кретања трију тела сачињавају са две у простору фиксиране праве увек једну линеарну конгруенцију.*

---

[1] Види н. пр. Appell, Traité de mécanique rationelle I. Paris 1902, № 107.

О брзинама приближавања. Ако се иницијални вектори квантитета кретања редукују на нулу, онда се, према пређашњем, сва три тела крећу у равни њихових иницијалних брзина. Раставимо ли векторе брзина $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ и $\mathfrak{v}_3$ тих трију тела сваку у две компоненте, које падају у праве што спајају посматрано тело са остала два, то те брзине називамо брзинама приближавања. Између величина тих брзина постоји, за време читавога кретања, једна стална релација, коју ћемо сада доказати.

У то име означимо са $\mathfrak{v}_{12}$ и $\mathfrak{v}_{13}$ компоненте брзине $\mathfrak{v}_1$; прва од њих пада у правац $m_1 - m_2$, а друга у правац $m_1 - m_3$. Аналогне компоненте брзина $\mathfrak{v}_2$ и $\mathfrak{v}_3$ означимо са $\mathfrak{v}_{21}$, $\mathfrak{v}_{23}$ и $\mathfrak{v}_{31}$, $\mathfrak{v}_{32}$, онда је:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 &= \mathfrak{v}_{12} + \mathfrak{v}_{13} \\ \mathfrak{v}_2 &= \mathfrak{v}_{23} + \mathfrak{v}_{21} \\ \mathfrak{v}_3 &= \mathfrak{v}_{31} + \mathfrak{v}_{32} \end{aligned}\right\} \quad \ldots . 54)$$

Услов, да се вектори квантитета кретања редукују на нулу, може се, по познатим законима статике, изразити и условима, да статични моменти тих вектора, обзиром на три произвољне тачке равни трију тела — које не леже у истој правој — буду равни нули.[1]

Одаберемо ли за тачке редукције момената врхове А, В и С троугла трију тела, то ће ти услови бити изражени једначинама:

$$m_2\mathfrak{v}_{23} - m_3\mathfrak{v}_{32} = 0$$
$$m_3\mathfrak{v}_{31} - m_1\mathfrak{v}_{13} = 0$$
$$m_1\mathfrak{v}_{12} - m_2\mathfrak{v}_{21} = 0$$

---

[1] Ibid № 101.

У свакој од ових једначина стоје такове брзине, које падају у исту праву, зато можемо њихове векторијелне вредности $\mathfrak{v}$ заменити са њиховима скаларним вредностима v, па добивамо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_{12}}{v_{21}} &= \frac{m_2}{m_1} \\ \frac{v_{23}}{v_{32}} &= \frac{m_3}{m_2} \\ \frac{v_{31}}{v_{13}} &= \frac{m_1}{m_3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 55)$$

Из ових једначина следује:

Теорема. *Ако се иницијални вектори квантитета кретања трију тела редукују на нулу, онда су скаларни односи брзина приближавања, које одговарају истој страници троугла тих трију тела константни и једнаки инверзном односу маса оних двају тела, која ограничавају ту страницу.*

Особине кретања у општем проблему четири тела.

Под општим проблемом четири тела разумевамо — аналогно пређашњим предпоставкама — испитивање кретања четири материјалне тачке m_1, m_2, m_3 m_4, које се привлаче или одбијају по произвољном закону и на које не дејствују никакове спољне силе.

И у овоме случају могуће је доказати неке особине кретања тих четири тела.

О моментанима правцима кретања. Саставимо ли иницијалне векторе квантитета кретања, то можемо све могуће случајеве груписати у три групе, према томе да ли се ти вектори редукују на нулу, на један једини вектор или на два вектора, (укрштена или паралелна сачињавајући један векторски спрег).

1°. Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на нулу.

Онда, према пређашњем, сачињавају праве тих вектора уједно и четири генератрисе истога система једне витоперне површине другога реда. Зато постоји и за моментане правце кретања следећа:

Теорема. *Редукују ли се иницијални вектори квантитета кретања четири тела на нулу, то сачињавају моментани правци кретања тих тела четири генератрисе истога система једне витоперне површине другога реда.*

На овај се случај даде, према пређашњим извађањима, свести и случај када иницијални вектори квантитета кретања дају један једини вектор, који пролази кроз тежиште система.

2°. Иницијални вектори квантитета кретања даду се редуковати на један једини вектор $\mathfrak{A}$.

Онда се хетераптични збир вектора $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$, $m_3 \mathfrak{v}_3$, $m_4 \mathfrak{v}_4$ и $-\mathfrak{A}$ редукује на нулу, па праве тих пет вектора сачињавају једну линеарну конгруенцију. Зато постоји за моментане правце кретања следећа

Теорема. *Даду ли се иницијални вектори квантитета кретања четири тела редуковати на један једини вектор, тада сачињавају моментани правци кретања тих четири тела са правом тога вектора једну линеарну конгруенцију.*

3°. Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на два укрштена вектора $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ или на један векторски спрег.

Ова два вектора можемо фиксирати у простору и онда када сачињавају један векторски спрег. Хетераптични збир вектора $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$, $m_3 \mathfrak{v}_3$, $m_4 \mathfrak{v}_4$, —

$\mathfrak{A}_1$ и — $\mathfrak{A}_2$ раван је нули, па зато сачињавају праве тих шест вектора, по познатим законима о састављању везаних вектора, један линеарни комплекс.[1]

Теорема. *Моментани правци кретања четири тела сачињавају са две у простору фиксиране праве увек један линеарни комплекс.*

О брзинама приближавања. Ако се иницијални вектори квантитета кретања редукују на нулу, онда се, аналогно пређашњем случају, може доказати да су односи брзина приближавања независни од времена.

У то име раставимо брзине $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$, $\mathfrak{v}_4$ посматрана четири тела у компоненте које падају у праве оштрица тетраедра што га та четири тела ограничавају. Те брзине називамо брзинама приближавања, па је, аналогно пређашњим означењима:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{v}_1 &= \mathfrak{v}_{12} + \mathfrak{v}_{13} + \mathfrak{v}_{14}\\ \mathfrak{v}_2 &= \mathfrak{v}_{23} + \mathfrak{v}_{24} + \mathfrak{v}_{21}\\ \mathfrak{v}_3 &= \mathfrak{v}_{34} + \mathfrak{v}_{31} + \mathfrak{v}_{32}\\ \mathfrak{v}_4 &= \mathfrak{v}_{41} + \mathfrak{v}_{42} + \mathfrak{v}_{43}\end{aligned}\right| \quad . \quad 56)$$

Услов, да се вектори квантитета кретања редукују на нулу, може се изразити и условима, да збир статичних момената тих вектора обзиром на сваку оштрицу једнога тетраедра мора бити раван нули.[2] Одаберемо ли за тетраедар редукције момената, тетраедар, што га посматрана четири тела ограничавају, то из горњег услова следује, да је збир статични момената горњих векора обзиром на сваки од четири рогља тога тетраедра раван нули. Из услова, опет, да је збир статичних момената обзиром на један

---

[1] Ibid № 107.

[2] Ibid № 100.

рогаљ тетраедра раван нули, следује, да се вектори који дејствују у страни тетраедра, која лежи наспрам тога рогља, морају редуковати на нулу. Употребимо ли услове, формулисане код брзина приближавања трију тела, то добивамо једначине:

$$\begin{aligned}
m_1 \mathfrak{v}_{12} - m_2 \mathfrak{v}_{21} &= 0 \\
m_2 \mathfrak{v}_{23} - m_3 \mathfrak{v}_{32} &= 0 \\
m_3 \mathfrak{v}_{31} - m_1 \mathfrak{v}_{13} &= 0 \\
m_1 \mathfrak{v}_{14} - m_4 \mathfrak{v}_{41} &= 0 \\
m_2 \mathfrak{v}_{24} - m_4 \mathfrak{v}_{42} &= 0 \\
m_3 \mathfrak{v}_{34} - m_4 \mathfrak{v}_{43} &= 0
\end{aligned}$$

У свакој од ових једначина стоје само такове брзине које падају у исту праву, зато можемо њихове векторијалне вредности $\mathfrak{v}$ заменити њиховим скаларним вредностима, па добивамо:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{v_{12}}{v_{21}} &= \frac{m_2}{m_1} \\
\frac{v_{23}}{v_{22}} &= \frac{m_3}{m_2} \\
\frac{v_{31}}{v_{13}} &= \frac{m_1}{m_3} \\
\frac{v_{14}}{v_{41}} &= \frac{m_4}{m_i} \\
\frac{v_{24}}{v_{42}} &= \frac{m_4}{m_2} \\
\frac{v_{34}}{v_{43}} &= \frac{m_4}{m_3}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 57)$$

Из горњих једначина следује:

Теорема. *Редукују ли се иницијални вектори квантитета кретања четири тела на нулу, онда су скаларни односи брзина приближавања, које одговарају истој оштрици тетраедра та четири тела, константни и једнаки инверзном количнику маса оних двају тела, која ограничавају ту оштрицу.*

(Београд 9. IX. 1910.)