

MATEMATIČKI INSTITUT – BEOGRAD

Savremena računaska tehnika i njena primena

Knjiga 2

**Pavle Pejović
Nedeljko Parezanović**

**ANALOGNI ELEKTRONSKI RAČUNARI
I NJIHOVA PRIMENA**

BEOGRAD 1972

I 22
BIBLIOTEKA
MATEMATIČKOG
INSTITUTA

MATEMATIČKI INSTITUT - BEOGRAD

Savremena računaska tehnika i njena primena

Knjiga 2

Pavle Pejović
Nedeljko Parezanović

ANALOGNI ELEKTRONSKI RAČUNARI
I NJIHOVA PRIMENA

BEOGRAD 1972

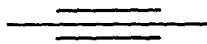
Savremena računska tehnika nalazi sve širu primenu u različitim oblastima čovečije delatnosti. Ovo za sobom povlači potrebu upoznavanja širokog kruga ljudi sa načinom rada i mogućnostima računara, kao i sa matematičkim metodama za rešavanje složenih zadataka pomoću računara. Za ovo je neophodno postojanje odgovarajuće literature. I serija Matematičkog instituta

SAVREMENA RAČUNSKA TEHNIKA I NJENA PRIMENA

ima osnovni zadatak da na potrebnom teorijskom i praktičnom nivou upozna čitaoca sa dostignućima u ovoj oblasti.

Ova publikacija nije periodična.

Rukopise opremljene za štampu slati na adresu: Matematički institut, 11000 Beograd, Knez Mihailova 35.



Redakcioni odbor — Comité de rédaction

Glavni urednik — Rédacteur en chef: *Nedeljko Parezanović*

Sekretar — Secrétaire: *Boško Jovanović*

Članovi odbora — Membres du comité:

Mirko Stojaković, Slaviša Prešić i Pavle Pejović

Tehnički urednik: *Milan Čavčić*

Izdaje: Matematički institut — Beograd, Knez Mihajlova 35

ŠTAMPA: ŠTAMPARIJA RADIO-TELEVIZIJE BEOGRAD
Batajnički put 24, telefon 607-073

MATEMATIČKI INSTITUT - BEOGRAD

Savremena računska tehnika i njena primena

Knjiga 2

**Pavle Pejović
Nedeljko Parezanović**

**ANALOGNI ELEKTRONSKI RAČUNARI
I NJIHOVA PRIMENA**

BEOGRAD 1972

I22

Zajednica za naučni rad SR Srbije učestvovala je u troškovima
izdavanje ove publikacije

PREDGOVOR

Analogni elektronski računari predstavljaju vrlo pogodna računaska sredstva za analizu matematičkih modela. Ovo se odnosi pre svega na primene kao što su analiza i sinteza sistema automatskog upravljanja, dinamičkih sistema, kao i raznih procesa. U svim ovim primenama je značajnija kvalitativna analiza modela, kao i ispitivanje uticaja pojedinih parametara, barem u prvoj fazi rada, a manje je značajna kvantitativna analiza, koja se obično sprovodi u drugoj fazi rada, kada je pogodnije koristiti cifarske računare.

Primena cifarskih elektronskih računara je vrlo široka, kako u naučno-tehničkim tako i u komercijalnim oblastima. Ovo je omogućeno vrlo brzim razvojem cifarske računaska tehnike, pri čemu ovaj razvoj nije sputavan većim tehnološkim problemima, kao što je to slučaj sa analognim elektronskim računarima. Razvoj analogne računaska tehnike je jako ograničen tehnološkim mogućnostima, preciznošću izrade, kao i preciznošću merenja, što u mnogome ograničava i primenu ovih računskih sredstava.

Da bi se iskoristile sve prednosti koje pružaju analogni i cifarski elektronski računari, grade se t.zv. hibridni (kombinovani) računari koji se sastoje praktično od analognog i cifarskog računara. Komunikacija između ovakva dva računara je omogućena preko analogno-cifarskih i cifarsko-analognih konvertora. Na ovaj način se modeliranje složenih sistema vrši korišćenjem i analognog i cifarskog računara. Najčešće se oni delovi sistema, koji se opisuju običnim diferencijalnim jednačinama, modeliraju na analognom računaru, a delovi sistema koji se opisuju algebarskim i logičnim relacijama modeliraju se na cifarskom delu hibridnog računara.

Ova knjiga je pisana sa namerom da upozna čitaoca sa osnovnim principima analognih elektronskih računara kao i sa primenom ovih računara. Knjiga se sastoji iz tri dela:

- uvodnog dela u kojem se izlažu principi rada analognih računskih sredstava i razvoj ove računске tehnike kroz istoriju,

- prvi deo knjige sadrži opis računskih elemenata i organizaciju analognih računara, a

- drugi deo knjige odnosi se na primenu analognih računara i obuhvata postavljanje, rešavanje i analizu matematičkih modela iz raznih oblasti matematike, mehanike i tehnike.

Koristimo priliku da se zahvalimo Nadi Pejović na saradnji i vodjenju korekturę, kao i saradnicima Zavoda za fiziku i matematiku Univerziteta u Novom Sadu i Matematičkog instituta u Beogradu na tehničkoj obradi rukopisa.

Beograd, 1972.

Autori

SADRŽAJ

PREGOVOR

U V O D

1. FIZIČKI OBJEKT I MATEMATIČKI MODEL	13
1.1. Fizička analogija	14
1.2. Matematička analogija	15
2. PRINCIPI ANALOGNIH RAČUNSKIH SREDSTAVA	18
2.1. Priručna analogna računska sredstva	22
- Logaritmar	22
- Nomogrami	24
- Planimetar	28
2.2. Analogni računari	32
3. ISTORIJAT ANALOGNIH RAČUNSKIH SREDSTAVA	36
3.1. Razvoj analognih računskih sredstava kroz istoriju	36
3.2. Razvoj analognih računskih sredstava u našoj zemlji	40

PRVI DEO

RAČUNSKI ELEMENTI I ORGANIZACIJA ANALOGNIH RAČUNARA

I. RAČUNSKI ELEMENTI UNIVERZALNIH ANALOGNIH RAČUNARA

1. FUNKCIJA RAČUNSKIH ELEMENATA	45
2. POTENCIOMETAR	49
2.1. Funkcija potencijometra	49
2.2. Analiza tačnosti	51
2.3. Način korišćenja potencijometra	55

3.	POJAČAVAČ KAO RAČUNSKI ELEMENT	57
3.1.	Sabirač	58
	- Funkcija sabirača	58
	- Način korišćenja sabirača	61
3.2.	Integrator	65
	- Funkcija integratora	65
	- Način korišćenja integratora	69
3.3.	Ostale mogućnosti pojačavača kao računskog elementa	73
3.4.	Analiza grešaka kod računskog pojačavača	78
	- Greške usled konačnog pojačanja	79
	- Greške usled šetanja nule (drift)	81
	- Greške usled konačne ulazne struje	83
	- Greške usled kašnjenja na višim frekvencijama	85
4.	MNOŽAČ	93
4.1.	Funkcija množača	93
4.2.	Servomnožač	94
	- Način korišćenja servomnožača	97
4.3.	Elektronski množač	102
	4.3.1. Diodni množači	102
4.4.	Korišćenje množača za delenje	104
4.5.	Korišćenje množača za obavljanje još nekih računskih operacija	106
5.	GENERATORI FUNKCIJA	108
5.1.	Generiranje funkcija pomoću pravolinijskih odsečaka	109
5.2.	Potenciometraski generatori funkcija	112
	- Naponsko podešavanje željene funkcije	112
	- Potenciometarski generator funkcija sa paralelnim promenljivim otporima	115
5.3.	Diodni generatori funkcija	118
6.	UNIVERZALNI NELINEARNI ELEKTRONSKI RAČUNSKI ELEMENT	124

7. LOGIČKI I DRUGI ELEMENTI ANALOGNIH RAČUNARA	128
7.1. Dioda	128
- Način korišćenja diode	129
7.2. Komparator	130
- Način korišćenja komparatora	131
7.3. Rezolver - razlagač	133
7.3.1. Transformacija koordinata pomoću rezolvera....	134
- Transformacija polarnih u pravouglo	
koordinate	135
- Transformacija pravougljih u polarne	
koordinate	135
- Rotacija pravouglog koordinatnog sistema...	138
7.4. Element "prati-pamti" (track-store)	141

II ORGANIZACIJA UNIVERZALNIH ANALOGNIH ELEKTRONSKIH RAČUNARA

1. UVOD	143
2. SPORI ANALOGNI RAČUNARI	145
2.1. Režimi rada sporih analognih računara	145
2.2. Postavljanje potencijometara	145
2.3. Postavljanje početnih uslova	147
2.4. Normalni rad računara - "računanje"	148
2.5. Zaustavljanje računara - "pamćenje"	149
3. REPETITIVNI ANALOGNI RAČUNARI	150
3.1. Repetitivni rad računara	150
3.2. Izbor repeticije	152
3.3. Postavljanje početnih uslova	155
4. REPETITIVNI RAD SPORIH ANALOGNIH RAČUNARA	159
5. PROGRAMIRANJE	161
6. UREDJAJI ZA OČITAVANJE REZULTATA	162
7. AUTOMATSKI IZBOR IZLAZA - SELEKTOR	166

DRUGI DEO

PRIMENA ANALOGNIH RAČUNARA

1. REŠAVANJE OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

1. HOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA	171
1.1. Matematičke osnove	171
1.2. Struktura programa	175
- Smanjenje broja računskih elemenata	180
1.3. Uvodjenje početnih uslova	182
1.4. Razmera za zavisno promenljivu	183
1.5. Razmera za nezavisno promenljivu	187
1.6. Primeri	190
1. Neprigušene harmonijske oscilacije	190
- Priprema za postavljanje na računar	191
- Odredjivanje razmera	192
2. Prigušene harmonijske oscilacije	196
- Priprema za postavljanje na računar	197
- Odredjivanje razmera	198
3. Dinamika hemijske reakcije	202
- Priprema za postavljanje na računar	203
- Odredjivanje razmera	203
2. NEHOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA	206
2.1. Matematičke osnove	206
2.2. Struktura programa	210
2.3. Generiranje funkcija nezavisno promenljive	212
- Generiranje sinusnih funkcija	213
- Generiranje eksponencijalnih funkcija	217
- Generiranje potencijalnih redova nezavisno promenljive	218
2.4. Primeri	221
1. Kretanje materijalne tačke u zemljinom gravitacionom polju (slobodan pad)	222

2. Kretanje materijalne tačke kroz otpornu sredinu.....	224
3. Sistem drugog reda sa prinudnim oscilacijama	225
3. LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SA PROMENLJIVIM KOEFICIJENTIMA	229
3.1. Matematičke osnove	229
3.2. Struktura programa	233
3.3. Množenje funkcija	234
3.4. Primeri.....	237
1. Diferencijalna jednačina prvog reda sa promenljivim koeficijentima	237
2. Mathieu-ova jednačina	239
4. NELINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE	242
4.1. Matematičke osnove	242
- Iteraciona metoda Pikara	245
- Metoda linearne aproksimacije	246
- Metoda fazne ravni.....	246
- Metoda opisne funkcije	248
4.2. Struktura programa	248
- Primer: Kretanje materijalne tačke u nelinearnoj otpornoj sredini	248
II. MODELIRANJE PRENOSNIH FUNKCIJA	
1. UVOD.....	253
2. LAPLASOVA TRANSFORMACIJA	254
2.1. Definicija Laplasove transformacije	254
2.2. Laplasova transformacija nekih funkcija	255
- Jedinična funkcija	255
- Impulsna (Dirakova) funkcija.....	256
- Sinusna funkcija	257
2.3. Laplasova transformacija funkcija pod operacijom u vremenskom domenu.....	257
- Teorema zbira.....	258
- Teorema sličnosti	258

- Teorema o kašnjenju	258
- Laplasova transformacija izvoda funkcija originala	259
- Laplasova transformacija funkcije pod znakom integrala	260
- Teorema proizvoda	261
2.4. Operacije nad Laplasovom transformacijom	261
- Izvod Laplasove transformacije	261
- Integracija Laplasove transformacije	262
- Translacija Laplasove transformacije	262
2.5. Inverzna Laplasova transformacija	262
- Inverzna transformacija zbira funkcija	263
- Heaviside-ova teorema razvoja	264
3. ANALIZA LINEARNIH SISTEMA PUTEK MODELIRANJA	269
3.1. Prenosna funkcija	269
3.2. Strukturne blok šeme složenih modela	272
4. MODELIRANJE PRENOSNIH FUNKCIJA NA ANALOGNOM RAČUNARU	275
4.1. Računski pojačavač sa pasivnim mrežama	276
4.2. Metoda uzastopne integracije	277
4.3. Metoda uvođenja nove promenljive	279
4.4. Metoda Laplasove transformacije	281
5. MODELIRANJE NELINEARNOSTI	283
5.1. Prosto ograničenje	284
5.2. Suvo trenje	287
5.3. Mrtva zona i zazor u zupčanicima	289
5.4. Kašnjenje	292
5.5. Približno diferenciranje	296
5.6. Primer: Oscilacije sa suvim trenjem	300
6. MODELIRANJE SLOŽENIH SISTEMA	304
6.1. Modeliranje prostih prenosnih funkcija	304
6.2. Modeliranje elemenata nekih procesa	309
6.3. Modeliranje složenih sistema	311
LITERATURA	317

U V O D

1. FIZIČKI OBJEKT I MATEMATIČKI MODEL

U tehničkoj praksi, kod projektovanja raznih konstrukcija i uređaja, neophodno je da se izvrše prethodne analize i proračuni, pri čemu se koristi matematički aparat. U raznim naučnim i drugim istraživanjima matematika predstavlja neophodan alat u radu istraživača. Međutim, matematika predstavlja apstraktnu naučnu disciplinu, i primena matematičkih metoda u ispitivanju fizičkih objekata, predpostavlja u većoj ili manjoj meri idealizovanu sliku objekta.

Pod fizičkim objektima podrazumevaćemo kako tehničke konstrukcije, tako i razne pojave i procese iz realnog sveta. Pri ovome, za nas je posebno interesantan onaj prilaz izučavanju fizičkih objekata koji se zasniva na korišćenju matematičkog aparata. Potrebno je odmah naglasiti da su fizički objekti najčešće tako složeni da ih matematičke formule ne mogu u potpunosti opisati. Međutim, sa određenog stanovišta matematičke formule mogu dovoljno tačno opisati neke osobine fizičkog objekta. Skup matematičkih relacija, koje opisuju ponašanje fizičkog objekta naziva se matematički model fizičkog objekta. Prema tome, matematički model može da pruži samo idealizovanu sliku posmatranog fizičkog objekta. Međutim, izučavanje fizičkog objekta odnosi se, najčešće, samo na određene osobine objekta, pa prema tome i matematički model treba da opisuje samo one osobine objekta koje se žele izučavati. Zato je prvi i najvažniji zadatak prilikom primene matematičkih modela, da se isti postavi u onom obliku u kojem će najbolje opisivati objekt u smislu istraživanja.

Ispitivanje fizičkih objekata putem analize osobina matematičkog modela svakako nije jedini put istraživanja. Moguće je pretpostaviti da sva potrebna ispitivanja istraživač izvrši na samom fizičkom objektu. Dakle, ako je u pitanju tehnički objekt ili uređaj, onda se misli na njegovu izgradnju i ispitivanje radi utvrđivanja dobrih i loših osobina. U tehničkoj praksi ovo je poznato kao ispitivanje na prototipu. Ovakav način ispitivanja fizičkih objekata u većini slučajeva zahteva velika investiciona ulaganja, duge vremenske rokove izrade prototipa,

a često je skopčan sa ozbiljnim opasnostima u toku istraživanja.

Kao primer ovakvog načina ispitivanja može se navesti ranija izgradnja novih tipova aviona. Avion se ranije gradio po zamisli konstruktora, i kao prototip ispitivao. Pored toga što se ulagao veliki rad oko izgradnje prototipa, ispitivanja ovakvih aviona često su se i katastrofalno završavala po život pilota.

Istraživanja preko matematičkih modela, međutim, pored toga što nemaju nedostatke ovakvog načina ispitivanja, pružaju i znatno veće mogućnosti u izgradnji optimalnih konstrukcija, kako u pogledu utroška materijala, tako i u tehničkim karakteristikama konstrukcije.

1.1. Fizička analogija

Za ispitivanje osobina fizičkog objekta često se koristi izgradnja fizičkog modela objekta koji se ispituje. Pod fizičkim modelom podrazumeva se izgradnja fizičkog objekta sličnog objektu koji se ispituje, ali sa umanjenim dimenzijama. Na ovaj način susve fizičke veličine, koje se pojavljuju kod fizičkog objekta iste prirode i kod modela. Za izgradnju fizičkih modela nije potrebno postavljanje matematičkih modela, već uspostavljanje fizičke analogije između objekta i modela. Ovakav način ispitivanja fizičkih objekata, u nekim slučajevima ima značajne prednosti nad matematičkim modelom, jer na fizičkom modelu mogu da se ispituju i one fizičke pojave koje nisu mogle biti obuhvaćene matematičkim relacijama.

Izgradnja fizičkog modela objekta često se koristi u avionskoj industriji. Kako je ranije rečeno, vidi se da izgradnja prototipa novih avionskih konstrukcija i njihovo ispitivanje ima znatne nedostatke. Zato se pribegava izgradnji modela aviona, koji zadržavaju gotovo sve osobine realnog aviona. Ovakvi se modeli ispituju u specijalnim aerodinamičkim tunelima, gde se obezbeđuje vazdušno strujanje i svi ostali uslovi, tako da se dobija uvid u ponašanje buduće konstrukcije u vazduhu.

Na sličan način, putem izgradnje električnih modela, mogu se ispitivati osobine električnih elemenata, pa i celokupne elek-

trične mreže. Isto tako veliki hidrosistemi često se ispituju putem izgradnje modela, na kojima se proučavaju razni uticaji oblika brana, nagiba zemljišta, itd.

Iako fizička analogija omogućuje ispitivanje fizičkog objekta na modelu, koji je znatno lakši i jeftiniji za izgradnju i ispitivanje nego prototip objekta, ipak ovaj način ispitivanja ne nalazi veću primenu. Najveći nedostatak ovakvog načina ispitivanja svakako je nemanipulativnost kod promena u konstrukciji. Za svaku novu varijantu fizičkog objekta mora se graditi odgovarajući fizički model.

1.2. Matematička analogija

Odavno je uočena činjenica da se različiti fizički objekti mogu opisivati istim matematičkim modelom. Između dva fizička objekta A i B, koji imaju iste matematičke modele, kaže se da postoji matematička analogija. Međutim, strožije postavke matematičkih modela, a to znači dublje izučavanje fizičkih objekata, najčešće pokazuje da različiti fizički objekti imaju slične matematičke modele, koji se mogu do izvesne tačnosti smatrati istovetnim. Istovetnost matematičkih modela objekata A i B pruža mogućnost da jedan od fizičkih objekata bude korišćen za analizu matematičkog modela drugog objekta. Fizički objekt A, koji se koristi za analizu matematičkog modela objekta B, sa kojim ima sličan matematički model, naziva se analogni model ili analogon objekta B.

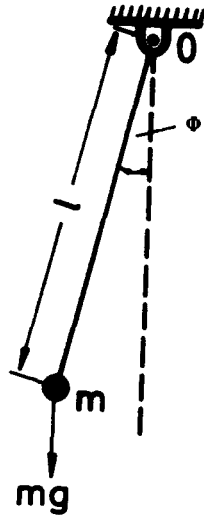
Prema tome, između fizičkog objekta koji se ispituje i analognog modela postoji matematička analogija. Fizičke veličine u objektu i analognom modelu po pravilu nisu iste prirode kao što je to bio slučaj kod fizičke analogije. Matematička analogija se sastoji u sličnosti matematičkih modela analogona i fizičkog objekta.

Radi ilustracije matematičke analogije između fizičkih objekata dat je primer matematičkog klatna i oscilatornog električnog kola. Ako se masa matematičkog klatna označi sa m , a sa l , rastojanje od težišta mase do tačke vešanja O (sl.1.2.1), ona je matematički model, koji opisuje kretanje klatna, tj.

ugao ϕ u funkciji vremena t , dat jednačinom:

$$J \frac{d^2\phi}{dt^2} + mgl \sin\phi = 0 \quad (1.2.1)$$

sa početnim uslovima: $\phi'(0) = \phi'_0$ i $\phi(0) = \phi_0$.



Sl. 1.2.1. Matematičko klatno

U jednačini (1.2.1) sa J je označen moment inercije u odnosu na osu obrtanja. Za kretanje u blizini ravnotežnog položaja može se uzeti da je $\sin\phi \approx \phi$, pa jednačina (1.2.1) dobija oblik:

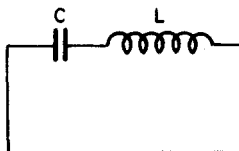
$$J \frac{d^2\phi}{dt^2} + mgl \phi = 0 \quad (1.2.2)$$

Ako se uzme električno oscilatorno kolo prikazano na sl. 1.2.2, koje se sastoji od kondenzatora kapaciteta C i induktivnog kalema inuktivnosti L vezanih na red, tada matematički model koji opisuje promenu električnog punjenja q kondenzatora u vremenu, dat je jednačinom:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (1.2.3)$$

sa početnim uslovima: $q'(0) = q'_0$ i $q(0) = q_0$.

Poredjenjem diferencijalnih jednačina (1.2.2) i (1.2.3), vidi se



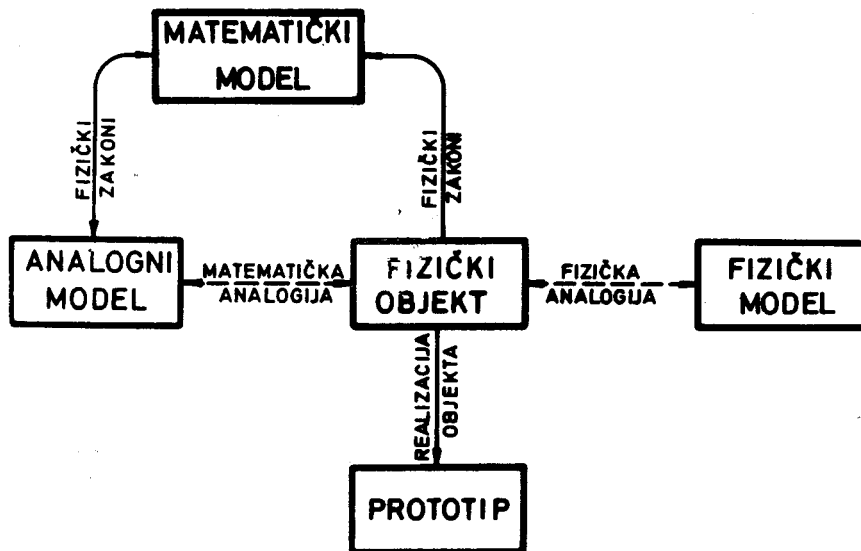
Sl. 1.2.2. Oscilatorno električno kolo

da se one razlikuju samo u konstantama. Prema tome, mehaničke pojave vezane za kretanje matematičkog klatna u okolini ravnotežnog položaja mogu se proučavati na električnom modelu (sl. 1.2.2). Isto tako i električne pojave u električnom kolu sa kapacitetom i induktivnošću vezanim na red mogu biti izučavane na mehaničkom kretanju matematičkog klatna u okolini ravnotežnog položaja.

Na sl. 1.2.3 šematski su prikazani neki mogući načini ispitivanja i proučavanja fizičkih objekata. Na šemi su prikazani prilazi u izučavanju fizičkih objekata koji se najčešće koriste u savremenoj naučno-tehničkoj praksi.

Fizički objekt, koji je predmet izučavanja, obično preustavlja idejnu zamisao konstruktora nekog budućeg tehničkog uređaja. Jedan način provere osnovne ideje je direktna realizacija objekta, kao prototipa. Pored ovoga načina, može se za buduću konstrukciju graditi fizički model i sva potrebna ispitivanja vršiti na takvom fizičkom modelu, odnosno maketi. Tada se govori o fizičkoj analogiji između objekta i modela. Izučavanjem fizičkih zakona, koji važe u posmatranom fizičkom objektu, može se doći do matematičkog modela koji opisuje objekt u smislu istraživanja. Kako su sve interesantne osobine objekta implicitno sadržane u matematičkom modelu, postavlja se problem njiho-

vog eksplicitnog izražavanja, a posebno kada su u pitanju složeni matematički modeli. Dragocenu pomoć istraživaču ovde pru-



Sl. 1.2.3. Načini ispitivanja osobina fizičkih objekata žaju analogni modeli, tj. fizički objekti čije se ponašanje opisuje sličnim (nekada identičnim) matematičkim modelom sa onim koji se želi analizirati.

Jasno je da je teško pretpostaviti da će se za svaki fizički objekt, koji se proučava, naći odgovarajući analogon, na kojem će se analizirati matematički model objekta. Medjutim, značaj istraživanja preko analognih modela dobija punu vrednost samo ako je moguće relativno lako izgraditi analogni model fizičkog objekta. Ovo je moguće učiniti pogodnim povezivanjem elemenata analognog računara, što je i predmet izučavanja ove knjige.

2. PRINCIPI ANALOGNIH RAČUNSKIH SREDSTAVA

Ideja analognih računskih sredstava sastoji se u iznalaženju takvih fizičkih objekata, koji će moći da se koriste za analizu matematičkih modela, pomoću kojih su isti objekti matematički opisani. Prema tome, principi rada analognih računskih

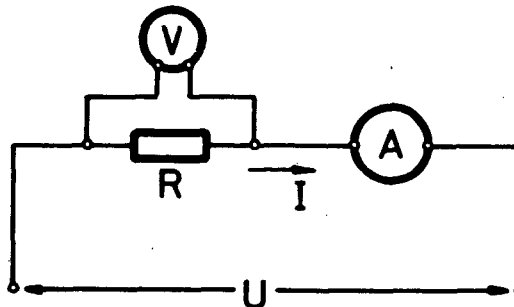
uredjaja zasnovani su na fizičkim zakonima koji važe za onaj fizički objekt koji se koristi u računске svrhe.

Sledeća dva primera ilustruju analogni način računanja:

Primer 1. Predpostavimo da je potrebno da se izvrši množenje dve veličine x i y . Prema tome, zadati matematički model je:

$$z = x \cdot y \quad (2.1)$$

Iz elektrotehnike je poznato da za električno kolo, prikazano na slici 2.1., važi Omov zakon, koji daje vezu između napona U ,



Sl. 2.1. Električno kolo struje I , i otpora R , tako da je

$$U = R \cdot I \quad (2.2)$$

Kako električno kolo na sl. 2.1. ima matematički model (2.2) koji je identičan sa matematičkim modelom (2.1), samo što oznake u modelu (2.1) predstavljaju matematičke veličine, a u modelu (2.2) fizičke veličine, to električno kolo na sl. 2.1. može da predstavlja analogni uređaj za množenje.

Primer 2. Neka je zadat matematički model

$$y = \sqrt[3]{x} \quad (2.3)$$

Neka je levak od lima u obliku kupe (sl. 2.2.) izradjen tako da je odnos poluprečnika otvora levka i odgovarajuće visine

$$\frac{r}{h} = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \quad (2.4)$$

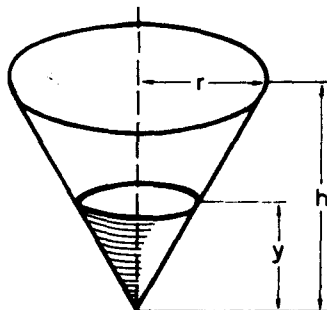
Kako je zapremina kupe:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (2.5)$$

smenom (2.4) u (2.5) dobija se:

$$h = \sqrt[3]{V} \quad (2.6)$$

Prema tome, ako se naspe $x[\text{cm}^3]$ tečnosti u levak, onda će visina tečnosti u levku u cm predstavljati broj y prema relaciji (2.3), a na osnovu (2.6).



Sl. 2.2. Levak za izračunavanje kubnog korena

Iz ovih se primera jasno vide osnovne osobine analognog računanja. Naime, za dati matematički model, koji je predmet izučavanja, nalazi se odgovarajući fizički objekt, čije se ponašanje opisuje sličnim ili identičnim matematičkim modelom kao što je i onaj koji se izučava.

Svaka matematička veličina u matematičkom modelu ima svoju predstavu u analognom modelu, kao odgovarajuća fizička veličina. Prema tome, neke od fizičkih veličina odgovaraju poznatim veličinama, a neke nepoznatim veličinama u matematičkom modelu. Davanjem odgovarajućih vrednosti prvima, posredstvom fizi-

čkih zakona, dobijaju se druge fizičke veličine, koje ustvari predstavljaju tražena rešenja matematičkog modela.

Pogledajmo kakva je tačnost računanja pomoću analognih računskih uređajaja. Osnovni zahtev za tačnost analognih računskih uređajaja je pre svega identičnost matematičkog modela koji se analizira, sa modelom uređajaja. Međutim, kako analogni uređaj predstavlja fizički objekt kod kojeg postoje mnogi uticaji na fizičke veličine, koje služe za računanje, a koji često ne mogu da budu obuhvaćeni matematičkim modelom, to je za analogne računске uređajaje veoma važno da se ispituju svi ovi uticaji na matematički model. Drugim rečima, kako je između fizičkog objekta i analognog modela uspostavljena matematička analogija, to ispitivanje razlika u matematičkim modelima objekta i analogona je ustvari ispitivanje stepena uspostavljene analogije. Ako je stepen analogije veliki, razlike u matematičkim modelima su male.

Tako naprimer, tačnost rezultata u prvom primeru vezana je za tačnost merenja napona, struje i otpora. Priključivanje instrumenata za merenje na sl. 2.1. smanjuje tačnost množenja po formuli (2.2), jer u ovoj formuli nije uzet u obzir (unutrašnji) otpor instrumenata. Sa druge strane tačnost je ograničena i mogućnošću preciznog čitanja izmerenih veličina sa skala instrumenata.

U drugom primeru tačnost je ograničena preciznošću izrade levaka, kao i merenja zapremine i visine tečnosti.

Prema tome, povećanje tačnosti analognog računskog uređajaja vezano je i za preciznost izrade samog uređajaja.

Iz istih se primera vidi još jedna bitna osobina analognih računskih sredstava. Ova osobina je brzina računanja, koja je takva, da praktično čim se postave vrednosti za poznate fizičke veličine trenutno se dobija i rezultat. U primeru 1., kada se postavi željena vrednost otpora R i uspostavi struja I , istog trenutka postoji i rezultat U . U primeru 2., čim se uspe odgovarajuća zapremina tečnosti u levak, trenutno se raspoložuje rezultatom, pa je potrebno samo konstatovati visinu teč-

nosti u levku.

Prema tome, kod analognih računskih sredstava ne postoji proces računanja, već proces uspostavljanja fizičkih veličina prema fizičkim zakonima koji važe za odgovarajući uređaj.

Prema računskim mogućnostima analognih računskih sredstava, kao i prema načinu korišćenja, analogna računská sredstva mogu se podeliti u dve velike grupe i to (sl. 2.2.1):

- priručna analogna računská sredstva, i
- analogne računare.

Priručna analogna računská sredstva su specijalno napravljena da olakšaju računanje po određenim matematičkim formulama koje se često ponavljaju. Ovoj grupi pripadaju logaritmar i nomogrami. I jedno i drugo sredstvo kao fizičke veličine koriste dužinu na lenjiru (logaritmar) ili na dijagramu (nomogram), a tačnost im je za veliki broj primena zadovoljavajuća.

Analogni računari su složenija računská sredstva koja automatski mogu da obave izvestan broj različitih matematičkih operacija. Obično se sastoje od više računskih elemenata (komponenata), koji se međusobno mogu na različite načine povezivati. Na ovaj način mogu se analizirati vrlo složeni matematički modeli. Savremeni analogni računari pre svega su pogodni za rešavanje običnih diferencijalnih jednačina, kao i sistema ovih jednačina. Pored toga, mogu se rešavati algebarske, parcijalne i integralne jednačine, kao i drugi složeni matematički modeli. Razni tipovi računara koriste razne fizičke veličine, kao napone, struje, mehanička kretanja itd., kojima se pridružuju odgovarajuće veličine u matematičkom modelu.

2.1. Priručna analogna računská sredstva

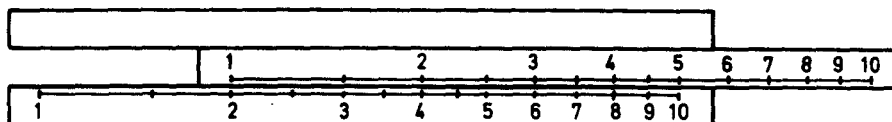
Od priručnih analognih računskih sredstava ovde će ukratko biti objašnjeni osnovni principi računanja pomoću logaritmara, nomograma i planimetra. Ova računská sredstva se i danas veoma uspešno koriste za brza i priručna računanja u onim problemima koji se mogu rešavati sa ograničenom tačnošću, koju ova sredstva mogu da obezbede.

Logaritmar

Ovde će biti objašnjeni samo osnovni principi na kojima je zasno-

van rad logaritmara.

Logaritmar je sastavljen od nepokretnog dela i pokretnog lenjira koji se može pomerati duž nepokretnog dela (sl. 2.1.1). Na oba su dela nanese iste logaritamske skale. Osnovne operacije na logaritmaru su množenje i deljenje brojeva.



Sl. 2.1.1. Skale logaritmara

Množenje dva broja na logaritmaru vrši se sabiranjem dužina na nepokretnom delu i pokretnom lenjiru. Dužine koje se sabiraju srazmerne su logaritmima brojeva naznačenih na logaritamskoj skali. Matematički model koji se želi realizovati pomoću logaritmara, u slučaju operacije množenja je

$$z = x \cdot y \quad (2.1.1)$$

Logaritmovanjem (2.1.1) dobija se

$$\log z = \log x + \log y \quad (2.1.2)$$

Ako se početak pokretnog lenjira postavi naspram tačke, koja odgovara dužini $\log x$ na nepokretnom delu logaritmara, tada će naspram tačke, koja odgovara dužini $\log y$ na pokretnom lenjiru, na nepokretnom delu stajati tačka z za koju važi (2.1.2). Kako su na skali logaritmara nanese brojevi x , y , i z , to se mogu direktno čitati rezultati množenja.

Da bi na primeru prikazali rad logaritmara, uzmimo da treba izračunati proizvod

$$z = 2 \cdot 4$$

Na nepokretnoj skali se nadje broj 2 i pomakne pokretni lenjir tako da početak skale lenjira bude naspram broja 2 na nepokretnoj skali. Sada se na skali pokretnog lenjira pronadje broj 4, a broj na nepokretnoj skali koji se nalazi naspram broja 4 skale pokretnog lenjira predstavlja rezultat, u ovom primeru broj 8. Dužina nepokretnog dela između brojeva 1 i

2 predstavlja u određenoj razmeri $\log 2$, dužina između brojeva 1 i 4, na skali pokretnog lenjira, predstavlja u istoj razmeri $\log 4$. Ako je k koeficijent razmere na obe skale, onda naspram broja 4 pokretnog lenjira na nepokretnoj skali je $\log 8$ u istoj razmeri, pa sledi:

$$k \cdot \log 8 = k \cdot \log 2 + k \cdot \log 4$$

odakle se antilogaritmovanjem dobija:

$$8 = 2 \cdot 4$$

Na sličan način, pomoću istih skala, može se obavljati i deljenje, samo što sada treba oduzimati dužine na nepokretnom i pokretnom delu logaritmara. Na logaritmaru je moguće obavljati i niz drugih matematičkih operacija, o čemu se ovde neće posebno govoriti.

Nomogrami

Nomogram je grafički prikaz funkcionalnih zavisnosti između promenljivih veličina. Oblast matematike koja se bavi proučavanjem i izradom nomograma naziva se nomografija. Nomogram je ustvari crtež na kojem su funkcionalne zavisnosti između nekoliko promenljivih veličina prikazane na pogodan način, pomoću dužina, sa skalama, tako da se može približno veoma brzo i lako izračunati jedna od veličina, kada su ostale zadate. Drugim rečima, funkcionalna zavisnost između matematičkih veličina na nomogramu je određena položajem tačaka na funkcijskim skalama.

U datom primeru potrebno je konstruisati nomogram za matematički model oblika

$$f_3(w) = \frac{f_2(v)}{f_1(u)} \quad (2.1.3)$$

Ovakav matematički model može se rešavati na tzv. Z nomogramu, koji je sastavljen od dve paralelne prave linije a i b , presečene trećom pravom linijom c (sl. 2.1.2).

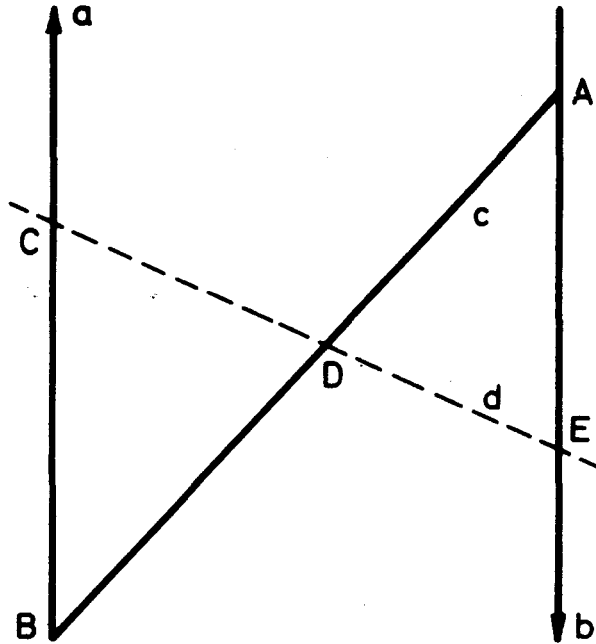
Na pravoj a , od tačke B , nanesu se vrednosti funkcije $f_1(u)$, a na pravoj b , od tačke A , vrednosti $f_2(v)$. Kroz tačke A i B povuče se prava c , i izaberu se tačke C i E , na pravama a odnosno b , tako da prava d preseca pravu c u tački D .

Polazeći od tačaka A i B nanose se vrednosti odgovarajućih funkcija u određenim razmerama, tako da je:

$$\left. \begin{aligned} \overline{AE} &= m_2 f_2(v) \\ \overline{BC} &= m_1 f_1(u) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4)$$

gde su m_1 i m_2 koeficijenti razmere.

Sada je potrebno vrednosti funkcije $f_3(w)$ odrediti i naneti na pravu c, počevši od tačke B, tako da relacija (2.1.3) bu-



Sl. 2.1.2. Z - nomogram

de zadovoljena za svaki par vrednosti $f_1(u)$ i $f_2(v)$. Može se geometrijski pokazati kako se određuju i nanose ove vrednosti.

Iz sličnosti trouglova ADE i BCD sledi da je:

$$\overline{BC} : \overline{AE} = \overline{BD} : (\overline{AB} - \overline{BD}) \quad (2.1.5)$$

Zamenom iz (2.1.4) u (2.1.5), te nakon sredjivanja dobija se

$$\frac{f_2(v)}{f_1(u)} = \frac{m_1 \cdot \overline{AB} - \overline{BD}}{m_2 \cdot \overline{BD}} \quad (2.1.6)$$

Kako je leva strana jednačine (2.1.6), prema (2.1.3) ustvari funkcija $f_3(w)$, to je

$$f_3(w) = \frac{m_1 \overline{AB} - \overline{BD}}{m_2 \overline{BD}} \quad (2.1.7)$$

odakle se dobija da je

$$\overline{BD} = \frac{m_1}{m_1 + m_2 f_3(w)} \cdot \overline{AB} \quad (2.1.8)$$

Prema tome, funkcijske skale na pravama a i b (sl. 2.1.2) nanose se počevši od tačkaka B , odnosno A , prema relacijama (2.1.4), dok se funkcijska skala na duži \overline{AB} (prava c) nanosi prema relaciji (2.1.8) počevši od tačke B .

Da bismo objasnili upotrebu nomograma konstruišimo najpre Z -nomogram za funkcije $f_1(u) = u$, $f_2(v) = v$ i $f_3(w) = w$. Matematički model (2.1.3) svodi se sada na obično deljenje, tj.

$$w = \frac{v}{u} \quad (2.1.9)$$

Predpostavimo da se promenljive u i v kreću u opsegu $0 < u \leq 10$, i $0 < v \leq 10$. Odredimo najpre koeficijente razmere m_1 i m_2 . Ako se uzme da je $u = 10$ i $\overline{BC} = 10$ cm, kao i $v = 10$ i $\overline{AE} = 10$ cm, onda prema (2.1.4) sledi:

$$m_1 = \frac{\overline{BC}}{u} = 1 \text{ cm},$$

i

$$m_2 = \frac{\overline{AE}}{v} = 1 \text{ cm}.$$

Na sličan način iz relacije (2.1.8) sledi da je

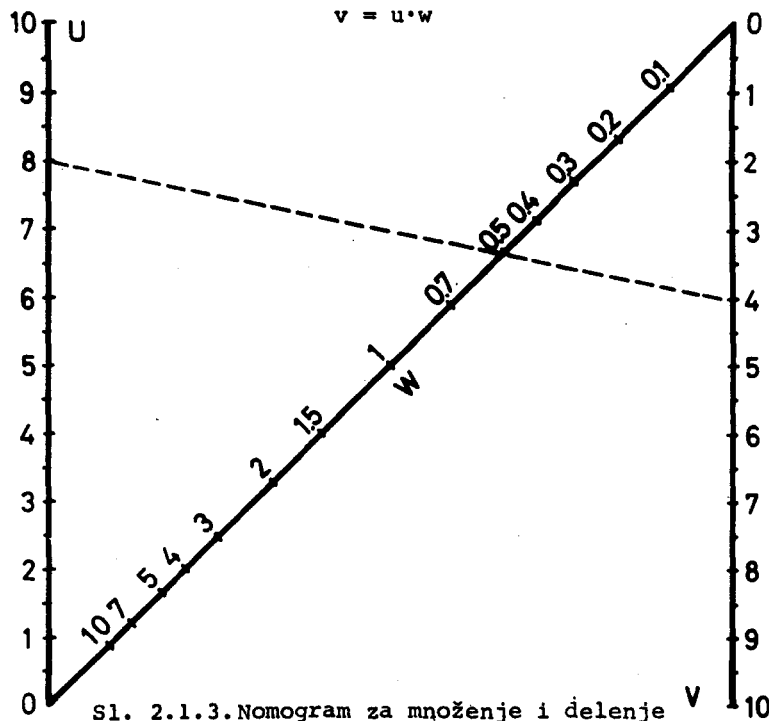
$$\overline{BD} = \frac{\overline{AB}}{1 + w} \quad (2.1.10)$$

Ako se usvoji da razmak izmedju pravih za u i v iznosi 10 cm, onda će duž \overline{AB} biti $10\sqrt{2}$ cm, (jer je najbolje da duž \overline{AB} leži pod 45° u odnosu na prave za u i v), te se jednačina (2.1.10) može napisati u obliku:

$$\overline{BD} = \frac{\sqrt{200}}{1 + w} \quad (2.1.11)$$

Prema tome, nomogram koji odgovara relaciji (2.1.9) ima izgled kao na slici 2.1.3. U sledećem primeru biće objašnjeno korišćenje nomograma (sl. 2.1.3). Neka treba odrediti vrednost količnika

4:8, onda na skali za v nadje se broj 4, a na skali za u broj 8. Povlačenjem prave kroz ove dve tačke, koja seče pravu w , dobija se tačka, na pravoj w , koja predstavlja traženo rešenje, tj. $w = 0,5$. Isti nomogram može da služi i za obavljanje operacije množenja, jer iz relacije (2.1.9) sledi da je



Kako kod logaritmara tako i kod nomograma tačnost je ograničena tačnošću nanošenja odgovarajućih logaritamskih, odnosno funkcijskih skala. Međutim, makako da su skale tačno nacrtane, tačnost sa kojom se računa ograničena je mogućnošću postavljanja početnih podataka na skalama, a takodje i mogućnošću čitanja rezultata sa skale logaritmara odnosno nomograma, Bez obzira na ova ograničenja, koja su vezana za upotrebu logaritmara i nomograma, oba se računski sredstva široko koriste u računski svrhe, s obzirom da se sa njima lako manipuliše i da su jeftina. (Detaljnija objašnjenja o konstrukciji i korišćenju logaritmara i nomograma čitalac može da nadje u literaturi).

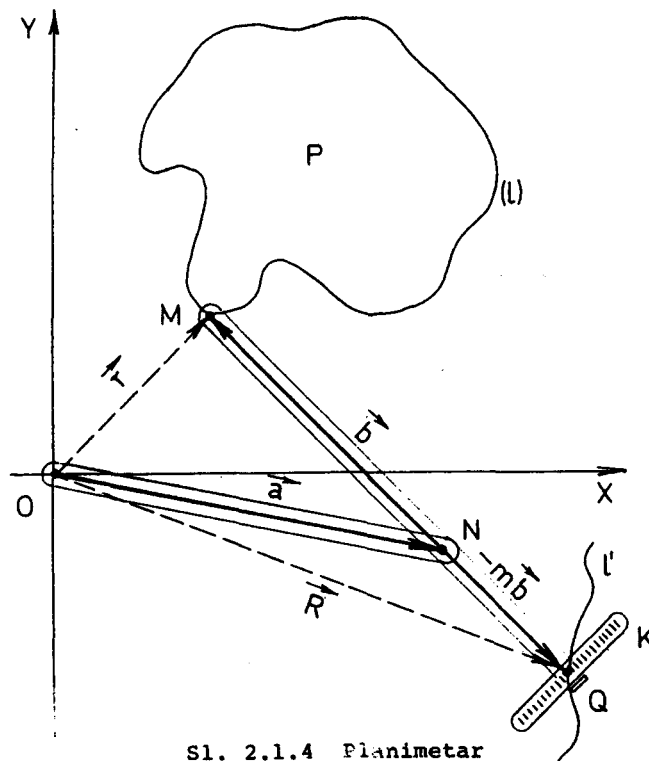
Planimetar

Planimetar je analogno računsko sredstvo koje služi za izračunavanje vrednosti ravne površine P oivičene zatvorenom krivom linijom (ℓ) . Ustvari, pomoću planimetra se izračunava krivolinijski integral po zatvorenoj krivoj liniji (ℓ) , tj.

$$P = \frac{1}{2} \oint_{(\ell)} (x \cdot dy - y \cdot dx) = \frac{1}{2} \oint_{(\ell)} \rho^2 d\theta. \quad (2.1.12)$$

Planimetar je konstruisan tako da je poteg \vec{r} tačke M , koja leži na krivoj (ℓ) realizovan pomoću sistema od dve poluge spojene osovinom u tački N tako da se mogu okretati jedna u odnosu na drugu, (sl. 2.1.4). Sa slike se vidi da je

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \quad (2.1.13)$$



Sl. 2.1.4 Planimetar

gde su \vec{a} i \vec{b} vektori duž poluga ON i NM . Poluga ON ima u tački O jedan vrh, koji je zaboden u stalnu tačku O van površine P ,

a poluga MN ima vrh u tački M, koji se povlači po krivoj liniji (l). Pored toga, poluga MN produžena je do tačke Q. Produžen deo NQ, poluge MN, može se vektorski označiti kao vektor $-m\vec{b}$, gde je $m > 0$. U tački Q na ovoj poluzi nalazi se kotur K sa skalom, koji se može kotrljati po ravni crteža, jer mu je osovina baš poluga MNQ. Na taj način poteg \vec{R} tačke Q je vektor

$$\vec{R} = \vec{a} - m\vec{b} \quad (2.1.14)$$

Vektori \vec{R} i \vec{r} su samo zamišljeni dok su vektori \vec{a} , \vec{b} i $-m\vec{b}$ realizovani sistemom poluga, od kojih je jedna (ON) fiksirana u tački O, a druga (MNQ) svojim vrhom u tački M opisuje zatvorenu krivu (l). Poluge su medju sobom spojene osovinom u tački N, upravnom na ravan crteža, tako da se mogu oko nje obrtati jedna u odnosu na drugu.

Za površinu P, prema (2.1.12) važi

$$2P = \oint_{(l)} (x \cdot dy - y \cdot dx) = \oint_{(l)} [\vec{r} \times d\vec{r}] \cdot \vec{k} \quad (2.1.15)$$

Kada se (2.1.13) zameni u (2.1.15) dobija se

$$\begin{aligned} 2P &= \oint_{(l)} [(\vec{a} + \vec{b}) \times (d\vec{a} + d\vec{b})] \cdot \vec{k} = \\ &= \oint_{(l)} (\vec{a} \times d\vec{a} + \vec{b} \times d\vec{a} + \vec{a} \times d\vec{b} + \vec{b} \times d\vec{b}) \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

gde je

\vec{k} - jedinični vektor sa koordinatama (0,0,1),

\vec{r} - poteg sa koordinatama (x,y,0),

$d\vec{r}$ - vektor sa koordinatama (dx,dy,0).

Kad vrh poluge, tačka M, klizi duž krive (l) tačka Q opisuje krivu (l') (sl. 2.1.4), čija je parametarska jednačina (2.1.14).

Pri elementarnom pomeranju tačke M duž krive (l), kotur K u tački Q se kotrlja po ravni crteža i meri samo onu komponentu vektora $d\vec{R}$, koja je upravna na vektor \vec{b} . Prema tome, na skali kotura K očitava se samo dužina luka

$$ds = |d\vec{R}| \sin \alpha \quad (2.1.17)$$

gde je

ds - priraštaj ugla obrtanja kotura K,

$|\vec{dR}|$ - intenzitet diferencijala luka krive (ℓ'), i
 α - ugao između vektora \vec{R} i \vec{b} .

Relacija (2.1.17) može se pisati u obliku

$$ds = \frac{1}{|\vec{b}|} \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{dR}| \sin \alpha = \frac{1}{|\vec{b}|} (\vec{dR} \times \vec{b}) \cdot \vec{k} \quad (2.1.18)$$

Ukupno očitavanje na koturu, prema (2.1.18), biće

$$S = \oint_{(\ell)} ds = \frac{1}{|\vec{b}|} \oint_{(\ell)} (\vec{dR} \times \vec{b}) \cdot \vec{k} = \frac{1}{|\vec{b}|} \oint_{(\ell)} [(\vec{d\vec{a}} - m \vec{d\vec{b}}) \times \vec{b}] \cdot \vec{k} \quad (2.1.19)$$

ili

$$S = - \frac{1}{|\vec{b}|} \oint_{(\ell)} (\vec{b} \times \vec{d\vec{a}} - m \vec{b} \times \vec{d\vec{b}}) \cdot \vec{k} \quad (2.1.20)$$

Obrazujemo sada jednačinu

$$2(P + |\vec{b}| S) = \oint_{(\ell)} (\vec{a} \times \vec{d\vec{a}}) \cdot \vec{k} + \oint_{(\ell)} (\vec{a} \times \vec{d\vec{b}}) \cdot \vec{k} - \\ - \oint_{(\ell)} (\vec{b} \times \vec{d\vec{a}}) \cdot \vec{k} + (1+2m) \oint_{(\ell)} (\vec{b} \times \vec{d\vec{b}}) \cdot \vec{k} \quad (2.1.21)$$

Pošto je

$$\oint_{(\ell)} (\vec{a} \times \vec{d\vec{a}}) \cdot \vec{k} = 0 \quad (2.1.22)$$

jer \vec{a} kao vektor stalnog intenziteta, polazeći od određenog početnog položaja mora, kad M opiše celu krivu (ℓ), da se vrati u isti početni položaj, pa je površina koju on opisuje jednaka nuli. Ustvari on prelazi preko ove površine dva puta - jednom u pozitivnom a drugi put u negativnom smeru. Isto važi i za drugi član, tj.

$$\oint_{(\ell)} (\vec{b} \times \vec{d\vec{b}}) \cdot \vec{k} = 0 \quad (2.1.23)$$

jer vektor \vec{b} se može zamisliti, kao i \vec{a} , da je povučen iz stalne tačke, pa kad se vrati u početni položaj opisuje ukupnu površinu jednaku nuli.

Za sledeći integral važi da je

$$\oint_{(\ell)} (\vec{a} \times \vec{d\vec{b}} - \vec{b} \times \vec{d\vec{a}}) \cdot \vec{k} = \oint_{(\ell)} d \left[\vec{a} \times \vec{b} \right] \cdot \vec{k} = 0 \quad (2.1.24)$$

jer je to integral totalnog diferencijala, koji po zatvorenoj

krivoj mora dati vrednost nula.

Prema tome, iz (2.1.21), je

$$P = - b \cdot s \quad (2.1.25)$$

gde je b intenzitet vektora \vec{b} .

Na taj način, površina P proporcionalna je luku s , a kako se ovaj meri kotrljanjem kotura K po ravni, to se i praktično merenjem dužine luka dobija površina.

Ako je tačka O unutar krive (l) biće

$$\frac{1}{2} \oint_{(l)} (\vec{a} \times d\vec{a}) \cdot \vec{k} = a^2 \pi \quad (2.1.26)$$

$$\frac{1}{2} \oint_{(l)} (\vec{b} \times d\vec{b}) \cdot \vec{k} = b^2 \pi \quad (2.1.27)$$

pa je, prema (2.1.21), i

$$2(P + bS) = 2a^2 \pi + 2(1 + 2m) \cdot b^2 \pi \quad (2.1.28)$$

pa je površina data izrazom

$$P = A - bS \quad (2.1.29)$$

gde je

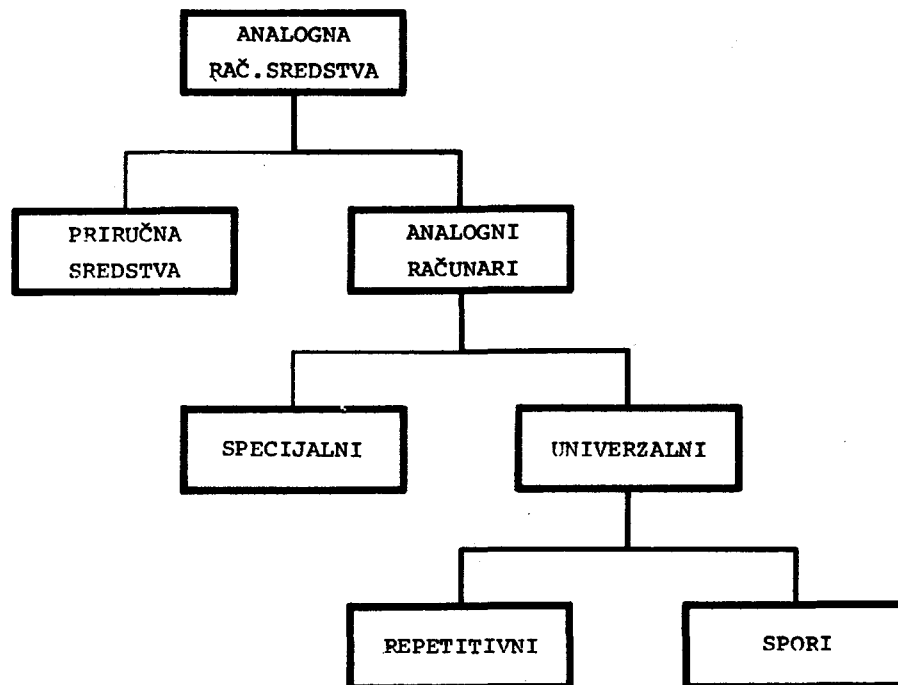
$$A = a^2 \pi + (1 + 2m) \cdot b^2 \pi \quad (2.1.30)$$

Konstante a , b i m su konstruktivno date za određen tip planimetra.

2.2 Analogni računari

Osnovna karakteristika priručnih analognih računskih sredstava je stalna intervencija čoveka u toku rada. Tako, ako se želi da se pomnože dva broja na logaritmaru, mora se postaviti pokretni deo na željeni broj, pa posle očitati rezultat. U slučaju da se izvodi neka sledeća operacija potrebna je ponovna intervencija. Pod analognim računarima podrazumevaju se složeniji računski uređaji koji su sposobni da obezbede i izvesnu automatiku u izvođenju računskih operacija, kao i veću univerzalnost matematičkih modela koji se analiziraju, nego što je to slučaj kod priručnih računskih sredstava.

Analogni računari dele se u dve grupe (sl. 2.2.1):



Sl. 2.2.1. Podela analognih računskih sredstava

- specijalni analogni računari, i

- univerzalni analogni računari.

Specijalni računari se grade u određene svrhe i služe za analizu jednog ili manjeg broja matematičkih modela.

Univerzalni analogni računari sastoje se iz više računskih komponenata, pri čemu svaka od njih može da obavi jednu ili više matematičkih operacija. Savremeni moderni analogni računari grade se isključivo kao elektronski računari. Kod ovih računara fizičke veličine nad kojima se obavljaju matematičke operacije su najčešće jednosmerni naponi, a u najnovije vreme pojavili su se računari koji rade sa visokofrekventnim naponima, čija frekvencija iznosi oko 0,5 MHz. Univerzalni računari služe za analizu raznih matematičkih modela. Da bi se ovo omogućilo računar raspolaže sa računskim komponentama koje mogu da obavljaju računске operacije sabiranja, množenja, integracije i slično. Za svaki matematički model ove komponente moraju biti na odgovarajući način povezane. Posao koji se sastoji u povezivanju računskih komponenata u cilju postavljanja konkretnog matematičkog modela na računaru naziva se programiranje. Matematički modeli koji se najčešće rešavaju na savremenim analognim računarima su sistemi diferencijalnih jednačina, pa se zato ovi računari nazivaju često i diferencijalni analizatori.

Univerzalni analogni računari grade se kao:

- repetitivni i
- spori.

Repetitivni računari rade velikom brzinom i na njima se rešenje obično ponavlja 20 do 100 puta u jednoj sekundi, a postoje repetitivni računari kod kojih frekvencija ponavljanja iznosi i po nekoliko hiljada puta u sekundi (ultrabrzi repetitivni računari). Zbog velike učestanosti rešenja, ono se može vizuelno posmatrati na ekranu katodnog osciloskopa u vidu krive linije. Spori računari rade u tzv. realnom vremenu, tj. tako što se rešenje dobija samo u jednom ciklusu rada računara. Da bi rešenje bilo trajno zapisano, obično se crta na specijalnom XY-pisaču. Kod savremenih najmodernijih analognih računara, postoji i kombinovan rad tako da računar može da radi ili kao spori

ili kao repetitivni. Za neke probleme ovakva kombinacija pruža dragocene mogućnosti prilikom analize matematičkih modela.

Kako se univerzalni analogni računar koristi za analizu matematičkih modela? Kao što je ranije objašnjeno prvi posao je ispravno formulisati matematički model fizičkog objekta. Na osnovu matematičkog modela programer sastavlja program.

Program se obično kod analognih računara priprema u obliku blok šeme, na osnovu koje se vrši povezivanje računskih elemenata pomoću električnih vodova. Moderni računari velikog kapaciteta konstruisani su tako da su sve ulazne i izlazne veze sa računskim elementima izvedene na jednoj centralnoj tabli. Na ovu se tablu postavlja pokretna programska ploča, na kojoj su pomoću gajtana uspostavljene odgovarajuće veze između računskih elemenata. Na ovaj se način povezivanje računskih elemenata vrši na programskoj ploči van računara, pa se analiza matematičkog modela na samom računaru obavlja postavljanjem programske ploče. Kada se postavi programska ploča, izvrši se postavljanje brojnih vrednosti, početnih uslova i drugih konstanta koje figurišu u matematičkom modelu. Kada su postavljene polazne vrednosti konstanta, računar se dovodi u režim da računa. Traženo se rešenje obično posmatra na osciloskopu ili pisaču.

Prosečno rešavanje jednog problema na analognom računaru traje 10 do 60 sekundi. Ovo vreme rešavanja nije vezano za složenost problema, red diferencijalne jednačine i slično, već zavisi od vremenskog intervala u kojem se želi da se rešenje posmatra. Kod repetitivnih računara rešenje se dobija u delovima sekunde. Kako se rešenje dobija u vrlo kratkom vremenskom intervalu, to su analogni računari pogodni za ispitivanje promena u rešenju nastalih menjanjem parametara u matematičkom modelu.

Opisani način korišćenja analognih računara polazi od matematičkog modela. Međutim, u matematičkom modelu kada se radi o složenim fizičkim objektima, vrlo se često gubi fizički smisao pojedinih konstanta i parametara. Analogni računari pružaju mogućnost postavljanja analogona za određene delove fizičkog obje-

ka odvojeno, i njihovo međusobno povezivanje prema stvarnom fizičkom objektu. Ovakav način postavljanja problema na analognim računarima naziva se simulacija. Prema tome, simulacija je takvo postavljanje analogona fizičkog objekta da se konstante i parametri unutar analogona mogu lako identifikovati sa odgovarajućim konstantama i parametrima na fizičkom objektu. Razlika između računanja na analognom računaru postavljanjem matematičkog modela i simulacije dolazi od svrhe u koju se računar koristi.

Naprimer, ako se želi da se ispita kakvo će biti ponašanje novogradjenog autopilota (uredjaja za automatsko upravljanje avionom) kada se on ugradi u avion, onda se to može učiniti i bez aviona. Naime, na analognom se računaru postavi matematički model aviona, a u njega "ugradi" autopilot. Reč "ugraditi" ovde označava pogodno spajanje stvarnog uredjaja - autopilota sa analognim računarom. Kaže se tada da računar služi kao simulator datog aviona. Tom prilikom se mogu izvršiti ispitivanja autopilota, pa čak i ona koja bi dovela do katastrofe u realnoj fizičkoj situaciji leta aviona, a da pri tome ne dodje do neželjenih posledica. Pored toga, mogu se ispitivati ponašanja istog autopilota kada on radi u sastavu nekog drugog tipa aviona, pri čemu je dovoljno izvršiti potrebne izmene samo u matematičkom modelu aviona, odnosno na analognom računaru.

Prema izloženom, mogu se na kraju izdvojiti bitne dobre i loše osobine analognih računara. Dobre osobine su:

- velika brzina rada (koja sledi iz prirode samih računara),
- mogućnost brze promene parametara u matematičkom modelu i ocene uticaja parametara na rešenje,
- mogućnost simulacije,
- mogućnost rada računara sa realnim objektom,
- prosto programiranje i
- složenost matematičkog modela ne utiče na vreme računanja.

Loše osobine analognih računara su:

- ograničena tačnost,
- ograničena univerzalnost u odnosu na oblik matematič-

kog modela i

- povećanje tačnosti zahteva savršeniju izradu računskih elemenata.

3. ISTORIJAT ANALOGNIH RAČUNSKIH SREDSTAVA

3.1. Razvoj analognih računskih sredstava kroz istoriju:

Prva računanja koja je čovek obavljao vezana su za pojam prebrojavanja i za sabiranje i oduzimanje tako nastalih brojeva. Kasnije su se javile i druge, danas poznate, matematičke operacije. Odmah pada u oči da sve ove ideje pripadaju klasi cifarskih računara, te i prva pomagala na polju računara javljaju se u obliku cifarskih računskih sredstava. Ova sredstva datiraju još od Vavilonaca i Egipćana.

Međutim, najznačajniji napredak na polju analognih računskih pomagala, omogućen je pronalaskom logaritama brojeva. 1600-te godine škotski matematičar Džon Neper (John Napier 1550-1617) otkrio je logaritme pomoću kojih se, kao što je poznato, operacije množenja i deljenja svode na sabiranje i oduzimanje. Ovo je 1624 godine iskoristio E. Ganter (E. Gunter) da bi napravio vrlo jednostavnu napravu pomoću koje je lako mogao da obavlja operacije množenja i deljenja. On je na jednoj dasci naneo brojeve u logaritamskoj skali, pa je sabiranjem dužina srazmernih logaritmina brojeva obavljao množenje datih brojeva. Ovo je radio uzimanjem dužina u otvor šestara i njihovim nanošenjem na logaritamsku skalu na dasci. Dobijeni je rezultat merio opet pomoću šestara, i uz pomoć tablica (danas poznatih kao logaritamske tablice) preračunavao i dobijao traženi broj. Nedostatak ovakve "sprave" je što se njome vrlo teško i sporo rukovalo. Ovo je otklonio engleski matematičar Outred (William Oughtred) i 1632 god. konstruisao pokretnu logaritamsku skalu. Na taj način pojavila se sprava, koja mnogo podseća na današnji logaritmar. Sa ovom se spravom tada moglo lakše i brže računati, te se ona smatra pretečom današnjeg logaritmara.

U razvoju analognih računskih sredstava značajno mesto pripada i nomogramima. Osnovi nomografije počivaju na Dekartovoj analitičkoj geometriji. Nomogrami su, kao što je već rečeno, grafički

crteži na kojima su funkcionalne zavisnosti izmedju tri ili više promenljivih predstavljene tako, da je na lak način moguće utvrditi vrednost jedne kada su vrednosti ostalih promenljivih zadate. Oko 1890 godine M.D'Okanj (Maurice D'Ocagne) postavlja osnove nomografije u obliku u kojem se i danas koriste nomogrami. Zbog jednostavne izrade i lakog korišćenja nomogrami su našli široku primenu u raznim oblastima inženjerskog rada. Na slici 2.1.3. prikazan je nomogram za množenje i deljenje brojeva od 0 do 10.

Oko 1815 godine bavarski inženjer Herman (J. H. Herman) pronasao je spravu za merenje površine oivičene nekom proizvoljnom zatvorenom krivom linijom koja je nacrtana na papiru. Ova sprava je poznata kao planimetar. Nju je 1854 godine usavršio J. Amsler (Jakob Amsler), tako da se današnji planimetri vrlo malo razlikuju od nje. Pomoću ove sprave rešavan je složen problem izračunavanja površine oivičene nekom zatvorenom krivom linijom na vrlo jednostavan način. U drugoj polovini 19. veka radeći nezavisno jedan od drugog A. Abakanović (Abdank Abakanovicz) i C.V.Bojs (C.V.Boys) konstruisali su integrat, tj. spravu koja je izračunavala i crtala integral neke proizvoljne funkcije, kada je ta funkcija bila nacrtana na papiru u odgovarajućoj razmeri. Sa ovom je spravom bilo moguće putem sukcesivnih aproksimacija rešavati i izvesne klase diferencijalnih jednačina. Još jedno značajno otkriće na polju analognih računskih sredstava usledilo je u drugoj polovini 19. veka. Braća Tomson (William Thomson - Lord Kelvin i James Thomson) pronasli su i uspeli da naprave mehanički integrator.

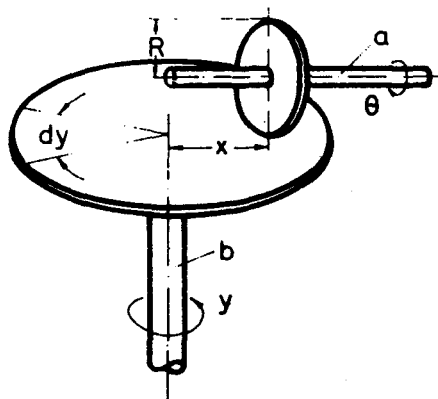
Oko 1927 godine V. Buš (Vannevar Bush) sa instituta u Masačuset-su (Massachusetts Institute of Technology) je počeo istraživanja na polju brzog rešavanja diferencijalnih jednačina analognim putem. Integracija je obavljana pomoću mehaničkih integratora čiji je princip prikazan na slici 3.1.1. Ovaj integrator se sastojao od diska sa osovinom b po kojem može da rotira manji točak sa osovinom a . Ako se pretpostavi da na mestu dodira izmedju diska i manjeg točka nema klizanja, onda će obrtanje diska za ugao $d\gamma$ proizvesti obrtanje izlazne osovine b za ugao $d\theta$, po relaciji:

$$R \cdot d\theta = x \cdot dy \quad (3.1.1)$$

gde je R poluprečnik manjeg točka, a x razmak između ose osovine b i tačke dodira manjeg točka i diska. Ako se obezbedi da veličina x bude proporcionalna sa funkcijom koju treba integraliti, a y da bude proporcionalna promenljivoj integracije, onda se dobija tzv. mehanički integrator, jer je iz

$$(3.1.1): \quad \theta = \frac{1}{R} \int x \cdot dy \quad (3.1.2)$$

Tokom vremena mehanički integratori su usavršavani, tako da su se u toku Drugog svetskog rata koristili mehanički analogni računari za rešavanje diferencijalnih jednačina, koje se javljaju u balističkim problemima.



Sl. 3.1.1. Mehanički integrator

Uporedo sa razvojem elektronike počinje i razvoj električnih i elektronskih analognih računara. Za vreme Drugog svetskog rata javljaju se tako diferencijalni analizatori, kod kojih se kao računski elementi koriste pojačavači, potencijometri, generatori funkcija, a krajem rata se uvode i elektromehanički uređja-

ji kao što su servomehanizmi.

Po završetku Drugog svetskog rata analogni računari doživljavaju nagli razvoj. Do danas je razvijeno više tipova računara. U početku su se za pojačavače koristile elektronske cevi, te su isti bili glomazni. Pored toga, problem tačnosti zadavao je mnogo muke konstruktorima, jer su elementi, od kojih su bili gradjeni pojačavači bili podložni promenama u odnosu na temperaturu, vlažnost, itd. Međutim, kasnije su i ovi nedostaci otklonjeni, jer je omogućena automatska kompenzacija uticaja ovih promena, ali su pojačavači imali veću potrošnju električne energije zbog povećanog broja elektronskih cevi.

Pojavom tranzistora počelo se i sa razvojem tranzistorskih analognih računara, koji su sada postali manji, kompaktniji i trajniji i koji imaju manju potrošnju električne energije. Na taj način je i problem održavanja računara u mnogome smanjen, jer je radni vek tranzistora znatno duži od elektronskih cevi.

Pored toga, poslednjih godina, znatno je povećana i preciznost računskih komponenata, od kojih zavisi tačnost računanja kod analognih računara, tako da današnji računari obavljaju operacije sabiranja i integracije sa tačnošću boljom od 0,01%. Ovo je relativno velika tačnost, s obzirom da se radi o analognim računskim sredstvima, a imajući u vidu jednostavnost postavljanja i rešavanja vrlo složenih problema, analogni računari su našli veliku primenu u raznim oblastima istraživanja.

Poslednjih godina u laboratorijama C.S.F-a (Compagnie Générale de Télégraphie sans Fil) u Francuskoj razvijen je novi tip analognog računara koji koristi visokofrekventne noseće struje za računanje. Glavna prednost ovakvih računara je ta što je olakšano rukovanje i što mu je tačnost za algebarske probleme mnogo bolja, nego što je to slučaj sa analognim računarima koji koriste jednosmerne struje. Za ostale probleme, koji se mogu rešavati na analognim računskim sredstvima oba tipa računara daju približno iste rezultate.

3.2. Razvoj analognih računskih sredstava u našoj zemlji

Posle Drugog svetskog rata i u našoj zemlji su ulagani naponi na polju razvoja računске tehnike. Prvi su rezultati vezani baš za razvoj analognih računskih sredstava.

Jedan od najvažnijih tehničkih problema u posleratnoj izgradnji naše zemlje bio je problem elektrifikacije. Izgradnja dalekovođa i ostalih električnih mreža za prenos električne energije do udaljenih naselja i industrijskih centara predstavljala je posebne probleme. Za ispitivanje raznih pojava koje su vezane za izučavanje problema prenosa električne energije grade se posebna analogna računska sredstva tzv. mrežni analizatori. Kod nas se pristupilo izgradnji takvog jednog mrežnog analizatora 1948. godine. U relativno kratkom vremenu uređaj je bio napravljen u Institutu "Nikola Tesla" u Beogradu, gde se sa uspehom koristio u problemima ispitivanja i projektovanja električnih mreža.

Uskoro posle izgradnje mrežnog analizatora pristupilo se izgradnji analognog računara za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina. Računar je gradjen u laboratoriji za matematičke mašine u Institutu "Boris Kidrič" u Vinči. Računar je pušten u rad 1952 godine. Na njemu se moglo rešavati 30 jednačina sa 30 nepoznatih. Na računaru su sa uspehom rešavani mnogi problemi i sistemi algebarskih jednačina za potrebe Instituta "Boris Kidrič" u Vinči, kao i za potrebe raznih naučnih instituta i drugih ustanova u našoj zemlji, pa čak i u inostranstvu.

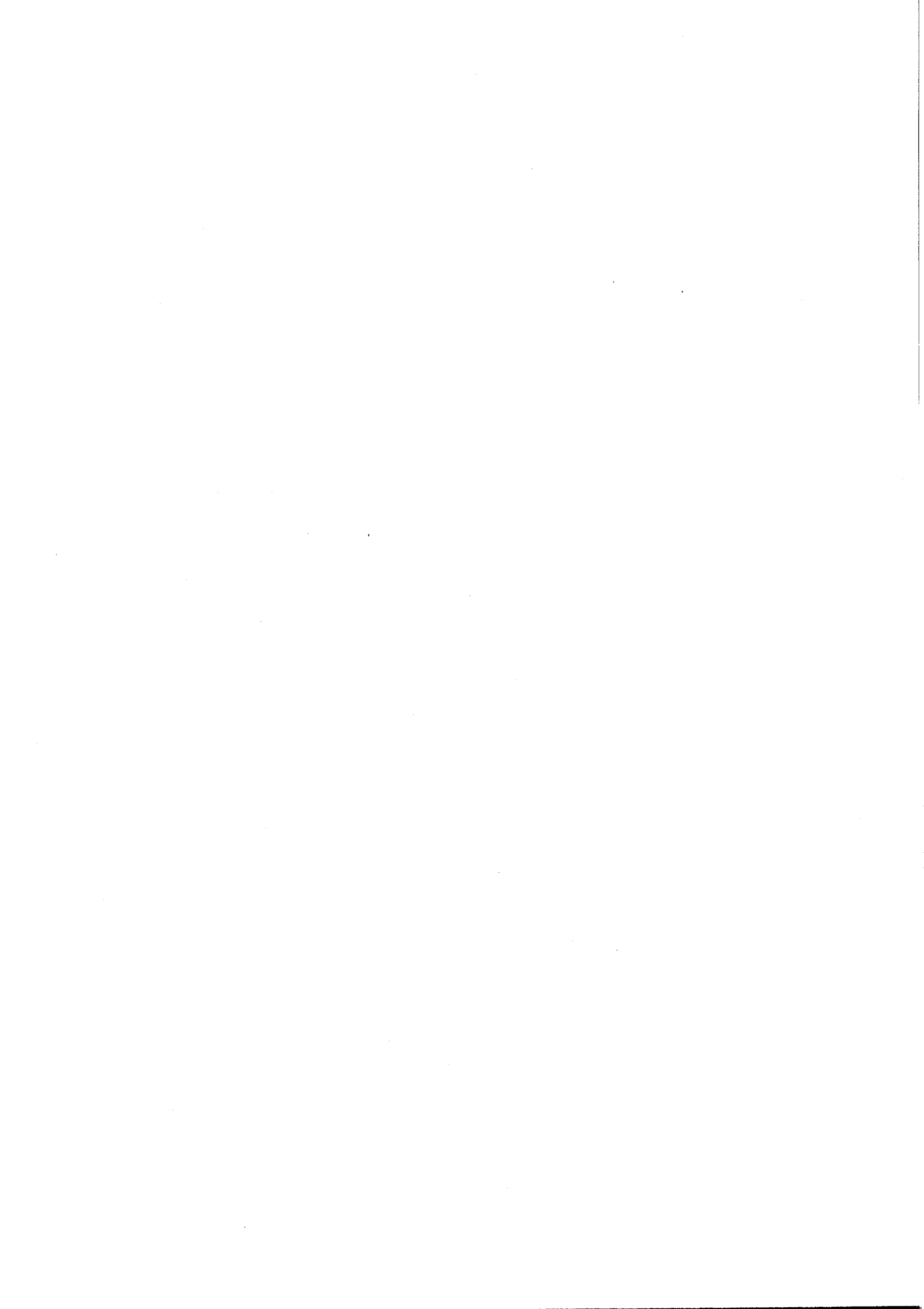
Izgradnja prvog domaćeg analognog računara za rešavanje diferencijalnih jednačina takodje je izvršena u laboratoriji za matematičke mašine u Institutu "Boris Kidrič" u Vinči 1956 godine. Računar je bio izradjen kao laboratorijski prototip repetitivnog diferencijalnog analizatora. Učestanost repeticije sa kojom je računar radio bila je oko 50 puta u sekundi. Računar je bio opremljen potencimetrima, sabiračima, integratorima i univerzalnim nelinearnim elementima, sa kojima je bilo moguće obavljati generiranje funkcija i množenje funkcija. Rešenje dobijeno na računaru moglo se posmatrati na ekranu katodnog oscilos-

kopa.

U periodu od 1959 godine do 1963 godine na osnovu stečenih iskustava konstruisan je poboljšani tip repetitivnog diferencijalnog analizatora, koji je proizvela Elektronska industrija za potrebe više naših instituta.

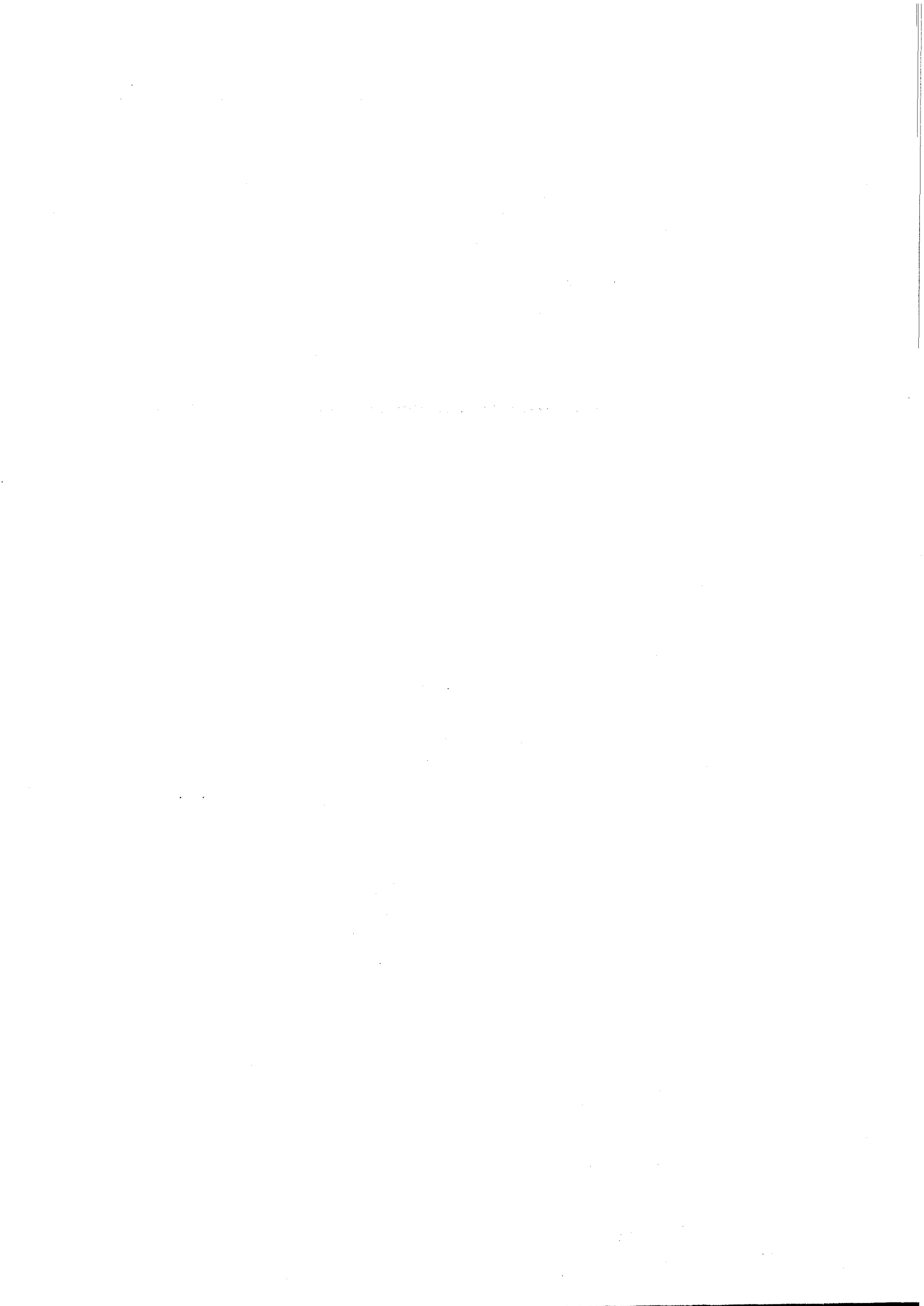
U istom periodu Elektronska industrija proizvela je i spori diferencijalni analizator. Ovaj analizator opremljen je sa linearnim računskim elementima, kao i sa servomnožačima i generatorima funkcija potenciometerskog tipa.

Krajem 1964 godine u Institutu "Mihailo Pupin" razvijen je tranzistorski analogni računar koji ima kapacitet od 50 računskih pojačavača, sa odgovarajućim ostalim računskim elementima. Ovaj računar je predviđen za spori i repetitivni rad. Jedinični računski napon mu je 10 V, a tačnost reda 0,1% za linearne operacije.



PRVI DEO

RAČUNSKI ELEMENTI I ORGANIZACIJA ANALOGNIH RAČUNARA



I. RAČUNSKI ELEMENTI UNIVERZALNIH ANALOGNIH RAČUNARA

I. FUNKCIJA RAČUNSKIH ELEMENATA

U matematici su definisane razne elementarne operacije, kao što su sabiranje, oduzimanje, množenje, deljenje, diferenciranje, integriranje i dr. Složeni matematički problemi izražavaju se nizom elementarnih operacija primenjenih na skup matematičkih veličina (brojeva ili funkcija). Na sličan je način nastala ideja izgradnje univerzalnih analognih računara. Računar se sastoji od računskih elemenata, koji predstavljaju fizičke uređaje namenjene za obavljanje pojedinih matematičkih operacija. Pogodnim povezivanjem računskih elemenata, a prema matematičkom modelu, na računaru mogu da se rešavaju složeni i raznovrsni matematički problemi. Zbog ove osobine, ovakvi računari su i dobili ime univerzalni analogni računari. U daljem izlaganju ukoliko se govori o analognim računarima, podrazumevaju se samo univerzalni analogni računari.

Neka je operacija f primenjena na matematičke veličine: x_1, x_2, \dots, x_n , tako da je:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.1)$$

Iz skupa matematičkih veličina x_1, x_2, \dots, x_n , neke mogu biti konstante, parametri ili promenljive veličine. Fizički objekt čiji je matematički model:

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m) \quad (1.2)$$

može da predstavlja računski element, ako je:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1.3)$$

Relacija (1.3) pokazuje da matematički model računskog elementa mora biti sličan matematičkom modelu (1.1), za koji se želi realizovati računski element. Pod sličnošću matematičkih modela

podrazumeva se njihova identičnost do izvesne tačnosti. Pored sličnosti matematičkih modela (1.1) i (1.3) mora postojati i određena proporcionalnost između fizičkih veličina Y, X_1, X_2, \dots, X_n , i matematičkih veličina y, x_1, x_2, \dots, x_n .

Označimo ove koeficijente proporcionalnosti sa:

$$k = \frac{Y}{y}; \quad k_i = \frac{X_i}{x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4)$$

Koeficijenti k i k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) u relacijama (1.4) pokazuju sa koliko jedinica fizičke veličine je predstavljena odgovarajuća matematička veličina. Zbog ove osobine koeficijenti k, k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) nazivaju se koeficijenti razmere. Koeficijenti razmere mogu da se definišu i odnosima

$$k^* = \frac{y}{Y} = \frac{1}{k}; \quad k_i^* = \frac{x_i}{X_i} = \frac{1}{k_i}; \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.5)$$

Medjutim, u daljim će se izlaganjima koristiti definicija data sa (1.4).

Zamenom vrednosti iz (1.4) u (1.3) dobija se:

$$y = \frac{1}{k} f(k_1 x_1, k_2 x_2, \dots, k_n x_n) \quad (1.6)$$

Da bi relacija (1.6) bila slična sa (1.1) mora postojati određena veza između koeficijenata k i k_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Jednačine koje definišu vezu između koeficijenata k i k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) nazivaju se jednačine razmere. Ove se jednačine dobijaju poredjenjem relacija (1.1) i (1.6).

U modelu računskog elementa (1.2) pored fizičkih veličina X_1, X_2, \dots, X_n , figurišu i veličine $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$, čiji uticaj na operaciju F mora biti takav da egzistira relacija (1.3) sa određenom tačnošću.

Iz ovoga sledi da pored funkcije svakog računskog elementa mora da se analizira tačnost izvršene operacije. Drugim rečima,

potrebno je da se utvrdi kakav je uticaj fizičkih veličina $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m$, na tačnost izvršavanja željene matematičke operacije pomoću izvesnog računskog elementa. U ovom će se poglavlju analizirati i tačnost računskih elemenata u onoj meri koliko je to potrebno za opšte poznavanje računskih elemenata pri eksploataciji računara. Detaljnije analize, koje su od značaja sa gledišta konstrukcije računskih elemenata neće biti obuhvaćene. Na kraju knjige data je literatura u kojoj čitalac može naći opširnije o analizi tačnosti računskih elemenata.

Uobičajeno je da se fizičke veličine X_1, X_2, \dots, X_n nad kojima je primenjena operacija F nazivaju ulazne veličine u računski element, a veličina Y izlazna veličina. Kako se savremeni analogni računari grade kao elektronski, to su ulazne veličine najčešće naponi, a izlazna veličina je takodje napon. Naponi kao ulazne fizičke veličine nazivaju se ulazni naponi, a napon kao izlazna veličina izlazni napon. Fizičko mesto u računskom elementu gde se dovodi ulazni napon naziva se ulaz, a fizičko mesto gde se pojavljuje izlazni napon, naziva se izlaz.

Budući da se dalje izlaganje neće odnositi na detalje o elektronskim kolima od kojih su računski elementi izgradjeni, ova će kola biti označena grafičkim simbolima. Na sl. 1.1 prikazan je računski element F sa ulazima X_1, X_2, \dots, X_n i izlazom Y .



Sl. 1.1. Računski element

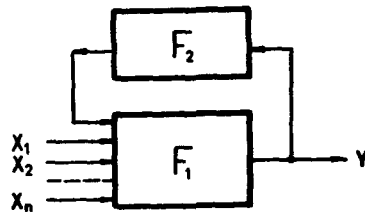
Pored računskih elemenata kod kojih je matematički model oblika (1.2), postoje i takvi računski elementi kod kojih je:

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n, Y, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m) \quad (1.7)$$

Pri ovome mora biti zadovoljena relacija (1.3). Karakteristika ovakvih računskih elemenata je ta da operacija F deluje i na izlaznu veličinu Y . Grafički simbol ovakvog računskog elementa dat je na slici 1.2. Operacije F_1 i F_2 zajedno prema slici 1.2, realizuju operaciju F prema (1.7).

Za sistem kod kojeg se i izlazna veličina dovodi na ulaz sistema kaže se da ima povratnu spregu. Ako je izlazna veličina suprotnog znaka od ulazne onda se kaže da je povratna sprega negativna, a ako su istog znaka onda je povratna sprega pozitivna.

Računski elementi sa kojima su opremljeni savremeni računari



Sl. 1.2. Računski element sa povratnom spregom

dele se u šest grupa. Podela je izvršena prema funkciji računskih elemenata:

1. Množenje promenljive veličine sa konstantom
2. Algebarsko sabiranje više promenljivih veličina
3. Integracija jedne ili više funkcija
4. Operacije množenja i deljenja između promenljivih veličina
5. Generiranje funkcija
6. Logičke operacije

Pored računskih elemenata, svaki računar sadrži i pomoćne uređaje za komandovanje, postavljanje potrebnih početnih uslova, očitavanje rezultata, kao i instrumente i elemente za kontrolu rada računara.

U daljem su izlaganju opisani principi rada pojedinih računskih elemenata, matematičke operacije koje svaki od njih obavlja, kao i tačnost i ograničenja koja prate svaki od ovih uređaja.

2. PROTENCIOMETAR

2.1. Funkcija potencimetra

Neka je potrebno da se realizuje uređaj za obavljanje matematičke operacije množenja promenljive veličine sa konstantom, tj.

$$y(t) = a \cdot x(t) \quad (2.1.1)$$

gde je a konstanta, a $x(t)$ promenljiva veličina sa vremenom.

Kod savremenih analognih računara operacija (2.1.1) može da se ostvari preko računskog elementa koji se naziva potencimetar. To je ustvari jedan omski otpornik sa klizačem na čije se krajeve dovodi promenljivi napon $X(t)$, a sa klizača, koji može da se postavi u ma koji položaj između krajeva potencimetra, odvodi se napon $Y(t)$. Vrednost konstante sa kojom je pomnožen ulazni napon $X(t)$ određena je položajem klizača na telu otpornika. Po prirodi ovog uređaja mora da bude:

$$Y(t) \ll X(t) \quad (2.1.2)$$

Prema tome, potencimetar omogućuje množenje promenljivog ulaznog napona $X(t)$ sa konstantom manjom od jedinice. Na slici 2.1.1. prikazan je otpor R_p koji služi kao potencimetar, kao i zavisnost faktora (A) sa kojim se množi ulazni napon $X(t)$ od položaja klizača na telu otpornika. Da bi ova zavisnost bila linearna mora otpor R_p biti linearno raspoređen na dužini otpornika L . Ovakvi potencimetri poznati su pod nazivom linearni potencimetri, za razliku od onih kod kojih otpornost nije linearno raspoređena po dužini otpornika.

Da bismo objasnili kako potencimetar vrši množenje sa konstantom, pogledajmo sliku 2.1.1. Ako se na ulaz potencimetra (između tačke 1 i mase) dovede napon $X(t)$, tada kroz potencimetar, čiji je otpor R_p , teče promenljiva struja I data izrazom:

$$I(t) = \frac{X(t)}{R_p} \quad (2.1.3)$$

Izlazni napon (između tačke 2 i mase) određen je položajem klizača potencimetra, tj.

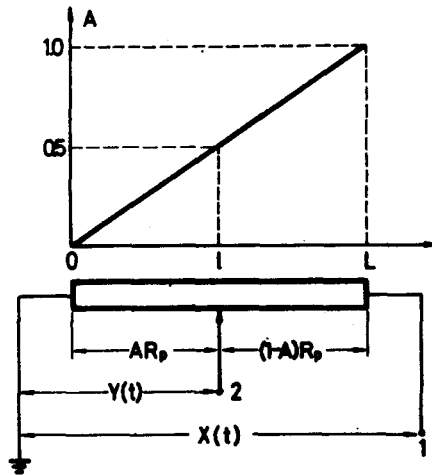
$$Y(t) = A \cdot R_p \cdot I(t) \quad (2.1.4)$$

Zamenom (2.1.3) u (2.1.4) dobija se da je:

$$Y(t) = A \cdot X(t) \quad (2.1.5)$$

Na slici 2.1.1. sa A je označen odnos:

$$A = \frac{l}{L} \quad (2.1.6)$$



Sl. 2.1.1. Linearni potencijetar

Kako je u relaciji (2.1.6) $l \ll L$, tada sledi da je $A \ll 1$.

Relacija (2.1.5) predstavlja dakle matematički model za potencijetar povezan prema slici 2.1.1. Sličnost matematičkih modela (2.1.1) i (2.1.5) je očigledna i ide do identičnosti, s tim što su različiti simboli upotrebljeni u jednom i drugom modelu.

Uvedimo koeficijente razmere između fizičkih veličina $Y(t)$, A , $X(t)$ i matematičkih veličina $y(t)$, a , $x(t)$ tako da je, prema (1.4)

$$k_y = \frac{Y(t)}{y(t)} ; \quad k_a = \frac{A}{a} ; \quad k_x = \frac{X(t)}{x(t)} \quad (2.1.7)$$

Uvodjenjem (2.1.7) u (2.1.5) dobija se:

$$y(t) = \frac{k_a k_x}{k_y} a x(t) \quad (2.1.8)$$

Poređenjem relacije (2.1.8) sa (2.1.1) dobija se jednačina razmere u obliku:

$$\frac{k_a k_x}{k_y} = 1 \quad (2.1.9)$$

Potenciometri koji se koriste kao računski elementi na savremenim analognim računarima snabdeveni su skalama od 0 do 1. Skala je postavljena tako da se očitava vrednost 0, kada se klizač nalazi na jednom kraju otpora R_p , dok se vrednost 1 očitava kada se klizač nalazi na drugom kraju otpora. Željeni položaj klizača lako se postavlja prema ovoj skali. Podešavanje potenciometra, međjutim, ne može se izvršiti idealno tačno, već ako se klizač želi postaviti na dužinu l , to je učinjeno sa izvesnom greškom Δl , pa je prema relaciji (2.1.6)

$$A \pm \Delta A = \frac{l}{L} \pm \frac{\Delta l}{L} \quad (2.1.10)$$

Iz ove relacije sledi da je greška kod podešavanja potenciometra manja, što je dužina otpornika R_p veća. Da bi se postigla što veća dužina ovog otpora na što manjoj zapremini, grade se tzv. helikoidalni desetoobrtni potenciometri kod kojih je otpor R_p savijen u obliku helikoidalne (zavojne) krive, a klizač se nalazi na jednoj osovini duž koje može i da klizi. Na taj se način prilikom okretanja osovine potenciometra klizač kreće duž zavojne linije, i prelazi celu dužinu otpornika za 10 punih obrta osovine potenciometra. Tačnost podešavanja ovakvih potenciometara je vrlo velika.

2.2. Analiza tačnosti

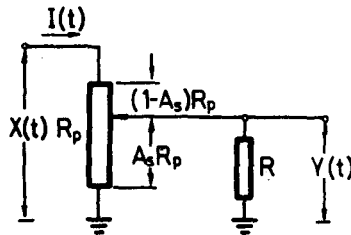
Već je rečeno da potenciometar služi za množenje ulaznog napona $X(t)$ konstantom A , koja je određena položajem klizača potenciometra na skali potenciometra. Potenciometar, kao računski element povezuje se sa drugim računskim elementima, tako da se napon $X(t)$, koji treba pomnožiti sa konstantom, dovodi iz prethodnog računskog elementa na ulaz potenciometra. Izlazni napon $Y(t)$ iz potenciometra pojavljuje se kao ulazni napon u sledeći računski element. Računski element u koji se dovodi napon sa potenciometra ima određenu ulaznu otpornost R .

I 22

Na slici 2.2.1. prikazana je šematski fizička situacija ovako povezanog potencijometra. Paralelno vezani otpori $A_s R_p$ i R , (sl. 2.2.1), daju rezultujućii otpor R_1 , koji je dat izrazom:

$$R_1 = \frac{A_s R_p \cdot R}{A_s R_p + R} \quad (2.2.1)$$

gde indeks s označava da se radi o konstanti A pročitanoj na skali potencijometra.



Sl. 2.2.1. Potencijometar sa opterećenjem

Prema Ohmovom zakonu struja kroz potencijometar određena je sa:

$$I(t) = \frac{X(t)}{(1 - A_s) R_p + R_1} \quad (2.2.2)$$

tako da je izlazni napon

$$Y(t) = R_1 \cdot I(t) = \frac{R_1}{(1 - A_s) R_p + R_1} X(t) \quad (2.2.3)$$

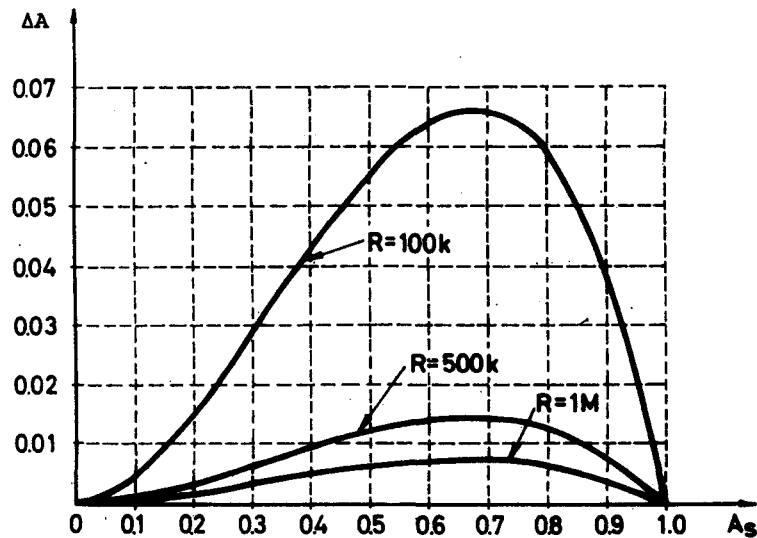
Zamenom (2.2.1) u (2.2.3) dobija se da je:

$$Y(t) = (A_s - \Delta A) \cdot X(t) \quad (2.2.4)$$

gde je sa ΔA označeno:

$$\Delta A = \frac{A_s}{1 + \frac{R}{A_s (1 - A_s) R_p}} > 0 \quad (2.2.5)$$

Prema tome, kada je potencijometar opterećen javlja se greška ΔA koja je utoliko manja ukoliko je otpor opterećenja R veći. Kada $R \rightarrow \infty$; greška $\Delta A \rightarrow 0$. Na slici 2.2.2. data je greška ΔA u zavisnosti od položaja klizača potencijometra.



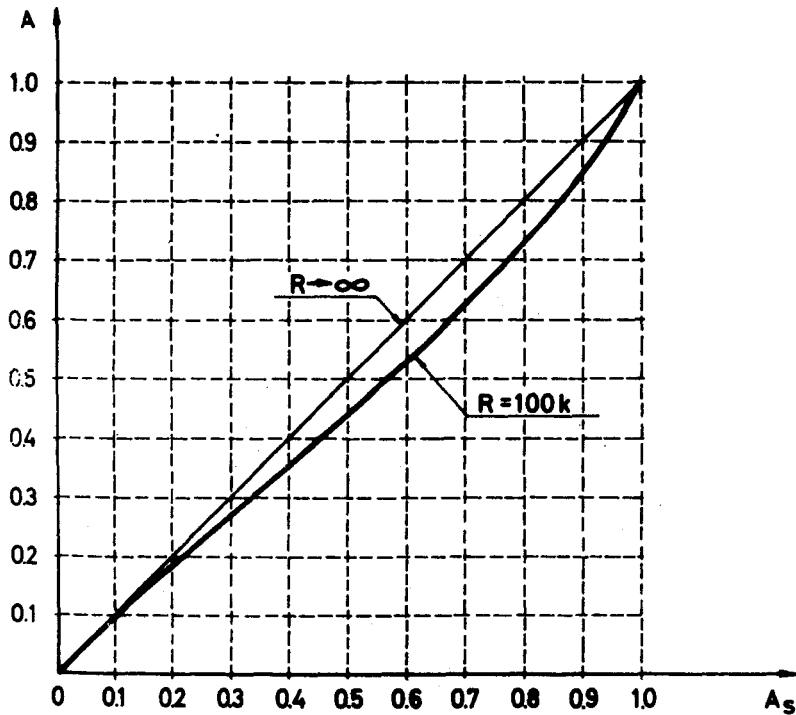
Sl. 2.2.2. Greška kod potenciometra u zavisnosti od položaja klizača

Nacrtane krive dobijaju se iz formule (2.2.5) za otpor potenciometra $R_p = 50 \text{ k}^*$ i otpore opterećenja $R = 100 \text{ k}$, $R = 500 \text{ k}$ i $R = 1 \text{ M}^{**}$.

Iste krive važe i za otpor potenciometra $R_p = 5 \text{ k}$ i otpore opterećenja od $R = 10 \text{ k}$, 50 k , 100 k , koji se javljaju kod tranzistorskih analognih računara. Ako se klizač potenciometra čiji je otpor $R_p = 50 \text{ k}$ postavi na vrednost $A_s = 0,5$ onda je, prema slici 2.2.2. uticaj greške, naprimer usled otpora opterećenja $R = 100 \text{ k}$, takav da će potenciometar umesto množenja sa $0,5$ vršiti množenje sa konstantom manjom od $0,5$. Drugim rečima ranije istaknuta linearna zavisnost (sl. 2.1.1) između položaja klizača i faktora sa kojim se množi ulazni napon, tada nije sačuvana. Na slici 2.2.3 data je zavisnost vrednosti A_s na skali potenciometra i stvarne vrednosti koeficijenta A sa kojim se vrši množenje na potenciometru, za vrednosti otpo-

* Oznaka k se koristi za kiloome; $1 \text{ k} = 1000 \text{ oma}$.

**Oznaka M se koristi za megaome; $1 \text{ M} = 10^6 \text{ oma}$.



Sl. 2.2.3. Zavisnost izmedju stvarnog koeficijenta A i vrednosti na skali potencijetra A_s

ra opterećenja od 100k. Ovo je u praksi najčešća vrednost otpora opterećenja za koju treba vršiti korekciju položaja klizača potencijetra. Za veće vrednosti otpora opterećenja (500k ili 1M) najčešće se ne vrši korekcija, s obzirom da je greška veoma mala. Veza izmedju vrednosti na skali A_s i koeficijenta A kojom se vrši množenje ulaznog napona određena je sa

$$A = A_s - \Delta A \quad (2.2.6)$$

Korišćenjem dijagrama na slici 2.2.3 može se za svaku vrednost A odrediti A_s . Tačnije određivanje uticaja opterećenja potencijetra može se vršiti korišćenjem tabele 2.2.1. U tabeli su date vrednosti koeficijenta A sa korakom 0,05. Interpolacijom izmedju datih vrednosti u tabeli 2.2.1 mogu se do-

voljno tačno izračunati vrednosti koje treba postaviti na skali potenciometra i za ostale vrednosti koeficijenta A . U tabeli 2.2.1 date su vrednosti za A_s za otpor potenciometra od 50k i otpore opterećenja od 100k, 500k i 1M. Iste vrednosti za A_s važe i za otpor potenciometra od 5k i otpore opterećenja od 10k, 50k i 100k, koji se najčešće javljaju kod tranzistorskih računara.

A	R = 100k		R = 500k		R = 1M	
	ΔA	A_s	ΔA	A_s	ΔA	A_s
0.05	0.00116	0.05116	0.00024	0.05024	0.00012	0.05012
0.10	0.00431	0.10431	0.00089	0.10089	0.00045	0.10045
0.15	0.00899	0.15899	0.00189	0.15189	0.00095	0.15095
0.20	0.01481	0.21481	0.00315	0.20315	0.00159	0.20159
0.25	0.02143	0.27143	0.00460	0.25460	0.00232	0.25232
0.30	0.02851	0.32851	0.00617	0.30617	0.00312	0.30312
0.35	0.03575	0.38575	0.00779	0.35779	0.00394	0.35394
0.40	0.04286	0.44286	0.00938	0.40938	0.00474	0.40474
0.45	0.04956	0.49956	0.01087	0.46087	0.00550	0.45550
0.50	0.05556	0.55556	0.01220	0.51220	0.00617	0.50617
0.55	0.06057	0.61057	0.01328	0.56328	0.00672	0.55672
0.60	0.06429	0.66429	0.01406	0.61406	0.00711	0.60711
0.65	0.06639	0.71639	0.01446	0.66446	0.00731	0.65731
0.70	0.06652	0.76652	0.01440	0.71440	0.00727	0.70727
0.75	0.06429	0.81429	0.01380	0.76380	0.00697	0.75697
0.80	0.05926	0.85926	0.01260	0.81260	0.00635	0.80635
0.85	0.05094	0.90094	0.01070	0.86070	0.00538	0.85538
0.90	0.03876	0.93876	0.00803	0.90803	0.00403	0.90403
0.95	0.02204	0.97204	0.00449	0.95449	0.00225	0.95225

Tabela 2.2.1. Greška usled opterećenja potenciometra

2.3. Način korišćenja potenciometra

Potenciometar se kod analognih računara koristi u dve svrhe:

- za dobijanje konstantnih napona u cilju postavljanja početnih uslova u računskim modelima i
- za množenje promenljivog napona sa pozitivnom konstantom manjom od jedinice.

Uobičajen način korišćenja potenciometra, je kada je jedan kraj potenciometra na nultom potencijalu (spojen sa masom). Ovakvo spajanje potenciometra označava se grafičkim simbolom na slici 2.3.1, sa označenom vrednošću konstante A unutar kruga

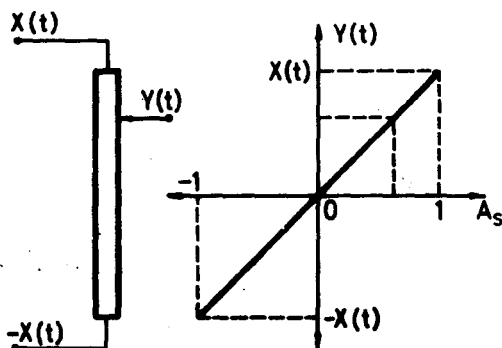


Sl. 2.3.1. Grafički simbol za potencijometar sa jednim slobodnim krajem

ili pored kruga koji označava potencijometar.

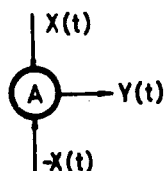
Pored ovog načina korišćenja, mogu oba kraja biti spojena sa potencijalima. Najčešće se jedan spaja sa pozitivnim, a drugi sa negativnim potencijalom. Na slici 2.3.2 prikazana je ovakva veza potencijometra sa dijagramom koji pokazuje promenu izlaznog napona $Y(t)$ u funkciji od položaja klizača potencijometra. Na ovaj način stvorena je mogućnost da se izlazni napon menja u intervalu $-X(t) \leq Y(t) \leq X(t)$, tako da se na skali potencijometra mogu postaviti vrednosti za $-1 \leq A_s \leq 1$. Grafički simbol za ovakvu vezu potencijometra dat je na slici 2.3.3.

Na kraju ćemo objasniti praktičan način korekcije greške usled opterećenja potencijometra bez upotrebe tabela ili dijagrama za korekcije. Neka je potencijometar P_1 računski element u analognom modelu (sl. 2.3.4). Ulaz u potencijometar dolazi sa izlaza iz predhodnog računskog elementa, dok izlaz iz potencijometra P_1 ide na ulaz u sledeći računski element. Ulazna otpornost sledećeg računskog elementa predstavlja otpor opterećenja za potencijometar P_1 . Ako se želi postaviti potencijometar, radi množenja sa konstantom A , onda se ova vrednost po-



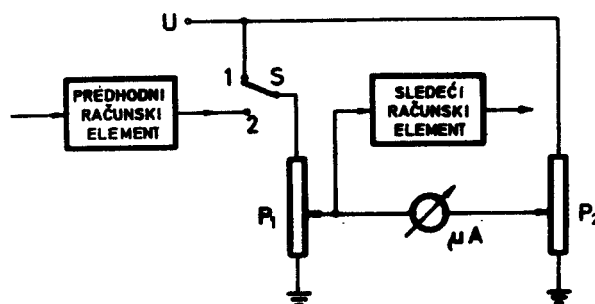
Sl. 2.3.2. Potencijometar sa dva slobodna kraja

stavi na referentni potencijometar P_2 , koji nije opterećen. Prekidač S se prebaci u položaj 1 i na oba potencijometra



Sl. 2.3.3. Grafički simbol za potencijometar sa dva slobodna kraja

se dovodi isti napon U . Precizni instrument (mikroampermetar) μA indicira postojanje razlike u potencijalima na izlazima je-



Sl. 2.3.4. Korekcija greške potencijometra usled opterećenja

dnog i drugog potencijometra. Klizač potencijometra P_1 se sada pomera dok se ne postavi na vrednost A_s , takvu da instrument registruje nepostojanje potencijalne razlike između dva klizača. Na ovaj način određena je vrednost A_s bez izračunavanja ili korišćenja dijagrama.

3. POJAČAVAČ KAO RAČUNSKI ELEMENT

Kod elektronskih analognih računara najvažniju ulogu ima pojačavač, koji se naziva još i operacioni ili računski pojačavač. To je ustvari elektronski uređaj koji ima vrlo veliko pojača-

nje. Pomoću njega se mogu obavljati razne matematičke operacije, i u zavisnosti od toga sa kojim pasivnim računskim elementima je spregnut, on nosi naziv sabirač, integrator, itd.

3.1. Sabirač

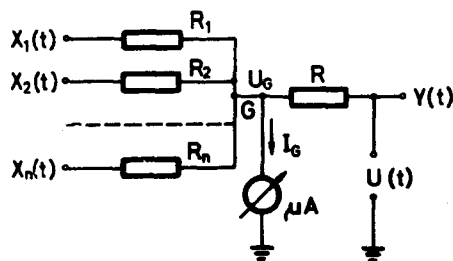
Funkcija sabirača

Matematička operacija algebarskog sabiranja n promenljivih veličina koju želimo da izvršimo, neka je data izrazom:

$$y(t) = - \sum_{i=1}^n a_i x_i(t) \quad (3.1.1)$$

gde su a_i konstante kojima se množi odgovarajuća promenljiva veličina $x_i(t)$.

Računski element na analognom računaru, koji omogućuje realizaciju matematičke operacije (3.1.1) naziva se sabirač. Fizičke veličine $X_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) koje odgovaraju promenljivim $x_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) su ulazni naponi u sabirač. Napon $Y(t)$ kao izlazna veličina iz sabirača odgovara matematičkoj veličini $y(t)$.



Sl. 3.1.1. Mreža otpora za sabiranje

Na sl. 3.1.1 data je električna šema koja se, pod određenim uslovima, može koristiti za sabiranje ulaznih napona $X_i(t)$. Označimo napon u tački G sa U_G . Prema Kirhofovom pravilu o grananju struja za čvor G važi relacija:

$$\frac{U(t) - U_G}{R} + \sum_{i=1}^n \frac{X_i(t) - U_G}{R_i} = I_G \quad (3.1.2)$$

Neka je napon $U(t)$ u relaciji (3.1.2) takav, da je za svako t vrednost napona u tački G jednaka nuli, tj. da je $U_G = 0$, odakle sledi da je i $I_G = 0$. Jednačina (3.1.2) može se tada napisati u obliku:

$$U(t) = - \sum_{i=1}^n \frac{R}{R_i} X_i(t) \quad (3.1.3)$$

Prema tome, napon $U(t)$ treba uzeti kao izlazni napon sabirača, pa će biti označen sa $Y(t)$, te relacija (3.1.3) postaje

$$Y(t) = - \sum_{i=1}^n A_i X_i(t) \quad (3.1.4)$$

gde je sa A_i označen odnos R/R_i , ($i = 1, 2, \dots, n$).

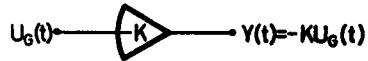
Iz relacije (3.1.4) sledi da je matematički model električne šeme date na sl. 3.1.1, pod uslovom da je u svakom trenutku $U_G = 0$, sličan matematičkom modelu (3.1.1). Prema tome, dato električno kolo može da predstavlja uređaj za obavljanje algebarskog sabiranja promenljivih naponskih veličina. Međutim, ostaje nerešeno pitanje automatskog podešavanja napona $U(t)$ tako da je za svako t napon $U_G = 0$. Na slici 3.1.1 prikazana je mogućnost da se pomoću preciznog instrumenta μA kontroliše uslov $U_G = 0$, na taj način što se napon $U(t)$ bira ručno tako da instrument pokazuje stalno nulu. Jasno je da se ručna promena napona $U(t)$ može zamisliti samo radi objašnjenja principa rada sabirača. Kod analognih računara sabirači moraju imati automatsko podešavanje uslova $U_G = 0$ i to velikom brzinom, s obzirom da se ulazni naponi $X_i(t)$ mogu vrlo brzo menjati sa vremenom.

Automatsko podešavanje uslova $U_G = 0$ postiže se uvođenjem pojačavača sa negativnom povratnom spregom. Pojačavač je elektronski uređaj koji ima osobine da ulazni napon U_G pojačava, tako da je izlaz iz pojačavača dat relacijom:

$$Y(t) = - K U_G(t) \quad (3.1.5)$$

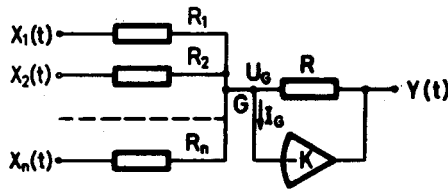
gde je K konstanta pojačanja. Iz relacije (3.1.5) se vidi da pojačavač, pored toga što pojačava ulazni napon K puta, vrši i promenu znaka ulaznom naponu. Na slici 3.1.2 dat je grafički

simbol koji se koristi za prikazivanje pojačavača. Pojačavači koji se koriste kod analognih računara pripadaju klasi tzv. jednosmernih pojačavača, pošto su i fizičke veličine kojima se predstavljaju odgovarajuće matematičke veličine, jednosmerni naponi. Na slici 3.1.3 prikazana je modifikovana šema elek-



Sl. 3.1.2. Pojačavač

tričnog kola sa slike 3.1.1. Pojačavač na ovoj slici je povezan tako, da automatski podešava uslov $U_G = 0$. I ovde važi re-



Sl. 3.1.3. Sabirač

lacija (3.1.2) s tim što treba uvesti uslov (3.1.5). Kako je pojačavač tako konstruisan da je struja I_G vrlo mala, tj. reda veličine 10^{-10} A, može se uzeti da je desna strana relacije (3.1.2) približno jednaka nuli. Pored toga, kod pojačavača, koji se koriste u savremenim analognim računarima, pojačanje K je vrlo veliko i kreće se od 10^5 do 10^8 , tako da je pri tim uslovima napon U_G vrlo mali u odnosu na napone $Y(t)$ i $X_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Iz ovoga sledi da se u relaciji (3.1.2) može uzeti da je U_G približno jednako nuli, pa se relacija (3.1.2) svodi na (3.1.3) i za slučaj pojačavača uključenog u električno kolo prema slici 3.1.3.

Iz relacije (3.1.3) vidi se da su fizički elementi, od kojih zavisi tačnost izvršene operacije, otpori R_i i R . Zbog ove osobine otpori R_i i R često se nazivaju i računski otpori i

oni moraju biti precizno izradjeni. Pored ovoga, kod nekih vrlo preciznih računara, ovi se otpori drže u specijalnim termostata u kojima se kontroliše temperatura, tako da se vrednost ovih otpora ne menja sa promenom spoljašnje temperature.

Uvedimo koeficijente razmere između fizičkih veličina $Y(t)$, A_i i $X_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) i matematičkih veličina $y(t)$, a_i i $x_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$), tj.

$$k_y = \frac{Y(t)}{y(t)}; \quad k_{a_i} = \frac{A_i}{a_i}; \quad k_{x_i} = \frac{X_i(t)}{x_i(t)}; \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1.6)$$

Uvodjenjem (3.1.6) u (3.1.4) dobija se:

$$y(t) = - \sum_{i=1}^n \frac{k_{a_i} k_{x_i}}{k_y} a_i x_i(t) \quad (3.1.7)$$

Poredjenjem (3.1.7) sa (3.1.1) dobijaju se jednačine razmere u obliku:

$$\frac{k_{a_i} k_{x_i}}{k_y} = 1; \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1.8)$$

Iz relacije (3.1.8) sledi da, ako se uzme ista razmera za ulazne i izlazne veličine, odnosno $k_{x_i} = k_y$, ($i = 1, 2, \dots, n$), onda je i $k_{a_i} = 1$, a odatle proizilazi da je:

$$a_i = \frac{R}{R_i}; \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1.9)$$

Prema tome, konstante a_i u relaciji (3.1.1) dobijaju se kao odnos otpora u povratnoj sprezi i odgovarajućeg ulaznog otpora.

Način korišćenja sabirača

Iz funkcije sabirača, kod analognih računara, vidi se da sabirač može da obavi dve matematičke operacije:

- množenje ulaznog napona sa konstantom i
- algebarsko sabiranje više ulaznih napona.

Kako se prva funkcija množenja ulaznog napona sa konstantom definiše odnosom (3.1.9), to teorijski ovaj odnos može biti proizvoljan. Medjutim, praktično ovaj se odnos bira od nekoliko unapred odabranih vrednosti ulaznih otpora R_i i konstantnog otpora u povratnoj sprezi. Najčešće je otpor u povratnoj sprezi

zi $R = 1M$, a ulazni otpori mogu da budu $R_1=1M$, $R_2=0,5M$ ili $R_3=0,1M$, tako da su za te vrednosti otpora, konstante množenja:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{R}{R_1} = \frac{1}{1} = 1 \\ A_2 &= \frac{R}{R_2} = \frac{1}{0,5} = 2 \\ A_3 &= \frac{R}{R_3} = \frac{1}{0,1} = 10 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.10)$$

Kod tranzistorskih računara otpor u povratnoj sprezi je $0,1 M$, a ulazni otpori su $0,1 M$, $0,05 M$ i $0,01 M$, pa vrednosti koeficijenata A_i , ($i = 1, 2, 3$) ostaju iste kao u (3.1.10).

Kao ulazni otpori, mogu se pojaviti i druge vrednosti, ali su navedene vrednosti uobičajene kod savremenih analognih računara.



Sl. 3.1.4. Grafički simbol za sabirač

Na slici 3.1.4 dat je grafički simbol za sabirač. Pored svakog ulaza naznačuje se obično odgovarajuća vrednost konstante A_i . Ako je potrebno posebno označiti neki sabirač u šemi, to se čini upisivanjem broja unutar trougla koji označava sabirač. Na slici 3.1.4 sabirač je označen brojem N , gde N može biti ma koji ceo neoznačen broj.

Pokazaćemo sada kako se sabirač koristi:

- za množenje sa negativnom konstantom a i
- za množenje sa pozitivnom konstantom većom od jedinice.

ce.

Za množenje napona sa pozitivnom konstantom manjom od jedinice, kao što je već rečeno, služi potencijometar. Da bi se omogućilo množenje sa negativnim konstantama različitim od celih brojeva 1, 2, 10, prema (3.1.10), koje se dobijaju kao prost odnos otpora povratne sprege i ulaznog otpora, koristi se veza potencijometra i sabirača. Tako, ako se maksimalna vrednost odnosa otpora povratne sprege i ulaznog otpora označi sa A_{max} , a vrednost postavljena na potencijometru označi sa a , tada je, prema slici (3.1.5)



Sl. 3.1.5. Množenje sa konstantom većom od jedan

$$Y(t) = - a \cdot A_{max} X(t) \quad (3.1.11)$$

gde je $0 < a < 1$, a vrednost za A_{max} , prema (3.1.10), uzima se najčešće 10, te je:

$$0 < a \cdot A_{max} < 10 \quad (3.1.12)$$

U specijalnom slučaju, ako se želi izvršiti množenje ulaznog napona $X(t)$ sa -1 , odnosno dobiti napon suprotnog znaka od ulaznog napona, treba uzeti sabirač kod kojeg je:

$$Y(t) = - X(t) \quad (3.1.13)$$

Relacija (3.1.13) dobija se iz relacije (3.1.4) prostim stavljanjem da je $n = 1$, $A_1 = R/R_1 = 1$. Ako sabirač ima funkciju (3.1.13), tj. menjanje znaka ulaznom naponu, takav sabirač se naziva inverter (sl. 3.1.6)



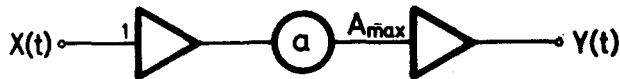
Sl. 3.1.6. Invertor

Da bi se omogućilo množenje napona $X(t)$ sa pozitivnom konstantom većom od jedinice, a manjom od 10, potrebno je obezbediti da izlazni napon $Y(t)$ u (3.1.11) bude pozitivan, odnosno istog znaka kao i ulazni napon $X(t)$. Ovo se može postići na dva načina. Jedan način je da se promena znaka izvrši na izlazu iz sabirača na slici 3.1.5, a drugi je način da se izvrši promena znaka na ulazu u potencijometar. Prvi je način prikazan na slici 3.1.7, a drugi na slici 3.1.8. U oba slučaja je

$$Y(t) = a \cdot A_{\max} X(t) \quad (3.1.14)$$



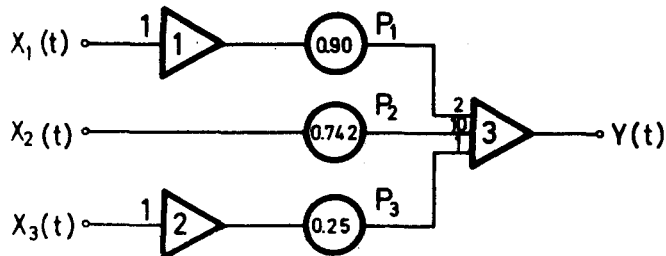
Sl. 3.1.7. Množenje pozitivnom konstantom većom od jedan



Sl. 3.1.8. Množenje pozitivnom konstantom većom od jedan

Algebarsko sabiranje koje se vrši pomoću sabirača prikazaćemo na jednom primeru. Uzmimo da je potrebno na analognom računaru izvršiti sledeće sabiranje

$$Y(t) = 1,80 \cdot X_1(t) - 7,42 \cdot X_2(t) + 0,25 \cdot X_3(t) \quad (3.1.15)$$



Sl. 3.1.9. Primer algebarskog sabiranja napona

Na slici 3.1.9 data je šema povezivanja potencijometara i sabirača, pomoću koje se može ostvariti relacija (3.1.15) na analo-

gnom računaru. Naponima $X_1(t)$ i $X_2(t)$ su promenjeni znaci pomoću sabirača (1) i (2). Konstanta 1,80 sa kojom se množi napon $X_1(t)$ postavljena je na taj način što je brojna vrednost $1,80/2$, tj. 0,90, postavljena na potenciometru P_1 , a množenje sa faktorom 2 vrši se na ulazu u sabirač (3). Na sličan je način postavljena i druga konstanta 7,42, s tim što se ovde izlaz iz potenciometra P_2 množi faktorom 10 na odgovarajućem ulazu u sabirač (3). Pošto je treća konstanta 0,25 u opsegu između nule i jedan, to je ona postavljena na potenciometru P_3 , a faktor množenja na odgovarajućem ulazu u sabirač (3) je jedan.

3.2. Integrator

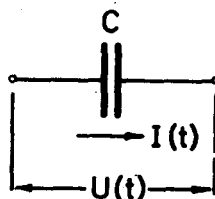
Funkcija integratora

Matematička operacija koja se želi realizovati pomoću integratora ima oblik

$$y(t) = -a \int_0^t x(t) dt \quad (3.2.1)$$

gde je a konstanta.*

Fizički element koji se kod analognih računara koristi za obavljanje operacije integracije je kondenzator. Pri ovome se koristi poznati zakon fizike o odnosu između struje, napona i kapaciteta kondenzatora, koji glasi: ako je na krajevima kondenzatora kapaciteta C doveden napon U , onda je struja I kroz kondenzator, (sl. 3.2.1) određena odnosom

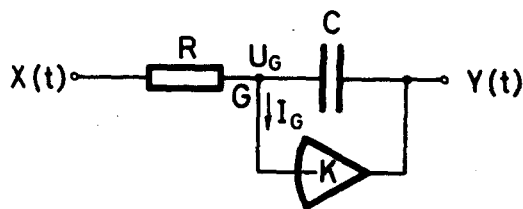


Sl. 3.2.1. Kondenzator

$$I(t) = C \frac{dU(t)}{dt} \quad (3.2.2)$$

* U relaciji (3.2.1), upotrebljena je ista oznaka t za gornju granicu integrala i nezavisno promenljivu u podintegralnoj funkciji, jer je vreme t jedina nezavisna promenljiva na računaru. Ovo neće izazvati matematičke nejasnoće.

Posmatrajmo šemu na slici 3.2.2. Ova je šema slična šemi sa sli-



Sl. 3.2.2. Integrator sa jednim ulazom

ke 3.1.3, s tim što se u kolu povratne sprege pojačavača ne nalazi otpor nego kondenzator kapaciteta C . Na ulaz pojačavača dovodi se napon $X(t)$. Primenom kirhofovog pravila o grananju struja za čvor G dobija se relacija:

$$\frac{X(t) - U_G(t)}{R} + C \frac{d[Y(t) - U_G(t)]}{dt} = I_G \quad (3.2.3)$$

Kako je napon $Y(t)$ izlaz iz pojačavača, čiji je ulazni napon $U_G(t)$ to sledi da je

$$Y(t) = -K U_G(t) \quad (3.2.4)$$

Kako je, kao što je bilo rečeno, pojačanje K kod pojačavača koji se koriste kod analognih računara vrlo veliko, to sledi kao i kod sabirača, da se u relaciji (3.2.3) napon u tački G može zanemariti u odnosu na napone $X(t)$ i $Y(t)$, kao i struja I_G , pa se relacija (3.2.3) može napisati u obliku:

$$\frac{dY(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} X(t) \quad (3.2.5)$$

odnosno

$$Y(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t X(t) dt \quad (3.2.6)$$

gde je uzeto da je $Y(0) = 0$. Uvedimo

$$A = \frac{1}{RC} \quad (3.2.7)$$

pa jednačina (3.2.6) dobija oblik

$$Y(t) = -A \int_0^t X(t) dt \quad (3.2.8)$$

Poređenjem relacija (3.2.1) i (3.2.8) vidi se da su one matematički slične, samo što se u relaciji (3.2.1) pojavljuju matematičke veličine, a u relaciji (3.2.8) fizičke veličine. Odatle sledi da električno kolo prikazano na slici 3.2.2 realizuje matematičku operaciju integracije.

Koeficijenti razmere između fizičkih veličina $Y(t)$, A , $X(t)$ i matematičkih veličina $y(t)$, a , $x(t)$ kao i ranije imaju oblik:

$$k_y = \frac{Y(t)}{y(t)}; \quad k_a = \frac{A}{a}; \quad k_x = \frac{X(t)}{x(t)}; \quad (3.2.9)$$

Uvodjenjem odnosa (3.2.9) u jednačinu (3.2.8) dobija se:

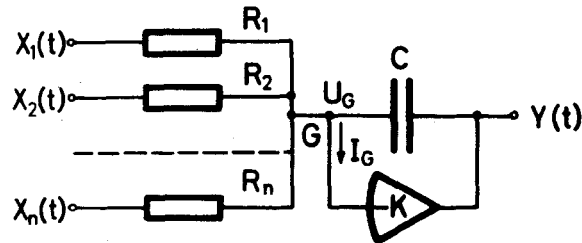
$$y(t) = - \frac{k_a k_x}{k_y} a \int_0^t x(t) dt \quad (3.2.10)$$

a poredjenjem poslednje jednačine (3.2.10) sa (3.2.1) dobija se da je:

$$\frac{k_a k_x}{k_y} = 1 \quad (3.2.11)$$

Ako se izaberu iste razmere za ulaznu i izlaznu veličinu, tj. ako se stavi da je $k_x = k_y$, onda iz relacije (3.2.11) sledi da je i $k_a = 1$.

Ako, međjutim, na ulaz pojačavača dovodimo više napona $X_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$), preko odgovarajućih ulaznih otpora R_i (sl. 3.2.3), tada relacija (3.2.3) dobija oblik:



Sl. 3.2.3. Integrator sa više ulaza

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i(t) - U_G(t)}{R_i} + C \frac{d[Y(t) - U_G(t)]}{dt} = I_G \quad (3.2.12)$$

Uzimajući u obzir relaciju (3.2.4) i zanemarujući $U_G(t)$ i I_G iz (3.2.12) dobija se:

$$Y(t) = -\frac{1}{C} \int_0^t \left[\sum_{i=1}^n \frac{X_i(t)}{R_i} \right] dt \quad (3.2.13)$$

Relacija (3.2.13) može se napisati i u obliku:

$$Y(t) = - \sum_{i=1}^n A_i \int_0^t X_i(t) dt \quad (3.2.14)$$

gde je $A_i = 1/R_i C$.

Jednačina (3.2.14) pokazuje da integrator može da obavlja, pored matematičke operacije oblika (3.2.1), i operaciju oblika:

$$y(t) = - \sum_{i=1}^n a_i \int_0^t x_i(t) dt \quad (3.2.15)$$

Uvodjenjem koeficijenata razmere između fizičkih veličina u (3.2.14) i matematičkih veličina u (3.2.15) dobijaju se, kao i ranije, jednačine razmere oblika:

$$\frac{k_{a_i} k_{x_i}}{k_y} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2.16)$$

gde je: $k_y = \frac{Y(t)}{y(t)}$; $k_{a_i} = \frac{A_i}{a_i}$; $k_{x_i} = \frac{X_i(t)}{x_i(t)}$

$$(i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2.17)$$

U relacijama (3.2.1) i (3.2.15) uzeto je da vrednost funkcije $y(t)$, za $t = 0$, iznosi $y(0) = 0$. Ako je, međutim, $y(0) \neq 0$, onda jednačina (3.2.1) dobija oblik:

$$y(t) = -a \int_0^t x(t) dt + y(0) \quad (3.2.18)$$

Relacija (3.2.18) može se realizovati preko integratora sa jednim ulazom čiji je matematički model:

$$Y(t) = -A \int_0^t X(t) dt + Y(0) \quad (3.2.19)$$

Na sličan način je:

$$y(t) = - \sum_{i=1}^n a_i \int_0^t x_i(t) dt + y(0) \quad (3.2.20)$$

za $y(0) \neq 0$ u relaciji (3.2.15). Matematički model integratora sa više ulaza je prema tome oblika:

$$Y(t) = - \sum_{i=1}^n A_i \int_0^t X_i(t) dt + Y(0) \quad (3.2.21)$$

Uslov $Y(0)$ u relacijama (3.2.19) i (3.2.21) realizuje se tako što kondenzator u povratnoj sprezi integratora u trenutku $t=0$ mora biti napunjen količinom elektriciteta $Q(0)$, tako da na njegovim krajevima postoji napon:

$$Y(0) = \frac{Q(0)}{C} \quad (3.2.22)$$

Postavljanje integracione konstante $Y(0)$ na integratorima kod analognih računara biće objašnjeno u narednom izlaganju.

Način korišćenja integratora

Integrator se označava grafičkim simbolom koji je dat na slici 3.2.4, gde broj N predstavlja oznaku integratora, ukoliko je



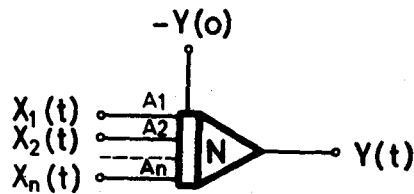
S1. 3.2.4. Grafički simbol za integrator

potrebno izvršiti obeležavanje pojedinih integratora u šemama. Integrator sa postavljenom integracionom konstantom označen je na slici 3.2.5, gde je sa $-Y(0)$ označen napon kojim se vrši postavljanje integracione konstante.

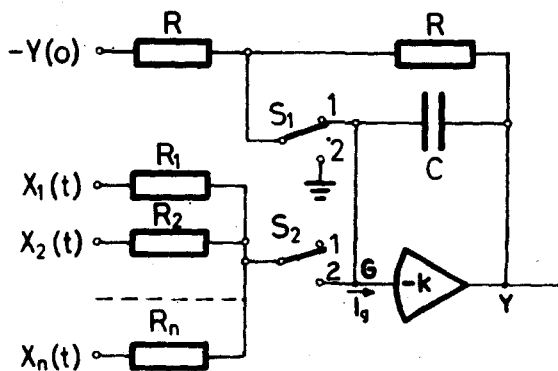
Postavljanje integracione konstante kod analognih računara može se vršiti na dva načina:

- punjenjem kondenzatora u povratnoj sprezi integratora pre početka integracije, i

- dodavanjem integracione konstante posle izvršene integracije.



Sl. 3.2.5. Grafički simbol za integrator sa početnim uslovom
Prvi način postavljanja integracione konstante prikazan je na slici 3.2.6. Pre početka rada integratora vrši se punjenje kon-



Sl. 3.2.6. Postavljanje početnih uslova

denzatora C preko otpora R. Pri ovome su prekidači S_1 i S_2 u položajima 1. Označimo sa $Y_1(t)$ izlaz iz integratora kada su prekidači u položaju 1, za razliku od izlaza $Y(t)$, kada su prekidači u položaju 2.

U kolu povratne sprege, ustvari, nalaze se paralelno spojeni otpor R i kondenzator C, tako da, prema Kirhofovom pravilu, za tačku G važi relacija:

$$C \frac{d[Y_1(t) - U_G]}{dt} + \frac{Y_1(t) - U_G}{R} + \frac{-Y(0) - U_G}{R} = i_G \quad (3.2.23)$$

Zanemarivanjem, kao i u ranijim slučajevima, veličina U_G i I_G dobija se

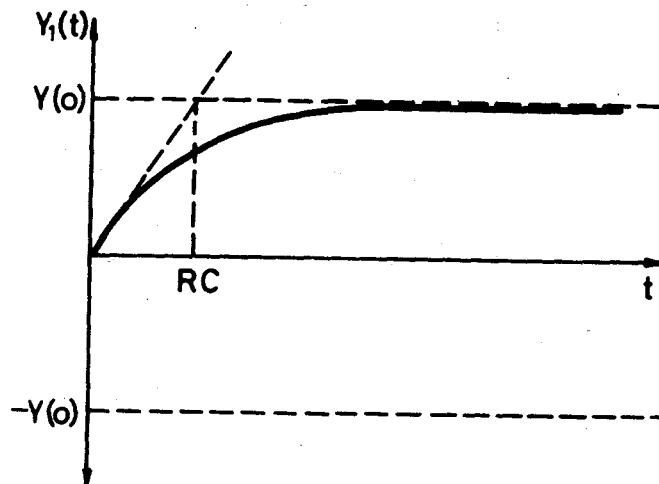
$$\frac{dY_1(t)}{dt} = -\frac{Y_1(t)}{RC} + \frac{Y(0)}{RC} \quad (3.2.24)$$

Diferencijalna jednačina (3.2.24) ima rešenje oblika

$$Y_1(t) = Y(0) \cdot (1 - e^{-t/RC}) \quad (3.2.25)$$

pri $Y_1(0) = 0$.

Iz izraza (3.2.25) vidi se da brzina punjenja kondenzatora C zavisi od vremenske konstante RC . Na slici 3.2.7 dat je gra-



Sl. 3.2.7. Punjenje kondenzatora

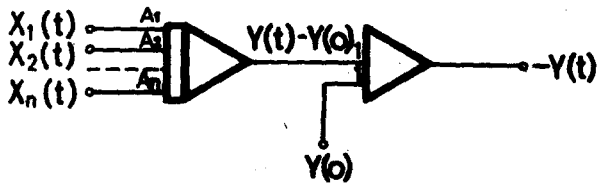
fički prikaz punjenja kondenzatora C , pri postavljanju integracione konstante. Posle dovoljno dugog vremena, u odnosu na konstantu RC , kondenzator je napunjen, a na izlazu iz integratora javlja se napon:

$$Y_1(t) = Y(0) \quad \text{za} \quad t \gg RC \quad (3.2.26)$$

čime je postavljena integraciona konstanta. Posle punjenja kondenzatora, tj. kada je integraciona konstanta postavljena, prekidači S_1 i S_2 se prebacuju u položaj 2, pa integrator do-

bija na ulaz napone $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$ i obavlja operaciju integracije prema (3.2.14)

Drugi način postavljanja integracione konstante vrši se dodavanjem integracione konstante iza integratora. To se praktično izvodi tako što se izlaz integratora, na čijem kondenzatoru nije izvršeno dodavanje integracione konstante, dovodi na ulaz u sabirač i sabira sa integracionom konstantom. Na slici 3.2.8 prikazan je ovaj način postavljanja integracione konstante.



Sl. 3.2.8. Postavljanje početnih uslova

Nedostatak ovog načina je što se na izlazu iz integratora pojavljuje napon $Y(t) - Y(0)$, tako da je potrebno upotrebiti još jedan računski element, u ovom slučaju sabirač, da bi se obezbedio napon $Y(t)$.

Konstante A_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), sa kojima se množe odgovarajućí ulazni napon $X_i(t)$, određene su relacijom:

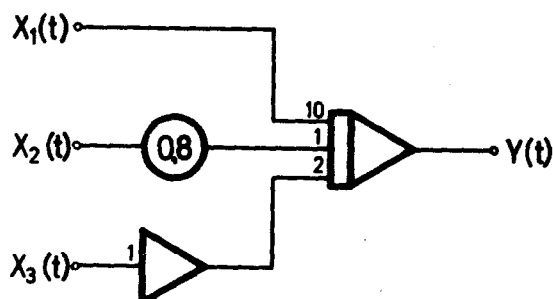
$$A_i = \frac{1}{R_i C} \quad (3.2.27)$$

Ako se usvoji, kao što je to uradjeno kod većine analognih računara da je $C = 1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$, a ulazni otpor 1 M ; 0.5 M , ili 0.1 M , onda će ulazni napon biti pomnožen sa odgovarajućim faktorom 1 ; 2 ; ili 10 . Prema tome, integrator, kao i sabirač, može vršiti i množenja ulaznih napona sa faktorom 1 ; 2 ; ili 10 što zavisi od izbora ulaznog otpora.

Ovo ćemo ilustrovati jednim primerom. Predpostavimo da treba naći integral

$$Y(t) = - \int_0^t [10X_1(t) + 0.8X_2(t) - 2X_3(t)] dt \quad (3.2.28)$$

Na slici 3.2.9 prikazana je šema povezivanja računskih elemenata



Sl. 3.2.9. Primer integracije više ulaznih napona

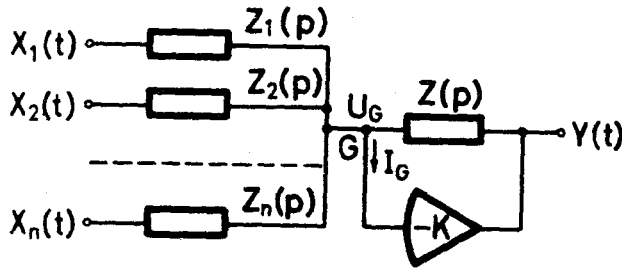
ta za izračunavanje integrala (3.2.28). Sabirač služi za promenu znaka naponu $X_3(t)$, koji se na ulazu u integrator množi faktorom 2. Kako se napon $X_2(t)$ množi faktorom manjim od jedinice, upotrebljen je potenciometar. Množenje napona $X_1(t)$ sa faktorom 10 izvršeno je na ulazu u integrator

3.3. Ostale mogućnosti pojačavača kao računskog elementa

Pojačavač kao računski element upoznali smo u funkciji sabirača i integratora. Videli smo da se kod sabirača na ulazu u pojačavač nalaze otpori, a u povratnoj sprezi takodje otpor. Kod integratora se na ulazu takodje nalaze otpori, ali u povratnoj sprezi nalazi se kondenzator.

Kod izvodjenja matematičkog modela za sabirač, definisanog jednačinom (3.1.4), kao i za integrator, datog jednačinom (3.2.14), nigde se ne pojavljuju karakteristike pojačavača. Jedino se predpostavlja da je pojačanje pojačavača K dovoljno veliko, i da pojačavač vrši promenu znaka ulaznom naponu. Stoga je matematička operacija koja se realizuje pomoću pojačavača kao računskog elementa definisana jedino vrednostima otpornosti kao i kapaciteta na ulazu i u povratnoj sprezi. Uloga pojačavača se sastojala u automatskoj regulaciji približno nultog potencijala u tački G na slici 3.1.3 kod sabirača i na slici 3.2.3 kod integratora.

Sada ćemo posmatrati opštiji slučaj primene pojačavača u analognoj računskoj tehnici. Predpostavićemo da se u kolu povratne sprege nalazi ma kakva impedansa $Z(p)$, a na ulazu impedanse $Z_1(p)$, $Z_2(p)$, ..., $Z_n(p)$, (Sl.3.3.1). Uloga pojačavača na sli-



Sl. 3.3.1. Opšta funkcija pojačavača

ci 3.3.1 je i dalje da održava približno nulti potencijal tačke G. Prema Kirhofovom pravilu za čvor G, u ovom slučaju dobija se

$$\frac{Y(t) - U_G}{Z(p)} + \sum_{i=1}^n \frac{X_i(t) - U_G}{Z_i(p)} = I_G \quad (3.3.1)$$

Budući da je pojačavač konstruisan tako da je struja I_G na ulazu u pojačavač veoma mala, tj. reda 10^{-10} ampera, u odnosu na struje kroz impedanse $Z_i(p)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) i $Z(p)$, to je desna strana jednačine (3.3.1) približno jednaka nuli. Isto tako, kod modernih računara, pojačanje K se kreće između 10^5 i 10^8 , pa je stoga i U_G malo u odnosu na $Y(t)$ i $X_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$), pri čemu su ovi poslednji istog reda, te se može smatrati da je približno $U_G = 0$. Na taj način jednačina (3.3.1) svodi se na oblik

$$Y(t) = - \sum_{i=1}^n \frac{Z(p)}{Z_i(p)} X_i(t) \quad (3.3.2)$$

Iz relacije (3.3.2) sledi da pogodnim izborom impedanse $Z(p)$ i $Z_i(p)$, ($i = 1, 2, \dots, n$), možemo po želji obrazovati funkcije pomoću računskog pojačavača. U tabeli (3.3.1) date su neke kom-

binacije otpora i kondenzatora, sa oznakom odgovarajuće prenosne impedanse, kao i vezom izmedju fizičkih veličina i konstanti

MREŽA	PRENOSNA IMPEDANCA	VREDNOSTI KONSTANATA	VREDNOSTI FIZIČKIH VELIČINA
	A	$A = R$	$R = A$
	$\frac{1}{Bp}$	$B = C$	$C = B$
	$\frac{1}{Bp} (Tp + 1)$	$B = C$ $T = RC$	$R = \frac{T}{B}$ $C = B$
	$\frac{A}{Tp + 1}$	$A = R$ $T = RC$	$R = \frac{A}{A}$ $C = \frac{T}{A}$
	$A \frac{Tp + 1}{Tp + 1}$ $a < 1$	$A = R_1 + R_2$ $T = R_2 C$ $a = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$	$R_1 = aA$ $R_2 = A(1 - a)$ $C = \frac{T}{A(1 - a)}$
	$\frac{1}{Bp} \frac{Tp + 1}{aTp + 1}$ $a < 1$	$B = C_1$ $T = R(C_1 + C_2)$ $a = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$	$R = \frac{T(1 - a)}{B}$ $C_1 = B$ $C_2 = \frac{aB}{1 - a}$
	$A \frac{T_2 p + 1}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}$ $T_1 < T_2 < T_3$	$A = R_1 + R_2$ $T_1 = R_1 C_1$ $T_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2)$ $T_3 = R_2 C_2$	$R_1 = A \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_1}$ $R_2 = A \frac{T_3 - T_2}{T_3 - T_1}$ $C_1 = \frac{T_1 (T_3 - T_1)}{A (T_2 - T_1)}$ $C_2 = \frac{T_3 (T_3 - T_1)}{A (T_3 - T_2)}$

Tabela 3.3.1. Prenosne impedanse nekih pasivnih mreža u prenosnoj impedansi.

Postavljanjem impedansi navedenih u tabeli 3.3.1 na ulazu u pojačavač ili u povratnoj sprezi mogu se dobiti različite funkcije pojačavača, kao linearnog računskog elementa. Navešćemo ovde neke primere:

1. Za $Z(p) = R$ i $Z_i(p) = R_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$), dobija se iz (3.3.2)

$$Y(t) = - \sum_{i=1}^n \frac{R}{R_i} X_i(t) \quad (3.3.3)$$

Relacija (3.3.3) predstavlja, dakle, računski pojačavač u funkciji sabirača.

2. Za $Z(p) = 1/Cp$ i $Z_i(p) = R_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), dobija se

$$Y(t) = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i C p} X_i(t) \quad (3.3.4)$$

odnosno

$$\frac{dY(t)}{dt} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i C} X_i(t) \quad (3.3.5)$$

ili

$$Y(t) = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i C} \int_0^t X_i(t) dt \quad (3.3.6)$$

gde je predpostavljeno da je $Y(0) = 0$. Relacija (3.3.6) kao što se vidi opisuje računski pojačavač kao integrator.

3. Za $Z(p) = R$ i $Z_i(p) = 1/C_i p$, ($i = 1, 2, \dots, n$), dobija se

$$Y(t) = - \sum_{i=1}^n R C_i p X_i(t) \quad (3.3.7)$$

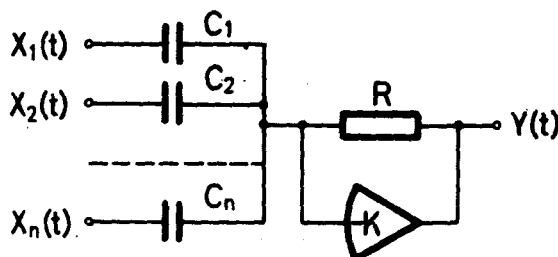
odnosno

$$Y(t) = - \sum_{i=1}^n R C_i \frac{dX_i(t)}{dt} \quad (3.3.8)$$

Iz relacije (3.3.8) sledi da ako se na ulazu u pojačavač nalaze kondenzatori kapaciteta C_i , a u povratnoj sprezi otpor R (sl. 3.3.2), onda je izlazni napon $Y(t)$ proporcionalan sumi diferencijala ulaznih napona $X_i(t)$. U praksi se računski pojačavač retko koristi kao uređaj za diferenciranje ulaznih napona, jer je tačnost ove operacije ograničena. Uzroci ove greške biće detaljnije razmatrani u sledećem odeljku, gde se govori o analizi grešaka kod računskog pojačavača.

4. Za $Z_i(p) = R_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), a u povratnoj sprezi neka se nalazi paralelno vezan otpor R i kondenzator C , tako da je

$$Z(p) = \frac{R}{RCp + 1}$$



Sl. 3.3.2. Operacija diferenciranja ulaznih napona

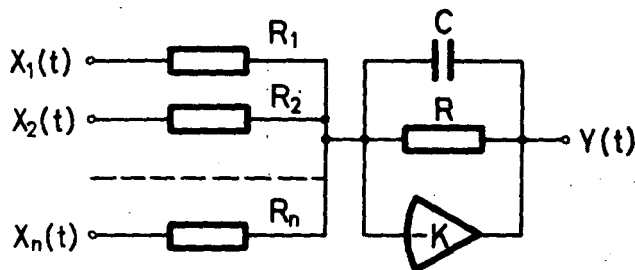
Primenjujući relaciju (3.3.2) na računski pojačavač povezan prema slici (3.3.3) sledi da je

$$Y(t) = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{RCp + 1} \frac{R}{R_i} X_i(t) \quad (3.3.9)$$

odakle se dobija

$$\frac{dY(t)}{dt} + \frac{1}{RC} Y(t) = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i C} X_i(t) \quad (3.3.10)$$

Prema tome, računski pojačavač povezan prema slici 3.3.3 može



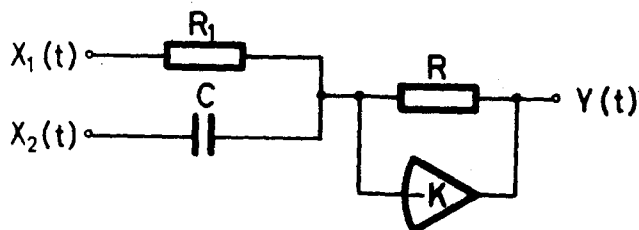
Sl. 3.3.3. Šema povezivanja pojačavača za rešavanje jednačine (3.3.10)

se koristiti za rešavanje diferencijalne jednačine (3.3.10), s tim što se početni uslov $Y(0)$ mora postaviti na kondenzatoru C pre početka rešavanja jednačine.

5. Za $Z(p) = R$, $Z_1(p) = R_1$ i $Z_2(p) = C$, dobija se

$$Y(t) = - \frac{R}{R_1} X_1(t) - RC \frac{dX_2(t)}{dt} \quad (3.3.11)$$

Izlazni napon je u ovom slučaju zbir napona na prvom ulazu i diferencijala napona na drugom ulazu koji su pomnoženi odgovarajućim konstantama. Na slici 3.3.4 data je šema povezivanja elemenata R , R_1 i C i računskog pojačavača koji realizuje relaciju (3.3.11).



Sl. 3.3.4. Šema povezivanja pojačavača za rešavanje jednačine (3.3.11)

Izborom različitih kombinacija mreža sastavljenih od otpora i kondenzatora, i postavljanjem istih na ulazu u pojačavač i u povratnoj sprezi pojačavača, lako se dolazi do različitih funkcija pojačavača, što je ilustrovano navedenim primerima. Ovaj način korišćenja računskog pojačavača je posebno važan, jer pruža mogućnosti znatne uštede u broju računskih pojačavača koji se koriste prilikom rešavanja složenih problema na analognim računarima.

3.4. Analiza grešaka kod računskog pojačavača

Videli smo da se sa računskim pojačavačem mogu vršiti razne linearne matematičke operacije. Svaka takva operacija važi pod izvesnim ograničenjima koje pojačavač kao elektronski uređaj ima.

Razmotrićemo sada ograničenja i greške koje ta ograničenja unose u račun, kako bismo videli sa kojom tačnošću pojačavač može da obavlja pojedine računске operacije, koje se od njega zahtevaju.

Sve netačnosti koje se javljaju kod računskog pojačavača mogu se svrstati u sledeće grupe:

- greške usled konačnog pojačanja,
- greške usled šetanja nule (drifta),

- greške usled konačne ulazne struje,
- greške usled kašnjenja na višim frekvencijama i
- slučajne greške.

Prve četiri grupe grešaka mogu se na neki način i pod izvesnim uslovima otkloniti, ili bar svesti na najmanju meru, dok se slučajne greške veoma teško otklanjaju. Stoga ćemo analizirati samo prve četiri grupe grešaka i to na nešto uprošćen način. Čitalac koji se interesuje samo za eksploatacione mogućnosti analognih računara, može ovaj odeljak preskočiti, jer materija o analizi grešaka neće mnogo uticati na razumevanje ostale materije izložene u ovoj knjizi.

Greške usled konačnog pojačanja

Da bismo analizirali grešku koja nastaje usled toga što pojačavač ima konačno pojačanje, iako dosta veliko, možemo poći od jednačine (3.3.1). Za sada ćemo smatrati da je ulazna struja $I_G = 0$. Ako se zameni (3.1.5) u (3.3.1), posle sredjivanja se dobija:

$$Y(t) = -Z(p) \sum_{i=1}^n \frac{X_i(t)}{Z_i(p)} - \frac{Y(t)}{K} \left[1 + Z(p) \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i(p)} \right] \quad (3.4.1)$$

Očigledno je da ako pojačanje K teži beskonačnosti jednačina (3.4.1) svodi se na (3.3.2), jer drugi član na desnoj strani jednačine (3.4.1) teži nuli, pa se može zanemariti. Ali, kako se iz konstrukcionih razloga ne može napraviti beskonačno pojačanje, razmotrićemo kako se ovo odražava na tačnost.

Stavimo da je

$$\epsilon_k = \frac{Y(t)}{K} \left[1 + Z(p) \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i(p)} \right] \quad (3.4.2)$$

pri čemu je sa ϵ_k označena greška usled konačnog pojačanja. Apsolutna vrednost ove greške može se smanjiti na više načina i to:

- smanjivanjem maksimalne vrednosti računskog (izlaznog) napona $Y(t)$,
- smanjivanjem maksimalne vrednosti faktora u srednjoj zagradi i

- povećanjem pojačanja K .

Ako bismo smanjili računski napon, onda bismo smanjili odnos najmanjeg i najvećeg signala, koji obično iznosi 1:10000, jer su kod svakog elektronskog uređaja šumovi i smetnje reda nekoliko milivolti. Stoga je i izabran računski napon $\pm 100V$ (ili 10V kod tranzistorskih računara). Prema tome, da bi se što više umanjio uticaj šumova, treba raditi sa višim naponima, te smanjenje računskog napona nije preporučljivo, pa se u praksi i ne vrši.

Što se tiče faktora u srednjoj zagradi, trebalo bi da on bude što manji, ali njegovo smanjenje može da ide samo do izvesnih granica, jer odnosi Z/Z_i (za slučaj sabirača R/R_i) ustvari odgovaraju konstantama sa kojima se množe ulazni naponi. Ove konstante, kao što smo videli, kreću se od 1 do 10. U praksi se obično, kod sabirača najčešće radi o tri ulaza sa faktorima množenja od 1 i tri ulaza sa faktorima množenja od po 10, pa za sabirač, kada su svi ulazi povezani, faktor u srednjoj zagradi u relaciji (3.4.2) iznosi: $1+3 \times 1+3 \times 10 = 34$.

Pojačanje K računskog pojačavača, koje se može izračunati na taj način što se pomnože faktori pojačanja pojedinih stepena pojačavača, obično se kreće u granicama od oko 2000 do 10000 kod repetitivnih i manje preciznih računara pri jednosmernom naponu, a oko 10^5 do 10^6 kod preciznijih računara sa automatskom kompenzacijom šetanja nule (drifta).

Prema tome, kako se na napon $Y(t)$ i na faktor u srednjoj zagradi ne može uticati, pokušaćemo da izračunamo koliko treba da bude pojačanje K , da bi se postigla željena tačnost pomoću sabirača. Predpostavimo da želimo da nam sabirač radi sa tačnošću 0.1% i da radi sa 100V, kao i da su mu svi ulazi povezani. Kako je relativna greška u procentima data sa

$$\delta_k = \frac{\Delta Y}{Y} 100\% = \frac{\epsilon_k}{Y} 100\% \quad (3.4.3)$$

i budući da smo ostale greške za sada zanemarili, iz izraza (3.4.2) proizilazi

$$\epsilon_k = \frac{Y \delta_k}{100} = \frac{Y}{K} \left(1 + R \sum_{i=1}^6 \frac{1}{R_i} \right) \quad (3.4.4)$$

odakle je

$$K \geq \frac{100}{\delta_k} \left(1 + R \sum_{i=1}^6 \frac{1}{R_i} \right) \quad (3.4.5)$$

pa se za ranije naveden slučaj dobija

$$K \geq \frac{100}{0.1} (1 + 3 \times 1 + 3 \times 10) = 34000 \quad (3.4.6)$$

Odatle se vidi da pojačanje pojačavača treba da je veće od 34000, da bi greška; samo usled konačnog pojačanja, bila manja od 0.1%. Iz ovog se razloga grade pojačavači sa velikim pojačanjem.

Videćemo sada kako konačno pojačanje utiče na rad pojačavača u sklopu integratora. Ako, naprimer, imamo integrator sa istim ulazima kao i gornji sabirač (tri ulaza sa faktorom množenja 1 i tri ulaza sa faktorom množenja 10), i ako on treba da radi sa tačnošću 0.1% za vreme od pet minuta, onda prema (3.4.3) i (3.4.2) sledi

$$\epsilon_k = \frac{Y \delta_k}{100} = \frac{Y}{K} \left(1 + \sum_{i=1}^6 \frac{1}{R_i C P} \right) \quad (3.4.7)$$

u kompleksnom domenu, jer je $Z = 1/CP$. Transformacijom jednačine (3.4.7) u vremenski domen i rešavanjem po K , dobija se da je

$$K \geq \frac{100}{\delta_k} \left(1 + \sum_{i=1}^6 \frac{1}{R_i C} t \right) \quad (3.4.8)$$

a nakon zamene zadatih vrednosti

$$K \geq \frac{100}{0.1} [1 + (3 + 30) \cdot 300] = 9,9 \cdot 10^6 \approx 10^7 \quad (3.4.9)$$

tj. pojačanje računskog pojačavača, da bi u sklopu integratora radio sa tačnošću od 0.1% za vreme od pet minuta, pri gornjim uslovima, treba da bude veće od 10^7 . Stoga je preporučljivo ne koristiti više ulaza u integratore, niti pustiti da računski radi duže od pet minuta, jer kao što se vidi greška kod integratora raste sa vremenom.

Greške usled šetanja nule (drift)

Računski pojačavač je napravljen od raznih otpornika, kondenza-

tora, elektronskih cevi ili tranzistora i drugih elemenata koji mogu da menjaju svoje nominalne vrednosti i parametre tokom vremena usled temperature i vlažnosti vazduha, usled promene napona napajanja, promena karakteristika sa vremenom, itd. Svi ovi uzroci utiču tako, da kada je na ulazu u pojačavač napon $U_G = 0$, tada napon na izlazu Y nije ravan nuli već pokazuje tendenciju lagane promene oko nule, te se kaže da "šeta nula" ili da pojačavač ima "drift". Ove promene napona na izlazu mogu se preračunati na ulaz i smatrati da se radi sa idealnim pojačavačem na koji deluje neki ulazni napon U_d , koji se naziva napon drifta i koji nikada nije nula. Prema tome, jednačina (3.1.5) koja kaže da, ako se na ulaz pojačavača dovede napon U_G , na izlazu se pojavljuje napon Y suprotnog znaka, koji predstavlja prosto K puta pojačan napon U_G , sada se mora modifikovati, jer postoji i napon drifta U_d . Stoga nova jednačina pojačavača glasi:

$$Y = -K(U_G + U_d) \quad (3.4.10)$$

Izlazni napon Y može se dovesti na nulu pomoću uređaja za kompenzaciju drifta koji se, kod manje tačnih računara, podešava ručno, a kod tačnijih i ručno i automatski. Međutim, i kod najbolje konstruisanih pojačavača nije postignuta potpuna kompenzacija drifta, te izlazni napon pojačavača, ipak šeta oko svoje nominalne (nulte) vrednosti, a to utiče na tačnost rada pojačavača. Ovo je naročito uočljivo kod integratora, jer se kod njega svaka greška integrira, i, prema tome, raste sa vremenom.

Ako se iz jednačina (3.3.1) i (3.4.10) eliminiše U_G (pri uslovu da je $I_G = 0$), nakon sredjivanja se dobija:

$$Y(t) = - \frac{Z(p) \sum_{i=1}^n \frac{X_i(t)}{Z_i(p)}}{1 + \frac{1}{K} \left[1 + Z(p) \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i(p)} \right]} - \frac{1 + Z(p) \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i(p)}}{1 + \frac{1}{K} \left[1 + Z(p) \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i(p)} \right]} U_d \quad (3.4.11)$$

Greška koja potiče usled drifta može se izraziti u obliku

$$\epsilon_d = U_d \left[1 + Z(p) \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i(p)} \right] \quad (3.4.12)$$

Relacija (3.4.12) se dobija iz drugog člana na desnoj strani relacije (3.4.11), kada se pretpostavi da je K dovoljno veliko. U slučaju sabirača greška ϵ_d je veoma mala, naročito kod sabirača koji imaju automatsku kompenzaciju drifta. U slučaju integratora kod kojeg je $Z(p) = 1/Cp$ i $Z_i(p) = R_i$, ova greška prema (3.4.12) iznosi

$$\epsilon_d = U_d \left[1 + \frac{1}{Cp} \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \right] = U_d + \frac{1}{C} \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \int_0^t U_d dt \quad (3.4.13)$$

Jasno je odavde da, kako greška usled drifta raste sa vremenom, potrebno je da koeficijent ispred integrala u jednačini (3.4.13) bude što manji. Naprimera, ako bi bilo $U_d = 0,1$ V i ako bi postojao jedan ulaz u integrator preko konstante $RC = 1$, izlazni napon integratora, posle rada od pet minuta, iznosio bi više od 30V, iako bi na ulazu bio napon nula.

Očigledno je stoga da drift može da unese ozbiljne greške u rešenje koje se dobija na analognom računaru, naročito ako rešavanje problema traje duže vreme. Stoga je preporučljivo da se prilikom dužeg rada sa računarem češće proveravaju i podešavaju "nule" kod pojačavača, naročito kod integratora.

Isto tako, ako neki problem ima nestabilno rešenje, ili ako je ono na granici stabilnosti, mogu se dobiti potpuno pogrešni rezultati. Ovo je naročito izraženo kod problema koji po svojoj strukturi nemaju kod analognih blok šema povratne veze, jer greške na krajnjem računskom elementu mogu da budu veoma velike. Stoga je postojalo ozbiljno ograničenje u pogledu problema koji su se mogli rešavati pomoću elektronskih analognih računara pre nego što su se pojavili pojačavači sa automatskom kompenzacijom drifta. Međutim, pojavom ovakvih pojačavača, greška usled drifta je smanjena za 500 do 2000 puta. Drift kod integratora sa ovakvim pojačavačem, pri ulaznoj RC konstanti ravnoj 1 je manji od 1V/čas.

Greške usled konačne ulazne struje

Kod računskih pojačavača kao ulazni elementi koriste se specijalne elektronske cevi ili tranzistori, kod kojih je ulazna

struja I_G veoma mala. Uobičajene vrednosti ovih struja su reda 10^{-10} A. Ali i pored toga što su te struje male, one izazivaju izvesne greške. Da bismo ispitali koliki je uticaj ulazne struje na tačnost rada pojačavača, poći ćemo od jednačina (3.1.5) i (3.3.1), pri čemu više nećemo pretpostaviti da je $I_G = 0$. Iz ovih se jednačina dobija

$$Y(t) = - \frac{z(p) \sum_{i=1}^n \frac{X_i(t)}{Z_i(p)}}{1 + \frac{1}{K} \left[1 + z(p) \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i(p)} \right]} + \frac{z(p) I_G}{1 + \frac{1}{K} \left[1 + z(p) \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i(p)} \right]} \quad (3.4.14)$$

Prema tome, greška koja se javlja, na izlazu iz pojačavača, usled ulazne struje biće:

$$\epsilon_I = \frac{z(p) I_G}{1 + \frac{1}{K} \left[1 + z(p) \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i(p)} \right]} \quad (3.4.15)$$

ili ako je K dovoljno veliko, tako da je $1/K$ približno nula, iz (3.4.15) se dobija

$$\epsilon_I = z(p) I_G \quad (3.4.16)$$

Naprimera, za slučaj sabirača, ulazna struja je reda 10^{-10} A, a otpor povratne sprege $R = 1$ M, pa greška iznosi $\epsilon_I = 10^{-4}$ V. U slučaju integratora, kod kojeg je kapacitet u povratnoj sprezi 1 μ F i pri istoj ulaznoj struji, ova će greška biti

$$\epsilon_I = \frac{1}{C} \int_0^t I_G dt = 10^{-4} t \quad (3.4.17)$$

tj. promena napona na izlazu integratora usled konačne ulazne struje iznosi 6 mV/min.

Ova razmatranja pokazuju da, iako je uticaj ulazne struje pojačavača veoma mali, ipak se ne može zanemariti. Naročito kod računskih pojačavača sa automatskom kompenzacijom drifta ova greška može da bude veća od greške usled konačnog pojačanja i usled drifta.

Kako je greška usled ulazne struje na prvom mestu funkcija im-

pedanse povratne sprege, to ako se želi da računar rešava neki problem duže vreme potrebno je da kapacitet kondenzatora kod integratora bude veći. Isto tako, manji otpor u kolu povratne sprege sabirača smanjuje uticaj ulazne struje, i poboljšava tačnost rada sabirača.

Greške usled kašnjenja na višim frekvencijama

U dosadašnjim razmatranjima smatralo se da pojačavač radi tako da se svi signali, koji mu se dovode na ulaz trenutno prenose pojačani na izlaz, te da je odnos izlaznog napona i ulaznog dat prostim izrazom (3.1.5), odnosno (3.4.10), ako se uzme u obzir drift. Medjutim, konstruktivno je nemoguće napraviti takav pojačavač, te su ove navedene formule ustvari samo prva aproksimacija stvarnog stanja.

Ako se napon U_G menja veoma brzo, onda se, kao i kod svakog elektronskog uredjaja izlazni napon javlja sa izvesnim kašnjenjem, koje sve više dolazi do izražaja, što je frekvencija napona na ulazu viša. Pored efekta kašnjenja dolazi i do različitog pojačanja ulaznog signala u zavisnosti od njegove frekvencije. Stoga se ne može više smatrati da važi relacija (3.1.5), kod koje je K konstantno, već prenosna karakteristika pojačavača ima oblik

$$Y = - K_0 e^{-pT} \cdot U_G \quad (3.4.18)$$

Član e^{-pT} izražava kašnjenje u operatorskom obliku, a veličina T vremensku konstantu kašnjenja. Ova konstanta potiče od parazitnih kapacitivnosti i drugih veličina unutar pojačavača, koje doprinose kašnjenju. Ono se može izmeriti i obično se daje kao konstruktivni podatak za računski pojačavač.

Jednačina (3.4.18) može se napisati, aproksimirajući funkciju e^{-pT} u obliku

$$Y = - \frac{K_0}{1 + pT} U_G \quad (3.4.19)$$

Ova jednačina dovoljno tačno predstavlja prenosnu karakteristiku pojačavača.

Sada ćemo preko jednačine (3.4.19) proučiti kako se ponaša pojačavač za razne frekvencije ulaznog napona, tj. proučićemo tzv.

frekventnu karakteristiku pojačavača, predpostavljajući da je ulazni napon sinusnog oblika i da je dat izrazom

$$U_G = E_G \sin \omega t \quad (3.4.20)$$

gde je $\omega = 2\pi f$, a f frekvencija sinusoida i da se ona menja od 0 do ∞ . Ovo razmatranje je opravdano jer je poznato da se svaka periodična funkcija može razviti u Fourier-ov red, koji se sastoji od zbira prostoperiodičnih funkcija. Frekventna karakteristika pojačavača opisuje kako se svaka od tih funkcija prenosi kroz pojačavač.

Ako zanemarimo prelazna stanja u pojačavaču, koja vrlo brzo izležavaju, jer je pojačavač tako konstruisan, i koja zavise samo od početnih uslova, napon na izlazu pojačavača, kada mu se na ulaz dovede sinusni napon (3.4.20), biće

$$Y(t) = E \sin(\omega t + \phi) \quad (3.3.21)$$

gde je

$$E = \frac{K_0 E_G}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \quad \text{i} \quad \text{tg} \phi = -T\omega \quad (3.4.22)$$

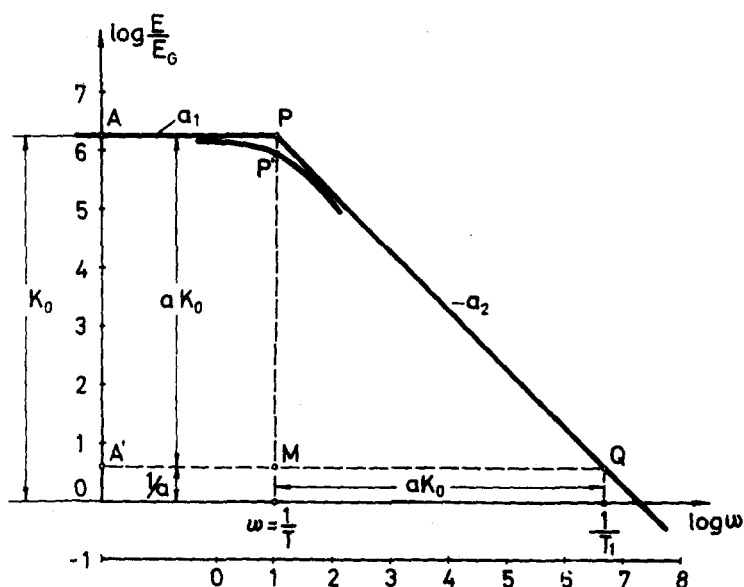
Izlazni napon je dakle, takodje sinusnog oblika, iste frekvencije, ali različite amplitude E , i pomeren fazno za ugao ϕ u odnosu na ulazni signal. I amplituda i fazni ugao zavise od frekvencije ω .

Nas ustvari interesuje da razmotrimo kako se menja odnos E/E_G , tj. pojačanje K , kada se frekvencija menja u jednom širem opsegu. Očigledno je, prema (3.4.22), da ovaj odnos prilično varira, te ćemo razmatranje vršiti u tzv. logaritamskom dijagramu, tj.

$$\log \frac{E}{E_G} = \Psi(\log \omega) \quad (3.4.23)$$

Iz izraza (3.4.22) vidi se da kada $\omega \rightarrow 0$, onda odnos $E/E_G = K \rightarrow K_0$, tj. kriva ima jednu asimptotu a_1 paralelnu sa apscisnom osom. Sama kriva teži toj asimptoti sa leve strane dijagrama (sl. 3.4.1). To je ustvari tzv. statičko pojačanje pojačavača i ono važi za relativno spore promene ulaznog napona. Kada $\omega \rightarrow \infty$ izraz $E/E_G \rightarrow K/T\omega$, što u logaritamskom dijagramu predstavlja pravu a_2 , koja seče gornju asimptotu u tački P , za $K = 1$ i za $\omega = 1/T$, i koja je nagnuta prema osi $\log \omega$ pod uglom od

- 45° . Ustvari za $\omega = 1/T$ kriva data jednačinom (3.4.22) ima



Sl. 3.4.1. Frekventna karakteristika pojačavača

vrednost $E/E_G = K_0/\sqrt{2}$, i to je tačka P' , koja je u logaritamskom dijagramu po vrednosti veoma bliska tački P . Prema tome, stvarna se kriva vrlo brzo približava obema asimptotama a_1 i a_2 (sl. 3.4.1). Stoga se u praksi retko crta sama kriva, već se frekventna karakteristika pojačavača predstavlja pomoću asimptota, u ovom slučaju a_1 i a_2 . Frekvencija $\omega = 1/T$ naziva se granična frekvencija pojačavača.

Kao što smo videli u logaritamskom dijagramu (sl. 3.4.1) nagib asimptote a_2 iznosi -45° , tj. opadanje frekventne karakteristike od granične frekvencije je 1:1. Ali, veoma se često ovakvo opadanje frekventne karakteristike sa porastom frekvencije izražava u decibelima po oktavi, i za gornji slučaj ono iznosi 6dB/oct., pa ćemo ovde objasniti kako se dobija i šta znači ova vrednost.

Prema definiciji naponskog pojačanja, izraženog u decibelima (dB), ako odnos izlaznog i ulaznog napona iznosi E/E_G , onda je

$$N[\text{dB}] = 20 \log \frac{E}{E_G} \quad (3.4.24)$$

Tako, ako je pojačanje pojačavača 10, onda se kaže da pojačanje iznosi 20 dB. Isto tako, iz akustike je poznato da jedna oktava predstavlja dve frekvencije čiji je odnos 2, što u logaritamskoj predstavi iznosi $\log 2 = 0.301$. Prema tome, ako se frekvencija promeni za 2, onda, prema asimptoti a_2 , pojačanje pojačavača opadne za

$$N = 20 \times \log 2 = 20 \times 0.301 = 6 \text{ dB/octavi} \quad (3.4.25)$$

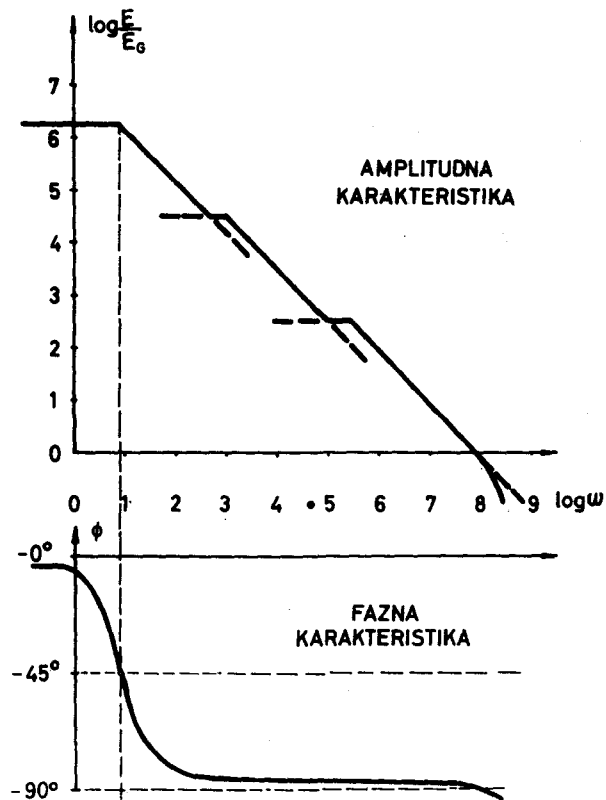
pa se kaže da strmina, ili brzina opadanja frekventne karakteristike, iznosi, u logaritamskom dijagramu, 6 decibela po oktavi. Stvarna karakteristika pojačavača predstavljena je na slici 3.4.2, gde se vidi da je asimptota a_2 sastavljena od više pravolinijskih segmenata koji su nešto pomereni jedan u odnosu na drugi, a svaki segment odgovara jednom stepenu pojačavača. Srednji nagib asimptote ovakvog pojačavača je nešto manji od -45° , ali zato za vrlo visoke frekvencije, tj. iznad 1 MHz, može se zapaziti brže opadanje frekventne karakteristike, što nije u skladu sa jednačinom (3.4.19), jer za taj slučaj već dolaze do izražaja viši članovi reda koje smo zanemarili. Za jedan praktično dobro izgrađen računski pojačavač uobičajene vrednosti ovih veličina treba da budu:

- granična frekvencija reda 10 do 100 Hz
- frekvencija na kojoj pojačanje pada na 1, veća od 1MHz
- opadanje pojačanja od granične frekvencije oko 6dB/oct.

Fazni dijagram (sl. 3.4.2) treba da bude takav da na graničnoj frekvenciji pomeranje po fazi bude oko -45° i da posle toga lagano teži ka -90° . Za sve frekvencije, za koje je pojačanje veće od 1, pomeranje po fazi ϕ ne bi smelo da bude veće od -90° , jer tada dolazi do samooscilacija pojačavača. Stoga, da bi pojačavač dobro i stabilno mogao da obavlja svoju funkciju, pomeranje po fazi mora da bude manje od -90° za pojačanje veće od 1. Ovo se postiže ugradjivanjem raznih specijalnih filtera i drugih sistema za kompenzaciju faze u pojačavaču.

Ispitaćemo sada kakav uticaj ovakva karakteristika pojačavača ima na rad pojačavača kao računskog elementa. Uzećemo prvo sa-

birač sa jednim ulazom (invertor). Jednačina (3.3.1) pri $I_G=0$



Sl. 3.4.2. Stvarna frekventna i fazna karakteristika pojačavača

u ovom slučaju glasi:

$$\frac{Y - U_G}{R} + \frac{X_1 - U_G}{R_1} = 0 \quad (3.4.26)$$

imajući u vidu relaciju (3.1.5) lako se dobija da je

$$Y = - \frac{X_1 \frac{R}{R_1}}{1 + \frac{1}{K} \left(1 + \frac{R}{R_1}\right)} \quad (3.4.27)$$

ili ako sa a označimo izraz $\frac{R_1}{R + R_1}$, onda je

$$Y = - X_1 \frac{R}{R_1} \frac{aK}{1 + aK} \quad (3.4.28)$$

Budući da pojačanje K zavisi od frekvencije ulaznog signala, to je prema (3.4.19)

$$K = \frac{K_0}{1 + Tp} \quad (3.4.29)$$

Zamenom (3.4.29) u (3.4.28) dobija se prenosna karakteristika sabirača (invertora) sa jednim ulazom u obliku:

$$\frac{Y}{X_1} = - \frac{R}{R_1} \frac{a \frac{K_0}{1 + Tp}}{1 + a \frac{K_0}{1 + Tp}} = - \frac{R}{R_1} \frac{aK_0}{1 + aK_0 + Tp} \quad (3.4.30)$$

Ako se zanemari jedinica u odnosu na aK_0 i posle sredjivanja, jednačina (3.4.30) postaje

$$\frac{Y}{X_1} = - \frac{R}{R_1} \frac{1}{1 + T_1 p} \quad (3.4.31)$$

gde je

$$T_1 = \frac{T}{aK_0} \quad (3.4.32)$$

Jednačina (3.4.31) je istog oblika kao i (3.4.29), pri čemu je $p = j\omega$, s tim što je statičko pojačanje ustvari odnos $R/R_1 = A_1$ (što smo već ranije videli). Medjutim, vremenska konstanta T_1 je ustvari vremenska konstanta pojačavača podeljena sa aK_0 , tj. sa vrlo velikim brojem.

Ako sada na slici 3.4.1 povučemo pravu paralelnu sa apscisnom osom, na visini $1/a$, (pri čemu je a broj uvek manji od 1), tj. pravu $A'Q$, onda je duž \overline{MP} jednaka sa aK_0 u logaritamskim razmerama. Apscisa tačke P je $1/T$, a apscisa tačke Q , tj. granična frekvencija je $1/T_1 = aK_0/T$. Tačka Q se nalazi sa desne strane tačke M , i to na rastojanju $\overline{MQ} = aK_0$, što znači da tačka Q leži na pravoj a_2 , baš kao što je to pokazano na slici 3.4.1. Odavde proizilazi da je za nalaženje granične frekvencije sabirača sa jednim ulazom potrebno na dijagramu, koji predstavlja frekventnu karakteristiku pojačavača, povući pravu paralelnu apscisnoj osi na rastojanju $1/a$. Presek te

prave sa karakteristikom, tj. tačka Q, daje graničnu frekvenciju sabirača.

Kod praktično izvedenih računskih pojačavača, kada rade kao sabirači, ova granična frekvencija pomena je za 4 do 5 dekada prema višim frekvencijama, a u vezi sa tim i kriva faznog pomeraja. Ako naprimer, pojačavač ima graničnu frekvenciju oko 10 Hz i ako on radi u nekom računskom kolu sa 2 Hz, što je red veličine koji se vrlo često javlja u praksi, može se pomoću gornje analize pokazati da će se na pojačavaču pojaviti fazni pomeraj, a prema (3.4.22), od

$$\operatorname{tg} \phi = -\omega T = \frac{2}{10} = 0.2 ; \quad \phi = 11.5^{\circ}$$

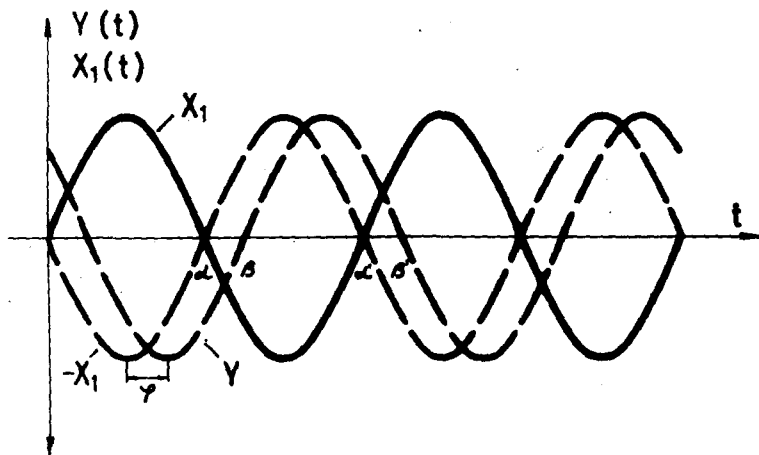
a to je vrednost koja je prilično velika. Ali, ako ovakav pojačavač čije pojačanje iznosi $K_0 = 10^5$ radi u sklopu sabirača (obrtača znaka - invertora) kod kojeg je odnos otpornosti u povratnoj grani i na ulazu jednak 1, odnosno $a = 2$, granična frekvencija će, prema (3.4.32), biti povećana aK_0 puta, tj. iznosi 2×10^6 Hz, a fazni pomeraj će za iste uslove iznositi:

$$\operatorname{tg} \phi = -\omega T_1 = \frac{2}{2 \times 10^6} = 10^{-6} \quad \phi = 4 \times 10^{-4} \text{ uglovnih sekundi}$$

što je mnogo povoljnije.

Fazni pomeraj, ako ima veliku vrednost, izaziva nestabilnost u radu pojačavača. Još ranije smo videli da je prvi uslov stabilnog rada računskog pojačavača u sklopu sabirača, da mu pojačanje stalno bude negativno. Medjutim, ako postoji fazni pomeraj, onda se stvaraju uslovi kada to pojačanje postaje pozitivno, a to se dešava u svakoj poluperiodi naizmeničnog signala, između tačaka α , β i α' , β' , kao što je prikazano na slici 3.4.3, što naročito dolazi do izražaja pri višim frekvencijama. Ovo izaziva nestabilnost rada pojačavača, te unosi i smetnje u rad računara, pa se javljaju greške koje su sve veće ukoliko se radi sa višim frekvencijama. Stoga kod rešavanja problema treba izbegavati vrlo visoke frekvencije.

Nešto se drugačije manifestuje uticaj frekventne karakteristike računskog pojačavača kada on radi u sklopu integratora. Za ovaj slučaj je $Z(p) = 1/Cp$, pa ako postoji samo jedan ulaz u integrator, onda jednačina (3.3.1) daje:



Sl. 3.4.3. Fazni pomeraj naizmeničnog signala

$$Y = -X_1 \frac{1}{RCp} \frac{1}{1 + \frac{1}{K} \left(1 + \frac{1}{RCp}\right)} \quad (3.4.33)$$

što se može napisati u obliku

$$Y = -X_1 \frac{1}{RCp + \frac{RCp + 1}{K}} \quad (3.4.34)$$

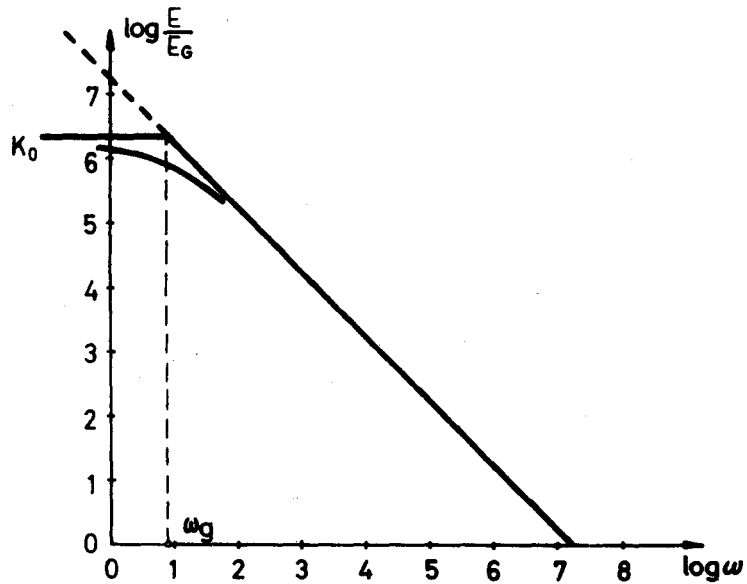
Videli smo, međutim, da stvarno pojačanje pojačavača, usled uticaja kašnjenja, ima oblik dat jednačinom (3.4.29), pa kada se vrednost za K zameni u jednačinu (3.4.34) dobija se

$$Y = -X_1 \frac{1}{RCp + \frac{(RCp + 1)(Tp + 1)}{K_0}} \quad (3.4.35)$$

Sa druge strane da bi integrator pravilno radio potrebno je da ima idealnu prenosnu funkciju oblika

$$\frac{Y}{X_1} = -\frac{1}{RCp} \quad (3.4.36)$$

Iz poslednje se jednačine vidi da kada $p \rightarrow 0$, odnos $Y/X_1 \rightarrow \infty$. Međutim, stvarni pojačavač ima za niske frekvencije konačno pojačanje K_0 , te u sklopu integratora pojačavač neće dati tačne rezultate pri niskim frekvencijama (sl. 3.4.4). Za ovaj slučaj granična frekvencija, kao i ranije, data je sličnim izra-



Sl. 3.4.4. Rad integratora pri niskim frekvencijama zom kao i kod pojačavača, tj.

$$\omega_g = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{RC K_0} \quad (3.4.37)$$

Prema tome, u slučaju integratora, trebalo bi da računski pojačavač ima vrlo veliko pojačanje za niže frekvencije (prava izvučena isprekidano na slici 3.4.4), te se stoga i predviđaju specijalne metode da bi se ovo postiglo.

4. MNOŽAČ

4.1. Funkcija množaća

Matematička operacija množenja dve promenljive veličine neka je data izrazom

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) \quad (4.1.1)$$

gde su $x(t)$ i $y(t)$ promenljive veličine sa vremenom.

Računski element na savremenom analognom računaru koji može da obavlja matematičku operaciju (4.1.1) naziva se množać.

Fizičke veličine $X(t)$ i $Y(t)$, koje odgovaraju promenljivim veličinama $x(t)$ i $y(t)$, nazivaju se ulazni naponi u množač, a fizička veličina $Z(t)$ koja se javlja na izlazu množača, a koja odgovara promenljivoj $z(t)$, naziva se izlazni napon.

Kod analognih računara množenje dve promenljive veličine može se obavljati na više načina, i u zavisnosti od toga postoje razni tipovi množača. Ali svi ovi tipovi mogu se podeliti u dve glavne grupe i to:

- množači koji koriste elektromehaničke metode, i koji se nazivaju servomnožači i
- množači koji koriste elektronske metode i koji se nazivaju elektronski množači.

U ovoj ćemo se glavi ograničiti samo na opis rada onih množača koji se najčešće javljaju kod modernih analognih računara.

4.2. Servomnožač

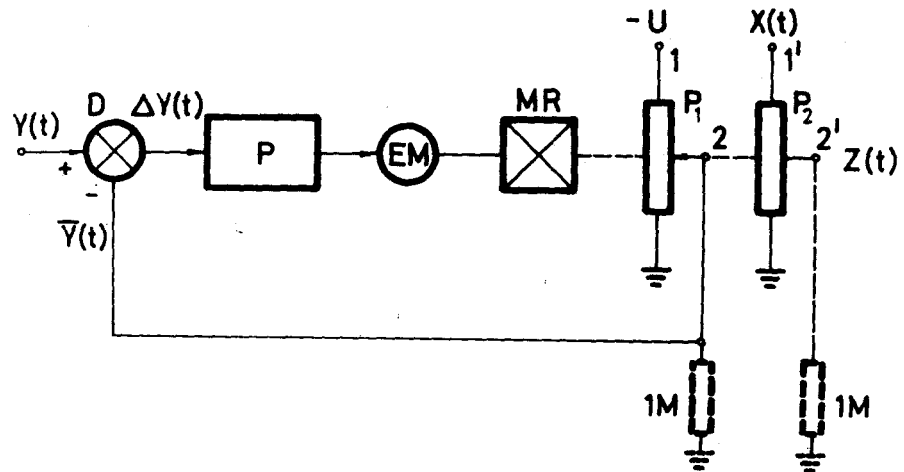
Ranije smo videli da se množenje nekog promenljivog napona, u našem slučaju $X(t)$ sa konstantom, manjom od jedinice, može vršiti pomoću računskog elementa koji se naziva potencijometar. Videli smo da je za ovo potrebno na ulaz potencijometra dovesti napon $X(t)$, klizač potencijometra postaviti na vrednost konstante, manje od jedinice, i na izlazu će se prema (2.1.5) pojaviti napon $X(t)$ pomnožen sa konstantom, koju smo označili sa A .

Ideja servomnožača potekla je baš od ove osobine potencijometra. Naime, ako je na neki način moguće napraviti takav elektromehanički uređaj, koji može da pomera klizač nekog potencijometra u zavisnosti od neke druge promenljive veličine, u našem slučaju $Y(t)$, onda bi se na klizaču toga potencijometra, kao izlazu dobio napon određen izrazom

$$Z(t) = B \cdot X(t) \cdot Y(t) \quad (4.2.1)$$

Za pokretanje klizača potencijometra u zavisnosti od funkcije $Y(t)$, kod analognih računara koristi se tzv. pozicioni servomehanizam, pa se stoga i množač koji radi sa servomehanizmom, naziva servomnožač. Na slici 4.2.1 prikazana je principna šema servomnožača. Deo šeme koji se sastoji od diskriminatora D ,

pojačavača P, elektromotora EM, mehaničkog reduktora MR i potencijometra P₁ predstavlja tzv. pozicioni servomehanizam.



Sl. 4.2.1 Principialna šema servomožajača

Napon $Y(t)$, kao jedna od ulaznih veličina, dolazi na diskriminator D, u kojem se vrši upoređenje sa naponom $\bar{Y}(t)$. Diskriminator D je napravljen tako, da se na njegovom izlazu javlja razlika ova dva napona koja je definisana sa

$$\Delta Y(t) = Y(t) + \bar{Y}(t) \quad (4.2.2)$$

jer je $\text{sign } \bar{Y}(t) = -\text{sign } Y(t)$. Veličina $\Delta Y(t)$, iz diskriminatora D, dolazi na ulaz specijalnog pojačavača P, koji pored pojačanja napona $\Delta Y(t)$ daje i određenu snagu, za pokretanje elektromotora EM. Elektromotor pokreće klizač potencijometra P₁, preko mehaničkog reduktora MR (skup zupčanika sa određenim prenosnim odnosom) u jednom ili drugom smeru u zavisnosti od znaka napona na elektromotoru.

Ako na kraj 1 potencijometra P₁ (sl. 4.2.1) dovedemo napon $-U$, onda vrednost napona na klizaču 2 može da bude u granicama

$$-U \leq \bar{Y}(t) \leq 0 \quad (4.2.3)$$

Rad pozicionog servomehanizma sastoji se u sledećem: Promena napona $Y(t)$ izaziva promenu napona $\Delta Y(t)$, ova se promena po-

jačava u pojačavaču P i stvara napon za pokretanje elektromotora u jednom ili drugom smeru. Motor preko reduktora pokreće klizač potencijometra P_1 tako da $\bar{Y}(t)$ na klizaču 2, teži da se izjednači po apsolutnoj vrednosti sa naponom $Y(t)$, tako da $\Delta Y \rightarrow 0$, jer su naponi $Y(t)$ i $\bar{Y}(t)$ suprotnog znaka. Kada se ostvari uslov $\Delta Y(t) = 0$, onda se i na izlazu pojačavača ne javlja nikakav napon, te motor ne pokreće klizač. Tada kažemo da je servomehanizam u ravnoteži. Napon $\bar{Y}(t)$ dakle prati napon $Y(t)$ po apsolutnoj vrednosti, a to znači da se osovina na kojoj se nalazi klizač potencijometra P_1 , pokreće tačno u zavisnosti od napona $Y(t)$. Ovo sledi iz relacije (4.2.2) kada je $\Delta Y(t) = 0$. Važno je ovde napomenuti da vrednost ulaznog napona $Y(t)$ mora da bude u granicama

$$0 \leq Y(t) \leq +U \quad (4.2.4)$$

kako bi prema (4.2.2) i (4.2.3) moglo u svakom trenutku da bude $\Delta Y = 0$.

Ako se na zajedničkoj osovini potencijometra P_1 nalazi i potencijometar P_2 , čiji je klizač podešen mehanički tako da se nalazi u istom položaju u odnosu na krajeve potencijometra kao i klizač potencijometra P_1 , što znači da se i klizač potencijometra P_2 kreće u zavisnosti od funkcije $Y(t)$. Dovoljno je sada na kraj 1' potencijometra P_2 dovesti napon $X(t)$ (sl. 4.2.1) pa da se na klizaču, tj. u tački 2' pojavi napon $Z(t)$ definisan jednačinom (4.2.1).

Uvedimo sada koeficijente razmere izmedju fizičkih veličina $X(t)$, $Y(t)$, i $Z(t)$ i matematičkih veličina $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$, tako da je

$$k_x = \frac{X(t)}{x(t)}; \quad k_y = \frac{Y(t)}{y(t)}; \quad k_z = \frac{Z(t)}{z(t)} \quad (4.2.5)$$

Fizička veličina U naziva se računski napon i kod raznih tipova računara ona ima različite vrednosti. Uobičajeni računski naponi kod savremenih analognih računara su: $U = 100V$, $U = 50V$ i $U = 10V$. Vrednost konstante B , određena je iz fizičkog uslova

$$0 \leq BY(t) \leq 1 \quad (4.2.6)$$

Kako je gornja granica napona $Y(t)$ napon U , to se iz (4.2.6) dobija

$$BU = 1 \quad (4.2.7)$$

odakle je

$$B = \frac{1}{U} \quad (4.2.8)$$

Ako se sada u jednačinu (4.2.1) uvedu vrednosti iz (4.2.5), dobija se

$$z(t) = \frac{1}{U} \frac{k_x k_y}{k_z} x(t) \cdot y(t) \quad (4.2.9)$$

Poredjenjem jednačina (4.2.9) i (4.1.1) dobija se da je

$$\frac{1}{U} \frac{k_x k_y}{k_z} = 1 \quad (4.2.10)$$

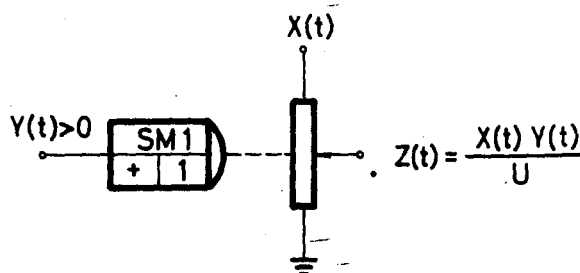
Ako se usvoje isti faktori razmere za obe ulazne veličine, tj. $k_x = k_y$, onda iz (4.2.10) faktor razmere za izlaznu veličinu biće dat izrazom

$$k_z = \frac{k_x^2}{U} = \frac{k_y^2}{U} \quad (4.2.11)$$

o kojem treba voditi računa prilikom korišćenja množača.

Način korišćenja servomnožača

Servomnožač, koji je prethodno opisan, označen je grafičkim simbolom prikazanim na slici 4.2.2, gde oznaka SM1 označava

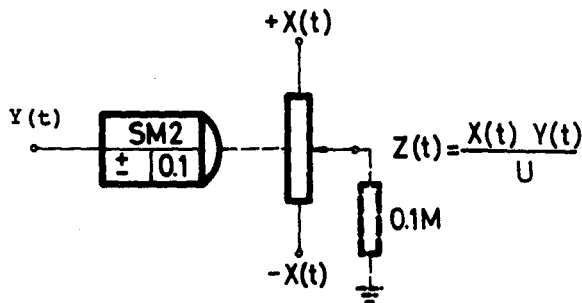


Sl. 4.2.2. Grafički simbol za servomnožač

da je to servomnožač broj 1, pošto se pri rešavanju konkretnih problema može koristiti više servomnožača, oznaka + kazuje da je veličina $Y(t) \geq 0$, prema formuli (4.2.4), a 1 označava da se na tačku gde se dobija veličina $Z(t)$ može priključiti neki drugi računski element koji ima ulazni otpor $1M$.

Pošto se priključivanjem nekog drugog računskog elementa na izlaz potenciometra P_2 (sl.4.2.1) javlja greška koja je istog karaktera kao i greška kod potenciometra za množenje konstantom, to se ona na neki način mora otkloniti. U odeljku 2.2 ove glave, videli smo od čega ova greška zavisi i kako se koriguje, ali u slučaju servomnožača ova se greška menja, u zavisnosti od veličine $Y(t)$. Otklanjanje greške vrši se stoga na taj način što se na klizač potenciometra P_1 , koji pripada servomehanizmu, priključi otpor jednak ulaznom otporu računskog elementa, koji se priključuje na potenciometar P_2 . Tada se klizač potenciometra P_1 postavlja na korigovanu vrednost, kako bi $\Delta Y(t)$ bilo nula, a zajedno sa njim i klizač potenciometra P_2 . Ovo se simbolično označava u donjem desnom uglu sa brojem 1, kao što to prikazuje slika 4.2.2. Ako bi ulazni otpor sledećeg računskog elementa bio 0.5 ili 0.1 (množenje sa 2 ili 10), onda bi umesto 1 na tom mestu stajalo 0.5 ili 0.1.

Ako matematička veličina $y(t)$ nije istog znaka, već može biti pozitivna i negativna u intervalu u kojem treba vršiti množenje ove veličine sa $x(t)$, onda se i fizička veličina $Y(t)$ mora menjati u granicama $-U \leq Y(t) \leq +U$. Tada se koristi šema veza data na slici 4.2.3. Potenciometri P_1 i P_2 se povezuju



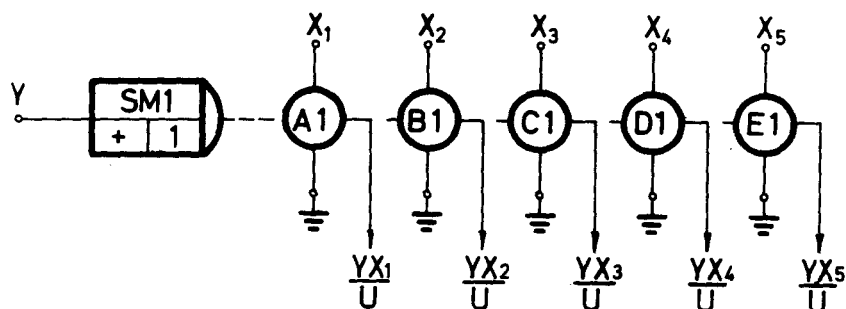
Sl. 4.2.3. Rad servomnožača u četiri kvadranta

tako da im se krajevi vezuju za $-U$ i $+U$, odnosno $+X(t)$ i $-X(t)$, a srednji izvodi (koji svaki servopotenciometar ima) vezuju se za masu (nulu). Kretanje klizača vrši se sada i u pozitivnoj i u negativnoj oblasti obe ulazne veličine, te se kaže da servomnožač radi u sva četiri kvadranta OXY ravni. To znači

da za $Y(t) > 0$ klizač potenciometra P_2 je u delu $+X(t)$, tako da je znak proizvoda određen znakom veličine $X(t)$. Za $Y(t) < 0$ klizač potenciometra P_2 je u delu $-X(t)$, tako da je znak proizvoda suprotan znaku veličine $X(t)$. Pri ovome treba imati u vidu da je na potenciometar P_1 doveden napon $-U$, na kraj koji odgovara kraju potenciometra P_2 , gde je doveden napon $+X(t)$, i $+U$ na drugi kraj potenciometra P_2 . Ovako povezan servomnožač obeležava se sa \pm u donjem levom uglu pravougaonika (sl. 4.2.3).

Na sličan način, ako je ulazna veličina $Y(t)$ stalno u oblasti negativnih napona, tj. $-U < Y(t) < 0$, onda se koristi servomnožač tako da se potenciometar P_1 (sl. 4.2.1) vezuje jednim krajem na napon $+U$, a drugim krajem za masu. Tada se to označava znakom $-$ u donjem levom uglu pravougaonika.

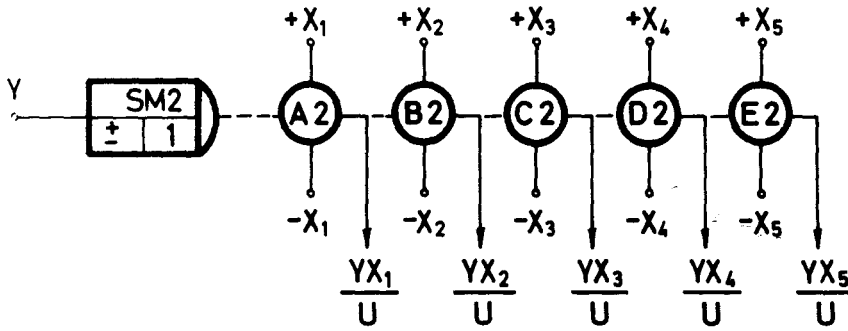
Servomnožač obično sadrži više potenciometara za množenje. Moderni analogni računari raspolažu sa servomnožačima koji imaju šest potenciometara na istoj osovinu. Jedan od njih služi za pozicioniranje dok ostalih pet služe za množenje. Slike 4.2.4, 4.2.5 i 4.2.6 prikazuju načine korišćenja servomnožača.



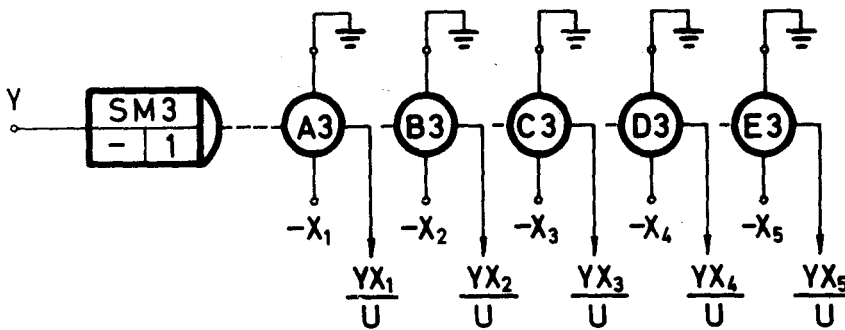
Sl. 4.2.4. Rad servomnožača u prvom i drugom kvadrantu

Servomnožač se najčešće koristi u zajednici sa jednim sabiračem, koji obično služi za prilagodjenje izlaznog napona servomnožača sa ulaznim otporom sledećeg računskog elementa. Ovo se čini zbog toga da ne bi došlo do preopterećenja servopotenciometra. Prema tome, potpuna šema servomnožača izgledala bi kao na slici 4.2.7. Ovde treba napomenuti da postoje dve vrste servomnožača. Jedna vrsta sadrži desetoobrtne potenciometre,

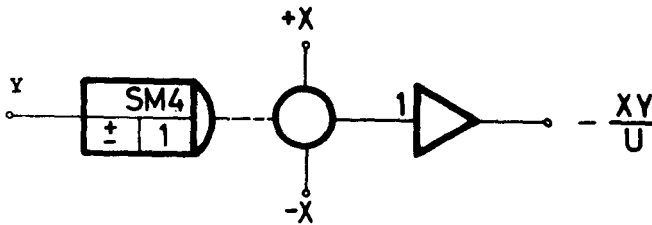
te daje tačnije proizvode, ali pritom ulazni napon $Y(t)$ ne



Sl. 4.2.5. Rad servomnožača u sva četiri kvadranta

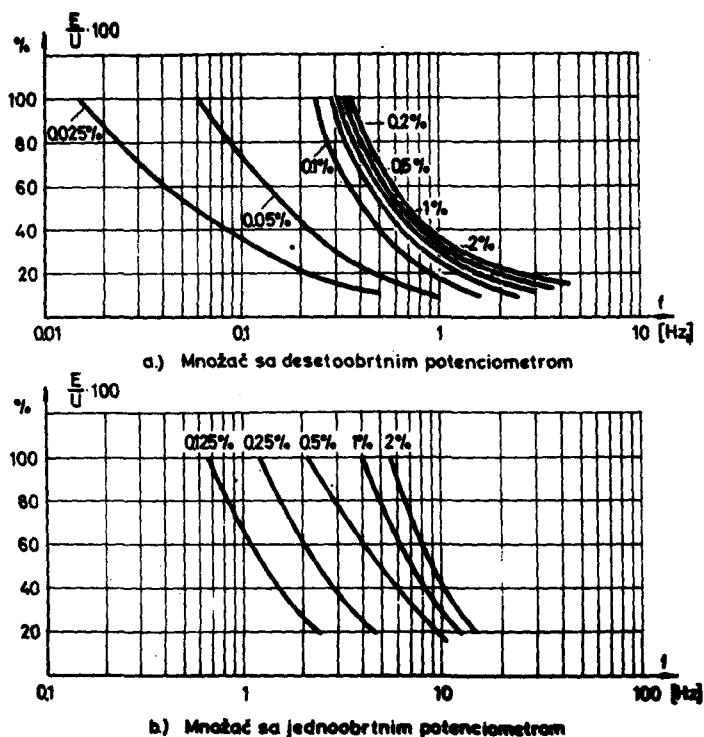


Sl. 4.2.6. Rad servomnožača u trećem u četvrtom kvadrantu
sme da se menja suviše brzo. Druga pak vrsta sadrži jednoobrtne potencijometre, te daje manje tačne rezultate, ali zato se



Sl. 4.2.7. Servomnožač sa izlaznim sabiračem
ulazni napon $Y(t)$ može menjati nešto brže. Međutim, usled

toga što svaki servomnožač ima mehaničke kretne sisteme, njegova je tačnost ograničena. Dinamička greška zavisi od inercije, trenja, karakteristika motora, itd. U primeru na slici 4.2.8 date su krive, za različite tačnosti potencijometara, koje pokazuju dinamičku tačnost u procentima, ako je veličina $Y(t)$, koja se dovodi na ulaz, sinusnog oblika, tj. $Y(t) = E \sin \omega t$, $\omega = 2\pi f$, za razne frekvencije f i razne amplitude E , date u procentima računskog napona U . Sa ovih se krivih vidi da množači sa desetoobrnim potencijometrima imaju bolju tačnost, ali za relativno sporije funkcije, dok množači sa jednoobrnim potencijometrima mogu da postignu veću brzinu, ali su pritom netačniji.



Sl. 4.2.8 Dinamička tačnost servomnožača

U pogledu ulazne veličine $X(t)$ ne postoje nikakva ograničenja. Stoga ako treba pomnožiti dva promenljiva napona od kojih se jedan sporo menja a drugi brže, obično se sporiji dovodi na ulaz $Y(t)$, dok se brži dovodi na ulaz $X(t)$.

4.3. Elektronski množač

Druga se grupa množača zasniva na čisto elektronskom principu. Postoji više tipova elektronskih množača. Svi ovi množači imaju prednost nad servomnožačima, jer se obe promenljive mogu brže menjati, a da se pritom ne javljaju ozbiljnije dinamičke greške. Ovde ćemo se ograničiti samo na one tipove elektronskih množača koji se danas koriste najčešće u analognim računarima.

4.3.1. Diodni množači

Diodni množači su sastavljeni od tzv. diodnih generatora nekih fiksnih funkcija i računskih pojačavača. O diodnim generatorima funkcija biće reči kasnije, ali za sada je dovoljno da se naglasi da je u opštem slučaju generator funkcija računski element konstruisan tako, da kada mu se na ulaz dovede veličina $X(t)$, on na svom izlazu daje veličinu $F[X(t)]$. Diodni generator funkcija se naziva zato što koristi diode kao osnovne elemente za konstrukciju.

Za izgradnju množača najčešće se koriste dva tipa diodnih generatora funkcija, koji daju sledeće fiksne funkcije:

$$\begin{aligned} F_1(X) &= X^2 \\ F_2(X) &= \ln X \\ F_3(X) &= e^X \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

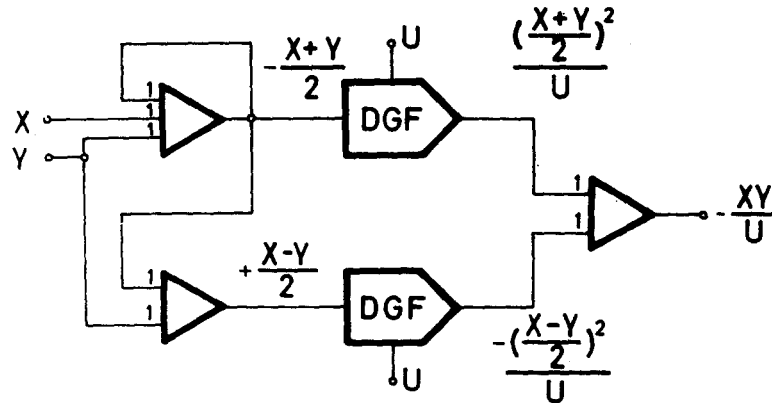
Osnovna jednačina na kojoj bazira prvi tip diodnog elektronskog množača glasi

$$\frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2] \equiv xy \quad (4.3.2)$$

Prema tome, da bismo ostvarili množenje dve veličine x i y , možemo ostvariti razliku kvadrata zbira i razlike te dve veličine. Analogna blok šema koja može da realizuje ovakvu jednačinu data je na slici 4.3.1. Blokovi označeni sa DGF su diodni generatori funkcija koji su podešeni tako da generiraju funkciju:

$$W = \frac{1}{U} V^2 \quad (4.3.3)$$

gde je V ulazni napon u blok DGF, U računski napon, a W



Sl. 4.3.1. Elektronski množač zasnovan na kvadratnim funkcijama

izlazni napon iz bloka DGF. Obično se oba generatora nalaze u jednom bloku, kao i sve druge potrebne veze koje zadovoljavaju levu stranu relacije (4.3.2).

Za razliku od servomnožača, ovaj tip elektronskog množača ima bolje karakteristike, te se više i koristi, naročito kod brzih analognih računara. Njegova je statička tačnost nešto lošija nego kod servomnožača i kreće se u granicama od oko 0.2%, ali zato je dinamička tačnost ista i za relativno brze promene bilo napona $X(t)$ ili $Y(t)$.

Drugi tip elektronskog množača bazira na relaciji:

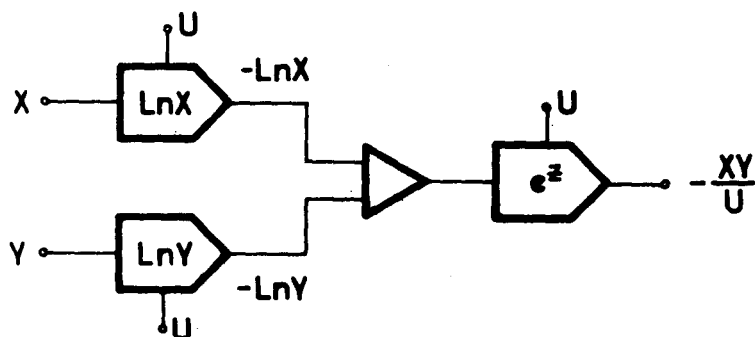
$$x \cdot y = e^z \quad (4.3.4)$$

gde je $z = \ln x + \ln y$.

Desna strana ove relacije može se ostvariti ako se raspolože sa dva generatora logaritamskih funkcija i jednim generatorom e^x funkcije. Blok šema za rešavanje ove relacije prikazana je na slici 4.3.2. Nedostatak ovakvog elektronskog množača je što mora biti uvek

$$X(t) > 0 \quad \text{i} \quad Y(t) > 0 \quad (4.3.5)$$

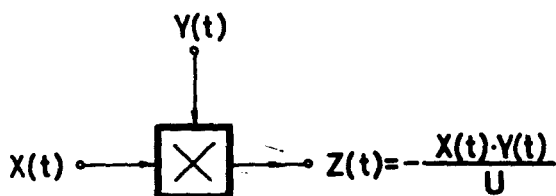
pa je množenje ograničeno samo na jedan kvadrant ravni OXY.



Sl. 4.3.2. Elektronski množač zasnovan na logaritamskoj i eksponencijalnoj funkciji

Pored toga, obe ulazne veličine moraju biti različite od nule. Ali, ako su ovi uslovi zadovoljeni, onda je tačnost ovog tipa množača istog reda kao i predhodnog.

Ovde treba napomenuti da postoji još čitav niz elektronskih množača koji baziraju na raznim principima, ali opisana dva tipa su našla najširu primenu kod savremenih analognih računara. Grafički simbol za predstavljanje elektronskih množača na analognim blok šemama dat je na slici 4.3.3.



Sl. 4.3.3. Grafički simbol za elektronski množač

4.4 Korišćenje množača za deljenje

Matematička operacija deljenja dve promenljive veličine neka je data izrazom:

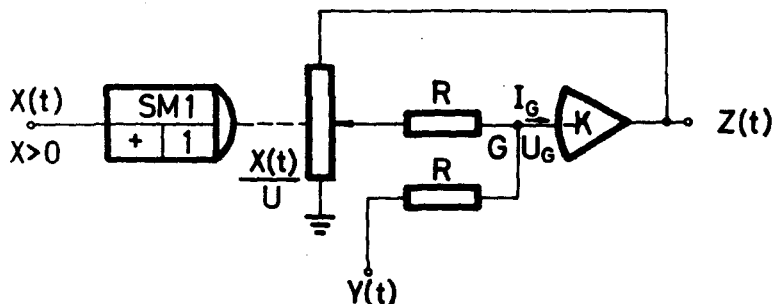
$$z(t) = - \frac{y(t)}{x(t)} \quad (4.4.1)$$

gde su, kao i ranije, $x(t)$ i $y(t)$ promenljive veličine sa

vremenom.

Računski element, množač, koji je opisan, može pod izvesnim uslovima da obavlja ovu operaciju.

Posmatrajmo šemu datu na slici 4.4.1. Za ovu šemu važi da je



Sl. 4.4.1. Operacija deljenja pomoću servomnožača
zbir struja u čvoru G odredjen sa

$$\frac{Z(t) \frac{X(t)}{U} - U_G}{R} + \frac{Y(t) - U_G}{R} = I_G \quad (4.4.2)$$

Budući da je pojačavač konstruisan tako da ima vrlo veliko pojačanje i vrlo malu ulaznu struju, to se veličine U_G i I_G mogu zanemariti, pa jednačina (4.4.2) posle skraćivanja sa R , dobija oblik:

$$Z(t) \frac{X(t)}{U} + Y(t) = 0 \quad (4.4.3)$$

odakle se dobija da je

$$Z(t) = -U \frac{Y(t)}{X(t)} \quad (4.4.4)$$

Uvedimo sada koeficijente razmere izmedju fizičkih veličina $X(t)$, $Y(t)$ i $Z(t)$, i matematičkih veličina $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$, tako da je

$$k_x = \frac{X(t)}{x(t)} ; \quad k_y = \frac{Y(t)}{y(t)} ; \quad k_z = \frac{Z(t)}{z(t)} \quad (4.4.5)$$

Zamenom vrednosti iz (4.4.5) u (4.4.4) dobija se da je

$$z(t) = -U \frac{k_y}{k_x k_z} \frac{y(t)}{x(t)} \quad (4.4.6)$$

Poredjenjem jednačina (4.4.6) i (4.4.1) dobija se

$$U \frac{k_y}{k_x k_z} = 1 \quad (4.4.7)$$

Ako se izaberu isti faktori razmere za ulazne veličine, tj. ako je $k_x = k_y$, onda se iz (4.4.7) dobija

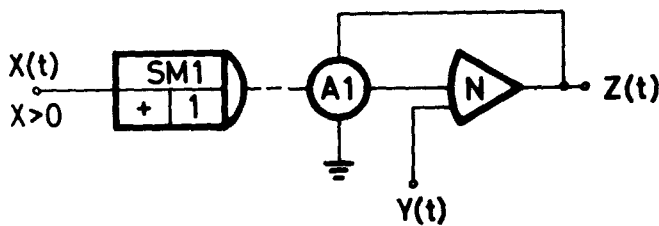
$$k_z = U \quad (4.4.8)$$

Ovde treba napomenuti da delitelj, tj. promenljiva $X(t)$, ne sme da uzima vrednosti oko nule, niti da menja znak, jer bi tada, prema (4.4.4) vrednost $Z(t) \rightarrow \infty$, što se praktično ne može ostvariti. Stoga, da bi se deljenje obavljalo sa zadovoljavajućom tačnošću treba da je ispunjen uslov

$$|X(t)| \gg |Y(t)| \quad (4.4.9)$$

Ako je ovaj uslov zadovoljen za svako t , onda će i deljenje biti izvršeno sa tačnošću koja se kreće oko 0.25%.

Vrlo često se na analognim blok šemama servomnožač sa kojim se vrši deljenje prikazuje uprošćeno kao što to pokazuje slika 4.4.2.

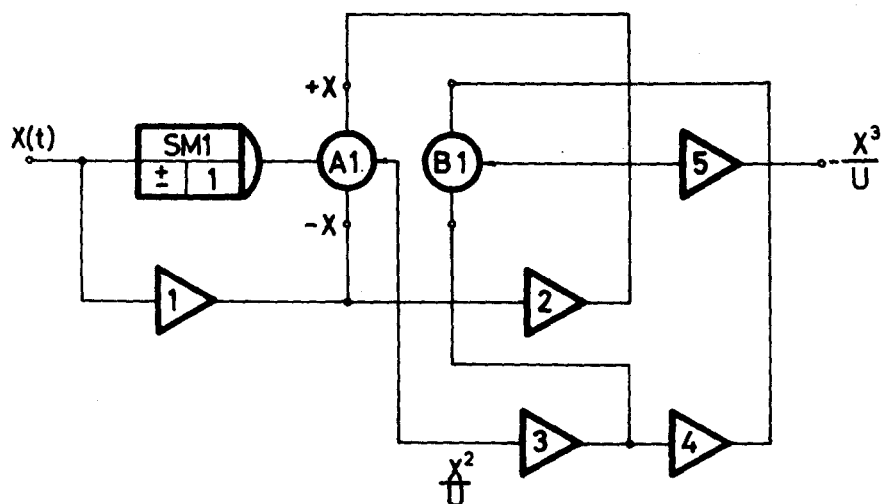


Sl. 4.4.2. Grafički prikaz operacije deljenja pomoću servomnožača

4.5. Korišćenje množača za obavljanje još nekih računskih operacija

Množač može da se koristi i za obavljanje još nekih matematičkih operacija. Naprimer, dizanje neke funkcije na kvadrat ili

na treći stepen, vrši se tako što se koristi servomnožač povezan prema šemi datoj na slici 4.5.1.

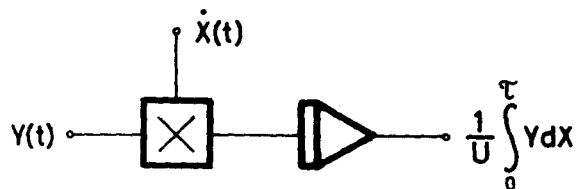


Sl. 4.5.1. Blok šema za izračunavanje trećeg stepena funkcije $X(t)$

Integracija oblika

$$z = \int_0^{\tau} y \cdot dx \quad (4.5.1)$$

gde su y i x funkcije vremena t , može se obaviti prema blok šemi povezivanja datoj na slici 4.5.2., ako se može dobiti



Sl. 4.5.2. Blok šema za izračunavanje integrala (4.5.1)

izvod dx/dt . Skup računskih elemenata povezan prema šemi na slici 4.5.2. ustvari rešava jednačinu oblika

$$z = \int_0^{\tau} y \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right) \cdot dt \quad (4.5.2)$$

5. GENERATORI FUNKCIJA

Vrlo se često, u matematičkim problemima, javlja potreba da se neka veličina, recimo y , izrazi kao funkcija neke druge veličine, recimo x . U matematičkoj simbolici ovo se izražava na sledeći način

$$y = f(x) \quad (5.1)$$

gde operator f označava da veličina y zavisi od veličine x , po nekom određenom zakonu, a x i y mogu biti i funkcije vremena.

U analognoj računskoj tehnici, fizički uređaj koji može da ostvari matematičku operaciju (5.1) naziva se generator funkcija. Prema tome, matematički model, koji treba da ima generator funkcija biće

$$Y = f(X) \quad (5.2)$$

Ovde treba napomenuti da operator f može biti dat ne samo u matematičkom obliku kao neka analitička funkcionalna zavisnost, već i kao neka grafička zavisnost (kriva linija) ili u obliku tabele parova diskretnih vrednosti za x i y .

U analognoj računskoj tehnici koriste se danas dve grupe generatora funkcija. Prvu grupu sačinjavaju generatori specijalnih fiksnih funkcija, kod kojih je željena funkcija postavljena jednom za svagda. Druga grupa su univerzalni generatori funkcija koji se mogu po želji podešavati na onu funkciju za koju se trenutno ukaže potreba prilikom rešavanja određenih problema.

Pored ove podele generatori funkcija se dele na elektromehaničke i elektronske generatore, prema tome, od kojih su komponenta konstruisani.

Generatori funkcija rade tako da željenu funkciju (5.2) aproksimiraju na neki određen način

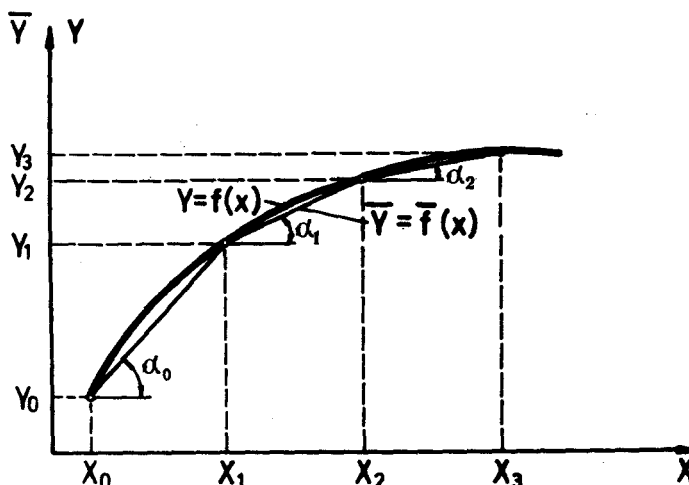
$$\bar{Y} = \bar{F}(X) \quad (5.3)$$

Tako postoje generatori koji funkciju (5.2) odnosno (5.3) aproksimiraju pomoću pravolinijskih odsečaka, tako da se, umesto date funkcije, javlja poligonalna izlomljena linija. Drugi tip generatora aproksimira funkciju (5.2) pomoću stepenaste linije.

Postoje i drugi tipovi generatora koji željenu funkciju mogu da aproksimiraju na razne načine, napr. pomoću polinoma koji prolazi kroz određene tačke krive, itd. Medjutim, prva se dva tipa u praksi najčešće koriste. Stoga ćemo se prilikom opisivanja zadržati samo na pomenuta dva tipa generatora funkcija.

5.1. Generiranje funkcija pomoću pravolinijskih odsečaka

Univerzalni generatori funkcija koji rade tako da funkciju (5.2) aproksimiraju pomoću poligonalne linije sastavljene od pravolinijskih odsečaka, (sl. 5.1.1) generiraju funkciju koja se može



Sl. 5.1.1. Segmentna pravolinijska aproksimacija funkcije sa greškom istog znaka

predstaviti u obliku

$$\bar{Y} = \bar{F}(X) = \bar{Y}_0 + \sum_{j=0}^{j=n} K_j (X - X_j) \quad (5.1.1)$$

gde je

$$K_j = \operatorname{tga}_j - \operatorname{tga}_{j-1} = \frac{\bar{Y}_{j+1} - \bar{Y}_j}{X_{j+1} - X_j} - \frac{\bar{Y}_j - \bar{Y}_{j-1}}{X_j - X_{j-1}}$$

($j = 0, 1, 2, \dots, n$), pri čemu su X_j i Y_j koordinate tačaka koje se nalaze na funkciji (5.2), između kojih se vrši linearna interpolacija, a n broj pravolinijskih odsečaka.

Ovaj broj je određen konstruktivnim karakteristikama generatora funkcija. Da bismo aproksimirali funkciju (5.2) pomoću funkcije (5.1.1), potrebno je odrediti parametre funkcije (5.1.1) tako da u opsegu promene argumenta X , bude

$$|f(X) - \bar{f}(X)| \leq \delta \quad (5.1.2)$$

gde je δ dozvoljena greška sa kojom funkcija (5.2) treba da bude aproksimirana. Pritom se pretpostavlja da je u intervalu promena X funkcija $f(X)$ jednoznačna i neprekidna i da postoji njen prvi izvod u svakoj tački intervala.

Prema tome, zadatak aproksimacije pomoću pravolinijskih segmenata svodi se na aproksimaciju date funkcije $f(X)$ u intervalu $X_{j+1} - X_j$, ($j = 0, 1, \dots, n$), polinomom prvog stepena. Greška sa kojom je izvršena interpolacija može se izračunati pomoću izraza za ostatak, koji za linearnu interpolaciju prema Njutn-voj formuli ima oblik

$$Re(X) = \frac{\ddot{f}(\xi)}{2} (X - X_j)(X - X_{j+1}) \quad (5.1.3)$$

gde je $\ddot{f}(\xi)$ vrednost drugog izvoda u nekoj tački intervala $X_{j+1} - X_j$, ($j = 0, 1, \dots, n$).

Vrednost $Re(X)$ po modulu dostiže maksimum ako istovremeno i $\ddot{f}(\xi)$ i $(X - X_j)(X - X_{j+1})$ dostignu maksimalne vrednosti.

Prema tome je

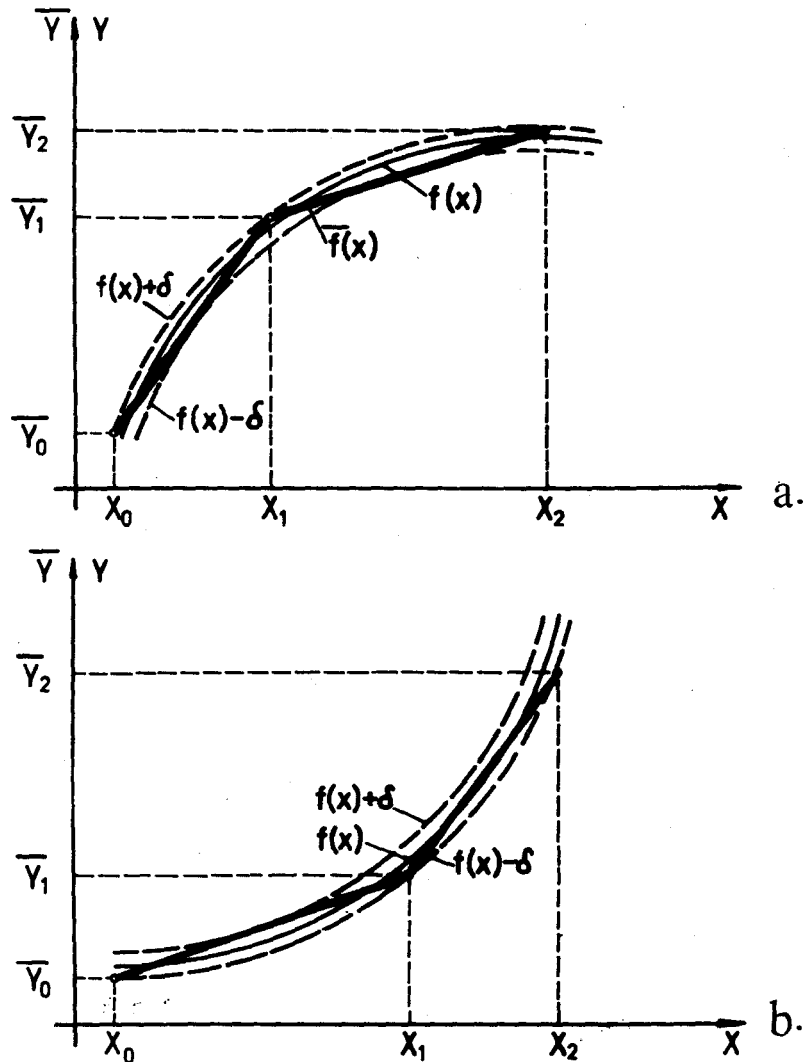
$$|Re(X)|_{\max} = \frac{|\ddot{f}(\xi)|_{\max}}{2} \left(\frac{X_{j+1} - X_j}{2} \right)^2 \quad (5.1.4)$$

odakle se dobija izraz za određivanje dužine koraka aproksimacije $h_j = X_{j+1} - X_j$. Ako se stavi da je $|Re(X)|_{\max} = \delta$, iz izraza (5.1.4) dobija se

$$h_j = \sqrt{\frac{8\delta}{|\ddot{f}(\xi)|_{\max}}} \quad (5.1.5)$$

Izraz (5.1.5) dobijen je pod pretpostavkom da se vrednosti aproksimativne funkcije \bar{y}_j nalaze na funkciji $f(X)$ koju treba aproksimirati (sl. 5.1.1) i da greška δ ne menja znak u intervalu $X_j \leq X \leq X_{j+1}$, ($j = 0, 1, \dots, n$).

Ako bismo vršili aproksimaciju na taj način da se prelomne tačke nalaze na funkciji $f(x) + \delta$ (sl. 5.1.2.a) ili na funkciji $f(x) - \delta$ (sl. 5.1.2.b) u zavisnosti od toga da li je funkcija $f(x)$ konveksna ili konkavna, a da pravolinijski odsečci



Sl. 5.1.2. Segmentna pravolinijska aproksimacija funkcije sa greškom oba znaka

sa kojima se aproksimira funkcija $f(X)$ u pojedinim intervalima dodiruju funkciju, u prvom slučaju $f(X) - \delta$, a u drugom $f(X) + \delta$, tada je očigledno da greška prilikom aproksimacije iznosi 2δ . Prema tome, sličnim razmatranjima, za dužinu koraka h_j , prema (5.1.5) dobili bismo

$$h_j = 4 \sqrt{\frac{\delta}{|\ddot{f}(\xi)|_{\max}}} \quad (5.1.6)$$

U ovom slučaju greška prilikom aproksimacije funkcije $f(X)$ menja se u opsegu $\pm\delta$, dok se dužina koraka aproksimacije povećava $\sqrt{2}$ puta.

U praksi, kada se koristi ova aproksimacija, često je zgodno da se konstruiše kriva drugog izvoda funkcije koju treba aproksimirati. Odsečci h_j se sada određuju na taj način što se polazi od odsečka u kojem je vrednost drugog izvoda najveća, a prema (5.1.5) ili (5.1.6).

Ako je funkcija $f(X)$ data u obliku krive, ili tablice parova vrednosti za X i Y , pa je nalaženje drugog izvoda skopčano sa velikim teškoćama i greškama, tada se ova aproksimacija izvodi grafički. Grafička se metoda sastoji u tome što se pored funkcije $f(X)$ nacrtaju još i funkcije $f(X) + \delta$ i $f(X) - \delta$ u povećanoj razmeri. Zatim se, polazeći od tačke X_0 , povlači izlomljena linija koja seče krivu $f(X)$, a dodiruje ili se prelama na krivoj $f(X) + \delta$, odnosno krivoj $f(X) - \delta$. Tačke prelamanja X_j , \bar{Y}_j sada se očitavaju sa crteža, a pravolinijski segmenti između njih određuju korake h_j .

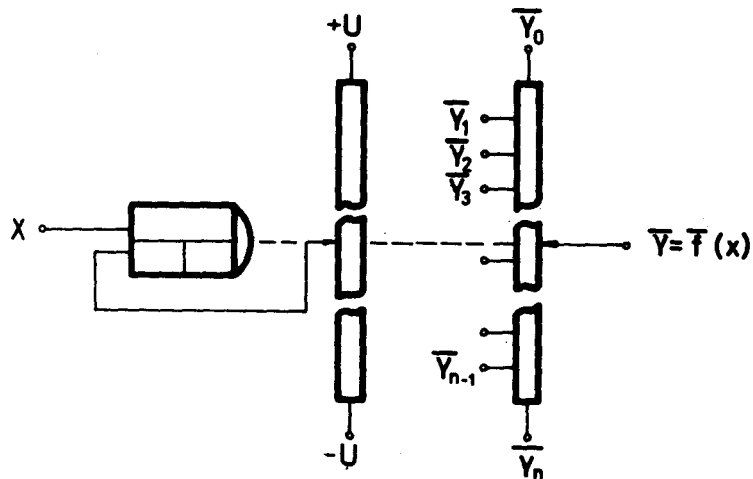
Ukoliko se koristi aproksimacija kod koje δ ne menja znak, onda se aproksimacija vrši na taj način, što se tačke X_j , \bar{Y}_j nalaze tako da polazeći od tačke X_0 , tetiva između susednih dveju tačaka dodiruje krivu $f(X) + \delta$, odnosno krivu $f(X) - \delta$.

5.2. Potenciometerski generatori funkcija

Naponsko podešavanje željene funkcije

Jedan od načina generiranja funkcije $Y = f(X)$ koristi potencijometar koji je napravljen tako da duž otpornog tela ima izvode

na jednakim rastojanjima (Sl. 5.2.1). Broj ovakvih izvoda zavisi



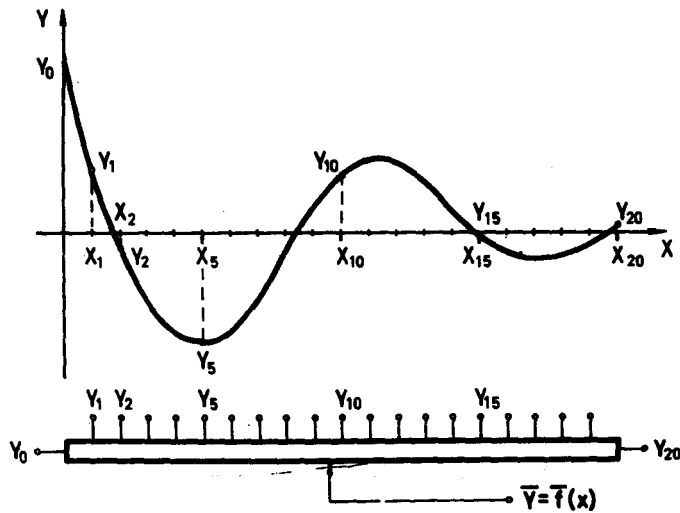
Sl. 5.2.1. Potenciometarski generator funkcija

si od konstrukcije potenciometra. Kod savremenih računara najčešće se koristi 19 izvoda pored dva krajnja, tako da je potenciometar podeljen u 20 otpornih segmenata.

Ovakav potenciometar se stavlja na osovinu jednog servomnožača koji pokreće klizač potenciometra, u zavisnosti od ulazne funkcije X .

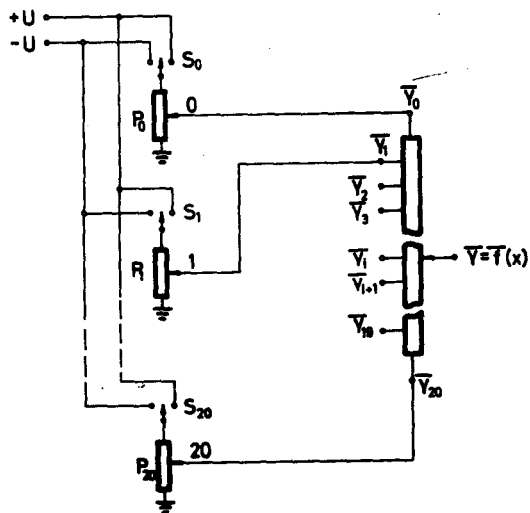
Da bi se na takvom generatoru postavila neka funkcija $Y = f(X)$, zadata u intervalu $X_c \leq X \leq X_n$, podeli se interval $[X_0, X_n]$ na 20 ekvidistantnih segmenata, zatim se za svako X_j ($j = 0, 1, 2, \dots, 20$) izračunaju vrednosti za Y_j ($j = 0, 1, 2, \dots, 20$). Ovakvo dobijene vrednosti (sl. 5.2.2) postavljaju se kao odgovarajući naponi na izvode potenciometra obeležene sa Y_j ($j = 0, 1, 2, \dots, 20$). Na taj način je funkcija postavljena na generator. Ako se sada klizač potenciometra kreće duž otpora potenciometra, onda će se na njemu za svako X javljati napon $\bar{Y} = \bar{f}(X)$. Ovde je potrebno da se napomene da se između pojedinih izvoda na potenciometru funkcija menja pravolinijski, pa se prilikom izračunavanja pojedinih napona, koje treba postaviti na izvode, mora voditi računa o greški, o kojoj je bilo reči u predhodnom odeljku.

Postavljanje pojedinih vrednosti Y_j ($j = 0, 1, \dots, 20$) vrši se pomoću posebnih potencimetara P_j ($j = 0, 1, \dots, 20$), a



Sl. 5.2.2. Princip postavljanja funkcije na potencimetarskom generatoru

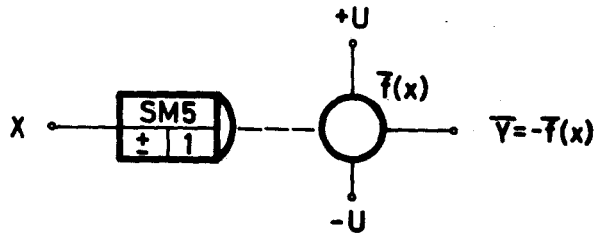
prema šemi datoj na slici 5.2.3. Prekidači S_j ($j = 0, 1, \dots, 20$) služe da odrede znak odgovarajuće vrednosti za Y_j . Postav-



Sl. 5.2.3. Šema postavljanja funkcije na potencimetarskom generatoru

ljanje napona Y_j mora biti pažljivo izvedeno. Stoga se treba, prilikom postavljanja ovih napona, pridržavati uputstava, koja se uz ovakav generator funkcija dobijaju, a samo postavljanje treba nekoliko puta kontrolisati snimanjem krive $\bar{Y} = \bar{F}(X)$.

Uprošćen način prikazivanja ovog generatora funkcija dat je na slici 5.2.4.



Sl. 5.2.4. Grafički simbol za potenciometrijski generator funkcija

Treba napomenuti da ako se na krajeve ovog generatora obeležene sa $+U$ i $-U$ dovede neka funkcija $+Z$ i $-Z$, onda se na izlazu dobija funkcija $Z\bar{F}(X)$. Na taj se način, pomoću ovakvog tipa generatora funkcija, može izvršiti i množenje date funkcije $f(X)$ sa nekim promenljivim naponom $Z(t)$.

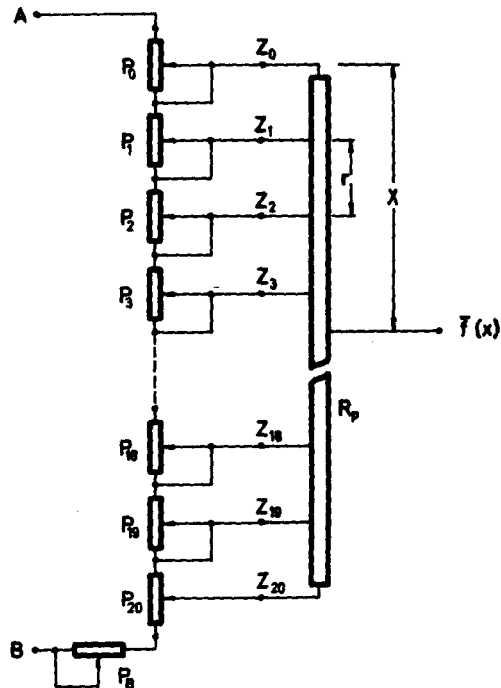
Tačnost ovakvog generatora funkcija je oko 1%, a zavisi od oblika funkcije $f(X)$.

Potenciometrijski generator funkcija sa paralelnim promenljivim otporima

Ovaj generator funkcija sastoji se od jednog potenciometra otpora R_p sa izvodima, čiji se klizač pokreće pomoću servomehanizma i niza promenljivih otpornika P_k ($k = 1, 2, \dots, 20$) koji su povezani na način prikazan na slici 5.2.5. Svaki od otpornika P_k ($k = 1, 2, \dots, 20$) vezan je paralelno delu otpora potenciometra R_p između dva uzastopna izvoda.

Ekvivalentni otpor k -tog dela potenciometra, između tačaka Z_k i Z_{k+1} , označimo sa $R_{k,k+1}$, biće

$$R_{k,k+1} = \frac{r_k r}{r_k + r} \quad (5.2.1)$$



Sl. 5.2.5. Potenciometerski generator funkcija sa paralelnim promenljivim otporima

gde je r_k vrednost promenljivog otpornika P_k , a r otpor izmedju dva uzastopna izvoda potencijetra R_p . Označimo sa R ukupan ekvivalentni otpor izmedju tačaka A i B.

Usvajanjem gornjih oznaka može se pokazati da je ukupni otpor izmedju tačke A i izvoda Z_k proporcionalan ordinati \bar{Y}_k funkcije $\bar{Y} = \bar{F}(x)$ koju želimo da postavimo.

Da bismo ovo pokazali pretpostavićemo da maksimalna vrednost razlike izmedju dve uzastopne ordinate date funkcije mora da zadovolji uslov

$$R(\bar{Y}_{k+1} - \bar{Y}_k)_{\max} \leq \frac{r_{k\max} r}{r_{k\max} + r} \quad (5.2.2)$$

Na osnovu ovog uslova bira se vrednost za R .

Radi jednostavnijeg objašnjenja pretpostavićemo takodje da se radi o monotono rastućoj funkciji $\bar{Y} = \bar{f}(X)$ u intervalu $-1 \leq X \leq +1$ i $0 \leq \bar{Y} \leq 1$ koju treba postaviti na generator. Vrednost funkcije \bar{Y}_0 postavlja se pomoću otpora P_0 , tako da otpor između tačke A i Z_0 (sl. 5.2.5) bude

$$R_0 = R \cdot \bar{Y}_0 \quad (5.2.3)$$

Između izvoda Z_1 i Z_0 pomoću otpora P_1 postavlja se vrednost otpora

$$R_1 = R(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0) \quad (5.2.4)$$

Na sličan način između izvoda Z_k i Z_{k-1} pomoću otpora P_k postavlja se otpor

$$R_k = R(\bar{Y}_k - \bar{Y}_{k-1}) \quad (5.2.5)$$

I na kraju pomoću otpora P_B postavlja se otpor

$$R_B = R(1 - \bar{Y}_{20}) \quad (5.2.6)$$

Postupajući na ovaj način ukupni otpor između tačaka A i B biće

$$R_{AB} = \sum_{i=0}^{i=20} R_i + R_B \quad (5.2.7)$$

$$R_{AB} = R[\bar{Y}_0 + (\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0) + (\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1) + \dots + (\bar{Y}_{20} - \bar{Y}_{19}) + (1 - \bar{Y}_{20})]$$

ili

$$R_{AB} = R \quad (5.2.8)$$

Pored toga otpor između izvoda Z_k i izvoda A biće

$$R_{AK} = \sum_{i=0}^{i=k} R_i = R[\bar{Y}_0 + (\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0) + (\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1) + \dots + (\bar{Y}_k - \bar{Y}_{k-1})] \quad (5.2.9)$$

tj. između ma kojeg izvoda k i tačke A biće

$$R_{AK} = R \cdot \bar{Y}_k \quad (5.2.10)$$

Prema tome, ako se tačka A priključi na nulti napon, a tačka B na napon +U onda će se na izvodu Z_k pojaviti napon koji odgovara vrednosti funkcije \bar{Y}_k , pa kada se klizač kreće od tačke A prema tački B, na njemu će biti promenljivi napon $\bar{f}(X)$. Ponekad je zgodnije, da bi se izbegle kumulativne greške, pri

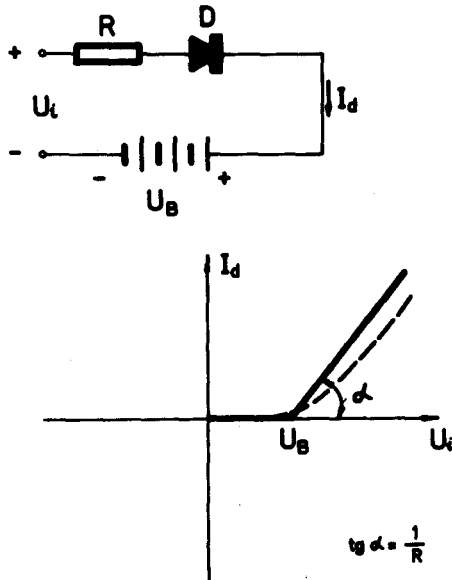
meranju postavljati stalno otpor između tačaka A i Z_k .

Opisani postupak važi za postavljanje monotono rastućih ili opadajućih funkcija. Postavljanje funkcija koje imaju i opadajuć i rastući tok sa više ekstremuma vrši se na taj način što se na priključke Z_j , koji odgovaraju ordinatama ekstremuma, priključe dodatni potenciometri i pomoću njih postave odgovarajuće vrednosti, a zatim u opsezima gde je funkcija monotona primeni prethodno opisani postupak.

Važno je ovde napomenuti da se podešavanje funkcije vrši neposredno nameštanjem odgovarajućih vrednosti ekvivalentnih otpora u pojedinim tačkama Z_k .

5.3. Diodni generatori funkcija

Diodni generator funkcija sastoji se od diodnih elemenata, koji najčešće rade u sprezi sa računskim jednosmernim pojačavačima. Svi diodni elementi razvijeni su iz osnovnog diodnog kola predstavljenog na slici 5.3.1. Na slici je prikazana i karakteri-

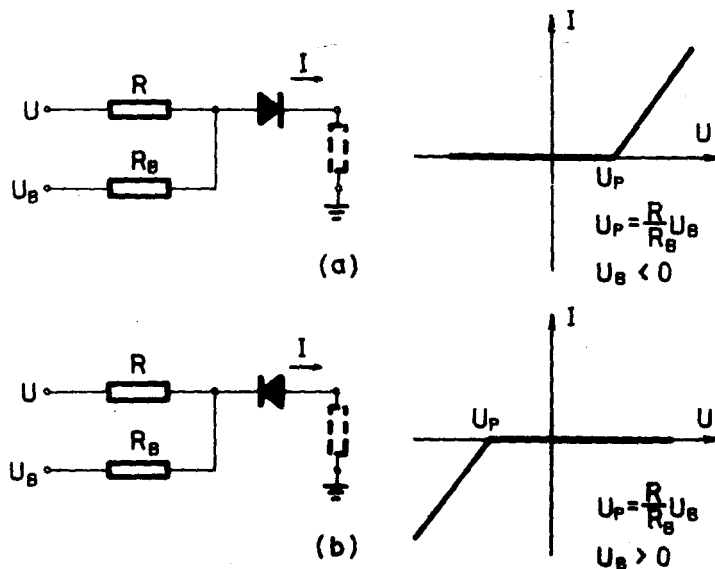


Sl. 5.3.1. Diodno kolo

stika struje u zavisnosti od napona na ulazu ovog kola. Puna linija predstavlja idealnu karakteristiku, dok isprekidana predstavlja stvarnu karakteristiku diodnog kola.

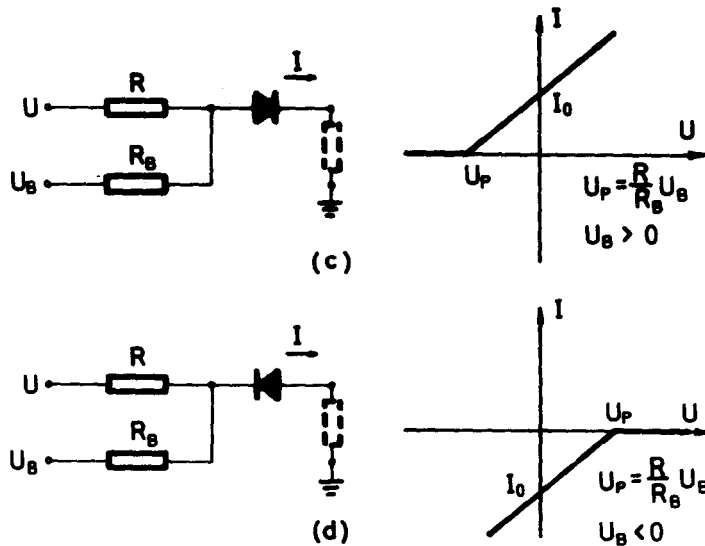
Posmatrajući idealnu karakteristiku diodnog kola vidimo da se dioda vezana u ovoj sprezi, može smatrati kao naponski osetljivi prekidač. Naime, strujno se kolo zatvara, ako je napon na anodi diode pozitivan u odnosu na katodu, tj. za $U_i > U_B$. Isto tako, strujno se kolo otvara, ako je napon na anodi negativan u odnosu na katodu, tj. za $U_i < U_B$. Napon U_B se može po želji podešavati čime se tačka prelamanja pomera duž apscisne ose.

Karakteristike ovakvog diodnog kola iskorišćene su na razne načine da bi se napravili diodni elementi. Na slici 5.3.2. dati su diodni elementi koji se koriste u sklopu sa računskim pojačavačem za diodne generatore funkcija, zajedno sa njihovim strujnim karakteristikama.



Sl. 5.3.2. (a,b) Diodni elementi za generatore funkcija
Diodni generatori funkcija dele se u dve grupe. Prvu grupu

sačinjavaju tzv. delitelji napona, koji imaju promenljive koe-

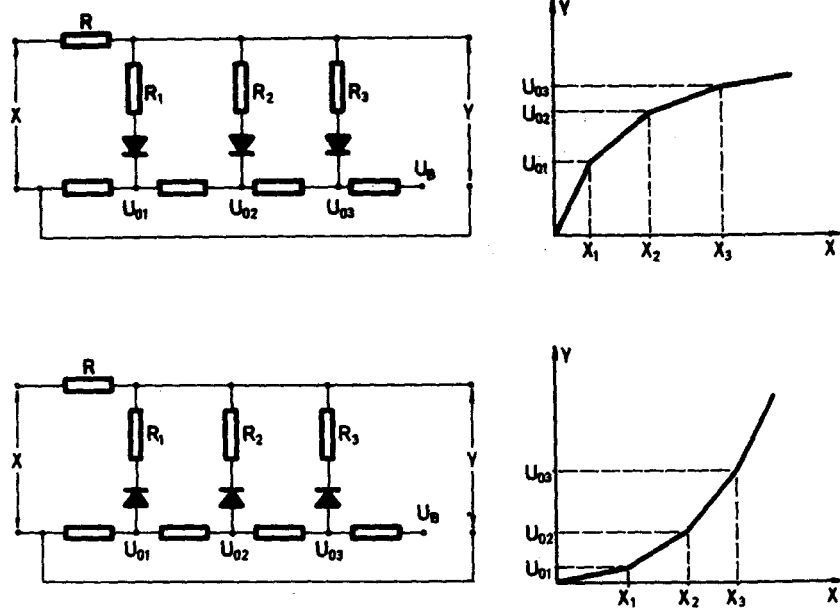


Sl. 5.3.2. (c,d) Diodni elementi za generatore funkcija

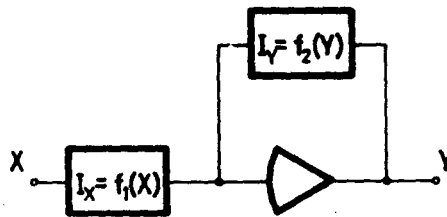
ficijente deljenja, a drugu grupu sačinjavaju računski pojačavači koji imaju promenljivi prenosni faktor, jer se u ovim kolima nalaze diodni elementi. Na slici 5.3.3 date su šeme dva delitelja napona sa karakteristikama koje se pritom dobijaju.

Drugi tip diodnog generatora funkcije koji koristi diodne elemente, prikazan je na slici 5.3.4. Funkcije $f_1(X)$ i $f_2(X)$ dobijaju se kombinovanjem niza diodnih elemenata sa slike 5.3.2. Naprimer, ako želimo da napravimo generator funkcije koji će da generira funkciju $Y = AX^2$, onda se podesi da nam bude $f_1(X) = X^2$, i $f_2(X) = A = 1/R$, (tj. stavimo u povratnu spregu otpor R). Potpuna šema generatora kvadratne funkcije data je na slici 5.3.5. Otpori R_j i r_j biraju se tako da se dobije baš kvadratna karakteristika struje I kada se X menja u granicama $0 \leq X \leq U$. Na sličan način izborom vrednosti otpora R_j i r_j mogu se dobiti i druge funkcije. Ovakvi generatori funkcija uglavnom se koriste za generiranje fiksnih funkcija, koje se u-

potrebljavaju kod množača ili za generiranje tipičnih funkcija

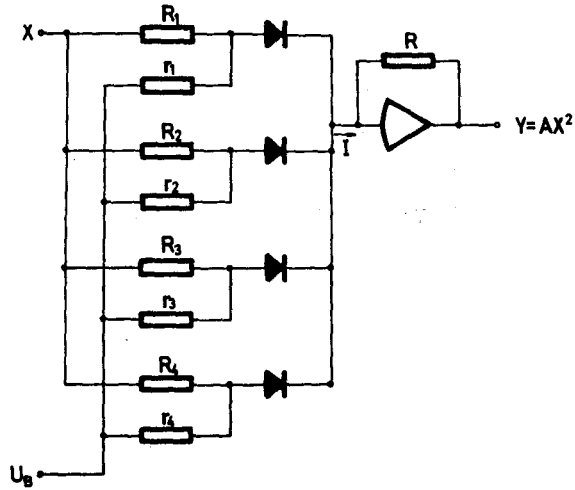


Sl. 5.3.3. Delitelji napona kao e^X , $\ln X$ i drugih.

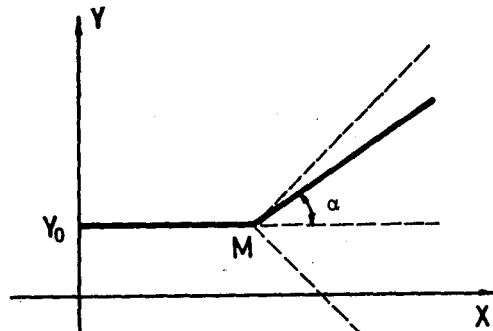
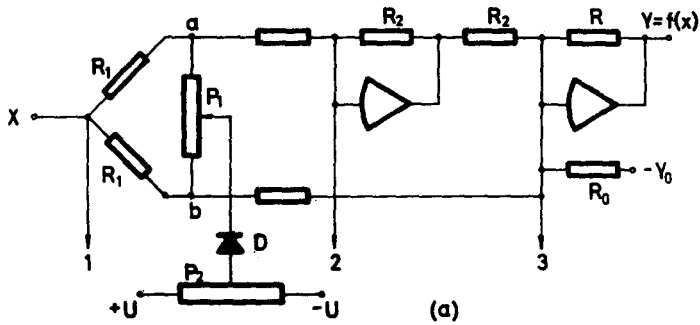


Sl. 5.3.4. Princip specijalnih diodnih generatora funkcija
 Univerzalni diodni generatori funkcija, koji se mogu lako podešavati na proizvoljnu funkciju obično se grade iz diodnih elemenata u obliku mosta kao što prikazuje slika 5.3.6.a. Ovakav jedan element daje pravolinijski segment, kod kojeg se nagib α i tačka prelamanja M mogu lako menjati (sl.5.3.6.b). Postupak dobijanja jednog segmenta može se objasniti uz pomoć

slike 5.3.6. a i b, ako predpostavimo da se X menja u grani-



Sl. 5.3.5. Diodni generator kvadratne funkcije



Sl. 5.3.6. Princip jednog elementa univerzalnog diodnog generatora funkcija

cama $-U \leq X \leq +U$. Kada je ulazni napon $X = -U$, onda dioda D ne provodi, jer je napon na anodi diode negativan u odnosu na katodu. Kako kroz diodu ne protiče struja, naponi u tačkama a i b su jednaki, pa je napon na izlazu $Y = Y_0$. Ako napon X raste ovi se uslovi zadržavaju sve dotle dok dioda D ne počne da provodi. Tačka u kojoj dioda počinje da provodi može se podešavati pomoću potenciometra P_2 , što odgovara pomeranju tačke M duž horizontale $Y = Y_0$. Kada dioda provodi, onda više nisu jednaki naponi u tačkama a i b , pa se napon Y na izlazu iz drugog pojačavača menja linearno, u zavisnosti od napona na ulazu. Nagib ove promene zavisi od položaja klizača potenciometra P_1 . Ako je klizač potenciometra P_1 na sredini, onda je $\alpha = 0$, a ako je klizač bliže kraju a , tada je $\alpha > 0$.

Paralelnim vezivanjem, preko tačaka 1, 2, i 3, više ovakvih diodnih elemenata na iste pojačavače mogu se dobiti više pravolinijskih segmenata, te se može generirati funkcija sastavljena od više segmenata. Otpornik R_0 služi da se preko njega dovodi napon pomoću kojeg se podešava Y_0 .

Ovakav generator funkcija gradi se obično sa 20 diodnih elemenata, tako da se funkcija može aproksimirati pomoću 20 pravolinijskih segmenata u domenu $-U \leq X \leq +U$, i $-U \leq Y \leq +U$. Podešavanje generatora je relativno prosto. Posebno se podešavaju tačke prelamanja na taj način što se ulazni napon X postavi na vrednost gde treba da se nalazi tačka M (sl. 5.3.6.b) i potenciometar P_2 se podešava sve dotle dok se ne primeti promena napona na izlazu, što pokazuje da je dioda D počela da provodi. Na isti se način podeše sve ostale tačke prelamanja. Kada su prelomne tačke podešene, onda se podešava nagib svakog segmenta polazeći od $X = -U$. Merenje napona se vrši na izlazu.

Osobine diodnog generatora funkcija su prilično dobre. Tačke prelamanja se mogu postavljati po želji, pa nije potrebno da su intervali po X osi ekvidistantni, što je glavni nedostatak potenciometarskog generatora funkcija. Na taj se način može veći broj segmenata postaviti tamo gde su krivine veće, pri čemu se postiže veća tačnost i fleksibilnost ovog generatora. Pored toga, diodni generator funkcija ne sadrži nikakve mehaničke delo-

ve koji se kreću, pa je njegov propusni opseg (dinamička tačnost) prilično veliki. U pogledu statičke tačnosti i potenciometarski i diodni generator ponašaju se približno isto.

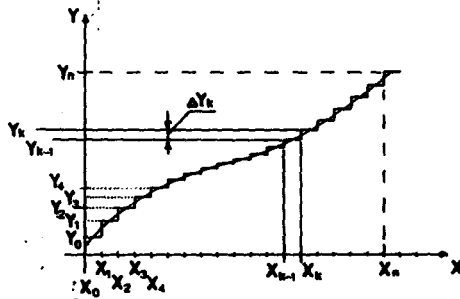
6. UNIVERZALNI NELINEARNI ELEKTRONSKI RAČUNSKI ELEMENT

Princip rada univerzalnog nelinearnog elektronskog računskog elementa objasnićemo najpre na principu generiranja funkcije, a zatim ćemo pokazati kako se ostale nelinearne operacije mogu izvršavati pomoću ovog računskog elementa.

Neka je potrebno generirati funkciju

$$y = f(x) \quad (6.1)$$

Matematičkim veličinama x i y neka odgovaraju naponi X i Y . Prema tome, problem generiranja funkcije se svodi na problem dobijanja napona Y za dati napon X (sl. 6.1).



Sl. 6.1. Stepenasta aproksimacija funkcije

Izvršimo stepenastu aproksimaciju naponske funkcije Y (sl. 6.1), tako da je

$$\left. \begin{aligned} Y_0 &= f(X_0) \\ Y_1 &= f(X_1) \\ \dots\dots\dots \\ Y_n &= f(X_n) \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Označimo sa

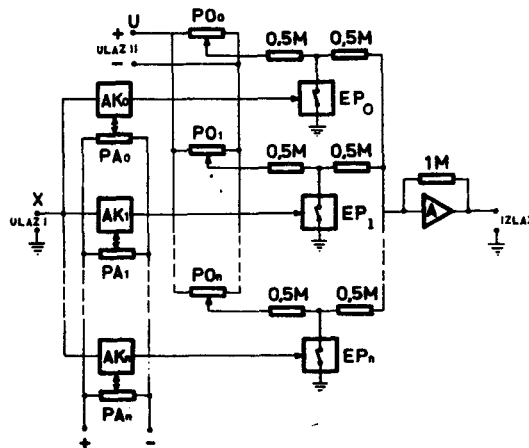
$$\Delta Y_k = Y_k - Y_{k-1}; \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (6.3)$$

gde je $Y_{-1} = 0$, tada će biti

$$Y_k = \sum_{i=0}^k \Delta Y_i = f(X_k); \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (6.4)$$

Očigledno da tačnost stepenaste aproksimacije (sl. 6.1) zavisi od broja n . Što je n veće generirana funkcija biće tačnija. Iz jednačine (6.4) se vidi da je za realizaciju izloženog principa generiranja funkcije potreban jedan elektronski sabirač. Za postavljanje priraštaja ΔY_k , koji od slučaja do slučaja mogu biti različiti, potrebni su potencimetri, a za sukcesivno dovodjenje priraštaja na ulaz sabirača neophodni su amplitudno zavisni elektronski prekidači. Ovakvi prekidači su sagradjeni od kombinacije amplitudnog komparatora i običnog elektronskog prekidača.

Blok šema elektronskog uređaja za generiranje funkcija po izloženom principu prikazana je na slici 6.2. Na ulaz I dovođi se napon X , a na ulaz II konstantan napon U .



Sl. 6.2. Blok šema univerzalnog nelinearnog računskog elementa

Postavljanje zadate funkcije (6.1) sastoji se u sledećem: na potencioetre označene sa PA_k , ($k = 0, 1, \dots, n$) postavljaju se naponi proporcionalni vrednostima apscisa X_k , samo suprotnog znaka, a na potencimetrima PO_k naponi proporcionalni sa vrednostima ΔY_k , ($k = 0, 1, \dots, n$). Posle ovoga nije teško

objasniti rad generatora funkcija.

Amplitudni komparator AK_k poredi vrednost ulaznog napona X sa naponom na klizaču potenciometra PA_k , a to je napon X_k . Sve dok je $X < X_k$ izlazni nivo amplitudnog komparatora je visok, usled čega je elektronski prekidač EP_k zatvoren, te priraštaj ΔY_k sa potenciometra PO_k , ne dospeva na ulaz pojačavača A . Međutim, čim bude $X \geq X_k$, izlazni nivo amplitudnog komparatora postaje manji od nule i to toliko da elektronski prekidač EP_k prekine vezu sa masom (uzemljenjem), te napon sa potenciometra PO_k prelazi na ulaz pojačavača A . Prema tome, kada je zadovoljen uslov $X \geq X_k$, napon na izlazu iz generatora dobija priraštaj ΔY_k , preko potenciometra PO_k , što je u saglasnosti sa oblikom funkcije na slici 6.1.

Na ulaz II (slika 6.2) doveden je napon $+U$ i napon $-U$, čime je omogućeno generiranje i opadajućih funkcija. Očigledno je da vrednost napona U utiče samo na razmeru, a da je oblik stepenaste funkcije odredjen položajima potenciometara PO_k i PA_k ($k = 0, 1, \dots, n$).

Označimo sa Y_G naponsku funkciju na izlazu generatora na slici 6.2, a sa F stepenasto aproksimiranu funkciju f , postavljenu na potenciometrima PO_k , za ekvivalentne vrednosti apsisa odredjenih potenciometrima PA_k . Tada je

$$Y_G = U \cdot F(X) \quad (6.5)$$

Ako umesto konstantnog napona U dovedemo vremensku naponsku funkciju $z(t)$, a umesto naponske funkcije X , proizvoljnu vremensku funkciju $g(t)$, gde je t vreme, onda se iz (6.5) lako dobija

$$Y_G(t) = z(t) \cdot F[g(t)] \quad (6.6)$$

Iz relacije (6.6) vidi se da univerzalni nelinearni element može da generira datu funkciju F , od proizvoljne ulazne funkcije $g(t)$ i da rezultat ove operacije pomnoži sa drugom proizvoljnom ulaznom funkcijom $z(t)$.

Navedimo osnovne operacije koje se mogu izvršavati pomoću univerzalnog nelinearnog računskog elementa.

1. Za $z(t) = 1$ i $g(t) = t$, dobija se generiranje funkcije:

$$Y_G(t) = F(t) \quad (6.7)$$

2. Za $z(t)$ proizvoljno i $g(t) = t$, dobija se množenje funkcija, tj.

$$Y_G(t) = z(t) \cdot F(t) \quad (6.8)$$

3. Za $z(t) = 1$ i $g(t)$ proizvoljno, dobija se generiranje zadate funkcije od proizvoljne ulazne funkcije $g(t)$, tj.

$$Y_G(t) = F[g(t)] \quad (6.9)$$

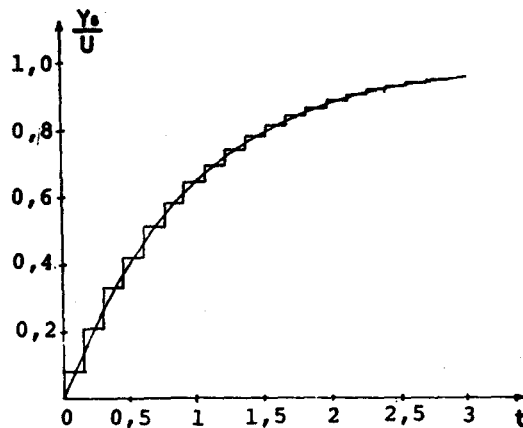
4. Za $z(t)$ i $g(t)$ proizvoljno dobija se operacija (6.6), tj.

$$Y_G(t) = z(t) \cdot F[g(t)] \quad (6.10)$$

Primer: Na slici 6.3 prikazan je izgled funkcije

$$Y_G(t) = U(1 - e^{-t}) \quad (6.11)$$

kada se generira pomoću univerzalnog nelinearnog elektronskog računskog elementa. Funkcija je generirana u intervalu $0 \leq t \leq 3$. Ovaj interval je podeljen na 20 podintervala, a vrednost funkcije unutar svakog podintervala je konstantna i jednaka vrednosti funkcije na sredini intervala.



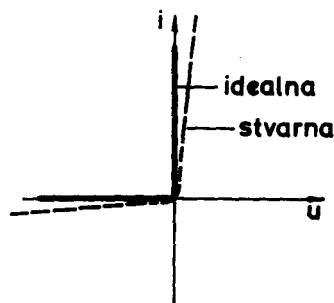
Sl. 6.3. Izgled funkcije (6.11) generirane pomoću univerzalnog nelinearnog elektronskog računskog elementa

7. LOGIČKI I DRUGI ELEMENTI ANALOGNIH RAČUNARA

Pojačavač, potencijometar, množač i generator funkcija čine osnovne računске elemente jednog univerzalnog analognog računara. Međutim, vrlo često takvi računari, ako su većeg kapaciteta, sadrže i neke logičke i druge elemente, koji služe kao dopuna, da bi se mogli rešavati i neki složeniji problemi. U ovu grupu spadaju naprimer: dioda, komparator, rezolver i razni pasivni elementi pomoću kojih se mogu praviti pasivne mreže. Na taj se način proširuju mogućnosti univerzalnih analognih računara i na rešavanje nelinearnih problema, koji se vrlo često teško ili nikako ne mogu rešiti matematičkim metodama.

7.1. Dioda

Dioda se ustvari ponaša kao neka vrsta ventila. Ova njena osobina se koristi naročito kod diodnih generatora funkcija, o kojima je već bilo reči, gde ona služi da se generator prebaci iz jednog radnog stanja u drugo. Obično se koristi u zajednici sa računskim pojačavačem. Ona je sastavljena od dve elektrode, anode i katode, i nekog, tzv. poluprovodničkog medijuma. Kada je električni potencijal na anodi diode veći od potencijala na katodi, onda ona provodi struju, i ponaša se kao provodnik. Ako je pak, potencijal katode viši od potencijala anode, onda dioda ne provodi struju, već se ponaša kao izolator, te kažemo da je dioda zatvorena. Stoga se dioda može uporediti sa nekim ventilom koji u jednom smeru propušta, a u drugom ne propušta tečnost, odnosno u slučaju diode radi se o provodjenju ili neprovodjenju električne struje. Idealna karakteristika diode je takva da je njen električni otpor u propusnom smeru nula, a u nepropusnom beskonačan. Međutim, stvarna karakteristika diode u propusnom smeru ima neki veoma mali otpor, različit od nule, dok u nepropusnom smeru ima veliki, ali ipak konačni otpor. Ovaj odnos otpora, kod dioda koje se koriste u računске svrhe iznosi od 10000:1 do 100000:1, pa se za praksu karakteristika diode može smatrati idealnom (sl. 7.1.1)



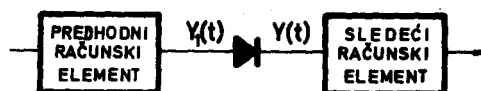
Sl. 7.1.1. Karakteristika diode

Način korišćenja diode

Dioda se može koristiti na dva načina. Prvi je način kada se ona koristi kao usmerač, tako da prenosi pozitivan potencijal, a ne prenosi negativan potencijal sa svog ulaza na izlaz. Ako je izlazni napon iz nekog računskog elementa $Y_1(t)$, i ako se taj napon dovodi na ulaz u diodu (sl.7.1.2) na izlazu iz diode se dobija napon

$$Y(t) = \begin{cases} Y_1(t) & \text{za } Y_1(t) > 0 \\ 0 & \text{za } Y_1(t) \leq 0 \end{cases} \quad (7.1.1)$$

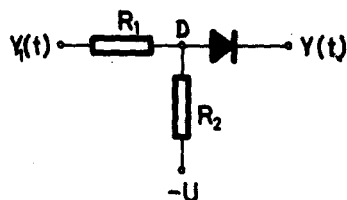
koji može biti ulazni napon za sledeći računski element.



Sl. 7.1.2. Korišćenje diode kao usmerača

Drugi način korišćenja diode sastoji se u povezivanju diode sa dva otpornika, kako je to označeno na slici 7.1.3. U ovom slučaju napon $Y_1(t)$ dovodi se na jedan kraj otpora R_1 , čiji je drugi kraj preko otpora R_2 spojen sa potencijalom $-U$. Kada dioda ne provodi, struja kroz ova dva otpora određena je izrazom:

$$I(t) = \frac{Y_1(t) + U}{R_1 + R_2} \quad (7.1.2)$$



Sl. 7.1.3. Korišćenje diode kao logičkog elementa

Prema tome, potencijal tačke D biće

$$U_D = Y_1(t) - R_1 I(t) = \frac{R_2 Y_1(t) - R_1 U}{R_1 + R_2} \quad (7.1.3)$$

Iz (7.1.3) sledi da će se tačka D nalaziti na nultom potencijalu ako je

$$Y_1(t) = \frac{R_1}{R_2} U \quad (7.1.4)$$

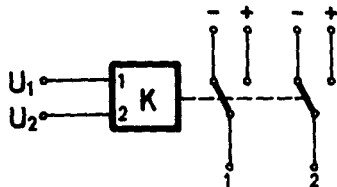
tako da za izlazni napon diode $Y(t)$ važi

$$Y(t) = \begin{cases} U_D, & \text{za } Y_1(t) > \frac{R_1}{R_2} U \\ 0, & \text{za } Y_1(t) < \frac{R_1}{R_2} U. \end{cases} \quad (7.1.5)$$

Dioda se ovde pojavljuje kao logički element sa širim mogućnostima, nego što je to bilo u predhodnom slučaju, kada je primenjena kao usmerač. Ovaj način korišćenja diode primenjen je kod generatora funkcija.

7.2. Komparator

Na sličan način kao i dioda, komparator je računski element koji ima dva različita stanja u zavisnosti od toga kakav je odnos napona na njegovim ulazima. Uprošćena blok šema komparatora data je na slici 7.2.1.



Sl. 7.2.1. Principijska šema komparatora

Komparator se sastoji od jednog elektronskog pojačavača i jednog relea sa dva prebacivačka kontakta. Pojačavački deo ima dva ulaza na koje se dovode računski naponi U_1 i U_2 , a podešen je tako da kada je zbir ovih napona manji od nule, onda se kontakti relea nalaze u jednom položaju (označenom sa -), a kada je zbir veći od nule, kontakti relea se prebacuju u drugi položaj (označen sa +).

Dobre strane komparatora su što se promenljivi naponi $X(t)$ ili $Y(t)$, ako se dovedu na kontakte označene sa (-) odnosno sa (+), mogu u potpunosti preneti na kontakt (1) ili (2) u zavisnosti od kriterijuma na ulazu. Na taj način, sledeći računski element, ako je spojen sa tačkom (1) ili (2) dobija odgovarajući napon $X(t)$ ili $Y(t)$, u zavisnosti od stanja napona U_1 i U_2 na ulazima komparatora. Međutim, loša strana komparatora je nemogućnost trenutnog prebacivanja relea. Vreme prebacivanja relea koje obično iznosi 1 do 2 ms, u zavisnosti od tipa pojačavačkog dela i samog relea, unosi izvesnu grešku u rad računara. Ali, u najvećem broju tehničkih problema, koji se rešavaju na analognim računarima, vreme prebacivanja relea je zanemarljivo malo.

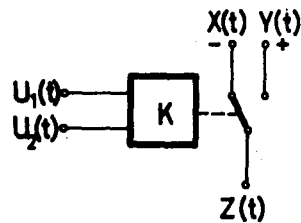
Način korišćenja komparatora

Komparator se može koristiti na više načina i u različite svrhe. Ovde ćemo se ograničiti samo na najprostije načine korišćenja u cilju objašnjenja osnovnih mogućnosti ovog elementa u analognom računaru. Složenije primene komparatora za generiranje tipičnih nelinearnosti i za promene strukture programa na analognim računarima biće date u daljem tekstu.

Komparator kao računski element omogućuje uvodjenje logičkih uslova u matematičke modele koji se postavljaju na analognom računaru. Na ovaj način je moguće automatski menjati strukturu programa u zavisnosti od rezultata dobijenih u toku rada računara. Na slici 7.2.2. data je blok šema komparatora sa jednim prekidačem.

Rad komparatora K , matematički se opisuje sledećim relacijama:

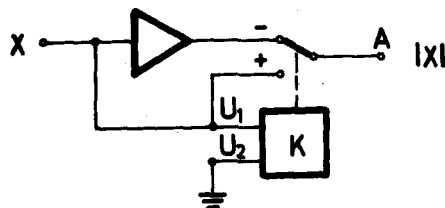
$$z(t) = \begin{cases} X(t) & \text{za } U_1(t) + U_2(t) \leq 0 \\ Y(t) & \text{za } U_1(t) + U_2(t) > 0 \end{cases} \quad (7.2.1)$$



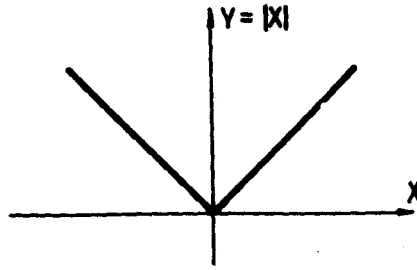
Sl. 7.2.2. Komparator

Izborom raznih vrednosti za napone $U_1(t)$ i $U_2(t)$ mogu se postavljati različiti uslovi za izlaznu funkciju $Z(t)$. Tako, ako je $U_1(t) = \text{const.}$, onda se može usloviti izlaz $Z(t)$ u zavisnosti od nivoa funkcije $U_1(t)$. Takodje i jedna od funkcija $X(t)$ ili $Y(t)$ može biti konstanta, pa prema tome, izlazna funkcija $Z(t)$ može predstavljati promenljivu funkciju ili konstantu, a u specijalnim slučajevima i nulu.

Komparator može da služi i za dobijanje apsolutne vrednosti (modula) neke funkcije, ako se poveže sa još jednim pojačavačem (sl. 7.2.3). Kada je $X < 0$, onda se kontakt relea nalazi u

Sl. 7.2.3. Korišćenje komparatora za dobijanje funkcije $|X(t)|$

tački (-), pa se u tački A javlja veličina $-X$ sa promenjenim znakom, tj. $|X|$. Ako je pak $X > 0$, onda će se kontakti relea prebaciti u položaj (+) i u tački A se javlja veličina $+X$. Prema tome, na izlazu iz ovako povezanog komparatora, tj. u tački A, pojavljuje se funkcija $|X|$, čiji je grafički prikaz dat na slici 7.2.4.



Sl. 7.2.4. Izlaz iz komparatora sa šeme na slici 7.2.3.

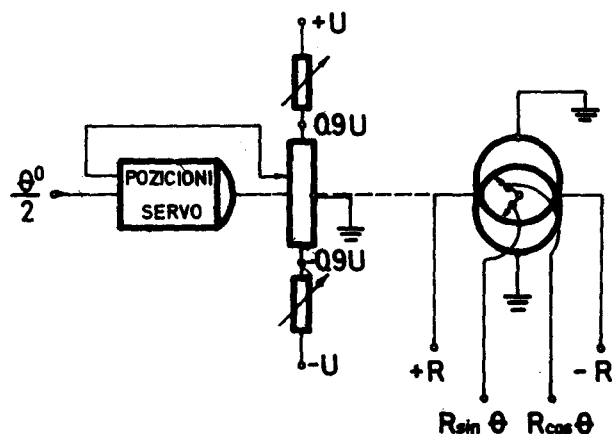
7.3. Rezolver — razlagač

U problemima koji se odnose na stabilnost i putanje letilica, aviona, raketa, brodova, podmornica i sličnih objekata, javlja se potreba za korišćenjem raznih koordinatnih sistema u jednom istom zadatku koji se rešava na računaru. To se naročito ispoljava kada ovi problemi sadrže sile, momente i slične veličine, čije komponente treba da budu izražene u raznim koordinatnim sistemima. Stoga, da bi se ovakvi problemi mogli lakše rešavati potrebno je vršiti transformaciju raznih vektorskih veličina iz jednog u drugi koordinatni sistem. Pritom se javlja potreba za generiranjem trigonometrijskih funkcija (najčešće sinusa i kosinusa) neke promenljive.

Da bi se omogućila transformacija neke vektorske veličine iz jednog koordinatnog sistema u drugi potrebno je na prvom mestu izvršiti razlaganje vektorske veličine na komponente, u određenom koordinatnom sistemu. Računski element koji može da vrši ovakvu operaciju naziva se razlagač ili rezolver. Ustvari razlagač ili rezolver je računski element koji može da da na svojim izlazima sinus i kosinus nekog promenljivog ugla θ koji je u obliku napona θ doveden na ulaz rezolvera.

Po svojoj konstrukciji rezolver je ustvari servomnožač, koji umesto svih linearnih potencijometara sadrži i nelinearne potencijometre koji su gradjeni tako da se na njihovim klizačima javlja napon proporcionalan sa $\sin\theta$ umesto sa θ , kao što je to slučaj kod linearnog potencijometra. Ustvari na osovini motora ser-

vomnožača nalaze se dva potenciometra sa po dva klizača, koji su kod jednog potenciometra pomereni za 90° jedan u odnosu na drugi (sl. 7.3.1). Na jednom klizaču javlja se napon propor-



Sl. 7.3.1. Rezolver - razlagač

cionalan sa $\sin\theta$ a na drugom sa $\cos\theta$.

Potenciometar, koji se naziva još i sinus-kosinus potenciometar, napravljen je tako da ima 4 kvadranta koji su ekvivalentni sa vrednostima sinusne funkcije ugla θ između $-180^\circ \leq \theta \leq +180^\circ$. U tačkama koje odgovaraju uglu $\theta = 0^\circ$ i $\theta = \pm 180^\circ$ potenciometar je spojen sa masom (napon nula), dok se u tačkama, koje odgovaraju $\theta = \pm 90^\circ$ na potenciometar dovodi napon $\pm R$, proporcionalan sa intenzitetom vektora \vec{r} , koji treba razložiti na komponente u pravouglom koordinatnom sistemu. Prema tome, kada se na ulaz u servosistem dovodi promenljiv napon θ , proporcionalan uglu θ , na klizačima se javlja napon proporcionalan sa $R\sin\theta$ i $R\cos\theta$ (sl. 7.3.1). Na osovini serva ovakvog rezolvera nalaze se obično dva sinus-kosinus potenciometra i 2 do 3 linearna potenciometra, od kojih jedan služi za pozicioniranje, kao kod servomnožača, dok se ostali mogu koristiti za množenje.

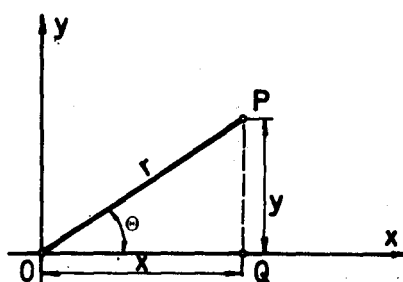
7.3.1. Transformacija koordinata pomoću rezolvera

U analognoj računskoj tehnici koriste se različite transformacije koordinata koje se uglavnom svode na

- a) Transformaciju polarnih u pravouglo koordinata,
- b) Transformaciju pravougljih u polarne koordinate i
- c) Rotaciju pravouglog koordinatnog sistema za ugao ϕ .

Transformacija polarnih u pravouglo koordinata

Da bi se koordinate r i θ neke tačke P date u polarnom koordinatnom sistemu, izrazile u pravouglo koordinatnom sistemu, kao koordinate x i y , koriste se poznate relacije (sl. 7.3.2),



Sl. 7.3.2. Veza polarnih i pravougljih koordinata

$$x = r \cos\theta \quad \text{i} \quad y = r \sin\theta \quad (7.3.1)$$

Ove se relacije mogu lako ostvariti pomoću rezolvera povezanog prema slici 7.3.1, pri čemu se na klizačima nelinearnog potencijometra javljaju naponi $R \sin\theta$ i $R \cos\theta$, gde je θ napon koji se dovodi na ulaz rezolvera. Radi lakšeg određivanja razmere umesto θ , na ulaz se dovodi napon $\theta/2$, a na krajeve potencijometra za pozicioniranje dovodi se napon $\pm 0.9 U$ (U je jedinični napon računara). Prema tome, na klizačima se javljaju naponi

$$X = R \cos\theta \quad \text{i} \quad Y = R \sin\theta \quad (7.3.2)$$

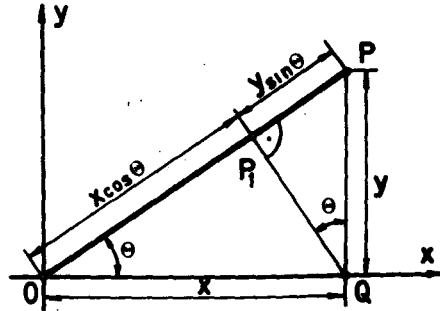
Transformacija pravougljih u polarne koordinate

Koordinate x i y neke tačke P iz pravouglog koordinatnog sistema mogu se transformisati u polarne koordinate r i θ uz pomoć relacija

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{i} \quad \theta = \arctg \frac{y}{x} \quad (7.3.3)$$

Umesto direktnih matematičkih operacija, koje su definisane relacijama (7.3.3) za ovu transformaciju koristi se implicitni račun. Time se izbegava kvadriranje veličina x i y , generiranje kvadratnog korena, kao i deljenje veličina x i y i generiranje inverzne funkcije tangensa.

Da bi se koristile implicitne matematičke operacije posmatrajmo sliku 7.3.3. Sa slike se vidi da je duž \overline{OP} određena u pra-



Sl. 7.3.3. Transformacija pravouglanih u polarne koordinate u vouglojnom sistemu sa

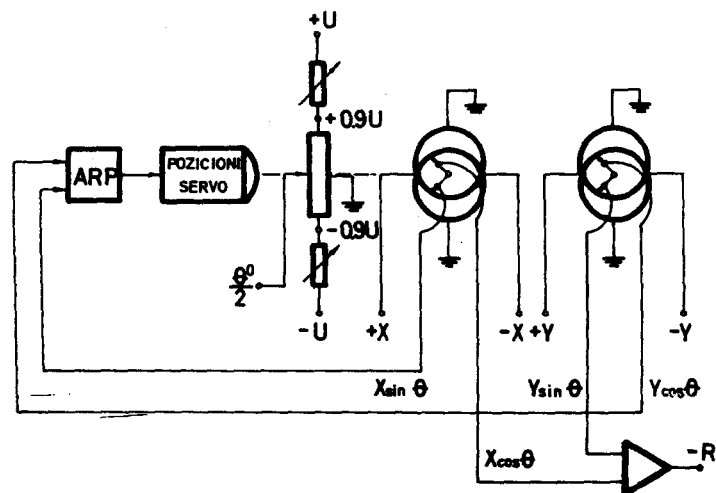
$$\overline{OP} = r = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (7.3.4)$$

Isto tako je $\overline{QP_1} = x \sin \theta = y \cos \theta \quad (7.3.5)$

Relacija (7.3.5) može da posluži za određivanje ugla θ . Stoga, ako se na odgovarajuće potencijometre rezolvera dovedu naponi X i Y (sl. 7.3.4), a sa klizača naponi $X \sin \theta$ i $Y \cos \theta$ vode na sabirač, a razlika ova dva napona dovodi na pojačavač koji se koristi za pozicioniranje serva, onda će relacija (7.3.5) biti zadovoljena samo za ono θ , za koje je razlika $X \sin \theta$ i $Y \cos \theta$ jednaka nuli. Očigledno je da se tada na izlazu servopojačavača javlja napon nula, te osovina motora zauzima određeni ugao θ .

Pošto se napon za pozicioniranje osovine serva dobija kao razlika veličina $X \sin \theta$ i $Y \cos \theta$, to će ova razlika koja se vodi na servopojačavač, za određeno θ , zavisiti od vrednosti X i Y . Prema tome, napon greške koji pokreće servomotor zavi-

siće i od veličine R , pa će pojačanje servomehanizma biti pro-



Sl. 7.3.4. Rezolver za transformaciju pravougljih u polarne koordinate

menljivo, tj. proporcionalno sa R . Ovo bi sa tehničke strane dovelo do velikih smetnji, naročito pri malom R , jer bi dovelo do nestabilnog rada serva. Stoga, da bi se izbegla ova pojava, koristi se jedan uređaj za automatsku regulaciju pojačanja (ARF), koji podešava pojačanje serva tako da je ono uvek konstantno bez obzira na promene R .

Sabiranjem napona sa preostala dva klizača preko jednog sabirača, dobija se

$$R = X \cdot \cos\theta + Y \cdot \sin\theta = X \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} + Y \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (7.3.6)$$

što ustvari nije ništa drugo nego relacija (7.3.3).

Ovako izvedena implicitna realizacija za dobijanje ugla θ i veličine R , veoma se često koristi i ima veliku važnost u analognoj računskoj tehnici. Stoga je potrebno ispitati da li je sistem, povezan prema slici 7.3.4, stabilan. Kriterijum stabilnosti zavisi od znaka parcijalnog izvoda po θ , i ako je ovaj izvod negativan u okolini nulte tačke, onda je sistem stabilan.

Kako je prema (7.3.5)

$$F = -X \sin\theta + Y \cos\theta \quad (7.3.7)$$

to je

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -X \cos\theta - Y \sin\theta = -\frac{X^2}{R} - \frac{Y^2}{R} = -R \quad (7.3.8)$$

pa kako je R uvek pozitivno parcijalni izvod biće uvek negativan te će ovako povezan sistem biti stabilan u sva četiri kvadranta za θ .

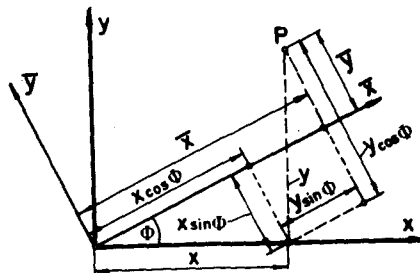
Ovde treba napomenuti da se napon koji odgovara uglu $\theta/2$, može dobiti na klizaču potencijometra za pozicioniranje, koji se u ovom slučaju ne koristi u kolu servosistema (sl. 7.3.4)

Rotacija pravouglog koordinatnog sistema

Rotacija pravouglog koordinatnog sistema za ugao ϕ , tj. transformisanje koordinata neke tačke P iz sistema Oxy u sistem $O\bar{x}\bar{y}$ (sl. 7.3.5) može se vršiti pomoću relacija

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x \cos\phi + y \sin\phi \\ \bar{y} &= -x \sin\phi + y \cos\phi \end{aligned} \right\} \quad (7.3.9)$$

gde je sa ϕ označen ugao između pozitivnog smera x -ose i pozitivnog smera \bar{x} -ose meren u obrnutom smeru kazaljke na satu.

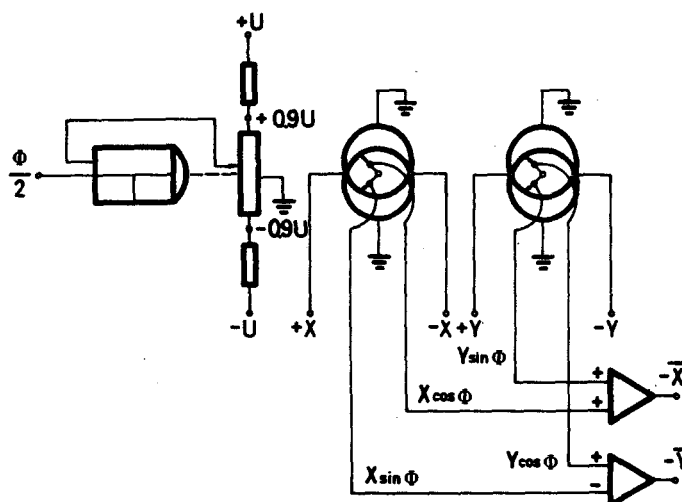


Sl. 7.3.5. Rotacija pravouglog koordinatnog sistema

Relacije (7.3.9) mogu se ostvariti pomoću šeme na slici 7.3.6, gde se izlazi sa klizača pojedinih sinus-kosinus potencijometara dovode na odgovarajuće sabirače. Ugao ϕ pozicionira se pomoću napona ϕ koji podešava sve klizače potencijometara.

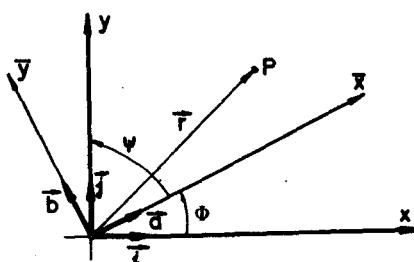
Jednačine (7.3.9) mogu se smatrati i kao izrazi za transforma-

ciju koordinata jednog vektora iz jednog pravouglog koordi-



Sl. 7.3.6. Rezolver za rotaciju pravouglog koordinatnog sistema

natnog sistema u drugi. Neka su naprimer \vec{i} i \vec{j} jedinični vektori duž x i y osa respektivno, a \vec{a} i \vec{b} jedinični vektori duž \bar{x} i \bar{y} osa rotiranog sistema (Sl.7.3.7). Vektor \vec{r}



Sl. 7.3.7. Transformacija koordinata vektora

čiji se vrh nalazi u tački P u Oxy sistemu se razlaže na

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \tag{7.3.10}$$

odnosno u sistemu $\bar{Ox}\bar{y}$ na

$$\vec{r} = \bar{x}\vec{a} + \bar{y}\vec{b} \tag{7.3.11}$$

gde su x i y odnosno \bar{x} i \bar{y} komponente vektora \vec{r} u pravcu odgovarajućih osa.

Veza između dva koordinatna sistema u matičnom obliku data je relacijom

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} \cdot \vec{a} & \vec{j} \cdot \vec{b} \\ \vec{i} \cdot \vec{b} & \vec{j} \cdot \vec{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (7.3.12)$$

Kada se ova matrica razvije daje relacije (7.3.9), jer kvadratna matrica daje kosinuse pravaca u oba koordinatna sistema, tj.

$$\begin{bmatrix} \vec{i} \cdot \vec{a} & \vec{j} \cdot \vec{a} \\ \vec{i} \cdot \vec{b} & \vec{j} \cdot \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (7.3.13)$$

pošto je

$$\vec{j} \cdot \vec{a} = |\vec{j}| \cdot |\vec{a}| \cos\psi = \cos\psi \quad (7.3.14)$$

gde je ψ ugao između dva vektora, u ovom slučaju \vec{j} i \vec{a} . Kako je međutim, prema slici 7.3.7

$$\psi = 90^\circ - \phi \quad (7.3.15)$$

to se izraz (7.3.14) svodi na

$$\vec{j} \cdot \vec{a} = \sin\phi \quad (7.3.16)$$

Na sličan se način dokazuje pravac ostalih jediničnih vektora iz relacije (7.3.13).

Pošto je rezolver u suštini potenciometerski uređaj, on ima veliku izlaznu impedansu, pa je stoga, kao i svaki potenciometar, podložan greškama usled opterećenja klizača ulaznom otpornošću sledećeg računskog elementa. Ali za razliku od običnog potenciometra ove se greške ne mogu lako korigovati običnim dodavanjem još jednog otpora na klizač potenciometra za pozicioniranje, jer su sinus-kosinus potencimetri nelinearni. Zbog toga se već prilikom konstrukcije ovakvog potenciometra mora voditi o tome računa, te se sinus-kosinus potenciometar gradi tako da se na njemu javlja tačan napon samo onda kada je njegov klizač opterećen jediničnim računskim otporom (kod računara koji rade sa 100V ovaj otpor iznosi 1M). Na taj način se e-

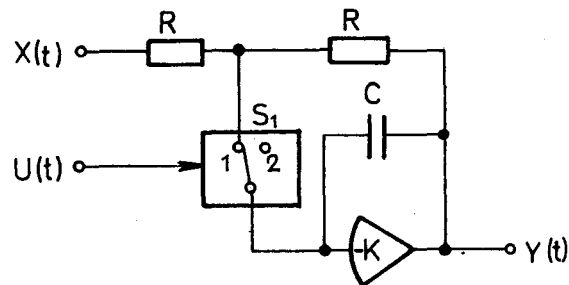
liminiše greška, ali samo u slučaju kada rezolver daje napon računskom pojačavaču preko jediničnog ulaza.

Ostale osobine rezolvera su iste kao i kod servomnožača koji ima jednoobrtne potenciometre. Stoga se obično na osovinu rezolvera dodaju još nekoliko (1 do 3) linearnih potenciometara za množenje, pa ako se ne koristi kao rezolver, ovaj računski element može da se koristi kao običan servomnožač. Ovde treba napomenuti da i u pogledu razmera za X , Y i R važi isto što i za servomnožač.

Što se tiče razmere za ulaznu promenljivu θ , ona se određuje tako da za ugao $\theta = 1^\circ$ napon na ulazu θ treba da je $0.5V$ (kod računara koji rade sa $U = 100V$), ili $\theta = 0.05V$ (kod računara koji rade sa $U = 10V$). Zbog toga se na potenciometar za pozicioniranje i ne dovodi pun računski napon, već $0.9U$. Ovo daje dovoljno dobru tačnost, ali ograničava ugao θ u opsegu $-180^\circ < \theta < +180^\circ$.

7.4. Element „prati-pamti“ (track-store)

Ovaj element ima dva ulaza i jedan izlaz (sl. 7.4.1). Na jedan ulaz se dovodi funkcija $X(t)$, a na drugi ulaz komandni signal $U(t)$. Komandni signal može biti jednak nuli ili imati vrednost



Sl. 7.4.1. Element "prati-pamti" (track-store)

$U_0 > 0$. Izlaz $Y(t)$ iz ovakvog elementa imaće različite vrednosti u zavisnosti od vrednosti komandnog signala $U(t)$.

a) Ako je $U(t) = 0$, tada će ovaj računski element pratiti ulaznu funkciju $X(t)$, sa promenjenim znakom, tj. biće

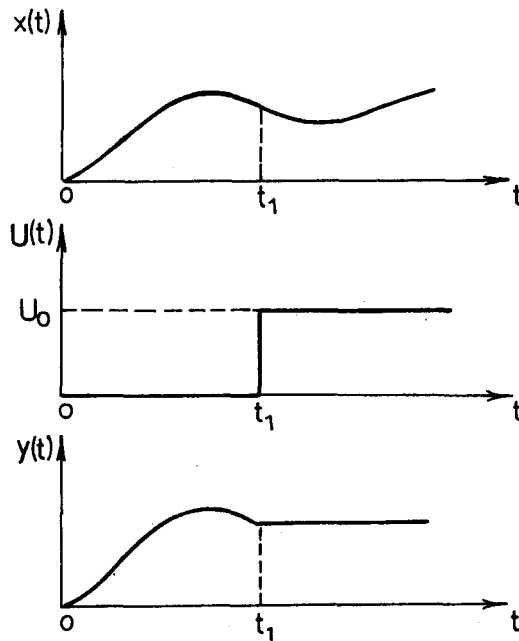
$$Y(t) = -X(t) \quad (7.4.1)$$

b) Ako je u trenutku t_1 , komandni signal dobio vrednost $U(t) = U_0 > 0$, tada će izlazna funkcija imati vrednost

$$Y(t) = -X(t_1), \quad t > t_1 \quad (7.4.2)$$

Ovaj element (sl. 7.4.1) se realizuje na sličan način kao i integrator (sl. 3.2.6), s tim što se ulazna funkcija $X(t)$ dovede na ulaz za početni uslov, čime se prema relaciji (3.2.25) za dovoljno malo C , postiže da ulaz $Y(t)$, prati ulaznu funkciju $X(t)$ sa promenjenim znakom. Prekidač S_1 se komanduje ulaznim signalom $U(t)$, tako da je S_1 u položaju 1 ako je $U(t) = 0$, a S_1 je u položaju 2, ako je $U(t) = U_0 > 0$, čime se prekida praćenje ulazne funkcije $X(t)$ i izlaz dobija vrednost $Y(t) = -X(t_1)$.

Za datu ulaznu funkciju $X(t)$, na sl. 7.4.2., i dat komandni



Sl. 7.4.2. Izlaz iz elementa "prati-pamti" u zavisnosti od ulaza i komandnog signala

signal $U(t)$, prikazan je oblik izlazne funkcije $Y(t)$.

II ORGANIZACIJA UNIVERZALNIH ANALOGNIH ELEKTRONSKIH RAČUNARA

1. UVOD

U predhodnoj glavi bilo je reči o pojedinim računskim elementima analognih elektronskih računara. Svaki ovakav računski element, kao što smo videli, konstruisan je tako da izvršava određenu elementarnu matematičku operaciju. Rešavanje složenih matematičkih zadataka obavlja se odgovarajućim povezivanjem potrebnog broja računskih elemenata, a u zavisnosti od oblika matematičkog modela koji se želi analizirati pomoću računara.

Sastavljanje blok šeme za povezivanje računskih elemenata u cilju prenošenja problema - postavljanja i rešavanja, na analognom računaru, naziva se programiranje. Fizičko povezivanje računskih elemenata prema zadatoj blok šemi - programu, kod raznih računara, izvodi se na različite načine u zavisnosti od konstrukcije računara.

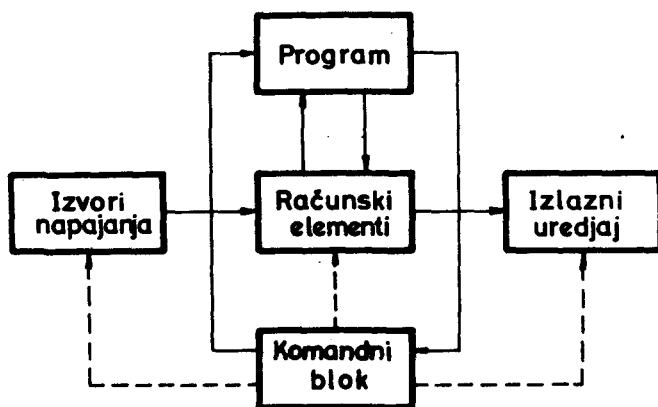
Struktura blok šeme - programa, po kojoj se povezuju računski elementi na analognom računaru zavisi od oblika matematičkog modela. Međutim, na analognom računaru mogu se rešavati samo oni problemi koji imaju određene konkretne vrednosti svih matematičkih veličina koje ulaze u matematički model. Kada je reč o diferencijalnim jednačinama, to znači da svi početni uslovi kao i svi koeficijenti moraju biti određeni brojno i postavljeni na analognom računaru. Stoga se pre početka rešavanja nekog problema mora obezbediti način postavljanja početnih uslova na računaru. Sa postavljenim početnim uslovima računara može da pređe na režim rada u kojem se dobija rešenje matematičkog modela. Ovo rešenje najčešće je funkcija koja se na analognom računaru predstavlja odgovarajućom naponskom funkcijom.

Uredjaj koji služi za prikazivanje naponske funkcije, u obliku pogodnom za praćenje rešenja matematičkog modela od strane korisnika računara, naziva se izlazni uredjaj ili uredjaj za očitavanje rešenja.

Svi problemi, kao što su prenošenje programa na analogni računara, postavljanje početnih uslova, očitavanje i indikacija re-

šenja, komandovanje radom računara i sl. biće razmatrani u ovoj glavi. Prema tome, pod organizacijom analognih računara podrazumevamo ne samo tehnička rešenja vezana za rad računskih elemenata, već i za rad analognog računara u celini. Poslednjih se godina znatno usavršio način korišćenja savremenih analognih računara, te smatramo da ova oblast zasluhuje da bude tretirana izdvojeno od računskih elemenata računara.

Na slici 1.1. data je šema na kojoj je prikazana struktura analognog računara u celini. Izvori za napajanje obezbeđuju potrebne napone za rad računara. Ovde je potrebno razlikovati računске napone i napone napajanja pojedinih elemenata i uređaja računara.



Sl. 1.1. Organizacija analognog računara

Program se na računaru postavlja fizičkim povezivanjem odgovarajućih računskih elemenata. Pored ovoga, kod najmodernijih računara, programom se mogu predvideti i posebne intervencije sa komandnog bloka računara.

Komandni blok obezbeđuje sve komandne signale koji upravljaju radom analognog računara. Osnovni signali ove vrste su namenjeni za puštanje računara u rad i zaustavljanje računara. Pored ovoga, komandni blok obezbeđuje različite režime rada računara, kao što su podešavanje potenciometara, početnih uslova, radni režim i dr. Savremeni računari, grade se tako da mogu da rade sporo i repetitivno, pa se i za ove režime na komandnom bloku nalaze odgovarajuće komande.

2. SPORI ANALOGNI RAČUNARI

2.1. Režimi rada sporih analognih računara

Kod sporih analognih računara potrebna je intervencija čoveka, preko komandnog bloka, da bi se računar doveo u radni režim ili da bi se zaustavio u toku rada. Da bi se omogućio normalan rad sporog analognog računara potrebni su sledeći režimi rada u koje se računar može dovesti spoljašnjom intervencijom čoveka:

- postavljanje potencimetara,
- postavljanje početnih uslova,
- normalni rad računara - "računanje", i
- zaustavljanje računara - "pamćenje".

Pored ovih osnovnih režima rada, kod savremenih većih računara, postoje i drugi režimi rada koji obavljaju posebne operacije, kao što su provera pojedinih računskih elemenata, ispitivanje problema u statičkom režimu, itd. Uz pomoć ovih režima u nekim slučajevima se mogu lako otkriti greške koje se javljaju bilo usled kvara nekog od računskih elemenata, bilo usled pogrešnog programiranja, čime se olakšava i ubrzava rad sa računarom.

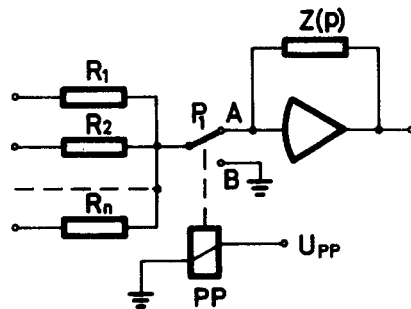
U daljem izlaganju ćemo se zadržati samo na osnovnim režimima rada računara.

Svaki od navedenih pet osnovnih režima rada biće posebno razmatran.

2.2. Postavljanje potencimetara

Kada su računski elementi električno povezani prema postavljenom programu, treba izvršiti postavljanje svih potencimetara koji učestvuju u programu. Postavljanje potencimetara se sastoji u prenošenju brojnih vrednosti za konstante i parametre iz matematičkog modela na odgovarajuće potencioetre u analognom modelu na računaru. Prilikom postavljanja potencimetara treba

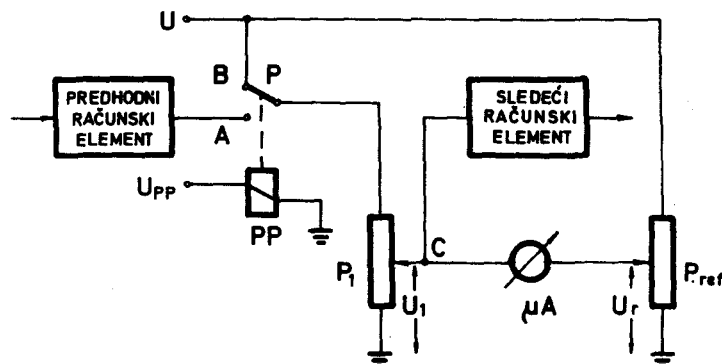
voditi računa o eventualnom opterećenju potenciometra ulaznom otpornošću sledećeg računskog elementa. Uticaj opterećenja na tačnost potenciometra razmatran je u prvom delu knjige (odjeljak I.2). Da bi se kod postavljanja potenciometara uzelo u obzir i opterećenje potenciometra, potrebno je najpre izvršiti električno povezivanje računskih elemenata pomoću odgovarajućih spojnih vodova tako da svaki potenciometar dobije ono opterećenje koje će imati u normalnom radu računara. U režimu postavljanja potenciometara na rele PP dovodi se napon U_{pp} (sl. 2.2.1), koji vrši prebacivanje prekidača P_1 iz položaja (A) u položaj (B). Na taj su način svi ulazni otpori, kod sabirača odnosno integratora, odvojeni od samog pojačavača i spojeni sa masom. Ako je neki od ulaznih otpora R_i ($i=1,2,\dots,n$) bio vezan za klizač nekog od potenciometara, on ostaje vezan i u ovom režimu. Otpor ili kondenzator u povratnoj sprezi pojačavača ostaje spojen te je izlazni napon svakog pojačavača nula. U isto vreme napon U_{pp} vrši prebacivanje i prekidača P na slici 2.2.2 u položaj (B), te se na svaki od potenciometara dovodi konstantan računski napon U . Između klizača potenciometra P_1 , koji se želi postaviti, i referentnog potenciometra P_{ref} nalazi se osetljivi instrument



Sl. 2.2.1. Sabirač u režimu postavljanja potenciometara

- mikroampermetar, pomoću kojeg se precizno konstatuje postojanje naponske razlike. Na referentni potenciometar se takodje dovodi napon U . Vrednost koja se želi postaviti na potenciometar P_1 , postavi se najpre na referentnom potenciometru, a zatim se klizač potenciometra P_1 pomera dok mikroampermetar ne pokaže nulu. Tada je $U_1 = U_r$, pa je potenciometar podešen na željenu vrednost bez obzira na opterećenje.

Kod većih savremenih računara u tački (C) (sl. 2.2.2) vezan je precizni numerički voltmetar, umesto mikroampermetra i referentnog potencijometra. Ovaj instrument ima vrlo veliki unutrašnji otpor, te ne opterećuje klizač potencijometra. Pomoću njega se



sl. 2.2.2. Postavljanje potencijometara

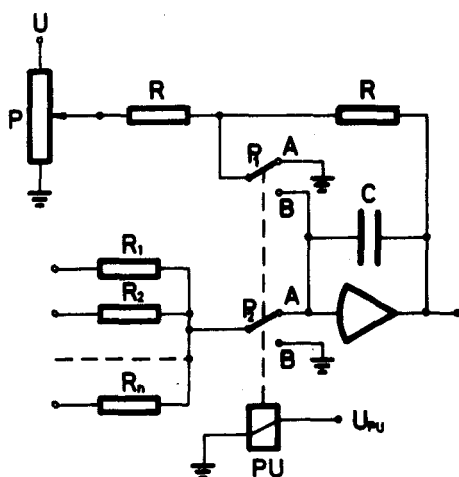
podešavanje potencijometra vrši veoma lako i brzo, jer se vrednost napona U_1 indicira u obliku dekadnog broja.

2.3. Postavljanje početnih uslova

U ovom režimu rada treba izvršiti punjenje kondenzatora u povratnoj sprezi svih integratora do naponske vrednosti koja odgovara određenom početnom uslovu svakog od njih. Da bi se ovo realizovalo potrebno je odvojiti ulazne otpornike od ulaza u pojačavač i na kondenzator dovesti napon koji odgovara početnom uslovu (sl. 2.3.1).

Signal U_{pu} , koji se javlja u ovom režimu rada računara, posredstvom relea PU, vrši prebacivanje prekidača P_1 i P_2 na slici 2.3.1 iz položaja (A) u položaj (B). Preko potencijometra P dovodi se deo napona U koji odgovara početnom uslovu. Napon U je pozitivan ili negativan u zavisnosti od znaka početnog u-

slova. Punjenje kondenzatora C (sl. 2.3.1) se vrši preko ot-



Sl. 2.3.1. Postavljanje početnih uslova

pora R , tako da je vreme postavljanja početnog uslova određeno vremenskom konstantom RC . Otpori R se obično biraju tako da vreme punjenja kondenzatora bude dovoljno malo u odnosu na vreme intervencije čoveka u cilju promene režima rada računara.

2.4. Normalni rad računara — „računanje“

U ovom režimu rada vrši se rešavanje postavljenog problema na analognom računaru. Prema tome, u ovom režimu treba obezbediti da svi računski elementi dodju u stanje predviđeno programom. Pošto ne postoje signali U_{pp} i U_{pu} , to će potencimetri doći u stanje predviđeno programom, jer se prekidač P na slici 2.2.2 nalazi u položaju (A). Integratori će imati funkciju za koju su namenjeni, jer odsustvo signala U_{pu} , (sl. 2.3.1) dovede prekidače P_1 i P_2 u položaj (A). Prekidač P_1 u položaju (A) ostavlja u povratnoj sprezi integratora kondenzator C , a prekidač P_2 u položaju (A) uspostavlja vezu između ulaznih

otpora i pojačavača, tako da integrator može normalno da obavlja svoju funkciju. Pre ovog režima računar se mora nalaziti u režimu postavljanja početnih uslova. Za vreme režima postavljanja početnih uslova izvršeno je punjenje odgovarajućih kondenzatora na napon koji odgovara početnim uslovima. Ako se zatim pređe na režim normalnog rada računara, svaki računski element obavljao odgovarajuću funkciju i biće povezan sa ostalim računskim elementima prema postavljenom programu.

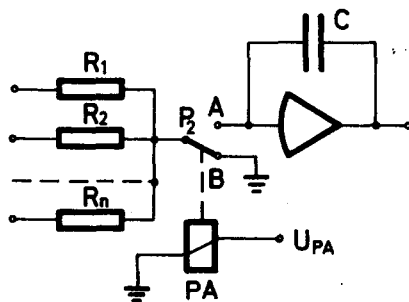
2.5. Zaustavljanje računara — „pamćenje“

Kada se računar nalazi u režimu normalnog rada integratori obavljaju funkciju integraljenja, pa se u skladu sa tom funkcijom menja i naponski nivo na kondenzatorima u povratnoj sprezi. Kao što je već od ranije poznato, nezavisno promenljiva kod analognih računara je vreme. Prema tome, integracija se obavlja u vremenu. Ako se, međjutim, želi prekinuti proces integracije u nekom vremenskom trenutku, a da se naponski nivoi na kondenzatorima zadrže na onim vrednostima koje su bile u trenutku prekida integracije, računar treba dovesti u režim zaustavljanja ili "pamćenja".

Ovde treba napomenuti da ako bi se posle režima normalnog rada, računar doveo u režim postavljanja početnih uslova, takodje bi proces integracije bio zaustavljen, ali bi kondenzatori, u povratnoj sprezi integratora, bili ponovo dovedeni na napone srazmerne početnim uslovima.

Medjutim, u režimu zaustavljanja - "pamćenja" izvrši se odvajanje ulaznih otpora od ulaza u pojačavač integratora, a kondenzator u povratnoj sprezi ostaje na dostignutom naponskom nivou (sl. 2.5.1). Signal U_{PA} , koji definiše ovaj režim rada računara, vrši prebacivanje prekidača P_2 , preko relea PA , na slici

2.5.1 iz položaja (A) u položaj (B).



Sl. 2.5.1. Zaustavljanje računara sa "pamćenjem"

Ako se posle režima zaustavljanja - "pamćenja" predje ponovo u režim normalnog rada, računar nastavlja rad, od vremenskog trenutka zaustavljanja na dalje, sa korektnim naponskim stanjima na svim računskim elementima. Na ovaj način proces računanja se nastavlja kao da nije ni bio prekinut.

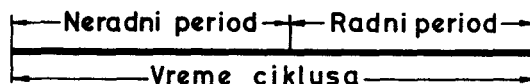
3. REPETITIVNI ANALOGNI RAČUNARI

3.1. Repetitivni rad računara

Repetitivni analogni računari su dobili ime po osobini da se rešenje kod ovakvih računara ponavlja više puta u sekundi. Oni rade velikom brzinom i na njima se rešenje obično ponavlja 20 do 100 puta u sekundi, a postoje repetitivni računari kod kojih učestanost ponavljanja rešenja iznosi i po nekoliko hiljada u sekundi (ultrabrzi repetitivni računari). Zbog velike brzine ponavljanja rešenja, ono se može vizuelno pratiti na ekranu katodnog osciloskopa.

Rad računara za vreme jedne repeticije, ili jednog ciklusa sastoji se iz dva dela (sl. 3.1.1). Prvi deo je neradni ili pripremni period, u kojem se vrši dovodjenje početnih uslova i priprema računara za radni režim. U ovom periodu vrši se pražnjenje kondenzatora u povratnoj sprezi kod integratora, i integratori

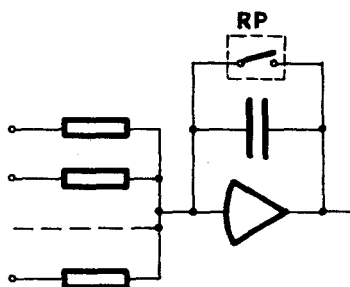
se dovode u stanje od kojeg treba da počne rešavanje problema, koji je u vidu programa postavljen na računar.



Sl. 3.1.1. Vremenski ciklus kod repetitivnih računara

Iza ovog perioda nailazi radni deo ciklusa koji se obično naziva radni period. U ovom delu računar obavlja rešavanje postavljenog problema.

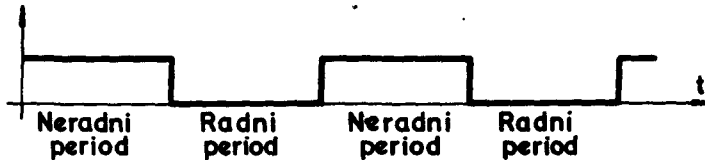
Da bi se omogućio automatski prelazak iz neradnog u radni period, a zatim ponavljanje ovog ciklusa, u integratore su ugrađeni specijalni elektronski ili elektromehanički sistemi koji prebacuju integratore u početni ili radni režim. Kod raznih računara ovaj sistem je izveden na razne načine. Naprimer, kod računara koji rade sa manjim brojem ponavljanja u sekundi paralelno sa kondenzatorom nalazi se jedan relejni prekidač (RP) (sl. 3.1.2) koji je za vreme neradnog perioda zatvoren, tako da



Sl. 3.1.2. Pražnjenje kondenzatora u povratnoj sprezi integratora

se kondenzator prazni. U radnom periodu ovaj prekidač je otvoren, te je omogućen pravilan rad integratora. Kod brzih računara koriste se elektronski prekidači.

Upravljanje radom ovih prekidača (relea) vrši se iz komandnog bloka pomoću pravougaonih naponskih impulsa. Oblik ovih impulsa prikazan je na slici 3.1.3, gde je uzeto da impuls zatvara prekidač. Kada nema impulsa prekidač je otvoren i integrator je u radnom režimu.



Sl. 3.1.3. Komandni naponski signal

Kod modernijih računara sistem za promenu radnog režima integratora je nešto komplikovaniji i vrši još neke funkcije, pa ćemo u narednom izlaganju o ovome detaljnije govoriti.

3.2. Izbor repeticije

Za pravilan rad repetitivnih računara potrebno je obezbediti pogodnu dužinu trajanja radnog i neradnog perioda. Izbor radnog perioda zavisi od toga kako će se posmatrati rešenje koje daje računar i kako će se meriti vreme, kao nezavisno promenljiva. Dužina neradnog perioda određuje se tako da računaru ostane dovoljno vremena kako bi se svi računski elementi doveli u po-

četno stanje. Prema tome, da bi obezbedili pravilan rad repetitivnog računara, potrebno je pogodno odabrati repeticiju, tj. učestanost ponavljanja rešenja.

Prilikom izbora repeticije kod repetitivnih analognih računara, treba imati u vidu i sledeće:

- učestanost ponavljanja rešenja mora biti dovoljno visoka da omogući vizuelno praćenje rešenja na ekranu katodnog osciloskopa,
- visoka učestanost repeticije zahteva dobre konstruktivne performanse pojačavača.

Ova dva zahteva su medjusobno kontradiktorna. Prvi zahtev nameće da donja granica repeticije ne ide ispod 20 Hz, a drugi da gornja ne ide preko 100 Hz.

Neka je, naprimer, na ulaz integratora repetitivnog analognog računara doveden napon u obliku jedinične odskočne funkcije

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t \leq 0 \\ U_0 & \text{za } t > 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

gde je U_0 jedinični računski napon. Neka je kondenzator u povratnoj sprezi integratora, u trenutku $t = 0$, na nultom naponu, tj. integrator počinje rad od nule. Tada je izlaz iz integratora odredjen sa

$$Y(t) = - \frac{1}{RC} \int_0^T U_0 \cdot dt \quad (3.2.2)$$

gde je T vreme trajanja radnog perioda. Iz (3.2.2) za $t = T$, dobija se

$$Y(T) = - \frac{T}{RC} U_0 \quad (3.2.3)$$

Označimo sa t_r mašinsko vreme. Ako želimo da nam radni period računara bude $t_r = 1$ sek. onda iz (3.2.3) sledi da je

$$t_r = \frac{T}{RC} = 1 \quad (3.2.4)$$

odakle se dobija

$$T = RC \quad (3.2.5)$$

Kod repetitivnih računara treba omogućiti da se rešenje ponavlja više puta u sekundi. Označimo broj ponavljanja rešenja u sekundi sa f_m . Uzmimo da je trajanje neradnog perioda $n \cdot T$, u odnosu na radni, gde n može biti različita konstanta, što zavisi od toga, kojom se brzinom integrator može dovesti u početno stanje. Najčešće se uzima da je $n = 1$, što znači da su radni i neradni period istoga trajanja. Prema tome, trajanje celog ciklusa T_c , iznosi

$$T_c = T + n \cdot T \quad (3.2.6)$$

Odavde je učestanost ponavljanja rešenja određena sa

$$f_m = \frac{1}{T_c} \quad (3.2.7)$$

Ako želimo, naprimer, da računar ponavlja rešenje 20 puta u sekundi, a da radni i neradni period budu jednakog trajanja, tada je $f_m = 20$, a iz (3.2.7) se dobija

$$T_c = \frac{1}{20} = 0,050 \text{ sek} \quad (3.2.8)$$

Ako je i $n = 1$, tada je iz (3.2.6)

$$T = \frac{T_c}{2} = 0,025 \text{ sek} \quad (3.2.9)$$

Ako želimo sada da radni period od 25 msec odgovara realnom vremenu od 1 sek, onda, prema (3.2.5), treba da je:

$$RC = 0,025 \quad (3.2.10)$$

Iz ove se relacije mogu proizvoljno birati R i C . Radi lakšeg računanja obično se uzima ulazni otpor od $R = 1 \text{ M}$, pa iz (3.2.10) sledi da je

$$C = \frac{0,025}{10^6} = 0,025 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 0,025 \text{ } \mu\text{F} \quad (3.2.11)$$

Kod nekih tranzistorskih računara je $R = 0,1 \text{ M}$, pa se iz relacije (3.2.11) dobija

$$C = \frac{0,025}{0,1 \cdot 10^6} = 0,25 \text{ } \mu\text{F} \quad (3.2.12)$$

Prema tome, pri učestanosti od 20 ponavljanja rešenja u sekundi i izboru $R = 1 \text{ M}$ i $C = 0,025 \text{ } \mu\text{F}$, na kraju radnog perioda mašinsko vreme će odgovarati realnom vremenu od 1 sek. Ovo sledi iz relacije (3.2.4), tj.

$$t_r = \frac{T}{RC} = \frac{0,025}{0,025} = 1 \text{ sek} \quad (3.2.13)$$

Kod nekih tipova repetitivnih računara uzima se promenljiva učestanost repeticije. Tada se pri najvećoj učestanosti uzima da radni period bude jednak 5 mašinskih jedinica vremena (sekundi), a pri najmanjoj oko 100 mašinskih jedinica.

Ovde se nećemo upuštati u analizu veze repeticije i frekventnih ograničenja koja su diktirana konstruktivnim karakteristikama pojačavača. Napomenimo samo da se ova analiza izvodi na osnovu analize tačnosti rada integratora (PRVI DEO, I, 3.4).

3.3. Postavljanje početnih uslova

Napomenuto je ranije da se postavljanje početnih uslova vrši punjenjem kondenzatora u povratnoj sprezi integratora, količinom elektriciteta $Q(0)$, tako da je

$$Y(0) = \frac{Q(0)}{C} \quad (3.3.1)$$

Kod repetitivnih analognih računara, najčešće se ne vrši postavljanje početnih uslova punjenjem kondenzatora u povratnoj sprezi integratora, jer ovaj način zahteva posebna tehnička rešenja. Zato ćemo najpre objasniti način postavljanja početnih uslova koji ne zahteva punjenje kondenzatora za vreme neradnog perioda.

Ovaj se način sastoji u tome što se kondenzator prazni, tj. integrator dovodi na nulti napon za vreme neradnog perioda. Kada integrator počinje integraciju ulaznog napona $X(t)$ na izlazu iz integratora pojavljuje se napon

$$\bar{Y}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t X(t) dt \quad (3.3.2)$$

Prema tome, na izlazu iz integratora u trenutku $t = 0$, je 1

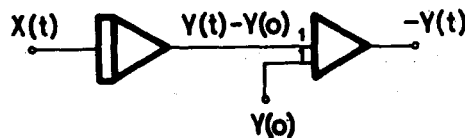
$\bar{Y}(0) = 0$. Međutim, ako je veličina $Y(0) \neq 0$, onda izlaz iz integratora predstavlja funkciju $Y(t)$ umanjenu za vrednost $Y(0)$, tj.

$$\bar{Y}(t) = Y(t) - Y(0) \quad (3.3.3)$$

Zamenom (3.3.3) u (3.3.2) dobija se

$$Y(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t X(t) dt + Y(0) \quad (3.3.4)$$

Na slici 3.3.1 prikazana je šema koja obezbeđuje postavljanje početnih uslova kod repetitivnih analognih računara. Izlaz iz integratora umanjen je za vrednost početnog uslova $Y(0)$. Iza integratora dolazi sabirač na kojem se vrši sabiranje izlaza iz integratora i konstantnog napona $Y(0)$. Na izlazu iz sabirača dobija se veličina $Y(t)$ sa obračunatim početnim uslovom.



Sl. 3.3.1. Postavljanje početnih uslova preko sabirača

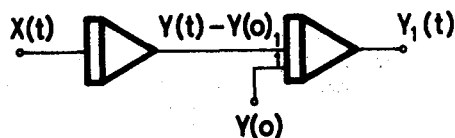
Umesto sabirača na slici 3.3.1 može biti i integrator, ako to zahteva matematički model. Dodavanjem početnog uslova na ulaz u integrator, dobiće se takodje korektna vrednost na izlazu iz drugog integratora. Naprimer, neka je potrebno da se odredi:

$$Y_1(t) = -\int_0^t Y(t) dt \quad (3.3.5)$$

gde je $Y_1(0) = 0$, a $Y(t)$ zadato relacijom (3.3.4). Na slici 3.3.2 data je šema koja obezbeđuje korektno povezivanje elemenata prema relaciji (3.3.5).

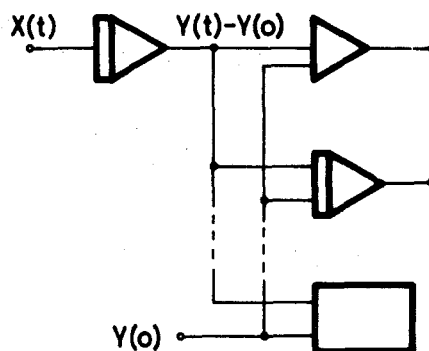
Ukoliko matematički model zahteva da se izlazni napon iz integratora (bez obračunatog početnog uslova) dovodi na ulaze u više računskih elemenata, onda je potrebno na ulaz svakog od tih

elemenata dodati još i početni uslov $Y(o)$, kako bi se obezbe-



Sl. 3.3.2. Postavljanje početnih uslova preko ulaza u sledeći integrator

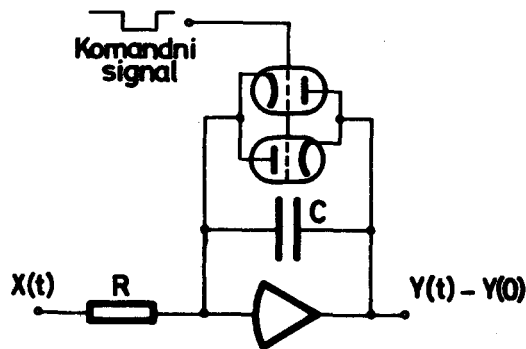
dilo da svaki od elemenata računa sa funkcijom $Y(t)$. Ovo je prikazano na slici 3.3.3. Zbog toga je ovakav način postavljanja početnih uslova nepogodan, jer ovo znatno povećava broj veza pri postavljanju programa na računaru.



Sl. 3.3.3. Postavljanje početnih uslova na veći broj računskih elemenata.

Kod repetitivnih analognih računara, kao što je rečeno, mora se obezbediti pražnjenje kondenzatora za vreme neradnog perioda. Kod računara sa višom učestanošću repeticije ovo se postiže pomoću elektronskih prekidača, koji se komanduju pravougaonim impulsom, koji definiše neradni period. Na slici 3.3.4 prikazan je elektronski prekidač kroz koji se vrši pražnjenje kondenzatora. Rad elektronskog prekidača sastoji se u sledećem: Kada se na rešetke cevi dovede pozitivan napon (od oko 20V), onda bar kroz jednu od cevi prolazi maksimalna struja, te se cevi

ponašaju kao zatvoren prekidač. Tada je kondenzator u kratkom

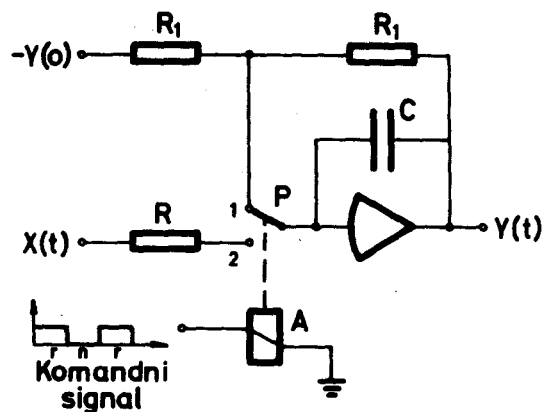


Sl. 3.3.4. Pražnjenje kondenzatora preko elektronskog prekidača

spoji i integrator na izlazu daje napon nula. Ako se sada na rešetke dovede negativan napon (reda oko 120 V), onda su obe rešetke na negativnom potencijalu u odnosu na obe katode, te kroz cevi ne protiče nikakva struja. Tada se cevi ponašaju kao otvoren prekidač, te integrator integrira veličinu dovedenu na njegov ulaz.

Drugi način postavljanja početnih uslova, koji se primenjuje kod repetitivnih računara sa nižom frekvencijom repeticije prikazan je na slici 3.3.5. Početni uslovi se dovode direktno na integrator (PRVI DEO, I, 3.2), ali u neradnom periodu. Kada nema komandnog impulsa, rele A je otpušteno, pa je prekidač P u položaju (1), te se na kondenzator C integratora dovodi napon $-Y(0)$ preko otpornika R_1 . Izbor otpornika R_1 treba izvršiti tako da se na kraju neradnog perioda na izlazu iz integratora dobija napon $Y(0)$.

Kada na rele A dodje komandni signal radnog perioda, prekidač P se prebaci u položaj (2), te se na ulaz integratora dovodi napon $X(t)$, i izlazni napon integratora definisan je relacijom (3.3.4).



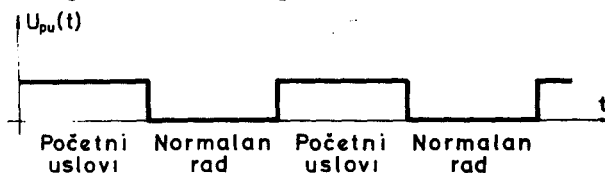
Sl. 3.3.5. Postavljanje početnih uslova punjenjem kondenzatora

4. REPETITIVNI RAD SPORIH ANALOGNIH RAČUNARA

Kod repetitivnih analognih računara, videli smo, da se radni i neradni period automatski smenjuju. Ovakav režim rada omogućuje da se za vreme rada računara vrše promene parametara u analognom modelu i da se rešenje odmah prati na ekranu katodnog osciloskopa. Kako je ovo vrlo česta praktična potreba, kada se rešavaju tehnički problemi na analognim računarima, to se repetitivni rad omogućuje i kod sporih analognih računara. Već je ranije rečeno da se repetitivni rad sastoji iz normalnog rada za vreme radnog perioda i dovodjenja početnih uslova, za vreme neradnog perioda. Prema tome, da bi se kod sporog analognog računara ostvario repetitivni rad, potrebno je obezbediti automatsko smenjivanje ova dva režima rada, tj.

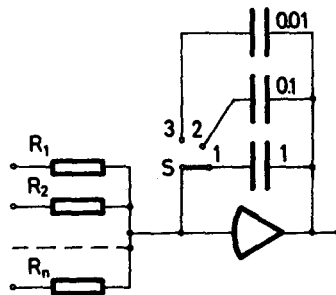
- normalnog režima rada i
- postavljanja početnih uslova.

Ovo se može ostvariti ako se komandni signal U_{pu} (sl. 2.3.1) periodično ponavlja, kao što je prikazano na slici 4.1.



Sl. 4.1. Oblik komandnog signala za repetitivni rad

U vremenu kada je napon komandnog signala U_{pu} različit od nule prekidači P_1 i P_2 se prebacuju u položaje (B), a kada je napon U_{pu} nula, prekidači se vraćaju u položaj (A). Na ovaj način je obezbeđen repetitivni rad kod sporih analognih računara. Međutim, treba imati u vidu da su prekidači P_1 i P_2 kod sporih analognih računara mehanički, pa prema tome, učestanost repeticije ne može biti visoka. Najčešće se koristi repetitivni rad sa repeticijom od 1 do 30 radnih perioda u jednoj sekundi. Kako je vreme integracije, kod repetitivnog rada, vrlo malo, to se povećava vremenska razmera između mašinskog i realnog vremena, promenom kondenzatora u povratnoj sprezi integratora. Najčešće se u povratnoj sprezi integratora nalazi više kondenzatora (sl. 4.2).



Sl. 4.2. Kondenzatori u povratnoj sprezi integratora

Ako su ulazni otpori od $1M$ (sl. 4.2.), a u slučaju kada je preklopnik S u položaju (1), vremenska konstanta iznosi

$$RC = 10^6 \cdot 10^{-6} = 1 \text{ sec,}$$

te se računar koristi kao spori analogni računar. Kada se pređe na repetitivni rad, može se izabrati položaj (2) ili (3), gde je kondenzator 10 odnosno 100 puta manjeg kapaciteta od onog pri sporom radu, čime se vremenska razmera ubrzava 10 ili 100 puta. U repetitivnom režimu rada ne mogu se koristiti elektromehanički računski elementi, kao što su servomnožači. Pored toga, kao izlazni uređaj za očitavanje rešenja u ovom režimu rada obično se koristi osciloskop, jer pisač ne može da prati ovako brze promene napona.

5. PROGRAMIRANJE

Postupak izrade strukturne blok šeme, po kojoj se na osnovu matematičkog modela povezuju računski elementi na analognom računaru, tj. sastavljanje programa, isto je kako za spore tako i za repetitivne računare. Razlika je jedino u tome što spori analogni računari imaju veći izbor računskih elemenata, pošto se kod njih koriste i elektromehanički računski elementi.

Međutim, fizička realizacija programa koja se sastoji u uspostavljanju električnih veza između pojedinih računskih elemenata, kako je to predviđeno blok šemom programa, može da bude različita u zavisnosti od konstrukcije računara.

Moguća su, uglavnom, dva načina realizacije programa

- direktnim povezivanjem računskih elemenata i
- povezivanjem računskih elemenata preko tzv. programske ploče.

Direktno povezivanje računskih elemenata vrši se spoljnim vezama na samom računaru. Svaki računski element ima na svojoj prednjoj ploči izvedene priključke za ulaz i izlaz i njihovo se povezivanje vrši u saglasnosti sa programom koji se postavlja.

Drugi način postavljanja programa je preko programske ploče. Svi izlazi i ulazi u računске elemente su izvedeni na posebne kontakte na koje se može postaviti programska ploča. Povezivanje programa vrši se na programskoj ploči odvojeno od računara. Kada je program na programskoj ploči povezan, ploča se postavi na računar, čime se i fizički uspostavljaaju potrebne veze. Posle toga računar je spreman za rešavanje programiranog zadatka, te se odgovarajućim uključivanjem komandnih signala za početak rada dobijaju naponske funkcije koje predstavljaju tražena rešenja.

Programska ploča ima znatne prednosti, jer omogućuje efikasnije korišćenje računara. Prenosjenje programa na programsku ploču vrši se odvojeno od računara. Tako, dok se program prenosi na je ploču, računar se može koristiti za rešavanje matematičkog modela postavljenog na drugoj programskoj ploči. Eventualne

greške kod sastavljanja programa također se mogu lakše uočiti i ispraviti bez nepotrebnog angažovanja računara. Program postavljen na jednoj programskoj ploči može se čuvati proizvoljno dugo i prema potrebi koristiti, a da se računar ne angažuje celo vreme, već samo kada se ova programska ploča koristi. Sve ove prednosti programske ploče nad direktnim postavljanjem programa na računaru čine da se današnji veći analogni računari uglavnom grade sa programskom pločom, a uz svaki računar korisnik može dobiti željeni broj programskih ploča.

6. UREDAJI ZA OČITAVANJE REZULTATA

Kod sporih analognih računara za posmatranje i očitavanje rešenja koristi se više različitih uređjaja. Današnji analogni računari koriste uglavnom tri tipa ovakvih uređjaja i to

- voltmetre,
- pisače, i
- osciloskope.

Za očitavanje i podešavanje pojedinih konstantnih naponskih vrednosti služi voltmetar. Moderni veći analogni računari sadrže obično dva tipa ovakvih voltmetara, sa kazaljkom i sa numeričkom indikacijom. Voltmetar sa kazaljkom služi za kontrolu napona napajanja i drugih pomoćnih napona, dok numerički voltmetar služi za tačno očitavanje pojedinih računskih napona. Voltmetri koji se koriste kod analognih računara su klase 0,5 što odgovara grešci merenja od 0,5% maksimalne vrednosti na skali, a numerički voltmetri imaju tri ili četiri cifre, tako da mogu da očitavaju i mere sa tačnošću 0,1% do 0,01% računskog napona.

Kod sporih analognih računara u normalnom radu naponske funkcije nemaju brze promene, te se za očitavanje promenljivih napona koriste pisači. Postoje dva tipa pisača. Jedna grupa pisača beleži naponske funkcije u zavisnosti od vremena. To su pisači koji rade sa rolnama papira i imaju mehanizam za kontinualno pokretanje papira. Kod njih se pero kreće samo po jednom pravcu u zavisnosti od naponske veličine dovedene na ulaz mehanizma. Mehanizam za pokretanje papira vuče papir stalnom brzinom upravno na pravac kretanja pera, te se tako na papiru pojavljuje kriva

linija koja predstavlja grafički prikaz posmatrane naponske veličine u funkciji vremena. Ovakvih pisača ima više vrsta u zavisnosti od broja pera i kanala koji se zapisuju. Postoje pisači sa 1, 2, 4, 8, 12 i 24 kanala. Ovakvi višekanalni pisači se koriste kada je potrebno istovremeno beležiti više naponskih funkcija.

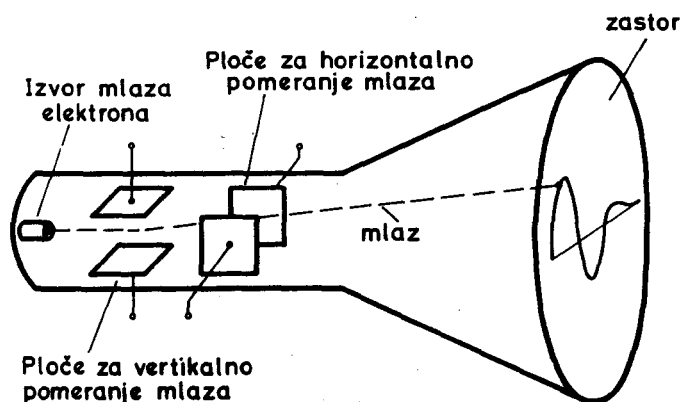
Drugi tip pisača je tzv. X - Y pisač. To je pisač koji se koristi kada je potrebno snimiti jednu naponsku funkciju u zavisnosti od druge naponske funkcije, pri čemu se obe menjaju sa vremenom. On se sastoji od dva nezavisna servosistema, od kojih prvi pomera jedan pokretni lenjir duž horizontalne ose u zavisnosti od naponske funkcije $X(t)$ dovedene na ulaz pisača (označen sa X), a drugi servosistem pomera pero duž lenjira u zavisnosti od naponske funkcije $Y(t)$ dovedene na ulaz pisača (označen sa Y). Papir koji se koristi kod ovakvih pisača je običan milimetarski papir i on se pomoću vakuuma drži na ploči za ispisivanje, ili na neki drugi način u zavisnosti od konstrukcije pisača.

Pomoću specijalnih potencijometara za kontrolu "paralakse", može se pero postaviti u bilo koji početni položaj na papiru, a pomoću određenih preklopnika može se podesiti željena osetljivost svake od veličina X ili Y. Statička tačnost ovakvog pisača ograničena je jedino mrtvim hodom servosistema i obično je bolja od 0,1% pune skale. Dinamička tačnost je dovoljna da prati i brže promene napona (1 do 2 Hz) koje se javljaju kao izlazne veličine u računaru, ali je ograničena, tako da se mogu postići brzine od oko 25 do 50 cm/sec.

X - Y pisač se može koristiti i za beleženje naponskih funkcija u zavisnosti od vremena. Ovo se postiže na taj način što se na ulaz X dovodi napon $X(t) = K \cdot t$. Ovaj napon se dobija iz jednog od integratora na računaru, ako se na ulaz integratora dovede konstantan napon, preko potencijometra. Na ulaz Y pisača dovodi se naponska funkcija čiji se grafički oblik želi zabeležiti (nacrtati) u zavisnosti od vremena.

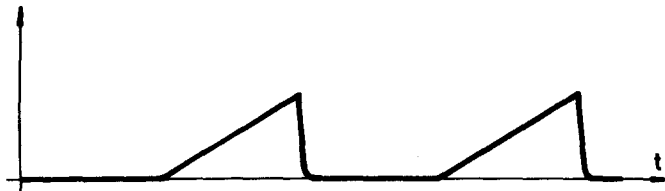
Za posmatranje i očitavanje naponskih funkcija koje se dobijaju kao rešenja na repetitivnom analognom računaru koriste se specijalni izlazni uređjaji. Kako vreme rada, tj. radni period repetitivnih računara iznosi od nekoliko milisekundi do nekoliko desetina milisekundi, to se za ovu svrhu ne mogu koristiti elektromehanički uređjaji, kao pisači ili slično, već se koriste specijalni osciloskopi kod kojih se rešenje posmatra na zastoru katodne cevi.

Katodna cev osciloskopa omogućuje da se mlazom elektrona, koji pada na zastor cevi i izaziva svetlu tačku, može upravljati spolja (Sl. 6.1). U cevi su ugrađene ploče pomoću kojih se može pomerati zrak horizontalno i vertikalno. Na ploče za horizontalno pomeranje mlaza, kod repetitivnih računara, dovodi se pravolinijski testerasti napon oblika kao na slici 6.2. Na početku



Sl. 6.1. Katodna cev osciloskopa

radnog perioda ovaj napon je nula, a zatim raste do kraja radnog perioda T . U zavisnosti od ovog napona mlaz elektrona, ko-

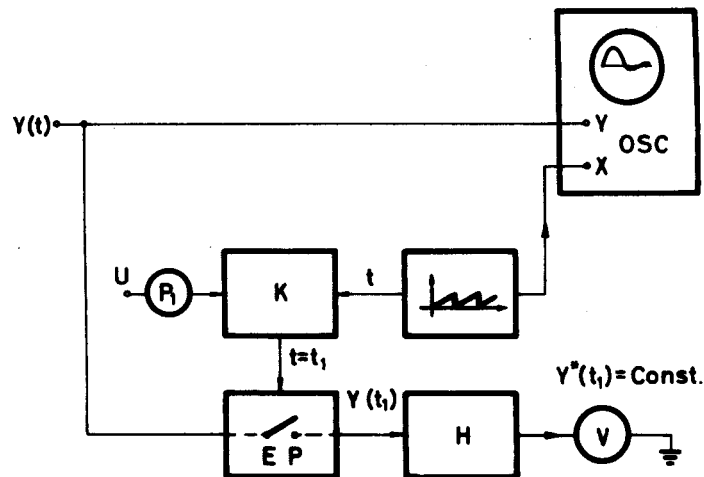


Sl. 6.2. Naponska funkcija za horizontalno pomeranje mlaza katodne cevi

ji na zastoru katodne cevi daje svetlu tačku, kreće se s leva na desno, tako da tačka opisuje horizontalnu, tj. vremensku osu. Na kraju radnog perioda, tačka se nalazi na desnoj strani zastora. Posle ovoga napon pada na nulu, te se tačka na zastoru vraća u krajnji levi položaj gde ostaje sve dok napon ne počne ponovo da raste, da bi je pomerio u desno za vreme radnog perioda. Često se mlaz elektrona gasi prilikom vraćanja tačke na početak kako se slika na zastoru ne bi kvarila, u toku neradnog perioda. Na ploče za vertikalno pomeranje elektronskog mlaza dovodi se naponska funkcija $Y(t)$ koja se želi posmatrati.

Ovaj napon pomera tačku na zastoru osciloskopa po vertikali, pa kako se u radnom periodu tačka kreće i horizontalno, na zastoru se javlja kriva linija koja predstavlja grafički prikaz napona $Y(t)$ kao funkcije vremena.

Pored mogućnosti vizuelnog praćenja rešenja na zastoru katodne cevi, izlazni uredjaj treba da obezbedi i mogućnost merenja ordinata naponske funkcije koja se posmatra. U tu svrhu koriste se razna elektronska rešenja, koja obezbeđuju dovoljnu brzinu rada kao i dovoljnu tačnost merenja odabrane ordinate. Jedno od najprostijih rešenja je upotreba komparatora, koji upoređuje testerasti napon proporcionalan vremenu t sa nekim naponom U koji se bira pomoću potenciometra P_1 (Sl. 6.3). U vremenskom



Sl. 6.3. Merenje ordinata naponskih funkcija

trenutku t_1 u kojem su ova dva napona jednaka, a suprotna po znaku, aktivira se komparator K , koji omogućí da za veoma kratko vreme elektronski prekidač EP propusti trenutnu vrednost napona $Y(t)$ na tzv. kolo za pamćenje H (holding circuit). Na izlazu iz ovog kola javlja se konstantan napon $Y^*(t_1)$ čija je vrednost jednaka ordinati naponske funkcije $Y(t)$ u trenutku t_1 . Na izlaz ovog kola priključuje se običan voltmetar, koji meri vrednost napona $Y^*(t_1)$. Pošto se rešenje ponavlja u ritmu repeticije računara, to se u istom ritmu javlja i napon $Y(t_1)$, te se na voltmetru V meri konstantna vrednost sa dovoljnom tačnošću.

Za merenje ordinata naponskih funkcija postoje i druga tehnička rešenja. Medjutim, ona se zasnivaju na sličnom principu, tj. na principu merenja trenutnih vrednosti napona.

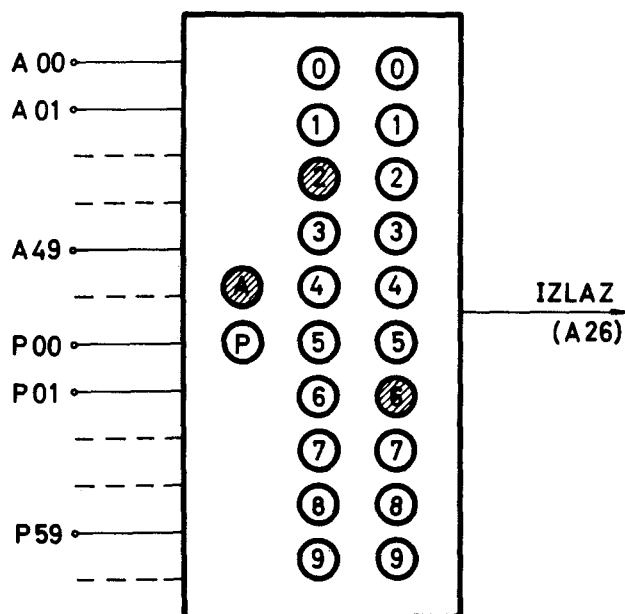
U najnovije vreme koriste se tzv. prostorni osciloskopi sa televizijskim ekranom, tako da se mogu posmatrati krive u ravni ekrana koje daju utisak da su u prostoru. Pogodnim programiranjem sa ovakvim osciloskopom može se dobiti i prikaz površina u prostoru.

7. AUTOMATSKI IZBOR IZLAZA — SELEKTOR

Prilikom rešavanja nekog problema na analognom računaru, kao izlazna funkcija koja se želi posmatrati ili beležiti, može da bude izlazna veličina iz ma kojeg računskog elementa. Pored toga, u toku rada je vrlo često potrebno kontrolisati izlazne veličine koje se javljaju na pojedinim računskim elementima. Naprimer, u režimu postavljanja potencimetara treba omogućiti lako posmatranje izlaza iz pojedinih potencimetara, kako bi se lako i brzo mogli postavljati potencimetri prema referentnom potencio- metru (vidi sl. 2.2.2).

Da bi se olakšala manipulacija oko dovodjenja izlaza iz pojedinih računskih elemenata na uređaje za očitavanje i kontrolu, u savremenim računarima nalazi se posebna logičko - prekidačka mreža - selektor pomoću koje se može na jednostavan način odab-

rati naponska funkcija koja se želi posmatrati. Komandovanje ovom logičko-prekidačkom mrežom vrši se pomoću tri niza dirki, od kojih je prvi niz obeležen slovima A i P, a druga dva niza obeležena su brojevima od 0 do 9. Pritiskom na po jednu dirku iz svakog niza formira se troznačni kôd, a na izlaz selektora prenosi se izlaz onog računskog elementa koji nosi odgovarajući kôd. Kod analognog računara TARA-50, naprimer, koji sadrži 50 računskih pojačavača, svi pojačavači su raspoređeni na selektoru od A00 do A49. Potenciometri, kojih ima 60, raspoređeni su od P00 do P59. Pritiskom na po jednu dirku iz svakog niza dirki na selektoru (sl. 7.1.) formira se naprimer oznaka A26 što znači da je na izlaz selektora doveden izlazni napon koji dolazi iz pojačavača obeleženog sa brojem 26. Na sličan način, ako se pritiskom na dirke selektora formira oznaka P38, na izlazu selektora biće doveden izlazni napon sa potencijometra označenog sa brojem 38.



Sl. 7.1: Selektor

Ako se sada, izlaz selektora poveže sa instrumentom, ili se do-

vede na Y osu pisača ili osciloskopa, onda se vrlo lako i brzo, samo pritiskom na tri dirke, može dovesti izlaz iz bilo kojeg računskog elementa na odgovarajući uređaj za očitavanje rezultata.

DRUGI DEO

PRIMENA ANALOGNIH RAČUNARA

I REŠAVANJE OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Univerzalni analogni računari prvenstveno su namenjeni za rešavanje problema koji se mogu opisati pomoću običnih diferencijalnih jednačina kao i sistema diferencijalnih jednačina. U ovoj glavi biće izloženo rešavanje običnih diferencijalnih jednačina pomoću analognog računara.

Matematički posmatrano, obične diferencijalne jednačine mogu se podeliti u tri osnovne grupe i to:

1. Linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima,
2. Linearne diferencijalne jednačine sa promenljivim koeficijentima i
3. Nelinearne diferencijalne jednačine.

Prve dve grupe mogu se podeliti na homogene i nehomogene diferencijalne jednačine.

U ovom izlaganju najpre ćemo se osvrnuti na matematičke osnove rešavanja ovih jednačina.

1. HOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

1.1. Matematičke osnove

Pod linearnom diferencijalnom jednačinom n -tog reda podrazumeva se, kao što je poznato, jednačina koja je linearna po nepoznatoj funkciji i njenim izvodima do reda n , a ma kako figurisala nezavisno promenljiva. To je, dakle, jednačina oblika

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \quad (1.1.1)$$

gde su a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) i $f(t)$ funkcije od t ili konstante. Ako funkcija $f(t)$ ne figuriše u jednačini (1.1.1), onda se ovakva jednačina naziva homogena. Ako su a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) konstante, onda se jednačina (1.1.1) naziva linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Jednačina (1.1.1) može se napisati i u obliku

$$L(p) \cdot x = f(t) \quad (1.1.2)$$

ako su koeficijenti a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) konstante, gde je sa $L(p)$ označen linearni operator oblika

$$L(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \quad (1.1.3)$$

gde je $p = d/dt$ i predstavlja diferencijalni operator po t . Funkcija $f(t)$ naziva se ulazna funkcija. Vrednosti funkcije $x(t)$ i njenih $(n-1)$ izvoda za $t=0$, nazivaju se početni uslovi, koji su dati u obliku

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)} \quad (1.1.4)$$

gde je sa $x^{(i)}$ označen izvod funkcije $d^i x/dt^i$.

Iz teorije diferencijalnih jednačina, poznato je da se opšte rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine (1.1.1) dobija kao zbir opšteg rešenja homogenog dela jednačine i partikularnog rešenja date jednačine (koje ne sadrži proizvoljne konstante). Stoga ćemo se najpre osvrnuti na rešavanje homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

Jednačina

$$L(p) \cdot x = 0 \quad (1.1.5)$$

je homogena jednačina i dobija se kada se leva strana jednačine (1.1.1), odnosno (1.1.2) izjednači sa nulom, a može se rešiti ako se stavi

$$x = e^{rt} \quad (1.1.6)$$

i jednačina (1.1.5) skрати sa faktorom $e^{rt} \neq 0$. Kao rezultat ove smene dobija se jednačina n -tog stepena po r , oblika

$$L(r) = 0 \quad (1.1.7)$$

koja se naziva karakteristična jednačina.

Algebarska jednačina (1.1.7), n -tog stepena po r , ima n korena r_1, r_2, \dots, r_n . Svakom od ovih korena odgovara po jedno rešenje (1.1.6) diferencijalne jednačine (1.1.5). Za nalaženje opšteg rešenja jednačine (1.1.5) potrebno je analizirati sledeće moguće slučajeve korena karakteristične jednačine.

1^o. Svi koreni karakteristične jednačine (1.1.7) su re-

alni i različiti. Kako su funkcije

$$e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_n t} \quad (1.1.8)$$

rešenja diferencijalne jednačine (1.1.5), a linearno su nezavisne, to opšte rešenje ima oblik

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \dots + C_n e^{r_n t} \quad (1.1.9)$$

gde su C_1, C_2, \dots, C_n proizvoljne konstante.

2°. Svi koreni karakteristične jednačine su realni, ali medju njima ima i višestrukih korena. Da bi se i u ovom slučaju dobilo n linearno nezavisnih funkcija, radi dobijanja opšteg rešenja, potrebno je za svaki koren r_i koji se javlja k_i puta obrazovati funkcije

$$e^{r_i t}, t e^{r_i t}, t^2 e^{r_i t}, \dots, t^{k_i-1} e^{r_i t} \quad (1.1.10)$$

Može se pokazati da ovako obrazovane funkcije čine n linearno nezavisnih rešenja diferencijalne jednačine (1.1.5), pa njihova linearna kombinacija sa n proizvoljnih konstanta C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) daje opšte rešenje jednačine (1.1.5).

3°. Medju korenima jednačine (1.1.7) nalaze se i konjugovano kompleksni koreni. Koristeći relacije iz teorije kompleksnih funkcija realne promenljive može se pokazati da je za dobijanje n linearno nezavisnih funkcija, u cilju formiranja opšteg rešenja jednačine (1.1.5) potrebno svakom konjugovano kompleksnom korenu pripisati funkcije

$$e^{\alpha_i t} \cos \beta_i t, \quad e^{\alpha_i t} \sin \beta_i t \quad (1.1.11)$$

gde je predpostavljeno da je koren r_i konjugovano kompleksan, tj. $\alpha_i \pm j\beta_i$. Linearnom kombinacijom ovih funkcija sa n proizvoljnih konstanta C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) dobija se opšte rešenje jednačine (1.1.5).

4°. Medju korenima jednačine (1.1.7) nalaze se višestruki konjugovano kompleksni koreni. U ovom slučaju treba primeniti sličan postupak kao i u slučaju višestrukih realnih korena. Tako, ako se koren $r_i = \alpha_i \pm j\beta_i$ pojavljuje k_i puta, to za višestrukost korena $\alpha_i + j\beta_i$ treba uvesti funkcije

$$e^{(\alpha_i + j\beta_i)t}, te^{(\alpha_i + j\beta_i)t}, \dots, t^{k_i-1}e^{(\alpha_i + j\beta_i)t} \quad (1.1.12)$$

a za višestrukost korena $\alpha_i - j\beta_i$ treba uvesti funkcije

$$e^{(\alpha_i - j\beta_i)t}, te^{(\alpha_i - j\beta_i)t}, \dots, t^{k_i-1}e^{(\alpha_i - j\beta_i)t} \quad (1.1.13)$$

Razdvajajući realne i imaginarne delove, lako se dolazi do $2k_i$ realnih rešenja jednačine (1.1.5) oblika

$$e^{\alpha_i t} \cos \beta_i t, te^{\alpha_i t} \cos \beta_i t, \dots, t^{k_i-1} e^{\alpha_i t} \cos \beta_i t \quad (1.1.14)$$

$$i e^{\alpha_i t} \sin \beta_i t, te^{\alpha_i t} \sin \beta_i t, \dots, t^{k_i-1} e^{\alpha_i t} \sin \beta_i t \quad (1.1.15)$$

Na ovaj se način formira n linearno nezavisnih funkcija i njihovom linearnom kombinacijom sa n proizvoljnih konstanta C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) dobija se opšte rešenje jednačine (1.1.5).

Da bi se dobilo potpuno rešenje nekog fizičkog problema koji je opisan linearnom diferencijalnom jednačinom, potrebno je uvesti i početne uslove, koji određuju jedno partikularno rešenje homogene jednačine. Uvodjenjem početnih uslova u opšte rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima, određuju se proizvoljne konstante C_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Ovo zahetva rešavanje n simultanih linearnih algebarskih jednačina od n nepoznatih, jer je potrebno izjednačiti vrednosti za x i prvih $n-1$ izvoda od x , za $t = 0$, sa n datih konstanta $x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}$, a prema (1.1.4). Prema tome, ako se uzme rešenje (1.1.9) jednačine (1.1.5), nadje prvih $n-1$ izvoda, te za $t = 0$ izjednači sa odgovarajućim konstantama (1.1.4) dobija se sistem

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + \dots + C_n &= x_0 \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 + \dots + C_n r_n &= x_0' \\ \dots & \\ C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + \dots + C_n r_n^{n-1} &= x_0^{(n-1)} \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

iz kojeg se mogu odrediti proizvoljne konstante C_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Predhodna izlaganja pokazuju koliko treba uložiti truda i rada da bi se rešila jedna homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima za određene početne uslove,

iako je teorijski potpuno jasan put i način rešavanja ovakvih jednačina. Ako je, naprimer, red n visok i ako se traži analiza rešenja jednačine za slučaj variranja koeficijenata i početnih uslova, onda se mora neki od koraka rešavanja ponavljati više puta za svaku od navedenih promena bilo koeficijenata bilo početnih uslova. U praksi, broj ovih varijacija može da bude na stotine ili hiljade, tako da matematičko ili numeričko rešavanje postaje vrlo zamorno i dugotrajno. Medjutim, analogni računar ovde može da posluži kao vrlo pogodno sredstvo baš za ovakva istraživanja, jer se svaka promena bilo konstante bilo početnog uslova, kao što će se videti, svodi na jednostavno podešavanje nekog potencijometra i na posmatranje rešenja.

1.2. Struktura programa

Ako na analognom računaru treba da se rešava jedna obična linearna homogena diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima, onda je potrebno imati na raspolaganju sledeće računarske elemente:

- sabirače,
- integratore i
- potencijetre za množenje sa konstantom.

O ovim komponentama bilo je reči u prvom delu knjige (I deo, 1, 2, 3). Diferencijalne jednačine se na analognom računaru rešavaju tako da se izbegava operacija diferenciranja, pošto se ova operacija ne može pogodno realizovati usled pojave nezanemarljivo velikog šuma. Stoga se rešenje diferencijalnih jednačina dobija pomoću operacije integracije, pa se programiranje sastoji u tome da se jednačina transformiše tako da se najviši izvod po nezavisno promenljivoj nalazi na levoj strani, a svi ostali članovi na desnoj strani jednačine. Drugim rečima, diferencijalnu jednačinu treba rešiti po najvišem izvodu. Da bismo pokazali način programiranja uzmimo kao primer jednačinu

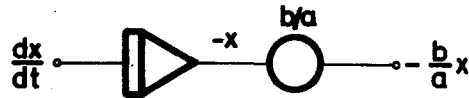
$$a \frac{dx}{dt} + bx = 0 \quad (1.2.1)$$

koju treba rešiti za početni uslov $x(0) = x_0$.

Posle rešenja po najvišem izvodu jednačina (1.2.1) postaje

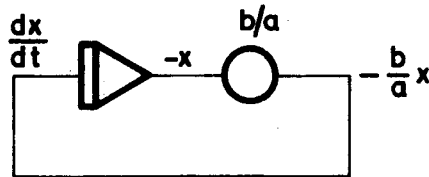
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{b}{a}x \quad (1.2.2)$$

Da bi se ova jednačina postavila na računar, potrebno je da se svaka veličina predstavi pomoću napona. Predpostavimo da se u nekoj tački računara već nalazi napon proporcionalan sa dx/dt . Ako se taj napon dovede u integrator, koji ujedno i menja znak (Prvi deo I, 3.2), onda se na njegovom izlazu javlja napon proporcionalan sa $-x$ (sl. 1.2.1). Ako se sada ovaj napon po-



Sl. 1.2.1. Formiranje programa za rešavanje diferencijalne jednačine (1.2.2)

množi sa b/a , pomoću potencijometra na kojem se postavi brojna vrednost b/a ($0 < b/a < 1$), onda se dobija član koji se nalazi na desnoj strani jednačine (1.2.2). Pošto jednačina (1.2.2) iskazuje tvrdnju da su dx/dt i $-(b/a)x$ jednaki, to je potrebno ove dve veličine i naponski izjednačiti. Ovo se postiže, ako se tačke na računaru, u kojima se javljaju ove dve veličine, spoje na kratko, kao što prikazuje slika 1.2.2. Na ovaj način do-



Sl. 1.2.2. Struktura programa za rešavanje jednačine (1.2.2)

bija se strukturna blok šema programa za rešavanje jednačine (1.2.2) na analognom računaru.

Neka je potrebno rešiti na analognom računaru diferencijalnu jednačinu drugog reda oblika

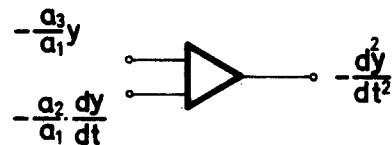
$$a_1 \frac{d^2y}{dt^2} + a_2 \frac{dy}{dt} + a_3 y = 0 \quad (1.2.3)$$

za početne uslove $y(0) = y_0$ i $y'(0) = y'_0$.

Ako se jednačina (1.2.3) reši po najvišem izvodu dobija se

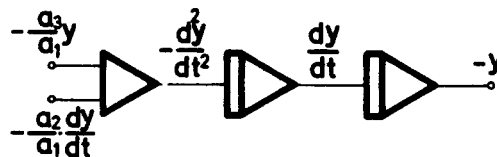
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{a_2}{a_1} \frac{dy}{dt} - \frac{a_3}{a_1} y \quad (1.2.4)$$

Iz jednačine (1.2.4) se vidi da je potrebno sabrati veličine $-\frac{a_2}{a_1} \frac{dy}{dt}$ i $-\frac{a_3}{a_1} y$ da bi se dobio najviši izvod $\frac{d^2y}{dt^2}$. Ovo se izvodi pomoću sabirača (sl. 1.2.3). Na njegovom se izlazu dobi-



Sl. 1.2.3. Formiranje programa za rešavanje diferencijalne jednačine (1.2.4); korak 1.

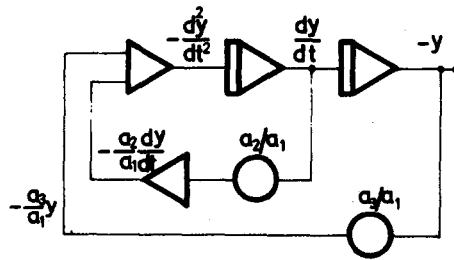
ja sada napon proporcionalan sa $-\frac{d^2y}{dt^2}$, jer sabirač pored operacije sabiranja vrši i promenu znaka (v. Prvi deo I, 3.1). Ako se uzmu dva integratora i dobijeni izlaz iz sabirača dovede na ulaz prvog, a izlaz prvog potom na ulaz drugog integratora, dobijaju se naponi proporcionalni sa dy/dt i sa $-y$ (sl. 1.2.4), na izlazima odgovarajućih integratora. Da bi se



Sl. 1.2.4. Formiranje programa za rešavanje diferencijalne jednačine (1.2.4); korak 2.

formirala strukturna šema za rešavanje jednačine (1.2.4) potrebno je veličinu dy/dt pomnožiti sa a_2/a_1 , ($0 < a_2/a_1 < 1$), pomoću potencijometra na kojem se postavi brojna vrednost ove konstante. Na isti se način pomnoži i veličina $-y$ sa a_3/a_1 , ($0 < a_3/a_1 < 1$). Kako je veličina $(a_2/a_1)(dy/dt)$ pozitivna, a jednačina (1.2.4) zahteva da ova veličina bude negativna, mora se izvršiti promena znaka pomoću još jednog sabirača. Sada

se ovako formirane veličine $-(a_2/a_1)(dy/dt)$ i $-(a_3/a_1)y$ dovode na odgovarajuće ulaze sabirača, na kojima je predpostavljeno da se već nalaze (sl. 1.2.3), te se tako dobija strukturna blok šema programa za rešavanje (sl. 1.2.5) jednačine (1.2.4).



Sl. 1.2.5. Struktura programa za rešavanje jednačine (1.2.4).

Iz ova dva primera se vidi da je, za dobijanje strukturne blok šeme programa za rešavanje homogenih linearnih diferencijalnih jednačina na analognom računaru, potrebno pridržavati se sledećeg postupka:

1. Diferencijalna jednačina se reši po najvišem izvodu, tj. sa leve strane se ostavi član koji sadrži najviši izvod, dok se na desnu stranu prebace svi ostali članovi jednačine.
2. Predpostavi se da na izlazu jednog sabirača postoji napon proporcionalan najvišem izvodu u diferencijalnoj jednačini.
3. Ovaj se napon integriše onoliko puta koliko je potrebno da se dobiju sve promenljive koje figurišu na desnoj strani diferencijalne jednačine.
4. Funkcija i njeni izvodi množe se odgovarajućim konstantama, a ako je potrebno menja im se znak, zatim se dovode kao ulazne veličine u sabirač na čijem izlazu, prema 2. postoji napon proporcionalan najvišem izvodu.
5. Na kraju se obezbedi prisustvo početnih uslova na odgovarajuće integratore, o čemu će biti reči kasnije.

Na isti se način sastavlja program i za sistem homogenih linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima. Svaka od jednačina sistema se najpre reši po najvišem izvodu jedne funkcije i predpostavi se da je taj najviši izvod poznat.

Zatim se svaki od njih integrirani potreban broj puta i obrazuju se svi članovi koji se pojavljuju u sistemu diferencijalnih jednačina. Ovako obrazovani članovi se dovode na odgovarajuće ulaze, tako da se ostvare uslovi zadati sistemom diferencijalnih jednačina, čime se dobija strukturna blok šema programa. Radi objašnjenja naveden je sledeći primer:

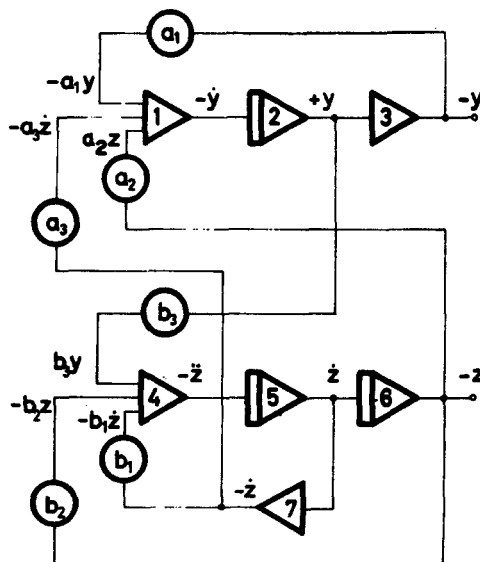
Neka je zadat sistem diferencijalnih jednačina koji treba rešiti pomoću analognog računara

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} + a_1 y + a_2 z + a_3 \dot{z} &= 0 \\ \ddot{z} + b_1 \dot{z} + b_2 z - b_3 y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.5)$$

gde su a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 i b_3 pozitivne konstante manje od jedinice. Kada se sistem (1.2.5) reši po najvišim izvodima dobija se

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= -a_1 y - a_2 z - a_3 \dot{z} \\ \ddot{z} &= -b_1 \dot{z} - b_2 z + b_3 y \end{aligned} \right\} \quad (1.2.6)$$

Primenom opisanog postupka lako se dolazi do programa za rešavanje sistema diferencijalnih jednačina (1.2.6) na analognom računaru (sl. 1.2.6).

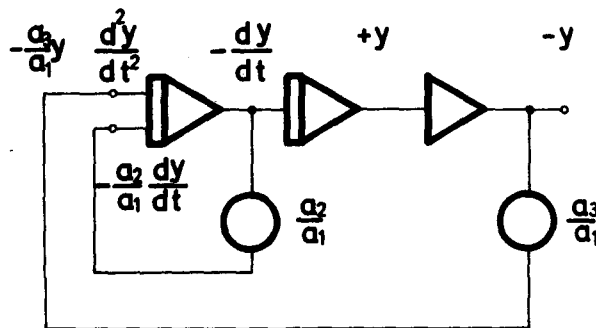


Sl. 1.2.6. Struktura programa za rešavanje sistema diferencijalnih jednačina (1.2.6)

Smanjenje broja računskih elemenata

Ako se postupa po gornjim pravilima onda se dobija strukturna blok šema programa. Međutim, prilikom sastavljanja blok šeme programa mogu se računski elementi koristiti ekonomičnije ako se ima u vidu činjenica da integrator vrši i sumiranje ulaznih napona.

U primeru prilikom rešavanja jednačine (1.2.4) koristi se blok šema data na slici (1.2.5). Ovde se na dva ulaza u prvi integrator dovode veličine $-(a_2/a_1)(dy/dt)$ i $-(a_3/a_1)y$, pri čemu se na njegovom izlazu javlja veličina $-(dy/dt)$, a na izlazu drugog integratora $+y$ (sl. 1.2.7). Odavde se odmah vidi da je za dobijanje prvog člana dovoljno pomnožiti izlaznu veličinu iz prvog integratora, pomoću potencijometra, sa a_2/a_1 i dove-

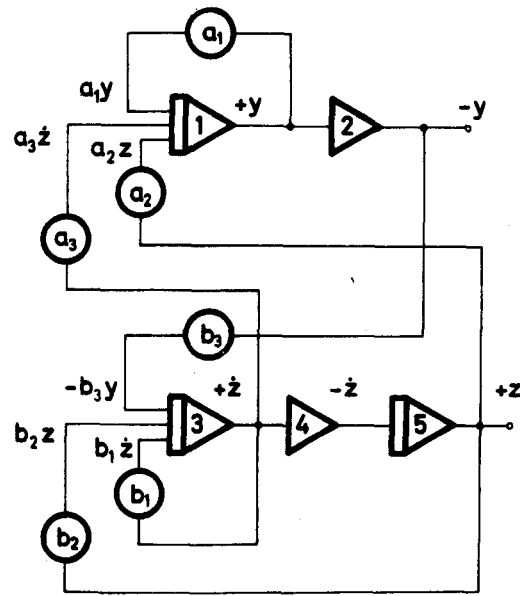


Sl. 1.2.7. Struktura programa sa smanjenim brojem računskih elemenata za rešavanje jednačine (1.2.4)

sti je direktno na jedan od ulaza istog integratora. Za dobijanje drugog člana potrebno je veličini $+y$ prvo promeniti znak, pomoću sabirača, a zatim tako dobijenu veličinu pomnožiti, pomoću drugog potencijometra, sa a_3/a_1 i dovesti na drugi ulaz prvog integratora.

Poredjenjem slika 1.2.5 i 1.2.7 vidi se da je, uz malu transformaciju strukturne blok šeme, uštedjen jedan računski element,

u ovom slučaju sabirač. Na sličan se način, posmatranjem slike 1.2.6, može zaključiti da izlazna veličina $-y$ iz sabirača (1) ne služi ničemu drugom, sem kao ulazna veličina u integrator (2). Isto tako se i izlazna veličina iz sabirača (4) dovodi samo na ulaz integratora (5). Ako se i ovde iskoristi navedena osobina integratora, mogu se izvršiti slične uštede, te se tako dobija uprošćena strukturna blok šema data na slici 1.2.8, za rešavanje sistema jednačina (1.2.6). Ovde treba napomenuti



Sl. 1.2.8. Struktura programa sa smanjenim brojem računskih elemenata za rešavanje sistema jednačina (1.2.6)

da se ovakve uštede, mogu vršiti uvek kada se najviši izvod promenljive odgovarajuće jednačine ne pojavljuje na nekom drugom mestu u jednačini ili sistemu jednačina, ili ako nije potrebno da postoji radi merenja ili očitavanja.

1.3. Uvod nje početnih uslova

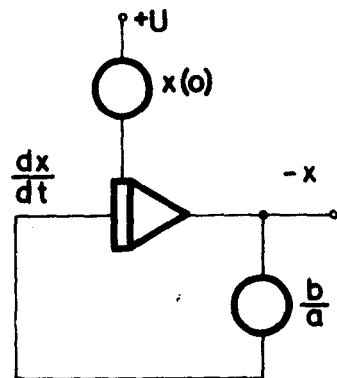
Kao što je ranije objašnjeno (Prvi deo I, 3.2) integrator radi tako da mu se na izlazu javlja funkcija proporcionalna sa

$$y(t) = - \int_0^t x(t)dt + y(0) \quad (1.3.1)$$

gde je $x(t)$ ulazna veličina u integrator, a $y(0)$ veličina koja se dovodi na poseban ulaz integratora. Ova se veličina naziva integraciona konstanta ili početni uslov, od koje integrator počinje da radi, tj. to je napon na koji je napunjen kondenzator integratora pre početka rada. Takodje je poznato da se postavljanje integracione konstante ili početnog uslova kod analognog računara može vršiti na dva načina i to:

- punjenjem kondenzatora u povratnoj sprezi integratora pre početka integracije ili
- dodavanjem integracione konstante posle izvršene integracije.

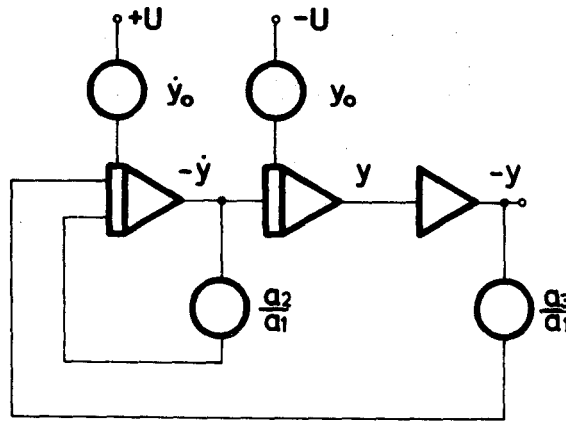
Prema tome, ako se žele postaviti početni uslovi, prilikom rešavanja nekog problema na analognom računaru, mogu se koristiti jedan od ova dva opisana načina. Vrednost početnog uslova se dovodi preko potencijometra na poseban ulaz u integrator, ako se koristi prvi način. Tako naprimer, potpuna strukturna blok šema programa za rešavanje jednačine (1.2.2) data je na slici 1.3.1.



Sl. 1.3.1. Program sa početnim uslovima za rešavanje jednačine (1.2.2)

Vrednost $x(0) = x_0$ formira se tako što se jedinični računski napon U pomnoži pomoću potenciometra sa brojnou vrednošću x_0 , u nekoj razmeri i dovodi se na ulaz za početni uslov u integrator.

Na sličan način, prilikom rešavanja jednačine (1.2.4) početni uslovi se dovode na integratore, kao prema slici 1.3.2.



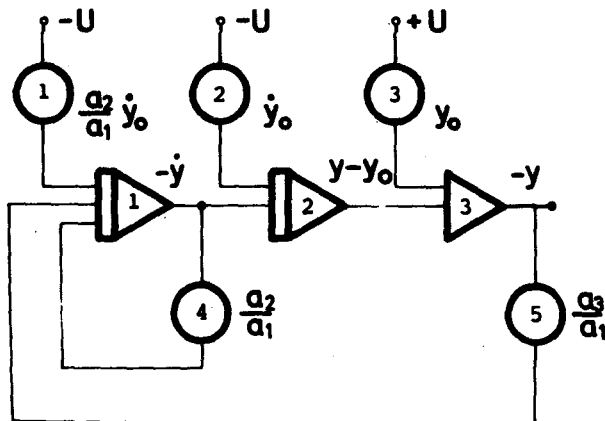
Sl. 1.3.2. Program sa početnim uslovima za rešavanje jednačine (1.2.4)

Ako se koristi drugi način postavljanja početnih uslova, naprimer, za rešavanje jednačine (1.2.4), onda bi strukturna blok šema programa izgledala kao na slici 1.3.3. Sa slike se vidi da se izlaz iz integratora (1) vodi preko potenciometra na njegov ulaz i na integrator (2). Stoga je potrebno dovesti početni uslov \dot{y}_0 , na oba mesta, a pored toga, tamo gde je potrebno, pomnožiti ga sa odgovarajućom konstantom (Prvi deo II, 2.3). To je u ovom slučaju i učinjeno na ulazu u integrator (1), te je njegov početni uslov pomnožen konstantom a_2/a_1 preko potenciometra (1).

1.4. Razmera za zavisno promenljivu

Poznato je od ranije da se analogni računar sastoji od skupa računskih elemenata koji, predstavljaju fizičke uređaje namenjene za obavljanje odredjenih matematičkih operacija. Prema

tome, ako se ovi računski elementi povežu prema struktornoj blok šemi programa, onda se može uspostaviti analogni model že-



Sl. 1.3.3. Program sa uvodjenjem početnih uslova preko ulaza u sledeće računске elemente

ljenog problema. Međutim, kao i svaki fizički objekt, elektronski analogni računar ima svoja ograničenja, unutar kojih važe matematičke relacije nad fizičkim veličinama, u ovom slučaju naponima, koje opisuju ponašanje pojedinih računskih elemenata. Stoga je potrebno da promenljive problema koji se rešava, budu postavljene na računar tako da se odgovarajući naponi menjaju u radnom opsegu svakog računskog elementa. To znači, treba odrediti razmere za svaku promenljivu koja figuriše u problemu, kako bi odgovarajući napon na računskom elementu bio u dozvoljenim granicama. Naponi, ili mašinske promenljive, koje su vezane za pojedine računске elemente, moraju se obavezno menjati unutar unapred utvrđenih granica (obično $\pm 100V$, $\pm 50V$ ili $\pm 10V$), da bi se izbegla preopterećenja ili zasićenja ovih elemenata. Univerzalni analogni računari imaju ugrađene indikatore preopterećenja koji upozoravaju operatora na eventualno preopterećenje nekog od računskih elemenata.

Sa druge strane, da bi se uticaj grešaka, koje smanjuju tačnost operacije koju izvršava određeni računski element (kao što su greške usled konačnog pojačanja, drifta, konačne ulazne struje kod pojačavača i sl., - Prvi deo, I, 3.4), smanjio na najmanju

meru, poželjno je da se svaka mašinska promenljiva menja u granicama najvećih dozvoljenih računskih napona računara. Tako, ako se radi o računaru sa računskim naponom 10V, poželjno je da se naponske funkcije kreću u granicama - 10V, + 10V.

Ranije su definisani (Prvi deo, I) koeficijenti razmere k za svaki računski element kada je rečeno da ti koeficijenti pokazuju sa koliko jedinica fizičke veličine, tj. napona je predstavljena odgovarajuća matematička veličina (Prvi deo, I.1). Ovde je ta definicija proširena, tj. na univerzalnom analognom računaru su promenljive veličine nekog problema, označimo ih sa x, y, \dots predstavljene pomoću odgovarajućih mašinskih veličina ili naponskih veličina - tj. napona X, Y, \dots , tako da je

$$X = k_x x, \quad Y = k_y y, \quad \dots \quad (1.4.1)$$

gde su k_x, k_y, \dots , koeficijenti razmere, preko kojih se usaglašavaju brojne vrednosti pojedinih fizičkih veličina. Koeficijente razmere k_x, k_y, \dots , treba birati tako da apsolutna vrednost svake mašinske promenljive X, Y, \dots , bude što veća, a da pri tome ne predje dozvoljene granične vrednosti ($\pm 100V$, $\pm 50V$ ili $\pm 10V$).

Maksimalni dozvoljeni napon po apsolutnoj vrednosti, koji se koristi u elektronskom analognom računaru, obično se naziva računski napon računara U . Tako naprimer, ako računar radi sa $\pm 100V$ računski napon računara U će biti 100V, ako računar radi sa $\pm 50V$, računski napon će biti 50V. Za tranzistorske analogne računare, koji rade sa $\pm 10V$, računski napon je 10V. U svim ovim slučajevima koeficijent razmere definiše se relacijom:

$$k_x = \frac{X}{x} \leq \frac{U}{|x|_{\max}} \left[\frac{V}{\text{jedinica za } x} \right] \quad (1.4.2)$$

gde je $|x|_{\max}$ najveća očekivana vrednost promenljive x po modulu. Ovde treba primetiti da se sve mašinske promenljive kreću u opsegu $+U$ i $-U$. Iz praktičnih razloga kod univerzalnih analognih računara koeficijent razmere k_x bira se tako da ima pogodnu zaokruženu vrednost oblika $10^n, 2 \cdot 10^n$ ili $5 \cdot 10^n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), ili, redje, $2,5 \cdot 10^n$ i $4 \cdot 10^n$. Medjutim, kod specijalizovanih računara k_x može se izabrati tako da je

$$k_x = \frac{U}{|x|_{\max}}$$

Treba primetiti da je za izbor koeficijenata razmere potrebno odrediti maksimalne vrednosti pojedinih promenljivih veličina problema. Ako je problem fizičke prirode, onda se često, na osnovu fizičkih zakona mogu približno odrediti maksimalne moguće vrednosti pojedinih veličina. Ponekad se uzimaju proizvoljne razmere i problem se tako postavi na računar, pa se posle jedne ili nekoliko proba na računaru izvrši izbor razmere. Kod složenijih problema metoda probanja se češće koristi, jer se brže dolazi do rezultata.

Kada su faktori razmere odabrani, onda se pišu tzv. mašinske jednačine. Ove jednačine su ustvari veze između naponskih veličina unutar računara. Mašinske jednačine se, prema tome, dobijaju kada se promenljive x, y, \dots , zamene na sledeći način

$$x = \frac{X}{k_x}, \quad y = \frac{Y}{k_y}, \quad \dots \quad (1.4.3)$$

Važno je ovde napomenuti da se promenljive X, Y, \dots , javljaju kao naponi čije maksimalne apsolutne vrednosti ne mogu da predju računski napon računara.

Koeficijenti razmere k_x, k_y, \dots , određuju broj volti po jedinici fizičke veličine x, y, \dots , pa se često ovaj napon naziva jedinični napon za odgovarajuću promenljivu x, y, \dots . Ako u nekom problemu figuriše više promenljivih, pogodno je da jedinični napon za sve promenljive bude jednak, međutim, ako je sa gledišta razmere na računaru ovo nepogodno, onda različite promenljive mogu imati različite jedinične napone.

Na primeru algebarskog sabiranja

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad (1.4.4)$$

gde je $0 \leq a_1 \leq 1$; $0 \leq a_2 \leq 2$; $|x_1| \leq 80$; $|x_2| \leq 60$; prikazan je način određivanja razmera.

Neka je računski napon računara $U = 10V$. Stavimo da je

$$k_{x_1} = \frac{x_1}{x_1} \leq \frac{10}{80}; \quad k_{x_2} = \frac{x_2}{x_2} \leq \frac{10}{60} \quad (1.4.5)$$

pa kako je

$$y = |a_1x_1 + a_2x_2| \leq |a_1x_1| + |a_2x_2| \leq 80 + 120 = 200$$

to je

$$k_y = \frac{Y}{y} \leq \frac{10}{200} \quad (1.4.6)$$

Zamenom vrednosti za x_1 , x_2 i y iz (1.4.5) i (1.4.6) u (1.4.4) dobija se mašinska jednačina

$$Y = \frac{a_1k_y}{k_{x_1}} X_1 + \frac{a_2k_y}{k_{x_2}} X_2 \quad (1.4.7)$$

Ovde se mogu usvojiti različiti koeficijenti razmere:

1.^o Ako se, naprimer, usvoje sledeći koeficijenti razmere $k_{x_1} = k_{x_2} = 0,1$ i $k_y = 0,05$ jednačina (1.4.7) postaje:

$$Y = 0,5 a_1 X_1 + 0,5 a_2 X_2 \quad (1.4.8)$$

2.^o Ako se usvoji da su svi koeficijenti razmere jednaki, onda se to čini na osnovu najmanjeg, pa je tada

$$k_{x_1} = k_{x_2} = k_y = 0,05$$

i jednačina (1.4.7) postaje

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 \quad (1.4.9)$$

Kako koeficijent a_2 može da uzima vrednosti do $a_2 = 2$, to se veličina X_2 mora pomnožiti sa $0,1 \cdot a_2$ i dovesti na ulaz 10 u sabirač.

3.^o Ako se, pak, usvoje sledeći koeficijenti razmere $k_{x_1} = 0,1$; $k_{x_2} = 0,15$ i $k_y = 0,05$; tada jednačina (1.4.7) glasi

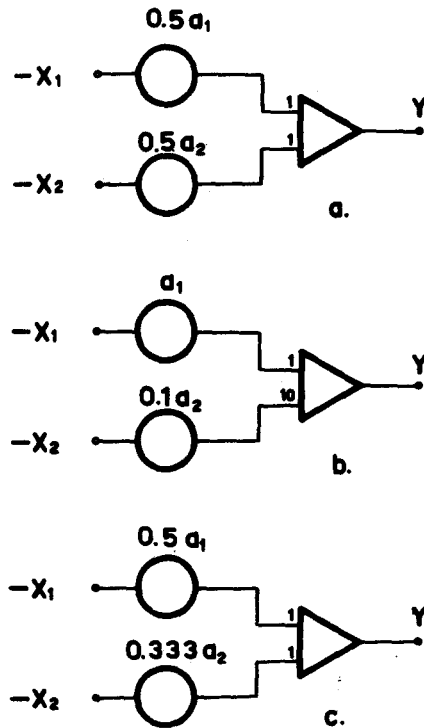
$$Y = 0,5 a_1 X_1 + 0,333 a_2 X_2 \quad (1.4.10)$$

Na slici 1.4.1. a, b i c prikazani su sabirači i potencio- metri pomoću kojih se realizuju mašinske jednačine (1.4.8), (1.4.9) i (1.4.10).

1.5. Razmera za nezavisno promenljivu

Svaki računski element, kako je ranije rečeno, obavlja izvesnu matematičku operaciju nad naponima koji se menjaju u toku vremena. Prema tome, nezavisno promenljiva veličina kod analognih računara je vreme. Stoga ako se neki matematički problem rešava

pomoću analognog računara, onda nezavisno promenljiva problema mora da odgovara , u nekoj razmeri, vremenu rada računara. Za obične diferencijalne jednačine, koje se rešavaju na analognom računaru, nezavisno promenljiva se predstavlja sa vremenom τ rada računara. Ovo je naročito pogodno, ako se pomoću analognog računara proučavaju dinamički sistemi, koji su opisani pomoću diferencijalnih jednačina, jer je i kod njih nezavisno promenljiva vreme.



Sl. 1.4.1. Primeri određivanja razmere za zavisno promenljivu

Prema tome, ako se nezavisno promenljiva problema ili vreme t predstavi sa mašinskim vremenom τ u razmeri 1:1 ($t = \tau$), tada se kaže da računar radi u realnoj vremenskoj razmeri. Jednoj sekundi u problemu odgovara jedna sekunda rada računara, te se na računaru dobija realna vremenska interpretacija svih promenljivih veličina fizičkog procesa koji se proučava ili simuli-

ra. Rad u realnoj vremenskoj razmeri često se zahteva kada je, naprimer, analogni računar uključen u sam proces te čini njegov sastavni deo, ili kada se ponašanje pojedinih stvarnih elemenata ili uređaja ispituje pomoću analognog računara.

Medjutim, vrlo često, realna vremenska razmera može da bude nepodesna za rešavanje problema pomoću analognog računara. Tako, ako se, pomoću analognog računara, ispituju vrlo brze pojave, tada računar treba da u vrlo kratkom vremenu obavi potrebne operacije, pa se javljaju problemi prenosa visokih učestanosti. S druge strane, kod sporih pojava, dugotrajna integracija bi izazvala velike kumulativne greške. U takvim slučajevima, između vremena, ili nezavisno promenljive t i mašinskog vremena τ uspostavlja se relacija

$$\tau = \alpha_t t \quad (1.5.1)$$

gde je α_t koeficijent razmere za vreme. Odmah treba primetiti da je za $\alpha_t > 1$ vreme t usporeno na računaru, tj. da računar radi sporije nego što se stvarni proces odvija, a za interval $0 < \alpha_t < 1$ vreme t na računaru je ubrzano.

Prema tome, ako je potrebno izvršiti promenu vremenske razmere u nekoj diferencijalnoj jednačini tada se, prema (1.5.1), svako t mora zameniti njegovom vrednošću, tj.

$$t = \frac{1}{\alpha_t} \tau \quad (1.5.2)$$

Pojedini izvodi, prema (1.5.1) i (1.5.2) biće tada

$$\frac{d}{dt} = \alpha_t \frac{d}{d\tau} = \alpha_t p \quad (1.5.3)$$

ili u opštem slučaju

$$\frac{d^n}{dt^n} = \alpha_t^n \frac{d^n}{d\tau^n} = \alpha_t^n p^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.5.4)$$

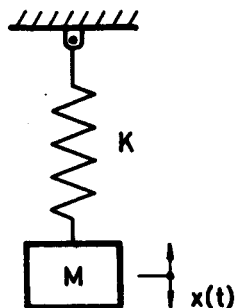
U pogledu izbora vremenske razmere treba reći da za probleme za koje se ne zahteva rad računara u realnom vremenu, izbor ove razmere predstavlja kompromis između želje za bržim računanjem i mogućnosti rada računskih elemenata i uređaja za očitavanje rešenja u pogledu frekventnog opsega koji daje optimalnu tačnost. Mašinsko vreme rada jednog sporog analognog računara

obično iznosi 5 do 200 s, a prosečno traje 10 do 60 s. Ako bi se uzelo da računar radi duže od 300 s, tada bi greške usled drifta i konačne ulazne struje kod integratora (Prvi deo I, 3.4) mogle da dovedu u pitanje tačnost dobijenih rešenja. S druge strane, suviše brze promene utiču na tačnost rada elektromehaničkih računskih komponenata. (toga izbor vremenske razmere treba da bude takav da se izbegnu svi ovi uzroci grešaka.

1.6. Primeri

Primer 1. Neprigušene harmonijske oscilacije

Kao primer proučavanja homogene linearne diferencijalne jednačine posmatrajmo mehanički harmonijski oscilator (sl. 1.6.1), ko-



Sl. 1.6.1. Mehanički harmonijski oscilator

ji se sastoji od mase M obešene pomoću opruge sa koeficijentom elastičnosti K . Ako se masa M nekom spoljašnjom silom izvede iz ravnotežnog položaja po vertikali, tada će kretanje $x(t)$ ove mase biti opisano diferencijalnom jednačinom

$$M \ddot{x} + K x = 0 \quad (1.6.1)$$

sa početnim uslovima

$$x(0) = A_0; \quad \dot{x}(0) = A_1 \quad (1.6.2)$$

Jednačina (1.6.1) je homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima, čije opšte rešenje glasi

$$x = C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t} \quad (1.6.3)$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne integracione konstante, a ω je

dato kao $\omega = \sqrt{K/M}$. Uvrštavanjem početnih uslova i transformacijom jednačine (1.6.3) dobija se jednačina kretanja mase M u obliku

$$x = A_0 \cos \omega t + \frac{A_1}{\omega} \sin \omega t \quad (1.6.4)$$

koja se može napisati u obliku

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1.6.5)$$

gde su

$$A = \sqrt{A_0^2 + A_1^2} \frac{M}{K} \quad \text{i} \quad \text{tg} \phi = \frac{A_0}{A_1} \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (1.6.6)$$

Iz jednačina (1.6.4), (1.6.5) i (1.6.6) vidi se da je karakteristika ovakvog sistema da mu je kretanje sinusnog oblika, čija je ugaona učestanost $\omega = \sqrt{K/M}$, ili prirodna učestanost

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (1.6.7)$$

a amplituda A , te da je kretanje neprigušeno. Ako je $\dot{x}(0) = 0$ tada se rešenje (1.6.5) jednačine (1.6.1) svodi na oblik

$$x = A_0 \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}} \cdot t\right) \quad (1.6.8)$$

Priprema za postavljanje na računar

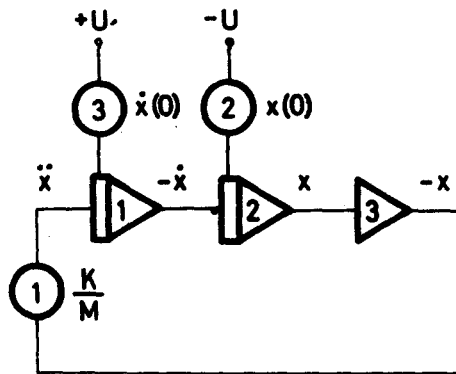
Da bi se jednačina (1.6.1) postavila na računar, treba je najpre rešiti po najvišem izvodu, tj.

$$\ddot{x} = -\frac{K}{M} x \quad (1.6.9)$$

Sada se predpostavi postojanje napona proporcionalnog sa \ddot{x} . Od ovako predpostavljenog \ddot{x} treba na neki način dobiti član $-(K/M)x$ koji treba izjednačiti sa \ddot{x} , kao što zahteva jednačina (1.6.9). Kada se napon proporcionalan sa $-(K/M)x$ dobije, isti se tada vodi u tačku gde se ranije predpostavilo postojanje napona proporcionalnog sa \ddot{x} . Ovakav se proces naziva "zatvaranje povratne sprege", jer se ranije predpostavljena veličina (\ddot{x}) dobija ustvari vraćanjem unazad veličine dobijene po izvršenim odredjenim matematičkim operacijama nad predpostavljenom veličinom (\ddot{x}). Ovo je jedan od najvažnijih principa na kojem se zasniva rad analognih računara.

Ako se veličina \ddot{x} dovede na ulaz integratora (1) (sl. 1.6.2),

tada se na njegovom izlazu javlja veličina $-\dot{x}$. Ponovnom inte-



Sl. 1.6.2. Principijska blok šema za rešavanje jednačine (1.6.9)

gracijom veličine $-\dot{x}$ pomoću integratora (2) dobija se veličina x . Da bi se dobila veličina $-(K/M)x$, mora se upotrebiti jedan sabirač (3), koji ovde služi samo za promenu znaka i na čijem se izlazu dobija $-x$ i potencijometar (1) na kojem se postavi brojna vrednost K/M . Predpostavimo da je u konkretnom primeru $(K/M) < 1$. Sada se izlaz iz potencijometra (1) spaja sa ulazom u integrator (1), čime je povratna sprega zatvorena i zahtev jednačine (1.6.9) zadovoljen.

Da bi se dobilo rešenje jednačine (1.6.9) za određene početne uslove (1.6.2), potrebno je na odgovarajuće ulaze svakog integratora, preko potencijometara (2) i (3), dovesti vrednosti početnih uslova (sl. 1.6.2) sa odgovarajućim znakom. Time je realizovana strukturna blok šema programa za postavljanje date jednačine na računar. Potrebno je još odrediti razmere za pojedine veličine, kako bi se rešenje datog problema dobilo sa što većom tačnošću.

Određivanje razmera

Radi jednostavnosti, predpostavimo najpre da je $\frac{K}{M} = 0,25$. Tada jednačina (1.6.9) glasi

$$\ddot{x} = -0,25 x \quad (1.6.10)$$

Neka su početni uslovi

$$x(0) = 1 \text{ cm} \quad \text{i} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (1.6.11)$$

i neka je potrebno ovaj problem postaviti na tranzistorski analogni računar čiji je računski napon $U = 10V$, tada se izbor razmere vrši na sledeći način:

Maksimalna vrednost za x u toku vremena ne može biti veća od 1 cm, što se može zaključiti iz prirode samog problema, pa se uzima

$$k_x = \frac{U}{|x|_{\max}} = \frac{10}{1} = 10 \frac{V}{\text{cm}} \quad (1.6.12)$$

Imajući u vidu relaciju (1.4.3) i uzimajući iste razmere za funkciju $x(t)$ i njen drugi izvod $\ddot{x}(t)$, biće

$$\frac{\ddot{x}}{k_x} = -0,25 \frac{x}{k_x} \quad (1.6.13)$$

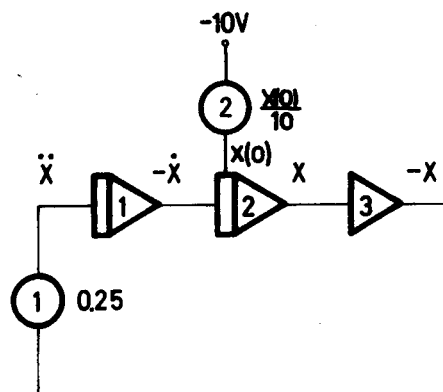
odnosno mašinska jednačina u ovom primeru ima oblik

$$\ddot{x} = -0,25 x \quad (1.6.14)$$

Kako je samo jedan početni uslov različit od nule, to je i za njega uzeta ista razmera, pa je, prema (1.6.11) i (1.6.12),

$$x(0) = k_x x(0) = 10 V \quad (1.6.15)$$

Na slici 1.6.3 prikazana je blok šema programa za analogni računar. Na potencijometru (2) postavljena je vrednost 1.

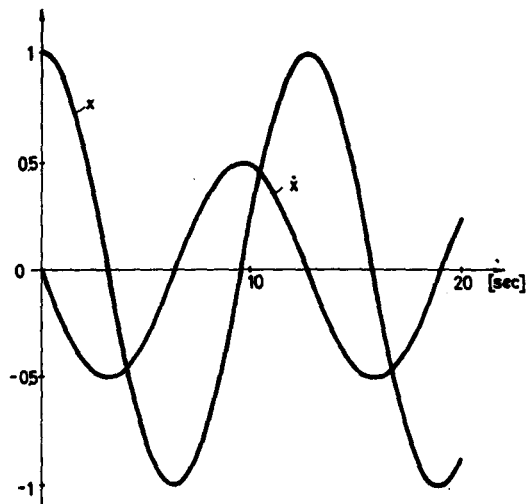


Sl. 1.6.3. Blok šema za rešavanje jednačine (1.6.14)

Kako je, prema jednačini (1.6.7) frekvencija

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{0,25} = \frac{0,5}{2\pi} = 0,0796 \text{ perioda/sec} \quad (1.6.16)$$

bira se sledeća razmera za vreme $\alpha_t = 1$, tj. radi se u realnoj vremenskoj razmeri. U toku vremena od 10 sekundi izvršiće se 0,796 ; ili nešto manje od jedne oscilacije. Na slici 1.6.4 prikazana su grafički rešenja $x(t)$ i $\dot{x}(t)$ jednačine (1.6.10) dobijena na analognom računaru, za početne uslove (1.6.11).



Sl. 1.6.4. Grafik rešenja i njegovog izvoda jednačine (1.6.10) za početne uslove (1.6.11)

U slučaju da je dato $\frac{K}{M} = 25$ tada bi jednačina (1.6.9) imala oblik

$$\ddot{x} = -25x \quad (1.6.17)$$

Sada se vidi da je prirodna frekvencija povećana u odnosu na predhodni slučaj, te se mora usvojiti druga razmera za vreme.

Neka je $\alpha_t = 10$ (1.6.18)

tada iz (1.5.3) i (1.5.4) sledi

$$\frac{d}{dt} = 10 \frac{d}{d\tau} \quad \text{i} \quad \frac{d^2}{dt^2} = 100 \frac{d^2}{d\tau^2} \quad (1.6.19)$$

Ako se ove vrednosti uvrste u jednačinu (1.6.17) i ako se usvoje iste razmere za x i \ddot{x} kao i ranije, dobija se

$$100 \frac{d^2x}{d\tau^2} = - 25 x \quad (1.6.20)$$

ili

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = - 0,25 x \quad (1.6.21)$$

Ova jednačina je istog oblika kao i jednačina (1.6.14). Prilikom postavljanja na računar treba voditi računa da je mašinsko vreme τ 10 puta sporije od realnog vremena t , te da 10 sec mašinskog vremena odgovara 1 sec realnog vremena. To znači da je vremenska skala razvučena. Ugaona učestanost u ovom slučaju je

$$\omega = \sqrt{25} = 5 \text{ rad/sec} \quad (1.6.22)$$

pa je

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0,796 \text{ Hz} \quad (1.6.23)$$

Ako bi, naprimer, bilo $\frac{K}{M} = 0,0001$; tada bi jednačina (1.6.9) bila

$$\ddot{x} = - 0,0001 x \quad (1.6.24)$$

Tada se mora uvesti sledeća razmera za vreme, tj. $a_t = 0,01$;

pa je

$$t = 100 \tau \quad (1.6.25)$$

Kada se ova vrednost uvrsti u jednačinu (1.6.24) i vodeći računa da je prema (1.5.3) i (1.5.4)

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{100} \cdot \frac{d}{d\tau} \quad \text{i} \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{d^2}{d\tau^2} \quad (1.6.26)$$

dobija se

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = - x \quad (1.6.27)$$

Ovako dobijena jednačina lako se postavlja na računar, jer nije potreban potencijometar (1) (sl. 1.6.2). Prilikom očitavanja rešenja treba voditi računa da je

$$\omega = \sqrt{10^{-4}} = 0,01 \text{ rad/sec} \quad (1.6.28)$$

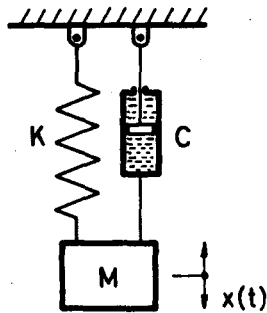
pa se jedna oscilacija dobija za

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 100 \cdot 2\pi = 628 \text{ sec} \quad (1.6.29)$$

odnosno za $T' = 6,28$ mašinskih jedinica za vreme.

Primer 2. Prigušene harmonijske oscilacije

U ovom se primeru proučava kretanje mase M mehaničkog harmonijskog oscilatora koji pored opruge ima i jedan viskozni (hidraulični) prigušivač (sl.1.6.5). Otporna sila prigušivača propor-



Sl. 1.6.5. Mehanički harmonijski oscilator sa prigušenjem
cionalna je brzini \dot{x} . Kretanje mase M opisano je linearnom
diferencijalnom jednačinom drugog reda oblika

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = 0 \quad (1.6.30)$$

sa početnim uslovima.

$$x(0) = x_0 \quad \text{i} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (1.6.31)$$

gde je sa x obeležen pomeraj mase M meren od ravnotežnog položaja. Veličine M , C i K su konstante.

Interesantne veličine vezane za kretanje mase M su put $x(t)$, brzina $\dot{x}(t)$ i ubrzanje $\ddot{x}(t)$. Neka se u početnom trenutku $t = 0$ masa M nalazi u položaju $x(0) = x_0$ i neka ima početnu brzinu $\dot{x}(0) = 0$. Pored toga, neka su zadate sledeće brojne vrednosti

$$\left. \begin{aligned} -0,18 < x < 0,18 \text{ m}; \quad x_0 = 0,18 \text{ m} \\ M = 0,08 \text{ [kg]} \\ K = 420 \text{ [kg/s}^2\text{]} \\ C = 2 \text{ [kg/s]} \end{aligned} \right\} \quad (1.6.32)$$

Jednačina (1.6.30) je homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima čije opšte rešenje glasi

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (1.6.33)$$

gde su r_1 i r_2 koreni karakterističnog polinoma, a C_1 i C_2 integracione konstante. Izrazi za korene r_1 i r_2 dati su relacijama:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{-C + \sqrt{C^2 - 4MK}}{2M} \\ r_2 &= \frac{-C - \sqrt{C^2 - 4MK}}{2M} \end{aligned} \right\} \quad (1.6.34)$$

Kao što je poznato ovde mogu da nastupe tri slučaja:

1. Ako je $C^2 > 4MK$ tada su r_1 i r_2 oba realna i negativna, te je rešenje (1.6.33) aperiodično, i kada $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$.

2. Ako je $C^2 = 4MK$ tada su r_1 i r_2 jednaki, realni i negativni, pa je rešenje (1.6.33) jednačine (1.6.30) kritično aperiodično, tj. predstavlja granicu između aperiodičnog i prigušenog oscilatornog kretanja. Vrednost $C = 2\sqrt{MK}$ naziva se kritični faktor prigušenja.

3. Ako je $C^2 < 4MK$ tada su r_1 i r_2 konjugovano kompleksni brojevi, pa se rešenje (1.6.33) može napisati u obliku

$$x = 2 e^{-\frac{C}{2M} t} (D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t) \quad (1.6.35)$$

gde su D_1 i D_2 integracione konstante koje se određuju iz početnih uslova, a

$$\omega = \frac{\sqrt{4MK - C^2}}{2M} \quad (1.6.36)$$

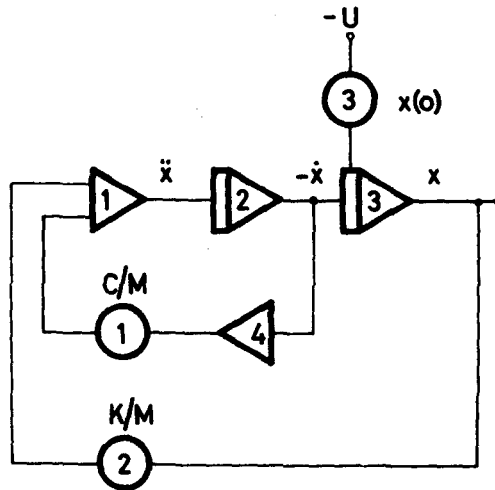
ugaona kružna učestanost.

Priprema za postavljanje na računar

Da bi se jednačina (1.6.30) mogla rešavati pomoću analognog računara potrebno je najpre rešiti je po najvišem izvodu, pri čemu se dobija

$$\ddot{x} = -\frac{C}{M} \dot{x} - \frac{K}{M} x \quad (1.6.37)$$

Jednačina (1.6.37) razlikuje se od jednačine (1.6.9) iz predhodnog primera samo po tome što je drugi izvod jednak zbiru dva člana. Stoga će blok šema programa za postavljanje jednačine (1.6.37), na analogni računar, izgledati kao na slici 1.6.6.



Sl. 1.6.6. Principijska blok šema za rešavanje jednačine (1.6.37)

Vidi se da se veličini $-\dot{x}$ mora promeniti znak pomoću sabirača (4) i da se tako dobijena veličina množi sa C/M pomoću potencijometra (1) i vodi na sabirač (1) gde se sabira sa veličinom $(K/M)x$, koja se dovodi sa potencijometra (2).

Određivanje razmera

Da bi se odredile razmere za pojedine funkcije i za vreme, pretpostavimo da će se za rešavanje jednačine (1.6.37) koristiti tranzistorski analogni računar čiji je računski napon $U = 10$ V.

Kako je prema (1.6.32) u ovom slučaju $C^2 < 4KM$, rešenje će biti oscilatorno i prigušeno. Prirodna učestanost sistema biće

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{420}{0,08}} = 73 \text{ rad/sec} \quad (1.6.38)$$

Budući da su oscilacije prigušene, maksimalna amplituda oscila-

cija nastupa samo u prvom ciklusu. Predpostavimo da je $C = 0$, pa rešenje (1.6.35) ima oblik

$$x = x_0 \cos \omega t \quad (1.6.39)$$

Oдавде je

$$\dot{x} = -x_0 \omega \sin \omega t \quad \text{i} \quad \ddot{x} = -x_0 \omega^2 \cos \omega t \quad (1.6.40)$$

Uzimajući sada da je $|x|_{\max} = 0,18 \text{ m}$, mogu se odrediti maksimalne vrednosti brzina i ubrzanja, tj.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{\max} &= x_{\max} \omega & \dot{x}_{\max} &\approx 0,18 \cdot 73 \approx 13 \text{ m/sec} \\ \ddot{x}_{\max} &= x_{\max} \omega^2 & \ddot{x}_{\max} &\approx 0,18 \cdot 73^2 \approx 950 \text{ m/sec}^2 \end{aligned} \right\} (1.6.41)$$

U cilju odabiranja pogodne razmere uzima se da je $x_{\max} < 0,2 \text{ m}$; $\dot{x}_{\max} < 20 \text{ m/sec}$ i $\ddot{x} < 1000 \text{ m/sec}^2$. S obzirom da je $U = 10 \text{ V}$ razmera za gornje veličine biće

$$\left. \begin{aligned} \text{za } x: & \quad k_x = \frac{10}{0,2} \leq 50; \quad X = 50x; \quad x = \frac{X}{50} \\ \text{za } \dot{x}: & \quad k_{\dot{x}} = \frac{10}{20} \leq \frac{1}{2}; \quad \dot{X} = \frac{\dot{x}}{2}; \quad \dot{x} = 2\dot{X} \\ \text{za } \ddot{x}: & \quad k_{\ddot{x}} = \frac{10}{1000} \leq \frac{1}{100}; \quad \ddot{X} = \frac{\ddot{x}}{100}; \quad \ddot{x} = 100\ddot{X} \end{aligned} \right\} (1.6.42)$$

Uvedimo izabrane razmere (1.6.42) u jednačinu (1.6.37) pa će biti

$$\frac{1}{k_{\ddot{x}}} \ddot{X}(t) = -\frac{C}{M} \frac{1}{k_{\dot{x}}} \dot{X}(t) - \frac{K}{M} \frac{1}{k_x} X(t) \quad (1.6.43)$$

a zamenom brojnih vrednosti za razmere dobija se

$$\ddot{X}(t) = -\frac{2}{100} \frac{C}{M} \dot{X}(t) - \frac{1}{5000} \frac{K}{M} X(t) \quad (1.6.44)$$

Kako je

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}; \quad \ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}(t)}{dt} \quad (1.6.45)$$

odnosno uvodeći razmere za funkcije, prema (1.6.42), dobija se da je

$$2\dot{X}(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{X(t)}{50} \right]; \quad 100\ddot{X}(t) = \frac{d}{dt} [2\dot{X}(t)] \quad (1.6.46)$$

Iz (1.6.46) sledi da je

$$X(t) = \int_0^t [100\dot{X}(t)] dt \quad (1.6.47)$$

$$\dot{x}(t) = \int_0^t [50\ddot{x}(\tau)] d\tau \quad (1.6.48)$$

Kao što se vidi, usvajanjem razmere za vreme, model procesa se na analognom računaru može ubrzati ili usporiti. Kako je prema (1.6.38) učestanost ω_n , u ovom primeru, velika, bira se takva razmera za vreme da se izvrši usporeenje odvijanja procesa u analognom modelu. Neka je $\alpha_t = 100$ te prema (1.5.3) i (1.5.4) sledi

$$\frac{d}{dt} = 100 \frac{d}{d\tau} \quad \text{i} \quad \frac{d^2}{dt^2} = 10000 \frac{d^2}{d\tau^2} \quad (1.6.49)$$

Zamenom (1.6.49) u (1.6.46) dobija se

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{x}(\tau) &= 100 \frac{d}{d\tau} \left[\frac{x(\tau)}{50} \right] \\ 100\ddot{x}(\tau) &= 100 \frac{d}{d\tau} [2\dot{x}(\tau)] \end{aligned} \right\} \quad (1.6.50)$$

odnosno

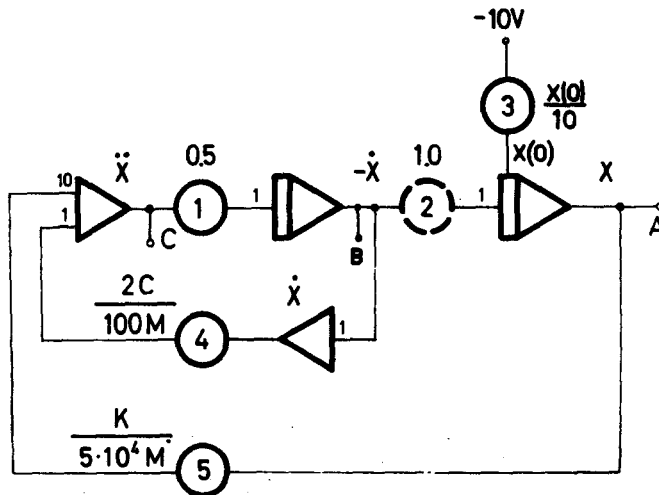
$$x(\tau) = \int_0^{\tau} [\dot{x}(\tau)] d\tau \quad (1.6.51)$$

$$\dot{x}(\tau) = \int_0^{\tau} [0,5 \cdot \ddot{x}(\tau)] d\tau \quad (1.6.52)$$

Poredjenjem (1.6.51) i (1.6.52) sa (1.6.47) i (1.6.48) vidi se da je za predloženu transformaciju vremenske baze potrebno sto puta smanjiti vremensku konstantu svih integratora u programu. Do istog se zaključka dolazi i ako se ima u vidu princip rada integratora (Prvi deo I, 3.2). Blok šema programa za rešavanje jednačine (1.6.44), uzimajući u obzir i relacije (1.6.50), tj. (1.6.51) i (1.6.52), data je na slici 1.6.7. Konstanta 0,5 u relaciji (1.6.52) je dobijena u programu na slici 1.6.7 tako što je dodat potencijometar (1) koji je postavljen na vrednost 0,5 ; a iz ovog se potencijometra sada ulazi u integrator. Potencijometar (2), kao što se vidi iz relacije (1.6.51) treba postaviti na vrednost 1, što znači da praktično ovaj potencijometar ne postoji u programu, već se direktno sa izlaza prvog ide na ulaz drugog integratora. Početni uslov koji treba postaviti

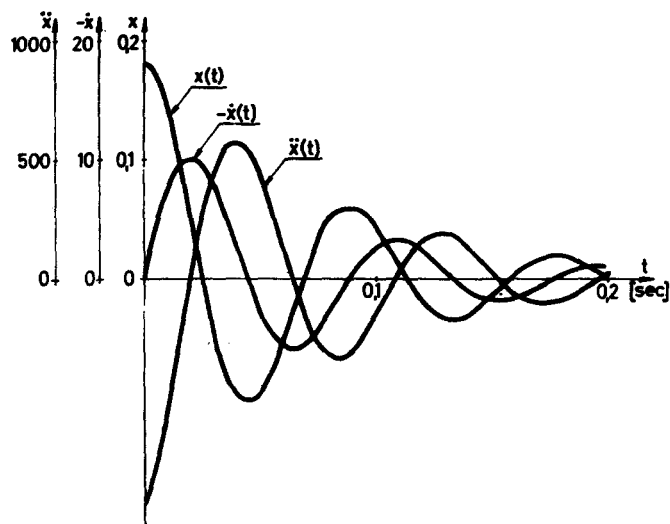
na potencijometar (3), prema (1.6.32) i (1.6.42), biće

$$x(0) = 50 \cdot 0,18 = 9 \text{ V} = 0,9 \cdot 10\text{V} \quad (1.6.53)$$



Sl. 1.6.7. Blok šema za rešavanje jednačine (1.6.44)

što znači da se na potencijometar (3) postavlja vrednost 0,9.

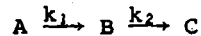


Sl. 1.6.8. Grafik rešenja i njegovih izvoda jednačine (1.6.30) za vrednosti konstanta (1.6.32)

Ovako dobijena blok šema sada se postavlja na analogni računar i očitavanjem naponskih funkcija u tačkama A, B i C dobijaju se rešenja $x(t)$, $\dot{x}(t)$ i $\ddot{x}(t)$ u odgovarajućim razmerama. Sada se može proučavati kako se funkcije $x(t)$, $\dot{x}(t)$ i $\ddot{x}(t)$ menjaju kada se menjaju konstante M, C i K. Za vrednosti konstanta (1.6.32) grafički izgled rešenja $x(t)$ i njegovih izvoda dobijenih na analognom računaru dat je na slici 1.6.8.

Primer 3. Dinamika hemijske reakcije

U hemijskom reaktoru, koji se nalazi na konstantnoj temperaturi, odvija se hemijska reakcija tako da supstanca A nestaje a iz nje postaje supstanca B, iz koje daljom reakcijom postaje supstanca C. Ovaj proces se hemijski označava na sledeći način



gde su k_1 i k_2 konstante brzina reakcija. Ovakva reakcija poznata je u hemiji pod imenom redna reakcija prvog reda, koja se obavlja u istoj zapremini. Potrebno je naći promene koncentracija supstanci A, B i C u zavisnosti od vremena i to za slučaj kada je $k_1 = 1.0$ i $k_2 / k_1 \neq 1$.

Ako sa x_A , x_B i x_C označimo koncentracije supstanci A, B i C onda je

$$0 \leq x_A, x_B, x_C \leq 1. \quad (1.6.54)$$

Pretpostavimo da se pre početka reakcije u reaktoru nalazi samo supstanca A. Prema tome za $t = 0$, biće

$$\left. \begin{aligned} x_A(0) &= 1 = 100\% \\ x_B(0) &= x_C(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.55)$$

Brzine promena koncentracija za pojedine supstance mogu se definisati relacijama

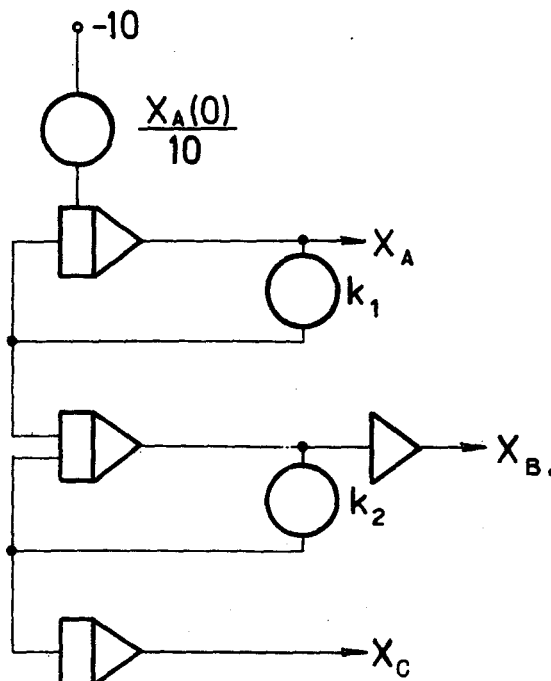
$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_A}{dt} &= -k_1 \cdot x_A \\ \frac{dx_B}{dt} &= k_1 \cdot x_A - k_2 \cdot x_B \\ \frac{dx_C}{dt} &= k_2 \cdot x_B \end{aligned} \right\} \quad (1.6.56)$$

Prema tome, da bi se proučila dinamika date hemijske reakcije potrebno je postaviti na analogni računar sistem diferencijalnih jednačina (1.6.56) za početne uslove (1.6.55) uz uslov da je u svakom trenutku

$$x_A + x_B + x_C = 1 \quad (1.6.57)$$

Priprema za postavljanje na računar

Pošto je sistem jednačina (1.6.56) već rešen po izvodima veličina x_A , x_B i x_C to blok šema programa za postavljanje sistema na analogni računar izgleda kao na slici 1.6.9.



Sl. 1.6.9. Principijska blok šema za rešavanje sistema jednačina (1.6.56)

Određivanje razmera

Pošto je poznato da koncentracije komponenta A, B i C koje se nalaze u reaktoru ne mogu biti manji od 0 niti veće od 1

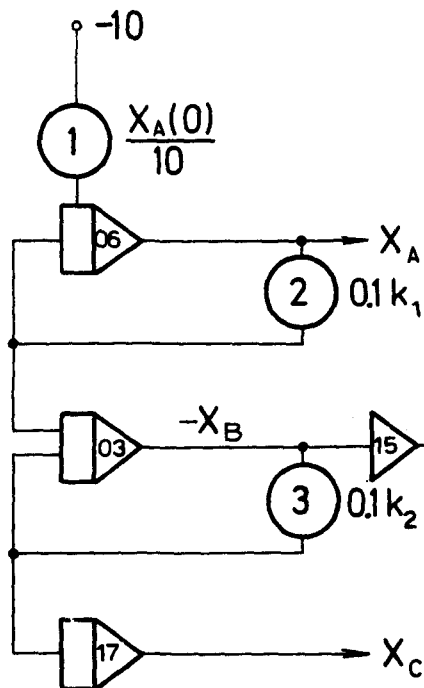
(100 %) to se, za analogni računar, kod koga je $U = 10$, može uzeti da je

$$k_x = \frac{U}{|x|_{\max}} = \frac{10}{1} = 10 \quad (1.6.58)$$

Za svaku koncentraciju x_A , x_B i x_C . Ako usvojimo i razmeru za vreme

$$\alpha_t = \frac{1}{t} = 10 \quad (1.6.59)$$

i uvrstimo relacije (1.6.58) i (1.6.59) u sistem jednačina (1.6.56) dobićemo sistem mašinskih jednačina oblika



$$\frac{dx_A}{dt} = -0,1 \cdot k_1 \cdot X_A$$

$$\frac{dx_B}{dt} = 0,1 \cdot k_1 \cdot X_A - 0,1 \cdot k_2 \cdot X_B$$

$$\frac{dx_C}{dt} = 0,1 \cdot k_2 \cdot X_B$$

a početni uslovi (1.6.55)

svode se na

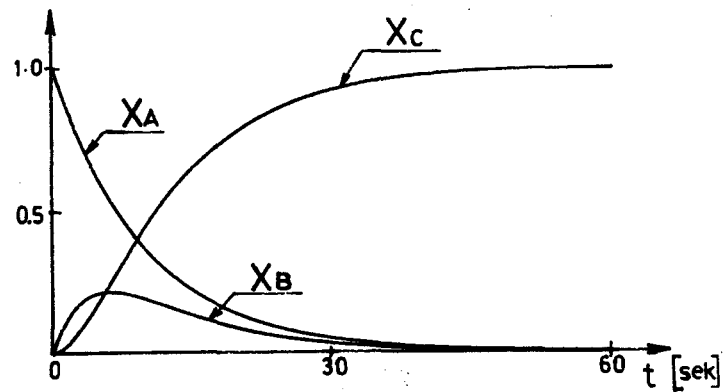
$$X_A(0) = k_x \cdot x_A(0) = 10 \text{ V.}$$

$$X_B(0) = X_C(0) = 0.$$

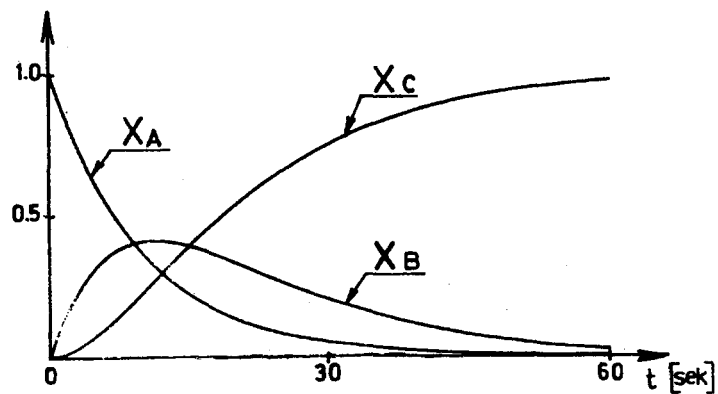
Sl. 1.6.10

Na slici 1.6.10. prikazana je blok šema programa za analogni

računar. Na potenciometar (1) postavljena je vrednost 1 a na potenciometar (2) postavljena je vrednost 0,1, koja odgovara konstanti $k_1 = 1$. Na slici 1.6.11a prikazana su rešenja za x_A , x_B i x_C za slučaj kada su $k_1 = 1$, $k_2 = 2,5$ a na slici 1.6.11 b rešenja za $k_1 = 1$ i $k_2 = 0,8$.



a



b

Sl. 1.6.11 Grafici rešenja sistema jednačina (1.6.55) za početne uslove (1.6.54)

2. NEHOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

2.1. Matematičke osnove

Ako u jednačini (1.1.1) odnosno (1.1.2) funkcija $f(t)$ nije nula već konstanta različita od nule ili funkcija od nezavisno promenljive t , onda se takva jednačina naziva nehomogena linearna diferencijalna jednačina. Funkcija $f(t)$ se u matematici naziva slobodan član, a u tehničkoj praksi ulazna ili pobudna funkcija.

Iz teorije diferencijalnih jednačina poznato je da se opšte rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine dobija kao zbir opšteg rešenja homogenog dela date jednačine i partikularnog rešenja jednačine, koje ne sadrži proizvoljne konstante.

Prema tome, opšte rešenje jednačine

$$L(p) \cdot x(t) = f(t) \quad (2.1.1)$$

biće

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2.1.2)$$

gde je $x_h(t)$ rešenje homogenog dela, a $x_p(t)$ partikularno rešenje jednačine (2.1.1). Postupak rešavanja homogenog dela jednačine je opisan u predhodnom odeljku. Sada ćemo se ukratko osvrnuti na dobijanje partikularnog rešenja $x_p(t)$ nehomogene jednačine.

Partikularni integral nehomogene jednačine može se naći pomoću jedne od dve metode:

- 1° Lagranževe (Lagrange) metode varijacije konstanta, ili
- 2° Košijeve (Cauchy) metode.

Po prvoj metodi kada se zna opšti integral homogenog dela jednačine (2.1.1) tj. opšti integral jednačine

$$L(p) \cdot x(t) = 0 \quad (2.1.3)$$

onda se pomoću kvadratura može naći integral jednačine (2.1.1), na taj način što se opšti integral jednačine (2.1.3) napiše u obliku

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i x_i(t) \quad (2.1.4)$$

gde $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) čine osnovni sistem rešenja (2.1.3) a C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) proizvoljne konstante integracije. Ako se pretpostavi da C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) nisu konstante nego funkcije od nezavisno promenljive, tj. $C_i(t)$, onda je potrebno odrediti ove funkcije tako da izraz (2.1.4) identički zadovoljava jednačinu (2.1.1).

Da bismo odredili nepoznate funkcije $C_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) potrebno je n uslova. Radi toga se uvodi

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t)x_i(t) \quad (2.1.5)$$

odakle se diferenciranjem dobija

$$x'(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t)x_i'(t) + \sum_{i=1}^n C_i'(t)x_i(t) \quad (2.1.6)$$

Uvedimo uslov

$$\sum_{i=1}^n C_i'(t)x_i(t) = 0 \quad (2.1.7)$$

koji izvod funkcije (2.1.6) svodi na oblik

$$x'(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t)x_i'(t) \quad (2.1.8)$$

Diferenciranjem (2.1.8) dobija se

$$x''(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t)x_i''(t) + \sum_{i=1}^n C_i'(t)x_i'(t) \quad (2.1.9)$$

Uvedimo uslov

$$\sum_{i=1}^n C_i'(t)x_i'(t) = 0 \quad (2.1.10)$$

pa se iz (2.1.9) dobija

$$x''(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t)x_i''(t) \quad (2.1.11)$$

Primenjujući isti postupak na izvode višeg reda sve do $n-1$, tj.

$$x^{(n-1)}(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t)x_i^{(n-1)}(t) + \sum_{i=1}^n C_i'(t)x_i^{(n-2)}(t) \quad (2.1.12)$$

dobija se uslov

$$\sum_{i=1}^n C_i(t) x_i^{(n-2)}(t) = 0 \quad (2.1.13)$$

koji daje

$$x^{(n-1)}(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) x_i^{(n-1)}(t) \quad (2.1.14)$$

Diferenciranjem (2.1.14) dobija se

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) x_i^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n C_i'(t) x_i^{(n-1)}(t) \quad (2.1.15)$$

Zamenom funkcije (2.1.5) i svih njenih izvoda (2.1.8), (2.1.11) sve do (2.1.14) i (2.1.15) u (2.1.1), i imajući u vidu da je

$$L(p)x_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1.16)$$

dobija se poslednji uslov

$$\sum_{i=1}^n C_i'(t) x_i^{(n-1)}(t) = f(t) \quad (2.1.17)$$

Prema tome, da bi rešenje jednačine (2.1.1) imalo oblik (2.1.5), dovoljno je da funkcije $C_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) ispunjavaju uslove (2.1.7), (2.1.10) itd. do (2.1.13) i (2.1.17). Tako rešavanjem sistema jednačina

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_i'(t) x_i(t) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n C_i'(t) x_i'(t) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n C_i'(t) x_i^{(n-2)}(t) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n C_i'(t) x_i^{(n-1)}(t) &= f(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.18)$$

dobijaju se funkcije

$$C_i'(t) = \lambda_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1.19)$$

odakle se dobija

$$C_i = \int \lambda(t) dt + D_i = \mu_i(t) + D_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1.20)$$

gde su D_i integracione konstante.

Zamenom relacije (2.1.20) u jednačinu (2.1.5) dobija se opšti integral jednačine (2.1.1) u obliku

$$x(t) = \sum_{i=1}^n D_i x_i(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i(t) x_i(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2.1.21)$$

Odredjivanje integracionih konstanta D_i , vrši se kao i ranije, na osnovu početnih uslova.

Po drugoj - Košijevoj metodi partikularni integral jednačine (2.1.1) može se odrediti iz opšteg integrala (2.1.4), ako se konstante C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) odrede tako da integral (2.1.4) i njegovih $n-2$ uzastopnih izvoda po t budu jednaki nuli, a $n-1$ izvod jednak jedinici za neku vrednost $t = t_0$. Obeležimo tako dobijenu funkciju sa $\phi(t, t_0)$. Može se pokazati da funkcija

$$\Psi(t) = \int_{t_0}^t \phi(t, t_0) f(t_0) dt_0 = x_p(t) \quad (2.1.22)$$

predstavlja partikularni integral $x_p(t)$ jednačine (2.1.1). Opšte rešenje je, kao i ranije, oblika

$$x(t) = x_h(t) + \Psi(t) \quad (2.1.23)$$

kod kojeg se integracione konstante odredjuju iz početnih uslova.

Ako je funkcija $f(t)$ pogodnog oblika, može se koristiti metoda neodredjenih koeficijenata da bi se našao partikularni inte-

gral jednačine (2.1.1).

2.2. Struktura programa

Strukturalna blok šema programa za rešavanje nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima, je istog oblika kao i za rešavanje homogene jednačine, s tim što je potrebno uvesti još i funkciju $f(t)$ u program. Radi ilustracije, uzmimo jednačinu

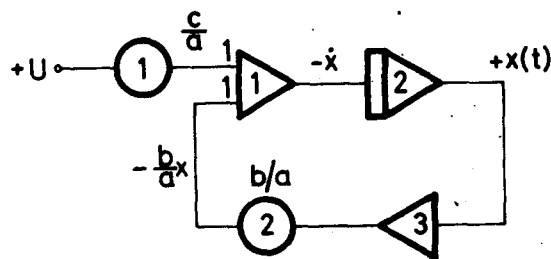
$$a\dot{x} + bx = c \quad (2.2.1)$$

za početni uslov $x(0) = 0$. Homogeni deo ove jednačine isti je kao kod jednačine (1.2.1).

Da bi se ova jednačina postavila na računar, potrebno je, kao i ranije, rešiti je po najvišem izvodu, tj.

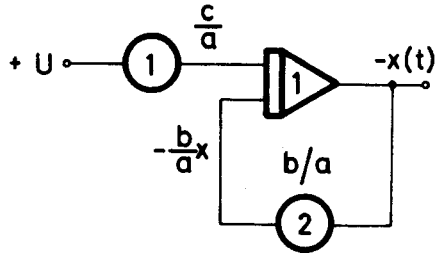
$$\dot{x} = -\frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \quad (2.2.2)$$

Kada član c/a ne bi postojao, tada bi strukturalna blok šema programa izgledala kao na slici 1.2.2. Međutim, prema (2.2.2) vidi se da je potrebno izvršiti sabiranje dva člana da bi se dobio izraz \dot{x} . Stoga strukturalna šema programa ima oblik prikazan na slici 2.2.1. Sabirač (1) služi da se na njemu konstan-



Sl. 2.2.1. Blok šema za rešavanje jednačine (2.2.2)

tna vrednost c/a i promenljiva $-(b/a)x(t)$ saberu, pa se na njegovom izlazu javlja veličina $-\dot{x}(t)$. Sa slike 2.2.1 vidi se da sabirač (3) služi samo za promenu znaka veličine $x(t)$. Ako bi se integrator koristio i za sabiranje, onda mogu da se i zostave oba sabirača, te nakon ovih transformacija, strukturalna šema za rešavanje jednačine (2.2.2) izgleda kao na slici 2.2.2.



Sl. 2.2.2. Blok šema sa minimalnim brojem računskih elemenata za rešavanje jednačine (2.2.2)

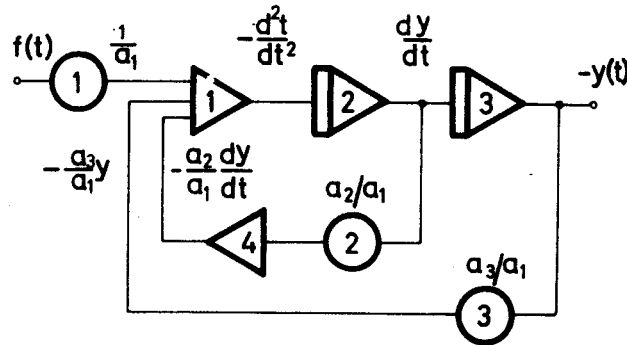
Na sličan se način formiraju strukturne šeme i za druge nehomogene jednačine. Naprimer, strukturna šema za rešavanje jednačine oblika

$$a_1 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_2 \frac{dy}{dt} + a_3 y = f(t) \quad (2.2.3)$$

koja rešena po najvišem izvodu ima oblik

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{a_2}{a_1} \frac{dy}{dt} - \frac{a_3}{a_1} y + \frac{1}{a_1} f(t) \quad (2.2.4)$$

izgleda kao na slici 2.2.3. Kao što se vidi na sabiraču (1) se vrši sabiranje veličina $-(a_2/a_1)(dy/dt)$, $-(a_3/a_1)y$ i ulazne funkcije $f(t)$ pomnožene sa $1/a_1$.



Sl. 2.2.3. Blok šema za rešavanje jednačine (2.2.4)

Ako je funkcija $f(t)$ konstanta onda se lako formira množenjem računskog napona U sa odgovarajućim faktorom. Medjutim, ako

je potrebno da ta funkcija bude promenljiva sa vremenom, onda je potrebno generirati je. Stoga ćemo u narednim izlaganjima dati neke metode generiranja funkcija $f(t)$ koje se pojavljuju kao pobudne funkcije za rešavanje nekih homogenih nelinearnih diferencijalnih jednačina.

2.3. Generiranje funkcija nezavisno promenljive

Ranije smo govorili o generatorima funkcija (Prvi deo I, 5). Tada je rečeno, da je generator funkcija fizički uređaj koji može da ostvari operaciju

$$y = f(x) \quad (2.3.1)$$

gde su x i y funkcije vremena, a operator f označava da veličina y zavisi od veličine x po nekom odredjenom zakonu.

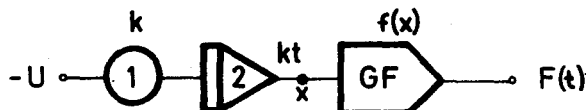
Ako se u relaciji (2.3.1) uvede da je

$$x = kt \quad (2.3.2)$$

gde je k koeficijent proporcionalnosti, tada se dobija

$$y = f(kt) = F(t) \quad (2.3.3)$$

Prema tome, generator funkcija se može upotrebiti, ako se želi generirati neka funkcija vremena. Za ovo je potrebno generator podesiti na željenu funkciju, a na ulaz generatora dovesti napon koji raste linearno sa vremenom. Za dobijanje napona definisanog jednačinom (2.3.2) može se koristiti integrator povezan prema šemi na slici 2.3.1. Na izlazu iz integratora dobija se



Sl. 2.3.1. Generiranje funkcije vremena

veličina $x = kt$ koja se uvodi u generator funkcija GF , sa čijeg se izlaza dobija željena funkcija (2.3.3).

Ovde treba napomenuti da se integrator povezan prema slici 2.3.1 može koristiti i za pokretanje pera pisača u pravcu X-ose,

kada se pisač koristi za očitavanje rešenja u zavisnosti od vremena.

Generiranje funkcije $F(t)$ na analognom računaru može se izvršiti i pomoću linearnih računskih elemenata (sabirača, integratora i potencijometara), ako se funkcija $F(t)$ javlja kao rešenje neke obične linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima za određene početne uslove. Ovakav način generiranja funkcija u nekim slučajevima daje veću tačnost i lakšu realizaciju funkcije na računaru. Tako, funkcije $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, e^{at} , t^n i neke složene funkcije sastavljene od ovih funkcija mogu se dobiti kao rešenja homogenih linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima pri određenim početnim uslovima.

U sledećem uzlaganju biće pokazano kako se na ovaj način generiraju sinusna, eksponencijalna i stepena funkcija nezavisno promenljive t .

Generiranje sinusnih funkcija

Već je rečeno u predhodnoj glavi da se funkcije $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$ mogu dobiti kao dva nezavisna rešenja diferencijalne jednačine drugog reda

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (2.3.4)$$

Da bismo ovo proverili, stavimo da je

$$x = A \cdot \sin\omega t \quad (2.3.5)$$

gde je A neka proizvoljna konstanta, pa je

$$\dot{x} = A\omega \cdot \cos\omega t \quad (2.3.6)$$

i

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cdot \sin\omega t = -\omega^2 x \quad (2.3.7)$$

Na isti se način može proveriti da je i $x = B \cos\omega t$, gde je B neka druga proizvoljna konstanta, takodje rešenje jednačine (2.3.4), pa je na osnovu principa superpozicije, i

$$x = A \sin\omega t + B \cos\omega t \quad (2.3.8)$$

rešenje jednačine (2.3.4). Može se pokazati da se rešenje (2.3.8) može dobiti, ako se stave vrednosti za početne uslove

$$x(0) = B \quad \text{i} \quad \dot{x}(0) = A\omega \quad (2.3.9)$$

Isto tako, za početne uslove

$$x(0) = 0 \quad \text{i} \quad \dot{x}(0) = A \quad (2.3.10)$$

rešenje (2.3.8) jednačine (2.3.4) je

$$x = A \sin \omega t \quad (2.3.11)$$

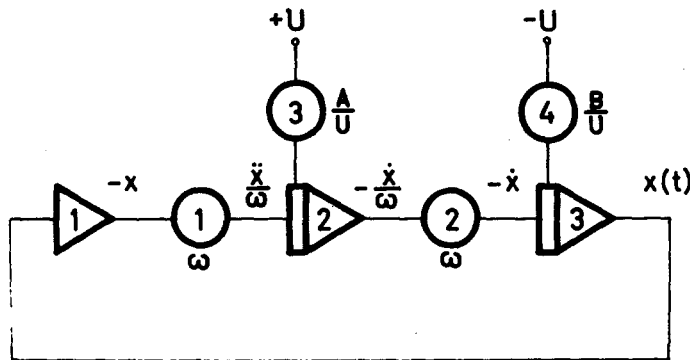
a za početne uslove

$$x(0) = B \quad \text{i} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2.3.12)$$

rešenje je

$$x = B \cos \omega t \quad (2.3.13)$$

Sada ćemo pokazati kako se mogu generirati funkcije (2.3.11) i (2.3.13) pomoću jedne blok šeme. Posmatrajmo blok šemu na slici 2.3.2. Ako se na potenciometre (1) i (2) postave iste vrednosti ω , onda se na izlazima odgovarajućih integratora, za po-



Sl. 2.3.2. Generiranje sinusnih i kosinusnih funkcija

četne uslove A i B , dobijaju funkcije naznačene na sl.2.3.2. Ako se stavi da je $B = 0$ na izlazu iz integratora (2) dobija se

$$-\frac{\dot{x}}{\omega} = \frac{A\omega \cdot \cos \omega t}{\omega} = A \cos \omega t \quad (2.3.14)$$

a na izlazu iz integratora (3)

$$x = A \sin \omega t \quad (2.3.15)$$

Pomoću blok šeme na slici 2.3.2 mogu se, dakle, generirati obe

funkcije (2.3.14) i (2.3.15), pri čemu se amplituda A lako podešava pomoću potenciometra (3). Promena vrednosti za ω ne utiče na amplitudu oscilacija. Pored toga, ako se želi da se generira funkcija (2.3.8), onda je potrebno izlazne veličine iz integratora (2) i (3) dovesti na sabirač, pri čemu veličinu iz integratora (2) treba pomoću potenciometra pomnožiti sa B/A .

Ako je potrebno da bude $\omega > 1$, onda se ulazi u odgovarajuće integratore množe faktorom većim od 1. Međutim, kada se uzimaju velike vrednosti za ω javljaju se greške koje nastaju usled kašnjenja na višim frekvencijama (Prvi deo I, 3.4) što se manifestuje time da amplitude oscilacija rastu sa vremenom. Da bismo ovo pokazali pretpostavimo da svaki pojačavač unosi kašnjenje. Tako, ako je na ulaz u pojačavač dovedena veličina

$$y = \sin \omega t \quad (2.3.16)$$

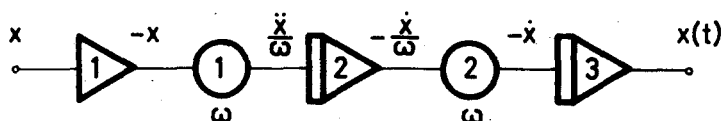
na izlazu će se javiti

$$x_s = -\sin(\omega t - \phi) \quad \phi > 0 \quad (2.3.17)$$

Izlaz iz integratora, za ulaznu veličinu (2.3.16) biće

$$x_I = -\frac{1}{\omega} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2} - \phi) = \frac{1}{\omega} \cos(\omega t - \phi) \quad (2.3.18)$$

jer integracija sinusnih funkcija unosi pomeranje faze za $\pi/2$. Prema tome, ako se otvori povratna sprega niza računskih elemenata koji generiraju sinusne funkcije (sl. 2.3.3) i ako se



Sl. 2.3.3. Analiza greške generatora sinusnih funkcija pri višim frekvencijama

na ulaz sabirača (1) dovede veličina

$$x = \sin \omega t \quad (2.3.19)$$

na njegovom izlazu pojaviće se veličina

$$-x = -\sin(\omega t - \phi_1) \quad (2.3.20)$$

Ulazna veličina u integrator (2) biće tada

$$-\omega x = \frac{\ddot{x}}{\omega} = -\omega \sin(\omega t - \phi_1) \quad (2.3.21)$$

pa se na njegovom izlazu javlja veličina

$$-\frac{\dot{x}}{\omega} = \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) \quad (2.3.22)$$

Ulazna veličina u integrator (3), na sličan način, biće

$$-\dot{x} = \omega \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) \quad (2.3.23)$$

pa je izlazna veličina iz istog integratora data sa

$$x = \sin(\omega t - \phi) \quad (2.3.24)$$

gde je

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 > 0 \quad (2.3.25)$$

pri čemu su $\phi_1 > 0$, $\phi_2 > 0$ i $\phi_3 > 0$, fazni pomeraji sabirača (1) i integratora (2) odnosno (3), a ϕ ukupan fazni pomeraj celog kola na slici 2.3.3. U idealnom slučaju treba da je $\phi = 0$, pa je

$$\frac{\ddot{x}}{\omega^2} = -x = -\sin\omega t \quad (2.3.26)$$

Medjutim, kada se ϕ ne može zanemariti, onda se prilikom zatvaranja povratne sprege, dobija da je

$$\frac{\ddot{x}}{\omega^2} = -\sin(\omega t - \phi) \quad (2.3.27)$$

Rastavljanjem desne strane jednačine (2.3.27) dobija se

$$\frac{\ddot{x}}{\omega^2} = -\sin\omega t \cos\phi + \cos\omega t \sin\phi \quad (2.3.28)$$

i kako je ϕ mala veličina, može se uzeti da je $\sin\phi = \phi$, a $\cos\phi = 1$, pa jednačina (2.3.28) postaje

$$\frac{\ddot{x}}{\omega^2} = -\sin\omega t + \phi \cdot \cos\omega t \quad (2.3.29)$$

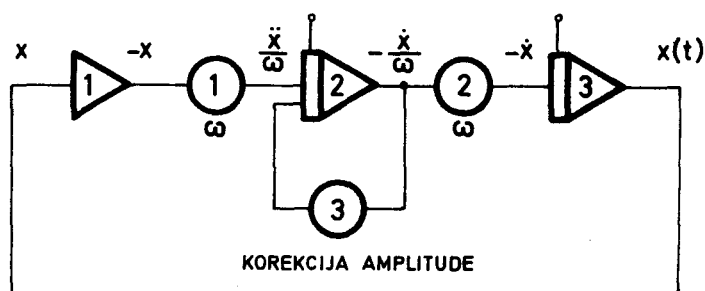
koja se od jednačine (2.3.26) razlikuje za veličinu

$$\phi \cdot \cos\omega t = \phi \frac{\dot{x}}{\omega} \quad (2.3.30)$$

Prema tome, na računaru je stvarno postavljena jednačina

$$\frac{\ddot{x}}{\omega^2} = -x + \phi \frac{\dot{x}}{\omega} \quad (2.3.31)$$

Član $\phi(\dot{x}/\omega)$ odgovara negativnom prigušenju, tj. on utiče na oscilacije tako da im se amplituda povećava tokom vremena. Stoga da bi se uticaj ovog člana poništio uvodi se pozitivno prigušenje u integrator (2), koje je proporcionalno sa \dot{x} , kao prema slici 2.3.4. Za svako ω može se podesiti vrednost po-



Sl. 2.3.4. Korekcija greške pri visokim frekvencijama

tenciometra (3) tako da se uticaj člana $\phi(\dot{x}/\omega)$ u jednačini (2.3.31) poništi, čime se postiže da amplituda oscilacija bude konstantna. Na taj se način mogu generirati i sinusne i kosinusne funkcije kod kojih ω može da bude prilično veliko, a pri čemu amplitude ostaju konstantne i za duže vreme rada računara.

Generiranje eksponencijalnih funkcija

Kao što je poznato eksponencijalna funkcija

$$x = A \cdot e^{\alpha t} \quad (2.3.32)$$

je rešenje linearne diferencijalne jednačine prvog reda oblika

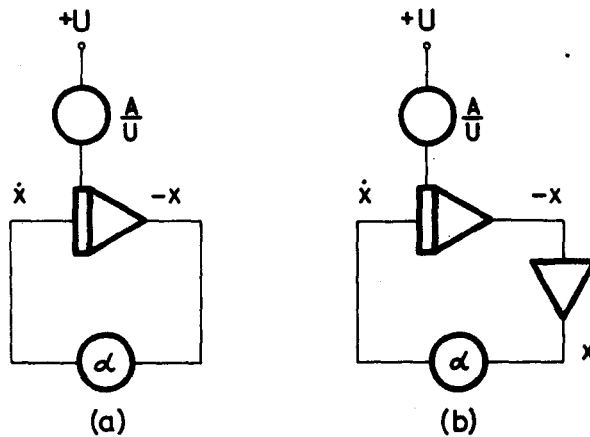
$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x \quad (2.3.33)$$

za početni uslov

$$x(0) = A \quad (2.3.34)$$

Prema tome, za generiranje funkcije (2.3.32) može se koristiti

strukturna blok šema programa data na slici 2.3.5, pri čemu se šema na slici 2.3.5a koristi za generiranje funkcije (2.3.32) za $\alpha < 0$, a šema na slici 2.3.5b za $\alpha > 0$.



Sl. 2.3.5. Generiranje eksponencijalnih funkcija

Eksponencijalna funkcija

$$x = a^t \quad (2.3.35)$$

je ustvari rešenje linearne diferencijalne jednačine

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \ln a \quad (2.3.36)$$

za početni uslov

$$x(0) = 1 \quad (2.3.37)$$

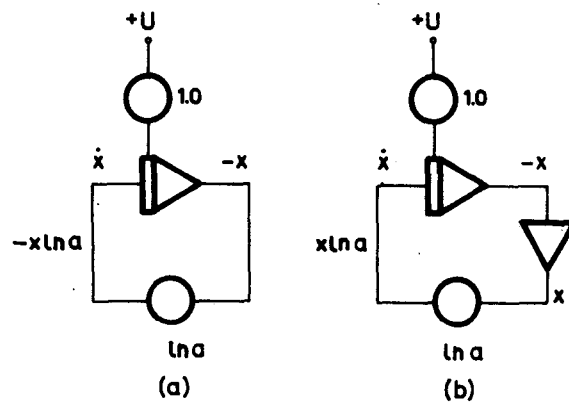
Stoga se funkcija (2.3.35) može generirati pomoću strukturne blok šeme prikazane na slici 2.3.6a, ako je $\ln a < 0$, a pomoću šeme prikazane na slici 2.3.6b, ako je $\ln a > 0$.

Generiranje potencijalnih redova nezavisno promenljive

Red oblika

$$x = \sum_{i=0}^n a_i t^i = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n \quad (2.3.38)$$

naziva se potencijalni ili stepeni red nezavisno promenljive t . Uzastopnim diferenciranjem reda (2.3.38) dobija se



sl. 2.3.6. Generiranje funkcija a^t

$$\left. \begin{aligned}
 x' &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots + (n-1)a_{n-1} t^{n-2} + n a_n t^{n-1} \\
 x'' &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 t + \dots + (n-1)(n-2)a_{n-1} t^{n-3} + n(n-1)a_n t^{n-2} \\
 \dots &\dots \\
 x^{(n-1)} &= (n-1)! a_{n-1} + n! a_n t \\
 x^{(n)} &= n! a_n
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.39)$$

Prema tome, diferencijalna jednačina

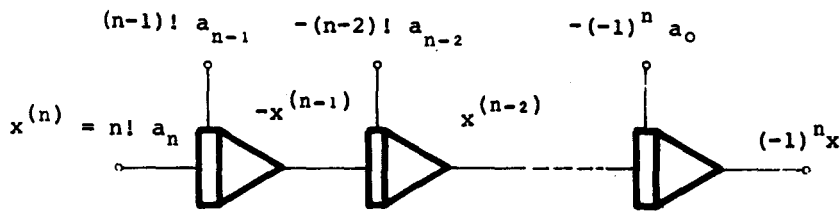
$$x^{(n)} = n! a_n \quad (2.3.40)$$

sa početnim uslovima

$$\left. \begin{aligned}
 x(0) &= a_0 \\
 x'(0) &= a_1 \\
 x''(0) &= 2a_2 \\
 \dots &\dots \dots \dots \\
 x^{(n-1)}(0) &= (n-1)! a_{n-1}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.41)$$

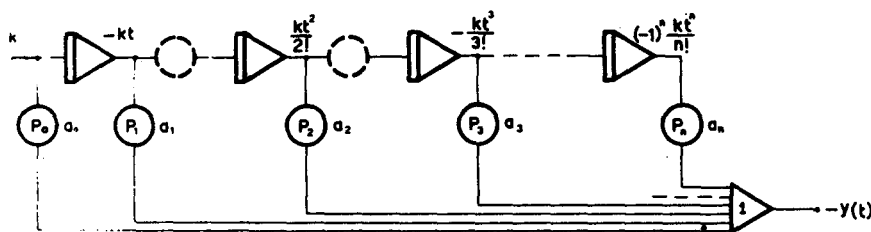
ima rešenje oblika (2.3.38). Stoga se red (2.3.38) može generirati pomoću blok šeme prikazane na slici 2.3.7. Znak izlazne veličine x odredjen je stepenom polinoma n , tako ako je n paran ceo broj znak je pozitivan, a ako je n neparan ceo broj

znak je negativan.



Sl. 2.3.7. Generiranje potencijalnog reda

Drugi način generiranja potencijalnih redova može se ostvariti pomoću blok šeme prikazane na slici 2.3.8. Pomoću ove



Sl. 2.3.8. Drugi način generiranja potencijalnog reda

šeme se generiraju članovi reda

$$x = k - kt + k \frac{t^2}{2!} - k \frac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^n k \frac{t^n}{n!} \quad (2.3.42)$$

korišćenjem integratora i bez dovodjenja početnih uslova, već samo integracijom konstantnog napona proporcionalnog sa k . Na izlazu iz integratora dobijaju se odgovarajući članovi reda (2.3.42), a potenciometri između integratora služe za izbor najpogodnije razmere za pojedine članove reda. Pomoću potencio- metara P_0, P_1, \dots, P_n i sabirača (1) lako se generira red

$$y(t) = k \left[a_0 - a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2!} - a_3 \frac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^n a_n \frac{t^n}{n!} \right] \quad (2.3.43)$$

gde se koeficijenti a_0, a_1, \dots, a_n postavljaju na potencio- metrima P_0, P_1, \dots, P_n respektivno.

Primer: Za generiranje funkcije

$$x(t) = e^{\sin t} \quad (2.3.44)$$

razvijanjem u Maklorenov red i uzimanjem četiri prva člana ovog reda dobija se da je

$$x(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} - 3 \frac{t^4}{4!} \quad (2.3.45)$$

Diferenciranjem izraza (2.3.45) dobija se

$$\left. \begin{aligned} x' &= 1 + t - \frac{1}{2} t^3 \\ x'' &= 1 - \frac{3}{2} t^2 \\ x^{III} &= -3t \\ x^{IV} &= -3 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.46)$$

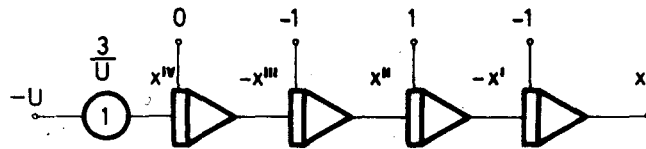
pa jednačina koju treba rešavati da bi se dobila funkcija (2.3.45) kao rešenje, glasi

$$x^{IV} = -3 \quad (2.3.47)$$

za početne uslove

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 1 & x'(0) &= 1 \\ x''(0) &= 1 & x^{III}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.48)$$

Na slici 2.3.9 data je blok šema za približno generiranje funkcije (2.3.44).



Sl. 2.3.9. Generiranje funkcije $e^{\sin t}$ razvijanjem u red

Na sličan način, formiranjem diferencijalnih jednačina i određivanjem pojedinih početnih uslova mogu se generirati i druge funkcije nezavisno promenljive t .

2.4. Primeri

Primer 1. Kretanje materijalne tačke u zemljinom gravitacionom polju (slobodan pad)

Jednačina kretanja materijalne tačke mase M u zemljinom gravitacionom polju glasi

$$M \ddot{x} = M g \quad (2.4.1)$$

ili posle skraćivanja sa M

$$\ddot{x} = g \quad (2.4.2)$$

gde je g ubrzanje zemljine teže (gravitacije) koje deluje na tačku u slobodnom padu. Obeležimo rastojanje iznad horizontalne ravni sa negativnim, a ispod nje sa pozitivnim znakom i neka se tačka u početnom trenutku $t = 0$ nalazi na visini $x(0) = x_0$ i neka je početna brzina $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, usmerena naviše.

Opšte rešenje homogenog dela jednačine (2.4.2) je

$$x_h = A t + B \quad (2.4.3)$$

Partikularno rešenje jednačine (2.4.2) dobija se integracijom jednačine (2.4.2), tj.

$$\dot{x}_p = gt \quad \text{ i } \quad x_p = \frac{1}{2} gt^2 \quad (2.4.4)$$

Prema tome, opšte rešenje jednačine (2.4.2) glasi

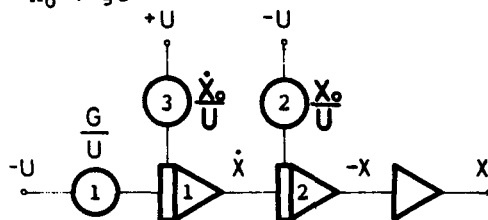
$$x = x_h + x_p = At + B + \frac{1}{2} gt^2 \quad (2.4.5)$$

Uvrštavanjem početnih uslova u jednačinu (2.4.5) dobija se za putanju (zakon kretanja)

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2} gt^2 \quad (2.4.6)$$

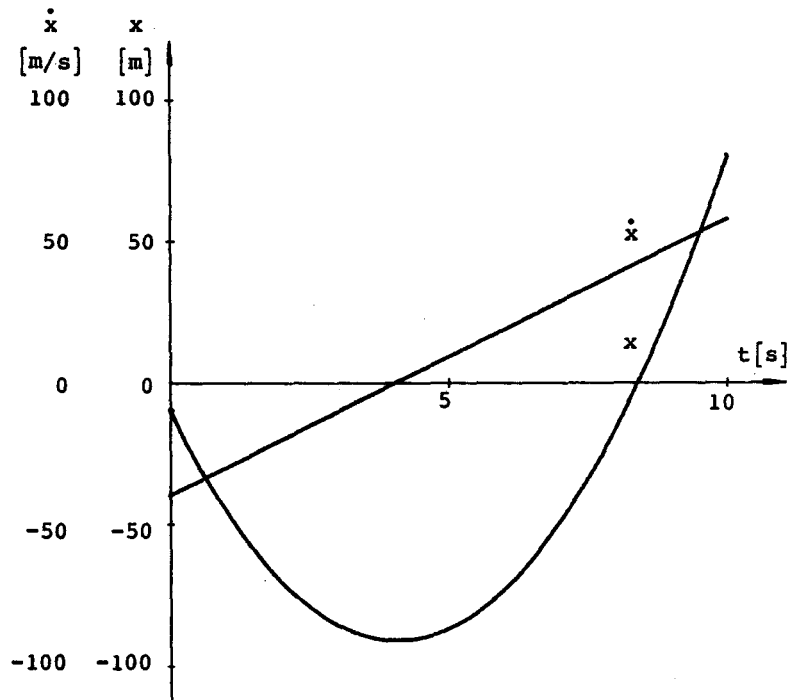
a za brzinu

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + gt \quad (2.4.7)$$



Sl. 2.4.1. Blok šema za rešavanje jednačine (2.4.2)

Strukturna blok šema za rešavanje jednačine (2.4.2) data je na slici 2.4.1. Šema se sastoji od dva integratora (1) i (2) i jednog potencijometra (1) na kojem se postavlja vrednost ubrzanja zemljine teže g u određenoj razmeri. Šema na slici 2.4.1 sastavljena je sa sledećim koeficijentima razmere $k_x = k_{\dot{x}} = 0,1$ i $k_g = G/g = 0,1$. Rešenje jednačine (2.4.2) po x i \dot{x} za početne uslove $x_0 = -10$ m i $\dot{x}_0 = -40$ m/s dato je na slici 2.4.2. Ovde treba primetiti da je rešenje x parabola a \dot{x} prava linija, kao što kazuju relacije (2.4.6) i (2.4.7). Od ka-



Sl. 2.4.2. Grafik promene puta i brzine u slučaju kretanja materijalne tačke u gravitacionom polju

rakteristika koje treba kontrolisati, kada se rešenje dobije, jeste da li je nagib prave $\dot{x}(t)$ jednak g i da li je pravac tangente na krivu $x_0(t)$ za $t = 0$ upravo \dot{x}_0 . Isto tako, ako kriva $x(t)$ ima minimum, treba proveriti da li se minimum jav-

lja za

$$\dot{x}_0 + gt_1 = 0 \quad (2.4.8)$$

odakle je za gornje vrednosti \dot{x}_0 i g

$$t_1 = -\frac{\dot{x}_0}{g} = \frac{40}{9,81} = 4,07 \text{ sec.} \quad (2.4.9)$$

Primer 2. Kretanje materijalne tačke kroz otpornu sredinu

Predhodni se primer može proširiti ako se prepostavi da se materijalna tačka kreće kroz otpornu sredinu. Neka je sredina kroz koju se tačka kreće viskozna. Tada je otpor sredine proporcionalan brzini \dot{x} , pa diferencijalna jednačina kretanja glasi

$$M \ddot{x} + C \dot{x} = Mg \quad (2.4.10)$$

gde je M masa materijalne tačke, a C konstanta koja karakteriše viskozitet sredine. Predpostavimo kao i ranije, da su početni uslovi

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.11)$$

Jednačina (2.4.10) može se napisati u obliku

$$\ddot{x} + \frac{C}{M} \dot{x} = g \quad (2.4.12)$$

Homogeni deo jednačine (2.4.12) ima rešenje

$$x_h = A + B \cdot e^{-\frac{C}{M} t} \quad (2.4.13)$$

gde su A i B proizvoljne integracione konstante. Partikularno rešenje jednačine (2.4.12) je

$$x_p = \frac{M}{C} gt \quad (2.4.14)$$

pa je opšte rešenje jednačine (2.4.12)

$$x = x_h + x_p = A + B e^{-\frac{C}{M} t} + \frac{M}{C} gt \quad (2.4.15)$$

Uvodjenjem početnih uslova (2.4.11) može se pokazati da rešenje jednačine (2.4.10), tj. zakon kretanja, glasi

$$x = x_0 + \frac{M}{C} (\dot{x}_0 - \frac{M}{C} g) - \frac{M}{C} (\dot{x}_0 - \frac{M}{C} g) \cdot e^{-\frac{C}{M} t} + \frac{M}{C} gt \quad (2.4.16)$$

a zakon promene brzine

$$\dot{x} = (\dot{x}_0 - \frac{M}{C} g) e^{-\frac{C}{M} t} + \frac{M}{C} g \quad (2.4.17)$$

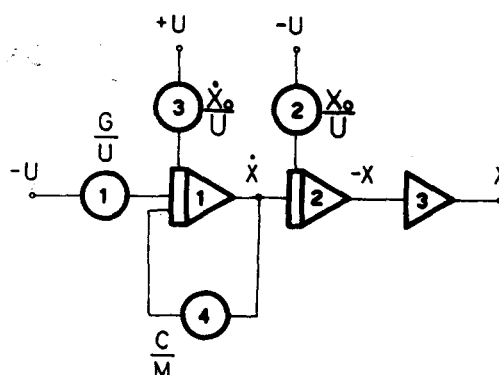
Može se pokazati da za $t \rightarrow \infty$, $\dot{x} \rightarrow \frac{M}{C} g$, a x teži asimptoti definisanoj jednačinom

$$x = x_0 + \frac{M}{C} (\dot{x}_0 - \frac{M}{C} g) + \frac{M}{C} g t \quad (2.4.18)$$

Da bismo napravili blok šemu programa za rešavanje gornjeg problema, rešimo jednačinu (2.4.10) po najvišem izvodu, tj.

$$\ddot{x} = -\frac{C}{M} \dot{x} + g \quad (2.4.19)$$

Na osnovu relacije (2.4.19) blok šema programa izgleda kao na slici 2.4.3. Vidi se da se ova blok šema razlikuje od



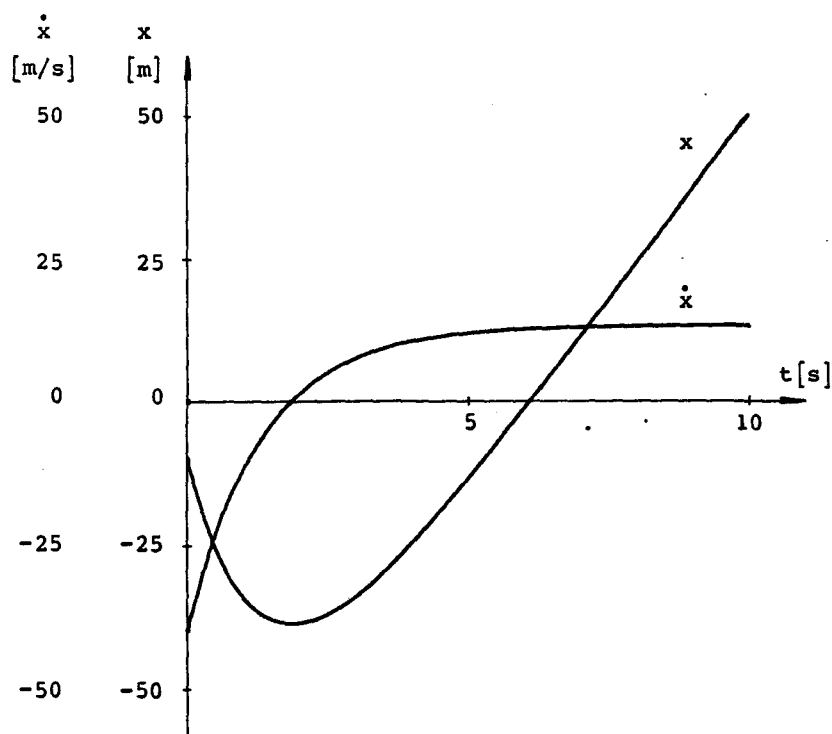
Sl. 2.4.3. Blok šema za rešavanje jednačine (2.4.19)

one date na slici 2.4.1 samo po tome što je uvedena povratna sprega u prvi integrator preko potencijometra (4) na kojem je podešena vrednost C/M . Rešenja $x(t)$ i $\dot{x}(t)$ za početne uslove $x_0 = -10$ m i $\dot{x}_0 = -40$ m/s, kao za odnos konstanta $C/M = 0,75$ data su na slici 2.4.4.

Primer 3. Sistem drugog reda sa prinudnim oscilacijama

U primerima 1 i 2 predhodne glave razmatrali smo slobodne oscilacije jednog linearnog sistema drugog reda. Sada ćemo, međutim, posmatrati prinudne oscilacije istog sistema. To su u-

stvari oscilacije, koje nastaju kada na sistem stalno deluje



Sl. 2.4.4. Grafik promene puta i brzine u slučaju kretanja materijalne tačke kroz otpornu sredinu u gravitacionom polju

neka spoljna sila.

Neka na sistem drugog reda, koji ima i prigušenje, deluje spoljna sila sinusnog oblika, definisana izrazom

$$y = A \cos \omega t \quad (2.4.20)$$

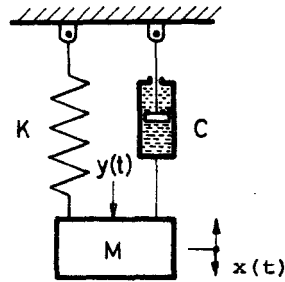
gde je A amplituda, a ω ugaona učestanost promene sile (sl. 2.4.5). Diferencijalna jednačina kretanja ovakvog sistema data je sa

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = A \cos \omega t \quad (2.4.21)$$

koja se posle rešavanja po najvišem izvodu može napisati u obliku

$$\ddot{x} = -\frac{C}{M} \dot{x} - \frac{K}{M} x + \frac{A}{M} \cos \omega t \quad (2.4.22)$$

Usvojimo, radi jednostavnosti, da su svi početni uslovi nule, tj. $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.



Sl. 2.4.5. Mehanički oscilator sa prigušenjem i prinudnom silom $y(t)$

Kako je jednačina (2.4.21) nehomogena, njeno opšte rešenje biće dato kao zbir opšteg rešenja homogenog dela, koje je izvedeno u primeru 2 predhodne glave i koje ima oblik

$$x_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (2.4.23)$$

gde su C_1 , C_2 , r_1 i r_2 definisani u primeru 2 predhodne glave i partikularnog rešenja jednačine (2.4.21) koje se može naći metodom neodređenih koeficijenata (T. Pejović, Diferencijalne jednačine, Naučna knjiga 1951, Beograd, str. 275). Ovo partikularno rešenje je oblika

$$x_p = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \quad (2.4.24)$$

gde je

$$B_1 = \frac{A(K - M\omega^2)}{(K - M\omega^2)^2 + (C\omega)^2} \quad (2.4.25)$$

$$B_2 = \frac{A \cdot C \cdot \omega}{(K - M\omega^2)^2 + (C\omega)^2}$$

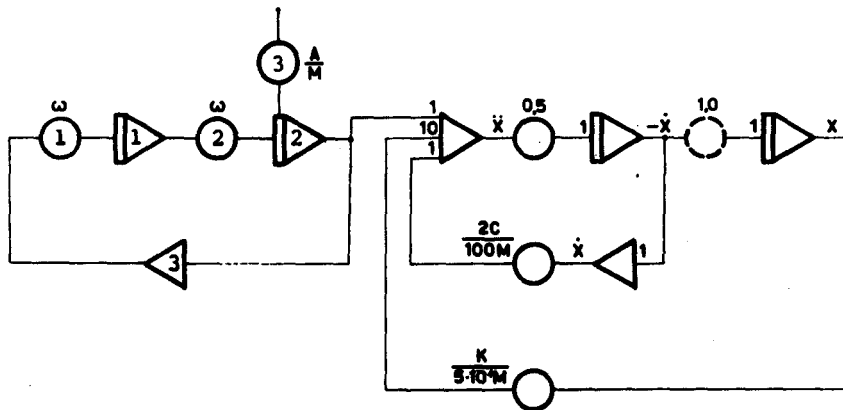
Prema (2.4.23), (2.4.24) i (2.4.25) opšte rešenje jednačine (2.4.22) glasi

$$x = x_h + x_p = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \quad (2.4.26)$$

Proizvoljne konstante C_1 i C_2 određuju se pomoću početnih

uslova, a vrednosti za r_1 i r_2 date su relacijama (1.6.34). Ako su r_1 i r_2 realni i negativni ili kompleksni sa negativnim realnim delovima, onda će rešenje u ustaljenom stanju, koje nastaje posle prelaznog perioda, biti sinusnog oblika, sa frekvencijom jednakom frekvenciji pobudne sile ω .

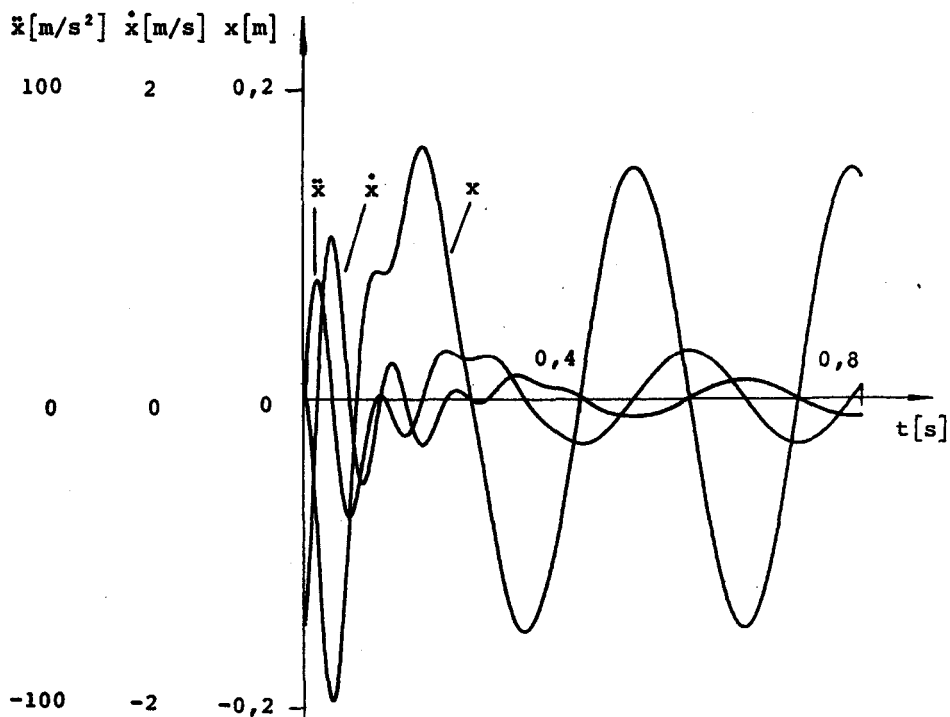
Jednačina (2.4.22) može se postaviti na računar prema blok šemi koja je prikazana na slici 2.4.6. Kao što se sa sli-



Sl. 2.4.6. Blok šema za rešavanje jednačine (2.4.22)

ke vidi blok šema se sastoji iz dela koji generira funkciju $(A/M)\cos\omega t$, sastavljenog od integratora (1) i (2), sabirača (3) i potencijometara (1) i (2) i dela koji rešava samu jednačinu. Generiranje funkcije ostvareno je ovde rešavanjem diferencijalne jednačine drugog reda (2.3.4).

Rešenja jednačine (2.4.21) $x(t)$, $\dot{x}(t)$ i $\ddot{x}(t)$, za početne uslove $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ i za vrednosti konstanta $M = 0,08$ kg $K = 420$ kg/s²; $C = 2$ kg/s; $A = 0,568$ kg·m/s²; $\omega = 20$ rad/s data su na slici 2.4.7.



Sl. 2.4.7. Promena puta brzine i ubrzanja u funkciji vremena u slučaju prigušenih prinudnih oscilacija

3. LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SA PROMENLJIVIM KOEFICIJENTIMA

3.1. Matematičke osnove

Linearna diferencijalna jednačina

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t) \quad (3.1.1)$$

sa početnim uslovima

$$x(t_0) = x_0; \quad x'(t_0) = x'_0; \quad \dots; \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \quad (3.1.2)$$

gde su $a_i(t)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) funkcije od nezavisno promenljive t , naziva se linearna diferencijalna jednačina sa promenljivim koeficijentima. U teoriji običnih diferencijalnih je-

dnačina, linearne diferencijalne jednačine sa koeficijentima koji su funkcije od nezavisno promenljive, tretiraju se kao posebna klasa jednačina. Ove se jednačine u opštem slučaju teško rešavaju u konačnom obliku, mada i kod njih važi princip superpozicije, koji u nekim slučajevima olakšava rešavanje.

Metode analize linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima ne važe ili su nepodesne za jednačine sa promenljivim koeficijentima. Tako naprimer, analiza u vremenskom domenu, pomoću koje se dobija konvolucija impulsnog odziva (težinske funkcije) i pobudne funkcije, se vrlo teško može sprovesti kada su koeficijenti promenljivi sa vremenom, jer se javljaju velike teškoće prilikom izračunavanja konvolucionog integrala. Kod jednačina sa konstantnim koeficijentima težinska funkcija je ustvari impulsni odziv sistema za određene vrednosti koeficijenata u jednačini. Medjutim, ako se koeficijenti menjaju sa vremenom, jasno je da će se i oblik težinske funkcije menjati sa vremenom, pa će konvolucionni integral, koji predstavlja rešenje jednačine (3.1.1), imati oblik

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)w(t,\tau)d\tau \quad (3.1.3)$$

pri čemu sada težinska funkcija $w(t,\tau)$ ne zavisi samo od razlike $t - \tau$, već je to funkcija dve promenljive t i τ . Funkcija $f(\tau)$ je ulazna funkcija ili desna strana jednačine (3.1.1).

Klasa linearnih diferencijalnih jednačina sa promenljivim koeficijentima ne može se u opštem slučaju rešavati pomoću kvadratura. Veoma je mali broj ovakvih jednačina, koje se posle izvesnih transformacija mogu integraliti. Stoga je bilo potrebno uvesti druge metode za integraciju ovakvih jednačina. Jedna takva metoda, koja se najčešće koristi za matematičko rešavanje ovakvih jednačina je integracija pomoću redova. U nekim klasičnim slučajevima ovi redovi mogu da daju veoma pogodno analitičko rešenje. Ukratko ćemo pokazati kako se može naći rešenje jedne linearne diferencijalne jednačine n -tog reda sa promenljivim koeficijentima pomoću reda.

Jednačina (3.1.1) se može napisati u obliku

$$x^{(n)}(t) = \phi[t, x, x', \dots, x^{(n-1)}] \quad (3.1.4)$$

gde je ϕ neprekidna funkcija kao i njeni parcijalni uzvodi po $t, x, x', \dots, x^{(n-1)}$ u posmatranom intervalu. Potražimo rešenje jednačine (3.1.4) u obliku Tajlorovog reda

$$x(t) = x_0 + (t - t_0)x_0' + \frac{(t - t_0)^2}{2!} x_0'' + \dots + \frac{(t - t_0)^n}{n!} x_0^{(n)} + \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} x_0^{(n+1)} + \dots \quad (3.1.5)$$

Predpostavimo da je ovaj red konvergentan u okolini tačke $t = t_0$ i da zadovoljava početne uslove (3.1.2), koji određuju prvih n koeficijenata reda (3.1.5).

Vrednosti ostalih koeficijenata $x_0^{(n)}, x_0^{(n+1)}, \dots$, reda (3.1.5) mogu se odrediti iz jednačine (3.1.4) i njenih izvoda po t , kada se uvrste početni uslovi (3.1.2). Tako se iz jednačine (3.1.4) dobija

$$x_0^{(n)} = \phi[t_0, x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}] \quad (3.1.6)$$

a iz njenog izvoda

$$x^{(n+1)}(t) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} x' + \frac{\partial \phi}{\partial x'} x'' + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial x^{(n-1)}} x^{(n)} \quad (3.1.7)$$

zamenom $x_0^{(n)}$ sa (3.1.6) dobija se

$$x_0^{(n+1)} = \phi_1[t_0, x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}] \quad (3.1.8)$$

Zamenom vrednosti (3.1.2), (3.1.6) i (3.1.8) u red (3.1.5), pod pretpostavkom da je isti konvergentan u okolini tačke $t = t_0$, dobija se funkcija

$$x(t) = \Psi[t, t_0, x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}] \quad (3.1.9)$$

koja zavisi od nezavisno promenljive t i početnih uslova (3.1.2), pri čemu vrednosti $x_0^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) mogu biti proizvoljne. Funkcija (3.1.9), predstavljena Tajlorovim redom (3.1.5) zadovoljava jednačinu (3.1.4) i početne uslove (3.1.2). Stoga ona predstavlja opšte rešenje jednačine (3.1.4),

u okolini tačke $t = t_0$.

Ako se u redu (3.1.5) stavi $t_0 = 0$, onda se dobija Maklorenov red, koji predstavlja rešenje jednačine (3.1.1) odnosno (3.1.4) i zadovoljava početne uslove

$$x(0) = x_0; x'(0) = x'_0; \dots; x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)} \quad (3.1.10)$$

Rešenje jednačine (3.1.1) odnosno (3.1.4) može se tražiti i pomoću reda oblika

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (3.1.11)$$

gde su a_i ($i = 0, 1, \dots, n, \dots$) konstante koje treba odrediti tako da red (3.1.11) zadovoljava jednačinu (3.1.1). Ako se x i njegovih n uzastopnih izvoda po t iz (3.1.11) zamene u jednačini (3.1.1), a zatim izjednače koeficijenti uz iste stepene po t , dobiće se svi koeficijenti a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$) reda (3.1.11) kao funkcije prvih n koeficijenata a_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Zamenom tako dobijenih koeficijenata u red (3.1.11) dobiće se rešenje jednačine (3.1.1) predstavljeno redom (3.1.11), pod uslovom da je red konvergentan u intervalu u kojem se traži rešenje. Ovo će rešenje zavisiti od n nepoznatih koeficijenata a_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$), koji se mogu odrediti pomoću n početnih uslova (3.1.2). Ovde treba napomenuti da je red (3.1.11) ustvari specijalan slučaj Maklorenovog reda.

Kod fizičkih sistema, linearne diferencijalne jednačine sa promenljivim koeficijentima javljaju se uglavnom u dva slučaja. U prvom slučaju kada koeficijenti u jednačinama zavise od fizičkih parametara sistema, a ovi se parametri menjaju sa vremenom. Tako, masa rakete se menja kada se troši gorivo; brzina hemijske reakcije u nekim slučajevima se menja u zavisnosti od temperature, brzine mešanja, koncentracije katalizatora; parametarski pojačavač sadrži promenljive kapacitivne ili induktivne elemente čijim variranjem spolja može da se menja pojačanje nekog ulaznog signala u pojačavač, itd.

U drugom slučaju do linearnih diferencijalnih jednačina sa promenljivim koeficijentima se dolazi kada se ponašanje fizičkog

sistema opisuje u nekom drugom koordinatnom sistemu a ne u Dekartovom. Naprimer, problem izražen u ortogonalnim cilindričnim ili sfernim koordinatama gotovo se uvek svodi na jednačinu čiji su koeficijenti promenljivi.

3.2. Struktura programa

Linearne diferencijalne jednačine sa promenljivim koeficijentima programiraju se na analognom računaru slično kao i jednačine sa konstantnim koeficijentima. Kao osnovni računski elementi koriste se kao i ranije:

- sabirači,
- integratori i
- potencimetri za množenje konstantom.

Ali, pošto se u ovakvim jednačinama javljaju funkcije nezavisno promenljive t , kao i množenje odnosno deljenje funkcija, to je pored gornjih elemenata potrebno imati i nelinearne računске elemente kao:

- množače,
- generatore funkcija i
- logičke i druge računске elemente,

o kojima je već bilo govora (Prvi deo I, 4, 5 i 6).

Programiranje se vrši na isti način kao i ranije. Naime, jednačina se reši po najvišem izvodu, a zatim se formiraju svi članovi sa desne strane jednačine i dovode se sa odredjenim znakom kao ulazne veličine u jedan sabirač ili integrator. Medjutim, pošto se u ovim jednačinama javljaju koeficijenti koji su funkcije nezavisno promenljive t , to je potrebno generirati posebno ove funkcije, a zatim ih množiti odgovarajućim izvodima u diferencijalnoj jednačini.

Neka je data diferencijalna jednačina

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t) \quad (3.2.1)$$

sa početnim uslovom

$$x(0) = x_0 \quad (3.2.2)$$

Opšte rešenje jednačine (3.2.1) ima oblik

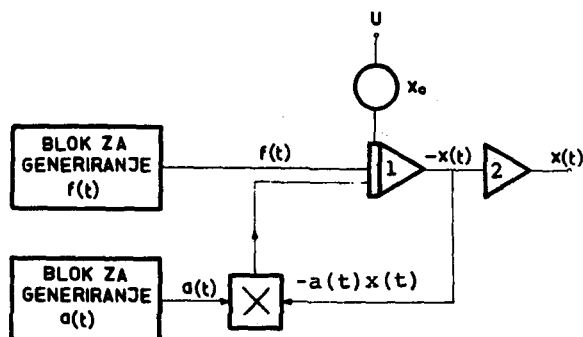
$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(t) dt} \left[C + \int_{t_0}^t f(t) \cdot e^{\int_{t_0}^t a(t) dt} dt \right] \quad (3.2.3)$$

gde je C integraciona konstanta.

Za rešavanje jednačine (3.2.1) na analognom računaru potrebno je rešiti je po najvišem izvodu, pa je

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x + f(t) \quad (3.2.4)$$

jednačina (3.2.4) se postavlja na računar prema blok šemi na slici 3.2.1. Za generiranje funkcija $f(t)$ i $a(t)$ može se koristiti neki od ranije opisanih načina generiranja funkcija



Sl. 3.2.1. Blok šema za rešavanje jednačine (3.2.4)

(Prvi deo I, 2.3). Međutim, za formiranje prvog člana na desnoj strani jednačine (3.2.4) moraju se pomnožiti funkcije $a(t)$ i $x(t)$ i tako dobijeni proizvod uvoditi na ulaz integratora (1). Za ovu svrhu koristi se množač.

3.3. Množenje funkcija

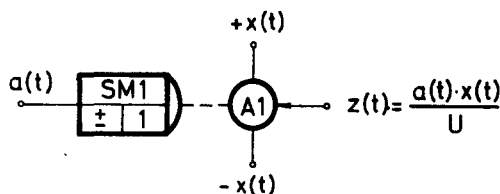
Množenje funkcija može se vršiti na više načina i u zavisnosti od toga postoje razni tipovi množača (Prvi deo I, 4). Mi ćemo se ovde ograničiti na množenje funkcija pomoću servomnožača i pomoću elektronskog diodnog množača, kao i na deljenje funkcija.

Već je ranije rečeno da se množenje nekog promenljivog napona sa konstantom može vršiti pomoću potencijometra. Za ovo je bilo

potrebno promenljivi napon dovesti na ulaz potenciometra, a klizač postaviti na vrednost konstante i na izlazu se javlja proizvod konstante i promenljivog napona.

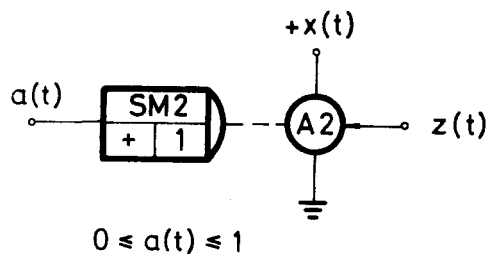
Medjutim, ako se omogući da se klizač potenciometra pomera po nekoj funkciji, onda se dobija proizvod dve funkcije. Pokretanje klizača se ostvaruje pomoću elektromehaničkog pozicionog servomehanizma, pa se takav množač naziva servomnožač.

Servomnožač (Prvi deo I, 4.2) se označava grafičkim simbolom prikazanim na slici 3.3.1, gde je sa $z(t)$ označena funkcija



Sl. 3.3.1. Grafički simbol servomnožača u slučaju množenja funkcija proizvoljnog znaka

na izlazu iz servomnožača, sa U računski napon, a sa $A1$ potenciometar servomnožača. Ako obe funkcije koje se množe, tj. $a(t)$ i $x(t)$ mogu da budu istog ili različitog znaka, kaže se da servomnožač radi u sva četiri kvadranta ravni Oax . Medjutim, ako su obe funkcije nenegativne, ili ako funkcija $a(t)$ ne menja znak, onda se može servomnožač povezati prema šemi na slici 3.3.2, gde je sa $z(t)$ označena funkcija na izlazu iz servo-

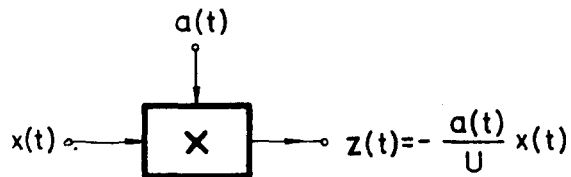


Sl. 3.3.2. Grafički simbol servomnožača u slučaju množenja funkcija od kojih jedna ne menja znak

množača, a sa A2 potencijometar servomnožača. Pritom se i greške, koje se pri množenju neminovno javljaju, smanjuju (Prvi deo I, 4).

Treba napomenuti da postoje dve vrste servomnožača. Jedna vrsta služi za sporo-promenljive funkcije i njihova tačnost je veća, jer sadrže desetoobrtne potencijometre. Druga vrsta služi za brže promenljive funkcije, ali im je tačnost manja, jer sadrže jednoobrtne potencijometre. Prilikom korišćenja servomnožača treba uvek funkciju, koja se sporije menja dovesti na ulaz servopojačavača, a funkciju koja se brže menja na ulaz potencijometra. Time se smanjuju greške koje nastaju usled inercije mehaničkih delova servosistema.

Elektronski množači imaju prednost nad servomnožačima, jer se obe promenljive, koje se množe, mogu brže menjati a da se pri tome ne javljaju veće dinamičke greške. Postoji više vrsta elektronskih množača, ali se diodni množači najšire primenjuju u savremenim analognim računarima. Elektronski množač se na analognim blok šemama prikazuje grafički u obliku datom na slici 3.3.3, gde su $a(t)$ i $x(t)$ ulazne funkcije u množač, a $z(t)$ izlazna funkcija, odnosno rezultat množenja. Na slici je sa U označen računski napon. Treba napomenuti da se na izlazu ovog množača dobija proizvod sa promenjenim znakom.



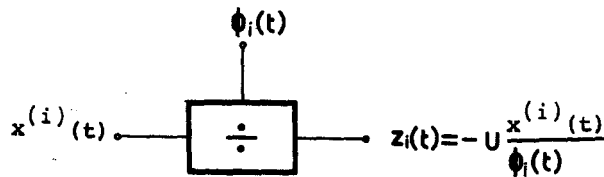
Sl. 3.3.3. Grafički simbol za elektronski množač

Ovakvi množači mogu da rade u različitim kvadrantima, što zavisi od njihovih konstruktivnih osobina (Prvi deo I, 4.3).

Pošto kod linearnih diferencijalnih jednačina sa promenljivim koeficijentima, neki od članova $a_i(t) x^{(i)}$ mogu da budu racionalne funkcije oblika

$$a_i(t) x^{(i)} = \frac{x^{(i)}}{\phi_i(t)} \quad (3.3.1)$$

to se javlja potreba i za delenjem funkcija. Za ovu se svrhu, kao što je ranije rečeno (Prvi deo I, 4.4.), koristi množač. U analognim šemama uređaj za delenje funkcija često se prikazuje u obliku datom na slici 3.3.4, gde je sa $z_i(t)$ označena izlazna veličina, tj. rezultat deljenja, a sa U računski napon.



Sl. 3.3.4. Grafički simbol elektronskog uređaja za delenje funkcija

3.4. Primeri

Primer 1. Diferencijalna jednačina prvog reda sa promenljivim koeficijentima

Neka je data diferencijalna jednačina prvog reda sa promenljivim koeficijentima

$$\frac{dx}{dt} + t \cdot x(t) = e^{-\frac{1}{2} t^2} \quad (3.4.1)$$

sa početnim uslovom

$$x(0) = x_0 \quad (3.4.2)$$

koju treba rešiti na analognom računaru.

Jednačina (3.4.1) ima opšte rešenje

$$x(t) = (C + t) \cdot e^{-\frac{1}{2} t^2} \quad (3.4.3)$$

što se lako dobija primenom formule (3.2.3), gde je C integraciona konstanta. Iz uslova da rešenje (3.4.3) mora da zadovolji početni uslov (3.4.2) lako se dobija da je

$$C = x_0 \quad (3.4.4)$$

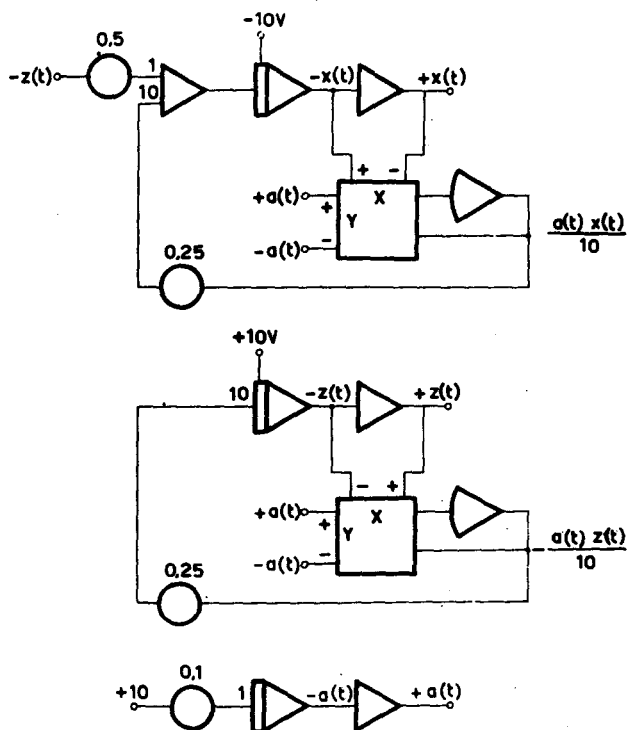
tako da rešenje jednačine glasi

$$x(t) = (x_0 + t) \cdot e^{-\frac{1}{2} t^2} \quad (3.4.5)$$

Da bismo sastavili program za analogni računar, mora se jednačina (3.4.1) rešiti po najvišem izvodu, tako da je

$$\frac{dx}{dt} = -t \cdot x(t) + e^{-\frac{1}{2} t^2} \quad (3.4.6)$$

Blok šema programa za rešavanje jednačine (3.4.6), sa početnim uslovom (3.4.2), data je na slici 3.4.1. Program je prilagodjen



Sl. 3.4.1. Program za rešavanje diferencijalne jednačine prvog reda sa promenljivim koeficijentima

za analogni računar TARA-50 i brojne oznake odgovaraju ovom računaru. U programu je funkcija na desnoj strani jednačine (3.4.1), koja je označena sa

$$z(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (3.4.7)$$

realizovana rešenjem diferencijalne jednačine

$$\frac{dz}{dt} = -t \cdot z(t) \quad (3.4.8)$$

sa početnim uslovom

$$z(0) = 1 \quad (3.4.9)$$

Primenom formule (3.2.3) lako se može proveriti da je relacija (3.4.7) rešenje diferencijalne jednačine (3.4.8) za početni uslov (3.4.9). Generiranje promenljivog koeficijenta uz funkciju $x(t)$ u jednačini (3.4.1), kojeg ćemo označiti sa $a(t)$, tj.

$$a(t) = t \quad (3.4.10)$$

lako se realizuje rešavanjem diferencijalne jednačine

$$\frac{da(t)}{dt} = 1 \quad (3.4.11)$$

za početni uslov

$$a(0) = 0 \quad (3.4.12)$$

ili na način kako je opisano u glavi 2.3 (sl. 2.3.1) za pokretanje pera pisača u pravcu X - ose.

Na slici 3.4.2 prikazana su rešenja diferencijalne jednačine (3.4.1) za početni uslov $x_0 = -1$, dobijena na analognom računaru TARA-50.

Primer 2. Mathieu-ova jednačina

Matieova (Mathieu) jednačina je linearna diferencijalna jednačina sa promenljivim koeficijentima. Do ove se jednačine dolazi pri matematičkom opisu raznih fizičkih pojava. Tako se ova jednačina javlja u kvantnoj teoriji metala, gde se opisuje kretanje elektrona kroz neke kristalne rešetke. Do ove se jednačine dolazi i prilikom proučavanja prostiranja elektromagnetnih talasa kroz sredine koje imaju periodičnu strukturu (В.В. Болтин: Динамическая устойчивость упругих систем, Гос. Тех. Издат. Москва, 1956, стр. 22).

Matieova jednačina se može napisati u obliku

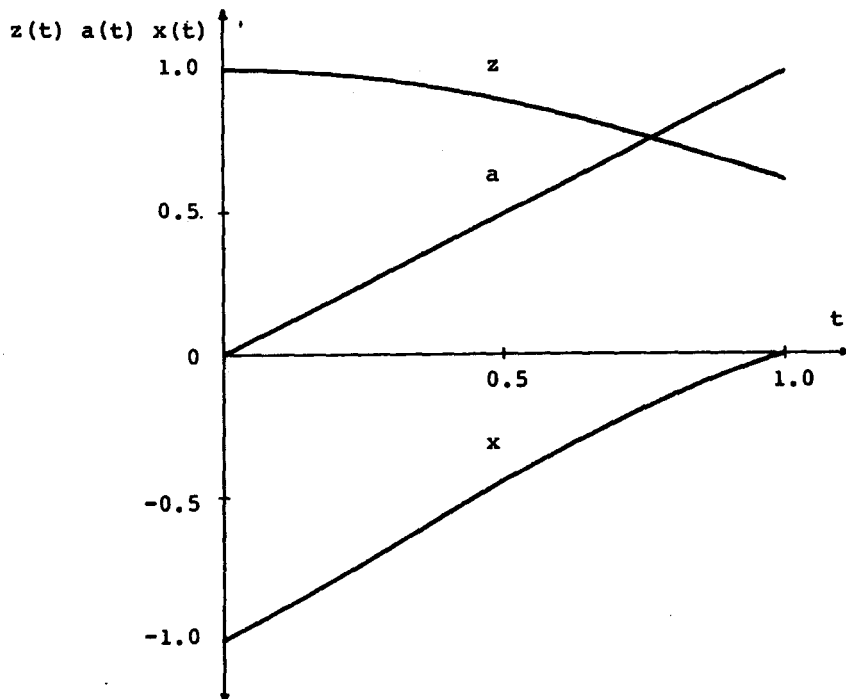
$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a - 2p \cdot \cos 2t) \cdot x = 0 \quad (3.4.13)$$

sa početnim uslovima

$$x(t_0) = x_0; \quad x'(t_0) = x'_0; \quad (3.4.14)$$

gde su a i p konstante.

Da bismo sastavili program za rešavanje Matieove jednačine pomoću analognog računara, potrebno je najpre da se ona reši po najvišem izvodu.



Sl. 3.4.2. Rešenja diferencijalne jednačine (3.4.1)

Tako se dobija

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a \cdot x + 2p \cdot x \cdot \cos 2t \quad (3.4.15)$$

Uvedimo sledeću smenu

$$t = \frac{1}{2} \omega \tau \quad (3.4.16)$$

pa jednačina (3.4.15) postaje

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{1}{4}\omega^2 \cdot ax + \frac{1}{2}\omega^2 px \cdot \cos\omega\tau \quad (3.4.17)$$

Izraz $z = \frac{1}{2}\omega^2 p \cdot \cos\omega\tau$ može se generirati rešavanjem diferencijalne jednačine drugog reda

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + \omega^2 z = 0 \quad (3.4.18)$$

za početne uslove

$$z(0) = \frac{1}{2}\omega^2 p; \quad \dot{z}(0) = 0; \quad (3.4.19)$$

Prema tome, blok šema za rešavanje jednačine (3.4.17) imaće izgled dat na slici 3.4.3. Program je prilagodjen za analogni računar TARA-50 i brojne oznake odgovaraju ovom računaru.

Za date konstante p i a i početne uslove

$$p = 2; \quad a = 2,38; \quad x(0) = 1 \quad \text{i} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (3.4.20)$$

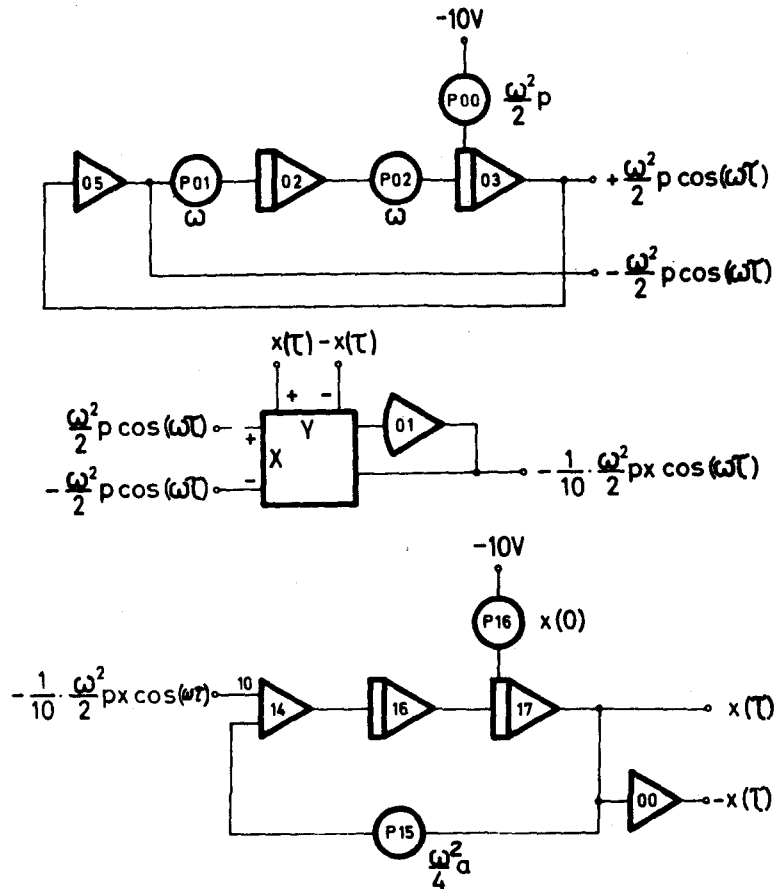
i za izabranu $\omega = 1$, dobija se

$$\left. \begin{aligned} z(0) &= \frac{1}{2}\omega^2 p = 1 \\ \frac{1}{4}\omega^2 a &= \frac{1}{4} \cdot 2,38 = 0,595 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.21)$$

Diferencijalna jednačina (3.4.17) je rešena na analognom računaru TARA-50. Na potenciometrima PO1 i PO2 postavlja se konstanta ω i pomoću integratora (O2) i (O3), kao i sabirača (O5) rešava se diferencijalna jednačina (3.4.18) sa početnim uslovima (3.4.19). Na potenciometru P15 postavlja se konstanta $\frac{1}{4}\omega^2 a$ i pomoću integratora (I6) i (I7), kao i sabirača (I4) rešava se diferencijalna jednačina (3.4.17), pri čemu se za formiranje proizvoda

$$\frac{1}{2}\omega^2 \cdot p \cdot x(\tau) \cdot \cos(\omega\tau)$$

koristi množač. Faktor razmere pri rešavanju jednačine (3.4.18) je $k_z = 10$; a pri rešavanju jednačine (3.4.17) $k_x = 2$. Na slici 3.4.4 prikazano je rešenje Matieove jednačine.



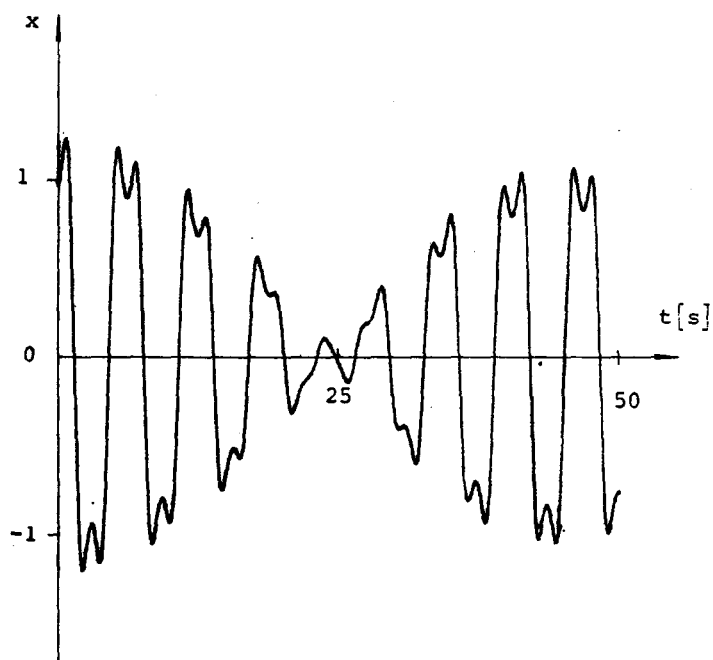
Sl. 3.4.3. Program za rešavanje Matieove jednačine na računaru TARA - 50

4. NELINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

4.1. Matematičke osnove

Nelinearne diferencijalne jednačine mogu se definisati kao jednačine kod kojih su koeficijenti zavisni ne samo od nezavisno promenljive, već i od zavisno promenljive i njenih izvoda. Ovim se jednačinama opisuje najveći broj fizičkih sistema, jer je ponašanje velike većine tih sistema u suštini nelinearno.

Karakteristike nelinearnih sistema se vrlo često bitno razlikuju



Sl. 3.4.4. Rešenje Matieove jednačine

od karakteristika linearnih sistema, te se ni u kakvom obliku ne mogu predstaviti linearno. Tako naprimer, razni fenomeni kao subharmonici prinudnih oscilacija, slobodne oscilacije niskih učestanosti, itd. koji se javljaju kod nelinearnih sistema, potpuno su nemogući za linearne sisteme. U nekim slučajevima se nelinearni sistem aproksimira linearnim sistemom sa promenljivim ili sa konstantnim koeficijentima. Ponekad se ovakva linearizacija ne može koristiti, jer daje veoma velika odstupanja. Stoga se metode linearne analize ne mogu koristiti za potpuno proučavanje nelinearnih sistema.

Istraživanje da se kod nelinearnih sistema nadju i konstatuju karakteristični fenomeni vrlo često, prilikom projektovanja, predstavlja osnovni zahtev, jer prisustvo ovakvih fenomena može

da predstavlja značajnu osobinu sistema. Stoga ovakva proučavanja nelinearnosti u fizičkim sistemima uzimaju sve ozbiljnije razmere poslednjih godina. Ona imaju za cilj poboljšavanje karakteristika i efikasnosti sistema. Matematički aparat, koji tretira nelinearne diferencijalne jednačine još uvek je mnogo manje efikasan od onoga koji tretira linearne jednačine.

Kod linearnih diferencijalnih jednačina važi princip superpozicije koji kaže da je i linearna kombinacija rešenja takodje rešenje sistema. Pored toga, zbir dva rešenja, ili rešenje pomnoženo sa konstantom takodje su rešenja sistema. Metode rešavanja linearnih jednačina pomoću redova (Furijeov, Tajlorov i drugi redovi) baziraju baš na principu superpozicije. Medjutim, ovaj princip ne važi za nelinearne sisteme, pa se uobičajene metode koje se koriste u analizi linearnih jednačina, ne mogu koristiti za nelinearne jednačine. Kao posledica ovoga, i pored toga što je teorija linearnih sistema potpuno razradjena, o opštim karakteristikama nelinearnih sistema malo se zna. Teorija i analiza nelinearnih jednačina je ograničena samo na specijalne slučajeve, koji se odnose na diferencijalne jednačine drugog reda, a koje opisuju oscilacije.

Problemi koji se svode na nelinearne diferencijalne jednačine bili su predmet izučavanja mnogih istraživača, ali do danas nijedna razvijena metoda nije tako efikasna da u potpunosti rešava problem nelinearnih diferencijalnih jednačina. Veći broj ovih metoda su ili nepodesne za primenu u praksi ili daju nedovoljno tačne rezultate zbog aproksimacija koje se koriste, ili pak daju malo informacija o opštem rešenju nelinearnog sistema jednačina.

Navešćemo četiri metode koje se danas uglavnom koriste za rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina:

- iteraciona metoda Pikara,
- metoda linearne aproksimacije,
- metoda fazne ravni i
- metoda opisne funkcije.

Iteraciona metoda Pikara

Ova se metoda može koristiti i za rešavanje linearnih i nelinearnih diferencijalnih jednačina pod uslovom postojanja jedinstvenog rešenja. Metoda se sastoji u sledećem:

Neka je data diferencijalna jednačina

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (4.1.1)$$

Integracijom leve i desne strane ove jednačine dobija se

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(z, y) dz \quad (4.1.2)$$

gde je $y_0 = y(t_0)$. Jednačina (4.1.2) sadrži na desnoj strani, pod integralom nepoznatu funkciju $y(t)$ i po metodi Pikara ona se može zameniti proizvoljnom funkcijom $y_1(t)$ *, tako da se može odrediti integral, pri čemu se dobija

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(z, y_1) dz \quad (4.1.3)$$

Posle ovoga funkciju $y_2(t)$ treba zameniti na desnoj strani jednačine (4.1.2), čime se određuje

$$y_3(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(z, y_2) dz \quad (4.1.4)$$

Proces iteracije se nastavlja tako da važi opšta relacija

$$y_i(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(z, y_{i-1}) dz \quad (i=2, 3, \dots) \quad (4.1.5)$$

Pri dovoljno velikom n funkcija $y_n(t)$ teži funkciji $y(t)$, koja predstavlja rešenje jednačine (4.1.1), nezavisno od izabrane funkcije $y_1(t)$ na početku iteracionog procesa.

Nedostaci ove metode su sledeći:

- može se dogoditi da je teško izvršiti potrebnu integraciju,
- brzina konvergencije funkcija $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$) ka funkciji $y(t)$ može biti spora i

*) Za prvu aproksimaciju obično se uzima početni uslov y_0

- rešenje se dobija u obliku beskonačnog reda.

Metode linearne aproksimacije

Ova se metoda koristi u dva vida:

1^o Nelinearna diferencijalna jednačina se zamenjuje linearnim diferencijalnim jednačinama u pojedinim segmentima nezavisno promenljive, i

2^o Razvijanjem u red nelinearnih članova diferencijalne jednačine i zanemarivanjem članova višeg reda nelinearna jednačina se svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu.

Nedostatak prvog vida ove metode je što može biti veoma složena u slučaju kada se radi sa većim brojem segmenata, a nedostatak drugog vida ove metode je što se linearizacija ne može uvek primeniti. Oba vida ove metode su vrlo ograničene tačnosti.

Primer: Jednačina kretanja matematičkog klatna ima oblik

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad (4.1.6)$$

gde je l udaljenje mase M od tačke oko koje se vrši oscilovanje (dužina klatna), a θ ugao koji zaklapa klatno prema vertikali.

Jednačina (4.1.6) je nelinearna diferencijalna jednačina drugog reda i za male amplitude može se uzeti da je

$$\sin\theta \approx \theta \quad (4.1.7)$$

(vidi Uvod, 1.2), čime se jednačina (4.1.6) svodi na oblik

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta_1 = 0 \quad (4.1.8)$$

Razlika $\theta(t) - \theta_1(t)$ čini grešku učinjenu zamenom nelinearne diferencijalne jednačine (4.1.6) linearnom jednačinom (4.1.8). Za velike vrednosti ugla θ relacija (4.1.7) ne važi, pa i greška ne može biti zanemarljivo mala.

Metoda fazne ravni

Ova se metoda odnosi na nelinearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(x, \dot{x}) \cdot \dot{x} + b(x, \dot{x}) \cdot x = c \quad (4.1.9)$$

gde je c - konstanta.

Ograničenja ove metode su:

- što se može primeniti na jednačinu oblika (4.1.9), kod kojih se nezavisno promenljiva ne javlja eksplicitno u koeficijentima a i b i

- što je pobudna funkcija ograničena na konstantu.

Analiza metodom fazne ravni vrši se na sledeći način:

1° Uvodi se promenljiva $y = \dot{x}$, pa jednačina (4.1.9) dobija oblik

$$\frac{dy}{dt} + a(x, y) \cdot y + b(x, y) \cdot x = c \quad (4.1.10)$$

2° Delenjem leve i desne strane jednačine (4.1.10) sa y dobija se

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} + a(x, y) + b(x, y) \frac{x}{y} = \frac{c}{y} \quad (4.1.11)$$

pa kako je

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y} = \frac{\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} \quad (4.1.12)$$

jednačina (4.1.11) postaje

$$\frac{dy}{dx} = -a(x, y) - b(x, y) \frac{x}{y} + \frac{c}{y} \quad (4.1.13)$$

Ako se u faznoj ravni Oxy konstruiše sada kriva $y(x)$ takva da za svaku tačku $N(x, y)$ na toj krivoj koeficijent pravca tangente u toj tački bude jednak dy/dx i da zadovoljava jednačinu (4.1.13), onda je ta kriva rešenje jednačine (4.1.9). Kriva u faznoj ravni, koja predstavlja rešenje jednačine (4.1.9), često se naziva fazni portret ili fazna trajektorija. Da bi se olakšalo crtanje fazne trajektorije za različite početne uslove u faznoj ravni se najpre odredi familija krivih linija koje imaju konstantan nagib

$$\frac{dy}{dx} = k \quad (4.1.14)$$

gde je k - konstanta. Ove se linije nazivaju izokline. Postojanjem izoklina lako se crta fazna trajektorija.

Pomoću analognog računara fazne trajektorije se vrlo lako mogu dobiti, što će u daljem tekstu na primeru biti pokazano.

Metoda opisne funkcije

Metoda opisne funkcije koristi se za analizu nelinearnih homogenih diferencijalnih jednačina n -tog reda. Suština metode je da se utvrdi kakav se oblik sinusne funkcije može uzeti kao približno rešenje nelinearne diferencijalne jednačine. Ako se sinusna funkcija može uzeti kao približno rešenje, onda se metodom opisne funkcije može odrediti njena amplituda i učestalost. Ako sinusna funkcija nije rešenje, onda se ovom metodom mogu odrediti uslovi pod kojima će rešenje date jednačine biti harmonijsko.

Ova se metoda najčešće koristi prilikom analize stabilnosti sistema automatskog upravljanja.

4.2. Struktura programa

Analogni računar se pokazao kao pogodno sredstvo za rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina, s obzirom da složenost i red diferencijalne jednačine ne utiču na postupak rešavanja na računaru. Izrada i struktura programa za rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina u suštini se ne razlikuje od izrade i strukture programa za linearne jednačine. Razlika je jedino u tome što se javlja množenje i generiranje funkcija, o čemu je već bilo reči kod linearnih sistema sa promenljivim koeficijentima. Prema tome, da bi se mogle rešavati nelinearne diferencijalne jednačine pomoću analognog računara potrebno je imati, pored linearnih računskih elemenata, kao sabirača, integratora i potencijometara, još i množače, generatore funkcija i neke logičke računске elemente.

Primer: Kretanje materijalne tačke u nelinearnoj otpornoj sredini

Ako se materijalna tačka kreće pod uticajem zemljinog gravitacionog polja u sredini koja ima otpor proporcionalan kvadratu

brzine, onda diferencijalna jednačina kretanja glasi

$$M \ddot{x} = -C \dot{x}^2 + Mg \quad (4.2.1)$$

Ovo je nelinearna diferencijalna jednačina, jer se javlja član koji sadrži kvadrat prvog izvoda funkcije. Uzmimo početne uslove $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 0$.

Izabrali smo ovaj problem kao ilustrativni jer je jednačina (4.2.1) jedna od malog broja nelinearnih diferencijalnih jednačina koje se mogu rešiti analitički, pa se ovo rešenje može koristiti da bi se proverili rezultati dobijeni na analognom računaru.

Analitičko rešenje jednačine (4.2.1) može se dobiti ako se stavi da je

$$\dot{x} = y \quad (4.2.2)$$

odakle se dobija

$$\ddot{x} = \frac{dy}{dt} \quad (4.2.3)$$

Jednačina (4.2.1), prema (4.2.2) i (4.2.3), postaje sada

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{C}{M} y^2 + g \quad (4.2.4)$$

Opšte rešenje ove jednačine glasi

$$y = \sqrt{\frac{Mg}{C}} \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{Cg}{M}} t + A\right) \quad (4.2.5)$$

gde je A integraciona konstanta, koja za $\dot{x}(0) = y(0) = 0$ postaje $A = 0$, pa rešenje (4.2.5) glasi

$$y = \sqrt{\frac{Mg}{C}} \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{Cg}{M}} t\right) \quad (4.2.6)$$

Rešenje jednačine (4.2.1), prema (4.2.2) i (4.2.6) i za početni uslov $x(0) = 0$, glasi

$$x = \frac{M}{C} \ln \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{Cg}{M}} t\right) \quad (4.2.7)$$

Kako je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{Cg}{M}} t\right) = 1 \quad (4.2.8)$$

to je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} y = \sqrt{\frac{Mg}{C}} \quad (4.2.9)$$

pa je i

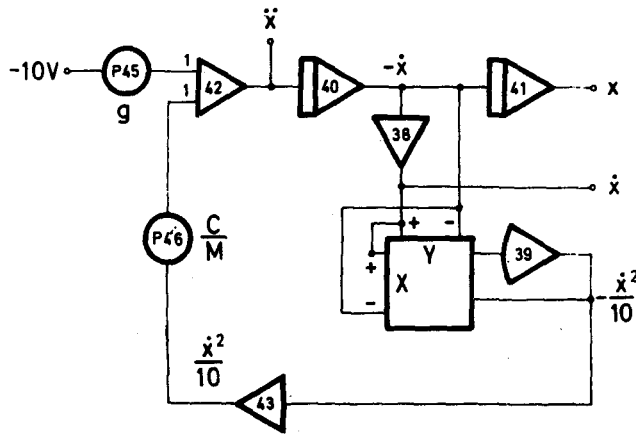
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{x} = 0 \quad (4.2.10)$$

Prema tome, funkcije $\dot{x}(t)$ i $\ddot{x}(t)$, kada $t \rightarrow \infty$, asimptotski se približavaju konstantnim vrednostima (4.2.9) i (4.2.10).

Da bismo jednačinu (4.2.1) postavili na analogni računar, potrebno je rešiti je po najvišem izvodu, tj.

$$\ddot{x} = -\frac{C}{M} \dot{x}^2 + g \quad (4.2.11)$$

Strukturna blok šema programa za rešavanje gornje jednačine data je na slici 4.2.1. Program je prilagodjen za analogni raču-

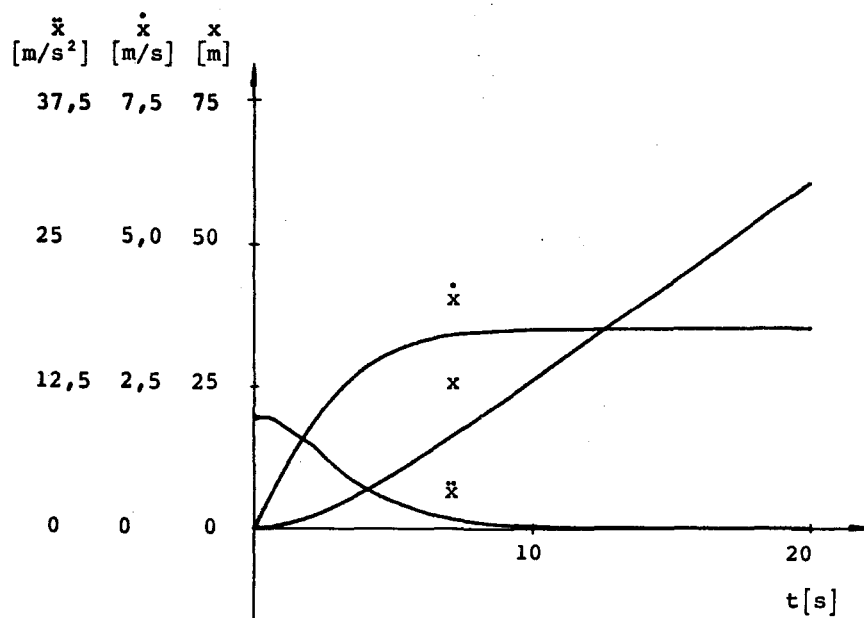


Sl. 4.2.1. Blok šema za rešavanje jednačine (4.2.11)

nar TARA - 50 i brojne vrednosti odgovaraju ovom računaru. Za dobijanje nelinearnosti upotrebljen je množač kojim se vrši množenje funkcije $\dot{x}(t)$ same sa sobom da bi se dobio njen kvadrat. Za ovu svrhu se može koristiti i generator na kojem treba podešiti kvadratnu funkciju.

Krive, koje predstavljaju rešenja $x(t)$, $\dot{x}(t)$ i $\ddot{x}(t)$ za vrednosti $C/M = 0,8$; dobijene na analognom računaru TARA-50, prikazane su na slici 4.2.2. Veličina $\dot{x}(t)$ teži konstanti $\sqrt{g/0,8}$

čija je vrednost $3,5 \text{ m/s}$, a veličina $\ddot{x}(t) \rightarrow 0$, kada $t \rightarrow \infty$.



Sl. 4.2.2. Rešenje jednačine (4.2.11)

Ovaj primer pokazuje da sa gledišta programiranja nelinearnih problema na analognom računaru ne postoje nikakve teškoće. Programiranje se izvodi kao i za linearne sisteme, s tim što je jedino potrebno voditi računa o ispravnom korišćenju generatora funkcija i množača.

II MODELIRANJE PRENOSNIH FUNKCIJA

1. UVOD

U predhodnoj glavi razmatrano je rešavanje običnih diferencijalnih jednačina pomoću analognih računara. Međutim, u mnogim tehničkim problemima, kao što su problemi iz aerodinamike, teorije automatskog upravljanja i sl., ovakav prilaz primene analognih računara nije pogodan. Uobičajeno je da se analiza i sinteza tehničkih sistema vrši primenom prenosnih funkcija. Ovakav prilaz ima višestruke prednosti u odnosu na matematičke modele istih sistema u obliku diferencijalnih jednačina. Pogodnosti koje pružaju prenosne funkcije ogledaju se pre svega u mogućnosti posmatranja nekog složenog sistema kao objekta sačinjenog od više manjih podsistema, za koje su poznate prenosne funkcije. Svaki podsistem pritom zadržava parametre u okviru svoje prenosne funkcije, tako da se pri modeliranju na analognom računaru takodje zadržava struktura podsistema, kao i sistema u celini. Ovo omogućuje jednostavan uvid u uticaje pojedinih parametara u sistemu i njihovo lako podešavanje na analognom računaru.

Kako se analogni računari najviše primenjuju baš za analizu tehničkih sistema, to je ova glava posvećena prilazu modeliranja na analognim računarima primenom prenosnih funkcija. Međutim, kako pojam prenosnih funkcija bazira na Laplasovoj transformaciji, to je u prvom delu ove glave detaljnije obradjena Laplasova transformacija. Citalac koji je već upoznat sa Laplasovom transformacijom može preskočiti materijal u odeljku 2. Međutim, za one koji nisu upoznati sa Laplasovom transformacijom ovaj deo je neophodan, da bi mogli da prate ostali materijal obradjen u ovoj glavi.

2. LAPLASOVA TRANSFORMACIJA

2.1. Definicija Laplasove transformacije

Pre nego što predjemo na definiciju Laplasove transformacije postavimo izvesna ograničenja za funkcije na koje ćemo primenjivati ovu transformaciju. Kako nas interesuju uglavnom praktični problemi vezani za realne fizičke objekte, to možemo odmah konstatovati da ćemo raditi sa funkcijama $f(t)$ realne promenljive t , gde je t vreme. Pored toga, interesovaće nas ponašanje objekta od nekog trenutka koji ćemo proglasiti za početni, tj. $t = 0$, što znači da nas interesuju vrednosti funkcija za $t > 0$, pa se može smatrati da je

$$f(t) = 0 \quad \text{za} \quad t < 0 \quad (2.1.1)$$

Predpostavimo, isto tako, da je funkcija $f(t)$ za $t > 0$ neprekidna, ili da ima u konačnom broju tačaka prekide prve vrste i da je ograničena, tako da se uvek može naći pozitivan broj M takav da je

$$|f(t)| < M \quad \text{za} \quad t \geq 0 \quad (2.1.2)$$

Vrednost funkcije $f(t)$, za $t = 0$, određena je sa

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad (2.1.3)$$

Ograničenja (2.1.1), (2.1.2) i (2.1.3) nad funkcijom $f(t)$, su najčešće prisutna za sve funkcije koje potiču iz realnih problema. Stoga ona i ne predstavljaju nikakve posebne uslove za funkcije sa kojima ćemo se sresti u tehničkoj praksi.

Relacija

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (2.1.4)$$

koja definiše funkciju $F(s)$ za sve vrednosti s za koje integral egzistira, naziva se Laplasova transformacija funkcije $f(t)$. Integral na desnoj strani relacije (2.1.4) naziva se Laplasov integral. Funkcija $f(t)$ naziva se original, a funkcija $F(s)$, dobijena Laplasovom transformacijom, naziva se kompleksni lik ili slika funkcije $f(t)$. Veza između $f(t)$ i $F(s)$

data relacijom (2.1.4), simbolički se obeležava sa

$$F(s) = L[f(t)] \quad (2.1.5)$$

U relaciji (2.1.4) s je kompleksan broj koji se može napisati u obliku

$$s = \sigma + j\omega \quad (2.1.6)$$

2.2. Laplasova transformacija nekih funkcija

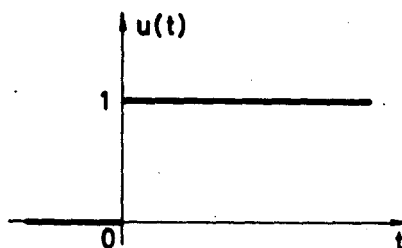
U ovom odeljku ćemo izvesti Laplasovu transformaciju i dati kompleksne likove nekih funkcija koje se često koriste u tehničkoj praksi. Na kraju odeljka data je tabela (tab. 2.2.1) sa kompleksnim likovima većeg broja funkcija koje se javljaju u praktičnim problemima.

Jedinična funkcija

Ova funkcija je definisana sa

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ 1 & \text{za } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Grafički prikaz funkcije $u(t)$ dat je na slici 2.2.1.



Sl. 2.2.1. Jedinična funkcija

Laplasova transformacija funkcije $u(t)$ daje

$$U(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\left[\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (2.2.2)$$

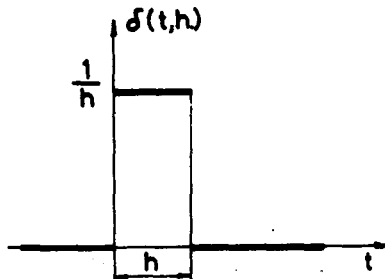
U relaciji (2.2.2) je pretpostavljeno da je $\text{Re}(s) = \sigma > 0$.

Impulsna (Dirakova) funkcija

Posmatrajmo funkciju

$$\delta(t, h) = \frac{1}{h} [u(t) - u(t-h)] = \begin{cases} 0 & \text{za } t \leq 0 \\ \frac{1}{h} & \text{za } 0 < t < h \\ 0 & \text{za } t \geq h \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Grafički prikaz ove funkcije dat je na slici 2.2.2.



Sl. 2.2.2. Impulsna funkcija

Funkcija $\delta(t, h)$ može se fizički predstaviti i posmatrati kao konstantna sila $1/h$, koja dejstvuje za vreme h . Impuls ove sile biće

$$\int_0^{\infty} \delta(t, h) dt = 1 \quad (2.2.4)$$

U slučaju kada je intenzitet sile veliki, a prema relaciji (2.2.3) vreme dejstva vrlo kratko, sila dejstvuje trenutno. Stoga se ovakva funkcija

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta(t, h) \quad (2.2.5)$$

naziva impulsna ili Dirakova funkcija.

Laplasova transformacija ove funkcije daje

$$L[\delta(t)] = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t, h) dt \quad (2.2.6)$$

Zamenom relacije (2.2.3) u (2.2.6) dobija se

$$L[\delta(t)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-sh}}{sh} = 1 \quad (2.2.7)$$

Prema tome, kompleksni lik impulsne funkcije je jedinica.

Sinusna frakcija

Sličnim razmatranjem za sinusnu funkciju dobija se

$$L[\sin\omega t] = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin\omega t \, dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.2.8)$$

Koristeći relaciju (2.1.4) može se izvesti Laplasova transformacija i za druge funkcije. Kompleksni likovi funkcija koje se najčešće koriste u praksi dati su u tabeli 2.2.1.

FUNKCIJA	LAPLASOVA TRANSFORMACIJA
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$1/s$
t	$1/s^2$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{kt}	$1/(s - k)$
$\sin\omega t$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2 + \omega^2)$
$e^{kt}\sin\omega t$	$\omega/[(s-k)^2 + \omega^2]$
$e^{kt}\cos\omega t$	$(s-k)/[(s-k)^2 + \omega^2]$
$e^{-kt}\sin\omega t$	$\omega/[(s+k)^2 + \omega^2]$
$e^{-kt}\cos\omega t$	$(s+k)/[(s+k)^2 + \omega^2]$

Tablela 2.2.1

2.3 Laplasova transformacija funkcija pod operacijom u vremenskom domenu

U ovom je odeljku izložena primena Laplasove transformacije na funkcije nad kojima je primenjena operacija u vremenskom domenu (diferenciranje, integracija i sl.), po nezavisno promenljivoj

Teorema zbirā

Pod ovom teoremom podrazumeva se Laplasova transformacija sume originala funkcija $f_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Lako se dokazuje relacija

$$L\left[\sum_{i=1}^n C_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n C_i F_i(s) \quad (2.3.1)$$

Odnosno, kompleksni lik sume originala $C_i f_i(t)$ jednak je sumi odgovarajućih kompleksnih likova $C_i F_i(s)$, gde je

$$L[f_i(t)] = F_i(s); \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Teorema sličnosti

Odredimo Laplasovu transformaciju funkcije $f(at)$, gde je a realan pozitivan broj. Prema (2.1.4) sledi da je

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt \quad (2.3.2)$$

Uvedimo novu promenljivu $\tau = at$. Iz relacije (2.3.2) dobija se

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau) d\tau \quad (2.3.3)$$

kako je

$$F\left(\frac{s}{a}\right) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau) d\tau \quad (2.3.4)$$

to je

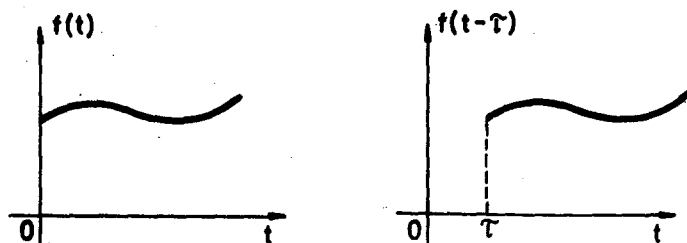
$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (2.3.5)$$

Relacija (2.3.5) izražava teoremu sličnosti o promeni kompleksnog lika kada se menja razmera argumenta funkcije originala.

Teorema o kašnjenju

Neka je funkcija $f(t)$ pomerena translatorno duž apscise t (sl. 2.3.1), tako da je pri $\tau > 0$,

$$f(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < \tau \\ f(t-\tau) & \text{za } t \geq \tau \end{cases} \quad (2.3.6)$$



Sl. 2.3.1. Kašnjenje funkcije

Veza između kompleksnog lika funkcije $f(t)$ i funkcije $f(t-\tau)$ data je relacijom

$$L[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} L[f(t)] \quad (2.3.7)$$

Relacija (2.3.7) se može dokazati na sledeći način.

$$L[f(t-\tau)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-\tau) dt \quad (2.3.8)$$

Iz definicije funkcije $f(t-\tau)$ sledi da je

$$L[f(t-\tau)] = \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t-\tau) dt \quad (2.3.9)$$

Uvedimo novu promenljivu $t' = t-\tau$, tada se iz (2.3.9) dobija

$$L[f(t-\tau)] = \int_0^{\infty} e^{-st'} e^{-s\tau} f(t') dt' \quad (2.3.10)$$

odnosno

$$L[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s) \quad (2.3.11)$$

čime je relacija (2.3.7) dokazana.

Laplasova transformacija izvoda funkcija originala

Potražimo kompleksni lik izvoda funkcije $f(t)$, tj.

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \quad (2.3.12)$$

Integracijom relacije (2.3.12) dobija se

$$L[f'(t)] = [e^{-st}f(t)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = -f(0) + sF(s) \quad (2.3.13)$$

Ako je $f(0) = 0$, iz (2.3.13) se dobija

$$L[f'(t)] = sF(s) \quad (2.3.14)$$

Ako se u relaciji (2.3.13) $f(t)$ zameni sa $f'(t)$ dobija se

$$L[f''(t)] = sL[f'(t)] - f'(0) \quad (2.3.15)$$

odakle se, prema (2.3.14) dobija

$$L[f''(t)] = s^2F(s) - sf'(0) - f''(0) \quad (2.3.16)$$

U opštem slučaju se, na sličan način, dobija relacija

$$L[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (2.3.17)$$

U slučaju da su svi početni uslovi jednaki nuli, tj.

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0 \quad (2.3.18)$$

Relacija (2.3.17) svodi se na oblik

$$L[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) \quad (2.3.19)$$

Laplasova transformacija funkcije pod znakom integrala

Neka je funkcija $F(s)$ kompleksni lik funkcije $f(t)$. Označimo sa $\phi(t)$ funkciju

$$\phi(t) = \int_0^t f(t)dt \quad (2.3.20)$$

Iz (2.3.20) sledi

$$\phi'(t) = f(t) \quad \text{i} \quad \phi(0) = 0 \quad (2.3.21)$$

Ako se relacija (2.3.14) primeni na funkciju (2.3.21) dobija se

$$s \cdot L[\phi(t)] = F(s) \quad (2.3.22)$$

odnosno

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s} F(s) \quad (2.3.23)$$

U slučaju da donja granica integrala nije nula, lako se dokazuje, na osnovu osobine (2.3.13), da je

$$L\left[\int_a^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} F(s) - \frac{1}{s} \int_0^a f(t) dt \quad (2.3.24)$$

U slučaju višestruke primene operacije integracije funkcije $f(t)$, na osnovu (2.3.24), dobija se

$$L\left[\int_0^t dt_n \cdot \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1\right] = \frac{F(s)}{s^n} \quad (2.3.25)$$

Teorema proizvoda

Neka su date funkcije $f_1(t)$ i $f_2(t)$, obrazujmo funkciju $f(t)$ na sledeći način

$$f(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \quad (2.3.26)$$

Funkcija $f(t)$ naziva se konvolucija funkcija $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Zamenom $t-\tau = t'$ u (2.3.26) dobija se

$$f(t) = - \int_t^0 f_1(t') f_2(t-t') dt' = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (2.3.27)$$

Iz (2.3.27) i (2.3.26) sledi da konvolucija $f(t)$ ne zavisi od toga koja je funkcija pod znakom integrala sa argumentom $t-\tau$.

Neka su poznati kompleksni likovi $F_1(s)$ i $F_2(s)$ funkcija $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Može se pokazati da kompleksni lik funkcije $f(t)$ definisane sa (2.3.26) ima oblik

$$L[f(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (2.3.28)$$

2.4. Operacije nad Laplasovom transformacijom

Izvod Laplasove transformacije

Diferenciranjem relacije (2.1.4) po s n -puta dobija se

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-st} t^n f(t) dt \quad (2.4.1)$$

gde smo predpostavili da je moguće diferenciranje integrala na desnoj strani relacije (2.1.4) po parametru s .

Posmatranjem relacije (2.4.1) može se zaključiti da je

$$L[(-1)^n t^n f(t)] = \frac{d^n [F(s)]}{ds^n} \quad (2.4.2)$$

Integracija Laplasove transformacije

Predpostavimo da je moguća integracija desne strane relacije (2.1.4) i ako se ista izvrši u granicama od s do ∞ , tada se dobija

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1}{t} f(t) dt \quad (2.4.3)$$

odnosno

$$L\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^{\infty} F(s) ds \quad (2.4.4)$$

Translacija Laplasove transformacije

Ako se u relaciji (2.1.4) zameni s sa $s-a$, gde je a konstanta, dobija se

$$F(s-a) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt \quad (2.4.5)$$

Iz relacije (2.4.5) sledi da je

$$F(s-a) = L[e^{at} f(t)] \quad (2.4.6)$$

2.5. Inverzna Laplasova transformacija

Ako je u relaciji (2.1.4) poznata funkcija $F(s)$, a treba odrediti funkciju $f(t)$, ovo se simbolički označava sa

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] \quad (2.5.1)$$

Operacija nalaženja funkcije originala $f(t)$ na osnovu kompleksnog lika $F(s)$ naziva se inverzna Laplasova transformacija.

Relacija (2.1.4) posmatrana kao jednačina u kojoj je nepoznata funkcija $f(t)$, predstavlja integralnu jednačinu Laplasovog tipa.

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s) \quad (2.5.2)$$

Opšte rešenje jednačine (2.5.2) može se odrediti. Međutim, za primenu Laplasove transformacije u problemima modeliranja ovo rešenje nije interesantno. Za nas je mnogo interesantnije da se ispitaju neke osobine integralne jednačine (2.5.2) i njena rešenja za specijalne slučajeve.

1. Inverzna transformacija zbira funkcija

Neka je desna strana jednačine (2.5.2) zbir poznatih funkcija, tj.

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s) \quad (2.5.3)$$

Predpostavimo da su originali funkcija $F_i(s)$ dati sa $f_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Odavde sledi da je

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} f_1(t) \cdot e^{-st} dt &= F_1(s) \\ \int_0^{\infty} f_2(t) \cdot e^{-st} dt &= F_2(s) \\ \dots\dots\dots \\ \int_0^{\infty} f_n(t) \cdot e^{-st} dt &= F_n(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.4)$$

Sabiranjem levih i desnih strana jednačina (2.5.4) dobija se relacija

$$\int_0^{\infty} [f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)] e^{-st} dt = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s) \quad (2.5.5)$$

Relacija (2.5.5) omogućuje jednostavno dobijanje inverzne Laplasove transformacije originala sume funkcija, određivanjem originala pojedinih sabiraka u zbiru (2.5.3).

2. Heaviside-ova teorema razvoja

Neka funkcija na desnoj strani jednačine (2.5.2) ima oblik

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad (2.5.6)$$

gde su $p(s)$ i $q(s)$ polinomi po s , koji nemaju zajednički činilac, tj.

$$\left. \begin{aligned} p(s) &= a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0 \\ q(s) &= b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5.7)$$

pri čemu je $m < n$.

Ovde ćemo izložiti osnovne slučajeve inverzne Laplasove transformacije racionalne funkcije (2.5.6) ne upuštajući se u dokaze svih stavova, koje čitalac može naći u literaturi [31].

a. Neka polinom $q(s)$ ima proste korene s_i , $i = 1, 2, \dots, n$, tako da se može napisati u obliku

$$q(s) = (s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n) \quad (2.5.8)$$

Racionalna funkcija (2.5.6) može se tada napisati, rastavljanjem na proste razlomke, u obliku

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_n}{s-s_n} \quad (2.5.9)$$

gde je

$$A_i = \frac{p(s_i)}{q'(s_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5.10)$$

Zamenom (2.5.10) u (2.5.9) dobija se

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{p(s_i)}{q'(s_i)} \cdot \frac{1}{s-s_i} \quad (2.5.11)$$

Kako je

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s-s_i} \right] = e^{s_i t} \quad (2.5.12)$$

to na osnovu (2.5.5) sledi da je

$$f(t) = L^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{p(s_i)}{q'(s_i)} \cdot \frac{1}{s-s_i} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{p(s_i)}{q'(s_i)} e^{s_i t} \quad (2.5.13)$$

Prema tome, original kompleksne funkcije $F(s)$ koja predstavlja količnik dva polinoma $p(s)$ i $q(s)$, pri čemu je stepen polinoma $q(s)$ veći od stepena polinoma $p(s)$, a za slučaj da $q(s)$ ima sve proste korene, dat je relacijom

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{p(s)}{q(s)}\right] = \sum_{i=1}^n \frac{p(s_i)}{q'(s_i)} e^{s_i t} \quad (2.5.14)$$

b. Neka je funkcija $F(s)$ data u obliku

$$F(s) = \frac{p(s)}{sr(s)} \quad (2.5.15)$$

pri čemu stepen polinoma $p(s)$ nije veći od stepena polinoma $r(s)$. Rešenje integralne jednačine (2.5.2) može se odrediti iz relacije (2.5.13) smenom

$$q(s) = s \cdot r(s) \quad (2.5.16)$$

gde polinom $r(s)$ nema višestrukih korena i korena jednakih nuli. Ako se vrednost (2.5.16) zameni u relaciju (2.5.13) dobija se

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{p(s_i)}{\frac{d}{ds}[s \cdot r(s)]_{s=s_i}} e^{s_i t} \quad (2.5.17)$$

Imenilac u izrazu (2.5.17) može se napisati u obliku

$$\frac{d}{ds}[s \cdot r(s)]_{s=s_i} = r(s_i) + s_i r'(s_i) \quad (2.5.18)$$

Polinom (2.5.16) ima jedan koren jednak nuli. Neka je taj koren $s_1 = 0$. Tada se relacija (2.5.18) za $s = s_1$ može napisati u obliku

$$\frac{d}{ds}[s \cdot r(s)]_{s=s_1} = r(0) \quad (2.5.19)$$

Prema tome, izraz (2.5.17) svodi se sada na oblik

$$f(t) = \frac{p(0)}{r(0)} + \sum_{i=2}^n \frac{p(s_i)}{s_i r'(s_i)} e^{s_i t} \quad (2.5.20)$$

Ako pretpostavimo da je polinom $r(s)$ stepena n , a ne $n-1$, kao u relaciji (2.5.20), tada se indeks i može menjati od 1 do n , umesto od 2 do n , tj.

$$f(t) = \frac{p(0)}{q(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{p(s_i)}{s_i r'(s_i)} e^{s_i t} \quad (2.5.21)$$

Relacija (2.5.21) naziva se Hevisajdova teorema razvoja i predstavlja rešenje Laplasove integralne jednačine (2.5.2) kada je funkcija $F(s)$ oblika (2.5.15), sa navedenim ograničenjima za polinom $r(s)$.

c. Ako polinom $q(s)$ ima višestruki koreni činilac $(s - a)^k$ reda k , onda se funkcija (2.5.6) može napisati u obliku

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s - a)^k q_1(s)} = \frac{r(s)}{(s - a)^k} \quad (2.5.22)$$

gde je $r(s) = p(s)/q_1(s)$.

Rastavljanjem racionalne funkcije (2.5.22) na proste razlomke dobija se

$$F(s) = \frac{A_k}{(s-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(s-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{s-a} + g(s) \quad (2.5.23)$$

Navešćemo rezultat inverzne Laplasove transformacije funkcije (2.5.23) bez dokaza (literatura [31]).

Inverzna Laplasova transformacija daje original kompleksne funkcije (2.5.23) u obliku

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

odnosno

$$f(t) = e^{at} \left[\frac{r(a)}{(k-1)!} t^{k-1} + \frac{r'(a)}{1!(k-2)!} t^{k-2} + \dots + \frac{r^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} \right] + L^{-1}[g(s)] \quad (2.5.24)$$

d. Prilikom rastavljanja funkcije (2.5.6) na proste razlomke, nismo vodili računa da li su koreni polinoma $q(s)$ realni ili kompleksni. Međutim, kada polinom $q(s)$ ima konjugovano kompleksne korene, onda se rastavljanje funkcije (2.5.6) može uprostiti.

Neka su

$$s_1 = -\alpha + j\beta \quad i \quad s_2 = -\alpha - j\beta \quad (2.5.25)$$

kompleksni koreni polinoma $q(s)$. Tada se funkcija (2.5.6) može napisati u obliku

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{r(s)}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{Ms + N}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} + g(s) \quad (2.5.26)$$

odakle je

$$r(s) = Ms + N + g(s) [(s+\alpha)^2 + \beta^2] \quad (2.5.27)$$

Zamenom vrednosti za s_1 i s_2 iz (2.5.25) u (2.5.27) dobija se

$$\left. \begin{aligned} r(s_1) &= M(-\alpha + j\beta) + N \\ r(s_2) &= M(-\alpha - j\beta) + N \end{aligned} \right\} \quad (2.5.28)$$

Leve strane relacija (2.5.28) su kompleksni brojevi, pa se može pisati

$$\left. \begin{aligned} r(s_1) &= r_1 + j r_2 = M(-\alpha + j\beta) + N \\ r(s_2) &= r_1 - j r_2 = M(-\alpha - j\beta) + N \end{aligned} \right\} \quad (2.5.29)$$

odakle se dobija

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= -M\alpha + N \\ r_2 &= M\beta \end{aligned} \right\} \quad (2.5.30)$$

pa je

$$M = \frac{r_2}{\beta} \quad \text{i} \quad N = \frac{r_1\beta + r_2\alpha}{\beta} \quad (2.5.31)$$

Zamenom (2.5.31) u (2.5.26) dobija se

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{(s+\alpha)r_2 + \beta r_1}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} + g(s) \quad (2.5.32)$$

Kako je prema tabeli 2.2.1

$$\left. \begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{s + \alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \right] &= e^{-\alpha t} \cos \beta t \\ L^{-1} \left[\frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \right] &= e^{-\alpha t} \sin \beta t \end{aligned} \right\} \quad (2.5.33)$$

to, na osnovu (2.5.5) sledi da je

$$f(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{\beta} \cdot \frac{(s+\alpha)r_2 + \beta r_1}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} + g(s) \right]$$

odnosno

$$f(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} (r_2 \cos \beta t + r_1 \sin \beta t) + L^{-1}[g(s)] \quad (2.5.34)$$

e. Neka polinom $q(s)$ ima višestruke kompleksne korene reda k . Tada se funkcija (2.5.6) može napisati u obliku

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{r(s)}{[(s+\alpha)^2 + \beta^2]^k} = \sum_{i=1}^k \frac{M_i s + N_i}{[(s+\alpha)^2 + \beta^2]^i} + g(s) \quad (2.5.35)$$

Vrednosti za M_i i N_i ($i = 1, 2, \dots, k$) mogu se odrediti metodom jednakih koeficijenata. Kada se odrede vrednosti za M_i i N_i , tada ih treba zameniti u relaciju (2.5.35) i naći inverznu Laplasovu transformaciju svakog člana posebno.

f. Označimo realne korene jednačine

$$q(s) = 0$$

sa s_i , ($i = 1, 2, \dots, m$), a kompleksne korene sa $\alpha_i \pm j\beta_i$ ($i = 1, 2, \dots, \frac{n-m}{2}$); i uvedimo oznake

$$A_i = \frac{p(s_i)}{s_i r'(s_i)} \quad (2.5.36)$$

$$\frac{1}{2} B_i e^{\pm j\gamma_i} = \frac{p(\alpha_i \pm j\beta_i)}{(\alpha_i \pm j\beta_i) \cdot r'(\alpha_i \pm j\beta_i)} \quad (2.5.37)$$

Relacija (2.5.21) prema (2.5.36) i (2.5.37) tada dobija oblik

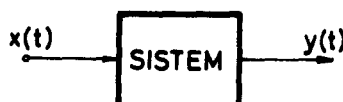
$$f(t) = \frac{p(0)}{q(0)} + \sum_{i=1}^m A_i e^{s_i t} + \sum_{i=1}^{\frac{n-m}{2}} \frac{B_i}{2} e^{\alpha_i t} \left[e^{j(\beta_i t + \gamma_i)} + e^{-j(\beta_i t + \gamma_i)} \right] \quad (2.5.38)$$

Prema tome, pri traženju inverzne Laplasove transformacije neke racionalne funkcije, potrebno je datu funkciju rastaviti na proste razlomke i tražiti inverznu Laplasovu transformaciju svakog razlomka ponaosob.

3. ANALIZA LINEARNIH SISTEMA PUTEM MODELIRANJA

3.1. Prenosna funkcija

U tehničkoj praksi vrlo često se koristi pojam prenosne funkcije. Ovaj pojam se naročito koristi u analizi i sintezi sistema automatskog upravljanja. Na slici 3.1.1 prikazan je šematski tehnički uređaj ili sistem na čiji se ulaz dovodi funkcija $x(t)$. Pod ulaznom funkcijom podrazumeva se neko spoljašnje dejstvo na sistem. Reakciju sistema na spoljašnje dejstvo $x(t)$ označimo sa $y(t)$. Funkcija $y(t)$ naziva se izlazna funkcija ili odziv sistema na funkciju $x(t)$. Odnos kompleksnih likova izlazne funkcije $y(t)$ i ulazne funkcije $x(t)$, pri nultim početnim uslovima,



Sl. 3.1.1. Šematski prikaz sistema

naziva se prenosna funkcija.

Označimo prenosnu funkciju sa $G(s)$, pa je prema gornjoj definiciji

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (3.1.1)$$

Navešćemo neke osobine prenosnih funkcija za stabilne dinamičke sisteme:

- prenosna funkcija je racionalna funkcija oblika (3.1.1), takva da su $Y(s)$ i $X(s)$ polinomi po s , pri čemu stepen polinoma $Y(s)$ nikada nije veći od stepena polinoma $X(s)$,
- svi koeficijenti polinoma $Y(s)$ i $X(s)$ su realni i
- sve nule polinoma $X(s)$ imaju negativne realne delove.

Nule polinoma $X(s)$ nazivaju se polovi prenosne funkcije $G(s)$, a nule polinoma $Y(s)$ nazivaju se nule prenosne funkcije $G(s)$.

Kao što je poznato, opšti oblik matematičkog modela linearnih sistema dat je diferencijalnom jednačinom

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (3.1.2)$$

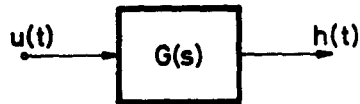
sa odgovarajućim početnim uslovima, gde su a_i i b_i konstante.

Primenom Laplasove transformacije na levu i desnu stranu jednačine (3.1.2), za slučaj kada su svi početni uslovi jednaki nuli, prema (2.3.18), dobija se

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.1.3)$$

Iz (3.1.3) sledi da su polovi prenosne funkcije ustvari nule karakterističnog polinoma diferencijalne jednačine (3.1.2).

Za analizu dinamičkih osobina linearnih sistema, dovoljno je poznavati izlaznu funkciju, tj. odziv sistema na jediničnu funkciju $u(t)$, koja je dovedena na ulaz, a definisana je relacijom (2.2.1). Ponašanje linearnog sistema (sl. 3.1.2) kada mu se na ulaz dovede jedinična funkcija $u(t)$, od stanja mirovanja do novog stabilnog položaja, naziva se jedinična funkcija prelaza ili jedinični odziv i označava se sa $h(t)$.



Sl. 3.1.2. Sistem sa jediničnom funkcijom na ulazu

Poznavanjem funkcije $h(t)$ može se odrediti reagovanje linearnog sistema na ma koju ulaznu funkciju $x(t)$, pomoću obrasca

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} h(t - \tau) d\tau \quad (3.1.4)$$

Prema tome, funkcija $h(t)$ koja nosi sve dinamičke karakteristike linearnog sistema dobija se dovodjenjem jedinične funkcije $u(t)$ na ulaz sistema. Ovo je naročito važno kada se radi o modeliranju i analizi linearnih sistema pomoću analognih modela. Funkciju $u(t)$ jednostavno je ostvariti na računaru a naponski nivo ove funkcije predstavlja jedinični napon na analognom modelu.

Poznavanjem funkcije $h(t)$ lako se uspostavlja veza sa impulsnom funkcijom prelaza ili impulsnim odzivom $w(t)$, koja se dobija kada se na ulaz linearnog sistema dovede impulsna funkcija definisana relacijama (2.2.3) i (2.2.4) pod uslovom (2.2.5). Ova je veza definisana sa

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (3.1.5)$$

Da bismo ovo pokazali primenimo Laplasovu transformaciju na (3.1.5) odakle se dobija

$$L[w(t)] = s \cdot L[h(t)] \quad (3.1.6)$$

Kako prenosna funkcija po definiciji glasi

$$G(s) = \frac{L[h(t)]}{L[u(t)]} = s \cdot L[h(t)] \quad (3.1.7)$$

iz (3.1.6) i (3.1.7) sledi da je

$$G(s) = L[w(t)] \quad (3.1.8)$$

odnosno

$$G(s) = \int_0^{\infty} w(t) \cdot e^{-st} dt \quad (3.1.9)$$

ili zamenom (3.1.5) u (3.1.9)

$$G(s) = \int_0^{\infty} \frac{dh(t)}{dt} e^{-st} dt \quad (3.1.10)$$

Na ovaj način relacije (3.1.5) i (3.1.10) daju vezu izmedju jediničnog odziva $h(t)$, impulsnog odziva $w(t)$ i prenosne funkcije $G(s)$.

U nekim slučajevima za analizu sistema pogodnije je primeniti tzv. analizu u frekventnom domenu. Ovde su karakteristike linearnog sistema prikazane kao zavisnost amplitude izlazne funkcije od učestanosti ulazne funkcije, a ova funkcija se naziva amplitudna frekventna karakteristika. Amplitudna frekventna karakteristika $A(\omega)$ se dobija kada se u prenosnoj funkciji $G(s)$ argument s zameni sa $j\omega$ i izračuna modul ove funkcije, tj.

$$A(\omega) = |G(j\omega)| \quad (3.1.11)$$

Eksperimentalno se ova funkcija može dobiti ako se na ulaz sistema dovodi sinusna funkcija poznate amplitude i učestanosti i meri amplituda izlazne funkcije. Odnos amplitude izlazne i ulazne funkcije za razne učestanosti ulazne funkcije definiše amplitudnu frekventnu karakteristiku.

Druga karakteristika linearnih sistema pri analizi u frekventnom domenu je fazna karakteristika.

Ako se u prenosnoj funkciji $G(s)$ argument s zameni sa $j\omega$, dobija se

$$g(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad (3.1.12)$$

Funkcija $A(\omega)$ je definisana sa (3.1.11) a funkcija $\phi(\omega)$ je fazna karakteristika. I fazna karakteristika se može dobiti eksperimentalno. Ovo se postiže ako se na ulaz sistema dovede periodična (sinusna) funkcija i meri zaostajanje izlazne periodične funkcije u odnosu na ulaznu u funkciji učestanosti ulazne funkcije.

3.2. Strukturne blok šeme složenih modela

Kod realnih sistema automatskog upravljanja vrlo često je teško i nepraktično sastavljati matematički model sistema u obliku jednog izraza koji predstavlja prenosnu funkciju sistema. Primena prenosnih funkcija u modeliranju složenih sistema ima baš tu prednost da se složeni sistemi razbijaju na blokove, a zatim se vrši modeliranje prenosnih funkcija pojedinih blokova. Model celog sistema dobija se sada povezivanjem modela pojedinih blokova na način kako su oni medju sobom povezani kod realnog sistema, koji je predmet modeliranja. Prednost modeliranja putem prenosnih funkcija u odnosu na matematički model definisan skupom diferencijalnih jednačina, takodje je znatna kada se radi o modeliranju složenih sistema. U matematičkim modelima datim u obliku diferencijalnih jednačina, često se gubi fizički smisao pojedinih parametara, dok je pri modeliranju putem prenosnih funkcija svaki parametar sistema zadržan i na modelu u odgovarajućem bloku sistema.

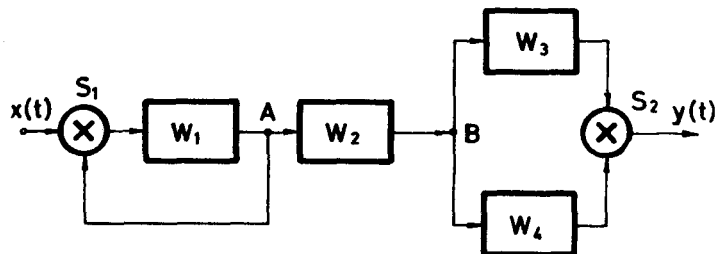
Prikazivanje složenih sistema razdvajanjem na blokove, koji predstavljaju fizičke celine i njihovo povezivanje u jedinstven si-

stem vrši se preko strukturnih šema.

Strukturne šeme sastoje se od četiri grupe osnovnih elemenata i to:

- blokova sa definisanim prenosnim funkcijama,
- elemenata za sabiranje ili oduzimanje signala,
- čvorova u kojima se vrši grananje signala, radi dovođenja na više blokova sistema i
- veza izmedju pojedinih elemenata strukturne šeme sa naznakom pravca prenošenja signala izmedju blokova.

Na slici 3.2.1 dat je primer strukturne blok šeme sa oznakama pojedinih elemenata. Sa W_1 , W_2 , W_3 i W_4 označeni su blokovi sa odgovarajućim prenosnim funkcijama, sa S_1 i S_2 označeni su elementi za sabiranje, a sa A i B označeni su čvorovi. Ulazni signal je označen sa $x(t)$, a izlazni sa $y(t)$.



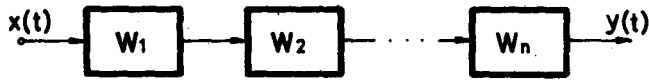
Sl. 3.2.1. Strukturna blok šema

Različite strukturne šeme sa istim odzivom na isti ulazni signal zvaćemo medjusobno ekvivalentnim. Činjenica da različite strukturne šeme mogu u osnovi prikazivati isti sistem, koristi se često kod modeliranja u cilju transformacije istih na pogodan oblik sa gledišta samog modeliranja.

Ovde su date četiri osnovne transformacije strukturnih šema:

a. Strukturna blok šema sastavljena od više blokova vezanih na red (sl. 3.2.2) koji imaju prenosne funkcije W_1, W_2, \dots, W_n transformiše se u blok sa prenosom

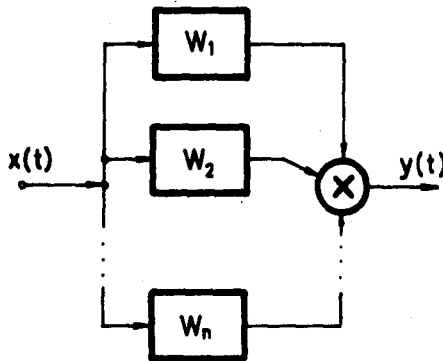
$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s) \quad (3.2.1)$$



Sl. 3.2.2. Strukturna blok šema na red vezanih blokova

b. Strukturna blok šema sastavljena od više paralelno vezanih blokova (sl. 3.2.3) sa prenosnim funkcijama W_1, W_2, \dots, W_n transformiše se u blok sa prenosnom funkcijom

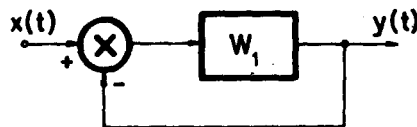
$$W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s) \quad (3.2.2)$$



Sl. 3.2.3. Strukturna blok šema paralelno vezanih blokova

c. Strukturna blok šema sastavljena od bloka obuhvaćenog sa negativnom povratnom spregom (sl. 3.2.4) ima prenosnu funkciju oblika

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)} \quad (3.2.3)$$

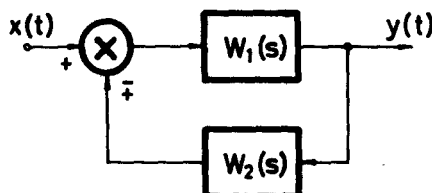


Sl. 3.2.4. Strukturna blok šema sa povratnom spregom

d. Strukturna blok šema sastavljena od bloka $W_1(s)$ obuhvaćenog povratnom spregom preko bloka $W_2(s)$, (sl. 3.2.5) ima pre-

nosnu funkciju

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 \pm W_1(s)W_2(s)} \quad (3.2.4)$$



Sl. 3.2.5. Strukturna blok šema sa blokom u povratnoj sprezi

gde je znak + u slučaju negativne povratne sprege, a znak - u slučaju pozitivne povratne sprege.

U slučaju složenijih strukturnih šema može se primenom navedena četiri slučaja izračunati prenosna funkcija sistema u celini.

4. MODELIRANJE PRENOSNIH FUNKCIJA NA ANALOGNOM RAČUNARU

Matematički modeli fizičkih objekata koje treba modelirati na analognom računaru najčešće su dati u obliku sistema diferencijalnih jednačina ili jedne diferencijalne jednačine višeg reda. Prenosna funkcija, međjutim, definisana je sa

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

i ona sadrži argument s , koji je ustvari kompleksna promenljiva. U matematičkim modelima izraženim preko diferencijalnih jednačina primenjuje se na funkcije operator diferenciranja. U tehničkim problemima najčešće se radi o diferenciranju po vremenu, pa je operator diferenciranja

$$p = \frac{d}{dt}$$

Inverzni operator $1/p$ predstavlja operator integriranja.

Neka je data diferencijalna jednačina koju treba modelirati na analognom računaru u obliku

$$\begin{aligned}
 a_4 \frac{d^4 y}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y &= \\
 &= b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x
 \end{aligned}$$

gde je $x(t)$ poznata funkcija, a $y(t)$ funkcija koja se traži. Primenom Laplasove transformacije na gornju diferencijalnu jednačinu, za nulte početne uslove, dobija se da je

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Medjutim, uvodjenjem operatora p , ista diferencijalna jednačina dobija oblik

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

Prema tome, ako su svi početni uslovi jednaki nuli, prenosna funkcija koja se dobija zamenom prvog izvoda sa p , drugog izvoda sa p^2 itd. je ista kao i prenosna funkcija koja se dobija primenom Laplasove transformacije. Na ovaj način je modeliranje prenosnih funkcija izraženih pomoću operatora p svedeno na realizaciju operatora u vremenskom domenu, što odgovara principu rada analognih računara.

4.1. Računski pojačavač sa pasivnim mrežama

Prenosna funkcija računskog pojačavača definisana je sa

$$y(t) = - \sum_{i=1}^n \frac{z_i(p)}{z_i(p)} x_i(t) \quad (4.1.1)$$

gde je $z(p)$ impedansa u povratnoj sprezi računskog pojačavača, a $z_i(p)$ impedansa i -tog ulaza u pojačavač (vidi Prvi deo I, 3.3). Za jedan ulaz u pojačavač, relacija (4.1.1) daje

$$\frac{y(t)}{x_1(t)} = - \frac{z(p)}{z_1(p)} \quad (4.1.2)$$

Impedanse $z(p)$ i $z_i(p)$ mogu biti različite kombinacije R-C

elemenata. U tabeli 3.3.1 (Prvi deo I, 3.3) data su neka pasivna R - C kola koja se mogu koristiti kao $z(p)$ ili $z_i(p)$ impedanse. Pogodnim izborom pasivnih mreža u kolu povratne sprege i ulaznom kolu računskog pojačavača mogu se modelirati različite prenosne funkcije. Ovaj način modeliranja ima tu prednost što se i složene prenosne funkcije modeliraju pomoću jednog računskog pojačavača. Kako je broj pojačavača na računaru ograničen to je vrlo često potrebno izvršiti modeliranje složenih prenosnih funkcija sa što manjim brojem računskih pojačavača. Ovaj način modeliranja se ipak ne primenjuje na standardnim univerzalnim analognim računarima, jer korisniku računara najčešće nije dostupno da menja pasivna kola na ulazu, a pogotovu u povratnoj sprezi računskih pojačavača.

Nedostatak modeliranja prenosnih funkcija, izborom pasivnih mreža na ulazu i u povratnoj sprezi pojačavača, je u tome što su potrebne određene, različite, vrednosti otpornika i kondenzatora, pri svakoj promeni prenosne funkcije, a što nije lako obezbediti za većinu korisnika analognih računara. Stoga su u ovoj knjizi prvenstveno obradjene one metode modeliranja koje koriste standardne elemente univerzalnih analognih računara.

4.2. Metoda uzastopne integracije

Neka diferencijalna jednačina

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x \quad (4.2.1)$$

sa konstantnim koeficijentima a_i , ($i = 0, 1, \dots, n$) i b_k , ($k = 0, 1, \dots, m$), predstavlja matematički model nekog fizičkog objekta. Isti matematički model izražen preko prenosne funkcije ima oblik

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \quad (4.2.2)$$

Predpostavimo, u daljem tekstu, da stepen polinoma u imeniocu racionalne funkcije (4.2.2) nije manji od stepena polinoma u brojiocu, tj. da je $m < n$.

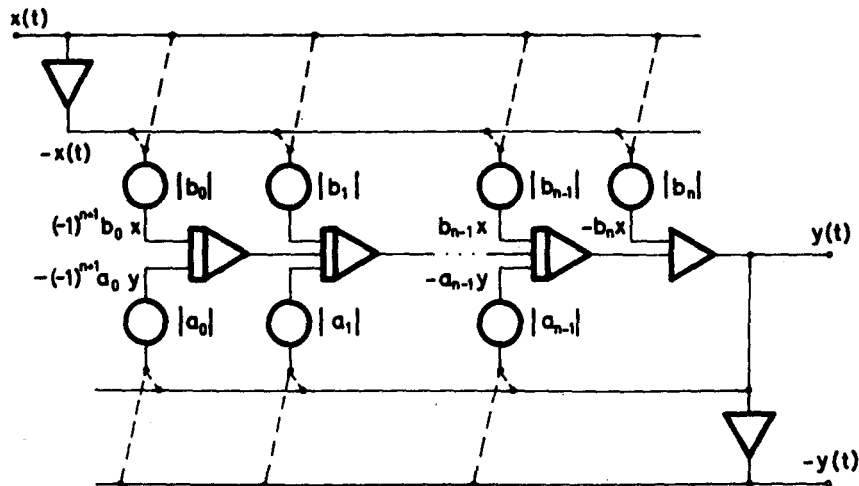
Diferencijalna jednačina (4.2.1) može se napisati u obliku

$$y(t) = b_n x + \frac{1}{p}(b_{n-1}x - a_{n-1}y) + \frac{1}{p^2}(b_{n-2}x - a_{n-2}y) + \dots + \frac{1}{p^n}(b_0x - a_0y) \quad (4.2.3)$$

gde je $b_i = 0$ za $i > m$. Jednačina (4.2.3) može se napisati u obliku pogodnom za modeliranje u vidu niza integracija, tako da je

$$y(t) = b_n x + \frac{1}{p}(b_{n-1}x - a_{n-1}y + \frac{1}{p}[b_{n-2}x - a_{n-2}y + \dots \dots + \frac{1}{p}(b_0x - a_0y)]) \quad (4.2.4)$$

Na slici 4.2.1 data je blok šema koja omogućuje modeliranje prenosne funkcije (4.2.2) primenom relacije (4.2.4).



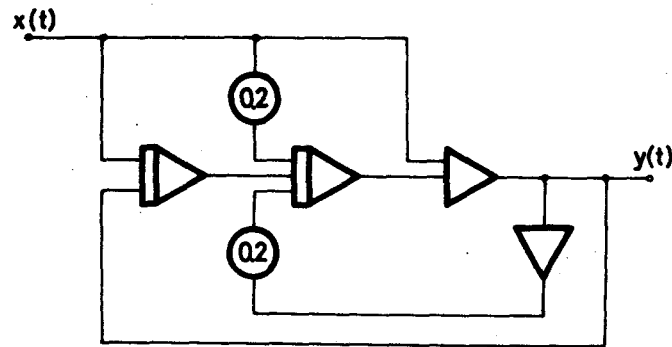
Sl. 4.2.1. Blok šema za modeliranje racionalne funkcije metodom uzastopne integracije

Primer: Predpostavimo da je ovom metodom potrebno modelirati prenosnu funkciju

$$W(p) = - \frac{p^2 - 0,2p + 1}{p^2 + 0,2p + 1} \quad (4.2.5)$$

Koristeći opštu šemu na slici 4.2.1, lako se dolazi do šeme na

slici 4.2.2 za modeliranje prenosne funkcije (4.2.5).



Sl. 4.2.2. Primer modeliranja racionalne prenosne funkcije metodom uzastopne integracije

4.3. Metoda uvođenja nove promenljive

Modeliranje prenosne funkcije (4.2.2) može se izvršiti i na drugi način. Ako se uvede nova promenljiva $z(t)$, takva da je

$$z = \frac{1}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} x \quad (4.3.1)$$

odnosno $z(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^n z}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dz}{dt} + a_0 z = x(t) \quad (4.3.2)$$

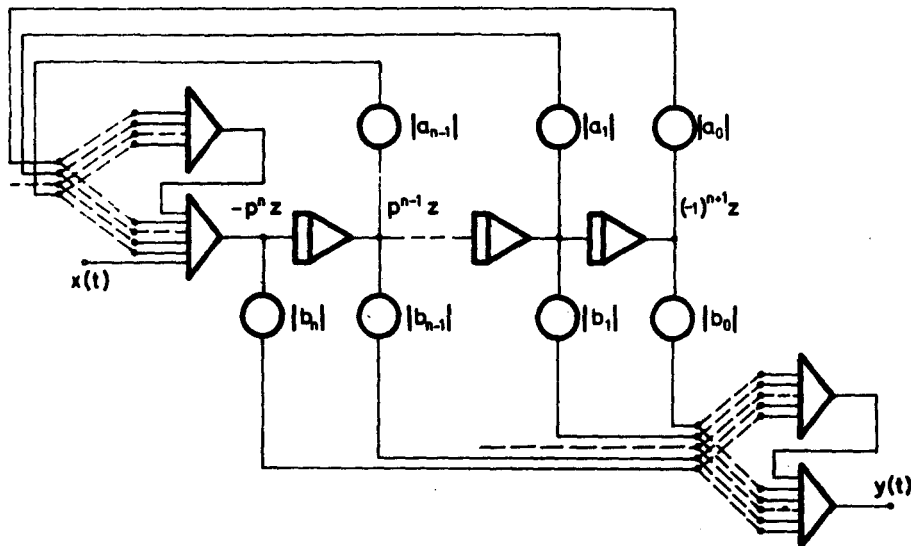
Imajući u vidu relaciju (4.2.2) i (4.3.1) lako se dolazi do veze između izlazne funkcije $y(t)$ i nove promenljive $z(t)$

$$y(t) = b_m \frac{d^m z}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} z}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dz}{dt} + b_0 z \quad (4.3.3)$$

Modeliranje prenosne funkcije ovom metodom vrši se na taj način što se modelira diferencijalna jednačina (4.3.2) radi dobijanja funkcije $z(t)$ i njenih izvoda, a zatim se obrazuje funkcija $y(t)$ prema relaciji (4.3.3). Na slici 4.3.1 data je opšta blok šema za modeliranje prenosne funkcije (4.2.2) po ovoj metodi.

Primer: Radi ilustracije modeliranja prenosnih funkcija metodom

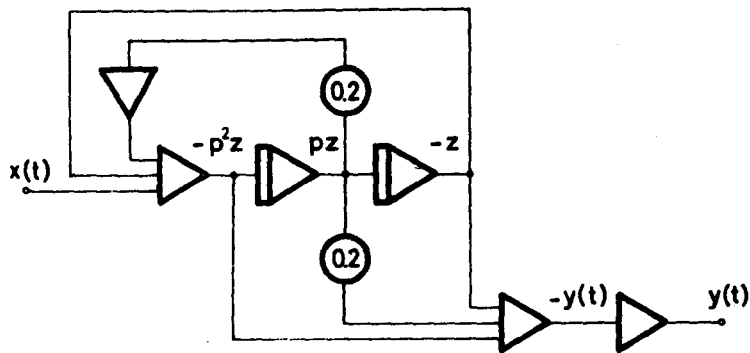
uvodjenja nove promenljive uzmimo ponovo funkciju (4.2.5), tj.



Sl. 4.3.1. Blok šema za modeliranje racionalne prenosne funkcije metodom uvodjenja nove promenljive

$$W(p) = - \frac{p^2 - 0,2p + 1}{p^2 + 0,2p + 1} \quad (4.3.4)$$

Koristeći opštu šemu datu na slici 4.3.1 lako se dolazi do šeme za modeliranje prenosne funkcije (4.3.4), koja je prikazana na slici 4.3.2.



Sl. 4.3.2. Primer modeliranja racionalne prenosne funkcije metodom uvodjenja nove promenljive

Poredjenjem metode uzastopne integracije i metode uvođenja nove promenljive, po broju angažovanih računskih pojačavača za modeliranje prenosne funkcije (4.2.2), može se zaključiti da obe metode zahtevaju n integratora, a da prva metoda zahteva 3 sabirača, dok druga zahteva 4.

Obe izložene metode modeliranja prenosnih funkcija oblika (4.2.2) predpostavljaju da su početni uslovi za funkciju i njene izvode jednaki nuli. Uvođenje početnih uslova biće objašnjeno na sledećoj metodi modeliranja prenosnih funkcija.

4.4. Metoda Laplasove transformacije

Već je rečeno da je prenosna funkcija izražena pomoću Laplasove transformacije, za nulte početne uslove, identična sa prenosnom funkcijom datom preko operatora p . Prema tome je i metoda modeliranja primenom Laplasove transformacije identična sa već opisanim metodama uzastopne integracije ili uvođenja nove promenljive, za slučaj nultih početnih uslova. Međutim, ako su početni uslovi različiti od nule, tada primena Laplasove transformacije na diferencijalnu jednačinu (4.2.1) ne daje samo član (4.2.2) već i član koji zavisi od početnih uslova. Kako je, za opšti oblik jednačine (4.2.1), član koji sadrži početne uslove veoma glomazan, razmatranje ćemo sprovesti za diferencijalnu jednačinu oblika

$$\frac{d^3y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_2 \frac{d^2x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (4.4.1)$$

gde su a_i i b_i konstante, a početni uslovi

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ \dot{y}(0) &= \dot{y}_0 \\ \ddot{y}(0) &= \ddot{y}_0 \\ x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4.2)$$

Primenom Laplasove transformacije na jednačinu (4.4.1) sa početnim uslovima (4.4.2), a prema (2.3.16) dobija se da je

$$Y(s) = K_1(s) + K_2(s) \quad (4.4.3)$$

gde je

$$K_1(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} X(s) \quad (4.4.4)$$

i

$$K_2(s) = \frac{y_0 s^2 + (a_2 y_0 + \dot{y}_0 - b_2 x_0) s + a_1 y_0 + a_2 \dot{y}_0 + \ddot{y}_0 - b_1 x_0 - b_2 \dot{x}_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.4.5)$$

Pošto je sistem linearan, problem modeliranja funkcije (4.4.3) može se razdvojiti u dva dela; prvi deo se sastoji u modeliranju prvog člana $K_1(s)$, a drugi u modeliranju drugog člana $K_2(s)$. Neka su originalni funkcija $K_1(s)$ i $K_2(s)$ funkcije $k_1(t)$ i $k_2(t)$. Tada je

$$y(t) = k_1(t) + k_2(t) \quad (4.4.6)$$

Za modeliranje racionalne funkcije (4.4.4) može se primeniti metoda sukcesivne integracije ili metoda uvođenja nove promenljive. Ulazna funkcija u ovakav model bila bi funkcija $x(t)$, a na izlazu se tada dobija funkcija $k_1(t)$. Za modeliranje prenosne funkcije (4.4.5), oblika

$$K_2(s) = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.4.7)$$

gde je

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= a_1 y_0 + a_2 \dot{y}_0 + \ddot{y}_0 - b_1 x_0 - b_2 \dot{x}_0 \\ c_1 &= a_2 y_0 + \dot{y}_0 - b_2 x_0 \\ c_2 &= y_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4.8)$$

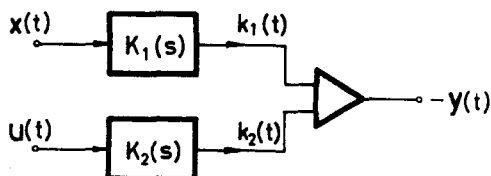
može se takodje primeniti jedna od ranije izloženih metoda. Međutim, ulazna funkcija bi u ovom slučaju bila impulsna (Dirakova funkcija), jer je njen kompleksni lik, prema (2.2.7), jednak jedinici, pa se može smatrati da ona množi član na desnoj strani izraza (4.4.7). Dobijanje impulsne funkcije, prema njenoj definiciji (2.2.5), vrlo teško je izvodljivo na analognom računaru. Međutim jedinična funkcija $u(t)$ može se na računaru lako dobiti. Stoga je pogodnije modifikovati izraz (4.4.7) u oblik

$$K_2(s) = \frac{c_2 s^3 + c_1 s^2 + c_0 s}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \cdot \frac{1}{s} \quad (4.4.9)$$

Pošto je, prema (2.2.2), $1/s$ kompleksni lik jedinične funkcije $u(t)$, to je iz (4.4.9)

$$K_2(s) = \frac{c_2 s^3 + c_1 s^2 + c_0 s}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \cdot U(s) \quad (4.4.10)$$

Prema tome, ulazna funkcija u blok koji modelira funkciju (4.4.10), biće funkcija $u(t)$. Na izlazu iz ovog bloka dobija se $k_2(t)$. Prostim sabiranjem funkcija $k_1(t)$ i $k_2(t)$ dobija se sada tražena funkcija $y(t)$, (sl.4.4.1).



Sl. 4.4.1. Blok šema za modeliranje prenosne funkcije sa početnim uslovima

5. MODELIRANJE NELINEARNOSTI

U ovom su odeljku opisane neke specijalne vrste nelinearnosti koje se javljaju u fizičkim sistemima, a koje ne zahtevaju ni množenje niti generiranje funkcija, da bi se realizovale na analognom računaru. To su tzv. tipične nelinearnosti.

Ima mnogo tipova nelinearnosti koje se pojavljuju u raznim fizičkim sistemima. Međutim, prilično je ograničen broj ovih nelinearnosti koje se češće pojavljuju. To su relativno jednostavne nelinearnosti koje se mogu svrstati u sledeće grupe: prosta ograničenja, suvo Kulonovo trenje, mrtav hod (zazor, naprimmer kod zupčanika), histerezisna karakteristika, relejna karakteristika, itd. Sve ove nelinearnosti mogu se dovoljno dobro realizovati pomoću standardnih logičkih računskih elemenata, o kojima je već bilo govora (Prvi deo I, 6), a koje sačinjavaju diode i komparatori. U narednom izlaganju su neki

primeri upotrebe ovih logičkih elemenata za generiranje tipičnih nelinearnosti.

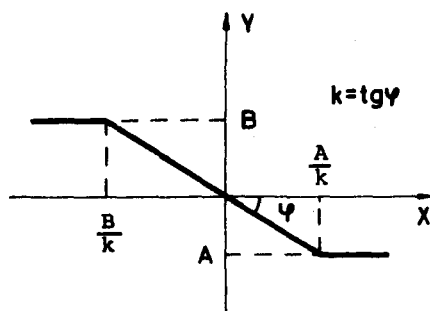
5.1. Prosto ograničenje

Vrlo često se kod fizičkih sistema javlja linearna veza između pojedinih veličina u određenoj oblasti. Međutim, ova linearna veza važi samo u određenoj oblasti, a van date oblasti uspostavlja neki drugi oblik linearne veze. U celini gledano sistem sa ovakvim vezama je nelinearan. Najprostiji oblik ovakve nelinearnosti je t.z. ograničenje.

Matematička relacija koja definiše ograničenje može se napisati u obliku

$$Y = \begin{cases} B & \text{za } X < \frac{B}{k} \\ kX & \text{za } \frac{B}{k} \leq X \leq \frac{A}{k} \\ A & \text{za } X > \frac{A}{k} \end{cases} \quad (5.1.1)$$

gde su A , B i k konstante, X ulazna veličina, a Y izlazna veličina nelinearnog elementa. Ova relacija je grafički prikazana na slici 5.1.1, gde je uzeto da je $A < 0$, $B > 0$ i $k < 0$.

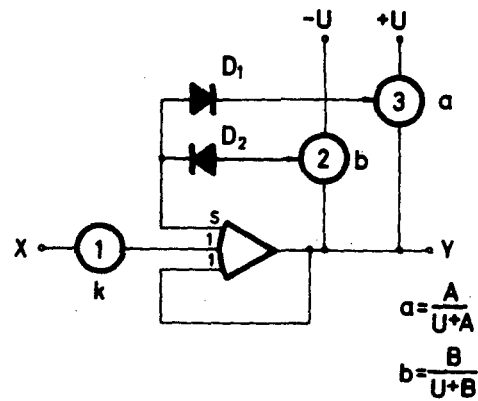


Sl. 5.1.1. Nelinearnost tipa ograničenja

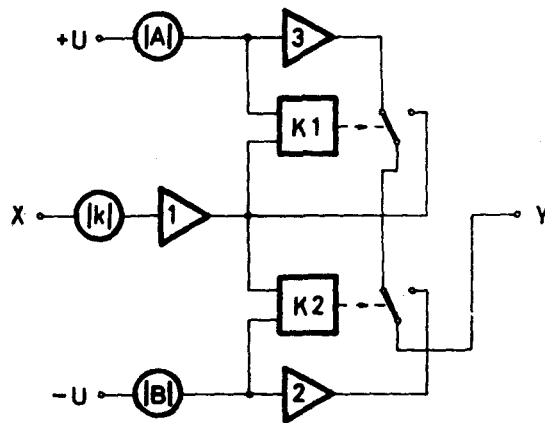
Relacija (5.1.1) može se na analognom računaru realizovati pomoću šeme prikazane na slici 5.1.2, pri čemu su upotrebljene diode, pojačavači i potencijometri, ili pomoću šeme na slici 5.1.3, gde se koriste sabirači i komparatori.

Kada je izlazni napon iz pojačavača u granicama $A \leq Y \leq B$, tada diode D_1 i D_2 ne provode, te pojačavač radi kao da

ovih dioda i potencijometara (2) i (3) (sl. 5.1.2) nema.



Sl. 5.1.2. Šema modeliranja ograničenja pomoću dioda



Sl. 5.1.3. Šema za modeliranje ograničenja pomoću komparatora

Medjutim kada postane $Y = B$ tada dioda D_2 ima takav polaritet da predstavlja kratku vezu, držeći na taj način konstantnu vrednost B na izlazu, jer se ukupni otpor povratne sprege pojačavača smanjio. Isti se efekat javlja i kada napon na izlazu postane $Y = A$, s tim što sada počinje da provodi dioda D_1 .

Prilikom podešavanja vrednosti A i B koje treba da daju granične vrednosti, treba voditi računa i o otporu dioda. Stoga se na potencijometrima (2) i (3) postavljaju približne vrednosti

$$a = \frac{A}{U + A} \quad \text{i} \quad b = \frac{B}{U + B} \quad (5.1.2)$$

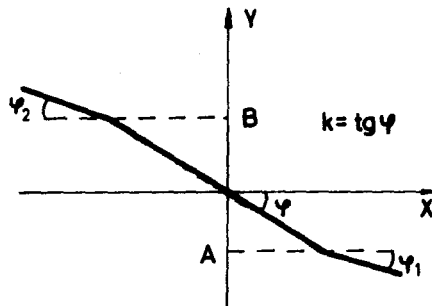
koje se zatim merenjem na izlazu koriguju na tačne vrednosti. Ovde je potrebno napomenuti da otpor diode utiče i na to da izlazni napon nije konstantan tj. A ili B, već se nešto malo menja kada X raste ili opada van opsega $B/k \leq X \leq Y/k$.

Ako je potrebno da napon $Y = A$ ili $Y = B$ bude konstantan za $X < B/k$ i $X > A/k$ respektivno, onda se koristi blok šema prikazana na slici 5.1.3. Ovde se koriste relejni komparatori koji prebacuju kontakte relea na tačno podešen konstantni napon A ili B kada napon na izlazu pojačavača dostigne odgovarajuću vrednost.

Ako je potrebno generirati funkciju

$$Y = \begin{cases} kk_2 X + B(1 - k_2) & \text{za } X < B/k \\ kX & \text{za } B/k \leq X \leq A/k \\ kk_1 X + A(1 - k_1) & \text{za } X > A/k \end{cases} \quad (5.1.3)$$

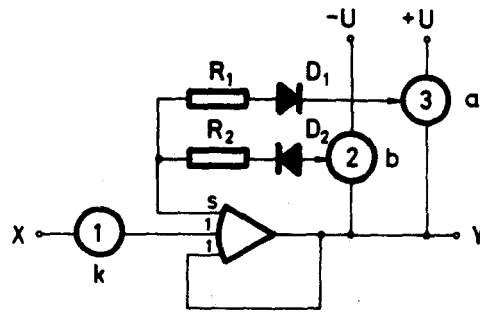
kod koje van intervala $B/k \leq X \leq A/k$ vrednosti za Y nisu konstantne (sl. 5.1.4), već se linearno menjaju, može se koristiti šema na slici 5.1.5, gde je uzeto da je $A < 0$, $B > 0$ i $k < 0$. Vrednosti otpornika R_1 i R_2 biraju se prema želje-



Sl. 5.1.4. Grafički prikaz funkcije (5.1.3)

nom nagibu karakteristike, a prema relacijama

$$R_1 = \frac{k_1}{1 - k_1} \quad \text{i} \quad R_2 = \frac{k_2}{1 - k_2} \quad (5.1.4)$$



Sl. 5.1.5. Šema za realizaciju funkcije (5.1.3)

Vrednosti a i b koje se postavljaju na potencijometre (2) i (3) takodje su date relacijama (5.1.2). Ukoliko se želi veća tačnost podešavanja potrebno je uzeti u obzir i otpore potencijometara.

Ovde treba napomenuti da potencijometri (2) i (3) na slici 5.1.2, kao i na slici 5.1.5, treba da imaju oba kraja izvedena da bi se mogli koristiti kao što pokazuju šeme. Većina savremenih računara raspolaže sa ovakvim potencijometrima, čija su oba kraja izvedena na programskoj ploči.

5.2. Suvo trenje

Često je potrebno prilikom modeliranja nekog fizičkog sistema na analognom računaru uzeti u obzir i tzv. suvo ili Kulonovo trenje, koje se suprotstavlja kretanju sistema. Sistem ostaje u miru sve dok sila ubrzanja ne predje vrednost sile trenja, a posle čega sila trenja ostaje konstantna. Prema tome, sila Kulonovog trenja može se definisati izrazom

$$Y_c = -C \cdot \text{sign } \dot{X} \quad (5.2.1)$$

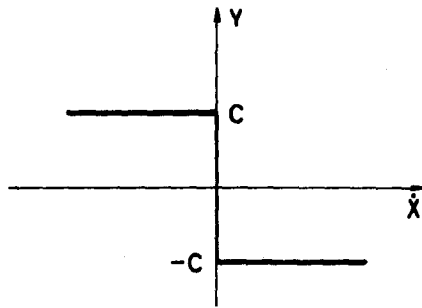
ili

$$Y_c = \begin{cases} C & \text{za } \dot{X} < 0 \\ -C & \text{za } \dot{X} > 0 \end{cases} \quad (5.2.2)$$

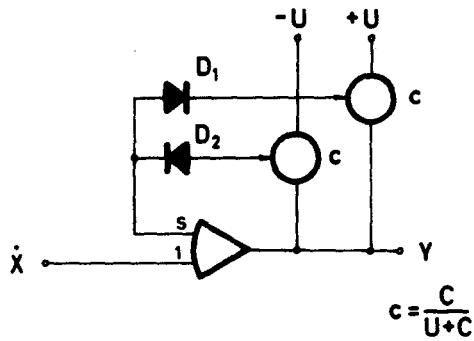
Grafički prikaz funkcije (5.2.1) dat je na slici 5.2.1.

Funkcija definisana relacijom 5.2.1, odnosno 5.2.2, može se realizovati na analognom računaru pomoću šeme na slici 5.2.2, ili

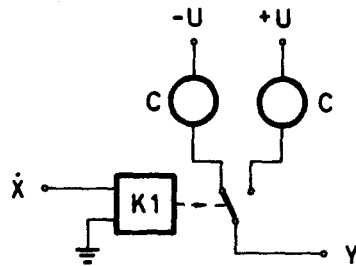
pomoću šeme na slici 5.2.3. U oba slučaja napon na izlazu Y



Sl. 5.2.1. Nelinearnost tipa suvog trenja



Sl. 5.2.2. Šema za modeliranje suvog trenja pomoću dioda



Sl. 5.2.3. Šema za modeliranje suvog trenja pomoću komparatora

je konstantan za $\dot{x} \neq 0$, s tim što u zavisnosti od znaka funk-

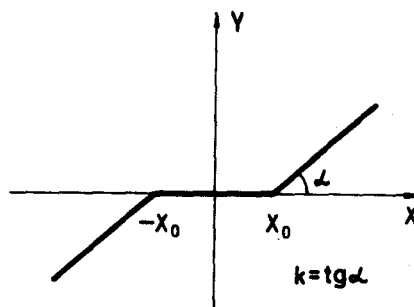
cije \dot{X} zavisi i znak izlazne veličine Y . Kada je $\dot{X} = 0$, onda treba da je $Y = 0$, ali izlazni napon je nedefinisan i kreće se između $+C$ i $-C$, što zavisi od podešenosti pojačavača. Kod komparatora (sl. 5.2.3) postoji nedefinisanost u okolini nule, jer je potrebno oko 10 mV da se rele komparatora prebaci, što međutim, za praksu nema značaja, jer se ulazni napon \dot{X} menja u širim granicama, a kroz zonu neosetljivosti komparatora funkcija \dot{X} najčešće prolazi prilično brzo. Stoga se može smatrati da ova neosetljivost i ne postoji i da se prebacivanje iz $+C$ u $-C$ praktično vrši u tački $\dot{X} = 0$.

5.3. Mrtva zona i zazor u zupčanicima

Mrtva zona je matematički definisana relacijom

$$Y = \begin{cases} k(X + X_0) & \text{za } X \leq -X_0 \\ 0 & \text{za } -X_0 < X < +X_0 \\ k(X - X_0) & \text{za } X \geq X_0 \end{cases} \quad (5.3.1)$$

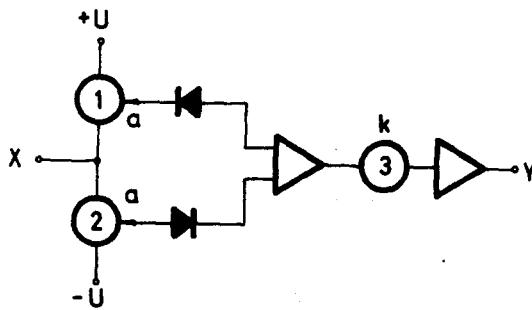
Funkcija (5.3.1) grafički je prikazana na slici 5.3.1. Relacija



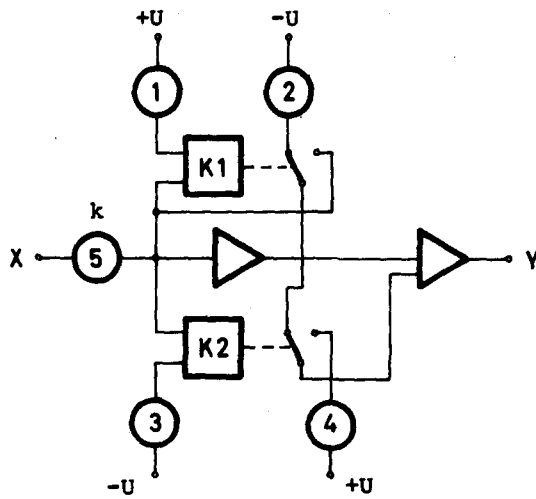
Sl. 5.3.1. Grafički prikaz mrtve zone

(5.3.1) može se na analognom računaru realizovati pomoću dioda, potencimetara i pojačavača, ako se koristi blok šema data na slici 5.3.2, ili pomoću komparatora, pojačavača i potencimetara, ako se koristi blok šema data na slici 5.3.3. U prvom slučaju potencimetre (1) i (2) treba podesiti na vrednost

$$a = \frac{|X_0|}{U + |X_0|} \quad (5.3.2)$$



Sl. 5.3.2. Šema za modeliranje mrtve zone pomoću dioda

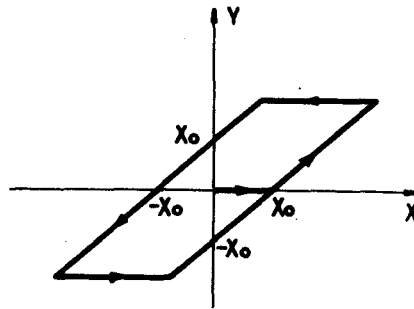


Sl. 5.3.3. Šema za modeliranje mrtve zone pomoću komparatora

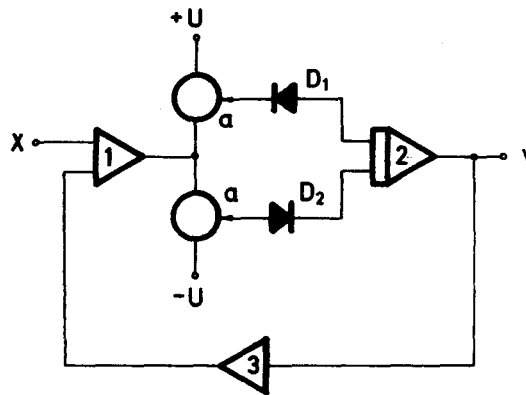
pri čemu treba izvršiti korekciju zbog otpora dioda, dok se u drugom slučaju svi potencijometri podešavaju na vrednost X_0 . Regulisanje nagiba pravih vrši se pomoću potencijometra (3) na slici 5.3.2, ili pomoću potencijometra (5) na slici 5.3.3.

Pomoću kola koje generira mrtvu zonu može se generirati funkcija histerezisne petlje, čiji je grafički prikaz dat na slici 5.3.4. Blok šema na slici 5.3.5 prikazuje šemu povezivanja računskih elemenata pomoću kojih se na analognom računaru može

realizovati histerezisna karakteristika, koja ujedno predstavlja i karakteristiku zazora u zupčanicima.



Sl. 5.3.4. Grafički prikaz histerezisne karakteristike



Sl. 5.3.5. Šema za modeliranje histerezisne karakteristike

Ovde treba napomenuti da navedena šema ima ograničen frekventni opseg, što znači da je pogodna za sporo promenljive funkcije. Međutim, ako se radi o brzim promenama, javljaju se velike greške. Naime, dok napon X raste do neke vrednosti X_0 , koja određuje mrtvu zonu i koja je data izrazom (5.3.2), izlazni napon Y se ne menja i ostaje nula dok ne bude $X - Y = X_0$. Kada postane $X - Y > X_0$, onda se izlazni napon integratora menja brzinom

$$\frac{X - Y - X_0}{(R_d + aR) \cdot C} \left[\frac{V}{s} \right]$$

gde je R_d otpor diode D_1 ili D_2 , R otpor potencijometra, a C kapacitet kondenzatora u povratnoj sprezi integratora. Prema tome, kolo se ponaša kao da postoji kašnjenje prvog reda, čija vremenska konstanta iznosi $(R_d + aR)C$. Kako su otpori R_d i R mali, treba izabrati i mali kapacitet kondenzatora C , tako da ova vremenska konstanta bude što manja. Na taj način neće doći do kašnjenja kada se napon X menja relativno brzo.

Kada napon X počne da opada oko zone neosetljivosti tada na izlazu neće biti promene napona sve dok ne bude $X - Y < -X_0$. Kada se ovo ostvari dioda D_2 počinje da provodi i održava relaciju $X - Y = -X_0$. Tako se dobija karakteristika prikazana na slici 5.3.4.

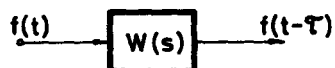
Upotrebom diodnih i relejnih kola sličnih opisanim, mogu se simulirati i razni drugi fizički fenomeni čije su karakteristike sastavljene od pravolinijskih segmenata. Postavljanje i podešavanje ovakvih kola vrši se na sličan način, te ih ovde nećemo dalje opisivati.

5.4. Kašnjenje

Kod modeliranja raznih fizičkih sistema ili procesa često se pojavljuje potreba za realizacijom kašnjenja na analognom računaru. Postoji više različitih metoda za realizaciju kašnjenja. Ovde su obradjene samo one metode, koje omogućuju realizaciju kašnjenja sa standardnim računskim elementima analognog računara.

Pod kašnjenjem funkcije $f(t)$ podrazumeva se dobijanje funkcije $f(t - \tau)$, kada je data funkcija $f(t)$, gde je t nezavisno promenljiva, a τ veličina kašnjenja. Da bismo realizovali kašnjenje, potražimo najpre prenosnu funkciju sistema koji ima ovu osobinu. Na ulaz takvog sistema (sl. 5.4.1) dovodi se funkcija $f(t)$, a na izlazu se dobija funkcija $f(t - \tau)$.

Prenosna funkcija za sistem na slici 5.4.1 lako se dobija, imajući u vidu osobinu (2.3.7), tako da je



Sl. 5.4.1. Blok sa kašnjenjem

$$W(s) = \frac{F(s) \cdot e^{-s\tau}}{F(s)} = e^{-s\tau} \quad (5.4.1)$$

Za idealnu prenosnu funkciju kašnjenja (5.4.1) amplitudna karakteristika je konstantna za sve učestanosti ω , jer je

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos\omega\tau - j \sin\omega\tau \quad (5.4.2)$$

pa je amplitudna karakteristika data sa

$$|W(j\omega)| = 1 \quad (5.4.3)$$

Fazna karakteristika prema (5.4.2) je tada

$$\phi(\omega) = -\omega\tau \quad (5.4.4)$$

tj. fazni pomeraj je proporcionalan učestanosti ω , funkcije $f(t)$.

Prenosna funkcija (5.4.1) ne može se direktno modelirati na analognom računaru, već se mora aproksimirati nekim pogodnim izrazom koji dozvoljava približno modeliranje na analognom računaru.

Posmatrajmo najpre aproksimaciju funkcije kašnjenja pomoću redova. Razvijanjem funkcije (5.4.1) u Maklorenov red dobija se

$$e^{-s\tau} = 1 - s\tau + \frac{(s\tau)^2}{2!} + \dots \quad (5.4.5)$$

Konačan broj članova reda (5.4.5) za male vrednosti proizvoda $s \cdot \tau$ daje dosta dobru aproksimaciju, ali za veće vrednosti kašnjenja i više učestanosti ne zadovoljava. Pored toga, modeliranje desne strane relacije (5.4.5) na analognom računaru zahteva operaciju diferenciranja što takodje čini ovaj prilaz modeliranja kašnjenja nepodesnim.

Madjutim, za realizaciju kašnjenja na analognom računaru, pogodnija je aproksimacija funkcije (5.4.1) pomoću racionalnih prenosnih funkcija. Takvu aproksimaciju daje Padé-ova aproksimacija funkcije (5.4.1), prema kojoj je

$$e^{-s\tau} = \lim_{(a+b) \rightarrow \infty} \frac{F_{ab}(-s\tau)}{G_{ab}(-s\tau)} \quad (5.4.6)$$

gde je

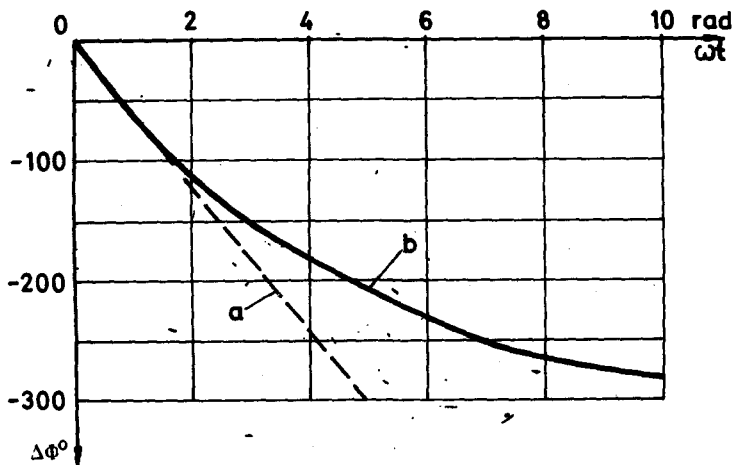
$$F_{ab}(-s\tau) = 1 + \frac{b(-s\tau)}{a+b} + \frac{b(b-1)(-s\tau)^2}{(a+b)(a+b-1)2!} + \dots \quad (5.4.7)$$

$$G_{ab}(-s\tau) = 1 - \frac{a(-s\tau)}{a+b} + \frac{a(a-1)(-s\tau)^2}{(a+b)(a+b-1)2!} - \dots \quad (5.4.8)$$

Za konkretne vrednosti konstanta a i b dobijaju se racionalne funkcije pomoću kojih se može aproksimirati prenosna funkcija kašnjenja. Zbir $a+b$ određuje red Padé-ove aproksimacije. Tako naprimer, za $a = b = 2$ dobija se da je

$$W(s) = \frac{s^2\tau^2 - 6s\tau + 12}{s^2\tau^2 + 6s\tau + 12} \quad (5.4.9)$$

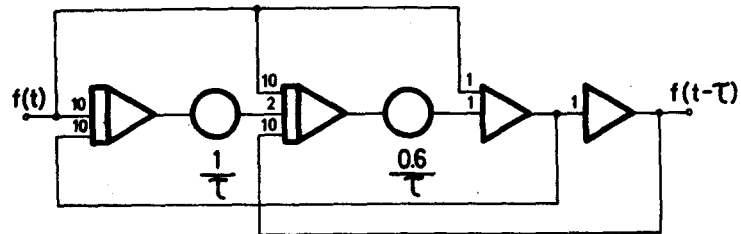
Ovo je Padé-ova aproksimacija četvrtog reda funkcije kašnjenja (5.4.1). Na slici 5.4.2 data je fazna karakteristika prenosne funkcije (5.4.9, kriva b), i idealna fazna karakteristika (5.4.4, kriva a), za $s = j\omega$.



Sl. 5.4.2. Fazna karakteristika Padé-ove aproksimacije četvrtog reda

Sa slike 5.4.2 vidi se da se za $\omega\tau > 2,5$ javlja znatno odstupanje fazne karakteristike prenosne funkcije (5.4.9) od idealne fazne karakteristike funkcije kašnjenja. Prema tome, racionalna

funkcija (5.4.9) aproksimira zadovoljavajuće prenosnu funkciju (5.4.1) samo za male vrednosti kašnjenja τ , odnosno za niske učestanosti ω .



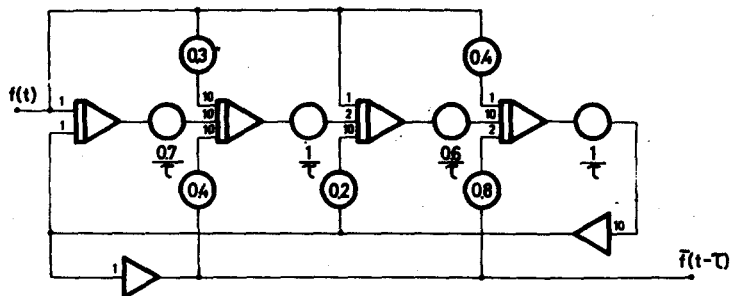
Sl. 5.4.3. Blok šema za modeliranje Padé-ove aproksimacije četvrtog reda

Na slici 5.4.3 data je šema povezivanja računskih elemenata za modeliranje funkcije (5.4.9).

Padé-ove aproksimacije višeg reda daju bolje aproksimacije prenosne funkcije kašnjenja. Naprimera, Padé-ova aproksimacija sedmog reda oblika

$$W(s) = \frac{840 - 360s\tau + 60s^2\tau^2 - 4s^3\tau^3}{840 + 480s\tau + 120s^2\tau^2 + 16s^3\tau^3 + s^4\tau^4} \quad (5.4.10)$$

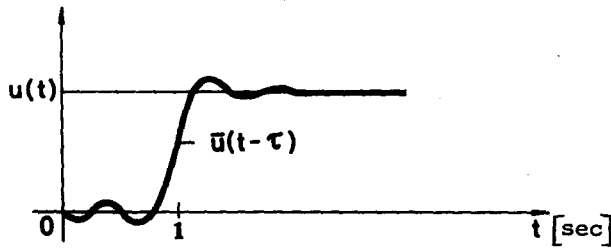
može se modelirati na analognom računaru prema šemi datoj na slici 5.4.4.



Sl. 5.4.4. Blok šema za modeliranje Padé-ove aproksimacije sedmog reda

Na slici 5.4.5 prikazan je odziv sistema čija je prenosna funkcija (5.4.10) kada mu se na ulaz dovede jedinična funkcija $u(t)$,

pri čemu je $\tau = 1 \text{ sec}$, gde je sa $\bar{u}(t - \tau)$ označena aproksimacija funkcije $u(t - \tau)$.

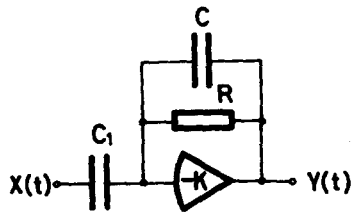


Sl. 5.4.5. Kašnjenje jedinične funkcije za slučaj Padé-ove aproksimacije sedmog reda

5.5. Približno diferenciranje

U glavi I (Prvi deo) jednačina (3.3.8) ilustruje mogućnost modeliranja operacije diferenciranja na analognom računaru. Međutim, operacija diferenciranja se ne može realizovati kada se na ulazu računskog pojačavača nalazi kondenzator, a u povratnoj sprezi otpor, jer dolazi do velikih pojačanja šumova, čije prisustvo u ulaznom signalu je neminovno, naročito pri visokim učestanostima ulaznog signala.

Pošto se ne može postići idealna karakteristika diferenciranja, pribegava se aproksimaciji operacije diferenciranja. Jedan način je da se idealnom kolu za diferenciranje (sl. 3.3.2, glava I, Prvi deo) doda kondenzator C paralelno spregnut sa otporom u povratnoj sprezi pojačavača (sl. 5.5.1)



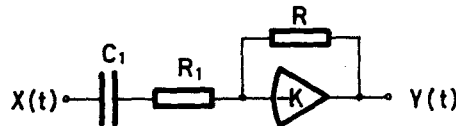
Sl. 5.5.1. Kolo za diferenciranje sa kondenzatorom u povratnoj sprezi

Ako je ulazna impedansa $Z_1(p)$, a impedansa u povratnoj sprezi $Z(p)$, tada je prenosna funkcija pojačavača na slici 5.5.1 data sa

$$\frac{Y(t)}{X(t)} = - \frac{Z(p)}{Z_1(p)} = - \frac{RC_1 p}{1 + RCp} \quad (5.5.1)$$

Ako se izabere mala vrednost kapaciteta C , tada prenosna funkcija (5.5.1) aproksimira operaciju diferenciranja. Kada $C \rightarrow 0$ prenosna funkcija (5.5.1) teži idealnoj karakteristici diferenciranja $-RC_1 p$.

Na sličan se način može dobiti prenosna funkcija za aproksimaciju operacije diferenciranja, dodavanjem otpora R_1 na ulaz pojačavača, kao što je prikazano na slici 5.5.2.



Sl. 5.5.2. Kolo za diferenciranje sa otporom na ulazu

Za ovaj slučaj prenosna funkcija glasi

$$\frac{Y(t)}{X(t)} = - \frac{R \cdot C_1 p}{1 + R_1 C_1 p} \quad (5.5.2)$$

Za male vrednosti otpora R_1 prenosna funkcija (5.5.2) aproksimira operaciju diferenciranja. Kada $R_1 \rightarrow 0$, prenosna funkcija (5.5.2) teži idealnoj karakteristici diferenciranja $-RC_1 p$.

Neka je, naprimer $R = 1M$; $C_1 = 1\mu F$; $C = 0,01\mu F$. Tada je prema (5.5.1),

$$\frac{Y(t)}{X(t)} = - \frac{p}{1 + 0,01p} \quad (5.5.3)$$

Ako je $X(t) = at$ iz (5.5.3) dobija se diferencijalna jednačina

$$0,01 \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = -a \quad (5.5.4)$$

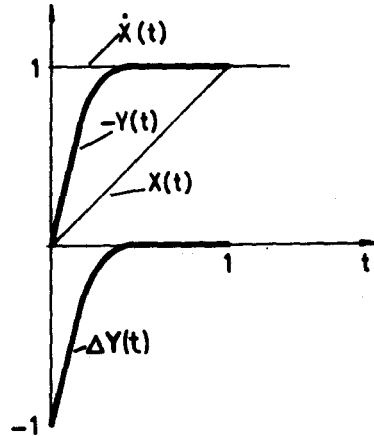
sa početnim uslovima $Y(0) = 0$. Rešenje jednačine (5.5.4) ima oblik

$$Y(t) = -a(1 - e^{-100t}), \quad (5.5.5)$$

Prema tome, razlika između tačnog rešenja pri idealnoj operaciji diferenciranja i dobijenog prenosnom funkcijom (5.5.3) je

$$\Delta Y(t) = -a - [-a(1 - e^{-100t})] = -a \cdot e^{-100t} \quad (5.5.6)$$

gde $\Delta Y(t)$ predstavlja grešku koja se dobija primenom predložene aproksimacije operacije diferenciranja. Ova greška je najveća za $t = 0$, a zatim brzo opada i teži nuli kada t raste. Ovo je prikazano na slici 5.5.3, gde je uzeto da je $a = 1$.



Sl. 5.5.3. Aproksimacija diferenciranja

Drugi način realizacije operacije diferenciranja na analognom računaru sastoji se u modeliranju implicitno izraženog diferenciranja izrazom

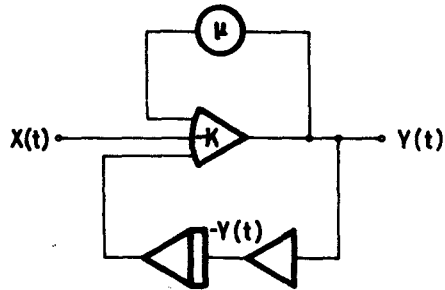
$$X(t) + \int_0^t Y(t) dt = 0 \quad (5.5.7)$$

odnosno

$$Y(t) = -\frac{dX}{dt} \quad (5.5.8)$$

Posmatrajmo šemu na slici 5.5.4. Za prvi pojačavač na slici 5.5.4 važi jednačina

$$X(t) + \mu Y(t) + \int_0^t Y(t) dt = -\frac{1}{K} Y(t) \quad (5.5.9)$$



Sl. 5.5.4. Blok šema za aproksimaciju operacije diferenciranja

Diferenciranjem leve i desne strane jednačine (5.5.9) i sredjivanjem, dobija se

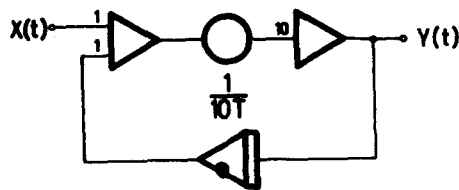
$$Y(t) \left[1 + \left(\mu + \frac{1}{K} \right) p \right] = - p \cdot X(t) \quad (5.5.10)$$

Kako je u jednačini (5.5.10) pojačanje pojačavača vrlo veliko, može se uzeti da je $1/K$ približno nula, pa je

$$Y(t) = - \frac{pX(t)}{1 + \mu p} \quad (5.5.11)$$

Biranjem malih vrednosti za μ skup računskih elemenata povezanih prema šemi na slici 5.5.4 vrši približno operaciju diferenciranja.

Približno diferenciranje može se na analognom računaru vršiti i na drugi način, ako se računski elementi, naprimer, povežu kao na slici 5.5.5.



Sl. 5.5.5. Druga varijanta blok šeme za aproksimaciju diferenciranja

Za prvi sabirač na slici 5.5.5 važi relacija

$$X(t) - \int_0^t Y(t) dt = T \cdot Y(t) \quad (5.5.12)$$

Diferenciranjem leve i desne strane jednačine (5.5.12) i sredjivanjem, dobija se

$$Y(t) [1 + pT] = pX(t) \quad (5.5.13)$$

odakle je

$$Y(t) = \frac{P}{Tp + 1} X(t) \quad (5.5.14)$$

Ako pretpostavimo da je veličina T dovoljno mala, onda poslednja relacija aproksimira operaciju diferenciranja. Vrlo mala vrednost za T postiže se ako se potencijometar na sl. 5.5.5 postavi na vrednost blizu jedinice, a ulaz u drugi sabirač odabere se tako da prenosni odnos sabirača bude 10.

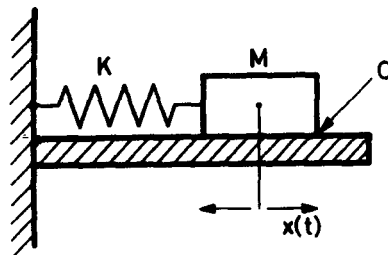
5.6. Primeri Oscilacije sa suvim trenjem

Posmatrajmo oscilacije mase M oko ravnotežnog položaja pod dejstvom elastične opruge sa koeficijentom elastičnosti K . Ovo kretanje opisuje diferencijalna jednačina

$$M \ddot{x} + Kx = 0 \quad (5.6.1)$$

sa početnim uslovima $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Ova jednačina je poznata iz neprigušenih harmonijskih oscilacija (Drugi deo I, 1.6).

Posmatrajmo sličnu fizičku situaciju uz prisustvo suvog trenja između mase M i podloge po kojoj se masa M kreće (sl.5.6.1).



Sl. 5.6.1. Mehanički oscilatorni sistem sa suvim trenjem

Diferencijalna jednačina koja opisuje kretanje u ovom slučaju ima oblik

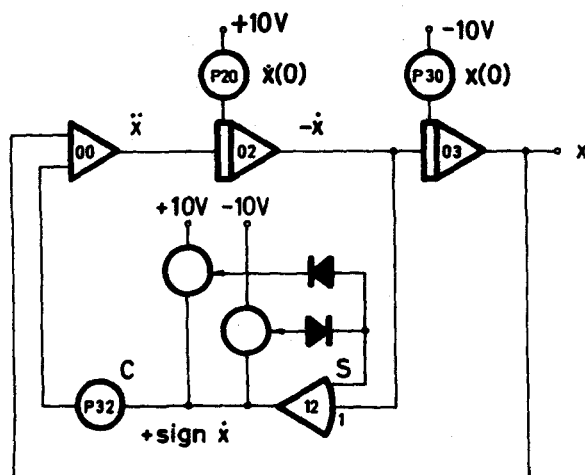
$$M \ddot{x} + C \cdot \text{sign } \dot{x} + K \cdot x = 0 \quad (5.6.2)$$

sa početnim uslovima $x(0) = x_0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Konstanta C u jednačini (5.6.2) predstavlja vrednost sile trenja.

Neka je u diferencijalnoj jednačini (5.6.2) $M = K = 1$ i posmatrajmo silu trenja kao parametar čiji se uticaj na rešenje ispituje. Jednačina koja se postavlja na računar ima oblik

$$\ddot{x} = -C \cdot \text{sign } \dot{x} - x \quad (5.6.3)$$

sa početnim uslovima $x(0) = x_0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Na slici 5.6.2 dat je program za rešavanje jednačine (5.6.3).



Sl. 5.6.2. Blok šema programa za rešavanje diferencijalne jednačine (5.6.3)

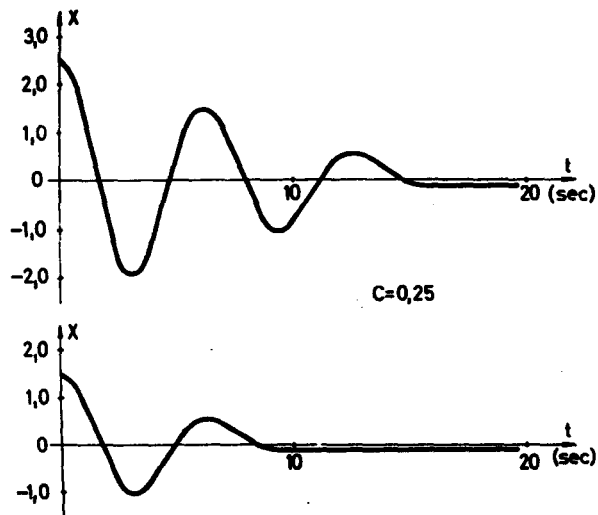
U ovom programu primenjena je šema za modeliranje suvog trenja opisana u odeljku 5.2. ove glave.

Na slici 5.6.3 prikazana su rešenja diferencijalne jednačine (5.6.3) za $C = 0,25$; početni uslov $\dot{x}(0) = 0$ i dve vrednosti za početni uslov $x(0)$, tj. $x(0) = 2,5$ i $x(0) = 1,5$.

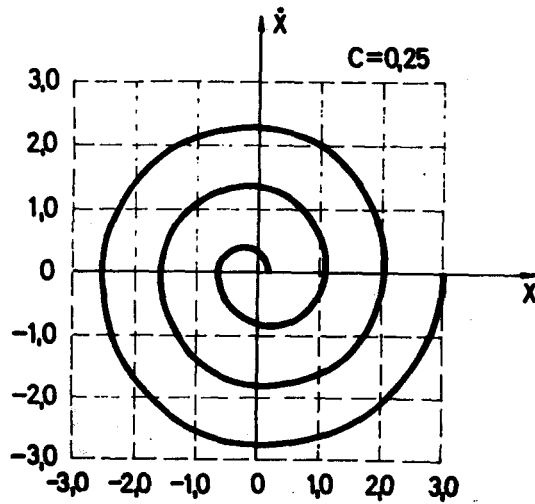
Na slici 5.6.4 prikazano je rešenje jednačine (5.6.3) u faznoj ravni za $C = 0,25$; $\dot{x}(0) = 0$ i $x(0) = 3$.

Na slici 5.6.5 prikazana su rešenja diferencijalne jednačine (5.6.3) za $C = 0,5$; početni uslov $\dot{x}(0) = 0$ i dve vrednosti za početni uslov $x(0)$, tj. $x(0) = 2,5$ i $x(0) = 1,5$.

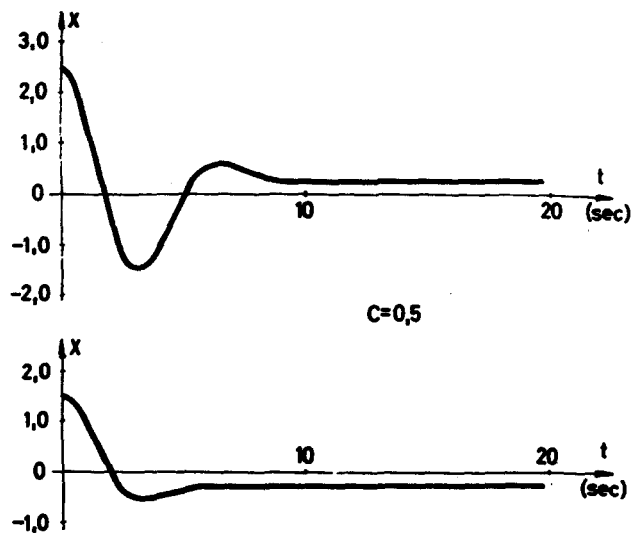
Na slici 5.6.6 prikazano je rešenje diferencijalne jednačine (5.6.3) u faznoj ravni za $C = 0,5$; $\dot{x}(0) = 0$ i $x(0) = 3$.



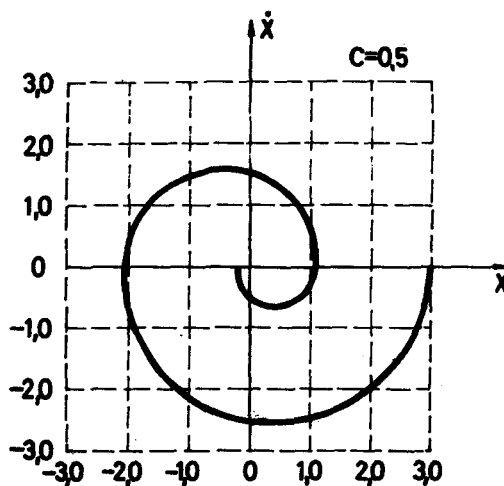
Sl. 5.6.3. Rešenja diferencijalne jednačine (5.6.3) za $C = 0,25$; $\dot{x}(0) = 0$; $x(0) = 2,5$ i $x(0) = 1,5$



Sl. 5.6.4. Rešenje jednačine (5.6.3) u faznoj ravni za $C = 0,25$; $\dot{x}(0) = 0$ i $x(0) = 3$



Sl. 5.6.5. Rešenja diferencijalne jednačine (5.6.3) za $C = 0,5$; $\dot{x}(0) = 0$; $x(0) = 2,5$ i $x(0) = 1,5$



Sl. 5.6.6. Rešenje jednačine (5.6.3) u faznoj ravni za $C = 0,5$; $\dot{x}(0) = 0$ i $x(0) = 3$

6. MODELIRANJE SLOŽENIH SISTEMA

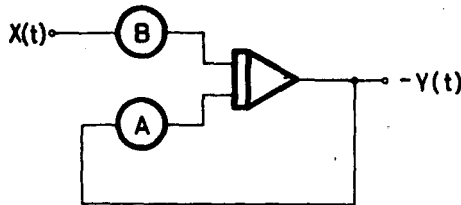
6.1. Modeliranje prostih prenosnih funkcija

U odeljku 4 ove glave videli smo kako se može modelirati prenosna funkcija, ako je ona data u obliku racionalne funkcije (4.2.2). Međutim, pored ovog opšteg prilaza u modeliranju prenosnih funkcija, vrlo često je potrebno modelirati pojedine prenosne funkcije u obliku u kakvom su zadate bez njihovog dovodjenja na oblik (4.2.2). Ovo znači da je nekada pogodnije zadržati u imeniocu ili brojiocu proizvod polinoma, nego svoditi brojilac ili imenioc prenosne funkcije na jedan polinom višeg reda, pri čemu koeficijenti ne zadržavaju prvobitno fizičko značenje i odgovarajuće mesto u modelu. U odeljku 2 je rečeno da se primenom Hevisajdove teoreme razvoja racionalna funkcija može rastaviti na razlomke i na taj način određivati inverzna Laplasova transformacija. Rastavljanje racionalne funkcije takodje omogućuje i jedan poseban prilaz u izgradnji modela. Imajući u vidu pravila za dobijanje prenosnih funkcija složenih sistema (odeljak 3.2) jasno je da u praktičnim problemima pojedini blokovi imaju često proste prenosne funkcije. Navešćemo neke važnije prenosne funkcije i blok šeme za njihovo modeliranje na univerzalnim analognim računarima.

1° Prenosna funkcija

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{K}{T_p + 1} \quad (6.1.1)$$

može se modelirati povezivanjem računskih elemenata prema slici 6.1.1.



Sl. 6.1.1. Modeliranje prenosne funkcije (6.1.1)

Vrednosti A i B koje se postavljaju na potencimetrima na

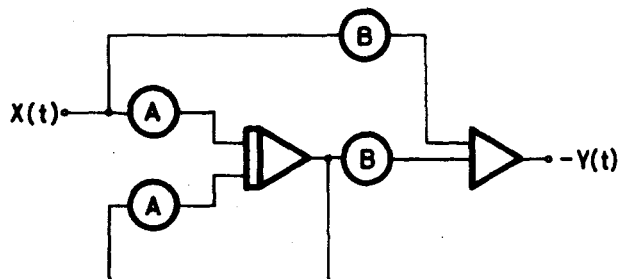
slici 6.1.1 vezane su sa konstantama u prenosnoj funkciji (6.1.1) sledećim relacijama

$$A = \frac{1}{T} \quad \text{i} \quad B = \frac{K}{T} \quad (6.1.2)$$

2^o Prenosna funkcija

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{Kp}{T_p + 1} \quad (6.1.3)$$

može se modelirati povezivanjem računskih elemenata prema slici 6.1.2.



Sl. 6.1.2. Modeliranje prenosne funkcije (6.1.3)

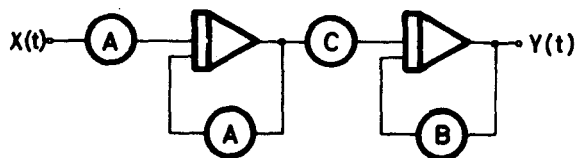
Vrednosti A i B koje se postavljaju na potencimetrima na slici 6.1.2, vezane su sa konstantama K i T u prenosnoj funkciji (6.1.3) sledećim relacijama

$$A = \frac{1}{T} \quad \text{i} \quad B = \frac{K}{T} \quad (6.1.4)$$

3^o Prenosna funkcija kod koje je imenilac polinom drugog stepena, rastavljen na dva binomna činioca u obliku

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{K}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)} \quad (6.1.5)$$

Može se modelirati povezivanjem računskih elemenata prema slici 6.1.3.



Sl. 6.1.3. Modeliranje prenosne funkcije (6.1.5)

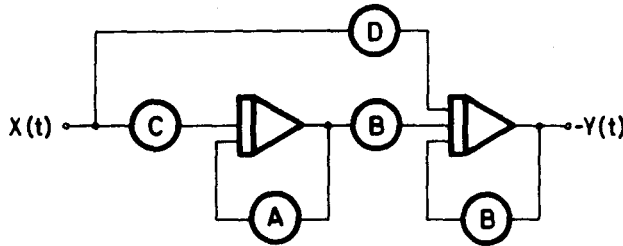
Veze između konstanta A , B i C , koje se postavljaju na potencijometrima i konstanta K , T_1 i T_2 u prenosnoj funkciji (6.1.5) date su sledećim relacijama

$$A = \frac{1}{T_1} ; \quad B = \frac{1}{T_2} \quad \text{i} \quad C = \frac{K}{T_2} \quad (6.1.6)$$

4^o. Prenosna funkcija

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{Kp}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)} \quad (6.1.7)$$

Može se modelirati povezivanjem računskih elemenata prema slici 6.1.4.



Sl. 6.1.4. Modeliranje prenosne funkcije (6.1.7)

Veze između konstanta A , B , C i D na slici 6.1.4 i konstanta K , T_1 i T_2 u prenosnoj funkciji (6.1.7) određene su relacijama

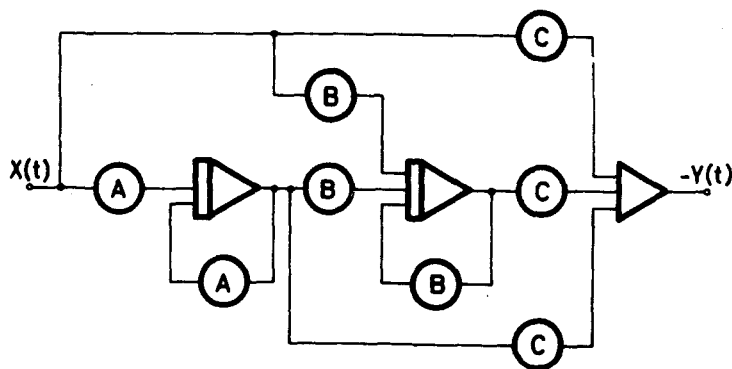
$$A = \frac{1}{T_1} ; \quad B = \frac{1}{T_2} ; \quad C = \frac{K}{T_1^2} \quad \text{i} \quad D = \frac{K}{T_1 T_2} \quad (6.1.8)$$

5^o. Prenosna funkcija sa istim imeniocem kao u slučaju funkcije (6.1.5) samo sa kvadratnim članom u brojiocu, tj.

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{Kp^2}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)} \quad (6.1.9)$$

može se modelirati povezivanjem računskih elemenata prema slici 6.1.5. Veze između konstanta A , B , i C u šemi na slici 6.1.5 i konstanta K , T_1 i T_2 u prenosnoj funkciji (6.1.9) date su relacijama

$$A = \frac{1}{T_1} \quad B = \frac{1}{T_2} \quad \text{i} \quad C = \frac{K}{T_1 T_2} \quad (6.1.10)$$

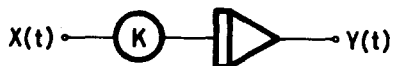


Sl. 6.1.5. Modeliranje prenosne funkcije (6.1.9)

6.° Prenosna funkcija

$$\frac{Y(t)}{X(t)} = - \frac{K}{p} \tag{6.1.11}$$

može se modelirati povezivanjem računskih elemenata prema slici 6.1.6.



Sl. 6.1.6. Modeliranje prenosne funkcije (6.1.11)

7.° Prenosna funkcija

$$\frac{Y(t)}{X(t)} = - \frac{K}{p + a} \tag{6.1.12}$$

može se modelirati skupom računskih elemenata povezanih kao prema slici 6.1.1. Vrednosti A i B, koje se sada postavljaju na potenciometre su

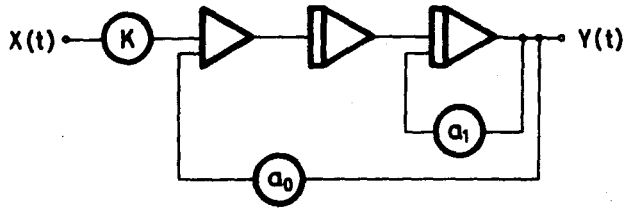
$$A = a \quad \text{i} \quad B = K \tag{6.1.13}$$

8.° Prenosna funkcija

$$\frac{Y(t)}{X(t)} = - \frac{K}{p^2 + a_1 p + a_0} \tag{6.1.14}$$

može se modelirati povezivanjem računskih elemenata prema slici

6.1.7. Vrednosti konstanta a_0 , a_1 i K direktno se postavljaju na odgovarajuće označene potencioetre.

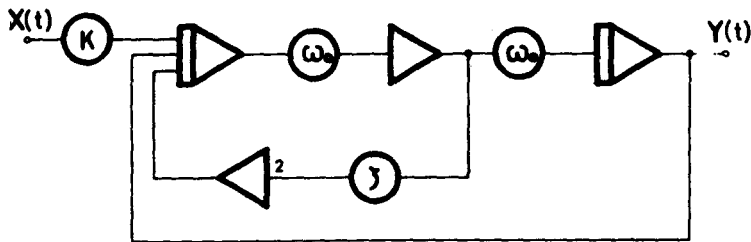


Sl. 6.1.7. Modeliranje prenosne funkcije (6.1.14)

Prenosna funkcija (6.1.14) može se napisati i u obliku

$$\frac{Y(t)}{X(t)} = - \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2} \quad (6.1.15)$$

gde ζ predstavlja koeficijent prigušenja, a ω_0 prirodnu neprigušenu učestanost. Prenosna funkcija (6.1.15) može se modelirati povezivanjem računskih elemenata kao prema slici 6.1.8. Vrednosti za ζ , ω_0 i K direktno se postavljaju na odgovarajuće potencioetre.

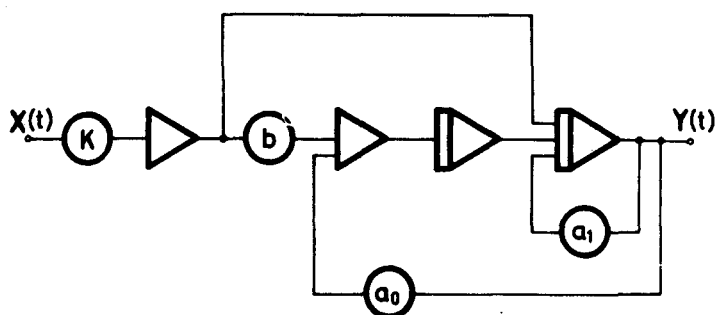


Sl. 6.1.8. Modeliranje prenosne funkcije (6.1.15)

9.° Prenosna funkcija

$$\frac{Y(t)}{X(t)} = \frac{K(p + b)}{p^2 + a_1 p + a_0} \quad (6.1.16)$$

može se modelirati povezivanjem računskih elemenata prema slici 6.1.9. Vrednosti konstanta a_0 , a_1 , b i K postavljaju se neposredno na odgovarajuće potencioetre.



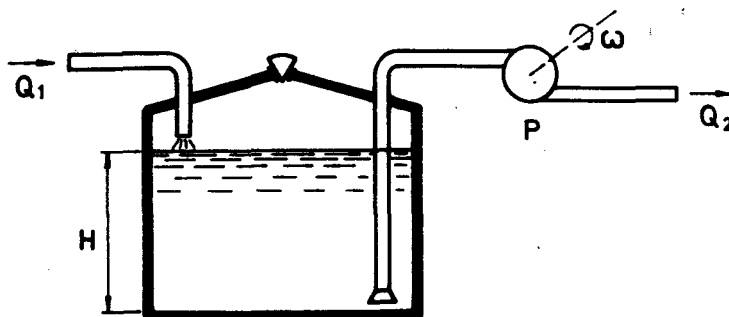
Sl. 6.1.9. Modeliranje prenosne funkcije (6.1.16)

6.2 Modeliranje elemenata nekih procesa

Kao što je već rečeno, prednost modeliranja putem prenosnih blokova je u tome što se svaki blok u složenom sistemu modelira nezavisno od celine sistema, a zatim vrši povezivanje pojedinih blokova prema strukturi sistema. Jasno je da se u različitim tehničkim objektima vrlo često ugradjuju isti podsklopovi. Prema tome, prenosne funkcije i način modeliranja takvih podsklopova mogu se izučavati nezavisno od strukture sistema. U konkretnom problemu modeliranja složenih sistema, biće strukturnom šemom zadato mesto svakog podsklopa u sistemu.

U ovom odeljku prikazan je način modeliranja elemenata nekih procesa bez upuštanja u strukturu samog sistema u celini.

1. Posmatrajmo prost primer procesa šematski prikazanog na slici 6.2.1. U rezervoar površine A dotiče tečnost Q_1 , a pumpa



Sl. 6.2.1. Primer elementa procesa

P omogućuje isticanje tečnosti Q_2 . Neka je površina A merena u m^2 , a količine tečnosti Q_i , $i = 1, 2$; u m^3/s . Matematički model ovakvog procesa može se opisati diferencijalnom jednačinom

$$A \frac{dH(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) \quad (6.2.1)$$

gde je H visina vode u rezervoaru merena u metrima. Količina tečnosti Q_2 , koja otiče iz rezervoara proporcionalna je ugaoj brzini rotora pumpe, tj.

$$Q_2(t) = K\omega(t) \quad (6.2.2)$$

gde je K konstanta koja zavisi od konstruktivnih karakteristika pumpe. Zamenom (6.2.2) u (6.2.1) dobija se

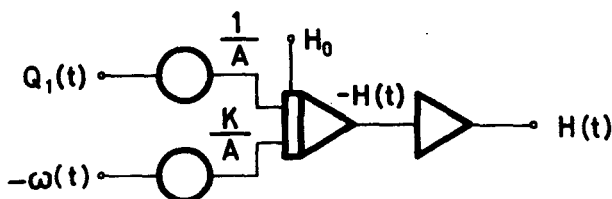
$$A \frac{dH(t)}{dt} = Q_1(t) - K\omega(t) \quad (6.2.3)$$

gde je $H(0) = H_0$.

Jednačina (6.2.3) napisana u operatorskom obliku glasi

$$H(t) = \frac{1}{p} \left[\frac{1}{A} Q_1(t) - \frac{K}{A} \omega(t) \right] \quad (6.2.4)$$

Funkcije $Q_1(t)$ i $\omega(t)$ su poznate funkcije koje predstavljaju ulazne veličine u blok koji se modelira. Na slici 6.2.2 pri-



Sl. 6.2.2. Blok šema modeliranja elementa procesa sa slike 6.2.1

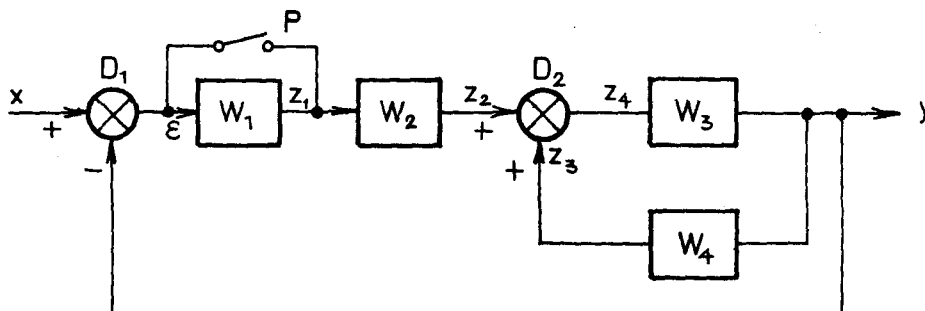
kazana je blok šema za modeliranje opisanog procesa.

6.3. Modeliranje složenih sistema

U ovom odeljku biće navedeni primeri modeliranja složenih dinamičkih sistema pomoću prenosnih funkcija pojedinih podsistema od kojih je sistem sačinjen.

6.3.1. Pozicioni servosistem

Neka je dat pozicioni servosistem, čija je blok šema prikazana na sl. 6.3.1.



Sl.6.3.1. Blok šema pozicionog servosistema

U tabeli 6.3.1. objašnjene su pojedine oznake sa sl. 6.3.1 i date prenosne funkcije pojedinih podsistema.

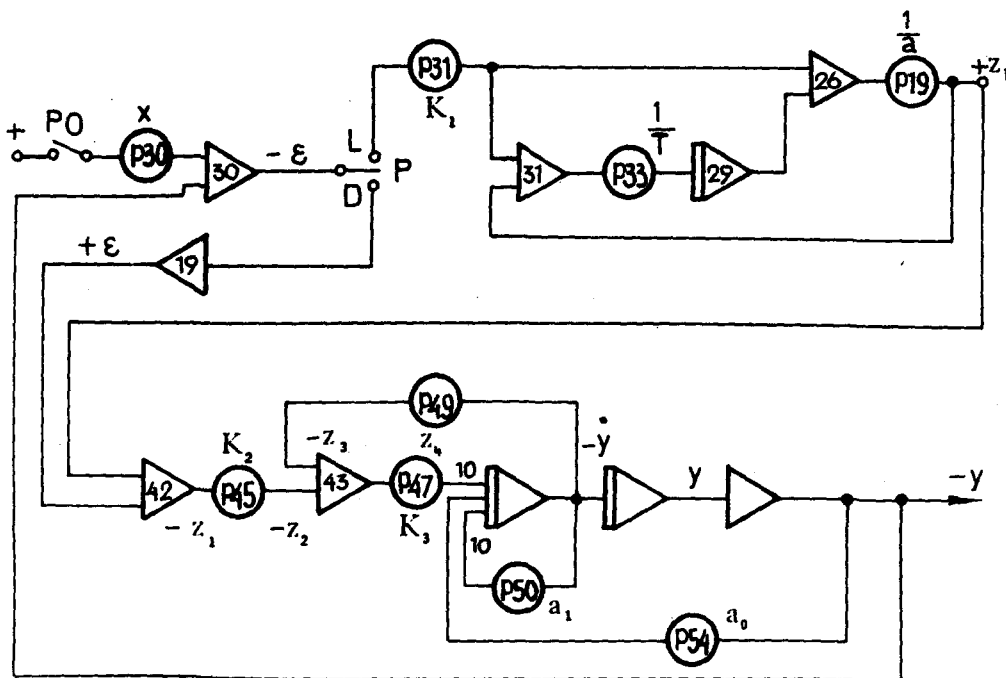
Oznaka	Opis podsistema	Prenosna funkcija
D ₁	Diskriminator	$E(p) = X(p) - Y(p)$
W ₁	Uskladnik	$W_1(p) = \frac{z_1(p)}{E(p)} = K_1 \frac{Tp + 1}{aTp + 1}$
W ₂	Servopojačavač	$W_2(p) = \frac{z_2(p)}{z_1(p)} = K_2$
D ₂	Diskriminator	$z_4(p) = z_2(p) + z_3(p)$
W ₃	Servomotor sa reduktorom i opterećenjem	$W_3(p) = \frac{Y(p)}{z_4(p)} = \frac{K_3}{p^2 + a_1p + a_0}$
W ₄	Tahogenerator	$W_4(p) = \frac{z_3(p)}{Y(p)} = K_4p$

Tabela 6.3.1.

Da bi se dobile što bolje dinamičke karakteristike servosistema uveden je usklađnik W_1 , sa parametrima K_1 , a i T čije vrednosti se mogu podešavati tako da se dobije što bolje ponašanje servosistema u celini.

Da bi se sastavila blok šema za modeliranje servosistema na analognom računaru, treba sastaviti blok šeme pojedinih podsistema, a zatim izvršiti njihovo povezivanje saglasno šemi servosistema na sl. 6.3.1. U tabeli 6.3.2. date su blok šeme pojedinih podsistema servosistema. Treba napomenuti da je modeliranje tahogeneratora izvedeno tako da se umesto diferenciranja funkcije $y(t)$ i množenja sa konstantom K_4 , uzima funkcija $\dot{y}(t)$ iz modela servomotora sa reduktorom i množi konstantom K_4 . Na ovaj način izbegnuta je operacija diferenciranja funkcije $y(t)$.

Na sl. 6.3.2. data je potpuna blok šema programa za modeliranje servosistema na analognom računaru TARA-50.



Sl. 6.3.2. Blok šema modeliranja pozicionog servosistema sa slike 6.3.1

Na modelu je ispitivano ponašanje servosistema sa i bez uskladnika, za razne vrednosti parametra a_1 u podsistemu W_3 , a za

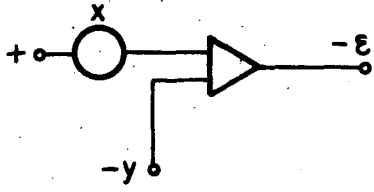
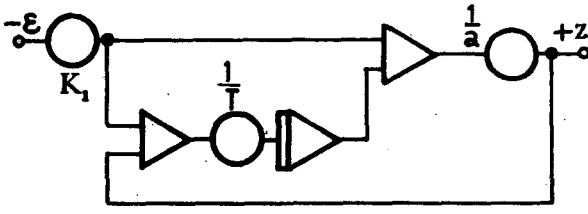
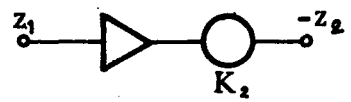
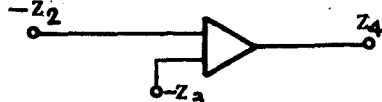
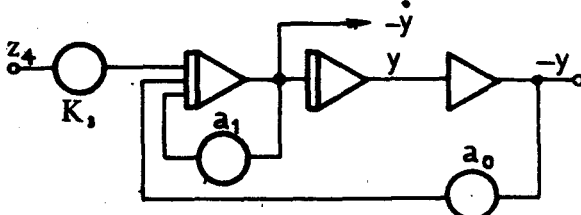

Element servosistema	Blok šema
Diskriminator- D_1	
Uskladnik- W_1	
Servopojačavač- W_2	
Diskriminator- D_2	
Servomotor sa reduktorom i opterećenjem- W_3	
Tahogenerator- W_4	

Tabela 6.3.2.

izabrane karakteristike uskladnika

$$K_1 = 1,0 \quad a = 0,146 \quad T = 1,25$$

servopojačavača

$$K_2 = 0,494$$

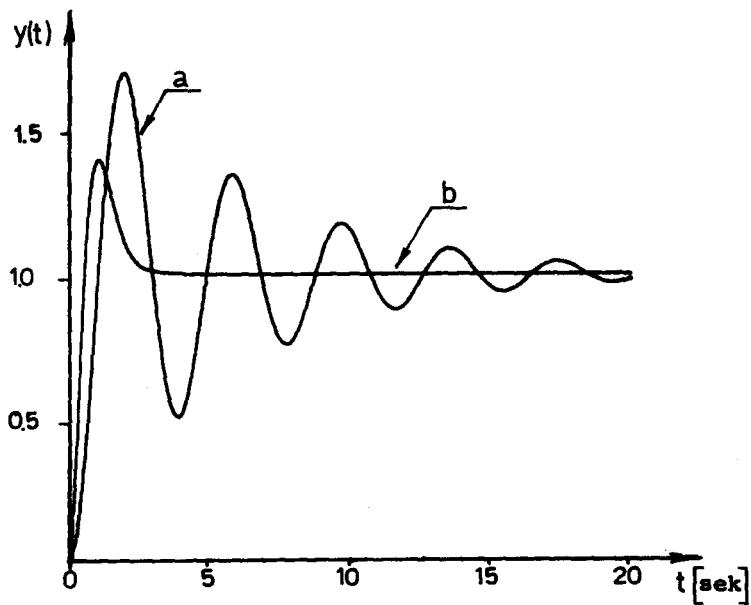
tahogeneratora

$$K_4 = 0,74$$

i servomotora sa reduktorom i opterećenjem

$$K_3 = 0,4 \quad a_0 = 0,674$$

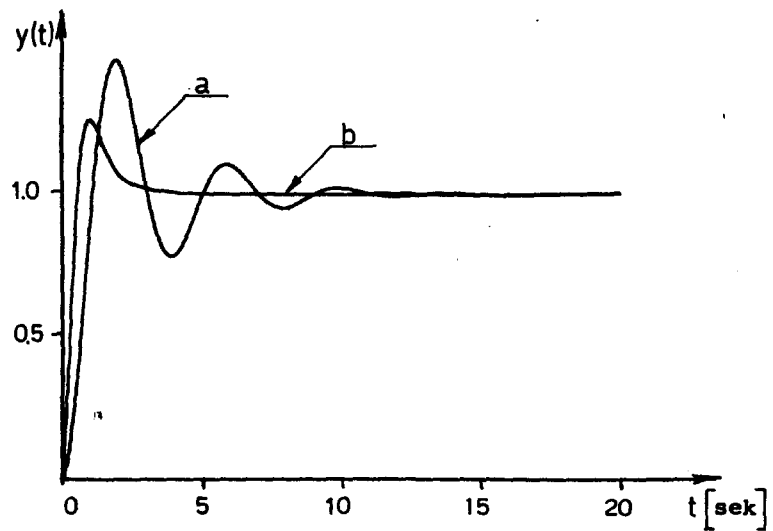
Na sl. 6.3.3. prikazan je odziv servosistema za $a_1 = 3,32$. Na istoj slici je sa *a* označen odziv servosistema bez uskladnika, a sa *b* odziv servosistema sa uskladnikom.



Sl. 6.3.3. Odzivi servosistema za $a_1 = 3,32$

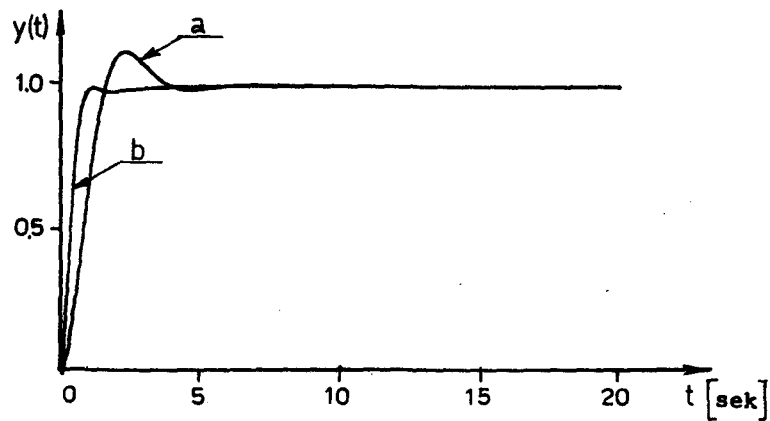
Uključivanje i isključivanje uskladnika vrši se prekidačem P (sl. 6.3.2), tako ako je prekidač u položaju L uskladnik je uključen u sistem, a ako je prekidač u položaju D uskladnik

je isključen iz sistema. Sa sl. 6.3.3. se vidi da je odziv oscilatoran ako sistem radi bez uskladnika.



Sl. 6.3.4. Odzivi servosistema za $a_1 = 3,72$

Na sl. 6.3.4. prikazan je odziv servosistema za $a_1 = 3,72$. Na istoj slici je sa a označen odziv servosistema bez uskladnika, a sa b odziv servosistema sa uskladnikom.



Sl. 6.3.5 Odzivi servosistema za $a_1 = 4,78$

Na sl. 6.3.5. prikazan je odziv servosistema za $a_1 = 4,78$. Na

istoj slici je sa a označen odziv servosistema bez uskladnika,
a sa b odziv servosistema sa uskladnikom.

LITERATURA

- [1] Rogers A.E. and Connoly T.W. :
Analog Computation in Engineering Design,
Mc Graw-Hill, New York, 1960.
- [2] Fifer S. :
Analogue Computation, vol. I, II, III and IV,
Mc Graw-Hill, New York, 1960.
- [3] Korn G.A. and Korn T.M. :
Electronic Analog Computers,
Mc Graw-Hill, New York, 1956.
- [4] Soroka W.W. :
Analog Methods in Computation and Simulation,
Mc Graw-Hill, New York, 1954.
- [5] Johnson C.L. :
Analog Computers Techniques,
Mc Graw-Hill, New York, 1956.
- [6] Karplus W.J. :
Analog Simulation: Solution of Field Problems,
Mc Graw-Hill, New York, 1958.
- [7] Grabbe E.M., Ramo S. and Wooldridge D.E. :
Handbook of Automation, Computation and Control, vol. II,
John Wiley and Sons, New York, 1956.
- [8] Karplus W.J. and Soroka W.W. :
Analog Methods, Computation and Simulation,
Mc Graw-Hill, New York, 1959.
- [9] Huskey H.D. and Korn G.A. :
Computers Handbook,
Mc Graw-Hill, New York, 1962.
- [10] Tomović R. :
Calculateurs Analogiques Repetitifs,
Masson et Comp, Paris, 1958.

- [11] Tomović R. and Carplus W.J. :
High-Speed Analog Computers,
John Wiley and Sons, New York, 1962.
- [12] Pélegrin M. :
Machines A Calculer Electroniques,
Dunod, Paris, 1959.
- [13] Mac Kay D.M. and Fisher M.E. :
Analogue Computation at Ultra-High Speed,
Chapman and Hall LTD, London, 1962.
- [14] Scott N.R.
Analog and Digital Computer Technology,
Mc Graw-Hill, New York, 1960.
- [15] Danloux-Dumesnil M. :
Le Calcul Analogique par Courants Continus,
Dunod, Paris, 1964.
- [16] Levine L. :
Methods for Solving Engineering Problems
Using Analog Computers.
Mc Graw-Hill, New York, 1964.
(postoji prevod na ruskom jeziku pod naslovom:
Левин Л. : Методы решения технических задач с использо-
ванием аналоговых вычислительных машин, Москва, 1966.)
- [17] Sydow A. :
Programmierungstechnik für elektronische Analogrechner,
VEB Verlag Technik Berlin, 1967.
- [18] Behey G.A. and Karplus W.J. :
Hybrid Computation,
John Wiley and Sons, New York, 1968.
- [19] Ноган Б.Я. :
Электронные моделирующие устройства и их применение
для исследования систем автоматического регулирования,
Москва, 1963.
- [20] Фельдбаум А.А. :
Вычислительные устройства в автоматических системах,
Москва, 1959.

- [21] Эттерман И.И. :
Математические машины непрерывного действия,
Москва, 1957.
- [22] Stiebitz G.R. and Larrivee J.A.
Mathematics and Computers,
Mc Graw-Hill, New York, 1957.
- [23] Brčić V. :
Tehnika računanja,
Gradjevinska knjiga, Beograd, 1961.
- [24] Pejović P. i Parezanović N. :
Analogne računске машине i njihova primena,
Rad, Beograd, 1963.
- [25] Korn G.A. and Korn T.M. :
Electronic Analog and Hybrid Computers,
Mc Graw-Hill, New York, 1964.
- [26] Gilbert C.P.
The Design and Use of Electronic Analogue Computers,
Chapman and Hall, London, 1964.
- [27] Bingulac S. i Dujmović J. :
Elektronske računске машине I.
Sav. stud. Elektrotehn. fak. Beograd, 1967.
- [28] Dujmović J. :
Elektronske računске машине - Analogna računска
sredstva - Zadaci,
Izdanje ETAN, Beograd, 1966.
- [29] Simić D. :
Elektronski analogni računari - Uvod u tehniku
programiranja,
Izdanje Tehnička knjiga, Beograd, 1970.
- [30] Uputstva za upotrebu računara
a) TARA - 50 (proizvođnja IAT "M. PUPIN", Beograd)
b) EAI PACE 231 R (Electronic Associates)
c) TR - 10 (" ")

[31] Pejović T.:

Diferencijalne jednačine, egzistencija rešenja.

Izdanje: Zavod za izdavanje udžbenika SRS,

Beograd, 1967.

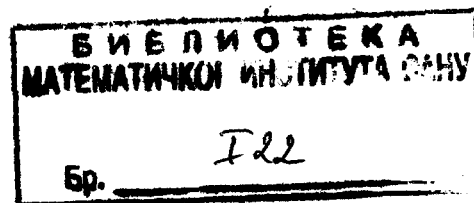
SAVREMENA RAČUNSKA TEHNIKA I NJENA PRIMENA

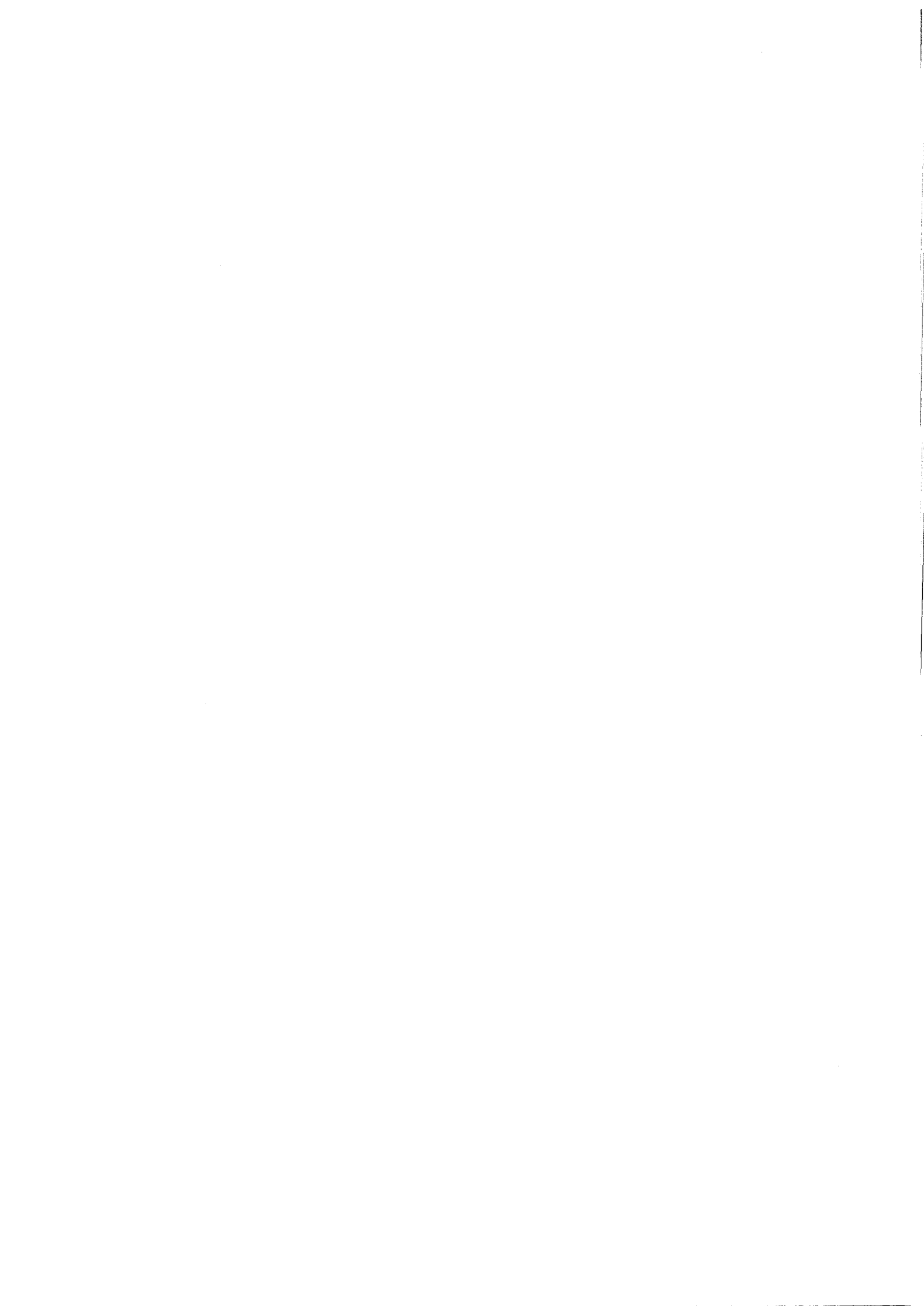
U ovoj seriji Matematičkog instituta dosada su publikovane sledeće knjige:

1. *Nedeljko Parezanović*
Algoritmi i programski jezik FORTAN IV,
Beograd, 1972., str. 272.
2. *Paule Pejović i Nedeljko Parezanović*
Analogni elektronski računari i njihova primena
Beograd, 1972., str. 322.

U pripremi za štampu:

3. *Jurij Stepanenko*
Dinamika prostornih mehanizama, Beograd, 1972.
4. *Dragiša Stojanović*
Ekonomsko-matematički modeli linearnog programiranja,
Beograd, 1972.
5. *Mirko Stojaković*
Algoritmi i automati, Beograd, 1972.





Pavle Pejović
Nedeljko Parezanović

ANALOGNI ELEKTRONSKI RAČUNARI I NJIHOVA PRIMENA

Nacrt za korice	<i>Milan Čavčić</i>
Korekture izvršili	<i>Nada Pejović</i> <i>Milan Čavčić</i> <i>Nedeljko Parezanović</i> <i>Pavle Pejović</i>
Tiraž	<i>1.000 primeraka</i>
Štampanje završeno	<i>septembra 1972. godine</i>

