

V. V. Mišković

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ OPŠTE ASTRONOMIJE

Plan sklapanja prvog dela ("Naučna knjiga", Beograd, 1956) i rukopisa drugog dela u jednu knjigu

Predgovor

(Novo; biće dostavljen naknadno, najviše tri kucane strane)

I. Pregled obrazaca sferne trigonometrije

1. Kosougli sferni trougao
2. Pravougli i kvadrantni sferni trouglovi
3. Specijalni obrasci
4. Diferencijalni obrasci

II. Redovi

III. Pregled obrazaca za transformacije astronomskih koordinatnih sistem

1. Ekvatorskog u horizontski
2. Horizontskog u ekvatorski
3. Ekvatorskog u ekliptički
4. Ekliptičkog u ekvatorski

(Ovo složiti nepromenjeno iz prvog izdanja, str. 7 - 16. Zatim neposredno nastaviti iz rukopisa, str. 1 - 4 :)

5. Obrasci za prelaz sa apsolutnih na relativne koordinate
6. Diferencijalni obrasci sfernog trougla

(Zatim nastaviti iz rukopisa, sa početkom na novoj strani:)

IV. Astronomska refrakcija

1. Definicije
2. Izraz za astronomsku refrakciju
3. Tablice astronomske refrakcije
4. Izrazi za dejstva refrakcije
5. Izraz za depresiju horizonta

V. Elementi teorije kretanja planeta i kometa

1. Oznake i nazivi u eliptičkoj putanji
2. Važniji obrasci
3. Keplerovi zakoni

4. Zakon opšte gravitacije
5. Tačan oblik III Keplerova zakona
6. Keplerova jednačina
7. Rešavanje Keplerove jednačine
8. Razvijanje E, v, w i r u redove
9. Osnovne jednačine kretanja po paraboli

VI. Sunčevo prividno godišnje kretanje

1. Sunčevo prividno kretanje
2. Oblik i dimenzije Sunčeve prividne putanje
3. Sunčeva prividna godišnja putanja na nebeskoj sferi
4. Pojednostosti Sunčeva prividnog dnevnog kretanja
5. Nejednakosti trajanja obdanica i obnoćnica
6. Trajanja Sumraka

(ova poglavlja IV, V i VI složiti iz rukopisa, str. 5 - 27. Dalje se slaže iz štampanog prvog izdanja, nepromenjeno, str. 17 - 33 :)

Z A D A C I

- I. Sferna trigonometrija: 1 - 33
- II. Zemlja kao nebesko telo: 34 - 75
- III. Prividno dnevno kretanje nebeske sfere: 76 - 126

(Zatim se nastavlja, sa početkom na novoj strani, iz rukopisa, str. 29 - 50 :)

- IV. Astronomska refrakcija: 127 - 150
- V. Elementi teorije kretanja planeta i kometa: 151 - 187
- VI. Sunčevo prividno godišnje kretanje: 188 - 262

R E Š E N J A

(Posle str. 50 rukopisa prelazi se na štampano prvo izdanje, počevši sa njegovom stranom 37, i slaže iz njega zaključno sa stranom 150)

- I. Sferna trigonometrija: 1 - 33
- II. Zemlja kao nebesko telo: 34 - 75
- III. Prividno dnevno kretanje nebeske sfere: 76 - 126

(Zatim se, s početkom na novoj strani, nastavlja iz rukopisa, str. 51 - 173, do kraja :)

- IV. Astronomska refrakcija: 127 - 150
- V. Elementi teorije kretanja planeta i kometa: 151 - 187
- VI. Sunčevo prividno godišnje kretanje: 188 - 262

(potom se iz priloga rukopisa slažu)

T A B L I C E

I. Vrednosti srednje refrakcije

II. Približna rešenja Keplerove jednačine

S a d r ž a j

- - - - -

Celu zbirku zadataka složiti, koliko god je to tehnički moguće, kao štampano prvo izdanje prvog dela iz 1956. g.

- - - - -

S L I K E

Slike 1 - 6 nepromenjene iz štampanog prvog dela Zbirke;

Slike 7 - 23 nove za kliširanje po priloženim crtežima;

Slike 24 - 89 nepromenjene iz štampanog prvog dela Zbirke, gde su numerisane brojevima 7 - 72;

Slike 90 - 151 nove za kliširanje po priloženim crtežima.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

В. В. МИШКОВИЋ

ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

ИЗ

ОПШТЕ АСТРОНОМИЈЕ

ПРВИ ДЕО

16. XI. 64
Београд

12.468

Научна Књига

БЕОГРАД, 1956

Актом Комисије за уџбенике Универзитета у Београду бр. 896 од 10-VII-56 до-
стављамо да се штампа као сталан уџбеник за студенте Породно-математичког
факултета.

Тираж: 2000 примерака

Штампа Графичко предузеће „Академија“, Београд, Космајска ул. 28, Тел. 24-701

ПРЕДГОВОР

Ова збирка задатака намењена је слушаоцима Опште астрономије. У њој се налазе сабрани, углавном, задаци који су били давани у току последњих десет година на вежбама или писменим испитима из овог предмета. Потреба да се Збирка штампа, и поред тога што су то све на вежбама рађени задаци, осетила се нарочито откако се на Општу астрономију почео уписивати знатно већи број слушалаца него раније. Од њих је и потекла идеја да се збирка изда.

Но још једна околност је допринела томе. То је што, док уџбеника Опште астрономије има у довољном броју, на свим европским језицима, за све потребе и разне укусе, — Збирки израђених задатака нема ни у тим литературама на избор, шта више оне се тешко данас и у иностранству налазе. Стога сам сматрао да ће оваква Збирка бити од користи за наставу Астрономије код нас. И спремио сам је за штампу.

При распореду материје држао сам се, углавном, прописаног програма за Општу астрономију. Он отступа од класичног утолико што поглављу о Земљи као небеском телу поклања нешто више места него што је то уобичајено у Општој астрономији, што се и у Збирци примећује. А оправдање за то треба тражити у чињеници што се Астрономија, као научна дисциплина, код нас тек на Универзитету почиње предавати. Из наставног плана за средњу школу она је, пре пет година, уклоњена. Тачније речено убачена је, и поред свих својих обележја егзактне науке, у оквир једне чисто дескриптивно-нарративне дисциплине — Географије; дисциплине за чију наставу у средњој школи исти план резервише. — седам од укупно осам година.

Човеку се пред том чињеницом скоро неодољиво намеће питање: чиме се правда и како објашњава да је за савлађивање географије само малене Југославије потребно — три пуне године, када се географија огромног Совјетског савеза, заједно још са географијом целог света, у совјетским средњим школама, савлађује за свега — четири године?! Зар се није могло, и никако још не може, рецимо, једна бар од тих седам година Астрономији посветити, као што то одавна већ раде остале културне земље?! То би и за Географију и за Астрономију — корисније било.

О тој околности морало је бити вођено рачуна и при састављању ове Збирка. Због тога она и излази — са решењима задатака. Због тога је и распон поступности сваког од њених поглавља приметно већи него што би то морало бити. Другим речима, због тога је уношен, у

свако њено поглавље, извештан број и сасвим елементарних задатака, — да би се лакше и брже попуниле празнине у предспреми оних којима је Збирка намењена.

Нарочита пажња обраћена је на нумеричку страну решавања, јер се ова у нашим школама не само не негује и занемарује, већ, шта више, потцењује. У томе делу рада, код сваког задатка, доследно су примењивана два основна правила нумеричког рада. Прво је да се нумерички рад не предузима без претходно припремљене схеме. Друго је да се резултат ни најједноставнијег нумеричког рада не може сматрати тачним док се не провери! Код примене овог другог правила треба имати и то у виду да, у извесним случајевима, мора онај ко решава задатак — сам потражити и образац, или начин, којим ће или како моћи проверити тачност добивених резултата. А желео бих, поводом ових правила, још и то да подвучем, да се оба тичу самог нумеричког рада, без обзира на технику и средства којим се он изводи. Другим речима, и схема за рад и контрола рада подједнако су без условно потребни: и код ментално-ручног, и код машинско-ручног, и код машинско-аутоматског, па и код електронског начина.

Рачунске операције извођене су средствима приступачним онима којима је Збирка намењена. За логаритме су коришћене таблице са пет децимала, али оне са вредностима свих шест гониометријских функција, јер се и у нумеричком раду свих шест користе. Изузетно су само коришћени, у два или три случаја свега, и логаритми са седам децимала. Ово је чињено само када је: или број вредносних цифара то изискивао, да би се резултат добио са потребном тачношћу, — или требало да се покаже разлика у степену тачности резултата добивених помоћу логаритама са пет, односно седам децимала. Доследно је, у рачунском раду, спровођено још једно правило, на које се мало ко код нас обазире: правило да се непознати угао одређује само — помоћу тангенса или котангенса. Због овога је чак, каткада, добивено решење задатка трансформисано, како би се тражени угао добио изражен помоћу једне од поменутих двеју функција.

У нумеричком делу наилазиће се и на извесне нове ознаке и начин писања, који нису код нас уобичајени. Рећи ћу нешто о разлозима којима то правдам. Због прегледности схеме и лакшег извођења операција (сабирања и одузимања), — бројеви са више од четири цифре редовно су одвајани у групе. Они са пет цифара: у групе од по две и три; они са шест цифара: у групе од по три и три; они са седам: у групе од по три и четири.

Да би се избегла двосмисленост до које доводи употреба запете као знака и за интерпункцију, а и за одвајање целих од децимала (напр., при набрајању вредности изражених мешовитим бројевима), — уведена је и доследно коришћена тачка на средини — између целих и децимала мешовитих бројева.

У циљу да се у схеми што више скрати писање (нарочито понављања), — уведено је и доследно спроведено да се лева страна пише, место, рецимо, $\log a =$, или $\log \sin \varepsilon =$, или $\log \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') =$, ..., само $[a]$, $[\sin \varepsilon]$, $[\operatorname{tg}(\varphi - \varphi')]$, ... без знака $=$. Исто тако, вредности логаритама правих децималних разломака писане су само са позитивним делом

карактеристике; негативи део (-10 на крају) редовно је изостављан. Од овог правила отступно је само у случајевима када су се у истом обрасцу јављали и велики и мали бројеви.

О језичко-терминолошкој страни Збирке морам, исто тако, рећи онолико бар колико је потребно да оправдам отступања која сам себи дозволио, или сматрао за умесна.

Термин „раван“ у смислу „једнак“ доследно сам избегавао, и поред његова давно освештаног грађанског права у нашој и усменој настави и уџбеничкој литератури. Нека ми се не замери што се нисам могао никако помирити са том двоструком бесмислицом да, напр., сферни троугао са три једнаке стране зовем — равностраним сферним троуглом; или, да сферни троугао са две једнаке стране, зовем — равнокраким сферним троуглом. Први зовем — једнакостраним, други — једнакокраким.

За лук великог круга повучен у сферном троуглу из којег било од темена до тачке која полови наспрамну троуглову страну преузео сам из стране литературе термин — медијана.

За главне делове дана усвојио сам, односно увео термине — обданица и обноћница.

*

При састављању Збирке користио сам из стране литературе:

L. Gruey — Exercices astronomiques; Ed. A. Herman, Paris, 1889.

E. Villié — Compositions d'Analyse, Mécanique et Astronomie, I—II; Paris 1890. Ed. Gauthier—Villars.

W. Laska — Lehrbuch der Sphärischen Trigonometrie; J. Maier, Stuttgart, 1890.

R. Ball — Spherical Astronomy; Cambridge Univ. Press, 1923.

Barlow & Bryan — Elementary Mathematical Astronomy; Tutorial Press, London, 1926.

Russel—Dugan—Stewart — Astronomy; Ginn & Co, New York, 1926.

P. Humbert — Exercices numériques d'Astronomie; Ed. Vuibert, Paris, 1933.

H. Godfray — Treatise on Astronomy; Macmillan & Co., London, 1934.

W. M. Smart — Spherical Astronomy; Cambridge Univ. Press, 1936.

Ако је задатак преузет био из неког од ових дела или Збирки — стављано је испод задатка ауторово име. Није означавано име ако је задатак преиначаван, редовно од елементарнијег задатка састављен мало тежи или интересантнији за решавање. Ако је преузето и решење, такође је стављано име аутора из чијег дела оно потиче.

Збирка је спремана била да из штампе изађе за почетак ове (1956—57) школске године. Како се, међутим, ово технички показало као скоро неизводљиво, одлучио сам се да је поделим у два дела. На овај начин ће нови слушаоци моћи први део користити, уз предавања зимског семестра, у току којег ће — надам се — и други део њен моћи изаћи штампан.

*

На крају овог предговора осећам за пријатну дужност да се сетим и оних који су ми помогли, било при спремању рукописа, било при штампању Збирке.

Своме колеги, професору Кашанину, који је имао стрпљења да прочита рукопис, искрено сам захвалан за тај труд, као и за примедбе и сугестије које ми је учинио.

Захвалан сам и асистенту Ј. Симовљевићу, који је прочитао цео рукопис, добар део нумеричког рада у њој проверио и указао ми на омашке које је при том уочио.

И асистенту Р. Ђорђевићу дугујем захвалност што је један део нумеричког рада прегледао у рукопису и упозорио ме на примећене пропусте.

Дугогодишњем свом сараднику, сараднику Астрономско-нумеричке секције Математичког института Српске академије наука, М. Чавчићу искрено сам захвалан за огромни труд који га је стала израда свих цртежа Збирке.

12 мај 1956

В. В. М.

с. 272 фл

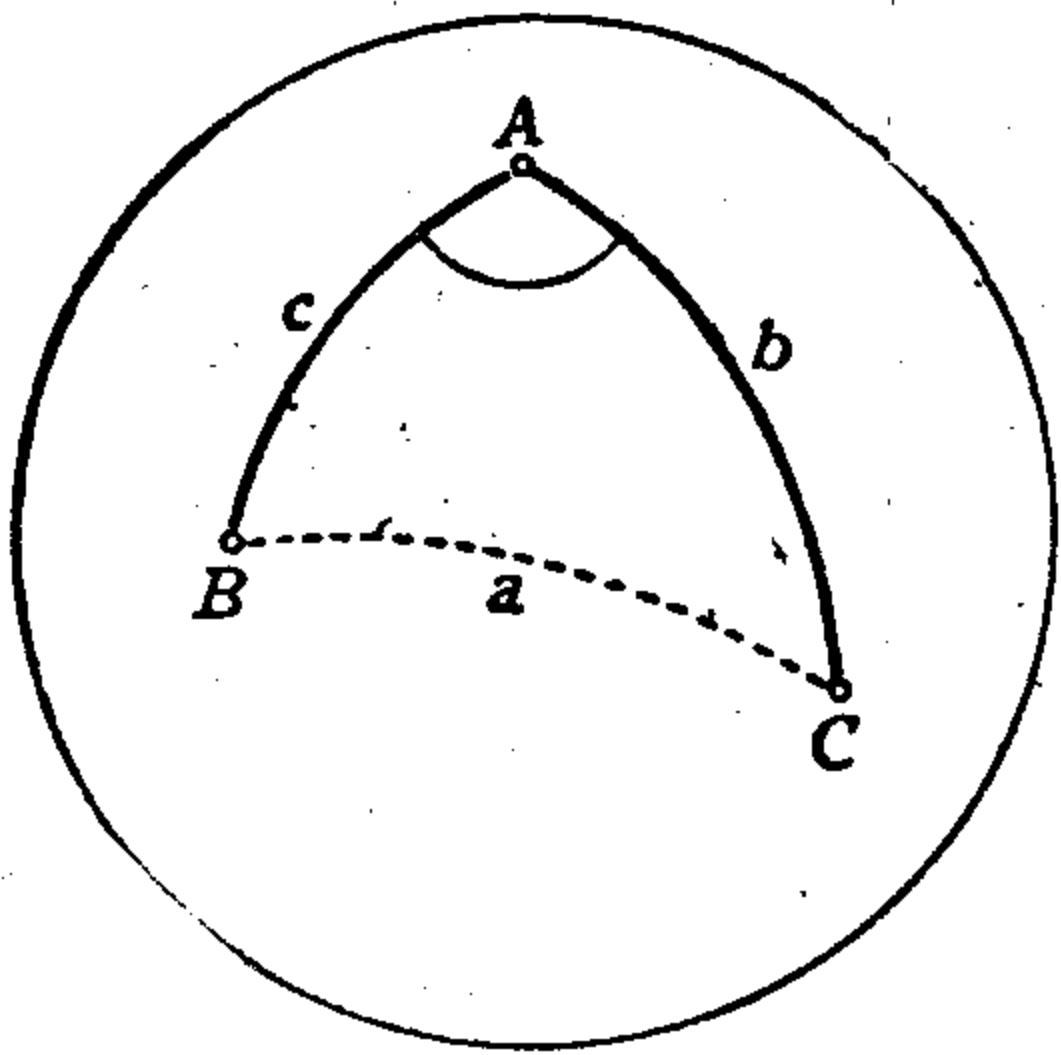
У В О Д

I. ПРЕГЛЕД ОБРАЗАЦА СФЕРНЕ ТРИГОНОМЕТРИЈЕ

Јгв 1/2

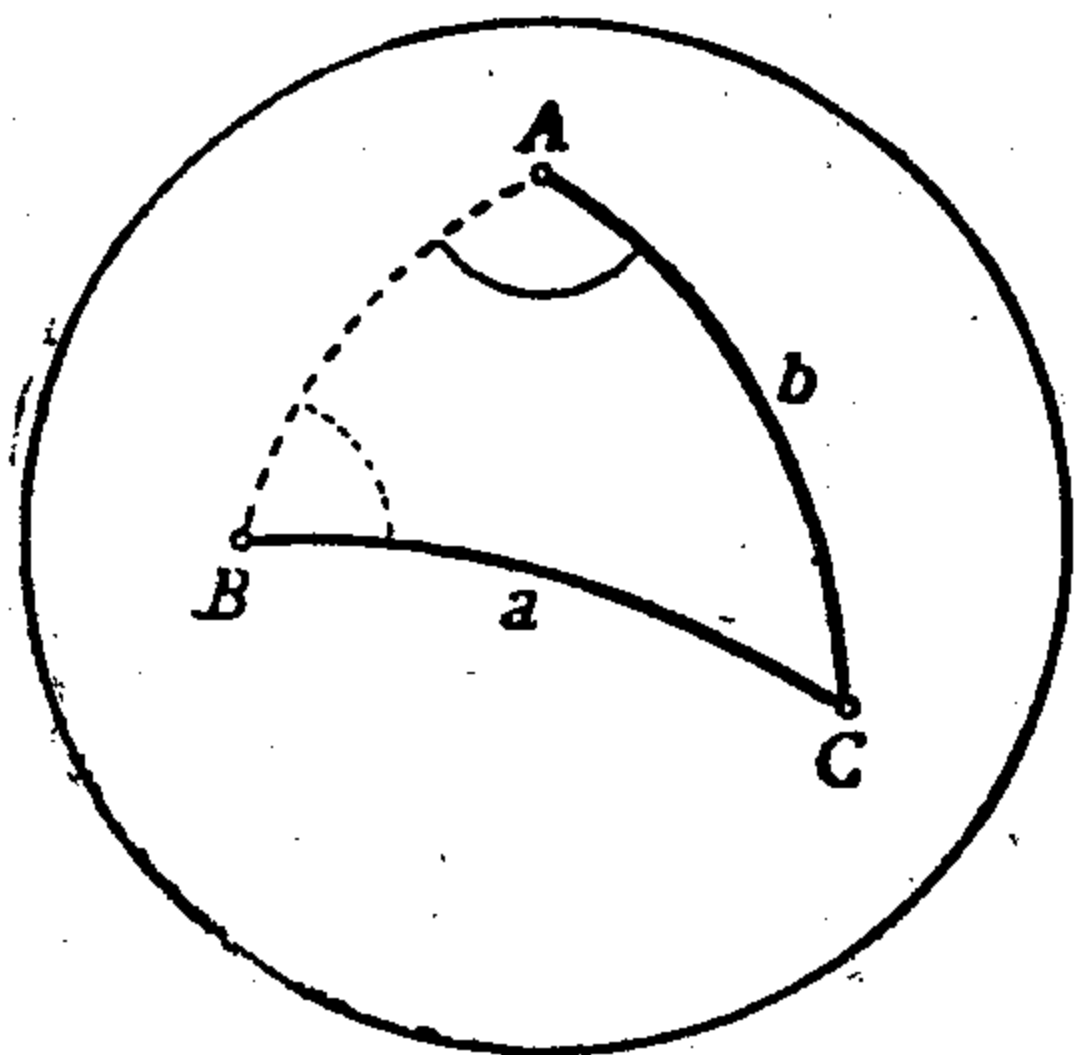
1. Косоугли сферни троугао

A. — Четвороелементни обрасци



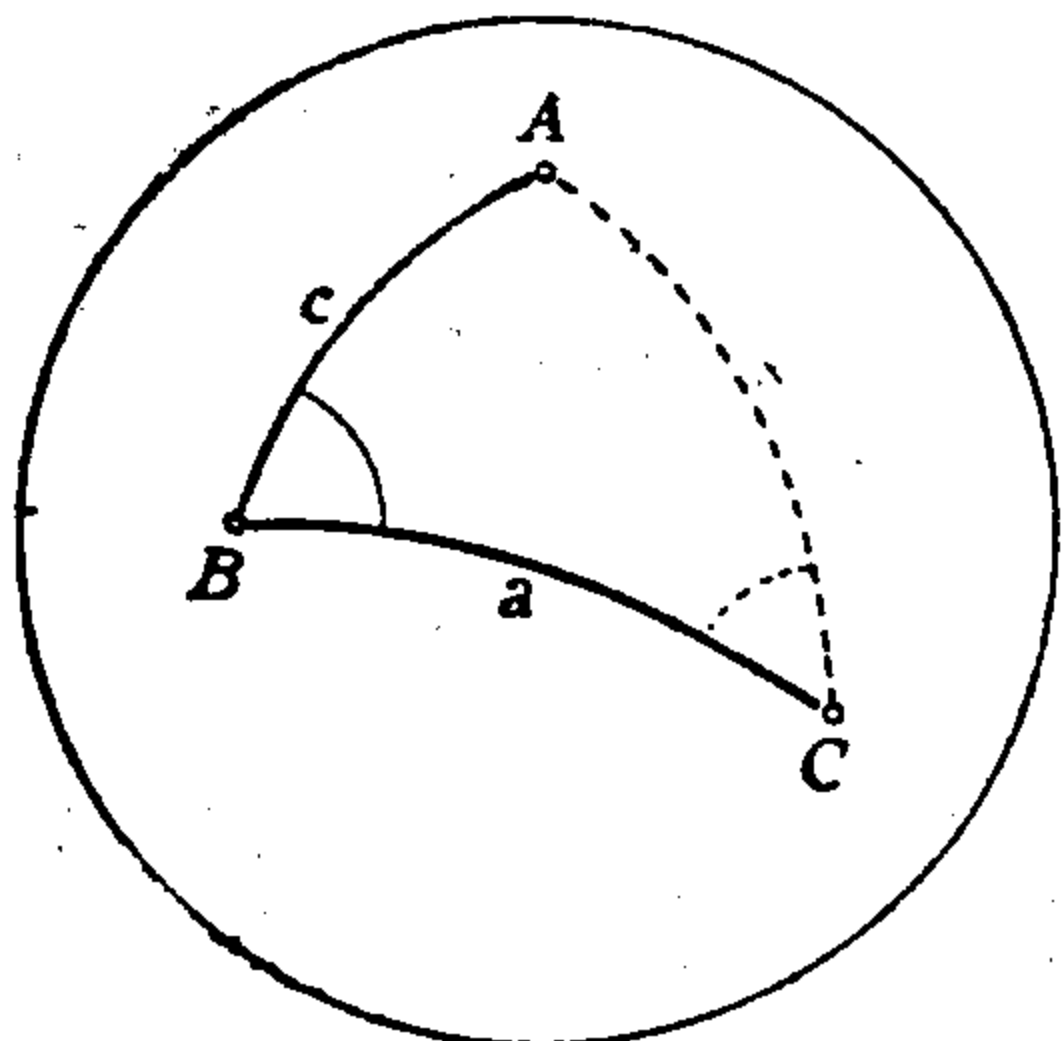
Сл. 1

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C; \end{aligned} \right\} \quad (I)$$



Сл. 2

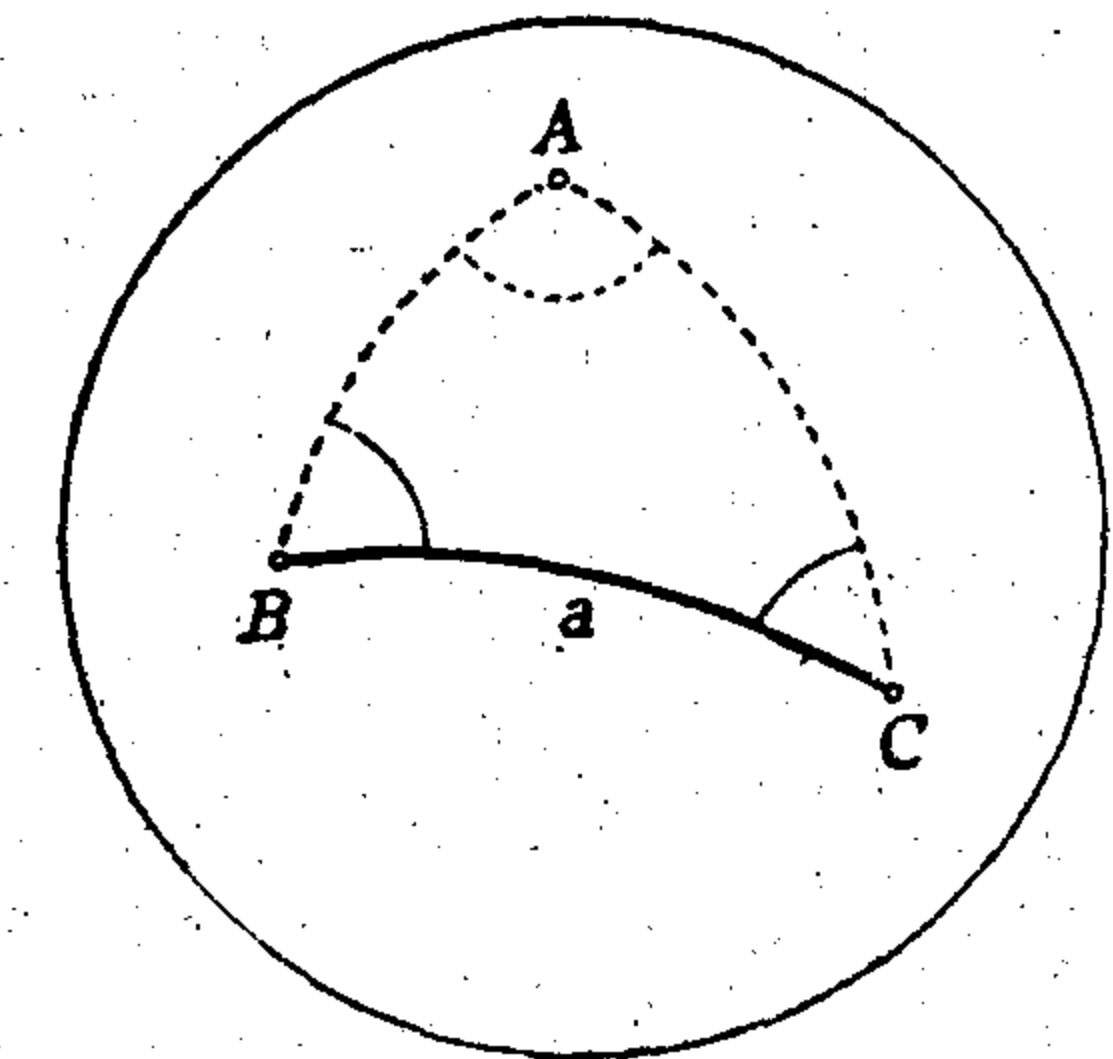
$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A, \\ \sin b \sin C &= \sin c \sin B, \\ \sin c \sin A &= \sin a \sin C; \end{aligned} \right\} \quad (II)$$



Сл. 3

$$\left. \begin{aligned} \cos a \cos B &= \sin a \operatorname{ctg} c - \sin B \operatorname{ctg} C, \\ \cos a \cos C &= \sin a \operatorname{ctg} b - \sin C \operatorname{ctg} B, \\ \cos b \cos C &= \sin b \operatorname{ctg} a - \sin C \operatorname{ctg} A, \\ \cos b \cos A &= \sin b \operatorname{ctg} c - \sin A \operatorname{ctg} C, \\ \cos c \cos A &= \sin c \operatorname{ctg} b - \sin A \operatorname{ctg} B, \\ \cos c \cos B &= \sin c \operatorname{ctg} a - \sin B \operatorname{ctg} A; \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

2



Сл. 4

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{aligned} \right\} \text{(IV)}$$

В. — Петоелементни образци

$$\left. \begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A, \\ \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B, \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B, \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C, \\ \sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C; \end{aligned} \right\} \text{(V)}$$

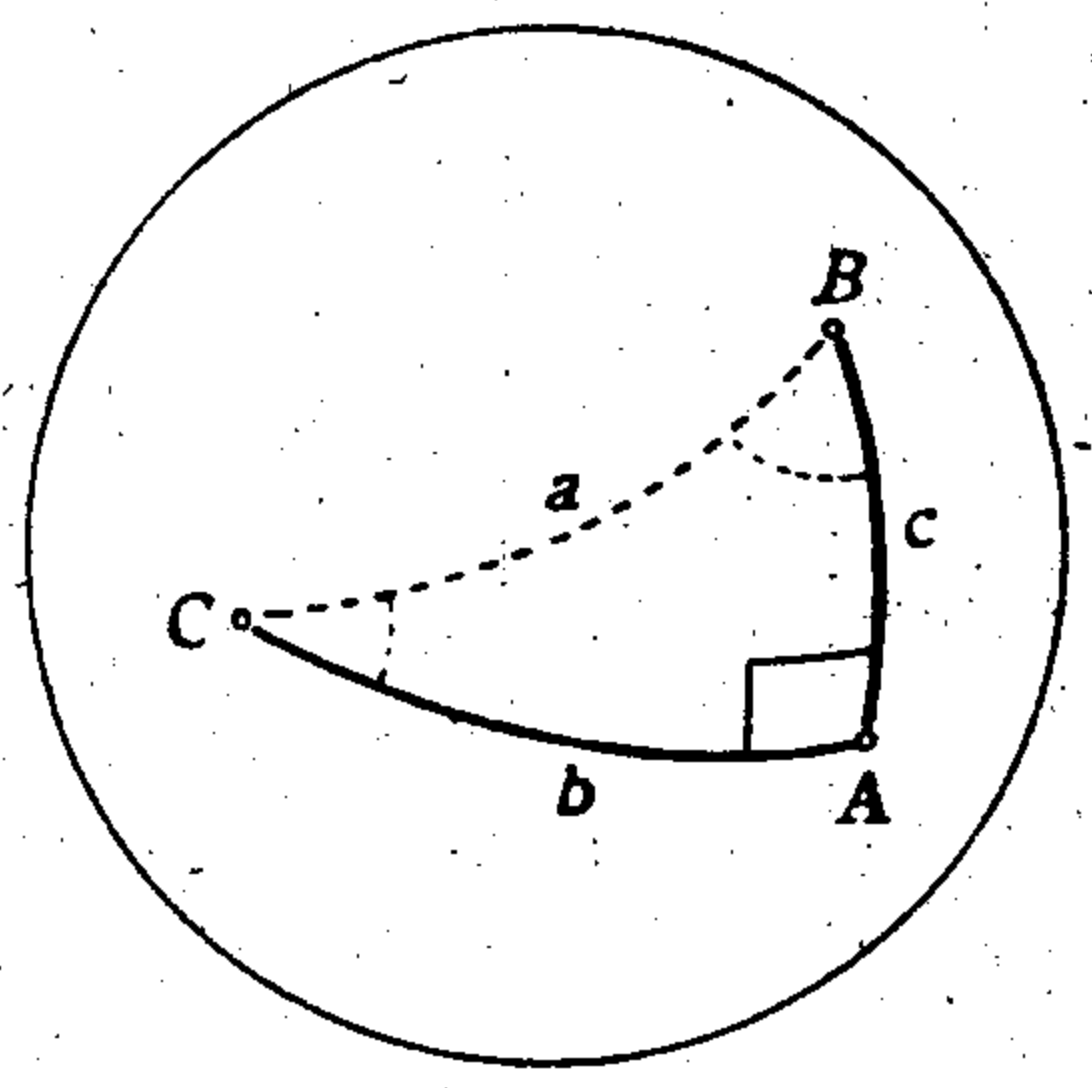
$$\left. \begin{aligned} \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a, \\ \sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a, \\ \sin B \cos c &= \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b, \\ \sin B \cos a &= \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b, \\ \sin C \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c, \\ \sin C \cos b &= \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c. \end{aligned} \right\} \text{(VI)}$$

С. — Гаусова група образаца

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A, \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A. \end{aligned} \right\} \text{(VII}_1\text{)}$$

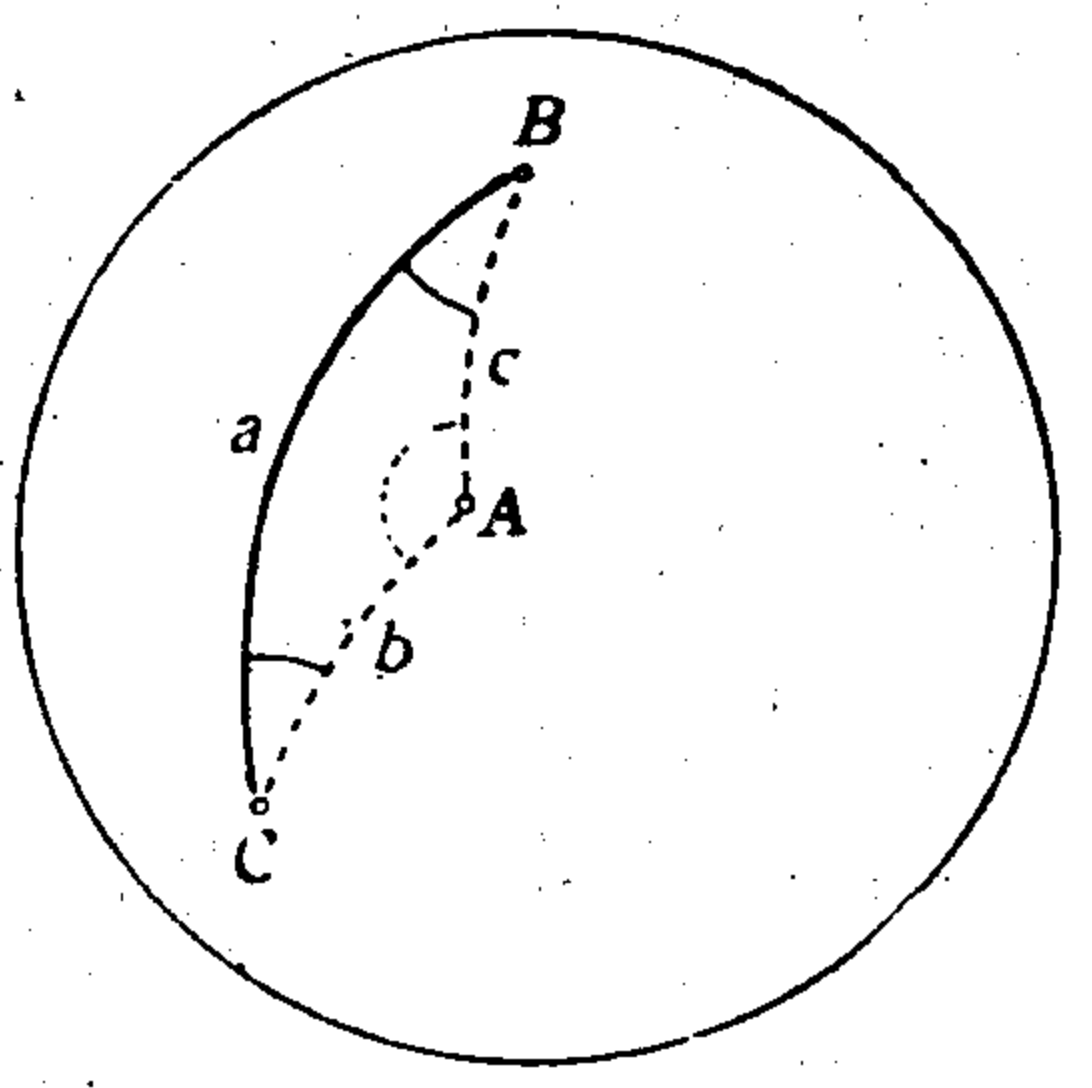
$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \sin a \sin C &= \sin c \sin A, \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A. \end{aligned} \right\} \text{(VII}_2\text{)}$$

2. Правоугли ($A = \frac{\pi}{2}$) и квадрантни ($a = \frac{\pi}{2}$) сферни троугли



Сл. 5

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C, \\ \sin b &= \sin a \sin B = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C, \\ \sin c &= \sin a \sin C = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B, \\ \cos B &= \cos b \sin C = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} a, \\ \cos C &= \cos c \sin B = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} a. \end{aligned} \right\} \text{(VIII)}$$



Сл. 6

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C = -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c, \\ \sin B &= \sin A \sin b = \operatorname{tg} C \operatorname{ctg} c, \\ \sin C &= \sin A \sin c = \operatorname{tg} B \operatorname{ctg} b, \\ \cos b &= \cos B \sin c = -\operatorname{tg} C \operatorname{ctg} A, \\ \cos c &= \cos C \sin b = -\operatorname{tg} B \operatorname{ctg} A. \end{aligned} \right\} \text{(IX)}$$

3. Специјални обрасци

3.1. Бордини обрасци

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}}, \\ \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}, & \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}, \\ \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-c) \sin(s-a)}{\sin c \sin a}}, \\ \cos \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin c \sin a}}, & \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-c) \sin(s-a)}{\sin s \sin(s-b)}}, \\ \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}}, \\ \cos \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}, & \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}}. \end{aligned}$$

4

10

3.2. Деламброви обрасци

$$\sin \frac{1}{2} (b+c) \sin \frac{1}{2} A = \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} (B-C),$$

$$\sin \frac{1}{2} (b-c) \cos \frac{1}{2} A = \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} (B-C),$$

$$\cos \frac{1}{2} (b+c) \sin \frac{1}{2} A = \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} (B+C),$$

$$\cos \frac{1}{2} (b-c) \cos \frac{1}{2} A = \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} (B+C).$$

3.3. Нейерове аналогije

$$\sin \frac{1}{2} (b+c) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B-C) = \sin \frac{1}{2} (b-c) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} A,$$

$$\cos \frac{1}{2} (b+c) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B+C) = \cos \frac{1}{2} (b-c) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} A,$$

$$\sin \frac{1}{2} (B+C) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (b-c) = \sin \frac{1}{2} (B-C) \operatorname{tg} \frac{1}{2} a,$$

$$\cos \frac{1}{2} (B+C) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (b+c) = \cos \frac{1}{2} (B-C) \operatorname{tg} \frac{1}{2} a.$$

3.4. Образац за сферни ексцес

$$\sigma = A + B + C - \pi;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\sigma}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} s \operatorname{tg} \frac{1}{2} (s-a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (s-b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (s-c)}.$$

4. Диференцијални обрасци

4. - (I). $da = \cos C db + \cos B dc + \sin B \sin c dA.$

4. - (II). $\operatorname{ctg} a da - \operatorname{ctg} b db = \operatorname{ctg} A dA - \operatorname{ctg} B dB.$

4. - (III). $\sin a dB = \sin C db - \sin B \cos a dc - \cos C \sin b dA.$

4. - (IV). $dA = \sin b \sin C da - \cos c dB - \cos b dC.$

—(Чис.)

II. РЕДОВИ] g.v. p. k

Маклоренов ред (2с.)

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

Тајлоров ред

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

Биноми ред

$$(1+x)^n = 1 + n x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots \quad [x^2 < 1]$$

Логаритамски ред

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad [-1 < x \leq 1]$$

Редови за тригонометриске и циклометриске функције

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad [x \neq \infty]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad [x \neq \infty]$$

$$\text{tang } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots \quad \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4} \right]$$

$$\text{ctg } x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} - \dots \quad [0 < x^2 < \pi^2]$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + \frac{61}{720} x^6 + \frac{277}{8064} x^8 + \dots \quad \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4} \right]$$

$$\text{cosec } x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7}{360} x^3 + \frac{31}{15120} x^5 + \frac{127}{604800} x^7 + \dots \quad [0 < x^2 < \pi^2]$$

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \quad [x^2 \leq 1]$$

6

12

$$\operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsin} x.$$

$$\operatorname{arctang} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots \quad [-1 < x \leq 1]$$

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctang} x.$$

$$\operatorname{arcsec} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7x^7} - \dots \quad [x^2 > 1]$$

$$\operatorname{arccosec} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x.$$

Специјални редови

Ако је дат израз

$$\operatorname{tg} p = \frac{a \sin x}{1 - a \cos x},$$

онда је

$$(1) \quad p = a \sin x + \frac{1}{2} a^2 \sin 2x + \frac{1}{3} a^3 \sin 3x + \dots \quad [a < 1]$$

Ако је дат израз

$$q = \sqrt{1 - 2a \cos x + a^2},$$

онда је

$$(2) \quad \log q = -M \left(a \cos x + \frac{1}{2} a^2 \cos 2x + \frac{1}{3} a^3 \cos 3x + \dots \right) \quad [a < 1]$$

Ако је дат израз

$$\operatorname{tg} y = n \operatorname{tg} x,$$

онда је

$$(3) \quad y = x + \frac{n-1}{n+1} \sin 2x + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \sin 4x + \frac{1}{3} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^3 \sin 6x + \dots \quad [n > 1]$$

Ако је дат израз

$$\sin y = \sin x + h,$$

онда је

$$(4) \quad y = x + h \sec x + \frac{1}{2} h^2 \sec^2 x \operatorname{tg} x + \frac{1}{6} h^3 \sec^3 x (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x) + \dots \quad [y \approx x]$$

Ако је дат израз

$$\cos y = \cos x + k,$$

онда је

$$(5) \quad y = x - k \operatorname{cosec} x - \frac{1}{2} k^2 \operatorname{cosec}^2 x \operatorname{ctg} x - \frac{1}{6} k^3 \operatorname{cosec}^3 x (1 + 3 \operatorname{ctg}^2 x) + \dots$$

$[y \approx x]$

— (4 с.с.)

III. ПРЕГЛЕД ОБРАЗАЦА ЗА ТРАНСФОРМАЦИЈЕ АСТРОНОМСКИХ КООРДИНАТНИХ СИСТЕМА

— (2 с.с.) $\left[\text{гр. } \frac{1}{2} \right]$

1. Екваторског у хоризонтског $\left[\text{гр. } \frac{1}{2} \right]$

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H,$$

$$\cos h \sin A = \cos \delta \sin H;$$

$$n \sin N = \sin \delta;$$

$$\cos h \cos A = -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos H;$$

$$n \cos N = \cos \delta \cos H;$$

$$\sin h = n \cos (\varphi - N),$$

$$\cos h \sin A = \cos \delta \sin H,$$

$$\cos h \cos A = n \sin (\varphi - N),$$

За паралактички угао

$$\cos h \sin q = \cos \varphi \sin H,$$

$$n' \sin N' = \cos \varphi \cos H,$$

$$\cos h \cos q = \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos H;$$

$$n' \cos N' = \sin \varphi;$$

$$\cos h \sin q = \cos \varphi \sin H,$$

$$\cos h \cos q = n' \cos (\delta + N').$$

грам
не штау.

(Контролни обрасци)

$$\text{tg } \frac{1}{2} (h - \delta) = \text{tg} \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right) \text{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi - N \right) \text{tg } \frac{1}{2} (h + \delta);$$

1/2

$$\cos h \sin (H - A) = -2n \sin H \cos \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right) \sin \left(N + 45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right),$$

$$\cos \frac{z}{2} \cos \frac{1}{2} (A - q) = \cos \frac{1}{2} H \cos \frac{1}{2} (\varphi - \delta),$$

$$\cos \frac{z}{2} \sin \frac{1}{2} (A - q) = \sin \frac{1}{2} H \sin \frac{1}{2} (\varphi + \delta).$$

грам
не штау.

(Диференцијални обрасци)

$$dh = \cos q d\delta - \cos A d\varphi - \cos \delta \sin q dH,$$

$$\cosh dA = \sin q d\delta - \sin A \sinh d\varphi + \cos \delta \cos q dH.$$

2. Хоризонтског у екваторски] *гн. 1/2*

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \varphi \sinh - \cos \varphi \cosh \cos A, & m \sin M &= \cos h \cos A; \\ \cos \delta \sin H &= \cos h \sin A, & m \cos M &= \sin h; \\ \cos \delta \cos H &= \sin h \cos \varphi + \cos h \sin \varphi \cos A; \\ \sin \delta &= m \sin (\varphi - M), \\ \cos \delta \sin H &= \cos h \sin A, \\ \cos \delta \cos H &= m \cos (\varphi - M). \end{aligned}$$

За паралактички угао

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin q &= \cos \varphi \sin A, & m' \sin M' &= \cos \varphi \cos A, \\ \cos \delta \cos q &= \sin \varphi \cosh + \cos \varphi \sin h \cos A; & m' \cos M' &= \sin \varphi; \\ \cos \delta \sin q &= \cos \varphi \sin A, \\ \cos \delta \cos q &= m' \cos (h - M'). \end{aligned}$$

гн. 1/2

Контролни обрасци

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (h - \delta) &= \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right) \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi + M \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (h + \delta), \\ \cos \delta \sin (H - A) &= -2m \sin A \cos \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right) \cos \left(M + 45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right), \\ \sin \frac{z}{2} \sin \frac{1}{2} (A + q) &= \sin \frac{1}{2} H \cos \frac{1}{2} (\varphi + \delta), \\ \sin \frac{z}{2} \cos \frac{1}{2} (A + q) &= \cos \frac{1}{2} H \sin \frac{1}{2} (\varphi - \delta). \end{aligned}$$

гн. 1/2

Диференцијални обрасци

$$\begin{aligned} d\delta &= \cos q dh + \cos H d\varphi + \cos h \sin q dA, \\ \cos \delta dH &= -\sin q dh + \sin H \sin \delta d\varphi + \cosh \cos q dA. \end{aligned}$$

3. Екваторског у еклиптички] *гн. 1/2*

$$\begin{aligned} \sin \beta &= -\cos \delta \sin \alpha \sin \epsilon + \sin \delta \cos \epsilon, & m \sin M &= \sin \delta, \\ \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, & m \cos M &= \cos \delta \sin \alpha; \\ \cos \beta \sin \lambda &= \cos \delta \sin \alpha \cos \epsilon + \sin \delta \sin \epsilon; \\ \sin \beta &= m \sin (M - \epsilon), \\ \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, \\ \cos \beta \sin \lambda &= m \cos (M - \epsilon). \end{aligned}$$

За паралактички угао:

$$\begin{aligned} \cos \beta \sin q &= \cos \alpha \sin \epsilon, & m' \sin M' &= \sin \epsilon \sin \alpha, \\ \cos \beta \cos q &= \cos \delta \cos \epsilon + \sin \delta \sin \epsilon \sin \alpha; & m' \cos M' &= \cos \epsilon; \\ \cos \beta \sin q &= \cos \alpha \sin \epsilon, \\ \cos \beta \cos q &= m' \cos (M' - \delta). \end{aligned}$$

Контролни обрасци / *где ће иштаљ.*

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} (\lambda - \alpha) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} \epsilon \cos \frac{1}{2} (\lambda + \alpha) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta + \beta), \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta - \beta) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} \epsilon \sin \frac{1}{2} (\lambda + \alpha) \operatorname{sec} \frac{1}{2} (\lambda - \alpha); \\ \cos M \cos \beta \sin \lambda &= \cos (M - \epsilon) \cos \delta \sin \alpha, \\ \sin \left(45^\circ - \frac{1}{2} \beta \right) \sin \frac{1}{2} (Q - \lambda) &= \cos \left(45^\circ + \frac{1}{2} \alpha \right) \sin \left[45^\circ - \frac{1}{2} (\epsilon + \delta) \right], \end{aligned}$$

где је

$$Q = 90^\circ - q.$$

Диференцијални обрасци / *где ће иштаљ.*

$$\begin{aligned} d\beta &= \cos q d\delta - \cos \delta \sin q d\alpha - \sin \lambda d\epsilon, \\ \cos \beta d\lambda &= \sin q d\delta + \cos \delta \cos q d\alpha + \cos \lambda \sin \beta d\epsilon. \end{aligned}$$

4. Еклиптичког у екваторски / *где $\frac{1}{2} \delta$*

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \cos \beta \sin \lambda \sin \epsilon + \sin \beta \cos \epsilon, \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda, & n \sin N &= \sin \beta, \\ \cos \delta \sin \alpha &= \cos \beta \sin \lambda \cos \epsilon - \sin \beta \sin \epsilon; & n \cos N &= \cos \beta \sin \lambda; \\ \sin \delta &= n \sin (N + \epsilon), \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda, \\ \cos \delta \sin \alpha &= n \cos (N + \epsilon). \end{aligned}$$

За паралактички угао /

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin q &= \cos \lambda \sin \epsilon, & n' \sin N' &= \sin \epsilon \sin \lambda, \\ \cos \delta \cos q &= \cos \beta \cos \epsilon - \sin \beta \sin \epsilon \sin \lambda; & n' \cos N' &= \cos \epsilon; \\ \cos \delta \sin q &= \cos \lambda \sin \epsilon, \\ \cos \delta \cos q &= n' \cos (N' + \beta). \end{aligned}$$

Контролни обрасци /

$$\sin \frac{1}{2} (\lambda - \alpha) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \epsilon \cos \frac{1}{2} (\lambda + \alpha) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta + \beta),$$

*где
ће иштаљ.*

10

16

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta - \beta) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2}(\lambda + \alpha) \operatorname{sec} \frac{1}{2}(\lambda - \alpha),$$

$$\cos N \cos \delta \sin \alpha = \cos(N + \varepsilon) \cos \beta \sin \lambda,$$

$$\sin\left(45^\circ - \frac{1}{2}\delta\right) \sin \frac{1}{2}(Q + \alpha) = \sin\left(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda\right) \sin\left[45^\circ - \frac{1}{2}(\varepsilon + \beta)\right],$$

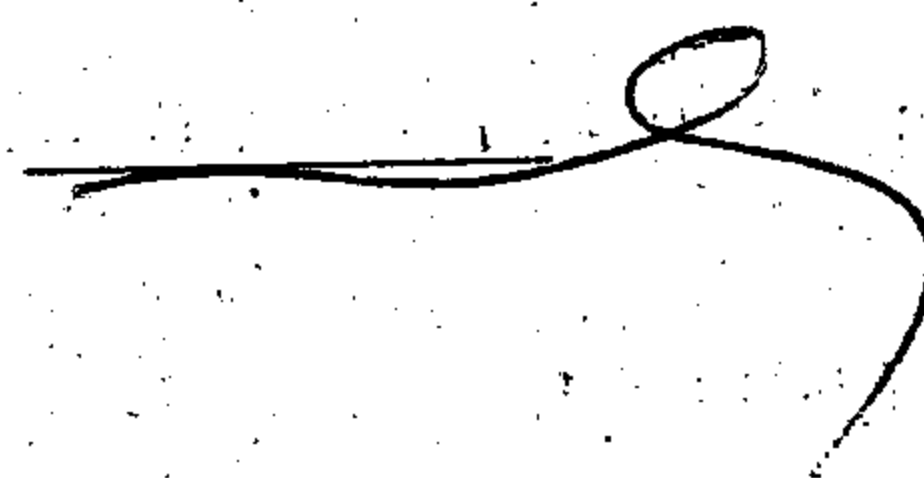
где је

$$Q = 90^\circ - q.$$

Диференцијални обрасци/

$$d\delta = \cos q d\beta + \sin q \cos \beta d\lambda + \sin \alpha d\varepsilon,$$

$$\cos \delta d\alpha = -\sin q d\beta + \cos q \cos \beta d\lambda - \sin \delta \cos \alpha d\varepsilon,$$



фин
итак.

Šimšićić

38

ЗАДАЦИ) с. н. Шимшićić

39

~~Wanna!~~

W

90

197

I/ СФЕРНА ТРИГОНОМЕТРИЈА

Зач. *[Signature]*

1. Угао $\alpha = 0.265$ радијана прерачунати у:
 - а) степене и његове делове; б) минуте и њене делове; в) секунде и њене делове (две децимале); г) степене, минуте, секунде и њене делове (две децимале).
2. Угао $\alpha = 15^\circ 11' 0''.17$ прерачунати у радијане и његове делове.
3. Угао $\alpha = 237^\circ 51' 37''.62$ прерачунати у часове, минуте, секунде и њене делове (три децимале).
4. Угао $\alpha = 15^h 51^m 26^s.508$ прерачунати у степене, минуте, секунде и њене делове (две децимале).
5. Ако се за вредност углова α и β , које треба одредити из $\sin \alpha = 0.016 5929$ и $\text{tg } \beta = 0.016 5952$, са по две децимале угловне секунде, узме $\alpha = 0.017 5929$ и $\beta = 0.016 5952$, или, у угловној мери, $\alpha = 0^\circ 57' 2''.53$ и $\beta = 0^\circ 57' 3''.01$, колика су, у угловним секундама, отступања тих вредности од тачних, ако се занемаре виши од трећег степени вредности $\sin \alpha$ и $\text{tg } \beta$?
6. Показати да се у сферном троуглу већем углу насупрот налази већа страна.
7. Показати да је у сферном троуглу разлика између било која два угла мања од суплемента трећег угла.
8. Показати да је површина сферног троугла, на сфери полупречника R , чији су углови A, B, C ,

$$P = \frac{R^2 \pi}{180^\circ} (A + B + C - 180^\circ).$$
9. Израчунати површину сферног троугла, на сфери полупречника једнака јединици, ако су углови тог троугла $A = 80^\circ, B = 70^\circ, C = 60^\circ$.
10. Извести основни образац Сферне тригонометрије помоћу образаца за правоугле сферне троуглове.
11. Извести образце IV групе, за израчунавање углова, помоћу образаца за правоугле сферне троуглове.
12. Извести Гаусову групу образаца за сферни троугао помоћу ротације координатног система око једне осе.

20

13. Како гласи Неперово мнемоничко правило за обрасце за решавање квадрантног сферног троугла (у којег је једна страна 90°)?

• 14. Подесити за логаритамско рачунање образац

$$\operatorname{ctg} a \cdot \sin b = \operatorname{ctg} A \cdot \sin C + \cos b \cdot \cos C$$

за одређивање угла C .

• 15. Дате су у сферном троуглу стране $b = 37^\circ 47' 18''$ и $c = 74^\circ 51' 50''$ и угао међу њима $A = 44^\circ 10' 40''$. Одредити: 1) трећу страну, a , и један од налегних углова, рецимо C ; 2) сва три непозната елемента.

• 16. Објаснити геометриско значење уведених помоћних величина, m и M , у претходном задатку 1).

• 17. Извести обрасце за одређивање промена израчунатих елемената у функцијама промена датих елемената у задатку 15, и применити их узимајући, рецимо, за исте: $db = 10''$, $dc = 20''$, $dA = 30''$.

• 18. Дате су две стране сферног троугла, $b = 16^\circ 42' 30''$ и $c = 47^\circ 14' 04''$ и угао међу њима $A = 153^\circ 2' 14''$, израчунати висину и медијану, обе повучене из темена A .

19. Дате су три стране сферног троугла $a = 50^\circ 54' 32''$, $b = 37^\circ 47' 18''$ и $c = 74^\circ 51' 50''$; израчунати углове тог троугла.

Израчунати промене тих углова, ако се све три стране промене за по $6''$, дакле за $da = +06''$, $db = +06''$, $dc = +06''$.

20. Показати да је у сферном троуглу $B + C = 180^\circ$, ако је $b + c = 180^\circ$.

21. Ако је у сферном троуглу $a + b + c = 180^\circ$, показати да је

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1. \quad [\text{Humbert}]$$

22. Извести везу што постоји између страна и углова у једнако-страном сферном троуглу.

• 23. Израчунати елементе сферног троугла ако су дате стране a и b , а уз то још и веза $C = A + B$.

• 24. Ако је у сферном троуглу $A + B = C$, показати да је

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{b}{2} + \cos C = 0. \quad [\text{Humbert}]$$

25. Ако је у сферном троуглу $A + B = C$, показати да је

$$\sin^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{b}{2} = \sin^2 \frac{c}{2}. \quad [\text{Laska}]$$

26. Показати да је у правоуглом сферном троуглу:

1) $\operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} c_a$ и $\operatorname{tg}^2 b = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} c_b$, где су a и b катете, c хипотенуза, а c_a и c_b делови хипотенузе уз једну, односно другу од катета;

2) $\sin^2 h = \operatorname{tg} c_a \cdot \operatorname{tg} c_b$, где је h лук великог круга повучен из темена правог угла нормално на хипотенузу. [Laska]

27. Дате су у сферном троуглу основа, c , и веза међу угловима $\cos A + \sec B \cos C = 0$. Одредити геометриско место темена C .

28. Показати да међу елементима сферног троугла постоји веза

$$\cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B) = \sin(a+b) \sin^2 \frac{C}{2}.$$

29. Показати да међу елементима сферног троугла постоји веза

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A-B).$$

30. Ако се стране CA и CB сферног троугла ABC преполове у тачкама D и E , па лук великог круга DE означи са η , а збир троуглових углова означи са $2S$, показати да је

$$\cos \eta = \sec \frac{c}{2} \cdot \sin S.$$

31. Дате су у сферном троуглу страна c и веза $\operatorname{tg} \frac{1}{2} a \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \mu$, где је μ медијана из темена C . Одредити разлику $(a-b)$.

32. Извести шестоелементни, или такозвани Кањолиев образац,
 $\sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c \cdot \cos A = \sin B \cdot \sin C - \cos B \cdot \cos C \cdot \cos a$.

33. Показати да је у сферном троуглу ABC (в. сл. 15), у којем су други и виши степени елемената c и C занемарљиви,

$$\Delta A = B_1 - A = C \cdot \cos b.$$

— S

43

19

—(4 с.с.)

III/ ЗЕМЉА КАО НЕБЕСКО ТЕЛО

—(2 с.с.)

34. Извести изразе за депресију хоризонта и даљину вида посматрача који се налази на узвишењу h над морском површином.

Израчунати тражене величине узимајући за полупречник Земље (сфере) $R=6370$ км и $h=30$ м.

35. Извести израз за површину слободног видика на Земљи (сфери) коју види посматрач са узвишења h над морском површином.

Израчунати ту површину узимајући за Земљин полупречник $R=6370$ км, а за h , прво, $h_1=30$ м, а, затим, $h_2=6$ км.

36. Са коликог би узвишења над морском површином посматрач видео 1/100-ти део површине Земље (сфере), полупречника $R=6370$ км?

37. Посматрачи A и B налазе се на узвишењима h_1 и h_2 над морском површином на Земљи (сфери), чији је полупречник R . Шта ће бити услов, ако је α угао између њихових вертикала, да они још један другог виде?

* 38. Ако је са узвишења h_1 и h_2 на истој вертикали посматрана иста некретница под угловима α_1 и α_2 са видиком, показати да се за приближну вредност полупречника Земљине сфере добива

$$R = \left(\frac{\sqrt{2h_2} - \sqrt{2h_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2 \quad [\text{Godfray}]$$

39. Посматрач се налази у балону на висини $h=12$ км изнад места чије су географске координате $L=0^\circ$, $\varphi=+60^\circ$. Претпостављајући да је Земља сфера, наћи координате тачака на меридијану и на паралелу до којих допире његов вид.

† 40. Одредити географске координате тачака на екватору које се налазе на удаљењу d од тачке чије су координате (L, φ) .

41. Колика је разлика у географским дужинама места A_1 и A , од којих се прво налази на екватору, а друго на паралелу географске ширине φ , ако је φ_s географска ширина најјужније тачке великог круга повучена кроз A_1 и A .

* 42. Места A и B имају исту географску ширину, φ , а географске дужине им имају разлику L . Наћи географску ширину најсеверније тачке великог круга што пролази кроз та места, и одредити разлику у дужинама путања мерених по паралелу и по великом кругу између тих места. [Smart]

* 43. Израчунати географску ширину паралела на Земљи (сфери, полупречника $R=6370$ км) између двају места, удаљених једно од другог 261 км, а чије су географске дужине $L_1=43^\circ 17'$ и $L_2=46^\circ 41'$.

44. Извесног датума кренуо је брод из места чије су географске координате $L=-16^\circ 30'$ и $\varphi=-28^\circ 0'$, у правцу истока, и плови брзином од 12 чворова. Израчунати, прво, географску дужину тачке на којој ће се наћи брод пошто превали 4500 н. м. и, друго, трајање вожње.

45. Два брода плове у истом смеру: један по паралелу $\varphi_1=+42^\circ 40'$, други по паралелу $\varphi_2=-12^\circ 30'$. Ако први плови брзином од 18 чворова, коликом брзином треба други да плови да би се са првим налазио стално на истом меридијану?

46. Два брода крећу, један из места $L_1=-18^\circ 24'$, $\varphi_1=+60^\circ$ у правцу запада, други из места $L_2=+26^\circ 36'$ и $\varphi_2=+30^\circ$ у правцу истока. Први плови брзином од 12 чворова, а други брзином од 15 чворова. Ако су кренули 27 фебруара 1952 г., у 12 ч. гр. вр., израчунати тренутак када ће они имати исту географску дужину, и коју?

47. Два пешака полазе из истог места, чија је географска ширина $\varphi=+60^\circ$, један у правцу истока други у правцу запада. Крећу се истом брзином. Колика је ова била, ако им је, после 5 часова пешачења свакога од њих, разлика географских дужина износила $\Delta L=4^m$?

48. Колике су приближне часовне промене географских координата воза који креће, у правцу североистока, из Београда, чија је географска ширина $\varphi=+44^\circ 48'$, ако вози брзином од 50 км на час? [Barlow and Bryan]

49. Два посматрача, који се налазе на географским ширинама $\varphi_1=+23^\circ 30'$ односно $\varphi_2=+25^\circ 45'$, удаљени су један од другог 278 км. Налазе ли се они на истом меридијану? Ако се не налазе, за колико би требало други посматрач, остајући на истој ширини, да промени своју географску дужину, да се нађе са првим на истом меридијану?

* 50. Из места А, чије су координате $L_1=+3^h 24^m.3$ и $\varphi_1=+2^\circ 15'$, полази 15. априла, у 10^h, брод за место В, чије су координате $L_2=-2^h 12^m.7$ и $\varphi_2=-18^\circ 46'$, и плови најкраћим путем, брзином од 20 чворова. Ако настави пловидбу, под овим условима, и преко места В: а) одредити координате најјужније тачке пута, као и датум и час кад у њу стиже; б) извести изразе за часовне промене географских координата брода и израчунати ове промене.

? 51. За колико се највише може скратити пут између два места на истом паралелу на Земљи (сфери) кад се плови по великом кругу место по паралелу? [Ball]

52. Које географске координате имају тачке на Земљи (сфери) чије су хоризонтске равни паралелне са равни вертикала азимута А у месту на екватору, чија је географска дужина L . — Израчунати координате ако је $A=70^\circ$, $L=-20^\circ$. [Barlow and Bryan]

53. Наћи координате тачака на Земљи (сфери) чије су хоризонтске равни паралелне са равни која са београдским меридијаном образује угао $A=70^\circ$.

54. Колико је далеко од подножја Ајфелова торња, чија је висина $h=300$ м, а који се налази на географској ширини $\varphi=48^\circ 50' 11''$, најближа тачка чија је линеарна брзина, услед Земљине ротације, једнака линеарној брзини врха Ајфелова торња?

55. Колико ће далеко пасти од вертикале тело пуштено, на екватору, са висине $h=300$ м, ако се занемаре отпор ваздуха и промене услед висине убрзања силе теже?

56. Израчунати аксифугална убрзања материјалних тачака на површини Земље (сфере) а на тачкама чије су географске ширине $\varphi_1=0^\circ$, $\varphi_2=30^\circ$ и $\varphi_3=60^\circ$, и оценити последице тих убрзања које сносе тежине тела на тим тачкама.

57. Коју би вредност требало да има угловна брзина Земљине ротације па да тела на екватору изгубе своју тежину?

58. Колико би износило убрзање силе теже на површини Земље (сфере) кад би њена маса равномерно испунила простор до Месечеве даљине (једнаке 60·27 Земљиних полупречника), а колико на површини Сунчеве сфере, кад би његова маса равномерно испунила запремину сфере полупречника једнака астрономској јединици (149.45×10^6 км)?
[Russell—Dugan—Stewart]

59. Колико износи убрзање силе теже у Кајени (главном граду Гијане, у Јужној Америци, скоро на самом екватору) где часовник са секундним клатном, који је у Паризу показивао тачно време, закашњава дневно за по $2^m 28^s$?

60. Ако пренесемо на екватор хронометар и часовник са клатном, који у Београду показују тачно време, хоће ли се појавити разлике међу њима и колике? Шта би требало урадити, ако се покажу разлике, да на екватору хронометар и часовник показују исто време?

61. За колико би се променила географска ширина Београда кад би Земља престала да ротира?

62. Како ће се понашати један према другом часовник са секундним клатном и хронометар, који су на екватору показивали тачно време, ако их пренесемо на један од Земљиних полова?

63. За колико би требало променити дужину клатна часовника, који је на екватору показивао тачно време, да би могао да показује тачно време и када би Земљина сфера одједном престала да ротира?

64. Показати да је привидна промена равни осцилација физичког клатна, у односу према меридијанској равни места, пропорционална синусу географске ширине тог места.

65. Израчунати азимут у Београду равни осцилација физичког клатна, које је пуштено да осцилира у равни првог вертикала, након 9^h звезданог времена од тренутка пуштања.

66. Извести изразе за правоугле координате и геоцентрични радијектор посматрачев на Земљи—елипсоиду, кад су дате велика и мала полуоса меридијанске елипсе и посматрачева географска ширина.

Изрaчунати координате и радије вектор за посматрача у Београду, чија је географска ширина $\varphi = +44^{\circ} 48' 13'' \cdot 20$ и ако се зна да су $a = 6378 \cdot 388$ км и $b = 6356 \cdot 909$ км.

67. Показати да је приближна вредност редуковане ширине, ако се занемаре квадрат и виши степени спљоштености,

$$\psi = \varphi - \left(\frac{\alpha}{2 \text{ arc } 1''} \sin 2\varphi \right)''$$

као и да су приближне вредности геоцентричне ширине и радија-вектора (у јединицама екваторског полупречника), ако се занемаре трећи и виши степени ексцентричности,

$$\varphi' = \varphi - \left(\frac{c^2}{2 \text{ arc } 1''} \sin 2\varphi \right)''$$

односно

$$r = 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi.$$

Изрaчунати ψ , φ' и r за $\varphi = +44^{\circ} 48' 13'' \cdot 20$, узимајући $\alpha = \frac{1}{297}$ и $e = 0.082$. [Ball]

68. Показати да имамо, ако је $|p| < 1$, за свако x :

- 1) $p \sin x + p^2 \sin 2x + p^3 \sin 3x + \dots = p \sin x (1 - 2p \cos x + p^2)^{-1}$;
- 2) $p \cos x + \frac{1}{2} p^2 \cos 2x + \frac{1}{3} p^3 \cos 3x + \dots = -\log \sqrt{1 - 2p \cos x + p^2}$,

где \log означава природне логаритме.

69. Показати да имамо, ако је

$$\text{tg } y = n \text{ tg } x, \quad \text{за } n > a, \text{ и, за } n = 1, y = x,$$

$$y = x + \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \sin 2x + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \sin 4x + \frac{1}{3} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^3 \sin 6x + \dots$$

70. Изразити разлику између геоцентричне и географске ширине, а исто тако и разлику између редуковане и географске ширине, као функцију географске ширине у облику тригонометриског реда.

71. Приказати логаритам геоцентричног радија вектора, као функцију географске ширине, у облику:

- 1) бесконачног тригонометриског реда;
- 2) бесконачног реда по све већим степенима од $\sin \varphi$.

72. Одредити екстремне вредности разлика геоцентричне и географске, односно редуковане и географске ширине, тачака на Земљи — елипсоиду.

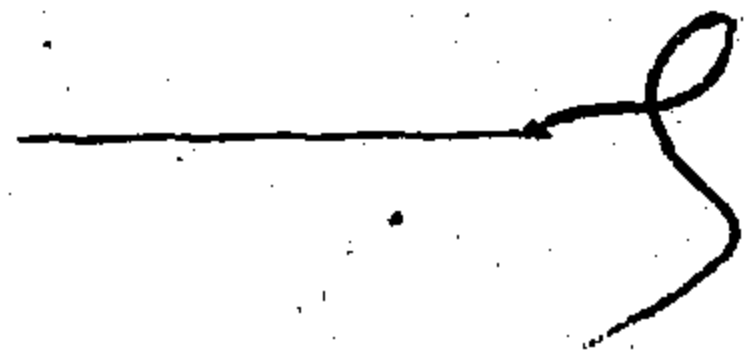
73. Одредити између којих се граница крећу дужине меридијанских лукова од једног степена на Земљи-елипсоиду, и показати да је однос највеће према најмањој вредности једнак $\left(\frac{a}{b}\right)^3$.

74. Показати да је спљоштеност, α , Земљина елипсоида, ако се занемаре њени квадрати и виши степени, дата изразом

$$\alpha = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{s_1}{s_2}\right),$$

где s_1 и s_2 означавају дужине лукова од 1° Земљиних меридијана на $\varphi_1 = +60^\circ$, односно $\varphi_2 = +45^\circ$. [Ball]

75. Извести изразе за убрзање силе теже на Земљи-елипсоиду у тачки географске ширине φ .



129

—(4ci)

III/ ПРИВИДНО ДНЕВНО КРЕТАЊЕ НЕБЕСКЕ СФЕРЕ

1.9.1972

—(2ci)

76. Које хоризонтске, а које екваторске координате имају некретнице које се налазе у исти мах и на небеском екватору и у посматрачеву хоризонту?

77. Које су за посматрача на северној географској ширини φ хоризонтске координате небеских полова, а које екваторске координате посматрачева зенита и надира?

78. Које су месне екваторске координате основних тачака хоризонтске равни, дакле тачака S, W, N и E, посматрача на географској ширини φ ?

79. Између којих се граница крећу деклинације некретница које за посматрача у Београду ($\varphi = +44^\circ 48'$) остају стално над хоризонтом односно стално под хоризонтом?

80. На којим местима пролази кроз зенит, а на којим је циркумполарна, звезда α Luge (Vega), чија је деклинација $\delta = +38^\circ 44'$?

* 81. Између којих се граница крећу за посматрача у Београду ($\varphi = +44^\circ 48'$) у току звезданог дана зенитске даљине некретница чија је деклинација $\delta = +63^\circ 12'$?

82. Која некретница кроз зенит места географске ширине $\varphi = +38^\circ 44'$ пролази $4^h 42^m 52^s$ звезданог времена после кулминације некретнице чија је ректасцензија $\alpha = 13^h 52^m 35^s$?

83. Колики је у Гриничу часовни угао некретнице, ако је у месту географске дужине $L = -40^\circ$ њен часовни угао, у истом тренутку, $H_1 = 6^h 5^m 4^s$? А колики у том месту, када је у Гриничу часовни угао $H_2 = 6^h 5^m 4^s$?

84. Колики је у Гриничу часовни угао α Bootis (Arcturus), чија је ректасцензија $\alpha = 14^h 13^m 36^s.12$, у тренутку када је у Београду, чија је географска дужина $L = -20^\circ 30' 48''$, месно звездано време $t = 15^h 21^m 14^s.37$?

85. Ако су ректасцензије двеју некретница $\alpha_1 = 10^h 9^m 8^s$ и $\alpha_2 = 18^h 19^m 20^s$, колики је часовни угао друге у тренутку када је часовни угао прве $H_1 = 49^\circ 39' 30''$?

86. Колики део звезданог дана проведе некретница чија је деклинација дата изразом $\sin \delta = \frac{1}{3} \sqrt{3}$ над, а колики део под хоризонтом места чија је географска ширина $\varphi = 45^\circ$?

* 87. Шта се све може одредити из посматраних висина исте циркуларне звезде у обема њеним кулминацијама?

88. Између којих се граница налазе деклинације некретница које за посматрача на географској ширини φ не пролазе кроз први вертикал? Израчунајте те границе за $\varphi = +44^\circ 48'$.

89. Са извесног места на северној хемисфери посматрана је некретница, у тренутку њене горње кулминације, на зенитској даљини $z_2 = 6^\circ 33' 44'' \cdot 5$, а у тренутку њене доње кулминације на зенитској даљини $z_1 = 71^\circ 27' 39'' \cdot 3$. Одредити тачну посматрачеву географску ширину и деклинацију некретнице.

Образложити зашто овај задатак има два решења?

90. Са извесног места, А, чије су географске координате φ_1 и L_1 , две познате звезде налазе се у истом азимуту и излазе за место В. Које су географске координате овог места?

* 91. Посматрана је некретница из места чија је географска ширина $\varphi = +38^\circ 58' 53''$, на зенитској даљини $z = 69^\circ 42' 30''$ у вертикалу азимута $A = 300^\circ 10' 30''$; одредити деклинацију и часовни угао звезде.

Шта би требало још да је познато да би могла бити одређена и ректасцензија звезде?

* 92. Из места географске ширине $\varphi = +42^\circ 41' 40''$ посматрана је, у $8^h 54^m 20^s$ звезданог времена, на зенитској даљини $z = 61^\circ 48' 30''$, некретница чије су координате $\alpha = 4^h 28^m 48^s \cdot 38$, $\delta = +16^\circ 15' 30''$. Одредити поправку часовника.

93. Одредити правац меридијана и географску ширину посматрача који је, одређеног датума, у $9^h 5^m 21^s$, посматрао на зенитској даљини $z = 32^\circ 35' 23'' \cdot 5$ и азимуту $A = 118^\circ 23' 57'' \cdot 2$, некретницу чије су координате $\alpha = 46^\circ 20' 15''$ и $\delta = +58^\circ 52' 46'' \cdot 2$.

94. Одредити конструкцијом деклинацију звезде, као и географску ширину места са којег је та звезда посматрана, у тренутку њене кулминације, на висини $h = 25^\circ$, а чији је азимут залаза $A = 65^\circ$, — па рачуном проверити добивене резултате.

95. Одредити графички деклинацију и ректасцензију некретнице, посматране са географске ширине φ , у тренутку t , на зенитској даљини z и азимуту A .

Применити поступак на податке: $\varphi = +50^\circ$; $t = 8^h 40^m$; $z = 35^\circ$ и $A = 40$, па нумерички проверити тачност решења.

96. У којим случајевима остаје, током звезданог дана, зенитска даљина некретнице непромењена?

97. Одредити географску ширину места и координате некретнице која, у том месту, излази у $12^h 33^m 24^s$ зв. вр., која пролази кроз посматрачев зенит и проводи над његовим хоризонтом $14^h 19^m 48^s$ зв. вр.

98. Показати да је часовни угао некретнице, деклинације δ , у тренутку њена излаза за посматрача на географској ширини φ , дат једначином

$$\operatorname{tg}^2 \frac{H}{2} = \cos(\varphi - \delta) \sec(\varphi + \delta). \quad [\text{Smart}]$$

99. Ако су часовни углови некретнице, позитивне деклинације δ : H_1 при њену пролазу кроз први вертикал (западни), а H_2 при залазу за посматрача на позитивној географској ширини φ — показати да је

$$\cos H_1 \cos H_2 + \operatorname{tg}^2 \delta = 0. \quad [\text{Smart}]$$

100. Ако некретница деклинације δ у меридијану места географске ширине φ достиже зенитску даљину z_1 , а у првом вертикалу зенитску даљину z_2 — показати да је

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \delta &= \operatorname{cosec} z_1 \sec z_2 - \operatorname{ctg} z_1, \\ \operatorname{ctg} \varphi &= \operatorname{ctg} z_1 - \operatorname{cosec} z_1 \cos z_2. \end{aligned} \quad [\text{Godfray}]$$

101. Показати, ако је зенитска даљина (z) некретнице мања од колатитуде (ψ) посматрачеве, да је

$$\psi = \xi + \operatorname{arc} \cos(\cos z \sec \eta),$$

где је $\operatorname{tg} \xi = \operatorname{ctg} \delta \cos H$ и $\sin \eta = \cos \delta \sin H$,

и објаснити геометриско значење величина ξ и η . [Smart]

102. Ако за посматрача на географској ширини φ две некретнице, деклинацијâ δ_1 и δ_2 , једновремено излазе, али прва кулминира када друга залази, — показати да је тада

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_1 = 1 - 2 \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_2. \quad [\text{Smart}]$$

103. Одредити географску ширину места у којем две некретнице познатих координата залазе једновремено.

104. Показати да су часовни угао (H) и азимут (A) некретнице, у тренутку кад она достигне висину једнаку посматрачевој географској ширини (φ), дати изразима

57
30

$$H = \arccos \left[\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \right) \right],$$

$$A = 2 \arccos \left[\sec \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \right) \right],$$

где δ означава деклинацију некретнице.

[Godfray]

105. Одредити географску ширину места у којем две некретнице познатих координата стижу једновремено у први вертикал тог места.

106. Како изгледају везе између екваторских координата (A, D) пола великог круга што спаја некретнице Σ_1 и Σ_2 и координата, (α_1, δ_1) односно (α_2, δ_2) , ових некретница?
[Ball]

107. Ако некретнице Σ_1 и Σ_2 , чије су координате (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2) , доспевају у исти вертикал за посматрача на географској ширини φ , показати да је онда

$$\cos \varphi > \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cosec} \sigma,$$

где σ означава сферну даљину $\Sigma_1 \Sigma_2$.

[Ball]

108. Одредити ректасцензију тачке пресека са небеским екватором, као и нагиб према екватору, великог круга што пролази кроз некретнице чије су координате (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2) .

Применити решење на некретнице

$$\alpha_1 = 7^h 20^m 1^s.33, \quad \alpha_2 = 14^h 29^m 15^s.87,$$

$$\delta_1 = -15^\circ 16' 17''; \quad \delta_2 = +42^\circ 41' 40'';$$

и објаснити положај друге некретнице.

109. Израчунати висине и азимуте на којима су посматрачи из Београда и Њујорка, чије су географске координате:

$$L_1 = -1^h 22^m 3^s \quad \text{и} \quad \varphi_1 = +44^\circ 48'.2,$$

$$L_2 = +4^h 55^m 50^s \quad \text{и} \quad \varphi_2 = +40^\circ 48'.6,$$

посматрали, извесног датума, α Aurigae (Капела), чије су координате

$$\alpha = 5^h 13^m 26^s \quad \text{и} \quad \delta = +45^\circ 57'.3,$$

у тренутку њене горње кулминације у Гриничу.

110. Посматрачи A и B имају исту географску ширину, а географске дужине им се разликују за 180° . Одредити њихову географску ширину, знајући да између тренутка залаза за посматрача B звезде α Leonis, чија је деклинација $\delta = +12^\circ 11' 20''$, и тренутка њена излаза за посматрача A протекне $5^h 30^m$ звезданог времена.

Задатак решити, прво, графички, па проверити рачунски. [Humbert]

111. Кроз први вертикал (западни) места на географској ширини $\varphi = +44^\circ 48' 13''$ пролазе једновремено две некретнице, које имају деклинације $\delta_1 = +10^\circ 20' 30''$ и $\delta_2 = +29^\circ 28' 27''$. Одредити угловну даљину њихову и разлику њихових ректасцензија.

Који би још податак требало знати, па да би се могле одредити и ректасцензије посматраних некретница?

112. α Geminorum (Castor), чије су координате $\alpha = 7^h 31^m 48^s.0$ и $\delta = +31^\circ 59' 13''$, посматрана је при пролазу кроз први (западни) вертикал: извесног места и датума, у $t = 10^h 55^m 56^s.5$ звезданог времена. Одредити,

- 1) посматрачеву географску ширину;
- 2) грешку коју изазива у израчунатој географској ширини грешка од 1^s у процењеном звезданом времену пролаза кроз први вертикал;
- 3) грешку коју изазива у израчунатој географској ширини грешка од $1''$ у азимуту првог вертикала.

113. Две некретнице, чије су координате

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 7^h 31^m 48^s.2, & \alpha_2 &= 10^h 6^m 2^s.4, \\ \delta_1 &= +31^\circ 59' 14''; & \delta_2 &= +12^\circ 10' 59''; \end{aligned}$$

посматране су са извесног места, у извесном тренутку t , на зенитским даљинама

$$z_1 = 46^\circ 57' 16'' \quad \text{и} \quad z_2 = 37^\circ 1' 58''.$$

Одредити посматрачеву географску ширину и тренутак посматрања.

114. У који тренутак звезданог времена за посматрача на географској ширини $\varphi = +36^\circ 47' 50''$ некретнице Σ_1 и Σ_2 , са координатама:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1^h 35^m 57^s.2, & \alpha_2 &= 3^h 39^m 20^s.8, \\ \delta_1 &= +67^\circ 36' 31''; & \delta_2 &= +42^\circ 18' 28''; \end{aligned}$$

достигу једновремено исту висину?

После колико звезданог времена иза тог тренутка ће разлика њихових зенитских даљина достићи $1''$? [Sorbonne 1922]

115. Са извесног места географске ширине φ посматране су две некретнице, Σ_1 и Σ_2 , једнаких ректасцензија и познатих деклинација δ_1 и δ_2 , на истој висини, у размаку τ звезданог времена. Ако је, у тренутку посматрања прве звезде, њен часовни угао H_1 :

1) показати да је

$$\cos(H_1 + M) = 2 N \sin M \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cosec} \tau,$$

где је

$$N = \sin \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_2) \cos \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2) \sec \delta_2,$$

$$\operatorname{ctg} M = \operatorname{ctg} \tau - \cos \delta_1 \sec \delta_2 \operatorname{cosec} \tau;$$

2) шта би требало још да се зна па да се могу одредити и посматрачева географска ширина и висина на којој су Σ_1 и Σ_2 посматране.

116. Две некретнице, Σ_1 и Σ_2 , познатих координата, (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2) , пролазе једновремено кроз посматрачев вертикал азимута A . Показати да је, у том случају, посматрачева географска ширина дата изразом

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} [\operatorname{tg} \delta_2 \sin (\sigma + H_2) \operatorname{cosec} \sigma],$$

где је H_2 часовни угао друге некретнице при њену пролазу кроз вертикал азимута A , а σ помоћни угао одређен једначином

$$\operatorname{tg} \left[\sigma - \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \right] = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \sin (\delta_2 + \delta_1) \operatorname{cosec} (\delta_2 - \delta_1).$$

Шта би требало да је познато, поред датих података, па да се може израчунати не само посматрачева географска ширина, већ и азимут вертикала и како?

117. Кад су за одређено место промене зенитске даљине некретнице у току звезданог дана најспорије, а кад најбрже? Кад стално једнаке променама часовног угла?

118. Ако је A_d азимут у тренутку највеће дигресије циркумполарне звезде деклинације δ , показати да се за t секунда од тренутка највеће дигресије њен азимут промени за

$$\left[-\frac{1}{2} (15 t)^2 \operatorname{arc} 1'' \sin^2 \delta \operatorname{tg} A_d \right]''.$$

Израчунати промену у азимуту произвољно изабране циркумполарне, за посматрача на географској ширини $\varphi = +44^\circ 48' 13''$, за 10^s од њене највеће дигресије.

119. Израчунати промене, за секунду звезданог времена, висине и азимута некретнице познатих координата, за посматрача на северној географској ширини у тренутцима: 1) излаза некретнице; 2) пролаза кроз први вертикал; 3) горње кулминације.

120. Показати, прво геометриски па онда аналитички, кад је и колика је највећа промена висине некретнице која кулминира северно од посматрачева зенита.

121. Показати да је промена паралактичког угла некретнице дата изразом

$$\frac{dq}{dA} = \cos \varphi \cos A \sec h.$$

122. Израчунати промену висине, за минуто звезданог времена, у тренутку горње кулминације за посматрача на географској ширини $\varphi = +44^\circ 48' 13''$ звезде α Tauri (Aldebaran), чија је деклинација $\delta = +16^\circ 25' 19''$.

123. Прво геометриски извести, па аналитички проверити:

а) кад ће грешка измерене зенитске даљине небеског тела познатих координата, из места географске ширине φ , најмање утицати на изведену поправку часовника?

б) кад ће грешка у посматрачевој географској ширини најмање утицати на поправку часовника изведену из посматране зенитске даљине небеског тела познатих координата?

124. Одредити деклинацију некретнице чија разлика између азимута и часовног угла достиже највећу вредност у тренутку залаза за посматрача на географској ширини φ .

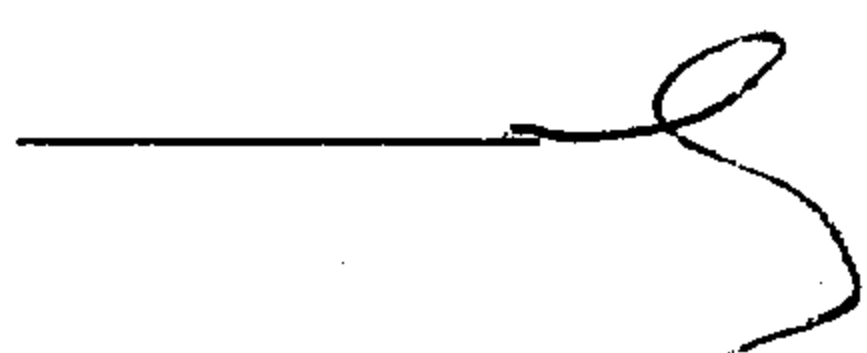
125. Одредити висину некретнице која има највећу деклинацију од свих звезда које се у датом тренутку налазе на вертикалу азимута A , за посматрача на географској ширини φ .

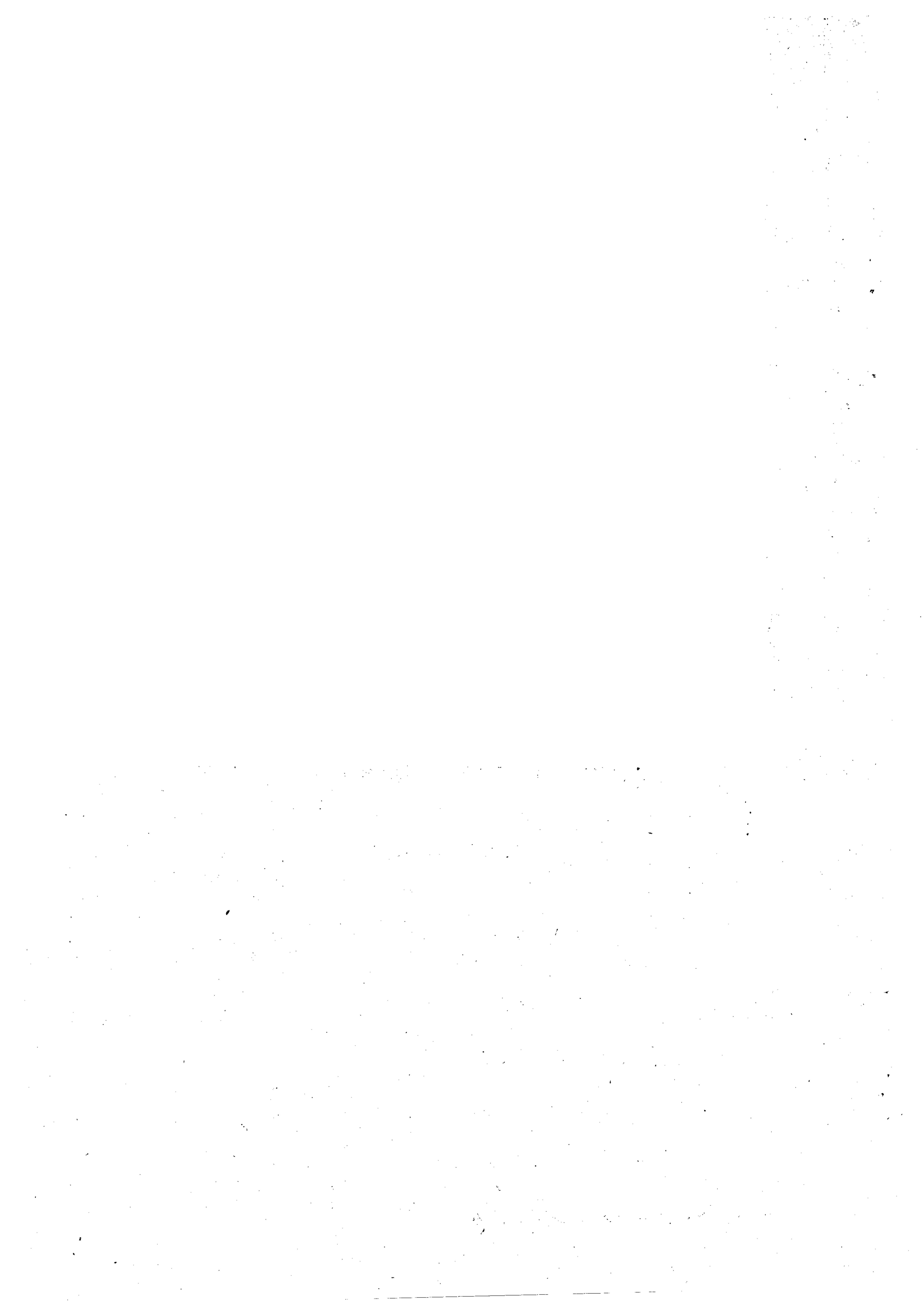
126. Показати да се помоћу посматране висине h , у тренутку t звезданог времена, Северњаче (α Ursae minoris), чије су и координате дате, добива за посматрачеву географску ширину, ако се занемаре други и виши степени поларне даљине (p):

$$\varphi = h - p \cos H,$$

а ако се занемаре трећи и виши степени поларне даљине,

$$\varphi = h - p \cos H + \frac{1}{2} p^2 \operatorname{tg} h \sin^2 H \operatorname{arc} 1''.$$





76

РЕШЕЊА) с. 2/28

Смирнова

~~2/2~~

Summa!

apz

19

СФЕРНА ТРИГОНОМЕТРИЈА

Jgr. 1/2

19

1. За ово прерачунавање имамо

1 радијан = 180°/π = 10800'/π = 648000''/π

или

1 радијан { = 57°.295779... = 57° 17' 44''.806...; = 3437'.74677...; = 206264''.806....

Према томе ћемо имати, ако још скраћено множимо:

Table with 3 columns (a, б, в) showing multiplication of 57.29578, 3437.7468, and 206264.80 by 562 to get alpha values.

Помоћу логаритама бисмо имали, ако вредности радијана у степенима, минутама и секундама означимо са ρ°, ρ', односно ρ'':

Table with 3 columns (a, б, в) showing log values for rho, alpha, and alpha'.

alpha^0 = 15^0.18338; alpha' = 911'.0029; alpha'' = 54660''.17;

На основи ових вредности видимо непосредно да је

г) alpha = 15^0 11' 0''.17.

2. За ово прерачунавање имамо

1^0 = π/180 = 0.01745329.. радијана, што се обично означава са arcs 1^0;

19

78
38

$$1' = \frac{\pi}{10\,800} = 0.000\,290\,88 \dots \text{ радијана, што се обично означава са } \text{arc } 1';$$

$$1'' = \frac{\pi}{648\,000} = 0.000\,004\,848 \dots \text{ радијана, што се обично означава са } \text{arc } 1'';$$

За ово исто прерачунавање помоћу логаритама имамо:

$$\log \text{arc } 1' = 8.241\,8774 - 10; \quad \log \text{arc } 1'' = 6.463\,7261 - 10;$$

$$\log \text{arc } 1'' = 4.685\,5749 - 10.$$

Према томе, ако се у резултату задовољимо са четири децимале (јер само проверавамо резултате претходног задатка) имаћемо:

- за 15° : $15 \times 0.017\,45 \dots \dots \dots 0.2618$;
- за $11'$: $11 \times 0.000\,29 \dots \dots \dots 0.0032$;
- за $0''.17$: $0.17 \times 0.000\,005 \dots \dots \dots$;

дакле

$$\alpha = 15^\circ 11' 0''.17 = 0.2650 \text{ радијана.}$$

3. Ово прерачунавање врши се помоћу везе по којој пуном углом одговарају 24 часа. Према томе:

$$1^h = \frac{24^h}{360} = \frac{1^h}{15} = \frac{60^m}{15} = 4^m;$$

$$1^h = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ;$$

$$1^m = \frac{4^m}{60} = \frac{1^m}{15} = \frac{60^s}{15} = 4^s;$$

$$1^m = \frac{15^\circ}{60} = \frac{1^\circ}{4} = \frac{60'}{4} = 15';$$

$$1'' = \frac{4^s}{60} = \frac{1^s}{15} = 0^s.067.$$

$$1^s = \frac{15'}{60} = \frac{1'}{4} = \frac{60''}{4} = 15''.$$

За дати угао $x^\circ y' z''$ имали бисмо, у временим јединицама, $\left(\frac{x}{15}\right)^h \left(\frac{y}{15}\right)^m \left(\frac{z}{15}\right)^s$, где слова у излозицима претстављају уобичајене ознаке за часове, минуте, односно секунде.

Ако сад при дељењу x са 15 означимо количник са ξ , а остатак са p ; а при дељењу y са 15 означимо количник са η , а остатак са q , имаћемо:

$$\left(\frac{x}{15}\right)^h = \left(\xi + \frac{p}{15}\right)^h = \xi^h + 4p \frac{1^h}{60} = \xi^h + 4p \frac{60^m}{60} = \xi^h + (4p)^m;$$

$$\left(\frac{y}{15}\right)^m = \left(\eta + \frac{q}{15}\right)^m = \eta^m + 4q \frac{1^m}{60} = \eta^m + 4q \frac{60^s}{60} = \eta^m + (4q)^s.$$

Према томе би се правило за непосредно прерачунавање датог угла $x^\circ y' z''$ у времене јединице могло претставити обрасцем:

$$x^\circ y' z'' = \xi^h (4p + \eta)^m \left(4q + \frac{z}{15}\right)^s.$$

За дати угао, $\alpha = 237^\circ 51' 37''.62$, било би: $x = 237$, $y = 51$, $z = 37.62$;
 $x = 15 \times 15 + 12$; дакле $\xi = 15$, $p = 12$, те ће бити $\xi^h (4p)^m \dots 15^h 48^m$
 $y = 15 \times 3 + 6$; дакле $\eta = 3$, $q = 6$, те ће бити $\eta^m (4q)^s \dots 3 24^s$

$\frac{z}{15}$ даје $\dots 2.508$;

те тако добивамо да је $\alpha = 237^\circ 51' 37''.62 = 15^h 51^m 26^s.508$.

4. Ако дати угао напишемо у облику $\xi^h \eta^m \zeta^s$, његова вредност у степенима, минутима и секундама износила би, према горњим односима, $(15\xi)^0 (15\eta)' (15\zeta)''$. Но овако бисмо добивали за минуте и секунде бројеве и веће од 60, те би их још требало овим бројем делити и додати јединицама претходног реда. Прерачунавање је, међутим, непосредније ако се претходно изврши дељење са 60 бројева 15η и 15ζ , то јест дељење бројева η и ζ са 4. Ако количнике ових дељења означимо са u , односно v , а остатке са μ , односно ν , што ће рећи ставимо

$$\eta = 4x + \mu \quad \text{и} \quad \zeta = 4y + \nu,$$

имаћемо

$$(15\eta)' = x.60' + (15\mu)' = x^0 (15\mu)',$$

$$(15\zeta)'' = y.60'' + (15\nu)'' = y' (15\nu)''.$$

Према томе би се правило за непосредно прерачунавање угла $\xi^h \eta^m \zeta^s$ у степене, минуте и секунде могло претставити обрасцем:

$$\xi^h \eta^m \zeta^s = (15\xi + x)^0 (15\mu + y)' (15\nu)''.$$

За дати угао, $\alpha = 15^h 51^m 26^s.508$, било би $\xi = 15$, $\eta = 51$, $\zeta = 26.508$;
 према томе: $(15\xi)^0 = 225^0$

$\eta = 4 \times 12 + 3$, дакле $x = 12$, $\mu = 3$, те ће бити: $x^0 (15\mu)' \dots 12 45'$

$\zeta = 4 \times 6 + 2.508$, дакле $y = 6$, $\nu = 2.508$, те ће бити: $y' (15\nu)'' \dots 6 37''.62$;

и тако добивамо да је $\alpha = 15^h 51^m 26^s.508 = \dots = 237^\circ 51' 37''.62$.

5. Поћи ћемо од познатих редова

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{5} + \frac{\alpha^5}{120} - \dots, \quad \text{и} \quad \text{tg } \beta = \beta + \frac{\beta^3}{5} + \frac{2\beta^5}{15} + \dots$$

место којих ћемо, према условима задатка, узети само

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} \quad \text{и} \quad \text{tg } \beta = \beta + \frac{\beta^3}{3}.$$

Али ако степене више од трећег занемарујемо, онда је

$$\frac{1}{6} \sin^3 \alpha = \frac{1}{6} \alpha^3, \quad \text{и} \quad \frac{1}{3} \text{tg}^3 \beta = \frac{1}{3} \beta^3.$$

Ако прве саберемо, а друге одузмемо добивамо

$$\alpha = \sin \alpha + \frac{1}{6} \sin^3 \alpha = \sin \alpha \left(1 + \frac{1}{6} \sin^2 \alpha \right),$$

и

$$\beta = \text{tg } \beta - \frac{1}{3} \text{tg}^3 \beta = \text{tg } \beta \left(1 - \frac{1}{3} \text{tg}^2 \beta \right).$$

На основи датих вредности за $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ налазимо

$$\frac{1}{6} \sin^2 \alpha = 0.000\,0459 \quad \text{и} \quad \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \beta = 0.000\,0918.$$

И тако налазимо за отступања усвојених од тачних вредности, у деловима секунде:

$$\text{угла } \alpha : 3422''.53 \times 0.000\,0459 = 0''.16,$$

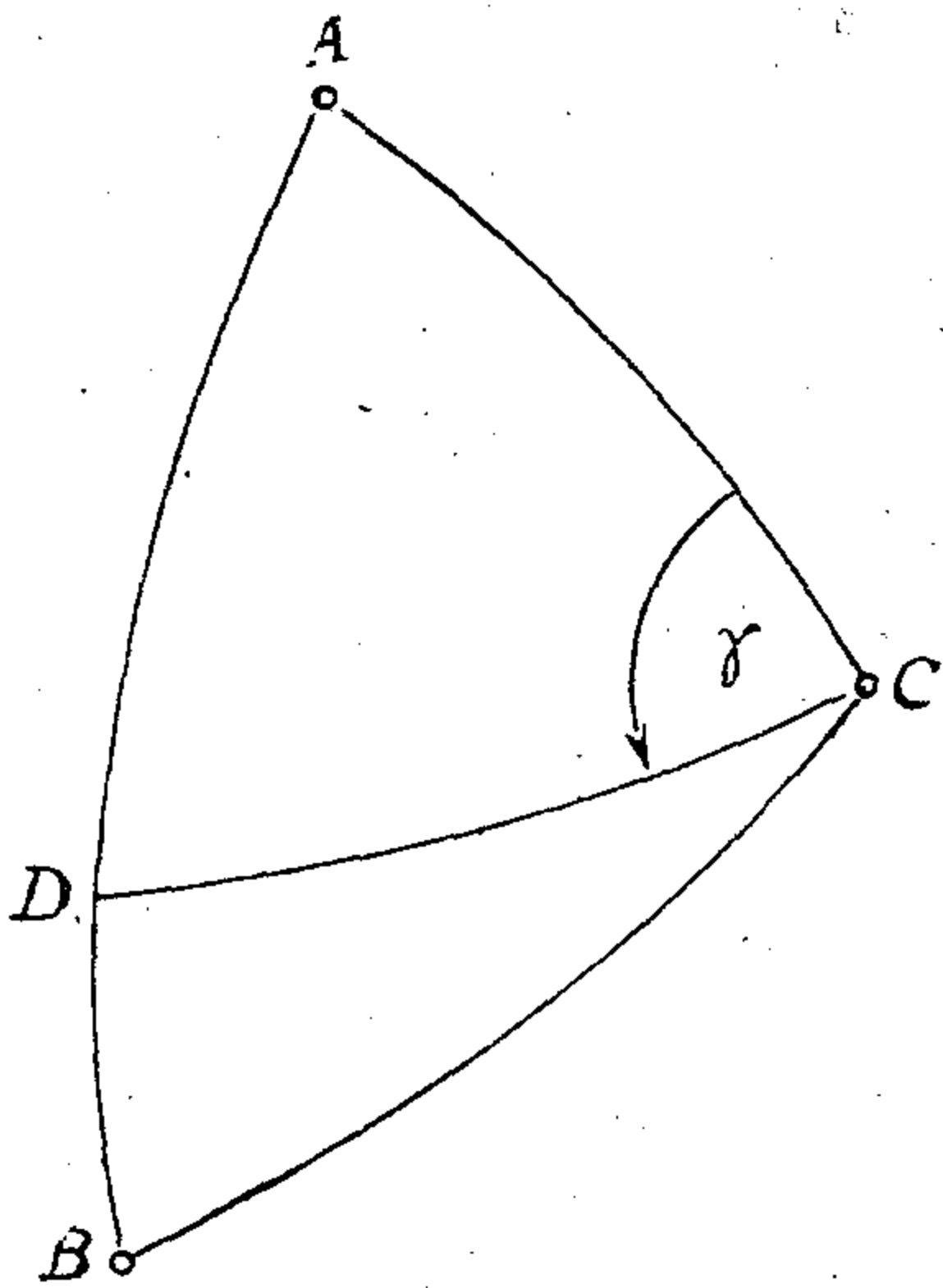
$$\text{угла } \beta : 3423.01 \times 0.000\,0918 = 0.31,$$

тако да, према условима задатка, за тачне вредности углова имамо:

$$\alpha = 0^\circ 57' 2''.69 = 3422''.69$$

и

$$\beta = 0^\circ 57' 2''.70 = 3422''.70.$$



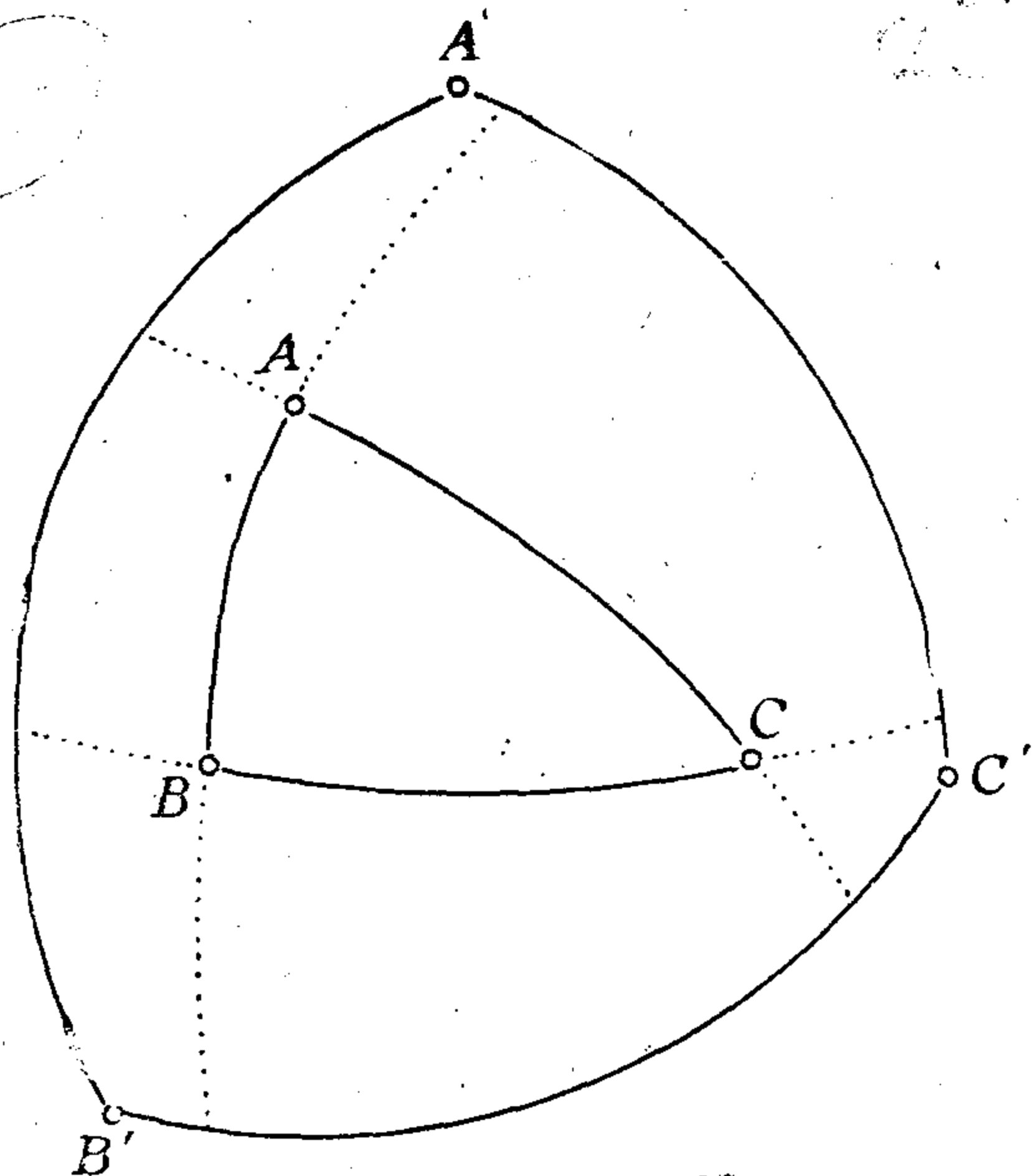
Сл. 7. 24

6. Нека је у сферном троуглу ABC (в. сл. 7) угао C већи од угла A . Одмеримо у темену C угао $\gamma = A$. Тако ћемо добити једнакокрани сферни троугао ACD , у којем је $AD = CD$. Како је, према познатом ставу, $CD + DB > BC$, дакле и $AD + DB > BC$, то је $AB > BC$. Доиста, дакле, већем углу насупрот у сферном троуглу налази се већа страна.

За доказ да се, и обрнуто, већој страни насупрот налази већи угао, помоћи ћемо се поларним сферним троуглом $A'B'C'$ (в. сл. 8).

Међу елементима оваквих двају сферних троуглова постоје, као што знамо, везе $c + C' = a + A' = 180^\circ$, или $c - a = A' - C'$. Значи, ако је $c > a$ биће и $A' > C'$. Но онда ће, према претходном ставу, у поларном сферном троуглу бити и $a' > c'$. А како, опет, према вези међу елементима ових сферних троуглова имамо $a' + A = c' + C = 180^\circ$, или $a' - c' = C - A$, то из $a' > c'$ следује да ће, доиста, у сферном троуглу ABC , у којем је $c > a$, бити и $C > A$, то јест већој страни на супрот налазити се већи угао.

7. Да бисмо доказали тврђење, продужимо сваку од страна датог сферног троугла до половине великог круга (стране AB и AC продужимо за BA' и CA' , да буде $ABA' = ACA' = \pi$). Тако ћемо за свако теме и две стране датог сферног троугла добити по један сферни двоугао, као $ABA'C$ (в. сл. 9). Сваки



Сл. 8.

од њих састоји се из по два сферна троугла: датог, ABC , и допунског, $BA'C$. Углови овог су, то јест допунског: $\pi - B$, $\pi - C$, A . За њих имамо неједначину

$$(\pi - B) + (\pi - C) + A > \pi, \text{ или } C - A < \pi - B,$$

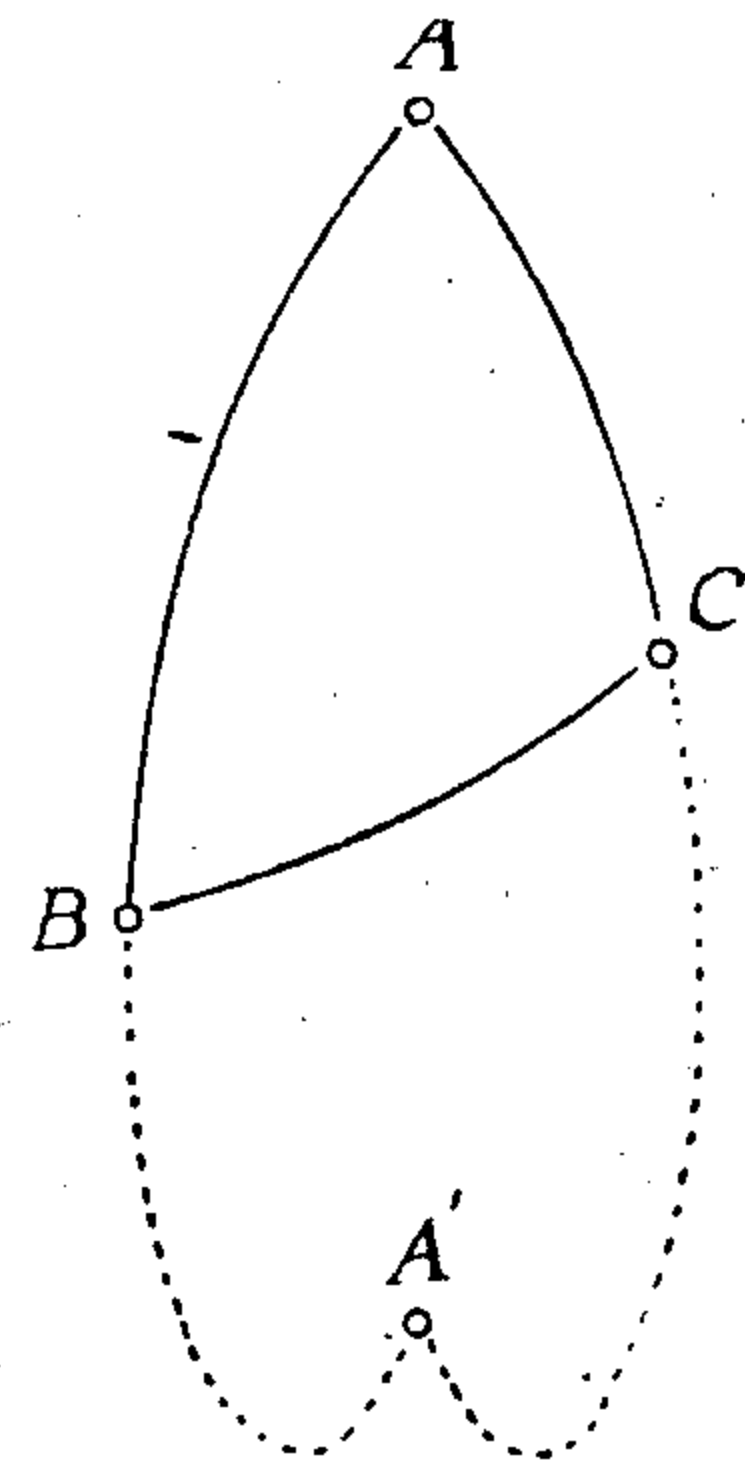
што је и требало показати. На сличан начин доказује се да је и

$$A - B < \pi - C, \text{ и } B - C < \pi - A.$$

Из ових неједначина закључујемо да ће у правоуглом сферном троуглу, рецимо, кад је $C = \frac{\pi}{2}$, бити

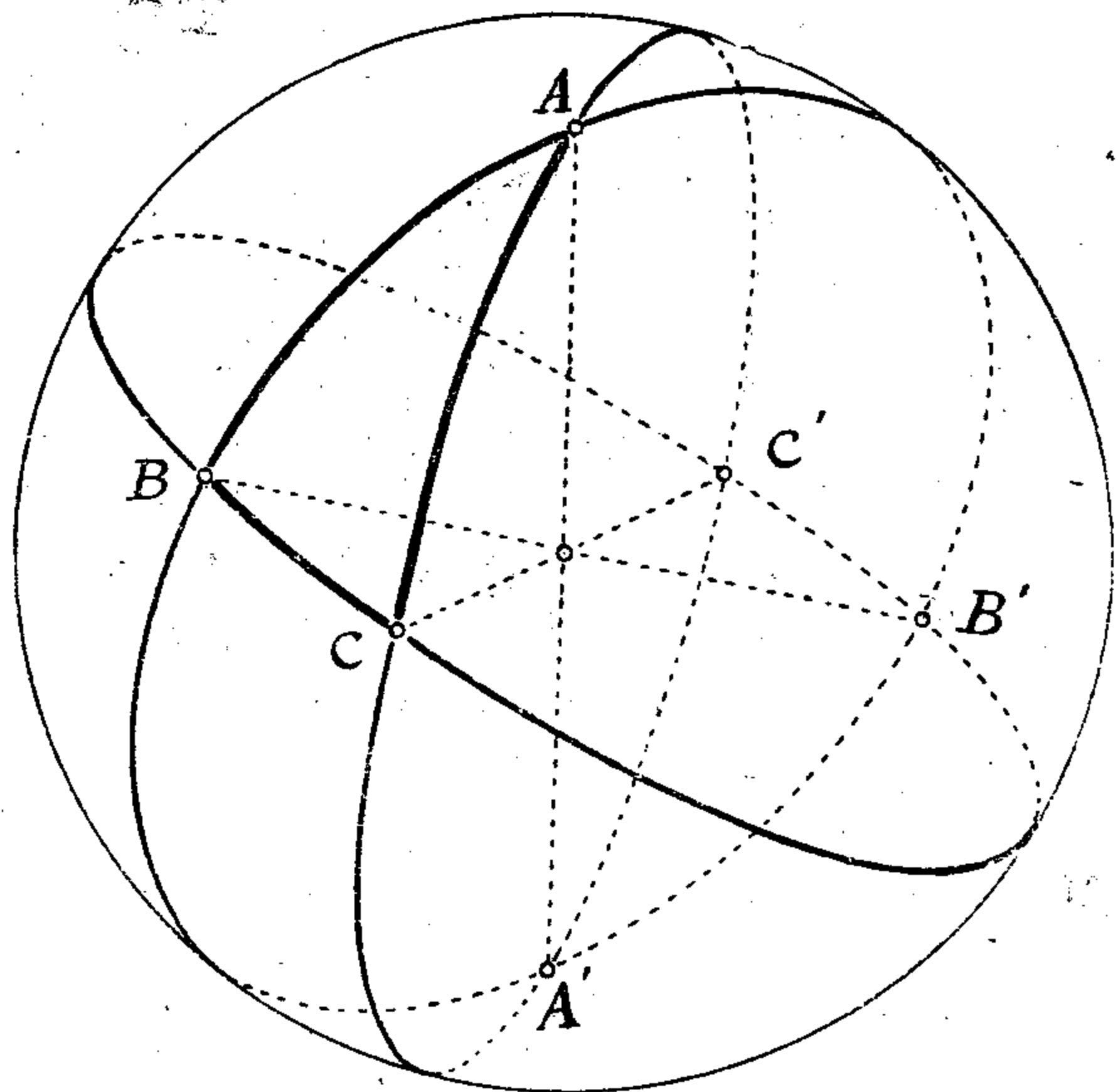
$$A - B < \frac{\pi}{2} \text{ и } A + B < \frac{3\pi}{2};$$

то јест разлика углова на хипотенузи мања од $\frac{\pi}{2}$, а збир њихов мањи од $\frac{3\pi}{2}$.



Сл. 9.

8. Да бисмо извели образац за површину сферног троугла ABC (в. сл. 10), продужимо му сваку од страна до половине великог круга. Добићемо тако три сферна двоугла: $ABA'SA$, $B'CB'AB$ и $SAC'BC$. Означимо им површине са p_A , p_B , p_C .



Сл. 10.

Означимо са S површину сфере; онда је

$$p_A = \frac{A^\circ}{360^\circ} \cdot S, \quad p_B = \frac{B^\circ}{360^\circ} \cdot S,$$

$$p_C = \frac{C^\circ}{360^\circ} \cdot S,$$

или

$$p_A = \frac{A}{2\pi} \cdot 4R^2\pi = 2AR^2,$$

$$p_B = \frac{B}{2\pi} \cdot 4R^2\pi = 2BR^2,$$

$$p_C = \frac{C}{2\pi} \cdot 4R^2\pi = 2CR^2,$$

где су са A° , B° , C° означени углови сферног троугла у степенима, а са A , B , C у радијанима; са R полупречник сфере.

Са сл. 10 видимо да је

$$p_A + p_B + p_C = (ABC + CB'A) + (BCA + AC'B) + (CAB + BA'C).$$

Ако приметимо да је $BA'C = B'AC'$, па у последњем члану на десној страни извршимо ту замену, имаћемо

$$p_A + p_B + p_C = (ABC + CB'A + AC'B + B'AC') + 2ABC = \frac{1}{2} S + 2p,$$

82
42

где је са p означена површина датог сферног троугла, ABC . Унесемо ли у ову једначину за површине сферних двоуглова, p_A, p_B, p_C , напред дате вредности, добићемо за површину сферног троугла ABC

$$2p = \frac{S}{360^\circ} (A^\circ + B^\circ + C^\circ - 180^\circ), \text{ или } p = \frac{R^2\pi}{180^\circ} (A^\circ + B^\circ + C^\circ - 180^\circ) = \frac{\varepsilon^\circ}{180^\circ} R^2\pi;$$

односно

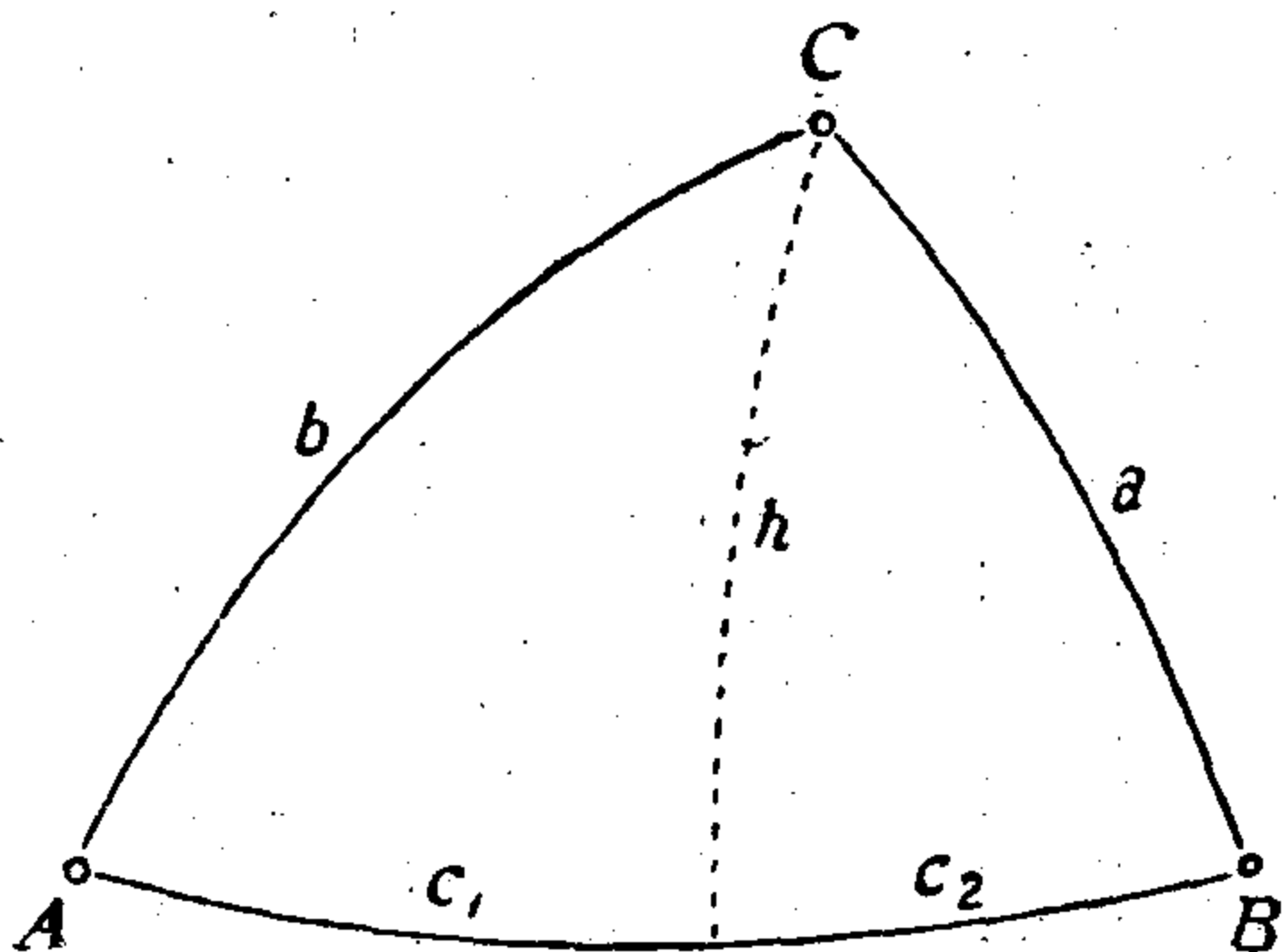
$$2R^2(A + B + C) = 2R^2\pi + 2p, \text{ или } p = R^2(A + B + C - \pi) = R^2\varepsilon,$$

при чему смо са ε° означили вишак преко 180° , односно са ε вишак преко π — збира углова датог сферног троугла, то јест такозвани сферни ексцес.

$$9. A^\circ + B^\circ + C^\circ = 80^\circ + 70^\circ + 60^\circ = 210^\circ;$$

значи, за сферни ексцес имаћемо, у овом случају, $\varepsilon = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Према томе за површину сферног троугла налазимо

$$p = \frac{30^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{24},$$



Сл. 11.

што ће рећи двадесетчетврти део површине сфере полупречника једнака јединици.

10. Спуштањем из темена C лука великог круга нормално на страну c сферног троугла ABC (в. сл. 11) добивају се два правоугла сферна троугла, зваћемо их леви и десни. Стране левога су b, h, c_1 ; стране деснога су h, c_2, a . При томе је

$$c_1 + c_2 = c, \quad \text{или} \quad c_2 = c - c_1.$$

За леви правоугли сферни троугао имамо

$$\cos b = \cos h \cdot \cos c_1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} c_1 = \operatorname{tg} b \cdot \cos A.$$

Десни правоугли сферни троугао даје, опет,

$$\cos a = \cos h \cdot \cos c_2 = \cos h \cdot \cos (c - c_1).$$

Поделимо ли ову једначину првом од горњих двеју једначина, имаћемо

$$\cos a = \cos b \cdot \sec c_1 \cdot \cos (c - c_1) = \cos b \cdot \cos c + \cos b \cdot \sin c \cdot \operatorname{tg} c_1.$$

Сменимо ли још у другом члану, на десној страни, $\operatorname{tg} c_1$ његовом напред датом вредношћу, добивамо

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$$

а то је тражени основни образац Сферне тригонометрије.

11. Слупштањем из темена B лука великог круга нормално на страну b сферног троугла ABC (в. сл. 12) добивају се два правоугла сферна троугла; зваћемо их леви и десни. За ове, као што са сл. 6 видимо, имамо

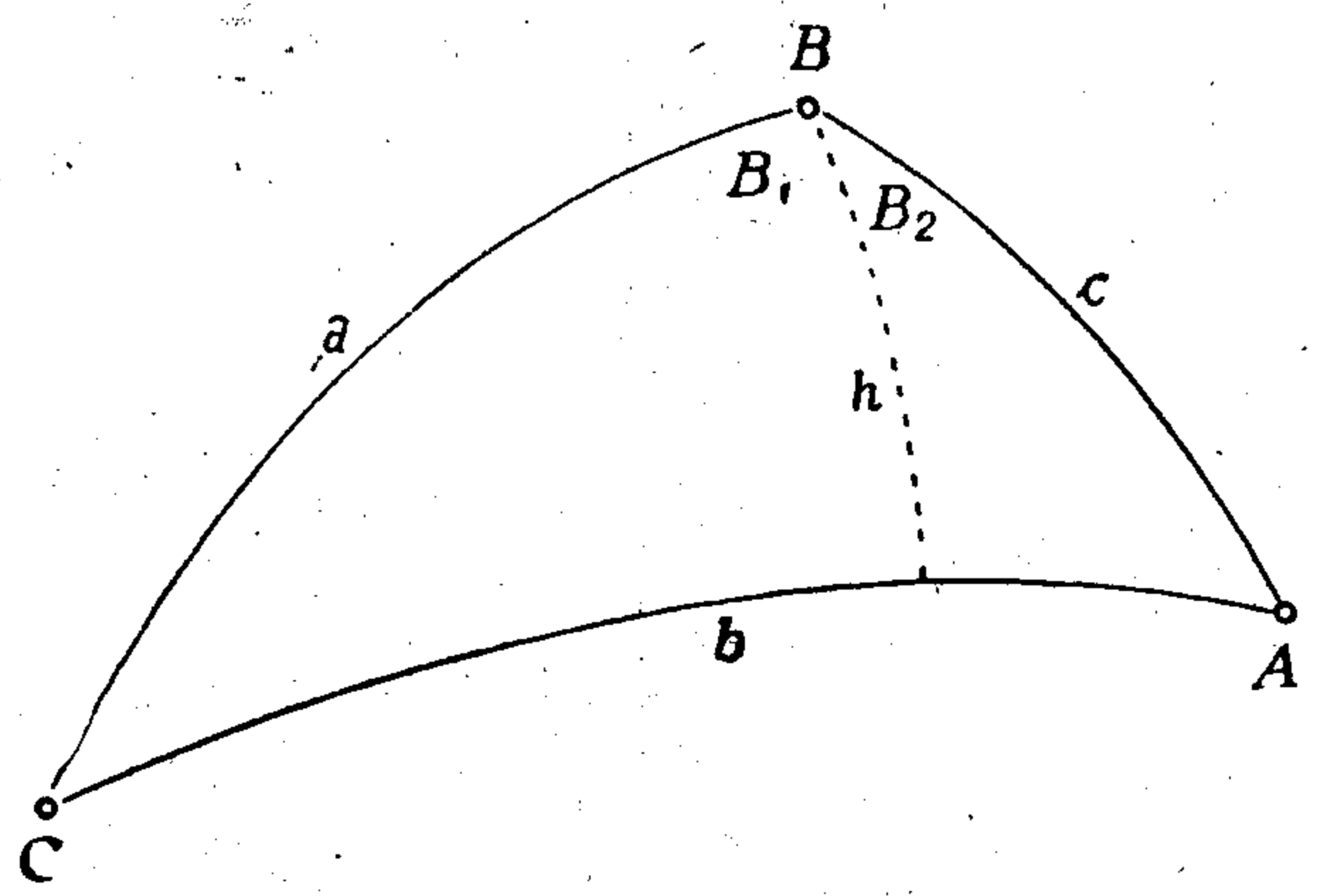
$$\begin{aligned} \cos h &= \cos A \cdot \operatorname{cosec} B_2 = \\ &= \cos C \cdot \operatorname{cosec} B_1. \end{aligned}$$

Са сл. 12 видимо, даље, да је $B_1 + B_2 = B$, то јест $B_2 = B - B_1$.

Према томе

$$\begin{aligned} \cos A \cdot \sin B_1 &= \cos C \cdot \sin B \cdot \cos B_1 - \\ &- \cos C \cdot \cos B \cdot \sin B_1, \end{aligned}$$

или
$$\begin{aligned} \cos A &= \cos C \cdot \sin B \cdot \operatorname{ctg} B_1 - \\ &- \cos C \cdot \cos B. \end{aligned}$$



Сл. 12.

За леви правоугли сферни троугао имамо, међутим,

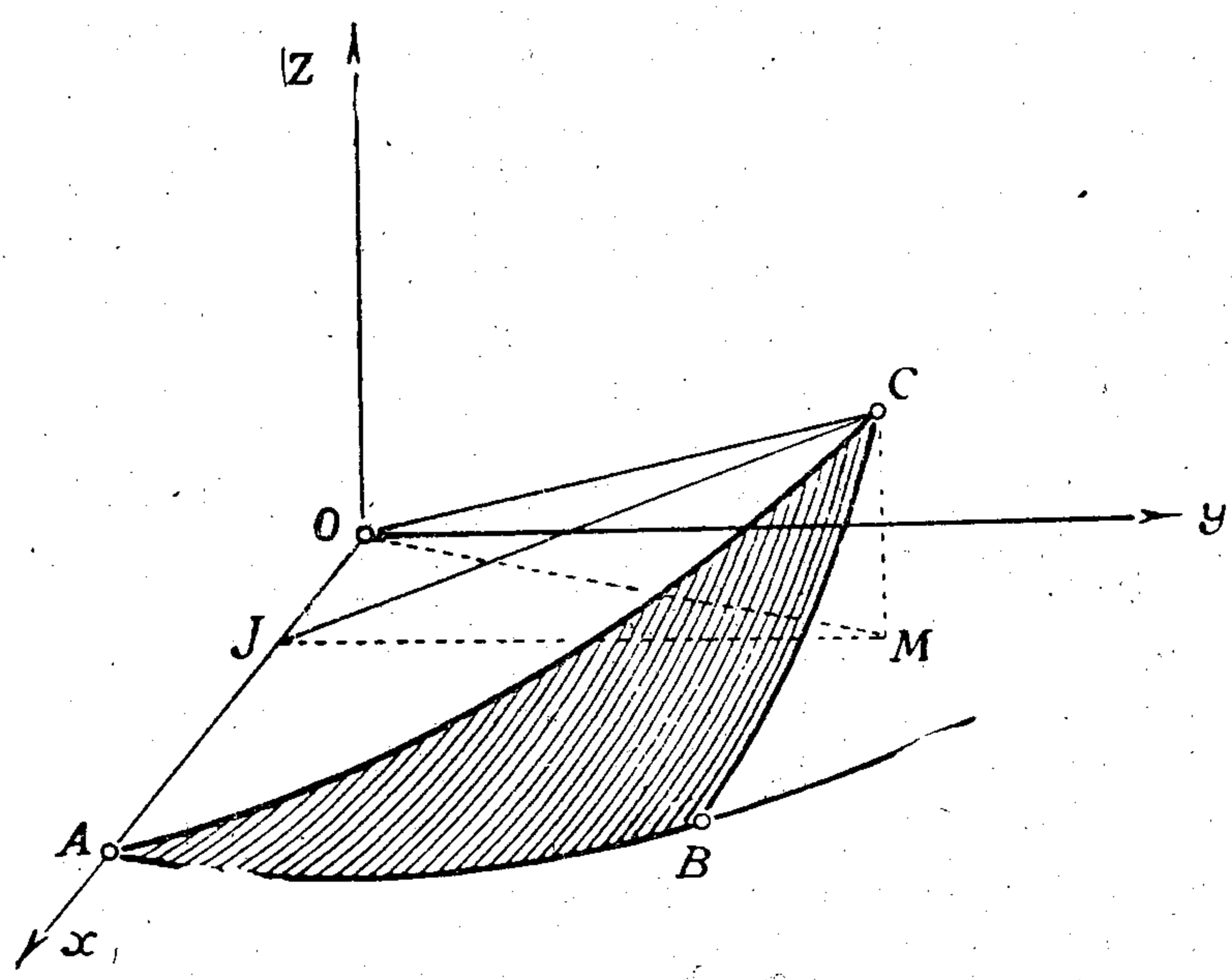
$$\cos a = \operatorname{ctg} C \cdot \operatorname{ctg} B_1, \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} B_1 \cdot \cos C = \cos a \cdot \sin C.$$

Извршимо ли замену у једначини за $\cos A$, добивамо

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a,$$

а то је тражени образац IV групе (в. Преглед на стр. 8).

Треба, међутим, напоменути да је извођење овог обрасца непосредније ако се примени основни образац, из претходног задатка, на поларни троугао датог сферног троугла, па користе везе што постоје међу елементима тих троуглова.



Сл. 13.

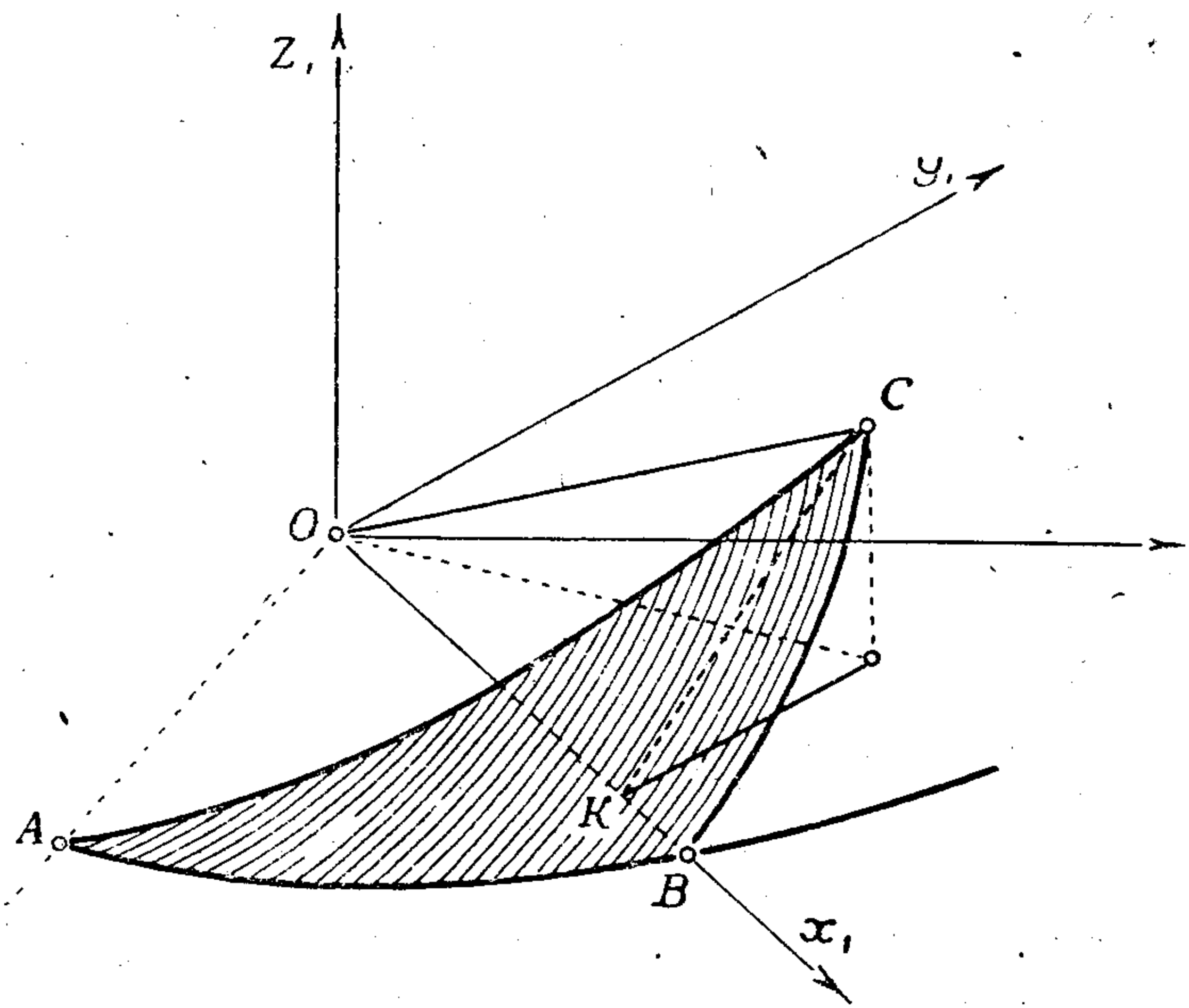
12. Нека ја дат, на сфериса полупречником ($OA = OB = OC = 1$) једнаким јединици и средиштем у O , сферни троугао ABC (в. сл. 13). Из средишта, као почетка, повуцимо трo-осни координатни си-

стем $OXYZ$, са OAB равни као основном, правцем OA као x -осом и смером од A ка B као позитивним у основној равни. У том координатном систему имаћемо за координате темена C , пошто је $OC = 1$,

$$x = OJ = \cos b, \quad y = JM = \sin b \cdot \cos A, \quad z = MC = \sin b \cdot \sin A.$$

ЖН
44

Обрнимо сад тај координатни систем око осе OZ , у позитивном смеру, за угао $AOB=c$, тако да сад OB буде нова x -оса; нова y -оса биће за $+\frac{\pi}{2}$ од ове; док z -оса остаје непромењена.



Сл. 14.

У овом координатном систему биће координате темена C (в. сл. 14).

$$x_1 = OK = \cos a,$$

$$y_1 = KM = \sin a \cdot \cos(\pi - B),$$

$$z_1 = MC = \sin a \cdot \sin(\pi - B).$$

С друге стране, на основи теореме о пројекцијама, имамо за прелаз од једних ка другим координатама

$$x_1 = x \cos c + y \sin c,$$

$$y_1 = -x \sin c + y \cos c,$$

$$z_1 = z.$$

Унесимо сад у ове једначине горе дате вредности координата и добивамо

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$$

$$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A,$$

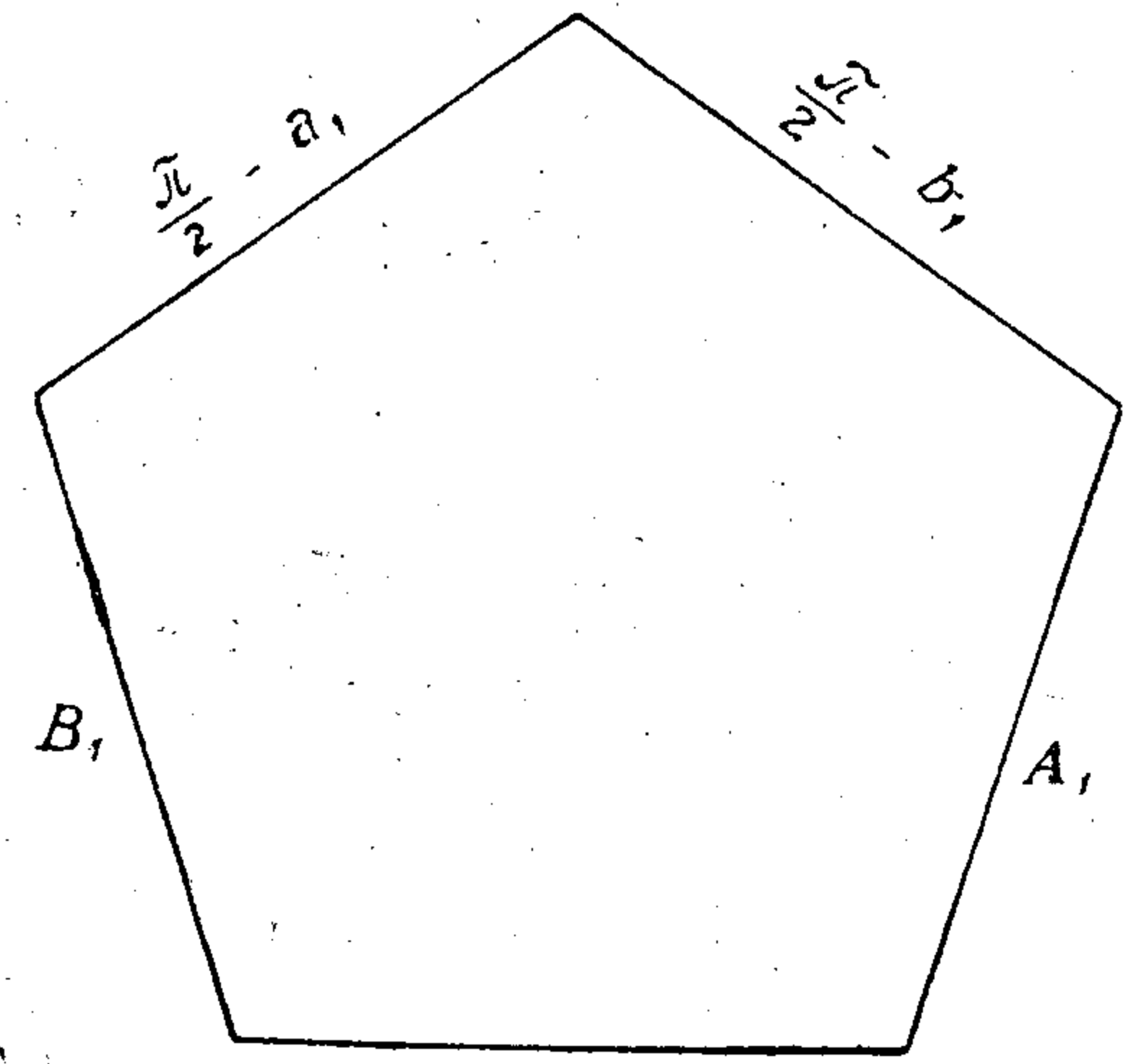
$$\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A;$$

а то је тражена Гаусова група образа Сферне тригонометрије.

13. Познато је да је квадрантни сферни троугао поларни — правоуглог сферног троугла, и обратно. Према томе, ако су елементи квадрантног сферног троугла $ABC: a, b, 90^\circ; A, B, C$ — његов поларни, правоугли сферни троугао, $A_1B_1C_1$, имаће за елементе

$$(1) a_1 = \pi - A, \quad b_1 = \pi - B, \quad c_1 = \pi - C;$$

$$A_1 = \pi - a, \quad B_1 = \pi - b, \quad C_1 = \frac{\pi}{2}.$$



Сл. 15.

Сетимо се сад Неперова мнемоничког правила за правоугле сферне троугле. Оно гласи: косинус било које стране петоугаоника на сл. 15 једнак је: производу котан-

зжк
е штаг

генса налеглих страна; производу синуса наспрамних страна. Па унесимо одмах, место a_1, b_1, c_1, A_1 и B_1 , елементе квадрантног сферног троугла, имаћемо

$$\cos(\pi - C) = \sin\left(B - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}(\pi - a) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - b),$$

$$\cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi - a) \cdot \sin(\pi - C) = \operatorname{ctg}\left(B - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - b),$$

$$\cos\left(B - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi - b) \cdot \sin(\pi - C) = \operatorname{ctg}\left(A - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - b),$$

$$\cos(\pi - a) = \sin(\pi - b) \cdot \sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(B - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - C),$$

$$\cos(\pi - b) = \sin(\pi - a) \cdot \sin\left(B - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(A - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - C).$$

Ако ове обрасце напишемо нешто само једноставније

$$\cos(\pi - C) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} b,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin a \cdot \sin(\pi - C) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \cdot \operatorname{ctg} b,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin b \cdot \sin(\pi - C) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \cdot \operatorname{ctg} b,$$

$$\cos a = \sin b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - C),$$

$$\cos b = \sin a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - C).$$

Другим речима, и за квадрантни сферни троугао вреди Неперово мнемоничко правило, под условом да стране петугаоника буду узете оне и распоређене онако како је приказано на сл. 16.

14. Дати образац,

$$\operatorname{ctg} a \cdot \sin b = \operatorname{ctg} A \cdot \sin C + \cos b \cdot \cos C,$$

написаћемо у облику

$$\operatorname{ctg} a \cdot \sin b \cdot \sin A = \cos A \cdot \sin C + \cos b \cdot \sin A \cdot \cos C.$$

Ако уведемо помоћне величине m и M , дефинисане једначинама

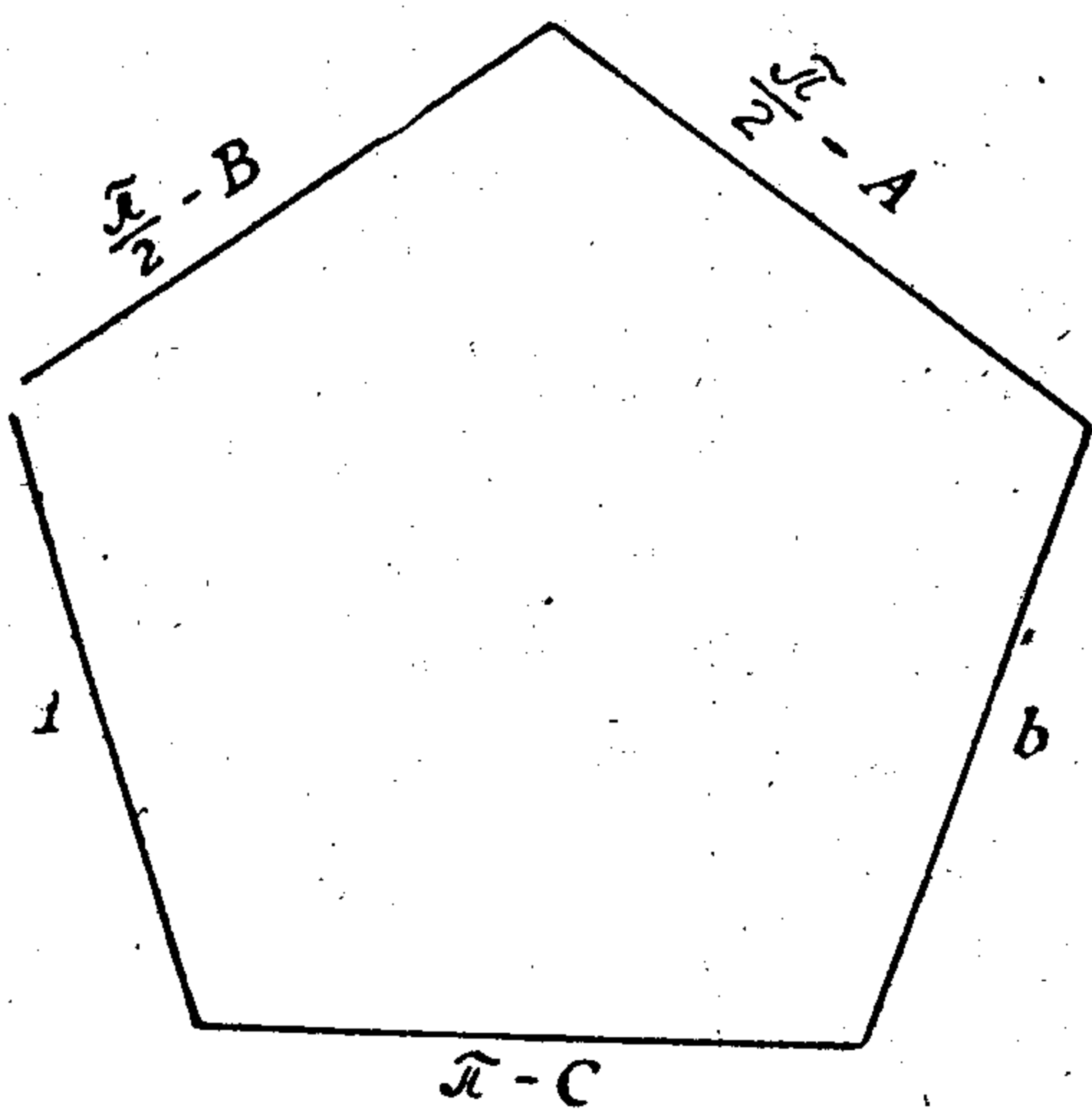
$$\cos A = m \cdot \sin M,$$

$$\cos b \cdot \sin A = m \cdot \cos M, \quad \text{са } m > 0,$$

последњи образац постаје

$$\operatorname{ctg} a \cdot \sin b \cdot \sin A = m \cdot \cos (M - C).$$

Или, ако из једне од претходних једначина, рецимо из друге, одредимо m и унесемо у ову, налазимо, пошто скратимо,



Сл. 16.

$$\operatorname{ctg} a \cdot \sin b = \cos b \cdot \cos (M - C) \cdot \sec M;$$

и тако за одређивање угла C добијамо образац

$$\cos (M - C) = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \cos M,$$

са углом M одређеним из

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{ctg} A \cdot \sec b,$$

а квадрантом из двеју горњих једначина.

15. 1) Кад су у сферном троуглу дате две стране, b и c , и угао међу њима, A , трећа страна, a , и један од налегних углова, рецимо C , израчунавају се помоћу Гаусове

групе образаца, и то, у овом случају, помоћу

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$$

$$\sin a \cdot \sin C = \sin c \cdot \sin A,$$

$$\sin a \cdot \cos C = \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos A.$$

Ови се подешавају за логаритамско рачунање стављајући

$$\cos c = m \cdot \cos M,$$

$$\sin c \cdot \cos A = m \cdot \sin M, \quad \text{са } m > 0,$$

што даје

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{tg} c \cdot \cos A \quad \text{и} \quad m = \sin c \cdot \cos A \cdot \operatorname{cosec} M.$$

Према томе, за израчунавање угла C имамо, из

$$\sin a \cdot \sin C = \sin c \cdot \sin A,$$

$$\sin a \cdot \cos C = m \cdot \sin (b - M) = \sin c \cdot \cos A \cdot \operatorname{cosec} M \cdot \sin (b - M),$$

ако поделимо прву једначину другом,

$$\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \sin M \cdot \operatorname{cosec} (b - M).$$

Пошто тако одредимо угао C , страну a можемо наћи из

$$\sin a = \sin c \cdot \sin A \cdot \operatorname{cosec} C,$$

но не са свом потребном нумеричком тачношћу. Боље је последњу једначину комбиновати са

$$\cos a = \sin c \cdot \cos A \cdot \operatorname{cosec} M \cdot \cos (b - M),$$

тако да се добије

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} A \cdot \sin M \cdot \operatorname{cosec} C \cdot \sec(b - M).$$

За проверавање нумеричког рада могу се користити једначине

$$m \cdot \sin M = \sin c \cdot \cos A,$$

$$\sin a \cdot \cos C = m \cdot \sin(b - M),$$

из којих добивамо множењем

$$\sin M \cdot \sin a \cdot \cos C = \sin c \cdot \cos A \cdot \sin(b - M).$$

Дати елементи:	$b = 37^\circ 47' 18''$, $c = 74 \ 51 \ 50$, $A = 44 \ 10 \ 40$.		Проверавање:		
[tg c]	0.56 784	[cosec (b - M)]	0.28 133 n	[sin M]	9.97 112
[cos A]	9.85 563	[tg A]	9.98 754	[sin a]	9.88 995
[tg M]	0.42 347	[sin M]	9.97 112	[cos C]	9.69 789 n
$M = 69^\circ 20' 8''$		[cosec C]	0.06 212	$\Sigma_{(I)}$	9.55 896 n
$b - M = -31 \ 32 \ 50$		[sec (b - M)]	0.06 946	[sin c]	9.98 467
$C = 119 \ 55 \ 6$		[tg C]	0.23 999 n	[cos A]	9.85 563
$a = 50 \ 54 \ 37$		[tg a]	0.09 024	[sin (b - M)]	9.71 867 n
				$\Sigma_{(II)}$	9.55 897 n

2) Ако треба, кад су дате две стране и угао међу њима, израчунати све остале елементе троугла, може се опет применити горњи поступак, то јест Гаусова група образаца, и, пошто се одреде a и C , други угао, B , одредити на исти начин као и C . У овом случају би се добило $B = 33^\circ 22' 41''$.

Непосреднији је, међутим, поступак и нумерички тачнији, кад се траже сви елементи, да се користе Неперове аналогије. Како треба из b, c и A одредити a, B и C , користимо обрасце

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B + C) = \cos \frac{1}{2}(b - c) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2} A \cdot \sec \frac{1}{2}(b + c),$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B - C) = \sin \frac{1}{2}(b - c) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2} A \cdot \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(b + c),$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(b - c) \cdot \sin \frac{1}{2}(B + C) \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(B - C),$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(b + c) \cdot \cos \frac{1}{2}(B + C) \cdot \sec \frac{1}{2}(B - C).$$

Радићемо са седам децимала, да бисмо тачније проверили резултате претходног рада.

$$\begin{aligned} \text{Дати елементи: } & \begin{cases} b = 37^\circ 47' 18'' \cdot 00, \\ c = 74^\circ 51' 50'' \cdot 00, \\ A = 44^\circ 10' 40'' \cdot 00; \end{cases} & \begin{cases} b + c = 112^\circ 39' 08'' \cdot 00, \\ b - c = -37^\circ 4' 32'' \cdot 00; \\ \frac{1}{2}(b + c) = 56^\circ 19' 34'' \cdot 00, \\ \frac{1}{2}(b - c) = -18^\circ 32' 16'' \cdot 00. \end{cases} \end{aligned}$$

$\left[\sec \frac{1}{2}(b + c) \right]$	0.256 1257	}	$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b - c) \right]$	9.525 4706 <i>n</i>
$\left[\cos \frac{1}{2}(b - c) \right]$	9.976 8606		$\left[\sin \frac{1}{2}(B + C) \right]$	9.988 1007
$\left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2}A \right]$	0.391 6537		$\left[\operatorname{cosec} \frac{1}{2}(B - C) \right]$	0.164 0345 <i>n</i>
$\left[\sin \frac{1}{2}(b - c) \right]$	9.502 3313 <i>n</i>		$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b + c) \right]$	0.176 3570
$\left[\operatorname{cosec} \frac{1}{2}(b + c) \right]$	0.079 7687		$\left[\cos \frac{1}{2}(B + C) \right]$	9.363 4607
$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B + C) \right]$	0.624 6400		$\left[\sec \frac{1}{2}(B - C) \right]$	0.137 7881
$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B - C) \right]$	9.973 7537 <i>n</i>		$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2}a \right]$	$\begin{cases} 9.677 6058 \\ 9.677 6058 \end{cases}$
$\frac{1}{2}(B + C) =$	$76^\circ 38' 55'' \cdot 62,$		$\frac{1}{2}a(1) =$	$25^\circ 27' 15'' \cdot 80,$
$\frac{1}{2}(B - C) =$	$-43^\circ 16' 11'' \cdot 05,$		$\frac{1}{2}a(2) =$	$25^\circ 27' 15'' \cdot 80.$

Резултати:

$$\underline{a = 50^\circ 54' 31'' \cdot 60,} \quad \underline{B = 33^\circ 22' 44'' \cdot 58,} \quad \underline{C = 119^\circ 55' 06'' \cdot 67.}$$

16. Геометриско значење помоћних величина m и M , дефинисаних у последњем задатку 1), помоћу једначина

$$m \cdot \cos M = \cos c,$$

$$m \cdot \sin M = \sin c \cdot \cos A,$$

постаје очигледно ако из темена B сферног троугла ABC (в. сл. 17) спустимо лук великог круга BD нормално на страну $b=AC$. Косоугли сферни троугао ABC биће на тај начин подељен у два правоугла сферна троугла: BDC и DAB .

Применимо на други од ових троуглова обрасце за правоугле сферне троугле. Добићемо

$$\cos c = \cos BD \cdot \cos DA$$

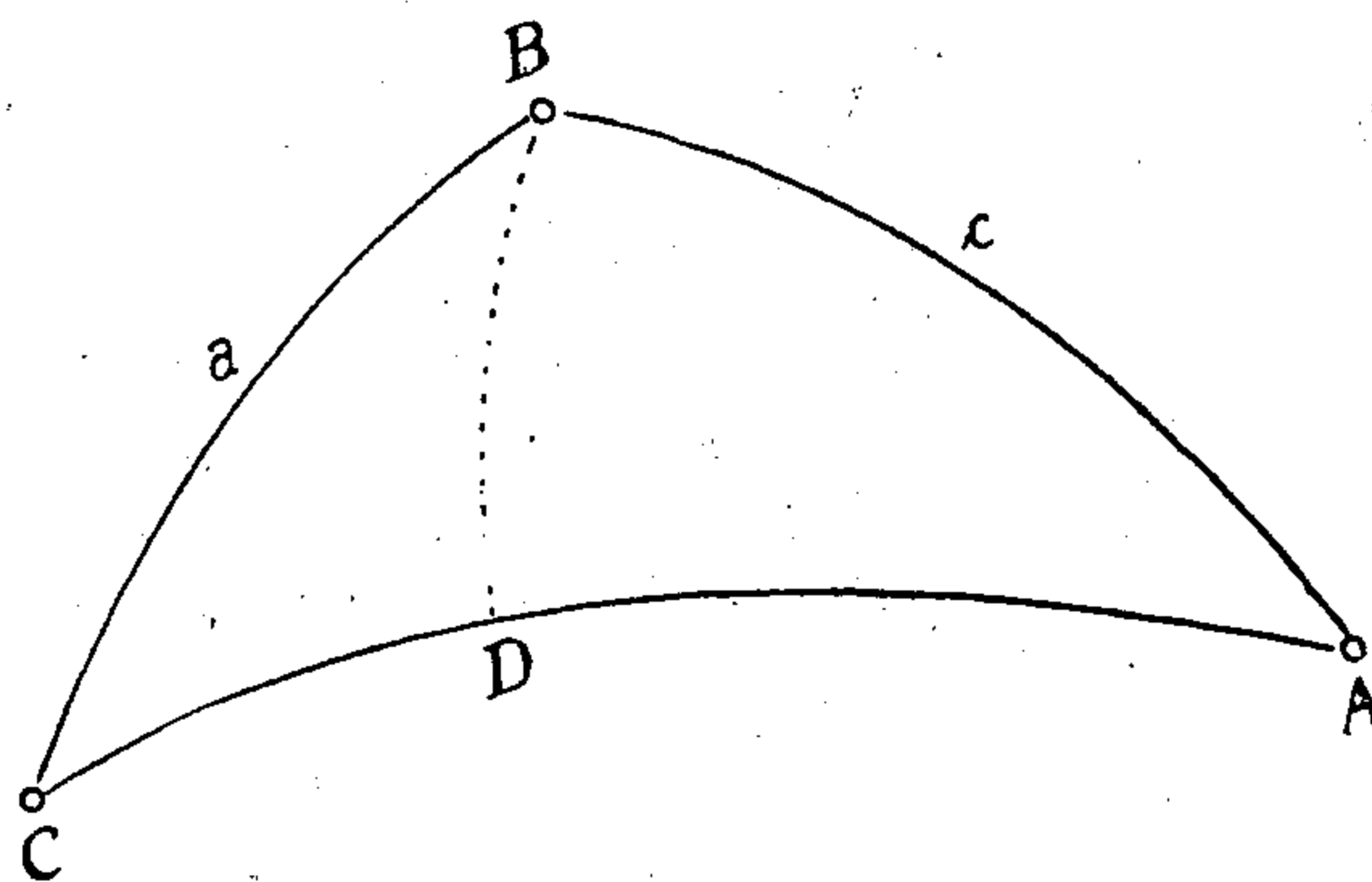
и

$$\sin c \cdot \cos A = \cos BD \cdot \sin DA.$$

Упоредимо ли ове са горњим једначинама, налазимо

$$\cos BD = m, \quad DA = M,$$

то јест геометричка значења помоћних величина.



Сл. 17.

17. Узимајући да се промене о којима је овде реч могу сматрати као диференцијали, до израза за промене тражених, da и dC , у функцији датих промена, db , dc и dA и елемената, долазимо диференцирањем једначина Гаусове групе. Тако из прве налазимо

$$-\sin a \cdot da = (-\sin b \cdot \cos c + \cos b \cdot \sin c \cdot \cos A) \cdot db +$$

$$+ (-\cos b \cdot \sin c + \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A) \cdot dc - \sin b \cdot \sin c \cdot \sin A \cdot dA,$$

или, ако место израза у заградама ставимо величине које они, према Гаусовим обрасцима, претстављају, налазимо

$$-\sin a \cdot da = -\sin a \cdot \cos C \cdot db - \sin a \cdot \cos B \cdot dc - \sin a \cdot \sin b \cdot \sin C \cdot dA,$$

то јест, пошто поделимо величином $\sin a \neq 0$,

$$da = \cos C \cdot db + \cos B \cdot dc + \sin b \cdot \sin C \cdot dA.$$

Израз за промену dC добићемо диференцирањем једначине

$$\sin a \cdot \sin C = \sin c \cdot \sin A.$$

И налазимо

$$\cos a \cdot \sin C \cdot da + \sin a \cdot \cos C \cdot dC = \cos c \cdot \sin A \cdot dc + \sin c \cdot \cos A \cdot dA.$$

Унесемо ли, место da , горе нађену вредност и средимо ли имаћемо

$$\sin a \cdot \cos C \cdot dC = -\cos a \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot db + (\cos c \cdot \sin A -$$

$$-\cos a \cdot \cos B \cdot \sin C) \cdot dc + (\sin c \cdot \cos A - \cos a \cdot \sin b \cdot \sin^2 C) \cdot dA.$$

За косоугли и његов поларни сферни троугао имамо, међутим, обрасце, опет Гаусове групе,

$$\sin A \cdot \cos c = \cos C \cdot \sin B + \sin C \cdot \cos B \cdot \cos a,$$

$$\sin c \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C.$$

Користећи ове једначине, добићемо на десној страни горње једначине

$$\sin a \cdot \cos C \cdot dC = -\cos a \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot db + \cos C \cdot \sin B \cdot dc + \\ + (\cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C - \cos a \cdot \sin b \cdot \sin^2 C) \cdot dA.$$

Или, ако приметимо да се израз у загради, у трећем члану на десној страни, може написати

$$\cos a \cdot \sin b (1 - \sin^2 C) - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C = -\cos C (\cos b \cdot \sin a - \\ - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos C) = -\cos C \cdot \sin c \cdot \cos B,$$

имаћемо

$$\sin a \cdot \cos C \cdot dC = -\cos a \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot db + \sin B \cdot \cos C \cdot dc - \sin c \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot dA,$$

односно, пошто поделимо величином $\cos C \neq 0$, имаћемо

$$\sin a \cdot dC = -\cos a \cdot \sin C \cdot db + \sin B \cdot dc - \sin c \cdot \cos B \cdot dA.$$

За тражену промену угла налазимо одавде

$$dC = -\operatorname{ctg} a \cdot \sin C \cdot db + \operatorname{cosec} a \cdot \sin B \cdot dc - \operatorname{cosec} a \cdot \sin c \cdot \cos B \cdot dA.$$

Примећујемо код ових израза за промене елемената да садрже не само дате елементе, то јест b, c и A , већ и елементе које је требало одредити, дакле a и C , шта више и B , који није (у задатку) ни дат, ни тражен. То значи да се за израчунавање промена елемената мора претходно потпуно решити сферни троугао, то јест морају израчунати сви његови елементи.

Према томе, за сферни троугао одређен елементима датим у Зад. 15 и променама истих елемената датим у овом задатку, имаћемо, према горњим обрасцима, рачунајући све у угловној мери:

Дати елементи и промене	$\left\{ \begin{array}{l} b = 37^\circ 47' 18'', \\ c = 74 \ 51 \ 50, \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} db = +10'', \\ dc = +20, \\ dA = +30; \end{array} \right.$	изра-	$\left\{ \begin{array}{l} a = 50^\circ 54' 37'', \\ B = 33 \ 22 \ 41, \\ C = 119 \ 55 \ 6. \end{array} \right.$
			чунати елементи:	

$\operatorname{ctg} a = 0.812,$	$\sin C = 0.867,$	$\cos C \cdot db = -4'' .99$
$\operatorname{cosec} a = 1.288,$	$\cos C = -0.499,$	$\cos B \cdot dc = +16 .70$
$\sin b = 0.613,$	$\sin b \sin C = F = 0.531,$	$F \cdot dA = +15 .93$
$\sin c = 0.965,$	$\operatorname{ctg} a \cdot \sin C = G = 0.704,$	$G \cdot db = -7 .04$
$\sin B = 0.550,$	$\operatorname{cosec} a \cdot \sin B = H = 0.709,$	$H \cdot dc = +14 .18$
$\cos B = 0.835;$	$\operatorname{cosec} a \cdot \sin c \cdot \cos B = J = 1.039;$	$J \cdot dA = -31 .17$

$$dC = -24 .03.$$

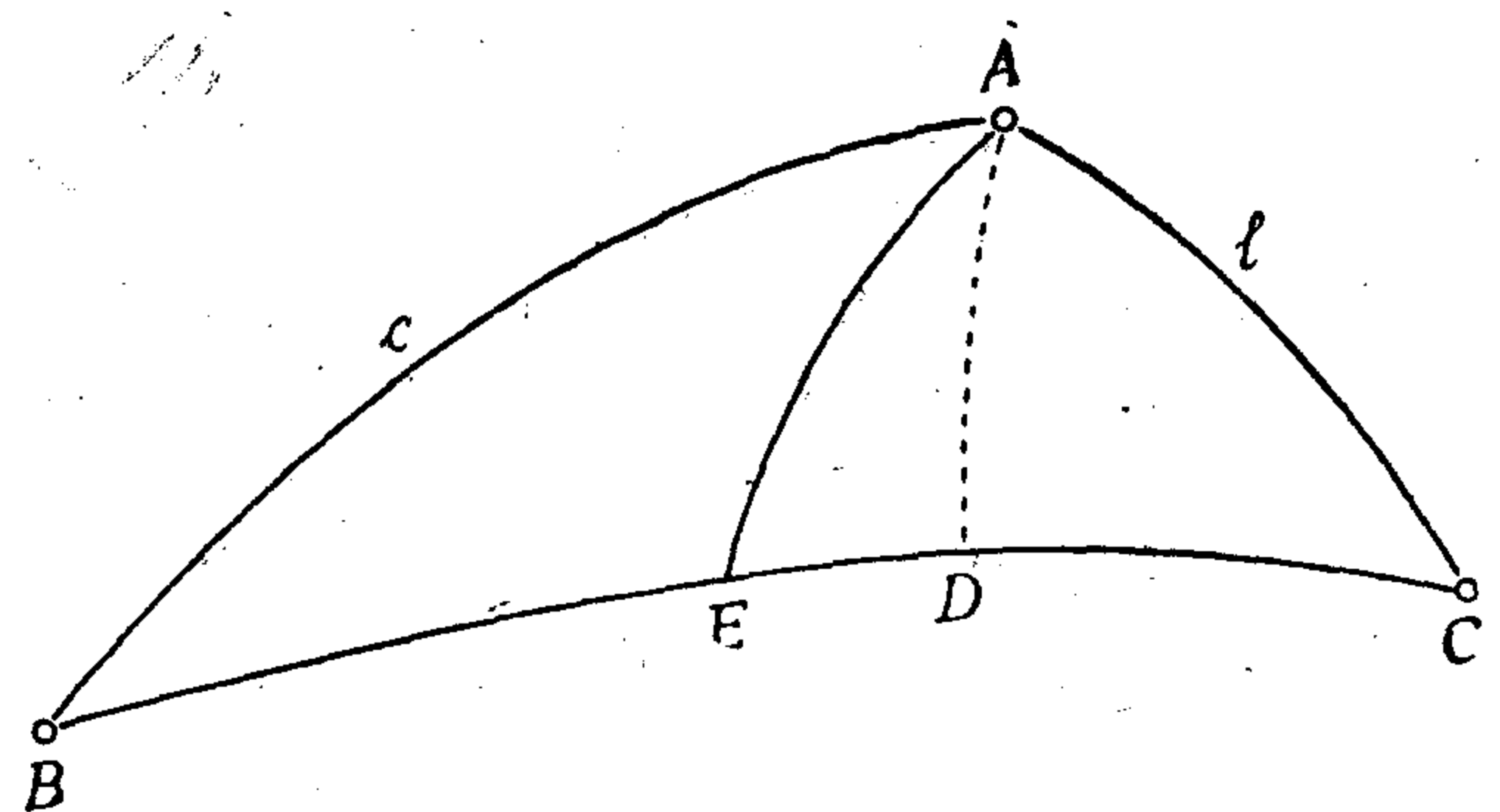
18. Да бисмо могли израчунати висину, $AD = h$ (в. сл. 18), треба да је познат још бар један од углова, B или C . А да бисмо израчунали

медијану, $AE = \mu$, треба да знамо страну a . Стога је најједноставније одредити све непознате елементе: a , B и C , дакле помоћу Неперових аналогија. А пошто је у решењу Зад. 15 дата већ шема за примену Неперових аналогија, нећемо је понављати већ дати готове резултате. За непознате елементе налазимо:

$$a = 62^\circ 28' 12'',$$

$$B = 8^\circ 27' 9'',$$

$$C = 22^\circ 2' 47''.$$



За висину, $AD = h$, имамо из троуглова ABD и ADC :

$$\sin h = \sin b \cdot \sin C = \sin c \cdot \sin B.$$

Сл. 18.

А за медијану, $AE = \mu$, имаћемо, ако означимо $BE = EC = \frac{a}{2} = \bar{a}$, из троугла ABE ,

$$\cos c = \cos \mu \cdot \cos \bar{a} + \sin \mu \cdot \sin \bar{a} \cdot \cos E,$$

а из троугла AEC ,

$$\cos b = \cos \mu \cdot \cos \bar{a} - \sin \mu \cdot \sin \bar{a} \cdot \cos E.$$

Сабирањем ових двеју једначина добивамо

$$\cos b + \cos c = 2 \cos \mu \cdot \cos \bar{a},$$

дакле

$$\cos \mu = \frac{1}{2} (\cos b + \cos c) \cdot \sec \bar{a},$$

или

$$\cos \mu = \cos \frac{1}{2} (b + c) \cdot \cos \frac{1}{2} (b - c) \cdot \sec \bar{a}.$$

Но да бисмо μ нумерички тачније одредили, то јест да бисмо га добили (место преко \cos) помоћу tg , ставићемо на десној страни

$$\cos \frac{1}{2} (b + c) \cdot \cos \frac{1}{2} (b - c) = \cos \psi,$$

тако да ће сад бити

$$\cos \mu = \cos \psi \cdot \sec \bar{a},$$

при чему треба имати на уму да је $0 < \mu < \pi$.

Из последње једначине добивамо

$$1 - \cos \mu = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \mu = (\cos \bar{a} - \cos \psi) \cdot \sec \bar{a},$$

$$1 + \cos \mu = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \mu = (\cos \bar{a} + \cos \psi) \cdot \sec \bar{a}.$$

92
82

Дељењем ових двеју једначина добивамо

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \mu = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\bar{a} + \psi) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\psi - \bar{a}).$$

Овде ваља напоменути да помоћни угао ψ није горњом једначином, којом је дефинисан, и једнозначно одређен. Али је медијана, μ , приближно одређена ако су у сферном троуглу познати сви елементи. Према томе, за помоћни угао ψ , који служи искључиво да се μ нумерички тачније одреди, узео се она од добивених вредности са којом се μ добива оно које треба.

$$\begin{array}{ll} [\sin b] & 9.45864, & [\sin c] & 9.86578, \\ [\sin C] & \underline{9.57444}, & [\sin B] & \underline{9.16729}, \\ [\sin h] & 9.03308; & [\sin h] & 9.03307; \end{array}$$

$$\frac{1}{2} (b+c) = 31^\circ 58' 17'', \quad \left[\cos \frac{1}{2} (b+c) \right] 9.92856,$$

$$\frac{1}{2} (b-c) = -15 \ 15 \ 47; \quad \left[\cos \frac{1}{2} (b-c) \right] \underline{9.98441},$$

$$[\cos \psi] \quad 9.91297.$$

И тако добивамо:

$$\text{за висину } \underline{h = 6^\circ 11' 42''}; \quad \text{за } \psi = \pm 35^\circ 4' 27''.$$

Како друга од двеју могућих вредности ψ не даје реално решење за μ , биће:

$$\begin{array}{lll} \bar{a} = 31^\circ 14' 6'', & \frac{1}{2} (\bar{a} + \psi) = 33^\circ 9' 17'', & \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\bar{a} + \psi) \right] 9.81508, \\ \psi = 35 \ 4 \ 27; & & \\ \bar{a} + \psi = 66^\circ 18' 33'', & \frac{1}{2} (\psi - \bar{a}) = 1 \ 55 \ 11; & \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\psi - \bar{a}) \right] \underline{8.52528}, \\ \psi - \bar{a} = 3 \ 50 \ 21; & & 2 \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \mu \right] \underline{18.34036}. \end{array}$$

Према томе је $\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \mu \right] 9.17018$, дакле:

$$\frac{1}{2} \mu = 8^\circ 25' 1'', \text{ или } \underline{\mu = 16^\circ 50' 2''}.$$

10. Када су дате три стране сферног троугла углове му одређујемо помоћу Бордних образаца. Ако ставимо $a+b+c=2s$, ти обраци изгледају:

$$b \cdot \sin (s-c) \cdot \operatorname{cosec} s \cdot \operatorname{cosec} (s-a) \left] \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = +[\sin(s-c) \cdot \sin(s-a) \cdot \operatorname{cosec} s \cdot \operatorname{cosec}(s-b)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = +[\sin(s-a) \cdot \sin(s-b) \cdot \operatorname{cosec} s \cdot \operatorname{cosec}(s-c)]^{\frac{1}{2}}.$$

А ако још ставимо

$$S = +[\sin(s-a) \cdot \sin(s-b) \cdot \sin(s-c) \cdot \operatorname{cosec} s]^{\frac{1}{2}},$$

Бордини обрасци добивају облик

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = S \cdot \operatorname{cosec}(s-a), \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = S \cdot \operatorname{cosec}(s-b), \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = S \cdot \operatorname{cosec}(s-c)$$

Према томе ћемо имати:

$a = 50^{\circ} 54' 32''$,	$[\sin(s-a)]$	9.71 021,	$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} A \right]$	9.60 835,
$b = 37 \ 47 \ 18$,	$[\sin(s-b)]$	9.84 171,	$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} B \right]$	9.47 685,
$c = 74 \ 51 \ 50$,	$[\sin(s-c)]$	9.08 072,	$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} C \right]$	0.23 784;
$2s = 163 \ 33 \ 40$,	$[\operatorname{cosec} s]$	0.00 448,		
$s = 81 \ 46 \ 50$;	$2[S]$	8.63 712,		
	$[S]$	9.31 856;		
$s-a = 30^{\circ} 52' 18''$,			$\frac{1}{2} A = 22^{\circ} 5' 20''$,	
$s-b = 43 \ 59 \ 32$,			$\frac{1}{2} B = 16 \ 41 \ 22$,	
$s-c = 6 \ 55 \ 0$,			$\frac{1}{2} C = 59 \ 57 \ 31$.	
$\Sigma = s = 81 \ 46 \ 50$;				

И тако за углове добивамо:

$$\underline{A = 44^{\circ} 10' 40''}, \quad \underline{B = 33^{\circ} 22' 44''}, \quad \underline{C = 119^{\circ} 55' 2''}.$$

Нумерички рад можемо проверити помоћу синусних образаца:

$[\sin a]$	9.88 994,	$[\sin b]$	9.78 728,	$[\sin c]$	9.98 466,
$[\sin A]$	9.84 317,	$[\sin B]$	9.74 050,	$[\sin C]$	9.93 789,
Δ	0.04 677;	Δ	0.04 678;	Δ	0.04 677.

За одређивање промена углова у функцији промена трију страна и елемената сферног троугла можемо поћи од основног обрасца. Ако га диференцирамо добивамо, после извесних смена, образац који смо већ у решењу Зад. 17 извели

$$da = \cos C \cdot db + \cos B \cdot dc + \sin b \cdot \sin C \cdot dA.$$

Из њега, цикличким померањем елемената, налазимо за одређивање тражених промена обрасце:

$$\sin b \cdot \sin C \cdot dA = da - \cos C \cdot db - \cos B \cdot dc,$$

$$\sin c \cdot \sin A \cdot dB = db - \cos A \cdot dc - \cos C \cdot da,$$

$$\sin a \cdot \sin B \cdot dC = dc - \cos B \cdot da - \cos A \cdot db.$$

Те ће бити:

$$\sin a = 0.776, \quad \sin A = 0.697, \quad \cos A = 0.717, \quad \operatorname{cosec} b \cdot \operatorname{cosec} C = 1.883,$$

$$\sin b = 0.613, \quad \sin B = 0.550, \quad \cos B = 0.835, \quad \operatorname{cosec} c \cdot \operatorname{cosec} A = 1.486,$$

$$\sin c = 0.965; \quad \sin C = 0.867; \quad \cos C = -0.500; \quad \operatorname{cosec} a \cdot \operatorname{cosec} B = 2.342.$$

$$\begin{array}{rcl} da = +6'' \cdot 00, & db = +6'' \cdot 00, & dc = +6'' \cdot 00, \\ -\cos C \cdot db = +3 \cdot 00, & -\cos A \cdot dc = -4 \cdot 32, & -\cos B \cdot da = -5 \cdot 04, \\ -\cos B \cdot dc = -5 \cdot 04, & -\cos C \cdot da = +3 \cdot 00, & -\cos A \cdot db = -4 \cdot 32, \\ \Sigma = +3 \cdot 96, & \Sigma = +4 \cdot 68, & \Sigma = -3 \cdot 36, \end{array}$$

$$\underline{dA = +7'' \cdot 5;}$$

$$\underline{dB = +7'' \cdot 0;}$$

$$\underline{dC = -7'' \cdot 9.}$$

20. Користићемо, из Гаус—Деламброве групе, образац

$$\cos \frac{1}{2} (B + C) \cdot \cos \frac{a}{2} = \cos \frac{1}{2} (b + c) \cdot \sin \frac{1}{2} A.$$

Како су елементи у Ајлеровим сферним троуглима, на које смо се ми ограничили, сваки поједини мањи од 180° , значи да су $\frac{a}{2}$ и $\frac{1}{2} A$ мањи

од 90° ; према томе $\cos \frac{a}{2}$ и $\sin \frac{1}{2} A$ позитивни. А како је, према задатку, $b + c = 180^\circ$, то јест $\frac{1}{2} (b + c) = 90^\circ$, значи $\cos \frac{1}{2} (b + c) = 0$, мора бити

$$\cos \frac{1}{2} (B + C) = 0, \quad \text{то јест} \quad \frac{1}{2} (B + C) = 90^\circ,$$

дакле, доиста, $B + C = 180^\circ$.

21. Користићемо, из Гаус—Деламброве групе, обрасце

$$\cos \frac{1}{2} (A + B) \cdot \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{1}{2} (a + b) \cdot \sin \frac{1}{2} C,$$

$$\cos \frac{1}{2} (A - B) \cdot \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{1}{2} (a + b) \cdot \sin \frac{1}{2} C.$$

Ако у ове једначине унесемо сад услов $a + b + c = 180^\circ$, то јест $a + b = 180^\circ - c$, имаћемо

$$\cos \frac{1}{2} (A + B) \cdot \cos \frac{c}{2} = \sin \frac{c}{2} \cdot \sin \frac{1}{2} C,$$

$$\cos \frac{1}{2} (A - B) \cdot \sin \frac{c}{2} = \cos \frac{c}{2} \cdot \sin \frac{1}{2} C.$$

Помножимо ли ове две једначине добићемо, пошто поделимо обе стране са $\cos \frac{c}{2} \cdot \sin \frac{c}{2}$,

$$\cos \frac{1}{2} (A + B) \cdot \cos \frac{1}{2} (A - B) = \sin^2 \frac{1}{2} C,$$

или

$$\cos A + \cos B = 1 - \cos C,$$

или, коначно, што је и требало показати,

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1.$$

22. Како је дати сферни троугао једнакостран, што ће рећи код њега је $a = b = c$, послужићемо се Бординим обрасцима који одређују углове у функцији страна сферног троугла, дакле

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \sin (s - b) \cdot \sin (s - c) \cdot \operatorname{cosec} b \cdot \operatorname{cosec} c,$$

где је $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Према услову задатка видимо да је $s = \frac{3}{2}a$, и

$$s - b = s - c = s - a = \frac{a}{2}.$$

И тако добивамо да је

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \sin^2 \frac{a}{2} \cdot \operatorname{cosec}^2 a, \text{ или } \sin \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \sec \frac{a}{2}.$$

23. Пошто су дате стране a и b , користићемо, из групе Неперових аналогија, образац

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \cos \frac{1}{2} (a - b) \cdot \sec \frac{1}{2} (a + b).$$

А одавде, на основи дате везе међу угловима, добивамо

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} C = \cos \frac{1}{2} (a - b) \cdot \sec \frac{1}{2} (a + b).$$

36
56

Како сад знамо и угао C , то јест, према задатку, збир непознатих двају углова, из обрасца

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \sin \frac{1}{2}(a - b) \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(a + b) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}C$$

моћи ћемо израчунати разлику непознатих двају углова. Према томе моћи ћемо наћи и сваки од углова A и B . И, напослетку, страну c добићемо из

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b) \sin \frac{1}{2}(A + B) \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(A - B).$$

24. Први начин. Ако у образац из групе Неперових аналогија

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(a + b) = \cos \frac{1}{2}(a - b) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}C$$

унесемо услов из задатка, добићемо

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}C \cdot \cos \frac{1}{2}(a + b) = \cos \frac{1}{2}(a - b) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}C,$$

или

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}C \cdot \cos \frac{1}{2}(a + b) = \cos \frac{1}{2}(a - b).$$

Но како је

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}C = \frac{1 - \cos C}{1 + \cos C},$$

место горње једначине добивамо

$$(1 - \cos C) \cos \frac{1}{2}(a + b) = (1 + \cos C) \cos \frac{1}{2}(a - b),$$

то јест

$$\cos \frac{1}{2}(a + b) - \cos \frac{1}{2}(a - b) = \cos C \left[\cos \frac{1}{2}(a + b) + \cos \frac{1}{2}(a - b) \right].$$

А како је

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(a + b) - \cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b) + \cos \frac{1}{2}(a - b)} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}} = -\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2},$$

добивамо да је, доиста,

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} + \cos C = 0.$$

Други начин. Ако напишемо Бордине обрасце за стране a и b

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = +[\sin S \cdot \sin (A - S) \cdot \operatorname{cosec} (B - S) \cdot \operatorname{cosec} (C - S)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = +[\sin S \cdot \sin (B - S) \cdot \operatorname{cosec} (C - S) \cdot \operatorname{cosec} (A - S)]^{\frac{1}{2}},$$

где је
$$S = \frac{1}{2}(A + B + C) - \frac{\pi}{2},$$

па унесемо услов из задатка, то јест $A + B = C$, што даје

$$S = C - \frac{\pi}{2}, \quad \text{или} \quad C - S = \frac{\pi}{2},$$

горње две једначине постају

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = +[-\cos C \cdot \sin (A - S) \cdot \operatorname{cosec} (B - S)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = +[-\cos C \cdot \sin (B - S) \cdot \operatorname{cosec} (A - S)]^{\frac{1}{2}}.$$

Помножимо ли ове две једначине, добивамо, доиста,

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{b}{2} + \cos C = 0.$$

25. Поћи ћемо од Бординих образаца за стране,

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \sin S \cdot \sin (A - S) \cdot \operatorname{cosec} B \cdot \operatorname{cosec} C,$$

$$\sin^2 \frac{b}{2} = \sin S \cdot \sin (B - S) \cdot \operatorname{cosec} C \cdot \operatorname{cosec} A,$$

$$\sin^2 \frac{c}{2} = \sin S \cdot \sin (C - S) \cdot \operatorname{cosec} A \cdot \operatorname{cosec} B,$$

где је

$$S = \frac{1}{2}(A + B + C) - \frac{\pi}{2},$$

$$A - S = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(B + C - A) \quad \text{и} \quad B - S = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(A + C - B).$$

Унесемо ли у ове изразе услов из задатка, имаћемо

$$S = C - \frac{\pi}{2}, \quad A - S = \frac{\pi}{2} - B, \quad B - S = \frac{\pi}{2} - A.$$

98
58

А извршимо ли замену у горњим једначинама, имаћемо

$$\sin^2 \frac{a}{2} = -\cos C \cdot \cos B \cdot \operatorname{cosec} B \cdot \operatorname{cosec} C = -\operatorname{ctg} C \cdot \operatorname{ctg} B,$$

$$\sin^2 \frac{b}{2} = -\cos C \cdot \cos A \cdot \operatorname{cosec} C \cdot \operatorname{cosec} A = -\operatorname{ctg} C \cdot \operatorname{ctg} A,$$

$$\sin^2 \frac{c}{2} = -\cos C \cdot \operatorname{cosec} A \cdot \operatorname{cosec} B.$$

Саберемо ли прве две добићемо

$$\sin^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{b}{2} = -\operatorname{ctg} C (\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} A) = -\operatorname{ctg} C \cdot \sin(A+B) \cdot \operatorname{cosec} A \cdot \operatorname{cosec} B.$$

Како је, према услову задатка,

$$A + B = C,$$

последња једначина, после замене и пошто се скрати на десној страни, постаје

$$\sin^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{b}{2} = -\cos C \cdot \operatorname{cosec} A \cdot \operatorname{cosec} B = \sin^2 \frac{c}{2},$$

што је и требало показати.

26. Нацртајмо правоугли сферни троугао ABC , са правим углом у темену C (в. сл. 19), и обележимо му елементе како је то на слици учињено.

Из правоуглог сферног троугла CDB имамо

$$\cos B = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} c_a,$$

а из правоуглог сферног троугла ABC имамо, опет,

$$\cos B = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} c.$$

Поделимо ли прву другом једначином имаћемо

$$\operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} c_a.$$

На исти начин можемо извести и други тражени образац, то јест

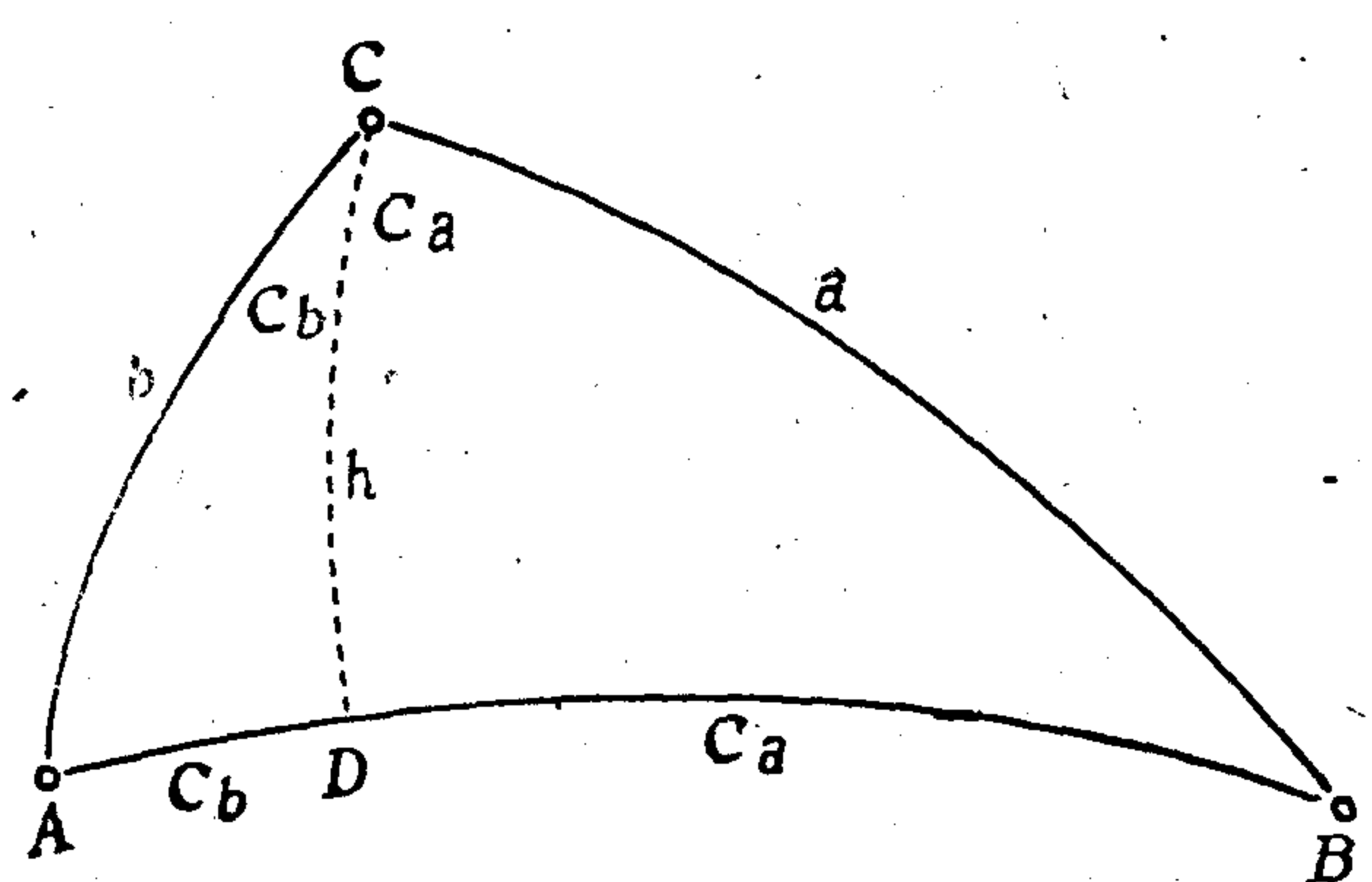
$$\operatorname{tg}^2 b = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} c_b.$$

Ако из сваког од добивених правоуглих сферних троуглова одредимо страну $CD = h$, имаћемо

$$\sin h = \operatorname{tg} c_a \cdot \operatorname{ctg} C_a \quad \text{и} \quad \sin h = \operatorname{tg} c_b \cdot \operatorname{ctg} C_b.$$

Измножимо ли обе стране ових једначина добијамо

$$\sin^2 h = \operatorname{tg} c_a \cdot \operatorname{tg} c_b \cdot \operatorname{ctg} C_a \cdot \operatorname{ctg} C_b.$$



Сл. 19. 36

Како је, међутим, $C_a + C_b = 90^\circ$, дакле $C_a = 90^\circ - C_b$, то је

$$\operatorname{ctg} C_a \cdot \operatorname{ctg} C_b = 1,$$

те је тако, доиста,

$$\sin^2 h = \operatorname{tg} c_a \cdot \operatorname{tg} c_b.$$

27. Дата веза је, уствари, као што се лепо види, један од образаца квадрантног сферног троугла ABC , у којем је $a = 90^\circ$. Доиста, из једначине

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a,$$

ако ставимо $\cos a = 0$, дакле узмемо $a = 90^\circ$, добивамо

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C,$$

то јест дату везу, само друкчије написану. Према томе, видимо да ће геометриско место темена C датог сферног троугла ABC бити — велики круг чији је пол теме B .

28. *Први начин.* Из Гаусове групе образаца имамо

$$\sin c \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C,$$

$$\sin c \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos C.$$

Међутим, ове једначине можемо и овако написати

$$\sin c \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b + 2 \sin a \cdot \cos b \cdot \sin^2 \frac{1}{2} C,$$

$$\sin c \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a + 2 \sin b \cdot \cos a \cdot \sin^2 \frac{1}{2} C.$$

Саберемо ли сад ове једначине, добићемо, пошто скратимо,

$$(\cos A + \cos B) \cdot \sin c = 2 \sin(a + b) \sin^2 \frac{1}{2} C.$$

А ако још израз у загради на левој страни напишемо у облику производа, добивамо

$$\cos \frac{1}{2} (A + B) \cdot \cos \frac{1}{2} (A - B) \cdot \sin c = \sin(a + b) \cdot \sin^2 \frac{1}{2} C.$$

Други начин. Ако из Гаус—Деламброве групе узмемо косинусне образце,

$$\cos \frac{1}{2} (A + B) \cdot \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{1}{2} (a + b) \cdot \sin \frac{1}{2} C,$$

$$\cos \frac{1}{2} (A - B) \cdot \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{1}{2} (a + b) \cdot \sin \frac{1}{2} C,$$

помножимо их један другим и скратимо, добивамо

$$\cos \frac{1}{2} (A + B) \cdot \cos \frac{1}{2} (A - B) \cdot \sin c = \sin(a + b) \cdot \sin^2 \frac{1}{2} C.$$

29. Први начин. Ако пођемо од обрасца синусне групе

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B},$$

видимо да га можемо написати

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}.$$

А ако бројиоце и имениоце на обема странама ове једначине напишемо у облику производа, после дељења добивамо лако

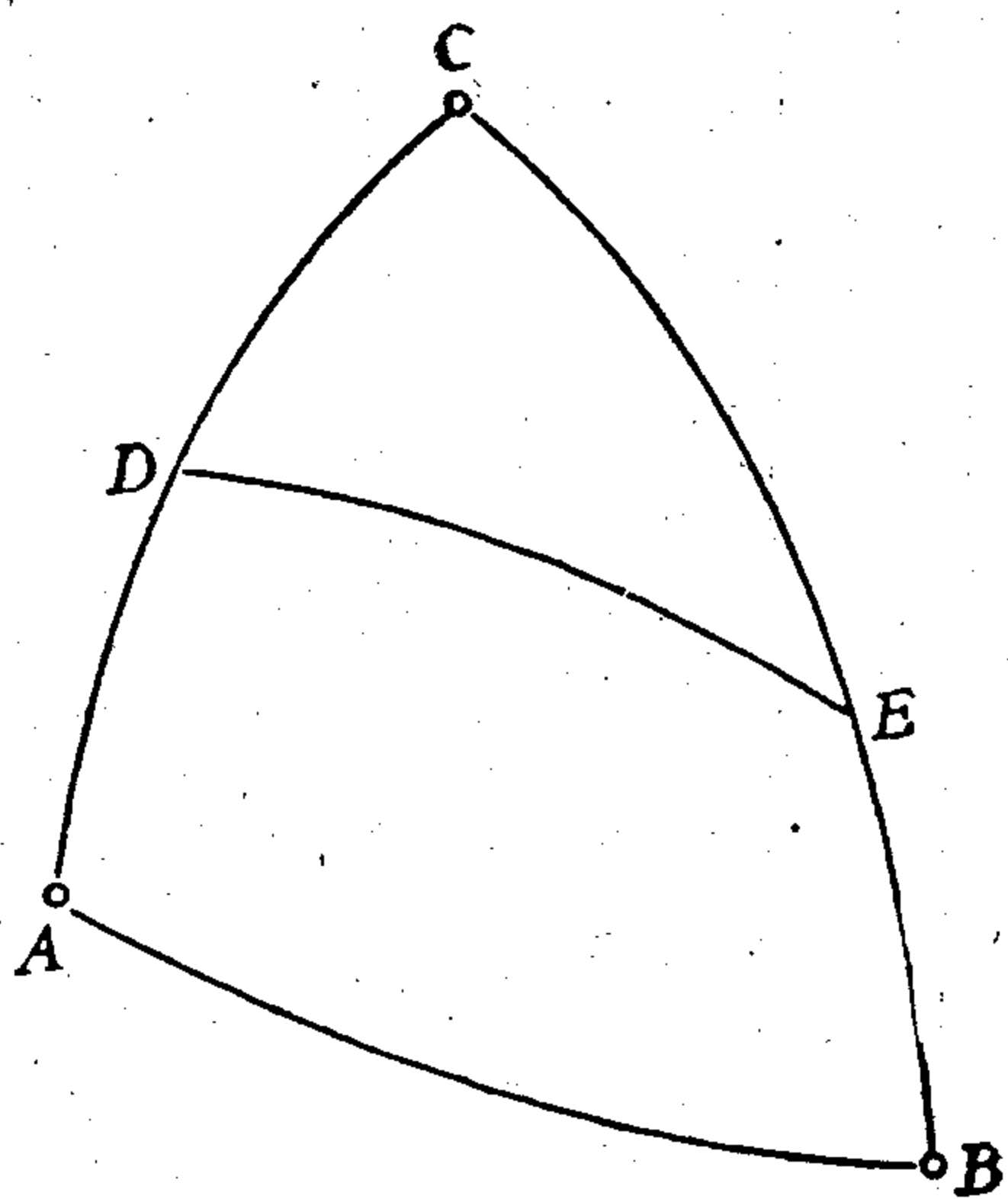
$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A-B).$$

Други начин. Ако узмемо из Неперових аналогија обрасце за тангенсе стране, па поделимо, добивамо одмах

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A-B).$$

30. Из датог сферног троугла (в. сл. 20) имамо

$$\begin{aligned} \cos \eta &= \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} \cdot \cos C, \\ &= \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} \left(\sin^2 \frac{1}{2} C + \cos^2 \frac{1}{2} C \right) + \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} \left(\cos^2 \frac{1}{2} C - \sin^2 \frac{1}{2} C \right). \end{aligned}$$



Сл. 20.

Из ове једначине, опет, добивамо

$$\begin{aligned} \cos \eta &= \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin^2 \frac{1}{2} C + \\ &+ \cos \frac{1}{2}(a-b) \cos^2 \frac{1}{2} C. \end{aligned}$$

А ако из Гаус—Деламброве групе узмемо обрасце

$$\cos \frac{1}{2}(a+b) = \cos \frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{c}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{1}{2} C,$$

$$\cos \frac{1}{2}(a-b) = \sin \frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{c}{2} \cdot \sec \frac{1}{2} C,$$

па ове вредности унесемо у претходну једначину, добићемо

$$\cos \eta = \cos \frac{c}{2} \left[\sin \frac{1}{2} (A + B) \cdot \cos \frac{1}{2} C + \cos \frac{1}{2} (A + B) \cdot \sin \frac{1}{2} C \right],$$

или $\cos \eta = \cos \frac{c}{2} \cdot \sin \frac{1}{2} (A + B + C),$

дакле, доиста,

$$\cos \eta = \cos \frac{c}{2} \cdot \sin S.$$

31. У решењу Зад. 18 показано је да за медијану, μ , повучену из темена C имамо

$$\cos \mu = (\cos a + \cos b) \cdot \sec \frac{1}{2} c.$$

С друге стране, имамо везу у задатку

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \mu = \operatorname{tg} \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{b}{2}.$$

Треба из ових двеју једначина елиминисати μ .

Примећујемо, међутим, да је

$$\cos \mu = \cos^2 \frac{1}{2} \mu - \sin^2 \frac{1}{2} \mu = \cos^2 \frac{1}{2} \mu \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \mu \right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \mu}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \mu}.$$

Према томе, на основи дате везе добивамо

$$\cos \mu = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{b}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{b}{2}} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)}.$$

А ако, опет, у првој једначини изразимо збир на десној страни у облику производа, имаћемо

$$\cos \mu = 2 \cdot \cos \frac{1}{2} (a + b) \cdot \cos \frac{1}{2} (a - b) \cdot \sec \frac{1}{2} c.$$

Изједначимо ли десне стране последњих двеју једначина, добивамо

$$2 \cdot \cos \frac{1}{2} (a + b) \cdot \cos \frac{1}{2} (a - b) \cdot \sec \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)}.$$

А одавде, пошто скратимо,

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} (a - b) = \cos \frac{1}{2} c,$$

или

$$\cos \frac{1}{2} (a - b) = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} c},$$

дакле

$$(a - b) = 2 \arccos \left(\pm \sqrt{\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} c} \right).$$

32. Ако помножимо познате основне обрасце

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$$

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a,$$

први са $\cos A$, а други са $\cos a$, па други одузмемо од првог, имаћемо $\cos b \cdot \cos c \cdot \cos A + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos^2 A + \cos B \cdot \cos C \cdot \cos a - \sin B \cdot \sin C \cdot \cos^2 a = 0$.

А ако унесемо, место квадрата косинуса, квадрате синуса и приметимо да је, према синусним обрасцима,

$$\sin b \cdot \sin c \cdot \sin^2 A = \sin B \cdot \sin C \cdot \sin^2 a,$$

(каткад корисна шестоелементна веза, помоћу које се проверава нумерички рад), добивамо Кањолиев образац,

$$\begin{aligned} \sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c \cdot \cos A &= \\ &= \sin B \cdot \sin C - \cos B \cdot \cos C \cdot \cos a. \end{aligned}$$

33. Са сл. 21 видимо да је

$$B_1 - A = \Delta A = \pi - B - A = \pi - (A + B).$$

Применимо сад на троугао ABC петоелементни образац Гаусове групе, но за углове (који се добива примењујући онај за стране на поларни троугао датог сферног троугла)

$$\cos b \cdot \sin C = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B \cdot \cos c.$$

Применимо сад, у овом обрасцу, углове постављене у задатку, и имаћемо, пошто је $\cos c = 1$,

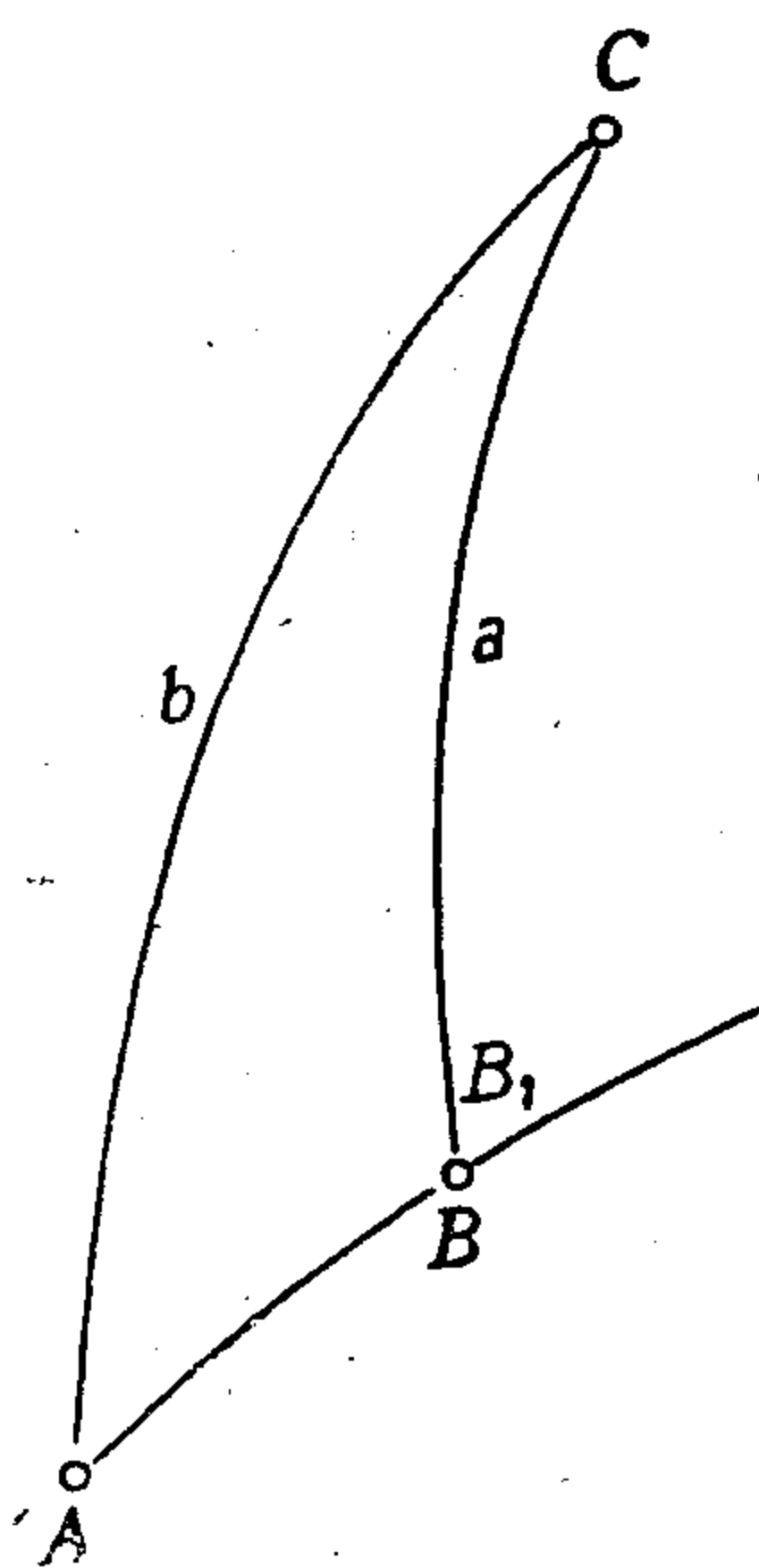
$$\begin{aligned} C \cdot \cos b &= \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B, \\ &= \sin (A + B) = \sin \Delta A = \Delta A. \end{aligned}$$

Дакле, доиста је

$$\Delta A = C \cdot \cos b \text{ (у радијанима),}$$

или

$$\Delta A'' = C'' \cdot \cos b.$$



Сл. 21.

— 8

191

103

—(4a)с

III ЗЕМЉА КАО НЕБЕСКО ТЕЛО

—(2a).

34. Означимо са δ депресију хоризонта посматрача M (в. сл. 22), који се налази на узвишењу $AM=h$ над морском површином, а са $d=MB$ даљину вида. Означимо са $R=OB$ полупречник Земљин, коју сматрамо као сферу. Онда, као што са слике лако видимо, имамо

$$d^2 = (R+h)^2 - R^2 = 2Rh + h^2 = \\ = 2Rh \left(1 + \frac{h}{2R}\right).$$

Док узвишења h остају ограничена на неколико десетина метара свега, други члан у заграда, на десној страни, практично неће утицати на вредност даљине вида. Према томе можемо тај члан занемарити, то јест за даљину вида узети

$$d = \sqrt{2Rh}.$$

С друге стране, са слике видимо да имамо

$$p = R \cdot \operatorname{tg} \delta, \quad \text{дакле и} \quad \sqrt{2Rh} = R \cdot \operatorname{tg} \delta.$$

А одатле је

$$\operatorname{tg} \delta = \sqrt{\frac{2h}{R}},$$

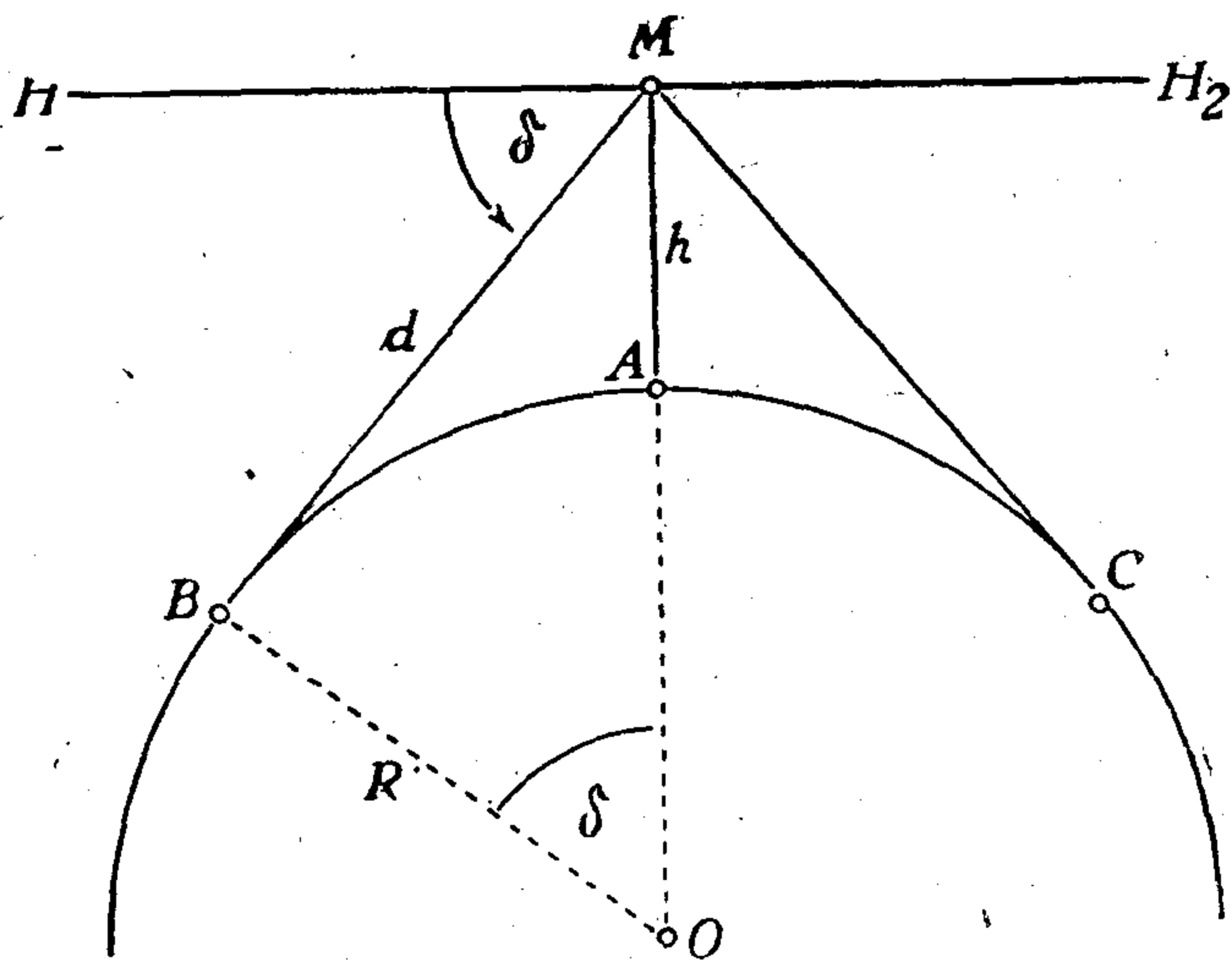
односно, са ограничењем које смо горе учинили, добивамо за депресију изражену у минутама

$$\delta' = \sqrt{\frac{2h}{R}} \cdot \frac{1}{\operatorname{arc} 1'}.$$

Ако за Земљин полупречник узмемо $R = 6370$ км, за радијан (приближно) $3438'$, а узвишење, h , на којем се налази посматрач над морском пучином, изразимо у метрима, добивамо

за даљину виду $d \approx 3.57 \sqrt{h}$ километара;

за депресију хоризонта $\delta \approx 1'.93 \sqrt{h}$.

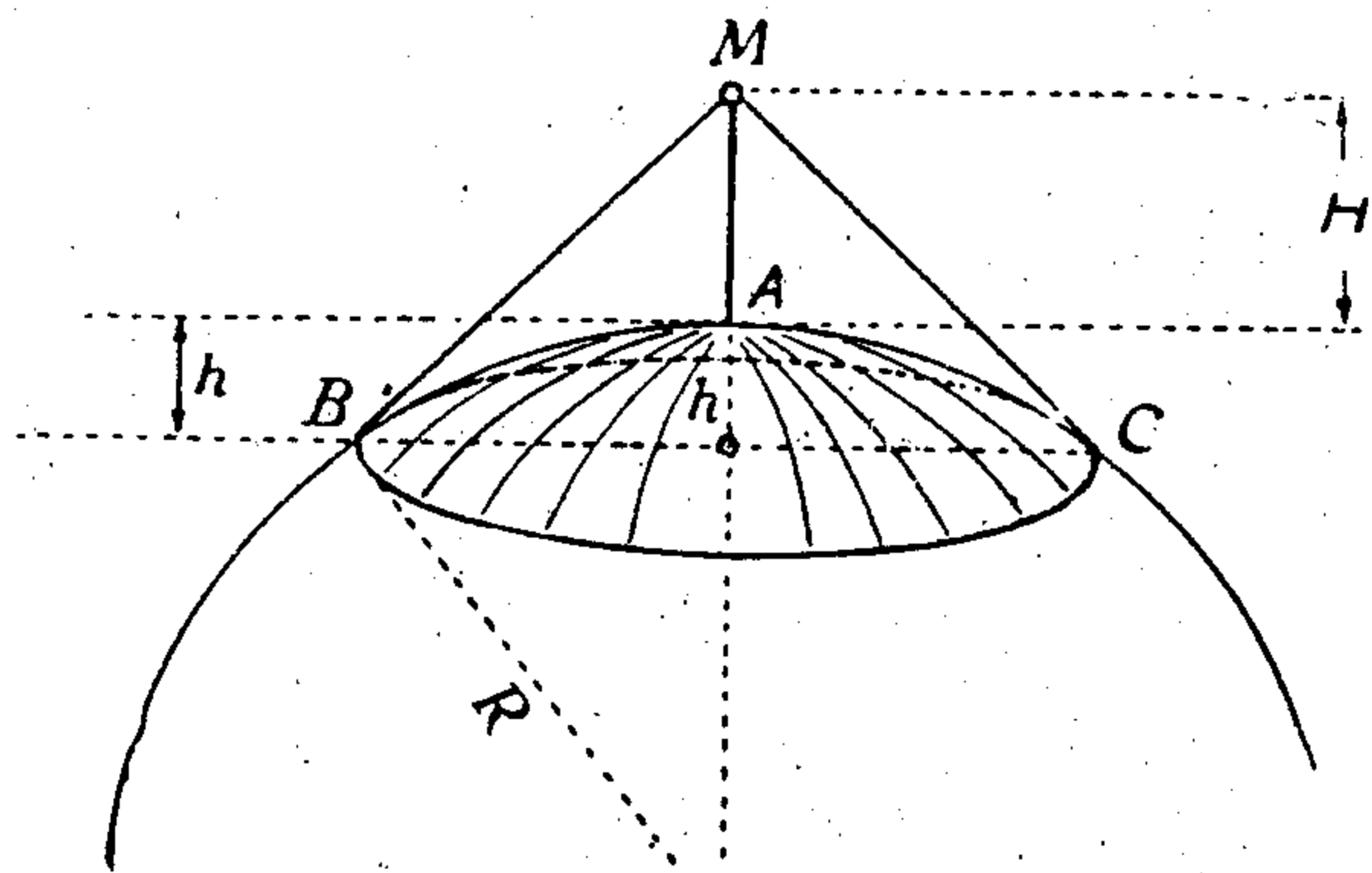


Сл. 22.

Према томе, за посматрача на узвишењу $h=30$ м, биће

$$\underline{d \approx 19.6 \text{ км;}} \quad \underline{\delta \approx 10'.6.}$$

35. Означимо са H узвишење AM над морском површином, на којем се налази посматрач; полупречник Земље (сфере) са R ; површину посматрачева видика (за који се претпоставља да је потпуно слободан), који је, у том случају претстављен површином сферне капе ABC , висине h , означимо са S . Онда је, као што знамо,



Сл. 23.

$$S = 2\pi R h.$$

Висина h , међутим, није нам позната. Али ако приметимо да је

$$\begin{aligned} R^2 &= (R+H)(R-h) = \\ &= R^2 + RH - h(R+H), \end{aligned}$$

добивамо за h , изражено величинама које су, обично, дате

$$h = \frac{RH}{R+H} = \frac{H}{1 + \frac{H}{R}} = H \left(1 - \frac{H}{R+H} \right).$$

По последњем од ових израза за h видимо да је разлика

$$H - h = H \cdot \frac{H}{R+H},$$

што ће рећи, док узвишење посматрача над морском површином не премаша, рецимо, 100 м, разлика $H - h$ остаје мања од 2 мм. Према томе, за узвишења у тим границама можемо сматрати да је $H = h$, тако да за површину видика добивамо довољно тачно

$$S = 2\pi R H.$$

Према томе је, за $H=30$ м,

$$S = 6.28318 \times 6370000 \times 30 \text{ м}^2 \approx 1200.7 \text{ км}^2.$$

За $H=6$ км, горњи, приближни образац даје

$$S = 240000 \text{ км}^2,$$

тачан рачун, међутим, даје

$$\underline{S = 239917.2 \text{ км}^2,}$$

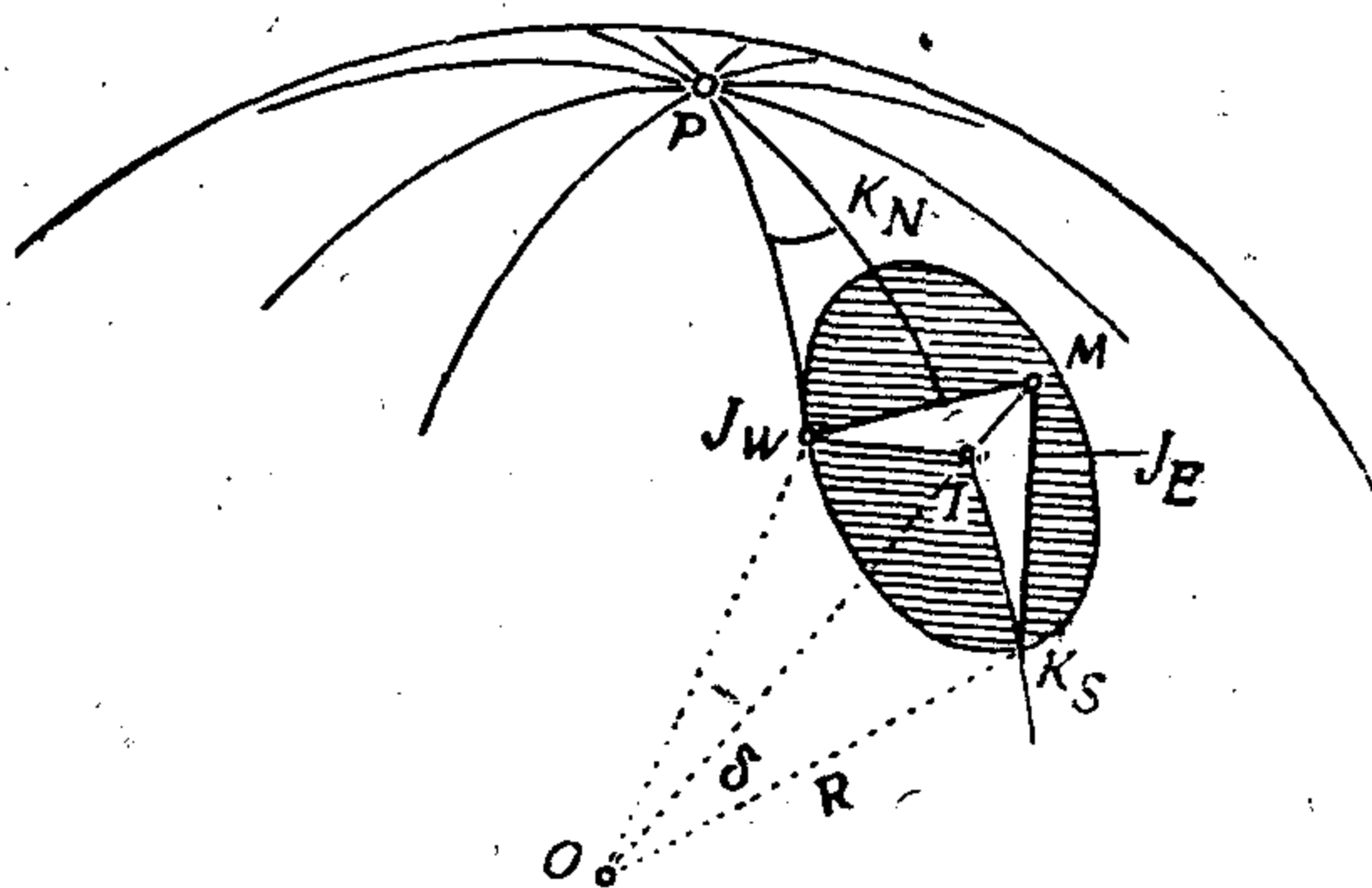
што приближно претставља 1200-ти део Земљине површине.

106
66

а одавде, доиста

$$R = \left(\frac{\sqrt{2h_2} - \sqrt{2h_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2$$

39. Претпостављамо да Земља има облик сфере. Слободни видик посматрачев, који се налази на извесном узвишењу, $IM = h$, биће ограничен кружном линијом, малим кругом $J_E K_S J_W K_N$ (в. сл. 26), сферна полу-пречника једнака депресији његова хоризонта. Депресију, δ , можемо израчунати или из приближног обрасца



$$\delta = 1.93 \sqrt{h},$$

стављајући $h = 12000$ м; или из правоуглог (равног) троугла $MK_S O$:

$$\cos \delta = \frac{R}{R+h} = \frac{6370}{6382} = 0.99812.$$

Сл. 26.

У првом случају налазимо $\delta = 3^\circ 31'3$, у другом налазимо $\delta = 3^\circ 31'0$. Ако за-

држимо ову другу вредност, за координате најјужније и најсеверније тачке посматрачева видика, то јест тачака K_S и K_N , добивамо:

$$L_S = 0, \varphi_S = \varphi - 3^\circ 31'0 = +56^\circ 29'0 \text{ и } L_N = 0, \varphi_N = \varphi + 3^\circ 31'0 = +63^\circ 31'0,$$

где је φ географска ширина посматрачева подножја, I , то јест $\varphi = +60^\circ$.

Најисточнија и најзападнија тачка посматрачева видика су тачке паралела J_E и J_W , чије су сферне даљине од посматрачева подножја, I , једнаке депресији хоризонта, δ . Према томе, географске ширине тих тачака једнаке су посматрачевој географској ширини, $\varphi = +60^\circ$.

Географске дужине њихове добићемо из једнакокраког сферног троугла $J_W P I$. Ако угао IPJ_W означимо са ΔL , имаћемо

$$\cos \delta = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cdot \cos \Delta L,$$

а одатле

$$\cos \Delta L = (\cos \delta - \sin^2 \varphi) \cdot \sec^2 \varphi.$$

Да се не би у нумеричком раду губило у тачности, извршићемо претходно познате трансформације, како бисмо вредност ΔL добили преко тангенса. Из последње једначине имамо

$$1 - \cos \Delta L = (1 - \cos \delta) \cdot \sec^2 \varphi = 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \cdot \sec^2 \varphi;$$

$$1 + \cos \Delta L = (\cos 2\varphi + \cos \delta) \cdot \sec^2 \varphi = 2 \cos \left(\varphi + \frac{\delta}{2} \right) \cdot \cos \left(\varphi - \frac{\delta}{2} \right) \cdot \sec^2 \varphi.$$

Одавде налазимо

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Delta L = \sin^2 \frac{\delta}{2} \cdot \sec \left(\varphi + \frac{\delta}{2} \right) \sec \left(\varphi - \frac{\delta}{2} \right).$$

36. Ако површину слободног видика који посматрач види са узвишења H означимо са S , и напишемо је у облику

$$S = 2\pi R^2 \frac{H}{R+H},$$

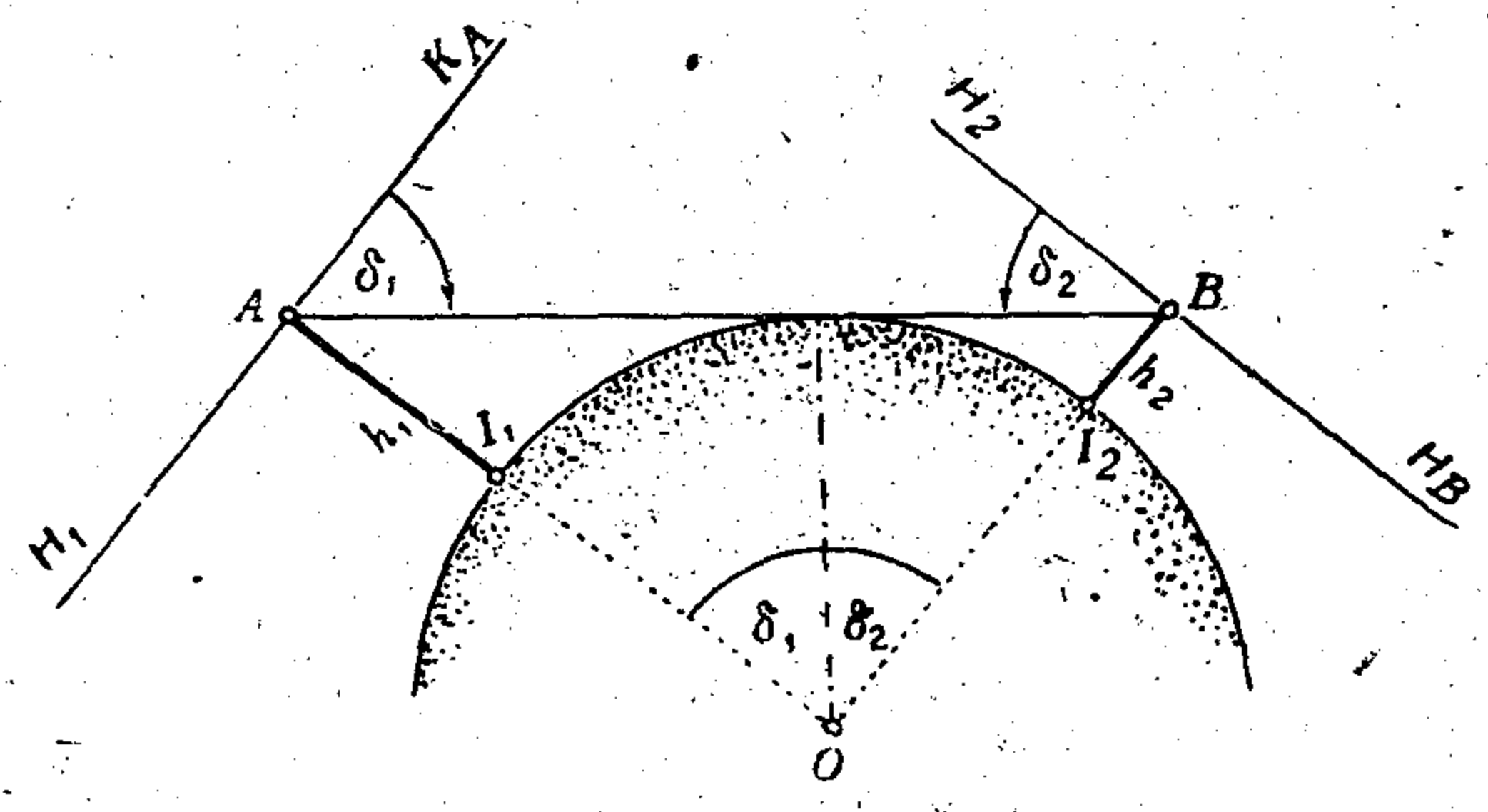
и сетимо се да је површина сфере, у овом случају Земље, $4\pi R^2$, онда је, према задатку,

$$2\pi R^2 \frac{H}{R+H} = \frac{4\pi R^2}{100},$$

или, пошто скратимо,

$$50H = R+H, \text{ то јест } H = \frac{R}{49};$$

значи, ако за Земљин полу-пречник узмемо $R=6370$, налазимо $H=130$ км.



Сл. 24.

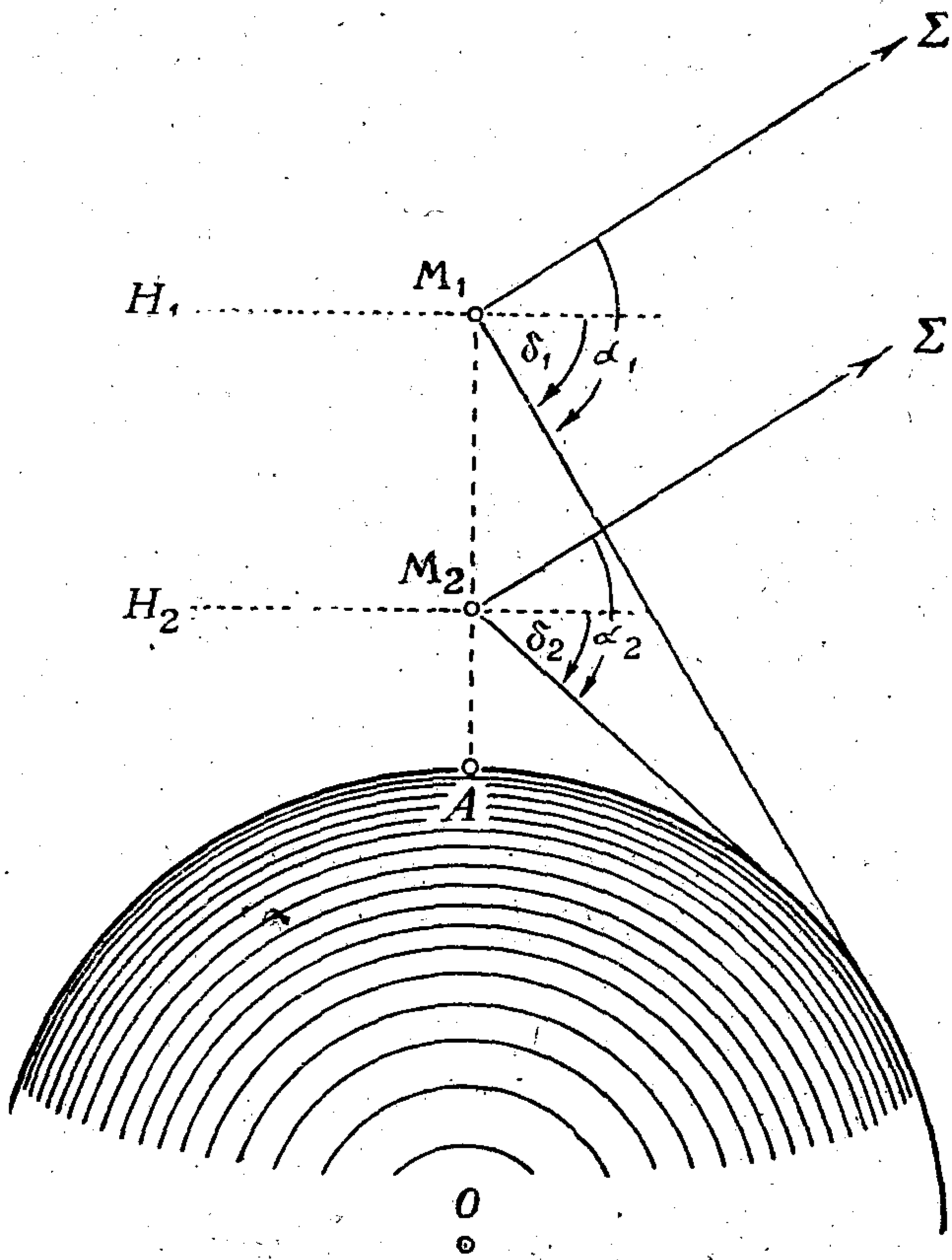
37. Посматрачи A и B , на узвишењима h_1 , односно h_2 (в.

сл. 24), таман ће још моћи видети један другог ако даљина вида једнога, AC , буде била продужетак даљине вида другог, BC , и обратно. А приметимо ли, уједно, да је угао између вертикала посматрача

$$\alpha = \delta_1 + \delta_2,$$

за тражени услов у задатку налазимо

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{R}} (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}).$$



Сл. 25.

38. Како се, према задатку, посматрачи, M_1 и M_2 (в. сл. 25), налазе на истој вертикали, правци ка некретници Σ (коју смо трамо неизмерно далеко), $M_1\Sigma$ и $M_2\Sigma$, паралелни су; дакле биће

$$\alpha_1 - \delta_1 = \alpha_2 - \delta_2.$$

А како су, опет,

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{R}} \text{ и } \delta_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{R}},$$

на основи горње једначине добивамо

$$\sqrt{2h_2} - \sqrt{2h_1} = \sqrt{R} (\alpha_2 - \alpha_1),$$

107
67

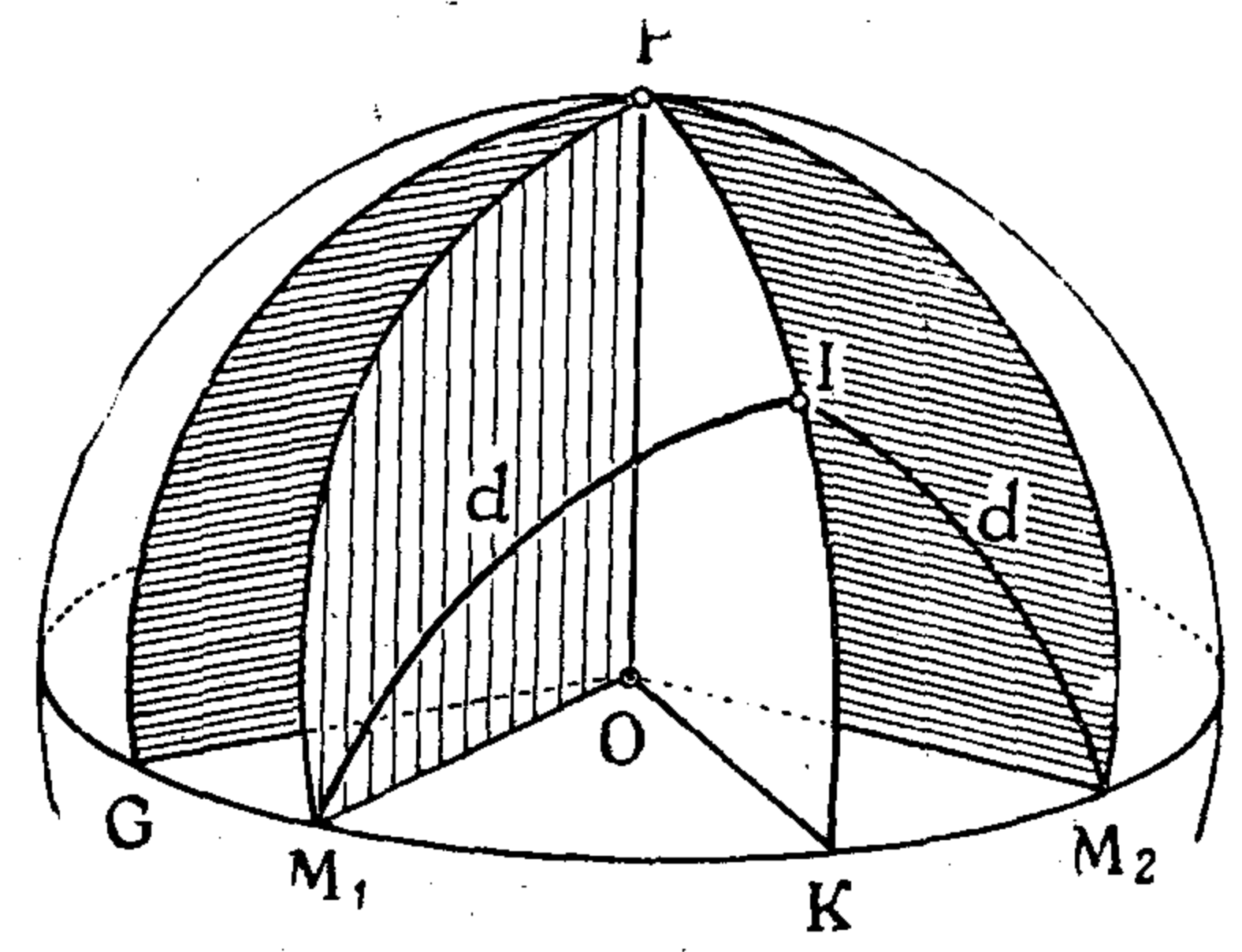
Према томе ће бити:

$$\begin{array}{llll} \frac{\delta}{2} = 1^{\circ} 45' 5, & \left[\sin \frac{\delta}{2} \right] & 8.48 691, & \left[\sec \left(\varphi + \frac{\delta}{2} \right) \right] & 0.32 496, \\ \varphi + \frac{\delta}{2} = 61 45.5, & 2 \left[\sin \frac{\delta}{2} \right] & 6.97 382; & \left[\sec \left(\varphi - \frac{\delta}{2} \right) \right] & 0.27 874, \\ \varphi - \frac{\delta}{2} = 58 14.5; & & & 2 \left[\sin \frac{\delta}{2} \right] & \underline{6.97 382}, \\ & & & 2 \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Delta L \right] & 7.57 752; \end{array}$$

према томе је $\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Delta L \right] 8.78 876; \quad \frac{1}{2} \Delta L = 3^{\circ} 31' 1.$

И тако добивамо за координате најисточније тачке посматрачева видика, то јест $J_E: L_E = -7^{\circ} 2' 2, \varphi_E = +60^{\circ}$; а за координате најзападније тачке, то јест $J_W: L_W = +7^{\circ} 2' 2, \varphi_W = +60^{\circ}$.

40. Нека сл. 27 претставља један део Земље-сфере, полупречника једнака јединици, и I тачку на њој чије су географске координате L и φ . Географска дужина је при том рачуната од гриничког меридијана, који је на слици претстављен са PG . На сферној даљини d од те тачке, то јест I , постоје на екватору две тачке. Претставићемо их на слици са M_1 и M_2 . Како се ове налазе на екватору, географске ширине су им 0° . Географске дужине њихове, које ћемо означити са L_1 и L_2 , одредићемо из правоуглих сферних троуглова IM_1K и IKM_2 , у којима су нам познати елементи: $KI = \varphi, M_1I = M_2I = d$ Из њих добивамо:



Сл. 27.

$$\cos d = \cos \varphi \cdot \cos (L - L_1),$$

и

$$\cos d = \cos \varphi \cdot \cos (L_2 - L),$$

а одавде налазимо

$$\underline{L_1 = L - \arccos (\cos d \cdot \sec \varphi)} \quad \text{и} \quad \underline{L_2 = L + \arccos (\cos d \cdot \sec \varphi)}.$$

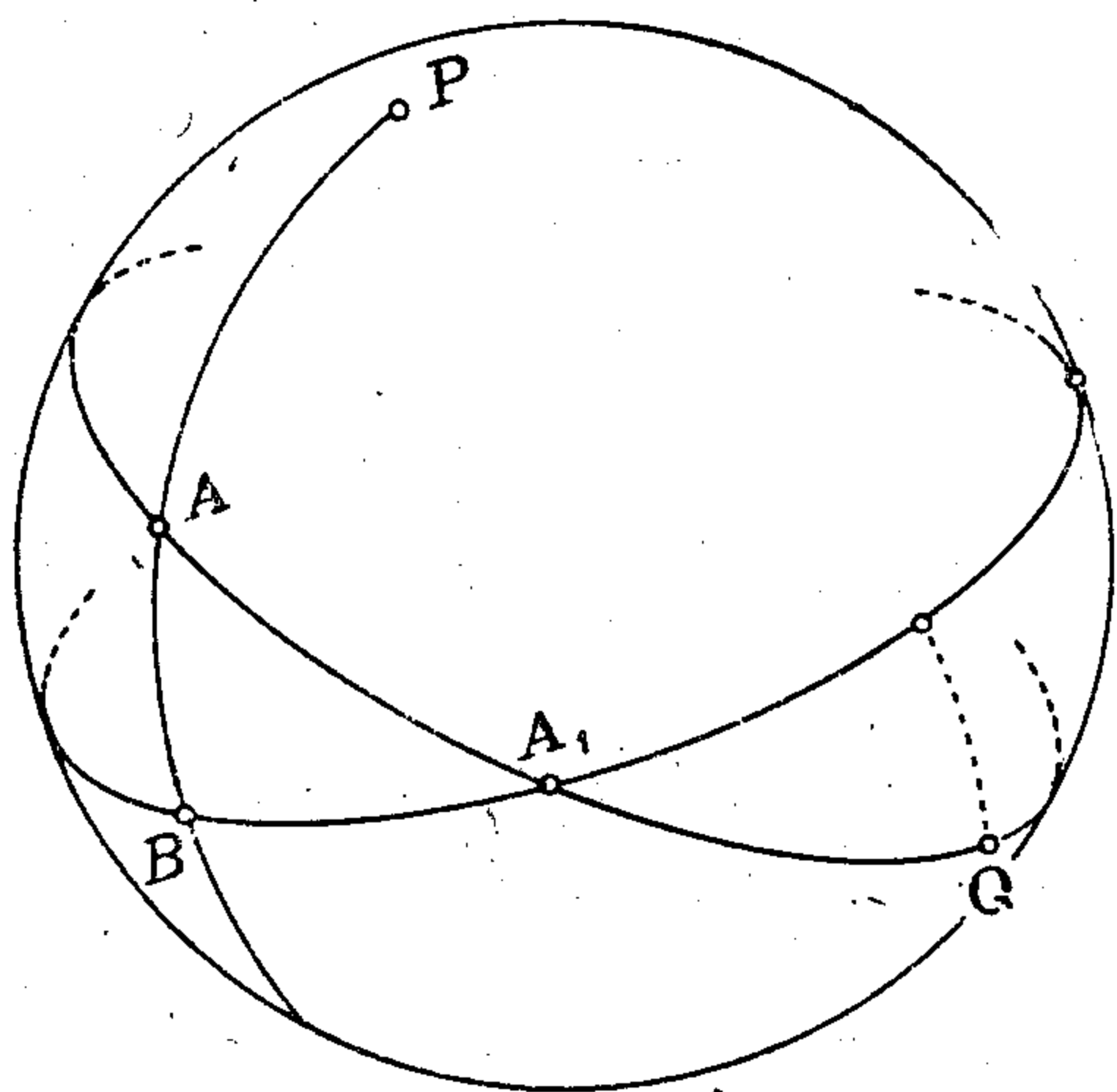
41. Означимо са A_1 место на екватору Земље-сфере; са A друго место, на паралелу φ ; са Q најјужнију тачку великог круга AA_1 . Но онда је $A_1Q = \frac{\pi}{2}$, или A_1 је пол меридијана што пролази кроз Q . Како

је, према задатку, географска ширина тачке Q : φ_s , то угао код пола A_1 , па дакле и код темена A_1 у правоуглом сферном троуглу ABA_1 , износи φ_s . У том сферном троуглу позната је, међутим, и страна $AB = \varphi$. Дакле можемо му одредити катету BA_1 , која претставља тражену разлику у географским дужинама тачака A и A_1 . Ако је означимо са ΔL , имаћемо

$$\sin \Delta L = \operatorname{ctg} \varphi_s \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

или

$$\Delta L = \operatorname{arc} \sin (\operatorname{ctg} \varphi_s \cdot \operatorname{tg} \varphi).$$



Сл. 28.

42. Повуцимо кроз места A и B (в. сл. 29) на Земљи-сфери лук великог круга AQB . Нека Q буде његова најсевернија тачка. Означимо јој географску ширину са φ_m . Но тако је сферни троугао P_nAB подељен у два

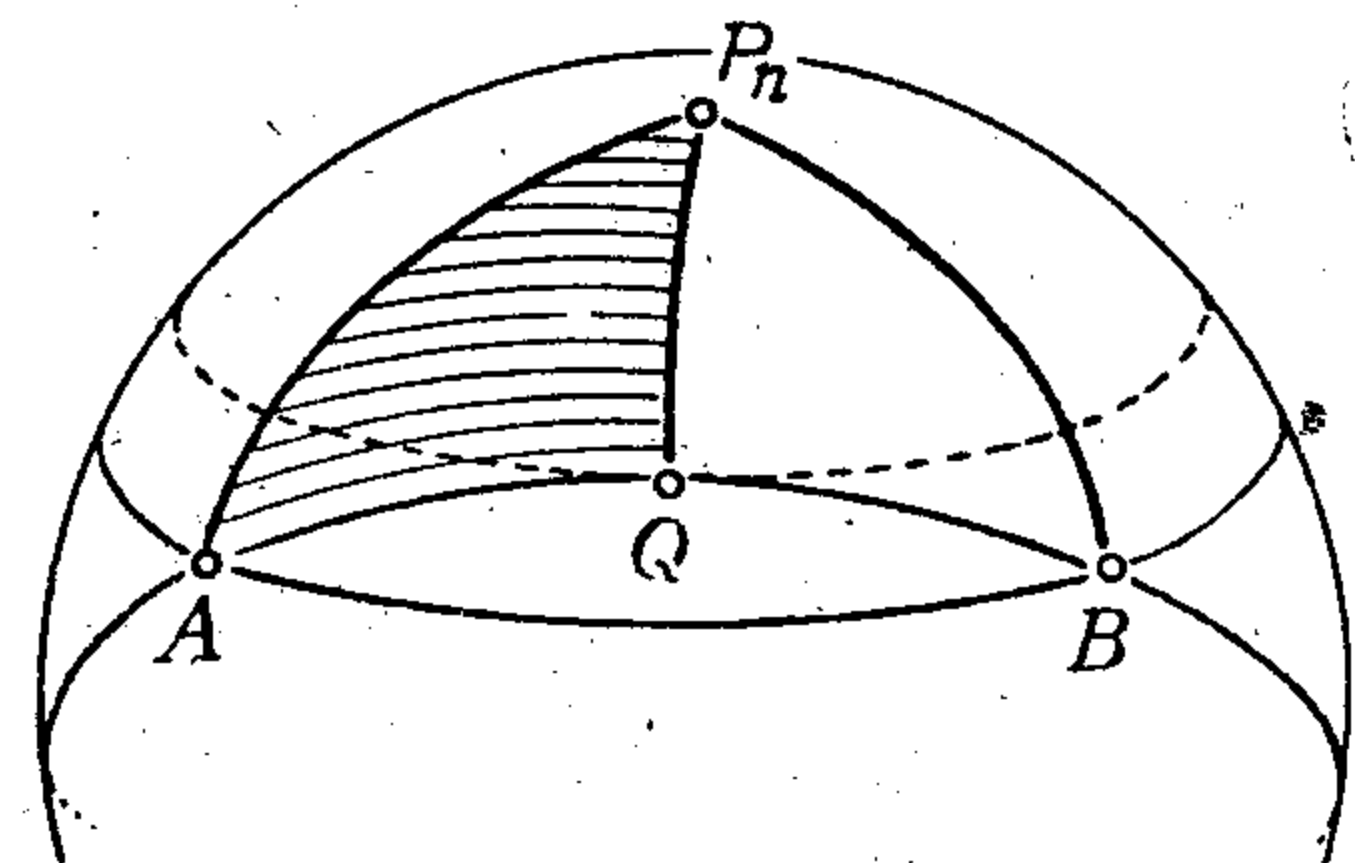
једнака правоугла сферна троугла, AQP_n и P_nQB . У сваком од њих познати су нам по једна страна, то јест

$$AP_n = BP_n = \frac{\pi}{2} - \varphi \text{ и по један угао, половина}$$

разлике географских дужина места A и B ,

то јест угао $AP_nQ = QP_nB = \frac{L}{2}$. Према томе,

географску ширину најсеверније тачке добивамо из



Сл. 29.

$$\cos \frac{L}{2} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi_m,$$

одакле налазимо

$$\varphi_m = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{sec} \frac{L}{2} \right).$$

Да бисмо одредили разлику у дужинама путања, означимо са s_φ дужину лука паралела AB , а са s дужину лука великог круга AB . Ако са L' означимо у минутама изражену разлику географских дужина тачака A и B , имамо да је

$$s_\varphi = L' \cos \varphi \text{ наутичких миља} = 1.852 L' \cos \varphi \text{ км.}$$

Лук великог круга AB , опет, добивамо из правоуглог сферног троугла AQP_n (или P_nQB), јер имамо

$$\sin \frac{s}{2} = \sin \frac{L}{2} \cdot \cos \varphi,$$

• а одатле

$$s = 2 \operatorname{arc} \sin \left(\sin \frac{L}{2} \cdot \cos \varphi \right).$$

s изражено у минутама претстављаће у наутичким миљама дужину пута AB по великом кругу, то јест најкраћи пут од A до B .

Ако за прво место, дакле A , узмемо Лисабон, а за друго, то јест B , Вашингтон, и претпоставимо да се они налазе на истом паралели, $\varphi = +38^\circ 50'$ (што није сасвим тачно, али ћемо узети да јесте), а географске дужине да им се разликују за $L = 4^h 31^m 31^s = 67^\circ 52'.8$, биће:

$$\begin{array}{lll} [\operatorname{tg} \varphi] & 9.90\,578, & L' = 4072'.8, & \left[\sin \frac{L}{2} \right] & 9.74\,689, \\ \left[\sec \frac{L}{2} \right] & 0.08\,112, & \cos \varphi = 0.77\,897, & [\cos \varphi] & 9.89\,152, \\ \Sigma = [\operatorname{tg} \varphi_m] & 9.98\,690, & s_\varphi = 3172.6 \text{ н. м.}, & \left[\sin \frac{s}{2} \right] & 9.63\,841, \\ & & \varphi_m = +44^\circ 8'.2; & & \frac{s}{2} = 25^\circ 46'.8; \\ & & s_\varphi = 5875.7 \text{ км}; & & \end{array}$$

дакле $s = 51^\circ 33'.6$ или $s = 3093.6$ н. м. $= 5729.3$ км.

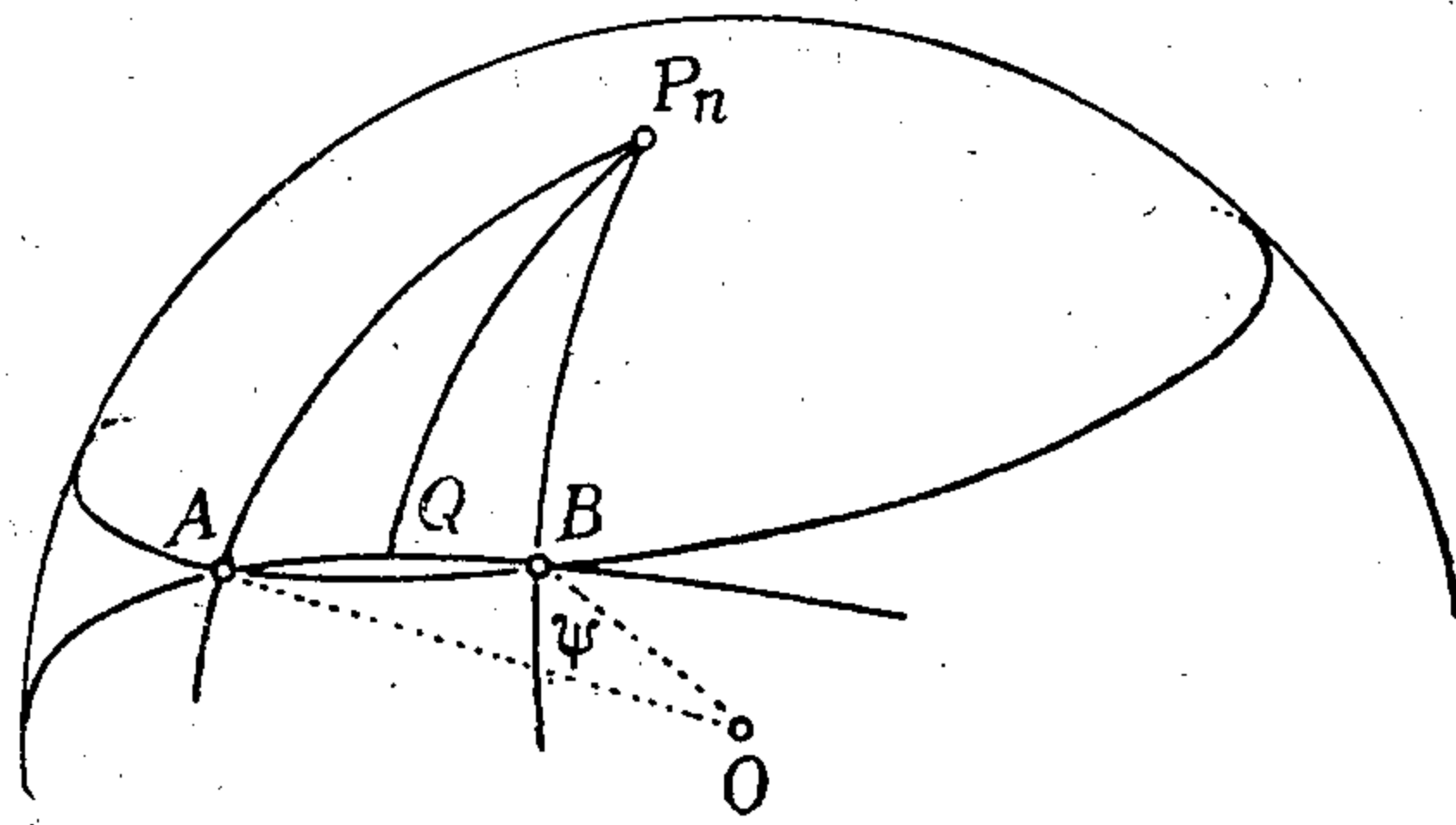
Вредност $\frac{s}{2} = 154^\circ 13'.2$, то јест $s = 308^\circ 26'.4$ претставља други лук, то јест, дужи пут AB .

Тако видимо да је пут по великом кругу од Лисабона до Вашингтона краћи од пута по паралели за 146.4 км.

43. Даљини $AB = l$ (в. сл. 30) од 261 км на Земљи-сфери полупречника $R = 6370$ км одговара у средишту великог круга AB угао

$$\psi = \frac{l}{R} = \frac{261}{6370} = 0.0041, \text{ или } \psi = 2^\circ 20'.9.$$

Значи, дакле, у сферном троуглу ABP_n познати су елементи: страна $AB = \psi$ и угао $AP_nB = \Delta L$. Да бисмо одредили географску ширину паралела AB , коју ћемо означити са φ , спустимо из P_n , нормално на AB , лук великог круга P_nQ . Тако смо добили два једнака правоугла сферна троугла. У сваком од њих познати су нам по страна $AQ = QB = \frac{1}{2}\psi$



Сл. 30.

и по угао $AP_nQ = QP_nB = \frac{1}{2}\Delta L$. Из њих добивамо

$$\cos \varphi = \sin \frac{1}{2}\psi \cdot \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\Delta L.$$

Према подацима задатка биће:

$$\frac{1}{2}\psi = 1^\circ 10'.5, \quad \left[\sin \frac{1}{2}\psi \right] = 8.31\,189,$$

170
70

$$\frac{1}{2}\Delta L = 1\ 42\ 0; \quad \left[\operatorname{cosec} \frac{1}{2}\Delta L \right] \frac{1.52774}{9.83963},$$

[cos φ] то јест $\varphi = \pm 46^{\circ}16'3$.

Напомињемо да би, са нумеричког гледишта, био тачнији поступак да је φ одређено било помоћу тангенса, место помоћу косинуса.

44. Пошто је брод пловио брзином од 12 чворова, то јест 12 н. м. на час, пловидба је трајала

$$4500 : 12 = 375 \text{ часова, или } 15 \text{ дана и } 15 \text{ часова.}$$

Преваљеном путу од 4500 н. м. по паралелу $\varphi = -28^{\circ}0'$, опет, одговара лук екватора од

$$(4500 \sec \varphi) \text{ н. м.} = 4500 \times 1.13257 \text{ н. м.} = 5096.57 \text{ н. м.,}$$

односно од оволико исто минута, што износи $84^{\circ}56'6$. А како је брод пловио ка истоку, из места географске дужине $L_1 = -16^{\circ}30'$, географска дужина тачке у коју је стигао износила је $L_2 = -101^{\circ}26'6$.

45. Како први брод плови брзином од 15 чворова, по паралелу $\varphi_1 = +48^{\circ}20'$, часовна промена његове географске дужине, изражена у угловним минутама, износиће

$$\Delta L_1 = 15 \sec \varphi_1.$$

Ако брзину у чворовима другог брода означимо са v , часовна промена његове географске дужине, пошто плови по паралелу $\varphi_2 = -15^{\circ}15'$, износиће, у угловним минутама,

$$\Delta L_2 = v \cdot \sec \varphi_2.$$

Бродови ће се налазити стално на истом меридијану ако буде било

$$\Delta L_1 = \Delta L_2, \text{ то јест } 15 \cdot \sec \varphi_1 = v \cdot \sec \varphi_2,$$

$$\text{или } \underline{v} = 15 \cdot \sec \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 = 15 \times 1.504 \times 0.965 \approx \underline{21.8} \text{ чворова.}$$

46. Означимо са t (у часовима) трајање пловидбе бродова до њихова сусрета на истом меридијану. За то време први брод је превалио пут од $12t$ н. м., а други од $15t$ н. м. Преваљеном путу првог брода одговара промена у географској дужини, изражена у угловним минутама,

$$\Delta L_1 = (12 \sec \varphi_1) \cdot t = 24' t,$$

а преваљеном путу другог брода одговара промена

$$\Delta L_2 = (15 \sec \varphi_2) \cdot t = 17'32 t.$$

Како је разлика у географским дужинама износила

$$L_2 - L_1 = 45^{\circ} = 45 \times 60' = 2700',$$

за трајање пловидбе налазимо

$$\underline{t} = 2700 : 41.32 = 65^h.34 \approx \underline{65^h 20^m} = 2 \text{ д } 17^h 20^m.$$

Пошто су бродови кренули 27 фебруара 1952 г., у 12^h гриничког времена, срели су се на истом меридијану 29 фебруара у 29^h 20^m, то јест 1. марта 1952 г. у 5^h 20^m гриничког грађанског времена.

Први брод, који је пловио ка западу, променио је, према томе, своју географску дужину за:

$$\Delta L_1 = 24' t = 24' \times 65.34 = 1568'.2 = 26^\circ 8'.2;$$

други брод, који је пловио ка истоку, променио је своју географску дужину за

$$\Delta L_2 = 17'.32 t = 17'.32 \times 65.34 = 1131'.7 = 18^\circ 51'.7.$$

Значи, срели су се на меридијану чија је географска дужина L :

$$\begin{array}{rcl} L_1 = -18^\circ 24', & & L_2 = +26^\circ 36', \\ \Delta L_1 = +26 \quad 8.2, & & \Delta L_2 = -18 \quad 51.7, \\ \underline{L = +7 \quad 44.2;} & & \underline{L = +7 \quad 44.3.} \end{array}$$

47. Разлици у географској дужини од 4^m, то јест $1^\circ = 60'$, одговара на екватору даљина од 60 н. м., или $60 \times 1.852 \text{ км} = 111.112 \text{ км}$. Овој даљини на екватору одговара на паралелу $\varphi = +60^\circ$ даљина од

$$(111.112 \times \cos \varphi) \text{ км} = 55.56 \text{ км}.$$

Оволико износи и пут који су пешаци превалили. Значи, сваки је од њих превалио по 27.78 км. А пошто су пешачили по 5 часова, брзина свакога је износила око 5.6 км.

48. Траже се приближне промене ΔL и $\Delta \varphi$, координата тачке А (в. сл. 31), кад се тачка А помери за $AC = s$, по великом кругу, који са меридијаном места А образује угао $PAC = q$.

Ако се тачка А не налази у близини пола P , и ако је померање s довољно малено, тако да се његов квадрат и виши степени могу занемарити, може се мали троугао на сфери ABC , који за стране има:

$$AB = \Delta L \cos \varphi, \quad BC = \Delta \varphi, \quad AC = s,$$

сматрати као равни правоугли троугао. И имаћемо, као што са слике видимо,

$$AB = AC \cdot \sin q, \text{ или } \Delta L \cos \varphi = s \cdot \sin q,$$

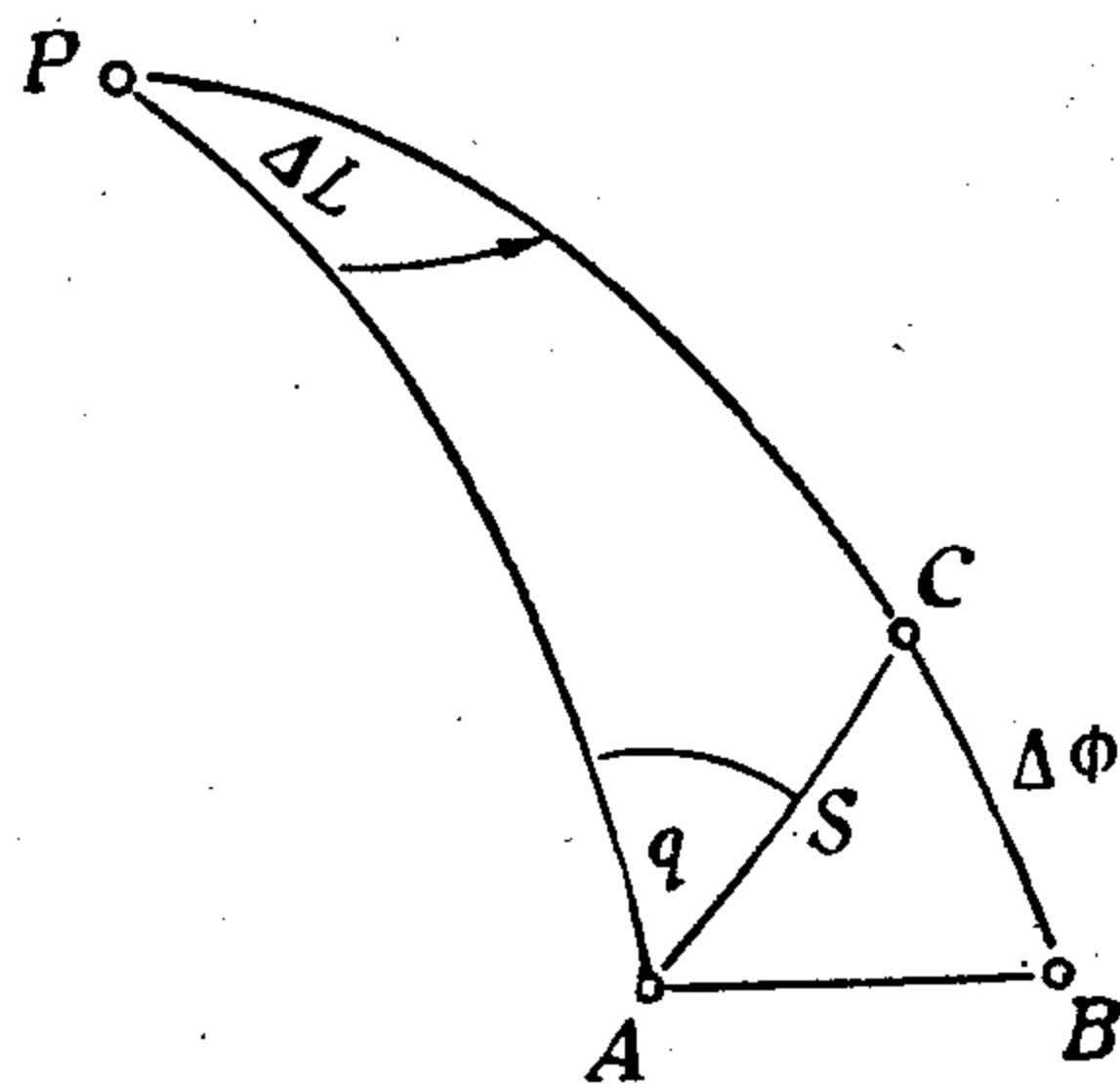
дакле $\Delta L = s \cdot \sin q \cdot \sec \varphi$,

$$BC = AC \cdot \cos q, \text{ или } \Delta \varphi = s \cdot \cos q.$$

Према задатку је: $q = 45^\circ$, $s = 50 \text{ км} = 27 \text{ н. м.} = 27'$.

А како је $\varphi = +44^\circ 48'$, дакле $\sec \varphi = 1.409$; $\sin q = \cos q = 0.707$, налазимо за тражене часовне промене координата воза:

$$\underline{\Delta L = 27' \times 0.707 \times 1.409 = 26'.9} \quad \text{и} \quad \underline{\Delta \varphi = 27' \times 0.707 = 19'.1}$$

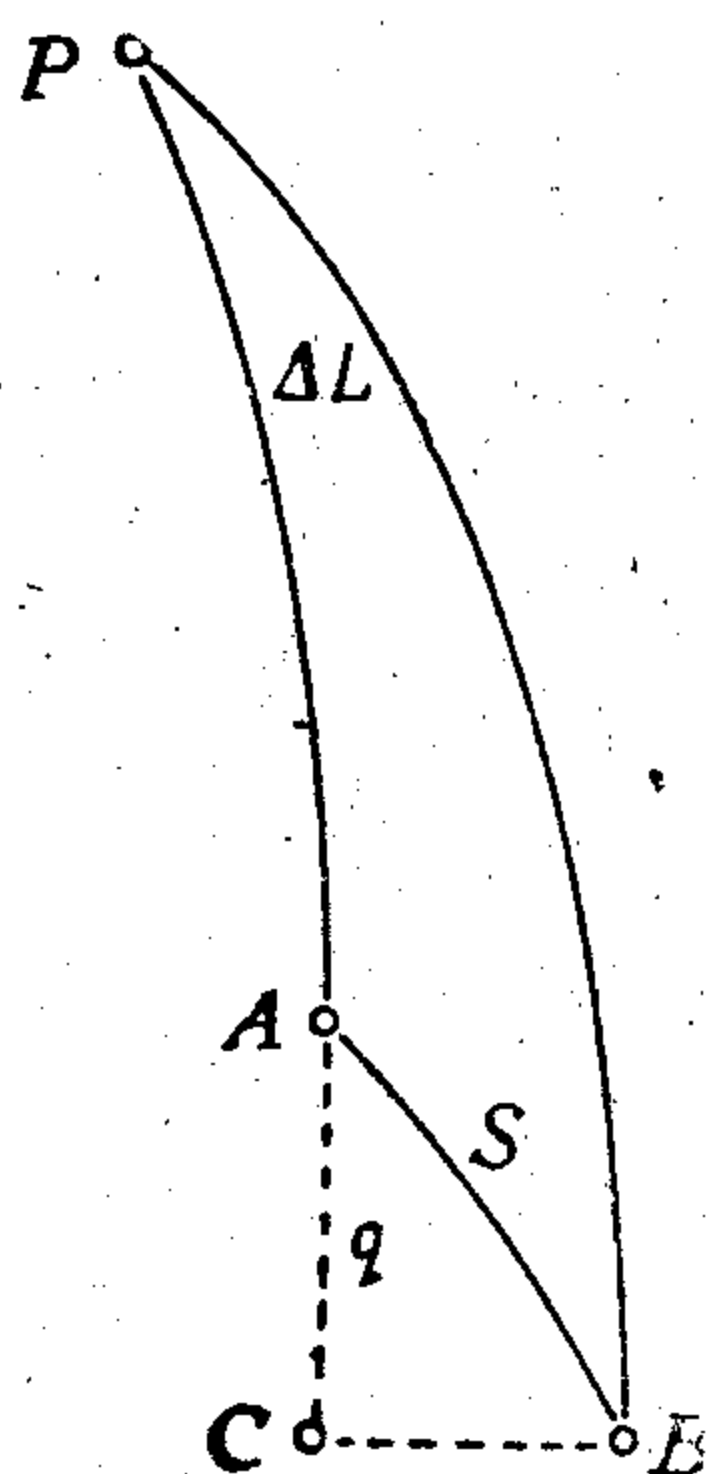


Сл. 31.

112
72

49. Како се посматрачи налазе један од другог на удаљењу $l=278$ км, толикој дужини лука меридијана на Земљи-сфери, полу-пречника $R=6370$ км, одговарала би разлика у географским ширинама

$$\Delta\varphi = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{l}{R} = 57^{\circ}.296 \times 0.04364 = 2^{\circ}.50 = 2^{\circ} 30'$$



Сл. 32.

Међутим, према задатку, разлика њихових географских ширина износи $2^{\circ} 15'$. Према томе, посматрачи се не налазе на истом меридијану.

Тражену промену географске дужине ΔL могли бисмо израчунати из сферног троугла PAB (в. сл. 32), чије су нам све стране познате. Но можемо и једноставније, помоћу малог правоуглог троугла на сфери ACB , у којем знамо стране $AB=s=2^{\circ}.50$ и $AC=\Delta\varphi=2^{\circ}.25$. Ако га сматрамо као равни правоугли троугао, моћи ћемо одредити угао q . Имамо, доиста,

$$AC = AB \cdot \cos q,$$

то јест ако се вратимо на угловну меру,

$$\Delta\varphi = s \cdot \cos q, \quad \text{што даје } q = 25^{\circ} 51'.$$

Знајући, опет, угао q , из равног правоуглог троугла имамо

$$BC = AB \cdot \sin q,$$

то јест ако пређемо на угловну меру,

$$\Delta L \cos \varphi_2 = s \cdot \sin q, \quad \text{или } \Delta L = s \cdot \sin q \cdot \sec \varphi_2 = 2^{\circ}.50 \times 0.436 \times 1.110 = 1^{\circ}.12'.6.$$

50. Означимо најјужнију тачку пута са X (в. сл. 33), а њене координате, које треба одредити, са L_x, φ_x . Означимо са Q пол великог круга ABX , којим брод плови. Он-да је

$$AQ = BQ = XQ = \frac{\pi}{2}.$$

Из сферних троуглова PAQ и PBQ , који имају стране $\frac{\pi}{2} - \varphi_1, \frac{\pi}{2}$, и $-\varphi_x$,

односно $\frac{\pi}{2} - \varphi_2, \frac{\pi}{2}$, и $-\varphi_x$, имамо

$$\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_x -$$

$$- \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_x \cdot \cos (L_1 - L_x) = 0,$$

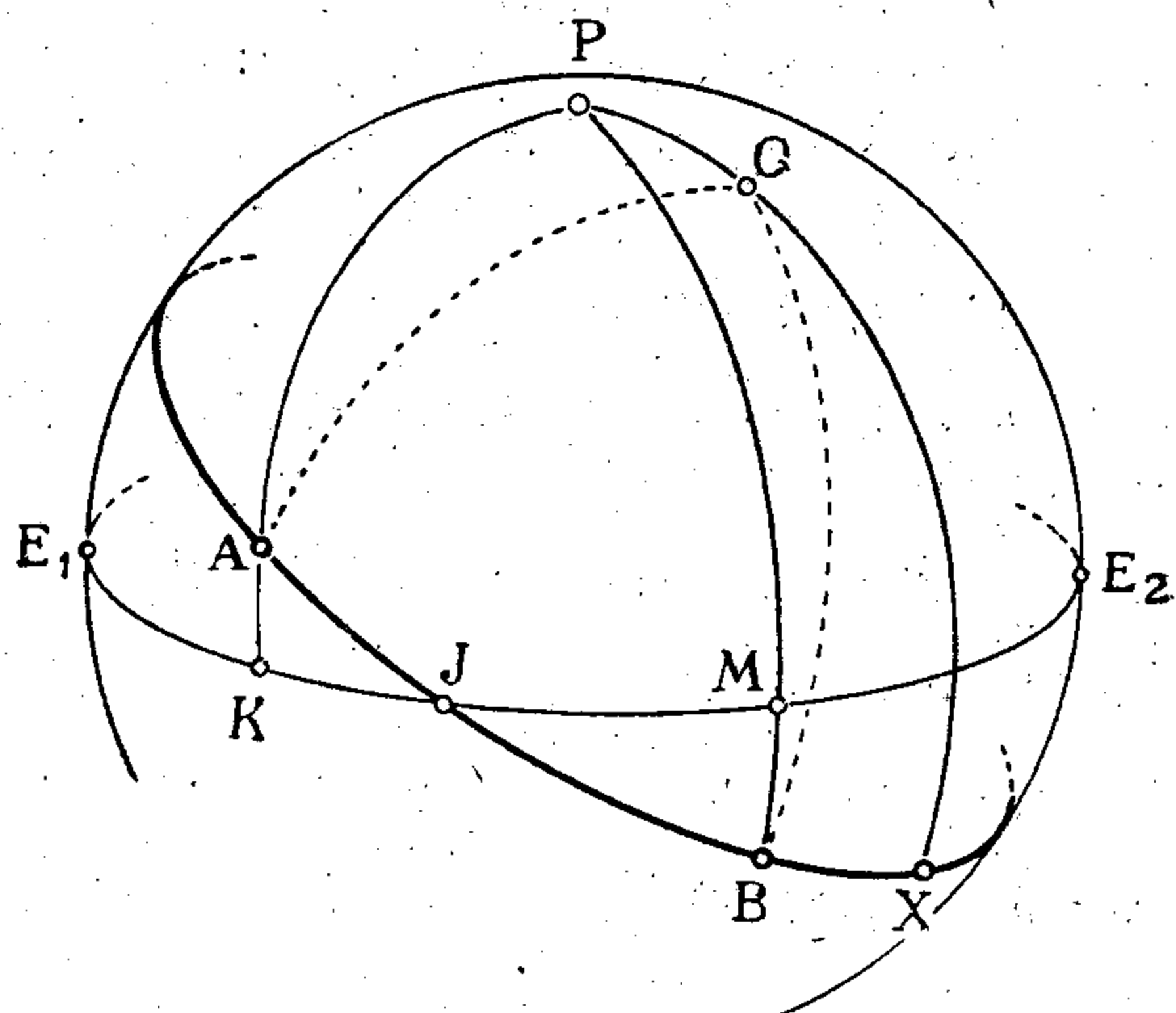
$$\sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_x -$$

$$- \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_x \cdot \cos (L_2 - L_x) = 0,$$

или

$$\cos (L_1 - L_x) = \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{ctg} \varphi_x,$$

$$\cos (L_2 - L_x) = \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \operatorname{ctg} \varphi_x,$$



Сл. 33

дакле, две једначине из којих ћемо израчунати непознате координате L_x и φ_x .

Из ових двеју једначина добивамо

$$\frac{\cos(L_1 - L_x) - \cos(L_2 - L_x)}{\cos(L_1 - L_x) + \cos(L_2 - L_x)} = \operatorname{tg} \left[L_x - \frac{1}{2}(L_1 + L_2) \right] \operatorname{tg} \frac{1}{2}(L_1 - L_2) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2},$$

а одавде, после очигледних трансформација,

$$\operatorname{tg} \left[L_x - \frac{1}{2}(L_1 + L_2) \right] = \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \operatorname{cosec}(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(L_1 - L_2).$$

Из ове једначине израчунавамо L_x .

Географску ширину, φ_x , најјужније тачке добивамо, пошто израчунамо њену географску дужину, из било које од двеју полазних једначина.

Датум и тренутак када ће стићи брод у најјужнију тачку моћи ћемо израчунати ако знамо трајање пловидбе. Да бисмо могли израчунати трајање пловидбе, треба да знамо преваљени пут, AH . А овај је одређен углом AQH , јер је Q пол великог круга ABX . Угао AQH је, као што видимо, суплемент угла $AQP = Q$, који можемо израчунати из сферног троугла AQP . Имамо, наиме,

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) \cdot \sin(L_1 - L_x) = \sin Q,$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) = \sin \varphi_x \cdot \cos Q.$$

Поделимо ли прву једначину другом имаћемо

$$\operatorname{tg} Q = \operatorname{ctg} \varphi_1 \sin(L_1 - L_x) \cdot \sin \varphi_x,$$

то јест једначину из које израчунавамо Q , па онда и $AH = \pi - Q$.

Часовне промене координата брода, у свакој тачки пута, моћи ћемо израчунати ако нам је познат, сем брзине брода, и смер пловидбе у дотичној тачки. Смер је, рецимо у тачки A , одређен углом $KAJ = A$. Имамо, наиме, ако означимо са L_i географску дужину тачке пресека (J) пута са екватором

$$\operatorname{ctg} A = \sin \varphi_1 \cdot \operatorname{ctg}(L_1 - L_i).$$

Ову разлику у географским дужинама тачака A и J одређујемо из правоуглог сферног троугла AJ , помоћу обрасца

$$\sin(L_1 - L_i) = \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{ctg} J.$$

114
74

Тако је, дакле, одређен смер пловидбе у тачки А. Ако сад мали правоугли троугао на сфери, чије су катете $\Delta\varphi_1$ и $\Delta L_1 \cos \varphi_1$, а хипотенуза $s=20'$, — сматрамо као равни троугао, имаћемо

$$\Delta L_1 = s \sin A \cdot \sec \varphi_1 \quad \text{и} \quad \Delta\varphi_1 = s \cos A.$$

Пошто је смер пловидбе познат, одређени су и знаци ових часовних промена.

Према томе ћемо имати:

$$\text{Дате величине: } \begin{cases} \varphi_1 = + 2^\circ 15', & L_1 = + 51^\circ 04'.5, & \frac{1}{2}(L_1 - L_2) = 42^\circ 07'.5, \\ \varphi_2 = - 18 \ 46, & L_2 = - 33 \ 10.5, & \\ \varphi_1 - \varphi_2 = 21 \ 01, & L_1 - L_2 = 84 \ 15.0, & \frac{1}{2}(L_1 + L_2) = 8 \ 57.0. \\ \varphi_1 + \varphi_2 = - 16 \ 31; & L_1 + L_2 = 17 \ 54.0; & \end{cases}$$

Израчунавање координата L_x и φ_x .

$$\begin{aligned} [\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] & 9.55 \ 466, & L_x - \frac{1}{2}(L_1 + L_2) & = - 54^\circ 21'.8, \\ [\operatorname{cosec}(\varphi_1 + \varphi_2)] & 0.54 \ 623 \ n, & \\ \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(L_1 - L_2) \right] & \underline{0.04 \ 366}, & \frac{1}{2}(L_1 + L_2) & = 8 \ 57.0, \\ \left[\operatorname{tg} \left\{ L_x - \frac{1}{2}(L_1 + L_2) \right\} \right] & 0.14 \ 455 \ n; & \underline{L_x = - 45 \ 24.8;} & \end{aligned}$$

$$L_1 - L_x = 96^\circ 29'.3,$$

$$L_2 - L_x = 12 \ 14.3;$$

$$\begin{aligned} [\cos(L_1 - L_x)] & 9.05 \ 308 \ n, & [\cos(L_2 - L_x)] & 9.99 \ 001, \\ [\operatorname{ctg} \varphi_1] & \underline{1.40 \ 572}, & [\operatorname{ctg} \varphi_2] & \underline{0.46 \ 880 \ n}, \\ [\operatorname{ctg} \varphi_x] & 0.45 \ 880 \ n; & [\operatorname{ctg} \varphi_x] & 0.45 \ 881 \ n, \end{aligned}$$

$$\underline{\varphi_x = - 19^\circ 10'.3;}$$

$$\underline{\varphi_x = - 19^\circ 10'.3.}$$

Израчунавање трајања пловидбе:

$$\begin{aligned} [\operatorname{ctg} \varphi_1] & 1.40 \ 572, & & \\ [\sin(L_1 - L_x)] & 9.99 \ 721, & Q & = 83^\circ 08', \\ [\sin \varphi_x] & \underline{9.51 \ 629}, & AX & = 180^\circ - Q = 96^\circ 52', \\ [\operatorname{tg} Q] & 0.91 \ 922; & AX & = 5812' = 5812 \ \text{н. м.} \end{aligned}$$

Пошто је брзина брода била 20 чворова, пловидба је трајала 290.6 часова, или 12 дана $2^h 36^m$. Према томе, брод је прошао кроз најјужнију тачку свога пута 27 априла у $12^h 36^m$ гриничког грађанског времена.

Израчунавање часовних промена координата за тачке А и В:

[tg φ ₁]	8.59 428,	L ₁ - L _i = 6° 29' 3,	L ₂ - L _i = - 77° 45' 5,
[ctg φ _x]	0.45 881,	L ₁ = 51 04.5,	L ₂ = - 33 10.5,
[tg φ ₂]	9.53 120 n,	L _i = + 44 35.2;	L _i = + 44 35.0;
[sin (L ₁ - L _i)]	9.05 309,		
[sin (L ₂ - L _i)]	9.99 001 n;		

	A:	B:	A:	B:
[sin φ]	8.59 395,	9.50 747 n,	[cos A; cos B]	{ 9.51 363, 8.84 068,
[ctg (L - L _i)]	0.94 413,	9.33 639 n,	[s]	{ 1.30 103, 1.30 103,
[ctg A; ctg B]	9.53 808,	8.84 386,	[sin A; sin B]	{ 9.97 555, 9.99 896,
A, одн. B.	70° 57' 3;	86° 01' 6;	[sec φ]	{ 0.00 033, 0.02 372,
			[Δφ]	{ 0.81 466, 0.14 171,
			[ΔL]	{ 1.27 691, 1.32 371;

Тако за часовне промене координата налазимо:

у тачки А / $\Delta L_1 = - 19'$ и $\Delta \varphi_1 = - 7'$;
у тачки В / $\Delta L_2 = - 21'$ и $\Delta \varphi_2 = - 1'$.

51. Прво ћемо испитати за које ће тачке, А и В, на истом паралелу на Земљи-сфери, разлика између пута по паралелу и пута по великом кругу бити највећа. А затим ћемо испитати на којем ће од свих могућих паралела та разлика, то јест скраћење пута између двеју тачака, бити највеће, и колико.

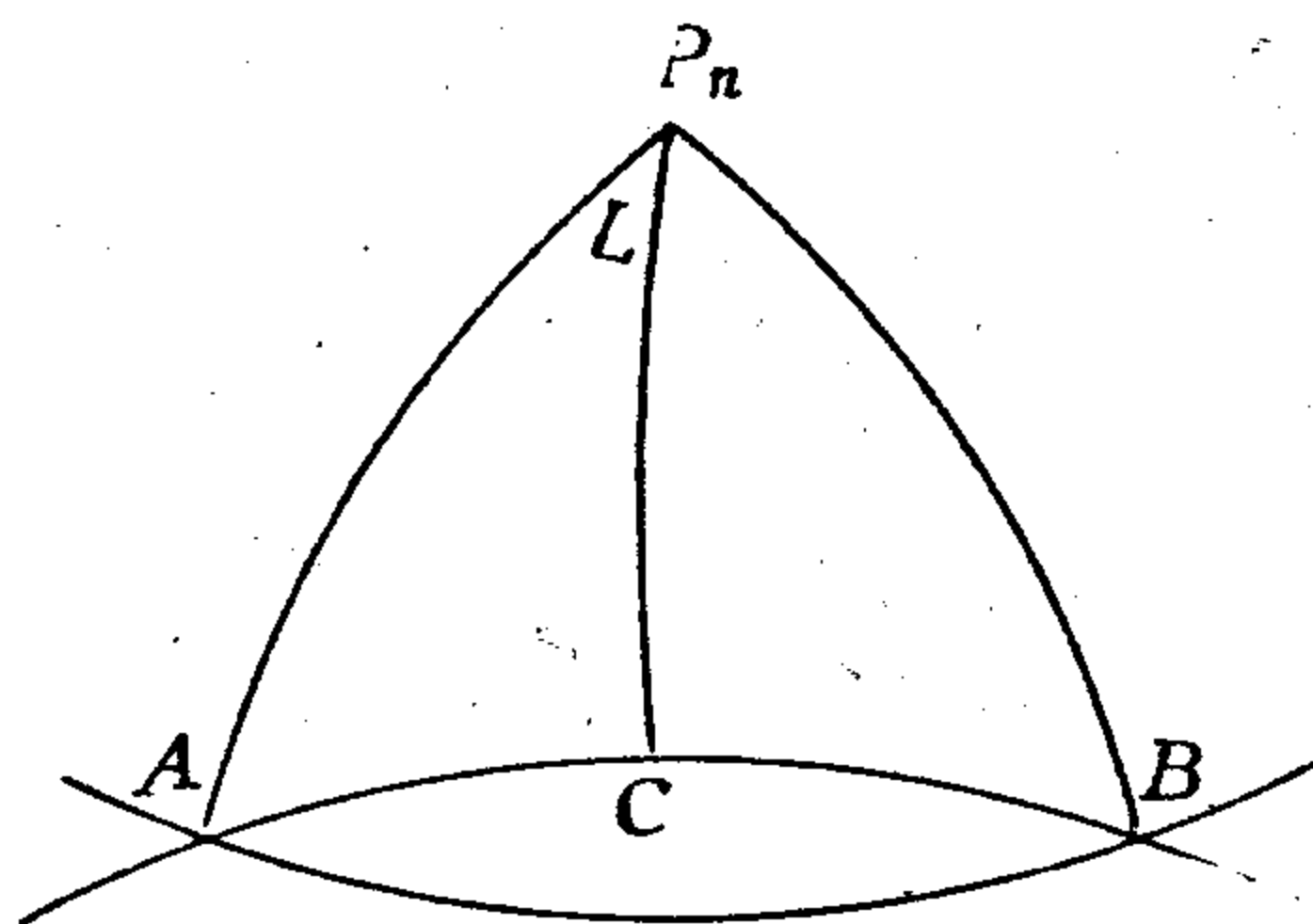
Узмимо у ту сврху, на паралелу географске ширине φ, две тачке, А и В (в. сл. 34), чија разлика географских дужина износи 2L. Означимо дужине лукова: по паралелу са s_φ, по великом кругу са s. Ако још Земљин полупречник означимо са R, онда ћемо имати:

$$s_\varphi = 2RL \cos \varphi \quad \text{и} \quad s = 2R \arcsin (\cos \varphi \cdot \sin L).$$

Нас занима питање како се понаша разлика

$$s_\varphi - s = \Delta_\varphi = 2R [L \cos \varphi - \arcsin (\cos \varphi \cdot \sin L)],$$

као функција разлике географских дужина тачака А и В; специјално, кад та разлика достиже своје екстремне вредности. Услов је за то



Сл. 34.

$$\frac{d\Delta\varphi}{dL} = 2R \left(\cos\varphi - \frac{\cos\varphi \cdot \cos L}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi \cdot \sin^2 L}} \right) = 0.$$

Одавде добивамо

$$\sqrt{1 - \cos^2\varphi \cdot \sin^2 L} = \cos L,$$

или

$$1 - \cos^2\varphi \cdot \sin^2 L = \cos^2 L,$$

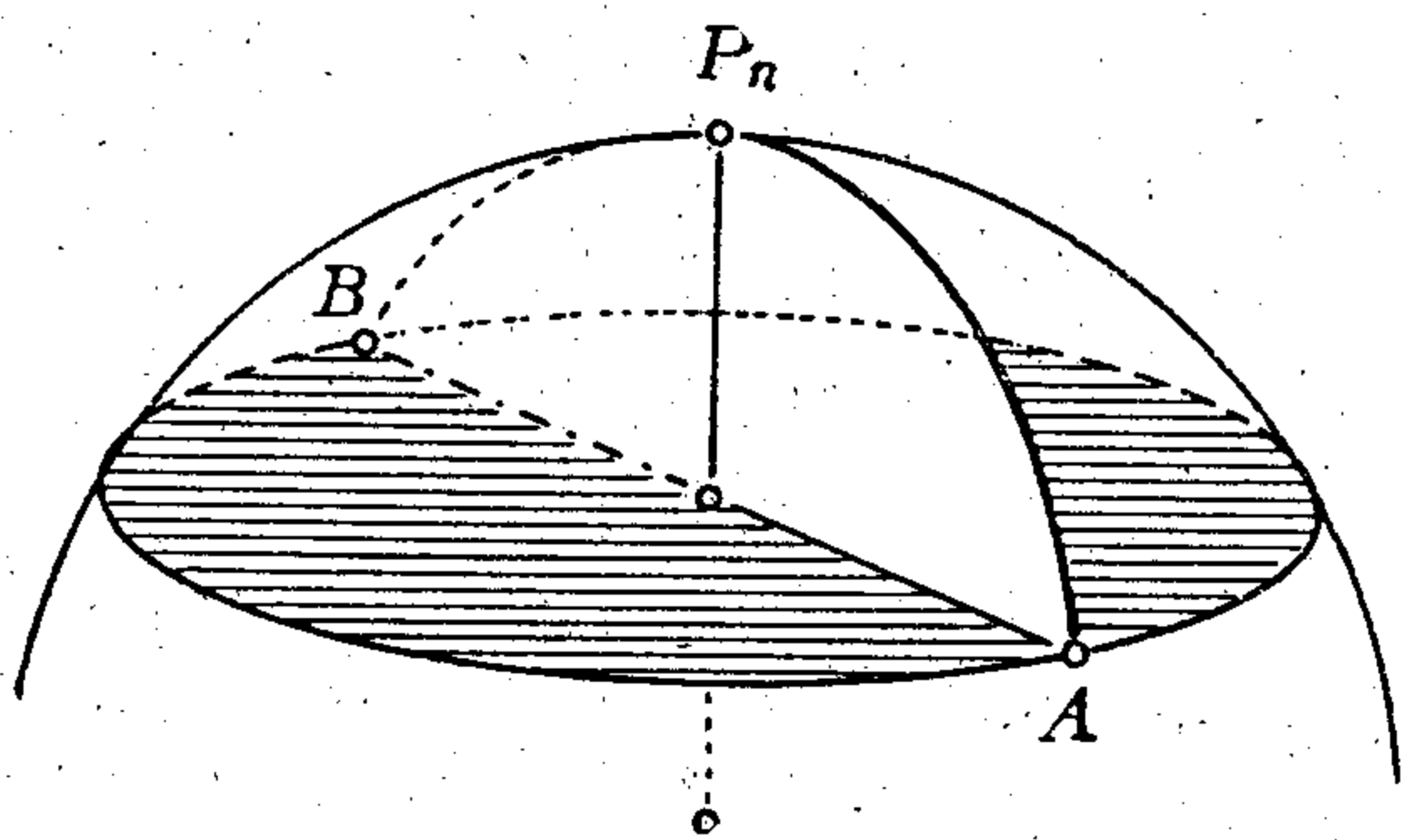
или

$$1 - \cos^2\varphi = (1 - \cos^2\varphi) \cdot \cos^2 L,$$

то јест

$$\cos^2 L = 1, \text{ односно } L_1 = 0 \text{ и } L_2 = \pi.$$

Очигледно је да прва вредност одговара минимуму, друга — максимуму. Другим речима, највећа ће бити разлика у дужинама путева AB ,



Сл. 35.

дакле и скраћење пута AB , кад се тачке A и B налазе на крајевима истог пречника паралела (в. сл. 35). Разлика географских дужина тачака A и B тада износи π . Дужина лука паралела, географске ширине φ , биће у том случају

$$s_\varphi = R\pi \cos\varphi.$$

Лук великог круга AB је, у том случају, лук меридијана; према томе он прелази преко пола P_n . То је, значи,

лук над углом у средишту $2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, чија ће дужина бити онда

$$s = R(\pi - 2\varphi).$$

Услов да разлика

$$s_\varphi - s = \Delta\varphi = R\pi \cos\varphi - R(\pi - 2\varphi)$$

буде највећа јесте да

$$\frac{d\Delta\varphi}{d\varphi} = -R\pi \sin\varphi + 2R = 0,$$

или

$$\sin\varphi = \frac{2}{\pi}; \quad \text{дакле } \varphi = 39^\circ 32' 4.$$

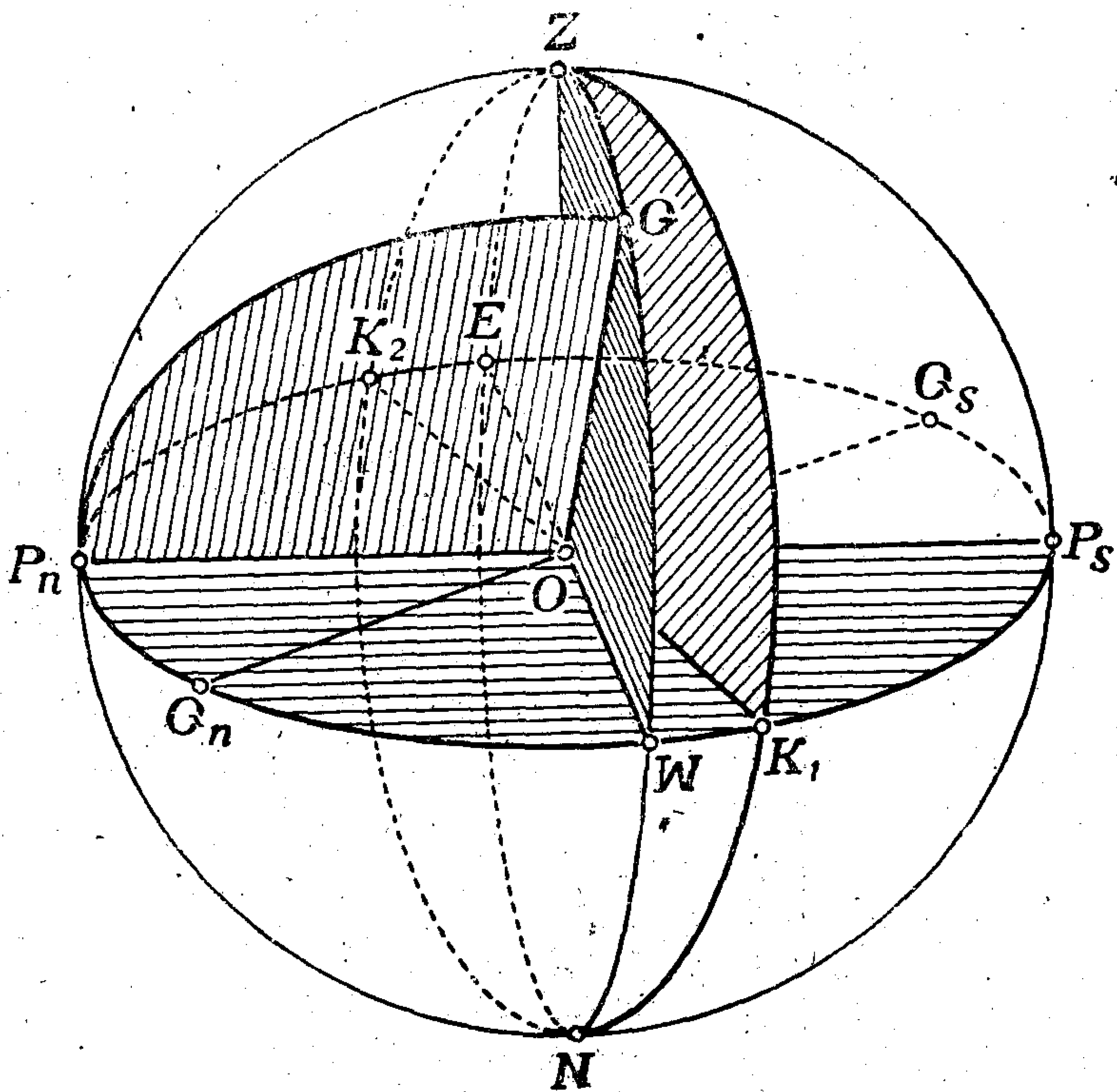
Ако узмемо $R = 6370$ км, и приметимо да је $\cos\varphi = 0.77118$, налазимо

за дужину лука паралела: $s_\varphi = 15\,432.8$ км,

а за дужину лука великог круга: $s = 11\,219.9$ км.

Према томе највећа вредност коју разлика $s_\varphi - s$ може достићи, дакле и највеће скраћење пута између тачака A и B , износи $\Delta\varphi = 4\,213$ км.

52. Претставимо за Z (в. сл. 36) посматрачев зенит, у равни еквиатора $ZWNE$; са P_nWP_s — посматрачев хоризонт; са ZP_sN — његов меридијан; са ZK_1N — вертикал азимута $P_sZK_1 = A$. Овим вертикалом дефинисан је велики круг ZK_1NK_2 . Означимо му половине са Q_n , односно са Q_s . Пречник, Q_nQ_s нормалан је онда на равни великог круга ZK_1NK_2 . А нормалан је и на тангентним равнинама на сфери у тачкама Q_n и Q_s , то јест на хоризонтским равнинама тачака Q_n и Q_s , које су, према томе, паралелне са равни вертикала Z_1KN , азимута A . Тражене тачке на Земљи су, дакле, Q_n и Q_s , то јест полови великог круга дефинисана вертикалом датог азимута. Треба још одредити географске координате тих тачака.



Сл. 36.

Притом ће довољно бити да одредимо координате само, рецимо, пола Q_n ; координате другог пола, Q_s , биће одређене као координате антипода пола Q_n .

Географска ширина пола Q_n једнака је, као што се са слике види, углу $WOQ_n =$ углу $P_sOK_1 = A$. За географску дужину налазимо, опет, ако приметимо да P_nG претставља гринички меридијан, да је једнака углу $WOG = -L + 90^\circ$.

Координате оне друге тачке, Q_s , то јест антипода прве, Q_n , биће:

географска ширина: једнака углу $EOQ_s = -A$;

географска дужина: једнака углу $GOK_2 = -L - 90^\circ$.

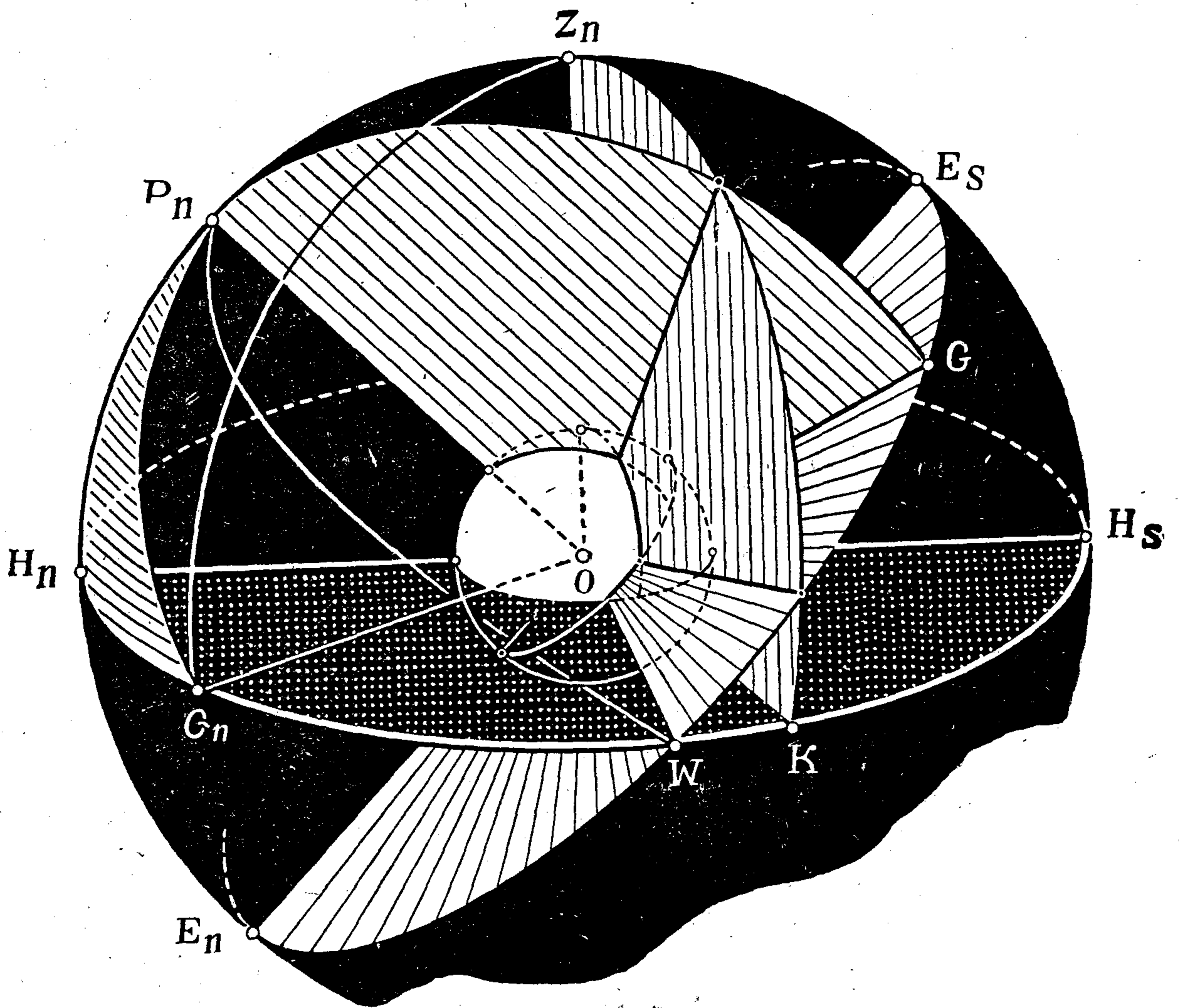
Ако унесемо вредности дате у задатку, $L = -20^\circ$ и $A = 70^\circ$, добијамо за координате тачака на Земљи-сфери чије су хоризонтске равни паралелне равни вертикала $A = 70^\circ$, у месту на еквиатору чија је географска дужина $L = -20^\circ$:

за Q_n , то јест северну тачку: $L_n = +70^\circ$, $\varphi_n = +70^\circ$;

за Q_s , то јест јужну тачку: $L_s = -110^\circ$, $\varphi_s = -70^\circ$.

53. Нека на сл. 37 претставља: Z_n зенит посматрача који се налази у Београду; OZ_nK његов вертикал азимута $A = 70^\circ$; Q_n пол тог вертикала (и то онај ближи северном небеском полу), то јест зенит посматрача чија је хоризонтска равна паралелна са равни овог вертикала. То је, другим речима, једна од двеју тачака чије географске координате треба одредити.

Означимо географске координате посматрача у Београду са L и φ , а посматрача чији је зенит Q_n са L_n и φ_n . Са слике видимо онда да је $\sphericalangle Q_n Z P_n = \pi - \sphericalangle H_n P Q_n = \pi - (\sphericalangle H_n Z K + \sphericalangle K Z Q_n) = \pi - \left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - A$. Зна-
чи, и страна $H_n Q_n$, у правоуглом сферном троуглу $P_n H_n Q_n$, једнака је $\frac{\pi}{2} - A$. У овом сферном троуглу познате су нам, према томе, две стране,
те из њега можемо одредити све остале његове елементе. За трећу ње-



Сл. 37.

гову страну, $P_n Q_n = \frac{\pi}{2} - \varphi_n$, имамо

$$\sin \varphi_n = \cos \varphi \cdot \sin A,$$

одакле одређујемо тражену географску ширину φ_n . Сем тога имамо и

$$\sin \varphi = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} P_n, \text{ или } \operatorname{ctg} P_n = \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} A;$$

одавде налазимо угао $P_n = \pi - \sphericalangle E_s P_n Q_n = \pi - (L_n + L)$, другим речима, налазимо L_n .

Према подацима задатка имаћемо, дакле:

$$\begin{array}{ll} [\cos \varphi] & 9.85\ 097, & [\sin \varphi] & 9.84\ 799, \\ [\sin A] & 9.97\ 299, & [\operatorname{tg} A] & 0.43\ 893, \\ [\sin \varphi_n] & 9.82\ 396, & [\operatorname{ctg} P_n] & 0.28\ 692, \\ \varphi_n & = +41^\circ 49'.0 & P_n & = 27^\circ 19'.0; \end{array}$$

$$L_n + L = 152^\circ 41'.0, \text{ дакле, } L_n = +132^\circ 10'.2.$$

Према томе координате антипода овог посматрача биће:

$$\varphi_s = -41^\circ 49'.0 \text{ и } L_s = -47^\circ 49'.8.$$

54. На Земљи-сфери, полупречника R , врх неког торња AI (в. сл. 38), висине h , на географској ширини φ_h , описиваће, услед Земљина обртног кретања, кружну путању полупречника

$$CI = r_h = (R + h) \cos \varphi_h,$$

док ће подножје торња описивати кружну путању полупречника

$$cA = r = R \cos \varphi_h.$$

Означимо са ω угловну брзину Земљина обртног кретања. Онда ће линеарна брзина, v_h , врха торња бити

$$v_h = (R + h) \omega \cos \varphi_h.$$

А означимо ли са v линеарну брзину тачке на Земљи, на непознатој географској ширини, $\varphi_h + \Delta\varphi$, чија је линеарна брзина једнака брзини врха торња имаћемо

$$(R + h) \omega \cos \varphi_h = R \omega \cos (\varphi_h + \Delta\varphi).$$

Како је $\Delta\varphi$, очигледно, мали угао, ову једначину можемо написати, пошто развијемо и скратимо,

$$h \cos \varphi_h = -R \Delta\varphi \sin \varphi_h, \text{ то јест } \Delta\varphi = -\frac{h}{R} \operatorname{ctg} \varphi_h,$$

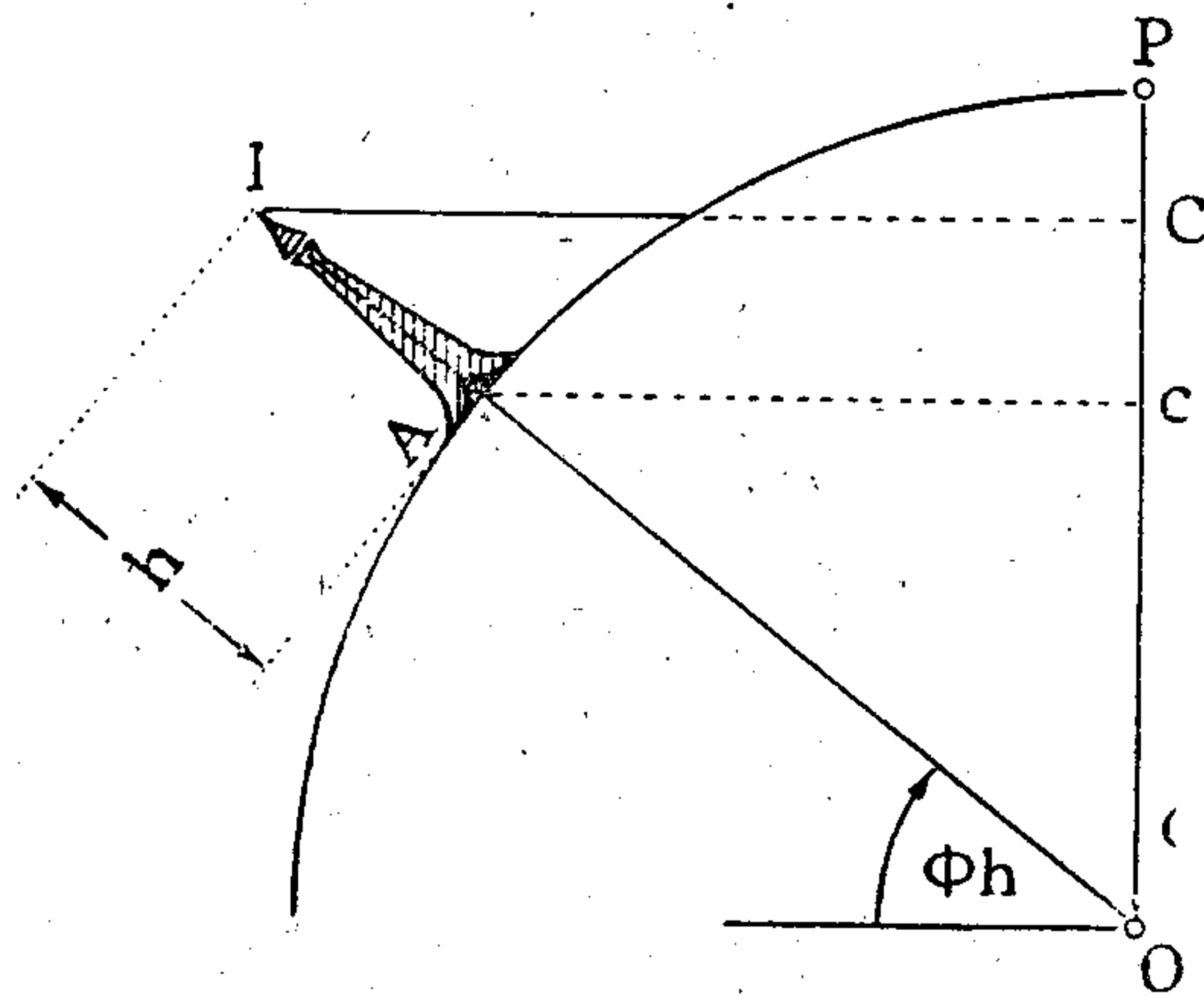
или, у секундама угла

$$\Delta\varphi'' = -\frac{h}{R \operatorname{arc} 1''} \operatorname{ctg} \varphi_h.$$

Према задатку је: $h = 300$ м, $\varphi_h = +48^\circ 50' 11''$. Ако узмемо $R = 6370$ км и приметимо да је $(\operatorname{arc} 1'')^{-1} = 206\ 265''$, добивамо $\Delta\varphi = -8''.5$.

Тражена тачка налази се, дакле, $8''.5$ јужније од торња. Како углу од $1''$ одговара дужина лука меридијана од 30.88 м, нађеној разлици географске ширине одговара даљина тачке од подножја торња од 262 м.

55. Износ скретања ка истоку материјалне честице, пуштене да слободно пада, рецимо са висине h , дата је, ако се занемаре отпор



Сл. 38. 55

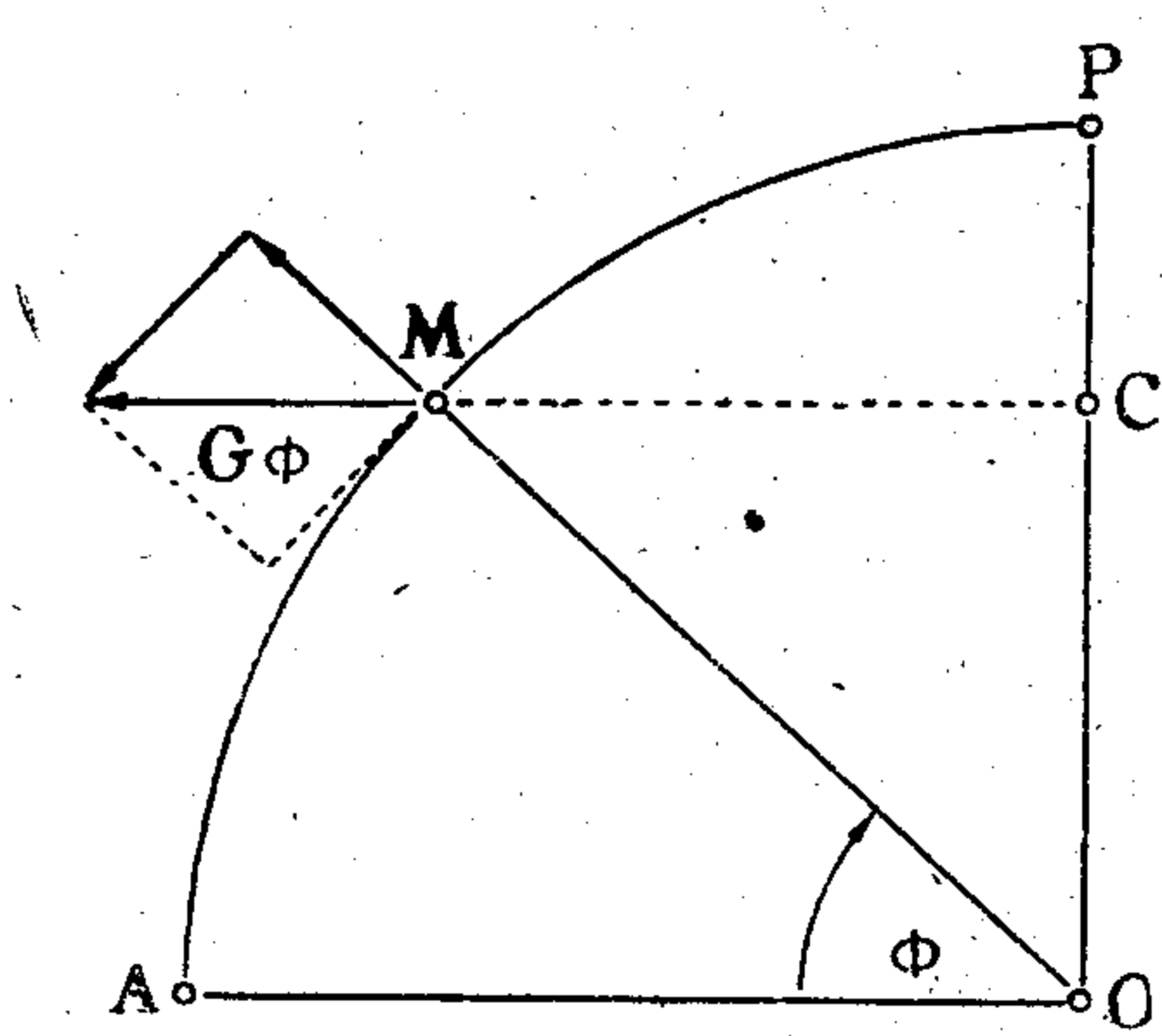
120
80

ваздуха и промене убрзања силе теже услед висине, изразом (који прет постављамо као познат)

$$\sigma_{\varphi} = \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} \omega \sqrt{\frac{2}{g_{\varphi}}} \cos \varphi.$$

Према задатку је: $\varphi = 0^{\circ}$; $h = 300$ м; $g_0 = 978.03$ цм сек $^{-2}$. Како је Земљина угловна брзина $\omega = 73 \times 10^{-6}$, налазимо за скретање $\sigma_{\varphi} = 114$ мм.

56. Означимо: са ω угловну брзину Земљина обртног кретања; са r_{φ} полупречник, CM (в. сл. 39), кружне путање што је тачка M на Земљиној површини описује при обртању; са T трајање у секундама (средњег времена) једног обрта; са R полупречник Земље-сфере; са φ географску ширину тачке M . Онда имамо за аксифугално убрзање, које ћемо означити са G_{φ} ,



$$G_{\varphi} = \omega^2 r_{\varphi} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_{\varphi} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \cos \varphi.$$

Сл. 39.

Бројне вредности величина које се овде јављају су $T = 86\,164^s.09$ и $R = 6370 \times 10^5$ цм. Према томе, за аксифугална убрзања на

траженим географским ширинама имаћемо:

$[2\pi]$ 0.79 818,	$[2\pi : T]$ 5.86 285 - 10,	$[R]$ 8.80 414,
--------------------	-----------------------------	-----------------

$[T]$ 4.93 533;	$2[2\pi : T]$ 1.72 570 - 10;	$\left[\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\right]$ 0.52 984;
-----------------	------------------------------	--

За	$\varphi = 0^{\circ}$:	$\varphi = 30^{\circ}$:	$\varphi = 90^{\circ}$:
$[\cos \varphi]$	-	9.93 753,	9.69 897,
$[G_{\varphi}] = \left[\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \cos \varphi\right]$	0.52 984,	0.46 737,	0.22 881,
	$G_{\varphi} = 3.39 \frac{\text{cm}}{\text{сек}^2}$;	$2.93 \frac{\text{cm}}{\text{сек}^2}$;	$1.69 \frac{\text{cm}}{\text{сек}^2}$.

Разложимо ово убузање, чији је смер од C ка M , у радијалну и тангенцијалну компоненту. Радијална компонента, чији је смер супротан смеру убрзања Земљине привлачне силе, има за израз $G_{\varphi} \cdot \cos \varphi$. На екватору је, међутим, смер самог аксифугалног убрзања супротан смеру Земљине привлачне силе. Према томе, знајући износ аксифугалног убрзања, G_e , на екватору, ако измеримо убрзање силе теже, g_e , на екватору, — моћи ћемо одредити убрзање Земљине привлачне силе (под претпоставком да Земља не ротира). Тако налазимо да је

$$G = g_e + G_e.$$

Ако за g_e унесемо нађену вредност убрзања силе теже на екватору, $g_e = 978.0$ цм сек $^{-2}$, како је за G_e нађено $G_e = 3.4$ цм сек $^{-2}$, добивамо $G = 981.4$ цм сек $^{-2}$.

Видимо дакле да масе на Земљиној површини услед аксифугалног убрзања бивају лакше но што би биле да Земља не ротира, и то за $\left(\frac{G_\phi}{G} \cdot \cos \phi\right)$ -ти део своје тежине на мирној Земљи-сфери. Значи, на географским ширинама: $\phi=0^\circ$, $\phi=30^\circ$, $\phi=60^\circ$, где је

$G_\phi \cos \phi$: 3.39 цм сек⁻², односно 2.54 цм сек⁻², односно 0.845 цм сек⁻², биће масе лакше за: 1/289-ти, односно 1/386-ти, односно 1/1161-и део своје тежине на Земљи-сфери која не ротира.

57. У решењу Зад. 56 показано је да тежине маса на Земљину екватору постају мање, дакле тела лакша за $\frac{G_e}{G} = 1/289$ своје тежине коју

би имала кад Земља не би ротирала. Одатле закључујемо да ће масе на Земљину екватору потпуно изгубити тежине кад буде било $G_e = G$, то јест кад аксифугално убрзање буде достигло вредност убрзања Земљине привлачне силе. Другим речима, кад би аксифугално убрзање на екватору постало 289-пута веће. А то би могло наступити кад би ω^2 , то јест квадрат угловне брзине Земљина обртног кретања постао 289-пута већи, или само ω постало $\sqrt{289} = 17$ -пута веће од стварне вредности. То значи, кад би угловна брзина достигла вредност

$$17 \cdot \omega = 17 \times 72.92 \times 10^{-6} \approx 1240 \times 10^{-6}, \text{ или } \omega = 255''.7;$$

то јест кад би се Земља, место за 86 164^s, једанпут обртала за:

$$86\ 164^s : 17 \approx 5068^s = \underline{1^h\ 24^m\ 28^s.}$$

58. 1. За силу теже имамо израз

$$P = m \cdot g,$$

где m означава масу тела, а g убрзање које тело стиче под дејством силе теже. Како је ова сила, коју зовемо и тежином тела, само специјалан случај опште гравитације, која је дата познатим изразом

$$F = k^2 \cdot \frac{m \cdot M}{r^2},$$

где m и M означавају масе двају тела, r даљину међу њима, а k^2 константу гравитације, — видимо да је убрзање силе теже

$$g = k^2 \frac{M}{r^2},$$

где сад M претставља Земљину масу, а r даљину масе m од Земљина средишта.

Кад би Земљина маса испунила равномерно простор до Месечеве даљине, тежина масе m на њеној површини постала би тада

$$P_\zeta = m \cdot g_\zeta,$$

122
82
где је

$$g_{\zeta} = k^2 \cdot \frac{M}{r_{\zeta}^2}$$

Упоређењем вредности за убрзања g и g_{ζ} налазимо

$$g_{\zeta} = \left(\frac{r}{r_{\zeta}}\right)^2 \cdot g.$$

Како је, према задатку, $r_{\zeta} = 60.27 r$, добићемо да је

$$g_{\zeta} \approx \frac{1}{3632} g, \text{ или } g_{\zeta} = 0.27 \text{ цм сек}^{-2}.$$

2. Из овога видимо да убрзања, g_{ζ} и g , стоје у обрнутој сразмери са квадратима полупречника стварне и замишљене увећане Земљине сфере. Према томе ћемо имати, ако означимо:

са γ убрзање масе m на Сунчевој површини;

са γ_{\odot} убрзање масе m на површини Сунчеве сфере кад би полупречник ове достигао астрономску јединицу;

са R полупречник Сунчев, који износи 695 300 км;

са R_{\odot} полупречник једнак астрономској јединици, то јест 149 450 000 км;

$$\gamma_{\odot} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \cdot \gamma = \left(\frac{1}{215}\right)^2 \gamma = \frac{1}{46\,225} \gamma.$$

Узмемо ли у обзир да је

$$\gamma = 27.89 g, \text{ добивамо да је } \gamma_{\odot} = \frac{1}{1657} g,$$

где g означава убрзање силе теже на Земљину екватору.

59. Ако је звездани часовник са секундним клатном у Паризу показивао тачно време, дакле у току звезданог дана откуцавао 86 400 секунда, а пренесен у Кајену (место у близини Земљина екватора) закашњавао за по $2^m 28^s = 148^s$ дневно, — значи да је у Кајени оволико секунда мање откуцавао у току звезданог дана него у Паризу. Према томе, у Кајени је часовник, у току звезданог дана, откуцавао свега 86 252 секунде. Ово, другим речима, значи да су секунде овог часовника у Кајени постале, у односу према секундама у Паризу, дуже за

$$148^s : 86\,252 \approx 0^s.0017.$$

Познато је, међутим, да је трајање малих осцилација клатна, дужине l , дато изразом

$$t^2 = \pi^2 \frac{l}{g},$$

из којег се види да је, при непромењеној дужини клатна, трајање његове осцилације функција само убрзања силе теже.

Из последњег израза добивамо одмах

$$\frac{2 dt}{t} = - \frac{dg}{g}$$

Стављајући овде $t = 1^s$, за g вредност убрзања силе теже у Паризу, то јест $g = 980.94 \text{ cm сек}^{-2}$, а за dt нађену промену у трајању секунде услед преноса часовника из Париза у Кајену, добивамо за промену убрзања силе теже:

$$dg = - 2 \times 0.0017 \times 980.94 \text{ cm} \cdot \text{сек}^{-2} = - 3.34 \text{ cm} \cdot \text{сек}^{-2}$$

60. Док код часовника са клатном трајања осцилација (t), која су дата изразом,

$$t^2 = \pi^2 \frac{l}{g}$$

зависе и од дужине (l) клатна и од убрзања силе теже (g), дотле код хронометра то није случај. Трајање осцилације спиралне опруге код хронометра не зависи од дејства силе теже, дакле ни од положаја хронометра на Земљи. Ако хронометар показује тачно време на извесном месту, он ће показивати тачно време, под истим осталим условима, и на сваком другом месту. Часовник са клатном, међутим, у којег је дужина (l) клатна била подешена да на месту географске ширине, рецимо, φ_1 , избија секунде, — пренесен на неко место географске ширине φ_2 неће више избијати секунде, дакле ни показивати тачно време. Да би, и после промене положаја, часовник показивао тачно време, треба, за нову вредност убрзања силе теже, подесити дужину клатна.

Ако хронометар и часовник са клатном, одређене дужине (l), показују тачно време, рецимо, у Београду, на $\varphi = +44^\circ 48' 1$, при $g_\varphi = 980.61 \text{ cm сек}^{-2}$, па их пренесемо на екватор, где је убрзање силе теже $g_e = 978.03 \text{ cm сек}^{-2}$, — трајања осцилација часовника ће се променити: између хронометра и часовника појавиће се неслагања. Можемо им оценити и приближан износ, ако диференцирамо горњи израз за трајања осцилација,

$$\frac{2 dt}{t} = - \frac{dg}{g}$$

па у исти унесемо величине и промене дате у задатку, то јест

$$t = 1^s; \quad g = 980.61 \text{ cm сек}^{-2}; \quad dg = - 2.58 \text{ cm сек}^{-2};$$

добивамо за промену у трајању осцилације

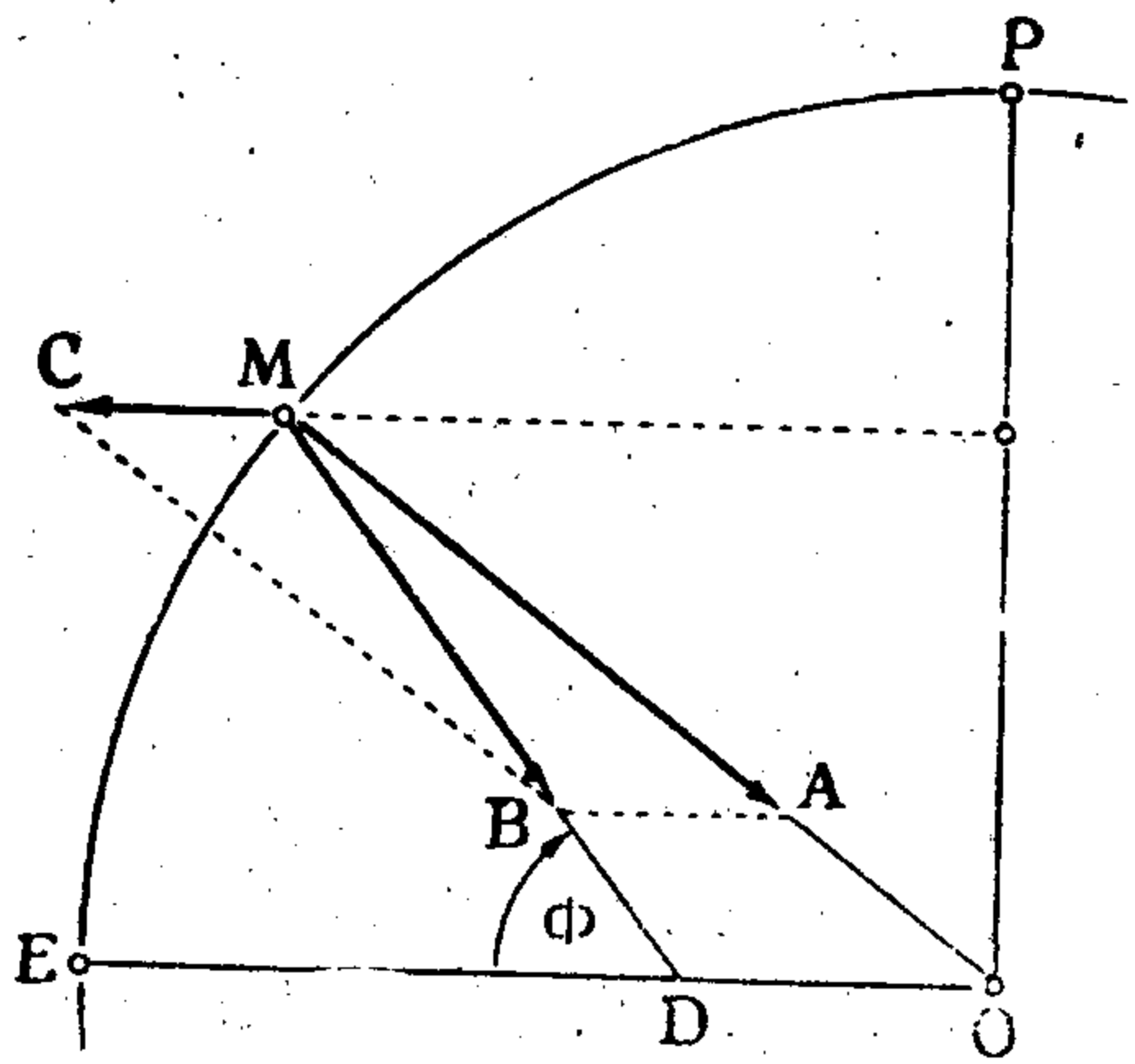
$$dt = - \frac{t}{2} \cdot \frac{dg}{g} = \frac{2.58}{2 \times 980.61} = + 0^s.0013$$

За оволико би, дакле, на екватору, осцилација часовникова клатна дуже трајала, што значи да би часовник, за дан, заостајао, у односу према хронометру, за $86\ 400 \times 0^s.0013 = 112^s.3 = 1^m\ 52^s.3$.

124
84

Часовник би могао, после преноса на екватор, показивати тачно време ако би му се дужина клатна подесила. За нову дужину налазимо, ако у образац за трајање осцилације унесемо $t=1^s$, $g=978.03 \text{ цм сек}^{-2}$, $\pi^2=9.86960$; дакле, $l=99.10 \text{ цм}$. Часовник ће после преноса поново моћи показивати тачно време, ако му се клатно скрати за 0.26 цм .

61. Претставимо на сл. 40 са OEP део меридијанског пресека Земље-сфере, полупречника R , и са M материјалну тачку на њеној површини. Претставимо даље, са:



Сл. 40.

\vec{MA} убрзање, G , тачке под дејством Земљине привлачне силе;

\vec{MC} аксифугално убрзање, γ_φ ;

\vec{MB} резултантно убрзање ових двају, или убрзање силе теже, које ћемо означити са g_φ .

Означимо, сем тога: угао MOE , између Земљина полупречника тачке M и екватора, који ћемо отсад звати геоцентричном ширином тачке M , — са φ' ;

угао MDE , између правца дејства силе теже, дакле правца вертикале у тачки M , и екватора, који ћемо звати географском ширином тачке M , — са φ ;

угао BMA , уствари разлику $\varphi - \varphi'$, — са ϵ .

Онда видимо да из троугла MBA имамо

$$G \cdot \sin \epsilon = \gamma_\varphi \cdot \sin \varphi.$$

Узмемо ли, међутим, у обзир да се углови φ и φ' један од другог мало разликују и да, без приметних последица, можемо користити (место $\gamma_\varphi = R \omega^2 \cos \varphi' = \gamma_e \cos \varphi'$)¹⁾ приближну релацију

$$\gamma_\varphi = \gamma_e \cos \varphi,$$

добивамо, место горњег израза,

$$G \cdot \sin \epsilon = \gamma_e \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} \gamma_e \sin 2\varphi,$$

или

$$\sin \epsilon = \frac{\gamma_e}{2G} \sin 2\varphi, \quad \text{или} \quad \epsilon'' = \frac{\gamma_e \sin 2\varphi}{2G \operatorname{arc} 1''}.$$

Унесемо ли за познате величине њихове бројне вредности, налазимо

$$\epsilon'' = \frac{206\,265''}{2 \times 289} \cdot \sin 2\varphi = 356'' \cdot 9 \sin 2\varphi.$$

Помоћу овог израза можемо одговорити на питање постављено у задатку.

¹⁾ ω означава угловну брзину Земљине ротације; γ_e аксифугално убрзање тачке на екватору.

Кад би Земља престала да ротира, вертикала у Београду променила би свој правац за угао:

$$\epsilon = 356'' \cdot 9 \cdot \sin 2\varphi = 356'' \cdot 9 \times 0.99998 \approx 357'' = 5' 57'',$$

за оволико би се (као што се и са сл. види) смањила географска ширина Београда, тако да би постала $\varphi = +44^\circ 42'$.

62. Ако су хронометар и часовник са клатном показивали тачно време на екватору, где је убрзање силе теже $g = 978.03 \text{ цм сек}^{-2}$, пренесени на било који од Земљиних полова, где је убрзање силе теже за 5.18 цм сек^{-2} веће, — они неће више показивати исто време: часовник ће предњачити. Да бисмо нашли за колико, диференцираћемо израз за трајање малих осцилација клатна, сматрајући у њему дужину клатна као константну. И добићемо

$$\frac{2dt}{t} = -\frac{dg}{g}$$

Унесемо ли бројне вредности величина, према задатку, то јест:

$$t = 1^s; \quad g = 978.03 \text{ цм сек}^{-2}; \quad dg = +5.18 \text{ цм сек}^{-2},$$

налазимо

$$dt = -\frac{5.18}{2 \times 978.03} = -0^s.00265.$$

За оволико ће на полу трајање осцилације часовника бити краће него што је било на екватору. Значи, у току једног звезданог дана часовник ће на полу избијати

$$n = \frac{86400^s}{1^s - 0^s.00265} = \frac{86400^s}{0^s.99735} \approx 86629.9 \text{ осцилација},$$

или часовник ће предњачити, испред хронометра, за по $3^m 49^s.6$ дневно.

63. Ако за убрзање силе теже на екватору, на Земљи-сфери која ротира, узмемо $g_e = 978.03 \text{ цм сек}^{-2}$, а за аксифугално убрзање на екватору $\gamma_e = 3.39 \text{ цм сек}^{-2}$, видимо да би за оволико, на екватору на Земљи која не ротира, убрзање силе теже било веће.

Пођемо ли сада од израза за дужину секундног клатна на екватору

$$l = g \cdot \pi^{-2},$$

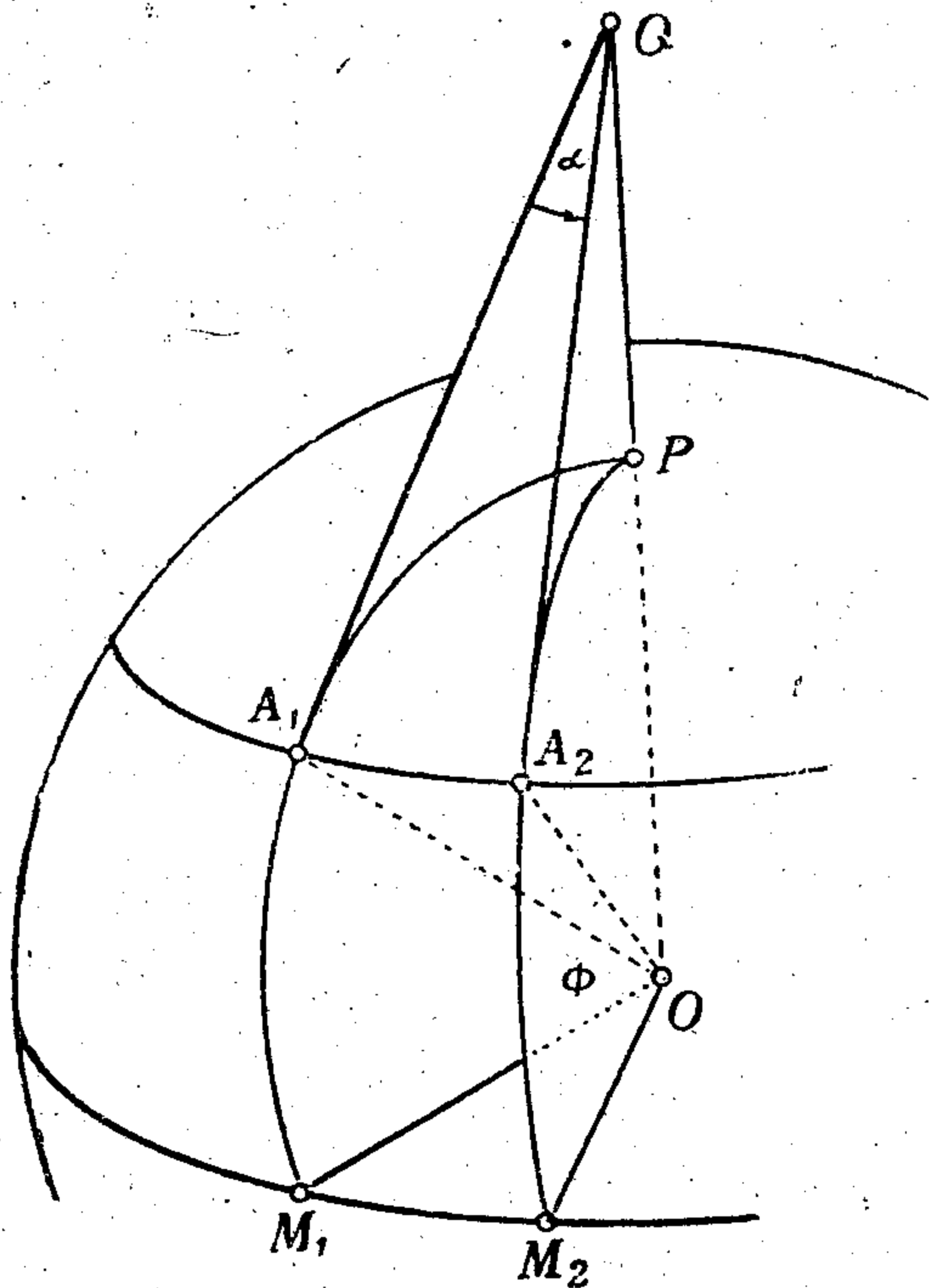
и диференцирамо ли га, добићемо

$$dl = dg \cdot \pi^{-2}.$$

Унесемо ли за познате величине њихове бројне вредности, добивамо

$$dl = \frac{3.39}{9.8696} = 3.4 \text{ мм.}$$

Другим речима, кад би Земља престала одједном да ротира (дакле природни „часовник“ стао), секундно клатно часовника на екватору требало би продужити за 3-4 мм, да би часовник могао продужити да показује тачно време.



Сл. 41.

64. Претставимо на сл. 41: са A_1 посматрача на Земљи-сфери, на географској ширини φ ; са PA_1M_1 његов меридијан; са A_1Q тангенту на посматрачеву меридијану, која ће бити, уједно, и почетни правац у који ће посматрач у A_1 пустити клатно да осцилира. Претпоставимо да га је пустио.

После извесног времена посматрач ће, услед Земљине ротације, доспети у A_2 ; његов меридијан у положај PA_2M_2 ; тангента на његов меридијан у A_2Q . Правац равни осцилација клатна, међутим, остао је непромењен, то јест сâм себи паралелан. Како је угао између првобитног правца тангенте, A_1Q , и новог правца, A_2Q , као што са сл. видимо, α , значи да ће и угао између новог правца тангенте, A_2Q , и равни осцилација клатна бити α . Друкчије речено, посматрачу ће изгледати као да се равна осцилација обрнула, око

вертикале, за угао α , у смеру супротном смеру Земљине ротације. Те ако означимо:

- са ω угловну брзину Земљине ротације;
- са r_φ полупречник Земљина паралела A_1A_2 ;
- са R полупречник Земљине сфере, — видимо са слике да је

$$A_1A_2 = \omega \cdot r_\varphi = \omega \cdot R \cdot \cos \varphi,$$

$$A_1A_2 = \alpha \cdot A_1Q = \alpha \cdot R \cdot \operatorname{ctg} \varphi,$$

а одавде налазимо

$$\alpha = \omega \cdot \sin \varphi,$$

или, речима, привидна угловна промена равни осцилација клатна, у односу према почетном правцу осцилација, пропорционална је синусу географске ширине места.

65. Угловна брзина тачака на Земљиној површини, услед њена обртног кретања, износи 360° за звездани дан, или 15° за звездани час. На Земљиним половима толика је и угловна брзина привидног скретања равни осцилација клатна. За посматрача на географској ширини φ , међутим, угловна брзина привидног скретања равни осцилација је

$$\alpha = 15^\circ \sin \varphi \text{ за звездани час.}$$

У Београду ће, према томе бити,

$$\alpha = 15^\circ \times 0.70463 \approx 10.57 = 10^\circ 34'.2.$$

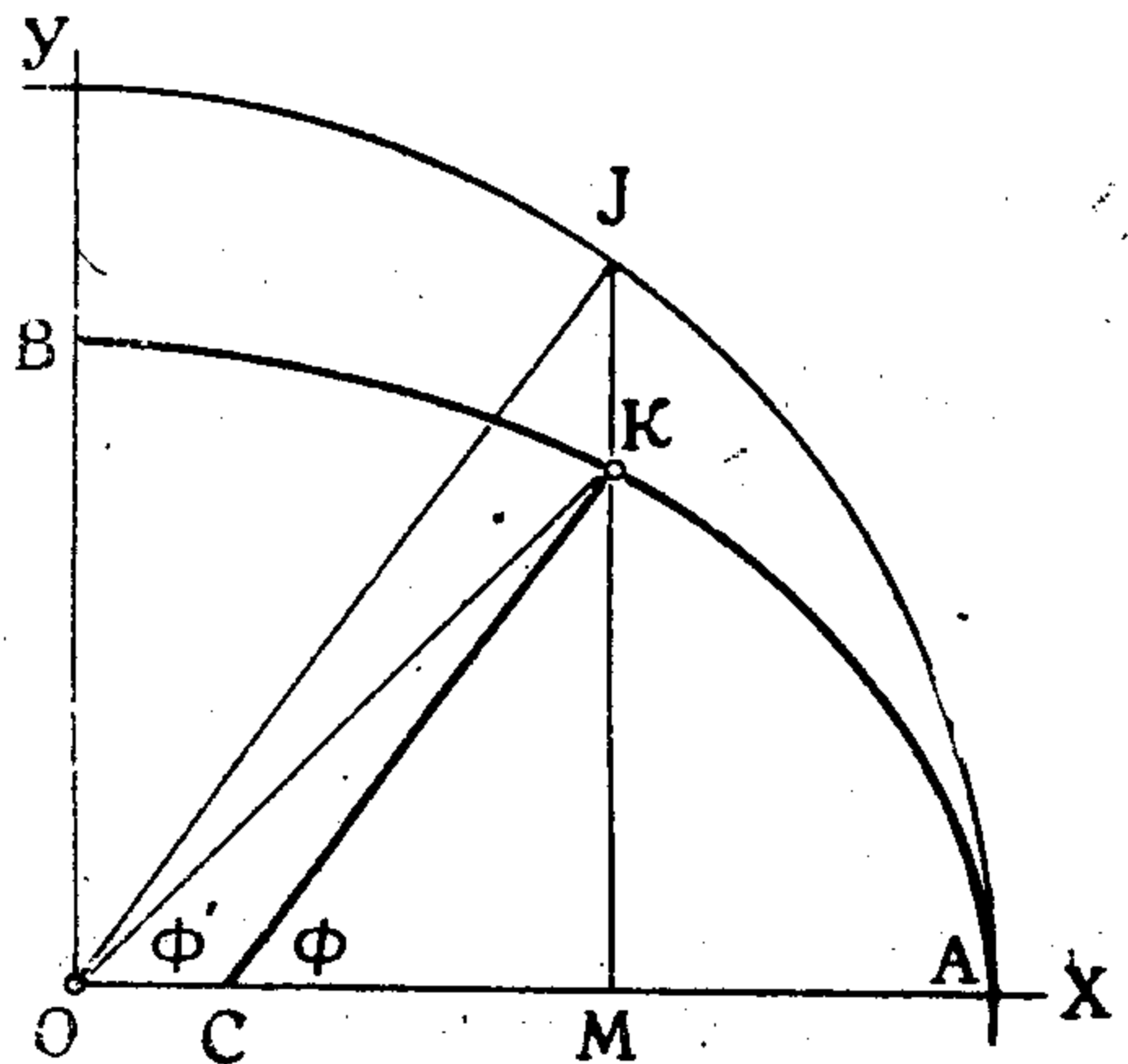
Након 9^h звезданог времена ће равн осцилација привидно скренути за 95°.1, с лева у десно. Како је, према задатку, клатно пуштено да осцилира у равни првог вертикала (узмимо западног), дакле у азимуту 90°, азимут равни осцилација 9^h касније (под претпоставком да се клатно све то време одржи у осцилацији) биће 185°.1.

66. Претставимо на сл. 42, са *ОАКВ*, један део Земљине меридијанске елипсе и, на њој, са *К* посматрачев положај. Узмемо ли јој средиште за почетак координатног система, дакле осе *a* и *b* за координатне осе, и означимо ли координате посматрачева положаја са (*x*, *y*), оне ће задовољавати једначину

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Повуцимо сад на слици главни круг елипсе, *AJY*, који је окарактерисан познатом особином да је

$$\frac{KM}{JM} = \frac{b}{a}.$$



Сл. 42.

Затим спојмо тачке *K* и *J* са елипсиним средиштем и означимо угао *АОК*, између равни екватора и радија *ОК*, који ћемо звати посматрачевом геоцентричном ширином, словом φ' , а угао *АОЈ*, који ћемо звати посматрачевом редукованом ширином, словом ψ . Повучемо ли још и нормалу *КС*, која се поклапа са посматрачевом вертикалом, која, према томе, са екваторском равни образује угао φ , који зовео посматрачевом географском ширином, добивамо за посматрачеве правоугле координате

$$x = a \cos \psi = r \cos \varphi',$$

$$y = b \sin \psi = r \sin \varphi'.$$

С друге стране, ако диференцирамо једначину меридијанске елипсе, добивамо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

И тако, за везу између геоцентричне и редуковане, с једне, и географске ширине посматрачеве, с друге стране, добивамо

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{односно} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

или, друкчије,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \varphi'.$$

Ако су, дакле, дате велика и мала полуоса Земљина елипсоида и посматрачева географска ширина, помоћу ових веза долазимо до било

128
88

геоцентричне, било редуковане ширине, а помоћу ове, опет, до правоуглих координата посматрачевих.

За посматрачев геоцентрични радије имамо

$$r = x \sec \varphi'.$$

Међутим, ако у једначину елипсе унесемо, преко y , геоцентричну ширину, она ће постати

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x \operatorname{tg} \varphi'}{b}\right)^2 = 1,$$

а одавде добивамо

$$x^2 = \frac{a^2}{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \varphi'\right) \operatorname{tg} \varphi} = \frac{a^2}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi'}.$$

Заменимо ли ову вредност x_a у горњи израз за посматрачев геоцентрични радије, добивамо

$$r = \frac{a \sec \varphi'}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi'}} = a [\cos \varphi \cdot \sec(\varphi - \varphi') \cdot \sec \varphi']^{\frac{1}{2}},$$

дакле израз у облику погодном за нумеричку примену.

За посматрача у Београду, на $\varphi = +44^\circ 48' 13'' \cdot 20$ (положај Астрономске опсерваторије) биће, дакле:

$a = 6378.388,$	$\left[\frac{b}{a}\right]$	9.998 5350,	$\psi = +44^\circ 42' 25'' \cdot 30,$
$b = 6356.909,$	$[\operatorname{tg} \varphi]$	9.997 0236,	$\varphi' = +44 \ 36 \ 37 \cdot 45,$
$[b] \ 3.803 \ 2460,$	$2\left[\frac{b}{a}\right]$	9.997 0700,	$\varphi = +44 \ 48 \ 13 \cdot 20,$
$[a] \ 3.804 \ 7110;$	$[\operatorname{tg} \psi]$	9.995 5586,	$\varphi - \varphi' = +11 \ 35 \cdot 75;$
	$[\operatorname{tg} \varphi']$	9.994 0936;	

$[\cos(\varphi - \varphi')]$	9.999 9975,	$\frac{1}{2}\Delta$	9.999 2763,	$[\sin \psi]$	9.847 2529,
$[\cos \varphi']$	9.852 4181,	$[a]$	3.804 7110,	$[\cos \psi]$	9.851 6944,
Σ	9.852 4156,	$[r]$	3.803 9873,	$[\sin \varphi']$	9.846 5118,
$[\cos \varphi]$	9.850 9681,	$r =$	6367 770 км	$[\cos \varphi']$	9.852 4181;
$[\cos \varphi : \Sigma] = \Delta =$	9.998 5525;				

са горњим вредностима за a и b и са израчунатим r налазимо:

$$\begin{array}{ll} [x]_{\psi} & 3.656\ 4054, & [x]_{\varphi'} & 3.656\ 4054, \\ [y]_{\psi} & 3.650\ 4989, & [y]_{\varphi'} & 3.650\ 4991, \\ x & = 4533.205\ \text{км}, & x & = 4533.205\ \text{км}, \\ y & = 4471.970\ \text{км}; & y & = 4471.972\ \text{км}. \end{array}$$

У примени се, међутим, ове величине не изражавају у км већ у Земљиним екваторским полупречницима. Према томе бисмо имали:

$$\begin{array}{lll} [x] & 9.851\ 6944, & [y] & 9.845\ 7879, & [r] & 9.999\ 2763, \\ \underline{x = 0.710\ 7133,} & & \underline{y = 0.701\ 1127,} & & \underline{r = 0.998\ 3350.} & \end{array}$$

67. За редуковану ширину, ψ , посматрача који се налази на географској ширини φ имамо (према решењу претходног задатка)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi.$$

Но ако приметимо да је

$$\operatorname{tg} (\varphi - \psi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi}{1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi},$$

и користимо горњу везу, добићемо

$$\operatorname{tg} (\varphi - \psi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi}{1 + \frac{b}{a} \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\frac{a-b}{a} \operatorname{tg} \varphi}{1 + \frac{b}{a} \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Уведимо ли сад спљоштеност, која је дефинисана са

$$\frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = \alpha, \quad \text{дакле } \frac{b}{a} = 1 - \alpha,$$

налазимо

$$\operatorname{tg} (\varphi - \psi) = \frac{\alpha \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\cos^2 \varphi + (1 - \alpha) \sin^2 \varphi} = \frac{\alpha \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{1 - \alpha \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} \alpha \sin 2\varphi (1 - \alpha \sin^2 \varphi)^{-1}.$$

Члан у загради на десној страни можемо развити по биномном обрасцу. Како је α мала величина, занемарићемо на десној страни чланове са квадратом и вишим степенима α , то јест спљоштености. С друге стране, ако приметимо да је разлика $\varphi - \psi$ угао од нешто преко десетак минута, заменићемо тангенс, на левој страни, углом и биће

$$(\varphi - \psi)'' \operatorname{arc} 1'' = \frac{1}{2} \alpha \sin 2\varphi,$$

или

$$\psi = \varphi - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\operatorname{arc} 1''} \sin 2\varphi \right)''.$$

130
90

На истоветан начин, полазећи од израза за геоцентричну ширину,

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

и ако још уведемо ексцентричност, која је дефинисана са

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = e^2, \quad \text{дакле} \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2,$$

долазимо до израза

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{(a^2 - b^2) \cdot \operatorname{tg} \varphi}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{e^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\cos^2 \varphi + (1 - e^2) \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1}.$$

А одавде, занемарујући на десној страни чланове са степенима ексцентричности вишим од другог, налазимо

$$(\varphi - \varphi')'' \operatorname{arc} 1'' = \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi,$$

или

$$\varphi' = \varphi - \left(\frac{1}{2} \frac{e^2}{\operatorname{arc} 1''} \sin 2\varphi \right)''.$$

До траженог израза за геоцентрични радије доћи ћемо ако приметимо да, пошто у једначину меридијанске елипсе за y унесемо

$$y = \frac{b^2}{a^2} x \operatorname{tg} \varphi,$$

добивамо

$$x^2 = \frac{a^4 \cos^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}, \quad \text{односно} \quad x^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi},$$

а, затим, и

$$y^2 = \frac{b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}, \quad \text{односно} \quad y^2 = \frac{a^2 (1 - e^2) \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}.$$

А из ових израза добивамо

$$r^2 = a^2 \frac{\cos^2 \varphi + (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + (1 - e^2) \sin^2 \varphi} = a^2 \frac{\cos^2 \varphi + (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}.$$

Ако сад на десној страни, пошто развијемо и измножимо, занемаримо чланове са степенима ексцентричности вишим од другог, добивамо

$$r^2 = a^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi),$$

односно, за сâм геоцентрични радије,

$$r = a \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi \right) = a \left[1 - \frac{1}{4} e^2 (1 - \cos 2\varphi) \right].$$

За Београд, то јест $\varphi = +44^{\circ} 48' 13'' \cdot 20$, добивамо са

$$\alpha = \frac{1}{297} \text{ и } e = 0.082, \sin 2\varphi = 0.99998, \sin \varphi = 0.70467, \sin^2 \varphi = 0.49656:$$

$$\psi = \varphi - 347'' \cdot 2 = +44^{\circ} 42' 26'' \cdot 0;$$

$$\varphi' = \varphi - 693.5 = +44 \ 36 \ 39.7;$$

$$r = 6378.388 \times 0.99833 = 6367.736.$$

68. 1) Како је геометриски ред

$$p + p^2 + p^3 + \dots$$

за $|p| < 1$ апсолутно конвергентан, дати бесконачни ред,

$$p \sin x + p^2 \sin 2x + p^3 \sin 3x + \dots,$$

је равномерно конвергентан, у сваком интервалу променљиве x , јер је

$$|p^k \sin kx| \leq |p^k|.$$

Његов збир дефинише функцију од x

$$f(x) = p \sin x + p^2 \sin 2x + p^3 \sin 3x + \dots$$

Помножимо ову једначину са $2p \cos x$, имајући притом у виду да је

$$2 \sin nx \cdot \cos x = \sin(n+1)x - \sin(n-1)x,$$

и добићемо

$$\left. \begin{aligned} 2p f(x) \cos x &= p^2 \sin 2x + p^3 \sin 3x + p^4 \sin 4x + \dots \\ &+ p^3 \sin x + p^4 \sin 2x + \dots \end{aligned} \right\} =$$

$$= [f(x) - p \sin x] + p^2 f(x).$$

А одавде налазимо

$$f(x) (1 - 2p \cos x + p^2) = p \sin x,$$

$$\text{или } f(x) = p \sin x + p^2 \sin 2x + p^3 \sin 3x + \dots = p \sin x (1 - 2p \cos x + p^2)^{-1}.$$

2) Ако обе стране овог израза интегралимо по x у границама од 0 до x , имаћемо

$$-p \cos x - \frac{1}{2} p^2 \cos 2x - \frac{1}{3} p^3 \cos 3x \dots \Big|_0^x = \frac{1}{2} \text{Log} (1 - 2p \cos x + p^2) \Big|_0^x,$$

то јест

$$-\left(p \cos x + \frac{1}{2} p^2 \cos 2x + \frac{1}{3} p^3 \cos 3x + \dots\right) + \left(p + \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{3} p^3 + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \text{Log} (1 - 2p \cos x + p^2) - \frac{1}{2} \text{Log} (1 - 2p + p^2) =$$

$$= \text{Log} \sqrt{1 - 2p \cos x + p^2} - \text{Log} (1 - p).$$

Међутим, за $|p| < 1$ имамо

$$\text{Log} (1 - p) = -p - \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{3} p^3 \dots,$$

132
такo да је

$$p \cos x + \frac{1}{2} p^2 \cos 2x + \frac{1}{3} p^3 \cos 3x + \dots = -\text{Log} \sqrt{1 - 2p \cos x + p^2}.$$

69. Помоћу дате једначине, на основи идентитета

$$\text{tg}(y-x) = \frac{\text{tg } y - \text{tg } x}{1 + \text{tg } x \text{tg } y},$$

добивамо

$$\begin{aligned} \text{tg}(y-x) &= \frac{(n-1) \text{tg } x}{1+n \text{tg}^2 x} = \frac{(n-1) \sin x \cos x}{\cos^2 x + n \sin^2 x} = \frac{(n-1) \sin 2x}{1 + \cos 2x + n(1 - \cos 2x)} \\ &= \frac{n-1}{n+1} \sin 2x \left[1 - \frac{n-1}{n+1} \cos 2x \right]^{-1}, \end{aligned}$$

то јест, ако уведемо да је $\frac{n-1}{n+1} = p$,

$$\text{tg}(y-x) = \frac{p \sin 2x}{1 - p \cos 2x}.$$

Како је $n > 0$, то је $|p| < 1$.

Диференцирамо ли сад по p , добићемо

$$\frac{1}{\cos^2(y-x)} \frac{d(y-x)}{dp} = \frac{\sin 2x}{(1-p \cos 2x)^2},$$

одакле је

$$\frac{d(y-x)}{dp} = \frac{\sin 2x}{(1-p \cos 2x)^2} \cdot \frac{1}{1 + \text{tg}^2(y-x)}.$$

Уврстимо ли, на десној страни, раније добивену вредност за $\text{tg}(y-x)$ налазимо

$$\frac{d(y-x)}{dp} = \frac{\sin 2x}{1 - 2p \cos 2x + p^2}.$$

Напред је речено да је $|p| < 1$; према томе на десну страну можемо применити први образац из решења претходног задатка, дакле ставити

$$\frac{d(y-x)}{dp} = \sin 2x + p \sin 4x + p^2 \sin 6x + \dots$$

Интегралимо ли обе стране по p у границама од 0 до p , добићемо

$$y-x \Big|_0^p = p \sin 2x + \frac{1}{2} p^2 \sin 4x + \frac{1}{3} p^3 \sin 6x + \dots$$

Ако је $p = 0$, онда је $n = 1$, то јест $y = x$. Према томе,

$$y = x + p \sin 2x + \frac{1}{2} p^2 \sin 4x + \frac{1}{3} p^3 \sin 6x + \dots,$$

што је и требало показати.

70. Према решењу Зад. 66. и израније познатим везама је

$$\operatorname{tg} \varphi' = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg} \varphi = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi = (1 - \alpha)^2 \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\operatorname{tg} \psi = \left(\frac{b}{a}\right) \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi = (1 - \alpha) \operatorname{tg} \varphi.$$

Све ове везе су, међутим, облика

$$\operatorname{tg} y = n \operatorname{tg} x, \text{ са } n > 0 \text{ и за } n = 1 \text{ је } x = y.$$

А у решењу претходног задатка дат је тригонометриски ред којим се та веза претставља.

За геоцентричну ширину, φ' , треба у решењу претходног задатка заменити y са φ' , x са φ и, место

$$p = \frac{n-1}{n+1}, \text{ уврстити } p = -\frac{e^2}{2-e^2}.$$

За редуковану ширину, ψ , опет, треба заменити y са ψ , x са φ и, место

$$p = \frac{n-1}{n+1}, \text{ уврстити } p = -\frac{\alpha}{1-\alpha},$$

и добивамо, за геоцентричну ширину:

$$\varphi' = \varphi - \left(\frac{e^2}{2-e^2}\right) \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2-e^2}\right)^2 \sin 4\varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2-e^2}\right)^3 \sin 6\varphi + \dots,$$

а за редуковану ширину:

$$\psi = \varphi - \left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right) \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^2 \sin 4\varphi - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^3 \sin 6\varphi + \dots$$

Уносећи у ове изразе

$$e = 0.081\,992, \quad \alpha = 0.003\,367,$$

добивамо:

$$\varphi' = \varphi - 695'' \cdot 665 \sin 2\varphi + 1'' \cdot 173 \sin 4\varphi - 0'' \cdot 003 \sin 6\varphi + \dots,$$

$$\psi = \varphi - 347 \cdot 833 \sin 2\varphi + 0 \cdot 293 \sin 4\varphi - \dots$$

71. Како је, према решењу Зад. 66.,

$$r^2 = a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi,$$

134
94

то је

$$\begin{aligned}
 r^2 &= \frac{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \psi}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} = \frac{a^4 + b^4 \operatorname{tg}^2 \varphi}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{a^4 \cos^2 \varphi + b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \\
 &= \frac{(a^4 + b^4) + (a^4 - b^4) \cos 2\varphi}{(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) \cos 2\varphi} = \frac{(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 + 2(a^4 - b^4) \cos 2\varphi}{(a + b)^2 + (a - b)^2 + 2(a^2 - b^2) \cos 2\varphi} \\
 &= \frac{(a^2 + b^2)^2 \cdot \frac{1 + 2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cos 2\varphi + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2}{(a + b)^2 \cdot \frac{1 + 2 \frac{a - b}{a + b} \cos 2\varphi + \left(\frac{a - b}{a + b}\right)^2}}{.}
 \end{aligned}$$

Према већ уведеним ознакама је

$$\frac{a - b}{a} = \alpha, \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2; \quad 2 - \alpha = \frac{a + b}{a}, \quad 2 - e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}; \quad \frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{2 - e^2}{2 - \alpha} \cdot a.$$

И ако уведемо ознаке

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\alpha}{2 - \alpha} = \beta \quad \text{и} \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{e^2}{2 - e^2} = \gamma,$$

биће

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \left(\frac{2 - e^2}{2 - \alpha}\right)^2 \cdot \frac{1 + 2\gamma \cos 2\varphi + \gamma^2}{1 + 2\beta \cos 2\varphi + \beta^2},$$

или

$$\frac{r}{a} = \frac{2 - e^2}{2 - \alpha} \cdot \left(\frac{1 + 2\gamma \cos 2\varphi + \gamma^2}{1 + 2\beta \cos 2\varphi + \beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Логаритмујмо обе стране и применимо, на десној страни, резултате решења Зад. 67. (замањујући у обрасцу p са $-\gamma$, односно $-\beta$) имаћемо

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Log} \left(\frac{r}{a}\right) &= \operatorname{Log} \left(\frac{2 - e^2}{2 - \alpha}\right) + \left(\gamma \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \gamma^2 \cos 4\varphi + \frac{1}{3} \gamma^3 \cos 6\varphi - \dots\right) - \\
 &\quad - \left(\beta \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \beta^2 \cos 4\varphi + \frac{1}{3} \beta^3 \cos 6\varphi - \dots\right) = \\
 &= \operatorname{Log} \left(\frac{2 - e^2}{2 - \alpha}\right) + (\gamma - \beta) \cos 2\varphi - \frac{1}{2} (\gamma^2 - \beta^2) \cos 4\varphi + \frac{1}{3} (\gamma^3 - \beta^3) \cos 6\varphi + \dots
 \end{aligned}$$

Тако је логаритам геоцентричног радија, као функција географске ширине, претстављен у облику бесконачног тригонометриског реда.

2) Видели смо да је

$$r^2 = \frac{a^4 \cos^2 \varphi + b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

А то можемо написати

$$r^2 = \frac{a^4 - (a^4 - b^4) \sin^2 \varphi}{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi} = a^2 \frac{1 - \frac{a^4 - b^4}{a^4} \sin^2 \varphi}{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} = a^2 \frac{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

или

$$r^2 = a^2 \frac{1 - e^2 (2 - e^2) \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

Ставимо сад

$$e^2 (2 - e^2) = \epsilon^2.$$

Како је $0 < e < 1$, то је и $0 < \epsilon < 1$. И тако имамо

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = (1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi) (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1}, \text{ са } 0 < e < 1 \text{ и } 0 < \epsilon < 1.$$

Логаритмујемо ли обе стране имаћемо

$$2 \operatorname{Log} \left(\frac{r}{a}\right) = \operatorname{Log} (1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi) - \operatorname{Log} (1 - e^2 \sin^2 \varphi).$$

Како је

$$0 \leq \epsilon \sin^2 \varphi < 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq e^2 \sin^2 \varphi < 1,$$

можемо писати

$$\operatorname{Log} (1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi) = -\epsilon^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \epsilon^4 \sin^4 \varphi - \frac{1}{3} \epsilon^6 \sin^6 \varphi - \dots,$$

$$\operatorname{Log} (1 - e^2 \sin^2 \varphi) = -e^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} e^4 \sin^4 \varphi - \frac{1}{3} e^6 \sin^6 \varphi - \dots;$$

а, на основи тога, и

$$\operatorname{Log} \left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{2} (e^2 - \epsilon^2) \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} (e^4 - \epsilon^4) \sin^4 \varphi + \frac{1}{6} (e^6 - \epsilon^6) \sin^6 \varphi - \dots,$$

то јест логаритам геоцентричног радија, као функције географске ширине, у облику бесконачног реда на степенима од $\sin \varphi$.

Да бисмо добили Бригсове логаритме, треба природне помножити модулом $M = 0.434 2945$. Додамо ли још да је

$$\beta = 0.001 4863 3, \quad \gamma = 0.003 3726 7, \quad e^2 = 0.006 7226 7, \quad \epsilon^2 = 0.013 4001 5,$$

$$\beta^2 = 0.000 0028 44; \quad \gamma^2 = 0.000 0113 75; \quad e^4 = 0.000 0451 94; \quad \epsilon^4 = 0.000 1795 64;$$

добићемо коначно

$$\log \left(\frac{r}{a}\right) = 9.999 2695 + 0.000 7324 \cos 2 \varphi - 0.000 0019 \cos 4 \varphi + \dots,$$

$$\log \left(\frac{r}{a}\right) = -0.001 4500 \sin^2 \varphi - 0.000 0146 \sin^4 \varphi - \dots$$

72. Услов за екстремум је у овом случају

$$\frac{d(\varphi' - \varphi)}{d\varphi} = 0, \quad \text{то јест} \quad \frac{d\varphi'}{d\varphi} = 1.$$

Применимо га на израз

$$\operatorname{tg} \varphi' = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{или} \quad \varphi' = \operatorname{arctg} [(1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi],$$

и добивамо

$$\frac{1}{1 + (1 - e^2)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \frac{1 - e^2}{\cos^2 \varphi} = \frac{(1 - e^2)(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}{1 + (1 - e^2)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = 1,$$

или

$$(1 - e^2)(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = 1 + (1 - e^2)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

или

$$[1 + e^2 - (1 - e^2)^2] \operatorname{tg}^2 \varphi = e^2,$$

а одатле

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Како је $e = 0.081\,992$, дакле $e^2 = 0.006\,7227$ и $1 - e^2 = 0.993\,2773$,

$$[1 - e^2] \quad 9.977\,0705, \quad \frac{1}{2} [1 - e^2] \quad 9.998\,5353, \quad [\operatorname{tg} \varphi] \quad 0.001\,4647,$$

тако да добивамо $\varphi = \pm 45^\circ 5' 47''.82$.

На истоветан начин се може, из услова за екстремум редуковане ширине,

$$\frac{d(\psi - \varphi)}{d\varphi} = 0, \quad \text{то јест} \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = 1,$$

добити израз

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm (1 - \alpha)^{-\frac{1}{2}},$$

па одавде, пошто је $\alpha = 1:297 = 0.003\,367$, дакле $1 - \alpha = 0.996\,633$,

$$[1 - \alpha] \quad 9.998\,5353, \quad \frac{1}{2} [1 - \alpha] \quad 9.999\,2677, \quad [\operatorname{tg} \varphi] \quad 0.000\,7323, \quad \varphi = \pm 45^\circ 2' 53''.90.$$

73. За дужину лука 1° Земљина меридијана око тачке географске ширине φ имамо (занемарујући више од четвртог степена ексцентричности) приближан израз

$$s_\varphi = \frac{\alpha\pi}{180} (1 - e^2) (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}}.$$

Стављајући $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а, затим, $\varphi = 0$, добивамо за највећу вредност, односно за најмању вредност лука од 1°

$$s_p = \frac{a\pi}{180\sqrt{1 - e^2}} = \frac{a^2\pi}{180a\sqrt{1 - e^2}} = \frac{a^2\pi}{180 \cdot b},$$

132
97

$$s_e = \frac{a\pi}{180} (1 - e^2) = \frac{\pi}{180} \frac{a^2 (1 - e^2)}{a} = \frac{b^2 \pi}{180 a},$$

За однос ових двеју вредности налазимо

$$\frac{s_p}{s_e} = \frac{a^2 \pi}{180 \cdot b} \cdot \frac{180 a}{b^2 \pi} = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

74. Дужина лука 1° меридијана на Земљи сфероиду дата је приближним изразом

$$s_\varphi = \frac{\pi a}{180} (1 - e^2) (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}}.$$

Ако последњи члан на десној страни развијемо по биномном обрасцу, и притом занемаримо четврте и више степене ексцентричности, имаћемо

$$s_\varphi = \frac{a\pi}{180} (1 - e^2) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi\right) = \frac{a\pi}{180} \left(1 - e^2 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi\right).$$

Извршимо ли на десној страни замену

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi),$$

добићемо за дужину лука 1° меридијанске елипсе

$$s_\varphi = \frac{a\pi}{180} \left(1 - e^2 + \frac{3e^2}{4} - \frac{3e^2}{4} \cos 2\varphi\right) = \frac{a\pi}{180} \left(1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^2 \cos 2\varphi\right).$$

Унесимо сад, на десној страни, место ексцентричности — спљоштеност. Ако још притом занемаримо квадрат и више степене њене, и ставимо, место

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2, \quad \text{само } e^2 = 2\alpha,$$

приближни израз за дужину лука 1° Земљине меридијанске елипсе постаје

$$s_\varphi = \frac{a\pi}{180} \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{2} \cos 2\varphi\right).$$

Означимо сад са s_1 вредност коју овај израз добива кад у њему ставимо $\varphi_1 = 60^\circ$, а са s_2 вредност коју добива за $\varphi_2 = 45^\circ$, и имаћемо

$$s_1 = \frac{a\pi}{180} \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right) \quad \text{и} \quad s_2 = \frac{a\pi}{180} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Дељењем добивамо

$$\frac{s_2}{s_1} = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)^{-1}$$

Ако развијемо други члан по биномном обрасцу, притом занемаримо друге и више степене спљоштености, измножимо и опет занемаримо друге степене спљоштености, добивамо

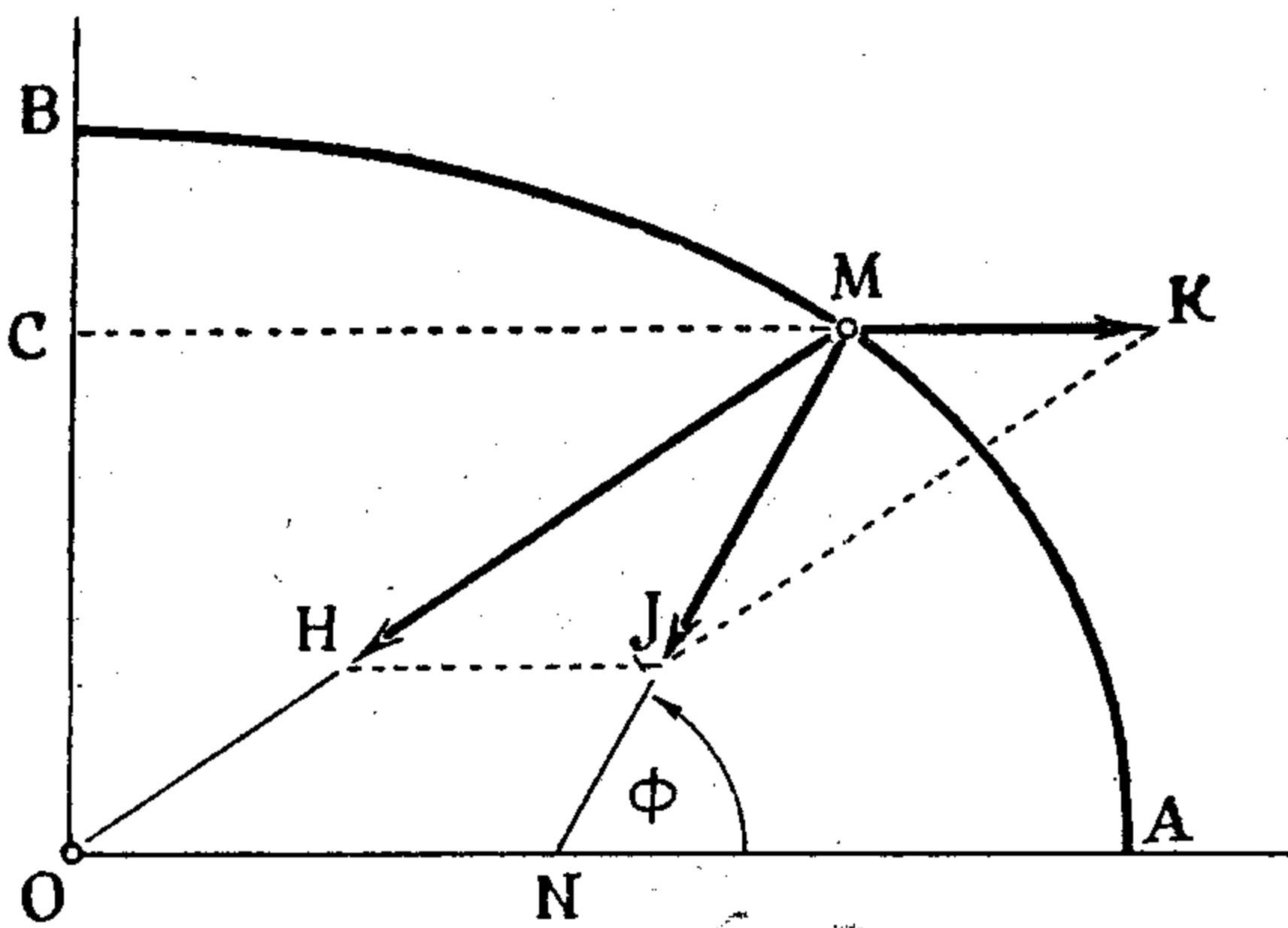
$$\frac{s_2}{s_1} = 1 - \frac{3\alpha}{4}, \text{ или } \alpha = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{s_2}{s_1} \right).$$

75. Претставимо са AMB , на сл. 43, један део Земљине меридијанске елипсе, са средиштем O и полуосама a и b . Ако ове узмемо за координатне осе, координате тачке M , на елипси, биће

$$x = a \cos \psi, \quad y = b \sin \psi,$$

где ψ претставља редуковану ширину (в. решење Зад. 66), за коју имамо везу

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$



Сл. 43. 30

С друге стране, знамо да је сила теже у свакој тачки на Земљиној површини резултанта Земљине привлачне и аксифугалне силе. Претставимо на слици са MN Земљину привлачну силу, усмерену правцем MO , ка O , а са MK аксифугалну силу, која се јавља услед Земљине ротације. И ако означимо:

са g_φ убрзање силе теже у тачки M , на географској ширини φ , и са γ_φ аксифугално убрзање, биће

$$\frac{g_\varphi}{\gamma_\varphi} = \frac{MJ}{MK} = \frac{MJ}{HJ} = \frac{MN}{ON}, \text{ то јест } g_\varphi = \frac{MN}{ON} \gamma_\varphi.$$

За аксифугално убрзање тачке M имамо, међутим, ако са T означимо трајање једног Земљиног обрта,

$$\begin{aligned} \gamma_\varphi &= \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 x = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a \cos \psi = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \right)^2}} = \\ &= \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \end{aligned}$$

дакле

$$\gamma_\varphi = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Са слике видимо, опет, да је

$$\frac{MN}{ON} = \frac{\sin \varphi'}{\sin(\varphi - \varphi')} = \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi \cos \varphi' - \cos \varphi \sin \varphi'} = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi'}$$

$$= \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg} \varphi}{\sin \varphi - \cos \varphi \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg} \varphi}{\sin \varphi \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)} = \frac{(1 - e^2)}{e^2 \cos \varphi}.$$

Према томе добивамо да је

$$g_{\varphi} = \frac{1 - e^2}{e^2 \cos \varphi} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a(1 - e^2)}{e^2} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}.$$

Или, ако последњи фактор на десној страни развијемо но занемаримо четврте и више степене ексцентричности, добивамо

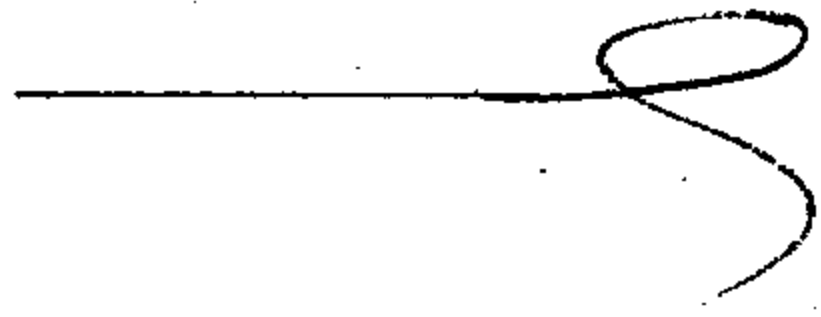
$$g_{\varphi} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a(1 - e^2)}{e^2} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi\right).$$

А приметимо ли да је за $\varphi = 0$, то јест за тачку на Земљину екватору

$$g_0 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a(1 - e^2)}{e^2},$$

добивамо за (приближан) израз за убрзање силе теже на Земљи-елипсоиду

$$g_{\varphi} = g_0 \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi\right).$$



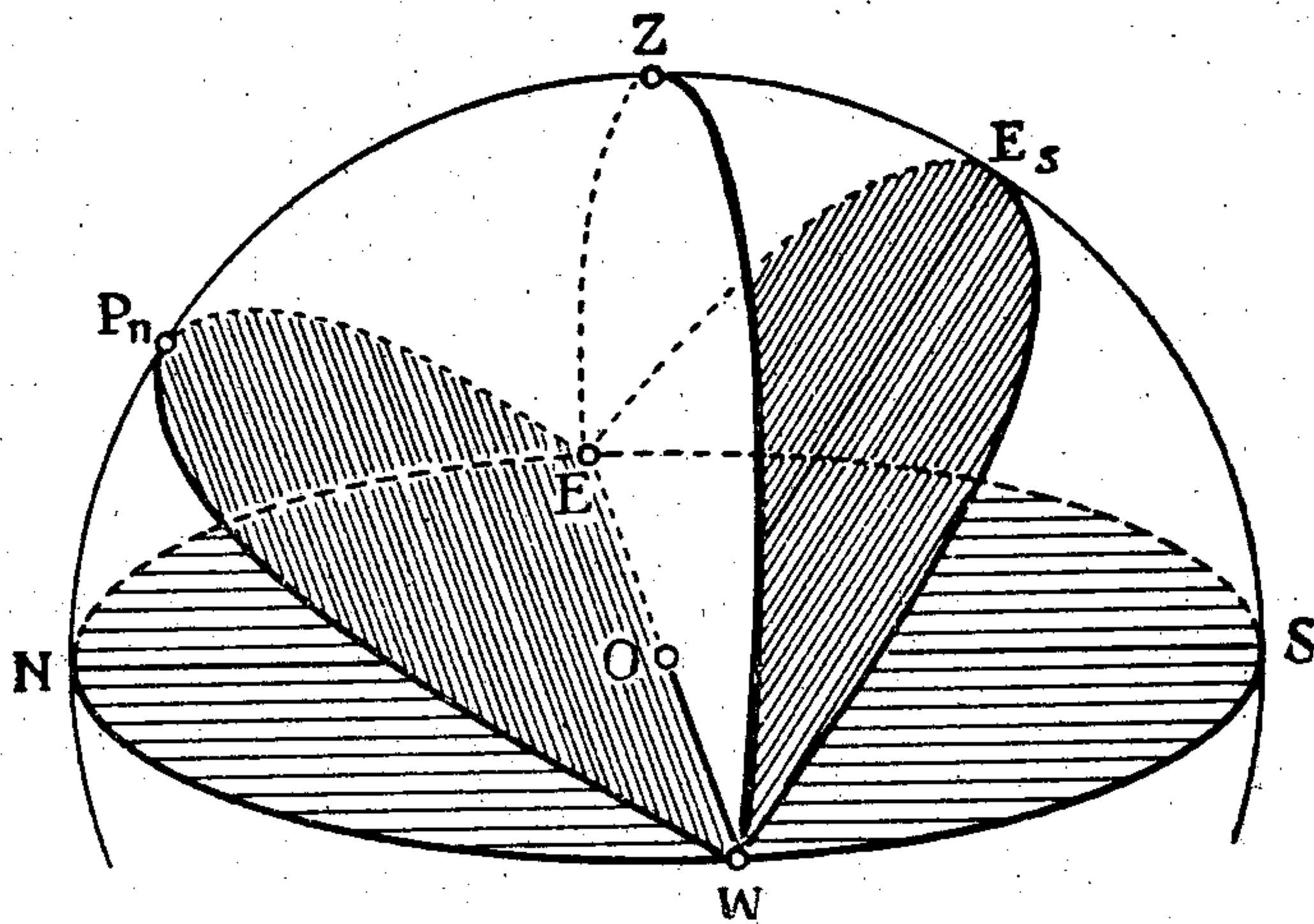
197

140

—(ка)

III/ ПРИВИДНО ДНЕВНО КРЕТАЊЕ НЕБЕСКЕ СФЕРЕ] *gr/p/3*

76. Некретница која би се налазила, у исти мах, и у посматрачеву хоризонту и на небеском екватору морала би се налазити у једној од



Сл. 44.

двеју тачака пресека посматрачеве хоризонтске равни, дакле равни $SWNE$ (в. сл. 44) и небеске екваторске, то јест EE_sW . Другим речима, морала би се налазити или у тачки W , то јест западној, или у тачки E , то јест источној.

У хоризонтском координатном систему, координате тачке W су: $h=0^\circ$, $A=90^\circ$, а тачке E су: $h=0^\circ$, $A=270^\circ$.

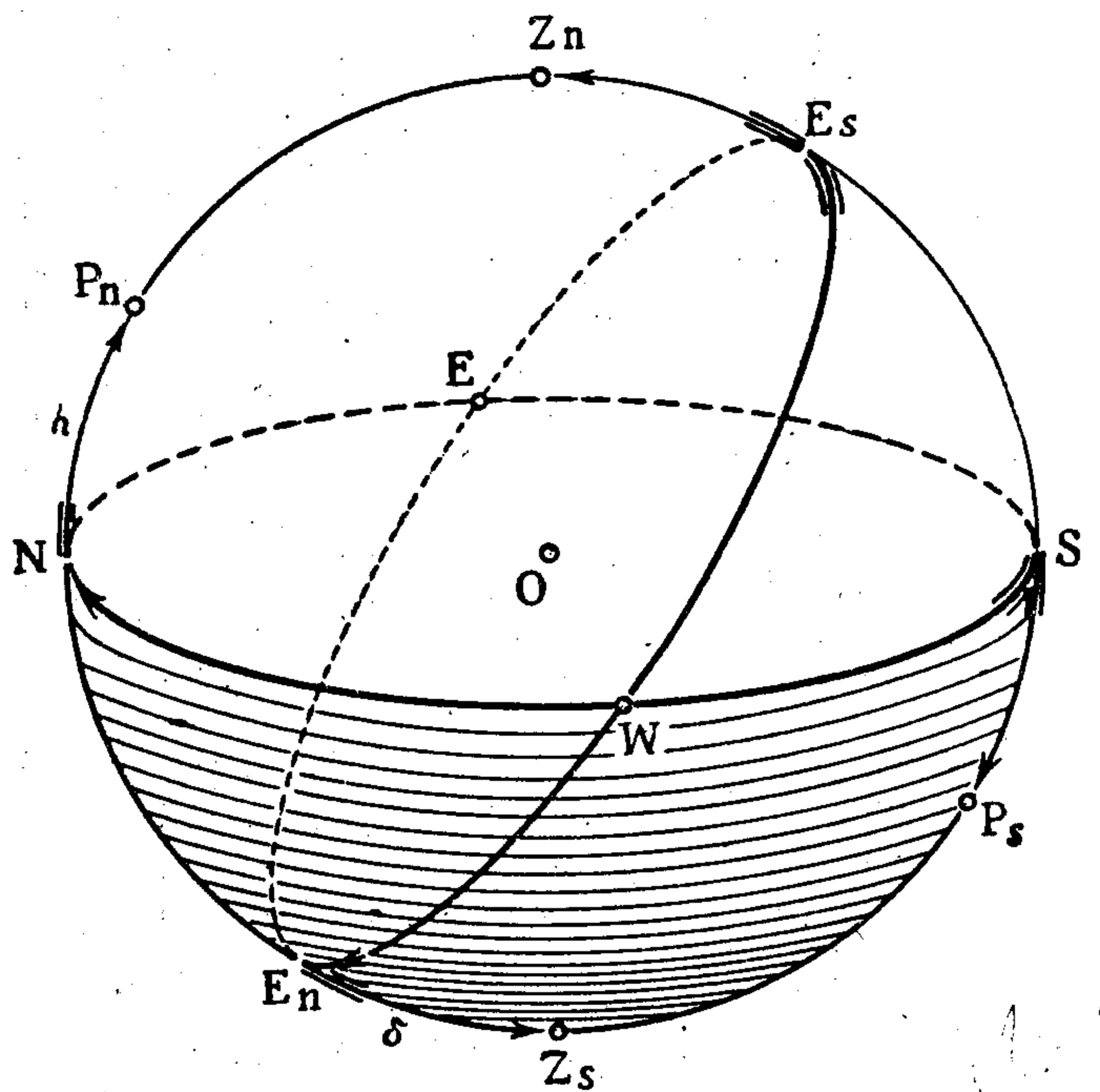
У екваторском координатном систему, координате тачке W су: $\delta=0^\circ$, $H=6^h$, а

тачке E су: $\delta=0^\circ$, $H=18^h$.

77. За посматрача на северној географској ширини φ , хоризонтске координате северног небеског пола, то јест тачке P_n (в. сл. 45) су: $h=+\varphi$, $A=-180^\circ$; а јужног, то јест тачке P_s су: $h=-\varphi$, $A=0^\circ$.

Месне екваторске координате посматрачевог зенита, то јест тачке Z_n (в. сл. 45) су $\delta=+\varphi$, $H=0^h$, а надира, то јест тачке Z_s су: $\delta=-\varphi$, $H=12^h$.

78. Основне тачке хоризонтске равни посматрача, који се налази на северној географској ширини φ , имају за месне екваторске координате (в. сл. 45):



Сл. 45.

јужна тачка, то јест S :

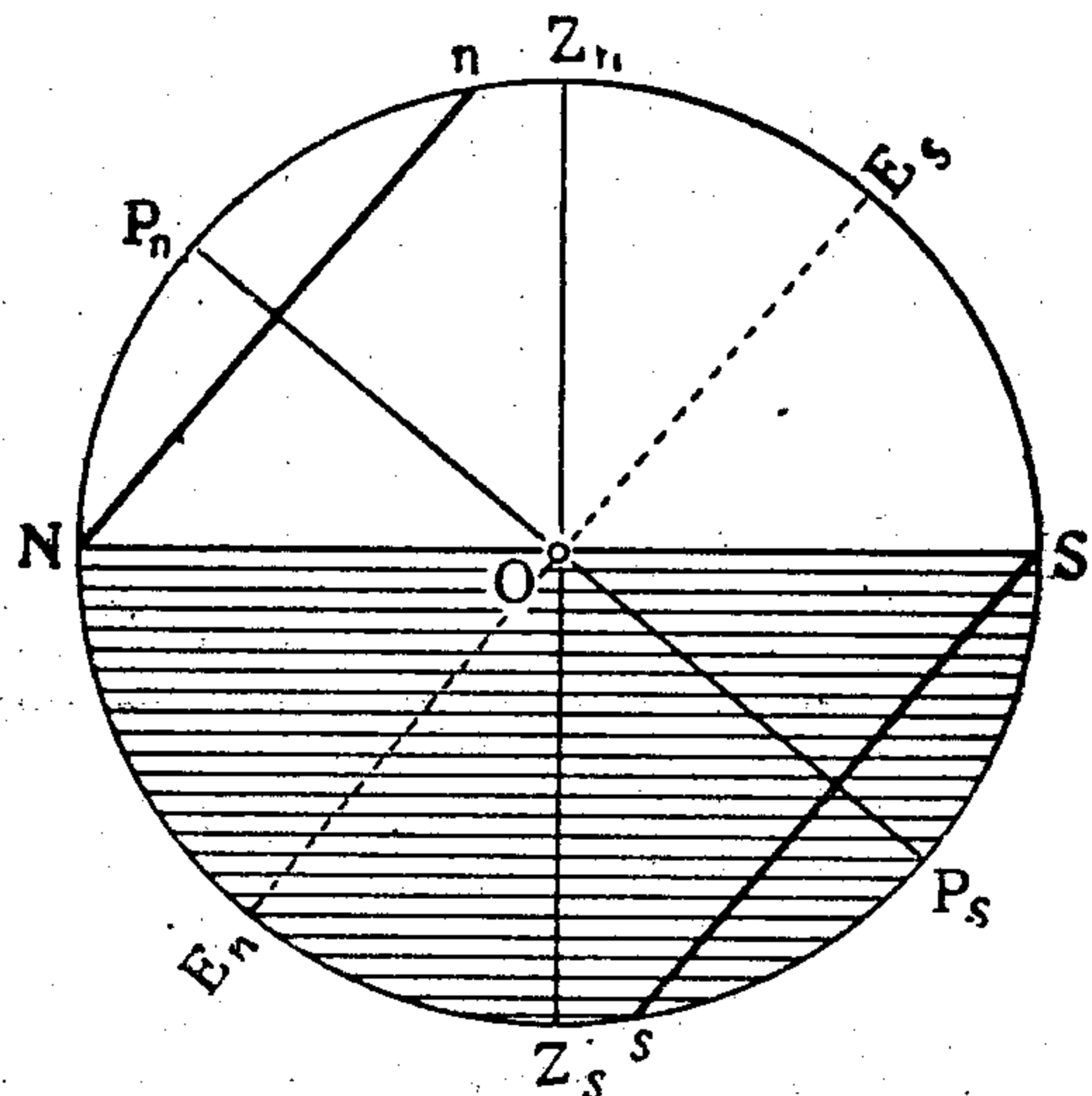
$$\delta = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \quad H = 0^h;$$

- западна тачка, то јест W : $\delta = 0, \quad H = 6^h;$
- северна тачка, то јест N : $\delta = +\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \quad H = 12^h;$
- источна тачка, то јест E : $\delta = 0, \quad H = 18^h.$

79. Пројигирајмо небеску сферу на посматрачеву меридијанску раван. Видљиви део те сфере биће онда претстављен (в. сл. 46) полукругом $SONP_nZ_nS$, а невидљиви њен део исцртаним полукругом SP_sZ_sNOS . Посматрачев положај претстављен је тачком O ; посматрачева хоризонтска раван, која дели видљиву од невидљиве половине небеске сфере, претстављена је пречником SON . На слици су, сем тога, претстављене:

пречником E_sOE_n — раван небеског екватора;

пречником P_nOP_s — светска оса.



Сл. 46.

Свака тетива паралелна пречнику E_sOE_n , као што су тетиве Nn и Ss , претставља пројекцију на меридијанску раван паралела који, у току звезданог дана, привидно опише некретница чија је деклинација једнака, у овом случају, углу E_nON , односно углу E_sOS .

Слика показује да за посматрача [остају над хоризонтом, преко целог дана, оне некретнице које описују паралеле изнад паралела Nn , дакле чије су позитивне деклинације веће од E_nON ; а остају под хоризонтом, преко целог дана, оне некретнице што описују паралеле испод паралела Ss , дакле чије су негативне деклинације веће од E_sOS .

Приметимо ли, међутим, да је $E_nON = \frac{\pi}{2} - \varphi$ и $E_sOS = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, уз то да је за посматрача у Београду $\varphi = +44^\circ 48'$, за овога остају у току звезданог дана:

над хоризонтом некретнице чије су $+\delta > +45^\circ 12'$,

под хоризонтом некретнице чије су $-\delta < -45^\circ 12'$.

80. Са сл. 46 може се видети да је географска ширина посматрачева, чији је положај на њој претстављен са O , дакле $\varphi = \sphericalangle NOP_n$, једнака висини пола; или $\varphi = \sphericalangle E_sOZ_n$, једнака деклинацији зенита.

Према томе, небеско тело ће пролазити кроз посматрачев зенит ако му је деклинација једнака посматрачевој географској ширини. Значи, α *Lyrae* (Вега), чија је деклинација $\delta = +38^\circ 44'$, пролазиће кроз зените свих места на Земљи која се налазе на паралелу $\varphi = +38^\circ 44'$.

$m = \text{дан не може}$

А циркумполарна ће бити α *Lyrae* (Вега) за сва она места за која је $\delta > \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, то јест чије су географске ширине $\varphi > \frac{\pi}{2} - \delta$, или за сва места на паралелу и северније од паралела

$$\varphi = +90^\circ - 38^\circ 44' = +51^\circ 16'.$$

81. За посматрача у Београду деклинација уочене некретнице задовољава неједначину $\delta > \frac{\pi}{2} - \varphi$. Она је за њега, дакле, циркумполарна, и то надхоризонтска. У току привидног дневног кретања некретница

достиге у горњој кулминацији најмању, у доњој кулминацији највећу зенитску даљину.

На сл. 47 претстављени су за посматрача у Београду ($\varphi = +44^\circ 48'$) положаји некретнице: у горњој кулминацији, са Σ_s , у доњој кулминацији, са Σ_i . Приметимо ли да је

$$\sphericalangle E_s O Z_n = \sphericalangle N O P_n = \varphi,$$

$$\sphericalangle E_s O \Sigma_s = \delta, \quad \sphericalangle P_n O \Sigma_i = 90^\circ - \delta,$$

видимо са слике да је:

у горњој кулминацији: $z_s = \delta - \varphi$, дакле $z_s = 63^\circ 12' - 44^\circ 48' = 18^\circ 24'$;

у доњој кулминацији: $z_i = (90^\circ - \varphi) + (90^\circ - \delta)$, дакле $z_i = 45^\circ 12' + 26^\circ 48' = 72^\circ 0'$.

82. Некретница која пролази кроз посматрачев зенит има деклинацију једнаку посматрачевој географској ширини. Сем тога, њен пролаз кроз зенит, дакле и кроз посматрачев меридијан, пада, према задатку, $4^h 42^m 52^s$ звезданог времена после кулминације некретнице чија је ректасцензија $13^h 52^m 35^s$, што, другим речима, значи – која кулминира у $13^h 52^m 35^s$ звезданог времена.

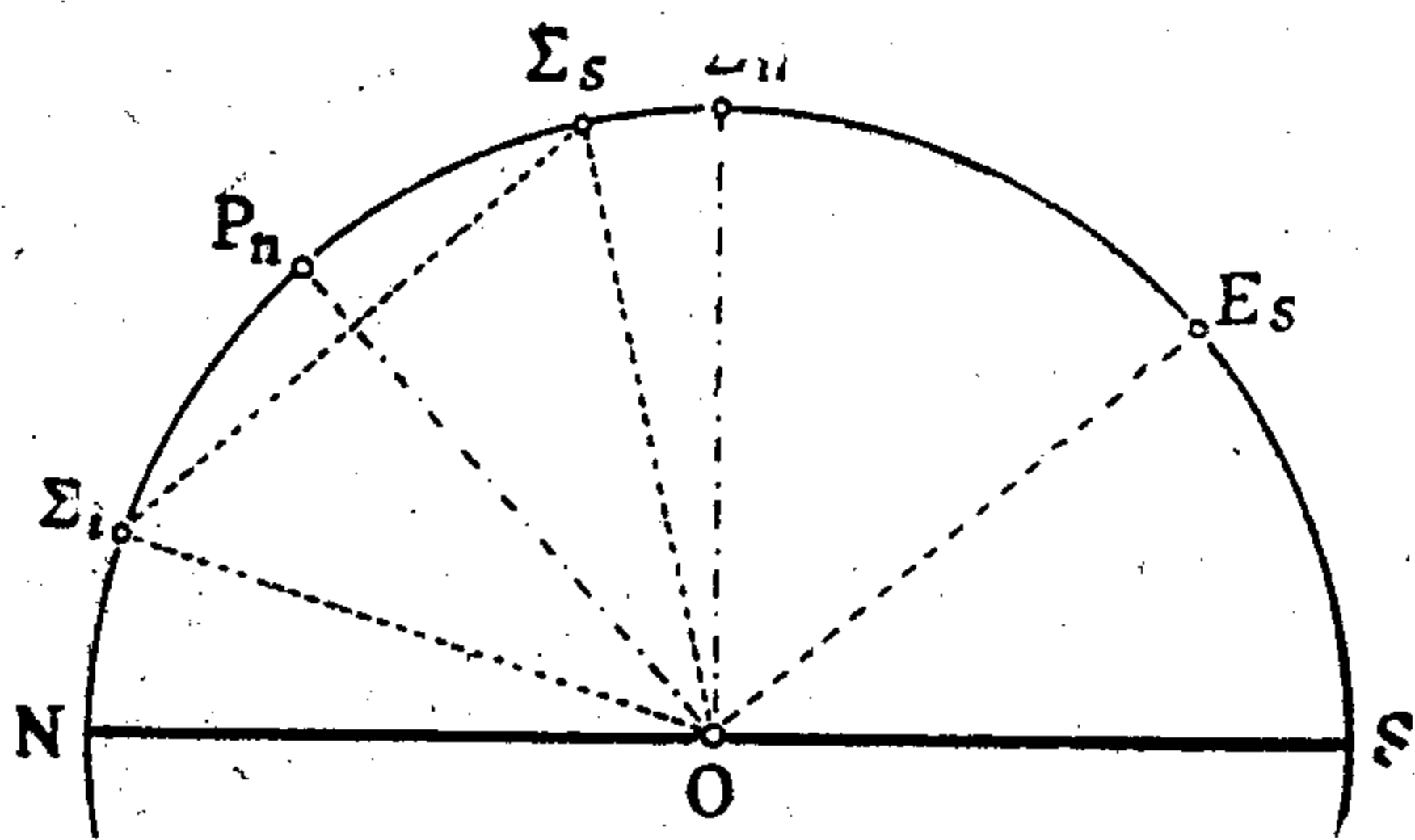
Видимо, према томе, да су координате некретнице:

$$\alpha = 13^h 52^m 35^s + 4^h 42^m 52^s = 18^h 35^m 27^s \text{ и } \delta = +38^\circ 44'.$$

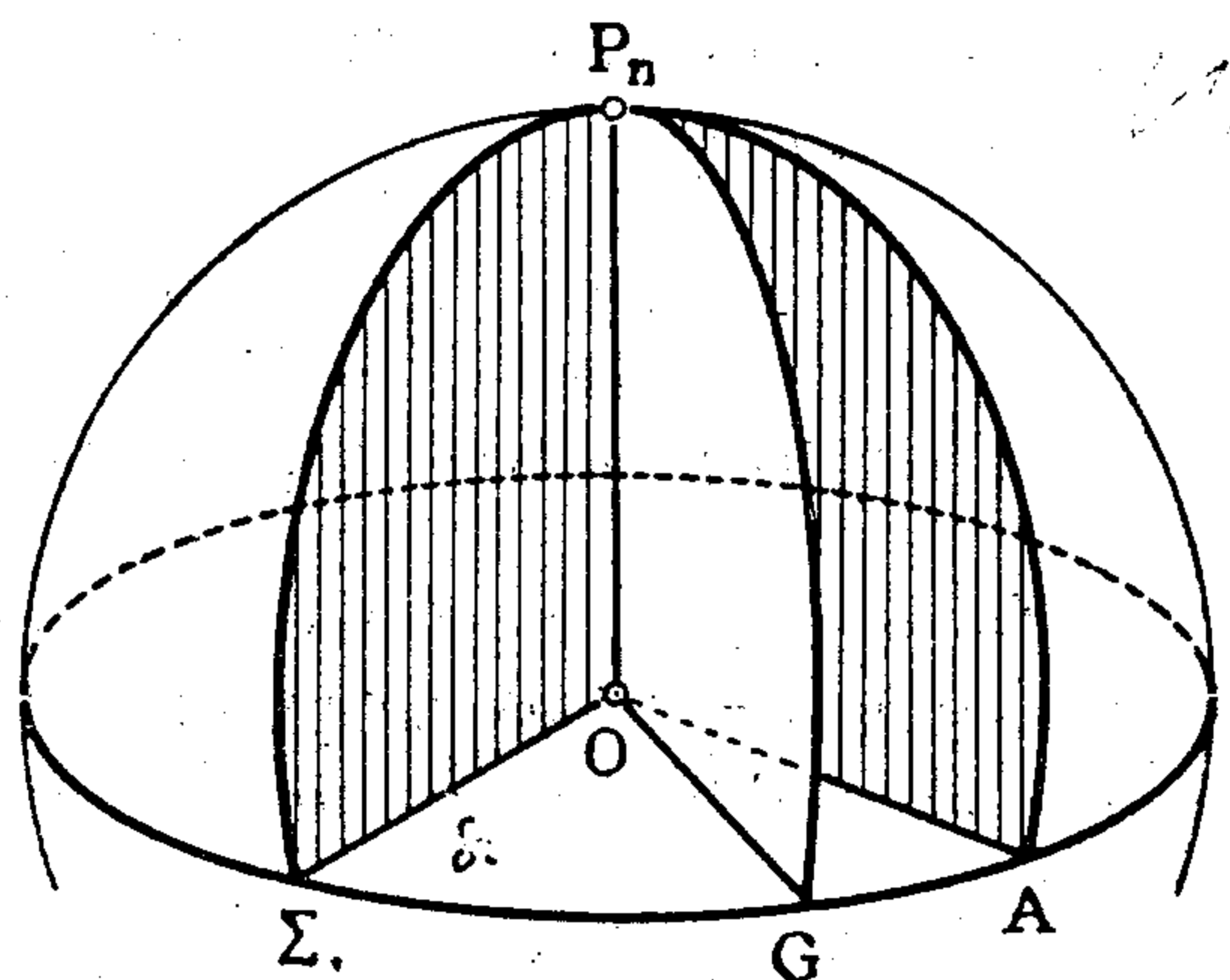
Ако отворимо Годишњак нашег неба за 1956 г., наћи ћемо (в. стр. 100) да је та некретница α *Lyrae* (Вега).

83. Претставимо на сл. 48 небеску сферу и на њој: $P_n G$ небески меридијан који се поклапа са гриничким; са $P_n A$ небески меридијан који се поклапа са меридијаном места чија је географска дужина $L = -40^\circ = -2^h 40^m$; и то у тренутку кад се некретница о којој је реч налази на небеском меридијану $P_n \Sigma_i$.

Према задатку је: $\sphericalangle GOA = L = -2^h 40^m$; $\sphericalangle A O \Sigma_1 = H_1 = 6^h 5^m 4^s$. Часовни угао некретнице Σ_1 , посматране из Гринича у истом тренутку је, онда: $\sphericalangle GO \Sigma_1 = \sphericalangle A O \Sigma_1 - \sphericalangle A O G = 6^h 5^m 4^s - 2^h 40^m = 3^h 25^m 4^s$.



Сл. 47.



Сл. 48.

А ако на истој слици узмемо да угао $GO\Sigma_1$ претставља часовни угао некретнице у Гриничу, дакле $H_2 = 6^h 5^m 4^s$, видимо да је часовни њен, у месту географске дужине L , у истом тренутку, претстављен углом $AO\Sigma_1 = H = \sphericalangle AOG + \sphericalangle GO\Sigma_1 = 2^h 40^m + 6^h 5^m 4^s = 6^h 45^m 4^s$.

84. Први начин. Кад је у Београду, чија је географска дужина $L = -20^\circ 30' 48'' = -1^h 22^m 3^s.20$, звездано време $t = 15^h 21^m 14^s.37$, у Гриничу је, у том тренутку, $t_0 = t + L = 15^h 21^m 14^s.37 - 1^h 22^m 3^s.20 = 13^h 59^m 11^s.17$ звезданог времена.

У овом тренутку звезданог времена је часовни угао у Гриничу, означимо га са H_0 , некретнице чија је ректасцензија α ,

$$H_0 = t_0 - \alpha = 13^h 59^m 11^s.17 - 14^h 13^m 36^s.12 = 23^h 45^m 35^s.05.$$

Други начин. На основи познате везе, $t = H + \alpha$, и података датих у задатку налазимо за часовни угао звезде у Београду

$$H = t - \alpha = 15^h 21^m 14^s.37 - 14^h 13^m 36^s.12 = 1^h 7^m 38^s.25.$$

С друге стране, знајући географску дужину Београда, $L = -1^h 22^m 3^s.20$, налазимо за часовни угао звезде посматране у истом тренутку и из Гринича (према решењу Зад. 83) $H_0 = L + H$, дакле

$$H_0 = -1^h 22^m 3^s.20 + 1^h 7^m 38^s.25 = -0^h 14^m 24^s.95 = 23^h 45^m 35^s.05.$$

85. Према познатој вези између звезданог времена, ректасцензије и часовног угла тела, у том тренутку звезданог времена, у овом случају имамо

$$\alpha_1 + H_1 = \alpha_2 + H_2.$$

Како су, према задатку, познати α_1 , α_2 и H_1 , можемо из ове везе израчунати H_2 . И налазимо

$$H_2 = \alpha_1 + H_1 - \alpha_2 = 10^h 9^m 8^s + 3^h 18^m 38^s - 18^h 19^m 20^s = 19^h 8^m 26^s.$$

86. Први начин. Време што га некретница проведе над посматрачевим хоризонтом једнако је двострукој вредности њена полудневног лука, изражена у временим јединицама. А полудневни лук, H , дат је изразом

$$\cos H = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta,$$

где је са φ означена посматрачева географска ширина, а са δ деклинација уочене некретнице.

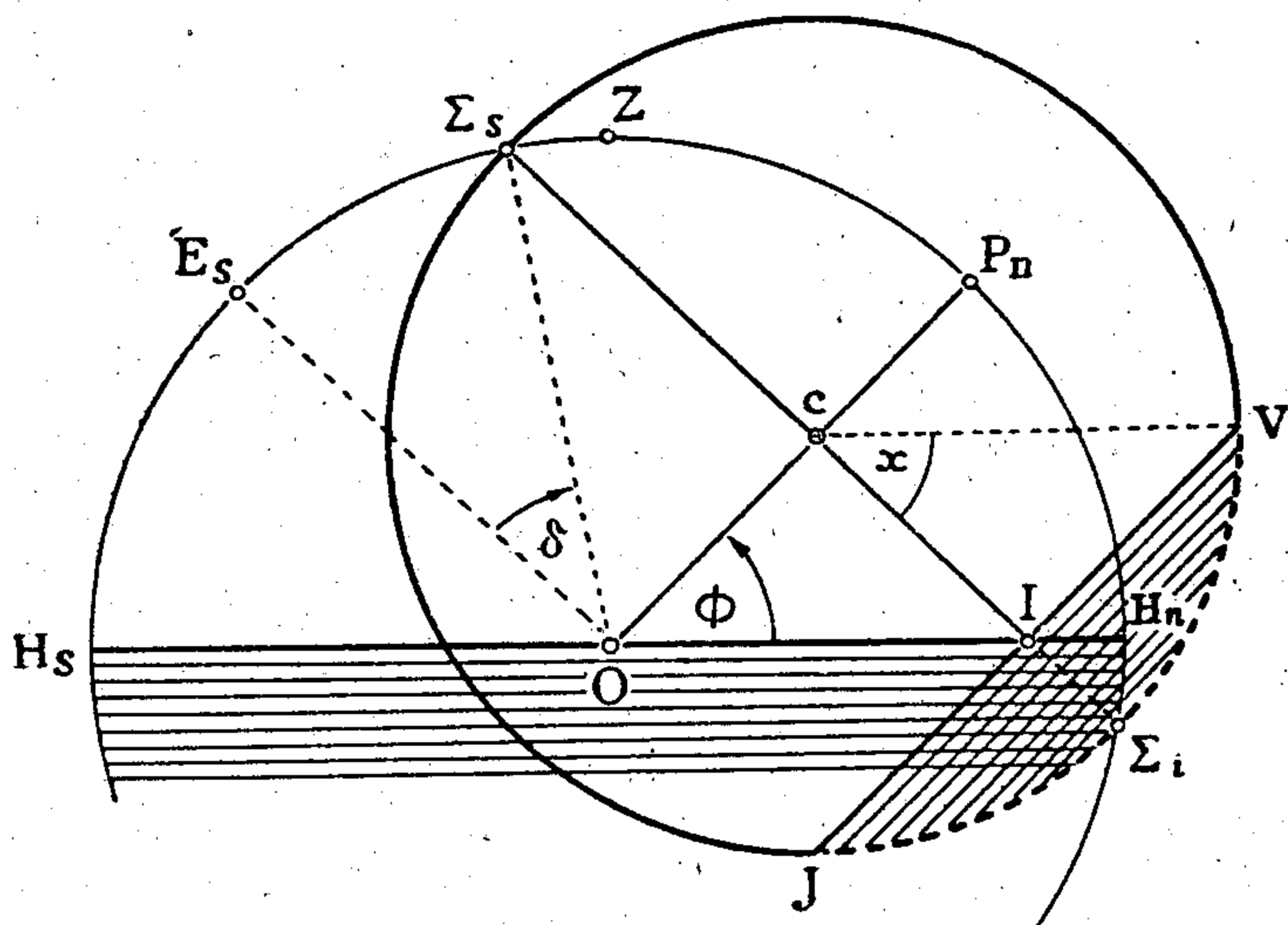
Према задатку је $\varphi = +45^\circ$, дакле $\operatorname{tg} \varphi = 1$. А како је $\sin \delta = \frac{1}{3}\sqrt{3}$,

значи $\cos \delta = \frac{1}{3}\sqrt{6}$, дакле $\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, — добивамо

$$\cos H = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \text{ или } H = 135^\circ = 9^h.$$

Некретница проводи, дакле, над посматрачевим хоризонтом $2H = 18^h$, или $\frac{3}{4}$ звезданог дана.

Други начин. Претставимо, на сл. 49, у пројекцији на посматрачеву меридијанску раван:



Сл. 49.

са O посматрачев положај;
са Z посматрачев зенит;
са $H_s H_n$ посматрачев хоризонт;
са P_n северни небески пол,
са $O E_s$ део небеског екуатора над посматрачевим хоризонтом;
са $\Sigma_s \Sigma_i$ небески паралел који у току дана привидно опише некретница деклинације δ ;
са $\Sigma_s I$ пројекцију дела тог паралела који некретница проведе над посматрачевим хоризонтом.

Паралел $\Sigma_s \Sigma_i$ и хоризонт $H_s H_n$ секу се у двама тачкама, излаза и залаза, које се на слици пројцирају у једну тачку, I .

Окренимо сад паралел око његова пречника $\Sigma_s c \Sigma_i$ и положимо га у раван посматрачева меридијана $\Sigma_s Z P_n H_n \Sigma_i$. Паралел ће бити претстављен кружном линијом $\Sigma_s V \Sigma_i J$. Тетива JIV , нормална на пречнику паралела $\Sigma_s c \Sigma_i$, претставља праву пресека паралела некретнице и посматрачева хоризонта. Тачке J и V претстављају тачке излаза и залаза некретнице. Према томе, лук $J \Sigma_s V$ претставља дневни лук, или над-хоризонтски део паралела некретнице, а лук $V \Sigma_i J$ под-хоризонтски, то јест невидљиви део њена паралела.

Према подацима задатка је

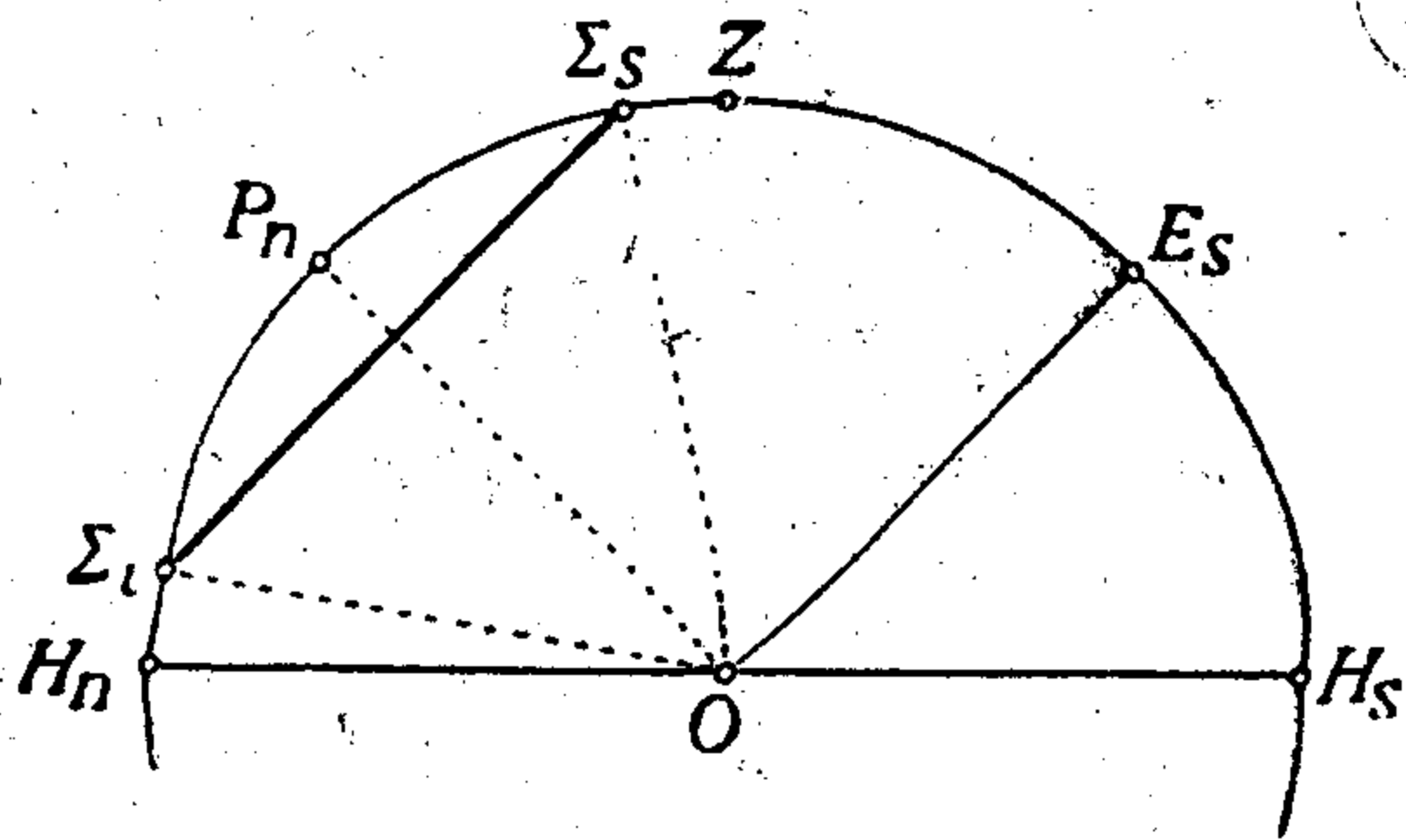
$$Oc = c \Sigma_s \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2} \sqrt{2} c \Sigma_s.$$

Према ономе што је речено, лук $\Sigma_s V$, изражен у временој мери, претставља полудневни лук некретнице, који је опет, као што са слике видимо, мерен углом $\Sigma_s c V = 180^\circ - x$. Угао x , међутим, одређен је из

$$\cos x = \frac{cl}{cV} = \frac{cl}{c \Sigma_s} = \frac{1}{2} \sqrt{2} = 45^\circ.$$

И тако налазимо $\Sigma_s c V = 135^\circ = 9^h$.

87. Претставимо на сл. 50 пресек небеске сфере посматрачевом меридијанском равни, $H_s E_s Z P_n H_n$. Претставимо у њој са Σ_s и Σ_i положаје уочене циркумполарне звезде, у тренуцима њене горње, односно доње кулминације. Означимо јој посматране висине у тим тренуцима са h_s , односно са h_i . Ако са δ означимо деклинацију



Сл. 50.

звезде, а са φ посматрачеву географску ширину, онда имамо, као што са слике видимо,

$$h_s = \varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right),$$

$$h_i = \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right).$$

Сабирањем ових двеју једначина добивамо $\varphi = \frac{1}{2} (h_s + h_i)$.

А одузимањем друге од прве добивамо $\delta = \frac{1}{2} [\pi - (h_s - h_i)]$,

или, ако са p означимо поларну даљину звезде, $p = \frac{1}{2} (h_s - h_i)$.

Дакле, из посматраних висина и сте циркумполарне звезде у обе мањеним кулминацијама можемо одредити:

1. посматрачеву географску ширину, узимајући аритметичку средину посматраних висина;

2. поларну даљину посматране звезде, узимајући половину разлике висина у горњој и доњој кулминацији.

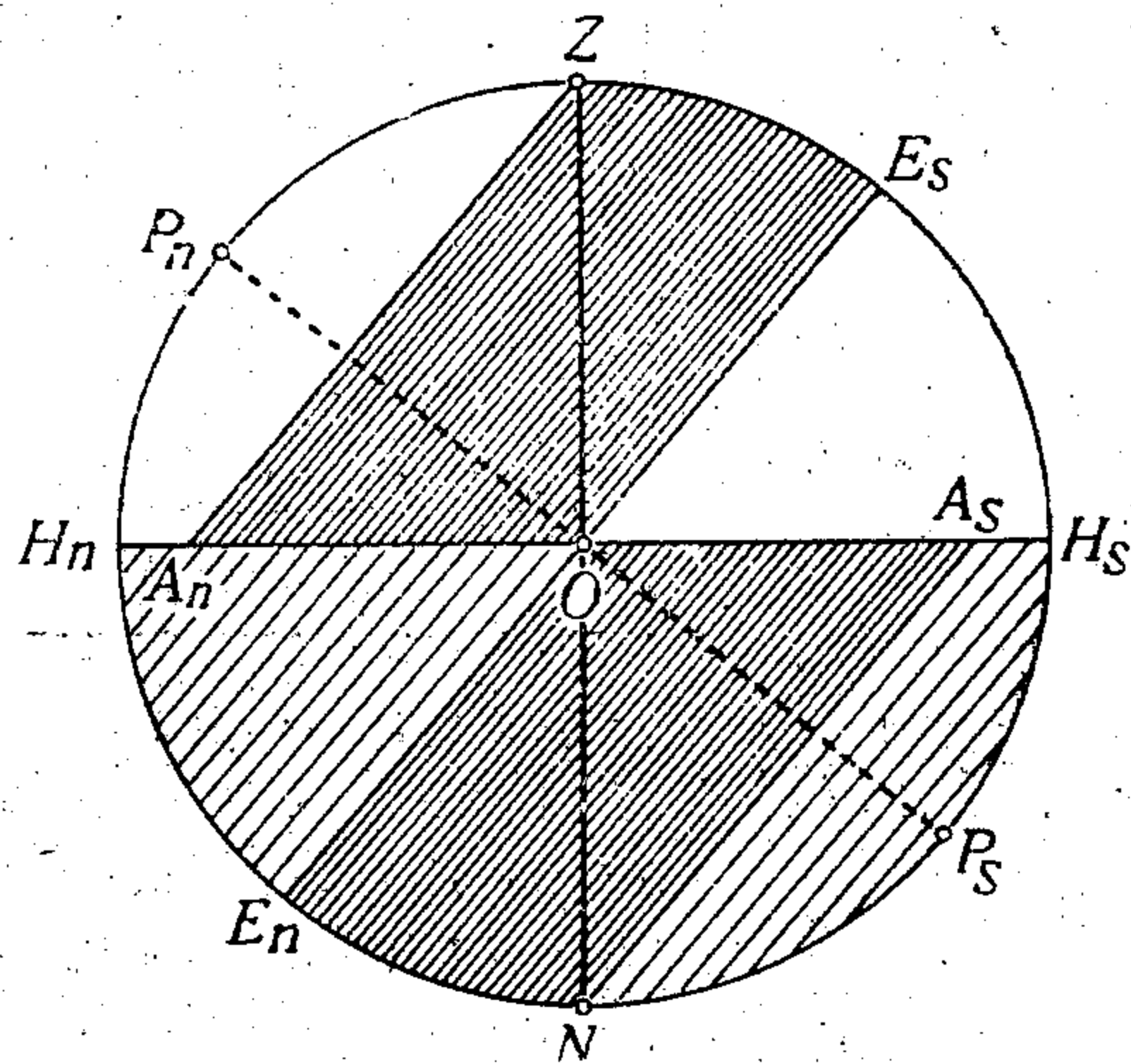
88. Први вертикал је велики полукруг што пролази кроз посматрачеву вертикалу и западну, одн. источну тачку његова хоризонта. Према томе, кроз први вертикал пролазе у току свог привидног дневног кретања све оне, али и само оне, некретнице чије су привидне дневне путање обухваћене појасом OE_sZA_n (в. сл. 51). Друкчије речено, пролазе само оне некретнице чије деклинације задовољавају неједначину,

на северној хемисфери: $0 < \delta < \varphi$,

на јужној хемисфери: $0 > -\delta > -\varphi$.

За $\varphi = +44^\circ 48'$, то јест за посматрача у Београду, пролазе кроз први вертикал само некретнице чије су деклинације $0 < \delta < +44^\circ 48'$.

89. Означимо: са φ посматрачеву географску ширину; са δ деклинацију посматране некретнице; са z_s и z_i посматране зенитске даљине у горњој, односно њеној доњој кулминацији, то јест у положајима представљеним на сл. 52 са Σ_s , односно Σ_i .



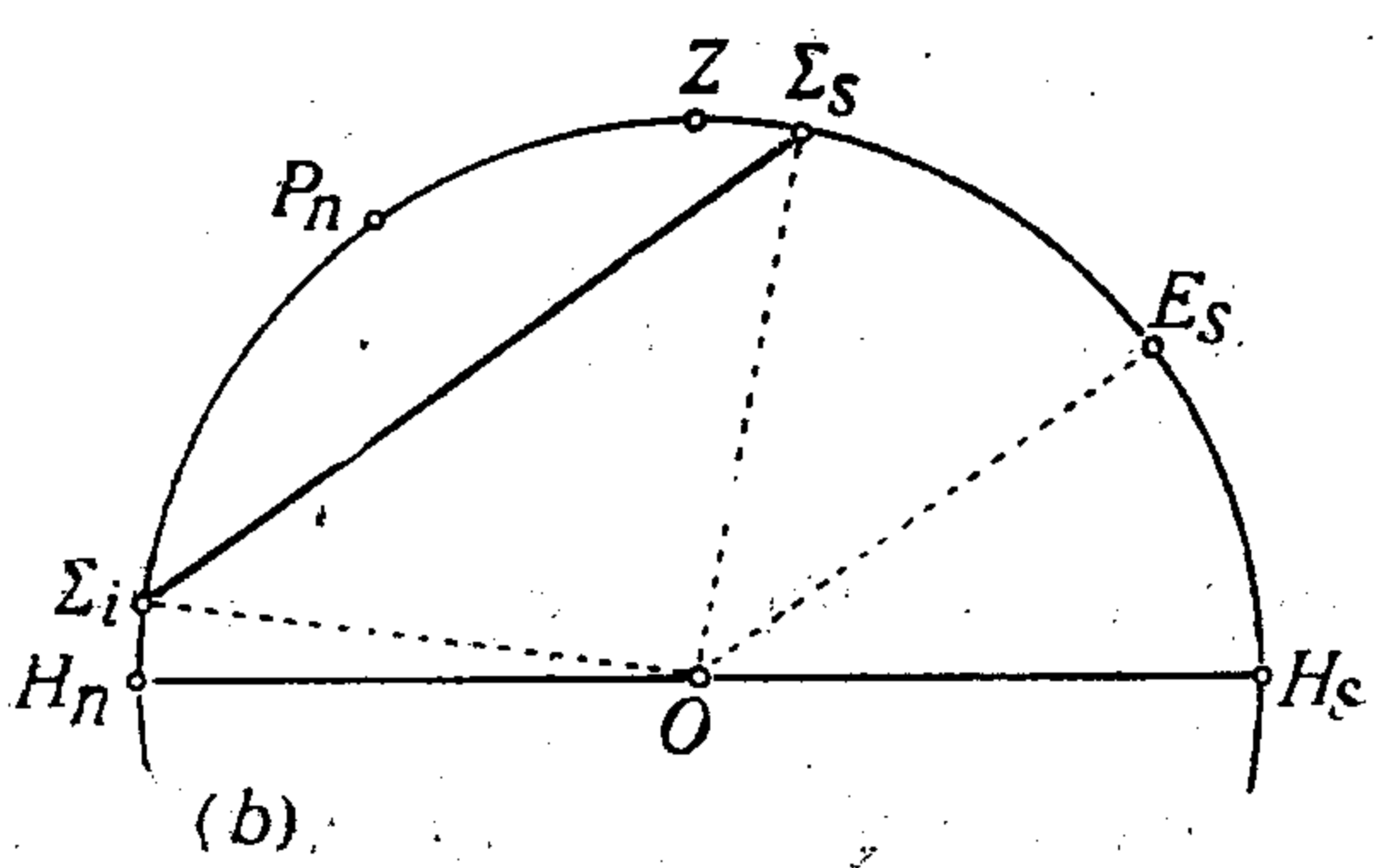
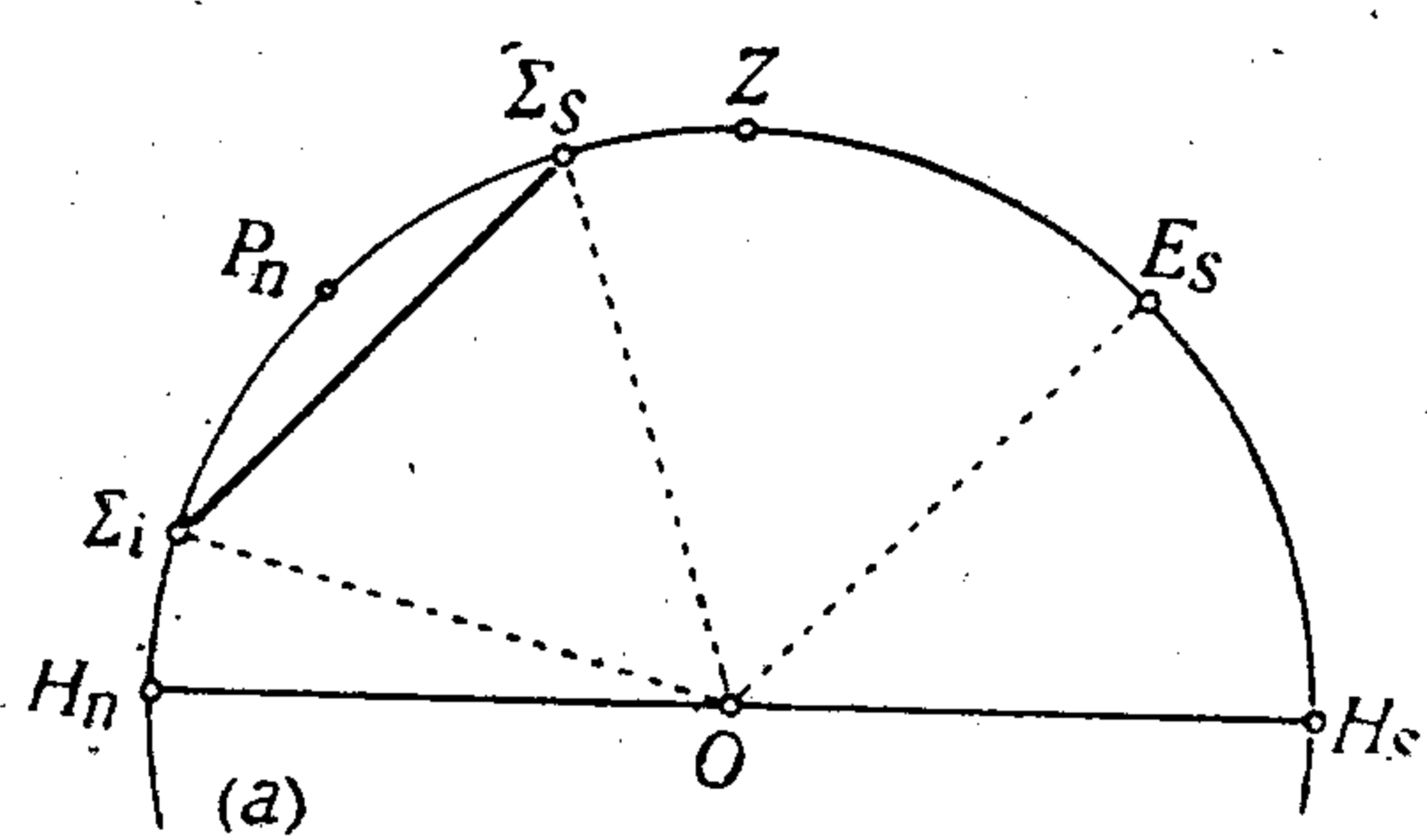
Сл. 51.

146
106

— дим. Цел. шир.

Онда треба два случаја разликовати:

- а) кад горња кулминација пада северно од посматрачева зенита, и
- б) кад горња кулминација пада јужно од зенита.



Сл. 52.

У првом случају је:

за Σ_s : $\varphi = \delta - z_s$,

то јест $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(z_s + z_i)$;

за Σ_i : $\varphi = \pi - \delta - z_i$,

то јест $\delta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(z_s - z_i)$;

У другом случају је;

за Σ_s : $\varphi = \delta + z_s$,

то јест $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(z_s - z_i)$;

за Σ_i : $\varphi = \pi - \delta - z_i$,

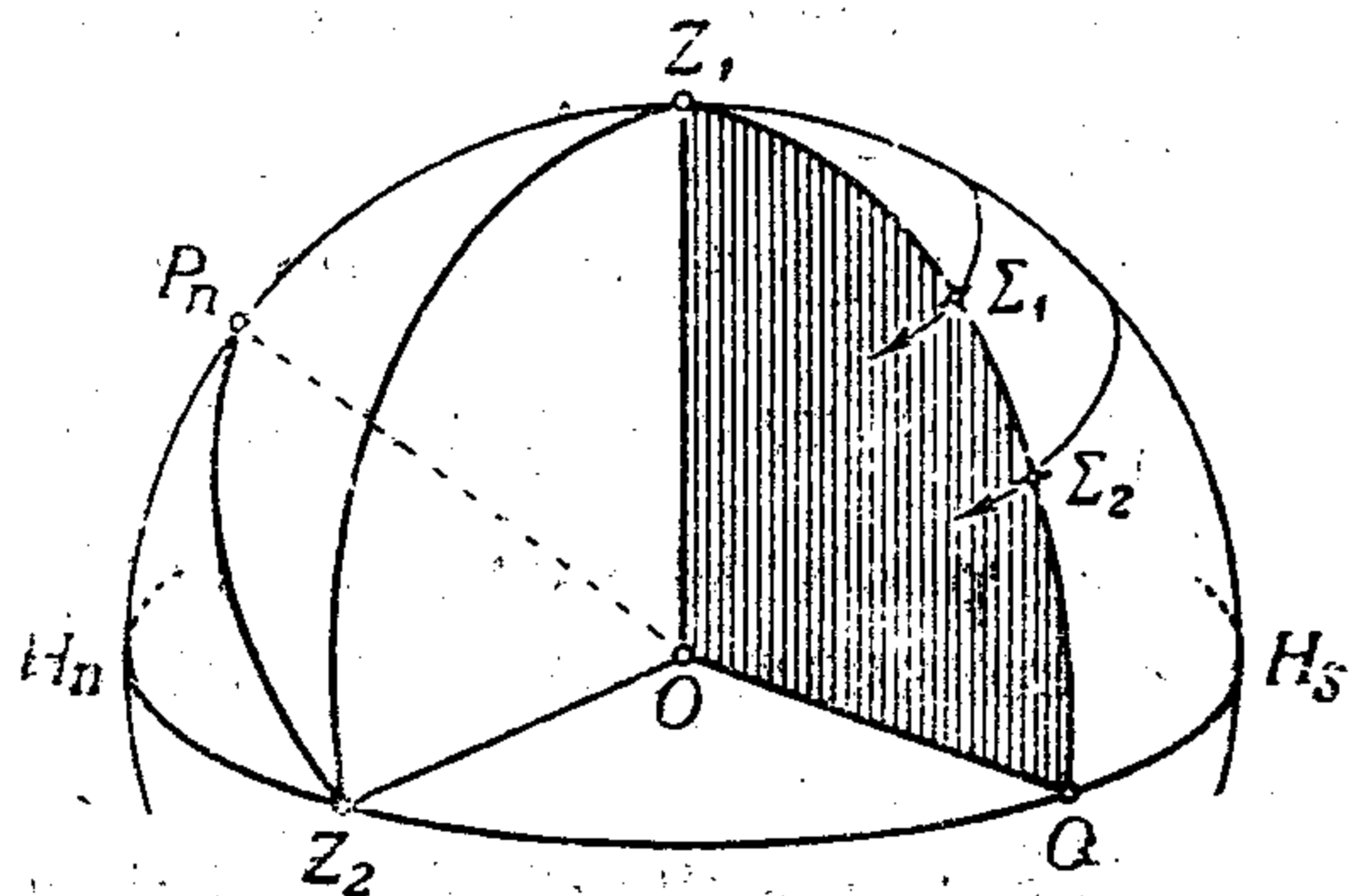
то јест $\delta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(z_s + z_i)$;

Како у задатку није прецизирано са које стране зенита пада горња кулминација, задатак има два решења. Имамо, наиме

$z_s = 6^\circ 33' 44'' \cdot 5$, $z_s + z_i = 78^\circ 1' 23'' \cdot 8$, $z_s - z_i = -64^\circ 53' 54'' \cdot 8$,
 $z_i = 71^\circ 27' 39'' \cdot 3$; $\frac{1}{2}(z_s + z_i) = 39^\circ 0' 41'' \cdot 9$; $\frac{1}{2}(z_s - z_i) = -32^\circ 26' 57'' \cdot 4$;

те ће бити, у првом случају: $\varphi = +50^\circ 59' 18'' \cdot 1$, $\delta = +57^\circ 33' 2'' \cdot 6$;
у другом случају: $\varphi = +57^\circ 33' 2'' \cdot 6$, $\delta = +50^\circ 59' 18'' \cdot 1$.

90. Претпоставимо да се за посматрача M_1 обе некретнице, које смо означили на сл. 53 са Σ_1 и Σ_2 , налазе у вертикалу OZ_1Q , чији је азимут A . У том истом тренутку, за посматрача M_2 , према задатку, обе некретнице излазе: значи налазе се у равни његова хоризонта. Отуда следује да је вертикал посматрача M_1 : $Z_1\Sigma_1\Sigma_2Q$ — хоризонт за посматрача M_2 . Нормала OZ_2 на равни $OZ_1\Sigma_1\Sigma_2Q$ претстављаће вертикалу; према томе Z_2 — зенит посматрача M_2 .



Сл. 53.

Сферни троугао, чија су темена северни небески пол, P_n , и зенити Z_1 и Z_2 двају посматрача, квадрантни је сферни троугао, јер је $Z_1Z_2 = \frac{\pi}{2}$.

Његова страна $P_n Z_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$ дата је. Како је $\sphericalangle QOZ_2 = \frac{\pi}{2}$, то је $\sphericalangle P_n Z_1 Z_2 = \frac{\pi}{2} - A$. Према томе, из сферног троугла $P_n Z_1 Z_2$ имамо за страну $P_n Z_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$,

$$\sin \varphi_2 = \cos \varphi_1 \cdot \sin A.$$

Тако је географска ширина посматрача M_2 одређена.

Разлика географских дужина посматрача једнака је углу $Z_1 P_n Z_2$. Ако је означимо са L имаћемо, из истог сферног троугла,

$$\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos L = 0,$$

дакле

$$\cos L = -\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Из података задатка се види које од двају могућих решења одговара посматрачу M_2 .

91. Поћи ћемо од образаца Гаусове групе који одређују δ и H кад су познати φ , z и A :

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A,$$

$$\cos \delta \sin H = \sin z \sin A,$$

$$\cos \delta \cos H = \cos \varphi \cos z + \sin \varphi \sin z \cos A.$$

Да бисмо их подесили за логаритамско рачунање, ставићемо

$$\sin z \cos A = m \sin M,$$

$$\cos z = m \cos M, \quad \text{са } m > 0.$$

Из ових једначина налазимо

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{tg} z \cos A \quad \text{и} \quad m = \sin z \cos A \operatorname{cosec} M.$$

Увођењем ових помоћних величина првобитни обрасци постају

$$\sin \delta = m \sin (\varphi - M),$$

$$\cos \delta \sin H = \sin z \sin A,$$

$$\cos \delta \cos H = m \cos (\varphi - M).$$

И тако добивамо непознате величине из једначина

$$\operatorname{tg} H = \sin M \operatorname{tg} A \sec (\varphi - M) \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} (\varphi - M) \cos H.$$

За проверавање нумеричког рада имамо, у овом случају, образац

$$\sin z \cos A \cos (\varphi - M) = \sin M \cos \delta \cos H.$$

148
108

Према подацима задатка биће, дакле:

Дате величине: $\left\{ \begin{array}{l} \varphi = + 38^{\circ} 58' 53'', \quad [\operatorname{tg} z] \quad 0.43210, \quad M = 53^{\circ} 39' 42'', \\ z = 69 \ 42 \ 30, \quad [\cos A] \quad 9.70126, \quad \varphi = 38 \ 58 \ 53, \\ A = 300 \ 10 \ 30; \quad [\operatorname{tg} M] \quad 0.13336; \quad \varphi - M = -14 \ 40 \ 49. \end{array} \right.$

Израчунавање непознатих координата:

$$\begin{array}{ll} [\sin M] & 9.90608, \quad [\operatorname{tg}(\varphi - M)] \quad 9.41826 \text{ n}, \\ [\operatorname{tg} A] & 0.23551 \text{ n}, \quad [\cos H] \quad 9.75777, \\ [\sec(\varphi - M)] & 0.01441, \quad [\operatorname{tg} \delta] \quad 9.17603 \text{ n}; \\ [\operatorname{tg} H] & 0.15600 \text{ n}; \end{array}$$

дакле: $\underline{H = 304^{\circ} 55' 27''}; \quad \underline{\delta = -8^{\circ} 31' 47''}.$

Проверавање нумеричког рада:

$$\begin{array}{ll} [\sin z] & 9.97217, \quad [\sin M] \quad 9.90608, \\ [\cos A] & 9.70126, \quad [\cos \delta] \quad 9.99517, \\ [\cos(\varphi - M)] & 9.98559, \quad [\cos H] \quad 9.75777, \\ \Sigma_1 & 9.65902; \quad \Sigma_2 \quad 9.65902. \end{array}$$

Да је у задатку било дато још и звездано време посматрања, рецимо t , из познате везе

$$t = \alpha + H,$$

са нађеним часовним углом могла би се одредити и ректасцензија звезде.

92. Са датим величинама φ , δ и z одредићемо, помоћу обрасца

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H$$

часовни угао некретнице, који одговара посматраној зенитској даљини. Како је и ректасцензија звезде позната, моћи ћемо наћи звездано време посматрања. Друкчије речено, наћи ћемо звездано време које бисмо са часовника били прочитали у тренутку посматрања, да је показивао тачно време. Разлика између овако израчунатог и са часовника стварно прочитаног звезданог времена претставља тражену поправку часовника.

Но да би се добио нумерички тачнији резултат, трансформисаћемо горњи образац тако да часовни угао добијемо изражен помоћу тангенса. Зато ћемо образац прво написати овако

$$\cos H = \frac{\cos z - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta},$$

па ћемо образовати

$$1 - \cos H = \frac{\cos \varphi \cos \delta - \cos z + \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \cos z}{\cos \varphi \cos \delta},$$

am = gmk не штаг

$$1 + \cos H = \frac{\cos \varphi \cos \delta + \cos z - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} = \frac{\cos(\varphi + \delta) + \cos z}{\cos \varphi \cos \delta}.$$

Из ових релација, добивамо, прво,

$$\sin^2 \frac{H}{2} = \frac{-\sin \frac{1}{2}(\varphi - \delta + z) \sin \frac{1}{2}(\varphi - \delta - z)}{\cos \varphi \cos \delta},$$

$$\cos^2 \frac{H}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi + \delta + z) \cos \frac{1}{2}(\varphi + \delta - z)}{\cos \varphi \cos \delta},$$

а одавде, ако још уведемо

$$2s = \varphi + \delta + z,$$

добивамо за одређивање часовног угла

$$\operatorname{tg}^2 \frac{H}{2} = \sin(s - \delta) \sin(s - \varphi) \sec s \sec(s - z).$$

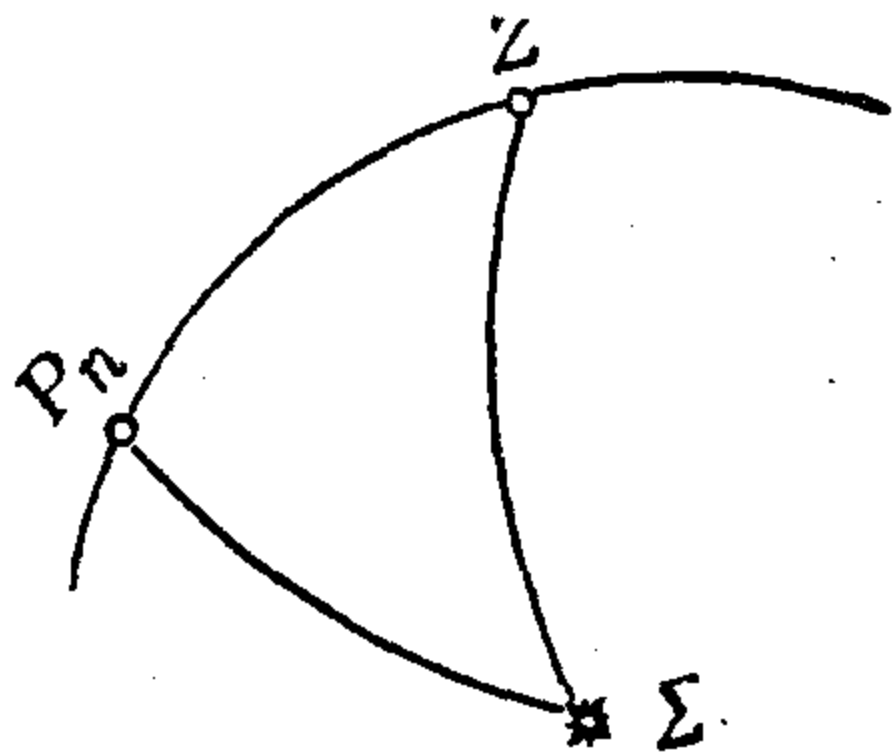
Према подацима задатка биће, дакле:

$\varphi = 42^\circ 41' 40''$,	$[\sin(s - \delta)]$	9.84 273,	$H^0 = 66^\circ 23' 28''$,
$\delta = +16 15 30$,	$[\sin(s - \varphi)]$	9.48 259,	$H^h = 4^h 25^m 33^s.87$,
$z = 61 48 30$,	$[\sec s]$	0.30 606,	$\alpha = 4 28 48.38$,
$2s = 120 45 40$,	$[\sec(s - z)]$	0.00 014,	$t_r = 8 53 22.25$,
$s = 60 22 50$,	$2 \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} H \right]$	9.63 152,	$t_p = 8 54 20.00$,
$s - \varphi = 17 41 10$,	$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} H \right]$	9.81 576,	$\Delta t = + 0^m 2^s.25$.
$s - \delta = 44 7 20$,			
$s - z = - 1 25 40$;		$\frac{1}{2} H = 33^\circ 11' 44''$;	

93. Правац меридијана биће одређен ако знамо, у тренутку посматрања, азимут некретнице познатих координата. У задатку су дати: координате некретнице, α и δ ; зенитска даљина, z , и тренутак посматрања, t (у звезданом времену); помоћу овога налазимо часовни угао посматране звезде из $H = t - \alpha$. Према томе можемо израчунати азимут некретнице у тренутку посматрања. Означимо га са A_r . А са инструмента прочитани азимут, у тренутку посматрања, означимо са A_p . Разлика $A_r - A_p$ претстављаће поправку прочитаног азимута, то јест величину коју треба алгебарски додати прочитаној вредности азимута, односно за коју би требало померити индекс азимутног круга, да би овај показивао тачне азимуте.

150
110

Ако на положајни сферни троугао $P_n \Sigma Z$ (в. сл. 54) применимо синусни образац, добићемо



Сл. 54.

$$\cos \delta \sin H = \sin z \cdot \sin (\pi - A).$$

Како је, међутим, са подацима задатка,

$$H = 9^h 5^m 21^s - 3^h 5^m 21^s = 6^h 0^m 0^s = 90^\circ,$$

горњи образац постаје

$$\sin (\pi - A) = \frac{\cos \delta}{\sin z}.$$

Ако га трансформишемо за нумерички рачун, на већ познати начин, имаћемо

$$1 - \cos \left(A - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sin z - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right)}{\sin z} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \left(z + \frac{\pi}{2} - \delta \right) \sin \frac{1}{2} \left[z - \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \right]}{\sin z},$$

$$1 + \cos \left(A - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sin z + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right)}{\sin z} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \left(z + \frac{\pi}{2} - \delta \right) \cos \frac{1}{2} \left[z - \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \right]}{\sin z}.$$

Одавде добивамо за одређивање азимута

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \left(A - \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \left(z + \frac{\pi}{2} - \delta \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left[z - \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \right].$$

За одређивање посматрачеве географске ширине имамо

$$\sin \varphi = \frac{\cos z}{\sin \delta}.$$

Ако и овај образац трансформишемо за нумерички рачун, добићемо

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \left(\delta + \frac{\pi}{2} - z \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left[\delta - \left(\frac{\pi}{2} - z \right) \right].$$

Помоћу ових образаца извешћемо нумеричко решење задатка са седам децимала.

$z = 32^\circ 35' 23''.5,$	$z + (90^\circ - \delta) = 63^\circ 42' 37''.3,$
$\delta = + 58 \ 52 \ 46.2,$	$z - (90^\circ - \delta) = 1 \ 28 \ 9.7,$
$90^\circ - z = 57 \ 24 \ 36.5,$	$\delta + (90^\circ - z) = 116 \ 17 \ 22.7,$
$90^\circ - \delta = 31 \ 7 \ 13.8;$	$\delta - (90^\circ - z) = 1 \ 28 \ 9.7;$
$\frac{1}{2} [z + (90^\circ - \delta)] = 31^\circ 51' 18''.65,$	$\frac{1}{2} [z - (90^\circ - \delta)] = 0 \ 44 \ 4.85,$
$\frac{1}{2} [\delta + (90^\circ - z)] = 58 \ 8 \ 41.35.$	

$$\begin{array}{ll} \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \{z + (90^\circ - \delta)\} \right] & 0.206\ 6565, & \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \{\delta + (90^\circ - z)\} \right] & 9.793\ 3436, \\ \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \{z - (90^\circ - \delta)\} \right] & \underline{8.107\ 9997}, & \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \{\delta - (90^\circ - z)\} \right] & \underline{8.107\ 9997}, \\ 2 \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - 90^\circ) \right] & 8.314\ 6562, & 2 \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (90^\circ - \varphi) \right] & 7.901\ 3433, \\ \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - 90^\circ) \right] & 9.157\ 3281, & \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (90^\circ - \varphi) \right] & 8.950\ 6717, \\ \frac{1}{2} (A - 90^\circ) = & 8^\circ 10' 30''.12, & \frac{1}{2} (90^\circ - \varphi) = & 5^\circ 6' 3''.15, \end{array}$$

$$A - 90^\circ = 16\ 21\ 0.24,$$

$$90^\circ - \varphi = 10\ 12\ 6.30,$$

$$\underline{A = 106\ 21\ 0.24;}$$

$$\underline{\varphi = +79\ 47\ 53.70.}$$

Поправка за оријентисање инструмента у азимуту износи, према томе, $A_r - A_p = 106^\circ 21' 0''.24 - 118^\circ 23' 57''.2 = -12^\circ 2' 57''.0$.

За проверавање нумеричког рада узећемо образац који везује дате са израчунатим величинама. Из положајног сферног троугла, који је, у овом случају, правоугли имамо

$$\sin \varphi \sin A = \operatorname{ctg} \delta \operatorname{ctg} z.$$

Са горњим бројним вредностима ових елемената налазимо:

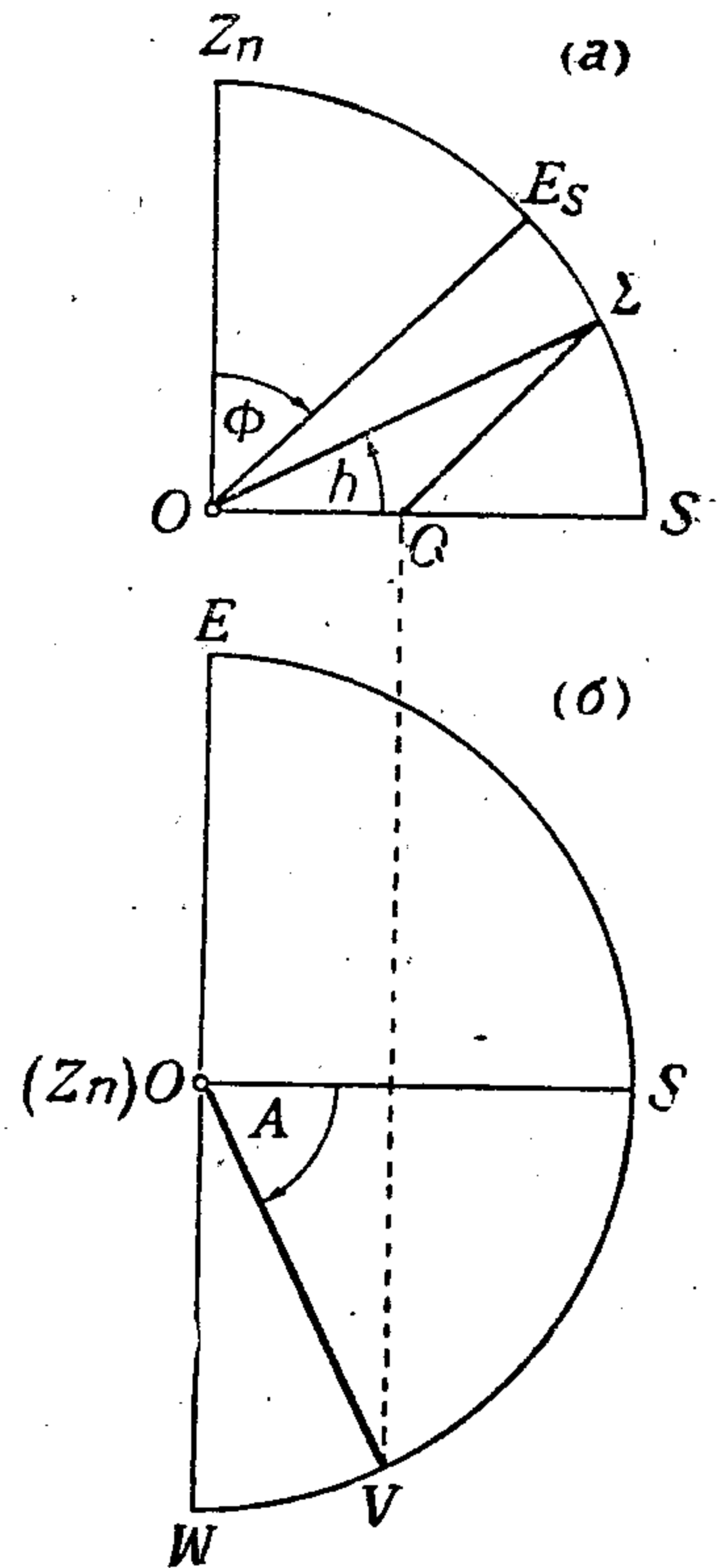
$$[\sin \varphi] \quad 9.993\ 0790, \quad [\operatorname{ctg} \delta] \quad 9.780\ 8403,$$

$$[\sin A] \quad \underline{9.982\ 0720}, \quad [\operatorname{ctg} z] \quad \underline{0.194\ 3107},$$

$$\Sigma_1 \quad 9.975\ 1510; \quad \Sigma_2 \quad 9.975\ 1510.$$

94. Графичко решење. Претставимо на сл. 55 (а) са OZ_nS јужну страну посматрачева меридијана, од зенита, Z_n , до јужне тачке, S , хоризонта. Затим нанесимо око O , као темена, угао $SO\Sigma = -h = 25^\circ$, наиме, висину некретнице у тренутку њене горње кулминације. Овако одређена тачка Σ претставља, у исти мах, и једну тачку паралела који некретница описује у току свог привидног кретања.

Претставимо сад полукружном линијом ESW (в. сл. 55 (б)) пројекцију јужне стране небеске сфере на посматрачеву хоризонтску раван (размере морају бити као и у горњој слици; правци OS у обема паралелни). Наносећи од OS (који претставља пројекцију јужног дела посматрачева меридијана) угао $A = \sphericalangle SOV = 65^\circ$, добивамо на посматрачеву хоризонту тачку залаза, V , некретнице. Пројицирајмо сад ову тачку на посматрачеву меридијан-



Сл. 55 а.
Сл. 55 б.

728

152
112

~ = дуж ШШШШ

ску раван. Добивамо на сл. 55 (а) тачку Q . И ово је, према томе, једна тачка паралела некретнице.

Тако смо одредили две тачке, Σ и Q , пројициране привидне дневне путање некретнице на посматрачеву меридијанску раван. А како је та пројекција права линија (тетива), овим тачкама је одређена пројекција паралела некретнице на посматрачеву меридијанску раван. И то његова видљива дела. Онда полупречник OE_s , повучен на сл. 55 (а) паралелно су дужи ΣQ , претставља пројекцију на посматрачеву меридијанску раван видљивог дела небеског екватора.

На овако конструисаној слици:

$\angle E_s O \Sigma$ претставља деклинацију некретнице, за коју са слике читамо $\delta \approx -16^\circ$,

$\angle E_s O Z_n$ претставља посматрачеву географску ширину, за коју са слике налазимо $\varphi \approx +49^\circ$.

Нумеричко решење. У тренутку горње кулминације звезде је

$$\varphi = z + \delta, \text{ то јест } \delta = \varphi - z.$$

У тренутку залаза је

$$\sin \delta = -\cos \varphi \cos A,$$

те је, према томе,

$$\sin(\varphi - z) = -\cos \varphi \cos A.$$

Ако леву страну развијемо, имаћемо

$$\sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z = -\cos \varphi \cos A,$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi \cos z = \sin z - \cos A,$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = (\sin z - \cos A) \operatorname{sec} z = 2 \cos \frac{1}{2} [z + (90^\circ - A)] \sin \frac{1}{2} [z - (90^\circ - A)] \operatorname{sec} z.$$

Према томе ће бити:

$$z = 65^\circ, \quad z + (90^\circ - A) = 90^\circ, \quad \frac{1}{2} [z + (90^\circ - A)] = 45^\circ, \quad [\sqrt{2}] \quad 0.15051,$$

$$A = 65^\circ, \quad \frac{1}{2} [z - (90^\circ - A)] = 40^\circ; \quad \frac{1}{2} [z - (90^\circ - A)] = 20^\circ; \quad [\sin 20^\circ] \quad 9.53405,$$

$$90^\circ - A = 25^\circ; \quad [\operatorname{sec} 65^\circ] \quad 0.37405,$$

$$[\operatorname{tg} \varphi] \quad 0.05861;$$

то јест $\varphi = +48^\circ 51'$. А из првог обрасца налазимо $\delta = -16^\circ 9'$.

95. Претставимо на сл. 56:

са $H_n Z_n H_s$ посматрачеву меридијанску раван;

са $H_n H_s$ пројекцију на ту раван посматрачева хоризонта;

са Z_n посматрачев зенит.

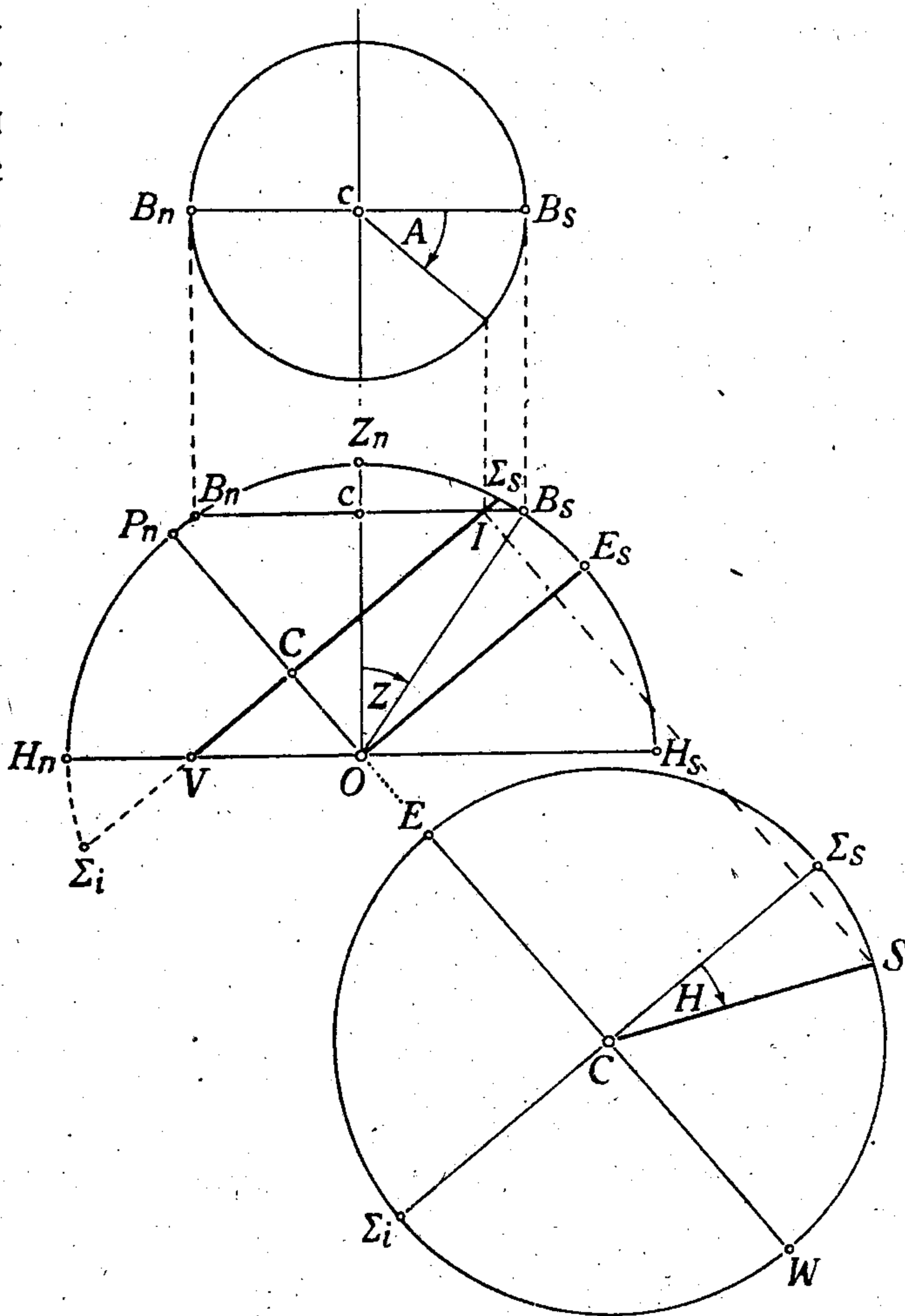
Пошто је дата у задатку посматрачева географска ширина, имаћемо од OZ_n , око O као темена, угао $\varphi = \sphericalangle Z_n O E_s$. Добивени полупречник, OE_s , претставља пројекцију видљивог дела небеског екватора на посматрачеву меридијанску раван. Нормални полупречник на овоме, дакле OP_n , претставља светску осу.

У задатку су дате, сем тога, и хоризонтске координате звезде, A и z . Помоћу њих можемо одредити пројекцију, на меридијанску раван, положаја некретнице у тренутку посматрања. Зато ћемо, прво, нанети од OZ_n , ка OH_s (јер је $A = 40^\circ$) угао $z = \sphericalangle Z_n O B_s$. Кроз овако добивену тачку, B_s , повући ћемо тетиву $B_s B_n \parallel H_s H_n$. Она претставља пројекцију, на меридијанску раван, алмукантара на на којем се некретница налазила у тренутку посматрања.

Сад треба одредити положај звезде на алмукантару. Зато ћемо га обрнути око његова пречника $B_s B_n$, за 90° , и положити га у раван меридијана. Добићемо горњу кружну линију, са средиштем c — пројекцијом посматрачева зенита на раван алмукантара. Нанесимо сад од cB_s , у ретроградном смеру, угао $A = \sphericalangle B_s c \Sigma$, па пројицирајмо добивену тачку Σ на пројекцију алмукантара $B_s B_n$. Тако добивамо тачку I . Ово је пројекција на меридијанску раван посматраног положаја некретнице, чије су хоризонтске координате (A, z) .

Тачка I припада, према томе, и паралелу некретнице. А како пројекција овога на меридијанску раван мора бити паралелна пројекцији небеског екватора, дакле полупречнику OE_s , повлачењем кроз I тетиве $\Sigma_s \Sigma_i \parallel OE_s$ добивамо пројекцију паралела на меридијанску раван. Њен део $V\Sigma_s$ претставља пројекцију половине видљивог, или дневног (а $V\Sigma_i$ ноћног) лука некретнице. Углом $E_s O \Sigma_s$ одређена је деклинација (δ) некретнице.

У задатку је дато звездано време (t) посматрања. Ако одредимо часовни угао (H) звезде у тренутку посматрања, моћи ћемо одредити и ректасцензију звезде ($\alpha = t - H$). Да бисмо одредили тај угао, обрнимо паралел око његова пречника $\Sigma_s \Sigma_i$ за 90° , и положимо га у посматрачеву меридијанску раван. Добићемо кружну линију, са средиштем у C — пројекцијом небеског пола на раван паралела. Положај некретнице



Сл. 56.

154
114

зрм
не шмау

на паралелу, у тренутку посматрања, добићемо пројцирајући тачку I на ову кружну линију. Добивамо две тачке: једна одговара положају звезде на источној страни, друга положају звезде на западној страни посматрачева меридијана. Како је азимут звезде у тренутку посматрања, према задатку, $A = 40^\circ$, што ће рећи да се звезда налази западно од меридијана, њен положај на паралелу одређен је тачком S . Према томе, угао Σ, CS претставља тражени часовни угао некретнице.

Примењујући овај, графички, начин решавања, полазећи од података: $z = 35^\circ$, $A = 40^\circ$, $\varphi = +50^\circ$ и $t = 8^h 40^m = 130^\circ$, долазимо до ових вредности тражених величина: $\delta = +20^\circ$, $H = 24^\circ.5 = 1^h 38^m$, тако да се за ректасцензију звезде добива $\alpha = 7^h 2^m$.

Нумеричко решење. Применићемо обрасце Гаусове групе који одређују δ и H кад су дати A , z и φ . Трансформисани за логаритамски рачун то су обрасци:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= m \sin(\varphi - M), & m \cos M &= \cos z, \\ \cos \delta \sin H &= \sin z \sin A, & \text{са} & \quad m \sin M = \sin z \cos A, \quad m > 0; \\ \cos \delta \cos H &= m \cos(\varphi - M), & \text{дакле} & \quad \text{tg } M = \text{tg } z \cos A; \end{aligned}$$

па, према томе, $\text{tg } H = \text{tg } z \sin A \cos M \sec(\varphi - M)$ и $\text{tg } \delta = \text{tg}(\varphi - M) \cos H$.

Са подацима задатка биће:

$[\text{tg } z]$ 9.84 523,	$[\cos M]$ 9.94 510,	$[\text{tg}(\varphi - M)]$ 9.60 184,
$[\cos A]$ 9.88 425,	$[\text{tg } z]$ 9.84 523,	$[\cos H]$ 9.96 361,
$[\text{tg } M]$ 9.72 948;	$[\sin A]$ 9.80 807,	$[\text{tg } \delta]$ 9.56 545,
$M = 28^\circ 12'.5$,	$[\sec(\varphi - M)]$ 0.03 219,	$\delta = +20^\circ 11'.2$.
$\varphi = 50^\circ$,	$[\text{tg } H]$ 9.63 059;	
$\varphi - M = 21^\circ 47'.5$;		

За H налазимо $H = 23^\circ 7'.8$, те за ректасцензију добивамо, из $\alpha = t - H$, $\alpha = 8^h 40^m - 1^h 32^m.5 = 7^h 7^m.5$.

96. Зенитска даљина некретнице може остати непромењена током звезданог дана само:

1) ако се посматрач налази на једном од Земљиних полова, дакле ако је $\varphi = \pm 90^\circ$. У том случају су зенитске даљине некретница једнаке њиховим поларним даљинама, а ове, код некретница, остају непромењене у току звезданог дана;

2) ако је деклинација некретнице $\delta = \pm 90^\circ$. Њена зенитска даљина постаје, у том случају, једнака посматрачевој колатитуди, те, према томе, остаје непромењена.

97. Према задатку, некретница проводи над посматрачевим хоризонтом $14^h 19^m 48^s$. Другим речима, њен дневни лук, изражен у време-

ној мери, износи $14^h 19^m 48^s$; полудневни лук њен износи онда $7^h 9^m 54^s$. Полудневним луком, међутим, одређен је часовни угао ($\pm H$) излаза ($-H$), односно залаза ($+H$) некретнице.

Како је у задатку дат тренутак (t) излаза, помоћу познате везе $\alpha = t - H$ налазимо за ректасцензију некретнице

$$\alpha = 12^h 33^m 24^s - (-7^h 9^m 54^s) = 19^h 43^m 18^s.$$

С друге стране, ако унесемо у образац за полудневни лук некретнице, деклинације δ , у месту географске ширине φ ,

$$\cos H = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi,$$

услов задатка, према коме некретница пролази кроз посматрачев зенит, што значи ставимо да је $\delta = \varphi$, добивамо

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = -\cos H.$$

Пошто је H дато, одавде налазимо φ , и то две вредности: $\pm \varphi$. Тиме је, у исти мах, одређена и деклинација звезде, јер је $\delta = \varphi$.

Налазимо, наиме, за $H = -7^h 9^m 54^s = -107^\circ 28' 30''$:

$$\begin{array}{lll} [-\cos H] & 9.47754, & \varphi = \pm 28^\circ 43' 20'', \\ [\operatorname{tg} \varphi] & 9.73877; & \underline{\delta = \pm 28 \ 43 \ 20}, \quad \underline{\alpha = 19^h 43^m 18^s}. \end{array}$$

98. У тренутку излаза (или залаза) некретнице њен часовни угао (H) дат је изразом

$$\cos H = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi,$$

где δ означава деклинацију некретнице, а φ посматрачеву географску ширину. Из овог израза добивамо

$$1 - \cos H = 2 \sin^2 \frac{H}{2} = 1 + \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi,$$

$$1 + \cos H = 2 \cos^2 \frac{H}{2} = 1 - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi.$$

Одавде, ако поделимо, имамо

$$\operatorname{tg}^2 \frac{H}{2} = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta}.$$

Приметимо ли да је

$$\operatorname{tg}(\varphi \pm \delta) = \frac{\operatorname{tg} \varphi \pm \operatorname{tg} \delta}{1 \mp \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta}, \quad \text{то јест да је } 1 \mp \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \varphi \pm \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg}(\varphi \pm \delta)},$$

имаћемо

$$\operatorname{tg}^2 \frac{H}{2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \delta} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi + \delta)}{\operatorname{tg}(\varphi - \delta)} = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi + \delta)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi + \delta)}{\operatorname{tg}(\varphi - \delta)} =$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{H}{2} = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\varphi + \delta)} = \cos(\varphi - \delta) \sec(\varphi + \delta),$$

што је и требало показати.

99. При пролазу некретнице позитивне деклинације (δ) кроз први вертикал (западни) места северне географске ширине (φ) положајни сферни троугао, $P_n \Sigma Z_n$, постаје правоугли, са правим углом у темену Z_n , јер је $A = 90^\circ$. Према томе, петоелементни образац Гаусове групе постаје, у овом случају,

$$\sin z \cos A = 0 = \sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos H_1,$$

то јест

$$\cos H_1 = \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \delta.$$

За часовни угао некретнице у тренутку њена залаза имамо

$$\cos H_2 = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta.$$

Измножимо ли ове две једначине добивамо, пошто уредимо,

$$\cos H_1 \cos H_2 + \operatorname{tg}^2 \delta = 0.$$

100. Кад је некретница у меридијану онда је

$$\varphi = z_1 + \delta.$$

Кад некретница доспе (ако доспева) у први вертикал имамо, пошто је $A = 90^\circ$,

$$\sin \delta = \cos z_2 \sin \varphi.$$

Унесемо ли овде за φ његову горњу вредност, имаћемо

$$\sin \delta = \cos z_2 \sin(z_1 + \delta),$$

то јест, ако развијемо други фактор на десној страни, имаћемо

$$\sin \delta = \cos z_2 (\sin z_1 \cos \delta + \cos z_1 \sin \delta).$$

Ако поделимо обе стране производом $\sin z_1 \cos z_2 \sin \delta$ добићемо

$$\operatorname{ctg} \delta = \operatorname{cosec} z_1 \sec z_2 - \operatorname{ctg} z_1.$$

А уврстимо ли у прву једначину за δ вредност из полазне везе, добијамо

$$\sin(\varphi - z_1) = \cos z_2 \sin \varphi.$$

Развијмо леву страну, поделимо обе стране производом $-\sin \varphi \sin z_1$, па уредимо једначину и добићемо

$$\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} z_1 - \operatorname{cosec} z_1 \cos z_2.$$

101. Повуцимо у положајном сферном троуглу $P_n Z_n \Sigma$ (в. сл. 57) лук великог круга ΣQ , нормално на страну $P_n Z_n$. Добићемо два право-

угла сферна троугла. Означимо у њима: са ξ страну $P_n Q$; са η страну $Q\Sigma$; са ϑ страну QZ_n . Онда из троугла $P_n Q\Sigma$ имамо

$$\operatorname{tg} \xi = \operatorname{ctg} \delta \cos H \quad \text{и} \quad \sin \eta = \cos \delta \sin H.$$

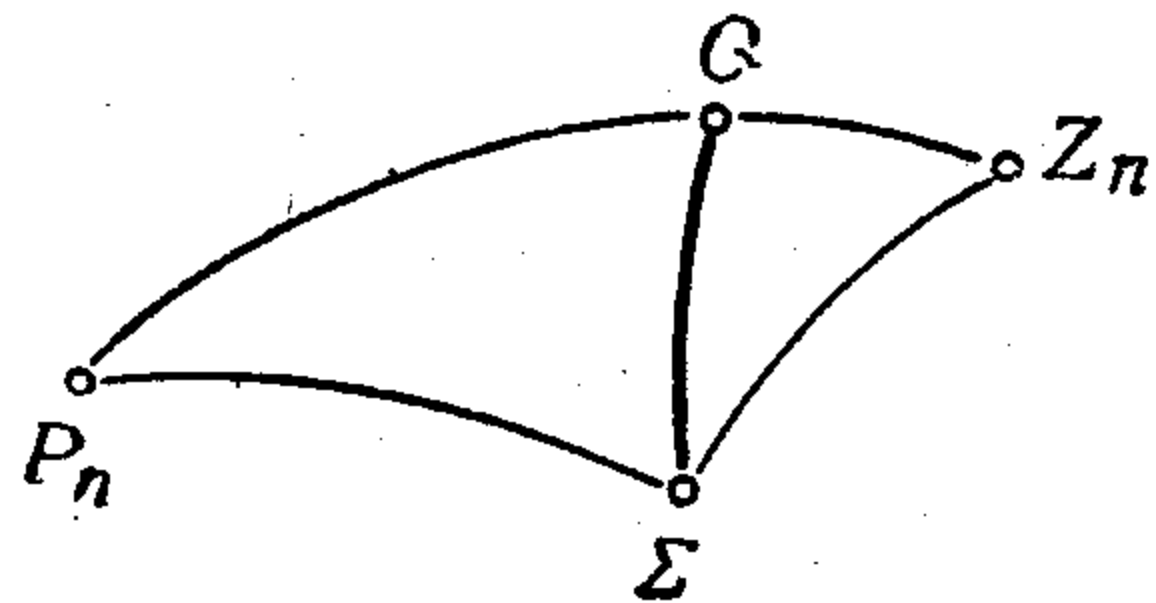
А из другог троугла, $\Sigma Z_n Q$, имамо

$$\cos z = \cos \vartheta \cos \eta, \quad \text{то јест} \quad \cos \vartheta = \cos z \sec \eta,$$

или
$$\vartheta = \arccos(\cos z \sec \eta).$$

Приметимо ли, сем тога, да је $\psi = \xi + \vartheta$, доби-
вамо

$$\psi = \xi + \arccos(\cos z \sec \eta).$$



Сл. 57.

Из овог решења види се, уједно, и геометриско значење помоћних величина ξ и η .

102. Према задатку, уочене некретнице истовремено излазе; другим речима, у истом тренутку почињу свој привидни дневни лук за дотичног посматрача. Међутим, док прва стигне до своје кулминације, што значи на половину свог дневног лука, друга је доспела већ до залаза, што ће рећи прешла је цео свој дневни лук. Одатле следује да је дневни лук друге једнак половини дневног лука прве.

Ако означимо полудневне лукове ових звезда са H_1 и H_2 , имамо

$$\cos H_1 = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta, \quad \text{и} \quad \cos H_2 = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_2.$$

Ставимо ли, дакле, $2H_2 = H_1$, то јест $H_2 = \frac{1}{2}H_1$, и приметимо ли да је

$$\cos H_2 = \cos \frac{1}{2}H_1 = \sqrt{\frac{1 + \cos H_1}{2}},$$

имаћемо, пошто уврстимо горње вредности,

$$-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_2 = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_1}{2}}.$$

Ослободимо ли се још корена и уредимо ли једначину, добићемо

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_1 = 1 - 2\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_2.$$

103. Означимо дате ректасцензије и деклинације са (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2) и географску ширину места са φ . Ако још са t означимо тренутак (звезданог времена) залаза ових двеју некретница, имаћемо

$$\cos H_1 = \cos(t - \alpha_1) = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_1,$$

$$\cos H_2 = \cos(t - \alpha_2) = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_2;$$

а одавде

$$\sin H_1 = \sin(t - \alpha_1) = (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_1)^{\frac{1}{2}},$$

односно

$$\sin H_2 = \sin(t - \alpha_2) = (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Из ових једначина добивамо

$$\cos(H_1 - H_2) = \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_2 + \\ + (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_1)^{\frac{1}{2}} (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_2)^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_2 = (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_1)^{\frac{1}{2}} (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Дигнемо ли обе стране на квадрат имаћемо, пошто уредимо,

$$\operatorname{tg}^2 \varphi [\operatorname{tg}^2 \delta_1 + \operatorname{tg}^2 \delta_2 - 2 \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)] = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1),$$

а одавде добивамо за географску ширину места, као функцију координата двеју некретница,

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sin(\alpha_2 - \alpha_1) [\operatorname{tg}^2 \delta_1 + \operatorname{tg}^2 \delta_2 - 2 \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)]^{\frac{1}{2}}.$$

104. За часовни угао и азимут имамо, из положајног сферног троугла, изразе (са уобичајеним ознакама)

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H,$$

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A.$$

Ако у њих унесемо услов из задатка, $h = \varphi$, добићемо

$$\sin \varphi = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H,$$

$$\sin \delta = \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \cos A = 1 - \cos^2 \varphi (1 + \cos A).$$

Одавде добивамо, даље,

$$\cos H = \frac{\sin \varphi (1 - \sin \delta)}{\cos \varphi \cos \delta} = \operatorname{tg} \varphi \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \right)}{\sin 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \right)} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \right);$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \right) \sec^2 \varphi, \text{ то јест } \cos \frac{A}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \right) \sec \varphi.$$

А одатле имамо

$$H = \arccos \left[\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \right) \right] \text{ и } A = 2 \arccos \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \right) \sec \varphi \right].$$

105. Ако применимо петоелементни образац на положајни сферни троугао сваке од некретница, у тренутку (t) њена пролаза кроз посматрачев први вертикал, то јест кад им је $A = \pm 90^\circ$, налазимо (са уобичајеним ознакама)

$$\cos H_1 = \cos(t - \alpha_1) = \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \delta_1,$$

$$\cos H_2 = \cos(t - \alpha_2) = \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \delta_2,$$

а одатле

$$\sin H_1 = \sin(t - \alpha_1) = (1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_1)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sin H_2 = \sin(t - \alpha_2) = (1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Помоћу ових образаца добивамо

$$\cos(H_1 - H_2) = \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \operatorname{ctg}^2 \varphi \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_2 + \\ + (1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_1)^{\frac{1}{2}} (1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_2)^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - \operatorname{ctg}^2 \varphi \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_2 = (1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_1)^{\frac{1}{2}} (1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Дигнемо ли на квадрат и уредимо, добићемо

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi [\operatorname{tg}^2 \delta_1 + \operatorname{tg}^2 \delta_2 - 2 \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)] = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1),$$

а одавде,

$$\operatorname{ctg} \varphi = \pm \sin(\alpha_2 - \alpha_1) [\operatorname{tg}^2 \delta_1 + \operatorname{tg}^2 \delta_2 - 2 \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)]^{\frac{1}{2}}$$

106. Нека на сл. 58 Q претставља пол, са координатама $(\mathfrak{R}, \mathfrak{D})$, великог круга што пролази кроз тачке (рецимо некретнице), Σ_1 и Σ_2 , чије су екваторске координате (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2) .

Како је Q пол великог круга $\Sigma_1 \Sigma_2$, то су $Q \Sigma_1 = Q \Sigma_2 = \frac{\pi}{2}$. Значи, сферни троуглови $P_n Q \Sigma_1$ и $P_n Q \Sigma_2$ су квадрантни. Према томе имамо, из првог:

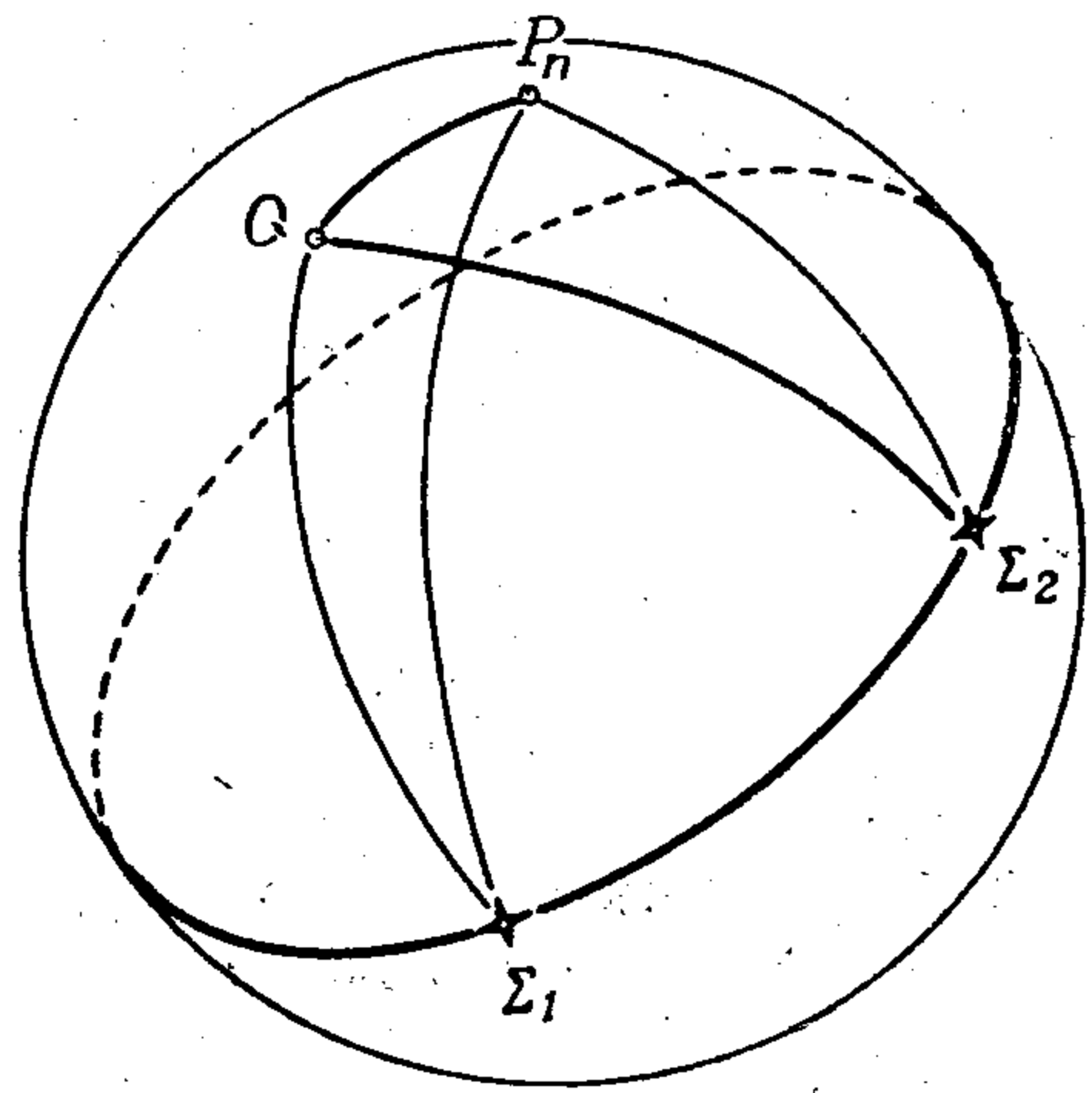
$$\sin \mathfrak{D} \sin \delta_1 + \cos \mathfrak{D} \cos \delta_1 \cos(\alpha_1 - \mathfrak{R}) = 0,$$

из другог:

$$\sin \mathfrak{D} \sin \delta_2 + \cos \mathfrak{D} \cos \delta_2 \cos(\alpha_2 - \mathfrak{R}) = 0.$$

Одавде добивамо за тражене везе између $(\mathfrak{R}, \mathfrak{D})$, с једне, и (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2) с друге стране,

$$\operatorname{tg} \mathfrak{D} = - \operatorname{ctg} \delta_1 \cos(\alpha_1 - \mathfrak{R}) = - \operatorname{ctg} \delta_2 \cos(\alpha_2 - \mathfrak{R}).$$



Сл. 58. 75

107. Нека претстављају на сл. 59: Z_n — посматрачев зенит; P_n — северни небески пол; Σ_1 и Σ_2 — некретнице, са координатама (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2) , на вертикалу $Z_n M$, азимута A . Означимо са l лук великог круга $P_n Q$, повучена нормално на вертикал $Z_n M$, а са q паралактички угао $P_n \Sigma_1 \Sigma_2$. Онда имамо, из правоуглих сферних троуглова $P_n Q Z_n$ и $P_n \Sigma_1 Q$,

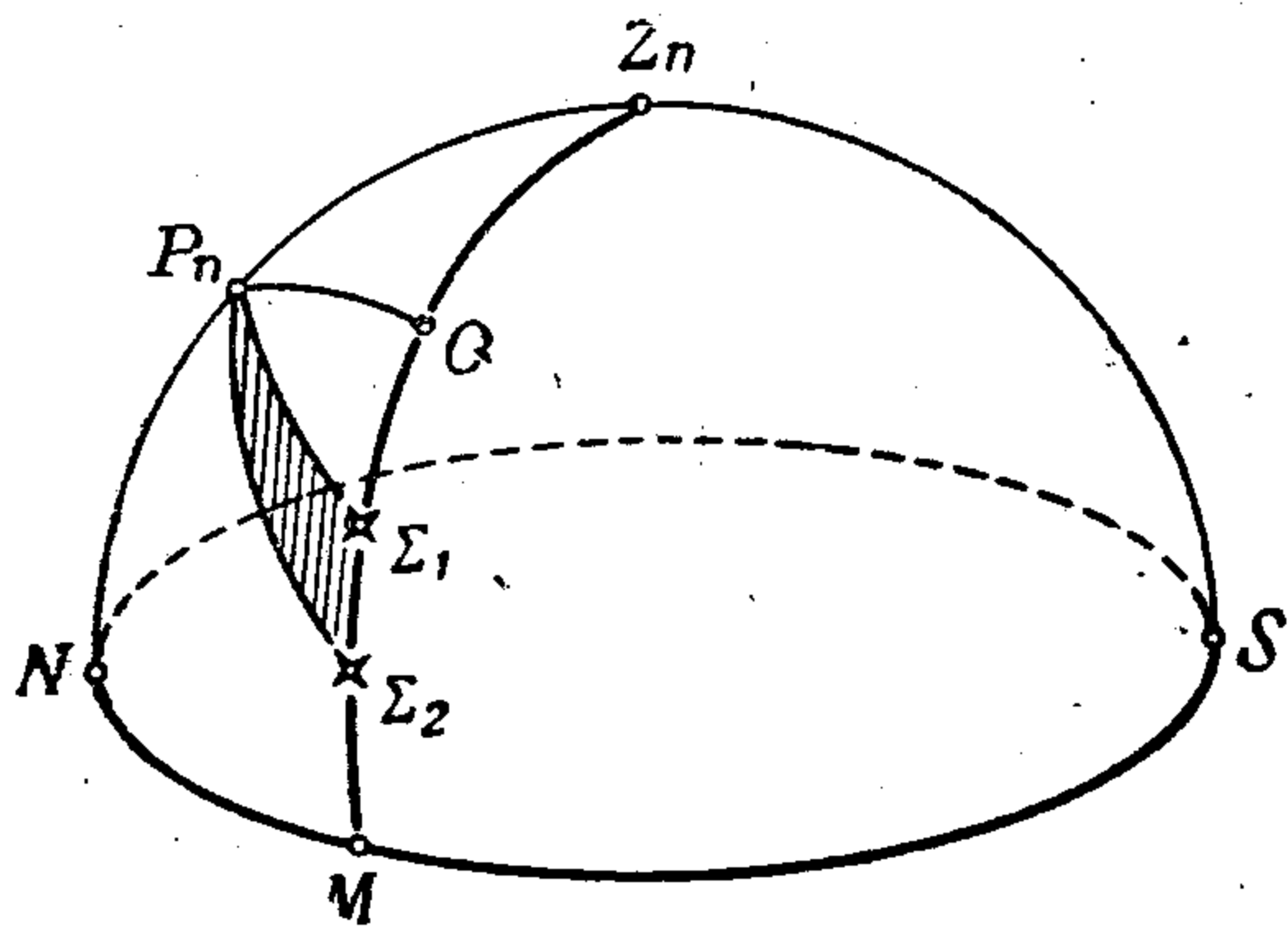
$$\sin l = \sin A \cos \varphi = \cos \delta_1 \sin q.$$

С друге стране, из сферног троугла $P_n \Sigma_2 \Sigma_1$, имамо

$$\sin \sigma \sin q = \cos \delta_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2),$$

то јест

$$\sin q = \cos \delta_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cosec} \sigma.$$



Сл. 59. 76

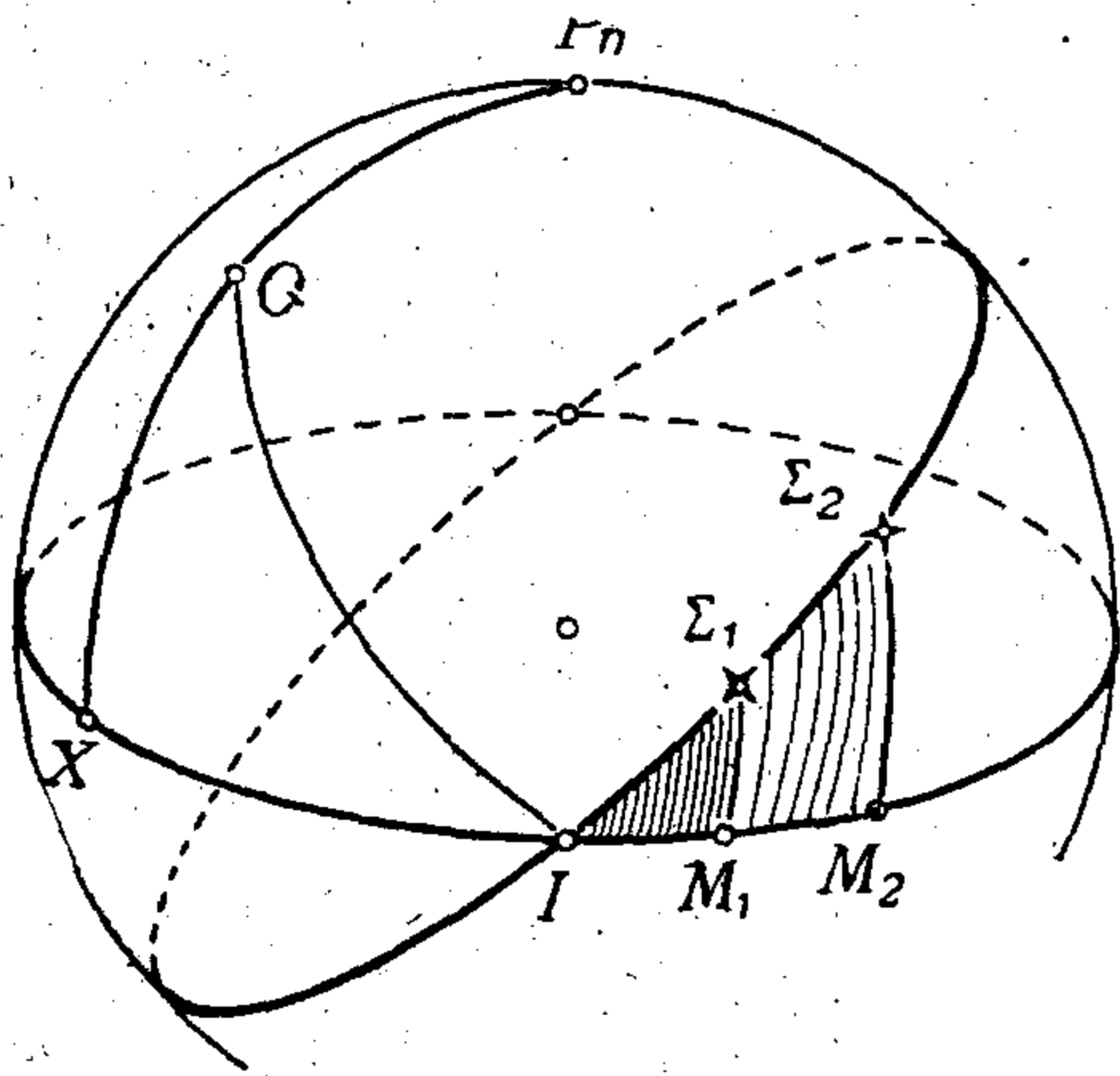
Уврстимо ли ову вредност за $\sin q$ на десној страни прве једначине, добивамо

$$\sin A \cos \varphi = \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cosec} \sigma.$$

Одавде следује да је

$$\cos \varphi > \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cosec} \sigma.$$

108. Нека претстављају Σ_1 и Σ_2 (в. сл. 60) на небеској сфери две тачке са координатама (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2) . Велики круг одређен овим тачкама сече небески екватор у две тачке. Означимо са I ону од тих двеју тачака кроз коју пролази велики круг $\Sigma_1 \Sigma_2$ прелазећи са негативних на позитивне деклинације. Нека Q претставља пол тог великог круга, и то онај ближи северном небеском полу.



Сл. 60.

Означимо са Ω ректасцензију тачке пресека I , а са i нагиб, то јест $\angle M_1 I \Sigma_1$ између великог круга и екватора. Онда имамо из правоуглих сферних троуглова $\Sigma_1 I M_1$ и $\Sigma_2 I M_2$

$$\sin (\alpha_1 - \Omega) = \operatorname{ctg} i \operatorname{tg} \delta_1,$$

$$\sin (\alpha_2 - \Omega) = \operatorname{ctg} i \operatorname{tg} \delta_2.$$

Ове се једначине добивају, уосталом, и непосредно из решења Зад. 106, ако се у њему изврши замена

$$\mathfrak{R} = \Omega - \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \mathfrak{D} = \frac{\pi}{2} - i.$$

Да бисмо из постављених једначина одредили непознате Ω и i , поделимо збир тих једначина њиховом разликом. Добићемо

$$\frac{\sin (\alpha_1 - \Omega) + \sin (\alpha_2 - \Omega)}{\sin (\alpha_1 - \Omega) - \sin (\alpha_2 - \Omega)} = \frac{\operatorname{tg} \delta_1 + \operatorname{tg} \delta_2}{\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2}.$$

Одавде онда имамо

$$\frac{2 \sin \left[\frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) - \Omega \right] \cos \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2)}{2 \cos \left[\frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) - \Omega \right] \sin \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\sin (\delta_1 + \delta_2)}{\sin (\delta_1 - \delta_2)},$$

те, према томе,

$$\operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) - \Omega \right] = \frac{\sin (\delta_1 + \delta_2)}{\sin (\delta_1 - \delta_2)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2).$$

Из ове једначине добивамо две вредности за Ω , то јест ректасцензију тачке пресека, а, помоћу њих, из било које од полазних једначина, израчунавамо и вредности i , то јест нагиб равни великог круга кроз Σ_1 и Σ_2 према равни екватора.

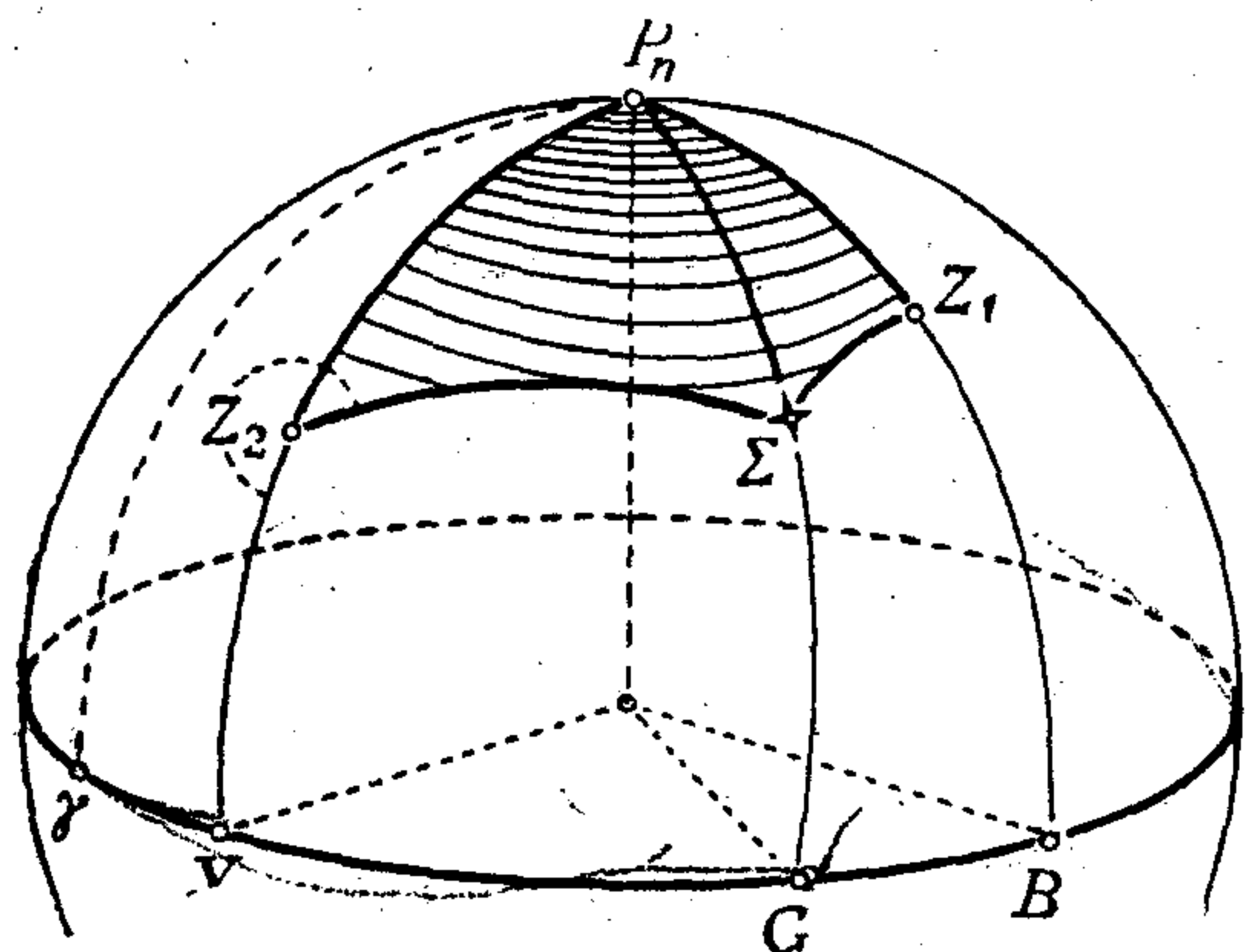
Примењујући ово решење са подацима задатка имаћемо:

$\delta_1 = -15^\circ 16' 17''$,	$[\sin(\delta_1 + \delta_2)]$	9.66 328,	
$\delta_2 = +42 \ 41 \ 40$,	$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \right]$	0.13 326 <i>n</i> ,	
$\delta_1 - \delta_2 = -57 \ 57 \ 57$,	$[\operatorname{cosec}(\delta_1 - \delta_2)]$	<u>0.07 174 <i>n</i></u> ,	
$\delta_1 + \delta_2 = 27 \ 25 \ 23$;	$\left[\operatorname{tg} \left\{ \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - \Omega \right\} \right]$	9.86 828,	
$\alpha_1 = 110^\circ 0' 20''$,	$\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - \Omega_1 =$	$36^\circ 26' 29''$,	
$\alpha_2 = 217 \ 18 \ 58$,	$\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) =$	$163^\circ 39 \ 39$,	
$\alpha_1 - \alpha_2 = -107 \ 18 \ 38$,	$\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - \Omega_2 =$	$216 \ 26 \ 29$,	
$\alpha_1 + \alpha_2 = 327 \ 19 \ 18$,	$\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) = -$	$53 \ 39 \ 19$;	
$\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) = -$			
	<u>$\Omega_1 = 127^\circ 13' 10''$</u> ,	$\Omega_2 = 307^\circ 13' 10''$;	
$\alpha_1 - \Omega_1 = -17^\circ 12' 49''$,	$\alpha_2 - \Omega_1 = 90^\circ 5' 48''$,		
$[\sin(\alpha_1 - \Omega_1)]$	9.47 120 <i>n</i> ,	$[\sin(\alpha_2 - \Omega_1)]$	0.00 000,
$[\operatorname{ctg} \delta_1]$	<u>0.56 379 <i>n</i></u> ,	$[\operatorname{ctg} \delta_2]$	<u>0.03 499</u> ,
$[\operatorname{ctg} i]$	0.03 499,	$[\operatorname{ctg} i]$	0.03 499; <u>$i = 42^\circ 41' 39''$</u> .

Из података задатка није тешко видети да прва вредност (Ω_1) ректасцензије тачке I одговара оном пресеку кроз који велики круг $\Sigma_1 \Sigma_2$ прелази са негативних на позитивне деклинације, а друга оној (дијаметрално супротној) кроз коју прелази са позитивних на негативне деклинације.

Осим тога, из чињенице да је добивени нагиб једнак (наравно у границама тачности полазних података и нумеричког рада) деклинацији друге тачке (Σ_2), закључујемо да се ова налази на 90° од тачака пресека великог круга $\Sigma_1 \Sigma_2$ и екватора, другим речима, да се налази на великом кругу што пролази кроз половине Q и P_n .

109. Нека на сл. 61 претстављају: P_n – северни небески пол; P_nG – гринички меридијан и, на њему, некретницу, Σ , дакле, у тренутку њене горње кулминације; Z_1 и Z_2 – зените посматрача у Београду и Њујорку; $P_n\gamma$ – небески меридијан кроз γ – тачку, од којег се рачунају ректасцензије.



Сл. 61.

У сферним троугловима $P_n\Sigma Z_1$ и $P_n\Sigma Z_2$ познати су нам елементи:

$$P_nZ_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1; \quad P_nZ_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_2;$$

$$P_n\Sigma = \frac{\pi}{2} - \delta; \quad \sphericalangle \Sigma P_nZ_1 = L_1 = H_1;$$

$$\sphericalangle \Sigma P_nZ_2 = L_2 = H_2.$$

Треба одредити, у првом троуглу: $Z_1\Sigma = \frac{\pi}{2} - h_1$ и $\sphericalangle \Sigma Z_1 P_n = \pi - A_1$;

у другом троуглу: $Z_2\Sigma = \frac{\pi}{2} - h_2$ и $\sphericalangle \Sigma Z_2 P_n = A_2 - \pi$.

Одредићемо их помоћу образаца Гаусове групе:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H,$$

$$\cos h \sin A = \cos \delta \sin H,$$

$$\cos h \cos A = -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos H,$$

које ћемо трансформисати за логаритамски рачун, на већ познати начин, стављајући

$$m \sin M = \sin \delta,$$

$$m \cos M = \cos \delta \cos H, \quad \text{са } m > 0.$$

На тај начин горњи обрасци постају

$$\sin h = m \cos(\varphi - M),$$

$$\cos h \sin A = \cos \delta \sin H,$$

$$\cos h \cos A = m \sin(\varphi - M).$$

Из ових добивамо за помоћни угао M и непознате координате A и h :

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{tg} \delta \sec H,$$

$$\operatorname{tg} A = \cos M \operatorname{cosec}(\varphi - M) \operatorname{tg} H,$$

$$\operatorname{tg} h = \cos A \operatorname{ctg}(\varphi - M).$$

Са подацима задатка имаћемо, према томе,

$$\begin{array}{llll} \delta = +45^{\circ} 57'.3, & [\sec H_1] & \left. \begin{array}{l} 0.02845, \\ 0.01448, \end{array} \right\} & M_1 = 47^{\circ} 49'.7, \\ \varphi_1 = +44 48.2, & [\operatorname{tg} \delta] & & M_2 = 75 2.2, \\ \varphi_2 = +40 48.6, & [\sec H_2] & 0.55856, & \\ H_1 = 20 30.8, & [\operatorname{tg} M_1] & 0.04293, & \varphi_1 - M_1 = -3 1.5, \\ H_2 = -73 57.5; & [\operatorname{tg} M_2] & 0.57304; & \varphi_2 - M_2 = -34 13.6; \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} [\cos M_1] & 9.82695, & [\cos M_2] & 9.41196, \\ [\operatorname{cosec}(\varphi_1 - M_1)] & 1.27760 n, & [\operatorname{cosec}(\varphi_2 - M_2)] & 0.24990 n, \\ [\operatorname{tg} H_1] & 9.57304, & [\operatorname{tg} H_2] & 0.54132 n, \\ [\operatorname{tg} A_1] & 0.67759 n, & [\operatorname{tg} A_2] & 0.20318, \\ & \underline{A_1 = 101^{\circ} 51'.9;} & & \underline{A_2 = 237^{\circ} 56'.3;} \\ [\cos A_1] & 9.31304 n, & [\cos A_2] & 9.72496 n, \\ [\operatorname{ctg}(\varphi_1 - M_1)] & 1.27699 n, & [\operatorname{ctg}(\varphi_2 - M_2)] & 0.16731 n, \\ [\operatorname{tg} h_1] & 0.59003, & [\operatorname{tg} h_2] & 9.89227, \\ & \underline{h_1 = 75^{\circ} 35'.2;} & & \underline{h_2 = 37^{\circ} 57'.9.} \end{array}$$

Резултате ћемо проверити помоћу обрасца

$$\cos h \cos A \cos M = \cos \delta \cos H \sin(\varphi - M).$$

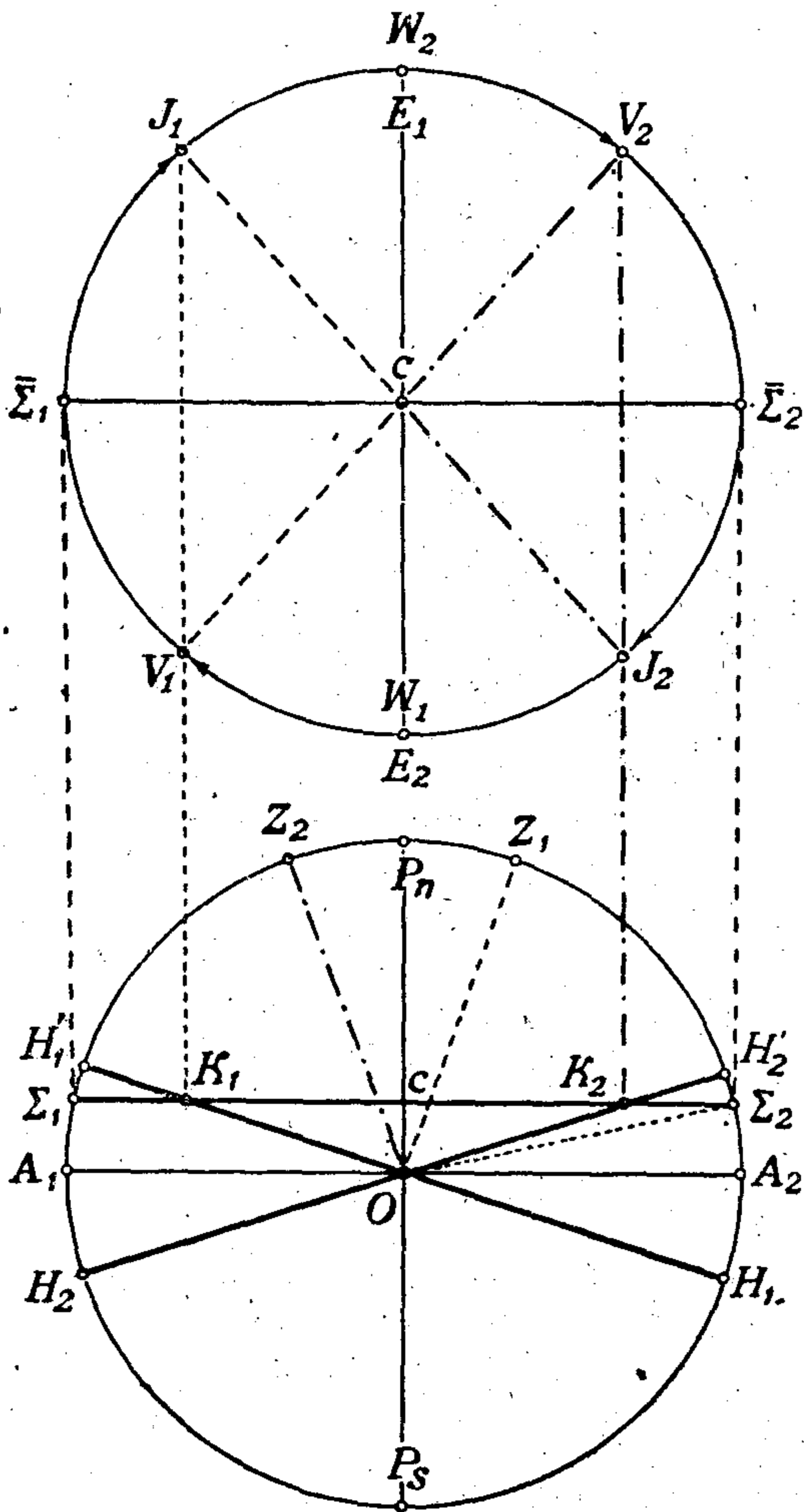
$$\begin{array}{llll} [\cos h_1] & 9.39605, & [\cos \delta] & 9.84212, \\ [\cos A_1] & 9.31304 n, & [\cos H_1] & 9.97154, \\ [\cos M_1] & 9.82695, & [\sin(\varphi_1 - M_1)] & 8.72240 n, \\ S_1 = 8.53604 n; & & S_1 = 8.53606 n; & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} [\cos h_2] & 9.89674, & [\cos \delta] & 9.84212, \\ [\cos A_2] & 9.72496 n, & [\cos H_2] & 9.44144, \\ [\cos M_2] & 9.41196, & [\sin(\varphi_2 - M_2)] & 9.75010 n, \\ S_2 = 9.03366 n; & & S_2 = 9.03366 n. & \end{array}$$

110. Графичко решење. Претставимо на сл. 62: кружном линијом $P_n A_2 P_s A_1 P_n$ — меридијан посматрача M_1 и M_2 ; њеним пречницима $P_n P_s$ и $A_2 A_1$ — светску осу, односно пројекцију небеског екватора на меридијанску раван; тетивом $\Sigma_1 \Sigma_2$ — пројекцију, на меридијанску раван, паралела звезде α Leonis, чија је деклинација $\delta = +12^{\circ} 11' 20'' = \sphericalangle A_2 O \Sigma_2$.

Обрнимо сад раван паралела за 90° , око његова пречника $\Sigma_1 \Sigma_2$, тако да падне у посматрачеву меридијанску раван. Да слика не би ис-

пала утрпана, приказан је одвојено паралел у меридијанској равни, горњим кругом $\bar{\Sigma}_1 E_1 (W_2) \bar{\Sigma}_2 W_1 (E_2)$, са средиштем c .



Сл. 62.

вуче тетива $\Sigma_1 \Sigma_2$. Она претставља пројекцију паралела звезде на меридијанску равн посматрача. Пренесимо тетиву $\Sigma_1 \Sigma_2$ у $\bar{\Sigma}_1 \bar{\Sigma}_2$ и опишимо над њом, као пречником, кружну линију $\bar{\Sigma}_1 E_1 (W_2) \bar{\Sigma}_2 W_1 (E_2) \bar{\Sigma}_1$, са средиштем c . Овај круг претставља небески паралел који, описује уочена звезда. Нанесимо сад, са обе стране пречника $E_1 W_1 (W_2 E_2)$, углове од по $42^\circ 15'$. Добићемо на паралелу тачке J_1, V_2, J_2 и V_1 . Пројицирајмо их на пројекцију паралела $\Sigma_1 \Sigma_2$ на меридијанску равн. Тако добивамо тачке K_1 и K_2 : оне претстављају пројекције положаја звезде у тренуцима њена излаза, односно залаза, за једног, односно другог посматрача. Према томе оне претстављају и пројекције тачака хоризоната двају посматрача, наиме тачака излаза и залаза звезде. Повлачењем кроз те тачке пречника $H_1 H'_1$ и $H_2 H'_2$ добивамо пројекције хоризоната једног и другог посматрача на њихову меридијанску равн. Тиме је одређен $\angle H'_1 O P_n = \angle H'_2 O P_n = \varphi$, то јест одређена је географска ширина посматрача. Са слике и у овако малој размери читамо за φ вредност $72^\circ 5'$. OZ_1 и OZ_2 претстављају вертикале посматрача.

Нумеричко решење. Напред је показано зашто је $\angle W_1 c V_1 = \angle J_2 c W_1 = 2^h 45^m$; значи да је ноћни лук звезде, то јест $\angle V_1 c J_1$, једнак $12^h -$

Према задатку, посматрачи се налазе симетрично и према равни нормалној на меридијанској, дакле према равни чију пројекцију претставља пречник паралела $E_1 (W_2) c W_1 (E_2)$. Значи, ово ће бити равн симетрије и за паралел и кретање звезде. Сем тога, времена излаза, а тако исто и залаза, код посматрача разликују се, у овом случају, за по 12^h звезданог времена. Значи, ако, рецимо, J_1 и V_1 претстављају на паралелу положаје звезде у тренуцима излаза, односно залаза, за првог посматрача, онда ће J_2 и V_2 претстављати положаје на паралелу звезде у тренуцима излаза, односно залаза, за другог посматрача.

Према задатку, од излаза звезде код првог до залаза њена код другог посматрача протекне $5^h 30^m$ звезданог времена. То значи да угао $J_1 c V_2$, који је једнак углу $J_2 c V_1$, износи, у временској мери, $5^h 30^m$, то јест $82^\circ 30'$. Или, $\angle J_1 c E_1 = \angle W_2 c V_1 = \angle J_2 c W_1 = \angle E_2 c V_1 = 41^\circ 15'$.

Према томе, задатак се графички овако решава. Опише се око O кружна линија $P_n A_2 P_s A_1 P_n$. Од $O A_2$ (или $O A_1$) нанесе се, са стране северног небеског пола (пошто је позитивна) деклинација звезде $\delta = \angle A_2 O \Sigma_2 = +12^\circ 11' 20''$ и по-

$-2 \times 2^h 45^m = 6^h 30^m$. Према томе дневни лук звезде износи $24^h - 6^h 30^m = 17^h 30^m$. Онда полудневни — означимо га са H — износи $8^h 45^m$. За полудневни лук некретнице имамо, међутим,

$$\cos H = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta, \quad \text{или, одавде,} \quad \operatorname{tg} \varphi = -\cos H \operatorname{ctg} \delta.$$

Тако да са величинама задатка налазимо

$$[\operatorname{ctg} \delta] \quad 0.66 \, 554 \, n,$$

$$[-\cos H] \quad \underline{9.81 \, 911 \, n},$$

$$[\operatorname{tg} \varphi] \quad 0.48 \, 465,$$

или за географску ширину, $\varphi = +71^\circ 51'.7$.

111. Претставимо на сл. 63: тачком P_n — северни пол; луком великог круга EA_sW — део небеског екватора; са Z_n — посматрачев зенит; са H_sH_n — посматрачев хоризонт; са Σ_1 и Σ_2 — положаје уочених некретница, при њихову пролазу кроз посматрачев први вертикал (западни).

Означимо: са z_1 и z_2 зенитске даљине звезда Σ_1 и Σ_2 , а са A_1 и A_2 њихове азимуте; са δ_1 и δ_2 деклинације звезда, а са H_1 и H_2 часовне углове сваке од њих, у тренутку пролаза кроз први вертикал.

Ако приметимо да је, према задатку, $A_1 = A_2 = 90^\circ$, имаћемо

$$\cos z_1 = \sin \delta_1 \operatorname{cosec} \varphi,$$

$$\cos H_1 = \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{ctg} \varphi;$$

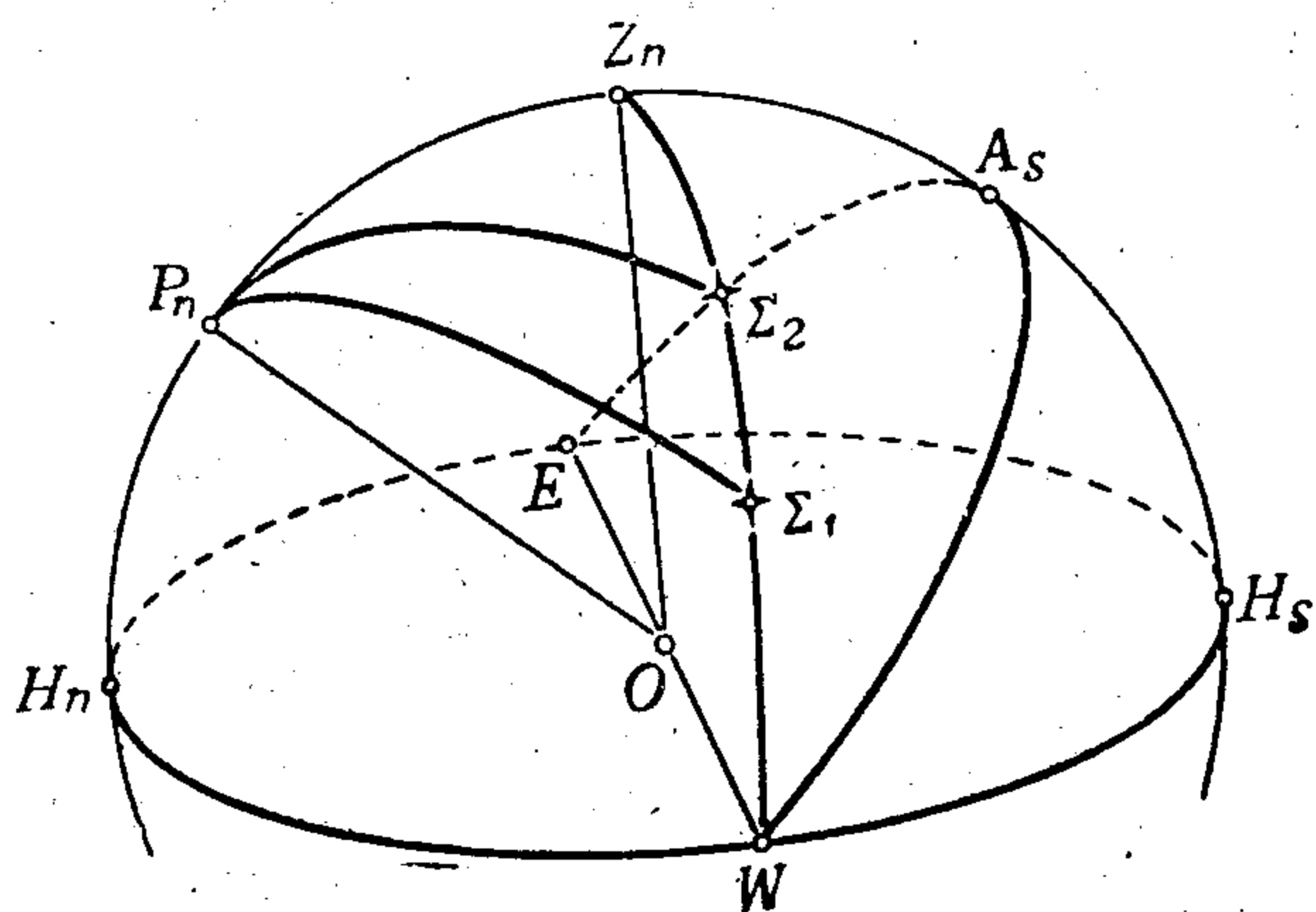
$$\cos z_2 = \sin \delta_2 \operatorname{cosec} \varphi,$$

$$\cos H_2 = \operatorname{tg} \delta_2 \operatorname{ctg} \varphi.$$

Из ових образаца можемо израчунати зенитске даљине и часовне углове звезда. Но претходно ћемо те обрасце трансформисати, како бисмо вредности непознатих углова добили изражене помоћу тангенса. Ако те трансформације извршимо, имаћемо

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos z}{1 + \cos z} &= \frac{2 \sin^2 \frac{z}{2}}{2 \cos^2 \frac{z}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = \frac{\sin \varphi - \sin \delta}{\sin \varphi + \sin \delta} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\varphi - \delta) \cos \frac{1}{2} (\varphi + \delta)}{2 \cos \frac{1}{2} (\varphi - \delta) \sin \frac{1}{2} (\varphi + \delta)} = \\ &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi - \delta) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\varphi + \delta). \end{aligned}$$

$$\frac{1 - \cos H}{1 + \cos H} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} H}{2 \cos^2 \frac{1}{2} H} = \operatorname{tg}^2 \frac{H}{2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \delta} = \sin (\varphi - \delta) \operatorname{cosec} (\varphi + \delta).$$



Сл. 63.

Према овим обрасцима имаћемо:

$$\begin{array}{l} \delta_1 = +10^\circ 20' 30'', \\ \varphi = +44 \ 48 \ 13, \\ \delta_2 = +29 \ 28 \ 27; \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi - \delta_1 = 34^\circ 27' 43'', \\ \varphi + \delta_1 = 55 \ 8 \ 43, \\ \varphi - \delta_2 = 15 \ 19 \ 46, \\ \varphi + \delta_2 = 74 \ 16 \ 40; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\varphi - \delta_1) = 17^\circ 13' 52'', \\ \frac{1}{2}(\varphi + \delta_1) = 27 \ 34 \ 22, \\ \frac{1}{2}(\varphi - \delta_2) = 7 \ 39 \ 53, \\ \frac{1}{2}(\varphi + \delta_2) = 37 \ 8 \ 20; \end{array}$$

	* Σ_1 :	* Σ_2 :		* Σ_1 :	* Σ_2 :
$[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \delta)]$	9.49 157,	9.12 898,	$[\sin(\varphi - \delta)]$	9.75 271,	9.42 221,
$[\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\varphi + \delta)]$	0.28 218,	0.12 069,	$[\operatorname{cosec}(\varphi + \delta)]$	0.08 587,	0.01 656,
$2[\operatorname{tg} \frac{1}{2}z]$	9.77 375,	9.24 967,	$2[\operatorname{tg} \frac{1}{2}H]$	9.83 858,	9.43 877,
$[\operatorname{tg} \frac{1}{2}z]$	9.88 688,	9.62 484,	$[\operatorname{tg} \frac{1}{2}H]$	9.91 929,	9.71 939,
$\frac{1}{2}z_{1,2} = 37^\circ 37' 16'',$	$22^\circ 51' 27'',$		$\frac{1}{2}H_{1,2} = 39^\circ 42' 23'',$	$27^\circ 39' 28'',$	
$z_{1,2} = 75 \ 14 \ 32;$	$45 \ 42 \ 54;$		$H_{1,2} = 79 \ 24 \ 46;$	$55 \ 18 \ 56.$	

Како се звезде налазе на истом великом кругу, у првом вертикалу, њихова угловна даљина (σ) једнака је разлици њихових зенитских даљина, дакле

$$\sigma = z_1 - z_2 = 75^\circ 14' 32'' - 45^\circ 42' 54'' = 29^\circ 31' 38''.$$

Разлику ректасцензија звездâ, која се још у задатку тражи, добићемо из познатих веза

$$t = H_1 + \alpha_1, \quad t = H_2 + \alpha_2.$$

Одузимањем добијамо

$$H_1 - H_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = 24^\circ 5' 50'' = 1^h 36^m 23^s.3.$$

Да се могу одредити ректасцензије посматраних некретница требало би, пошто су часовни углови њихови познати, знати тренутак (t) посматрања, то јест пролаза ових звезда кроз први вертикал.

За проверавање нумеричког рада комбиноваћемо други од полазних образаца са обрасцем

$$\sin H = \sin z \sec \delta,$$

који постоји међу елементима сферног троугла $P_n Z_n \Sigma$ кад се звезда налази у првом вертикалу. Из тих двају образаца добивамо за везу која постоји међу како датим тако и израчунатим елементима

$$\operatorname{tg} H = \sin z \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cosec} \delta.$$

И добивамо		за Σ_1 :	за Σ_2 :
	$[\sin z]$	9.98 543,	9.85 484,
	$[\operatorname{tg} \varphi]$	9.99 702,	9.99 702,
	$[\operatorname{cosec} H]$	0.74 589,	0.30 801,
контр.	$[\operatorname{tg} H]$	0.72 834,	0.15 987,
израчуната вр.	$[\operatorname{tg} H]$	0.72 836;	0.15 987.

112. 1. У тренутку пролаза некретнице кроз први вертикал (западни) имамо, са уобичајеним ознакама, везу

$$\cos H = \operatorname{tg} \delta \operatorname{ctg} \varphi, \quad \text{то јест} \quad \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \delta \sec H.$$

Одавде одређујемо тражену географску ширину, јер су у задатку дати и звездано време (t) пролаза звезде кроз први вертикал и координате звезде; а, на основи тога, постаје познато и $H = t - \alpha$.

2. Диференцирајући прву од горњих једначина, добивамо

$$-\sin H dH = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{cosec}^2 \varphi d\varphi_H,$$

а одавде,

$$d\varphi_H = \sin H \operatorname{ctg} \delta \sin^2 \varphi dH,$$

то јест тражену грешку $d\varphi_H$, у географској ширини, коју би произвела грешка $dH = dt$ у процењеном тренутку пролаза звезде кроз први вертикал.

3. За одређивање грешке у географској ширини, $d\varphi_A$, коју би изазвала грешка dA , у азимуту првог вертикала, користићемо образац у којем се не појављује зенитска даљина звезде, јер ову не познајемо. Послужићемо се, дакле, обрасцем

$$\cos \varphi \operatorname{tg} \delta = \cos H \sin \varphi - \operatorname{ctg} A \sin H.$$

Ако га диференцирамо, сматрајући сад као променљиве φ и A , имаћемо

$$-(\sin \varphi \operatorname{tg} \delta + \cos H \cos \varphi) d\varphi_A = \sin H \operatorname{cosec}^2 A dA.$$

У другом члану на левој страни можемо извршити смену

$$\cos H = \operatorname{tg} \delta \operatorname{ctg} \varphi,$$

а, на десној страни, узећемо у обзир да је, према задатку, $A = \frac{\pi}{2}$, те ће бити

$$-\operatorname{tg} \delta (\sin \varphi + \cos^2 \varphi \operatorname{cosec} \varphi) d\varphi_A = \sin H dA,$$

то јест

$$d\varphi_A = -\sin H \operatorname{ctg} \delta \sin \varphi dA.$$

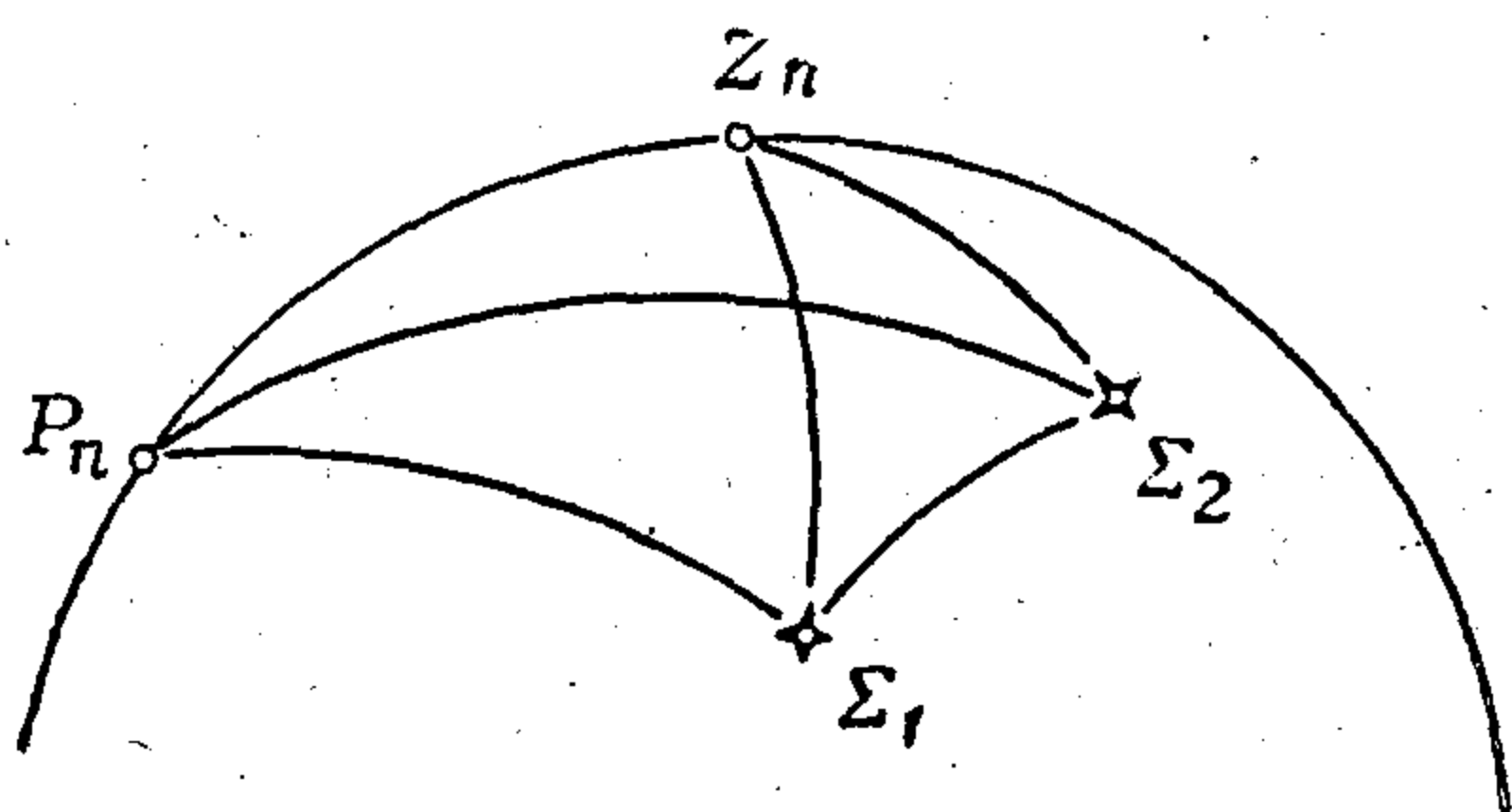
Из нађених израза за грешке видимо да је

$$\frac{d\varphi}{dH} = -\frac{d\varphi}{dA} \sin \varphi.$$

Ову везу ћемо користити да поједноставимо нумерички рад око израчунавања њихових вредности. А како су то мале величине, можемо се задовољити при њихову израчунавању и мањим бројем децимала.

Имаћемо, дакле:

$\delta = +31^{\circ} 59' 13''$,	$[\operatorname{tg} \delta]$	9.79557,	$[\sin H]$	9.891,	$[[\sin \varphi]$	9.848,
$t = 10^h 55^m 56^s.5$,	$[\sec H]$	0.20146,	$[\operatorname{ctg} \delta]$	0.204,	$[-d\varphi_A]$	9.943,
$\alpha = \underline{7 \ 31 \ 48.0}$,	$[\operatorname{tg} \varphi]$	9.99703,	$[\sin \varphi]$	9.848,	$[dH]$	1.176,
$H = \underline{3 \ 24 \ 8.5}$,	$\varphi = +44^{\circ} 48' 14''$;		$[-d\varphi_A]$	9.943,	$[d\varphi_H]$	0.967,
$H = 51^{\circ} 2' 8''$;			$d\varphi_A = -0''.9$;		$d\varphi_H = +9''.3$.	



Сл. 64.

113. Претставимо на сл. 64 посматране некретнице са Σ_1 и Σ_2 , и означимо посматране зенитске даљине, $Z_n\Sigma_1$ и $Z_n\Sigma_2$, са z_1 , односно z_2 ; а углове $P_n\Sigma_1\Sigma_2$ и $\Sigma_1\Sigma_2P_n$ са Q_1 , односно Q_2 .

У сферном троуглу $P_n\Sigma_1\Sigma_2$ позната су нам, према задатку, три елемента: две стране и угао међу њима. Можемо, дакле, одредити преостала два угла у њему. Помоћу Неперових аналогија имамо

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) &= \cos \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_2) \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1), \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (Q_1 - Q_2) &= \sin \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_2) \sec \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

Помоћу Неперових аналогија одредићемо и страну $\sigma = \Sigma_1\Sigma_2$, заједничку сферним троугловима $P_n\Sigma_1\Sigma_2$ и $Z_n\Sigma_1\Sigma_2$, наиме помоћу образаца

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sigma &= \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2) \cos \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \sec \frac{1}{2} (Q_1 - Q_2), \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sigma &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_2) \sin \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (Q_1 - Q_2). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

На овај начин, то јест одређујући σ помоћу оба ова обрасца, уједно и проверавамо и σ и претходни нумерички рад.

Сад у сферном троуглу $Z_n \Sigma_1 \Sigma_2$ познајемо све три стране. Можемо, значи, одредити углове $Z_n \Sigma_1 \Sigma_2$ и $\Sigma_1 \Sigma_2 Z_n$, које ћемо означити са U_1 и U_2 , Одредићемо их помоћу

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} U_1 &= \sin(s - z_1) \sin(s - \sigma) \operatorname{cosec} s \operatorname{cosec}(s - z_2), \\ \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} U_2 &= \sin(s - z_2) \sin(s - \sigma) \operatorname{cosec} s \operatorname{cosec}(s - z_1), \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

где је стављено $s = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + \sigma)$.

Израчунавањем последња два угла, U_1 и U_2 , долазимо и до вредности паралактичких углова

$$q_1 = Q_1 - U_1 \quad \text{и} \quad q_2 = U_2 - Q_2.$$

Пошто су нам сад познати и углови q_1 и q_2 , можемо одредити углове H_1 и A_1 , из сферног троугла $P_n \Sigma_1 \Sigma_2$, помоћу Неперових аналогја. Уведемо ли, место деклинацијâ, поларне даљине, p_1 и p_2 (ради краћег писања), имаћемо

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (A_1 - H_1) &= \cos \frac{1}{2} (p_1 - z_1) \sec \frac{1}{2} (p_1 + z_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} q_1, \\ \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (A_1 + H_1) &= \sin \frac{1}{2} (p_1 - z_1) \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (p_1 + z_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} q_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

А помоћу ових углова, опет користећи Неперове аналогје, налазимо

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right) = \sin \frac{1}{2} (A_1 - H_1) \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (A_1 + H_1) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (p_1 + z_1). \quad (\text{V})$$

Одредивши тако H_1 , добићемо тражено звездано време (t) посматрања из $t = H_1 + \alpha_1$, поред посматрачеве географске ширине, коју добивамо из последње једначине.

Сав нумерички рад може се проверити на тај начин што се, из сферног троугла $P_n \Sigma_2 Z_n$, одреде лукови A_2 и H_2 , а, затим, још једном вредност φ . Звездано време које се добива из $H_2 + \alpha_2 = t$ треба такође да се подудара са горе нађеном вредношћу.

Са подацима задатка имаћемо, према томе,

$$\delta_1 = +31^\circ 59' 14'', \quad \delta_1 - \delta_2 = 19^\circ 48' 15'', \quad \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_2) = 9^\circ 54' 8'',$$

$$\delta_2 = +12 \ 10 \ 59 ; \quad \delta_1 + \delta_2 = 44 \ 10 \ 13 ; \quad \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2) = 22 \ 5 \ 7 ;$$

$$\frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) = 19^\circ 16' 47'' ;$$

$$(I) \quad \begin{array}{ll} \left[\cos \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_2) \right] & 9.99348, \\ \left[\operatorname{cosec} \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2) \right] & 0.42482, \\ \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \right] & \underline{0.45619}, \\ \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \right] & 0.87449; \end{array} \quad \begin{array}{ll} \left[\sin \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_2) \right] & 9.23545, \\ \left[\sec \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2) \right] & 0.03310, \\ \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \right] & \underline{0.45619}, \\ \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (Q_1 - Q_2) \right] & 9.72474; \end{array}$$

$$\frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) = 82^\circ 23' 44'',$$

$$Q_1 = 110^\circ 20' 40'',$$

$$Q_2 = 54^\circ 26' 48''.$$

$$\frac{1}{2} (Q_1 - Q_2) = 27^\circ 56' 56'',$$

$$(II) \quad \begin{array}{ll} \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2) \right] & 9.39173, \\ \left[\cos \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \right] & 9.12167, \\ \left[\sec \frac{1}{2} (Q_1 - Q_2) \right] & \underline{0.05386}, \\ \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \sigma \right] & 9.56726, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_2) \right] & 9.24196, \\ \left[\sin \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \right] & 9.99616, \\ \left[\operatorname{cosec} \frac{1}{2} (Q_1 - Q_2) \right] & \underline{0.32912}, \\ \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \sigma \right] & 9.56724, \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \sigma = 20^\circ 15' 50'',$$

$$\frac{1}{2} \sigma = 20^\circ 15' 48'',$$

$$\sigma = 40^\circ 31' 40'';$$

$$\sigma = 40^\circ 31' 36''.$$

$$(III) \quad z_1 = 46^\circ 57' 16'', \quad s = 62^\circ 15' 27'',$$

$$\sigma = 40^\circ 31' 40'';$$

$$s - z_1 = 15^\circ 18' 11'';$$

$$[\sin (s - \sigma)] \quad 9.56847,$$

$$z_2 = \underline{37^\circ 1' 58''},$$

$$s - \sigma = 21^\circ 43' 47'';$$

$$[\operatorname{cosec} \sigma] \quad \underline{0.05303},$$

$$2s = 124^\circ 30' 54'';$$

$$s - z_2 = 25^\circ 13' 29'';$$

$$S_\sigma \quad 9.62150;$$

$[\sin(s - z_1)]$	9.42 149,	$[\sin(s - z_2)]$	9.62 958,	$\frac{1}{2} U_1 = 26^\circ 58' 30''$,
$[\operatorname{cosec}(s - z_1)]$	0.37 042,	$[\operatorname{cosec}(s - z_2)]$	0.57 851,	$\frac{1}{2} U_2 = 39^\circ 24' 53''$;
	S_σ <u>9.62 150,</u>		S_σ <u>9.62 150,</u>	
$2\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} U_1\right]$	9.41 341,	$2\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} U_2\right]$	9.82 959,	$U_1 = 53^\circ 57' 0''$,
$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} U_1\right]$	9.70 670;	$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} U_2\right]$	9.91 479;	$U_2 = 78^\circ 49' 46''$.

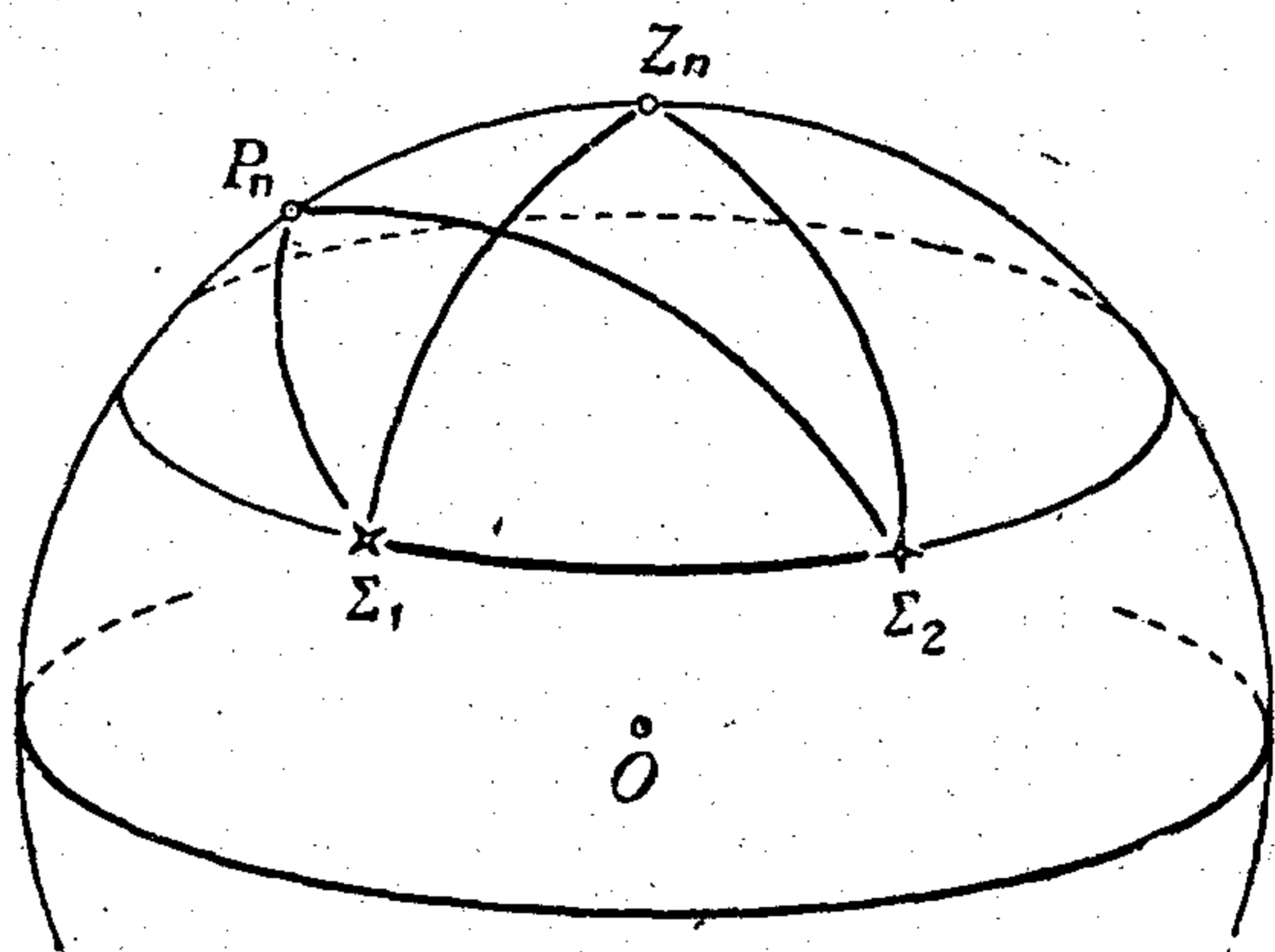
(IV) $Q_1 = 110^\circ 20' 40''$,	$U_2 = 78^\circ 49' 46''$,	$q_1 = 56^\circ 23' 40''$,
$U_1 = 53^\circ 57' 0''$;	$Q_2 = 54^\circ 26' 48''$;	$q_2 = 24^\circ 22' 58''$;
$p_1 = 58^\circ 0' 46''$,	$p_2 = 77^\circ 49' 1''$,	
$z_1 = 46^\circ 57' 16''$,	$z_2 = 37^\circ 1' 58''$,	
$p_1 - z_1 = 11^\circ 3' 30''$,	$p_2 - z_2 = 40^\circ 47' 3''$,	
$p_1 + z_1 = 104^\circ 58' 2''$;	$p_2 + z_2 = 114^\circ 50' 59''$;	
$\frac{1}{2}(p_1 - z_1) = 5^\circ 31' 45''$,	$\frac{1}{2}(p_2 - z_2) = 20^\circ 23' 32''$,	
$\frac{1}{2}(p_1 + z_1) = 52^\circ 29' 1''$;	$\frac{1}{2}(p_2 + z_2) = 57^\circ 25' 30''$;	
$\frac{1}{2} q_1 = 28^\circ 11' 50''$;	$\frac{1}{2} q_2 = 12^\circ 11' 29''$;	

$\left[\cos \frac{1}{2}(p_1 - z_1)\right]$	9.99 797,	$\left[\cos \frac{1}{2}(p_2 - z_2)\right]$	9.97 189,
$\left[\sec \frac{1}{2}(p_1 + z_1)\right]$	0.21 539,	$\left[\sec \frac{1}{2}(p_2 + z_2)\right]$	0.26 889,
$\left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} q_1\right]$	0.27 073,	$\left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} q_2\right]$	0.66 544,
$\left[\sin \frac{1}{2}(p_1 - z_1)\right]$	8.98 386,	$\left[\sin \frac{1}{2}(p_2 - z_2)\right]$	9.54 213,
$\left[\operatorname{cosec} \frac{1}{2}(p_1 + z_1)\right]$	<u>0.10 063,</u>	$\left[\operatorname{cosec} \frac{1}{2}(p_2 + z_2)\right]$	<u>0.07 433,</u>
$\left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A_1 - H_1)\right]$	0.48 409,	$\left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A_2 - H_2)\right]$	0.90 622,
$\left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A_1 + H_1)\right]$	9.35 522;	$\left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A_2 + H_2)\right]$	0.28 190;

$$\begin{array}{ll}
 \text{(V)} \quad \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (p_1 + z_1) \right] & 0.11476, & \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (p_2 + z_2) \right] & 0.19456, \\
 \left[\sin \frac{1}{2} (A_1 - H_1) \right] & 9.49372, & \left[\sin \frac{1}{2} (A_2 - H_2) \right] & 0.09047, \\
 \left[\operatorname{cosec} \frac{1}{2} (A_1 + H_1) \right] & 0.01087, & \left[\operatorname{cosec} \frac{1}{2} (A_2 + H_2) \right] & 0.33432, \\
 \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \right] & 9.61935; & \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \right] & 9.61935; \\
 & & & \frac{1}{2} \psi = 22^\circ 35' 59''.
 \end{array}$$

Према томе добивамо: $90^\circ - \varphi = \psi = 45^\circ 11' 58''$, дакле $\varphi = +44^\circ 48' 2''$;
 А за t : $t = H_1 + \alpha_1 = 3^h 56^m 17^s.47 + 1^h 22^m 3^s.13 = 11^h 28^m 5^s.67$;
 $t = H_2 + \alpha_2 = 1 \ 22 \ 3.13 + 10 \ 6 \ 2.4 = 11 \ 28 \ 5.53$.

114. Претставимо на сл. 69 са Σ_1 и Σ_2 положаје некретница у тренутку кад се нађу на истом алмукантару, зенитске даљине $Z_n \Sigma_1 = Z_n \Sigma_2 = z$.



Сл. 65.

Из њихових положајних сферних троуглова, $P_n \Sigma_1 Z_n$ и $P_n \Sigma_2 Z_n$, имамо, у том тренутку (са уобичајеним ознакама),

$$\begin{aligned}
 \cos z &= \sin \varphi \sin \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos H_1 = \\
 &= \sin \varphi \sin \delta_2 + \cos \varphi \cos \delta_2 \cos H_2
 \end{aligned}$$

$$\text{Сем тога је } t_1 = H_1 + \alpha_1 = H_2 + \alpha_2.$$

Из тих једначина одредићемо t и z , пошто претходно одредимо H_1 и H_2 ; управо, пошто одредимо $H_1 + H_2$, јер је $H_1 - H_2 = \alpha_2 - \alpha_1$ дато.

Тога ради ћемо, пре свега, полазне једначине трансформисати. Ако их, наиме, напишемо

$$\sin \varphi (\sin \delta_1 - \sin \delta_2) + \cos \varphi (\cos \delta_1 \cos H_1 - \cos \delta_2 \cos H_2) = 0,$$

па уведемо ознаке:

$$\delta_1 - \delta_2 = 2d, \quad \text{дакле } d = \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2), \quad \text{и } H_1 - H_2 = 2\tau, \quad \text{дакле } \tau = \frac{1}{2}(H_1 - H_2),$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 2D, \quad \text{дакле } D = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2); \quad H_1 + H_2 = 2T, \quad \text{дакле } T = \frac{1}{2}(H_1 + H_2);$$

$$\text{те ће сад бити: } \quad \delta_1 = D + d, \quad H_1 = T + \tau,$$

$$\delta_2 = D - d; \quad H_2 = T - \tau;$$

онда претходна једначина постаје:

$$2 \sin \varphi \cos D \sin d + \cos \varphi [\cos (D + d) \cos (T + \tau) - \cos (D - d) \cos (T - \tau)] = 0.$$

Ако члан у загради развијемо и уредимо, имаћемо

$$\sin \varphi \cos D \sin d = \cos \varphi (\sin D \sin d \cos T \cos \tau + \cos D \cos d \sin T \sin \tau) = 0.$$

Поделимо ли обе стране производом $\cos \varphi \cos D \sin d$, имаћемо

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} D \cos T \cos \tau + \operatorname{ctg} d \sin T \sin \tau.$$

Ако још поделимо обе стране чиниоцем поред $\sin T$ и ставимо

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} D \operatorname{tg} d \operatorname{ctg} \tau, \quad (1)$$

добити ћемо горњу једначину у облику

$$\operatorname{tg} \psi \cos T + \sin T = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} d \operatorname{cosec} \tau,$$

а одатле

$$\sin (\psi + T) = \cos \psi \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} d \operatorname{cosec} \tau. \quad (2)$$

Одавде налазимо $T = H_1 + H_2$, па, дакле, и саме часовне углове, H_1 и H_2 , јер нам је познато $H_1 - H_2$. Помоћу њих одређујемо тренутак (t) звезданог времена у који звезде Σ_1 и Σ_2 стижу на зенитску даљину z .

Остаје још да одредимо после колико ће звезданог времена, од тренутка t , разлика висина ових звезда достићи $1''$. Тога ради диференцираћемо полазне једначине, и добићемо

$$\sin z_1 dz_1 = \cos \varphi \cos \delta_1 \sin (t_1 - \alpha_1) dt_1,$$

$$\sin z_2 dz_2 = \cos \varphi \cos \delta_2 \sin (t_2 - \alpha_2) dt_2.$$

Одавде имамо

$$\left. \begin{aligned} dt_1 &= \sin z_1 \sec \varphi \sec \delta_1 \operatorname{cosec} (t_1 - \alpha_1) dz_1, \\ dt_2 &= \sin z_2 \sec \varphi \sec \delta_2 \operatorname{cosec} (t_2 - \alpha_2) dz_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

У нашем случају је $z_1 = z_2$, јер се звезде налазе на истој зенитској даљини, коју одређујемо из положајних сферних троуглова $P_n \Sigma_1 Z_n$ и $P_n \Sigma_2 Z_n$. А промене у зенитским даљинама, dz_1 и dz_2 , узетимо једнаке $1''$. Тако ћемо из последњих једначина добити промене звезданог времена, dt_1 и dt_2 , за које свака од звезда промени своју зенитску даљину за $1''$.

Из последњих двеју једначина, које су облика

$$dt = m_1 dz_1, \text{ односно } dt = m_2 dz_2,$$

а које ћемо написати у облику

$$dz_1 = \frac{1}{m_1} dt, \text{ односно } dz_2 = \frac{1}{m_2} dt,$$

налазимо

$$dt = \frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2} (dz_1 - dz_2) \quad (4)$$

Стављајући $dz_1 - dz_2 = 1''$, добивамо промену звезданог времена у току којег разлика зенитских даљина уочених звезда, по њихову пролазу кроз алмукантар зенитске даљине z , достиже $1''$.

Према томе ћемо са подацима задатка имати:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= +67^\circ 36' 31'', & 2d &= 25^\circ 18' 3'', & d &= 12^\circ 39' 2'', & \alpha_1 &= 23^\circ 59' 18'', \\ \delta_2 &= +42^\circ 18' 28'', & 2D &= 109^\circ 54' 59'', & D &= 54^\circ 57' 30'', & \alpha_2 &= 54^\circ 50' 12'', \\ & & & & & \alpha_2 - \alpha_1 &= 30^\circ 50' 54'', \\ & & & & & \tau &= 15^\circ 25' 27''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad [\text{tg } D] &= 0.15410, & (2) \quad [\text{tg } \varphi] &= 9.87392, \\ [\text{tg } d] &= 9.35113, & [\text{tg } d] &= 9.35113, \\ [\text{ctg } \tau] &= 0.55925, & [\text{cosec } \tau] &= 0.57518, \\ [\text{tg } \psi] &= 0.06448, & S &= 9.80023, & &= 9.80023, \\ \psi_1 &= 49^\circ 14' 16'', & [\cos \psi] &= 9.81486, & &= 9.81486, \\ \psi_2 &= 229^\circ 14' 16'', & [\sin(\psi + T)] &= 9.61509, & &= 9.61509, \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \psi + T &= 24^\circ 30' 32'', & 155^\circ 39' 28'', & 204^\circ 20' 32'', & 335^\circ 39' 28'', \\ \psi &= 49^\circ 14' 16'', & 49^\circ 14' 16'', & 229^\circ 14' 16'', & 229^\circ 14' 16'', \end{aligned}$$

$$T = H_1 + H_2 = 335^\circ 6' 16'', \quad 106^\circ 25' 12'', \quad 335^\circ 6' 16'', \quad 106^\circ 25' 12'';$$

$$\tau = 15^\circ 25' 27'', \quad 15^\circ 25' 27'',$$

$$\begin{aligned} T + \tau = H_1 &= 350^\circ 21' 41'', & 121^\circ 50' 39'', & & & \\ \alpha_1 &= 23^\circ 59' 18'', & 23^\circ 59' 18'', & & & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} t_1 = 14^\circ 30' 59'', \quad 14^\circ 30' 59''; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T - \tau = H_2 &= 319^\circ 40' 47'', & 90^\circ 59' 45'', & & & \\ \alpha_2 &= 54^\circ 50' 12'', & 54^\circ 50' 12'', & & & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} t_2 = 145^\circ 49' 57'', \quad 145^\circ 49' 57''; \end{aligned}$$

или

$$t_1 = 0^h 58^m 3^s.9 \quad \text{и} \quad t_2 = 9^h 43^m 19^s.8.$$

(2^b) Сад пре него што бисмо приступили израчунавању промена помоћу (3), треба да израчунамо зенитску даљину, z . Израчунаћемо је за тренутак t_2 , помоћу обрасца

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H.$$

Имамо

за Σ_1

за Σ_2

$$\sin \varphi \sin \delta = 0.55382, \quad 0.40318,$$

$$\cos \varphi \cos \delta \cos H = -0.16094, \quad -0.01029;$$

$$\cos z = 0.39288; \quad 0.39289; \quad \text{дакле } z = 66^\circ 51' 58''.$$

			* Σ_1	* Σ_2	
(3)	$[\sin z]$	9.96 360,	$[\sec \delta]$	0.41 915,	0.13 104,
	$[\sec \varphi]$	<u>0.09 650,</u>	$[\operatorname{cosec} (t_1 - \alpha_1)]$	0.07 084,	0.00 007,
	$[F]$	0.06 010;	$[F]$	<u>0.06 010,</u>	<u>0.06 010,</u>
			$[dt]$	0.55 009,	0.19 121,
				$dt = 3^s.55;$	$1^s.55;$

Значи, звезда Σ_1 промени своју зенитску даљину за $1''$ за $3^s.55$, док звезда Σ_2 своју промени за $1^s.55$, наравно, при пролазу кроз алмукантар z .

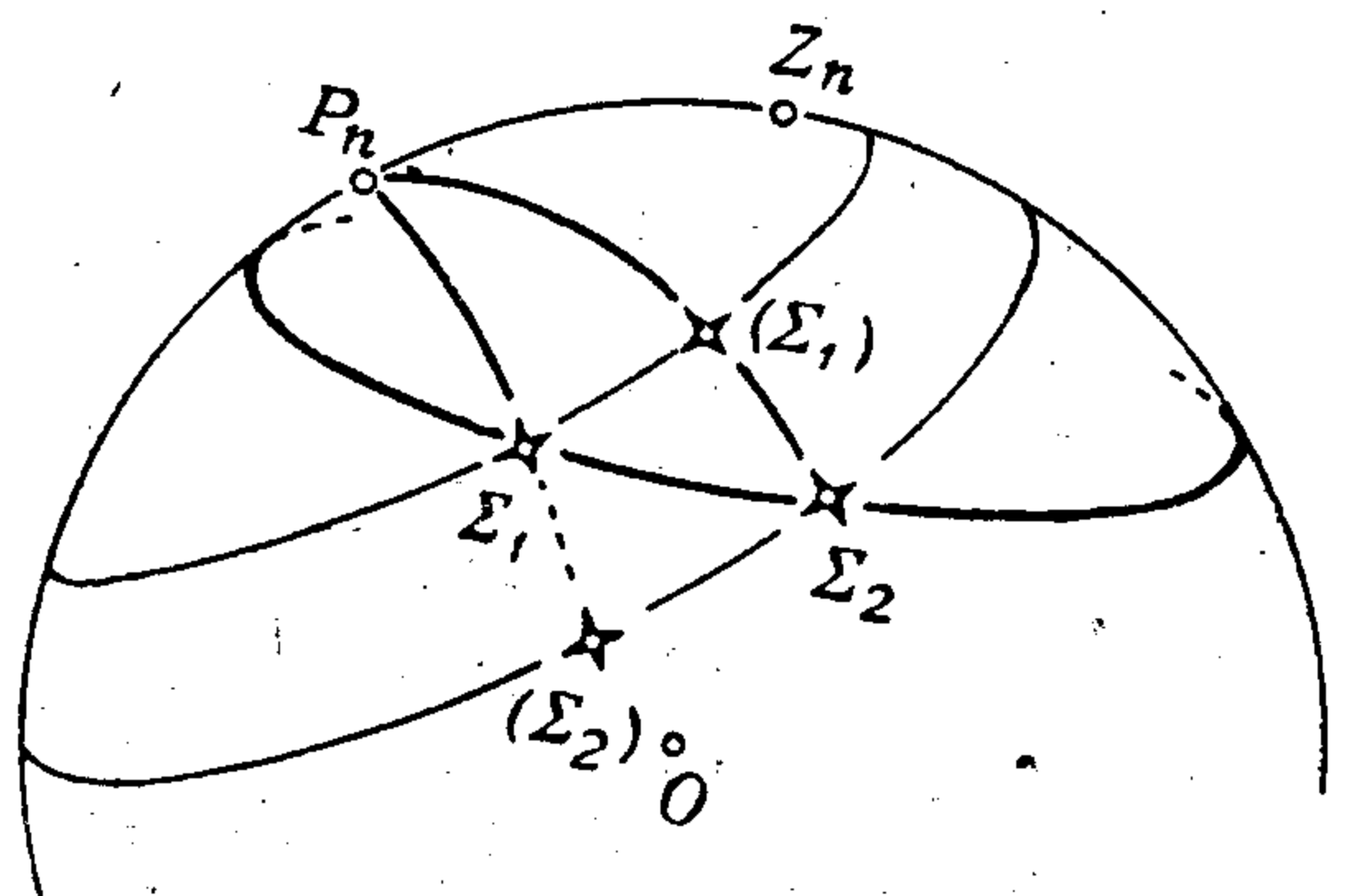
Ограничимо ли се на само овако мале промене и размаке, моћи ћемо узети и да су

$$dz_1 = \frac{1}{3.55} dt \quad \text{и} \quad dz_2 = \frac{1}{1.55} dt,$$

дакле
$$dz_2 - dz_1 = 1'' = \left(\frac{1}{1.55} - \frac{1}{3.55} \right) dt.$$

Одавде налазимо да је $\tau = 2^s.75$; другим речима, разлика зенитских даљина звезда Σ_1 и Σ_2 достићи ће $1''$ након $2^s.75$ звезданог времена по њихову пролазу кроз алмукантар $z = 66^\circ 51' 58''$ посматрача на географској ширини φ .

115. 1. Претставимо на сл. 66 положаје посматраних некретница Σ_1 и Σ_2 , у размаку τ звезданог времена, на истој висини (h). Са (Σ_1) означен је положај прве звезде у тренутку кад је друга, Σ_2 , била на висини h , а са (Σ_2) означен положај друге кад је, након τ звезданог времена, и прва звезда, Σ_1 , доспела на висину h .



Сл. 66.

Означимо часовни угао $Z_n P_n \Sigma_2$ са H_1 , онда је часовни угао $Z_n P_n \Sigma_1 = H_2 = H_1 + \tau$. Ако још зенитску даљину алмукантара $\Sigma_1 \Sigma_2$ означимо са z , имаћемо са уобичајеним ознакама

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi \sin \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos H_1, \\ \cos z &= \sin \varphi \sin \delta_2 + \cos \varphi \cos \delta_2 \cos (H_1 + \tau). \end{aligned}$$

Елиминишимо $\cos z$ и развијмо други члан друге једначине, па ћемо имати

$$\begin{aligned} \sin \varphi \sin \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos H_1 &= \sin \varphi \sin \delta_2 + \\ &+ \cos \varphi \cos \delta_2 \cos H_1 \cos \tau - \cos \varphi \cos \delta_2 \sin H_1 \sin \tau, \end{aligned}$$

то јест

$$\sin \varphi (\sin \delta_1 - \sin \delta_2) = \cos \varphi [\cos H_1 (\cos \delta_2 \cos \tau - \cos \delta_1) - \sin H_1 \cos \delta_2 \sin \tau],$$

то јест

$$\operatorname{tg} \varphi (\sin \delta_1 - \sin \delta_2) = \cos H_1 (\cos \delta_2 \cos \tau - \cos \delta_1) - \sin H_1 \cos \delta_2 \sin \tau.$$

Како су нам познате величине δ_1 , δ_2 и τ , ставићемо

$$\cos \delta_2 \cos \tau - \cos \delta_1 = m \cos M,$$

$$\cos \delta_2 \sin \tau = m \sin M,$$

одакле следује

$$m = \cos \delta_2 \sin \tau \operatorname{cosec} M \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} M = \operatorname{ctg} \tau - \cos \delta_1 \sec \delta_2 \operatorname{cosec} \tau.$$

Према томе горња једначина постаје

$$2 \operatorname{tg} \varphi \cos \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2) \sin \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_2) = \cos \delta_2 \sin \tau \operatorname{cosec} M \cos (H_1 + M),$$

то јест, постаје

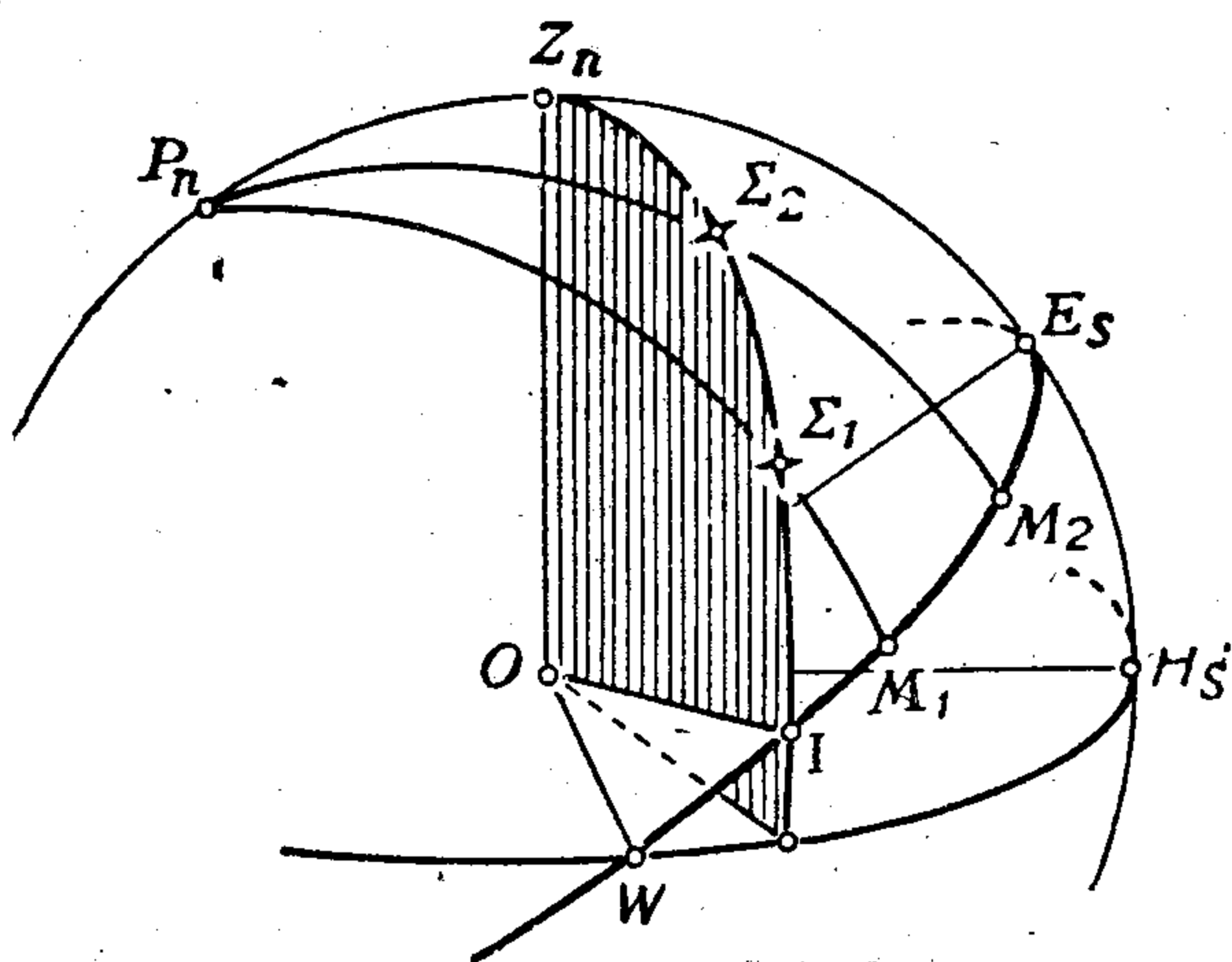
$$\cos (H_1 + M) = 2 N \sin M \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cosec} \tau,$$

ако ставимо

$$N = \cos \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2) \sin \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_2) \sec \delta_2.$$

2. Уједно видимо да бисмо из добивене једначине могли одредити и посматрачеву географску ширину, да је, поред већ познатих величина, био дат још и тренутак било првог, t_1 , било другог, t_2 , посматрања. Са тим податком би, у исти мах, било и z одређено из једне од полазних једначина.

116. Претставимо на сл. 67 са Σ_1 и Σ_2 некретнице у тренутку кад су се нашле на вертикалу азимута A , за посматрача на географској



Сл. 67.

ширини φ . Означимо часовни угао друге звезде, $\sphericalangle Z_n P_n \Sigma_2$, са $H_2 = = E_s M_2$. Ако сад приметимо да је, у правоуглом сферном троуглу $Z_n I E_s$, $E_s Z_n = \varphi$, и $\sphericalangle Z_n I E_s$ означимо са η , а лук небеског екватора $I M_2$ са σ , видимо да је

$$\sin (\sigma + H_2) = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \eta.$$

С друге стране, из правоуглог сферног троугла $\Sigma_2 M_2 I$ имамо

$$\sin \sigma = \operatorname{tg} \delta_2 \operatorname{ctg} \eta \quad \dots (a)$$

Дељењем ових двеју једначина добивамо

$$\sin (\sigma + H_2) \operatorname{cosec} \sigma = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \delta_2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sin (\sigma + H_2) \operatorname{cosec} \sigma \operatorname{tg} \delta_2.$$

то јест

Приметимо ли, даље, да из правоуглог сферног троугла $\Sigma_1 I M_1$ имамо

$$\sin [\sigma - (\alpha_2 - \alpha_1)] = \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{ctg} \eta \quad \dots (b)$$

дељењем једначина (a) и (b) добивамо

$$\frac{\sin \sigma}{\sin [\sigma - (\alpha_2 - \alpha_1)]} = \frac{\operatorname{tg} \delta_2}{\operatorname{tg} \delta_1},$$

уствари једначину која одређује σ . Доиста, из ње имамо

$$\frac{\sin \sigma + \sin [\sigma - (\alpha_2 - \alpha_1)]}{\sin \sigma - \sin [\sigma - (\alpha_2 - \alpha_1)]} = \frac{\operatorname{tg} \delta_2 + \operatorname{tg} \delta_1}{\operatorname{tg} \delta_2 - \operatorname{tg} \delta_1}.$$

А одавде добивамо

$$\frac{2 \sin \left[\sigma - \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \right] \cos \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)}{2 \cos \left[\sigma - \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \right] \sin \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\sin (\delta_2 + \delta_1)}{\sin (\delta_2 - \delta_1)},$$

то јест $\operatorname{tg} \left[\sigma - \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \right] = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \sin (\delta_2 + \delta_1) \operatorname{cosec} (\delta_2 - \delta_1).$

Помоћни угао σ је овим изразом одређен. Да бисмо могли посматрачеву географску ширину израчунати, потребно би било да знамо и тренутак (t) посматрања, другим речима да знамо $H_2 = t - \alpha_2$, јер α_2 сматрамо да је познато.

Претпостављајући да је познат и тренутак (t) посматрања, из правоуглог сферног троугла $Z_n I E_s$ имали бисмо

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} (\sigma + H_2) \operatorname{ctg} A,$$

то јест

$$\operatorname{ctg} A = \sin \varphi \operatorname{ctg} (\sigma + H_2);$$

а тиме је одређен и азимут вертикала.

117. У положајном сферном троуглу $Z_n P_n \Sigma$ имамо са уобичајеним ознакама

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H.$$

За одређено место на Земљи, дакле φ , и уочену некретницу, Σ , деклинације δ , имаћемо за промену зенитске даљине у току дана

$$-\sin z \, dz = -\cos \varphi \cos \delta \sin H \, dH,$$

то јест, ако још извршимо смену

$$\sin A = \sin H \cos \delta \operatorname{cosec} z,$$

$$dz = \cos \varphi \sin A \, dH.$$

Одавде закључујемо да је

1) за $A_s = 0$ и $A_i = \pi$, то јест у тренуцима горње и доње кулминације звезде, промена зенитске даљине њене најспорија;

2) за $A_w = \frac{\pi}{2}$ и $A_E = \frac{3\pi}{2}$, то јест у тренуцима пролаза звезде кроз посматрачев први вертикал, западни (W) и источни (E),

$$\frac{dz}{dH} = \pm \cos \varphi,$$

дакле промене зенитске даљине су најбрже; уједно видимо и то да оне не зависе од координата звезде, другим речима, исте су, за истог посматрача, код свих некретница које пролазе кроз први вертикал;

3) да промене зенитских даљина некретница буду стално, то јест преко целог дана, једнаке променама часовног угла, дакле, да буде

$$dz = dH,$$

треба да буду у исти мах

и $\cos \varphi = 1$ и $\sin A = 1$, дакле и $\varphi = 0^\circ$ и $A = 90^\circ$.

Другим речима, треба посматрач да се налази на Земљину екватору и звезда да буде у првом вертикалу, а то значи екваторска, дакле $\delta = 0^\circ$.

118. Први начин. Означимо са A_d азимут звезде у тренутку њене највеће дигресије, па развијмо азимут, као функцију времена, по Тајлорову обрасцу. Имаћемо

$$A = A_d + \left(\frac{dA}{dH}\right)_d t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 A}{dH^2}\right)_d t^2 + \dots$$

Ограничимо ли се на мале вредности t , имаћемо за промену азимута за t секунда, од тренутка највеће дигресије,

$$\Delta A = A_d - A = - \left[\left(\frac{dA}{dH}\right)_d t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 A}{dH^2}\right)_d t^2 \right].$$

Како, међутим, знамо да је у тренутку највеће дигресије $\frac{dA}{dH} = 0$, за промену азимута добивамо

$$\Delta A = - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 A}{dH^2}\right)_d t^2.$$

Да бисмо нашли други извод азимута по часовном углу, поћи ћемо од четвороелементног обрасца типа

$$\sin c \operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} A \sin B + \cos B \cos c,$$

који, примењен на положајни сферни троугао $Z_n P_n \Sigma$, даје

$$\cos \varphi \operatorname{tg} \delta = - \operatorname{ctg} A \sin H + \cos H \sin \varphi.$$

Из овог обрасца имамо

$$\operatorname{ctg} A = \sin \varphi \operatorname{ctg} H - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta \operatorname{cosec} H,$$

Диференцирањем по H добивамо одавде

$$\operatorname{cosec}^2 A \sin^2 H \frac{dA}{dH} = \sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta \cos H.$$

Диференцирајући још једном по H имаћемо, ако притом узмемо у обзир да је у тренутку највеће дигресије $\left(\frac{dA}{dH}\right)_d = 0$,

$$\operatorname{cosec}^2 A_d \sin^2 H \left(\frac{d^2 A}{dH^2}\right)_d = \cos \varphi \operatorname{tg} \delta \sin H_d,$$

то јест

$$\left(\frac{d^2 A}{dH^2}\right)_d = \cos \varphi \operatorname{tg} \delta \sin^2 A_d \operatorname{cosec} H_d.$$

Узмемо ли у обзир да је, у тренутку највеће дигресије звезде, положајни сферни троугао $Z_n P_n \Sigma$ правоугли, јер је $\sphericalangle P_n \Sigma Z_n = q = 90^\circ$, имаћемо

$$\cos \varphi = \cos \delta \operatorname{cosec} A_d,$$

и

$$\operatorname{cosec} H_d = -\sin \delta \sec A_d,$$

то јест

$$\cos \varphi \operatorname{cosec} H_d = -\sin \delta \cos \delta \sec A_d \operatorname{cosec} A_d.$$

Сменимо ли ову вредност у изразу за други извод азимута добивамо

$$\left(\frac{d^2 A}{dH^2}\right)_d = -\sin^2 \delta \operatorname{tg} A_d.$$

И тако за промену азимута за t^s после тренутка највеће дигресије звезде

$$\text{добивамо} \quad \Delta A = -\frac{1}{2} t^2 \sin^2 \delta \operatorname{tg} A_d.$$

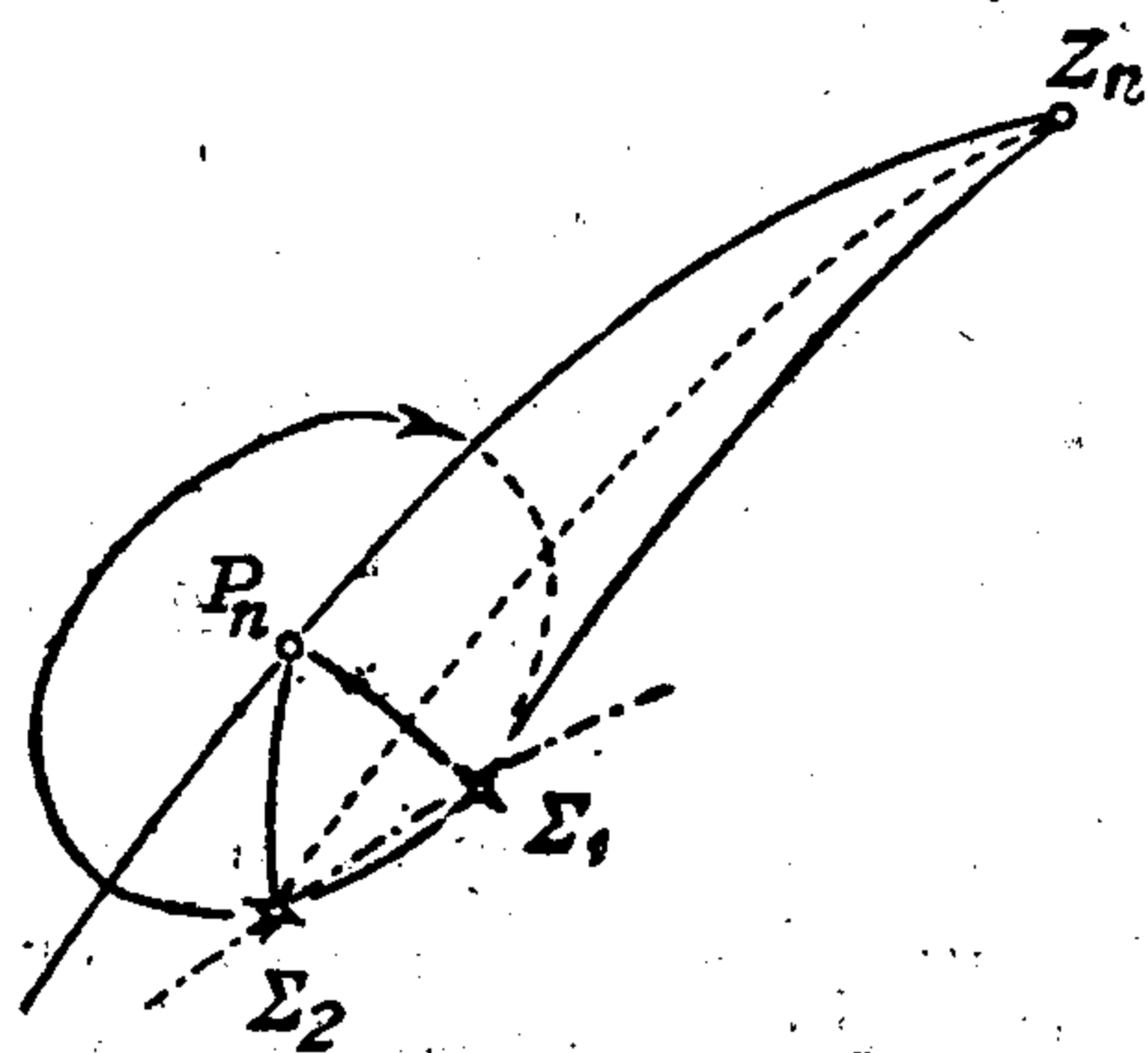
Да бисмо ову промену добили у секундама угла, треба у изразу на десној страни, прво, број времених секунда помножити са 15 и, друго, десну страну помножити са $\operatorname{arc} 1''$, дакле

$$\Delta A = \left[-\frac{1}{2} (15 t)^2 \sin^2 \delta \operatorname{tg} A_d \operatorname{arc} 1'' \right].$$

Други начин. Претставимо на сл. 68 са Σ_1 некретницу у тренутку њене највеће дигресије, а са Σ_2 њен положај t секунда касније. Повуцимо кроз ова два положаја лук великог круга $\Sigma_1 \Sigma_2 = \sigma$. Означимо, сем тога: $Z_n \Sigma_1 = z$, $Z_n \Sigma_2 = z + \Delta z$; $\sphericalangle \Sigma_1 Z_n \Sigma_2 = \Delta A$;

$$\sphericalangle P_n \Sigma_1 \Sigma_2 = q; \quad \sphericalangle \Sigma_1 P_n \Sigma_2 = t; \quad Z_n P_n = \frac{\pi}{2} - \varphi;$$

$$P_n \Sigma_1 = P_n \Sigma_2 = \frac{\pi}{2} - \delta; \quad \text{и приметимо да је } \sphericalangle Z_n \Sigma_1 P_n = \frac{\pi}{2}.$$



Сл. 68.

Из сферног троугла $Z_n \Sigma_2 \Sigma_1$ имамо онда:

$$\sin \sigma \cos q = \sin (z + \Delta z) \sin \Delta A,$$

а из сферног троугла $P_n \Sigma_2 \Sigma_1$, пак

$$\sin \sigma \cos q = \sin \delta \cos \delta - \sin \delta \cos \delta \cos t = 2 \sin \delta \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} t.$$

Дакле,
$$\sin (z + \Delta z) \sin \Delta A = 2 \sin \delta \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} t.$$

Први члан на левој страни можемо развити. Ако су прираштаји довољно малени, а то смо већ претпоставили, тако да можемо њихове производе, квадрате и више степене занемарити, имаћемо:

$$\Delta A \sin z = \frac{1}{2} t^2 \sin \delta \cos \delta.$$

С друге стране, из сферног троугла $Z_n P_n \Sigma_1$ је

$$\sin \varphi \sin z = -\cos \varphi \cos z \cos A.$$

Или, ако узмемо у обзир да је

$$\cos z = \sin \varphi \operatorname{cosec} \delta,$$

налазимо

$$\sin z = -\cos \varphi \operatorname{cosec} \delta \cos A.$$

И тако за промену азимута добивамо

$$\Delta A = -\frac{1}{2} t^2 \sec \varphi \sin^2 \delta \cos \delta \sec A.$$

А како из сферног троугла $P_n \Sigma_1 Z_n$ имамо да је

$$\cos \delta = \cos \varphi \sin A,$$

за промену азимута звезде у тренутку њене највеће дигресије добивамо коначно

$$\Delta A = -\frac{1}{2} t^2 \sin^2 \delta \operatorname{tg} A,$$

или, у секундама угла,

$$\Delta A = -\frac{1}{2} (15 t)^2 \sin^2 \delta \operatorname{tg} A \operatorname{arc} 1''.$$

3. Некретница је циркумполарна за посматрача на северној географској ширини φ , ако је $+\delta > 90^\circ - \varphi$; у нашем случају, ако је $\delta > +45^\circ 11' 47''$. Из прегледа сјајних некретница у Годишњаку нашег неба за 1956, стр. 98–100, видимо да тај услов задовољава, између осталих, и α Persei (Mirfak), чија је деклинација $\delta = +49^\circ 42' 23''$. Њен азимут у тренутку највеће дигресије дат је изразом

$$\sin A = \pm \cos \delta \sec \varphi,$$

или, ако га трансформишемо за нумеричку примену, биће

$$\operatorname{tg} A = \cos \delta [\operatorname{cosec}(\delta + \varphi) \operatorname{cosec}(\delta - \varphi)]^{\frac{1}{2}}$$

Према томе ћемо за промену азимута у западној највећој дигресији имати:

$\delta = +49^{\circ} 42' 23''$,	$[\operatorname{cosec}(\delta + \varphi)]$	0.00 135,	за $t = 10^s$,	$\frac{1}{2}(15 t)^2 = 11250$:
$\varphi = +44 \ 48 \ 13$,	$[\operatorname{cosec}(\delta - \varphi)]$	1.06 821,	$\left[\frac{1}{2}(15 t)^2\right]$	4.051,
$\delta + \varphi = 94 \ 30 \ 36$,	S	1.06 956,	$2[\sin \delta]$	9.765 - 10,
$\delta - \varphi = 4 \ 54 \ 10$;	$\frac{1}{2}S$	0.53 478,	$[\operatorname{tg} A]$	0.345
	$[\cos \delta]$		9.81 070,	$[\operatorname{arc} 1'']$
	$[\operatorname{tg} A]$	0.34 548;	$[\Delta A]$	8.847 - 10,

према томе је $A_d = 65^{\circ} 42' 17''$;

$$\Delta A = -0''.07.$$

119. До израза за израчунавање малих промена висине и азимута некретница долазимо диференцирањем познатих образаца

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H, \quad (1)$$

$$\cos h \sin A = \cos \delta \sin H. \quad (2)$$

Диференцирањем првог обрасца по H имаћемо

$$\cos h \frac{dh}{dH} = -\cos \varphi \cos \delta \sin H.$$

Како је, међутим,

$$\cos \delta \sin H = \cos h \sin A,$$

то, пошто извршимо смену и скратимо, добивамо за промену висине

$$\frac{dh}{dH} = -\cos \varphi \sin A. \quad (I)$$

Диференцирамо ли (2) имаћемо

$$-\sin h \sin A \frac{dh}{dH} + \cos h \cos A \frac{dA}{dH} = \cos \delta \cos H \frac{dH}{dH}.$$

Но ако узмемо у обзир да је

$$\frac{dh}{dH} = -\cos \varphi \sin A \frac{dH}{dH} = -\cos \delta \sin q \frac{dH}{dH},$$

где q означава паралактички угао, горњи израз за промену азимута, после ове смене, постаје

$$\cos h \cos A \frac{dA}{dH} = \cos \delta (-\sin q \sin A \sin h + \cos H) \frac{dH}{dH}.$$

За израз у загради, на десној страни, имамо, према обрасцу за углове,

$$\cos H - \sin q \sin A \sin h = \cos A \cos q;$$

142

те тако, пошто сменимо и скратимо, добивамо за промену азимута

$$\frac{dA}{dH} = \cos \delta \cos q \sec h. \quad (II)$$

Да бисмо ове промене добили изражене у секундама угла за секунду звезданог времена, треба у изразима (I) и (II) ставити:

$$dh = (dh)'' \text{ arc } 1'', \quad dA = (dA)'' \text{ arc } 1'', \quad dH = 15 \text{ arc } 1'',$$

и добивамо за секундске промене

$$(dh)'' = -15 \cos \varphi \sin A,$$

$$(dA)'' = -15 \cos \delta \sec h \cos q.$$

Одавде се види да је:

а) при излазу некретнице: $(dh)'' > 0$, јер је $A > \pi$; $(dA)'' = 15 \cos \delta \cos q$, јер је $h=0$;

б) при пролазу кроз први вертикал, то јест за $A = \pm \frac{\pi}{2}$, $(dh)'' = \mp 15 \cos \varphi$,

ово је, уједно, и највећа секундска промена висине некретнице у току дана. Што се тиче промене азимута некретнице при пролазу (ако уопште пролази) кроз први вертикал, то јест кад је $A = \pm \frac{\pi}{2}$, значи и

$$\cos \delta \cos q = \sin \varphi \cos h,$$

она постаје

$$(dA)'' = 15 \sin \varphi;$$

в) у тренутку горње кулминације, то јест за $A=0$, или $A=\pi$, биће

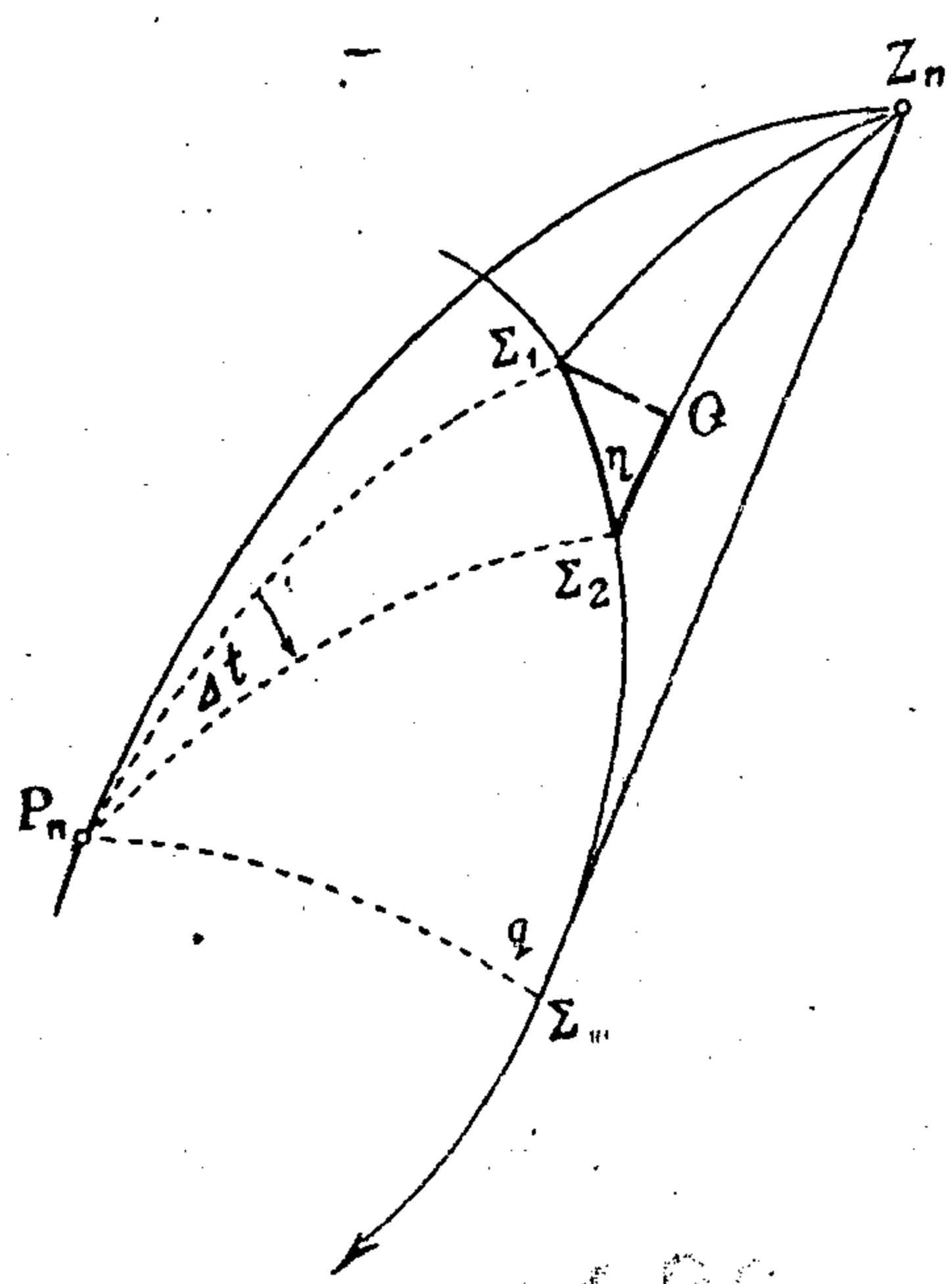
$$(dh)'' = 0;$$

а како је, у том тренутку, $q=0$, или $q=\pi$ (према томе да ли некретница кулминира јужно или северно од посматрачева зенита), биће

$$(dA)'' = 15 \cos \delta \sec h =$$

$$= 15 \cos \delta \operatorname{cosec} [\pm (\varphi - \delta)].$$

Ово је, уједно, и највећа секундска промена азимута некретнице у току дана.



Сл. 69. 86

120. 1. Претставимо на сл. 69 са Σ_1 и Σ_2 два блиска положаја некретнице која кулминира са северне стране посматрачева зенита, рецимо, у кратком временом размаку Δt звезданог времена. Ако Δt узмемо довољно малено, моћи ћемо сматрати мали правоугли троугао на сфери $\Sigma_1 \Sigma_2 Q$

као — равни. Његова хипотенуза је $\Sigma_1 \Sigma_2 = \sigma$, то јест лук паралела де-клинација δ који некретница описује за Δt .

Промена висине некретнице за Δt звезданог времена претстављена је страном троугла $Q\Sigma_2 = \Delta h$; а то је, као што видимо, пројекција хипотенузе σ на вертикал $Z_n\Sigma_2$ звезде, дакле

$$\Delta h = Q\Sigma_2 = \sigma \cos \eta = \Delta t \cos \delta \cos \eta;$$

према томе, свакако је мања од σ . Она ће бити највећа кад је $\cos \eta = 1$, или $\eta = 0$. Промена висине је тада

$$\Delta h = \Delta t \cos \delta,$$

а знака је: позитивна са источне, негативна са западне стране меридијана. Ову промену достиже звезда кад јој вертикал постане тангента на паралел звезде, дакле у положају означеном на слици са Σ_n , то јест у тренутку највеће дигресије њене.

2. За промену висине добивамо, из обрасца

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H,$$

ако диференцирамо,

$$\cos h dh = -\cos \varphi \cos \delta \sin H dH.$$

Извршимо ли смену

$$\cos \varphi \sin H = \cos h \sin q,$$

добивамо, пошто скратимо,

$$dh = -\cos \delta \sin q dH,$$

где је са q означен паралактички угао.

Израз на десној страни достиже највећу апсолутну вредност кад је $|\sin q| = 1$, то јест $q = \pm \frac{\pi}{2}$, дакле у положају највеће дигресије звезде.

Промена за секунду звезданог времена је тада, у секундама угла,

$$(dh)'' = \pm 15 \cos \delta \operatorname{arc} 1''.$$

121. У положајном сферном троуглу $Z_n P_n \Sigma$ имамо

$$\cos h \sin q = \cos \varphi \sin H,$$

$$\cos h \cos q = \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos H.$$

Ако их диференцирамо добивамо

$$-\sin h \sin q dh + \cos h \cos q dq = \cos \varphi \cos H dH,$$

$$-\sin h \cos q dh - \cos h \sin q dq = \cos \varphi \sin \delta \sin H dH.$$

Помножимо ли прву са $\cos q$, другу једначину са $-\sin q$, па саберемо, имаћемо

$$\cos h dq = \cos \varphi (\cos q \cos H - \sin q \sin H \sin \delta) dH.$$

Ако још приметимо да је израз у загради, на десној страни, једнак $\cos A$, добивамо коначно

$$dq = \cos \varphi \cos A \sec h dH.$$

До истог израза смо могли доћи и полазећи, било од обрасца

$$\cos q = \cos H \cos A + \sin H \sin A \sin \varphi,$$

било од обрасца

$$\sin H \operatorname{ctg} q + \sin \delta \cos H = \operatorname{ctg} \delta \operatorname{tg} \varphi.$$

122. Означимо висину звезде у тренутку њене горње кулминације, то јест кад је њен часовни угао $H=0$, са h_0 . Ставимо ли да је h функција часовног угла и развијемо ли h у Маклоренов ред, имаћемо

$$h = h_0 + \left(\frac{dh}{dH} \right)_0 dH + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2h}{dH^2} \right)_0 dH^2 + \dots$$

Ако се ограничимо на мали времени размак пре или после кулминације звезде, за промену њене висине налазимо

$$\Delta h = \left(\frac{dh}{dH} \right)_0 dH + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2h}{dH^2} \right)_0 dH^2.$$

Да бисмо могли израчунати промену висине, треба, као што видимо, да нађемо први и други извод њен по часовном углу. Први смо већ користили и знамо (в. решење Зад. 119, израз (I)) да је

$$\frac{dh}{dH} = -\cos \varphi \sin A.$$

Одавде добивамо за други извод висине по часовном углу

$$\frac{d^2h}{dH^2} = -\cos \varphi \cos A \frac{dA}{dH}.$$

Знамо, међутим, да је

$$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos A.$$

Одавде диференцирањем налазимо

$$0 = (\cos h \sin \varphi + \sin h \cos \varphi \cos A) \frac{dh}{dH} + \cos h \cos \varphi \sin A \frac{dA}{dH}.$$

Уврстимо сад овде, место израза у загради, вредност која му одговара према познатом обрасцу и, место првог извода висине по часовном углу, раније нађену вредност његову, па ћемо имати

$$0 = -\cos \delta \cos q \cos \varphi \sin A + \cos h \cos \varphi \sin A \frac{dA}{dH}.$$

Одавде налазимо за извод азимута

$$\frac{dA}{dH} = \cos \delta \cos q \sec h,$$

тако да за други извод висине добивамо

$$\frac{d^2h}{dH^2} = -\cos \varphi \cos A \cos \delta \cos q \sec h.$$

У задатку се тражи вредност промене висине у тренутку горње кулминације α Tauri (Aldebaran). Но у том тренутку је

$$\left(\frac{dh}{dH}\right) = 0, \quad h_0 = 90^\circ - (\varphi - \delta), \quad A = 0, \quad q = 0.$$

Према томе, за промену висине имаћемо

$$\Delta h = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2h}{dH^2}\right) dH^2 = -\frac{1}{2} \cos \varphi \cos \delta \operatorname{cosec}(\varphi - \delta) dH^2.$$

Унесемо ли овамо вредности података из задатка биће:

$\varphi = +44^\circ 48' 13''$,	[cos φ]	9.85 097 - 10,	
$\delta = +16 \ 25 \ 19$,	[cos δ]	9.98 191 - 10,	
$\varphi - \delta = 28 \ 22 \ 54$;	[cosec ($\varphi - \delta$)]	0.32 299,	
	$\left[\frac{1}{2}\right]$	9.69 897 - 10,	
$dH = 60 \operatorname{arc} 1^s$,	2 [900]	5.90 848,	
$= 60 \cdot 15 \operatorname{arc} 1''$,	[arc $1''$]	4.68 557 - 10,	
$dH^2 = (900)^2 \operatorname{arc} 1''$;	[\Delta h]	0.44 889 _n ;	$\Delta h = -2''.81.$

123. Претставимо на сл. 70 са Σ_1 небеско тело у тренутку кад је оно било на зенитској даљини, рецимо, z . И претпоставимо да је, место z , посматрач добио као мерену зенитску даљину $Z_n \Sigma_2 = Z_n \Sigma_1 + Q \Sigma_2 = z + \Delta z$. Услед тога је за посматрани часовни угао нашао, место $\sphericalangle Z_n P_n \Sigma_1 = H$, часовни угао $Z_n P_n \Sigma_2 = H + \Delta H$.

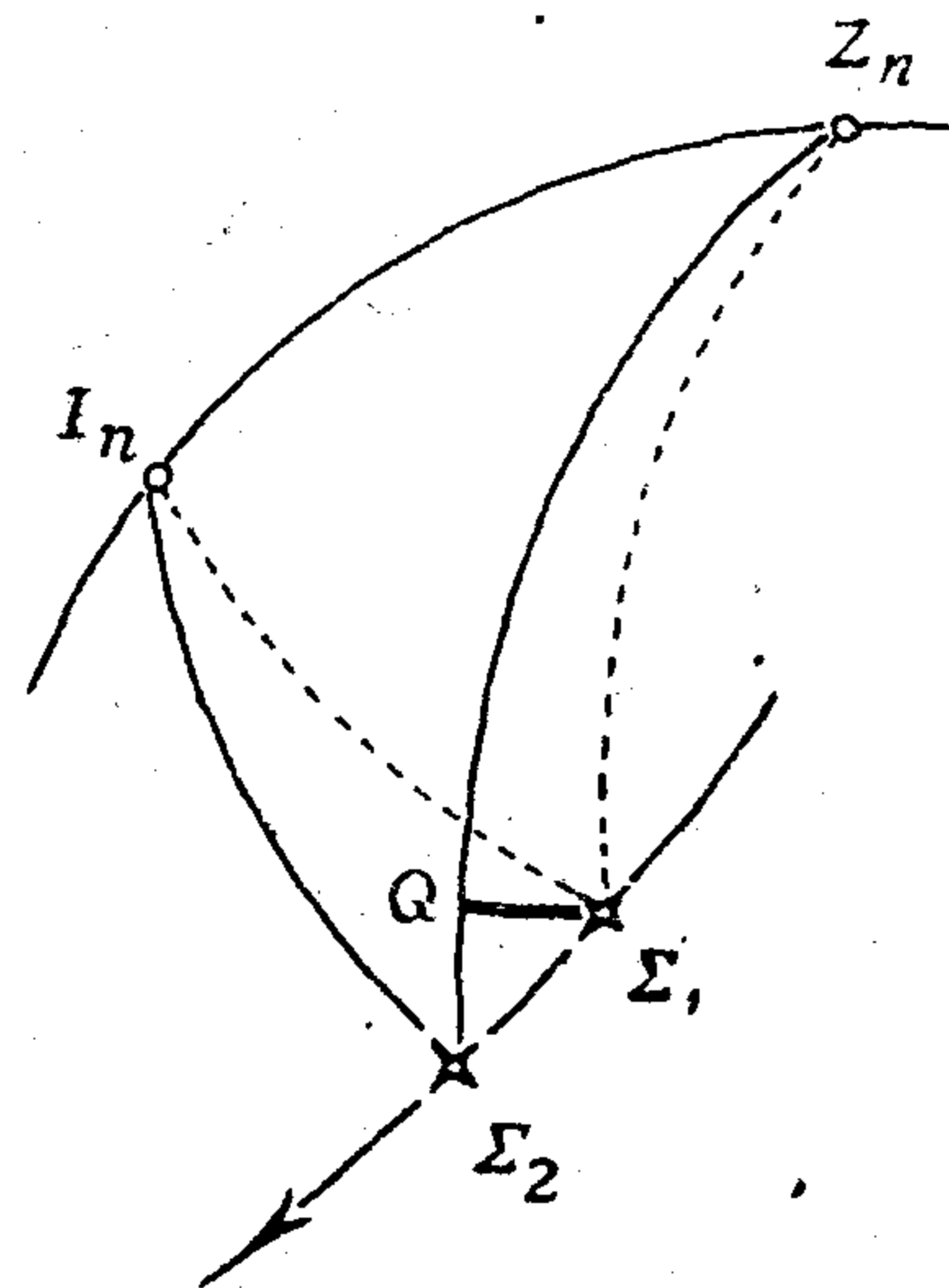
Ако претпоставимо да је грешка Δz довољно малена, биће и dH малено. У том случају можемо мали правоугли троугао на сфери $Q \Sigma_1 \Sigma_2$ третирати као равни правоугли троугао. Ако означимо деклинацију небеског тела са δ , троуглова хипотенуза, $\Sigma_1 \Sigma_2$, као лук паралела деклинације δ над углом код пола, ΔH , биће $\Sigma_1 \Sigma_2 = \Delta H \cos \delta$.

С друге стране, ако означимо са q паралактички угао, $P_n \Sigma_1 Z_n$, и приметимо да је $\sphericalangle P_n \Sigma_1 Z_n = \sphericalangle Q \Sigma_1 \Sigma_2 = q$ имаћемо из троугла $Q \Sigma_1 \Sigma_2$

$$Q \Sigma_2 = \Delta z = \Sigma_1 \Sigma_2 \sin q,$$

дакле

$$\Delta z = \Delta H \cos \delta \sin q.$$



Сл. 70.

Одавде добивамо

$$\Delta H = \Delta z \sec \delta \operatorname{cosec} q.$$

Додамо ли још да је у положајном сферном троуглу $Z_n P_n \Sigma_1$

$$\cos \delta \sin q = \cos \varphi \sin A,$$

и извршимо ли ту смену, имаћемо коначно за промену поправке часовника у функцији грешке зенитске даљине

$$\Delta H = \Delta z \sec \varphi \operatorname{cosec} A.$$

До овог израза долазимо аналитичким путем диференцирањем обрасца

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H.$$

Тако добивамо

$$\sin z \, dz = \cos \varphi \cos \delta \sin H \, dH,$$

а, после познате смене,

$$\cos \delta \sin H = \sin z \sin A,$$

и пошто скратимо, добивамо већ нађени израз

$$dH = dz \sec \varphi \operatorname{cosec} A.$$

Из овог израза видимо да ће, при одређеној вредности грешке dz (извесног посматрача, једним инструментом), грешка ΔH бити утолико мања уколико буде био мањи фактор $\operatorname{cosec} A$. Овај је најмањи за $A = \pm \frac{\pi}{2}$, што значи кад се небеско тело посматра у првом вертикалу.

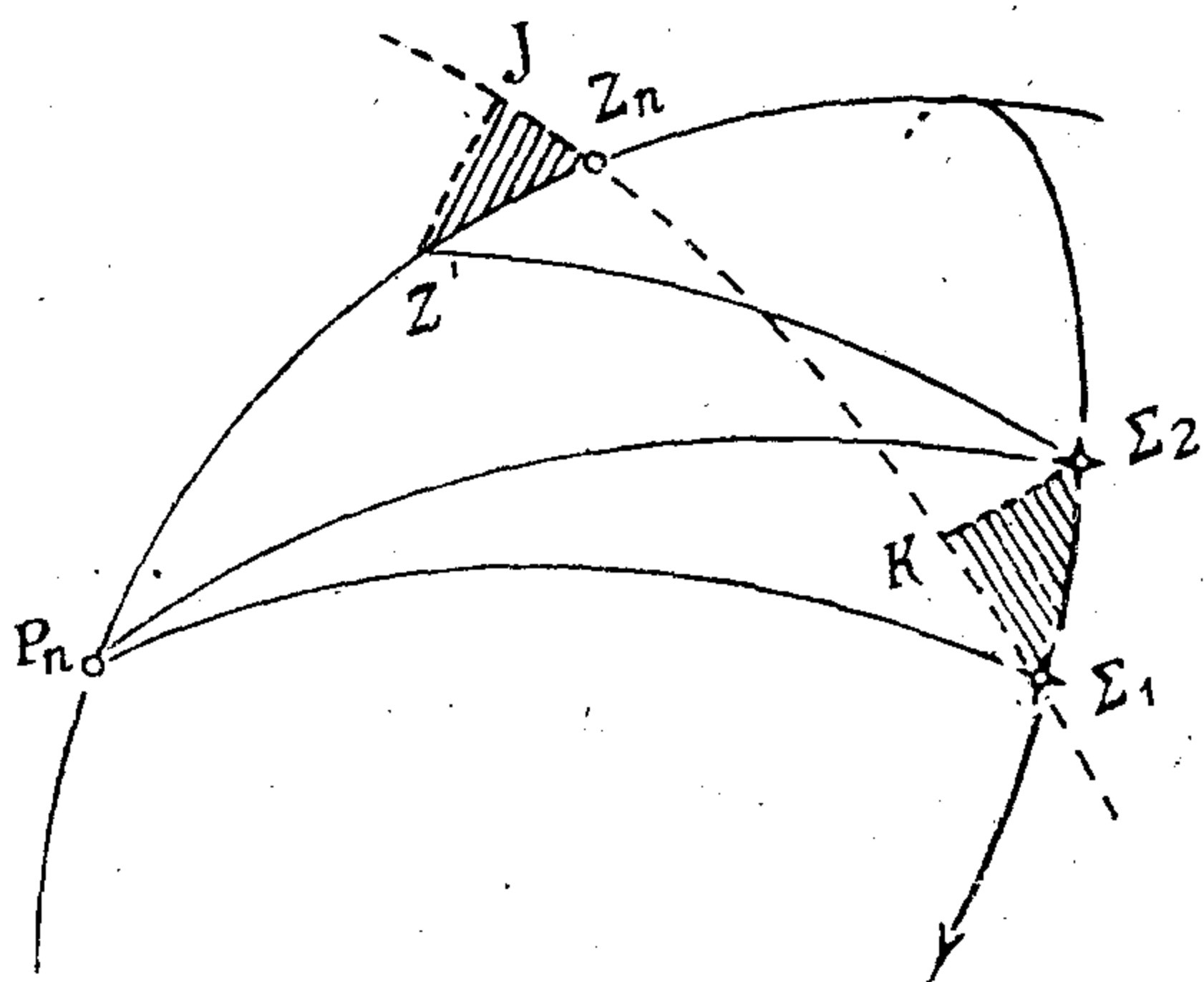
2. Претставимо на сл. 71 са Σ_1 положај небеског тела у тренутку посматрања, на зенитској даљини, рецимо, $z = Z_n \Sigma_1$. Да је, при одређивању (или читању) часовног угла, посматрач узео за своју колатитуду $Z_n P_n$, он би за часовни угао био нашао $\sphericalangle Z_n P_n \Sigma_1$. Но он је за колатитуду узео $Z' P_n = Z_n P_n - \Delta \varphi$.

Услед тога је за мерену зенитску даљину он уствари узео $Z' \Sigma_2 = Z_n \Sigma_1 = z$, те је, тако, за часовни угао нашао $\sphericalangle Z' P_n \Sigma_2 = Z_n P_n \Sigma_1 - \Delta H$.

Претпоставићемо да је учињена грешка $\Delta \varphi$ довољно малена, тако да можемо сматрати лукове великих кругова $Z' \Sigma_2$ и $Z_n \Sigma_1$ довољно блиске један другом, да лукове — пројекције можемо узети (в. сл. 71) $Z_n J = \Sigma_1 K$. Ако су ти услови

остварени, онда је у малом правоуглом троуглу $Z_n Z' J$

$$J Z_n = -\Delta \varphi \cos A,$$



Сл. 71.

а у троуглу, опет правоуглом, $\Sigma_2 K \Sigma_1$,

$$K \Sigma_1 = \Delta z = \Sigma_1 \Sigma_2 \sin q = \Delta H \cos \delta \sin q,$$

где је положајни угао $P_n \Sigma_2 Z' = \sphericalangle K \Sigma_2 \Sigma_1$.

Са поменутом претпоставком налазимо

$$-\Delta \varphi \cos A = \Delta H \cos \delta \sin q,$$

дакле

$$\Delta H = -\Delta \varphi \cos A \sec \delta \operatorname{cosec} q.$$

Узмемо ли и то још у обзир да је у положајном сферном троуглу $Z_n P_n \Sigma_1$

$$\cos \delta \sin q = \cos \varphi \sin A,$$

налазимо за поправку часовног угла у функцији грешке географске ширине, $\Delta \varphi$,

$$\Delta H = -\Delta \varphi \operatorname{ctg} A \sec \varphi.$$

Из овог израза, уједно, видимо да ће, при одређеној величини грешке $\Delta \varphi$, грешка у часовном углу бити најмања за $A = \pm \frac{\pi}{2}$.

До истог израза за грешку ΔH можемо доћи и аналитичким путем. Ако диференцирамо образац

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H,$$

сматрајући за променљиве у њему само φ и H , добивамо

$$0 = (\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos H) d\varphi - \cos \varphi \cos \delta \sin H dH.$$

Извршимо ли у њему познате смене из положајног сферног троугла $Z_n P_n \Sigma$, имаћемо

$$0 = -\sin z \cos A d\varphi - \cos \varphi \sin z \sin A dH.$$

Одавде, пошто скратимо, налазимо опет, као и горе,

$$\Delta H = -d\varphi \operatorname{ctg} A \sec \varphi.$$

124. У тренутку залаза небеског тела, то јест за $z = \frac{\pi}{2}$, имамо из положајног сферног троугла за азимут и часовни угао обрасце

$$\cos A = -\sec \varphi \sin \delta \quad \text{и} \quad \cos H = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta,$$

то јест

$$A = \arccos(-\sec \varphi \sin \delta),$$

$$H = \arccos(-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta).$$

За разлику ћемо имати, према томе,

$$A - H = \arccos(-\sec \varphi \sin \delta) - \arccos(-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta).$$

То је, као што видимо, за одређеног посматрача, функција само деклинације небеског тела. Према томе ће услов за максимум те разлике бити

$$\frac{d(A - H)}{d\delta} = 0.$$

Значи

$$\frac{\sec \varphi \cos \delta}{\sqrt{1 - \sec^2 \varphi \sin^2 \delta}} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos^2 \delta \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta}} = 0,$$

то јест

$$\frac{\cos \delta}{\sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \delta}} = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta \sqrt{\cos^2 \varphi \cos^2 \delta - \sin^2 \varphi \sin^2 \delta}}.$$

Приметимо ли, међутим, да је

$$\cos^2 \varphi \cos^2 \delta - \sin^2 \varphi \sin^2 \delta = (1 - \sin^2 \varphi)(1 - \sin^2 \delta) - \sin^2 \varphi \sin^2 \delta = \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta,$$

добивамо, пошто скратимо, за услов

$$\cos^2 \delta = \sin \varphi, \quad \text{то јест} \quad \cos \delta = \pm \sqrt{\sin \varphi}.$$

125. Према задатку су, у обрасцу за положајни сферни троугао

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A,$$

величине φ и A константне. Тражи се да се одреди највећа вредност деклинације небеског тела као функције висине. До услова за максимум доћи ћемо диференцирајући горњу једначину. Тако ћемо имати

$$\cos \delta \frac{d\delta}{dh} = (\sin \varphi \cosh + \cos \varphi \sin h \cos A) dh.$$

Одавде добивамо за услов

$$\frac{d\delta}{dh} = 0 = (\sin \varphi \cosh + \cos \varphi \sin h \cos A) \sec \delta,$$

то јест, ако искључимо случај небеског тела за које би било $\delta = \frac{\pi}{2}$, до-

бивамо

$$\sin \varphi \cosh + \cos \varphi \sin h \cos A = 0,$$

дакле

$$\operatorname{ctg} h = -\operatorname{ctg} \varphi \cos A.$$

Одавде видимо да ће, за посматрача на северној Земљиној хемисфери, некретница моћи тај услов задовољити над хоризонтом, то јест за $h > 0$, дакле и $\operatorname{ctg} h > 0$, само ако је

$$\cos A < 0, \quad \text{значи} \quad A > \pm \frac{\pi}{2}.$$

Зато мора бити $\delta < \varphi$. Значи, дакле, деклинација некретнице треба да буде већа од посматрачеве географске ширине да би могла, на одређеном вертикалу, бити највећа од деклинација свих осталих некретница које, у том тренутку, пролазе кроз исти вертикал.

А услов нам казује да, у том тренутку и положају некретнице, положајни сферни троугао $Z_n P_n \Sigma$ постаје правоугли, са правим — паралактичким углом.

Тај услов добивамо и непосредно из

$$\cos \delta d\delta = (\sin \varphi \cos h + \cos \varphi \sin h \cos A) dh$$

ако члан у загради, на десној страни, изразимо помоћу паралактичког угла,

$$\cos \delta d\delta = \cos \delta \cos q dh.$$

Одатле, пошто скратимо, имамо

$$\frac{d\delta}{dh} = \cos q,$$

то јест, за услов добивамо $\cos q = 0$, дакле $q = \pm \frac{\pi}{2}$.

126. Због своје велике деклинације, или мале поларне даљине (мање од 1°), Северњача (α Ursae minoris) остаје непрекидно, у току свог привидног дневног кретања, у непосредној близини северног небеског пола, дакле и посматрачева меридијана. Сем тога, она је и довољно сјајна, тако да је и мањим дурбином видљива, са северне Земљине хемисфере, такорећи преко целог дана. Због тога се често искоришћује за брзо одређивање приближне географске ширине посматрачеве. Метода за ово одређивање заснива се на решењу које овде дајемо.

Претставимо са Σ положај Северњаче на часовном углу H и зенитској даљини (в. сл. 72) $Z_n \Sigma = z$. Из положаја Σ замислимо повучен лук великог круга ΣQ нормално на посматрачев меридијан. Онда из правоуглог сферног троугла $\Sigma Q P_n$ имамо, ако страну $Q P_n$ означимо са x :

$$\cos H = \operatorname{ctg} p \operatorname{tg} x, \text{ то јест } \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} p \cos H.$$

Величина p , то јест поларна даљина Северњаче, па, према томе, и величина x су мале величине, мање од 1° , или, у радијанима, мање од 0.017. Према томе, ако занемаримо треће и више степене тих величина, биће

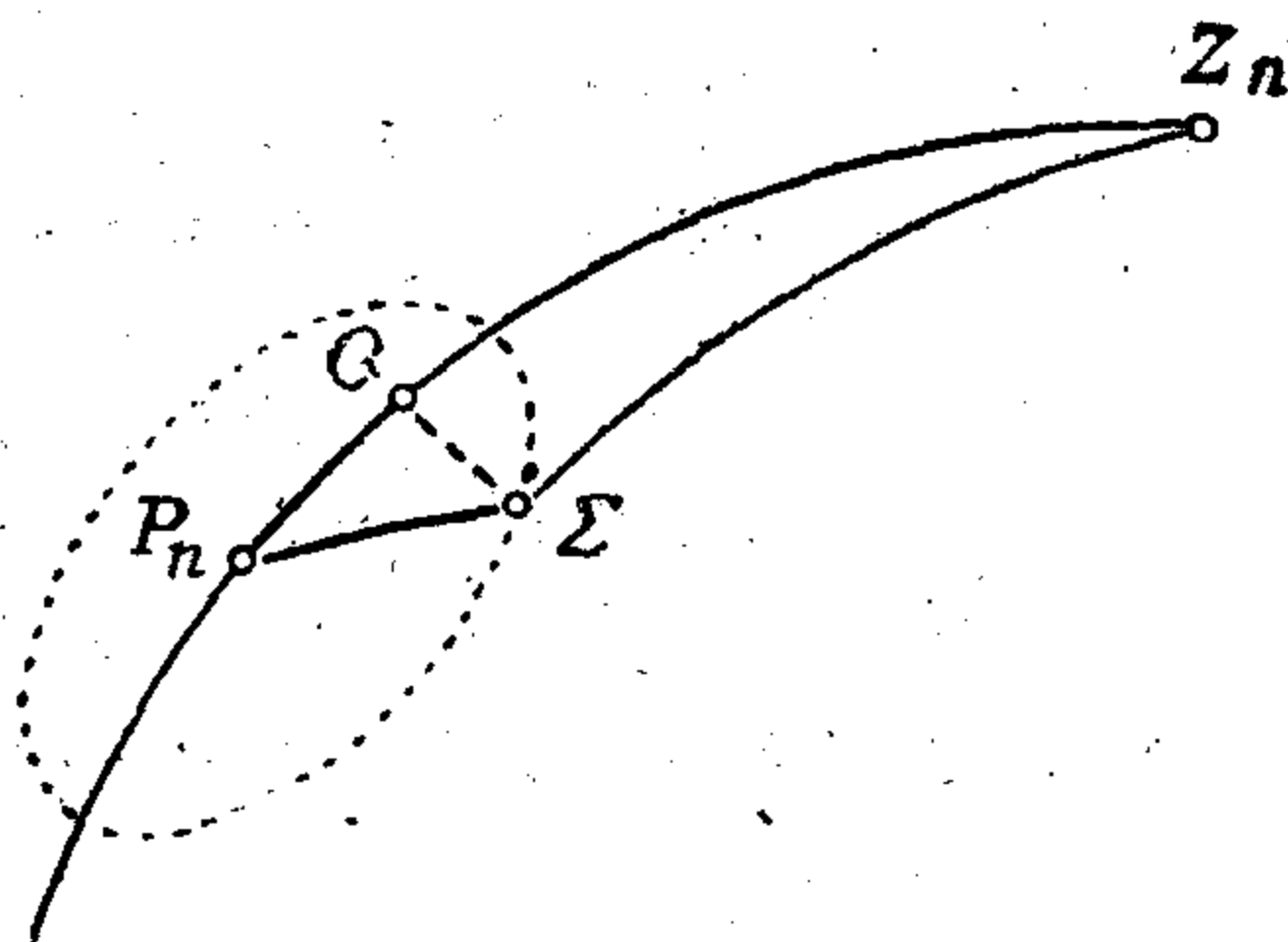
$$x = p \cos H. \quad (1)$$

Ово, уосталом, видимо и непосредно са слике.

Са слике, даље, видимо да је

$$Z_n Q + Q P_n = \frac{\pi}{2} - \varphi = z + \varepsilon + x, \quad (2)$$

где смо са ε означили малу, непознату поправку (за коју се хипотенуза, z , правоуглог сферног троугла $\Sigma Z_n Q$ разликује од катете $Q Z_n$).



Сл. 72.

Из сферног троугла $Z_n P_n \Sigma$ имамо

$$\cos z = \sin \varphi \cos p + \cos \varphi \sin p \cos H, \quad (3)$$

где су све величине, сем φ , познате. Ако искористимо околност што су величине p , ϵ и x мале (чак је ϵ реда p^2) и дозволимо себи да занемаримо треће и више степене поларне даљине, дакле и величине x (а квадрате и више степене поправке ϵ), имаћемо, с једне стране,

$$\cos p = 1 - \frac{1}{2} p^2 \quad \text{и} \quad \sin p = p,$$

а, с друге стране, користећи (2) и (1),

$$\sin \varphi = \cos [z + (\epsilon + p \cos H)] = \cos z \left[1 - \frac{1}{2} (\epsilon + p \cos H)^2 \right] - \sin z (\epsilon + p \cos H),$$

$$\cos \varphi = \sin [z + (\epsilon + p \cos H)] = \sin z \left[1 - \frac{1}{2} (\epsilon + p \cos H)^2 \right] + \cos z (\epsilon + p \cos H).$$

Уврстимо ове вредности у (3) и добићемо, занемарујући треће и више степене поларне даљине,

$$\begin{aligned} \cos z = & \left[\cos z \left(1 - \frac{1}{2} p^2 \cos^2 H \right) - \epsilon \sin z - p \sin z \cos H \right] \left(1 - \frac{1}{2} p^2 \right) + \\ & + p \left[\sin z \left(1 - \frac{1}{2} p^2 \cos^2 H \right) + \epsilon \cos z + p \cos z \cos H \right] \cos H, \end{aligned}$$

то јест

$$\begin{aligned} \cos z = & \cos z - \frac{1}{2} p^2 \cos z \cos^2 H - \epsilon \sin z - p \sin z \cos H - \frac{1}{2} p^2 \cos z + \\ & + p \sin z \cos H + p^2 \cos z \cos^2 H = \cos z - \epsilon \sin z - \frac{1}{2} p^2 \cos z \sin^2 H. \end{aligned}$$

Одавде налазимо, за непознату поправку

$$\epsilon = -\frac{1}{2} p^2 \operatorname{ctg} z \sin^2 H.$$

Уврстимо ли је у (2) имаћемо, у угловним секундама, ако још, место зенитске даљине, уведемо висину Северњаче,

$$\varphi = h - p \cos H + \frac{1}{2} p^2 \operatorname{tg} h \sin^2 H \operatorname{arc} 1''.$$

Одавде, у исти мах, видимо и да ће приближна географска ширина посматрачева, ако се занемаре квадрати и виши степени поларне даљине Северњаче, бити

$$\varphi = h - p \cos H.$$

САДРЖАЈ

Предговор	Стр. III
У В О Д	
I. Преглед образаца сферне тригонометрије	7
II. Редови	11
III. Преглед образаца за трансформацију астрономских координатних система	13
З А Д А Ц И	
I. Сферна тригонометрија: 1—33	19
II. Земља као небеско тело: 34—75	22
III. Привидно дневно кретање небеске сфере: 76—126	27
Р Е Ш Е Њ А	
I. Сферна тригонометрија: 1—33	37
II. Земља као небеско тело: 34—75	63
III. Привидно дневно кретање небеске сфере: 76—126	100

I. Vrednosti srednje refrakcije

II. Približna rešenja Keplerove jednačine

S a d r ž a j

- - - - -

Celu zbirku zadataka složiti, koliko god je to tehnički moguće,
kao štampano prvo izdanje prvog dela iz 1956. g.

S a d r Ź a j

Predgovor

U V O D

- I. Pregled obrazaca sferne trigonometrije
- II. Redovi
- III. Pregled obrazaca za transformaciju astronomskih koordinatnih sistema
- IV. Astronomska refrakcija
- V. Elementi teorije kretanja planeta i kometa
- VI. Sunčevu prividno godišnje kretanje

Z A D A C I

- I. Sferna trigonometrija: 1 - 33
- II. Zemlja kao nebesko telo: 34 - 75
- III. Prividno dnevno kretanje nebeske sfere: 76 - 126
- IV. Astronomska refrakcija: 127 - 150
- V. Elementi teorije kretanja planeta i kometa: 151 - 187 ..
- VI. Sunčevu prividno godišnje kretanje: 188 - 262

R E Š E N J A

- I. Sferna trigonometrija: 1 - 33
- II. Zemlja kao nebesko telo: 34 - 75
- III. Prividno dnevno kretanje nebeske sfere: 76 - 126
- IV. Astronomska refrakcija: 127 - 150
- V. Elementi teorije kretanja planeta i kometa: 151 - 187 ..
- VI. Sunčevu prividno godišnje kretanje: 188 - 262

1/2 let

O
ad. 5.1

12)
gr. 1/2

~~UVOD~~

~~I. PREGLED OBRAZACA SFERNE TRIGONOMETRIJE~~

5.1. / Obrasci za prelaz ^{sa} / apsolutnih na relativne koordinate. } Polo-

žaje dveju bliskih tačaka na nebeskoj sferi možemo određivati bilo po-
moću njihovih sfernih koordinata, u odnosu na neki od koordinatnih si-
stema $(\alpha_1, \delta_1$ i α_2, δ_2 ; ili λ_1, β_1 i λ_2, β_2) — ili takozvanih
apsolutnih koordinata — bilo pomoću veličina kojima je jed-
noznačno određen položaj jedne od njih prema drugoj (poznatih apsolut-
nih koordinata, recimo pomoću veličina: α, δ ; ili λ, β ; ili s, q)
— ili takozvanih relativnih koordinata jedne prema drugoj.

mur
u uiaj

Uočimo dve bliske tačke na nebeskoj sferi. Neka to budu tačke Σ .

mur
e uiaj

i Σ na sl. 7, i označimo:

G. 7

sfernu daljinu (uvek pozitivnu) $\Sigma \Sigma$ sa s ;
paralaktički ugao $P_1 \Sigma \Sigma$ sa q , a $P_2 \Sigma \Sigma$ sa $\pi + q$;
ili ugao između $P_2 \Sigma$ i produžetka luka $\Sigma \Sigma$ sa q ;
(apsolutne) sferne koordinate tačke Σ sa L, B , a tačke
 Σ sa \underline{L} i \underline{B} . Kraćeg pisanja radi stavimo još:

$$\underline{L} - \underline{L}_0 = \Delta \underline{L}, \quad \underline{B} - \underline{B}_0 = \Delta \underline{B}, \quad q - q_0 = \Delta q.$$

Pretpostavićemo sad da su nam date relativne koordinate druge
tačke, Σ , u odnosu prema prvoj, Σ , dakle, veličine s i q ; uz
to još i koordinata B tačke Σ . Pokazaćemo da se pomoću tih veli-
čina mogu odrediti veličine: $\Delta \underline{L}$, $\Delta \underline{B}$ i Δq . Drugim rečima, ako
nam se ^{još} \underline{L}_0 , moći ćemo odrediti apsolutne koordinate druge tačke,
 Σ .

Do traženih obrazaca najbrže ćemo doći ako na sferni trougao
 $P_1 \Sigma \Sigma$ (v. sl. 7) primenimo grupu (A.) obrazaca, izvedenih na str.

68 - 70 Sferne trigonometrije. ^{X1} Ako uporedimo sl. 25 sa str. 68 iz te knjige i našu sl. 73, videćemo odmah da

← na sl. 25		← na sl. 86	
strani <u>b</u>	odgovara	strana $\frac{\pi}{2} - \underline{B}_0$	
" <u>c</u>	"	" <u>s</u>	
" $\underline{b-a}$	"	" $\Delta \underline{B}$	
uglu <u>A</u>	"	ugao <u>q</u>	
" $(\pi - \underline{A} - \underline{B})$	"	" $(\pi - q_0 - \pi + q) = q - q_0$	
" <u>c</u>	"	" $\Delta \underline{L}$	

Zamenom dobivamo, ako zanemarimo treće i više stepene male veličine s,

$$\cos \underline{B}_0 \Delta \underline{L} = \underline{s} \sin q_0 + \underline{s}^2 \sin q_0 \cos q_0 \operatorname{tg} \underline{B}_0,$$

$$\Delta \underline{B} = \underline{s} \cos q_0 - \frac{1}{2} \underline{s}^2 \sin^2 q_0 \operatorname{tg} \underline{B}_0,$$

$$\Delta q = \underline{s} \sin q_0 \operatorname{tg} \underline{B}_0 + \frac{1}{2} \underline{s}^2 \sin q_0 \cos q_0 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \underline{B}_0).$$

A ako je s dovoljno malo, da se može zanemariti i kvadrat te veličine, imaćemo:

$$\cos \underline{B}_0 \Delta \underline{L} = \underline{s} \sin q_0, \text{ to jest } \Delta \underline{L} = \underline{s} \sin q_0 \sec \underline{B}_0,$$

$$\Delta \underline{B} = \underline{s} \cos q_0, \quad \Delta q = \underline{s} \sin q_0 \operatorname{tg} \underline{B}_0.$$

Naravno, ovi ohrasci vrede ako se uočene tačke, dakle \underline{L}_0 i \underline{B}_0 , ne nalaze u neposrednoj blizini ^(nebeskih) polova.

U obrnutom slučaju, to jest kad su date sferne koordinate, $\underline{L}_0, \underline{B}_0$ i L, B, za odredjivanje relativnih koordinata, s i q, korišćićemo Gau-sovu grupu obrazaca:

$$\cos \underline{s} = \sin \underline{B}_0 \sin \underline{B} + \cos \underline{B}_0 \cos \underline{B} \cos (\underline{L} - \underline{L}_0),$$

$$\sin \underline{s} \sin q_0 = \cos \underline{B} \sin (\underline{L} - \underline{L}_0),$$

$$\sin \underline{s} \cos q_0 = \cos \underline{B}_0 \sin \underline{B} - \sin \underline{B}_0 \cos \underline{B} \cos (\underline{L} - \underline{L}_0).$$

Sa uvedenim oznakama za razlike sfernih koordinata i koristeći se poznatim vezama iz trigonometrije, prvi od ovih obrazaca možemo napi-

upreda!

sati:

$$1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} s = \sin \underline{B}_0 \sin \underline{B} + \cos \underline{B}_0 \cos \underline{B} - 2 \cos \underline{B}_0 \cos \underline{B} \sin^2 \frac{1}{2} \Delta \underline{L},$$

ili

$$\sin^2 \frac{1}{2} s = \sin^2 \frac{1}{2} \Delta \underline{B} + \cos \underline{B}_0 \cos \underline{B} \sin^2 \frac{1}{2} \Delta \underline{L}.$$

Na desnim stranama ove, kao i preostalih dveju jednačina iz Gaussove grupe, možemo izvršiti smenu $\underline{B} = \underline{B}_0 + \Delta \underline{B}$; u tom slučaju dobivamo

$$\sin^2 \frac{1}{2} s = \sin^2 \frac{1}{2} \Delta \underline{B} + \cos \underline{B}_0 \cos (\underline{B}_0 + \Delta \underline{B}) \sin^2 \frac{1}{2} \Delta \underline{L},$$

$$\sin s \sin q_0 = \cos (\underline{B}_0 + \Delta \underline{B}) \sin \Delta \underline{L},$$

$$\sin s \cos q_0 = \sin \Delta \underline{B} + 2 \sin \underline{B}_0 \cos (\underline{B}_0 + \Delta \underline{B}) \sin^2 \frac{1}{2} \Delta \underline{L}.$$

Pretpostavimo li da su uočene tačke blizu jedna druge, samo da se ne nalaze u neposrednoj blizini ^(nebeskih) polova, iz ovih obrazaca dobivamo, ako zanemarimo veličine trećeg i višeg reda u odnosu prema s, $\Delta \underline{L}$ i $\Delta \underline{B}$

$$s^2 = (\Delta \underline{B})^2 + \cos^2 \underline{B}_0 (\Delta \underline{L})^2 - \sin \underline{B}_0 \cos \underline{B}_0 \Delta \underline{B} (\Delta \underline{L})^2,$$

$$s \sin q_0 = \cos \underline{B}_0 \Delta \underline{L} - \sin \underline{B}_0 \Delta \underline{B} \Delta \underline{L},$$

(E)

$$s \cos q_0 = \Delta \underline{B} + \frac{1}{2} \sin \underline{B}_0 \cos \underline{B}_0 (\Delta \underline{L})^2.$$

A ako se zanemare veličine drugog i viših redova, dobivamo

$$s^2 = (\Delta \underline{B})^2 + \cos^2 \underline{B}_0 (\Delta \underline{L})^2,$$

$$s \sin q_0 = \cos \underline{B}_0 \Delta \underline{L},$$

(F)

$$s \cos q_0 = \Delta \underline{B}.$$

Ovi obrasci imaju i geometrijsko svoje značenje. U tački \underline{L}_0 zamislimo položenu tangentnu ravan na sferi, i

u njoj pravougli koordinatni sistem sa osama

$\underline{L}_0 \underline{E}$ i $\underline{L}_0 \underline{H}$. Sa sl. ~~8~~ vidimo da je osa $\underline{L}_0 \underline{H}$

tangenta na meridijanu kroz tačku \underline{L}_0 , i to

usmerena ka polu, \underline{P}_n . Osa $\underline{L}_0 \underline{E}$ je tan-

genta na paralelu kroz tačku \underline{L}_0 , a

usmerena je tako da

ugao između $\underline{L}_0 \underline{E}$ i $\underline{L}_0 \underline{H}$, računat u smeru sfernih koordinata tačke \underline{L} , bude jednak $+\frac{\pi}{2}$. Kako je u izrazima o kojima je reč zanemaren kvadrat veličine s, možemo tačku \underline{L} , na sferi, zameniti njenom projekcijom na tangentnu ravan, \underline{S} . Za polarne koordinate tačke \underline{S} ima-

sl. 8

sl. 8

Ca. 8

~~Ca. 8~~

mo, u ovom slučaju, \underline{s} i $\frac{\sqrt{r}}{2} - \underline{q}_0$, a za pravolinijske, ako ih označimo sa ξ i η ,

$$\xi = \underline{s} \sin \underline{q}_0 = \Delta \underline{L} \cos \underline{B}_0, \quad \eta = \underline{s} \cos \underline{q}_0 = \Delta \underline{B}.$$

Oдавде, opet, dobivamo

$$\operatorname{tg} \underline{q}_0 = \frac{\Delta \underline{L}}{\Delta \underline{B}} \cos \underline{B}_0, \quad \underline{s}^2 = (\Delta \underline{B})^2 + (\Delta \underline{L})^2 \cos^2 \underline{B}_0.$$

A to su isti izrazi koje bismo našli da smo iz \underline{Z} spustili luk meridijana \underline{ZU} , normalno na paralelu kroz \underline{Z}_0 , i tako dobiveni mali pravougli trougao na sferi, sa hipotenuzom $\underline{Z}_0 \underline{Z} = \underline{s}$ i katetama $\underline{ZU} = \Delta \underline{B}$ i $\underline{Z}_0 \underline{U} = \Delta \underline{L} \cos \underline{B}_0$, — smatrali kao ravni.

2. Диференцијалне одраске координат сферне пројекције / гр. 1/2 фт

$$\begin{aligned} dz &= -\cos q d\delta + \cos A d\varphi + \begin{cases} \cos \varphi \sin A dH, \\ \cos \delta \sin q dH, \end{cases} \\ d\delta &= \cos H d\varphi - \cos q dz + \begin{cases} \sin z \sin q dA, \\ \cos \varphi \sin H dA, \end{cases} \\ d\varphi &= \cos A dz + \cos H d\delta + \begin{cases} \cos \delta \sin H dq, \\ \sin z \sin A dq, \end{cases} \\ dH &= \sin \varphi dA - \sin \delta dq + \begin{cases} \cos q \sin A dz, \\ \cos \delta \sin q dz, \end{cases} \\ dA &= \cos z dq + \sin \varphi dH + \begin{cases} \sin z \sin q d\delta, \\ \cos q \sin H d\delta, \end{cases} \\ dq &= -\sin \delta dH + \cos z dA - \begin{cases} \cos \delta \sin H d\varphi, \\ \sin z \sin A d\varphi. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin z dA &= \sin q d\delta - \cos z \sin A d\varphi + \cos \delta \cos q dH, \\ \cos \delta dq &= -\sin H d\varphi - \sin \delta \sin q dz + \cos \varphi \cos H dA, \\ \cos \varphi dH &= \sin A dz + \sin \varphi \sin H d\delta + \sin z \cos A dq, \\ \sin z dq &= -\sin A d\varphi + \cos z \sin q d\delta + \cos \varphi \cos A dH. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\beta &= \cos q d\delta - \sin \epsilon \cos \lambda d\alpha - \sin \lambda d\epsilon, \\ \cos \beta d\lambda &= \sin q d\delta + \cos \delta \cos q d\alpha + \sin \beta \cos \lambda d\epsilon, \\ \cos \beta dq &= \sin \beta \sin q d\delta - \sin \epsilon \sin \lambda d\alpha + \cos \lambda d\epsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\delta &= \cos q d\beta + \sin \epsilon \cos \alpha d\lambda + \sin \alpha d\epsilon, \\ \cos \delta d\alpha &= -\sin q d\beta + \cos \beta \cos q d\lambda - \sin \delta \cos \alpha d\epsilon, \\ \cos \delta dq &= \sin \delta \sin q d\beta - \sin \epsilon \sin \alpha d\lambda + \cos \alpha d\epsilon. \end{aligned}$$

19

(4.10)

gubh

IV. ASTRONOMSKA REFRAKCIJA

19.12.19

1. Definicije Na sl. 9 predstavljani su sa:

- P — posmatrač (na dnu Zemljine atmosfere, visine PK);
- Z — posmatračev zenit;
- S — stvarni položaj uočenog nebeskog tela;
- SI — put svetlosnog zraka sa uočenog tela do nailaska na Zemljinu atmosferu;
- z — prava zenitska daljina uočenog nebeskog tela (S);
- IP — putanja kojom je zrak prošao kroz Zemljinu atmosferu;
- PS — pravac u kojem posmatrač vidi uočeno nebesko telo;
- z₀ — prividna zenitska daljina posmatranog nebeskog tela;
- R — razlika između prave i prividne zenitske daljine ili (astronom-ska) refrakcija posmatranog tela:

$$R = z - z_0, \text{ to jest } z = z_0 + R.$$

Astronomska refrakcija dejstvuje samo u ravni određenoj posmatračevom vertikalom (PZ) i položajem uočenog nebeskog tela (S). Ona ne utiče na azimut; ona samo smanjuje zenitsku daljinu (povećeva visinu) uočenog nebeskog tela.

Ako se i uočeno telo nalazi (ne izvan, već) u Zemljinoj atmosferi, promenu u pravcu koju pretrpi zrak na putu od uočenog tela do posmatrača zovemo (za razliku od astronomske) - terestričkom refrakcijom.

19

2. Izraz za astronomsku refrakciju. Pod određenim pretpostavkama o obliku Zemlje, sklopu Zemljine atmosfere i uslovom da posmatrano nebesko telo nije pri samom horizontu (z₀ blizu 90°), a na osnovi poznatog zakona o prelamanju svetlosti, — dobiva se izraz za astronomsku refrakciju u obliku konvergentnog reda, po sve većim, samo neparnim, stepenima tangensa prividne zenitske daljine, dakle, oblika:

$$R = A \operatorname{tg} z_0 - B \operatorname{tg}^3 z_0 + C \operatorname{tg}^5 z_0 - D \operatorname{tg}^7 z_0 + \dots \dots \dots, \quad (I)$$

gde koeficijenti A, B, C, D, zavise od veze između indeksa ref-

rakcije i daljine (poluprečnika) atmosferskog sloja; drugim rečima, zavise od fizičkih uslova atmosfere u trenutku posmatranja. Zato, da bi posmatrana zenitka daljina tela mogla biti oslobodjena dejstva refrakcije, posmatrač treba, u trenutku posmatranja, da pročita i stanja termometra i barometra kraj instrumenta.

Za zenitske daljine manje od 75° dovoljna tačnost, za sve praktične potrebe, postiže se i samo sa prva dva člana^(I), dakle,

$$\underline{R} = \underline{A} \underline{\lg z}_0 - \underline{B} \underline{\lg^3 z}_0. \quad (II)$$

Ako se ne iziskuje naročita tačnost, može se, za zenitske daljine manje od 45°, astronomska refrakcija i jednostavno smatrati proporcionalnom tangensu posmatrane zenitske daljine. Drugim rečima, refrakcija se može predstaviti izrazom

$$\underline{R} = \underline{k} \underline{\lg z}_0, \quad (III)$$

gde se koeficijent k zove konstanta refrakcije i ima za vrednost, pri 0°C i 760 mm visine živina stuba, k = 60".3.

19

3. + Tablice astronomske refrakcije Izračunavanje vrednosti astronomske refrakcije, u svakom konkretnom slučaju, olakšano je tablicama za refrakciju (v. Tablice na str.). Ove se sastoje iz: Tablice takozvane normalne, ili srednje, refrakcije, u kojoj nalazimo, za sve zenitske daljine od 0° do 88°, vrednosti refrakcije, pri temperaturi 0°C, visini od 760 mm živina stuba, na morskome nivou i geografskoj širini 45°; i Tablica popravaka (τ i β) pomenutih srednjih vrednosti za pročitana stanja termometra, odn. barometra, kako bi se dobila prava vrednost refrakcije.

Označimo vrednost srednje refrakcije, dobivenu iz prve tablice, (ako treba interpolovanu) za posmatranu zenitsku daljinu, sa R₀. Ako sa pročitanim stanjem termometra uzmemo iz gornje tablice vrednost faktora (τ) ; sa pročitanim stanjem barometra uzmemo iz donje tablice faktor (β) , — vrednost stvarne refrakcije dobiva se iz izraza:

$$\underline{R} = \underline{R}_0 (1 + \tau)(1 + \beta). \quad (IV)$$

19

guru
de utras

4. Izrazi za dejstva refrakcije / gnr. 1/15

A. - Dejstvo refrakcije na izlaz, o.d.n. zalaz, nebeskog tela. — Usled dejstva refrakcije, posmatrač sa Zemlje vidi izlaz nebeskog tela pre no što ono dospe u njegov horizont, a zalaz vidi pošto se telo stvarno već spusti pod njegov horizont.

Ako iznos refrakcije u horizontu (za $z = 90^\circ$) označimo sa \underline{dz} (= 35'), njeno dejstvo na tr^{nutat} izlaza, odnosno zalaza, nebeskog tela deklinacije δ , na geografskoj širini φ , dato je izrazom

$$dH = \underline{dz} \sec \varphi \sec \delta \operatorname{cosec} H_0,$$

gde je H_0 određeno izrazom $\operatorname{cos} H_0 = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta.$

Promena u azimutu izlaza, odnosno zalaza, data je izrazom

$$dA = \underline{dz} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cosec} A_0,$$

gde je A_0 određeno izrazom $\operatorname{cos} A_0 = -\sin \delta \sec \varphi.$

guru
de utras

B. - Dejstvo refrakcije na ekvatorske koordinate. +

$$\begin{aligned} dH \operatorname{cos} \delta &= \underline{dz} \sin q, \\ d\delta &= -\underline{dz} \operatorname{cos} q, \\ dq &= -\underline{dz} \operatorname{tg} \delta \sin q \operatorname{tg} z, \end{aligned}$$

gde q predstavlja paralaktički ugao kod tela (Z') u položajnom sfernom trouglu $PZ\Sigma$.

19

5. Izraz za depresiju horizonta. Neka na sl. ¹⁰ ~~10~~ predstavljaju:

- P — posmatračevo oko na uzvišenju h (= AP) nad morskou površinom;
- ABB_r — deo morske (sferne) površine sa središtem u O;
- H₁H₂ — horizontalnu ravan od koje posmatrač meri visine nebeskih tela;
- B — tačka do koje bi dopirao posmatračev vid da nema atmosfere;
- B_r — tačka do koje kroz atmosferu dopire posmatračev vid;
- Δ — ugao pod kojim posmatrač vidi tačku B_r (određen horizontalnom ravni i tangentom TP, na putanju zraka u tački P) i koji

18 5/5

smo nazvali depresija horizonta;

ε — u lučnim minutama predstavlja daljinu vida u nautičkim miljama.

I sa slike vidimo da prisustvo atmosfere, dakle (terestrička) refrakcija, smanjuje depresiju horizonta (jer je $\Delta < \widehat{BPH}_1$), a povećava daljinu posmatračeva vida (za \widehat{BB}_r).

Da bismo došli do izraza za Δ i ε , označićemo:

poluprečnik Zemljine sfere sa $\underline{R} = \underline{OA} = \underline{OB}_r$;

poluprečnik putanje zraka, koji ćemo izjednačiti sa kružnim lukom —

sa $\underline{\rho} = \underline{CP} = \underline{CB}_r$;

duž \underline{CA} sa \underline{s} .

Tako imamo iz trougla \underline{AOC} :

$$\underline{s}^2 = \underline{R}^2 + (\underline{\rho} - \underline{R})^2 + 2\underline{R}(\underline{\rho} - \underline{R})\cos\varepsilon.$$

CA. 10

Primetimo li da je ugao ε neznatan, jer je i visina \underline{h} neznatna, i

uzmemo da je

$$\cos\varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2,$$

poslednja jednačina će preći u

$$\underline{s}^2 = \underline{\rho}^2 - \underline{R}(\underline{\rho} - \underline{R})\varepsilon^2.$$

S druge strane, iz trougla \underline{ACP} imamo

$$\underline{h}^2 = \underline{\rho}^2 + \underline{s}^2 - 2\underline{\rho}\underline{s}\cos\gamma.$$

Primetimo li da je i ugao γ , iz već pomenutog razloga, neznatan, i uz-

memo li $\cos\gamma = 1$, iz poslednje jednačine dobivamo

$$\underline{s} = \underline{\rho} - \frac{\underline{h}}{\underline{R}}.$$

Unesemo li ovu vrednost za \underline{s} u prethodnu jednačinu, nalazimo

$$\underline{R}(\underline{\rho} - \underline{R})\varepsilon^2 = 2\underline{\rho}\underline{h} - \underline{h}^2.$$

Ako još kvadrat visine, na desnoj strani, zanemarimo, nalazimo

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\underline{\rho}\underline{h}}{\underline{R}(\underline{\rho} - \underline{R})}}.$$

Za depresiju horizonta, $\Delta = \widehat{TPH}_1 = \widehat{APC}$, nalazimo iz trougla

\underline{APC} ,

$$\sin\Delta = \frac{\underline{\rho} - \underline{R}}{\underline{\rho}}\sin\varepsilon,$$

2. + važniji obrasci *gn 1/2 su*

$$p = \begin{cases} a(1-e^2), \\ a \cos^2 \varphi, \\ b \sqrt{1-e^2}; \end{cases} \quad \begin{aligned} \cos \varphi &= \sqrt{1-e^2}, \\ b &= a \sqrt{1-e^2}, \\ b^2 &= pa; \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sqrt{1+e} &= \sqrt{2} \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi), \\ \sqrt{1+e} - \sqrt{1-e} &= 2 \sin \frac{1}{2}\varphi, \\ \sqrt{1+e} \sqrt{1-e} &= 2 \cos \frac{1}{2}\varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \sin v &= a \sqrt{1-e^2} \sin E, & \rho \sin w &= a \sqrt{1-e^2} \sin E, \\ r \cos v &= a(\cos E - e), & \rho \cos w &= a(\cos E + e), \\ \sin 2v &= \sqrt{1-e^2} \sin E (1 - e \cos E)^{-1}, & \sin w &= \sqrt{1-e^2} \sin E (1 + e \cos E)^{-1}, \\ \cos v &= (\cos E - e)(1 - e \cos E)^{-1}, & \cos w &= (\cos E + e)(1 + e \cos E)^{-1}, \\ r \sin^2 \frac{1}{2}v &= a(1+e) \sin^2 \frac{1}{2}E, & \rho \sin^2 \frac{1}{2}w &= a(1-e) \sin^2 \frac{1}{2}E, \\ r \cos^2 \frac{1}{2}v &= a(1-e) \cos^2 \frac{1}{2}E, & \rho \cos^2 \frac{1}{2}w &= a(1+e) \cos^2 \frac{1}{2}E, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}v &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2}E, & \operatorname{tg} \frac{1}{2}w &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2}E, \\ \sin E &= \sqrt{1-e^2} \sin v (1 + e \cos v)^{-1} = \sqrt{1-e^2} \sin w (1 - e \cos w)^{-1} = \sqrt{\sin v \sin w} \sec(v-w), \\ \cos E &= (\cos E + e)(1 + e \cos v)^{-1} = (\cos w - e)(1 - e \cos w)^{-1} = \cos(v+w) \sec(v-w), \\ \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2} &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}v \operatorname{tg} \frac{1}{2}w. \end{aligned}$$

3. + Keplerovi zakoni *gn 1/2 su*

I. Putanje planeta su elipse u čijoj jednoj žiži se nalazi Sunce.

$$r = p(1 + e \cos v)^{-1} = a(1-e^2)(1 + e \cos v)^{-1}; \quad \begin{aligned} x &= a \cos E, & y &= b \sin E = a \sqrt{1-e^2} \sin E; \\ r &= a(1 - e \cos E); & \rho &= a(1 + e \cos E). \end{aligned}$$

II. Radijivektori planeta prelaze za jednaka vremena jednake površine.

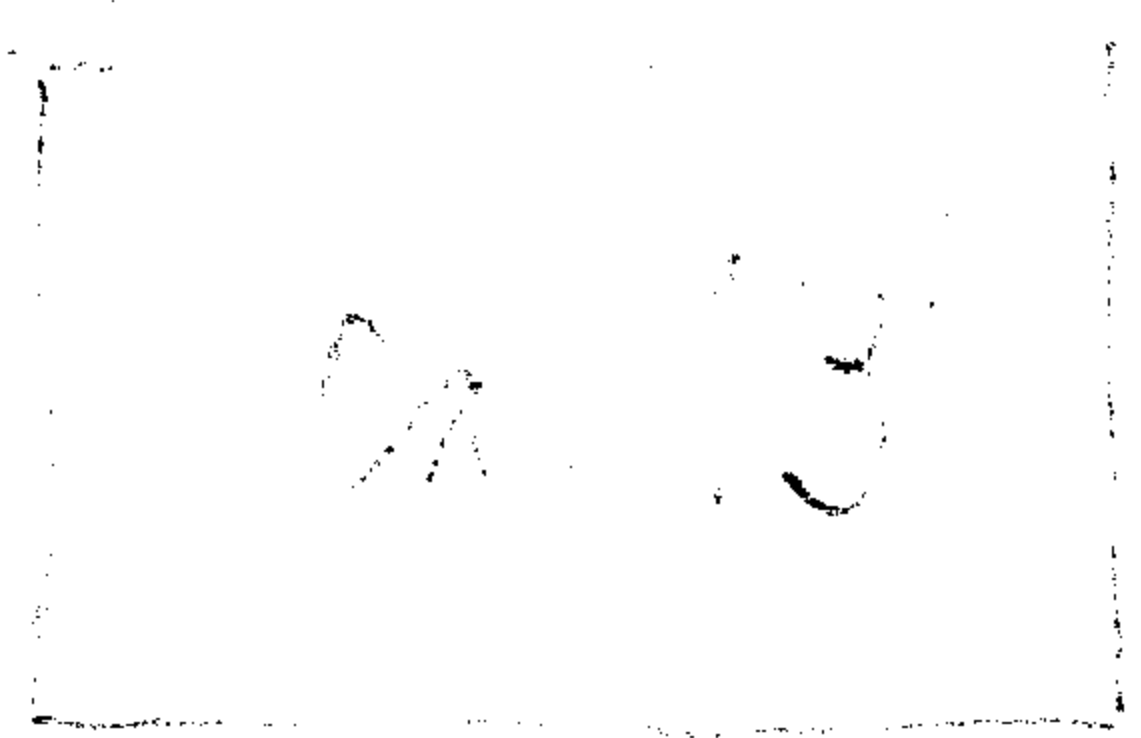
Sa sl. ~~13~~ se vidi da je površina (ΔS) eliptičkog sektora $\mathcal{S}P_1P_2$ stalno sadržana između dveju odredjenih površina: kružnih sektorâ

$$\mathcal{S}P_2Q_1 = \frac{1}{2} r_1^2 \Delta v \quad \text{i} \quad \mathcal{S}P_1Q_2 = \frac{1}{2} r_2^2 \Delta u \quad \text{ili da je}$$

$$\frac{1}{2} r_1^2 \Delta v < \Delta S < \frac{1}{2} r_2^2 \Delta u;$$

dakle i

$$\frac{1}{2} r_1^2 \frac{\Delta v}{\Delta t} < \frac{\Delta S}{\Delta t} < \frac{1}{2} r_2^2 \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$



Oдавде sleduje, ako pustimo da $\Delta t \rightarrow 0$, za površinsku brzinu izraz

$$2\dot{S} = r^2\dot{\varphi}$$

Drugi Keplerov zakon kaže da je

$$r^2\dot{\varphi} = 2\dot{S} = \underline{C}, \text{ umu, y apakoyennu koopqumama, } 2\dot{S} = \underline{xy} - \underline{yx} = \underline{C}.$$

Integraljenjem drugog dela leve od gornjih jednačina dobivamo

$$\underline{S} = \frac{1}{2}\underline{C}(t - t_0),$$

relaciju koja kaže da su površine što ih prelazi radijevektor planete - proporcionalne vremenu.

Za vrednost ove konstante dobivamo, ako primetimo da za vreme (T) jednog planetina obilaska njen radijevektor predje površinu cele (putanjske) elipse,

$$\underline{CT} = 2\underline{ak}\pi,$$

a oдавde

$$\underline{C} = \frac{2abk\pi}{T} = \frac{2\pi a^2}{T} \sqrt{1 - e^2}.$$

III. Kvadrati trajanja obilazaka planetâ oko Sunca odnose se kao kubovi velikih poluosa njihovih putanja.

$$\underline{T}_1^2 : \underline{a}_1^3 = \underline{T}_2^2 : \underline{a}_2^3 = \underline{T}_3^2 : \underline{a}_3^3 = \dots$$

4. Zakon opšte gravitacije *gr 1/2 det*

Svake dve materijalne čestice — masâ, recimo, \underline{m}_1 i \underline{m}_2 — privlače se silom (F) koja je pravo proporcionalna proizvodu njihovih masa, a obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenja (r) jedne od druge,

$$\underline{F} = \underline{k}^2 \frac{\underline{m}_1 \cdot \underline{m}_2}{\underline{r}^2},$$

gde je sa \underline{k}^2 označena gravitaciona konstanta. U jedinicama CGS - sistema to je sila kojom se uzajamno privlače dve materijalne čestice, jediničnih masâ ($\underline{m}_1 = \underline{m}_2 = 1g$), sa jedinice udaljenja jedna od druge ($\underline{r} = 1 \text{ cm}$).

Dimenzije su ove konstante $\underline{M}^1 \underline{L}^3 \underline{T}^{-2}$. Numerička njena vrednost zavisi od usvojenih jedinica.

Između konstanta \underline{C} i \underline{k} postoji veza koju možemo lako postaviti. Prema zakonu opšte gravitacije imamo za ubrzanja u odnosu prema centru

masa:

planete, mase m_0 , (u smeru ka Suncu): $\gamma_m = -k^2 \frac{M}{r^2}$;

Sunca, mase M , (u smeru ka planeti): $\gamma_M = +k^2 \frac{m_0}{r^2}$;

za relativno ubrzanje planete, u odnosu prema Suncu $\gamma = -k^2 \frac{M+m_0}{r^2}$.

S druge strane, ima^{no} za radijalno ubrzanje planete prema Suncu

$$\gamma = -\frac{C^2}{rT^2}.$$

I tako za traženu vezu izmedju konstanata C i k dobivamo

$$C = k \sqrt{p} \sqrt{M+m_0},$$

odnosno, ako Sunčevu masu usvojimo za jedinicu,

$$C = k \sqrt{p} \sqrt{1+m}.$$

9
5. + Tačan oblik III Keplerova zakona. Izjednačavanjem kvadrata poslednjeg sa ranije nadjenim izrazom za dvostruku brzinu,

$$k^2 a(1-e^2)(1+m) = \frac{4\pi^2 a^4}{T^2} (1-e^2),$$

nalazimo

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2(1+m)}{4\pi^2}.$$

Drugim rečima, za dve planete, okarakterisane veličinama-prva sa: m , a , T ; druga sa: m_1 , a_1 , T_1 imaćemo za tačan oblik III Keplerova zakona

$$\frac{a^3}{T^2} \frac{1}{1+m} = \frac{a_1^3}{T_1^2} \frac{1}{1+m_1}.$$

9
6. + Keplerova jednačina. Desnu stranu jednačine koja izražava II Keplerov zakon,

$$r^2 dv = C dt,$$

možemo izraziti pomoću ekscentrične anomalije i dobivamo

$$a^2 \sqrt{1-e^2} (1-e \cos E) dE = C dt = \frac{2\pi}{T} a^2 \sqrt{1-e^2} dt,$$

odnosno

$$(1-e \cos E) dE = \frac{2\pi}{T} dt.$$

Integraljenjem dobiva se Keplerova jednačina

$$E - e \sin E = n(t-t_0) = M,$$

gde su uvedene oznake

n - za srednje sideričko kretanje u jedinici vremena (obično dnevno);

t_0 - za trenutak prolaza planete kroz perihel, kad je $E = 0$;

M - za srednju anomaliju planete.

gr 11/12

7. + Rešavanje Keplerove jednačine Keplerova jednačina omogućuje da se odredi ekscentrična anomalija (\underline{E}), kad su date srednja anomalija (\underline{M}) i ekscentrične (\underline{e}) heliocentrične putanje tela. Drugim rečima, omogućuje da se, za dati trenutak, odredi položaj tela na putanji. Jednačina se, kao transcendentna, rešava sukcesivnim aproksimacijama. Postoji velik broj metoda za rešavanje Keplerove jednačine. Ovde ćemo prikazati ~~tri od ovih metoda.~~ ^{tri od ovih metoda.}

ve uvažljiv Metoda pomoću reda. U 13. dat je red koji ekscentričnu anomaliju predstavlja redom ^(beskonačnim) per sve većim stepenima ekscentričnosti sa koeficijentima \sin i \cos multipala srednje anomalije,

$$\underline{E} = \underline{M} + \underline{e} \sin \underline{M} + \frac{1}{2} \underline{e}^2 \sin 2\underline{M} + \frac{1}{3! 2^2} \underline{e}^3 (3^2 \sin 3\underline{M} - 3 \sin \underline{M}) + \dots$$

Ako je ekscentričnost putanje malena, red je brzo konvergentan, što znači da se, za dato \underline{e} i \underline{M} , može vrednost ekscentrične anomalije dobiti dovoljno tačna i sa prva dva do tri člana. Ukoliko je ekscentričnost veća, mora se i više članova reda uzeti da bi se postigla određena tačnost.

Pri tome treba imati u vidu da vrednosti \underline{e} , \underline{e}^2 , \underline{e}^3 , ..., moraju biti izražene u uglovnim jedinicama.

ve uvažljiv Metoda sukcesivnih aproksimacija. Najneposrednija i najpoznatija je metoda kojom se Keplerova jednačina,

$$\underline{E} - \underline{e} \sin \underline{E} = \underline{M}$$

rešava polazeći od jedne približne vrednosti ekscentrične anomalije, dakle približnog rešenja jednačine. Niže ćemo videti kako se nalazi ovo približno rešenje. Neka to bude \underline{E}_i . Popravku ovog približnog rešenja, to jest onu malu veličinu koju bi trebalo dodati toj polaznoj, približnoj, vrednosti, da bi se dobila tačna vrednost ekscentrične anomalije, označimo sa $\Delta \underline{E}_i$. Znači

$$\underline{E}_i + \Delta \underline{E}_i - \underline{e} \sin(\underline{E}_i + \Delta \underline{E}_i) = \underline{M},$$

odnosno, ako razvijemo,

$$\underline{E}_i + \Delta \underline{E}_i - \underline{e} \sin \underline{E}_i \cos \Delta \underline{E}_i - \underline{e} \cos \underline{E}_i \sin \Delta \underline{E}_i = \underline{M}.$$

Ako je \underline{E}_1 bilo izabrano dovoljno približno tačnoj vrednosti, popravka $\Delta \underline{E}_1$ će biti mala količina. Ukoliko je manja, utoliko će se pre, u poslednjoj jednačini, moći uzeti $\cos \Delta \underline{E}_1 = 1$ i $\sin \Delta \underline{E}_1 = \Delta \underline{E}_1$. U tom slučaju će poslednja jednačina preći u

$$(\underline{E}_1 - e \sin \underline{E}_1) + \Delta \underline{E}_1 (1 - e \cos \underline{E}_1) = \underline{M}_1$$

Kako su \underline{E}_1 i e poznate veličine, i vrednost prvog člana na desnoj strani je poznata; označimo je sa \underline{M}_1 . Za nepoznatu popravku ćemo, prema tome, imati

$$\Delta \underline{E}_1 = (\underline{M} - \underline{M}_1) (1 - e \cos \underline{E}_1)^{-1}$$

No ($\underline{E}_1 + \Delta \underline{E}_1$) još ne mora biti i, mahom, i nije rešenje date Keplerove jednačine, već samo njegova približnija vrednost od one polazne vrednosti. Tačnija od ove biće — ako stavimo da je $\underline{E}_2 = \underline{E}_1 + \Delta \underline{E}_1$ — $\underline{E}_2 + \Delta \underline{E}_2$. I tako ćemo imati

$$\underline{E}_2 + \Delta \underline{E}_2 - e \sin (\underline{E}_2 + \Delta \underline{E}_2) = \underline{M}_2$$

Za nepoznatu popravku ove, približnije, vrednosti nepoznate dobićemo ^{sad}

$$\Delta \underline{E}_2 = (\underline{M} - \underline{M}_2) (1 - e \cos \underline{E}_2)^{-1}$$

Ovaj postupak se mora ponoviti dok se ne dodje do vrednosti ($\underline{E}_k + \Delta \underline{E}_k$), koja zadovoljava datu Keplerovu jednačinu.

Kao prva približna vrednost (\underline{E}_1) može se uzeti vrednost date srednje anomalije (\underline{M}). Kao tačnija se može uzeti (v. u 13. red za \underline{E})

$$\underline{E}_1 = \underline{M} + e \sin \underline{M}, \text{ ili još tačnija } \underline{E}_1 = \underline{M} + e \sin \underline{M} + \frac{1}{2} e^2 \sin 2\underline{M},$$

to jest vrednost prvih triju članova reda.

Postoje i tablice (v. Tabl.), sa dvostrukim argumentom — srednjom anomalijom, kao vertikalnim ($0^\circ - 180^\circ$) i ekscentričnošću, kao horizontalnim — iz kojih se može odrediti (bilo računski, bilo grafički) približna vrednost ekscentrične anomalije, rešenja date Keplerove jednačine.

~~Прокласаћемо три од ових метода: сферну, асимпту дескриптивну релативну;
 сферну, асимпту циклическу апроксимацију, која се сматра као најбољег
 метода; и асимпту, Гаусову методу циклическу апроксимацију, која се сматра
 као најбољег метода.~~

Гаусова метода. Прокласаћемо је овако како је сам Гаус прокласио, у
 свом познатом делу „Theoria motus corporum coelestium“ (§ 13), и илустрираћемо
 је на истом нумеричком примеру.

Дато је у величини: $M = 332^{\circ} 28' 54''.77$ и $e = \sin \varphi = 0.245 3162$, треба ре-
 шити једначину

$$E - e \sin E = M.$$

Ако је E_1 аридитичко решење, онда је тражено $E = E_1 + x$. Напомињемо да се нуме-
 рички рад обави методом итерација са сепаратном (ефективном и осам)
 децималом.

Уравњено e у секундама и означимо га e'' ; тако $e \times 206 264''.8 = e''$.
 Потражићемо, заједно, у итерационим таблицама $\log \sin E_1$ и $\log(e'' \sin E_1)$,
 и израчунамо, уједно, аргументај $\log \sin E_1$ за $1''$ аргументаја угла E_1 , — и ана-
 логно га λ — и аргументај $\log(e'' \sin E_1)$ за једнаку дрота $e'' \sin E_1$ — и оз-
 начимо га μ .

Метода пронаћи најпремање да се може сматрати — ако је
 E_1 добродошло аридитичко решење, тако x има величина — да је аргументај
 итерација саједна апроксимативна аргументај угла, тако да је

$$\log \sin(E_1 + x) - \log \sin E_1 = \pm \lambda x;$$

и да је аргументај дрота апроксимативна аргументај ^{тако} итерација,

$$\frac{e'' \sin(E_1 + x) - e'' \sin E_1}{1} = \frac{1}{\mu} \{ \log[e'' \sin(E_1 + x)] - \log(e'' \sin E_1) \}.$$

Из ове релација следи

$$e'' \sin(E_1 + x) - e'' \sin E_1 = \frac{1}{\mu} [\log \sin(E_1 + x) - \log \sin E_1] = \pm \frac{\lambda}{\mu} x.$$

Према овоме ћемо за тражено решење имати

$$E_1 + x = M - e'' \sin(E_1 + x) = M + e'' \sin E_1 \pm \frac{\lambda}{\mu} x, \quad (1)$$

од чега

$$M + e'' \sin E_1 - E_1 = x \left(1 \mp \frac{\lambda}{\mu} \right).$$

Израчунајмо

$$x = \frac{\mu}{\mu \mp \lambda} (M + e'' \sin E_1 - E_1).$$

И ако објавимо унесемо у последњу ена (1), имаћемо за тражено решење

$$E_1 + x = M + e' \sin E_1 \pm \frac{\lambda}{\mu \mp \lambda} (M + e' \sin E_1 - E_1),$$

у којем израза узимамо: горњи знак - у случају рекурзије, а доњи знак - у случају итерације конаверзије.

Ево како се изражава израза у случају итерације и како се изражава са израза. Са израза система које смо дали на почетку израза, изражава, изражава е'.

[e]	9.389 7263,
[e'']	5.314 4251,
[e''']	4.704 1514;

Како изражава решење, од којег ћемо изаћи, узетимо $E_1 = M + e' \sin M$, заокружено на најближу цео број секунди.

Са $[\sin M] = 9.664 6482$ налазимо $[e' \sin M] = 4.368 7996$, па јесте $e' \sin M = -23 377.6 = -6^\circ 29' 37.6$; тако да за изражава решење добијемо $E_1 = 326^\circ 0' 0$.

Цела изража који се изражава изражава изражава изражава:

E_k	$326^\circ 0' 0$	$324^\circ 16' 19.60$	$324^\circ 16' 29.47$
$[\sin E_k]$	9.747 5637	9.766 3656	9.766 3367
$[e' \sin E_k]$	4.451 7131	4.470 5170	4.470 4881
$\lambda =$	31	29	30
$\mu =$	153	147	147
$\mu - \lambda =$	122	118	117
$\lambda : (\mu - \lambda) =$	0.254	0.2458	0.2569
$e'' \sin E_k =$	- 28 295.22	- 29 547.25	- 29 545.28
$(e'' \sin E_k)^\circ =$	- 7° 51' 35.22	- 8° 12' 27.25	- 8° 12' 25.28
$M + e'' \sin E_k =$	324 37 19.55	324 16 27.52	324 16 29.49
$\frac{\lambda}{\mu - \lambda} \Delta_k =$	- 0 20 59.95	+ 7.92	+ 0.01
$\Delta_k =$	- 1° 22' 40.45	+ 1.95	+ 0.02
$\Delta_k'' =$	- 4960.45		

$E = 324^\circ 16' 29.50$

До овог резултата се налази и са изража изражава изражава, ако се за изража изражава изражава изражава изражава (са изража) изражава изражава изражава изражава $E_1 = 324^\circ 16' 37$.

gn 1/2

8. — Razvijanja E, v, w, r u redove. Pobrojane veličine, kao i razne njihove funkcije, daju se lako razviti u beskonačne redove po sve većim stepenima ekscentričnosti, a sa koeficijentima \sin i \cos multipala srednje anomalije. Svi ti redovi su, blagodareći okolnosti što su ekscentričnosti planetskih putanja neznatne, brzo konvergentni, tako da već i dva, tri prva njihova člana daju dovoljno približne brojne vrednosti razvijene veličine. Zato dajemo ovde, naravno, bez dokaza, one od tih redova tačnije rečeno, njihove prve članove kojima ćemo koristiti pri rešavanjima pojedinih zadataka.

Red za E :

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + \frac{1}{3! 2^2} e^3 (3^2 \sin 3M - 3 \sin M) + \dots;$$

Red za v :

$$v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \frac{1}{12} e^3 (13 \sin 3M - 3 \sin M) + \dots;$$

Red za w :

$$w = M + \frac{1}{4} e^2 \sin 2M - \frac{1}{8} e^3 (\sin 3M - 3 \sin M) + \dots;$$

Red za r :

$$r = 1 - e \cos M - \frac{1}{2} e^2 (\cos 2M - 1) - \frac{1}{2! 2^2} e^3 (3 \cos 3M - 3 \cos M) - \dots$$

gn e uitaly

kretanja po paraboli gn 1/2

9. — Osnovne jednačine. Ako je $e = 1$, putanja tela je parabola, u čijoj se žiži nalazi Sunce, S (v. sl. 14). Tačka π putanje zove se perihel. Ako se sa r označi radijevektor, a sa v prava anomalija tela, jednačina putanje je

$$r = p(1 + \cos v)^{-1} = q \sec^2 \frac{1}{2} v,$$

gde $q = \frac{1}{2} p$ predstavlja perihelsku daljinu tela (komete) od Sunca.

Jednačina koja izražava zakon površina,

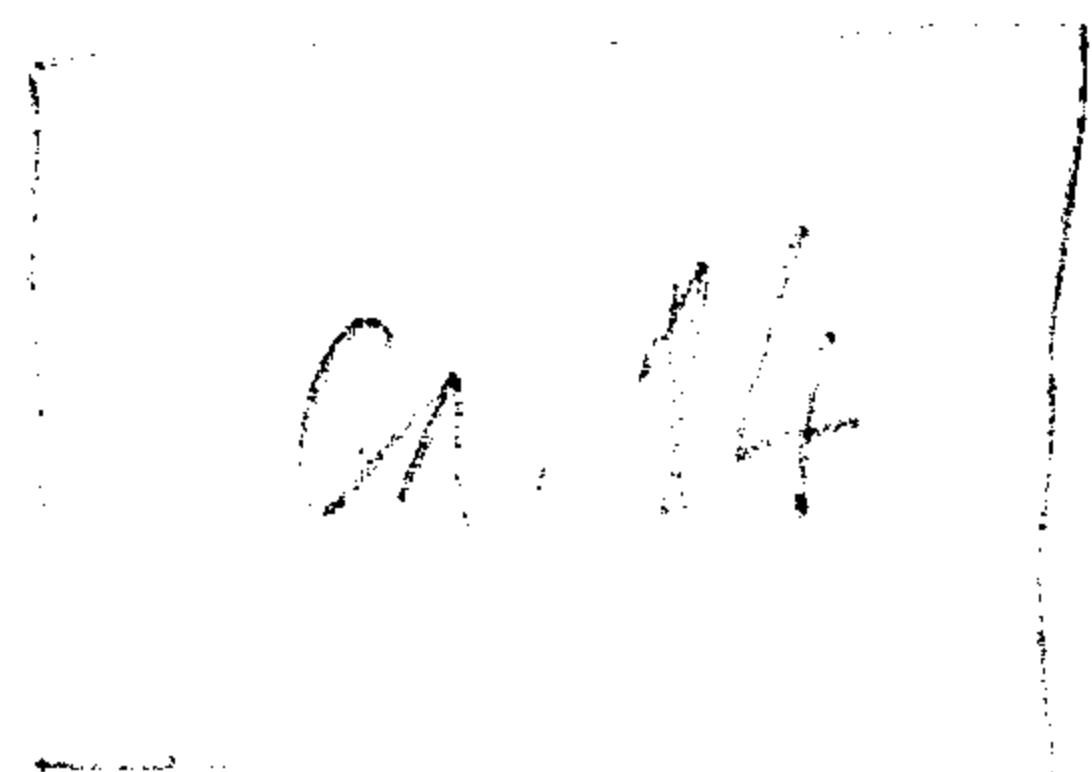
$$r^2 dv = c dt = k \sqrt{\mu(1+m)} dt,$$

postaje sad

$$q^2 \sec^4 \frac{1}{2} v dv = k \sqrt{2q(1+m)} dt.$$

Ako je telo zanemarljive mase, dakle $m = 0$, poslednja jednačina postaje

$$2(1 + \tan^2 \frac{1}{2} v) d(\tan \frac{1}{2} v) = k \sqrt{2} q^{-\frac{3}{2}} dt.$$



Odatle, integraleći, dobivamo

$$\text{tg } \frac{1}{2} \underline{v} + \frac{1}{3} \text{tg}^3 \frac{1}{2} \underline{v} = \underline{k} \sqrt{2} \underline{q}^{-\frac{3}{2}} (\underline{t} - \underline{t}_0),$$

gde \underline{t}_0 označava trenutak prolaza tela (komete) kroz perihel, ili trenutak kad je $\underline{v} = 0$.

Ako se poslednja jednačina svede na oblik

$$25 \text{tg}^3 \frac{1}{2} \underline{v} + 75 \text{tg} \frac{1}{2} \underline{v} = \frac{75 \underline{k}}{\sqrt{2}} \underline{q}^{-\frac{3}{2}} (\underline{t} - \underline{t}_0),$$

nalazi se, kako \underline{v} , za datu vrednost $(\underline{t} - \underline{t}_0)$, tako i $(\underline{t} - \underline{t}_0)$, za dato \underline{v} . pomoću poznatih Barker-ovih tablica — računom!

—(4cr.

VI. Sunčevo prividno godišnje kretanje

gv 1/2 hr

gv 1/2 hr

1. Sunčevo prividno kretanje U odnosu prema nekretnicama Sunce neprekidno menja svoj položaj na prividnoj nebeskoj sferi. Pomeri se od zapada ka istoku. Rektascenzija mu se neprekidno povećava — iako ne uniformno — prosečno za po 1° , ili 4^m , dnevno; dok mu deklinacija prolazi kroz sve vrednosti ~~između~~ ^{od} — $23^\circ 27'$ do $+23^\circ 27'$ i ponovo do $-23^\circ 27'$, tako da se posle godinu ($365\frac{1}{4}$) dana Sunce ponovo nalazi na svom polaznom položaju (360°).

U tom razmaku podleži neprekidnim promenama i vrednost Sunčeva prividnog prečnika. Njegova ~~vrednost~~ ^{eličina} prolazi kroz sve vrednosti između $32'36''$ i $31'33''$ i ponovo do $32'36''$. Kako su prividni prečnici obrnuto proporcionalni daljinama tela od posmatrača, ovo dokazuje da se i daljine Sunca od Zemlje, u toku godine, neprekidno menjaju između određenih granica.

gv 1/2 hr

2. Oblik i dimenzije Sunčeve prividne putanje Pomoću ovih podataka može se konstruisati putanja koju Sunce prividno opiše u toku godine i odrediti njen oblik, dimenzije, položaj u prostoru i njena orijentacija. Kad se konstruiše vidi se da je ta putanja elipsa (v.sl. 15), čiju jednu od žiza zauzima Zemlja (T); elipsa ^{ta} ¹⁹ ekscentričnosti oko $1/60$, dakle jedva primetne, što će reći da je skoro kružna oblika. Tom puta-

guru te untae gubunyo!

njom Sunce se kreće po Keplerovim zakonima: radijevektor Zemlja - Sunce prevaľuje za jednaka vremena jednake površine: $S_1TS_2 = S_3TS_4 = \dots C$.

Tačka Π na putanji, koja odgovara najmanjoj daljini Sunca od Zemlje, zove se perigej; tačka A , koja odgovara najvećoj udaljenosti Sunca od Zemlje, zove se apogej. Obe zajedno zovu se apsidi; prava što ih spaja - apsidna linija; to je ujedno i velika osa putanje.

ca. 15

ca. 16

U perigejski položaj Sunce dospeva oko 31. decembra, u apogejski oko 1. jula. No ovo Sunčevo kretanje, kao i njegova putanja — prividni su samo: oni su posledica Zemljina heliocentričnog kretanja. Na sl. 16 je ovo i predočeno. Dok Zemlja, oko nepokretnog Sunca, u jednoj od žiža (S) njene heliocentrične putanje, stvarno predje iz položaja T u položaj T_1 , dakle radijevektor, ST , opiše površinu TST_1 , — za posmatrača sa Zemlje, koji ovu smatra nepokretnom, Sunce za to vreme predje (u istom smeru), na svojoj prividnoj putanji, površinu $STS_1 =$ površine TST_1 . Dok Zemlja, dakle, stvarno, prolazi kroz svoje heliocentrične položaje: $T, T_1, T_2, \dots T_n$, — nama, sa Zemlje, izgleda kao da je Sunce, za to vreme, prošlo kroz položaje: $S, S_1, S_2, \dots S_n$, na njegovoj prividnoj putanji.

3. Sunčeva prividna godišnja putanja na nebeskoj sferi. Sunčevim

prividnim kretanjem određen je u prostoru položaj ravni u kojoj se o-

17
(v. sl. 17)

na obavlja. Ova ravan, u preseku sa prividnom nebeskom sferom, određuje veliki krug koji zovemo ekliptika; a samu ravan zovemo ekliptička ravan. Ova ravan je nagnuta prema ravni nebeskog ekvatora pod uglom od oko $23^{\circ}27'$. One se, dakle, seku duž prave koja se zove linija ekvinokcija (ekvinokcija ili ravnodnevna linija). Ovim pravcem su određene i tačke preseka ekliptike i nebeskog ekvatora, koje zovemo ekvinokcijskim (ravnodnevničkim) tačkama. Onu od ovih dveju kroz koju Sunce prolazi kad njegova deklinacija prelazi sa negativnih (južne strane ekvatora) na pozitivne vrednosti (severnu stranu nebeskog ekvatora) — a prolazi oko 21. marta — zovemo proletnom ekvinokcijskom tačkom. Obeležavamo je znakom γ . Pravac ove usvo-

mm = gvr ke uitaqumpano!

30 ~~15/1~~

jen je kao početni od kojega se računaju rektascenzije nebeskih tela. Njoj suprotnu tačku, kroz koju Sunce prolazi pri prelazu sa pozitivnih na negativne deklinacije — a prolazi oko 23. septembra — zove se jesenjom ekvinoćij^kjskom tačkom. Obeležavamo je znakom $\underline{\epsilon}$. ca. 17

Normala na ekvinoćijskoj liniji zove se linija solsticija ($E_e E_h$). Presek ove sa ekliptikom određuje, na severnoj nebeskoj hemisferi, letnju solsticijsku tačku (E_e), u kojoj Sunce dostiže najveću pozitivnu deklinaciju — oko 22. juna; na južnoj nebeskoj hemisferi, zimsku solsticijsku tačku (E_h), u kojoj dostiže — oko 22. decembra — svoju najveću negativnu deklinaciju. Normala na ekliptičkoj ravni, ili ekliptička osa, određuje ekliptičke polove: severni (π_n) i južni (π_s). ca. 18

Ekliptička ravan i njena osa iskorišćene su za uvođenje novog koordinatnog sistema, takozvanog ekliptičkog koordinatnog sistema, koji takodje omogućuje da se jednoznačno odredi položaj tačke na prividnoj nebeskoj sferi. Za početak ovog koordinatnog sistema može se uzeti bilo Sunčevo središte (heliocentrični), bilo Zemljino središte (geocentrični), bila neka treća tačka. Njegova osnovna ravan je ekliptička; početni pravac u njoj je — pravac ^(Q π) ka prolethnoj ekvinoćijskoj (γ) tački. Smer je usvojen direktno; to jest smer Zemljina heliocentričnog ili Sunčeva prividnog godišnjeg kretanja. (v. sl. 18)

Koordinate u ovom koordinatnom sistemu zovu se longituda (λ) i latituda (β) tačke. Longituda se računa od 0° do 360° ; latituda od 0° do 90° , pozitivno ka severnom, negativno ka južnom ekliptičkom polu. Prema tome ekliptičke koordinate tačke Σ (na sferi poluprečnika uzeta za jedinicu) su $\lambda = \underline{\gamma Q} = \widehat{\underline{\gamma O Q}} =$ sfernom uglu $\underline{\gamma \pi_n \Sigma}$; a latituda $\beta = \underline{Q \Sigma} = \widehat{\underline{Q O \Sigma}}$.

Sunčev položaj na ekliptici određen je njegovom longitudom; latituda Sunca je stalno jednaka nuli.

Obrasci za određivanje ekliptičkih koordinata (λ, β) kad su date ekvatorske (α, δ, ϵ), i obrnuto, dati su u Pregledu obrazaca, u prvom delu Zbirke rešenih zadataka iz Opšte astronomije, na str. 14 i 15. Kad se

radi o Suncu, čija je latituda nula, pomenuti obrasci postaju jednostavniji; imamo, u tom slučaju,

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, \\ \sin \lambda \sin \epsilon &= \sin \delta \\ \sin \lambda \cos \epsilon &= \cos \delta \sin \alpha, \\ \operatorname{tg} \lambda &= \operatorname{tg} \alpha \cos \epsilon; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \lambda \sin \epsilon, \\ \operatorname{tg} \delta &= \sin \alpha \operatorname{tg} \epsilon, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \lambda \cos \epsilon. \end{aligned}$$

gr 1/2 h

4. Pojedinosti Sunčeva prividnog dnevnog kretanja Sunčevo prividno godišnje kretanje, ili neprekidne promene Sunčeve longitude povlače za sobom neprekidne promene kako njegovih rektascenzija tako i deklinacija. Samo, dok promene rektascenzija iznose prosečno oko 1° ili 4^m dnevno, promene deklinacije kreću se između $0'$ i, najviše, $24'$ dnevno. Dakle, Sunce u toku prividnog dnevnog kretanja nebeske sfere ne opisuje — kao što nekretnice to čine — neprekidno isti paralel.

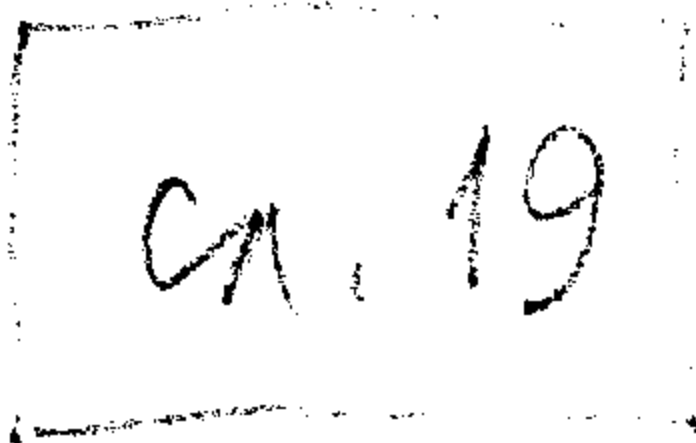
Na sl. 19 prikazana je (shematski) Sunčeva putanja na nebeskoj sferi usled njena prividnog dnevnog kretanja. Na slici predstavljaju:

EQE'_2 — nebeski ekvator;

$E_1 S_1 S_2 \nu E_2$ — ekliptiku;

$E_1 S_1 E'_1$ — nebeski paralel koji bi Sunce prividno opisalo kad mu se deklinacija ne bi u toku dana menjala;

$S_1 \Sigma_1 E'_2 E_2 S_2 \Sigma_2$ — Sunčeva dnevna putanja na prividnoj nebeskoj sferi u razmaku dok na ekliptici predje iz položaja S_1 u S_2 .



P_n — severni nebeski pol;

π_n — severni ekliptički pol;

Zato, ako se traži veća tačnost, ili kad treba da se predstavi stvarni tok pojava i pojedinosti Sunčeva prividnog kretanja na raznim tačkama Zemljine površine, — moraju se uzimati u obzir promene koje u tim pojedinostima nastaju usled neprekidnih promena deklinacije i Sunčevih koordinata uopšte.

gr 1/2 h
a) Promene azimuta tačaka izlaza. Azimut (A) tačaka izlaza i zalaza, tela sa deklinacijom δ , na geografskoj širini φ , određen je izrazom

$$\cos A = -\sin \delta \sec \varphi.$$

CA. 20

CA. 21

ne ekvinokcija:

proletnjeg e.: V_+ ,

i jesenjeg e.: V_- ,

u poredjenju sa tačkama (W) i azimutima zalazâ pri nepromenljivoj deklinaciji.

ke gura u uga

b) Popravka meridijana. Usled neprekidne promene Sunčeve deklinacije, meridijanska ravan nije više ravan simetrije za Sunčevu dnevnu putanju na nebeskoj sferi. Drugim rečima, jednakim azimutima i časovnim uglovima (računatim od meridijana mesta u oba smeru) ne odgovaraju jednake Sunčeve visine; i obratno: jednakim Sunčevim visinama s obe strane meridijana ne odgovaraju jednaki azimuti, ni jednaki časovni uglovi (sem u dane solsticija).

Na sl. 22 predstavljeni su, u projekciji na posmatračevu horizontsku ravan: osnovni pravci S - N i E - W, položaji zenita, Z_n , i severnog nebeskog pola (P_n). Sem toga prikazani su shematski delovi prividne dnevne putanje.

CA. 22

IV — ^{putanje} nekretnice, sa deklinacijom \odot , u trenucima kad se ova našla na visini h , pre prolaza kroz meridijan ($P_n Z_n$) — u položaju I —

i na istoj visini, posle prolaza kroz meridijan — u položaju V; IV₁ — ^{putanje} Sunca, u vreme između zimskog i letnjeg solsticija, drugim rečima dok je $\odot > 0$; i to onog dana kad se, na visini h pre prolaza kroz meridijan, našlo jednovremeno sa nekretnicom deklinacije je \odot ;

IV₂ — ^{putanje} Sunca, u vreme između letnjeg i zimskog solsticija, dakle dok je $\odot < 0$; i to onog dana kad se na visini h , posle prolaza kroz meridijan, našlo jednovremeno sa nekretnicom deklinacije \odot

Ako sad označimo sa l_e i l_w čitanja horizontalnog kruga (doteranog) teodolita, pri prolazima nekretnice na visini h ; pre i posle prolaza kroz meridijan, na tako zvanim korespondentnim visinama), pravac meridijana — zahvaljujući simetričnosti prividne dnevne putanje nekretnica — odgovaraće čitanju l_0 , određena izrazom

$$l_0 = \frac{1}{2}(l_e + l_w).$$

— = gura ke u uga...

... uga ...

Pri posmatranjima Sunca, međjutim, usled promena njegove deklinacije, u prvom slučaju, to jest kad je $\delta < 0$, ili kad Sunce opiše luk \dot{IV}_1 — ako označimo čitanja kruga

pravca $Z_n \dot{I}$ sa l_e , a pravca $Z_n V_1$ sa l_1 , imaćemo

$$l_m = \frac{1}{2}(l_e + l_1) < l_0,$$

a u drugom slučaju, to jest kad je $\delta > 0$, ili kad Sunce opiše luk \dot{IV}_2 — ako čitanja kruga označimo:

pravca $Z_n \dot{I}$ sa l_e , a pravca $Z_n V_2$ sa l_2 , biće:

$$l_m = \frac{1}{2}(l_e + l_2) > l_0.$$

Označimo, sad, azimute pravaca: $Z_n \dot{I}$ sa A_e , pravca $Z_n V_2$ sa A_2 , a razliku ~~$l_2 - l_w$~~ $l_2 - l_w$ sa Δl . Onda sa slike vidimo da će biti, ako još primetimo da je

$$l_w = 360^\circ - A_e,$$

$$\Delta l = l_2 - l_w = A_2 - (360^\circ - A_e) = A_e + A_2 - 360^\circ,$$

$$l_2 = l_w + A_e + A_2 - 360^\circ.$$

to jest

Prema tome je $l_m = \frac{1}{2}(l_e + l_2) = \frac{1}{2}(l_e + l_w) + \frac{1}{2}(A_e + A_2 - 360^\circ),$

to jest $l_0 = l_m - \frac{1}{2}\Delta l.$

Veličina $\frac{1}{2}\Delta l$, za koju treba popraviti aritmetičku sredinu čitanja na horizontalnom krugu što odgovaraju Sunčevim korespondentnim visinama, da bi se dobilo čitanje pravca meridijana — zove se popravka meridijana.

Iznos ove popravke možemo odrediti polazeći od obrasca

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A.$$

Ako ga diferenciramo, smatrajući φ i h kao konstantne veličine (h zbog toga što se radi o korespondentnoj visini), dobićemo

$$\cos \delta d\delta = \cos \varphi \cos h \sin A dA.$$

Zamenom iz sinusnog obrasca proizvoda

$$\cos h \sin A = \cos \delta \sin h,$$

dobivamo za promenu azimuta usled promene deklinacije

$$dA = \sec \varphi \csc h d\delta.$$

Za ovoliko se, dakle, razlikuje azimut pravca posmatranja po prolazu

kroz meridijan (korespondentne visine) od azimuta pravca prvog posmatranja (pre prolaza kroz meridijan).

Označimo sad sa τ vreme proteklo od prvog do drugog posmatranja. Onda se može uzeti da je, u trenutku posmatranja, Sunčev časovni ugao iznosio, približno, $H = \frac{1}{2}\tau$. Ako, sem toga, dnevnu promenu Sunčeve deklinacije označimo sa $\Delta\delta$ i pretpostavimo da se ona, u toku jednog dana, menja proporcionalno vremenu, onda ćemo ^{moći} staviti

$$\Delta\delta = \frac{\Delta\delta}{24}\tau.$$

U tom slučaju za popravku meridijana nalazimo

$$\frac{1}{2}\Delta l = \frac{1}{2}\Delta H = \frac{\tau}{2} \times \frac{\Delta\delta}{24} \sec\varphi \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\tau.$$

he gran uistines!

V Popravka podna. Kao što aritmetička sredina azimuta Sunčevih korespondentnih visina nije jednaka nuli, tako ni aritmetička sredina vremena prolaza kroz te visine ne odgovara trenutku Sunčeva prolaza kroz lokalni ^(mesni) meridijan. U trenutku koji predstavlja aritmetičku sredinu vremena posmatranja Sunce će se stvarno nalaziti z a p a d n o od meridijana ako mu se deklinacija u to vreme povećava, a i s t o č n o od meridijana, ako u razmaku između posmatranja Sunčevih korespondentnih visina deklinacija opada.

Promenu u časovnom uglu u funkciji promene deklinacije nalazimo ako diferenciramo obrazac, iz položajnog sfernog trougla,

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H,$$

smatrajući u njemu z i φ kao konstantne veličine. Tako dobivamo

$$dH = (\operatorname{tg}\varphi \operatorname{cosec}H - \operatorname{tg}\delta \operatorname{ctg}H) d\delta$$

Ako proteklo vreme u časovima između posmatranja korespondentnih visina označimo sa τ ; pretpostavimo da se Sunčeva deklinacija u tom razmaku menja proporcionalno vremenu; i označimo dnevnu promenu Sunčeve deklinacije na dan posmatranja sa $\Delta\delta$, za promenu deklinacije u razmaku τ imaćemo

$$\Delta\delta = \frac{\Delta\delta}{24}\tau;$$

a za promenu časovnog ugla, usled ove promene deklinacije, imaćemo (u vremenim jedinicama)

~ = gran he uistines!

$$z_m = z_0 - \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta) d\delta^2,$$

$$dH = \frac{1}{15} \frac{d\delta}{24} \tau (\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cosec} H - \operatorname{tg} \delta) d\delta$$

Polovina ove veličine, koja se algebarski dodaje aritmetičkoj sredini vremena posmatranja Sunčevih korespondentnih visina, zove se p o p r a v k a p o d n a.

gornje unakrsne (g) Azimut i časovni ugao Sunčeve kulminacije. Iz prethodnih rezultata sleduje zaključak da, zbog promena deklinacije, Sunce ne kulminira u meridijanu. Ono dostiže svoju najveću visinu, odnosno najmanju zenitsku daljinu, z_n :

(v. sl. 20.)
 zapadno od meridijana u doba kad je $d\delta > 0$,
(v. sl. 21.)
 istočno od meridijana u doba kad je $d\delta < 0$;

na { azimutu: $A_c = \frac{d\delta}{2\pi} \operatorname{sec} \varphi$,
 časovnom uglu: $H_c'' = \frac{d\delta}{2\pi} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta)$
 gde δ označava ^{je} Sunčevu deklinaciju u trenutku ^{prolaza kroz meridijan.}

gornje unakrsne 5 Nejednakosti trajanja obdanica i obnoćnica. Trajanja obdanica na raznim geografskim širinama, u toku Sunčeva prividnog godišnjeg kretanja, određujemo pomoću izraza

$$\cos H = - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta, \quad \text{ili} \quad H = \arccos (- \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta),$$

čija apsolutna vrednost predstavlja (približno) polovinu Sunčeva dnevnog luka. Ako sa τ označimo trajanje obdanice, vidimo da se, za određeno mesto na Zemlji, u toku godine, ta trajanja kreću između

$$\tau_m = 2 \arccos (\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \epsilon) \quad \text{i} \quad \tau_M = 2 \arccos (- \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \epsilon).$$

Vidimo sem toga iz (1), da je $H \geq 90^\circ = 6^h$, prema tome da li su δ i φ istog ili suprotnog znaka; a da je $H = 90^\circ = 6^h$ ako je bilo δ bilo φ jednako 0° .

Dalje vidimo da gornja jednačina ne daje realne korene za H ako je

$$| \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta | > 1, \quad \text{ili} \quad | \delta | > 90^\circ - |\varphi|.$$

Znači Sunce je za dotično mesto, tog dana, cirkumpolarno: i to, ako su δ i φ istog znaka, Sunce ne zalazi; ako su δ i φ suprotnih znakova, Sunce ne izlazi.

U izrazima (1), međjutim, nisu uzete u obzir promene koje u trajanjima obdanica izazivaju promene Sunčeve deklinacije u razmaku od

početka do svršetka obdanice. One su, za umerene geografske širine, skoro neznatne. Iznosi im se mogu izračunati iz izraza

$$\Delta H = \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi \cos \epsilon \operatorname{cosec} H$$

U izrazima (1) nisu uzeta u obzir ni dejstvo astronomske refrakcije, kao ni činjenica da se počeci i svršeci obdanice računaju od trenutka dodira sa ravni horizonta mesta — gornjeg ruba Sunčeva kružnog diska. Produžeci trajanja obdanica, usled ovih dejstava i okolnosti, određeni su izrazom

$$\Delta H' = 51' \sec \varphi \sec \varphi \cos \epsilon \operatorname{cosec} H, \text{ ili } \Delta H^{(s)} = 204^s \sec \varphi \sec \varphi \cos \epsilon \operatorname{cosec} H.$$

Za ovoliko, stvarno, obdanica ranije počinje, odnosno kasnije se svršava, usled prisustva atmosfere oko Zemlje.

Све ове пројекције, као и њихове промене у току тогине и за равне геотрафске ширине на Земљи, могу се приказати на једној графичкој, каква бицила на сл. 23, карактера ако је овај штедег прецизно и у добрим великој размери.

На сл. 23 представљена је у соријографској пројекцији небеска сфера (медана ио араца Е или W) на меридијанску равна места геотрафске ширине $\varphi = +44^{\circ} 48'$, дакле и Београда. На тој бицили представљене са:

- O — посматрала, чији је зеница Z_n ;
- P_n — северни небески пол;
- $H_n H_s$ — пројекција пасматралека хоризонта;
- E, E_2 — пројекција небеског екватора, уздева на часоће, означене са 0-12, за источну половину, и са 12-24, за западну половину ^{закта;} хориз

27. Trajanja sumraka. Blagodareći prisustvu atmosfere oko Zemlje (37)

čovjeku je omogućeno da se koristi Sunčevom svetlošću - izvesno vreme - i posle Sunčeva zalaza, pa svšetku obdarnice. Te vremene razmake, po zalazu i pre izlaza Sunca, u toku kojih Zemljina površina biva osvajavana zracima odbijenim i rasutim od gornjih slojeva atmosfere, zovemo - sumracima (svitanja, odnosno sutoni). I to, ono vreme što Sunce provede, u toku svog prividnog dnevnog puta, između almukantara $z=96^\circ$ i horizonta ($z=90^\circ$), odnosno horizonta ($z=90^\circ$) i almukantara $z=96^\circ$, zove se - građanski sumrak. A vreme što Sunce provede između almukantara $z=108^\circ$ i horizonta, odnosno horizonta i almukantara $z=108^\circ$, zove se astronomski sumrak.

Trajanja ^(T) sumraka na geografskoj širini φ , na dan kad je Sunčeva deklinacija δ , izračunavamo iz $t = H_0 - H_0$, gde H_0 predstavlja časovni ugao Sunca, određen izrazom

$$\cos H_0 = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta,$$

a H_0 časovni ugao Sunca na zenitskoj daljini z_0 , određen izrazom

$$\sin \frac{1}{2} H_0 = \left[\sin \frac{1}{2} (z_0 + \varphi - \delta) \sin \frac{1}{2} (z_0 - \varphi + \delta) \sec \varphi \sec \delta \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Stavljajući u ovaj izraz $z_0 = 96^\circ$, odnosno $z_0 = 108^\circ$, nalazimo vrednosti vrednosti Sunčevih časovnih uglova od kojih treba oduzeti vrednosti H_0 , koji odgovaraju istim podacima, da bi se dobila trajanje građanskog, odnosno astronomskog sumraka.

Како и трајања одражава могу се, на исти начин, одредити и трајања сумрака, грађанског и астрономског, у току тогаче и за разне географске ширине, са графика представљена на сл. 23. На слици су, у сва случају, представљени са:

G, G_2 - пројекција алмукантара са zenitsком даљином $z=96^\circ$, којом је одређена трајња сунетака, односно поретак, грађанског сумрака;

A, A_2 - пројекција алмукантара са zenitsком даљином $z=108^\circ$, којом је одређена трајња сунетака, односно поретак, астрономског сумрака.

Последица је тогаче паралелна хоризонтална, $H_1 H_2$, заједно са овим алмукантарима, на истражу географску ширину могуће се - ако је график готово прецизно израђен - са њега одређити и све последности о сумрацима, за сваки дан у тогаче за који се обично Сунце гледа паралел.

mm = gmm не миме,



Z A D A C I

0/1/14

39

2/1

—(4 cr.)

IV. Astronomska refrakcija /gv. 1/28

—(2 cr.)

✓✓ (127) (132) Posmatrane su visine cirkumpolarne zvezde u obema njenim uzastopnim kulminacijama i nadjene^{su} vrednosti:

u gornjoj k.: $h_s = 70^\circ 30' 40''$; u donjoj k.: $h_i = 15^\circ 16' 17''$

Odrediti njene prave zenitske daljine u tim trenucima.

✓ (128) (133) Ako su, u trenucima posmatranja, pomenutih u prethodnom zadatku, pročitana i stanja termometra i barometra kraj posmatrača — u trenutku gornje k.: $+12^\circ.80$ i 738 mm, a u trenutku donje k.: $+8^\circ.20$ i 740 mm, —odrediti, pomoću tako dopunjenih podataka, geografsku širinu posmatrališta i deklinaciju posmatrane cirkumpolarne zvezde.

✓ (129) (134) Sa izvesnog mesta na severnoj hemisferi posmatrana je nekretnica, u trenutku njene gornje kulminacije, na zenitskoj daljini $z_s = 6^\circ 33' 44''.5$, pri $+16^\circ.40$ i 748 mm; a, u trenutku njene donje kulminacije, na zenitskoj daljini $z_i = 71^\circ 27' 39''.3$, pri $+11^\circ.80$ i 750 mm. Odrediti tačnu posmatračevu geografsku širinu i deklinaciju posmatrane nekretnice. (v. Zad. 89, iz I dela Zbirke), uzimajući u obzir i dejstvo refrakcije.

✓ (130) (135) Odrediti geografsku širinu mesta i koordinate nekretnice koja, u tom mestu, izlazi u $12^h 33^m 24^s$ zv. vr., koja prolazi kroz posmatračev zenit i provodi na njegovim horizontom, uzimajući u obzir i dejstvo refrakcije, $14^h 19^m 48^s$ zv. vr. (v. Zad. 97, iz I dela Zbirke).

✓ (131) (136) Posmatrana je nekretnica iz mesta čija je geografska širina $\varphi = +38^\circ 58' 53''$, na zenitskoj daljini $z = 69^\circ 42' 30''$, u vertikalu azimuta $A = 300^\circ 10' 30''$. Odrediti deklinaciju i časovni ugao zvezde, vodeći računa i o astronomskoj refrakciji.

(132) (137) Naći visinu na kojoj se nalazi posmatrač na obali, ako se zna da prividna depresija njegova horizonta (dakle, imajući u vidu pri-

0 1/2 kut

36 3/5

sustvo atmosfere) iznosi 1° .

Odrediti posmatračevu daljinu vida u kilometrima.

✓ (133) (138). Odrediti geografsku širinu mesta za koje izvesna cirkumpolarna zvezda dostiže prividne zenitske daljine u gornjoj kulminaciji $z_s = 30^\circ 10' 37''$, u donjoj kulminaciji $z_i = 60^\circ 10' 57''$. Za dejstvo refrakcije zadovoljiti se izrazom $R = ktgz$.

✓ (134) (139). Iz mesta geografske širine $\varphi = +44^\circ 48' 13''.2$ posmatrana je cirkumpolarna u obema kulminacijama, na prividnim zenitskim daljinama $z_s = -17^\circ 18' 48''.2$ i $z_i = 73^\circ 1' 11''.6$.

1) Odrediti vrednost konstante k u izrazu za refrakciju $R = ktgz$.

2) Odrediti vrednosti konstanta A i B u izrazu za refrakciju $R = Atgz - Btg^3z$, ako se zna da je deklinacija zvezde bila $\delta = +62^\circ 7' 20''.2$.

✓ (135) (140). Sa broda na pučini, sa 12 m visine nad morskom površinom, 17. maja 1962. izmerena je maridijanska visina donjeg ruba Sunčeva kružnog diska i nadjena $h_\odot = 40^\circ 58' 54''$. Odrediti geografsku širinu paralela na kojem se brod tada nalazio.

✓ (136) (141). Izračunati, za posmatrača na geografskoj širini $\varphi = +41^\circ 22' 30''$, iznos refrakcije u trenutku najveće digresije nekretnice čija je deklinacija $\delta = +64^\circ 13' 20''$.

1. Odrediti za koliko ova nekretnica dospeva, za tog posmatrača, usled dejstva refrakcije, ranije, odnosno kasnije, u najveću digresiju.

2. Izračunati promenu koju u paralaktičnom uglu porizvodi refrakcija u najvećoj digresiji te nekretnice.

✓ (137) (142). Ako refrakcija nema uticaja na deklinaciju posmatrane nekretnice, pokazati da se ova nalazi u najvećoj digresiji.

(138) (143). Izmedju raznih nekretnica koje za pasmatrača na $\varphi = +38^\circ$

dospevaju, u toku njihova prividnog dnevnog kretanja, i u položaje u kojima refrakcija ne djeluje na deklinaciju, izabрати jednu i za nju izračunati:

1) karakteristične položaje u toku njena prividnog dnevnog kretanja;

2) najveću vrednost dejstva refrakcije kod nje.

139 ~~144~~. Ako se posmatranjima ne može dostići tačnost od 0".1, drugim rečima, ako se ova veličina mora zanemariti, do koje se zenitske daljine možemo zadovoljavati izrazom za refrakcijom $R = ktgz$?

140 ~~145~~. Pretpostavljajući da je Zemljina sfera opkoljena homogenim slojem atmosfere, visine h nad Zemljinom površinom, pokazati da je

$$R = \arcsin \left[\frac{a \sin z}{a+h} (n^2 - 2n \cos R + 1)^{\frac{1}{2}} \right],$$

gde su označeni sa:

R - iznos refrakcije;

a - poluprečnik Zemljine sfere;

z - prividna zenitska daljina posmatranog nebeskog tela;

n - indeks refrakcije vazduha.

[Smart]

141 ~~146~~. Ako između poluprečnika (r) atmosferskog sloja (koncentrična sa Zemljinom površinom) i indeksa refrakcije (n) tog sloja postoji veza $r n^{m+1} = Const.$, pokazati da je iznos astronomske refrakcije dat (Simpson-ovim) izrazom.

$$R = \frac{1}{m} \left[z_0 - \arcsin \left(\frac{\sin z_0}{n^m} \right) \right],$$

gde su označeni sa

m - neki broj

z_0 - prividna zenitska daljina posmatranog nebeskog tela;

n_0 - indeks refrakcije na površini Zemlje.

[Smart]

142 ~~147~~. Polazeći od Simpson-ova izraza za refrakciju,

$$R = \frac{1}{m} \left[z - \arcsin \left(\frac{\sin z}{n_m} \right) \right],$$

izvesti Bradley-ev izraz,

$$R = \frac{2}{m} \frac{n_m - 1}{n_m + 1} \operatorname{tg} \left(z - \frac{1}{2} m R \right).$$

[Smart]

143 148. Ako mesto $R = k \operatorname{tg} z$, gde z označava prividnu zenitsku daljinu, uzmemo za iznos astronomske refrakcije $R = K \operatorname{tg} \xi$, gde ξ označava pravu zenitsku daljinu tog tela, pokazati da je

$$K = m (1 - m \operatorname{arc} 1'' \sec^2 z).$$

[Ball]

144 149. Pokazati da Bradley-ev izraz za refrakciju,

$$R = 58''.361 \operatorname{tg} (z - 4.09 R),$$

i Cassini-ev izraz za refrakciju,

$$R = 58''.294 \operatorname{tg} z - 0''.06682 \operatorname{tg}^3 z,$$

daju praktično iste vrednosti, dok zenitske daljine nisu velike.

[Ball]

145 150. Ako se za dejstvo refrakcije zadovoljimo izrazom $R = k \operatorname{tg} z$, pokazati da će njeno dejstvo na prividnu daljinu dveju bliskih nekretnica (komponenata dvojne zvezde) biti dato izrazom

$$ds = ks (1 + \cos^2 \eta \operatorname{tg}^2 z) \operatorname{arc} 1'',$$

gde s predstavlja daljinu zvezda u sekundama ugla, a η ugao između zenitske daljine zapadne nekretnice i luka s .

[Ball]

146 151. Ako izraz $R = k \operatorname{tg} z$ predstavlja iznos dejstva refrakcije, pokazati da će promena usled dejstva refrakcije ugla (η) između zenitske daljine zvezde Z i luka ZZ_1 , do ovoj bliske, druge, zvezde, Z_1 , data izrazom

$$d\eta = \frac{1}{2} k \sin 2\eta \operatorname{tg}^2 z,$$

gde je z prividna zenitska daljina prve zvezde.

147 152. Pokazati da, usled dejstva refrakcije, mali luk α mukantara

biva kraći $(1 - k)$ - puta, a luk vertikala $(1 - k \sec^2 z)$ - puta kraći, pri čemu z ne bi smelo premašiti, recimo, 80° .

[Ball]

✓ 148 ~~153~~ Izvesti u obliku pogodnom za logaritamski račun izraz za časovni ugao izlaza, odnosno zalaza, središta Sunčeva prividnog kružnog diska, za posmatrača na geografskoj širini φ , uzimajući za iznos astronomske refrakcije u ravni horizonta $R = 35'$.

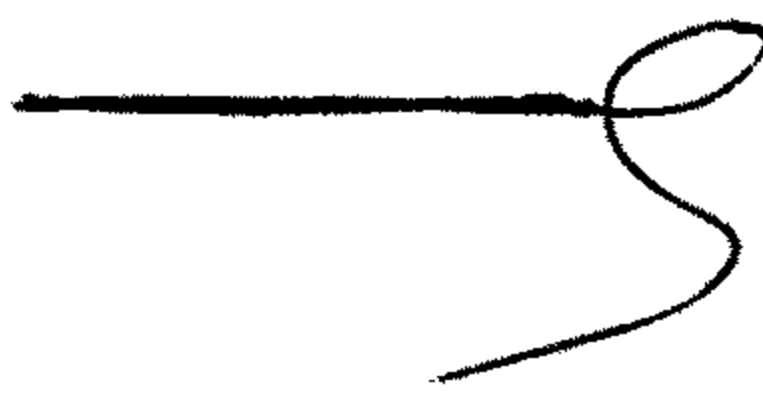
Iz nadjenog izraza neposredno izvesti sličan izraz za časovni ugao izlaza (odnosno zalaza) gornjeg ruba Sunčeva prividnog kružnog diska, za čiji se prividni poluprečnik može uzeti $\tau_0 = 16'$.

✓ 149 ~~154~~ Ako označimo sa R_* iznos refrakcije (u sekundama ugla) u trenutku izlaza, u mestu geografske širine φ , nekretnice sa deklinacijom δ — pokazati da se, usled dejstva refrakcije, menja vreme njena izlaza približno za:

$$\tau = \frac{R_*}{15} (\cos^2 \delta - \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

[Ball]

✓ 150 ~~155~~ Izvesti jednačinu krive u koju se deformiše Sunčev (ili Mesečev) kružni disk usled dejstva astronomske refrakcije, a u granicama u kojima se ovo dejstvo predstavlja izrazom $R = k \tan z$.



19

—C4a'c

v/ Elementi teorije kretanja planeta i kometa

—E2a'c

151 ~~156.~~ Izračunati polarne koordinate (r, v) planetoida koji se kreće po eliptičkoj putanji, velike poluose $a = 3.0 a.j.$, sa ekscentričnošću $e = 0.1$, u trenutku kad je ekscentrična anomalija planetoida dostigla vrednost $E = 80^\circ$.

152 ~~157.~~ Koliki je ugao ekscentričnosti heliocentrične putanje tela čija je afelska daljina četiri puta veća od perihelske?

153 ~~158.~~ Za koliko bi dana kometa dostigla pravu anomaliju $v = 60^\circ$, ako se ona kreće po eliptičkoj putanji, ekscentričnosti $e = 0.8$, sa srednjim sideričkim dnevnim kretanjem $n = 300''$?

(nastavak na str. 35!)

ni je
log

va sistema, zanemarljive mase, čija bi perihelska daljina bila $q = 1.2$ a.j., a ekscentričnost njegove heliocentrične putanje $e = 0.2$?

✓ 164 169. Ako V_{π} i $V_{\mathcal{A}}$ označavaju planetine putanjske brzine u perihelu, odnosno afelu, a φ ugao ekscentričnosti njene heliocentrične putanje, pokazati da je

$$V_{\pi} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = V_{\mathcal{A}} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

✓ 165 170. Ako se sa φ predstavi ugao ekscentričnosti, pokazati da je

$$\lg \frac{1}{2} v = \lg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \lg \frac{1}{2} E.$$

✓ 166 171. Na kojoj bi daljini kružila oko Sunca planeta sa dvostrukom Zemljinom masom, a sideričkom revolucijom jednakoju Zemljinoj (za Zemljinu masu uzeti $M = 1/330000$). [Smart]

✓ 167 172. Koliko bi trajala siderička revolucija i kolika bi bila brzina satelita koji bi se kretao, po kružnoj putanji, nad samom Sunčevom površinom ? [Russell]

✓ 168 173. Za koliko bi se produžilo trajanje Zemljine sideričke revolucije, kad bi joj masa postala zanemarljiva ? (za Zemljinu masu uzeti $M = 1/330000$). [Russell]

✓ 169 174. Planetoid se kreće po putanji čija je velika poluosa 4 a.j., a ekscentričnost $e = 0.555$. Izračunati polarne koordinate (r, v) koje će planetoid imati godinu dana (uzeti okruglo 365 dana) po prolazu kroz perihel.

✓ 170 175. Izračunati, bez upotrebe ikakvih tablica, vrednost prave anomalije, koja odgovara ekscentričnoj anomaliji $E = 30^\circ$, ako je ekscentričnost putanje $e = 1/60$.

✓ 171 176. Pokazati da se srednja anomalija (M) planete, čija je velika poluosa heliocentrične putanje a , može predstaviti u jednom od

ovih oblika:

$$a) M = 2\pi \left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{t}{T_0}; \quad b) M = 2\pi \left[\frac{a_0}{p} (1-e^2)\right]^{\frac{3}{2}} \frac{t}{T_0}; \quad c) M = k \sqrt{1+na}^{-\frac{3}{2}} t.$$

[Ball]

✓ 172 177. Siderička revolucija (T) Halejeve komete iznosi (uzećemo zaokrugljeno) 76 godina; ekscentričnost njene heliocentrične putanje je $e = 0.96728$. Izračunati brzine komete, u km/sec, u perihelu, na heliocentričnoj daljini $r = 2$ a.j. i u afelu.

✓ 173 178. Pokazati da između planetine prave (v) i antifokusne anomalije (w) postoji veza

$$\lg \frac{1}{2} w = \frac{1-e}{1+e} \lg \frac{1}{2} v;$$

pomoću ove izvesti jednu od veza što postoje između v , w i E .

✓ 174 179. Planeta se kreće po eliptičkoj putanji, ekscentričnosti $e = 0.4$, sa srednjim sideričkim dnevnim kretanjem $n = 100''$. Izračunati promene planetine ekscentrične i prave anomalije, u razmaku od 6h, (ekscentričnih anomalija na kraju) ako se zna da je zbir tog vremenog razmaka iznosio 180° .

✓ 175 180. Izračunati razliku između planetine ekscentrične i srednje anomalije u trenutku kad se ona nalazila na 0.625 heliocentrične daljine, izražene u jedinicama krive poluose njene putanje, čija je ekscentričnost $e = 0.4$.

Izračunati vreme proteklo od planetina prolaza kroz perihel do pomenutog trenutka, ako se zna da je njeno srednje sideričko dnevno kretanje iznosilo $n = 600''$.

✓ 176 181. Ako se drugi i viši stepeni ekscentričnosti planetine putanje mogu zanemariti, pokazati da se ekscentrična anomalija planete može predstaviti izrazom

$$E = \arcsin \frac{\sin M}{\cos M - e}.$$

Q
1/2

O/1/1/1

68 11/11

✓ 177 182. Izračunati Marsovu masu kad se zna da trajanje sideričke revolucije (T_s) njegova bližeg satelita, Fobosa, iznosi 0.31891 dana, a srednja daljina ovog od planete iznosi 9400 km.

✓ 178 183. Odrediti granice između kojih se menja, u toku planetina heliocentričnog kretanja, ugao između pravca njena kretanja i pravca upravnog na radijuvektoru u položaju koji planeta zauzima.

✓ 179 184. Pokazati da se u svakoj tački planetine putanje njena brzina može razložiti u komponente: $V_v = \frac{c}{p}$, upravnu na radijuvektoru, i $V_a = \frac{ec}{p}$, upravnu na apsidnoj liniji, u kojima je sa c označena dvostruka površinska brzina planete, sa p parametar, a sa e ekscentričnost putanje. [Ball]

✓ 180 185. Odrediti datume u godini u koje Zemlja dospeva, na svojoj heliocentričnoj putanji, u položaje u kojima je prava heliocentrična uglovna brzina njena jednaka srednjoj. Za ekscentričnost Zemljine heliocentrične putanje uzeti $e = 0.0167$; za srednju heliocentričnu uglovnu brzinu uzeti $n = 3548'' \cdot 192 = 0^\circ.985609$.

✓ 181 186. Pokazati da se površinske brzine planeta odnose kao kvadratni koreni njihovih parametara.

Objasniti značaj ovog stava.

✓ 182 187. Naći ekstremne vrednosti ekvacije centra i konstruisati geometrijski položaje na planetinoj putanji u kojima ekvacija dostiže te ekstremume. Uporediti vrednosti triju anomalija (v , E i M), u tim trenucima, za planetoid 4 Vesta, čiji ugao ekscentričnosti iznosi $\varphi = 5^\circ.099$, a velika poluosa putanje $a = 2.3617$.

✓ 183 188. Odrediti ekstremne vrednosti razlike prave i ekscentrične anomalije planete. Uporediti vrednosti svih triju anomalija (v , E i M), u tim trenucima, za planetoid 4 Vesta, čija velika poluosa putanje iznosi $a = 2.3617$, a ugao ekscentričnosti $\varphi = 5^\circ.099$

✓ 184 189. Odrediti geometrijsko mesto tačkaka preseka produženih radijavektora pravih i ekscentričnih anomalija planetske putanje.

[Gruey]

✓ 185 190. Uporediti trajanja obilazaka oko Zemlje veštačkih satelita: Eksploreza VI (izbačen 1959. avg. 7.), koji je ^{kroz} perigej prolazio na visini od 244 km nad Zemljom, a u apogeju prolazio na 48202 km geocentrične daljine; i veštačkog satelita koji bi u perigeju prolazio na istoj visini nad Zemljom, a u apogeju dopirao do Mesečeve srednje geocentrične daljine.

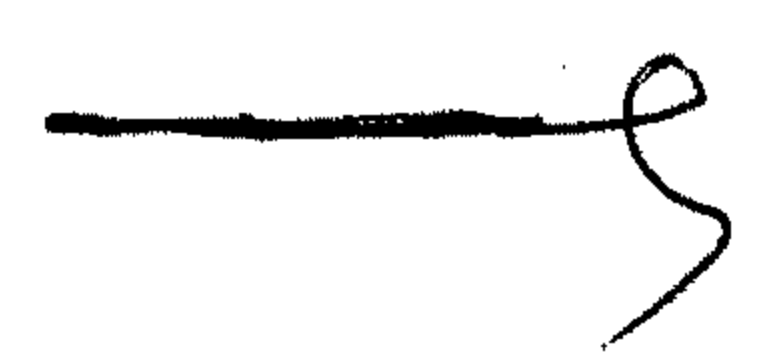
✓ 186 191. Pokazati da se anomalija (w) oko prazne žiže — ako se zanemare drugi i viši stepeni ekscentričnosti planetine putanje — menja proporcionalno vremenu.

✓ 187 192. Ako se u pravouglom koordinatnom sistemu konstruiše kriva $y = \sin x$, pa kroz tačku na apscisi $x = M$ povuče prava pod uglom sa apscisnom osom $\chi = \text{arctg } e$, sa Q označi tačka u kojoj ova prava seče sinusoidu, njena apscisa sa $?$, — pokazati da je $?$ = E.

20 upore

?

0 1/2 kt



— E4a: —
— E2a: —

VI ~~XXXX~~ SUNČEVO PRIVIDNO GODIŠNJE KRETANJE] go/ik

2/12

88 ~~193~~ Koje su nebeske ekvatorske koordinate ekliptičkih polova, a koje ekliptičke koordinate nebeskih polova ?

189 ~~194~~ Koje tačke na nebeskoj sferi imaju deklinacije jednake latitudama, a koje rektascenzije jednake longitudama ?

190 ~~195~~ Pokazati da je deklinacija nekretnice jednaka njenoj longitudi, ako joj je rektascenzija jednaka ~~latitudi~~ *latitudi*.

191 ~~196~~ Kako se za izvestan datum u godini određuje približna Sunčeva rektascenzija ?

Odrediti približne Sunčeve rektascenzije za 11. mart, 2. avgust i 19. januar.

192 ~~197~~ Kolika je (približno) geografska širina mesta kroz čiji zenit Sunce prolazi oko 31. marta ?

193 ~~198~~ Koje najveće i koje najmanje visine može Sunce dostići nad horizontom Beograda, i kad ih dostiže? *(u toku godine)*

194 ~~199~~ Koliku visinu dostiže Sunce u meridijanu mesta geografske širine $\varphi = -20^\circ$, ako mu je deklinacija $+18^\circ$?

195 ~~200~~ Izračunati ekliptičke koordinate zvezde α Aurigae (Kočijaša), čije su nebeske ekvatorske koordinate

$$\alpha = 5^h 13^m 21^s.96 \quad ; \quad \delta = +45^\circ 57' 19''.4,$$

uzimajući za nagib ekliptike $\epsilon = 23^\circ 27' 8''.3$.

196 ~~201~~ Koje ekstremne vrednosti dostiže u Beogradu zenitska daljina Sunčeva onog dana kad mu je izlazna amplituda bila 0° ?

197 ~~202~~ U trenutku kad pol ekliptike dospe u posmatračev zenit, kolike su horizontske koordinate nekretnice čije su ekliptičke koordinate (α, β) ?

Kolika je geografska širina tog posmatrača ?

198 ~~203~~ Ako se zna da Sunčevi prividni prečnici iznose: u perigeju

32' 36", a u apogeju 31' 32", pokazati da ekscentričnost Zemljine heliocentrične putanje iznosi oko 1/60.

199 ~~204~~. Kolike su horizontske koordinate u Beogradu nekretnice čija je rektascenzija $\alpha = 7^h$, deklinacija $\delta = +34^\circ 48'$, na dan 21. marta, 1 čas po Sunčevu zalazu?

200 ~~205~~. Odrediti ugao između ekliptike i horizonta mesta geografske širine φ , u trenutku kad visina γ - tačke dostigne vrednost h .

201 ~~206~~. Ako su rektascenzije Sunca, u trenucima njegovih gornjih kulminacija, bile

20. marta $\alpha_1 = 23^h 58^m 29^s$, a 21. marta $\alpha_2 = 0^h 2^m 7^s$,

odrediti trenutak prolećne ravnodnevice.

202 ~~207~~. Ako su deklinacije Sunca, u trenucima njegovih gornjih kulminacija, bile:

20. marta $\delta_1 = -0^\circ 20' 45''$, a 21. marta $\delta_2 = +0^\circ 3' 14''$,

odrediti trenutak prolećne ravnodnevice.

203 ~~208~~. Za koje delove Zemljine površine Sunce onog dana kad mu deklinacija dostigne $\delta = +21^\circ 16' 36''$ uopšte ne zalazi, a za koje ne izlazi? U kojim mestima Sunce tog dana prolazi kroz zenit?

204 ~~209~~. Između kojih granica se kreću visine koje Sunce dostiže, u toku godine, u Beogradu, pri prolazu kroz prvi vertikal?

205 ~~210~~. Izračunati nagib ekliptike pomoću dveju Sunčevih deklinacija, $\delta_1 = +6^\circ 26' 40''$ i $\delta_2 = +13^\circ 12' 20''$,

ako se zna da tim deklinacijama odgovara razlika u Sunčevim rektascenzijama $R_2 - R_1 = 17^\circ 39' 9''.6$ [Villie] \rightarrow

206 ~~211~~. Kolika je dnevna promena Sunčeve rektascenzije u vreme ravnodnevice, kad se zna da je časovna promena Sunčeve deklinacije, u to vreme, $1' \gamma$? i nagib ekliptike $\epsilon = 23^\circ 27'$

207 ~~212~~. Izračunati dnevne promene Sunčeve rektascenzije i deklinacije, u doba solsticija i ekvinokcija, znajući da je dnevna promena Sunče-

no. marta. d. p. p.

ve longitude (oko) 1° , a nagib ekliptike $\epsilon = 23^\circ 27'$.

208 213. Na kojoj geografskoj širini dostiže ponoćno Sunce visinu $h = +4^\circ 11'$, ako mu je u trenutku prolaza kroz meridijan tog mesta deklinacija bila $\delta = +20^\circ 8'$?

7/2h

~~.....~~

209 214. Pod pretpostavkom da je nagib ekliptike poznat sa greškom od $1''$, između kojih datuma treba položaj γ -tačke određivati pomoću Sunčevih rektascenzija, ako ~~.....~~ dobivenom položaju γ -tačke treba da bude tačnost od $\pm 0^s.02$?

shezbedena

~~.....~~

210 215. U kojim granicama se menja u Beogradu, u toku godine, meridijanska dužina senke na horizontalnoj ravni uspravnog stuba, visine 4 m ?

211 216. Kolika je dužina senke na horizontalnoj ravni uspravnog stuba, visine 25 m, u podne, u mestu geografske širine $\varphi = -20^\circ$, na dan kad je Sunčeva deklinacija $\delta = +18^\circ$?

10

212 217. Izračunati geografsku širinu mesta i nagib ekliptike, ako se zna da su u dane letnjeg i zimskog solsticija, u podne, izmerene u tom mestu, na severnoj Zemljinoj hemisferi, dužine senke na horizontalnoj ravni vertikalnog stuba, visine 20 m, i za dužine nadjene 8.82 m i 57.11 m ?

213 218. Kolika je razlika u dužinama meridijanskih senki, na horizontalnoj ravni, vertikalnog stuba, visine 10 m, u dane ekvinokcija i solsticija, u mestima na meridijanu Beograda, od kojih je jedno 55 km severnije, a drugo isto toliko južnije od Beograda?

214 219. Naći geografsku širinu mesta na kojem, u podne, na dan let-

njeg solsticija, vertikalni stub baca na horizontalnu ravan senku dužine jednake visini stuba.

Odrediti Sunčevu visinu u ponoć tog datuma i u tom mestu.

215 (220) Znajući tačnu vrednost deklinacije u trenutku Sunčeva prolaza kroz meridijan mesta, sa kolikom tačnošću ^(D) ~~će biti određena~~ geografska širina mesta, ako je za meridijansku dužinu ^(D) senke na horizontalnoj ravni uspravne, ^(zarezano) olovke, ^(duge l = 18cm) nadjena vrednost $D = 22\text{cm} \pm 0.1\text{cm}$?

216 (221) Koji će i koliki delovi Zemljine površine videti Sunce svih 24^{h} , a koji samo 12^{h} , u toku dana kada mu je deklinacija ^(D)?

217 (222) Kolika je geografska širina mesta u kojem astronomski sumrak traje celu noć onog datuma kad je Sunčeva deklinacija ^(D) $+14^{\circ}$?

218 (223) Izračunati deklinaciju Sunca, ako se zna da je trajanje obdanice, u Beogradu, iznosilo tačno 12^{h} .

219 (224) Naći odnos trajanja obdanice prema obnoćnici u mestu geografske širine φ , ^{onog} dana kad je Sunčeva deklinacija bila ^(D)?

220 (225) Kolika je razlika u trajanjima obdanica, na dan 13. juna, u Beogradu i Bitolju, čije su geografske širine $\varphi_1 = +44^{\circ} 48'$ i $\varphi_2 = +41^{\circ} 2'$?

221 (226) Naći izraz za promenu obdanice u toku godine u funkciji promena Sunčeve deklinacije. Rezultat primeniti na geografsku širinu Beograda u dane početaka godišnjih doba.

222 (227) Odrediti datume u koje Sunce prolazi kroz ravan Mlečnog puta, čiji severni pol ima koordinate $\alpha = 12^{\text{h}} 48^{\text{m}}$ i $\delta = +27^{\circ}$.

223 (228) Za najduža trajanja obdanica u godini Ptolemej je našao u Sirakuzi $14^{\text{h}} 30^{\text{m}}$, a u Atini $14^{\text{h}} 36^{\text{m}}$. Uzimajući u obzir da je za nagib ekliptike Ptolemej uzimao $\epsilon = 23^{\circ} 51'$, odrediti geografske širine tih gradova.

224 (229) Odrediti, pomoću geometrijske konstrukcije, odnos trajanja obdanice prema obnoćnici u mestu geografske širine φ , na dan kad je

Sunčeva deklinacija bila δ .

225 (230) Za koliko će, na dan ravnodnevice, ranije Sunce izaći za posmatrača, na geografskoj širini φ , koji se nalazi na uzvišenju $1/3200$ Zemljina poluprečnika, nego za posmatrača koji bi se nalazio u podnožju istog uzvišenja ?

226 (231) Odrediti geografsku širinu tačke na Zemlji na kojoj, na dan letnjeg solsticija, odnos trajanja obdanice prema obnoćnici iznosi m .

227 (232) Ako je polarna daljina velikog kruga što prolazi kroz dva mesta, na istom Zemljinu paralelu, jednaka Sunčevoj deklinaciji, pokazati da je trajanje obnoćnice na tim mestima jednako različiti geografskih dužina tih mesta.

228 (235) Za koliki deo površine Zemljine sfere Sunce neće izaći onog dana kad je Sunčeva deklinacija $\delta = +22^\circ 30'$. Za vrednost Sunčeva prividna poluprečnika uzeti $r_0 = 16'$, a za iznos refrakcije u horizontu $R = 35'$.

228 (233) Kolika je (u lučnim minutama) razlika u azimutima Sunčevih izlaza, u dva uzastopna datuma, ako je prvog dana bila Sunčeva deklinacija δ , a drugog dana izlaz bio m minuta kasnije nego prethodnog dana ?

229 (234) Iz mesta geografske širine φ posmatrano je Sunce, čija je longituda bila Λ , u prvom vertikalalu na visini h . Pokazati da je geografska širina posmatrališta

$$\varphi = \arcsin(\sin \Lambda \sin h \cos \epsilon)$$

[Ball]

230 (236) Pokazati da je za posmatrača na polarnom krugu dnevna promena tačke Sunčeva zalaza jednaka promeni njegove longitode.

230 (236) Naći geografsku širinu mesta na kojem Sunčev prolaz kroz prvi vertikal traje s sekunda (ne uzimajući u obzir dejstvo refrakcije).

231 (237) Pokazati da na mestu geografske širine φ , na dan solsticija, trajanje prolaza Sunčeva prividna diska kroz prvi vertikal mesta iznosi

u minutama

$$\tau = \frac{2}{15} R_0 (\sin^2 \phi - \sin^2 \varepsilon)^{-\frac{1}{2}},$$

gde R_0 označava poluprečnik Sunčeva prividnog diska u lučnim minutama.

[Ball]

- ✓ 232 ~~237~~ Pokazati da je trajanje izlaza Sunčeva prividnog kružnog diska najduže na dan solsticija, a najkraće na dan ekvinokcija.

Izračunati trajanje izlaza Sunčeva prividnog kotura, na dan ekvinokcija, u mestu geografske širine $\varphi = +45^\circ$, kad mu je prividni poluprečnik $= 16'$.

- ✓ 233 ~~238~~ Odrediti Sunčevu longitudu u trenutku kad se ono nađe podjednako (prividno) daleko od dveju nekretnica poznatih ekliptičkih koordinata.

- ✓ 234 ~~239~~ Ako dve nekretnice, sa koordinata (α_1, δ_1) i (α_2, δ_2) imaju istu longitudu, pokazati da je

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = (\cos \alpha_1 \operatorname{tg} \delta_2 - \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \delta_1) \operatorname{tg} \varepsilon. \quad [\text{Smart}]$$

- ✓ 235 ~~240~~ Odredjenog datuma i trenutka Sunčeva longituda je iznosila $\Lambda = 195^\circ 57' 33''$, a Jupiterova rektascenzija, pri njegovu prolazu kroz ravan ekliptike $\alpha = 7^h 22^m 57^s$. Izračunati Sunčeve ekvatorske koordinate, Jupiterovu deklinaciju, kao i uglovnu daljinu Jupitera od Sunca, u tom trenutku, uzimajući za nagib ekliptike $\varepsilon = 23^\circ 26' 54''$.

- ✓ 236 ~~241~~ Nekretnica poznatih koordinata (α, δ) , izvesnog datuma, na izvesnom mestu, geografske širine φ , izlazi jednovremeno sa Suncem, čija je rektascenzija tog datuma \mathcal{R} . Pokazati da je

$$\mathcal{R} - \arcsin(\sin \mathcal{R} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varepsilon) = \alpha - \arcsin(\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi).$$

- ✓ 237 ~~242~~ Odrediti geografsku širinu mesta za koje zalaz Sunca na dan ekvinokcija traje 30^m .

- ✓ 238 ~~243~~ Dva bliska posmatrača, na istom meridijanu, posmatrali su jednovremeno Sunce na visinama h , odnosno $h + \Delta h$. Ako je Sunčeva deklinacija bila δ , a geografska širina prvog posmatrača φ , pokazati da se geografska širina drugog od ove razlikuje za

0/2/1/1/1

46
72

$$\Delta\varphi = \Delta h \cosh \cos\varphi (\sin\delta - \sin h \sin\varphi)^{-1}$$

✓ 239 ~~244~~ Pokazati da je

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2 (1 + 3 \sec^2 \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$$

ako je za posmatrača na geografskoj širini φ_1 , mesec dana pre jesenje ravnodnevice, trajanje obdanice jednako trajanju obdanice najdužeg dana u godini na mestu geografske širine φ_2 .

✓ 240 ~~245~~ Pokazati da je za posmatrača na tropskom pojasu časovni ugao Suncev, čije su koordinate (R, D) , kad se ekliptika poklopi sa vertikalom, dat izrazom

$$H = \arcsin(\sin R \operatorname{tg} D \operatorname{tg} \varphi) - R$$

~~241. Šta se sve i kako može odrediti iz posmatranja Sunca na istoj visini, pre i posle njegova prolaza kroz posmatračev meridian?~~

✓ 241 ~~246~~ Pokazati da će u trenutku kad je Sunčeva rektascenzija jednaka rektascenziji nekretnice, čije su koordinate (α, δ) , a latituda (β) neznatna, — razlika između longituda Sunca i nekretnice biti (približno)

$$\lambda - \Lambda = \beta \sin \delta \operatorname{ctg} \alpha.$$

✓ 242 ~~247~~ Pokazati da je — pod pretpostavkom da se Sunčeva longituda uniformno menja —

$$\ddot{R} = 2 \dot{R} \dot{D} \operatorname{tg} D \quad \text{u} \quad \ddot{D} = -\frac{1}{2} (\dot{R})^2 \sin 2D.$$

✓ 243 ~~248~~ Pokazati da je

$$\dot{R} = \dot{\Lambda} \cos \varepsilon \sec^2 D.$$

gde su $(R, D, \Lambda, \varepsilon)$ — rektascenzija, deklinacija, longituda Sunčeva, odnosno nagib ekliptike.

244 ~~249~~ Ako su izvesnog datuma, u blizini letnjeg solsticija, u podne, Sunčeve koordinate $(R) = 90^\circ - \eta + D$, pokazati da je nagib ekliptike dat izrazom

$$\varepsilon = D + \eta^2 \sin 2D$$

245 ~~250~~ Od dva izraza za određivanje nagiba ekliptike:

tačna izraza — $\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} D \cos \varepsilon \operatorname{ctg} R$

ili približna izraza — $\epsilon - \textcircled{15} = q^2 \sin 2\textcircled{15} \text{ cosec } 1''$,
gde je $q = 45^\circ - \frac{1}{2} \textcircled{R}$, koji je sa numeričkog gledišta pogodniji i
zašto?

✓ $\textcircled{246}$ ~~$\textcircled{251}$~~ Ako se zna da je nagib ravni Sunčeva ekvatora prema ravni
ekliptike $i = 7^\circ 15'$ i longituda ekvatorova uzlaznog čvora prema ekliptici
 $\textcircled{86} = 74^\circ 22'$, a nagib ekliptike $\epsilon = 23^\circ 27'$ — odrediti koordina-
te Sunčeva severnog nebeskog pola.

Koja mu je od poznatih najbliža sjajna nekretnica ?

✓ $\textcircled{247}$ ~~$\textcircled{252}$~~ U koje će datume u godini senke, na horizontalnoj ravni me-
sta $\varphi = +52^\circ$, vertikalnog zida dužine l i visine a , usmerena pravcem
E - W, imati jednake površine u podne i u 18^h ?

✓ $\textcircled{248}$ ~~$\textcircled{253}$~~ Kad će senka, na horizontalnoj ravni, pravouglog trouglog
gnomona, čija je hipotenuza paralelna svetskoj osi, a osnova usmerena
pravcem E - W, imati površinu jednaku gnomonovoj površini ?

✓ $\textcircled{249}$ ~~$\textcircled{254}$~~ Pokazati da prav zid visine a , u ravni vertikala čiji je
azimut A , na dan ekvinokcija, ne baca senku kad je časovni ugao Sunca
 $H = \text{arctg}(\sin \varphi \text{tg} A)$, a u podne tog dana senka ima širinu $x = a \text{tg} \varphi \sin A$.

✓ $\textcircled{250}$ ~~$\textcircled{255}$~~ Ako je na dan ekvinokcija, u podne, x dužina senke, na ho-
rizontalnoj ravni, u mestu geografske širine φ , a y dužina senke tog
stuba na dan solsticija, kad se Sunce nadje u prvom vertikalu mesta —
pokazati da je

$$x = y \text{tg} \varphi \text{tg} \psi, \quad \text{gde je } \psi = \text{arcsin}(\sin \epsilon \text{cosec} \varphi).$$

~~$\textcircled{252}$ Pokazati da sva mesta imaju trajanja obdaniče, zajedno sa
trajanjima sumraka, duža od 12^h dok je Sunčeva deklinacija manja od 18° .~~

✓ $\textcircled{251}$ ~~$\textcircled{256}$~~ Pokazati da je za mesto na ekvatoru trajanje astronomskog
sumraka u časovima određeno izrazom

$$G = \frac{12}{\pi} \text{arcsin}(\sin 18^\circ \sec \textcircled{17}).$$

✓ $\textcircled{252}$ ~~$\textcircled{257}$~~ Pokazati da je na mestu geografske širine φ najkraće traja-
nje astronomskog sumraka, u časovima, određeno izrazom

$$\sigma = \frac{2}{15} \arcsin(\sin 9^\circ \sec \varphi).$$

49

253 ~~258~~ Izvesti izraz za najkraće trajanje astronomskog sumraka i odrediti (približno) datume u koje pada.

254 ~~259~~ Pokazati da je na mestu geografske širine φ trajanje (σ) večernjeg sumraka određeno izrazom

$$2 \sin^2 \frac{\sigma}{2} = \sec^2 \varphi [1 - \cos h \cos(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

gde su h Sunčeva visina u trenutku svršetka sumraka, a φ_1 i φ_2 paralaktički uglovi pri njegovu zalazu, odnosno svršetku sumraka.

260. Za datum kad je Sunčeva deklinacija δ i mesto geografske širine φ , izračunati, u vremenim sekundama, trajanje izlaza (zalaza) Sunčeva prividnog kotura, čiji je poluprečnik u sekundama luka r_0 .

~~261~~. Izračunati trajanje izlaza Sunčeva prividnog kotura, na dan ekvinokcija, u mestu geografske širine $\varphi = +45^\circ$, kad mu je prividni poluprečnik $r_0 = 16'$.

255 ~~261~~ Za dan kad je Sunčeva deklinacija $\delta = +30^\circ 30' 40''$, izračunati približno trajanje prolaza kroz meridijan mesta Sunčeva prividna kotura, čiji poluprečnik $r_0 = 16' 5''$.

256 ~~262~~ Odrediti trajanje prolaza Sunčeva prividnog diska, poluprečnika r_0 , preko horizontalnog končića teodolita, postavljena na geografskoj širini φ , ako se zna da je Sunčena deklinacija bila δ a njegova zenitska daljina, u trenutku posmatranja, z .

257 ~~263~~ Odrediti geografsku širinu posmatračevu iz trajanja izlaza, odnosno zalaza, nebeskog tela oblika kružnog diska merljiva prividnog prečnika.

Izvesti izraz za slučaj ako su izlazi (zalazi) posmatrani u doba ekvinokcija.

258 ~~264~~ Pretpostavljajući da je Zemljina heliocentrična putanja krug, odrediti trenutke u koje trajanja prolaza prividnog Sunčeva kotura, poluprečnika jednaka $16'$, kroz posmatračev meridijan dostižu svoje ekstremne vrednosti, i izračunati kolike.

OK

49 75

259. Ako je 1. januara 1961. Zemljina heliocentrična daljina bila r , za koliko se promenila ova do 30. juna iste godine, ako se zna da su poluprečnici Sunčeva prividnog diska bili tih datuma r'_\odot , odnosno r''_\odot ?

Izračunati tu promenu ako se zna da je

$$r = 147,01 \times 10^6 \text{ km}, \quad r'_\odot = 16'17''50, \quad r''_\odot = 15'45''39.$$

260. Naći približnu geografsku širinu mesta gde dejstvo refrakcije produžuje trajanje obdanice za 15^m u dane kad je Sunčeva deklinacija $\delta = -10^\circ$ i odrediti (približno) te datume.

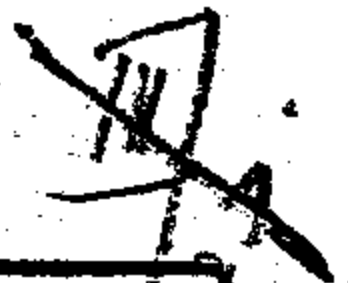
261. Izvesti i prodiskutovati jednačinu krive, u funkciji geografske širine mesta i deklinacije Sunca, koju opisuje vrh senke na horizontalnoj ravni vertikalnog stuba visine a .

262. Ako označimo sa Λ , B i R Sunčeve ekliptičke koordinate i geocentrični radijevektor, sa ϵ nagib ekliptike, a sa X , Y , Z Sunčeve pravouglo geocentrične ekliptičke koordinate (osa X usmerena ka γ -tački; Y -osa usmerena ka $\Lambda = +90^\circ$; Z -osa ka severnom ekliptičkom polu) - pokazati da su ove koordinate predstavljene izrazima (u jedinicama Sunčeve srednje daljine od Zemlje)

$$X = R \cos \Lambda, \quad Y = R \sin \Lambda \cos \epsilon - 19.3 R B,$$

$$Z = R \sin \Lambda \sin \epsilon + 44.5 R B,$$

gde su numeričke vrednosti koeficijenata date u jedinicama sedme decimale, ako se zanemare drugi i viši stepeni Sunčeve latitute.



R E Š E N J A

O 1/2 k

119

—(4a)

51 191

IV ASTRONOMSKA REFRAKCIJA] go 1/2 k

—(2a)

127 132. Kako u zadatku nikakvi podaci nisu dati o temperaturi i atmosferskom pritisku, pri kojima su posmatranja izvršena, moramo se zadovoljiti popravkama posmatranih zenitnih daljinâ samo za iznose takozvane srednje (normalne) refrakcije.

Za posmatrane visine

$$h_1 = 15^\circ 16' 17'' \approx 15^\circ 16.3 \quad i \quad h_2 = 70^\circ 30' 40'' \approx 70^\circ 30.7,$$

dakle zenitske daljine

$$z_1 \approx 74^\circ 43.7 \quad i \quad z_2 \approx 19^\circ 29.3,$$

nalazimo u Tablici (na str.) vrednosti srednje refrakcije:

u donjoj k., za		u gornjoj k. za	
$z_1 = 74^\circ 30'$	$R_1 = 213.7;$	$z_2 = 19^\circ 0'$	$R_2 = 20.7;$
$\frac{13.7}{\dots}$	$\dots \dots \dots 3.4;$	$\frac{29.3}{\dots}$	$\dots \dots \dots 0.6$
dakle $z_1 = 74^\circ 43.7,$	$R_1 = 217.1;$	$z_2 = 19^\circ 29.3,$	$R_2 = 21.3.$

Prema tome prave zenitske daljine posmatrane nekretnice bile su, u trenucima njenih kulminacija,

$$z_1 = 74^\circ 47' 20'' \quad i \quad z_2 = 19^\circ 29' 42''$$

128 133. Rešavajući prethodni zadatak našli smo (u Tablici na str.

) za iznose srednje refrakcije, u trenucima posmatranja,

$$za \quad z_1 \approx 74^\circ 43.7, \quad R_1 = 3' 37.1 = 217.1; \quad za \quad z_2 \approx 19^\circ 29.3, \quad R_2 = 0' 21.3.$$

Ove vrednosti treba još popraviti za pročitana stanja termometra i barometra.

U donjoj k.

u gornjoj k.

za $12.8^\circ C, \tau = -0.047;$	$R_1 = 217.1;$	za $8.2^\circ C, \tau = -0.031;$	$R_2 = 21.3;$
	$\tau R_1 = -10.2;$		$\tau R_2 = -0.7;$
	$\bar{R}_1 = 206.9;$		$\bar{R}_2 = 20.6;$
za $738mm, \beta = -0.029;$	$\beta \bar{R}_1 = -6.0;$	za $740mm, \beta = -0.026;$	$\beta \bar{R}_2 = -0.5;$
	$R_1 = 200.9;$		$R_2 = 20.1;$
	$R_1 = 3' 21''$		$R_2 = 0' 20''$

Prave zenitske daljine u obema kulminacijama bile su, prema tome,

$$z_1 = 74^\circ 47' 4'', \quad i \quad z_2 = 19^\circ 29' 40''$$

Sa tim vrednostima za prave zenitske daljine u obema kulminacijama po-

52 192 113

smatrane nekretnice nalazimo:

za posmatračevu geografsku širinu $\varphi = 90^\circ - \frac{1}{2}(z_i + z_s) = +42^\circ 51' 40''$;

za deklinaciju posmatrane nekretnice $\delta = 90^\circ - \frac{1}{2}(z_i - z_s) = +62^\circ 21' 18''$.

129 134. Odredićemo, prvo, za svaku od posmatranih zenitskih daljina dejstvo refrakcije.

Za $z_s \approx 6^\circ$ 33.7	$R_o = 6.3,$ + 0.6, $R_o = 6.9,$	za $z_i \approx 71^\circ$ 27.7	$R_o = 173.4,$ + 4.4, $R_o = 177.4,$
za $16.4^\circ C, \tau = -0.060$	$\tau R_o = -0.4,$ $R_i = 6.5,$	za $11.8^\circ C, \tau = -0.043$	$\tau R_o = -7.6,$ $R_i = 169.8,$
za $748mm, \beta = -0.016$	$\beta R_i = -1.0,$	za $750mm, \beta = -0.013$	$\beta R_i = -2.2,$
za $z_s = 6^\circ 33' 44.5''$	$R_s = 5.5;$	za $z_i = 71^\circ 27' 39.3''$	$R_i = 167.6.$

Zadatak ima — kao što je već bilo rečeno (v. ~~ideo~~ Zbirke, str. 106) — dva rešenja, prema tome da li je zvezda u gornjoj kulminaciji prošla s e v r e r n o ili j u ž n o od zenita. U prvom slučaju će biti:

$\varphi_I = 90^\circ - \frac{1}{2}(z_s + z_i), \quad \delta_I = 90^\circ + \frac{1}{2}(z_s - z_i).$

U drugom slučaju će biti: $\varphi_{II} = 90^\circ + \frac{1}{2}(z_s - z_i), \quad \delta_{II} = 90^\circ - \frac{1}{2}(z_s + z_i).$

Sa nadjenim pravim zenitskim daljinama imaćemo:

$z_s + z_i = 78^\circ 4' 16.9,$ $\frac{1}{2}(z_s + z_i) = 39^\circ 2' 8.5;$

$z_s - z_i = -64^\circ 56' 36.9,$ $\frac{1}{2}(z_s - z_i) = -32^\circ 28' 18.5.$

Tražena rešenja će biti, prema tome

$\varphi_I = +50^\circ 57' 51.5,$ $\delta_I = +57^\circ 31' 41.5;$

$\varphi_{II} = +57^\circ 31' 41.5,$ $\delta_{II} = +50^\circ 57' 51.5.$

130 135. Predstavimo na sl. 90 sa P_n i Z položaje severnog nebeskog pola i posmatračeva zenita; paralelom $Z_n Z$ — polovinu putanje što je nekretnica provede nad posmatračevim horizontom; sa Z_n — položaj nakretnice u trenutku njena izlaza; sa Z — položaj nekretnice u trenutku kad se nadje na 90° zenitske daljine, dakle u ravni posmatračeva horizonta.

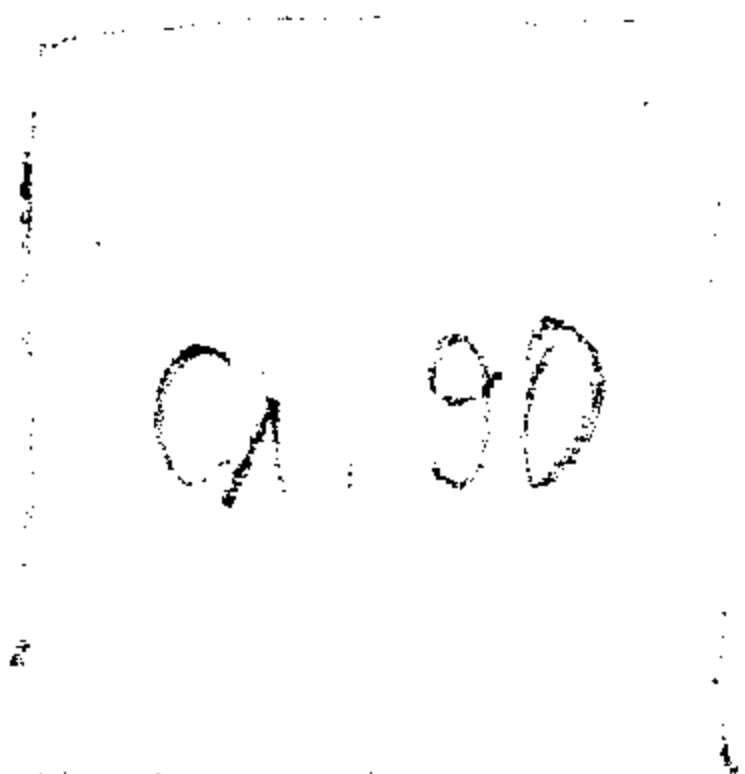
U položajnom trouglu $ZP_n Z_n$ poznati su nam od njegovih elemenata: strana $Z_n Z = -Z_n I + I Z_n = 90^\circ 35'$, gde $35'$ predstavlja dejstvo astronomske

refrakcije u horizontu; ugao $ZP_n\Sigma$ na polu je časovni ugao izlaza: označićemo ga sa $-(H_0 + \Delta H)$. Na ovaj način je istaknuto da je: $-H_0$ časovni ugao zvezde u trenutku njena prolaza (Σ) kroz ravan horizonta; a $-\Delta H$ promena koju u časovnom uglu izaziva dejstvo refrakcije.

Prema zadatku je: $H_0 + \Delta H = \frac{1}{2}(14^h 19^m 48^s) = 7^h 9^m 54^s$. Sem toga je $ZP_n = \Sigma P_n$, jer zvezda prolazi kroz posmatračev zenit.

Iz položajnog sfernog trougla $ZP_n\Sigma$ imamo:

$$\cos(90^\circ 35') = -\sin 35' = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos(H_0 + \Delta H).$$



Odavde nalazimo

$$\sin^2 \varphi = \frac{\cos(H_0 + \Delta H) + \sin 35'}{\cos(H_0 + \Delta H) - 1} = \frac{N}{D},$$

izraz koji nam omogućuje da nadjemo φ , jer su na desnoj njegovoj strani sve veličine poznate.

Prema podacima zadatka, imamo:

$\cos(H_0 + \Delta H) = -0.30029,$	$[N] \quad 9.46257 n,$
$\sin 35' = 0.01018,$	$[D] \quad 0.11404 n,$
$N = -0.29011,$	$2[\sin \varphi] \quad 9.34853,$
$D = -1.30029;$	$[\sin \varphi] \quad 9.67427,$

$$\varphi = \delta = \pm 28^\circ 11' 15''$$

Druga koordinata nekretnice, rektascenzija, ostaje nepromenjena, jer se smatra da se i trenutak izlaza, kao i časovni ugao, odnose na pravi izlaz (tačka I). Dakle

$$\alpha = t - (H_0 + \Delta H) = 12^h 33^m 24^s - (-7^h 9^m 54^s) = 19^h 43^m 18^s$$

Quck

(131) (136). Do traženih veličina doći ćemo preko transformisane Gaussove grupe u obrasce za određivanje δ i H , kad su dati φ , z i A , to jest preko obrazaca

$$\begin{aligned} \sin \delta &= m \sin(\varphi - M), \\ \cos \delta \sin H &= \sin z \sin A, \\ \cos \delta \cos H &= m \cos(\varphi - M), \end{aligned}$$

gde je stavljeno

$$\begin{aligned} \sin z \cos A &= m \sin M, \\ \cos z &= m \cos M. \end{aligned}$$

Nepoznate veličine određene su iz ovih jednačina

$$\operatorname{tg} H = \sin M \operatorname{tg} A \sin(\varphi - M) \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg}(\varphi - M) \cos H.$$

Kako se u zadatku traži da se dejstvo refrakcije uzme u obzir,

54
194

prvo ćemo odrediti iznos refrakcije, i to normalne, jer nikakvim drugim podacima ne raspoložemo o stanju atmosfere.

Sa posmatranom zenitskom daljinom, $z = 69^{\circ}42'30'' = 69^{\circ}42'5$, nalazimo u tablici za refrakciju na str. :

za	$z = 69^{\circ} 30'$	159.5,
za	12.5 12.5 x 0.14.....	1.8,
		$R = 161.3.$

I tako za pravu zenitsku daljinu nalazimo $z_r = z + R = 69^{\circ} 45' 11''$.

$\varphi = +38^{\circ} 58' 53''$,	$[tg z_r]$	0.43 314,	$M = 53^{\circ} 43' 40''$,
$z_r = 69 45 11$,	$[\cos A]$	9.70 126,	$\varphi = 38 58 53$,
$A = 300 10 30$;	$[tg M]$	0.13 440;	$\varphi - M = -14 44 47.$

Za nepoznate nalazimo:

$[\sin M]$	9.90 645,	$[tg(\varphi - M)]$	9.42 030 n,	dakle:
$[tg A]$	0.23 551 n,	$[\cos H_r]$	9.75 744,	
$[\sec(\varphi - M)]$	0.01 454,	$[tg \delta_r]$	9.17 774 n;	
$[tg H_r]$	0.15 650 n,			
$H_r = -55^{\circ} 6' 24''$;				
				$\delta = -8^{\circ} 33' 46''$.

Dobivene vrednosti proverićemo na taj način što ćemo, sa datim podacima, neposredno izračunati dejstvo refrakcije na časovni ugao i deklinaciju. Izrazi za ova dejstva su, kao što znamo,

$$dH = \sin q \sec \delta dz \quad \text{i} \quad d\delta = -\cos q dz.$$

U njima je nepoznat samo položajni ugao, q , koji nalazimo iz obrazaca

$\sin z \sin q = \cos \varphi \sin H_r,$	$n \sin N = \cos \varphi \cos H_r,$
$\sin z \cos q = n \cos(\delta_r + N);$	$n \cos N = \sin \varphi.$

gde je

Prema podacima u zadatku biće:

$[\cos \varphi]$	9.89 061,	$[\cos \varphi]$	9.89 061,	$[\sec \delta_r]$	0.00 480,
$[\cos H_r]$	9.75 744,	$[\sin H_r]$	9.91 393 n,	$[\sin q]$	9.83 229 n,
Σ	9.64 805,	Σ_1	9.80 454 n,	$[dz]$	2.20 763,
$[\sin \varphi]$	9.79 860,	$[n]$	9.88 663,	$[\cos q]$	9.86 542 n,
$[tg N]$	9.84 945,	$[\cos(\delta_r + N)]$	9.95 103,	$[dH]$	2.04 472 n,
$[\cos N]$	9.91 197,	Σ_2	9.83 766,	$[d\delta]$	2.07 305 n,

$$[n] = 9.88663, \quad \Sigma_1 - \Sigma_2 = [\text{tg} q] = 9.96688 n,$$

$$N = 35^\circ 15' 44'', \quad q = -42^\circ 49' 2'';$$

$$\delta_1 + N = 26 41 58;$$

58
195
16

$$\Delta H = -110.8,$$

$$\Delta \delta = -118.3.$$

Rešavajući isti zadatak bez obzira na dejstvo refrakcije (v. zad. 91, ~~I deo~~ Zbirke, str. 107), našli smo za časovni ugao i deklinaciju zvezde:

$$H = 304^\circ 55' 27'' \quad ; \quad \delta = -8^\circ 31' 47''.$$

Kako smo gore našli, refrakcija u ovim koordinatama proizvodi promene:

$$\Delta H = -1' 51'' \quad ; \quad \Delta \delta = -1' 58''.$$

Prema tome, za prave ekvatorske koordinate posmatrane nekretnice nalazimo

$$H_r = 304^\circ 53' 36'' \quad ; \quad \delta_r = -8^\circ 33' 45''.$$

koje se slažu sa ranije nadjenim vrednostima.

132 ~~137~~ Prividna depresija posmatračeva horizonta, u minutama, data je izrazom

$$\Delta = 1.76 \sqrt{h},$$

gde h predstavlja u metrima izraženu visinu posmatračeva oka. Prema zadatku je, onda,

$$60 = 1.76 \sqrt{h}, \quad \text{to jest} \quad h = (34.09)^2.$$

To jest, data prividna depresija horizonta odgovara visini posmatračeva oka od 1162 m.

Toj visini odgovara daljina vida, u nautičkim miljama,

$$D = 2.11 \sqrt{h} = 2.11 \times 34.09 \text{ n.m.} = 2.11 \times 34.09 \times 1.852 \text{ km} = 133 \text{ km.}$$

— iznose refrakcije na posmatranim zenitskim daljinama; [sa ζ_s i ζ_i]

133 ~~138~~. Označimo: sa R_s i R_i — prave zenitske daljine u trenucima posmatranja. Onda, prema zadatku, imamo

$$\zeta_s = \delta - \varphi = z_s + R_s = z_s + k \text{tg} z_s,$$

$$\zeta_i = 180^\circ - (\delta + \varphi) = z_i + R_i = z_i + k \text{tg} z_i.$$

Oдавде nalazimo

$$180^\circ - 2\varphi = z_s + z_i + k(\text{tg} z_s + \text{tg} z_i),$$

to jest
$$\varphi = 90^\circ - \frac{1}{2} [(z_s + z_i) + k (\operatorname{tg} z_s + \operatorname{tg} z_i)].$$

Prema podacima zadatka biće:

$z_s = 30^\circ 10' 37''$,	$\operatorname{tg} z_s = 0.5815$,	$k = 60''.3$,
$z_i = 60^\circ 10' 37''$,	$\operatorname{tg} z_i = 1.7444$,	$\Sigma k = 138.7$,
$\Sigma z = 90^\circ 21' 14''$,	$\Sigma = 2.3259$,	$\frac{1}{2} \Sigma k = 69.8$.
$\frac{1}{2} \Sigma z = 45^\circ 10' 37''$;	$\Sigma \approx 2.3$;	

Tako nalazimo:
$$\varphi = 90^\circ - 45^\circ 10' 37'' - 1' 10'' = +44^\circ 48' 12''.$$

Da smo se poslužili tablicama za srednju refrakciju, našli bismo:

$$\zeta_s = \delta - \varphi = z_s + R_s = 30^\circ 10' 37'' + 34''.9 \approx 30^\circ 11' 12''$$

$$\zeta_i = 180^\circ - (\delta + \varphi) = z_i + R_i = 60^\circ 10' 37'' + 1' 44''.5 \approx 60^\circ 12' 25''$$

Odatve je
$$\varphi = 90^\circ - \frac{1}{2} (30^\circ 11' 12'' + 60^\circ 12' 25'') = +44^\circ 48' 12''.$$

134 ~~139~~ Predstavimo na sl. 91 sa:

S_s i S_i - prave položaje posmatrane cirkumpolarne u gornjoj odn. donjoj kulminaciji;

ζ_s i ζ_i - prave zenitske daljine njene, u tim trenucima;

Σ_s i Σ_i - prividne položaje posmatrane cirkumpolarne;

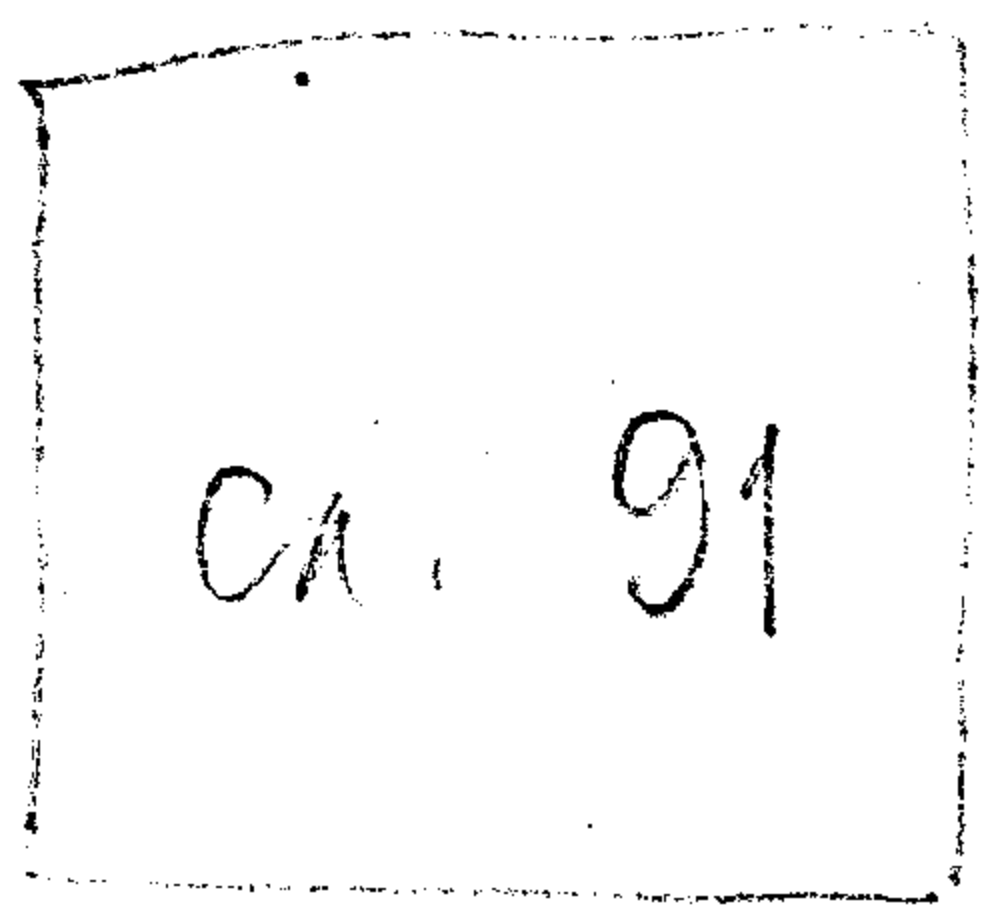
z_s i z_i - prividne zenitske daljine njene;

R_s i R_i - iznose refrakcije u trenucima posmatranja.

Onda je

$$\zeta_s = z_s + R_s = z_s + k \operatorname{tg} z_s,$$

$$\zeta_i = z_i + R_i = z_i + k \operatorname{tg} z_i.$$



S druge strane, ako pretpostavimo da je i gornja kulminacija cirkumpolarne bila sa severne strane zenita, za prav^e zenitsk^e daljin^e imaćemo:

$$\zeta_s = \delta - \varphi \quad \text{i} \quad \zeta_i = 180^\circ - (\delta + \varphi).$$

Prema tome će biti

$$\zeta_s = \delta - \varphi = z_s + k \operatorname{tg} z_s, \tag{1}$$

$$\zeta_i = 180^\circ - (\delta + \varphi) = z_i + k \operatorname{tg} z_i. \tag{2}$$

U prvom pitanju zadatka deklinacija nekretnice je nepoznata. Stoga ćemo je iz ovih jednačina eliminisati. I dobićemo

$$180^\circ - 2\varphi = z_s + z_i + k(\operatorname{tg} z_s + \operatorname{tg} z_i).$$

~~57 III~~
1992

Oдавде možemo odrediti vrednost konstante k . Prema podacima zadatka biće:

$$\begin{array}{lll} \varphi = +44^\circ 48' 13''.2, & z_s = 17^\circ 18' 48''.2, & \operatorname{tg} z_s = 0.3117, \\ 2\varphi = \underline{89 \quad 36 \quad 26.4}, & z_i = \underline{73 \quad 1 \quad 11.6}, & \operatorname{tg} z_i = \underline{3.2749}, \\ 180^\circ - 2\varphi = 90 \quad 23 \quad 33.6; & z_s + z_i = 90 \quad 19 \quad 59.8; & \Sigma = 3.5866, \\ & & \bar{\Sigma} \approx 3.59. \end{array}$$

Prema tome je:

$$[180^\circ - 2\varphi - (z_s + z_i)] = 90^\circ 23' 33''.6 - 90^\circ 19' 59''.8 = 3' 33''.8 = 213''.8,$$

tako da nalazimo $k = 213''.8 : 3.59 = 59''.6$.

[Veća tačnost se i ne može na ovaj način postići].

Pošto smo odredili k , možemo odrediti, bilo iz (1), bilo iz (2), i deklinaciju posmatrane cirkumpolarne. Nalazimo

$$\delta = \varphi + z_s + k \operatorname{tg} z_s, \quad \text{odnosno} \quad \delta = 180^\circ - (\varphi + z_i) - k \operatorname{tg} z_i.$$

Sa podacima zadatka dobivamo:

$$\begin{array}{l} \varphi = +44^\circ 48' 13''.2, \\ z_s = 17 \quad 18 \quad 48.2, \\ k \operatorname{tg} z_s = \underline{18.6}, \\ \delta = +62 \quad 7 \quad 20.0; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \varphi = +44^\circ 48' 13''.2, \\ z_i = \underline{73 \quad 1 \quad 11.6}, \\ \varphi + z_i = \underline{117 \quad 49 \quad 24.8}, \\ 180^\circ - (\varphi + z_i) = 62 \quad 10 \quad 35.2, \\ - k \operatorname{tg} z_i = \underline{- \quad 3 \quad 15.2}, \\ \delta = \underline{+62 \quad 7 \quad 20.0}. \end{array}$$

2. Ako se pretpostavi da su atmosferski uslovi isti bili u trenucima oba posmatranja, za iznose refrakcije u tim trenucima imaćemo

$$R_s = A \operatorname{tg} z_s - B \operatorname{tg}^3 z_s \quad \text{i} \quad R_i = A \operatorname{tg} z_i - B \operatorname{tg}^3 z_i.$$

Primetimo li da je nekretnica bila i u gornjoj kulminaciji sa severne strane posmatračeva zenita, imaćemo

$$\begin{array}{l} \zeta_s = \delta - \varphi = z_s + A \operatorname{tg} z_s - B \operatorname{tg}^3 z_s, \\ \zeta_i = 180^\circ - (\delta + \varphi) = z_i + A \operatorname{tg} z_i - B \operatorname{tg}^3 z_i. \end{array}$$

Kako nam je, u ovom slučaju, data (pored geografske širine posmatrača) i deklinacija posmatrane cirkumpolarne, u poslednjim dvema jednačinama su nam nepoznate samo vrednosti koeficijenata A i B .

Sa poznatim podacima zadatka imaćemo, prema tome:

$\delta = + 62^{\circ} 7' 20.2,$		$\operatorname{tg} z_s = 0.31172,$
$\varphi = + 44 \quad 48 \quad 13.2,$		$\operatorname{tg}^3 z_s = 0.0303,$
$\delta - \varphi = \quad 17 \quad 19 \quad 7.0,$	$\delta + \varphi = 106^{\circ} 55' 33.4,$	
$z_s = \quad 17 \quad 18 \quad 48.2,$	$180^{\circ} - (\delta + \varphi) = 73 \quad 4 \quad 26.6,$	$\operatorname{tg} z_i = 3.2749,$
$\delta - \varphi - z_s = \quad 18.8;$	$z_i = \quad 73 \quad 1 \quad 11.6,$	$\operatorname{tg}^3 z_i = 35.12...$
	$180^{\circ} - (\delta + \varphi) - z_i = \quad 3 \quad 15.0;$	

Iz jednačina:

$$0.3117A - 0.0303B = 18.8,$$

$$3.27A - 35.12B = 195.0,$$

nalazimo $A = 60.3, \quad i \quad B = 0.0640.$

I povodom ovih rezultata možemo ponoviti napomenu da se sa posmatranjem svega jedne cirkumpolarne, pri određivanju vrednosti ovih konstanta, ne može veća tačnost postići.

135

135 **140.** Pretpostavićemo da se brod nalazi na severnoj Zemljinoj hemisferi. Prema zadatku, Sunce je posmatrano u trenutku prolaza kroz meridijan broda. Prema tome je njegova geografska širina određena izrazom $\varphi = \delta_0 + z_0 = \delta_0 + 90^{\circ} - h_0$, gde δ_0 , z_0 i h_0 označavaju: deklinaciju, odn. pravu zenitsku daljinu, odn. pravu visinu — središta Sunčeva prividnog diska.

U zadatku je data prividna visina (\bar{h}_0) donjeg ruba Sunčeva prividnog diska, i to ^{merena} od morskog horizonta. Zato treba, prvo, datu visinu popraviti (smanjiti) za prividnu depresiju (Δ) horizonta. Ovako popravljenu prividnu visinu (h'_0) Sunčeva donjeg ruba treba popraviti za (srednju) refrakciju (R). I dobićemo pravu visinu (h_0) Sunčeva donjeg ruba. Ako se sad još ovoj doda vrednost poluprečnika (r_0 , iz Godišnjaka našeg neba, za datum posmatranja) Sunčeva prividnog diska, dobiće se prava visina (h_0) središta Sunčeva prividnog diska, pomoću koje se izračunava tražena geografska širina broda. Deklinaciju središta Sunčeva diska uzimamo iz Godišnjaka našeg neba, za datum i čas (za koji

ćemo uzeti griničko podne) posmatranja. Znači za deklinaciju (δ_{\odot}) nalazimo $+19^{\circ} 16' 47''$.

Prema tome, sa uvedenim oznakama (v. i sl. 92) i podacima zadatka biće:

$$\begin{aligned} \widehat{TPA}' &= \bar{h}_{\odot} = 40^{\circ} 58' 54'', \\ \widehat{TPH}_2 &= \Delta = 1.76\sqrt{2} = \underline{6 \quad 5}, \\ \widehat{HPA}' &= k'_{\odot} = 40^{\circ} 52' 49, \\ \widehat{A'PA} &= R = \underline{1 \quad 9}, \\ \widehat{H_2PA} &= h_{\odot} = 40 \quad 51 \quad 40; \end{aligned}$$

Ca. 92

$$\begin{aligned} \widehat{H_2PA} &= h_{\odot} = 40^{\circ} 51' 40'', \\ \widehat{APS} &= \tau_{\odot} = \underline{15 \quad 50}, \\ \widehat{H_2PS} &= h_{\odot} = 41 \quad 7 \quad 30, \\ 90^{\circ} - h_{\odot} &= z_{\odot} = 48 \quad 52 \quad 30, \\ \delta_{\odot} &= \underline{+19 \quad 16 \quad 47}, \\ \varphi &= \underline{+68 \quad 9 \quad 17.} \end{aligned}$$

Opa

136 ~~141~~. U trenutku kad zvezda dospe u najveću digresiju, položajni sferni trougao ($\tilde{Z}Z_nP_n$, v. sl. 93) je pravougli, sa pravim uglom kod zvezde. Prema tome, u tom položaju u trenutku, za određivanje zenitske daljine zvezde imamo obrazac

$$\cos z = \sin \varphi \operatorname{cosec} \delta,$$

koji možemo, ako je potrebno, transformisati u

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} z = \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta - \varphi) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\delta + \varphi) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ca. 93

Kako su u zadatku date i deklinacija zvezde i posmatračeva geografska širina, možemo zenitsku daljinu zvezde izračunati. Prema tome ćemo moći i iznos refrakcije, u trenutku najveće digresije uočene nekretnice, dobiti dovoljno tačno iz obrasca

$$R = \operatorname{ktgz}.$$

U stvari će ovo biti samo približna vrednost tog iznosa. A to iz dva razloga. Prvo, što je sâm ovaj izraz za refrakciju — približan. I, drugo, što je u njemu z prava zenitska daljina, a u izraz za refrakciju ulazi prividna zenitska daljina. Medjutim ova nam nije ni data, ni poznata.

No, u ovom slučaju, ta okolnost neće imati osetnog uticaja na rezultat. Drugim rečima, ako sa \tilde{z} označimo prividnu zenitsku daljinu, u trenutku najveće digresije posmatranje zvezde, njenu vrednost će dovoljno približnu dobiti, ako uzmemo

$$\zeta = z - R = z - k \operatorname{tg} z.$$

I tako bismo, za traženi iznos refrakcije, dobili približniju vrednost:

$$R_* = k \operatorname{tg} z.$$

Prema podacima zadatka biće, dakle:

$\delta = +64^\circ 13' 20''$,	$[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta - \varphi)]$	$9.30 549$,	$[k]$	$1.78 032$,
$\varphi = +41 22 30$,	$[\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\delta + \varphi)]$	$9.88 029$,	$[\operatorname{tg} z]$	$9.96 623$,
$\delta - \varphi = 22 50 50$,	$2[\operatorname{tg} \frac{1}{2} z]$	$9.18 578$,	$[R]$	$1.74 655$,
$\delta + \varphi = 105 35 50$,	$[\operatorname{tg} \frac{1}{2} z]$	$9.59 289$,	$R =$	$0' 55.8$,
$\frac{1}{2}(\delta - \varphi) = 11 25 25$,	$\frac{1}{2} z = 21^\circ 23' 14.5$,		$R_* =$	$0 55.8$.
$\frac{1}{2}(\delta + \varphi) = 52 47 55$;	$z = 42 46 29$.			

Da smo R i R_* vadili iz tablice, našli bismo $55''.6$.

1. Da bismo mogli odrediti za koliko, usled dejstva refrakcije, dospeva zvezda ranije, ili kasnije, u najveću digresiju, ispomoći ćemo se slikom 93. Na njoj su predstavljeni sa:

\mathcal{Z} — položaj nekretnice kad se ova stvarno nalazi u najvećoj digresiji;

\mathcal{Z}_* — položaj u kojem je, usled dejstva refrakcije, mi tada vidimo.

Jasno je sa slike da, usled dejstva refrakcije, mi zvezdu u zapadnoj najvećoj digresiji (dakle, po prolazu kroz meridijan) posmatramo kasnije, to jest pošto stvarno prodje kroz taj položaj; a u istočnoj najvećoj digresiji posmatramo ranije nego što stvarno prodje kroz taj položaj. Drugim rečima, zbog dejstva refrakcije, zapadna prava najveća digresija nekretnice događa se pre prividne, a istočna prava najveća digresija događa se posle prividne.

Iz položajnog sfernog trougla (v. sl. 93) $Z_n \mathcal{Z} P_n$ imamo u trenutku najveće digresije nekretnice — što znači kad paralaktički ugao postane u njemu prav — ako sa H označimo časovni ugao nakretnice u tom trenutku

$$\operatorname{tg} H = \operatorname{tg} z \operatorname{sec} \delta.$$

Diferencirajmo ovu jednačinu i imaćemo, ako primetimo da je kod nekretnica δ konstantno,

ms = se ujutro

$$\sec^2 H dH = \sec^2 z \sec \delta dz,$$

odnosno

$$dH = \sec \delta \sec^2 z \cos H dz.$$

Primetimo li da, u trenutku najveće digresije zvezde, iz položajnog sfernog trougla imamo

$$\sec z = \sin \delta \operatorname{cosec} \varphi \quad \text{i} \quad \cos H = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \delta,$$

posle izvršene zamene u gornjem obrascu imaćemo

$$dH = \sec \delta \sin^2 \delta \operatorname{cosec}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \delta dz,$$

to jest

$$dH = \cos \delta \sec^2 \varphi dz.$$

Ako za dz , na desnoj strani, stavimo promenu koju u zenitskoj daljini nekretnice, u najvećoj digresiji, izaziva refrakcija, izraz na desnoj strani predstavljaće traženu promenu u časovnom uglu nekretnice usled dejstva refrakcije.

Sa podacima zadatka i ranije nadjenom vrednošću za dz imaćemo

$$[\cos \delta] \quad 9.63837,$$

$$[\sec^2 \varphi] \quad 0.24942,$$

$$[dz] \quad \underline{1.74643},$$

$$[dH] \quad 1.63442;$$

$$dH = 43.1,$$

$$\underline{dH = 2^s.9.}$$

Dakle, kao posledica dejstva refrakcije, prava najveća digresija nekretnice nailazi: na zapadu — ranije, na istoku — kasnije, za svega: $2^s.9$.

2. Za promenu, usled dejstva refrakcije, u paralaktičkom uglu imamo obrazac (v. t. , str.)

$$dq = -\operatorname{tg} \delta_r \operatorname{tg} z_r \sin q_r dz,$$

gde su indeksima r označene vrednosti prividnih koordinata posmatrane nekretnice. Kako se ova, prema zadatku, nalazi u najvećoj digresiji, ugao q_r je prav. Tako da poslednji obrazac postaje, u tom slučaju

$$dq = -\operatorname{tg} \delta_r \operatorname{tg} z_r dz.$$

Veličine δ_r i z_r , na desnoj strani, nisu nam poznate. Ali kako se one javljaju kao argumenti goniometrijskih funkcija, čije je vrednosti, u ovom slučaju, dovoljno da poznamo i sa dve decimale, — možemo, mesto

prividnih, uzeti i vrednosti pravih koordinata (koje su nam poznate) za izračunavanje tražene promene.

Sa ovima će biti

$$\begin{aligned} [\operatorname{tg} \delta] & 0.31611, \\ [\operatorname{tg} z] & 9.96623, \\ [dz] & \underline{1.74633}, \\ [dq] & 2.02867; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dq & = -106''.8, \\ dz & = -1'47''. \end{aligned}$$

137

142

Prvi način

gledati u knjizi

Neka predstavljaju na sl. 94:

Σ — pravi položaj nekretnice;

Σ_R — prividni položaj te nekretnice, dakle

$P, \Sigma_R, \Sigma = \pi + q$ — paralaktički ugao;

δ — pravu deklinaciju posmatrane nekretnice;

δ' — prividnu njenu deklinaciju.

Ca. 94

Sa ovim oznakam, iz sfernog trougla P, Σ_R, Σ imaćemo

$$\sin \delta = \sin \delta' \cos R - \cos \delta' \sin R \cos q. \quad (1)$$

Pomoću ove jednačine možemo doći do izraza za dejstvo refrakcije na deklinaciju, smatrajući u njoj δ kao funkciju veličine R . Ako je razvijemo u Maklorenov red, imaćemo

$$\delta = f(R) = f(0) + R f'(0) + \frac{1}{2} R^2 f''(0) + \dots$$

Za vrednosti funkcije i njenih uzastopnih izvoda, za $R = 0$, nalazimo, iz (1)

$$f(0) = \delta = \delta'. \quad (2)$$

Zatim, ako primetimo da, iz (1), imamo

$$\cos \delta \frac{d\delta}{dR} = -\sin R \sin \delta' - \cos R \cos \delta' \cos q, \quad (3)$$

nalazimo

$$f'(R) = \frac{d\delta}{dR} = (-\sin R \sin \delta' - \cos R \cos \delta' \cos q) \sec \delta,$$

tako da dobivamo

$$f'(0) = -\cos \delta' \cos q \sec \delta,$$

to jest, zbog (2),

$$f'(0) = -\cos q.$$

Za drugi izvod imaćemo, iz (3),

$$-\sin\delta \left(\frac{d\delta}{dR}\right)^2 + \cos\delta \frac{d^2\delta}{dR^2} = -\cos R \sin\delta' + \sin R \cos\delta' \cos q = -\sin\delta.$$

Prema tome će biti

$$f''(R) = \frac{d^2\delta}{dR^2} = \left[\left(\frac{d\delta}{dR}\right)^2 - 1 \right] \operatorname{tg}\delta,$$

dakle

$$f''(0) = (\cos^2 q - 1) \operatorname{tg}\delta = -\sin^2 q \operatorname{tg}\delta.$$

Tako smo, dakle, za red dobili

$$\delta = \delta' - R \cos q - \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg}\delta \sin^2 q - \dots$$

Primetimo li da za umerene (do, recimo, 70°) zenitske daljine iznosi refrakcije dostižu svega po nekoliko minuta ugla, moći ćemo zanemariti kvadrate i više stepene iznosa refrakcije. Tako da gornji red, u tom slučaju, postaje

$$\delta = \delta' - R \cos q,$$

to jest, za promenu deklinacije nekretnice, usled refrakcije dobivamo

$$\delta - \delta' = \Delta\delta = -R \cos q.$$

Promene, dakle, u deklinaciji nekretnice, usled dejstva refrakcije, neće biti (biće nula), ako je $\cos q = 0$, što će reći ako je $q = \pm 90^\circ$, drugim rečima, kad se nekretnica nalazi u najvećoj digresiji.

guru
ne uobz
Drugi način. Neka na sl. 9⁵ predstavljaju:

Σ — pravi položaj nekretnice;

Σ_R — prividni položaj njen; dakle $\Sigma\Sigma_R = R$;

Projiciramo li položaj Σ_R na veliki krug $P_n\Sigma$, luk $\Sigma Q = \Delta\delta$ predstavljace promenu deklinacije nekretnice usled dejstva refrakcije. Označimo li paralaktički ugao zvezde, $P_n\Sigma_R Z$, sa q , moći ćemo promenu deklinacije izraziti, iz malog pravouglog trougla $\Sigma_R Q \Sigma$, u obliku

$$\Delta\delta = R \cos q.$$

I vidimo da će biti $\Delta\delta = 0$, ako je $\cos q = 0$, to jest ako je $q = \pm 90^\circ$. Što znači da refrakcija nema dejstva na deklinaciju posmatrane nekretnice ako se ova nalazi u najvećoj digresiji.

cr. 95

0 7/28



(138) (143). U rešenju prethodnog zadatka pokazano je da na deklinaciju nebeskog tela refrakcija ne deluje ~~na deklinaciju~~ kad se ono nadje u najvećoj digresiji. Da nekretnica može dospeti u ovaj položaj, u toku svog prividnog dnevnog kretanja, uslov je da bude $\delta > \varphi$, to jest da deklinacija nekretnice bude veća od posmatračeve geografske širine, ili da se obe kulminacije nekretnice događaju sa severne strane horizonta. Ove će biti obe za posmatrača vidljive, drugim rečima nekretnica će biti za posmatrača nadhorizontska cirkumpolarna, ako je $\delta > \frac{\pi}{2} - \varphi$; a ako je $\frac{\pi}{2} > \delta > \varphi$, jedan deo prividnog dnevnog puta nekretnica će se nalaziti pod posmatračevim horizontom: nekretnica će, dakle, izlaziti i zalaziti za posmatrača. Stoga ćemo i u rešenju morati razlikovati dva slučaja.

guru
be unob Prvi slučaj: $\varphi < \delta_1 < \frac{\pi}{2} - \varphi$. Kako je, prema zadatku, $\varphi = +38^\circ$, dakle $\frac{\pi}{2} - \varphi = 52^\circ$, uzećemo da je $\delta_1 = +45^\circ$. Karakteristični položaji ove nekretnice, u toku njena prividnog dnevnog kretanja, za našeg posmatrača su: izlaz, zalaz, najveće digresije i gornja kulminacija nekretnice, jer donja njena kulminacija se događa pod posmatračevim horizontom.

a) Kako se u trenucima izlaza, odnosno zalaza, nekretnica nalazi na najvećoj mogućoj zenitskoj daljini na kojoj posmatrač može još da je vidi, to je i dejstvo refrakcije u tim trenucima i položajima najveće. Uzima se da ono iznosi $R_z = 34'$.

Treba još izračunati trenutke i azimute izlaza i zalaza uočene nekretnice, vodeći računa o dejstvu refrakcije. To možemo postići na dva načina. Po prvom, pomenute veličine možemo dobiti iz obrazaca

$$\cos z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H, \tag{1}$$

$$\sin \delta = \cos z \sin \varphi - \sin z \cos \varphi \cos A, \tag{2}$$

stavljajući u ove, za zenitsku daljinu, $z = 90^\circ 34'$. Za efektivno izračunavanje časovnog ugla i azimuta izlaza, odnosno zalaza, napisaćemo ove obrasce u obliku

$$\cos H = (\cos z - \sin \delta \sin \varphi) \sec \delta \sec \varphi,$$

$$\cos A = (\cos z \sin \varphi - \sin \delta) \operatorname{cosec} z \sec \varphi.$$

Na već poznati način možemo ove obrasce svesti, stavljajući

$$s = \frac{1}{2}(z + \varphi + \delta),$$

na oblik pogodan za logaritamsko računanje:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} H = \sin(s - \varphi) \sin(s - \delta) \sec s \sec(s - z),$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A = \sin(s - \varphi) \cos(s - z) \sec s \operatorname{cosec}(s - \delta).$$

Prema podacima zadatka biće:

$\varphi = + 38^\circ,$	$[\sin(s - \varphi)]$	9.87 635,	$[\sin(s - \varphi)]$	9.87 635,
$\delta = + 45,$	$[\sin(s - \delta)]$	9.82 368,	$[\cos(s - z)]$	9.99 905,
$z = \underline{90 \ 34},$	$[\sec s]$	1.25 094,	$[\sec s]$	1.25 094,
$2s = \underline{173 \ 34},$	$[\sec(s - z)]$	0.00 095,	$[\operatorname{cosec}(s - \delta)]$	0.17 632,
$s = 86 \ 47,$	$2[\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} H]$	0.95 192,	$2[\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A]$	1.30 266,
$s - \varphi = 48 \ 47,$	$[\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} H]$	0.47 596,	$[\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A]$	0.65 133,
$s - z = - 3 \ 47,$	$\frac{1}{2} H = 71^\circ 31' 9'',$		$\frac{1}{2} A = 77^\circ 25' 7'',$	
$s - \delta = 41 \ 47;$	$\frac{1}{2} H = 4^\circ 46'' 4.6,$		$A_R = 154 \ 50 \ 14.$	
	$H_R = \underline{9 \ 32 \ 9.2};$			

Da je u zadatku bila data i rektascenzija (α) nekretnice, kako smo našli časovni ugao izlaza, odnosno zalaza, mogli bismo izračunati i trenutke (zvezdanog vremena) izlaza, odnosno zalaza, nekretnice. Dobili bismo, u tom slučaju

za trenutak izlaza: $t_i = \alpha - 9^\circ 32'' 9.2;$ za azimut izlaza: $A_i = 205^\circ 9' 46'';$
 za trenutak zalaza: $t_z = \alpha + 9^\circ 32'' 9.2;$ za azimut zalaza: $A_z = 154 \ 50 \ 14.$

Do istih rezultata mogli bismo i ovako doći. Stavljajući u obrasce (1) i (2) za zenitsku daljinu $z = 90^\circ,$ dobili bismo časovni ugao i azimut za takozvani "geometrijski" izlaz, odnosno zalaz nekretnice. A diferencirajući po z izraze (1) i (2), pa stavljajući za diferencijal dz vrednost refrakcije za $z = 90^\circ,$ dobićemo promene koje refrakcija proizvodi u časovnom uglu i azimutu izlaza, odnosno zalaza nekretnice.

Tako iz (1) i (2) dobivamo

$$0 = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H, \quad \text{ili} \quad \cos H = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\sin \delta = -\cos \varphi \cos A, \quad \text{ili} \quad \cos A = -\sin \delta \sec \varphi.$$

Iz ovih jednačina, pomoću već poznatih transformacija i stavljajući $\delta = 90^\circ - \rho$, dobivamo za određivanje časovnog ugla i azimuta, za $z = 90^\circ$, izraze:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} H &= \cos(\varphi - \delta) \sec(\varphi + \delta), \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} A &= \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\rho - \varphi) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\rho + \varphi). \end{aligned}$$

A za određivanje promena u časovnom uglu i azimutu, usled dejstva refrakcije, dobivamo iz (1) i (2)

$$\begin{aligned} dH &= \sec \varphi \sec \delta \operatorname{cosec} H dz, \\ dA &= \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cosec} A dz. \end{aligned}$$

Prema podacima zadatka imaćemo:

$\varphi = +38^\circ$,	$[\cos(\varphi - \delta)]$	9.99 675,	$[\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\rho - \varphi)]$	1.21 351,
$\delta = +45$,	$[\sec(\varphi + \delta)]$	0.91 411,	$[\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\rho + \varphi)]$	0.05 319,
$\varphi - \delta = -7$,	$2[\operatorname{tg} \frac{1}{2} H]$	0.91 086,	$2[\operatorname{tg} \frac{1}{2} A]$	1.26 670,
$\varphi + \delta = 83$,	$[\operatorname{tg} \frac{1}{2} H]$	0.45 543,	$[\operatorname{tg} \frac{1}{2} A]$	0.63 335,
$\frac{1}{2}(\rho - \varphi) = 3^\circ 30'$,	$\frac{1}{2} H =$	$70^\circ 41' 21''$,	$\frac{1}{2} A =$	$76^\circ 54' 17''$,
$\frac{1}{2}(\rho + \varphi) = 41 30$;	$H =$	$141 22 42$,	$A =$	$153 48 34$.
	$H =$	$9^h 25^m 30^s.8$;		

$[\sec \delta]$	0.15 051,	$\Sigma =$	0.45 867,	$[\operatorname{tg} \varphi]$	9.89 281,
$[\sec \varphi]$	0.10 347,	$[dz]$	1.53 148,	$[\operatorname{cosec} A]$	0.35 521,
$[\operatorname{cosec} H]$	0.20 469,	$[dH]$	1.99 015,	$[dz]$	1.53 148,
$\Sigma =$	0.45 867;	$dH =$	97'.76,	$[dA]$	1.77 950,
		$dH =$	$6'' 31^s.0$;	$dA =$	$60'.19$,
				$dA =$	$1^\circ 0'.2$.

~
k
k
k

Primedba. Izračunate veličine možemo proveriti, s jedne strane,

pomoću malog pravouglog trougla na sferi $\Sigma_R \Sigma I$ (v. sl. ~~73~~)

čije su strane, kao što vidimo, $\Sigma I = A_R - A = \Delta A = 61'.67$;

$I \Sigma_R = \Delta z = 34'$; $\Sigma_R \Sigma = (H_R - H) \cos \delta = \Delta H \cos \delta = 70'.43$.

Taj mali trougao možemo smatrati kao ravni pravougli trougao. Prema tome treba da je

$$(\Delta A)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta H \cos \epsilon)^2$$

Uvrstimo li vrednosti ovih razlika, nalazimo da je jednačina zadovoljena.

Uporedimo li, međjutim, razlike $(A_R - A = \Delta A = 61'67'' \text{ i } H_R - H = \Delta H = 99'60'')$ sa diferencijalima $dH = 97'76''$ i $dA = 60'19''$, koji predstavljaju dejstva refrakcije na časovni ugao, odnosno na azimut nekretnice, u trenutku zalaza (izlaza), vidimo da se te vrednosti — ne podudaraju, ne proveravaju!

Objašnjenje ovom nepodudaranju treba tražiti u činjenici što se ovde nalazimo pred slučajem kad za određivanje promene funkcije treba voditi računa i o njenim drugim izvodima.

U rešenju Zad. 122 pokazano je već bilo da za promenu visine u funkciji časovnog ugla (to jest vremena) imamo

$$dh = \left(\frac{dh}{dH}\right)dH + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2h}{dH^2}\right)dH^2 + \dots$$

gde je

$$\frac{dh}{dH} = -\cos \varphi \sin A, \quad \frac{d^2h}{dH^2} = -\cos \varphi \cos A \cos \varphi \cos \delta \operatorname{sech}.$$

Kad je $h = 0^\circ$, dakle $z = 90^\circ$, položajni sferni trougao $Z_n P_n \Sigma$ je kvadrantni, tako da je

$$\cos A \cos \varphi = \cos H \quad \text{i} \quad \sin A \operatorname{cosec} H = \cos \delta.$$

Prema tome dobivamo za drugi izvod, kad je $h = 0^\circ$ (što će reći kad se nebesko telo nalazi u ravni horizonta),

$$\frac{d^2h}{dH^2} = -\cos \varphi \sin A \operatorname{ctg} H.$$

I tako za promenu visine nebeskog tela, u tom položaju, nalazimo

$$dh = -\cos \varphi \sin A dH - \frac{1}{2} \cos \varphi \sin A \operatorname{ctg} H dH^2 - \dots$$

Na isti način nalazimo za promenu azimuta, u tom položaju,

$$dA = \sin \varphi dH - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \sin A \cos A dH^2 + \dots$$

Odavde lako dobivamo, za promene časovnog ugla i azimuta u funkciji zenitske daljine, za $z = 90^\circ$,

$$dH = \operatorname{sec} \varphi \operatorname{cosec} A dz - \frac{1}{2} \operatorname{sec}^2 \varphi \operatorname{cosec}^2 A \operatorname{ctg} H dz^2 + \dots$$

$$dA = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cosec} A dz - \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{cosec}^2 A) \operatorname{ctg} A dz^2 + \dots$$

Sa podacima zadatka nalazimo sad za promene časovnog ugla i azimuta, usled dejstva refrakcije, pri izlazu, odnosno zalazu uočene nekretnice:

φ	=	$+38^\circ$,	$[\frac{1}{2}]$	9.69 897,	$[\frac{1}{2}]$	9.69 897,
δ	=	$+45^\circ$,	$2[\sec\varphi \operatorname{cosec} A]$	0.91 736,	$[1 + \operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{cosec}^2 A]$	0.61 633,
z	=	$0^\circ 34'$,	$[\operatorname{ctg} H]$	0.09 750n,	$[\operatorname{ctg} A]$	0.30 816n,
dz	=	0.009 890;	$2[dz]$	5.99 040,	$2[dz]$	5.99 040,
H	=	$141^\circ 22' 42''$,	$\Sigma_1 =$	6.70 423n,	$\Sigma_2 =$	6.61 386n,
A	=	$153^\circ 48' 34''$;	$[\rho']$	3.53 627,	$[\rho']$	3.53 627,
			$[\text{II član}]$	0.24 050n;	$[\text{II član}]$	0.15 013n.

Tako smo dobili za druge članove promena:

$$\text{časovnog ugla: } +1.74, \quad \text{azimuta: } +1.4.$$

Dodamo li ih prvim članovima, dobivamo za promene:

$$dH = +99.50 = +6'' 38.0, \quad dA = +1^\circ 1.6;$$

$$\text{a nadjeno je: } H_R - H = +99.50 = +6'' 38.0, \quad A_R - A = +1^\circ 1.7.$$

Tako smo, dakle, proverili na dva načina dobivene vrednosti za dejstvo refrakcije na časovni ugao i azimut nekretnice, u trenutku njena izlaza, odnosno zalaza. To proveravanje smo dopunili gornjom primedbom samo da bismo čitaocu objasnili neslaganje u prvobitno nadjenim vrednostima. U praksi se (i u udžbenicima), međjutim, smatraju diferencijalni obrasci za dH i dA samo sa prvim članovima kao dovoljno tačni izrazi za dejstvo refrakcije pri izlazu, odnosno zalazu, nebeskih tela. I mogu se smatrati, jer se dejstvo refrakcije pri izlazu i zalazu, dakle u horizontu, vrlo teško pouzdano određuje. Sama vrednost dejstva refrakcije u horizontu nepouzdana je za čitave 2'.

b) U trenucima najvećih digresija nekretnice, zenitska daljina, azimuti i časovni uglovi njeni dati su obrascima

$$\cos z = \sin \varphi \operatorname{cosec} \delta, \quad \sin A = \cos \delta \sec \varphi, \quad \cos H = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \delta.$$

Za numeričko izračunavanje tih veličina koristimo se, međjutim, obra-



scima

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z &= \left[\sin(\delta + \varphi) \sin(\delta - \varphi) \right]^{\frac{1}{2}} \operatorname{cosec} \varphi, \\ \operatorname{tg} A &= \mp \left[\sin(\delta + \varphi) \sin(\delta - \varphi) \right]^{\frac{1}{2}} \cos \delta, \\ \operatorname{tg} H &= \pm \left[\sin(\delta + \varphi) \sin(\delta - \varphi) \right]^{\frac{1}{2}} \sec \delta \operatorname{cosec} \varphi. \end{aligned}$$

Prema podacima zadatka imaćemo:

$\delta = +45^\circ,$	$[\sin(\delta + \varphi)]$	9.99 675,	$[\operatorname{cosec} \varphi]$	0.21 066,
$\varphi = +38,$	$[\sin(\delta - \varphi)]$	9.08 589,	$\frac{1}{2} \Sigma$	= 9.54 132,
$\delta + \varphi = 83,$	$\Sigma =$	9.08 264;	$[\cos \delta]$	9.84 949,
$\delta - \varphi = 7;$			$[\operatorname{tg} z]$	9.75 198,
			$[\operatorname{tg} A]$	0.30 817,
			$[\operatorname{tg} H]$	9.90 249.

Tako za trežene vrednosti nalazimo:

$$\underline{z = 29^\circ 27' 46''}; \quad \underline{A = \mp 63^\circ 48' 36''}; \quad \underline{H = \pm 38^\circ 37' 16''}$$

v) U gornjoj kulminaciji nekretnica dostiže pravu zenitsku daljinu, sa severne strane,

$$z = \delta - \varphi = 7^\circ$$

Drugi slučaj: $\delta > \frac{\pi}{2} - \varphi$. Uzećemo $\delta = +60^\circ$. Karakteristični položaji na prividnoj dnevnoj putanji ove nekretnice su: gornja i donja kulminacija i najveće digresije njene.

Zenitske daljine u trenucima kulminacija označićemo sa z_s i z_i ; prema tome je $z_s = \delta - \varphi$, a $z_i = 180^\circ - (\delta + \varphi)$. I tako ćemo sa podacima zadatka, a prema prethodnim obrascima, imati za karakteristične položaje:

$\delta = +60^\circ,$	$[\sin(\delta + \varphi)]$	9.99 575,	$[\operatorname{cosec} \varphi]$	0.21 066,
$\varphi = +38,$	$[\sin(\delta - \varphi)]$	9.57 358,	$\frac{1}{2} \Sigma$	= 9.78 467,
$\delta + \varphi = 98,$	$\Sigma =$	9.56 933;	$[\cos \delta]$	- 9.69 897,
$z_s = 22,$			$[\operatorname{tg} z]$	9.99 533,
$z_i = 82;$			$[\operatorname{tg} A]$	9.90 430,
			$[\operatorname{tg} H]$	0.29 636;

tako da nalazimo

$$\underline{z = 44^\circ 41' 31''}; \quad \underline{A = \pm 38^\circ 44' 16''}; \quad \underline{H = \pm 63^\circ 11' 15''}$$

$\sim = \text{gura se uvisno}$

70

~~11/11~~

Najveće dejstvo refrakcije biće u trenutku kad se nekretnica bude našla na najvećoj svojoj zenitskoj daljini. Znači u trenutku donje kulminacije. Ako za uslove atmosfere uzmemo $T = 0^{\circ}\text{C}$ i $P = 760$ mm živina stuba i, s obzirom na veliku zenitsku daljinu ($> 75^{\circ}$), uzmemo za refrakciju izraz

$$R = 60.27 \lg z - 0.0669 \lg^3 z,$$

dobivamo za njen iznos u donjoj kulminaciji $R = 404.7 = 6' 34.7$.

✓ 139 (144) ~~144~~ Ojašti izraz za astronomsku refrakciju (pri normalnim uslovima u atmosferi) je

$$R = 60.27 \lg z - 0.0669 \lg^3 z.$$

Pri tim fizičkim uslovima atmosfere moći ćemo se zadovoljiti samo prvim članom ovog izraza ako je i dok je, prema zadatku,

$$0.0669 \lg^3 z \leq 0.1,$$

ili

$$\lg^3 z \leq \frac{1000}{669}.$$

Prema tome nalazimo

$$3[\lg z] \leq 0.17457; \quad \text{znači } [\lg z] \leq 0.05817, \quad \text{dakle } z \leq 48.8.$$

Za ove zenitske daljine vrednost drugog člana u tačnom izrazu za iznos refrakcije ne dostiže, to jest ostaje ispod $0".1$.

96

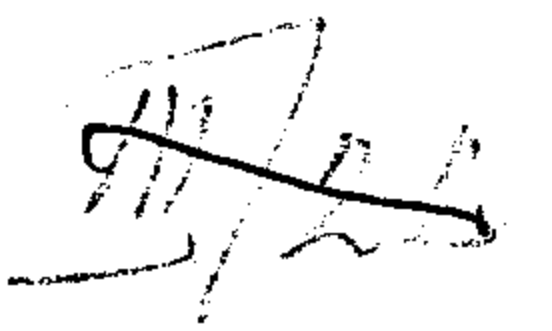
✓ 140 (145) ~~145~~ Predstavimo na sl. ~~140~~: sa M — posmatrača na Zemlji (sferi) poluprečnika $OM = a$; iscrtanim prstenom, visine $MN = h$, — atmosferski sloj oko Zemlje; sa S — nebesko telo sa kojega zrak svetlosti stiže na gornju granicu atmosferskog sloja, dakle u B, pod uglom i , a u posmatračevo oko, dakle u M, pod uglom z , — imaćemo, prema zakonima o prelamanju svetlosti,

$$\sin i = \mu \sin r,$$

ako sa r označimo ugao odbijenog zraka sa normalom (OB). Sa slike vidimo, međjutim, da je $i = R + r$, tako da će ova jednačina biti

$$\sin(R+r) = \sin R \cos r + \cos R \sin r = \mu \sin r,$$

96
Sl. ~~140~~



111

$$\sin R \cos r = (\mu - \cos R) \sin r.$$

Dignemo li na kvadrat obe strane ove jednačine, imaćemo

$$\sin^2 R (1 - \sin^2 r) = (\mu - \cos R)^2 \sin^2 r.$$

Izvršimo li naznačene operacije i uredimo li jednačinu, imaćemo

$$\sin^2 R = (\mu^2 - 2\mu \cos R + 1) \sin^2 r,$$

ili

$$\sin^2 R = (\mu^2 - 2\mu \cos R + 1)^{\frac{1}{2}} \sin r.$$

Iz trougla OMB imamo, međjutim,

$$(a+h) \sin r = a \sin z,$$

dakle

$$\sin r = \frac{a}{a+h} \sin z,$$

tako da dobivamo

$$\sin R = \frac{a}{a+h} \sin z (\mu^2 - 2\mu \cos R + 1)^{\frac{1}{2}},$$

a odavde

$$R = \arcsin \left[\frac{a}{a+h} \sin z (\mu^2 - 2\mu \cos R + 1)^{\frac{1}{2}} \right].$$

141

146

Prvi način

gubi se u usone

Uočimo dva susedna (sferna, koncentrična) sloja atmosfere, okarakterisana indeksima refrakcije n i $n+dn$. Ako označimo sa ξ i $\xi - dR$ upadni i prelomni ugao pri prelazu zraka iz višeg u niži od ovih slojeva, prema zakonu o prelamanju svetlosti imaćemo

$$n \sin \xi = (n + dn) \sin(\xi - dR).$$

Desnu stranu ove jednačine možemo razviti i ako pri tom zanemarimo kvadrate i više stepene malih veličina dn i dR , biće

$$n \sin \xi = n \sin \xi + dn \sin \xi - n dR \cos \xi,$$

a odavde lako dolazimo do poznate diferencijalne jednačine refrakcije

$$dR = \frac{dn}{n} \tan \xi. \quad (1)$$

S druge strane, prema Simpson-ovoj hipotezi o promeni indeksa refrakcije sa visinom atmosferskog sloja,

$$r n^{m+1} = \text{Const.}$$

dobivamo, ako izraz logaritmujemo pa diferenciramo,

$$\frac{dr}{r} + \frac{dn}{n} = -m \frac{dn}{n}.$$

(2)

A diferenciramo li ~~izraz~~ izraz za refrakciju

$$rn \sin \zeta = r_0 n_0 \sin z_0,$$

(3)

imaćemo

$$\frac{dr}{r} + \frac{dn}{n} = -\frac{1}{m} \operatorname{ctg} \zeta.$$

Oдавде, uzimajući u obzir (2), nalazimo

$$\frac{dn}{n} \operatorname{ctg} \zeta = \frac{d\zeta}{m},$$

odnosno, s obzirom na (1)

$$dR = \frac{1}{m} d\zeta.$$

(dobiti

Izraz za refrakciju ćemo integrirati ovaj izraz od Zemljine površine

(z_0) do gornjeg sloja atmosfere ($n = 1$, z); tako dobivamo

$$R = \frac{1}{m} (z_0 - z).$$

Primećimo li da, za $n = 1$ ($\zeta = z$, $r = \bar{r}$), iz (3) imamo

$$\bar{r} \sin z = r_0 n_0 \sin z_0,$$

a da je, prema Simpson-ovoj hipotezi,

$$\bar{r} = r_0 n_0^{m+1},$$

iz ovih relacija dobivamo

$$\sin z = n_0^{-m} \sin z_0,$$

odnosno

$$z = \arcsin(n_0^{-m} \sin z_0).$$

I tako, na osnovi Simpson-ove hipoteze, dobivamo za iznos astronomske refrakcije, izraz

$$R = \frac{1}{m} \left[z_0 - \arcsin(n_0^{-m} \sin z_0) \right].$$

guru
de unog.

Drugi način. Podjimo od diferencijalne jednačine astronomske refrakcije

$$dR = n_0 r_0 \sin z_0 \left(n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \sin^2 z_0 \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dn}{n}. \quad (1)$$

Iz Simpson-ove hipoteze,

$$r n^{m+1} = \text{const.}$$

to jest

$$r n^{m+1} = r_0 n_0^{m+1},$$

imamo

$$r = r_0 \left(\frac{n_0}{n} \right)^{m+1}$$

Unesimo ovu vrednost za r u (1) i imaćemo

$$dR = n_0 r_0 \sin z_0 \left[n^2 r_0^2 \left(\frac{n_0}{n} \right)^{2(m+1)} - n_0^2 r_0^2 \sin^2 z_0 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{dn}{n},$$

to jest

$$dR = \sin z_0 \left[\left(\frac{n_0}{n} \right)^{2m} - \sin^2 z_0 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{dn}{n},$$

odnosno

$$dR = n^{m-1} \sin z_0 \left(n_0^{2m} - n^{2m} \sin^2 z_0 \right)^{-\frac{1}{2}} dn.$$

Ako izvršimo zamenu nezavisne promenljive, stavljajući

$$n \sin z_0 = t n_0^m,$$

što će dati

$$m n^{m-1} \sin z_0 dn = n_0^m dt,$$

odnosno

$$n^{m-1} \sin z_0 dn = \frac{n_0^m}{m} dt.$$

Prema tome ćemo imati

$$dR = \frac{n_0^m}{m} \left(n_0^{2m} - n_0^m t^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

odnosno

$$dR = \frac{1}{m} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Za granice integrala imamo:

za $n = n_0$, za sloj na Zemljinoj površini, $t_0 = \sin z_0$;

za $n = 1$, na (gornjoj) granici atmosfere, $t_1 = n^{-m} \sin z_0$.

Prema tome nalazimo

$$R = \frac{1}{m} \left[\arcsin(\sin z_0) - \arcsin(n_0^{-m} \sin z_0) \right],$$

to jest

$$R = \frac{1}{m} \left[z_0 - \arcsin(n_0^{-m} \sin z_0) \right].$$

Quit

142 147.

Ako Simpson-ov obrazac

$$R = \frac{1}{m} \left[z - \arcsin(n_0^{-m} \sin z) \right],$$

napišemo u obliku

$$\arcsin(n_0^{-m} \sin z) = z - mR,$$

vidimo da je

$$\frac{\sin z}{\sin(z - mR)} = n_0^m.$$

A ovaj izraz možemo napisati

$$\frac{\sin z - \sin(z - mR)}{\sin z + \sin(z - mR)} = \frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1},$$

ili, ako levu stranu napišemo u obliku proizvoda,

$$\frac{\cos(z - \frac{1}{2}mR) \sin \frac{1}{2}mR}{\sin(z - \frac{1}{2}mR) \cos \frac{1}{2}mR} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}mR \operatorname{ctg}(z - \frac{1}{2}mR) = \frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1}.$$

Oдавде dobivamo

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}mR = \frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1} \operatorname{tg}(z - mR).$$

Kako je iznos refrakcije mala veličina, možemo uzeti

$$\frac{1}{2}mR \operatorname{arctg}'' = \frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1} \operatorname{tg}(z - \frac{1}{2}mR),$$

ili

$$R = \frac{2}{m \operatorname{arctg}''} \frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1} \operatorname{tg}(z - \frac{1}{2}mR).$$

a to je Bradley-ev izraz za iznos refrakcije.

143 148. Ako primetimo da je

$$\xi = z + R$$

pa sa tom vrednošću za ξ uđjemo u jednačinu

$$K \operatorname{tg} \xi = k \operatorname{tg} z,$$

dobićemo

$$K \operatorname{tg}(z + R) = k \operatorname{tg} z,$$

to jest

$$\frac{K}{k} = \frac{\operatorname{tg} z (1 - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} R)}{\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} R}.$$

Kako, međjutim, znamo da je R mala veličina, tako da možemo staviti

$$\operatorname{tg} R = R \operatorname{arctg}'' ,$$

biće

$$\frac{K}{k} = \frac{\operatorname{tg} z (1 - k \operatorname{arctg}'' \operatorname{tg}^2 z)}{\operatorname{tg} z (1 + k \operatorname{arctg}'')} = \frac{1 - k \operatorname{arctg}'' \operatorname{tg}^2 z}{1 + k \operatorname{arctg}''}.$$

Izraz na desnoj strani možemo razviti u red, i ako pri tom zanemarimo druge i više stepene veličine k imaćemo

$$\frac{K}{k} = 1 - k \operatorname{arctg}'' \operatorname{tg}^2 z - k \operatorname{arctg}'' = 1 - k \operatorname{arctg}'' (1 + \operatorname{tg}^2 z),$$

tako da konačno dobivamo

$$K = k (1 - k \operatorname{arctg}'' \operatorname{sec}^2 z).$$

144 149. Dok zenitske daljine nisu prevelike, iznos astronomske refrakcije dostiže svega nekoliko minuta (ni u kom slučaju ne dostiže pola stepena). U tom slučaju će dovoljno približan izraz za refrakciju biti i

$$R = 58''.361 \operatorname{tg} z.$$

Unesemo li ovu vrednost za refrakciju u argument na desnoj strani Bradley-eva izraza, imaćemo

$$R = 58''.361 \operatorname{tg}(z - 238''.696 \operatorname{tg} z).$$

Odavde dobivamo ako razvijemo desnu stranu

$$R = 58''.361 \operatorname{tg} z [0.998842 (1 + 0.001158 \operatorname{tg}^2 z)^{-1}] \\ = 58''.293 \operatorname{tg} z (1 - 0.001158 \operatorname{tg}^2 z),$$

ako zanemarimo stepene više od trećeg $\operatorname{tg} z$ -a.

Ova jednačina, međjutim, u obliku

$$R = 58''.293 \operatorname{tg} z - 0.06750 \operatorname{tg}^3 z,$$

praktično daje iste vrednosti za refrakciju kao i Cassini-ev izraz.

Pokazaćemo ovo na primeru, za dve nekretnice, na zenitskim daljinama $z_1 = 40^\circ$ i $z_2 = 50^\circ$.

Po Bradley-evu obrascu imaćemo, za približne vrednosti refrakcije

$$\bar{R}_1 = 58''.361 \operatorname{tg} z_1 = 48''.97; \quad \bar{R}_2 = 58''.361 \operatorname{tg} z_2 = 69''.56.$$

Prema tome nalazimo

$$\Delta z_1 = 4.09 \bar{R}_1 = 200''.29 = 3' 20''.29; \quad \Delta z_2 = 4.09 \bar{R}_2 = 284''.80 = 4' 44''.80.$$

I tako za iznose refrakcije po Bradley-evu izrazu dobivamo:

$$R_1 = 58''.361 \operatorname{tg}(z_1 - \Delta z_1) = 48''.87; \quad R_2 = 58''.361 \operatorname{tg}(z_2 - \Delta z_2) = 69''.36.$$

Po Cassini-evu, međjutim, nalazimo:

$$R_1 = 58''.294 \operatorname{tg} z_1 - 0''.06682 \operatorname{tg}^3 z_1 = 48''.91 - 0''.04 = 48''.87; \\ R_2 = 58''.294 \operatorname{tg} z_2 - 0''.06682 \operatorname{tg}^3 z_2 = 69''.48 - 0''.11 = 69''.37.$$

145 150. P r v i n a ĉ i n. Označimo, na sl. 97, sa: ζ_1 i ζ_2 — prave zenitske daljine, $Z_1 \Sigma_1$ i $Z_2 \Sigma_2$, dveju nekretnica, ξ_1 i ξ_2 ;

s — sfernu daljinu tih nekretnica, ξ_1, ξ_2 ;

η — ugao, Z_1, Z_2 , druge (istočnije) u odnosu prema prvoj nekretnici;
 ΔA — razliku u azimutima, Z_2, Z_1, Z_1 , ovih tela.

Iz sfernog trougla Z_1, Z_2, Z_2 imamo onda

$$\cos s = \cos \zeta_1 \cos \zeta_2 + \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \cos \Delta A.$$

Usled dejstva refrakcije, zenitske daljine ovih zvezda će se smanjiti;
 prema tome i sferna daljina njihova, pošto im razlika u azimutu pritom
 ostaje nepromenjena. Zato, ako gornji izraz diferenciramo,

$$- \sin s ds = (-\sin \zeta_1 \cos \zeta_2 + \cos \zeta_1 \sin \zeta_2 \cos \Delta A) d\zeta_1 + (-\cos \zeta_1 \sin \zeta_2 + \sin \zeta_1 \cos \zeta_2 \cos \Delta A) d\zeta_2,$$

i primetimo da je

$$d\zeta_1 = -k \operatorname{tg} \zeta_1 \quad \text{i} \quad d\zeta_2 = -k \operatorname{tg} \zeta_2,$$

imaćemo, pošto smenimo

$$- \sin s ds = k \operatorname{tg} \zeta_1 \sin \zeta_1 \cos \zeta_2 - k \operatorname{tg} \zeta_1 \cos \zeta_1 \sin \zeta_2 \cos \Delta A + k \cos \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin \zeta_2 -$$

$$- k \sin \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \cos \zeta_2 \cos \Delta A.$$

Ako još na desnoj strani stavimo

$$\cos \Delta A = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta A,$$

imaćemo

$$- \sin s ds = k \sin \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_1 \cos \zeta_2 - k \operatorname{tg} \zeta_1 \cos \zeta_1 \sin \zeta_2 + 2k \operatorname{tg} \zeta_1 \cos \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta A +$$

$$+ k \cos \zeta_1 \sin \zeta_2 \operatorname{tg} \zeta_2 - k \sin \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \cos \zeta_2 + 2k \sin \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \cos \zeta_2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta A,$$

ili

$$- \sin s ds = k \sin \zeta_1 \cos \zeta_2 (\operatorname{tg} \zeta_1 - \operatorname{tg} \zeta_2) - k \cos \zeta_1 \sin \zeta_2 (\operatorname{tg} \zeta_1 - \operatorname{tg} \zeta_2) + 4k \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta A,$$

ili

$$- \sin s ds = k (\operatorname{tg} \zeta_1 - \operatorname{tg} \zeta_2) + 4k \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta A,$$

ili još

$$- \sin s ds = k \sin^2 (\zeta_1 - \zeta_2) \sec \zeta_1 \sec \zeta_2 + 4k \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta A.$$

Izdvojmo sa gornje slike mali pravougli trougao na sferi,

Z_1, Q, Z_2 (v. sl. ⁹⁸ ~~98~~). Ako primetimo da je, u ovom slučaju,

$Z_1, Z_2 = s$, dakle i ΔA , mali ugao, drugim rečima, da možemo

staviti

$$\sin s = s; \quad 4 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta A = \Delta A^2; \quad Z_1, Q = \zeta_1 - \zeta_2 = s \cos \eta,$$

moći ćemo poslednju jednačinu napisati

$$- \sin s ds = k s^2 \cos^2 \eta \sec \zeta_1 \sec \zeta_2 + k \Delta A^2 \sin \zeta_1 \sin \zeta_2.$$

Iz istih razloga možemo uzeti $\zeta_1 = \zeta_2 = z$, tako da ćemo imati

$$-s ds = ks^2 \cos^2 \eta \sec^2 z + k \Delta A^2 \sin^2 z.$$

U malom pravouglom trouglu na sferi $\Sigma, Q \Sigma_2$ imamo, međutim, u tom slučaju

$$\Delta A \sin \zeta_2 = \Delta A \sin z = s \sin \eta,$$

dakle,

$$\Delta A^2 = s^2 \sin^2 \eta \operatorname{cosec}^2 z.$$

Prema tome ćemo za gornju jednačinu dobiti

$$-s ds = ks^2 \cos^2 \eta \sec^2 z + ks^2 \sin^2 \eta,$$

to jest

$$-ds = ks (\cos^2 \eta \sec^2 z + \sin^2 \eta),$$

odnosno, primećujući da je

$$\sec^2 z = 1 + \operatorname{tg}^2 z,$$

$$ds = -ks (1 + \cos^2 \eta \operatorname{tg}^2 z),$$

a u sekundama ugla,

$$ds = -ks (1 + \cos^2 \eta \operatorname{tg}^2 z) \operatorname{arc} 1''.$$

Ovoliko, dakle, iznosi promena (u stvari smanjenje) uglovnoj daljini dveju bliskih nekretnica, usled dejstva refrakcije. Drugim rečima, za ovoliko treba m e r e n u uglovnu daljinu dveju bliskih nekretnica povećati, da bi se dobila njihova s t v a r n a (od dejstva refrakcije oslobođjena) uglovna daljina.

Drugi način. Do gornjeg izraza možemo doći i primenjujući prvi od obrazaca () (str.), za promene u relativnim koordinatama bliskih tačaka na nebeskoj sferi. Promene, u ovom slučaju, izaziva refrakcija. Za sferni koordinatni sistem uzećemo - horizontski. Znači biće: $L = A$, $B_0 = h = \frac{R}{2} - z$. I ako primetimo da refrakcija dejstvuje samo na visinu (odnosno zenitsku daljinu, a ne i na azimut), znači da je, u ovom slučaju,

$$dL = dA = 0,$$

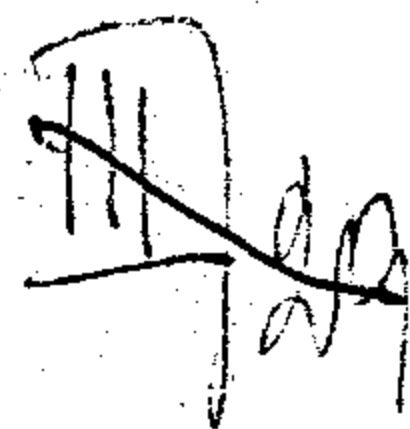
$$dB = dh = R = k \operatorname{ctg} h.$$

Onda je, prema jednačinama (2),

$$d(\Delta A) = 0,$$

$$d(\Delta h) = \frac{dR}{dh} \cdot \Delta h.$$

Prema tome, za promenu sferne daljine tačaka usled dejstva refrakcije



dobivamo iz prvog od obrazaca ()

$$ds = -s \sin^2 \varrho \operatorname{tg} h \operatorname{th} - sk \cos^2 \varrho \operatorname{cosec}^2 h,$$

ili, ako smenimo i uvedemo, mesto visine, zenitsku daljinu, dobivamo

$$ds = -sk (\sin^2 \varrho + \cos^2 \varrho \sec^2 h) = -sk (1 + \cos^2 \varrho \operatorname{tg}^2 z).$$

146 ~~151.~~ Ovo je, u stvari, drugi deo prethodnog zadatka. I ovde možemo na dva načina doći do rezultata.

gore u ovom
Prvi način. Neka sl. 99 predstavlja položaj uočenih bliskih zvezda, Z_0 i Z . Označimo elemente sfernog trougla $Z_0 Z Z$:

$$Z_0 Z = s; \quad Z_0 Z_0 = z; \quad Z_0 Z = z_1; \quad Z Z_0 Z_0 = A; \quad Z_0 Z_0 Z = \eta.$$

U tom trouglu imamo

$$\sin s \sin \eta = \sin z \sin A.$$

Ako pretpostavimo da su zvezde toliko bliske da smemo zanemariti treći stepen veličine s , dakle i z , zameniti stranom z , mesto poslednje jednačine imaćemo

$$s \sin \eta = \sin z \sin A.$$

Ako logaritmujemo, pa zatim diferenciramo, imaćemo

$$\frac{ds}{s} + d\eta \operatorname{ctg} \eta = dz \operatorname{ctg} z.$$

Unesemo li, na levoj strani, vrednost prvog člana iz rešenja prethodnog zadatka, a, na desnoj strani, vrednost

$$dz = -k \operatorname{tg} z,$$

dobivamo za promenu u uglu

$$d\eta \operatorname{ctg} \eta = k (1 + \cos^2 \eta \operatorname{tg}^2 z) - k = k \cos^2 \eta \operatorname{tg}^2 z,$$

to jest

$$d\eta = k \sin \eta \cos \eta \operatorname{tg}^2 z,$$

što možemo napisati i

$$d\eta = \frac{1}{2} k \sin 2\eta \operatorname{tg}^2 z.$$

gore u ovom
Drugi način. Primenjujući, kao i gore, ali sad drugi od obrazaca () (str.), uz ostale iste napomene kao i u prethodnom rešenju, nalazimo

$$d\eta = \sin \eta \cos \eta (-\operatorname{tg} h \operatorname{th} + k \operatorname{cosec}^2 h),$$

ili $d\eta = \sin \eta \cos \eta (k + k \sec^2 z) = k \sin \eta \cos \eta \operatorname{tg}^2 z = \frac{1}{2} k \sin 2\eta \operatorname{tg}^2 z$.

Prvi način Ovo sleduje neposredno iz rešenja Zad.

150, kojim je pokazano da se, usled dejstva refrakcije, uglovna daljina (s) dveju bliskih tačaka na nebeskoj sferi smanjuje za

$\Delta s = ks(1 + \cos^2 \eta \operatorname{tg}^2 z)$,

gde je k konstanta refrakcije, η ^{između daljine (Z, Z₁)} ~~ugao~~ ^{ugao druge tačke} ~~u(E)~~ ^{vertikalna}

~~u(E)~~ ^{kroz} prv ^{u(E)}, a z zenitska daljina ove. Pri tom se pretpostavlja da se iznos refrakcije na tim zenitskim daljinama može predstaviti izrazom $R = k \operatorname{tg} z$.

Iz gornjeg izraza se odmah vidi da smanjenje horizontalnog luka, što će reći kad je $\eta = 90^\circ$, iznosi

$\Delta s = ks$.

Ono, prema tome, ne zavisi od zenitske daljine na kojoj se nalazi luk, već samo od konstante refrakcije. Odavde vidimo da horizontalni mali luk, s, usled dejstva refrakcije postaje

$s - ks = s(1 - k)$, dakle (1 - k)-puta kraći.

Kod vertikalnog malog luka, s, što će reći kad je $\eta = 0^\circ$, smanjenje će iznositi

$\Delta s = ks(1 + \operatorname{tg}^2 z) = ks \sec^2 z$;

drugim rečima, on postaje, usled dejstva refrakcije,

$s - ks \sec^2 z = s(1 - k \sec^2 z)$,

dakle: (1 - k sec² z) - puta kraći. Pri tom treba imati na umu da ovo vredi dok se dejstvo refrakcija može predstaviti izrazom $R = k \operatorname{tg} z$.

guru u u u u u

Drugi način. Neka je s dužina luka almukantara

između dveju tačaka, čije su zenitske daljine z. Tada je

$s = a \sin z$,

gde smo sa a označili razliku azimuta krajnjih tačaka luka s. Refrakcija će delovati samo na zenitsku daljinu, te će se s promeniti za

$ds = a \cos z dz$.

Unošenjem ovamo približnog izraza za dejstvo refrakcije

$$dz = k \cdot \operatorname{tg} z$$

dobićemo

$$ds = a k \cos z \operatorname{tg} z = a k \sin z = k s.$$

Prema tome će dužina luka almukantara, usled dejstva refrakcije, postati

$$s' = s - ds = s \cdot (1 - k).$$

Neka sad s bude dužina malog luka vertikalna, čije krajnje tačke imaju zenitske daljine z_1 i z_2 :

$$s = z_2 - z_1, \quad z_1 \approx z_2.$$

Usled refrakcije ona će se promeniti za

$$ds = dz_2 - dz_1 = k (\operatorname{tg} z_2 - \operatorname{tg} z_1).$$

Iz polaznih jednačina imaćemo

$$\operatorname{tg} s = \operatorname{tg}(z_2 - z_1) = \frac{\operatorname{tg} z_2 - \operatorname{tg} z_1}{1 + \operatorname{tg} z_1 \operatorname{tg} z_2};$$

a, s druge strane,

$$\operatorname{tg} s \approx s, \quad 1 + \operatorname{tg} z_1 \operatorname{tg} z_2 \approx 1 + \operatorname{tg}^2 z = \sec^2 z,$$

gde je z bilo koja od zenitskih daljina z_1 i z_2 , ili neka srednja.

Stoga je

$$\operatorname{tg} z_2 - \operatorname{tg} z_1 = s \sec^2 z,$$

to jest

$$ds = k s \sec^2 z, \quad \text{što daje } s' = s - ds = s(1 - k \sec^2 z).$$

[Z. Simorljević]

148 ~~153~~. Poći ćemo od poznatog obrasca

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H,$$

gde je z - zenitska daljina, δ - deklinacija, H - časovni ugao Sunčeva središta, a φ posmatračeva geografska širina.

U trenutku izlaza (ili zalaza) središta Sunčeva prividnog diska njegova zenitska daljina je, ako se uzme u obzir dejstvo refrakcije, $z = 90^\circ 35'$. Prema tome ćemo, iz gornjeg obrasca, imati za časovni ugao

$$\cos H = -(\sin 35' + \sin \varphi \sin \delta) \sec \varphi \sec \delta.$$

Sa ovim obrascem ćemo sad obrazovati

$$\begin{aligned} 1 - \cos H &= [\cos(\varphi - \delta) + \sin 35'] \sec \varphi \sec \delta, \\ 1 + \cos H &= [\cos(\varphi + \delta) - \sin 35'] \sec \varphi \sec \delta. \end{aligned}$$

Ove izraze možemo, međutim, napisati

$$\sin^2 \frac{1}{2} H = \sin \left[45^\circ - \frac{1}{2} (\varphi - \delta - 35') \right] \cos \left[45^\circ - \frac{1}{2} (\varphi - \delta + 35') \right] \sec \varphi \sec \delta,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} H = \sin \left[45^\circ - \frac{1}{2} (\varphi + \delta + 35') \right] \cos \left[45^\circ - \frac{1}{2} (\varphi + \delta - 35') \right] \sec \varphi \sec \delta;$$

ili

$$\sin^2 \frac{1}{2} H = \sin \left[45^\circ + 17'5'' - \frac{1}{2} (\varphi - \delta) \right] \cos \left[45^\circ - 17'5'' - \frac{1}{2} (\varphi - \delta) \right] \sec \varphi \sec \delta,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} H = \sin \left[45^\circ - 17'5'' - \frac{1}{2} (\varphi + \delta) \right] \cos \left[45^\circ + 17'5'' - \frac{1}{2} (\varphi + \delta) \right] \sec \varphi \sec \delta.$$

Da bismo traženi izraz za časovni ugao dobili u što jednostavnijem obliku, označićemo

$$45^\circ + 17'5'' - \frac{1}{2} (\varphi - \delta) = S - \theta, \quad 45^\circ - 17'5'' - \frac{1}{2} (\varphi - \delta) = D - \theta,$$

$$45^\circ - 17'5'' - \frac{1}{2} (\varphi + \delta) = S - \sigma, \quad 45^\circ + 17'5'' - \frac{1}{2} (\varphi + \delta) = D + \sigma.$$

Tako za časovni ugao izlaza (ili zalaza) s r e d i š t a Sunčeva prividnog kružnog diska dobivamo, u obliku pogodnom za logaritamski račun,

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} H = \sin (S - \theta) \cos (D - \theta) \sec (S - \sigma) \operatorname{cosec} (D - \sigma).$$

Ako se traži časovni ugao izlaza (ili zalaza) g o r n j e g r u b a Sunčeva prividnog diska, onda treba samo uzeti u obzir da je, u tom trenutku, zenitska daljina središta Sunčeva prividnog kružnog diska za prividni poluprečnik ovoga diska v e ć a no u gornjem slučaju. Prividni poluprečnik Sunčeva diska iznosi, skoro tačno, $16' = 960''$. Prema tome, Sunčev gornji rub izlazi (odnosno zalazi) za posmatrača u trenutku kad središte Sunčeva prividnog diska stigne na zenitsku daljinu:

$$z = 90^\circ + \mathcal{P} + \mathcal{R}_0 = 90^\circ + 35' + 16' = 90^\circ 51'.$$

Sa ovom vrednošću zenitske daljine, ako uvedemo oznake

$$45^\circ + 25'5'' = \bar{S} \quad i \quad 45^\circ - 25'5'' = \bar{D},$$

dobivamo, neposredno, za časovni ugao izlaza (ili zalaza) g o r n j e g r u b a Sunčeva prividnog diska, u obliku pogodnom za logaritamski račun,

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \bar{H} = \sin (\bar{S} - \theta) \cos (\bar{D} - \theta) \sec (\bar{S} - \sigma) \operatorname{cosec} (\bar{D} - \sigma).$$

u =
u =
u =

149) 154. Poći ćemo od obrasca

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H.$$

Ako ga diferenciramo, vodeći računa da su φ i δ konstante, imaćemo

$$\sin z \, dz = \cos \varphi \cos \delta \sin H \, dH.$$

Kombinujući ovaj izraz sa sinusnim obrascem,

$$\cos \delta \sin H = \sin z \sin A,$$

dobivamo

$$dz = \cos \varphi \sin A \, dH.$$

S druge strane imamo

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A.$$

U trenutku izlaza, to jest za $z = 90^\circ$, ovaj daje

$$\sin \delta = -\cos \varphi \cos A,$$

ili

$$\cos A = -\sin \delta \sec \varphi.$$

Oдавде, opet, nalazimo

$$\sin A = \sec \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \delta)^{\frac{1}{2}}.$$

Ako primetimo da je dz , u ovom slučaju, jednako $R \, d\tau$, a $dH = \tau$, imaćemo za traženu promenu u vremenu izlaza, u vremenim sekundama,

$$\tau = \frac{R}{15} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \delta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{R}{15} (\cos^2 \delta - \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}.$$

150) 155. Neka predstavlja, na sl. 100, iscrtani kružni sektor, sa središtem u S, deo prividnog Sunčeva kružnog diska, poluprečnika r_0 ; Z_n — posmatračev zenit i M — neku tačku na rubu diska; z — zenitsku daljinu središta S.

Sl. 100

Usled dejstva refrakcije, posmatrač će tačku M videti u položaju M'. Ako sad spustimo iz M i M' lukove velikih krugova, MQ i M'Q', normalno na vertikal $Z_n S$, pa označimo ugao $Z_n S M$ sa η , imaćemo, prema rešenju Zad. 147,

$$Q'M' = (1-k) QM = (1-k) r_0 \sin \eta.$$

A ako primetimo da je

$$Z_{\infty}Q = Z_{\infty}S - QS = z - r_0 \cos \eta,$$

biće

$$SQ' = r_0 \cos \eta + k \operatorname{tg} z (z - r_0 \cos \eta).$$

Uzmemo li u obzir da je $r_0 \cos \eta$ mala veličina, moći ćemo desnu stranu napisati

$$SQ' = r_0 \cos \eta + k (\operatorname{tg} z - r_0 \cos \eta) (1 + r_0 \cos \eta \operatorname{tg} z)^{-1},$$

ili, ako razvijemo i zanemarimo male veličine drugog i viših redova,

$$\begin{aligned} SQ' &= r_0 \cos \eta + k (\operatorname{tg} z - r_0 \cos \eta) (1 - r_0 \cos \eta \operatorname{tg} z) = \\ &= r_0 \cos \eta + k [\operatorname{tg} z - r_0 \cos \eta (1 + \operatorname{tg}^2 z)] = \\ &= r_0 \cos \eta + k (\operatorname{tg} z - r_0 \cos \eta \operatorname{sec}^2 z). \end{aligned}$$

Kako se ovde radi o malim veličinama, prenećemo sliku u tangen-
tnu ravan na nebeskoj sferi, u tački S ^(sl. 101) ovu tačku ćemo uzeti za početak koordinatnog sistema (pravouglog, pravolinijskog). Za x - osu ćemo uzeti tangentu na vertikalnu, usmerenu ka zenitu; za y - osu uzećemo tangentu na almukantaru, usmerenu ka istoku.

Za koordinate tačke M' imaćemo u ovom sistemu

$$\begin{aligned} x &= SQ' = r_0 \cos \eta + k (\operatorname{tg} z - r_0 \cos \eta \operatorname{sec}^2 z), \\ y &= QM' = r_0 (1 - k) \sin \eta. \end{aligned}$$

Eliminisaćemo iz ovih izraza ugao η . Ako ih napišemo

$$\frac{x - k \operatorname{tg} z}{r_0 (1 - k \operatorname{sec}^2 z)} = \cos \eta,$$

$$\frac{y}{r_0 (1 - k)} = \sin \eta,$$

pa dignemo na kvadrat, dobićemo za jednačinu deformisana Sunčeva diska, usled dejstva refrakcije,

$$\left[\frac{x - k \operatorname{tg} z}{r_0 (1 - k \operatorname{sec}^2 z)} \right]^2 + \left[\frac{y}{r_0 (1 - k)} \right]^2 = 1.$$

Vidimo, dakle, da je to e l i p s a sa

velikom (horizontalnom) poluosom: $r_0 (1 - k)$,

koja je, prema tome, ista za sve zenitske daljine i zavisi samo od vrednosti konstante refrakcije; i

*... = gornje
e unutrašnje*

malom (vertikalnom) poluosom: $r_0(1 - k \sec^2 z)$,
koja zavisi ne samo od konstante refrakcije već i od zenitske daljine
Sunčeve.

Ako primetimo da su koordinate središta ove elipse

$$x_0 = k \operatorname{tg} z \quad \text{i} \quad y_0 = 0,$$

pa u nj prenesemo koordinatni početak, dobićemo za jednačinu elipse

$$\left[\frac{\xi}{r_0(1 - k \sec^2 z)} \right]^2 + \left[\frac{\eta}{r_0(1 - k)} \right]^2 = 1.$$

Ako za konstantu refrakcije uzmemo

$$k = 60'' \cdot 27 = 0.000292$$

nalazimo za vrednosti male poluose (a) Sunčeva deformisanog diska na
zenitskim daljinama $0^\circ - 80^\circ$:

z	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
h	959.7	959.7	959.7	959.6	959.5	959.3	958.8	957.6	950.7

Na sl. 90 predstavljene su grafički vrednosti

ovih poluosa na raznim zenitskim daljinama Sunčeva

~~sl. 90~~

središta.

~~_____~~

19

—(4 uc.)

v/ Elementi teorije kretanja planeta i kometa Jgu. 1/28

—(2 a.)

151

156.

Polarne koordinate (r, ν) planetoida u funkciji datih veličina su

$$r = a(1 - e \cos E) \quad ; \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E.$$

Za $E = 80^\circ$, $\cos E = 0.17365$; $e \cos E = 0.01737$; i tako nalazimo

$$\underline{r = 0.98263 \times 3.0 \text{ a.j.} = 2.94789 \text{ a.j.}}$$

Za $e = 0.1$,

$$\left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1.1}{0.9} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.10555; \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu = 1.10555 \times 0.83910 = 0.92767;$$

tako da nalazimo

$$\frac{1}{2} \nu = 42^\circ 51' 4''.4;$$

dakle, za pravu anomaliju,

$$\underline{\nu = 85^\circ 42' 9''.}$$

Poslednji rezultat proverićemo pomoću obrasca

$$r = a(1 - e^2)(1 + e \cos \nu)^{-1}.$$

Ako unesemo nadjene vrednosti, nalazimo

$$r = 2.97 : 1.00750 = 2.94789 \text{ a.j.}$$

(nastavak na strani 86!)

) nije
cuv!

152 (157). Ako označimo sa a veliku poluosu, a sa e ekscentričnost planetine putanje; zatim sa r_p perihelsku, a sa r_a afelsku planetinu daljinu, onda je

$$r_p = a(1-e), \quad r_a = a(1+e).$$

Prema zadatku je druga četiri puta veća od prve, znači

$$4a(1-e) = a(1+e).$$

Iz ove jednačine dobivamo

$$e = \frac{3}{5} = 0.6.$$

Kako je $e = \sin \varphi$, za ugao ekscentričnosti planete nalazimo $\varphi = 36^\circ 52' 12''$.

153 (158). Sa datim vrednostima kometine prave anomalije (v) i ekscentričnosti (e) izračunaćemo, prvo, vrednost ekscentrične anomalije (E), pomoću obrasca

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v,$$

a zatim ćemo, pomoću Keplerove jednačine, izračunati $M = nt$, pa odavde t , pošto je n poznato.

$$\begin{aligned} \frac{1-e}{1+e} &= \frac{0.2}{1.8} = \frac{0.1}{0.9}; \\ \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{2}} &= \pm \frac{1}{3}; \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} E &= \pm \frac{1}{3} \times 0.57735, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} E &= \pm 0.19245, \\ \frac{1}{2} E &= \pm 10^\circ 53' 36'', \\ E &= \pm 21^\circ 47' 12''; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin E &= \pm 0.37115, \\ \rho^\circ &= 57^\circ 29' 57.80, \\ \rho^\circ &= 45^\circ 83' 62.4, \\ (e \sin E)^\circ &= \pm 17.012263, \\ (e \sin E)^\circ &= \pm 17^\circ 0' 44'', \\ M &= \pm 4^\circ 46' 28'', \\ M &= \pm 17^\circ 188'', \\ t = \frac{1}{n} M &= \pm 57^s 7^h. \end{aligned}$$

U položaj određjen pravom anomalijom $v = 60^\circ$ kometa bi, prema tome, dospela 57 dana 7 časova po prolazu kroz perihel.

Za proveravanje izračunatih veličina dovoljno će biti da se utvrdi tačnost vrednosti M i t .

Proveravanje veličine M izvršilo bi se najbrže i najpouzdanije pomoću tablica¹ za izračunavanje pravih pomoću srednjih anomalija i

¹ M.F.Boquet — Tables du mouvement képlérien. Hendaye (B.P.); 1920
F.Tietjen — Tafel zur Berechnung der wahren Anomalie. Ver-

~~ve~~ = ~~gustunog~~.

87

~~III~~
~~37~~

ekscentričnosti. To su, istina, dvoulazne tablice, ali je, i pored toga, račun pomoću istih brz i pouzdan. Medjutim, u ovom slučaju, taj način nije primenljiv zbog prevelike ekscentričnosti putanje. Pomenute tablice idu svega do $e = 0.5$.

Iz istog razloga ne može se proveravanje, u ovom slučaju, preduzeti ni pomoću beskonačnog reda $(v - M)$ (v. str.), jer za ekscentričnost date putanje taj red može biti i divergentan.

Ostaje, prema tome, kao jedini mogućan način za proveravanje tačnosti izračunatih vrednosti, da se račun p o n o v o izvrši — što je i učinjeno.

154 159 Neka, u trenutku t , tačka zauzima položaj A (v. sl. 102), čije ćemo polarne koordinate obeležiti sa (r, v) . Neka u narednom trenutku, dakle u vremenom razmaku dt , tačka dospe u položaj A' . Element prevaljenog puta, AA' , označićemo sa ds , a promene u polarnim koordinatama položaja tačke sa dr i dv . Obrazujmo iz tih elemenata mali trougao ABA' . Ako je dt dovoljno malo, $\overline{AA'} = ds$, $\overline{AB} = dr$, $BA' = r dv$. Obrazujmo li odnose ovih elemenata prema vremenu dt , imaćemo — za brzinu tačke: $V = \dot{s}$; za njenu radijalnu komponentu: $V_r = \dot{r}$; za njenu transverzalnu (normalnu na pravcu radijavektora) komponentu: $V_v = r\dot{v}$.

Ako pravouglo koordinata položaja A označimo sa (x, y) , imaćemo

$$x = r \cos v \quad \text{i} \quad y = r \sin v,$$

a za komponente brzine:

$$\dot{x} = V_x = -r\dot{v} \sin v + \dot{r} \cos v,$$

$$\dot{y} = V_y = r\dot{v} \cos v + \dot{r} \sin v.$$

CA. 102

Napominjemo da je, prvo, rezultanta komponentata V_r i V_v jednaka rezultanti komponentata V_x i V_y ; i, drugo, da je zbir projekcija, na bilo koji pravac, komponentata V_r i V_v , jednak zbiru projekcija, na isti pravac, komponentata V_x i V_y . Projicirajući komponente V_r i V_v na ose OX

i OY imaćemo

$$\begin{aligned} \dot{x} = V_x &= V_r \cos v - V_v \sin v, \\ \dot{y} = V_y &= V_r \sin v + V_v \cos v. \end{aligned}$$

Iz ova dva sistema dolazimo do već nadjenih vrednosti komponenata brzine u polarnom koordinatnom sistemu:

$$V_r = \dot{r} \quad i \quad V_v = r\dot{v}.$$

Do izraza za komponente ubrzanja tačke u položaju A, koje ćemo označiti sa \ddot{x} i \ddot{y} , a predstaviti vektorima AJ i AK, doći ćemo ako ove projiciramo na pravac radijavektora i pravac upravni na njemu, dakle

$$\begin{aligned} \gamma_r &= \ddot{x} \cos v + \ddot{y} \sin v, \\ \gamma_v &= -\ddot{x} \sin v + \ddot{y} \cos v. \end{aligned}$$

Za vrednosti drugih izvoda po vremenu pravougljih koordinata imamo, međjutim,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{r} \cos v - 2\dot{r}\dot{v} \sin v - r\dot{v}^2 \cos v - r\ddot{v} \sin v, \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \sin v + 2\dot{r}\dot{v} \cos v - r\dot{v}^2 \sin v + r\ddot{v} \cos v. \end{aligned}$$

Unesemo li ove vrednosti u poslednje izraze imaćemo, pošto skratimo i uredimo, za komponente ubrzanja u polarnim koordinatama

$$\gamma_r = \ddot{r} - r\dot{v}^2 \quad i \quad \gamma_v = r\ddot{v} + 2\dot{r}\dot{v} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r\dot{v}^2).$$

155 160. U prethodnom rešenju izvedeni su izrazi za radijalnu i transverzalnu komponentu planetine putanjeske brzine:

$$V_r = \dot{r} \quad i \quad V_v = r\dot{v}.$$

Za samu putanjsku brzinu planete imaćemo, prema tome,

$$V^2 = V_r^2 + V_v^2.$$

Radijalnu komponentu možemo izraziti pomoću karakteristika putanje.

Ako podjemo od polarne jednačine putanje,

$$r = \rho (1 + e \cos v),$$

dobivamo, posle diferenciranja i očiglednih transformacija,

$$\dot{r} = \frac{e}{\rho} r^2 \dot{v} \sin v = C \frac{e}{\rho} \sin v,$$

gde C označava dvostruku površinsku brzinu planete. Za transverzalnu komponentu dobivamo, isto tako,

$$V_\theta = r\dot{\theta} = \frac{1}{r} \cdot r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{r} = \frac{C}{\rho} (1 + e \cos v).$$

Prema tome dobivamo za kvadrat planetine putanjske brzine

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = \frac{C^2}{\rho^2} [e^2 \sin^2 v + (1 + e \cos v)^2] = \frac{C^2}{\rho^2} (1 + 2e \cos v + e^2) - \frac{C^2}{\rho^2} \left[\frac{2}{\rho} (1 + e \cos v) - \frac{1 - e^2}{\rho} \right] = \frac{C^2}{\rho^2} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

i konačno

$$V^2 = k^2 (1 + m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

156 **161**. Do traženih izraza za radijalnu i transverzalnu komponentu brzine doći ćemo jednostavno primenjujući izvedene obrasce u rešenju zadatka 159, ali stavljajući, mesto prave anomalije, v , veličinu proporcionalnu vremenu, recimo ωt , ako sa ω označimo konstantnu ug-

Na sličan način ćemo doći i do izraza za radijalnu i transverzalnu komponentu ubrzanja. U pomenutom rešenju su nađeni izrazi γ_r i γ_θ koje, kao komponente

$$\gamma_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \text{i} \quad \gamma_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}.$$

kako je

$$\ddot{r} = 2\frac{e}{\rho} r\dot{\theta}\dot{v} \sin v + \frac{e}{\rho} r^2 \ddot{v} \sin v + \frac{2}{\rho} r^2 \dot{v}^2 \cos v,$$

to je

$$\gamma_r = 2\left(\frac{e}{\rho}\right)^2 r^3 \omega^2 \sin \omega t + \frac{e}{\rho} r^2 \omega^2 \cos \omega t - r\omega^2, \quad \gamma_\theta = 2\frac{e}{\rho} r^2 \omega^2 \sin \omega t.$$

157 **162**. Ako polarne koordinate planete u položaju A (v. sl.) označimo sa (r, v) i ugao između vektora brzine planete $V = AA'$ i njene transverzalne komponente AB' označimo sa ψ , imaćemo

$$V = V_\theta \sec \psi = r\dot{\theta} \sec \psi = \frac{r^2 \dot{\theta}}{r} \sec \psi = \frac{C}{r} \sec \psi.$$

Prema ovom obrascu nalazimo za brzinu (V_p) planete u perihelu, to jest u položaju gde je

$$r = a(1 - e) \quad \text{i} \quad \psi = 0,$$

$$V_p = \frac{C}{a(1 - e)}.$$

Za brzinu (V_a) u afelu, gde je $r = a(1 + e)$, $\psi = 0$ nalazimo

$$V_a = \frac{C}{a(1 + e)}.$$

Za brzinu (V_b) planete na kraju male ose, gde je $r = a$ i $\psi = -\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$, $\cos \psi = \sin v = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$, dobivamo



$$V_b = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{h} = \frac{c}{b}$$

Za brzinu (V_n) planete na kraju parametra, gde je

$$r = \rho = a(1-e^2), \quad \nu = 90^\circ \text{ ili } 270^\circ,$$

dobivamo, ako ove vrednosti unesemo u

$$V_n^2 = \frac{c^2 e^2}{\rho^2} + \frac{c^2}{\rho^2} = \frac{c^2}{\rho^2} (1+e^2) = \frac{c^2}{\rho} \frac{1+e^2}{a(1-e^2)} = \frac{k^2(1+u)}{a} \frac{1+e^2}{1-e^2}$$

158

sukcesivna
aproximacija

163

Primenićemo za rešavanje date Keplerove jednačine metodu

aproximacija. Za prvu, ili polaznu, približnu vrednost rešenja uzećemo

prva dva člana razvijene ekscentrične anomalije, dakle

$$E_1 = M + e \sin M.$$

[e]	9.16 732,
[e'']	5.31 443,
[e''']	4.48 175,
[sin M]	9.83 840,
[e sin M]	4.32 015,
(e sin M)''	= 20 900.0,
(e sin M)	= 5° 48' 20.0,
M	= 136 25 32.4,
E ₁	= 142 13 52.4;
[sin E ₁]	9.78 709,
[e sin E ₁]	4.26 884,
(e sin E ₁)''	= 18 571.2,
e sin E ₁	= 5° 9' 31.2,
M ₁	= 137 4 21.2,
M	= 136 25 32.4,
M - M ₁	= - 0° 38' 48.8;
[cos E ₁]	9.89 790 n,
[ecos E ₁]	9.06 522 n,
(1 - ecos E ₁)	= 1.11 620,
ΔE ₁	= - 2086.4,
ΔE ₁	= - 0° 34' 46.4;
M ₄	= 136° 25' 32.4,
M	= 136 25 32.4.

E ₁	= 142° 13' 52.4,
ΔE ₁	= - 0 34 46.4,
E ₂	= 141 39 6.0;
[sin E ₂]	9.79 270,
[e sin E ₂]	4.48 175,
(e sin E ₂)''	= 18 812.6,
e sin E ₂	= 5° 13' 32.6,
M ₂	= 136 25 33.4,
M - M ₂	= - 0° 0' 1.0;
[cos E ₂]	9.89 446 n,
[e cos E ₂]	9.16 732,
(ecos E ₂)	= 9.06 178 n,
(ecos E ₂)	= - 0.11 529,
(1 - ecos E ₂)	= 1.11 529,
ΔE ₂	= - 0° 0' 0.9;
E ₃	= 141° 39' 5.1;
[sin E ₃]	9.79 271,
[e sin E ₃]	4.27 446,
(e sin E ₃)''	= 18 813.0,
e sin E ₃	= 5° 13' 33.0,
M ₃	= 136 25 32.1,
M - M ₃	= + 0 0 0.3;
[cos E ₃]	9.89 446 n,
ΔE ₃	= + 0.33
E ₄	= 141° 39' 5.4;
[sin E ₄]	9.79 271,

Prema tome rešenje je date Keplerove jednačine E_3 .

159 164. Izračunaćemo, prvo, vrednost ekscentrične anomalije kojoj odgovara prava anomalija jednaka dvostrukoj vrednosti ekscentrične anomalije, i to pomoću obrasca

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E &= \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} 2 \frac{1}{2} E = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}} 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} E (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} E)^{-1}, \\ \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} E &= 1 - 2 \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \left(\frac{0.2}{1.8}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{3}; \end{aligned}$$

$2 [\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_1]$	9.52 288.,	$2 [\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_2]$	0.22 185,
$[\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_1]$	9.76 144,	$[\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_2]$	0.11 093,
$\frac{1}{2} E_1 = 30^\circ 0' 0''$,		$\frac{1}{2} E_2 = 52^\circ 14' 20.7''$,	
$\frac{1}{2} E_3 = 210 \ 0 \ 0;$		$\frac{1}{2} E_4 = 232 \ 14 \ 20.7.$	

Prema tome postoje četiri položaja na planetinoj putanji, kojima odgovaraju vrednosti ekscentričnih anomalija:

$$E_1 = 60^\circ; \quad E_3 = 300^\circ; \quad E_2 = 104^\circ 28' 41.4''; \quad E_4 = 255^\circ 31' 18.6'';$$

kojima, na datoj putanji, odgovaraju prave anomalije jednake udvostručenim vrednostima ekscentričnih anomalija.

Pošto smo odredili ekscentrične, izračunaćemo srednje anomalije:

$[e]$	9.90 309,	9.90 309,	9.90 309,	9.90 309,
$[\sin E]$	9.93 753,	9.93 753 κ ,	9.98 598,	9.98 598 κ ,
$[e \sin E]$	9.84 062;	9.84 062 κ ;	9.88 907;	9.88 907 κ .

Kako je $[e] = 9.90 \ 309$, a $[\zeta''] = 5.31 \ 443$, nalazimo da je $[e''] = 5.21 \ 752$.

$[\sin E]$	9.93 753,	9.93 753 κ ,	9.98 598,	9.98 598 κ ,
$[e \sin E]$	5.15 505,	5.15 505 κ ,	5.20 350,	5.20 350 κ ,
$(e \sin E)''$	= 142 906'',	= 142 906'',	159 771,	= 159 771,
$(e \sin E)$	= 39° 41' 46'',	= 39° 41' 46'',	44° 22' 51'',	= 44° 22' 51'',
E	= 60,	300,	104 28 41.4,	255 31 18.6,
$nt = M$	= 20 18 14,	339 41 46,	60 5 50.4,	299 54 9.6,
nt	= 73 094'',	1 222 906'',	216 350.4,	1 079 649.6,
t	= 367.31;	6145.26;	1087.19;	5425.38.

Izračunati brojevi predstavljaju protekle dane od planetina prolaza

kroz perihel do trenutka kada planeta došpeva u položaj za koji je njena prava anomalija jednaka dvostrukoj vrednosti njene ekscentrične anomalije.

1/2

150 **165.** Ako planetinu periodu (sideričku revoluciju) u danima označimo sa T, onda je njeno srednje sideričko dnevno kretanje $\frac{2\pi}{T}$; nakon četvrtine periode od prolaza kroz perihel planetina srednja anomalija će uzeti vrednost

$$\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \text{ dakle } 90^\circ$$

Ekscentričnu anomaliju ćemo, prema tome, dobiti kao rešenje Keplerove jednačine, u kojoj znamo, pored vrednosti srednje anomalije ($M = 90^\circ$) i ekscentričnost ($e = 0.01673$).

Iskoristićemo okolnost što je ekscentričnost planetine putanje mala, da Keplerovu jednačinu rešimo na dva načina.

guru

Prvi način. Poznato je da se vrednost ekscentrične anomalije planete može dobiti pomoću beskonačnog reda

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + \frac{1}{8} e^3 (3 \sin 3M - \sin M) + \dots$$

Kako je, prema zadatku, $M = 90^\circ$, to je $2M = 180^\circ$, $3M = 270^\circ$. Prema tome ćemo za pojedine članove reda imati:

$[e]$	8.22 350,	$[e^3]$	4.67 050-10,
$[e^2]$	5.31 443,	$[e^4]$	5.31 443,
$[e^3]$	3.53 793,	$[(e^3)']$	9.98 493-10,
$e'' =$	3450".9,	$[e^5]$	0.90 309,
$e =$	$0^\circ 57' 30".9;$	$[\frac{1}{8}e^3]$	9.08 184-10,
		$[4]$	0.60 206 μ ,
		Σ	9.68 390 μ ; $\mu_{\text{kor}} = -0".48.$

Prema tome, za ekscentričnu anomaliju planete dobili smo $E = 90^\circ 57' 30".4$.

guru

$$M + e \sin M =$$

Drugi način. Metodom sukcesivnih aproksimacija imaćemo, ako podjemo sa prvom približnom vrednošću $E = 90^\circ 57' 30".9$.

$$\begin{aligned}
 [e] & 8.22\ 350, \\
 [e''] & 5.31\ 443, \\
 [\sin E_1] & \underline{9.99\ 994}, \\
 [(e \sin E_1)'] & 3.53\ 787, \\
 (e \sin E_1)'' & = 3450''.4, \\
 e \sin E_1 & = 0^\circ 57' 30''.4, \\
 M_1 & = 90^\circ 0' 0''.5, \\
 M - M_1 & = -0^\circ 0' 0''.5; \\
 [\cos E_1] & 8.22\ 350'', \\
 [e \cos E_1] & 6.44\ 700'';
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 - e \cos E_1 & = 1.00\ 028, \\
 \Delta E_1 & = -0^\circ 0' 0''.5, \\
 \underline{E_2} & = \underline{90^\circ 57' 30''.4}, \\
 [e''] & 3.53\ 793, \\
 [\sin E_2] & \underline{9.99\ 994}, \\
 [e \sin E_2] & 3.53\ 787, \\
 (e \sin E_2) & = 0^\circ 57' 30''.4, \\
 \underline{M - M_2} & = \underline{0^\circ 0' 0.0}
 \end{aligned}$$

Rešenje je, dakle: $E_2 = 90^\circ 57' 30''.4$.

161. Vrh parametra je položaj na planetinju putanju definisan pravom anomalijom $v_1 = 90^\circ$ i $v_2 = 270^\circ$. Pošto je u zadatku data ekscentričnost putanje, izračunaćemo vrednost ekscentrične anomalije.

$$\begin{aligned}
 1 - e & = 0.75\ 463, \\
 1 + e & = 1.24\ 537, \\
 [1 - e] & 9.87\ 774, \\
 [1 + e] & \underline{0.09\ 530}, \\
 \Delta & = 9.78\ 244, \\
 \frac{1}{2} \Delta & = 9.89\ 122;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v & = 90^\circ, \\
 \frac{1}{2} v & = 45^\circ, \\
 [\operatorname{tg} \frac{1}{2} E] & = \frac{1}{2} [\Delta] \quad 9.89\ 122, \\
 \frac{1}{2} E & = 37^\circ 53' 53''.0, \\
 \underline{E} & = \underline{75^\circ 47' 46''.0}
 \end{aligned}$$

Da bismo mogli izračunati vreme koje je planeti potrebno da iz perihela dospe do vrha parametra, moramo izračunati srednju anomaliju.

$$\begin{aligned}
 [e] & 9.38\ 982, \\
 [e''] & 5.31\ 443, \\
 [e''] & 4.70\ 425, \\
 [\sin E] & \underline{9.98\ 651}, \\
 [(e \sin E)'] & 4.69\ 076, \\
 (e \sin E)'' & = 49\ 063''.3;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e \sin E & = 13^\circ 37' 43''.3, \\
 E & = 75^\circ 47' 46''.0, \\
 M & = 62\ 10\ 2.7, \\
 (M)'' & = 223\ 802''.7, \\
 \eta & = 1035^8.438, \\
 n & = \frac{2\pi}{\eta} = 1251''.644, \\
 \underline{t} & = \underline{\frac{M''}{n} = 178^9.807}
 \end{aligned}$$

Planeti treba, dakle, $178^d 19^h$ da iz perihela dospe do vrha parametra; odnosno, toliko dana pre prolaza kroz perihel planeta se nalazi u donjem vrhu parametra.

Tačnost izračunatih veličina proverićemo na taj način što ćemo, prvo, proveriti tačnost izračunate ekscentrične anomalije.

Ako odredimo vrednost radija vektora pomoću date prave anomalije i izračunate ekscentrične anomalije, imaćemo:

$$r_p = a(1 - e^2) = a(1 - e \cos E_p),$$

Slika dat na

gde smo sa E_p označili izračunatu vrednost planetine ekscentrične anomalije. Odavde nalazimo $\cos E_p = e$; kako je $\cos E_p = 0.24537$, vidimo da je tačnost izračunate ekscentrične anomalije proverena. Tačnost veličina M , n i t mora se proveriti ponovnim računom, - što je i uradjeno.

2/11/2

162 167. ³ Prema trećem Keplerovu zakonu je $\frac{a^3}{T^2} = K$, to jest $a^3 = KT^2$, gde je K konstanta.

Ako diferenciramo biće

$$3a^2 \Delta a = 2KT \Delta T.$$

Odavde nalazimo

$$\Delta T = \frac{3a^2}{2KT} \Delta a = \frac{3a^2 T^2}{2a^3 T} \Delta a = \frac{3}{2} \frac{T}{a} \Delta a.$$

Primeniti dobiveni rezultat i izračunati za koliko bi se promenila Zemljina siderička revolucija, ako bi joj se velika poluosa njene heliocentrične putanje skratila za 10^{-4} a.j.

Kako je u slučaju Zemlje i $a = 1$ i $T = 1$, imaćemo

[3] 0.47712,
 [Δa] 6.00 000 - 10 n,
 Σ 6.47 712 - 10 n,
 [2] 0.30 103,
 [ΔT] 6.17 609 - 10 n,

ΔT = - 0.00 015 sid. god.
 Ako se za T uzme T = 365.256,

[T] 2.56 260,
 [ΔT] 6.17 609 - 10 n,
 [Δτ] 8.73 869 - 10 n,

$$\Delta \tau = - 0.05 479 \text{ dana.}$$

Siderička revolucija bi, u tom slučaju, iznosila 365.201 dana.



Ovo možemo još napisati i u obliku

~~$$r_p(1-e) = r_a(1+e)$$~~

$$r_p(1-e)^{\frac{1}{2}} = r_a(1+e)^{\frac{1}{2}}$$

165

170.

Ako podjemo od poznatih relacija

$$2\sin^2 \frac{1}{2} \nu = 1 - \cos \nu$$

$$2\cos^2 \frac{1}{2} \nu = 1 + \cos \nu, \text{ pa ih pomnožimo veličinom } r,$$

$$2r\sin^2 \frac{1}{2} \nu = r(1 - \cos \nu)$$

$$2r\cos^2 \frac{1}{2} \nu = r(1 + \cos \nu),$$

a setimo se da je

$$r \cos \nu = a(\cos E - e) \quad \text{i} \quad r = a(1 - e \cos E),$$

poslednje jednačine daće nam

$$2r\sin^2 \frac{1}{2} \nu = a(1 - e \cos E - \cos E + e) = a(1+e)(1 - \cos E),$$

$$2r\cos^2 \frac{1}{2} \nu = a(1 - e \cos E + \cos E - e) = a(1-e)(1 + \cos E).$$

Iz ovih dobivamo

$$2r\sin^2 \frac{1}{2} \nu = 2a(1+e)\sin^2 \frac{1}{2} E,$$

$$2r\cos^2 \frac{1}{2} \nu = 2a(1-e)\cos^2 \frac{1}{2} E,$$

Deljenjem ovih dveju jednačina dobivamo

$$\lg^2 \frac{1}{2} \nu = \frac{1+e}{1-e} \lg^2 \frac{1}{2} E,$$

ili, prema zadatku,

$$\lg^2 \frac{1}{2} \nu = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \lg^2 \frac{1}{2} E.$$

Ako se sad setimo da je

$$\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \lg^2(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) = \lg^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi),$$

pa to unesemo u poslednju jednačinu i korenujemo dobićemo traženi izraz

$$\lg \frac{1}{2} \nu = \lg(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) \lg \frac{1}{2} E = \lg(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) \lg \frac{1}{2} E.$$

166

171.

Prema tačnom obliku trećeg Keplerova zakona za Zemlju imamo:

$$I. \quad \frac{a^3}{\eta^2} = \frac{k^2}{4\pi^2} (1+m).$$

Za planetu sa dvostrukom masom imaćemo, ako joj

veliku poluosu označimo sa a_x ,

$$\frac{a_x^3}{\eta^2} = \frac{k^2}{4\pi^2} (1+2m).$$

Iz ovih dveju jednačina dobivamo

$$a_x^3 = \frac{1+2m}{1+m} a^3 = \left(1 + \frac{m}{1+m}\right) a^3 \approx (1+m) a^3.$$

Odatavde nalazimo

$$a_x = (1+m)^{\frac{1}{3}} a = (1 + \frac{1}{3}m) a = (1 + \frac{1}{990000}) a = 1.000001 a,$$

to jest

$$a_x = 1.000001 a.j. = 1.495 \times 10^6 km.$$

II. Prema tačnom obliku trećeg Keplerova zakona za Zemlju imamo

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2}{4\pi^2} (1+m).$$

Diferenciramo li tu jednačinu, tretirajući i T kao konstantu, imaćemo

$$\frac{3a^2 \Delta a}{T^2} = \frac{k^2}{4\pi^2} \Delta m.$$

Deljenjem ove prethodnom jednačinom dobivamo

$$\frac{3\Delta a}{a} = \frac{\Delta m}{1+m}, \text{ to jest } \Delta a = \frac{\Delta m}{3(1+m)} a. \text{ A kako je, prema}$$

$$\text{zadaku } \Delta m = m, \text{ biće } \Delta a = \frac{m}{3(1+m)} a \approx \frac{m}{3} a = \frac{1}{990000} a = 0.000001 a.j. = 1495 km$$



167 172. Ako označimo sa a veliku poluosu Zemljine heliocentrične putanje i sa T njenu sideričku revoluciju; a sa r_s označimo poluprečnik satelitove kružne putanje, koji je jednak poluprečniku Sunčeve lopte, pošto on kruži nad samom njenom površinom, i sa T_s označimo satelitu sideričku revoluciju, imaćemo, prema trećem Keplerovu zakonu,

$$T_s^2 : T^2 = r_s^3 : a^3, \text{ to jest } T_s^2 = \left(\frac{r_s}{a}\right)^3 T^2.$$

Ako unesemo u ovu jednačinu za: $\begin{cases} r_s = 696.350 \text{ km,} \\ a = 149.670.000 \text{ km,} \\ T = 365.256 \text{ sr. d., imaćemo} \end{cases}$

[r _s]	5.84 283,
[a]	8.17 513,
Δ	= 7.66 770 -10,
3Δ	3.00 310 -10,
2[T]	5.12 520,
2[T _s]	8.12 230 -10,
[T _s]	9.06 415 -10,
T _s	= 0.1159 ^d ≈ 2 ^h 46 ^m 9 ^s ≈ 10.014 ^s

Brzinu satelita dobićemo iz

$$v_s = \frac{2\pi r_s}{T_s}$$

[2π]	0.79 818,
[r _s]	5.84 283,
Σ	6.64 101,
[T _s]	4.00 061,
[v _s]	2.64 040,

$$v_s = 436.9 \text{ km/sec.}$$

~~bazirano na zadatku 173. i 174. i 175. i 176. i 177. i 178. i 179. i 180. i 181. i 182. i 183. i 184. i 185. i 186. i 187. i 188. i 189. i 190. i 191. i 192. i 193. i 194. i 195. i 196. i 197. i 198. i 199. i 200.~~

168

173.

Prema **tačnom** obliku trećeg Keplerova zakona je

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2}{4\pi^2} (1+m).$$

← Ako sa T_x označimo trajanje Zemljine revolucije u

slučaju da njena masa postane zanemarljiva, treći Keplerov zakon će nam dati

$$\frac{a^3}{T_x^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}.$$

← Iz ovih dveju jednačina nalazimo

$$\frac{T_x^2}{T^2} = 1+m, \quad \text{dakle} \quad T_x = (1+m)^{\frac{1}{2}} T \approx (1 + \frac{1}{2}m) T.$$

Prema tome, trajanje revolucije bi se, u tom slučaju, produžilo

za

$$\Delta T_x = \frac{1}{2} m T = \frac{365 \cdot 256}{660 \ 000}.$$

$[T]$	2.562 5973,
$[\frac{1}{2}m]$	5.819 5439,
$[\Delta T_x]$	6.743 0534,
$[86 \ 400]$	4.936 5737,
$[\Delta T_x^2]$	1.679 5671,

$$\Delta T_x = 47.81, \quad \text{dakle za nešto manje od } 48^s.$$

~~bazirano na zadatku 173. i 174. i 175. i 176. i 177. i 178. i 179. i 180. i 181. i 182. i 183. i 184. i 185. i 186. i 187. i 188. i 189. i 190. i 191. i 192. i 193. i 194. i 195. i 196. i 197. i 198. i 199. i 200.~~

169

174.

Kako je velika poluosa (a) planetoidove putanje 4 a.j., njeno srednje sideričko dnevno kretanje (n) dato je, prema trećem Keplerovu zakonu, izrazom $n = k'' a^{-\frac{3}{2}}$, gde je k'' vrednost Gausove konstante u sekundama. Znači:

$[k'']$ 3.55 001,
 $[a^{\frac{3}{2}}]$ 0.90 309,
 $[n]$ 2.64 692;

prema tome je za

$n = 443''.530$,
 $t = 365^d$,
 $nt = 161888''.5$,
 $M = 44^\circ 58' 8''.5$

Sad treba, pomoću Keplerove jednačine, izračunati ekscentričnu anomaliju, koju planeta dostiže godinu dana po prolazu kroz svoj perihel; odnosno iz koje, nakon godinu dana, dospeva u perihel. Keplerovu jednačinu ćemo rešavati metodom sukcesivnih aproksimacija, uzimajući za prvo približno rešenje

$$E_1 = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M;$$

$$2M = 89^\circ 56' 17''.0$$

$[e]$ 9.74 429,	$[(e'')]^2$ 4.80 301,	$[e \sin M]''$ 4.90 797,	$e \sin M = 22^\circ 28' 24''.0$,
$[e^2]$ 5.31 443,	$[2]$ 0.30 103,	$[\frac{1}{2}(e^2 \sin 2M)'']$ 4.80 198,	$\frac{1}{2} e^2 \sin 2M = 8^\circ 49' 27''.1$,
$2[e]$ 9.48 858,	$[\frac{1}{2}(e'')]^2$ 4.50 198,	$(e \sin M)'' = 80904''.0$,	$M = 44^\circ 58' 8''.5$,
$[e^3]$ 5.05 872,	$[\sin 2M]$ 0.00 000;	$\frac{1}{2}(e^2 \sin 2M)'' = 35767''.1$;	$E_1 = 76^\circ 15' 59''.6$.
$[\sin M]$ 9.84 925;			

$[e'']$ 5.05 872,	$[\sin E_1]$ 9.98 740,	$(e \sin E_1)''$ 5.04 612,	$(e \sin E_1)'' = 111205''.0$,
$[e'']$ 5.05 872,	$[\sin E_2]$ 9.98 651,	$(e \sin E_2)''$ 5.04 523,	$(e \sin E_2)'' = 110977''.0$,
$[e'']$ 5.05 872,	$[\sin E_3]$ 9.98 651,	$(e \sin E_3)''$ 5.04 523,	$(e \sin E_3)'' = 110977''.0$,
$esin E_1 = 30^\circ 53' 25''.0$,	$esin E_2 = 30^\circ 49' 37''.0$,	$esin E_3 = 30^\circ 49' 37''.0$,	$esin E_4 = 30^\circ 49' 37''.0$,
$M_1 = 45^\circ 22' 34''.6$,	$M_2 = 44^\circ 58' 14''.0$,	$M_3 = 44^\circ 58' 7''.6$,	$M_4 = 44^\circ 58' 8''.5$,
$M = 44^\circ 58' 8''.5$,	$M = 44^\circ 58' 8''.5$,	$M = 44^\circ 58' 8''.5$,	$M = 44^\circ 58' 8''.5$,
$M - M_1 = -0^\circ 24' 26''.1$,	$M - M_2 = -0^\circ 0' 5''.5$,	$M - M_3 = +0^\circ 0' 0''.9$,	$M - M_4 = -0^\circ 0' 0''.1$,
$[\cos E_1]$ 9.37 549,	$[\cos E_2]$ 9.38 979,	$[\cos E_3]$ 9.38 984,	$[\cos E_4]$ 9.38 984,
$[ecos E_1]$ 9.11 978,	$[ecos E_2]$ 9.13 408,	$[ecos E_3]$ 9.13 413,	$[ecos E_4]$ 9.13 413,
$ecos E_1 = 0.13 176$,	$ecos E_2 = 0.13 617$,	$ecos E_3 = 0.13 618$,	$ecos E_4 = 0.13 618$,
$1 - ecos E_1 = 0.86 824$,	$1 - ecos E_2 = 0.86 383$,	$1 - ecos E_3 = 0.86 382$,	$1 - ecos E_4 = 0.86 382$,
$\Delta E_1 = -0^\circ 28' 8''.6$,	$\Delta E_2 = -0^\circ 0' 6''.4$,	$\Delta E_3 = +0^\circ 0' 1''.0$,	$\Delta E_4 = +0^\circ 0' 1''.0$,
$E_2 = 75^\circ 47' 51''.0$;	$E_3 = 75^\circ 47' 44''.6$;	$E_4 = 75^\circ 47' 45''.6$;	

$[e'']$ 5.05 872,	$[\sin E_2]$ 9.98 651,	$(e \sin E_2)''$ 5.04 523,	$(e \sin E_2)'' = 110977''.0$,
$[e'']$ 5.05 872,	$[\sin E_3]$ 9.98 651,	$(e \sin E_3)''$ 5.04 523,	$(e \sin E_3)'' = 110977''.0$,
$[e'']$ 5.05 872,	$[\sin E_4]$ 9.98 651,	$(e \sin E_4)''$ 5.04 523,	$(e \sin E_4)'' = 110977''.0$,
$esin E_2 = 30^\circ 49' 37''.0$,	$esin E_3 = 30^\circ 49' 37''.0$,	$esin E_4 = 30^\circ 49' 37''.0$,	$esin E_4 = 30^\circ 49' 37''.0$,
$M_2 = 44^\circ 58' 14''.0$,	$M_3 = 44^\circ 58' 7''.6$,	$M_4 = 44^\circ 58' 8''.5$,	$M_4 = 44^\circ 58' 8''.5$,
$M = 44^\circ 58' 8''.5$,	$M = 44^\circ 58' 8''.5$,	$M = 44^\circ 58' 8''.5$,	$M = 44^\circ 58' 8''.5$,
$M - M_2 = -0^\circ 0' 5''.5$,	$M - M_3 = +0^\circ 0' 0''.9$,	$M - M_4 = -0^\circ 0' 0''.1$,	
$[\cos E_2]$ 9.38 979,	$[\cos E_3]$ 9.38 984,	$[\cos E_4]$ 9.38 984,	
$[ecos E_2]$ 9.13 408,	$[ecos E_3]$ 9.13 413,	$[ecos E_4]$ 9.13 413,	
$ecos E_2 = 0.13 617$,	$ecos E_3 = 0.13 618$,	$ecos E_4 = 0.13 618$,	
$1 - ecos E_2 = 0.86 383$,	$1 - ecos E_3 = 0.86 382$,	$1 - ecos E_4 = 0.86 382$,	
$\Delta E_2 = -0^\circ 0' 6''.4$,	$\Delta E_3 = +0^\circ 0' 1''.0$,	$\Delta E_4 = +0^\circ 0' 1''.0$,	
$E_3 = 75^\circ 47' 44''.6$;	$E_4 = 75^\circ 47' 45''.6$;		

$[e'']$ 5.05 872,	$[\sin E_3]$ 9.98 651,	$(e \sin E_3)''$ 5.04 523,	$(e \sin E_3)'' = 110977''.0$,
$[e'']$ 5.05 872,	$[\sin E_4]$ 9.98 651,	$(e \sin E_4)''$ 5.04 523,	$(e \sin E_4)'' = 110977''.0$,
$[e'']$ 5.05 872,	$[\sin E_4]$ 9.98 651,	$(e \sin E_4)''$ 5.04 523,	$(e \sin E_4)'' = 110977''.0$,
$esin E_3 = 30^\circ 49' 37''.0$,	$esin E_4 = 30^\circ 49' 37''.0$,	$esin E_4 = 30^\circ 49' 37''.0$,	$esin E_4 = 30^\circ 49' 37''.0$,
$M_3 = 44^\circ 58' 7''.6$,	$M_4 = 44^\circ 58' 8''.5$,	$M_4 = 44^\circ 58' 8''.5$,	$M_4 = 44^\circ 58' 8''.5$,
$M = 44^\circ 58' 8''.5$,	$M = 44^\circ 58' 8''.5$,	$M = 44^\circ 58' 8''.5$,	$M = 44^\circ 58' 8''.5$,
$M - M_3 = +0^\circ 0' 0''.9$,	$M - M_4 = -0^\circ 0' 0''.1$,		
$[\cos E_3]$ 9.38 984,	$[\cos E_4]$ 9.38 984,		
$[ecos E_3]$ 9.13 413,	$[ecos E_4]$ 9.13 413,		
$ecos E_3 = 0.13 618$,	$ecos E_4 = 0.13 618$,		
$1 - ecos E_3 = 0.86 382$,	$1 - ecos E_4 = 0.86 382$,		
$\Delta E_3 = +0^\circ 0' 1''.0$,	$\Delta E_4 = +0^\circ 0' 1''.0$,		
$E_4 = 75^\circ 47' 45''.6$;			

Prema tome je $E_4 = 75^\circ 47' 45''.5$.

$M = 44^\circ 58' 8''.5$	$[e'']$	5.058 7181	$[\sin M]$	9.849 2502	$[\sin 2M]$	9.999 9917
$2M = 89 56 17.0$	$[(e'')^2]$	4.803 0111	$[e'']$	5.058 7181	$[(e'')^2]$	4.803 0111
$e = 0.555$	$e'' =$	114 476''.97	$[e'' \sin M]$	4.907 9683	$[(e'')^2 \sin 2M]$	4.803 0028
$[e]$	$(e)^\circ =$	31° 47' 56''.97			$[(e'')^2 \sin 2M]^\circ =$	63 533''.50
$[e'']$	$(e'')^\circ =$	63 534''.72	$e' \sin M =$	80 903''.59	$e'' \sin 2M =$	17° 38' 53''.50
$[e^2]$	$(e^2)^\circ =$	17° 38' 54''.72	$e \sin M =$	22° 28' 23''.59	$\frac{1}{2} e^2 \sin 2M =$	8 49 26.75

E_k	76° 15' 58''.84	75° 47' 50''.03	75° 47' 45''.71	
$[\sin E_k]$	9.987 4025	9.986 5180	9.986 5157	
$[e'']$	5.058 7181			
$[e' \sin E_k]$	5.046 1206	5.045 2361	5.045 2338	
$(e \sin E_k)^\circ =$	111 204''.05	110 977''.80	110 977''.21	
$(e' \sin E_k)^\circ =$	30° 53' 24''.05	30° 49' 37''.80	30° 49' 37''.21	
$M_k =$	45 22 34.79	44 58 12.23	44 58 8.50	
$\Delta M_k =$	- 0 24 26.29	- 0 0 3.73	0 0 0.00	
$[\cos E_k]$	9.375 4968	9.389 7935		
$[e \cos E_k]$	9.119 7898	9.134 0865	$\frac{1}{2} E = 37^\circ 53' 52''.86$	
$e \cos E_k =$	0.131 7619	0.136 1716	$[1 - e \cos E]$	9.936 4218,
$1 - e \cos E_k =$	0.868 2381	0.863 8284	$[a]$	0.602 0600,
ΔE_k	- 0° 28' 8''.81	- 0° 0' 4''.32	$[r]$	0.538 4818; <u>$r = 3.455 268$</u>

$1+e =$	1.555,	$\frac{1}{2} \Delta$	0.271 6852,
$1-e =$	0.445,	$[\lg \frac{1}{2} E]$	9.891 2157,
$[1+e]$	0.191 7304,	$[\lg \frac{1}{2} v]$	0.162 9009,
$[1-e]$	9.648 3600,	$\frac{1}{2} v =$	55° 30' 7''.80,
Δ	0.543 3704;		<u>$v = 111^\circ 0' 15''.60$</u>

Vrednost prave anomalije ćemo odrediti iz

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E.$$

Prema zadatku je $1+e = 1.555$, $1-e = 0.445$. Dakle, inačemo:

$[1+e]$	0.19 173
$[1-e]$	9.64 836
$\left[\frac{1+e}{1-e} \right]$	0.54 337
$\frac{1}{2} \left[\frac{1+e}{1-e} \right]$	0.27 169
$[\operatorname{tg} \frac{1}{2} E]$	9.89 122
$[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu]$	0.16 291
$\frac{1}{2} \nu$	$= 55^{\circ} 30' 9''.0$
ν	$= 111^{\circ} 0' 18''.0$

Vrednost radijavektora možemo dobiti iz jednačine

$$r = a(1 - e \cos E).$$

$\cos E$	$= 0.24 538$
$e \cos E$	$= 0.13 619$
$(1 - e \cos E)$	$= 0.86 381$
r	$= 3.45 524$

170 175. 1. Poći ćemo od poznatog izraza koji određuje pravu anomaliju ako su poznate ekscentrične anomalije i ekscentričnost putanje,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E.$$

Ako se dopusti da se zanemare drugi i viši stepeni ekscentričnosti, dobiva se da je

$$\frac{1}{1-e} \approx 1+e,$$

tako da je, onda,

$$\left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1+e.$$

S druge strane, ako stavimo

$$\frac{1}{2} \nu - \frac{1}{2} E = x,$$

imaćemo

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} (\nu - E) \right] = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu - \operatorname{tg} \frac{1}{2} E}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu \operatorname{tg} \frac{1}{2} E} = \frac{e \operatorname{tg} \frac{1}{2} E}{1 + (1+e) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} E} = \\ &= \frac{e \operatorname{tg} \frac{1}{2} E \cos^2 \frac{1}{2} E}{1 + e \sin^2 \frac{1}{2} E} = \frac{2e \sin \frac{1}{2} E \cos \frac{1}{2} E}{2(1 + e \sin^2 \frac{1}{2} E)} = \frac{e \sin E}{2(1 + e \sin^2 \frac{1}{2} E)}. \end{aligned}$$

Kako smo dopustili da se zanemare drugi i viši stepeni ekscentričnosti, imaćemo

$$\operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} (\nu - E) \right] \approx \frac{1}{2} e \sin E.$$

Ako primetimo da levu stranu, kao malu veličinu, možemo napisati

$$\frac{1}{2} (\nu - E) \operatorname{arc} 1' \approx \frac{1}{2} e \sin E,$$

dakle

$$\nu - E = \frac{e \sin E}{\operatorname{arc} 1'} = \frac{3437.76}{2 \times 60} = 28'.6,$$

dakle

$$\nu = 30^\circ 28'.6.$$

2. Prema istom polaznom obrascu imamo

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu &= \left(\frac{61}{59} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \left(\frac{61}{59} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos E}{\sin E} = \left(\frac{61}{59} \right)^{\frac{1}{2}} (2 - \sqrt{3}) = \left(\frac{61}{59} \right)^{\frac{1}{2}} \times 0.2679 = 1.017 \times 0.2679 = \\ &= 0.27245 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \nu = 15^\circ 14'.4; \text{ prema tome je } \nu = 30^\circ 28'.8.$$

3. Pomoću logaritama imamo:

$$\begin{array}{r}
 [61] \quad 1.78\ 533, \\
 [59] \quad 1.77\ 085, \\
 [\Delta] \quad 0.01\ 448, \\
 \frac{1}{2}[\Delta] \quad 0.00\ 724, \\
 [\lg \frac{1}{2} E] \quad 9.42\ 805, \\
 [\lg \frac{1}{2} v] \quad 9.43\ 529, \\
 \frac{1}{2} \theta = 15^\circ\ 14'.4, \\
 \underline{v = 30\ 28.8.}
 \end{array}$$

Greška je u (1), kao što se vidi, < 0',5!

✓ 171. 176. Ako pojednostavljeni oblik trećeg Keplerova zakona primenimo na planetu i Zemlju imaćemo

$$n^2 a^3 = n_0^2 a_0^3, \quad \text{to jest} \quad n = n_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{T_0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{\frac{3}{2}}$$

A ako primetimo da je, računajući vreme od planetina prolaza kroz perihel, $M = nt$, nalazimo

$$a) \quad M = 2\pi \left(\frac{a_0}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{t}{T_0}; \quad \text{q. e. d.}$$

Iz ovog izraza sleduje da je

$$M = 2\pi \left[\frac{a(1-e^2)}{a(1-e^2)} \right]^{\frac{3}{2}} \frac{t}{T_0}, \quad \text{to jest} \quad b) \quad M = 2\pi \left[\frac{a_0(1-e^2)}{p} \right]^{\frac{3}{2}} \frac{t}{T_0};$$

Iz a) sleduje, isto tako,

$$M = \frac{2\pi}{T_0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{\frac{3}{2}} t, \quad \text{a} \quad \frac{2\pi a_0^{\frac{3}{2}}}{T_0} = k \sqrt{1+m}.$$

Ako smenimo, nalazimo

$$c) \quad M = \frac{k \sqrt{1+m}}{a^{\frac{1}{2}}} t, \quad \text{q. e. d.}$$

172. 177. Brzina tela na njegovoj heliocentričnoj putanji data je izrazom

$$V^2 = k^2 (1+m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

gde upotrebljena slova označavaju dobro poznate veličine. Prema trećem Keplerovu zakonu je,

$$k^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2(1+m)}, \quad \text{to jest} \quad k^2(1+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

tako da za brzinu dobivamo

$$V^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

a) Za $r_p = a(1-e)$: $V_p^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \left[\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right] = \left(\frac{2\pi a}{T} \right)^2 \frac{1+e}{1-e};$

b) za $r_a = a(1+e)$: $V_a^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a} \right] = \left(\frac{2\pi a}{T} \right)^2 \frac{1-e}{1+e};$

c) za $r = 2$: $V_2^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \left(1 - \frac{1}{a} \right) = \left(\frac{2\pi a}{T} \right)^2 (a-1).$

Da bismo brzine dobili izražene u km/sec, treba nadjene vrednosti još pomnožiti odnosom $\frac{149.5 \times 10^6 \text{ km}}{365.256 \times 86400 \text{ sec}} = 4.74 \text{ km/sec. [= f]}.$

Izračunaćemo nadjene veličine brzina pomoću logaritama. U svima izrazima javlja nam se a; stoga ćemo izračunati tu vrednost na osnovi poznate kometine sideričke revolucije, a pomoću trećeg Keplerova zakona. I to u približnom obliku, jer nam je trajanje revolucije samo približno poznato.

$[T]$	1.88 081,	$[2]$	0.30 103,	$[1+e]$	0.29 386,
$3[a] = 2[T]$	3.76 162,	$[\pi]$	0.49 715,	$[1-e]$	8.51 488,
$[a]$	1.25 387,	$[a]$	<u>1.25 387,</u>	$\left[\frac{1+e}{1-e} \right]$	1.77 898,
$a =$	17.942;	$\Sigma =$	2.05 205,	$\left[\frac{1-e}{1+e} \right]$	8.22 102,
$a-1 =$	16.942;	$[T]$	<u>1.88 081,</u>	$[a-1]$	1.22 896;
		$\Delta =$	0.17 124,		
		$2\Delta =$	0.34 248;		
a) $2[V_p]$	2.12 146,	b) $2[V_2]$	1.57 144,	c) $2[V_a]$	8.56 350,
$[V_p]$	1.06 073,	$[V_2]$	0.78 572,	$[V_a]$	9.28 175,
$[f]$	0.67 578,	$[f]$	0.67 578,	$[f]$	0.67 578,
$[V_p \text{ k/s}]$	1.73 651,	$[V_2 \text{ k/s}]$	1.46 150,	$[V_a \text{ k/s}]$	9.95 753,
$V_p =$	<u>54.5 km/sec.</u>	$V_2 =$	<u>28.9 km/sec</u>	$V_a =$	<u>0.9 km/sec.</u>

173

178.

103)

Ako elipsa na sl. predstavlja planetinu putanju, P njen položaj na toj putanji; S žižu koju zauzima Sunce, a F drugu, praznu žižu, onda je ugao ν prava, a ugao w takozvana antifokusna anomalija.

sl. 103

Ako planetine radijevektore označimo sa r i ρ , onda je, prema poznatoj osobini eliptičke putanje,

$$\rho + r = 2a,$$

gde je a velika poluosa putanje.

Poznato je, s druge strane, da za jednačinu putanje imamo

$$r = a(1 - e \cos E),$$

gde je E ekscentrična anomalija planete koja odgovara položaju P , koja nije predstavljena na slici, da je ne bismo bez potrebe preopterećivali. Iz ovih dveju jednačina dobivamo odmah

$$\rho = a(1 + e \cos E).$$

Sa slike, opet, iz trougla SPF imamo

$$r^2 = (2ae)^2 + \rho^2 - 4\rho ae \cos w,$$

$$(2a - \rho)^2 = (2ae)^2 + \rho^2 - 4\rho ae \cos w,$$

a odavde lako nalazimo

$$a(1 - e^2) = \rho(1 - e \cos w),$$

odnosno

$$\rho = a(1 - e^2)(1 - e \cos w)^{-1} = a(1 + e \cos E).$$

Iz ove jednačine nalazimo

$$\cos w = \frac{\cos E + e}{1 + e \cos E}.$$

Odavde dobivamo

$$1 - \cos w = (1 - e)(1 - \cos E)(1 + e \cos E)^{-1},$$

$$1 + \cos w = (1 + e)(1 + \cos E)(1 + e \cos E)^{-1}.$$

Iz ovih dveju jednačina deljenjem dobivamo

$$\frac{1 - \cos w}{1 + \cos w} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} w}{2 \cos^2 \frac{1}{2} w} = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} w = \frac{1 - e}{1 + e} \frac{1 - \cos E}{1 + \cos E} = \frac{1 - e}{1 + e} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} E,$$

to jest

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} w = \left(\frac{1 - e}{1 + e} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E.$$

A kako znamo da između ekscentrične i prave anomalije planete postoji veza

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v,$$

smenom ove u gornjoj jednačini dobivamo

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} w = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v, \quad \text{q. e. d.}$$

Iz prethodnih dveju, množenjem, dobivamo $\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \operatorname{tg} \frac{1}{2} w.$

174 *179* *gore se umnog* Prvi način. Označimo sa E_1 i E_2 ekscentrične anomalije na početku i na kraju razmaka od 6^h , čiji zbir, prema zadatku, iznosi $E_1 + E_2 = 180^\circ$.

Iz Keplerovih jednačina za ova dva položaja, oduzimanjem, dobivamo

$$(E_2 - E_1) - e (\sin E_2 - \sin E_1) = n(t_2 - t_1).$$

Ako razvijemo drugi član na levoj strani, imaćemo

$$(E_2 - E_1) - 2e \cos \frac{1}{2}(E_2 + E_1) \sin \frac{1}{2}(E_2 - E_1) = n(t_2 - t_1).$$

U ovoj jednačini možemo iskoristiti okolnost što je, s obzirom na relativno neznatno srednje sideričko dnevno kretanje, razlika ekscentričnih anomalija, u ovom konkretnom slučaju, tako isto neznatna veličina, — možemo sin u drugom članu, na levoj strani, zameniti lukom. U tom slučaju poslednja jednačina prelazi u

$$(E_2 - E_1) \left[1 - e \cos \frac{1}{2}(E_2 + E_1) \right] = n(t_2 - t_1).$$

Prema zadatku je $t_2 - t_1 = 6^h = \frac{1}{4} 24^h$; stoga je $n(t_2 - t_1) = 25''$. I tako nalazimo za razliku, ako primetimo da je $E_2 + E_1 = 180^\circ$,

$$\underline{E_2 - E_1 = 25''}$$

gore se umnog. Drugi način. Do istog rezultata bismo mogli doći polazeći od Keplerove jednačine,

$$E - e \sin E = M.$$

Diferenciranjem ove dobivamo

$$dE (1 - e \cos E) = dM.$$

Kako su obe vrednosti ekscentrične anomalije vrlo bliske 90° , to ako

uzmemo za E njihovu aritmetičku sredinu, iz poslednje jednačine sleduje

$$E = M = 25''.$$

175 180.

Sa već poznatim oznakama ima, prvo, Keplerovu jednačinu

$$E - e \sin E = M,$$

i, drugo, jednačinu elipse

$$1 - \frac{r}{a} = e \cos E.$$

Dignemo li obe jednačine na kvadrat i saberemo li ih imaćemo

$$(E - M)^2 + (1 - \frac{r}{a})^2 = e^2$$

Odavde dobivamo za razliku ekscentrične i srednje anomalije

$$\begin{aligned} (E - M)^2 &= e^2 - (1 - \frac{r}{a})^2, \\ &= (e + 1 - \frac{r}{a})(e - 1 + \frac{r}{a}) = 0.775 \times 0.025, \\ (E - M)^2 &= 0.019375. \end{aligned}$$

$2[E - M]$	8.28724,	}
$[E - M]$	9.14362,	
$[e]$	9.60206,	
$[\sin E]$	9.54156,	
$E =$	$20^\circ 21' 51''$,	
$E - M =$	$7 \ 58 \ 31$,	}
$M =$	$12 \ 23 \ 20$;	

$$\begin{aligned} M &= n t = 44600'', \\ \frac{1}{2} M &= t = 74^d.333, \\ t &\approx 74^d 8^h. \end{aligned}$$

Dakle, proteklo je od planetina prolaza kroz perihel do položaja na heliocentričnoj daljini 0.625 —

74 dana i 8 časova.

176 181.

Ako se drugi i viši stepeni ekscentričnosti putanje mogu zanemariti, ekscentrična anomalija se onda može predstaviti izrazom

$$E = M + e \sin M$$

U tom slučaju ćemo imati

$$\begin{aligned} \sin E &= \sin(M + e \sin M) = \sin M \cos(e \sin M) + \cos M \sin(e \sin M), \\ \cos E &= \cos(M + e \sin M) = \cos M \cos(e \sin M) - \sin M \sin(e \sin M). \end{aligned}$$

Desne strane ovih izraza možemo razviti i ako zanemarimo članove sa stepenima ekscentričnosti višim od prvoga, imaćemo

$$\begin{aligned} \sin E &= \sin M (1 + e \cos M), \\ \cos E &= \cos M - e \sin^2 M = \cos M - e + e \cos^2 M. \end{aligned}$$

Deljenjem ovih izraza nalazimo

$$\operatorname{tg} E = \frac{\sin M (1 + e \cos M)}{\cos M (1 + e \cos M) - e} = \frac{\sin M}{\cos M - e (1 + e \cos M)}$$

Razvijemo li u red drugi član u imenitelju i zanemarimo li članove sa stepenim ekscentričnosti^a višim od prvog, imaćemo

$$E = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin M}{\cos M - e} \right), \quad \text{q. e. d. III}$$

(177) (182). Za sistem Mars - Fobos, prema tačnom obliku Keplerova zakona, imaćemo, ako sa a_s i T_s označimo: satelitovu srednju daljinu, odnosno satelitovu sideričku revoluciju

$$\frac{a_s^3}{T_s^2} = \frac{k^2}{4\pi^2} (M_\oplus + m_s),$$

a za Zemlju ćemo imati

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2}{4\pi^2} (M_\odot + M_\oplus).$$

Iz ove dve jednačine dobivamo

$$\frac{a_s^3 T^2}{a^3 T_s^2} = \frac{M_\oplus + m_s}{M_\odot + M_\oplus} = \frac{M_\oplus \left(1 + \frac{m_s}{M_\oplus}\right)}{M_\odot \left(1 + \frac{M_\oplus}{M_\odot}\right)}$$

Ako sad zanemarimo, prvo, satelitovu (m_s) u odnosu prema Marsovoj (M_\oplus), što smemo učiniti, a, zatim, Zemljinu (M_\oplus) u odnosu prema Sunčevoj masi, M_\odot što isto tako možemo sebi dozvoliti, za traženu Marsovu masu dobivamo

$$M_\oplus = \frac{a_s^3 T^2}{a^3 T_s^2} M_\odot,$$

ili, u jedinicama Sunčeve mase, kako se i izražavaju mase velikih planeta,

$$M_\oplus = \left(\frac{a_s}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_s}\right)^2.$$

Izrazimo li a_s u astr. jed. i T_s u sid. godinama:

$$a_s = 0.000873174 \text{ a.j.}, \quad T_s = 0.0000062725 \text{ s.g.}$$

imaćemo za Marsovu masu

$$[a_s] = 5.79745 - 10,$$

$$3[a_s] = 17.39235 - 30,$$

$$[T_s] = 6.94106 - 10,$$

$$2[T_s] = 13.88212 - 20,$$

$$[M_\oplus] = 3.51023 - 10,$$

$$\underline{M_\oplus} = 0.000003238;$$

tačna je vrednost

$$M_{\oplus} = 0.000\ 000\ 3233 = 3.233 \times 10^{-7}$$

178

178 **183**. Neka deo elipse na sl. 104 predstavlja planetinu heliocentričnu putanju; P planetin položaj u izvesnom trenutku, definisan radijem vektorom $\underline{SP} = \underline{r}$ i pravom anomalijom \underline{v} . Tangenta \underline{PT} u tom položaju predstavlja pravac planetina kretanja u tom trenutku. Označimo ugao tangente, dakle prave \underline{QT} , sa pozitivnim delom apscisne ose sa α . Pravac upravnan na radijuvektoru u položaju P predstavljen je na slici sa \underline{PU} . Označimo sa ψ ugao između \underline{PT} i \underline{PU} . Onda je, kako sa slike vidimo,

$$\alpha = 90^\circ - \psi + \nu, \quad \text{to jest} \quad \psi = 90^\circ - (\alpha - \nu).$$

Tako da će biti

sl. 104

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{ctg}(\alpha - \nu) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha - \nu)} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \nu}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \nu}.$$

Poznato je, međjutim, da je uglovni koeficijent tangente, u tački $P(x, y)$, na elipsi sa poluosama a i b , dat izrazom

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

S druge strane imamo, kao što znamo,

$$\begin{aligned} x &= a \cos E, & r \sin \nu &= a \cos \varphi \sin E, \\ y &= b \sin E = a \cos \varphi \sin E, & r \cos \nu &= a(\cos E - \sin \varphi). \end{aligned}$$

Tako da dobivamo

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{a^2 \cos^2 \varphi}{a^2} \cdot \frac{a \cos E}{a \cos \varphi \sin E} = -\cos \varphi \operatorname{ctg} E; \\ \operatorname{tg} \nu &= \cos \varphi \sin E (\cos E - \sin \varphi)^{-1}. \end{aligned}$$

Prema tome će biti

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \frac{1 - \cos \varphi \operatorname{ctg} E \cos \varphi \sin E (\cos E - \sin \varphi)^{-1}}{-\cos \varphi \operatorname{ctg} E + \cos \varphi \sin E (\cos E - \sin \varphi)^{-1}}, \\ &= \frac{\sin E (\cos E - \sin \varphi) - \cos^2 \varphi \sin E \cos E}{-\cos \varphi \cos^2 E + \sin \varphi \cos \varphi \cos E + \cos \varphi \sin^2 E}, \\ &= \frac{\sin E \cos E - \sin E \sin \varphi - \sin E \cos E + \sin^2 \varphi \sin E \cos E}{-\cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \cos E}, \\ &= \frac{-\sin \varphi \sin E (1 - \sin \varphi \cos E)}{-\cos \varphi (1 - \sin \varphi \cos E)} = \operatorname{tg} \varphi \sin E. \end{aligned}$$

Našli smo, dakle, za traženi ugao izraz

$$\psi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi \sin E).$$

I tako vidimo da se ugao između pravca tangente na putanji i pravca upravnog na radijuektoru planete menja između granica $(-\varphi$ i $+\varphi)$.

179 **184.** Neka se na sl. 105 elipsa $\pi P B$ predstavlja planetinu heliocentričnu putanju, P jedna njen položaj, određen pravom anomalijom v . Neka planetinu putanjsku brzinu, u tom položaju, predstavlja vektor $PQ = V$. Radijalna i transverzalna komponente te brzine predstavljene su vektorima $PU = V_r$ i $PW = V_v$. Komponenta normalna na apsidnoj liniji predstavljena je vektorom $PK = V_n$. Zadatak traži da se nađu izrazi za komponente $PK = V_n$ i $PL = V_l$.

Ako primetimo da je ugao $\angle PK = 90^\circ$, sa slike vidimo da je

$$PK = PU \operatorname{cosec} \nu \quad \text{i} \quad PU = PW - LW = PW - UX,$$

odnosno

$$V_n = V_r \operatorname{cosec} \nu \quad \text{i} \quad V_l = V_v - V_r \operatorname{ctg} \nu.$$

Komponente V_r i V_v možemo izraziti pomoću poznatih karakteristika putanje. Imamo

$$V_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{e}{\rho} r^2 \sin \nu \cdot \frac{C}{r^2} = C \frac{e}{\rho} \sin \nu;$$

$$V_v = r \dot{\nu} = \frac{r^2 \dot{\nu}}{r} = \frac{C}{r}.$$

Ca. 105

Ako ove izraze unesemo u izraze za tražene komponente, nalazimo

$$V_n = C \frac{e}{\rho} \sin \nu \operatorname{cosec} \nu = C \frac{e}{\rho},$$

$$V_l = \frac{C}{r} - C \frac{e}{\rho} \sin \nu \operatorname{ctg} \nu = C \left(\frac{1 + e \cos \nu - e \cos \nu}{\rho} \right) = C \frac{1}{\rho}, \quad \text{q. e. d.}$$

180

185.

Prema drugom Keplerovu zakonu je

$$r^2 \dot{\nu} = C = \frac{2abk}{\gamma} = abn.$$

Prema zadatku treba da bude

$$\dot{\nu} = n.$$

U tom slučaju, iz gornje veze se dobiva

$$r^2 = ak, \quad \text{to jest} \quad r = (ak)^{\frac{1}{2}},$$

drugim rečima, u trenutku i položaju kad je heliocentrična uglovna brzina Zemljina jednaka njenoj srednjoj uglovnoj brzini, radijevektor je srednja geometrijska proporcijala između velike i male popuose njene godišnje putanje.

Da bismo odredili datume kad Zemlja u te položaje doapeva, određimo, prvo, ekscentrične anomalije koje odgovaraju nadjenoj vrednosti radija vektora, i to iz jednačine

$$r = a(1 - e \cos E) = (ab)^{\frac{1}{2}} = [a^2(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} = a(1 - e^2)^{\frac{1}{4}}$$

Odatle nalazimo

$$\cos E = \frac{1}{e} \left[1 - (1 - e^2)^{\frac{1}{4}} \right]$$

Sa gornjom vrednošću za ekscentričnost Zemljine putanje nalazimo:

prvo, $e^2 = 0.000279$, zatim $1 - e^2 = 0.999721$;

pa zatim

$[1 - e^2]$ 9.999 8784,	$1 - \eta$ = 0.000 0700,
$\frac{1}{4}[1 - e^2]$ 9.999 9696,	$[1 - \eta]$ 5.845 0980 -10,
$\eta = (1 - e^2)^{\frac{1}{4}} = 0.999 9300$;	$[e]$ 8.222 7165,
	$[\cos E]$ 7.622 3815,
	$\cos E_i = 0.004 1916$.

Tako nalazimo za ekscentričnu anomaliju:

$E = \pm 89^\circ 45' 35''$

Datume kojima odgovaraju ove vrednosti ekscentričnih anomalija naći ćemo, ako znamo vrednosti srednjih anomalija koje im odgovaraju. A ove ćemo dobiti iz Keplerove jednačine

$$M = E - e \sin E.$$

$[e]$ 8.222 7165,	$E = 89^\circ 45' 35''$,
$[e'']$ 5.314 4251,	$e \sin E = \underline{\quad 57 \ 25 \quad}$,
$[e''']$ 3.537 1416,	$M = 88.48 \ 10$,
$[\sin E]$ 9.999 9962,	$M^\circ = 88^\circ 80 \ 278$.
$[e \sin E]$ 3.537 1378,	
$e \sin E = 3444''.6$;	

Kako se ove anomalije računaju od trenutka prolaza planete, dakle i Zemlje, kroz perihel, to ćemo deljenjem srednje anomalije srednjom dnevnom uglovnom brzinom (n°) dobiti broj dana proteklih

od Zemljina prolaza kroz perihel do trenutka kad je dospela u položaj
određen vrednošću radija vektora $r = (a^h)^{\frac{1}{2}}$. Za protekli broj dana na-
lazimo $\tau = 90.10$ dana.

Kako Zemlja prolazi kroz svoj perihel 3. januara, kroz položaj
koji se traži prolaziće $\tau = 90.10$ dana posle, odn. toliko dana pre
3. januara.

Iz G.n.n. vidimo da 93-ćem danu u godini odgovara 4. april; a
90-tom danu pre 3. januara odgovara 6. oktobar.

181 186. Ako u izraz za III Keplerov zakon,

$$a_1^3 : a_2^3 = T_1^2 : T_2^2,$$

unesemo, mesto sideričkih revolucija, srednja siderička dnevna kreta-
nja,

$$\frac{2\pi}{T_1} = n_1 \quad ; \quad \frac{2\pi}{T_2} = n_2,$$

on dobiva poznati oblik

$$a_1^3 n_1^2 = a_2^3 n_2^2 = \dots = K, \quad (1)$$

gde je sa K označena konstanta, jedinstvena za ceo sistem tela.

S druge strane, za površinsku brzinu planete smo našli izraz

$$C = \frac{2ab\kappa}{T} = \frac{2\pi}{T} a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} = n a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}. \quad (2)$$

Svaka planeta je, dakle, okarakterisana svojom površinskom brzinom,
svojom vrednošću ove konstante.

Uporedimo li izraze (1) i (2), nalazimo

$$C = \sqrt{Kp}. \quad (3)$$

Za dve planete, čije su površinske brzine C_1 i C_2 , a parametri putanja
 p_1 i p_2 imaćemo, prema tome,

$$C_1 = \sqrt{Kp_1} \quad ; \quad C_2 = \sqrt{Kp_2}.$$

Eliminisanjem konstante K iz ova dva izraza, dobivamo

$$C_1 : C_2 = \sqrt{p_1} : \sqrt{p_2}, \quad (4)$$

da se površinske brzine planeta odnose kao kvadratni koreni parametra
njihovih heliocentričnih putanja. Iz poslednjeg izraza možemo, opet,
lako doći do izraza za III Keplerov zakon.

raz
 Iz (4) može, prema tome, zameniti III Keplerov zakon kod onih te-
 la koja se ne kreću po zatvorenim putanjama i kod kojih ne može biti go-
 vora o sideričkim revolucijama; drugim rečima, kod kometa, koje se kreću
 paraboličkim ili hiperboličkim putanjama.

182 187
 Ekvacijom centra nazvana je razlika prave i srednje anomalije.
 Ako je označimo sa \mathcal{C}_e ,

$$\mathcal{C}_e = v - M.$$

Potreban uslov za ekstremum te funkcije je

$$\dot{\mathcal{C}}_e = 0, \text{ to jest } \dot{v} = \dot{M}.$$

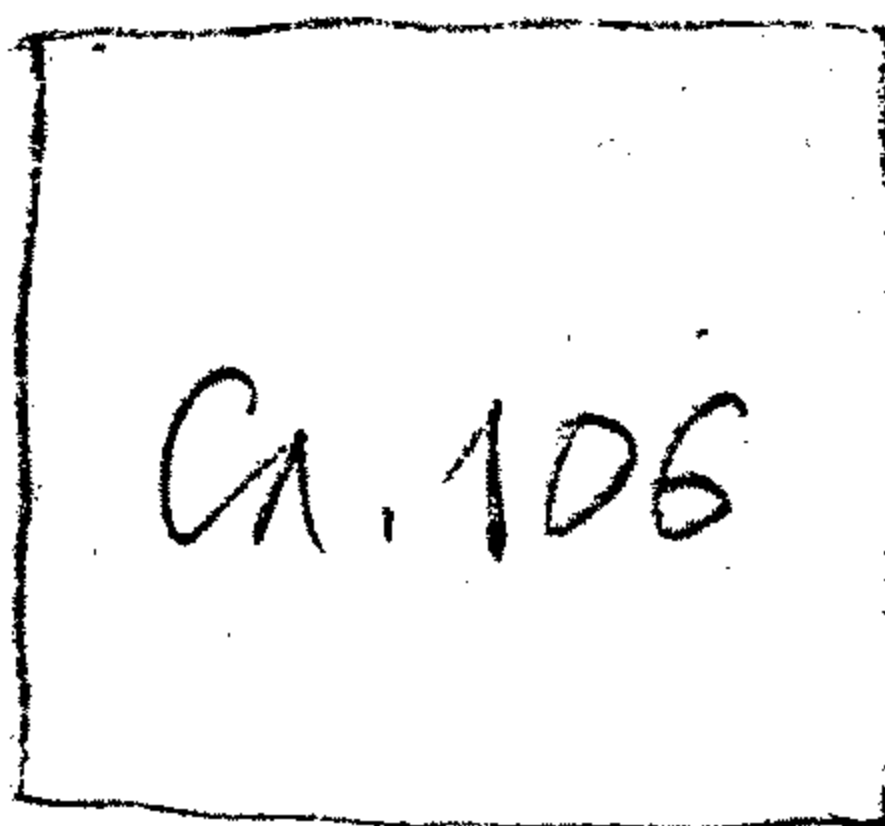
Ako sad izraz za Keplerov zakon napišemo u obliku

$$r^3 \dot{v} = n a^2 (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} = n a b,$$

i primetimo da je

$$\dot{M} = n,$$

dobivamo $r^3 = a b$, to jest $r = \pm (a b)^{\frac{1}{3}}$.



Ekvacija centra planete dostiže, prema tome, ekstremum u položaju
 određenom radijvektorom jednakim geometrijskoj sredini iz velike i
 male popuose planetine putanje.

Konstrukcija te vrednosti radijvektora je dobro poznata iz Ele-
 mentarne geometrije. Nad velikom osom, (sl. 106), kao prečnikom, povucimo osnovni
 krug $\mathcal{N}KA$. Iz \mathcal{N} odmerimo na velikoj osi, duž $\mathcal{N}J = OB$ i povucimo normalu
 JK na apsidnoj liniji. Kateta $\mathcal{N}K$ predstavlja, kao što znamo, geometrij-
 sku sredinu između velike i male poluose putanje.

Ako iz S odmerimo na putanji tu veličinu radijvektora, nalazimo
 dva položaja, C_1 i C_2 , koji odgovaraju ekstremima ekvacije centra.

Za veličinu tog radijvektora imamo

$$r = [a^2(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}]^{\frac{1}{3}} = a(1 - e^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Za tražene anomalije koje tim položajima odgovaraju, nalazimo:

pravu — iz jednačine

$$a(1 - e^2)^{\frac{1}{3}} = a(1 - e^2)(1 + e \cos v)^{-1},$$

a odatle

$$\cos v = \frac{1}{e} \left[(1 - e^2)^{\frac{2}{3}} - 1 \right];$$

gore
 se koristi

gore
ve mase

ekscentričnu — iz jednačine

$$a(1-e^2)^{\frac{1}{2}} = a(1-e\cos E),$$

a odatle (v. Rešenje 185)

$$\cos E = \frac{1}{e} \left[1 - (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \right];$$

gore
ve mase

srednju — iz Keplerove jednačine,

$$M = E - e \sin E,$$

pošto u istu, na njenoj desnoj strani, unesemo nadjene vrednosti za ekscentričnu anomaliju.

Zadatkom je data vrednost ugla ekscentričnosti planetoida 4 Vesta,

$\varphi = 5^{\circ}.099 = 5^{\circ} 5' 56''$. Sa tom vrednošću nalazimo:

$$\begin{aligned} e &= \sin \varphi = 0.08887, \\ [e] &8.94878, \\ 2[e] &7.89756, \\ e^2 &= 0.00790, \\ 1-e^2 &= 0.99210, \\ [1-e^2] &9.99656, \\ \frac{1}{4}[1-e^2] &9.99914, \\ \frac{3}{4}[1-e^2] &9.99742, \\ (1-e^2)^{\frac{1}{4}} &= 0.99802, \\ (1-e^2)^{\frac{3}{4}} &= 0.99408; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [e \cos E] &7.47422, \\ [e] &8.94878, \\ [e \cos v] &7.77232n, \\ [\cos E] &8.52544, \\ [\cos v] &8.82354n, \\ E &= 88^{\circ} 4' 44''.0, \\ v &= 93^{\circ} 49' 10.0, \\ [\sin E] &9.99976, \\ [e''] &4.26321, \\ [e \sin E] &4.26297, \\ (e \sin E)' &= 18321.7, \\ e \sin E &= 5^{\circ} 5' 21''.7, \\ M &= 82^{\circ} 59' 22''.3. \end{aligned}$$

Za ekstremume ekvacije centra nalazimo, prema tome, $\phi_2 = \pm 10^{\circ} 49' 48''.0$;

gornji znak odgovara položaju C_1 , donji položaju C_2 , čiji radijivektori iznose

$$r_{1,2} = 2.3571.$$

183/188

Potreban uslov za traženi ekstremum je

$$\frac{d(r-E)}{dt} = 0, \quad \text{ili} \quad \dot{v} = \dot{E}.$$

Iz II Keplerova zakona sleduje

$$\dot{v} = n a^{3/2} r^{-2};$$

iz Keplerove jednačine dobivamo

$$\dot{E} (1 - e \cos E) = n,$$

to jest

$$\dot{E} = n a r^{-1}.$$

I tako nam uslov za ekstremum daje $r = k$. Drugim rečima, razlika prave i ekscentrične anomalije dostiže ekstremum u položajima određenim vrednostima radijavektora jednaka maloj polusi planetine putanje.

Za tražene anomalije koje tim položajima odgovaraju, nalazimo:

pravu — iz jednačine

$$a(1-e^2)^{\frac{1}{2}} = a(1-e^2)(1+e\cos v)^{-1},$$

nalazimo

$$\cos v = \frac{1}{e} \left[(1-e^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right];$$

ekscentričnu — iz jednačine

$$a(1-e^2)^{\frac{1}{2}} = a(1-e\cos E),$$

nalazimo

$$\cos E = \frac{1}{e} \left[1 - (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \right];$$

što znači da je

$$\cos v = -\cos E;$$

srednju — iz Keplerove jednačine,

$$M = E - e\sin E,$$

pošto u istu, na njenoj desnoj strani, unesemo nadjene vrednosti za ekscentričnu anomaliju.

Zadatkom je data vrednost ugla ekscentričnosti planetoida 4 Vesta,

$\varphi = 5^{\circ}.099 = 5^{\circ} 5' 56''$. Sa tom vrednošću nalazimo:

$$\begin{aligned} e &= \sin \varphi = 0.08837, \\ [e] &8.94878, \\ 2[e] &7.89756, \\ e^2 &= 0.00790, \\ 1-e^2 &= 0.99210, \\ [1-e^2] &9.99656, \\ \frac{1}{2}[1-e^2] &9.99828, \\ (1-e^2)^{\frac{1}{2}} &= 0.99605, \\ (1-e^2)^{\frac{1}{2}} - 1 &= -0.00395; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [e\cos v] &7.59660, \\ [e] &8.94878, \\ [\cos v] &8.64782, \\ v &= 92^{\circ} 32' 52''.8, \\ E &= 87^{\circ} 27' 7.2, \\ [\sin E] &9.99957, \\ [e''] &4.26321, \\ [e\sin E] &4.26278, \\ (e\sin E)'' &18313''.8, \\ e\sin E &= 5^{\circ} 5' 13''.8, \end{aligned}$$

$$M = 82^{\circ} 21' 53''.4.$$

Za ekstremum razlike prave i ekscentrične anomalije nalazimo, prema tome, $\delta_v = \pm 5^{\circ} 5' 45''.6$. Oni odgovaraju položajima na planetinoj putanji, čiji radijavektor iznose $r = b = 2.3523$.

184 189. Produženi radiji OQ i SP (v. sl. 107), što odgovaraju ekscentričnoj anomaliji E i pravoj anomaliji v, određuju svojim presekom tačku G. Zadatkom se traži da se odredi geometrijsko mesto tih tačaka preseka.

Sa slike vidimo da iz trougla OSG imamo, ako veliku poluosu elipse označimo sa a , a duž SG sa ρ

$$\frac{a \sin \varphi}{\rho} = \sin(v - E) \operatorname{cosec} E = \sin v \operatorname{ctg} E - \cos v.$$

Unesemo li ovamo poznate veličine,

$$\sin E = \frac{r}{a} \operatorname{sec} \varphi \sin v, \quad \cos E = \left(1 - \frac{r}{a}\right) \operatorname{cosec} \varphi,$$

imaćemo

$$\frac{a \sin \varphi}{\rho} = \sin v \left(1 - \frac{r}{a}\right) \operatorname{cosec} \varphi \frac{a}{r} \operatorname{cosec} v \cos \varphi - \cos v,$$

to jest, pošto skratimo i uredimo,

$$\frac{a \sin \varphi}{\rho} = \frac{a}{r} \operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi - \cos v.$$

Medjutim je

$$\frac{a}{r} = \frac{1 + \sin \varphi \cos v}{\cos^2 \varphi},$$

Ca. 107

i, ako smenimo, imaćemo

$$\begin{aligned} \frac{a \sin \varphi}{\rho} &= \frac{1 - \cos^2 \varphi + \sin \varphi \cos v (1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi \cos \varphi}, \\ &= [\sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \cos v] \operatorname{sec} \varphi. \end{aligned}$$

Ostavde dobivamo

$$\rho = \frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \cos v}.$$

Sažetije može se ovaj izraz napisati

$$\rho = \frac{a \cos \varphi}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \cos v}.$$

Vidimo, ujedno — ako primetimo da je ugao φ uvek manji od 90° (dok se P nalazi na elipsi), dakle $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ manje od 1 — da je geometrijsko mesto tačaka G opet elipsa, sa velikom poluosom a .
(istom žižani)

185 190. Prema zadatku, prvi satelit (Eksplorer VI) prolazio je u perigeju na visini od 244 km nad Zemljinom površinom, znači na 6622 km od Zemljina središta (jer uzimamo da je Zemlja sfera). Njegov perigejski radijevvektor iznosio je, dakle,

$$a(1 - e) = 6622 \text{ km},$$

a apogejski je iznosio, prema zadatku,

$$a(1 + e) = 48202 \text{ km}.$$

Iz ovih dveju jednačina nalazimo:

$$\left. \begin{array}{l} \text{za veliku poluosu} \\ \text{za ekscentričnost} \end{array} \right\} \text{satelitove putanje: } \left\{ \begin{array}{l} a = 27\,824\text{ km} = 2.7824 \times 10^9 \text{ cm}, \\ e = 0.7584. \end{array} \right.$$

Trajanje satelitova obilaska (T) oko Zemlje odredićemo pomoću trećeg Keplerova zakona,

$$\frac{a^3}{T^2} = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 (M + m),$$

gde je sa M označena Zemljina, a sa m satelitova masa. No ovu možemo zanemariti u odnosu prema Zemljinoj, što znači da ćemo za gornji izraz imati

$$\frac{a^3}{T^2} = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 M.$$

Iz pregleda konstanata (v. str.) uzimamo

$$\begin{aligned} k^2 &= 6.67 \times 10^{-8}, & i & & M &= 5.978 \times 10^{27} \text{ g}, \\ 4\pi^2 &= 39.478\,416, & & & \frac{k^2}{4\pi^2} M &= 1.010\,002 \times 10^{19}. \end{aligned}$$

Prema tome će biti

$$k^2 M = 6.67 \times 5.978 \times 10^{19} = 39.873\,260 \times 10^{19}.$$

Kako je

$$a^3 = 21.540\,644 \times 10^{27},$$

dobivamo

$$T^2 = \frac{2.154\,0644 \times 10^{28}}{1.010\,0015 \times 10^{19}} = 2.132\,7338 \times 10^9,$$

to jest za trajanje jednog satelitova obilaska oko Zemlje nalazimo

$$T = 46\,166^s = 12^h\,48^m\,36^s.$$

Drugi satelit, prema zadatku, imao je istu ^{ge/}periapsku daljinu; znači, ako sa a označimo veliku poluosu, a sa e ekscentričnost, njegove geocentrične putanje, biće

$$a(1-e) = 66\,22 \text{ km},$$

a za apegejsku daljinu imamo, prema zadatku

$$a(1+e) = 384\,400 \text{ km}.$$

Iz ovih jednačina nalazimo

$$\underline{a} = 195511 \text{ km}, \quad \underline{a} = 1.955\,110 \times 10^{10} \text{ cm.} \quad i \quad e = 0.9917.$$

$$\text{Kako je} \quad a^3 = 7.473\,320 \times 10^3, \quad a \frac{k^2}{4\pi^2} M = 1.010\,0015 \times 10^{19},$$

nalazimo

$$T^2 = 7.399\,316 \times 10^{11}, \quad \text{to jest} \quad \underline{T} = 860\,193^s = 23^d\,56^h\,33^m \\ = 9^d\,22^h\,56^m\,33^s.$$

Vidimo, dakle, da je trajanje obilaska drugog satelita oko devetnaest puta duže od trajanja prvog.

~~186 191. Pokazati da se anti rekursivna anomalija može proporcionalno vremenu ako se zanemare drugi i više stepeni ekscentričnosti planetskog putanja.~~

U Pregledu obrazaca (v. str.) nalazimo obrazac

$$\cos w = (\cos E + e)(1 + e \cos E)^{-1}$$

Ako obe strane te jednačine dignemo na kvadrat i oduzmemo od 1, dobivamo, pošto svedemo,

$$\sin^2 w = (1 - e^2) \sin^2 E (1 + e \cos E)^{-2}$$

to jest

$$\sin w = (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \sin E (1 + e \cos E)^{-1}$$

Diferenciramo li po E, imaćemo

$$\cos w \frac{dw}{dE} = \left[(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \cos E (1 + e \cos E) + e (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \sin^2 E \right] (1 + e \cos E)^{-2}$$

Smenom vrednosti $\cos w$ na levoj i potrebnim svodjenjem na desnoj strani odavde dobivamo

$$(\cos E + e)(1 + e \cos E)^{-1} \frac{dw}{dE} = (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} (\cos E + e)(1 + e \cos E)^{-2}$$

odnosno

$$\frac{dw}{dE} = (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} (1 + e \cos E)^{-1}$$

A ako primetimo da je

$$dE = dM (1 - e \cos E)^{-1}$$

dobivamo da je

$$\frac{dw}{dM} = (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} (1 - e^2 \cos^2 E)^{-1}$$

Razvijemo li oba činioca na desnoj strani, imaćemo

$$\frac{dw}{dM} = \left(1 - \frac{1}{2} e^2 - \dots \right) \left(1 + e^2 \cos^2 E + \dots \right) dM$$

Izvršimo li množenje na desnoj strani i zanemarimo li druge i više stepene ekscentričnosti, nalazimo

$$dw = dM, \text{ q. e. d.}$$

~~187 192.~~ Neka na sl. 108 prikazana kriva, u pravouglom koordinatnom sistemu OXY, predstavlja sinusoidu $y = \sin x$. Kroz tačku na apscisi $x = OJ = M$ — označavajući sa M srednju anomaliju planete — povucimo pravu

pod uglom sa pozitivnim delom apscisne ose $\chi = \text{arcctg } e$, odnosno $\text{ctg } \chi = e$, odnosno $\text{tg } \chi = \frac{1}{e}$. Ova prava seče sinusoidu u tački, recimo, L, kojoj — prema zadatku — odgovara apscisa $OK = E$, gde E označava ekscentričnu anomaliju.

Ako primetimo da iz pravouglog trougla JKL sleduje

$$KL = JK \text{ tg } \chi,$$

to jest, ako izvršimo zamenu,

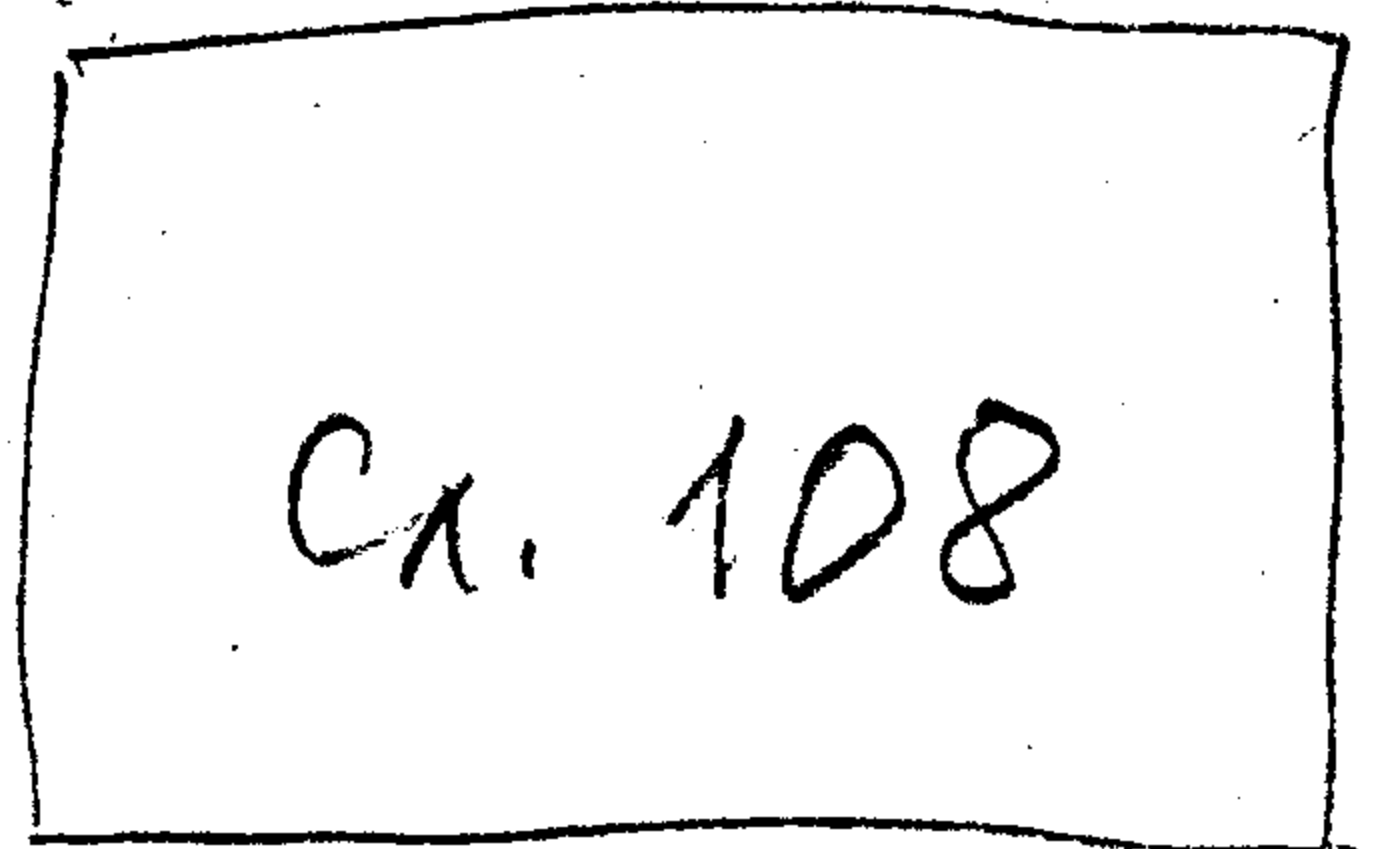
$$\sin E = (OK - OJ) \text{ tg } \chi,$$

odnosno

$$\sin E = (E - M) \frac{1}{e},$$

to jest

$$M = E - e \sin E.$$



Tako vidimo da se postavljeni zadatak svodio, u stvari, na proveravanje tačnosti jedne od poznatih grafičkih metoda za rešavanje Keplerove jednačine. Metoda se, prema tome, svodi na ovaj postupak.

Da bi se grafički odredila ekscentrična anomalija (E), kad su date srednja anomalija (M) i ekscentričnost (e) putanje, konstruiše se, u pravougloj koordinatnoj sistemu OXY, jednom za svagda, sinusoida (v. sl. 108). Zatim se na apscisnoj osi — koja treba da je izdeljena u stepene ($0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots, 180^\circ$) — nanese data vrednost srednje anomalije $M = OJ$. Kroz tako dobivenu tačku, J, pravom (ili samo prislonjenim lenjirom) pod uglom χ sa apscisnom osom, odredi se tačka, L, njena preseka sa sinusoidom i, iz te tačke preseka, spusti ordinata LK. Apscisa tačke preseka L, dakle OK, predstavlja traženu vrednost ekscentrične anomalije, E, koja odgovara datim vrednostima M i e.

Na sl. 108 je ovom metodom odredjena vrednost ekscentrične anomalije za $M = 70^\circ$ i $e = 0.3$. Vidimo da je grafički nadjena vrednost E nešto veća od 87° ; računom se dobiva $E = 87^\circ 10'$.

Između sinusoida i Y-ose vidimo na slici pravougli trougao OAL sa izdeljenom osnovom (A, l). Ovaj trougao služi da omogući konstrukciju ugla $\chi = \text{arctg } e$. Ako primetimo da je ugao $\angle NOA = 90^\circ - \chi$, vidimo da je $AN = e = \text{ctg } \chi$. Znači, prema tome, pošto na osnovu Al nanesimo duž $AN = e$, ostaje samo da iz tačke J pravom (ili lenjirom) paralelnom sa ON (na slici $JL \parallel ON$) odredimo tačku njena preseka sa sinusoidom.

VI# Сунчево приближавање кретање $\int g \frac{1}{r^2} dr$
—(4a)
—(2a)

188) 193. На сл. 109 и 110, представљени су са P_n и P_s небески полози, са Q_n, Q_s небески екватор; са γ аронејна еквипројекција планка; са Π_n и Π_s еклиптикални полози. Сврелицама су означени смерови у којима се, у сваком од обих координатних система, рачунају координате планка. Према томе ћемо имати —

сл. 109

сл. 110

екваторске координате еклиптикалног положа:

северност

јужност

$\alpha_n = 270^\circ = 18^h, \delta_n = 90^\circ - \epsilon;$

$\alpha_s = 90^\circ = 6^h, \delta_s = -(90^\circ - \epsilon);$

еклиптикалне координате небеских положа:

северност

јужност

$\lambda_n = 90^\circ, \beta_n = 90^\circ - \epsilon;$

$\lambda_s = 270^\circ, \beta_s = -(90^\circ - \epsilon).$

2
1/2

189) 194. Једна планка на небеској сфери које имају деклинације једнаке латитудама, а рекласијеције лонгитудама јесу еквипројекције планке: аронејна, рече су координате $\delta = \beta = 0^\circ, \alpha = \lambda = 0^\circ$, а јесева, рече су координате $\delta = \beta = 0^\circ, \alpha = \lambda = 180^\circ$.

190) 195. На сл. 111 представљен је случај планке (Σ) на небеској сфери, која је рекласијеција, $\gamma A = \alpha$, једнака великој латитуду, $L\Sigma = \beta$.

Ако саопимо, узком великом кругу, планке γ и Σ и применимо да смо тако добили два правоугла сферна троугла, $\gamma A \Sigma$ и $\gamma L \Sigma$, које карактеришу: заједничка хипотенуза, γL , и, према задатку, једнаке катете, $\gamma A = L\Sigma$. Како од координата планке Σ које једна грчтој одговарају — деклинација и латитуда, по апсолутној вредности, не преминују $\frac{1}{2}\epsilon$, а рекласијеција и лонгитуда чтек истаи квадранту припадају, морају у нашим правоуглим сферним троуглима и грчте бити катете, $A\Sigma$ и $\gamma\Sigma$, дисти међу собом једнаке.

Ова слеђује и на грчтој обрасца Тајлорне тријанг одражава за прелаз са координате једнот на координате грчтој од поменутих система,
 $\cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda.$

сл. 111

Ако у овој обради узесемо у обзир из задатка, да је $\alpha = \beta$, годинано, пошто скратимо, уз већ унети параметри, да је година, у поштом случају, функција марке, Z , једнака већој логистици.

191 (196). Сунчева рекласација, у постојаној, већ се унети, али се може узети да се просечно убрзава, приближно, по један сат за 24 часа; односно, пошто се рекласација изражавају у временским јединицама, може се узети да се сунчева рекласација убрзава, приближно, по ретици мињале грегоријанске. А разлика се од просечне екваторске марке, или пак зване r -марке, у директној енергији, по јесте од енергетика пропада средина сунчева приближно гуска кроз екваторски раван, који пада око 21 марта.

На исти начин разлика се, само у четворним јединицама, и сунчеве логистици.

Према поштом, за изражен датум, приближене вредности сунчеве рекласације дати:

11 марта : $24^h - (10 \times 4^m) = 23^h 20^m [23^h 23^m]$; или $360^\circ - 10 \times 1^\circ = 350^\circ$;

2 августа : $0^h + (134 \times 4^m) = 8^h 56^m [8^h 47^m]$; или 134° ;

19 јануара : $24^h - (61 \times 4^m) = 19^h 56^m [20^h 2^m]$; или $360^\circ - 61^\circ = 299^\circ$.

У задатку су дате такве сунчеве рекласације за сваки датум.

192 (197). Према задатку, сунце 31 марта пролази кроз посматрачеву земљу. Знају да је сунчева деклинација, у поштом случају, једнака посматрачевој географској ширини. У Тадишићу каже да је 31 марта, у поштом, сунчева деклинација износила (приближно) $+4^\circ$. Према поштом, посматрачева географска ширина је $+4^\circ$.

193 (198) ¹¹² Сл. Представља пројекцију небеске сфере на меридијалску раван посматрала у Београду. На њој су представљени са :

Z - посматрачев (0) земља;

P_n и P_s - северни и јужни небески пол;

H_n и H_s - ^{пројекција} посматрачев хоризонт;

$H_s Z P_n H_n$ - посматрачева видљива половина небеске сфере;

E_1, E_2 - небески екватор;

$\widehat{H_n O P_n} = \widehat{E_1 O Z} = \varphi = +44^\circ 48'$ - географска ширина места (Београда);

Сл. 112

$S_n E_s$ - екваторска;

$\widehat{E_1 O S_n} = \varepsilon = 23^\circ 27'$ - нагиб екваторске према екватору;

$S_n E_n$ - најсеверније } недељна паралела коју

$S_s E_s$ - најјужније } Сунце прикључао саише.

Најг Сунце, у пољу тогине, долазе до најсеверније паралела - а го-
саква око 22 јуна - већва деклинација износи $\widehat{E_1 O S_n} = \delta_n = \varepsilon = 23^\circ 27'$. До најјуж-
није паралела долазе око 22 децембра, и тада већва деклинација износи
 $\widehat{E_1 O S_s} = \delta_s = -\varepsilon = -23^\circ 27'$.

Сунце екваторске висине, дакле меридијанске, тих датума, изнесе, према
саише, у Београду:

22 јуна: $\widehat{H_s O S_n} = \widehat{H_s O E_1} + \widehat{E_1 O S_n} = 90^\circ - \varphi + \varepsilon = 45^\circ 12' + 23^\circ 27' = 68^\circ 39'$;

22 децембра: $\widehat{H_s O S_s} = \widehat{H_s O E_1} - \widehat{S_s O E_1} = 90^\circ - \varphi - \varepsilon = 45^\circ 12' - 23^\circ 27' = 21^\circ 45'$.

Екваторске вредности земљанских датума које, тих датума, долазе Сунце
у Београду изнесе:

најмања $z_n = \varphi - \varepsilon$,

највећа $z_s = \varphi + \varepsilon$.

194 199. Сл. 113 представља пројекцију недељне сфере на посматрачеву мериди-
јанску равна. На којој су представљени са:

$P_n P_s$ - свитска осу;

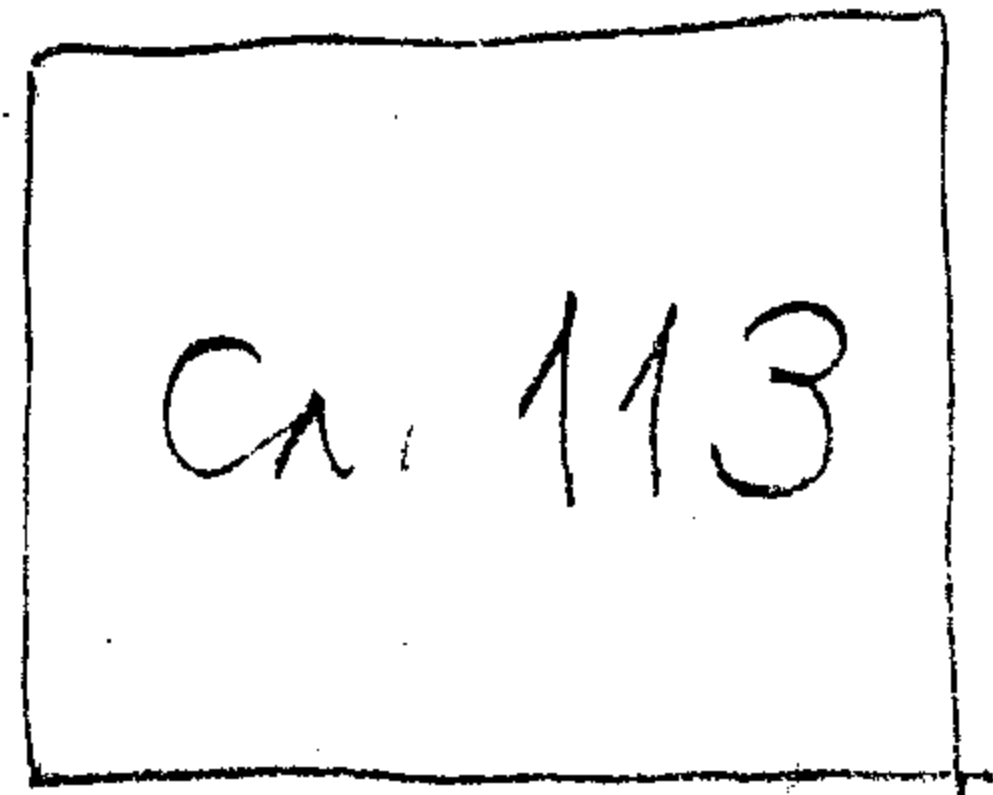
$E_1 E_2$ - недељни екватор;

$E_n E_s$ - екваторске;

OZ - посматрачева вертикала;

Z - посматрачев земљи, који се, према задатку налази 20° јужно од еква-
тора;

$H_n H_s$ - посматрачев хоризонт, чија се северна тачка (H_n) налази од екватора
на $\widehat{H_n O E_1} = 90^\circ - \widehat{E_1 O Z} = 70^\circ$.



2
194

Сунце, према задатку, заузима положај одређен деклинацијом $\odot = +18^\circ$. На
слици је Сунце представљено, у том положају, тачком S . Местом S_1, S_2 пред-
стављен је, према саише, паралел коју Сунце поља дана саише, у пољу свог прикључа
дељног кретања. Тачка S_1 представља Сунце положај у северном већва арона
кроз посматрачев меридијан. У том северном и положају већва висина је

$$h = \widehat{H_n O E_1} - \widehat{S_1 O E_1} = 70^\circ - 18^\circ = 52^\circ.$$

Датум арона на тој висини могу бити: или 12 мај или 2 август.

195 200. За одређивање екваторских координата као су дана нагиб ек-

ματαικε u εκβασιορεκε κοσμογικαση μαρκε κα μεδεκοj σφερη υμανο Γαγκοβy
 τρυαy οδραβαyα

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin \delta \cos \epsilon - \cos \delta \sin \epsilon \sin \alpha, \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin \delta \sin \epsilon + \cos \delta \cos \epsilon \sin \alpha, \\ \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha. \end{aligned}$$

Υποθεσει πανοηκεια βασιμια m u M, γεφμικαμα πελαυyαμα

$$\begin{aligned} m \sin M &= \sin \delta, \\ m \cos M &= \cos \delta \sin \alpha, \end{aligned}$$

σβοqu ce τορβα τρυαyα οδραβαyα κα οδμικ ποτοφαι za κοταρμικαμικη παρμyτ,

$$\begin{aligned} \sin \beta &= m \sin (M - \epsilon), \\ \cos \beta \sin \lambda &= m \cos (M - \epsilon), \\ \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha. \end{aligned}$$

Μακροσκα περμικαση κελιο σφουερικα
 ποικηy οδραβαyα
 $\lg \frac{1}{2}(\lambda - \alpha) = \lg \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}(\delta - \beta) \sec \frac{1}{2}(\lambda - \alpha)$

Ο οδyυροκ κα σαιυει παρμικαση (α"i) γαιμικ υογαμιακα, παρμικημο ce κο-
 ταρμικαμικα οq ceγαμ γεyμικαμα, u υμαημιο:

$\alpha = 5^{\circ} 13' 21''.96,$	
$= 78^{\circ} 20' 29''.4,$	
$\delta = +45 57 19.4,$	
$\epsilon = 23 27 8.3;$	
$[\sin \delta]$	9.856 6073,
$[\sin \alpha]$	9.990 9466,
$[\cos \delta]$	9.842 1211,
$[m \cos M]$	9.833 0677,
$[\lg M]$	0.023 5396,
$M = 46^{\circ} 33' 7''.2,$	
$\epsilon = 23 27 8.3$	
$M - \epsilon = 23 5 58.9,$	
$[\cos M]$	9.837 3965,
$[m]$	9.995 6712;

$[\cos \delta]$	9.842 1211,
$[\cos \alpha]$	9.305 5190,
$[\sin(M - \epsilon)]$	9.593 6539,
$[m]$	9.995 6712,
$[\cos(M - \epsilon)]$	9.963 7046,
$[\cos \beta \sin \lambda]$	9.959 3758,
$[\cos \beta \cos \lambda]$	9.147 6401,
$[\lg \lambda]$	0.811 7357,
$\lambda = 81^{\circ} 13' 49''.6,$	
$[\sin \lambda]$	9.994 8930,
$[\sin \beta]$	9.589 3251,
$[\cos \beta]$	9.964 4828,
$[\lg \beta]$	9.624 8423,
$\beta = + 22^{\circ} 51' 27''.1;$	

$\frac{1}{2} \epsilon = 11^{\circ} 43' 34''.15,$	
$\delta - \beta = 23 6 4.2,$	
$\frac{1}{2}(\delta - \beta) = 11 33 2.1,$	
$\lambda + \alpha = 159 34 19.0,$	
$\frac{1}{2}(\lambda + \alpha) = 79 47 9.5,$	
$\lambda - \alpha = 2 53 20.2,$	
$\frac{1}{2}(\lambda - \alpha) = 1 26 40.1;$	
$[\lg \frac{1}{2} \epsilon]$	9.317 1565,
$[\sin \frac{1}{2}(\lambda + \alpha)]$	9.993 0623,
$[\sec \frac{1}{2}(\lambda - \alpha)]$	0.000 1380,
$\Sigma = [\lg \frac{1}{2}(\delta - \beta)]$	9.310 3568,
$[\lg \frac{1}{2}(\delta - \beta)]$	9.310 3567.

196 201. Βρεγοστικη υβλασκη (α μακο υσπο u θαλασκη) αυταλη μεyρε jεyτακε
 cy κyλη καq πλεο υβλασκη y υσπορικηj (A = 270) μαρκε κοριζοκτια. Υοκοj μαρκε
 Συμyε υβλασκη 21 μαρτια u 23 σεπτεμδρα, πο jεσση y φαιε εκκικτοκyμjα (ραβρο-
 φρεβικα, αρουεσικε u jεσερε), καq κy jε φεκμικαyμjα jεyτακα κyλη. Jυφτικη ρουμικα,
 za Συμyε καφεμο φα ce ποτα γαιμικα (y σικηρικη σαμο αρουεσικα) θαλασκη y ραβτικη
 μεδεκοj εκβασιορα. Τρεμα πομε, κροσ κερμικηyατ κεσση Συμyε απο φαση αρουεσικη

2 1/2

на земљаској гавици $z = \varphi$. То је, уједно, и најмања вредност Сунчеве земљаске гавице коју оно кад гавице. А највеће вредности земљаске гавице, $z = 90^\circ$, (ако дејствито рефракције не узимамо у обзир), гавице у паралелима ишла и залаза. Према томе екстремне вредности Сунчевих земљаских гавица у Београду су, обич гавица : $z_0 = 44^\circ 48'$ и $z_H = 90^\circ$.

197 **202** Северни екваторски пол од северног поларног пола налази се на поларној гавици једнакој нациду екватора према северном екватору, $\epsilon = 23^\circ 27'$. У току ариџинског гавице кретања северне сфере од екватора оцијује, према северу, северни паралел гавица је једнаке $90^\circ - \epsilon = 66^\circ 33'$. Знају да северни екваторски пол може проћи кроз земљу само паралелом на Земљиној површини које су паралелне гавице паралела географске ширине $\varphi = 90^\circ - \epsilon$.

У паралелима кад се од екваторске гавице у ~~северном~~ паралелу земљу, екваторска раван се поклапа са равни постојаног хоризонта. Према томе, паралела гавице на северној сфери одговараће истим же паралелом кад постојаног паралелу хоризонта, и обрнуто. Знају дакле $h = \beta$.

За одређивање гавице координате пројекције (в.сл. ¹¹⁴ ~~теорије~~ положаја северне сфере на постојаног хоризонтски раван, а, у овом случају је то, уједно, и екваторска раван. На пројекцији су означени са:

- $Z = \Pi$ — постојаног земљу, која је, у истом мах, и од екваторске;
- P_n — северни северни пол;
- S — јуна паралел постојаног хоризонта;
- PZS — постојаног периметар;
- $E = \gamma$ — источна паралел постојаног хоризонта, која се, у овом случају, поклапа са арктичком екваторској паралели (γ);
- Z — рекретиња, на северној сфери, са координатама (λ, β) .

сл. 114

Са слике се види да је у арктичком случају:

$$\widehat{SZV} = A, \quad \widehat{rPV} = \lambda, \quad \text{по једно } A + \lambda = 270^\circ, \quad \text{дакле } A = 270^\circ - \lambda.$$

198 **203** Представимо, на сл. 115, кругом са радијусом R у S Сунчев круг са радијусом $A, A_2 = 2R$; O нека представља постојаног на Земљиној површини, на гавици од Сунца $OS = r$. Он Сунчев круг види под углом $\widehat{A_1 O A_2} = D$, које зовемо Сунчевим арктичком арктиком.

Са слике видимо да је арктички арктик OSA_2 имамо

$$SA_2 = SO \operatorname{tg} \frac{D}{2}$$

124

Сл. 115

односно, са увећаним ознакама,

$$R = r \operatorname{tg} \frac{1}{2} D.$$

Угао D изрази око пола шпелена. Знали, на десној страни обе једнакости, можемо tg заменити углом (у радијанима). Тако добићемо

$$2R = r D.$$

Означимо са D Сунчеве ариџидне аргументе, као и његова удаљења, у перигеју и апогеју : са D_p, D_a , односно r_p, r_a . Ако напишемо последицу једнакости за сваки од тих положаја, па их добитених једнакости елиминисамо R , добићемо

$$r_p D_p = r_a D_a.$$

Изразимо их оба удаљења помоћу велике полуосе и ексцентриситета Земљине хелиоцентричне путање, имаћемо

$$a(1-e) D_p = a(1+e) D_a,$$

а одавде налазимо

$$e = \frac{D_p - D_a}{D_p + D_a}.$$

204

Унесемо ми, на десној страни, вредности Сунчевих ариџидних аргумента, како су дакле у задатку, добићемо

$$e = \frac{1956 - 1892}{3848} = \frac{64}{3848} = \frac{8}{481} \approx \frac{1}{60} \text{ q.e.d.}$$

199 ~~204~~ 21 марта је датум пролаза Сунчева ариџидног чврка кроз екваторску раван : кроз ариџидну екваторску меридијану, од које се разликују рекласијације шарака на небеској сфери. Према томе, иако дата можемо рекласијацију шарака на небеској сфери разликовати од Сунчевог средног а. Иако иако дата Сунце залази у западној меридијанској хоризонталу, знали на часоном углу 6^h , што ће се око, 1^h после залаза, налазити на часоном углу 7^h . Знали да иако ариџидна, од његова пролаза кроз ариџидну меридијану, арастекло је 7^h .

(у оном случају)

А разликујемо ми тај исти угао од Сунца, то јест од ариџидне екваторске меридијане, у директном смеру (супротном смеру разликовања часоног угла), његова вредност (7^h) представљаће — рекласијацију шарака (звезде) на небеској сфери. У сваком случају иако релативна удаљења да се 21 марта, 1 час од Сунчевог залаза, звезда рекласијације $\alpha = 7^h$ налази у ариџидној меридијану. По знали да јој је азимут, у том ариџидном смеру, $A = 0$. Иако јој је, према задатку, рекласијација $\delta = +34^{\circ}48'$, а ариџидна географска ширина је $\varphi = +44^{\circ}48'$, висина звезде је, у истом ариџидном смеру, $h = 90^{\circ} - \varphi + \delta = 90^{\circ} - 44^{\circ}48' + 34^{\circ}48' = 80^{\circ}$.

200 **205.** На сл. 116 представљена је постојања r -марке, у астронаутички кад се налази на висини $h = QR$, и каузална је сферни астрогност $\Pi_n P_n Z_n$ (као екваторске - небески пол - земљи), којим ћемо се посматрати да одређимо астронаутички угло, $\chi (= QIR)$, између екваторске, $E_n E_s$, и постојања хоризонта, $H_n H_s$. Елементи постојања сферног астрогнота су:

$$\Pi_n P_n = \varepsilon, \quad P_n Z_n = 90^\circ - \varphi, \quad \Pi_n Z_n = \chi \text{ и угло } \widehat{P_n P_n} = \widehat{P_n Z_n} - \widehat{P_n Z_n} = 90^\circ - \theta,$$

где је са θ означено постојања зезданог време. Уг обича елементи постојања су ε и $90^\circ - \varphi$. Сем тога, постојања r је и висина $QR = h$ r -марке. Помоћу постојања елементи можемо, ари, одређити θ , из сферног астрогнота $\Pi_n P_n Z_n$. Напазимо

$$\cos \theta = \sin h \sec \varphi.$$

сл. 116

Пражни пади, χ , екваторске астронаутички хоризонт, годичања, и функцији зезданог време, из сферног астрогнота $\Pi_n P_n Z_n$:

$$\begin{aligned} \cos \chi &= \cos \varepsilon \sin \varphi + \cos \varphi \sin \varepsilon \cos(90^\circ + \theta), \\ &= \cos \varepsilon \sin \varphi - \sin \varepsilon \cos \varphi \sin \theta. \end{aligned}$$

Одобрено видимо да нај пади годичања стоје екстремне вредности, па јесте +

максимум: $\chi = 90^\circ - (\varphi - \varepsilon)$, за $\theta = 90^\circ = 6^h$;

минимум: $\chi = 90^\circ - (\varphi + \varepsilon)$, за $\theta = 270^\circ = 18^h$.

200

201 **206.** Пражни се, дакле, астронаутички у који је вредности Сунче реквасцензије била једнака 24^h , одговара 0^h . Са постојања задатка оно се може постојања, ако се астронаутички да се Сунче реквасцензија мена пропорционално време. Из ове постојања видимо да се од 20 до 21 марта, дакле за 24^h , Сунче реквасцензија чвџа за $0^h 2'' 7^s - 23^h 58'' 29^s = 3'' 38^s = 218^s$. Видимо, иста тако, да, од вредности који је Сунче реквасцензија мена 20 марта, до астронаутички астронаутички редногреднице она астронаутички да се чвџа за $24^h - 23^h 58'' 29^s = 1'' 31^s = 91^s$. Према томе, ако време разлика од постојања реквасцензије, за 20 марта, до астронаутички редногреднице означимо са Δt , и још астронаутички да је $24^h = 86400^s$, - имаћемо

$$\Delta t = \frac{91^s}{218^s} \times 86400^s = 36066^s = 10^h 1'' 6^s$$

Пражни астронаутички, астронаутички редногреднице, налази, дакле, $10^h 1'' 6^s$ после Сунче горње кулминације кад намет постојања 20 марта годичања постојања.

202 **207.** Са постојања задатка астронаутички, дакле, одређити астронаутички у који Сунче реквасцензија, астронаутички са постојања на постојања

вредности, прође кроз вредности $\pm \pi$. Са датим подацима ста можемо одредити, ако претпоставимо да се Сунчева деклинација мења пропорционално времену. Из података видимо да се од 20 до 21 марта, дакле за $24^h (= 86400^s)$, Сунчева деклинација уђећа за $+0^\circ 3' 14'' - (-0^\circ 20' 45'') = -0^\circ 23' 59'' = 1439''$. Видимо, сем тога, да, од познате вредности Сунчеве деклинације, за 20 марта, до рамнаска аронелатве рамнокретнице ($\delta = 0^\circ$), мења вредности према да се уђећа за $20' 45'' = 1245''$. Према томе, ако тај временски размак, од познате деклинације, за 20 марта, до рамнаска аронелатве рамнокретнице означимо са Δt , имаћемо

$$\Delta t = \frac{1245''}{1439''} \times 86400^s = 0.86518 \times 86400^s = 74752^s = 20^h 45^m 52^s.$$

Пратећи аронелатк, аронелатве рамнокретнице, налази, дакле, $20^h 45^m 52^s$ после Сунчеве торње кулиминације код нашег посматрача 20 марта датиме тогине.

[Напомињемо да се аронелатк аронелатвих рамнокретница из последњих двају задатака не одnose на исту тогину.]

117,

203 (208) На сл. Гарикалата је пројекција небеске сфере на меридијанску раван посматрача са паралелом $S_2 N_2$, одређеном деклинацијом $\delta = +21^\circ 16' 36''$. Као што се са слике види, Сунце се налази неаректно над хоризонтом, дакле, уостиме не залази, у местима где је географска ширина (φ) није мања од $90^\circ - \delta = 68^\circ 43' 24''$. А ако да се Сунце неаректно налази под хоризонтом, дакле, уостиме не залази, у местима где је географска ширина није већа од $-68^\circ 43' 24''$. сл. 117

Кроз земљу Сунце пог да се аронази, као што се са слике види, за та места где је Земљина паралела одређена географском ширином $\varphi = \delta = +21^\circ 16' 36''$.

204 (209) У арком хератикалу места географске ширине φ марка на небеској сфери дедеклинација δ висина h одређена једнаким
$$\sin h = \sin \delta \cos \varphi.$$

За да небеско тело могло бити видно при аронази кроз арки хератикал места, негов висина h мора бити позитивна (дејство рефракције занемарујемо).

Како се Сунчеве деклинације у току тогине кретају између $-\epsilon$ и $+\epsilon$, видимо да ће при аронази кроз арки хератикал у Београду Сунце бити видно само у размаку од аронелатве до јесеве рамнокретнице. У то, у году, по јесте да се рамнокретница Сунце ће се налазити у арком хератикалу у аронелатк улаза, однемо залаза (ако дејство рефракције занемарујемо).

Најбегу висину у архом вертикалног гоставаке на ^{лежиште} горах $\epsilon = +23^\circ 27'$. Прегроста Сунце висине у архом вертикалног гоставаке у томе релације.

$[\sin \epsilon] \quad 9.59983,$
 $[\operatorname{cosec} \epsilon] \quad 0.15204,$
 $[\sin h] \quad 9.75187, \quad \text{гакле } h = 34^\circ 23' 10''$

2
12

205 (210). На сл. 118 прегростахнеу су Сунцеу S_1 и S_2 , којима одговарају гати прегносту деклинација , $\textcircled{D}_1 = A_1 S_1$ и $\textcircled{D}_2 = A_2 S_2$, и гати разлика рекласуежија $R_2 - R_1 = \textcircled{R}_2 - \textcircled{R}_1$. Уо тако гостуења парабоуиуа сферних ароутиока , $R_1 S_1$ и $R_2 S_2$, имамо

сл. 118

$\operatorname{tg} \textcircled{D}_1 = \sin \textcircled{R}_1 \operatorname{tg} \epsilon,$

$\operatorname{tg} \textcircled{D}_2 = \sin \textcircled{R}_2 \operatorname{tg} \epsilon.$

Деленеу груте једнакуе архом гостуења

$\frac{\operatorname{tg} \textcircled{D}_2}{\operatorname{tg} \textcircled{D}_1} = \frac{\sin \textcircled{R}_2}{\sin \textcircled{R}_1},$ уако гате $\frac{\operatorname{tg} \textcircled{D}_2 + \operatorname{tg} \textcircled{D}_1}{\operatorname{tg} \textcircled{D}_2 - \operatorname{tg} \textcircled{D}_1} = \frac{\sin \textcircled{R}_2 + \sin \textcircled{R}_1}{\sin \textcircled{R}_2 - \sin \textcircled{R}_1}$

Потеру једнакуе уојенеу грутеуе окако капиуауе

$\frac{\sin(\textcircled{D}_2 + \textcircled{D}_1) \operatorname{cosec} \textcircled{D}_2 \operatorname{cosec} \textcircled{D}_1}{\sin(\textcircled{D}_2 - \textcircled{D}_1) \operatorname{cosec} \textcircled{D}_2 \operatorname{cosec} \textcircled{D}_1} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\textcircled{R}_2 + \textcircled{R}_1) \cos \frac{1}{2}(\textcircled{R}_2 - \textcircled{R}_1)}{2 \cos \frac{1}{2}(\textcircled{R}_2 + \textcircled{R}_1) \sin \frac{1}{2}(\textcircled{R}_2 - \textcircled{R}_1)}$

уо јесту

$\sin(\textcircled{D}_2 + \textcircled{D}_1) \operatorname{cosec}(\textcircled{D}_2 - \textcircled{D}_1) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\textcircled{R}_2 + \textcircled{R}_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\textcircled{R}_2 - \textcircled{R}_1).$

Угате гостуења

$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\textcircled{R}_2 + \textcircled{R}_1) = \sin(\textcircled{D}_2 + \textcircled{D}_1) \operatorname{cosec}(\textcircled{D}_2 - \textcircled{D}_1) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\textcircled{R}_2 - \textcircled{R}_1),$

ураа коју нам опиууеуе га одреуиуо уојенеу , јер на гестуе сарауи обе једнакуе познатеуе су нам че веклуеуе . А уошатиуо нам је разлика реклауеуежија гатиуе у задаткуе , моги ћемо одреуиуати и оде реклауеуежија , а, застуиуи , из делуо које од познатих једнакуеуе одреуиуати и паражеуи катиуо еклипатиуе .

Тако ћемо са познатиуа задатка имауиуи :

$\textcircled{D}_1 = +6^\circ 26' 40''.$ $\textcircled{D}_2 - \textcircled{D}_1 = 6^\circ 45' 40''.$
 $\textcircled{D}_2 = +13^\circ 12' 20''.$ $\textcircled{D}_2 + \textcircled{D}_1 = 19^\circ 39' 0''.$
 $R_2 - R_1 = 17^\circ 39' 9.6''.$ $\frac{1}{2}(R_2 - R_1) = 8^\circ 49' 34.8''.$

С одуиурам на познатеуе поздатка , ради ћемо са логариуиуимиуа од сегам гестуе ^(ману)

$[\sin(\textcircled{D}_2 + \textcircled{D}_1)] \quad 9.5266927,$ $\frac{1}{2}(R_2 + R_1) = 23^\circ 55' 6.5''.$
 $[\operatorname{cosec}(\textcircled{D}_2 - \textcircled{D}_1)] \quad 0.9291129,$ $\frac{1}{2}(R_2 - R_1) = 8^\circ 49' 34.8''.$
 $[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(R_2 - R_1)] \quad 9.1911122,$ $R_1 = 15^\circ 5' 35.7''.$
 $Z = [\operatorname{tg} \frac{1}{2}(R_2 + R_1)] \quad 9.6469178,$ $R_2 = 32^\circ 44' 45.3''.$
 $R_2 - R_1 = 17^\circ 39' 9.6''.$

Назад ћемо, пази какавоне пада, испрвавати из одне једнакости

$[tg \textcircled{D}]$	9.052 8997,	$[tg \textcircled{D}_2]$	9.370 4209,
$[cosec \textcircled{R}]$	0.584 4056,	$[cosec \textcircled{R}_2]$	0.266 8844,
$[tge]$	9.637 3053;	$[tge]$	9.637 3053,

$\varepsilon = 23^\circ 27' 7''$

W

206 211. Ако представимо, ка сл. 119, Сферич триаголник на екватору са S_1 , и образимо аракоутни сферич триаголник RAS_1 , и њи елементи $RA = \textcircled{R}$, $AS_1 = \textcircled{D}$, и угло $A.RS_1 = \varepsilon$,

узмећу њих елементи

$\sin \textcircled{R} = ctge tg \textcircled{D}$

сл. 119

Ако је диференцирано, божећу резултат да је ε константно, имаћемо

$\cos \textcircled{R} d\textcircled{R} = ctge sec^2 \textcircled{D} d\textcircled{D}$

У году равокретној, у аромектору, ка ар. $\textcircled{R} = 0$, $\textcircled{D} = 0$; сем тога, према осредњима заграда, Сферич гексаметрија се, у њи време, мења за око 1' ка час; знаши око 24' ка год. Према томе, за гветну аромектору Сферич ректасцензије у году екватору годућемо, из горње једнакости:

$d\textcircled{R} = 24' ctge \approx 24' \times 2.3053 \approx 55'.33 \approx 3'' 41^s$

207 212. Ако представимо, ка сл. 120, Сферич триаголник на екватору са S_1 , образимо аракоутни сферич триаголник RAS_1 и ариметрију да је

$RS = \Lambda$, $RA = \textcircled{R}$, $AS = \textcircled{D}$ и угло $A.RS = \varepsilon$,

узмећу њих елементи

$tg \textcircled{R} = \cos \varepsilon tg \Lambda$,
 $\sin \textcircled{D} = \sin \varepsilon \sin \Lambda$.

Ако из диференцирано, имајћу у виду да је радијус ^{екватора} R константно, годућемо за аромектору Сферич екваторских координата

$sec^2 \textcircled{R} d\textcircled{R} = \cos \varepsilon sec^2 \Lambda d\Lambda$,
 $\cos \textcircled{D} d\textcircled{D} = \sin \varepsilon \cos \Lambda d\Lambda$,

сл. 120

а агаће

$d\textcircled{R} = \cos \varepsilon sec^2 \Lambda \cos^2 \textcircled{R} d\Lambda$,
 $d\textcircled{D} = \sin \varepsilon \cos \Lambda sec \textcircled{D} d\Lambda$.

Приметимо ме да је, према једном од обраћања Тајцове триге,

$\cos \textcircled{R} = sec \textcircled{D} \cos \Lambda$,

и извршимо ме обичу смету у изразу за аромектору ректасцензије, имаћемо

(апликација)

координате за апликације Сунчевих реклинација и деклинација.

$$dR = \cos \epsilon \sec \delta d\lambda,$$

$$d\delta = \sin \epsilon \sec \delta \cos \lambda d\lambda.$$

Ако сад апликацима да су у апликацима:

екваторијална: $\delta = 0^\circ$ и $R = \lambda = 0^\circ$, односно $R = \lambda = 180^\circ$;

соларна: $\delta = +23^\circ 27'$ и $R = \lambda = 90^\circ$, односно $\delta = -23^\circ 27'$ и $R = \lambda = 270^\circ$;

као и да је, према постојећим записима, $d\lambda \approx 1^\circ$ гребно, -

из тог се обрачуна налази за апликације Сунчевих екваторских координата:

у доба екваторијална: $dR = \cos \epsilon d\lambda$, $d\delta = \pm \sin \epsilon d\lambda$;

у доба соларна: $dR = \sec \epsilon d\lambda$, $d\delta = 0$.

Значи, у доба екваторијална: $dR = 0^\circ 917 \approx 55'$, $d\delta = \pm 0^\circ 398 \approx 23.9'$, } гребно.

у доба соларна: $dR = 1^\circ 090 \approx 65'$, $d\delta = 0$,

211

208 213. За решења можелимо даћи графички, апликацијски кривичу небеску сферу на равни посматрањег меридијана. Нека н. 121 представља ову равни. Ако са P_n означимо на тој положај сунчевог небеског тела, апликације E, E_n представљају апликацију екваторске, а апликације E_n, E_s апликацију екваторске равни на посматрањем меридијанском равни. Према постојећим записима познато нам је Сунчев положај на екватору: оно се налази на деклинацији $\delta = +20^\circ 8'$. У сунчеви, кроз ову деклинацију Сунце пролази гребно у апликацији истог тогине: аркти аплика (око 2 рана) апликацијски се налази соларна; грети аплика (око 12 рана) апликацијски се од налази соларна. Решење које обде дајемо брже за дело која од обде дајемо.

(апликација)

Ако са Σ представимо апликацију Сунца на тој деклинацији, онда небеског паралела $S_n S_s$, који тој деклинацији одговара, ~~апликацијски~~ представља Сунчеве апликације гребно апликације тог дана. А како је равни слике уједно и равни посматрањег меридијана, S_n представља апликацију Сунца за посматрања, уједно дајемо. Према записима, Сунце се у апликацији налази на висини $h = H_n O S_n = 4^\circ 10'$. Значи равни посматрањег хоризонта налази се на $4^\circ 10'$ истог апликације апликације $O S_n$. Према томе је

$$\widehat{H_n O P_n} = \varphi = \widehat{H_n O S_n} + \widehat{S_n O P_n} = 4^\circ 10' + 90^\circ - 20^\circ 8' = 74^\circ 2'$$

За овог резултата можелимо даћи апликацијски да за земалску дајемо, односно висину, аплика деклинацију β , на истом географско ширини имамо

Сл. 121

$$z = 90^\circ - h = 180^\circ - (\varphi + \beta).$$

(10)

U ako y ovaj vrtov ynesemo podstavke uo zadataka, godubamo za tarakenu te-
 ografsku širinu

$$\varphi = 90^\circ - \delta + h = 90^\circ - 20^\circ 8' + 4^\circ 10' = 74^\circ 2'$$

209 214. Uzmemo katoda ekvatorike (ε) u Suvrebe rektasuvuzije (R) imamo sa-
 znatnu relaciju

$$\operatorname{tg}(\odot) = \operatorname{tg} \varepsilon \sin(R),$$

$\operatorname{tg} \varepsilon$ je sa \odot oznacena Suvreba deklinacija. Ako je isparivljeno, duka

$$\log \operatorname{tg}(\odot) = \log \operatorname{tg} \varepsilon + \log \sin(R)$$

u a diferencijalno, imajuti y kicu ga deklinacija oostaje, y oboi svuzaj, re-
 ometena, godubamo

$$0 = \operatorname{ctg} \varepsilon \operatorname{sec}^2 \varepsilon d\varepsilon + \cos(R) \operatorname{cosec}(R) dR,$$

a odatje paralumo

$$\operatorname{tg}(R) = -\sin \varepsilon \operatorname{cose} \varepsilon \frac{dR}{d\varepsilon}.$$

Polomiti nam je katod ekvatorike poznati, a oromene (trajice trešaba) katoda
 u rektasuvuzije gati y zadataku, moemo odrediti vrednosti rektasuvuzije
 Suvre, malo znati u gati, za koje gati oromene (trajice) brede. Ako y poslednju
 relaciju ynesemo vrednosti poznatih velicina, paralumo

$$\sin \varepsilon = 0.3979,$$

$$dR = \pm 0.02 = \pm 0.3,$$

$$\operatorname{cose} \varepsilon = 0.9174,$$

$$d\varepsilon = \pm 1'';$$

$$\sin \varepsilon \operatorname{cose} \varepsilon = 0.3649;$$

$$\text{dakle } \operatorname{tg} R = 0.10947, \text{ sto jest } R = 6^\circ 17' \approx 6^\circ 25''.$$

Ako yzmemo ga u Suvreba rektasuvuzija ybetaha po 4" gati, godubamo
 go završka ga u odredzavane položaja γ -stavke uo posmatranu Suvreba
 rektasuvuzija, y gati trajicama, moe postaviti ako u posmatranu odat-
 naju uo 6 gati ore, odostu posle, ravnodrebnica.

210 215. Duzice meridijanske senke beraikalnot stvda meaj y se, y stoku
 gati, sa Suvrekom busem, a ova, oati, sa Suvrekom deklinacijom, y stoku to-
 gite. Suvreba deklinacija oostati, y stoku to gite, kroz sve vrednosti ismetu
 $+23^\circ 27'$ u $-23^\circ 27'$. Za posmatranu na teografskoj širini φ meaj y se, ometa
 oone, Suvrebe meridijanske buse, y stoku to gite, ismetu:

$$\text{najvece: } h_n = \text{~~90^\circ - \varphi~~} (90^\circ - \varphi) + \varepsilon,$$

$$\text{najmanje: } h_s = \text{~~90^\circ - \varphi~~} (90^\circ - \varphi) - \varepsilon.$$

Za posmatranu u Beogradu, mi ja teografška širina $\varphi = +44^\circ 48'$, vrednosti
 ovia buse kreću se ismetu:

$$\text{кајбеће: } h_n = 90^\circ - 44^\circ 48' + 23^\circ 27' = 68^\circ 39',$$

$$\text{кајмање: } h_s = 90^\circ - 44^\circ 48' - 23^\circ 27' = 21^\circ 45'. \quad \text{гучине } l,$$

За гучине, D_n и D_s , меридијанска селки вертикалног сачува, које су иллу-
страција, налазимо

$$D_n = l \operatorname{ctg} h_n = 4 \times 0.39 \text{ м} = 1.56 \text{ м},$$

$$D_s = l \operatorname{ctg} h_s = 4 \times 2.51 \text{ м} = 10.04 \text{ м}.$$

194

211) 216. У решењу задатка 199 кажемо је да Сунцева меридијанска висина,
ка да кад кад њу деклинација износи $\delta = +18^\circ$, у месту на географској ширини
 $\varphi = -20^\circ$, износи $h = 52^\circ$. Према томе ће гучина селки у вертикално сачува, висине l ,
износити у асогне поменутот гача (кад је $\delta = +18^\circ$)

$$D = l \operatorname{ctg} h = 25 \times 0.781 \text{ м} = 19.5 \text{ м}.$$

212) 217. У месту на северној Земљиној хемисфери гачице Сунце своје ка-
беће, односно кајмање, висине h у асогне аранжа кроз меридијан ка дад лат-
итет, односно земског, солстација. Уо решења задатка 215. знамо h_n и да
кајбећа (h_n), односно кајмање (h_s) Сунцева меридијанска висина, у месту на
географској ширини φ , изнесе:

$$h_n = (90^\circ - \varphi) + \varepsilon, \quad \text{односно} \quad h_s = (90^\circ - \varphi) - \varepsilon.$$

меридијанска Ове висине могу се гачице тридимензио одредити, ако се измере гучине,
 D_n и D_s , селки у вертикално сачува, познате гучине (l). Уо већ познатих рел-
ација имамо:

$$\operatorname{ctg} h_n = \frac{D_n}{l}, \quad \operatorname{ctg} h_s = \frac{D_s}{l}.$$

Ако унесемо у њих вредности познатих гачица у задатку, налазимо

$$[D_n] \quad 1.75 \ 671, \quad [\operatorname{ctg} h_n] \quad 0.45 \ 568, \quad h_n = 19^\circ 18' 1'',$$

$$[l] \quad 1.30 \ 103, \quad [\operatorname{ctg} h_s] \quad 9.64 \ 444, \quad h_s = 66^\circ 12' 9''.$$

$$[D_s] \quad 0.94 \ 547;$$

Вредности за висине ометнућу ка да образујемо две једнакости,
уо ка да можемо одредити аракетне величине: географску ширину места и
катио деклинације. Имамо, гачица,

$$\varphi - \varepsilon = 90^\circ - h_n = 70^\circ 41' 59'',$$

$$\varphi + \varepsilon = 90^\circ - h_s = 23^\circ 47' 51''.$$

$$\text{Натање налазимо: } \varphi = +47^\circ 14' 55'' \quad \text{и} \quad \varepsilon = 23^\circ 27' 4''.$$

Овај ками је кинески астрономима био познат још пре више
од бар стотина година.

29

$[\sin(\varphi_n - \varphi_s)]$	8.23 701,	$[\sin(\varphi_n - \varepsilon)]$	8.23 701,	$[\sin(\varphi_n + \varepsilon)]$	8.23 701,
$[\sec \varphi_n]$	0.15 278,	$[\sec(\varphi_n - \varepsilon)]$	0.03 237,	$[\sec(\varphi_n + \varepsilon)]$	0.44 078,
$[\sec \varphi_s]$	0.14 534,	$[\sec(\varphi_s - \varepsilon)]$	0.03 240,	$[\sec(\varphi_s + \varepsilon)]$	0.42 197,
Σ	8.53 513,	Σ	8.30 178,	Σ	9.09 976,
$[L]$	1.90 000,	$[L]$	1.00 000,	$[L]$	1.00 000,
$\Delta D_e =$	0.34 m,	$\Delta D_z =$	0.20 m,	$\Delta D_z =$	1.26 m.

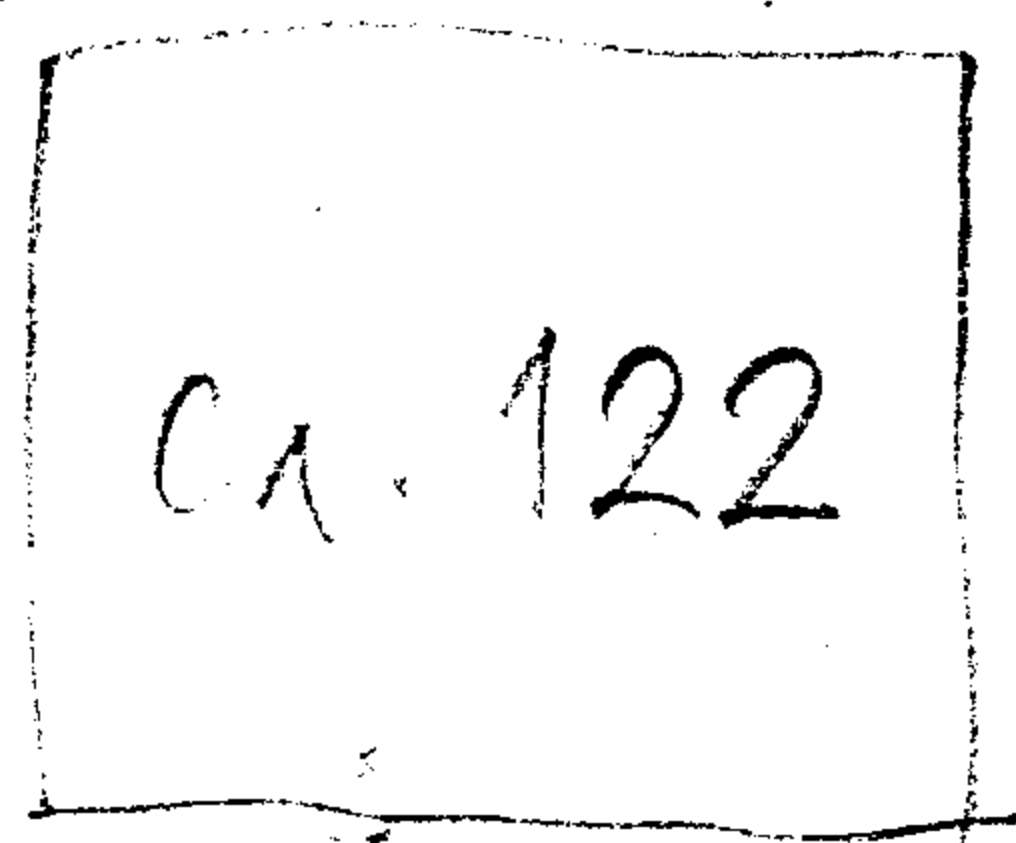
214 (219) У месту географске ширине φ Сунчева меридијанска висина, на дан летњег солстисија (ако се не узима у обзир рефракција атмосфере) има вредност $h = (90 - \varphi) + \varepsilon$.

Ако је меридијанска гужина сатке устравног сунча једнака висини самог сунца, Сунчева меридијанска висина је онда $h = 45^\circ$. Из горње релације закључујемо да је географска ширина места

$$\varphi = +45^\circ + \varepsilon = +68^\circ 27'$$

Са сл. 122, која представља пројекцију посплатареве висине редеке сфере на пету меридијанску раван, видимо да Сунце ^{чија је пројекција обрв} стоји на једној од две паралеле представљене линијама $S_n S_s$. Положај Сунца у овом случају је, јасно, сарком S_n . Сунчеву висину, у овом случају, налазимо, ако приметимо да је

$$\widehat{N O P_n} = \varphi = \widehat{N O S_n} + \widehat{S_n O P_n} = h + 90^\circ - \varepsilon$$



Угаоде налазимо

$$h = \varphi + \varepsilon - 90^\circ = 68^\circ 27' + 23^\circ 27' - 90^\circ = 1^\circ 54'$$

215
1/2

215 (220) Ако је φ географска ширина места, на којем је измерена гужина (D) меридијанске сатке устравне олошке, гужине L , а h Сунчева меридијанска висина, онда је

$$D = L \operatorname{ctg} h, \quad \text{где је } h = (90^\circ - \varphi) + \varepsilon$$

Из ове ове релација налазимо $\operatorname{ctg} h = 1.2$, па је онда $h = 39^\circ 17' 4''$. ^{вероватно} Ако диференцирамо горње релације, добићемо релацију да су L и D повезани таквим

$$dD = -L \operatorname{cosec}^2 h dh \quad \text{и} \quad dh = -d\varphi$$

Из ове добићемо

$$d\varphi = \frac{dD}{L} \sin^2 h$$

И, ако на датој страни уземемо вредности које су нам познате,

$$\sin h \approx 0.633, \quad \sin^2 h \approx 0.401; \quad \frac{dD}{L} = 0.0056,$$

добићемо

$$d\varphi \approx \pm 0.0056 \times 0.401 \times 3437.75 = \pm 7.7$$

која није била од 108° .

На сл.124, која представља пројекцију небеске сфере на астрономичку меридијанску равна, представљена је са S_n Сунчев положај, на паралели (S, S_n) одређеном деklinацијом $\odot = +14^\circ$, у астролошкој ветови зоне куминације. Уз парадокс који одређује овај положај, лако се може одредити географска ширина места. Са сл. видимо да је

$$\widehat{E_n O S_n} + \widehat{S_n O H_n} + \widehat{H_n O P_n} = 14^\circ + 18^\circ + \varphi = 90^\circ,$$

и тако налазимо $\varphi = +58^\circ$.

Насредније смо го решена посли годе ^{астроном} одрасца који одређује крајње астрономског сунца,

$$\cos z = \sin \varphi \sin \odot + \cos \varphi \cos \odot \cos H.$$

Ако у овај внесемо вредности задатка,

$$z = 90^\circ + 18 = 108^\circ \text{ и } H = 12^h,$$

добивамо

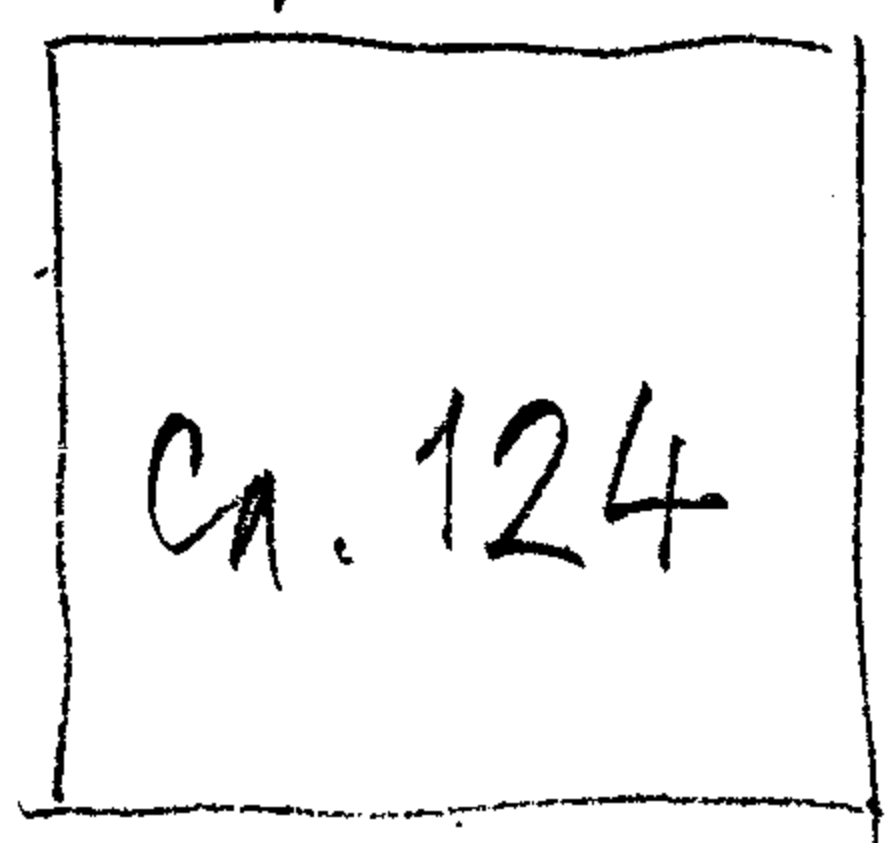
$$\cos 108^\circ = -\sin 18^\circ = \sin \varphi \sin \odot - \cos \varphi \cos \odot = -\cos \varphi + \odot,$$

односно, ако га напишемо,

$$-\cos 72^\circ = -\cos \varphi + \odot,$$

и приметимо да је $\odot = +14^\circ$, налазимо, као и трафиком методом,

$$\varphi = +58^\circ.$$



*Др
1/2*

(218) (223) Изражену вредност деklinације ћемо кати уз одрасца за крајње одрасце, као јесте временој равна која апроксимире од астролошког кад, три узлазу, горњи руд Сунчева кружног диска додирне хоризонталног места, са го астролошког кад, три залазу, горњи руд Сунчева кружног диска додирне хоризонталног места. При њом треба још у обзир узети и дејство рефракције. У хоризонту се узима да по дејство $R = 35'$.

Уз дефиниције одрасце видимо да је веома крајње одређено положајем Сунчева руда, јер одрасца постоје рин се арфи Сунчев зрак појави на хоризонталног места. А Сунчев положај на небеској сфери одређујемо — као што знамо — положајем ветова средишта. Стога, дакле, морамо узети у обзир да се Сунчев средиште, у астролошког кад ветови горњи руд додирне равна хоризонталног места, налази за популарно ($r_0 = 16'$) ветова кружног диска испод хоризонталног.

Ако на сл.125 представимо са H, H_0 пројекцију равни хоризонталног места, онда круг са средиштем S представља менаџски положај Сунчева средиште у астролошког узлаза. А ако се налази, у овом астролошког, на $135' + 16' = 51'$ испод

$$(R + r_0 =$$

Равника, гакле, између крајња одређица, 13 јуна (1962), у Београду и Београду иноси резултат била од 27".

221) 226) Ув претходног задатка, одредити резултат познати су је, бек уград за одређене крајња одређица, ако су познати резултат φ и \odot ,

$$-\sin 51' = \sin \varphi \sin \odot + \cos \varphi \cos \odot \cos H.$$

Задаток изражи да се одреде промене у крајњу одређица и уград промена сунче деклинације. Зато, диференцирајмо горњи уград смањити φ као параметар.
 Уматемо

$$0 = (\sin \varphi \cos \odot - \cos \varphi \sin \odot \cos H) d\odot - \cos \varphi \cos \odot \sin H dH.$$

Одведе параметар за промену у крајњу одређица у функцији промене сунче деклинације

$$dH = \operatorname{cosec} H (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \odot \cos H) d\odot$$

Приметимо ми, међутим, да је

$$\cos H = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \odot,$$

и искористимо ми замену у горњем делу, у задатку, уматемо за промену

$$dH = \operatorname{cosec} H \operatorname{tg} \varphi (1 + \operatorname{tg}^2 \odot) d\odot = \operatorname{cosec} H \operatorname{tg} \varphi \sec^2 \odot d\odot,$$

одаску,

$$dH = \operatorname{tg} \varphi \sec^2 \odot (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \odot)^{-\frac{1}{2}} d\odot$$

Засту изражи познати облик постоји за логаритамски разлог, ако приметимо да је

$$1 - \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \odot = (\cos \varphi \cos \odot - \sin \varphi \sin \odot) (\cos \varphi \cos \odot + \sin \varphi \sin \odot) \sec^2 \varphi \sec^2 \odot,$$

то јест да је

$$1 - \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \odot = \cos(\varphi + \odot) \cos \varphi - \odot \sec^2 \varphi \sec^2 \odot.$$

У том случају гадубамо за промену крајња одређица (у сабази постоје крајња)

$$dH = \sin \varphi \sec \odot [\cos(\varphi + \odot) \cos \varphi - \odot]^{-\frac{1}{2}} d\odot$$

У задатку су изражене вредности обих промена, за географску ширину Београда, у даје поредом чакота од резулти тог времена год. Промене су, горњи резултат, изражене за:

$$\varphi = +44^\circ 48' \text{ и } \odot_1 = 0, d\odot = +24'; \quad \odot_2 = \pm 23^\circ 27', d\odot = 0; \quad \odot_3 = 0, d\odot = -24'.$$

Како је у сабазијима (22 јуна и 22 децембра) $d\odot = 0$, крајња одређица се изражава не мењају. За промене крајња одређица у даје екваторијале, уматемо

$$dH = \operatorname{tg} \varphi d\odot \text{ или, у времену секундама, } dH^s = \frac{d\odot}{15} \operatorname{tg} \varphi.$$

Према томе, параметри за Београд:

[dδ] 3.15 836,

[dH^s] 1.97 924,

[15] 1.17 609, }
Δ = 1.98 227,

dH^s ≈ 95^s = 1^m 35^s;

[tgφ] 9.99 697;

Према поме промена висоти, па да се одреде рабнот-
гребнице + 3^m 10^s, па да се јеседе рабнотгребнице - 3^m 10^s.

Ако се одредат Т. н. з. височина да се, одредат, у да се рабнотгребнице
парајана одредатца ераодукеују, односто скраћују, за резултат бине од 3^m гребно.

222) 227. Пошто се у да се еклиптичке координате још рабни Млечниот
ајата, можемо изразити ниво еклиптичке координате, асисту Тајсоче
трџе одредатца. Ако се (A, D) означат еклиптичке, а се (λ, β) еклиптичке коорди-
нате још рабни Млечниот ајата, имаме:

cos β sin λ = sin D sin ε + cos D cos ε sin A,

cos β cos λ = cos D cos A,

sin β = sin D cos ε - cos D sin ε sin A.

У ајата да се, одредат, парајана

tg λ = tg D sin ε sec A + cos ε tg A,

израб ис којата можемо изразити користују се. Још да се:

[tg D] 9.70 717,

[cos ε] 9.96 256,

N_I + N_{II} = - 0.01 230,

[sin ε] 9.59 983,

[tg A] 9.32 747,

λ = 179° 42'.

[sec A] 0.00 960,

Σ_I 9.29 003,

Σ_I = 9.31 660,

N_{II} 0.19 500;

N_I = - 0.20 730;

За одредатца еклиптичке координате одредатца кроз рабни Млечниот ајата паши-
ајата не можемо изразити ниво еклиптичке координате. Још да се, са одредатца и само користу-
је још рабниот можемо одредатца користују се још да се одредатца еклиптичке и (не-
ајатот крџа) Млечниот ајата, одредатца рабниот Млечниот ајата. За користују
још да се одредатца (δ), па још да се одредатца одредатца кроз коју Млечни ајата
одредатца се још да се одредатца еклиптичке, парајана

(δ₆) = λ + 90° = 269° 42', приближно, факле, 270°;

за користују се одредатца (δ), парајана

(δ₇) = (δ₆) + 180° = λ - 90° = 89° 42', приближно 90°.

У обик резултатите можемо да одредатца кроз рабни Млечниот ајата одредатца
у да се одредатца; и још, кроз одредатца одредатца - па да се одредатца, кроз одредатца
одредатца - па да се одредатца одредатца.

223
14

223 **228.** Антички сирот бика, та, факле, и Птоломеј, знами су ја тврдили и служили су се тиме, али та - како иштега - ниш и скористићавали за нешто средна одређивања висина а пона паракла на Земљи. По сироту и једно потлање у Птоломејевој Армагесу, у којем иштега како се иш трајања најошче одрживе у тогмем - иште су казивали клима - одређује висина пона, по јесте географска ширива места, и одриво. А, затим, у иштој глави, објашњава како се пош, поштој најошче одриве, факле позваше климе, и висине пона некои места истраживаши ошче ткошче сетке и одриво. Тако сирота и рачунавши овај задатак, којем се траже да се, понасти од иштеклима клима за Сиракузу и Асиу, и Сироте деклинације у годна констивује, одреде висине пона ашк трагоша.

Како су географске шириве шик трагоша, факле, паракла пошташе, тако факле бисаи у сироту и да протеримо резултате факле је Птоломеј факле, а пошмаћемо и да објаснимо нешто одриве од сиротне вредности тражене величина.

Са поштама задатка, по јесте трајања најошче одриве у тогмем, у Сиракузу и Асиу, и кашто еклиптиком - иште знаи Сироте деклинације пона факле - пош се истраживаши географске шириве. Протосиротне - иште и нешто иштега - факле је паракла одриве и Птоломеј рачуна од сиротне поште ка користићаву сироте руда Сироте трибугош кривош факле. Знаи да сирота сиротне као факле, у вредностима које факле за трајања одрива, садржава и факле рефракције и поштај средности Сироте факле ^(лог. задатка) три иште. Другим речима, за одриве географске ширива, морамо применити одриве

$$- \sin 51' = \sin \varphi \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon \cos H_z,$$

где H_z одрива поштој трајања најошче одриве. Уште неш параметра m и M , факле сиротне поштој иште

$$m \sin M = \sin \varepsilon$$

$$m \cos M = \cos \varepsilon \cos H_z,$$

иште кајма иште

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{sec} H_z \quad \text{и} \quad m = \sin \varepsilon \operatorname{cosec} M,$$

за одриве географске ширива факле иште иште

$$\cos(\varphi - M) = - \frac{\sin 51'}{m}.$$

Са поштама кајма растопаћемо иште, према иште:

За мерење врецела до Писопемеја, а и у исто то време, искористићемо се у два радна, према доду дата и функцији радна која је изведена из метрике: Суграм расоћеници - за дуге радна - и пемграм и додеи расоћеници - за кратке времеве радна и у такој толи. Попитиј Суграм расоћеника (ткотиона) време је одређивано из времена араваца и функција сепки, масом, на хоризонталној радни. Писопеме, кетјуам, одређивања араваца ије дима висока. Трешке до 1°-2° (аа и кети) како су шпеле. Петрешке, атеи, у такој на «твевену» времеве расоћени уга. Висока гејстаио можемо одређивати из познатог сипуеи одрасца за такој ајни сферни тиротас,

$$\sin H \cos \varnothing = \sin A \sin z.$$

Ако овај пера потарилицијемо, та затим диференцирамо, налазилимо

$$\operatorname{ctg} H dH = \operatorname{ctg} A dA.$$

Одавде додиavamo за трешку расоћени уга у функцији трешке асимута

$$dH = \operatorname{ctg} A \operatorname{tg} H dA.$$

Применимо на ову релацију на времеве Писопемејских араваца одраваца у Сиракузи и Асиаи, на дат летивет консамција, имаћемо

	Сиракуза	Асиаи
$\operatorname{tg} H$:	- 2.6395,	- 2.5452,
$\operatorname{ctg} A$:	- 0.5875,	- 0.5973,
dH :	1.55 dA,	1.52 dA.

Виделимо, дакле, да трешка до, рецимо, 1°5 у асимутау араваца попомоће сепке може, у оном случају, за собом поћити, у расоћени угу илава (Залава), злати и араваца одраваца, до: $2 \times 1.5 \times 1.5 = 4.5 \approx 18''$, а то је времеве рефа великике кајеле раднике (до 16").

0
1/2

(224) (229) На с.126, која представља метрички утвев редеске сфере са хоризонталном посмаатрала σ , учртам се и ознаке са:

- P, P_3 - сепка са, са северним и јужним редеским попомоћа;
- σZ_n - аравац посмаатрале пераицаи, са зелиаом;
- H, H_3 - ^{пројекција} посмаатрале хоризонтал;
- E, E_2 - сепка араваца редеске екватора и посмаатрале меридијана;
- $S_n I_E S_3 I_W$ - паралел, геклимација (D) која сипуе до дата приближно асиме;
- I_E - сепка Сирети илава до дата; оборек на равац посмаатрале меридијана
- I_W - сепка Сирети Залава до дата;
- C - пројекција северног редеског пона на равац паралела.



Са с. виделимо да кад хоризонталом месиа Сирети до дата асиме мук $I_E S_3 I_W$, а дод хоризонталом мук $I_W S_n I_E$. Најке се да, у оном случају, или дод дата, Сирети приближни диећи мук итоси $2 I_E C S_3$.

За димо поим графички одређивати араваца одраваца према араваца одраваца дод дата, за посмаатрала на географској ширини, иакојки келио се с.127, која представља редеску сферу пројекцирану на посмаатрале меридијански равац. Но са једном доцијом. Редески паралел $S_n I_E S_3 I_W S_n$, са с. ..., нија је пројекција на с.126 представља метриком $S_n S_3$, на овој мизи још одорек на посмаатрале меридијански равац (одрица за 90° око сепке араваца $S_n S_3$). Како је додивета крчка мизи $S_3 I_E S_n I_W$. Но овој, као што виделимо, мук $I_E S_3 I_W$ представља за посмаатрала видети, или кад хоризонталски, геот, а мук $I_W S_n I_E$ келидирети, или

ако користоватски, гоо Сунета арибуиот глеток аута ите гала.

Видимо и га арибуи нуку, ите јесте арајану одгачице одгачапа еа-
совни утао $I_E \widehat{CS}_n = 2 I_E \widehat{CS}_s$; грчтом, ите јесте арајану одгачице, одгачапа расоту
утао $I_E \widehat{CS}_n = 2 I_E \widehat{CS}_n = 2(180^\circ - I_E \widehat{CS}_s)$.

Одгачице са т Сунет арибуи нуку, ите јесте расоту утао итепа, га-
че $\tau = \widehat{CS}_n I_E$. Огча је

$$\tau = 180^\circ - I_E \widehat{CS}_n = 180^\circ - \sigma,$$

ако са б одгачице арибуи нуку. Са сике, ате, итепа

$$\cos \sigma = \frac{CI}{CI_E} = \frac{CI}{CS_s} = \frac{OC \operatorname{tg} IOI}{OC \operatorname{tg} S, OC} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} (90^\circ - \sigma)} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \sigma.$$

Ср. 127

Према ате, за т гачице га арајану итепа

$$\cos \tau = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \sigma,$$

одгачице

$$\tau = \arccos(-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \sigma).$$

Арајану одгачице итепа, гаче, 2τ , а одгачице 2σ . За одгачице, која тепа ара-
јану са ω , казано

$$\omega = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{\arccos(-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \sigma)}{12^\circ - \arccos(-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \sigma)},$$

вредности га које смо грчтом аутае гачице и решењу задатка 224.

225 **230** Поку тепа од итепа за гачице користоватца (б.),

$$\Delta = \sqrt{\frac{5R}{3\pi}},$$

где R арајану арајану Земље сфере, а h висину арајану арајану ите-
рајану и тепа. Према задатку је $h = \frac{R}{3200}$, а ако га тепа за гачице
и нуку итепа итепа

$$\Delta \arcsin' = \left(\frac{5R}{3 \times 3200R} \right)^{\frac{1}{2}} = (1920)^{-\frac{1}{2}}$$

С грче арајану, за арајану арајану арајану итепа, арајану арајану
сфероту арајану,

$$dz = \cos \varphi \sin A dt.$$

Одгачице казано, за арајану и арајану којета се арајану арајану,

$$dt = \sec \varphi \operatorname{cosec} A dz.$$

Ако се задаток одгачице арајану арајану арајану арајану, арајану арајану
 $A = 170^\circ$, арајану арајану арајану арајану

$$dt = -\sec \varphi dz.$$

Ако еад унесемо, арајану dz , арајану арајану арајану арајану, арајану арајану арајану
арајану, арајану

$$dt = -(1920)^{-\frac{1}{2}} \sec \varphi \frac{180 \times 60'}{15 \pi}$$

то јест

$$dt = -0.02282 \times 1.4093 \times 229.183 \approx -7.4$$

Фроктор је, гране, уратиће за посматрања на бисели за 7.4 дана је лето за оштра на астрологи Земље.

226 (231) У решењу за задатка 224 и 229 каже уград за оштра одравање (τ) према одравање (σ), које према, према задатку, да буде једнак m, гране

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\arccos(-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta)}{180^\circ - \arccos(-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta)} = m.$$

Знаме

$$\arccos(-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta) = m \times 180^\circ - m \arccos(-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta),$$

одрасно

$$(1+m) \arccos(-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta) = m \times 180^\circ,$$

то јест

$$-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta = \cos\left(\frac{m}{1+m} \times 180^\circ\right).$$

Одрасе годубамо

$$\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{ctg} \vartheta \cos\left(\frac{m}{1+m} \times 180^\circ\right).$$

Закне, за арајану географску ширину на габ линеа сарсауија, то јест за

$$\vartheta = +23^\circ 27', \text{ знаме уград}$$

с. 128, 1-5)

$$\operatorname{tg} \varphi = -2.3053 \cos\left(\frac{m}{1+m} \times 180^\circ\right).$$

гране (Закнеја) 1) Ако је $m = 0$, знаме и $\tau = 0$, тога гана, на габ ширину месцу, према одравање, што знаме да сунце цео по гана остаје пог хоризонтално месца, за које је

$$\operatorname{tg} \varphi = -2.3053, \text{ што знаме } \varphi = -66^\circ 33';$$

гране за месца што леже на јужном паралелном кругу.

2) Ако је $0 < m < 1$, знаме $\tau < \sigma$, то јест арајане одравање је крате од арајане одравање на пош месцу. Како је, у пош сунцу,

$$\frac{m}{1+m} \times 180^\circ < \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ, \text{ то је } \cos\left(\frac{m}{1+m} \times 180^\circ\right) > 0,$$

то знаме

$$\operatorname{tg} \varphi < 0, \text{ знаме } -66^\circ 33' < \varphi < 0^\circ.$$

Зрису решења, знаме да је одравање крате од одравање у свим месцама за арајану од јужног паралелног круга до екватора.

3) Ако је $m = 1$, знаме $\tau = \sigma$, арајане одравање и одравање се пош габина једнака,

$$\cos\left(\frac{m}{1+m} \times 180^\circ\right) = \cos 90^\circ = 0, \operatorname{tg} \varphi = 0, \text{ гране } \varphi = 0^\circ.$$

с. 128

1-3

знам, места се налазе дуж Земљина екватора.

4) $1 < m < \infty$, знам $\tau > 6$: изражава одређенице је дужке од изражава одређенице;

$$\cos \frac{m}{1+m} \times 180^\circ < 0, \quad \text{tg} \varphi > 0, \quad \text{гакле } 0 < \varphi < +66^\circ 33'$$

што ће бити, у месту на површини између Земљина екватора и северног поларног круга.

5) $m \rightarrow \infty$, знам $\sigma = 0$; $\cos \frac{m}{1+m} \times 180^\circ \rightarrow -1$, $\text{tg} \varphi = 2.3053$, $\varphi = +66^\circ 33'$, што јесте у месту на поларном кругу Сунцу излази изнад хоризонта.

227 **232** На сл. 129 представљена су два места на истом Земљини паралели латитуда А и В. Покуша је и велики круг чија је ^{сфера} радиус (р = P₁Q) од пола P₁ једнака Сунчевој деклинацији тог дана; гакле, $\rho = 0$

Оби елементи одређују на сфери два арапачка сферна троугла: AQP₁ и BQP₁. Ако равнику у географској дужини места, А и В, означимо са L, а географску ширину паралела на којој се налазе места А и В са φ , из њих сферни троугла имамо

$$\cos \frac{1}{2}L = \text{tg} \rho \text{tg} \varphi.$$

Како је $\rho = 0$,

$$\cos \frac{1}{2}L = \text{tg} 0 \text{tg} \varphi.$$

С друге стране, ако изража одређенице означимо са τ , имамо

$$\cos \tau = - \text{tg} 0 \text{tg} \varphi.$$

Из обе гле једнакости добијемо

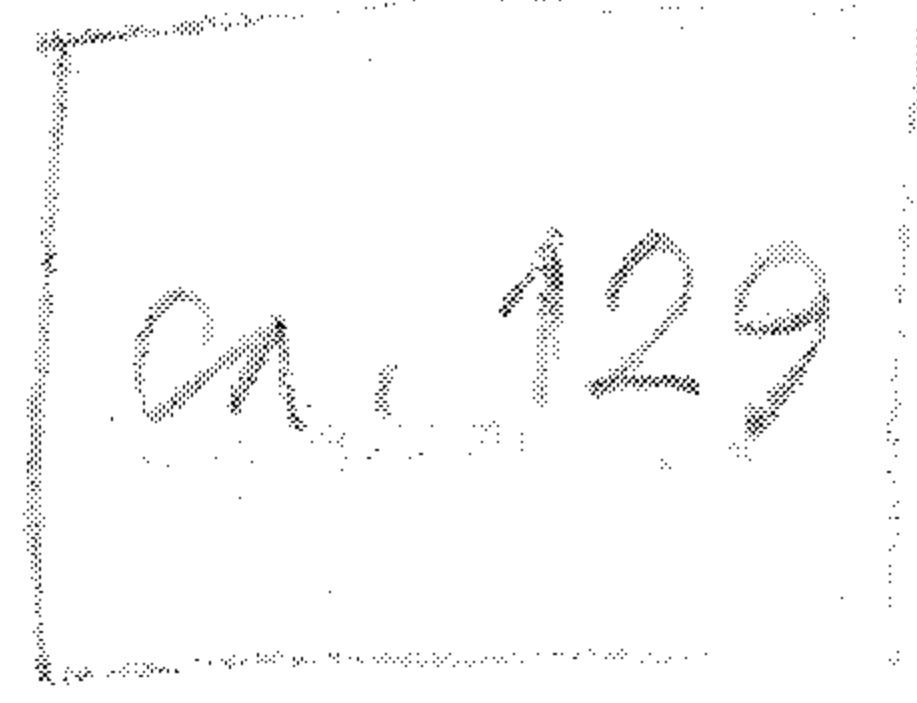
$$\cos \frac{1}{2}L = \cos(12^\circ - \tau),$$

гакле
одасио

$$\frac{1}{2}L = 12^\circ - \tau,$$

$$L = 24^\circ - 2\tau.$$

На геој страни имамо вредности изражава одређенице, а на левој разлику у географским дужинама места, А и В.



228 **233** Први ками ^{гун:} Ако занемарим рефракцију, за гасовни ^{мо:} гасови Сунца у аргументу угла, у месту географске ширине φ , на дан кад је Сунчева деклинација σ , имамо

$$\cos H = - \text{tg} \varphi \text{tg} \sigma.$$

За Сунчев азимут, у томе аргументу, имамо из положајног сферног троугла

$$\sin A = \sin H \cos \sigma,$$

$$\cos A = - \sec \varphi \sin \sigma.$$

каму некаа географске ширине φ имамо одржавањ

$$\sin h = \sin \Theta \operatorname{cosec} \varphi.$$

У правоуглом сферном троуглу PAS , мију су елементи $PS = A$, $SA = \Theta$ и $\widehat{PAS} = \varepsilon$, имамо одржавањ

$$\sin A = \sin \Theta \operatorname{cosec} \varepsilon.$$

Заменимо ми, на географској ширини, $\sin \Theta$ са $\sin h$ и добијемо

$$\sin A = \sin h \sin \varphi \operatorname{cosec} \varepsilon,$$

а одавде добијемо

$$\sin \varphi = \sin A \sin \varepsilon \operatorname{cosec} h,$$

односно

$$\varphi = \arcsin (\sin A \sin \varepsilon \operatorname{cosec} h).$$

230) 235) На н. 131 представљена је педеска сфера са цртањем педеских екватора, E_1, E_2 , екватором, E_n, E_s , и меридијаном, P_n и Π_n , уз по и положајем сунчевим, γS , и његовом пројекцијом, A , на педеску екватор. Тако је добијен сферни троугао $P_n Z_n S$, мију су елементи:

$$Z_n S = 90^\circ, \quad P_n S = 90^\circ - \Theta, \quad Z_n P_n = \varepsilon,$$

јер се некаа налази на екватору. За углове имамо:

$$\widehat{P_n Z_n S} = 360^\circ - H, \quad \text{а} \quad \widehat{P_n Z_n S} = A - 180^\circ.$$

У овом сферном троуглу имамо

$$0 = \operatorname{cosec} \varepsilon \sin \Theta + \sin \varepsilon \cos \Theta \cos H,$$

одакле налазимо

$$\cos H = -\operatorname{ctg} \varepsilon \operatorname{tg} \Theta,$$

затим имамо

$$\sin \Theta = -\sin \varepsilon \cos A,$$

$$\cos \Theta \sin H = -\sin A.$$

Диференцирамо ми арку од обје одржавања, имаћемо

$$-\sin H dH = -\operatorname{ctg} \varepsilon \sec^2 \Theta d\Theta$$

Ако, ипак, приметимо да је

$$dH = -dR,$$

и искористимо ми ову замену, имаћемо

$$\sin H dR = -\operatorname{ctg} \varepsilon \sec^2 \Theta d\Theta \quad (1)$$

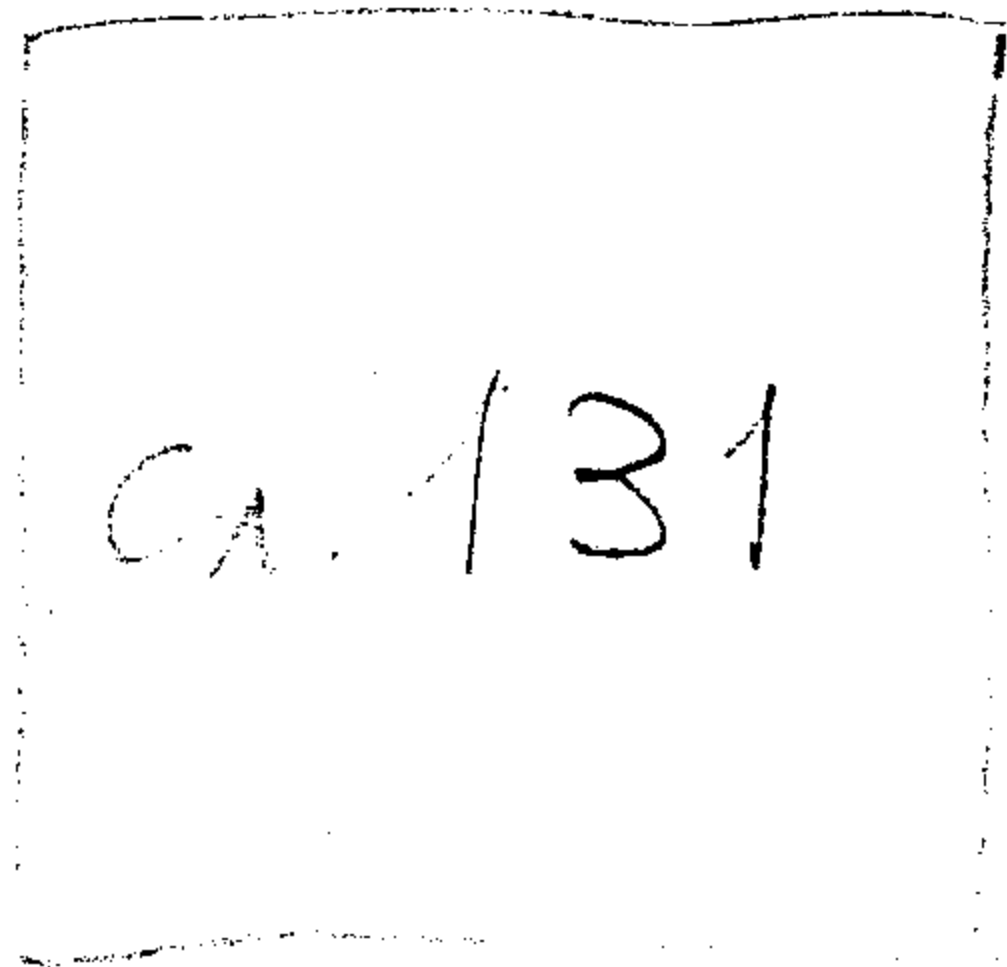
Диференцирајмо грети од горње одржавања, имаћемо

$$\cos \Theta d\Theta = \sin \varepsilon \sin A dA,$$

односно,

$$d\Theta = \sin \varepsilon \sin A \sec \Theta dA.$$

(часовни и аркуте)



Извршимо ^{у(1)} намери ове брзине за $d\theta$ као и брзине $\sin H$ у обрета од-
расца, имамо

$$\sin A \sec \theta dR = + \operatorname{ctg} \varepsilon \sec^2 \theta \sin \varepsilon \sin A \sec \theta dA.$$

Одатге, пошто скраћемо, добијемо

$$dA = \sec \varepsilon \cos \theta dR. \quad (2)$$

За арабучност сферног троугла $A \gamma \delta$ имамо

$$\operatorname{tg} R = \operatorname{tg} A \cos \varepsilon.$$

Одатге, диференцирамо, добијемо

$$\sec^2 R dR = \sec^2 A \cos \varepsilon dA.$$

А како је γ оком сферном троуглу

$$\cos A = \cos R \cos \theta,$$

то добијемо

$$dR = \cos^2 R \cos \varepsilon \sec^2 R \sec^2 \theta dA = \cos \varepsilon \sec^2 \theta dA,$$

то јест

$$dA = \sec \varepsilon \cos \theta dR. \quad (3)$$

У виду га је, пошто, γ мету на полярном кругу гребна промена ⁽²⁾ ⁽³⁾ dA dR је једнака гребној промени dR dA .
Сукреба dA је једнака гребној промени dR dA .

231 ~~236~~ На сл. 132 приказана је бисферица попоћена кедеке сфере за са-
мастапа на географској ширини φ , са географским кедеким паралелом $S_1 S_2$,
геклима θ , која $S_1 S_2$ арабучно ошине по θ . На паралели θ оделе-
жеми топографије Сукреба арабучног круга, ара географски кедеки θ -
сва: западни γK_1 , истони γK_2 , са постопакеким (западни) θ -
сваким, $Z_1 W$. Ако ошинеми Сукреба арабучног $S_1 K_2$, са τ_0 и одрабучено
мами арабучног троугла на сфери $S_1 K_2 I$ — где је са I одележена θ θ -
сва, $S_1 S_2$, са арабичким кедеким, $Z_1 W$ — у θ θ -
сва, као што θ -сва,

$$S_1 K_2 = S_1 I \cos \varphi,$$

то јест

$$\tau_0 = \frac{1}{2} dH \cos \theta \cos \varphi,$$

ако са φ ошинеми θ θ -сва $Z_1 S_2 P_1$, једнак θ θ -сва $S_1 S_2 Q$. Брзине θ θ -
сва θ θ -сва, пошто θ θ -сва, у θ θ -сва $Z_1 S_2 P_1$:

$$\cos \theta \sin \varphi = \cos \varphi \sin A,$$

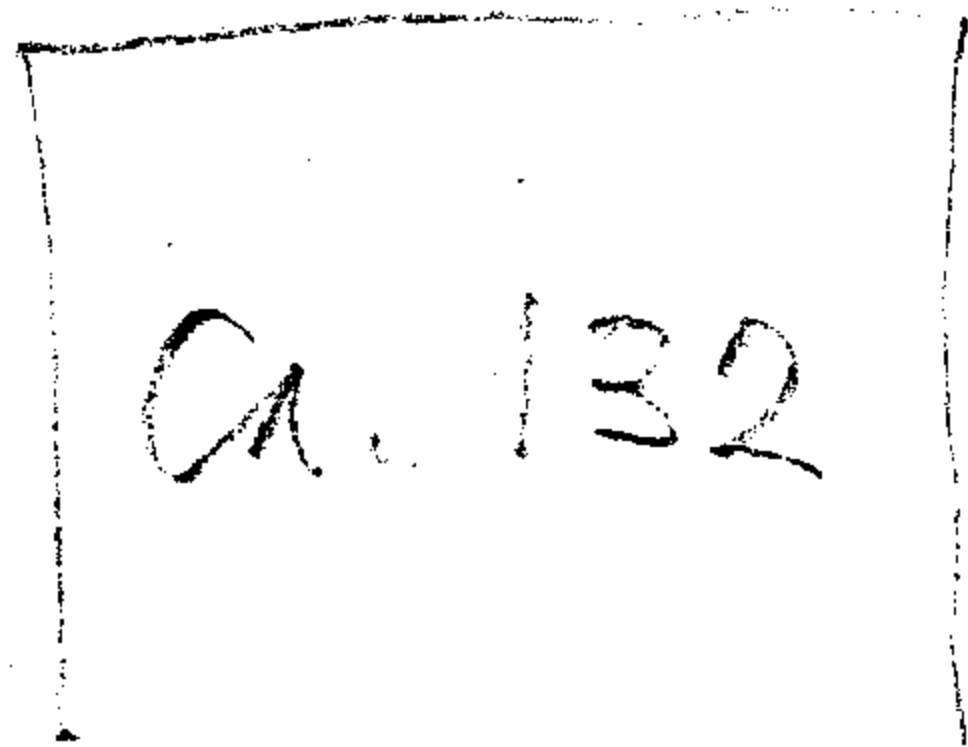
дакле

$$\sin \varphi = \cos \varphi \sin A \sec \theta.$$

Ако арабично θ θ -сва A θ θ -сва 90° , и θ θ -сва, ако θ θ -сва
арабично θ θ -сва, θ θ -сва $A = 90^\circ$, θ θ -сва θ θ -сва

$$\sin \varphi = \cos \varphi \sec \theta.$$

Одатге, θ θ -сва, θ θ -сва



$$1 - \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi = (\cos^2 \Theta - \cos^2 \varphi) \sec^2 \Theta.$$

Према томе ће, на гори констанција, бити

$$2\tau_{\odot} = dH (\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}},$$

односно

$$dH = 2\tau_{\odot} (\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}},$$

или, у секундама времена,

Први налик. $\tau = \frac{2\tau_{\odot}}{15} (\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\tau_{\odot}}{15} (\sin^2 \varphi - \sin^2 \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$ q. e. d.

232 **237** На сл. 133 представљена је вертикална небеска полусфера за посматрача на географској ширини φ , са вертикалним небеским паралелом $S_1 S_2$, дефиниције Θ , који је Сунце под гори приближно вертикално. Уртама су и положаји Сунца небески кругови које са средиштем у S_1 , у вертикалну гори ^{небо} гори руда и равни посматрача хоризонтала, и са средиштем у S_2 , у вертикалну гори ^{небо} гори руда и равни хоризонтала.

Ако Сунце вертикално појави се на τ_{\odot} , па WS танке пресеке, V , паралела и посматрача хоризонтала сајединимо једним кругом VQ , тако да одређено нами арабским арабским на ефери $VQ S_2$, бисима да је

$$VQ = VS_2 \cos \Theta \cos \varphi, \text{ односно } \tau_{\odot} = \frac{1}{2} dH \cos \Theta \sin \varphi,$$

ако приметимо да је гори $VS_2 Q$ једнак паралелом у гори $P_1 S_2 Z_1 = \varphi$.

Према томе ће бити

$$2\tau_{\odot} = dH \cos \Theta \sin \varphi.$$

С гори S_1 гори, WS положајни сферни арабски, $Z_1 P_1 S_2$, имамо, према сисемном обрачу,

$$\cos \Theta \sin \varphi = \cos \varphi \sin A.$$

После замене у горњи обрачу гори

$$2\tau_{\odot} = dH \cos \varphi \sin A.$$

сл. 133

За вредности азимута, на геој страни, можемо узети заједничку вредност (танке V) за оба положаја Сунца гори, вредности која одговара земској гори $z = 90^\circ$. За π имамо, на положајни сферни арабски $Z_1 V P_1$,

$$\cos A = -\sin \Theta \sec \varphi.$$

Урачу гори

$$1 - \cos^2 A = \sin^2 A = (\cos^2 \varphi - \sin^2 \Theta) \sec^2 \varphi,$$

а заједно и

$$\sin A = (\cos^2 \varphi - \sin^2 \Theta)^{\frac{1}{2}} \sec \varphi.$$

Према томе, да арабски (τ) гори (или WS) Сунца вертикално гори ^{небо} гори гори

$$\tau = \frac{2r_0}{15} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \vartheta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2r_0}{15} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

Вреќосати Сунчеба арабицки полиаретмик, r_0 , невоју се, у току тогине, во мезу $16'18''$, у годба змикаџ, и $15'46''$, у годба невоја сонца мезуја; око екваторска невоја вреќосати се креће око $16'$. Умеамте у последнем ворату има вреќосати: у годба екваторска ($\vartheta = 0$) $\cos \varphi$, у годба сонца мезуја ($\vartheta = \pm 23'27''$) - што је катиса. Видимо, арена аома, га τ гостике чоје најбете вреќосати, у току тогине, као $\sin \vartheta$ гостике чоје најбете, ер аома $\cos \vartheta$ чоје најмаве вреќосати. А ао дуба у годба сонца мезуја.

УН (Зрети ~~не~~). У аологајкој сферкој апрогта имамо одрабау

$$\cos z = \sin \varphi \sin \vartheta + \cos \varphi \cos \vartheta \cos H.$$

Ако та диференцирамо, катисрајџу ϑ и φ те ароменибуи келуитана, имамо

$$\sin z dz = \cos \varphi \cos \vartheta \sin H dH.$$

Ако гелска рефракције за аемаримо, у аргачку илаба је $z = 90^\circ$, тако га келма во последнет вората имамо

$$dH = \sec \varphi \sec \vartheta \operatorname{cosec} H dz.$$

Према загајку је, Сунчеб арабицки полиаретмик, ворате у мезуи екуитана (R_0)

Према аома за апрајакте (τ) волаба Сунчеба гучка, ворате у келуитана имамо волат

$$\tau = \frac{2}{15} R_0 \sec \varphi \sec \vartheta (1 - \lg^2 \varphi \lg^2 \vartheta)^{-\frac{1}{2}},$$

што можемо катисати

$$\tau = \frac{2}{15} R_0 [\sec \varphi + \vartheta \sec \varphi - \vartheta]^{-\frac{1}{2}}$$

У мезуи ка теотрафској мезуи $\varphi = +45^\circ$, ка годба екваторска, што јесте за $\vartheta = 0$, ако за Сунчеб арабицки полиаретмик гачеца $R_0 = 16' = 960''$, имамо за апрајак илаба

[2]	0.30 103,
[15]	1.17 609,
Δ	9.12 494,
[R_0]	2.98 227,
[$\sec \varphi$]	0.14 900,
[τ]	2.25 621, га кел $\tau = 180^\circ.4 \approx 3''$

OK
1/2

(233) (238) Ако аомамо коордиатите арге збевге, Σ_1 , са λ_1, β_1 , а гргте, Σ_2 , са λ_2, β_2 , а Сунчебу коуитача са Λ , са мике 134 видимо га за сферку гачуиу (1) Сунча

аг арге збевге имамо $\cos \Delta = \cos \beta_1 \cos (\Lambda - \lambda_1),$
аг гргте збевге имамо $\cos \Delta = \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - \Lambda).$

Сл. 134

Волате волатимо га је

$$\cos \beta_1 \cos (\Lambda - \lambda_1) = \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - \Lambda).$$

Ако раскијемо и среќимо, катисамо

(234) $\operatorname{tg} \Lambda = \frac{\cos \beta_2 \cos \lambda_2 - \cos \beta_1 \cos \lambda_1}{\cos \beta_1 \sin \lambda_1 - \cos \beta_2 \sin \lambda_2}$

(Σ_1, Σ_2 (b. a. t. 135) (239) Узмејџ екваторска и екваторска коордиатата гбејџ те-келуитана, имамо ове одраце

$$\begin{aligned} \cos \beta_1 \sin \lambda &= \cos \delta_1 \sin \alpha_1, \\ \cos \beta_1 \cos \lambda &= \sin \delta_1 \sin \epsilon + \cos \delta_1 \cos \epsilon \sin \alpha_1, \\ \cos \beta_2 \sin \lambda &= \cos \delta_2 \sin \alpha_2, \\ \cos \beta_2 \cos \lambda &= \sin \delta_2 \sin \epsilon + \cos \delta_2 \cos \epsilon \sin \alpha_2, \end{aligned}$$

Сл. 135

у којима је искоричена окароста га рекретиме келуитана мезуи коуитача. Дове-келу гргте келуитана и арге аргте одраце катисамо

$$\frac{\sin \delta_1 \sin \epsilon + \cos \delta_1 \cos \epsilon \sin \alpha_1}{\sin \delta_2 \sin \epsilon + \cos \delta_2 \cos \epsilon \sin \alpha_2} = \frac{\cos \delta_1 \cos \alpha_1}{\cos \delta_2 \cos \alpha_2}$$

Волате катисамо

$$\sin \delta_1 \cos \delta_2 \cos \alpha_2 \sin \epsilon + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \epsilon = \cos \delta_1 \sin \delta_2 \cos \alpha_1 \sin \epsilon + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 \cos \epsilon.$$

Погримо ни ове аргте апрогтам $\cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \epsilon$, гадичево

$$\operatorname{tg} \delta_1 \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \epsilon + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 = \operatorname{tg} \delta_2 \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \epsilon + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2.$$

Волате, аомамо среќимо, гадичамо

$$\sin (\alpha_1 - \alpha_2) = (\cos \alpha_1 \operatorname{tg} \delta_2 - \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \delta_1) \operatorname{tg} \epsilon, \quad \text{q. e. d.}$$

235) ~~240~~ За определване ъгълите екваторски координати на звезди

$$\begin{aligned} \lg R &= \lg A \cos \varepsilon, \\ \lg D &= \sin A \lg \varepsilon. \end{aligned}$$

Према таблицата за дадена дате

$[\lg A]$	9.45 632,	$[\sin A]$	9.43 926 n,
$[\cos \varepsilon]$	<u>9.96 257,</u>	$[\sin \varepsilon]$	<u>9.59 980,</u>
$[\lg R]$	9.41 889,	$[\sin D]$	9.03 906 n,
$R = 194^\circ 42' 2''$,		$D = -6^\circ 16' 53''$.	
$R = 12^h 58^m 48^s$.			

За определване азимута екваторски координати на звезди

$[\cos R]$	9.98 555 n,	
$[\cos D]$	<u>9.99 738,</u>	
$\Sigma = [\cos A]$	9.98 293 n;	като средно је $[\cos A]$ 9.98 293 n.

За да се определи девиација од директно азимута

$$\lg \delta = \sin \alpha \lg \varepsilon.$$

$[\sin \alpha]$	9.97 091,	
$[\lg \varepsilon]$	<u>9.63 723,</u>	
$[\lg \delta]$	9.60 814,	$\delta = +22^\circ 4' 45''$.

Како се, према табелата, и за да се определи азимута, на екваторски, према дадена дата од директно азимута према директно азимута према директно азимута. За да се определи директно азимута од директно азимута

$$\lg \lambda = \lg \alpha \sec \varepsilon.$$

$[\lg \alpha]$	0.42 180 n,	
$[\sec \varepsilon]$	<u>0.03 743,</u>	
$[\lg \lambda]$	0.45 923 n;	$\lambda = 109^\circ 9' 18''$.

Најмену брзина на звезди од директно азимута

$$\cos \delta \cos \alpha = \cos \lambda;$$

$[\cos \alpha]$	9.54 911 n,
$[\cos \delta]$	<u>9.96 692,</u>
$[\cos \lambda]$	9.51 603 n, $\lambda = 109^\circ 9' 17''$.

За директно азимута према директно азимута $A - \lambda = 86^\circ 48' 15''$

236) ~~241~~ Ако екваторски координати на звезди се (R, D) , збојде се α, δ , и директно азимута према директно азимута, растојање од директно азимута и збојде, H и H_* , годите према од директно азимута

$$\begin{aligned} \cos H &= -\lg \varphi \lg D, \\ \cos H_* &= -\lg \varphi \lg \delta. \end{aligned}$$

Ако расовне углове изравамо постоју раднакâ због датог времена и рекласификацијâ, дакле ставимо $H = T_s - (R)$ и $H_x = T_s - \alpha$, где смо са T_s означили због датог време директнока углаза, који је исти за оба стена, торњи израваки постојају

$$\begin{aligned} \cos(T_s - (R)) &= -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}(\delta), \\ \cos(T_s - \alpha) &= -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta. \end{aligned}$$

Обе можемо написати у облику

$$\begin{aligned} \sin[90^\circ - (T_s - (R))] &= -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}(\delta), \\ \sin[90^\circ - (T_s - \alpha)] &= -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta. \end{aligned}$$

Иако из аравацног сферног пројекта одређена Сунчевом позисицијом имамо

$$\operatorname{tg}(\delta) = \sin(R) \operatorname{tg}\epsilon,$$

можемо последња два израваки написати у облику

$$\begin{aligned} 90^\circ - (T_s - (R)) &= \arcsin(-\operatorname{tg}\varphi \sin(R) \operatorname{tg}\epsilon), \\ 90^\circ - (T_s - \alpha) &= \arcsin(-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta). \end{aligned}$$

Одуживањем горњег од торњег изравака добићемо

$$(R) - \arcsin(\sin(R) \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\epsilon) = \alpha - \arcsin(\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta), \quad \text{q. e. d.}$$

237

237 **242** Ако асистираујемо гејстиво рефракције, онда можемо саставити да еу на ц. 136 бареклимањем постојају Сунчева ариџијент кружност ко-

пачра, и по : са средиштем у S_1 на хоризонту, са средиштем у S_2 на закршењку нештока залаба у месту географске ширине φ . Иако у даде еквипокицијâ Сунце, у сваку сват ариџијентни гребњот ацта, аписује недеки еквипач, средиште верова гиска у постојајима S_1 и S_2 одраваје са којом арајекцијом, Q_1 , на постојаје рек хоризонтâ и залавном парком (W) аравацног сферног пројекта (S_1, Q_1, W); а на закршењку залаба пројекта W, Q_2, S_2 . Ако Сунчев ариџијент ариџијент означимо са T_0 и ариџијент да је угас $Q_1, W, S_1 = 90^\circ - \varphi$, а сирата $W, S_1 = 90^\circ - S, E = 90^\circ - H_1$, где је са H_1 означен расовни угас, у тог торњот аравацног сферног пројекта имамо

$$\sin T_0 = \cos\varphi \cos H_1; \tag{1}$$

у горњот аравацног сферног пројекта имамо

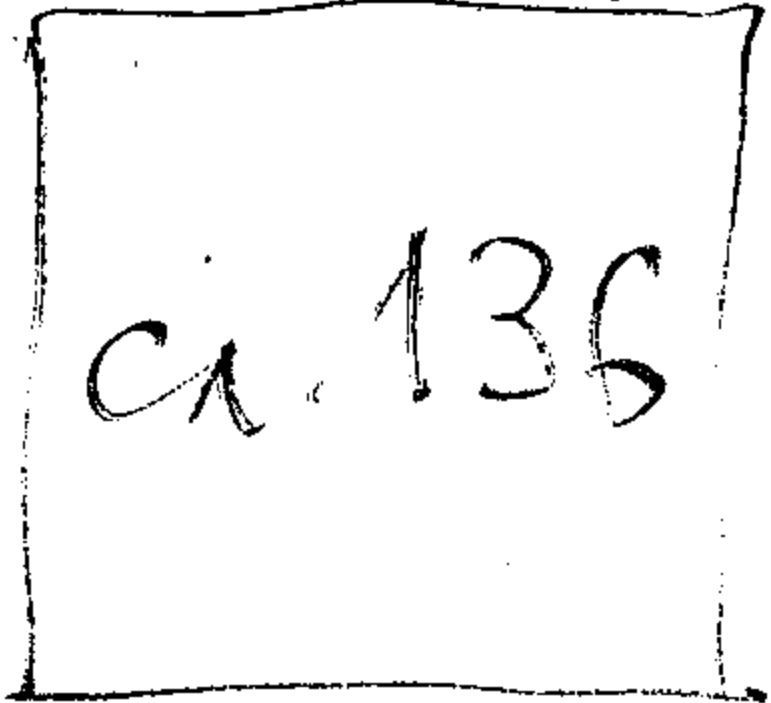
$$-\sin T_0 = \cos\varphi \cos(H_1 + \tau).$$

Ако разијемо план на гејстој сирати, имаћемо

$$-\sin T_0 = \cos\varphi \cos H_1 \cos\tau - \cos\varphi \sin H_1 \sin\tau.$$

Извршимо на дамену у аравацног израваки, налазиемо

$$\begin{aligned} \cos\varphi \sin H_1 &= \sin T_0 (1 + \cos\tau) \operatorname{cosec}\tau, \\ &= \sin T_0 \frac{2 \cos \frac{1}{2}\tau}{2 \sin \frac{1}{2}\tau \cos \frac{1}{2}\tau} = \sin T_0 \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\tau. \end{aligned} \tag{2}$$



Ако гутемо на квадрату и садемо једнаке (1) и (2), имаћемо

$$\cos^2 \varphi = \sin^2 \tau_0 (1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \tau) = \sin^2 \tau_0 \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2} \tau,$$

а одакле гадикамо

$$\cos \varphi = \sin \tau_0 \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \tau.$$

Ако је, према задатку, $\tau = 30'' = 7^\circ 30'$, а $\tau_0 = 16'$,

налазимо за арапску географску ширину вредности

$$\cos \varphi = 0.00465 \times 15.290 = 0.07110, \text{ па јесте } \underline{\varphi = \pm 85^\circ 55'}$$

238 **243.** Плати тема од одрасла коју одређује, на постојећој сферској пројекцији, висину h и деојектор H

$$\sin h = \sin \varphi \sin \vartheta + \cos \varphi \cos \vartheta \cos H.$$

Ако диференцирамо, сматрајући ϑ и H за непроменљиве величине, имаћемо

$$\cos h dh = (\cos \varphi \sin \vartheta - \sin \varphi \cos \vartheta \cos H) d\varphi.$$

Уз првог одрасла имамо, међутим,

$$\cos H = (\sin h - \sin \varphi \sin \vartheta) \operatorname{sec} \varphi \operatorname{sec} \vartheta.$$

Ако обј вредности унесемо у прву ела прву једнаку, гадикамо

$$\cos h dh = [\cos \varphi \sin \vartheta - (\sin \varphi \sin h - \sin^2 \varphi \sin \vartheta) \operatorname{sec} \varphi] d\varphi,$$

одакле

$$\cos \varphi \cos h dh = (\cos^2 \varphi \sin \vartheta - \sin \varphi \sin h + \sin^2 \varphi \sin \vartheta) d\varphi,$$

па јесте

$$\cos \varphi \cos h dh = (\sin \vartheta - \sin \varphi \sin h) d\varphi,$$

а одакле налазимо за рапску географску ширину места

$$d\varphi = \cos h \cos \varphi (\sin \vartheta - \sin h \sin \varphi)^{-1} dh.$$

239 **244.** Трајање одрасле на гас земље конституција ($\delta = \varepsilon$), у месту географске ширине φ_2 , одређено је одрасцем

$$\cos H = -\operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Ако је у месту географске ширине φ , трајање одрасле исто толико дуго месеца дана пре јесене равнодневице, као је Сунчева деклинација δ има, речима, ϑ , одакле имамо

$$\cos H = -\operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varepsilon = -\operatorname{tg} \varphi, \operatorname{tg} \vartheta \quad (1)$$

Вредности деклинације ϑ , имамо ваљда да одређимо. Зогуће не знамо ниједну вредност, али докато придицку. Према условима задатка, деклинација има вредности коју Сунце гасиће месеца дана пре јесене равнодневице. Познато је, међутим, да се Сунчева амплитуда померања, просечно, по 1° дневно. Знамо

да ће у арабичком сферном пројекцији $\triangle AS$, одређеном јесеном екваторском
 шарком, симетриком положајем и пројекцијом оког положаја на једну екватор,
 дава позната два елемента: пади екватора и сфера гавица Сунца од екваторске
 шарке (иисапануза арабичког пројекта). Она, према задатку, има, при
 димензи, 30° . Ако је ознака са L , у арабичком сферном пројекцији имамо

$$\sin(\odot) = \sin L \sin \epsilon,$$

$$\sin(\odot) = \frac{1}{2} \sin \epsilon.$$

односно

Одатке је, међутим,

$$\cos(\odot) = \frac{1}{2} (4 - \sin^2 \epsilon)^{\frac{1}{2}}$$

Знаме

$$\operatorname{tg}(\odot) = \sin \epsilon (4 - \sin^2 \epsilon)^{-\frac{1}{2}} = \sin \epsilon (3 + \cos^2 \epsilon)^{\frac{1}{2}}$$

Заметом оне вредности ψ и φ годичамо

$$\operatorname{tg} \psi_2 \operatorname{tg} \epsilon = \operatorname{tg} \varphi_1 \sin \epsilon (3 + \cos^2 \epsilon)^{\frac{1}{2}}$$

а одатке

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \psi_2 \sec \epsilon (3 + \cos^2 \epsilon)^{\frac{1}{2}}$$

односно

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \psi_2 (1 + 3 \sec^2 \epsilon)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{q. e. d.}$$

✓ 240 245 На н. 137 приказана је бијелица попокива урибуке једне
 сфере за осмапарца σ , који се налази киде на арабичком пројекцији, и то у
 пројекцији каг се екваторска, KZ_n , осмапарца се једним од осмапарачких
 вертикалних кругова. Знаме, у пројекцији каг екваторска пројекција кроз
 осмапарачки део (Z_n). Према томе, ова (Π_n) екваторска се налази у осма-
 парачкој хоризонталној равни ($H_n W K H_n$). Сунце на екватору, није у хоризонталној
 равни у том пројекцији, према задатку, (\mathcal{R} и \odot) представља се на слици
 шарком S .

У сферном пројекцији $\gamma E_2 Z_n$ користимо се од неких елемената
 утиком $E_2 \gamma Z_n = \epsilon$, сарајом $E_2 Z_n = \varphi$ и сарајом $\gamma E_2 = \gamma Q + Q E_2 = \mathcal{R} + H$, где смо са
 H означили Сунце гавица утао у пројекцији осмапарачког. Јако је она ара-
 бички сферни пројекцији, можемо арха два неких елемента, који су познати,
 одређити арке, Сунце гавица утао. Имамо, године,

$$\sin(\mathcal{R} + H) = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \epsilon.$$

У арабичком сферном пројекцији $\gamma Q S$, одређена Сунце гавица положајем, имамо,

$$\sin(\mathcal{R}) = \operatorname{tg}(\odot) \operatorname{tg} \epsilon.$$

Заметом тортер година одрацем годичамо

$$\sin(\mathcal{R} + H) = \sin(\mathcal{R}) \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg}(\odot)$$

сн. 137

παι jesti

$$\mathcal{R} + H = \arcsin(\sin \mathcal{R} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \mathcal{D}),$$

α οραηρε

$$H = \arcsin(\sin \mathcal{R} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \mathcal{D}) - \mathcal{R}, \quad \text{q.e.d.}$$

✓ **241** **246** На сн. 138 представена је педеска сфера са положајима некретности, Σ , и Сума, S , на истом педеском меридијану, $\mathcal{R}Q = \mathcal{R}$. Ни положаји одравају са екватором, педеском екватором и великим крутоцима $P_n \Sigma SQ$ и $P_n \Sigma K$ два аракутна сферна аракутна: $SK\Sigma$ и $\mathcal{R}QS$. У арвом од ових сума $K\Sigma = \beta$ је, према задатку, тежаката, а, услед тога је и друга сума, $SK = \lambda - 1$, мапа, па ако га тај сферни аракута ($\delta K\Sigma$) можемо сматрати равним. И ако у чему што $K\Sigma$ (са η ознаком), имаћемо у тој мапи аракутно аракута

$$\beta = (\lambda - 1) \operatorname{tg} \eta.$$

Утао η — који нам је познати — можемо одредити на аракутно сферно аракута $\mathcal{R}QS$. Имамо, гласа,

$$\sin \mathcal{D} = \operatorname{tg} \mathcal{R} \operatorname{ctg} \eta.$$

Елиминасемо што η на последна два израза, гласимо

$$\lambda - 1 = \beta \sin \mathcal{D} \operatorname{ctg} \mathcal{R}.$$

сн. 138

Но како се у овом случају, према познати задатку, и геклисајује збегде мапа равникује од сумете геклисајује, грчим ровама како је $\delta \approx \mathcal{D}$, имаћемо

$$\lambda - 1 = \beta \sin \delta \operatorname{ctg} \alpha, \quad \text{q.e.d.}$$

✓ **242** **247** Поти ћемо од познати одраваја за аракутно сферни аракута:

$$(1) \quad \sin \mathcal{D} = \sin \varepsilon \sin \Lambda, \quad (3) \quad \cos \Lambda = \cos \mathcal{R} \cos \mathcal{D},$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} \mathcal{R} = \cos \varepsilon \operatorname{tg} \Lambda, \quad (4) \quad \sin \mathcal{R} = \operatorname{ctg} \varepsilon \operatorname{tg} \mathcal{D}$$

Диференцирамо (2) гласимо, ако се посматрамо озакана задатку,

$$\mathcal{R} \sec^2 \mathcal{R} = \cos \varepsilon \sec^2 \Lambda.$$

Ако овај израз катишемо

$$\dot{\Lambda} \cos \varepsilon = \mathcal{R} \sec^2 \mathcal{R} \cos \dot{\Lambda},$$

та искривимо замењу на аракута (3), имаћемо

$$\dot{\Lambda} \cos \varepsilon = \mathcal{R} \cos \mathcal{D}. \quad (5)$$

Сумеба позитивна се, према познати задатку, мења униформно; збегди $\dot{\Lambda} = \text{const}$. Према томе је и $\dot{\Lambda} \cos \varepsilon = \text{const}$. Пако га ћемо, ако диференцирамо последни одраваја, имаћемо

$$0 = \dot{\Lambda} \cos^2 \mathcal{D} - 2\Lambda \cos \mathcal{D} \sin \mathcal{D} \dot{\mathcal{D}}.$$

Како је $\cos \mathcal{D} \neq 0$, можемо посложити израза окоу ћенумена унаћено

$$\dot{R} \cos \mathcal{D} = 2 \dot{A} \sin \mathcal{D}, \quad \text{по једна} \quad \dot{R} = 2 \dot{A} \operatorname{tg} \mathcal{D}, \quad \text{q. e. d.} \quad (6)$$

Џ гурте израза, ако диференцирамо (1), унаћено

$$\dot{\mathcal{D}} \cos \mathcal{D} = A \sin \varepsilon \cos A.$$

Уштренимо му на десној израза замену ис (3), годичено

$$\dot{\mathcal{D}} \cos \mathcal{D} = A \sin \varepsilon \cos(R \cos \mathcal{D})$$

Одговоре налазимо

$$\dot{\mathcal{D}} = A \sin \varepsilon \cos R.$$

Уресимо му окоу ћрептаза за A ис (5), унаћено

$$\dot{\mathcal{D}} = \dot{R} \cos \mathcal{D} \operatorname{tg} \varepsilon \cos R.$$

Ако окоу израза диференцирамо, годичено

$$\dot{\mathcal{D}} = \dot{R} \cos \mathcal{D} \operatorname{tg} \varepsilon \cos R - 2 \dot{R} \dot{\mathcal{D}} \cos \mathcal{D} \sin \mathcal{D} \operatorname{tg} \varepsilon \cos R - \dot{R}^2 \cos \mathcal{D} \operatorname{tg} \varepsilon \sin R.$$

Уштренимо му у аркоу ранау замену наћеноу ћрептаза за R ис (6), дјече

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{D}} &= 2 \dot{A} \operatorname{tg} \mathcal{D} \cos^2 \mathcal{D} \operatorname{tg} \varepsilon \cos R - \dot{A} \sin 2\mathcal{D} \operatorname{tg} \varepsilon \cos R - \dot{A}^2 \cos^2 \mathcal{D} \operatorname{tg} \varepsilon \sin R, \\ &= \dot{A} \sin 2\mathcal{D} \operatorname{tg} \varepsilon \cos R - \dot{A} \sin 2\mathcal{D} \operatorname{tg} \varepsilon \cos R - \dot{A}^2 \operatorname{tg} \varepsilon \sin R \cos^2 \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Пашаа скраћимо у штренимо замену ис (4), годичено

$$\dot{\mathcal{D}} = -\dot{R}^2 \operatorname{tg} \varepsilon \cos^2 \mathcal{D} \operatorname{tg} \mathcal{D},$$

однесо, пашаа пашаа скраћимо у ресимо

$$\dot{\mathcal{D}} = -\frac{1}{2} A^2 \sin 2\mathcal{D}, \quad \text{q. e. d.}$$

(243) (248) Ус араућноу сферноу араућна одрећена сунетим араућајем на екнашциу унамо одравау

$$\operatorname{tg} R = \cos \varepsilon \operatorname{tg} A.$$

Диференцирамо годичено

$$\dot{R} \sec^2 R = A \cos \varepsilon \sec^2 A.$$

Но како ис истноу араућноу сферноу араућна унамо у одравау

$$\cos A = \cos(R \cos \mathcal{D})$$

пашаа замену у горнем одрацу унаћено

$$\dot{R} \sec^2 R = A \cos \varepsilon \sec^2 R \sec^2 \mathcal{D}.$$

Одговоре годичено

$$\dot{R} = A \cos \varepsilon \sec^2 \mathcal{D}, \quad \text{q. e. d.}$$

Пашаадау урото га парника $(R-1)$, функција ћрептаза, дјече екнашциу јече га дјече

$$\frac{d(R-1)}{dt} = 0, \quad \text{по једна} \quad \dot{R} = A.$$

Са обим уротоу годичено ис горне јечепаше

cos ε sec(⊙) = 1, одрочно cos(⊙) = cos ε.

Одатге парабумо

⊙ = arccos(±√cos ε).

Ако за пакуδ еклиптикаке у чојумо времетраε = 23° 27', парабумо за реклиракцију Сунца којој одговарају екваторне рамике (R-1)

⊙ = arccos(±√0.918) = arccos(±0.958) = ± 16° 38' 5.

За датуме кад су екваторне паралеле парабумо у Табулицакү вачеї веда': око 3 фебруара, око 7 априла, " 7 маја, " 9 септембра.

244 249. Ако се Сунце налази у близини ^(малом) екватора, негоде погледати у реклиракцију тако се рамикүју од 90°. Сабумо да је (R) = 90° - 2η. У арабоуног сферног израчуна одређена Сунечна асопфајем (S) на екватору имамо

tg(⊙) = sin R tg ε,

а, арена у чоју задатка,

tg(⊙) = cos² η tg ε,

одрочно

tg ε = sec 2η tg(⊙)

Око је, како бидумо, израб одлика

tg y = n tg x.

Познато је, међуми, у артог гела Збирке решених задатка у Шамле асоп-помје, сар. 12, да се атог одлика израб може рабувати у дековара реф, одлика

y = x + (n-1)/(n+1) sin 2x + 1/2 ((n-1)/(n+1))² sin 4x + ... [n > 1].

Ако по примекумо на торбу израб, за пакуδ еклиптикаке, годикамо

ε = ⊙ + (sec 2η - 1)/(sec 2η + 1) sin 2⊙ + 1/2 ((sec 2η + 1)²) sin 4⊙ + ...

Ако је, међуми,

(sec 2η - 1)/(sec 2η + 1) = (1 - cos 2η)/(1 + cos 2η) = (2 sin² η)/(2 cos² η) = tg² η,

годикамо торбу реф у ~~одлика~~ одлика

ε = ⊙ + tg² η sin 2⊙ + 1/2 tg² η sin 4⊙ + ...

Ако за парабумо мале бидуме рефа бидум уф грүтог, парабумо

ε = ⊙ + η² sin 2⊙, q. e. d.

245 254. Нарисајте се урбум од датум, или парабум израб за од-ређивање пакуδ еклиптикаке у асоптарана Сунечна коордиата и года са-сауција, дакле израбам

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \odot \operatorname{cosec} \mathcal{R},$$

можемо обрабази

$$\operatorname{tg}(\varepsilon - \odot) = (\operatorname{tg} \varepsilon - \operatorname{tg} \odot) (1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \odot)^{-1},$$

написаати у облику

$$\operatorname{tg}(\varepsilon - \odot) = \operatorname{tg} \odot (\operatorname{cosec} \mathcal{R} - 1) (1 + \operatorname{tg} \odot \operatorname{cosec} \mathcal{R})^{-1},$$

односно

$$\operatorname{tg}(\varepsilon - \odot) = \sin \odot \cos \odot (1 - \sin \mathcal{R}) (\sin \mathcal{R} \cos \odot + \sin \odot)^{-1}.$$

У годба летињет конституција бредности Суреће ректасцидије је три димека $\delta^{\circ} = 90^{\circ}$, тако да последни фактори на десној страни смењо снамаати једнак једнасти.

А ариметику ме га је

$$1 - \sin \mathcal{R} = 2 \sin^2 (45^{\circ} - \frac{1}{2} \mathcal{R}),$$

почетну једнасти можемо написати

$$\operatorname{tg}(\varepsilon - \odot) = \sin 2 \odot \sin^2 (45^{\circ} - \frac{1}{2} \mathcal{R}).$$

(мање) Напред је већ написано да се овај израз искоришћује искључиво у годба конституција, другим речима у годба као су разлике $(\varepsilon - \odot)$ и $(45^{\circ} - \frac{1}{2} \mathcal{R})$ паралел. И можемо та написати

$$(\varepsilon - \odot) \operatorname{arc} 1'' = \sin 2 \odot \sin^2 (45^{\circ} - \frac{1}{2} \mathcal{R}).$$

Предности овог израза (који је, уосталом, грчкије само штедео и написати решење аритметичког задатка) преда изражаати у нумерички што се написати одређује постоји мале (рак сачим мале) разлике $(\varepsilon - \odot)$. При ефекативном изражавању ове разлике напредна постоји се поставије и логаритмички од прецизности, односно тригонометријским од та оне (односно ари) бредности цифре.

Потражи израза за одређивање написати експликације је, као што је и у задатку написати,

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \odot \operatorname{cosec} \mathcal{R}.$$

Израза је, како ћемо, једнастава; постоји је и за логаритмички рачун. Ли га да могао дапи написати резултата, морају и написати постоји (\mathcal{R}, \odot) дати дапи, и рачунске операције написати, са крајном написати. По знами, логаритмички од седам децимала, ако преда га се одређује десети дес, односно од осам децимала, ако преда га се одређује написати дес експликација.

Или изражавамо предности ова израза на једном нумеричком примеру.

Посматрајемо Сурца даи после летињет конституција годубете су ове константе:

$$\mathcal{R} = 6^{\circ} 2'' 31^{\circ}.07 = 90^{\circ} 37' 46''.05, \quad \odot = + 23^{\circ} 26' 57''.5.$$

Са овим постоји годубамо, постоји горњи израза, за написати експликације

$[\operatorname{tg} \odot]$	9.637 2502,	$2 \odot = 46^{\circ} 53' 55''$,	$[\sin 2 \odot]$	9.863,
$[\sin \mathcal{R}]$	9.999 9738,	$\frac{1}{2} \mathcal{R} = 45^{\circ} 18' 53''$,	$2 [\sin (45^{\circ} - \frac{1}{2} \mathcal{R})]$	5.480,
$\Delta = [\operatorname{tg} \varepsilon]$	9.637 2767,	$45^{\circ} - \frac{1}{2} \mathcal{R} = -0^{\circ} 18' 53''$;	$[(\operatorname{arc} 1'')^{-1}]$	5.314,
$\varepsilon = 23^{\circ} 27' 2''.03.p$			$[\varepsilon - \odot] =$	0.657, $\varepsilon - \odot = 4''.54.$

Πάκο εως, αρειδλιζικιμ ισραβικι, ζα κατιδ εκκισατικε κισιμ $\epsilon = 23^\circ 27' 2''.04$.

✓ **246** **251.** Ηα εν.139 ιμαμιο υπερεστωατικε εκκισατικε, $E_n E_s$, σα σεθερικη κελικη ποπομ, Π_n , ι σιγλεβ κεδεκι εκβασιωρ, $E_s E_i$, σα σεθερικη κελικη ποπομ, P_0 . Ποποκει, οκοτα, ι ορκοσι αρεμα εκκισατικι, ορρεθε ι λοκιωιμικη ιθλαβικη ρκορα $\gamma\delta\epsilon = \ominus = 75^\circ 7' 6''$, ι κατιδ ραβικη εγκλεβα εκβασιωρα αρεμα ραβικη εκκισατικε, φακιε ιμαμιο $E_n \ominus E_s = \Pi_n O P_0 = i = 7^\circ 15' 0''$.

Τις οθικα ποφατικα ισραβικη κελικη εκκισατικε κιορκειατικε, λ ι β , ποσα σιγλεβα εκβασιωρα, P_0 . Βικιμιο ια εν. φα ιε $\lambda = \gamma\delta\epsilon - \ominus = 345^\circ 7' 6''$ ι $\beta = \gamma P_0 = 90^\circ - 7^\circ 15' 0'' = 82^\circ 45' 0''$. Ια οθικη κιορκειατικα, ακο ζα κατιδ εκκισατικε ισραβικη $\epsilon = 23^\circ 27' 0''$, φοραβικη φα ιπραθερικη εκβασιωρκεκη κιορκειατικα ποσα πομικη Ταυκοθε τρυαε οδραβικα

Ca. 139

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \beta \cos \epsilon + \cos \beta \sin \lambda \sin \epsilon, \\ \cos \delta \sin \alpha &= -\sin \beta \sin \epsilon + \cos \beta \sin \lambda \cos \epsilon, \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda. \end{aligned}$$

Υκοθερικη οθαυ ιμαμικη ιαραμειωρα, φοραβικη ιεραβικη

$$n \sin N = \sin \beta \quad \text{ι} \quad n \cos N = \cos \beta \sin \lambda,$$

Ταυκοθε τρυαε οδραβικα ιε οκοκι ια οδικ ποπορα ζα κιαρικη ιαβικη ραβικη:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= n \sin(N + \epsilon), \\ \cos \delta \sin \alpha &= n \cos(N + \epsilon), \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda. \end{aligned}$$

Ια οοφαβικη κιομια ραεσικη ιμαμικη

2.
O
Am?

$[\lg \beta]$	0.89 546,	$[n]$	9.99 674,	$[n]$	9.99 674,
$[\operatorname{cosec} \lambda]$	0.59 037n,	$[\cos(N + \epsilon)]$	9.63 113n,	$[\sin(N + \epsilon)]$	9.95 614,
$\Sigma = [\lg N]$	1.48 583n,	$[\cos \beta]$	9.10 106,	$[\sin \delta]$	9.95 288,
$N =$	$91^\circ 52' 16''$,	$[\cos \lambda]$	9.98 518,	$[\cos \delta]$	9.64 509,
$\epsilon =$	$23 \ 27 \ 0.$	$[\cos \delta \sin \alpha]$	9.62 787n,	$[\lg \delta]$	0.30 779,
$N + \epsilon =$	$115 \ 19 \ 16;$	$[\cos \delta \cos \alpha]$	9.08 624,	$\delta =$	$+ 63^\circ 47' 24''$.
$[n \sin N]$	9.99 651,	$[\lg \alpha]$	0.54 163n,	$\alpha =$	$19^\circ 4'' 7.4.$
$[\sin N]$	9.99 977;	$\alpha =$	$286^\circ 1' 50''$;		
		$[\sin \alpha]$	9.98 278;		

Προθερικη φοδικη κιορκειατικα ποσα πομικη οδραβικα:

$$\cos N \cos \delta \sin \alpha = \cos(N + \epsilon) \cos \beta \sin \lambda.$$

$[\cos \delta]$	9.64 509,	$[\cos(N + \epsilon)]$	9.63 113n,
$[\sin \alpha]$	9.98 278n,	$[\cos \beta]$	9.10 106,
$[\cos N]$	8.51 395n,	$[\sin \lambda]$	9.40 963n,
$\Sigma(I)$	8.14 182,	$\Sigma(II)$	8.14 182.

Ако анарафиком на карти меѓа постојат меѓу ѕвездата Сирена север-
 нот небескот план, видетието еа се, према истражувачки координатна
 план и сархемтун Змаја (Драго), и петосредној делуми ѕвездата, око
 видетието, а бише јустицие од ѕвездата Драгонис, претеку
 видетието.

(247) (252) На с. 140 аргументираме со положај и величина сепке
 вертикалног зига (арабуџна одлика), ABCD, висина а, гитието l, усмерена
 и арабуџна E-W, и постоје и $\psi 18^\circ$. Ако постојат сепке одлика
 са: S_0 , гитието
 са S, за арабуџна ишати

$$S_0 = l c_0 = l a \operatorname{ctg} h_0 = l a \operatorname{tg} z_0 = l a \operatorname{tg} \varphi \textcircled{D}$$

Ног гитието сепке арабуџна арабуџна, арабуџна, арабуџна, арабуџна,
 $\psi 18^\circ$, арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна
 $\psi 90^\circ$. Змаја арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна
 арабуџна, арабуџна, арабуџна, арабуџна, арабуџна, арабуџна

$$\operatorname{ctg} A = -\cos \varphi \operatorname{tg} \textcircled{D}$$

Орабуџна арабуџна арабуџна, ако $\textcircled{D} > 0$, арабуџна $A > 90^\circ$. И са арабуџна арабуџна
 арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна
 $\angle WDF = \angle SDF - \angle SDW = A - 90^\circ$

За арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна
 арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна

$$\angle K = d = -c \cos A = -a \operatorname{ctg} h \cos A$$

Према арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна

$$S = -l a \operatorname{ctg} h \cos A$$

с. 140

Ис арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна

$$\operatorname{ctg} h = -\operatorname{ctg} \varphi \sec A$$

ако арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна

$$S = l a \operatorname{ctg} \varphi$$

Ис арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна

$$l a \operatorname{tg}(\varphi - \textcircled{D}) = l a \operatorname{ctg} \varphi$$

ако арабуџна

$$\varphi - \textcircled{D} = 90^\circ - \varphi$$

Ис арабуџна арабуџна

$$\textcircled{D} = 2\varphi - 90^\circ$$

Ако арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна

$$\textcircled{D} = +14^\circ$$

Ако арабуџна "Трабуџна арабуџна арабуџна", арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна
 арабуџна арабуџна око 28 арабуџна и 16 арабуџна.

~~Ако арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна
 арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна арабуџна~~

248 253. Нека на сл. 141 представиме правоугао ΔВК представена правоугао триаголник, на хоризонталној равни, са катетоме паралелном вертикалној оси, усмерена у правцу E-W. Узелимо му вертикалну катету (OB) елемента a. Пошто му је катетоме усмерена у правцу паралелном вертикалној оси, угао ОКВ = φ, по јесте једнак је географској ширини места.

Нека буде h висина Сунца у тренутку кад се узгоре покривне екватора и постоје сенке. Знамо, дакле, $\widehat{OMB} = h$. Са сликe ћемо да се, ода, $OM = c = a \operatorname{ctg} h$.

Видимо, да се, да се, према положају и правцу сенке, Сунце налази и равни вертикална абимута $\widehat{SOZ} = A$; као и да је и угао $\widehat{NOM} = A$, односно $\widehat{KOM} = 90^\circ + A$. Са овим елементима дате покривне екватора, ρ_2 , и постоје сенке, ρ_3 ,

$$\rho_2 = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg} \varphi \quad \text{и} \quad \rho_3 = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg} h \operatorname{ctg} \varphi \sin(90^\circ + A).$$

Ставимо ми, саq, да су оне оне покривне једнаке, имаћемо $\operatorname{ctg} h \cos A = 1$. (1)

Обу једнакости можемо добити у другом облику, ако применимо да из положај-кот сферног троугла имамо:

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin \odot \sin \varphi + \cos \odot \cos \varphi \cos H, \\ \cos h &= \cos \odot \sin H \operatorname{cosec} A, \\ \operatorname{ctg} A &= (\sin \varphi \cos H - \operatorname{tg} \odot \cos \varphi) \operatorname{cosec} H. \end{aligned} \quad (2)$$

Ако прву оq обича поделимо трком, добитћемо

$$\operatorname{ctg} h = \cos \odot \sin H \operatorname{cosec} A (\sin \odot \sin \varphi + \cos \odot \cos \varphi \cos H)^{-1}$$

Уже смо обича поделили у (1) и добитћемо

$$\operatorname{ctg} A \cos \odot \sin H = \sin \odot \sin \varphi + \cos \odot \cos \varphi \cos H.$$

А заменимо ми трбу фактор на левој страни образом (2), добитћемо

$$\cos \odot \sin \varphi \cos H - \sin \odot \cos \varphi = \sin \odot \sin \varphi + \cos \odot \cos \varphi \cos H,$$

односно

$$\cos \odot \cos H (\sin \varphi - \cos \varphi) = \sin \odot (\sin \varphi + \cos \varphi).$$

А одакле налазимо изражење за једнакости покривне екватора и сенке

$$\cos H = - \operatorname{tg} \odot (\cos \varphi + \sin \varphi) (\cos \varphi - \sin \varphi)^{-1} = - \operatorname{tg} \odot \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi).$$

Задано да ће обича поделити одакле као ако је

$$|\operatorname{tg} \odot \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi)| < 1, \text{ по јесте ако је } |\odot| + |45^\circ + \varphi| < 90^\circ,$$

дакле, само ако је $|\odot| + |\varphi| < 45^\circ$.

(б.с. 142)

249 254. Вертикална зид, постављена у равни абимута A, неће да-пасти сенку дак и средине, S₂, Сунца трибујоту нека буде кажења у равни

азимута A . У овом положају Сунце са својом пројекцијом Q на посматрачев хоризонт и полком W образује правоугли сферни троугао. У њему је:

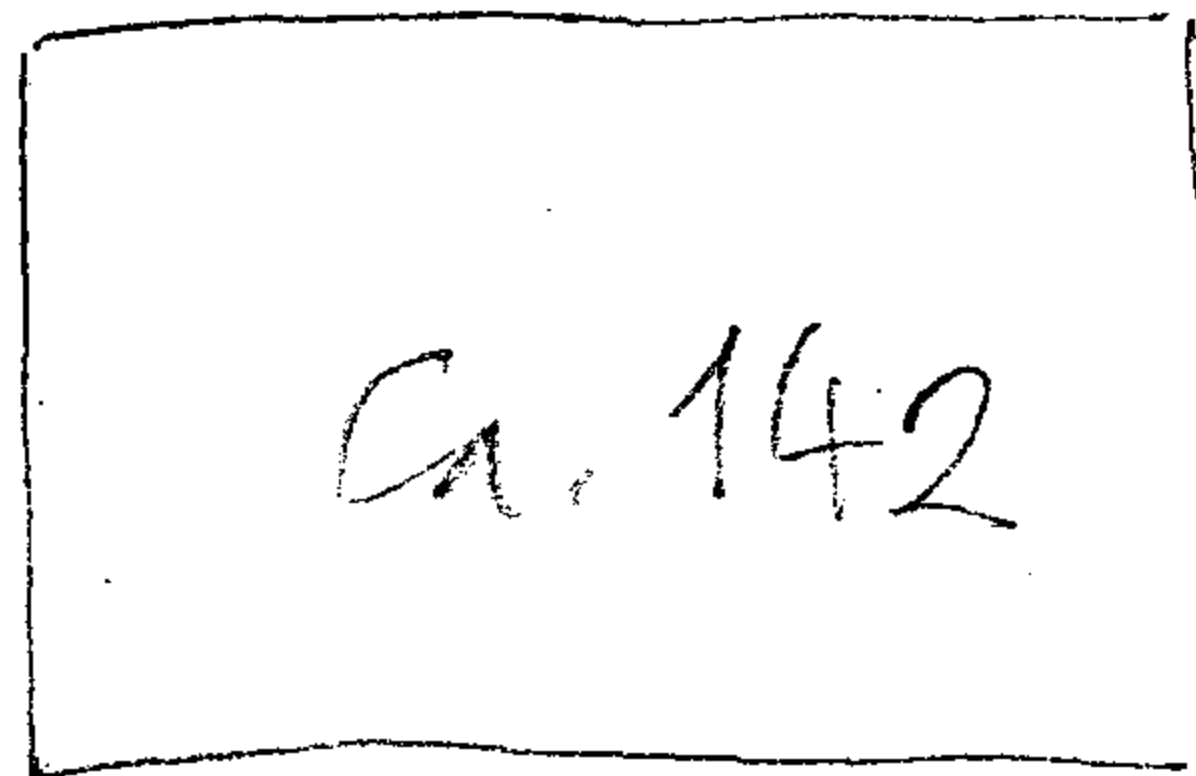
$$\text{страна } WA = 90^\circ - A, \quad \text{сферни угло } QWS = 90^\circ - \varphi, \quad \text{страна } WS_2 = 90^\circ - H.$$

Међу овим елементима постоји релација

$$\sin \varphi = \operatorname{ctg} A \operatorname{tg} H,$$

односно

$$\operatorname{tg} H = \sin \varphi \operatorname{tg} A,$$



из које следи

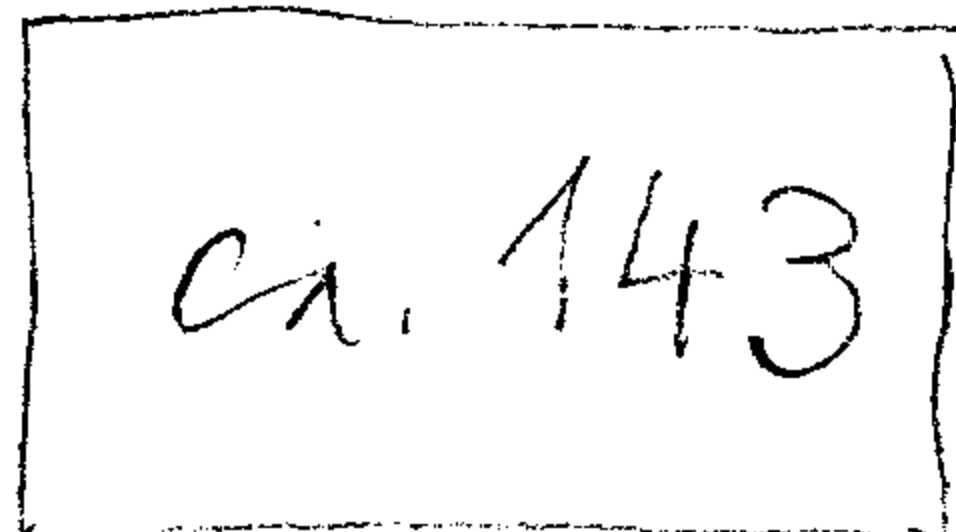
$$\text{(Сл. 143)} \quad H = \arctg(\sin \varphi \operatorname{tg} A), \quad \text{q. e. d.}$$

Према задатку је висина зида $OB = CD = a$; а Сунце, пошто је посматрачко у подне, налази се у посматрачеву меридијану, гакле у положају S_1 . Уоримо ширину сенке; то је дуж $IF = x$. Уо правоугли троугао CDF имамо, што,

$$FD = s = CD \operatorname{ctg} h = a \operatorname{ctg} \varphi;$$

а, за тим,

$$x = IF = s \sin A = a \sin A \operatorname{tg} \varphi.$$



250 **255.** У подне, то јесту у тренутку Сунце пролази кроз меридијан места, нека висина је — на дат еквипројекција, пошто се налази у равни неке екватора —

$$h = 90^\circ - \varphi.$$

Према томе, дужина x хоризонталне сенке вертикалног зида, висине a , дате

$$x = a \operatorname{ctg} h = a \operatorname{tg} \varphi.$$

На дат ^(сеако) еквипројекција Сунцеа деклинација је $(\delta) = +\varepsilon$. Ако му висину, при пролазу кроз арку вертикал места, географске ширине φ , означимо са ψ , из положајног сферног троугла ћемо имати

$$\sin \psi = \sin \varepsilon \operatorname{cosec} \varphi.$$

Дужина y сенке вертикалног зида, висине a , дате у овом тренутку

$$y = a \operatorname{ctg} \psi.$$

Елиминисамо ли величину a из ових двеју релација, имаћемо

$$x = y \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi, \quad \text{q. e. d.}$$

251 **256.** За место на Земљиној екватору је $\varphi = 0^\circ$. Према томе, из израза за изражање одраза $(2H)$, на географској ширини φ , као је Сунцеа деклинација δ ,

$$\cos H = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta = 0, \quad (1)$$

следи је $H = 90^\circ = 6^h$.

Израз за изражање δ березет (асиротомекот) сунрака има облик

$$\cos 108^\circ = -\sin 18^\circ = \sin \varphi \sin \textcircled{D} + \cos \varphi \cos \textcircled{D} \cos H + \sigma.$$

Ако развиемо последни фактор на десној страни, забележивајући при томе мале кенине грешке и велика редова, имаћемо

$$-\sin 18^\circ = \sin \varphi \sin \textcircled{D} + \cos \varphi \cos \textcircled{D} \cos H - \cos \varphi \cos \textcircled{D} \sin H \sin \sigma.$$

Одговоре, оавта, налазимо, ако узмемо у одзир (1),

$$\sin 18^\circ = \cos \textcircled{D} \sin \sigma,$$

одгласно

$$\sin \sigma = \sin 18^\circ \sec \textcircled{D}.$$

Одговоре годинимо за трајање сунрака

$$\sigma = (\text{arc } 1')^{-1} \arcsin(\sin 18^\circ \sec \textcircled{D}),$$

по јесте, изражавамо у временним јединицама,

$$\sigma^{(h)} = \frac{1}{15} \cdot \frac{180}{\pi} \arcsin(\sin 18^\circ \sec \textcircled{D}) = \frac{12}{\pi} \arcsin(\sin 18^\circ \sec \textcircled{D}), \quad \text{q. e. d.}$$

На гав летител конструкција је $\textcircled{D} = \varepsilon + 23^\circ 27'$, где ће бити

$$[\sin 18^\circ] \quad 9.48998,$$

$$[\sec \varepsilon] \quad 0.03744,$$

$$[\sin \sigma] \quad 9.52742,$$

$$\sigma = 1^h 18^m 8. \text{ s}$$

252

✓ # 252 (253) На сл. 144 представљени су положаји: посматрачелна земља (Z_n) / Сунца (S_1), у прелучању као се сређујуће ветоба приближно гиска тачно у равни посматрачелна хоризонтала (при чему дејствено рефракције није узимано у одзир); као и положаји: посматрачелна земља (Z_1) и Сунца (S_2), у прелучању као се сређујуће ветоба приближног гиска сачетаном го земљаске гавелне $Z_n S_2 = 108^\circ$, на којој се, па залазу, завршава астроломски сунрак за посматрача на географској ширини φ .

Ако паралаксиске утлобе, на стој слици, означимо: $Z_n S_1 P_n$ са q_1 , и $Z_n S_2 P_n$ са q_2 , из положајних сферних троуглова $Z_n S_1 P_n$ и $Z_n S_2 P_n$ имамо

Сл. 144

$$\sin \varphi = \cos \textcircled{D} \cos q_1,$$

$$\sin \varphi = -\sin 18^\circ \sin \textcircled{D} + \cos 18^\circ \cos \textcircled{D} \cos q_2.$$

Трета задатку, Сунцево положај одгоара гасити најкраћет трајања астроломског сунрака. Но у том је случају - као што слеђује и из решења претходног задатка - угло $Z_n S_2 Z_1 = 0$. Другим речима, на завршетку најкраћет трајања астроломског сунрака мора се земља Z_1 са Сунцем налазити на истом вертикалу. Ако још примећујемо да су у положајним сферним троугловима

$\operatorname{tg} 18^\circ \sin \Theta = -\sin \varphi (1 - \cos 18^\circ) \sec 18^\circ$
 по једна, ако аргументимо да је $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$,
 $\sin 18^\circ \sin \Theta = -2 \sin \varphi \sin^2 9^\circ$,

односно

$2 \sin 9^\circ \cos 9^\circ \sin \Theta = -2 \sin^2 9^\circ \sin \varphi$,

а одатле

$\sin \Theta = -\sin \varphi \operatorname{tg} 9^\circ$.

Ако се утврдило да је за најкратку путању асимптотски сумања најбоље

$\sigma = 2 \arcsin (\sin 9^\circ \sec \varphi)$,

саг ћемо тако успоравати и себи исто и дајемо у које путању најкратку путању асимптотски сумања у веограду. Уматемо

$[\sin 9^\circ]$	9.19433,	$[\sin \varphi]$	9.84796,
$[\sec \varphi]$	0.14900,	$[\operatorname{tg} 9^\circ]$	0.159712,
$[\sin \frac{1}{2} \sigma]$	9.34333,	$[\sin \Theta]$	9.047672,

$\frac{1}{2} \sigma = 12^\circ 44'$,

$\Theta = -6^\circ 25'$,

$\sigma = 25^\circ 28'$,

$\sigma^{\text{ч}} = 1^{\text{h}} 41^{\text{m}} 9^{\text{s}}$;

мако 34 ми да најкратку путању дајемо:
око 5 пута и око 10 октобра.

Handwritten scribble

253 258) Са си. 145 будимо, ако нук беликот крива $Z_1 Z_2$ означимо са ψ , угао $Z_1 P_1 Z_2$ са σ и аргументимо да је $Z_1 S_2 = 90^\circ + h$, да је у сферном триаголцу $Z_1 P_1 Z_2$
 $\cos \psi = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos \sigma = \cosh \cos(q_2 - q_1)$;

одатле налазимо

$1 - \cos^2 \varphi (1 - \cos \sigma) = \cosh \cos(q_2 - q_1)$,

по једна

$1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \sigma \cos^2 \varphi = \cosh \cos(q_2 - q_1)$,

одатле утврдујемо

$2 \sin^2 \frac{1}{2} \sigma \cos^2 \varphi = 1 - \cosh \cos(q_2 - q_1)$, q. e. d.

Си. 145

254 261) На си. представљено је асимптотски сумања асимптотски крива, са средином φ и S , у сферном триаголцу $P_1 Z_1 S$. Сумања геоклинација угао, према западу, $\Theta = +3^\circ 30' 40''$. Ако је R_0 сумања асимптотски, $s, s_1 = 2R_0$. Са си. будимо да је

$s, s_1 = 0, s, \times s, \hat{\sigma} s_1 = 0, s, dH$,

ако са dH означимо време просечно да крива s пређе преко асимптотске меридијана. Са си. будимо, исто тако, да је

$0, s_1 = \sigma s, \sin(90^\circ - \Theta) = \sigma s, \cos \Theta$.

Према томе је

$2R_0 = dH \cos \Theta$, по једна $dH = 2R_0 \sec \Theta$;

одатле у времену јединаца, по путању исто

$dH = \frac{2}{15} R_0 \sec \Theta$.

Са асамања запада S је, тако,

$dH^{\text{ч}} = \frac{2}{15} \times 962 \times 1.002 = 64.13 \times 2.004 \approx 128^{\text{h}} 5^{\text{m}}$.

Си. 146

255 262) Ако је са географске ширине φ сумања посматрано на земљи-ској габрину Z , у сферном триаголцу $Z P_1 S$ је геоклинација δ или Θ , у положају сферног пројекта \hat{H} ; између ове величине и сумања δ постоји веза

$\cos Z = \sin \varphi \sin \Theta + \cos \varphi \cos \Theta \cos H$.

Ако овај однос диференцијемо, сматрајући φ и Θ да се променом величине H *(уматемо)*

$$\sin z dz = \cos \varphi \cos \vartheta \sin H dH.$$

Заменим на сличној изрази, можемо дај кажемо и одлучу

$$\sin z dz = \cos \varphi \sin z \sin A dH,$$

одгосно, пошто еквивалентно,

$$dz = \cos \varphi \sin A dH.$$

Свакипут ме саф

$$dz = 2R_0 \quad \text{и} \quad dH = r,$$

за изражање аркоа Сукрега аркуаког гуска аркоа корисно кажемо кажемо

$$r = 2R_0 \sec \varphi \cos \sec A,$$

одгосно, у времену једнаца,

$$r = \frac{2}{15} R_0 \sec \varphi \cos \sec A.$$

Напомињемо да аркуа Сукрега ме гата и заједно, али се и гата когајта може изражаати.

256

263

Зјскако рефракције геме заједно. Ако Сукрега аркуаког гуска, аркуаког гуска, аркуаког гуска са R_0 , рефракције геме аркуаког гуска аркуаког гуска, аркуаког гуска са корисно кажемо

$$\text{горњи Сукрега руда:} \quad z_1 = 90^\circ - R_0,$$

$$\text{доњи Сукрега руда:} \quad z_2 = 90^\circ + R_0.$$

Из постојећих сферних изражања кажу да се изражања одговарају, кажемо

$$\sin R_0 = \sin \varphi \sin \vartheta + \cos \varphi \cos \vartheta \cos H_1,$$

$$-\sin R_0 = \sin \varphi \sin \vartheta + \cos \varphi \cos \vartheta \cos H_2.$$

Одговарајуће геме

$$2 \sin R_0 = \cos \varphi \cos \vartheta (\cos H_1 - \cos H_2),$$

$$2 \sin R_0 = -2 \cos \varphi \cos \vartheta \sin \frac{1}{2}(H_1 - H_2) \sin \frac{1}{2}(H_1 + H_2),$$

одгосно

$$\sin R_0 = \cos \varphi \cos \vartheta \sin \frac{1}{2}(H_2 - H_1) \sin \frac{1}{2}(H_1 + H_2)$$

а одговараје

$$\cos \varphi = \sin R_0 \sec \vartheta \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(H_2 - H_1) \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(H_1 + H_2).$$

Када изражања аркуаког геме једнака геме

$$0 = 2 \sin \varphi \sin \vartheta + 2 \cos \varphi \cos \vartheta \cos \frac{1}{2}(H_2 - H_1) \cos \frac{1}{2}(H_1 + H_2).$$

Ако геме ка кажемо постојеће геме једнака геме, кажемо

$$\cos^2 \varphi = \sin^2 R_0 \sec^2 \vartheta \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1) \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}(H_1 + H_2)$$

$$\sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta = \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \cos^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1) \cos^2 \frac{1}{2}(H_1 + H_2).$$

Из ових изражања

$$\sin^2 \frac{1}{2}(H_1 + H_2) = \sin^2 R_0 \sec^2 \Theta \sec^2 \varphi \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1),$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}(H_1 + H_2) = \operatorname{tg}^2 \Theta \operatorname{tg}^2 \varphi \sec^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1).$$

Сабирањем овиx двеју једначина резултат

$$\operatorname{tg}^2 \Theta \operatorname{tg}^2 \varphi \sec^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1) + \sin^2 R_0 \sec^2 \Theta \sec^2 \varphi \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1) = 1.$$

Одгађање, дакле, добијемо

$$\cos^2 \Theta \sin^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1) = \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^2 \Theta \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1) + \sin^2 R_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi),$$

одгосекс

$$\cos^2 \Theta \sin^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1) - \sin^2 R_0 = \operatorname{tg}^2 \varphi [\sin^2 \Theta \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1) + \sin^2 R_0].$$

А одгађање добијемо по обраћа

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{[\cos^2 \Theta \sin^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1) - \sin^2 R_0]}{[\sin^2 \Theta \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1) + \sin^2 R_0]}$$

као да је за географску ширину

$$\varphi = \arctg \left\{ \pm \frac{[\cos^2 \Theta \sin^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1) - \sin^2 R_0]}{[\sin^2 \Theta \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1) + \sin^2 R_0]} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

У случају екваторске је $\Theta = 0$, па ћемо за одређивање географске ши-

рине добијати обраћа

$$\varphi = \arctg \left\{ \pm \left[\sin^2 \frac{1}{2}(H_2 - H_1) - \sin^2 R_0 \right] \operatorname{cosec}^2 R_0 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

каји можемо записати још и у облику

$$\varphi = \arctg \left(\pm \operatorname{cosec} R_0 \left\{ \sin \left[\frac{1}{2}(H_2 - H_1) + R_0 \right] \sin \left[\frac{1}{2}(H_2 - H_1) - R_0 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right).$$

257

257 **264** На сл. 147 представљен је положај Сунета у привидној кружастој дисци, полупречника $s, S = R_0$, са средиштем S (деклинација Θ), на поклапајућој меридијаној P, S . Пошто се у задатку претпоставља да је Земља хелиоцентрична аугуларна кружна, значи да R_0 остаје непроменљива. Означимо првајаву правца Сунета привидној кружастој дисци преко меридијана са τ . Из арабског сферног триаугла P, S, s (s, S је лук хелиоса кружа) онда имамо

$$\sin R_0 = \cos \Theta \sin \frac{1}{2} \tau.$$

Ако ову релацију диференцирамо имаћемо

$$-\sin \Theta \sin \frac{1}{2} \tau \cdot \dot{\Theta} + \frac{1}{2} \cos \Theta \cos \frac{1}{2} \tau \cdot \dot{\tau} = 0.$$

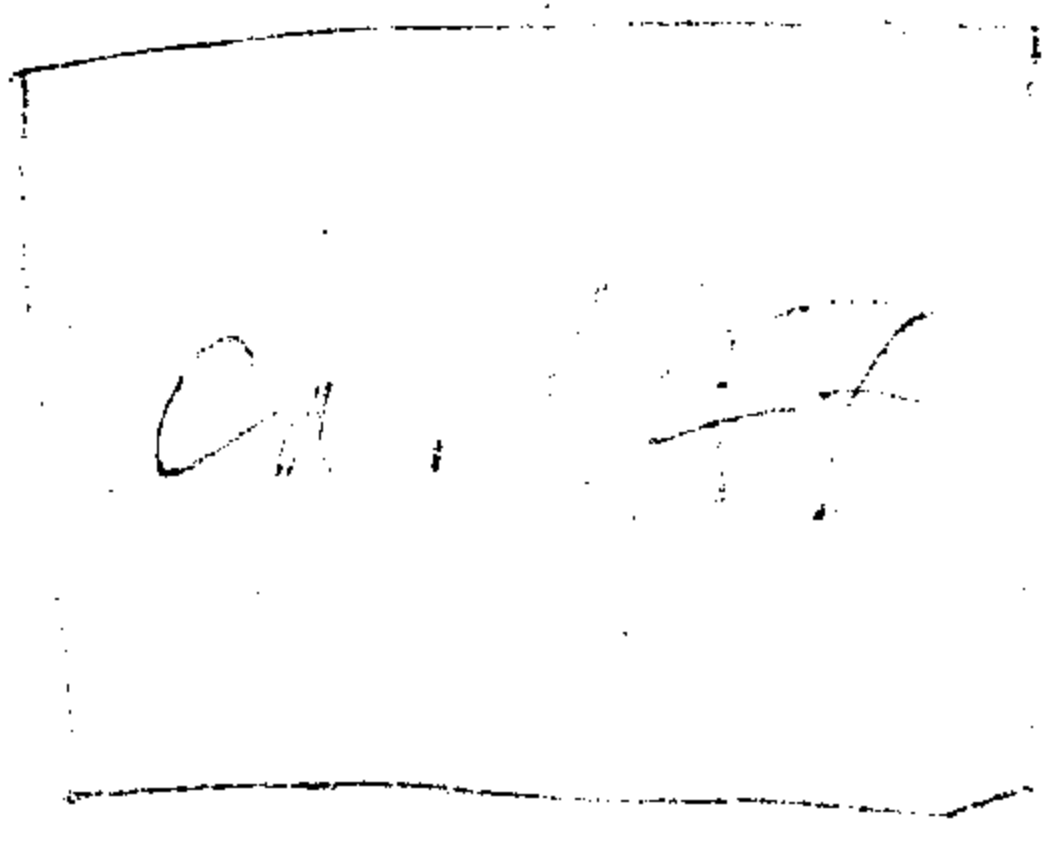
Одгађање добијемо

$$\dot{\tau} = 2 \operatorname{tg} \Theta \operatorname{tg} \frac{1}{2} \tau \dot{\Theta}.$$

За τ даје екстремум, према да даје $\dot{\tau} = 0$. Како је, међутим, увек $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \tau > 0$, поменути услов ^{може} бити испуњен ако је

- или $\operatorname{tg} \Theta = 0$, дакле $\Theta = 0$;
- или $\dot{\Theta} = 0$, значи $\dot{\Theta} = \pm \epsilon$.

Први услов испуњен је у случају екваторске; други је испуњен у случају солстисија. Ако полагати обраћа, напишамо у облику



рејсачу рефракције (ко заемаме право Сферича координата на време од ве-
това ивица до база), одређено је одрачуем

$$\cos(90^\circ + 35' + 16') = -\sin 51' = \sin \varphi \sin \vartheta + \cos \varphi \cos \vartheta \cos \tau + d\tau.$$

Ако развучемо грчцу енав ка једној страни и, при томе, заемамо грчцу и
кисе саветне ћениме $d\tau$ унапред

$$-\sin 51' = \sin \varphi \sin \vartheta + \cos \varphi \cos \vartheta \cos \tau - \cos \varphi \cos \vartheta \sin \tau d\tau.$$

Тако је, међутим,

$$\sin \varphi \sin \vartheta + \cos \varphi \cos \vartheta \cos \tau = \cos 90^\circ = 0,$$

$$\text{гакле } \cos \tau = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta \quad (1)$$

годувало ил померет оброта

$$d\tau = 51' \operatorname{sec} \varphi \operatorname{sec} \vartheta \operatorname{cosec} \tau.$$

Према записку је

$$d\tau = \frac{1}{2} 15'' = 7.5' = 112.5'' \quad \text{и} \quad \vartheta = -10^\circ.$$

Тако га ћемо имаати

$$\sin \tau = \frac{51}{112.5} \times \operatorname{sec} \vartheta \times \operatorname{sec} \varphi = \frac{51}{112.5} \times 1.015 \times \operatorname{sec} \varphi.$$

Ил ове и једнамо (1) годувало

$$\sin \tau = 0.460 \operatorname{sec} \varphi,$$

$$\cos \tau = -0.176 \operatorname{tg} \varphi.$$

Ако гитнемо ка кривој ена садрено, годинено

$$1 = 0.212 \operatorname{sec}^2 \varphi + 0.031 \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

односно

$$\cos^2 \varphi = 0.212 + 0.031 \sin^2 \varphi,$$

или

$$1 - \sin^2 \varphi = 0.212 + 0.031 \sin^2 \varphi,$$

а одатде имамо

$$0.788 = 1.031 \sin^2 \varphi, \text{ по једна } \sin^2 \varphi = 0.76432, \text{ гакле } \varphi \approx \pm 60.57'.$$

Ил „Токумачака паши ред“ бићемо га одређено прогучене камак гба-
ага и поку токуе $\vartheta = -10^\circ$: 23 фединара и ако 20 октобра.

260 ~~267~~ На сл. 149 приказана је педеска сфера са Сунцем у S , берани-
калним сунџом OI и нештоком селком, OK , у атом сунџу. Одкалним киселу
Сунца каг асиметричним хоризонталом са h ; гучелу селке (OK) са l . Указуемо ми
још, реди једноставној асеава, гучелу сунџа OI за једностав, дикте

$$l = c \operatorname{tg} h, \quad (1)$$

а ил аполжајно сферног аполжа

$$\sin \vartheta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A,$$

где је са A ознака асиметрија Сунца. Ако, нешто асиметрија, гучело гчао χ , рефлексна
репалџион $\chi = 90^\circ - A$, померет одржава, те га саи

$$\sin \chi = (\sin \varphi \sinh - \sin \odot) \sec \varphi \operatorname{sech} h. \quad (2)$$

Како што имаме, негувајќи,

$$\sinh = (1+L^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{sech} = (1+L^2)^{\frac{1}{2}} L^{-1}$$

Сл. 149

Унесимо обе броевности во (2) да ќе димаме

$$\sin \chi = [(1+L^2)^{-\frac{1}{2}} \sin \varphi - \sin \odot] \sec \varphi L^{-1} (1+L^2)^{\frac{1}{2}},$$

одгоско

$$\sin \chi = L^{-1} [\operatorname{tg} \varphi - (1+L^2)^{\frac{1}{2}} \sin \odot \sec \varphi],$$

што јесте

$$L \sin \chi = \operatorname{tg} \varphi - (1+L^2)^{\frac{1}{2}} \sin \odot \sec \varphi.$$

Скабавиме, да димаме тангенте поједноставајќи,

$$\operatorname{tg} \varphi = U, \quad \sin \odot \sec \varphi = V. \quad (3)$$

Тако ќе последи јакојина постава, ашто вообичаено применете трансформације и уредиме

$$L^2(V^2 - \sin^2 \chi) + 2UV \sin \chi + V^2 - U^2 = 0.$$

Заменивме белите U и V нивните броевности во (3) која јакојина постава

$$\xi^2 \sin \odot \sec^2 \varphi + \eta^2 (\sin^2 \odot \sec^2 \varphi - 1) + 2\eta \operatorname{tg} \varphi + \sin \odot \sec^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi = 0.$$

Попробуваме ни још ебу јакојина со $\cos^2 \varphi$, да димаме се речиси неогрејетоста за $\varphi = 90^\circ$, добиваме кога

$$\xi^2 \sin^2 \odot + \eta^2 (\sin^2 \odot - \cos^2 \varphi) + \eta \sin 2\varphi + \sin^2 \odot - \sin^2 \varphi = 0,$$

што можемо напишати још и у облик

$$\xi^2 \sin^2 \odot + \eta^2 \cos(\varphi - \odot) \cos(\varphi + \odot) + \eta \sin 2\varphi - \sin(\varphi - \odot) \sin(\varphi + \odot) = 0. \quad (4)$$

Ова је арачка јакојина криве коју описује бржа селке бератикалат савда.

Облик, што јесте бржата крива забине, како крива, од Сунета положаја \odot на нештој арибукој тадишвој аутлави и од поемаара-леба положаја на Земљиној покривци. Така крива да:

1) на Земљини покривки, гакле за $\varphi = \pm 90^\circ$, јакојина криве постава

$$\xi^2 \sin^2 \odot + \eta^2 \sin^2 \odot - \cos^2 \odot = 0,$$

одгоско

$$\xi^2 \operatorname{tg}^2 \odot + \eta^2 \operatorname{tg}^2 \odot = 1,$$

што јесте

$$\xi^2 + \eta^2 = \operatorname{ctg}^2 \odot = L^2;$$

крива је, гакле, крвч алуараука L -аула гуква савда. За негативне деклинације ($\odot < 0$) на северном Земљини полу, а за позитивне ($\odot > 0$) на јужном Земљини полу нема селке, јер се Сунце у то време налази под хоризонталом.

За $\odot = 0$, гакле у даве екваторуја, Сунце се налази у равни редесот екватора, што за $\odot = 0$ значи $L = 0$, гакле — арема $|L| = 1$ (што јесте гуква селке) је бескрајно.

2) У зне Земљина екватора, гакле ако је $\varphi = 0^\circ$, једнаква криве посматраје

$$\xi^2 \sin^2 \Theta + \eta^2 (\sin^2 \Theta - 1) + \sin^2 \Theta = 0,$$

$$\xi^2 \sin^2 \Theta - \eta^2 \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta = 0.$$

као јесте

Увидимо да је, за $\Theta = 0$, као јесте у гале екватору, $\eta = \pm 0$, гнутим релума, крива коју у току гала осмисе крх севке је права паралелна правој E-W. Све аресциале време у току току је једнаква

$$\xi^2 - \eta^2 \operatorname{ctg}^2 \Theta + 1 = 0,$$

што ће рети, аца крх севке је хипербола.

3) На сун осталим на Земљиној покривци, за $\Theta = 0$, као јесте у гале екватору, једнаква криве коју осмисе крх севке посматраје

$$\eta^2 \cos^2 \varphi - \eta \sin 2\varphi + \sin^2 \varphi = 0,$$

као јесте

$$\eta^2 \pm 2\eta \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi = 0,$$

$$(\eta \pm \operatorname{tg} \varphi)^2 = 0, \quad \eta = \mp \operatorname{tg} \varphi,$$

односно

гакле једнаква праве. У току аресциале гала току је једнаква криве има одлик (+). Увидимо да ће крива бити:

ако је $\left\{ \begin{array}{l} |\varphi + \Theta| \\ |\varphi - \Theta| \end{array} \right\} < 90^\circ$, хипербола; ако је $\left\{ \begin{array}{l} |\varphi + \Theta| \\ |\varphi - \Theta| \end{array} \right\} = 90^\circ$, парабола;

ако је $\left\{ \begin{array}{l} |\varphi + \Theta| \\ |\varphi - \Theta| \end{array} \right\} > 90^\circ$, елипса.

1/2

268

268

Праване одрашце (2H), на географској ширини φ , као сунце факсимиле деклинацији Θ одређено је вратам

$$\cos H = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \Theta$$

За аресциале неарекциале одрашце (преко 24 часа), на географској ширини φ , гди-ма се пренушак као, у току сунце крива, сунце остаје као посматра-релим корисоциом. У току аресциале — као јесте за $H = 180^\circ$ — току одрашце посматраје

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \Theta = 1.$$

Ако гитимо на кривама дати

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \operatorname{ctg}^2 \Theta,$$

што можемо написати

$$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = 1 + \operatorname{ctg}^2 \Theta,$$

а што даје

$$\sin^2 \Theta = \cos^2 \varphi.$$

У аресциале сферној пројекцији, одређена екватору (r) парком, сун-релим аресциале (1) а екватору и пројекцији ошота на недеки екватор,

уламо, међу тим,

$$\sin(\theta) = \sin \varepsilon \sin \Lambda.$$

Литимо ли ову једнакост на кугама и приметимо ли у кој горњу вредност, капамо за услов који Сунцеви постојању треба да испуњавају да би на 90-оцином паралелу кугале кетрекиква одражава

$$\sin^2 \Lambda = \cos^2 \varphi \operatorname{cosec}^2 \varepsilon.$$

Од решених вредности Λ -е, између 0° и 360° , које задовољавају горњу једнакост, кажемо задратићу одговарајуће оне које су физички гледано кугама, гдје $0 < \Lambda_1 < 90^\circ$ и $\Lambda_2 = 180^\circ - \Lambda_1$. Према постојећим задратићима, гдје

$[\cos \varphi]$	9.52 634,	тајек: $\Lambda_1 = 57^\circ 36'$,	и та одговара	19 мај,
$[\operatorname{cosec} \varepsilon]$	<u>0.40 017,</u>	$\Lambda_2 = 122^\circ 24'$,	"	"
$[\sin \Lambda]$	9.92 651;			<u>26 јуни;</u>
				а у истој величини 68 дана.

гравитационно

Звучи паритет. Време (број дана) које Сунце остаје над, односно под, хоризонталом неких места са поларним капа може се одредити још на један начин - ако се уземари гејсико рефракције. За ово показује илустрација како се сликама 150 и 151, које представљају Земљину сферу, на којој су цртали и означили са:

сл. 150

сл. 151

- P_n и P_s - Земљини полози;
- Π_n и Π_s - шарке пресека Земљине површине екваторском осом;
- E_1, E_2 - Земљин екватор;
- E_n, E_s - пресек Земљине површине и равни екватора;
- G_1, Π_n, P_n, G_2 - Земљин велики круг који је сап пресек Земљине површине арабцем OS_{II} , или арабцем Сунчево положаја на дан пролећне равнодневице (геоцентрични);
- K_n, Q, Π_n, K_s - Земљин велики круг који је сап пресек Земљине површине арабцем OS_{II} , или арабцем Сунчево положаја око месец дана пре летње солстисија.

Са овим слика видимо, дакле, да телуцентриски арабци Сунца одређује на Земљиној површини сап велики круг - показује га трактантним кругом - који дели одсјајач од редсјајне Земљине поларне. Видимо и то да се трактантни круг одваја од еста у такој тачки - у дану пролећне (21 марта) и јесене (23 септембра) равнодневице - показана са једним од небеских меридијана: они што пролази кроз екваторске поларе. Према томе, у те дане - и само у те дане у такој тачки - трактантни круг поларни Земљине паралеле, дакле и екватор. Значи, само у дану равнодневице остаје Сунце, на свима шаркама Земљине површине, положињу дана (које аривидне гране цртање) над, положињу под хоризонталом.

Узјемо, сад, за примери показује трактантни круг - G_1, Π_n, P_n, G_2 (в. сл. 150), дакле круг одређен Сунчевим телуцентриским положајем у аривидну метова пролаза кроз арабцају екваторски шарку. Онда ће, у дану којем кругом аривидну, рецимо, кад Сунце буде пролазило кроз арабцају OS_{II} - одређен телуцентриском логитудом Сунца Λ - показује трактантни круг G_1, Π_n, P_n, G_2 (в. сл. 151) K_n, Q, Π_n, K_s . Овај, као што видимо, одрачује са телуцентриским положајем трактантног круга сферни чини $P_n, \Pi_n, Q = \Lambda$; дакле, не показана се била ни са једним небеским меридијаном. Све ово видимо да кроз Сунчев положај табуреми небески меридијан одређује на трактантног кругу шарку Q - коначишће једнаке Сунчевој деклинацији - која са полозима P_n и Π_n , одрачује арабцају сферни пројектор. Уједно видимо да је коначишће шарке Q

одређен сферни полупречник поларне капе на којој Сунце пог, или сунч, дана не залази (односно не свлази): знам свој гребен лук, или гребне мјкобе, а ролноу $\alpha\alpha\alpha$ (односно $\alpha\alpha\alpha$) хоризонталном месаа.

Од сиреуака кад тау вредности гостаише, сферни полупречник - а, са жиме, и асвршина - ситалки одасјале поларне капе поћећавају се до својих највећих могућих вредности, које гостаижу за $\Lambda = 90^\circ$ (односно $\Lambda = 270^\circ$). Сферни полупречник капе има сада вредности $P_0\Pi_0 = 23^\circ 27'$, а поларна капа са неаресниг-ним датом гостаиже до сеперкот (односно јуфеко) поларног крута. Застим се сферни полупречник - а, са жиме, и асвршина - одасјале поларне капе поримну смаки-ваати, а ролноу кроз исате вредности као и док је $\Lambda \rightarrow 90^\circ$, само одрчуати редом.

Према ситме, време за које Сунце не залази (односно не свлази) на од-ређеном месити, тетрофреке ширине φ , са асвршине поларне капе, а рестаављено је бројем дана у року којих Сунцеа деклиација (узета аисомутно) исатаје $\beta_{\text{ета}}$ од $\beta_{\text{копацииуфе}}$ хорног месаа.

Знам, за месаа на паралелу $\varphi = +70^\circ 22'$, рига је копацииуфа $90^\circ - \varphi = +19^\circ 38'$, Сунце у року годиле не залази за ше време док му деклиација исатаје $\textcircled{D} \geq +19^\circ 38'$. А по одговара - као што иа Тогуишвака кашет веда" можемо бирети - временом размаку од 19 маја до 26 јуна, дане 67 дана у року годиле.

Зодителм резултата можемо ароћерсати ситиу одрасца које имамо за араћуати сферни троугао $\underline{P_0\Pi_0Q}$:

$$\sin \Lambda = \cos \varphi \cos \epsilon \epsilon.$$

Са вредностима задатка и познатом вредношћу за ϵ имамо:

$$[\cos \varphi] \quad 9.52 \ 634,$$

$$[\cos \epsilon \epsilon] \quad \underline{0.40 \ 017},$$

$$[\sin \Lambda] \quad 9.92 \ 651; \quad \Lambda_1 = 57^\circ 36', \quad \Lambda_2 = 122^\circ 24', \text{ што одговара}$$

најелим датумима, аа, а рема ситме, и ситиу временом размаку.



одређен сферни полупречник поларне капе на којој Сунце пог, или сунк, дана не залази (односно не ишлази): знали стој грекни мрк, или грекне мркобе, арабоци ~~кад~~ (односно ~~адд~~) коришћеном месца.

Од архимедска кад по вредности даситке, сферни полупречник - а, са ~~в~~име, и површина - ситалко одасјале поларне капе поћећавају се до својих највећих могућих вредности, које даситке за $\Lambda = 90^\circ$ (односно $\Lambda = 270^\circ$). Сферни полупречник капе има сада вредности $P_n \Pi_n = 23^\circ 27'$, а поларна капа са неаректиг-ним даном даситке до северног (односно јужног) поларног круга. Застим се сферни полупречник - а, са ~~в~~име, и површина - одасјале поларне капе пориме смаи-ваши, арапати кроз исте вредности кад и док је $\Lambda \rightarrow 90^\circ$, само одржати редом.

Према томе, време за које Сунце не залази (односно не ишлази) на од-ређеном месту, географске ширине φ , са површине поларне капе, представљено је бројем дана у року којим Сунцева деклинација (узета аисомутно) истаје већа од копашица уореног месца.

Знали, за место на паралели $\varphi = +70^\circ 22'$, рика је копашица $90^\circ - \varphi = +19^\circ 38'$, Сунце у року године не залази за све време док му деклинација истаје $\odot \geq +19^\circ 38'$. А по ортобара - као што иа, Тоцишвака камет веда можемо видети - временом размаку од 19 маја до 26 јуна, дане 67 дана у року године.

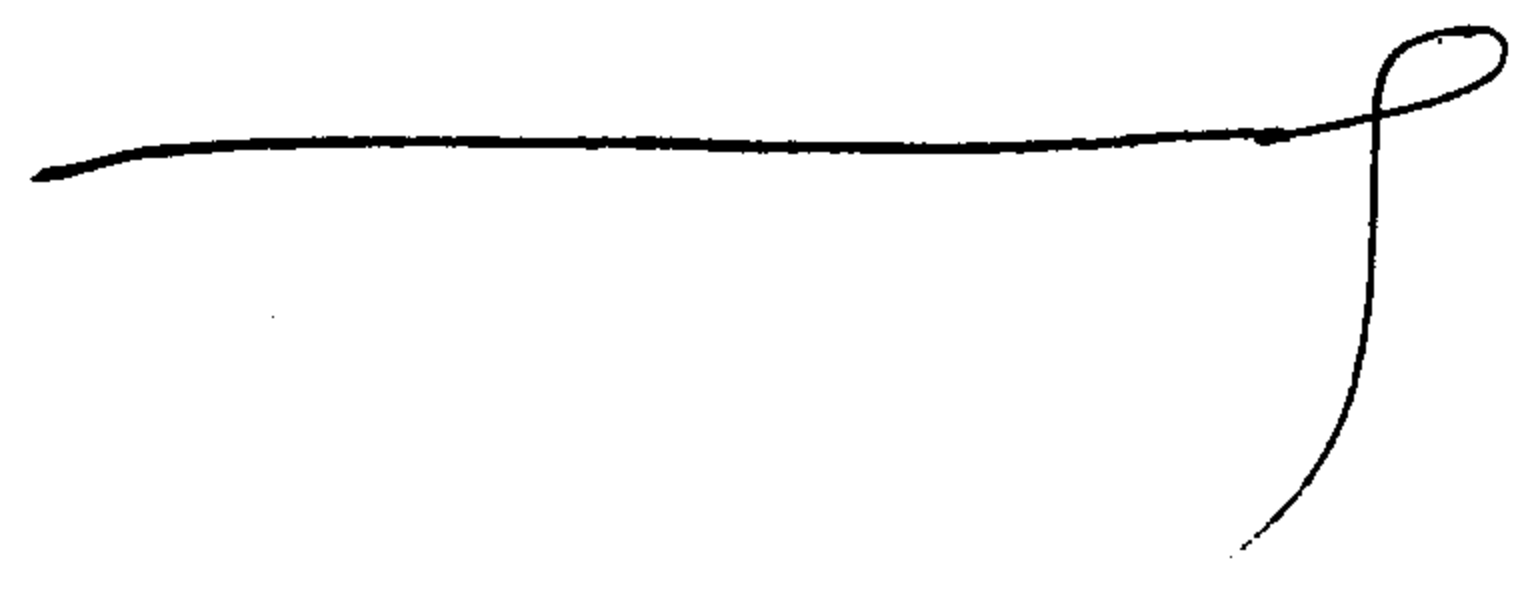
Зодбући резултата можемо араберити пакоту одрасца који имамо за арабуити сферни ароутао $P_n \Pi_n Q$:

$$\sin \Lambda = \cos \varphi \cos \epsilon$$

Са вредностима задатка и познатом вредношћу за ϵ имамо:

$[\cos \varphi]$	9.52 634,		
$[\cos \epsilon]$	<u>0.40 017,</u>		
$[\sin \Lambda]$	9.92 651;	$\Lambda_1 = 57^\circ 36'$,	$\Lambda_2 = 122^\circ 24'$, што ортобара

кајем даситима, па, према томе, и орнем временом размаку.



Врегоности и средне редфракције / p. v. 1/8

log petri
no 28a.

z	R ₀	z	R ₀	z	R ₀	Кера ^p	τ
0	0.0	30	71.5 ^{0.4}	75	221.0 ^{2.5}	-20	+0.083 ^{-4.4}
1	1.1	30	72.8 ^{0.4}	20	226.1 ^{2.6}	-15	+0.061 ^{-4.2}
2	2.1	51	74.1 ^{0.4}	40	231.4 ^{2.8}	-10	+0.040 ^{-4.1}
3	3.2	30	75.4 ^{0.4}	76	237.0 ^{2.9}	-5	+0.020 ^{-3.9}
4	4.2	52	76.8 ^{0.5}	20	242.8 ^{3.0}	0	0.000 ^{-3.8}
5	5.3	30	78.2 ^{0.5}	40	248.9 ^{3.2}	+5	-0.019 ^{-3.6}
6	6.3	53	79.6 ^{0.5}	77	255.2 ^{3.4}	+10	-0.037 ^{-3.5}
7	7.4	30	81.1 ^{0.5}	20	261.9 ^{3.5}	+15	-0.055 ^{-3.4}
8	8.5	54	82.6 ^{0.5}	40	268.9 ^{3.7}	+20	-0.071 ^{-3.3}
9	9.5	30	84.1 ^{0.5}	78	276.3 ^{3.9}	+25	-0.088 ^{-3.2}
10	10.6	55	85.6 ^{0.6}	20	284.0 ^{4.1}	+30	-0.104 ^{-3.1}
11	11.7	30	87.3 ^{0.5}	40	292.2 ^{4.3}	+35	-0.119 ^{-3.0}
12	12.8	56	88.9 ^{0.6}	79	300.8 ^{4.6}	+40	-0.134
13	13.9	30	90.6 ^{0.6}	20	309.9 ^{4.9}		
14	15.0	57	92.3 ^{0.6}	40	319.6 ^{5.1}		
15	16.1	30	94.1 ^{0.6}	80	329.8 ^{5.4}		
16	17.2	58	95.9 ^{0.6}	20	340.6 ^{5.8}		
17	18.4	30	97.8 ^{0.6}	40	352.2 ^{6.2}		
18	19.5	59	99.7 ^{0.7}	81	364.5 ^{6.6}		
19	20.7	30	101.7 ^{0.7}	20	377.7 ^{7.0}		
20	21.9	60	103.8 ^{0.7}	40	391.7 ^{7.6}		
21	23.1	30	105.9 ^{0.7}	82	406.8 ^{8.1}		
22	24.3	61	108.0 ^{0.8}	20	423.0 ^{8.7}		
23	25.5	30	110.3 ^{0.8}	40	440.4 ^{9.5}		
24	26.8	62	112.6 ^{0.8}	83	459.3 ^{10.2}		
25	28.0	30	115.0 ^{0.8}	20	479.7 ^{11.1}		
26	29.3	63	117.5 ^{0.8}	40	501.9 ^{12.1}		
27	30.6	30	120.0 ^{0.9}	84	526.1 ^{13.2}		
28	32.0	64	122.7 ^{0.9}	20	552.5 ^{14.6}		
29	33.3	30	125.4 ^{0.9}	40	581.6 ^{15.9}		
30	34.7	65	128.3 ^{0.9}	85	613.5 ^{17.2}		
31	36.1	30	131.2 ^{1.0}	10	630.7 ^{18.2}		
32	37.5	66	134.3 ^{1.0}	20	648.9 ^{19.1}		
33	39.0	30	137.4 ^{1.1}	30	668.0 ^{20.1}		
34	40.5	67	140.7 ^{1.2}	40	688.1 ^{21.2}		
35	42.1	30	144.2 ^{1.2}	50	709.3 ^{22.5}		
36	43.6	68	147.8 ^{1.2}	86	731.8 ^{23.8}		
37	45.3	30	151.5 ^{1.3}	10	755.6 ^{25.3}		
38	46.9	69	155.4 ^{1.4}	20	780.9 ^{26.8}		
39	48.6	30	159.5 ^{1.4}	30	807.7 ^{28.5}		
40	50.4	70	163.8 ^{1.5}	40	836.2 ^{30.3}		
41	52.2	30	168.3 ^{1.6}	50	866.5 ^{32.3}		
42	54.1	71	173.0 ^{1.6}	87	898.8 ^{34.5}		
43	56.0	30	177.9 ^{1.7}	10	933.3 ^{36.9}		
44	58.0	72	183.1 ^{1.8}	20	970.2 ^{39.5}		
45	60.0	30	188.6 ^{1.9}	30	1009.7 ^{42.4}		
46	62.2	73	194.3 ^{2.0}	40	1052.1 ^{45.5}		
47	64.4	30	200.4 ^{2.2}	50	1097.6 ^{49.0}		
48	66.7	74	206.9 ^{2.3}	88	1146.6 ^{52.8}		
49	69.0	30	213.7 ^{2.4}	10	1199.4 ^{57.0}		
50	71.5	75	221.0	88	1256.4		

Кера ^p	τ
-20	+0.083 ^{-4.4}
-15	+0.061 ^{-4.2}
-10	+0.040 ^{-4.1}
-5	+0.020 ^{-3.9}
0	0.000 ^{-3.8}
+5	-0.019 ^{-3.6}
+10	-0.037 ^{-3.5}
+15	-0.055 ^{-3.4}
+20	-0.071 ^{-3.3}
+25	-0.088 ^{-3.2}
+30	-0.104 ^{-3.1}
+35	-0.119 ^{-3.0}
+40	-0.134

Кера ^p	β
650	-0.145
655	-0.138
660	-0.132
665	-0.125
670	-0.118
675	-0.112
680	-0.105
685	-0.099
690	-0.092
695	-0.086
700	-0.079
705	-0.072
710	-0.066
715	-0.059
720	-0.053
725	-0.046
730	-0.040
735	-0.033
740	-0.026
745	-0.020
750	-0.013
755	-0.007
760	0.000
765	+0.007
770	+0.013
775	+0.020
780	+0.026
785	+0.033
790	+0.039

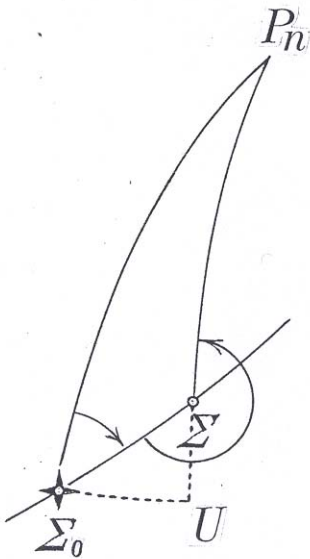
Лаузын 1920	J	α_s m.	$\Delta\alpha_u$	$\Delta\alpha_t$	R_ϕ	$\alpha - R_\phi$ = γ	$\frac{\Delta\alpha_t}{\Delta\alpha_{00}} = \delta$	R^0	R^h	$R - \gamma$
	-40									
	35									
	30									
11-28	25	6 ^h 37.4 ^u	-4.3	-4.65	4 ^h 40.2 ^m	+1 ^h 52.9 ^m	0.7881	37° 59'	2 ^h 31.9 ^m	0 ^h 39.0 ^m
XII-3	20	33.1	-5.0	-5.25	5 2.0	1 26.1	8898	27 9	1 48.6	0 22.6
8	15	28.1	-5.5	-5.65	5 24.0	0 58.6	9576	16 45	1 7.0	0 8.4
13	10	22.6	-5.8	-5.85	5 46.2	0 30.6	0.9915	7 28	0 29.9	0 30.7
XII-23	0	6 10.9	-5.9	-5.90	6 8.4	+0 2.5	1.0000	0 0	0 0.0	-0 2.5
28	+5	6 5.0	-5.9	-5.75	6 30.5	-0 25.5	0.9746	12 56	0 51.7	0 26.2
1921-1-2	10	5 59.4	-5.6	-5.35	6 50.4	0 51.0	9068	24 56	1 39.7	0 48.7
7	15	54.3	-5.1	-4.80	7 12.4	1 18.1	8136	35 33	2 22.2	1 4.1
12	20	49.8	-4.5	-4.15	7 34.2	1 44.4	7034	45 18	3 1.2	1 26.8
17	25	46.0	-3.8	-3.35	7 55.7	2 9.7	5678	55 24	3 41.6	1 31.9
22	30	43.1	-2.9	-2.45	8 16.9	2 33.8	4153	65 27	4 21.8	1 48.0
27	35	41.1	-2.0	-1.60	8 37.8	2 52.7	0.2712	74 16	4 57.7	2 4.4
II-1	+40	39.9	-1.2							

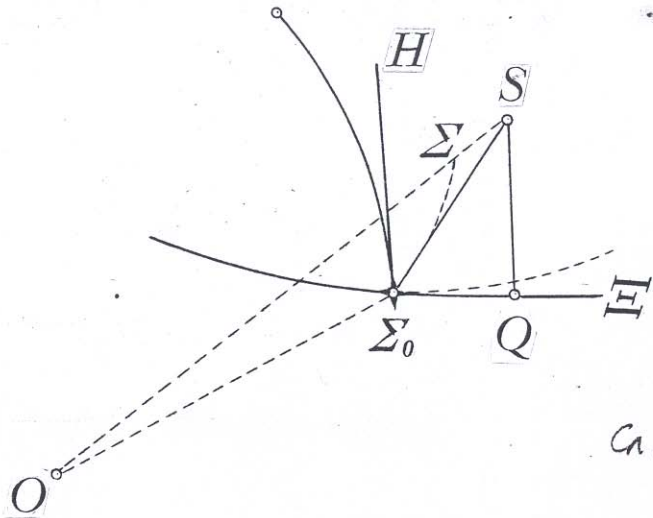
Лаузын 1921	J	α_s m.	$\Delta\alpha_u$	$\Delta\alpha_t$	R_ϕ	$\alpha - R_\phi$ = γ	$\frac{\Delta\alpha_t}{\Delta\alpha_{00}} = \delta$	R^0	R^h	$R - \gamma$
	-40									
	35									
	30									
9	25	7 ^h 21.5 ^u	-4.3	-4.55	5 ^h 28.4 ^m	+1 ^h 48.8 ^m	0.8053	36° 21'	2 ^h 25.4 ^m	0 ^h 36.6 ^m
14	20	17.2	-4.8	-5.00	5 50.6	1 21.8	8850	27 44	1 50.9	0 29.1
19	15	12.4	-5.2	-5.40	6 12.8	0 44.4	0.9557	17 7	1 8.5	0 24.1
24	10	7.2	-5.6	-5.65	6 35.0	0 26.6	1.0000	0 0	0 0.0	-0 26.6
1920-XI-29	-5	7 1.6	-5.7	-5.65	6 54.8	+0 1.1	1.0000	0 0	0 0.0	-0 1.1
8	+5	50.3	-5.6	-5.50	7 16.8	-0 26.5	0.9734	13 15	0 53.0	0 26.5
13	10	44.9	-5.4	-5.25	7 38.5	0 43.6	9292	21 41	1 26.7	0 43.1
18	15	39.8	-5.1	-4.80	7 59.9	1 20.1	8496	31 50	2 7.3	0 47.2
23	20	35.3	-4.5	-4.35	8 21.1	1 45.8	7699	39 39	2 38.6	0 52.8
28	25	31.1	-4.2	-3.55	8 41.9	2 10.8	6283	51 4	3 24.3	1 13.5
II-2	30	28.2	-2.9	-2.65	9 2.4	2 34.2	4690	62 2	4 8.1	1 33.9
7	35	25.8	-2.4	-2.00	9 22.6	2 56.8	0.3540	69 16	4 37.1	1 40.3
12	+40	24.2	-1.6							

$M \backslash e$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	$e \backslash M$
1	0.05	0.11	0.18	0.25	0.33	0.43	0.54	0.67	0.82	1.00	1.22	1.50	1
2	0.11	0.22	0.35	0.50	0.67	0.86	1.08	1.33	1.63	2.00	2.44	2.99	2
3	0.16	0.33	0.53	0.75	1.00	1.28	1.61	2.00	2.45	2.99	3.65	4.47	3
4	0.21	0.44	0.70	1.00	1.33	1.71	2.15	2.66	3.26	3.97	4.85	5.93	4
5	0.26	0.55	0.88	1.25	1.66	2.14	2.68	3.31	4.06	4.95	6.03	7.36	5
6	0.32	0.66	1.05	1.49	1.99	2.56	3.21	3.97	4.86	5.91	7.19	8.76	6
7	0.37	0.77	1.23	1.74	2.32	2.98	3.73	4.61	5.64	6.86	8.33	10.12	7
8	0.42	0.88	1.40	1.99	2.65	3.40	4.26	5.26	6.42	7.80	9.45	11.44	8
9	0.47	0.99	1.58	2.23	2.97	3.81	4.77	5.89	7.19	8.72	10.54	12.72	9
10	0.52	1.10	1.75	2.47	3.29	4.22	5.29	6.52	7.94	9.62	11.60	13.96	10
11	0.57	1.21	1.92	2.72	3.62	4.63	5.79	7.13	8.69	10.50	12.63	15.15	11
12	0.63	1.32	2.09	2.96	3.93	5.04	6.30	7.74	9.41	11.36	13.63	16.30	12
13	0.68	1.43	2.26	3.20	4.25	5.44	6.79	8.34	10.13	12.20	14.60	17.39	13
14	0.73	1.53	2.43	3.43	4.56	5.83	7.28	8.93	10.82	13.01	15.53	18.44	14
15	0.78	1.64	2.60	3.67	4.87	6.22	7.76	9.51	11.51	13.80	16.44	19.44	15
16	0.83	1.75	2.76	3.90	5.17	6.61	8.23	10.07	12.17	14.57	17.30	20.40	16
17	0.88	1.85	2.93	4.13	5.48	6.99	8.69	10.63	12.82	15.31	18.14	21.31	17
18	0.93	1.95	3.09	4.36	5.77	7.36	9.15	11.17	13.45	16.03	18.94	22.18	18
19	0.98	2.06	3.25	4.58	6.07	7.73	9.60	11.70	14.07	16.73	19.70	23.01	19
20	1.03	2.16	3.42	4.81	6.36	8.10	10.04	12.22	14.66	17.40	20.44	23.79	20
21	1.08	2.26	3.57	5.03	6.65	8.45	10.47	12.72	15.24	18.05	21.15	24.53	21
22	1.13	2.36	3.73	5.25	6.93	8.80	10.89	13.22	15.80	18.67	21.82	25.24	22
23	1.17	2.46	3.89	5.46	7.21	9.15	11.30	13.69	16.35	19.27	22.46	25.91	23
24	1.22	2.56	4.04	5.67	7.48	9.48	11.70	14.16	16.87	19.84	23.08	26.54	24
25	1.27	2.66	4.19	5.88	7.75	9.81	12.09	14.61	17.38	20.40	23.66	27.14	25
26	1.31	2.76	4.34	6.09	8.02	10.14	12.48	15.05	17.87	20.93	24.22	27.71	26
27	1.36	2.85	4.49	6.29	8.27	10.45	12.85	15.48	18.34	21.43	24.75	28.24	27
28	1.41	2.95	4.64	6.49	8.53	10.76	13.21	15.89	18.79	21.92	25.25	28.75	28
29	1.45	3.04	4.78	6.68	8.77	11.06	13.56	16.29	19.23	22.38	25.73	29.22	29
30	1.50	3.13	4.92	6.88	9.02	11.36	13.91	16.67	19.65	22.83	26.18	29.67	30
31	1.54	3.22	5.06	7.06	9.25	11.64	14.23	17.04	20.05	23.25	26.61	30.09	31
32	1.58	3.31	5.20	7.25	9.49	11.92	14.56	17.40	20.44	23.65	27.02	30.49	32
33	1.62	3.40	5.33	7.43	9.72	12.20	14.87	17.75	20.81	24.04	27.40	30.86	33
34	1.67	3.49	5.47	7.61	9.94	12.46	15.17	18.08	21.16	24.40	27.76	31.21	34
35	1.71	3.57	5.59	7.78	10.16	12.72	15.47	18.40	21.50	24.75	28.10	31.53	35
36	1.76	3.66	5.72	7.95	10.37	12.97	15.75	18.71	21.82	25.07	28.43	31.84	36
37	1.80	3.74	5.84	8.12	10.57	13.21	16.02	19.00	22.13	25.38	28.73	32.12	37
38	1.84	3.82	5.97	8.28	10.77	13.44	16.28	19.28	22.42	25.68	29.01	32.38	38
39	1.87	3.90	6.09	8.44	10.97	13.67	16.53	19.55	22.70	25.95	29.27	32.62	39
40	1.91	3.98	6.20	8.60	11.16	13.89	16.78	19.81	22.97	26.22	29.52	32.85	40
41	1.95	4.06	6.32	8.75	11.34	14.10	17.01	20.06	23.22	26.46	29.75	33.06	41
42	1.99	4.13	6.43	8.89	11.52	14.30	17.23	20.29	23.45	26.69	29.96	33.24	42
43	2.03	4.20	6.54	9.03	11.69	14.50	17.44	20.51	23.68	26.90	30.16	33.42	43
44	2.06	4.28	6.65	9.17	11.85	14.69	17.65	20.72	23.89	27.10	30.34	33.57	44
45	2.10	4.35	6.75	9.31	12.02	14.87	17.84	20.92	24.08	27.29	30.51	33.71	45
46	2.13	4.42	6.85	9.44	12.17	15.04	18.03	21.11	24.27	27.46	30.66	33.84	46

M \ e	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	e \ M
61	2.57	5.24	8.02	10.89	13.82	16.80	19.80	22.78	25.74	28.65	31.48	34.23	
62	2.59	5.28	8.08	10.95	13.89	16.87	19.85	22.83	25.76	28.65	31.46	34.18	
63	2.61	5.32	8.13	11.02	13.95	16.92	19.90	22.86	25.78	28.64	31.42	34.11	
64	2.63	5.36	8.18	11.07	14.01	16.98	19.95	22.88	25.78	28.62	31.37	34.04	
65	2.65	5.40	8.23	11.12	14.06	17.02	19.98	22.90	25.78	28.59	31.32	33.96	
66	2.67	5.43	8.27	11.17	14.11	17.06	20.01	22.91	25.77	28.56	31.26	33.87	
67	2.69	5.46	8.31	11.22	14.15	17.10	20.03	22.92	25.75	28.51	31.19	33.77	
68	2.70	5.49	8.35	11.26	14.19	17.13	20.04	22.91	25.73	28.47	31.11	33.67	
69	2.72	5.52	8.39	11.29	14.22	17.15	20.05	22.90	25.70	28.41	31.03	33.56	
70	2.74	5.55	8.42	11.33	14.25	17.17	20.05	22.89	25.66	28.34	30.94	33.44	
71	2.75	5.57	8.45	11.36	14.28	17.18	20.05	22.87	25.61	28.27	30.84	33.31	
72	2.76	5.60	8.48	11.38	14.29	17.19	20.04	22.84	25.56	28.20	30.74	33.18	
73	2.78	5.62	8.50	11.40	14.31	17.19	20.03	22.80	25.50	28.11	30.63	33.04	
74	2.79	5.64	8.52	11.42	14.32	17.19	20.00	22.76	25.43	28.02	30.51	32.89	
75	2.80	5.65	8.54	11.44	14.32	17.18	19.98	22.71	25.36	27.92	30.38	32.74	
76	2.81	5.67	8.56	11.45	14.32	17.16	19.95	22.66	25.28	27.82	30.25	32.58	
77	2.82	5.68	8.57	11.45	14.32	17.14	19.91	22.60	25.20	27.71	30.12	32.42	
78	2.83	5.69	8.58	11.46	14.31	17.12	19.86	22.53	25.11	27.59	29.97	32.25	
79	2.84	5.70	8.59	11.46	14.30	17.09	19.82	22.46	25.02	27.47	29.83	32.08	
80	2.84	5.71	8.59	11.46	14.28	17.06	19.76	22.39	24.91	27.34	29.67	31.90	
81	2.85	5.72	8.59	11.45	14.26	17.02	19.70	22.30	24.81	27.21	29.51	31.71	
82	2.85	5.72	8.59	11.44	14.24	16.98	19.64	22.22	24.70	27.07	29.35	31.52	
83	2.86	5.73	8.59	11.42	14.21	16.93	19.57	22.12	24.58	26.93	29.18	31.33	
84	2.86	5.73	8.59	11.41	14.18	16.88	19.50	22.03	24.46	26.78	29.01	31.12	
85	2.86	5.73	8.58	11.39	14.14	16.82	19.42	21.93	24.33	26.63	28.83	30.92	
86	2.86	5.73	8.57	11.36	14.10	16.76	19.34	21.82	24.20	26.47	28.64	30.71	
87	2.86	5.72	8.55	11.34	14.06	16.70	19.25	21.71	24.06	26.31	28.45	30.49	
88	2.86	5.72	8.54	11.31	14.01	16.63	19.16	21.59	23.92	26.14	28.26	30.28	
89	2.86	5.71	8.52	11.27	13.96	16.56	19.06	21.47	23.77	25.97	28.06	30.05	
90	2.86	5.70	8.50	11.24	13.90	16.48	18.96	21.35	23.62	25.79	27.86	29.82	
91	2.86	5.69	8.48	11.20	13.85	16.40	18.86	21.22	23.47	25.61	27.65	29.59	
92	2.85	5.68	8.45	11.16	13.78	16.32	18.75	21.08	23.31	25.43	27.44	29.36	
93	2.85	5.66	8.42	11.11	13.72	16.23	18.64	20.95	23.14	25.24	27.23	29.12	
94	2.84	5.65	8.39	11.06	13.65	16.14	18.52	20.80	22.98	25.05	27.01	28.87	
95	2.84	5.63	8.36	11.01	13.58	16.04	18.40	20.66	22.81	24.85	26.79	28.63	
96	2.83	5.61	8.33	10.96	13.50	15.94	18.28	20.51	22.63	24.65	26.56	28.37	
97	2.82	5.59	8.29	10.90	13.42	15.84	18.15	20.35	22.45	24.44	26.33	28.12	
98	2.81	5.57	8.25	10.84	13.34	15.73	18.02	20.20	22.27	24.23	26.10	27.86	
99	2.80	5.55	8.21	10.78	13.26	15.63	17.89	20.04	22.08	24.02	25.86	27.60	
100	2.79	5.52	8.17	10.72	13.17	15.51	17.75	19.87	21.89	23.80	25.62	27.33	
101	2.78	5.49	8.12	10.65	13.08	15.40	17.61	19.70	21.70	23.59	25.37	27.07	
102	2.77	5.46	8.07	10.58	12.98	15.28	17.46	19.53	21.50	23.36	25.13	26.79	
103	2.76	5.43	8.02	10.51	12.89	15.15	17.31	19.36	21.30	23.14	24.88	26.52	
104	2.74	5.40	7.97	10.43	12.79	15.03	17.16	19.18	21.10	22.91	24.62	26.24	
105	2.73	5.37	7.92	10.36	12.68	14.90	17.01	19.00	20.89	22.67	24.36	25.96	
106	2.71	5.34	7.86	10.28	12.58	14.77	16.85	18.82	20.68	22.44	24.10	25.68	

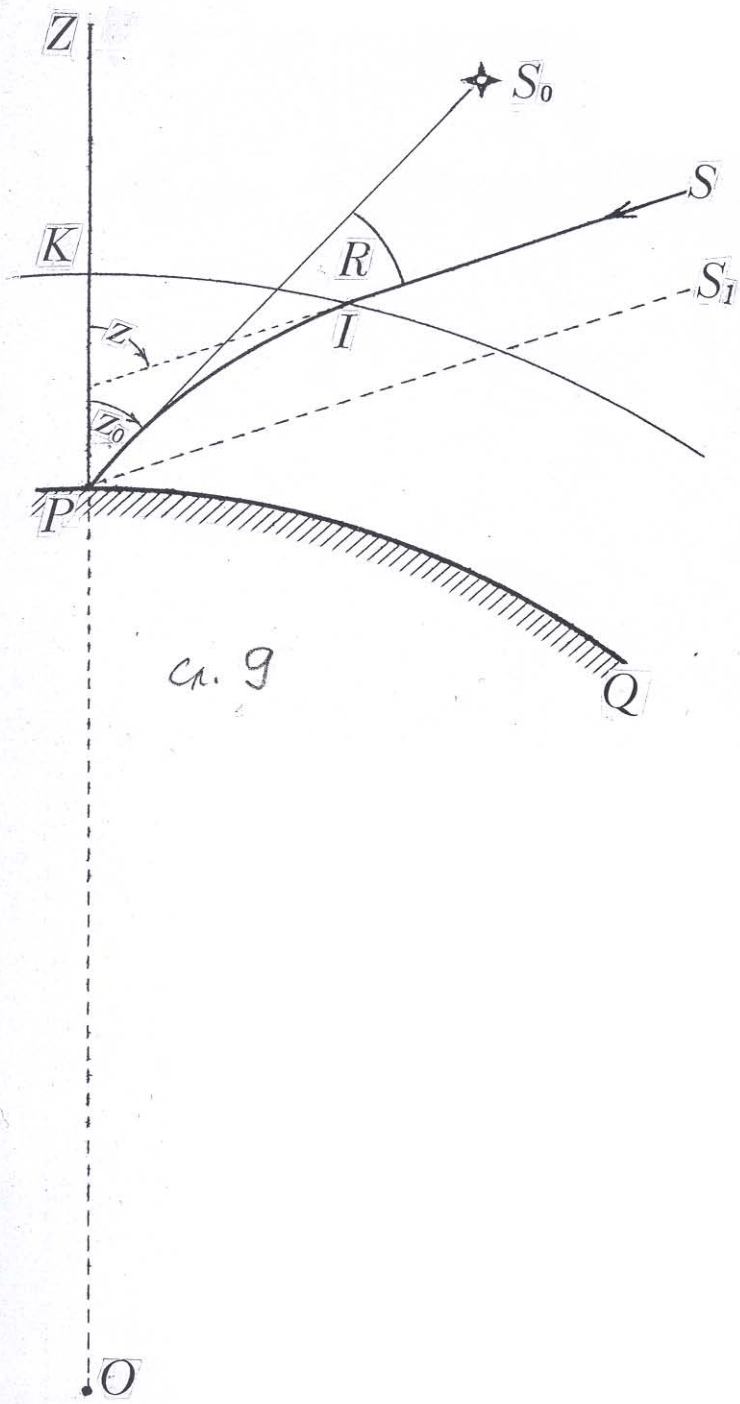
$M \backslash e$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	$e \backslash M$
121	2.39	4.66	6.79	8.80	10.70	12.47	14.14	15.71	17.19	18.58	19.88	21.11	
122	2.36	4.60	6.71	8.69	10.55	12.30	13.94	15.49	16.94	18.30	19.58	20.79	
123	2.34	4.54	6.62	8.57	10.41	12.13	13.74	15.26	16.68	18.02	19.28	20.47	
124	2.31	4.49	6.53	8.45	10.26	11.95	13.54	15.03	16.43	17.74	18.98	20.14	
125	2.28	4.43	6.44	8.33	10.11	11.77	13.33	14.79	16.17	17.46	18.67	19.81	
126	2.25	4.37	6.35	8.21	9.96	11.59	13.12	14.56	15.91	17.17	18.36	19.48	
127	2.22	4.30	6.26	8.09	9.80	11.41	12.91	14.32	15.64	16.88	18.05	19.15	
128	2.19	4.24	6.16	7.97	9.65	11.23	12.70	14.08	15.38	16.60	17.74	18.82	
129	2.16	4.18	6.07	7.84	9.49	11.04	12.49	13.84	15.11	16.31	17.43	18.48	
130	2.12	4.11	5.97	7.71	9.33	10.85	12.27	13.60	14.85	16.01	17.11	18.14	
131	2.09	4.05	5.88	7.58	9.17	10.66	12.05	13.35	14.58	15.72	16.79	17.81	
132	2.06	3.98	5.78	7.45	9.01	10.47	11.83	13.11	14.30	15.42	16.48	17.47	
133	2.02	3.91	5.68	7.32	8.85	10.28	11.61	12.86	14.03	15.13	16.16	17.12	
134	1.99	3.84	5.57	7.18	8.68	10.08	11.39	12.61	13.76	14.83	15.83	16.78	
135	1.96	3.77	5.47	7.05	8.52	9.89	11.17	12.36	13.48	14.53	15.51	16.44	
136	1.92	3.70	5.37	6.91	8.35	9.69	10.94	12.11	13.20	14.23	15.19	16.09	
137	1.88	3.63	5.26	6.77	8.18	9.49	10.71	11.85	12.92	13.92	14.86	15.74	
138	1.85	3.56	5.15	6.63	8.01	9.29	10.48	11.60	12.64	13.62	14.53	15.40	
139	1.81	3.49	5.05	6.49	7.84	9.09	10.25	11.34	12.36	13.31	14.21	15.05	
140	1.77	3.42	4.94	6.35	7.66	8.88	10.02	11.08	12.07	13.00	13.88	14.70	
141	1.73	3.34	4.83	6.21	7.49	8.68	9.79	10.82	11.79	12.69	13.55	14.34	
142	1.70	3.27	4.72	6.06	7.31	8.47	9.55	10.56	11.50	12.38	13.21	13.99	
143	1.66	3.19	4.60	5.92	7.13	8.26	9.32	10.30	11.22	12.07	12.88	13.63	
144	1.62	3.11	4.49	5.77	6.95	8.05	9.08	10.03	10.93	11.76	12.54	13.28	
145	1.58	3.03	4.38	5.62	6.77	7.85	8.84	9.77	10.64	11.45	12.21	12.92	
146	1.54	2.96	4.26	5.47	6.59	7.63	8.60	9.50	10.34	11.13	11.87	12.56	
147	1.50	2.88	4.15	5.32	6.41	7.42	8.36	9.24	10.05	10.82	11.53	12.20	
148	1.46	2.80	4.03	5.17	6.23	7.21	8.12	8.97	9.76	10.50	11.19	11.84	
149	1.41	2.72	3.91	5.02	6.04	6.99	7.88	8.70	9.46	10.18	10.85	11.48	
150	1.37	2.64	3.80	4.87	5.86	6.78	7.63	8.43	9.17	9.86	10.51	11.12	
151	1.33	2.55	3.68	4.71	5.67	6.56	7.39	8.16	8.87	9.54	10.17	10.76	
152	1.29	2.47	3.56	4.56	5.48	6.34	7.14	7.88	8.57	9.22	9.83	10.40	
153	1.24	2.39	3.44	4.40	5.30	6.12	6.89	7.61	8.28	8.90	9.48	10.03	
154	1.20	2.30	3.32	4.25	5.11	5.91	6.65	7.34	7.98	8.58	9.14	9.67	
155	1.16	2.22	3.19	4.09	4.92	5.69	6.40	7.06	7.68	8.25	8.79	9.30	
156	1.11	2.13	3.07	3.93	4.73	5.46	6.15	6.78	7.38	7.93	8.45	8.93	
157	1.07	2.05	2.95	3.77	4.54	5.24	5.90	6.51	7.07	7.61	8.10	8.57	
158	1.03	1.96	2.82	3.61	4.34	5.02	5.65	6.23	6.77	7.28	7.75	8.20	
159	0.98	1.88	2.70	3.45	4.15	4.80	5.39	5.95	6.47	6.95	7.41	7.83	
160	0.94	1.79	2.57	3.29	3.96	4.57	5.14	5.67	6.17	6.63	7.06	7.46	
161	0.89	1.70	2.45	3.13	3.76	4.35	4.89	5.39	5.86	6.30	6.71	7.09	
162	0.84	1.62	2.32	2.97	3.57	4.12	4.64	5.11	5.56	5.97	6.36	6.72	
163	0.80	1.53	2.20	2.81	3.37	3.90	4.38	4.83	5.25	5.64	6.01	6.35	
164	0.75	1.44	2.07	2.65	3.18	3.67	4.13	4.55	4.94	5.31	5.66	5.98	
165	0.71	1.35	1.94	2.48	2.98	3.44	3.87	4.27	4.64	4.98	5.31	5.61	
166	0.66	1.26	1.81	2.32	2.79	3.22	3.61	3.98	4.33	4.65	4.95	5.24	
167	0.61	1.17	1.69	2.16	2.59	2.99	3.36	3.70	4.02	4.32	4.60	4.86	
168	0.57	1.08	1.56	1.99	2.39	2.76	3.10	3.42	3.72	3.99	4.25	4.49	
169	0.52	1.00	1.43	1.83	2.19	2.53	2.84	3.14	3.41	3.66	3.90	4.12	
170	0.47	0.91	1.30	1.66	1.99	2.30	2.59	2.85	3.10	3.33	3.54	3.75	
171	0.43	0.82	1.17	1.50	1.80	2.07	2.33	2.57	2.79	3.00	3.19	3.37	
172	0.38	0.73	1.04	1.33	1.60	1.84	2.07	2.28	2.48	2.66	2.84	3.00	
173	0.33	0.64	0.91	1.16	1.40	1.61	1.81	2.00	2.17	2.33	2.48	2.62	
174	0.29	0.54	0.78	1.00	1.20	1.38	1.55	1.71	1.86	2.00	2.13	2.25	
175	0.24	0.45	0.65	0.83	1.00	1.15	1.30	1.43	1.55	1.67	1.77	1.87	
176	0.19	0.36	0.52	0.67	0.80	0.92	1.04	1.14	1.24	1.33	1.42	1.50	
177	0.14	0.27	0.39	0.50	0.60	0.69	0.78	0.86	0.93	1.00	1.07	1.12	
178	0.10	0.18	0.26	0.33	0.40	0.46	0.52	0.57	0.62	0.67	0.71	0.75	
179	0.05	0.08	0.13	0.17	0.20	0.23	0.26	0.29	0.31	0.33	0.35	0.37	
180	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
$M \backslash e$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	$e \backslash M$

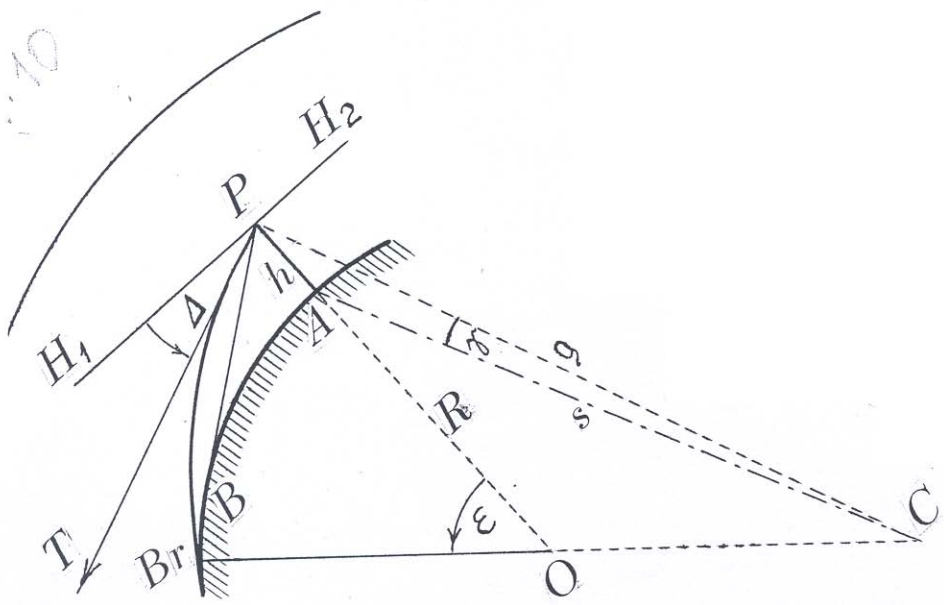


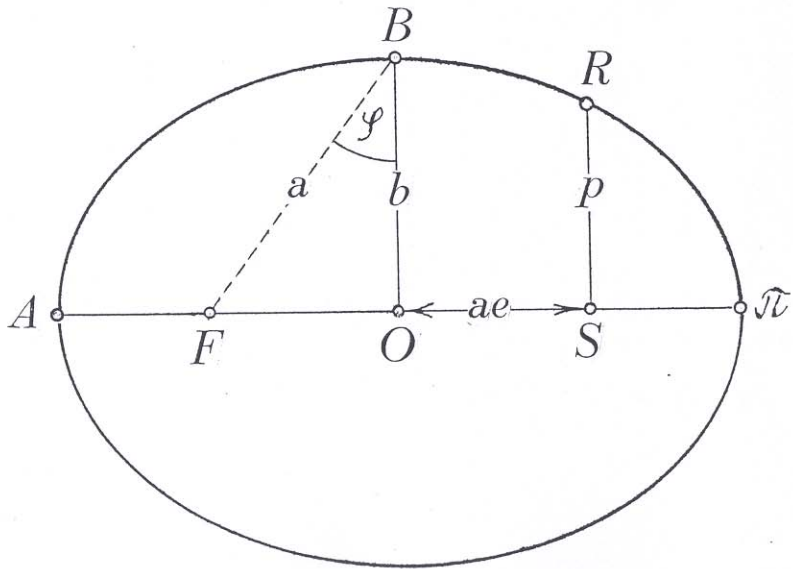


$\frac{m_0}{2}$

с. 8

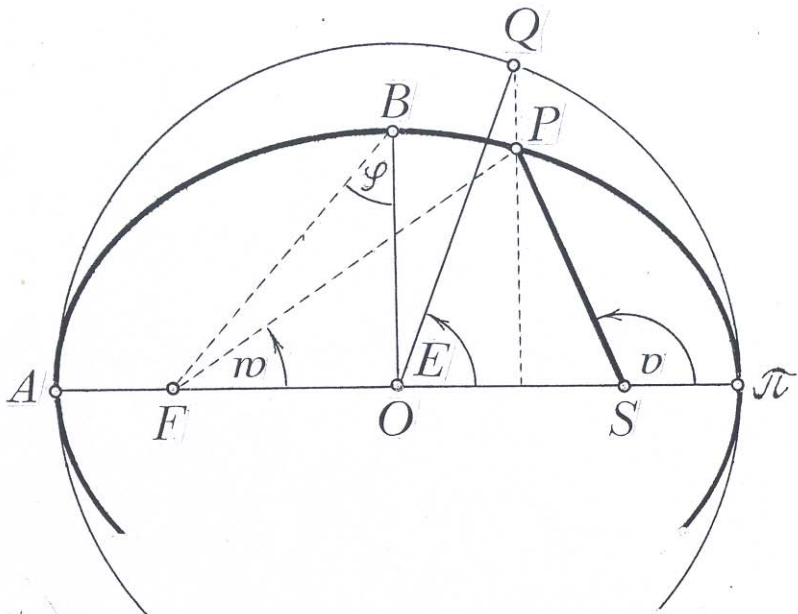






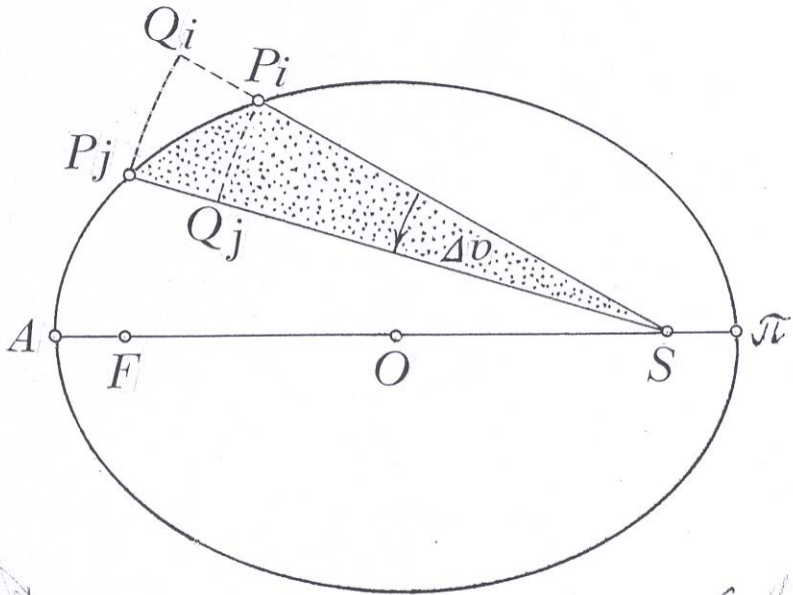
no. 1/2

Ch. 11



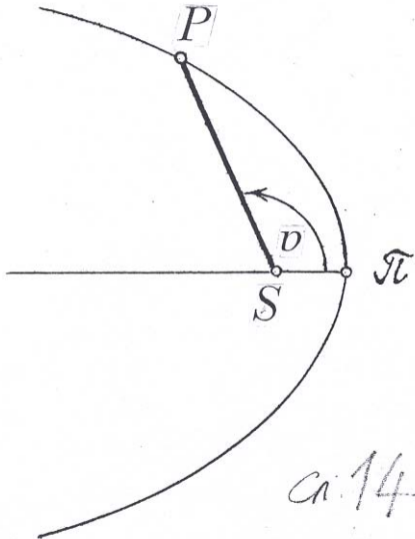
$2\pi/2$

ca. 12



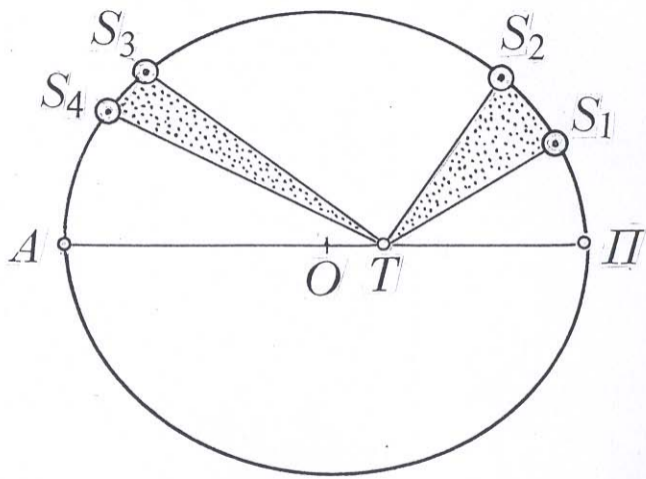
G. 13

no. 1/2

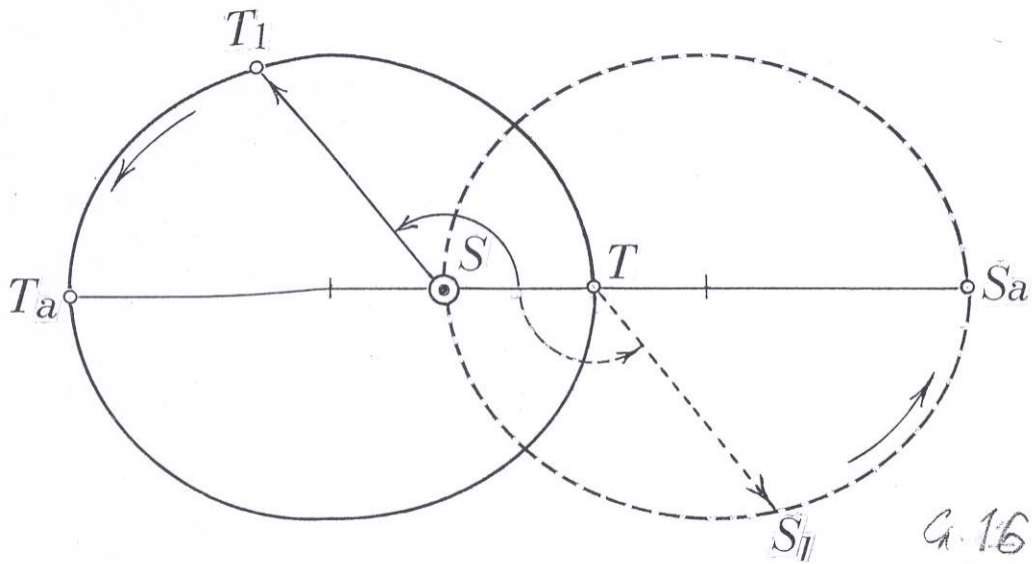


Cr. 14

no 7/2



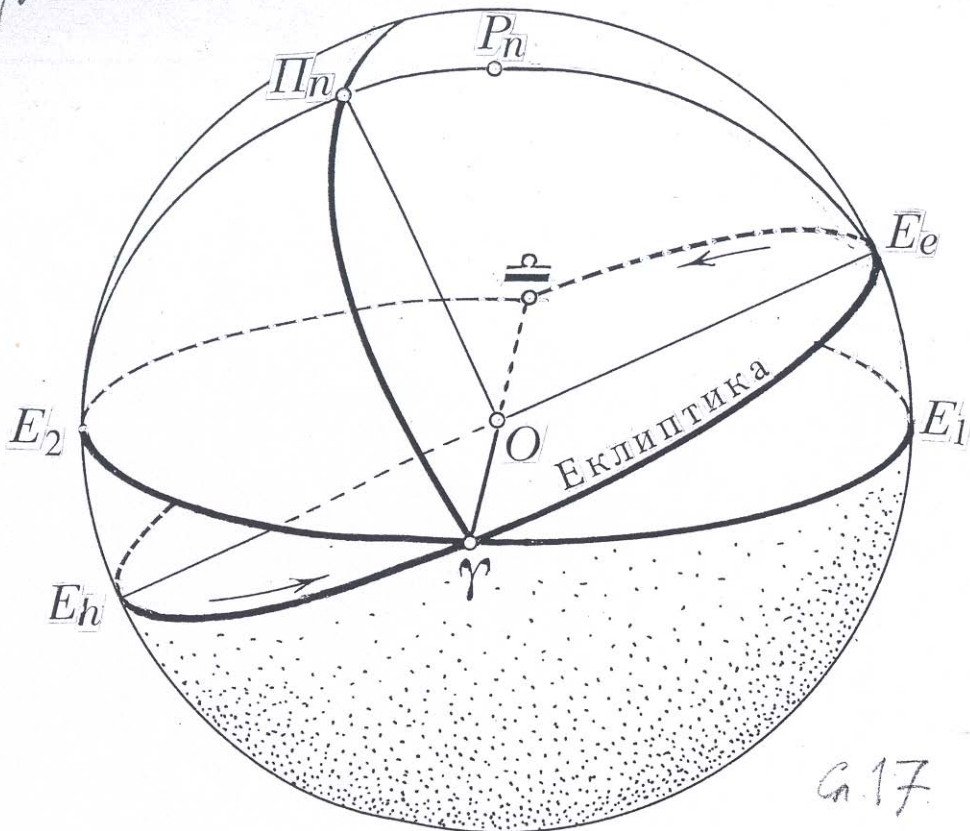
ca. 15 ✓



na/v

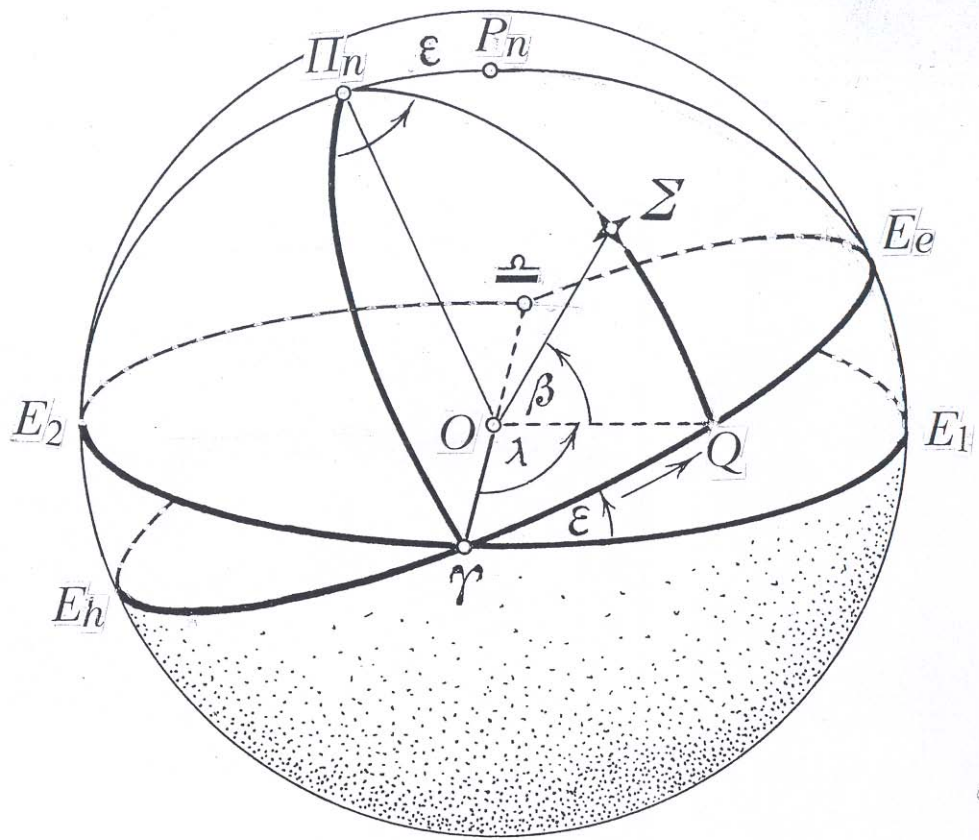
G. 16

no/2

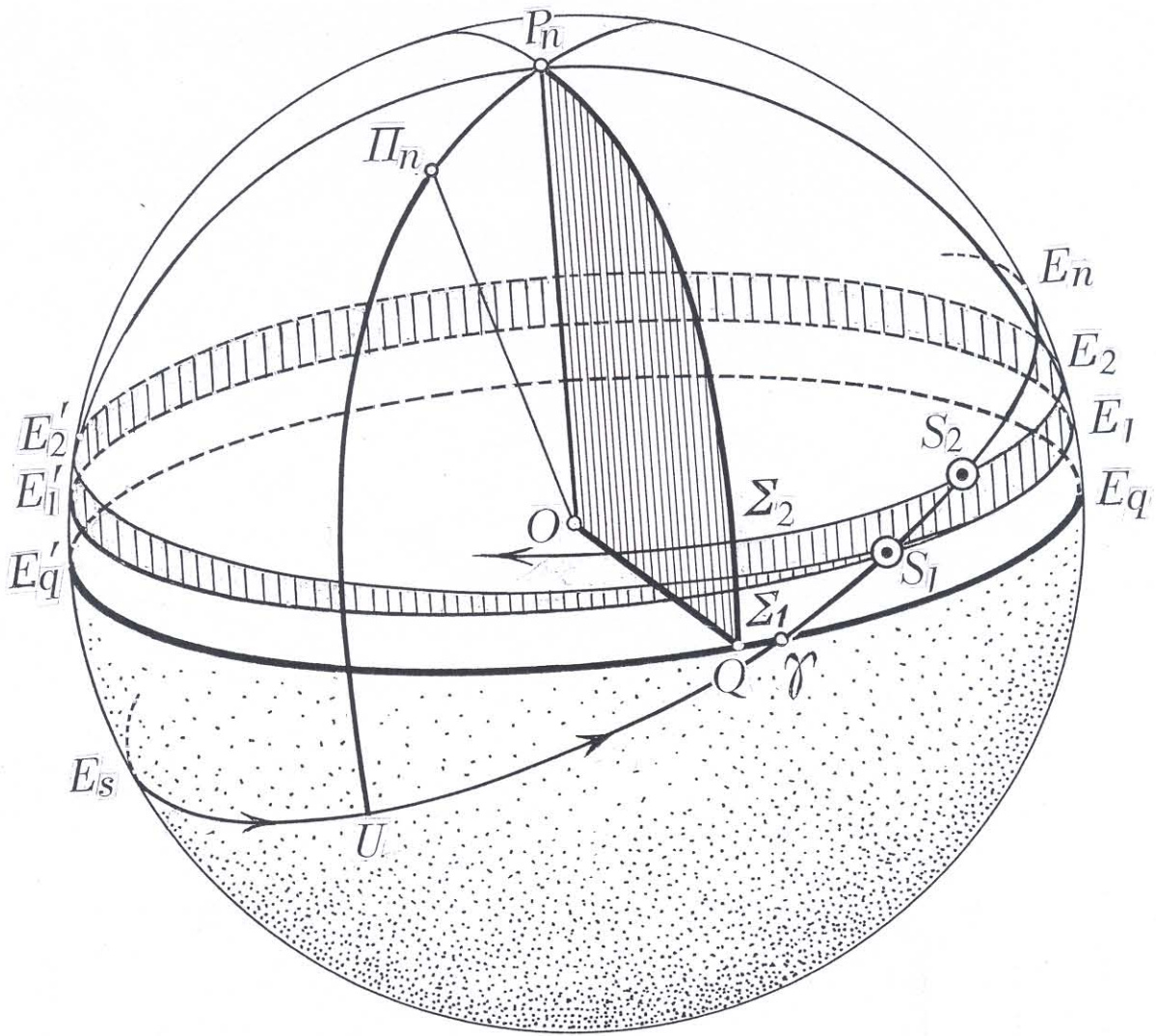


г. 17

na 1/2

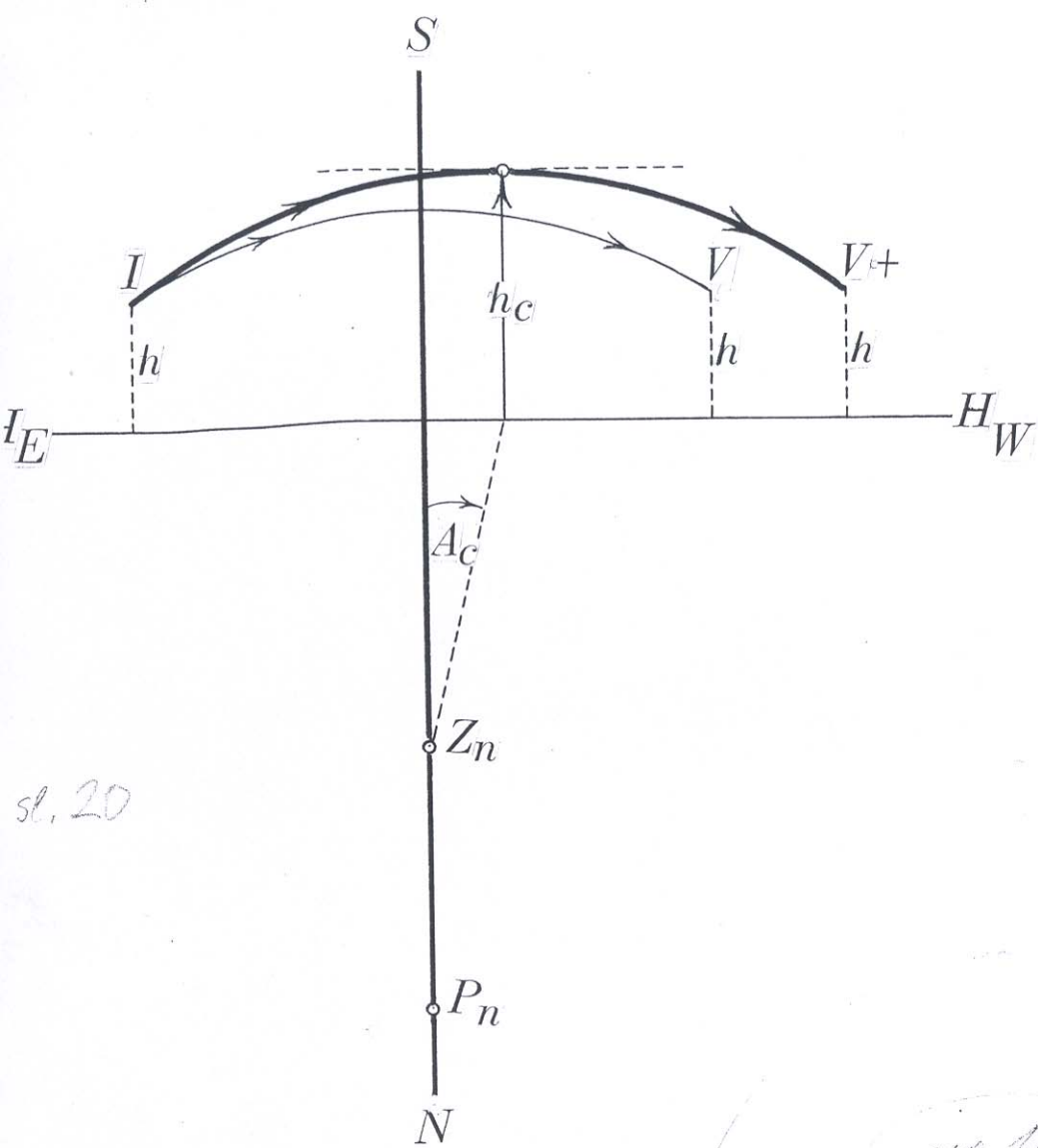


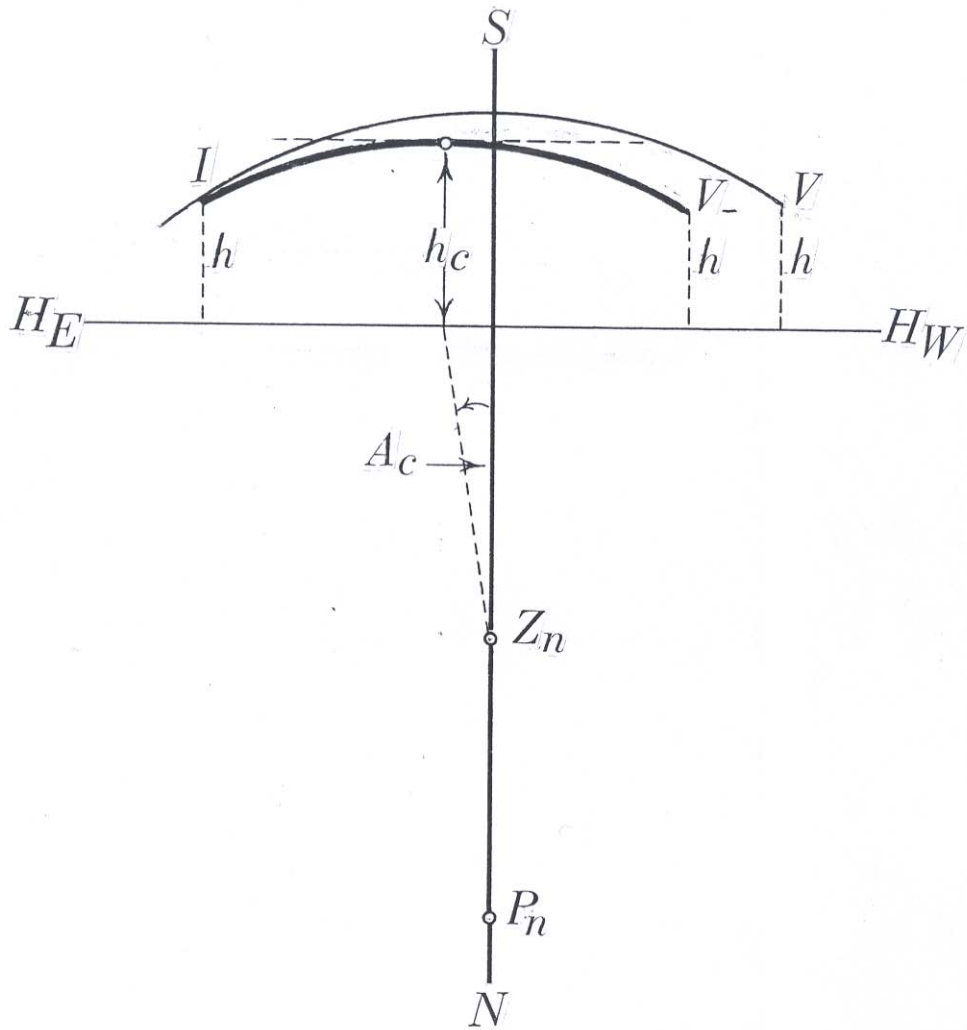
с. 18



na 1/2

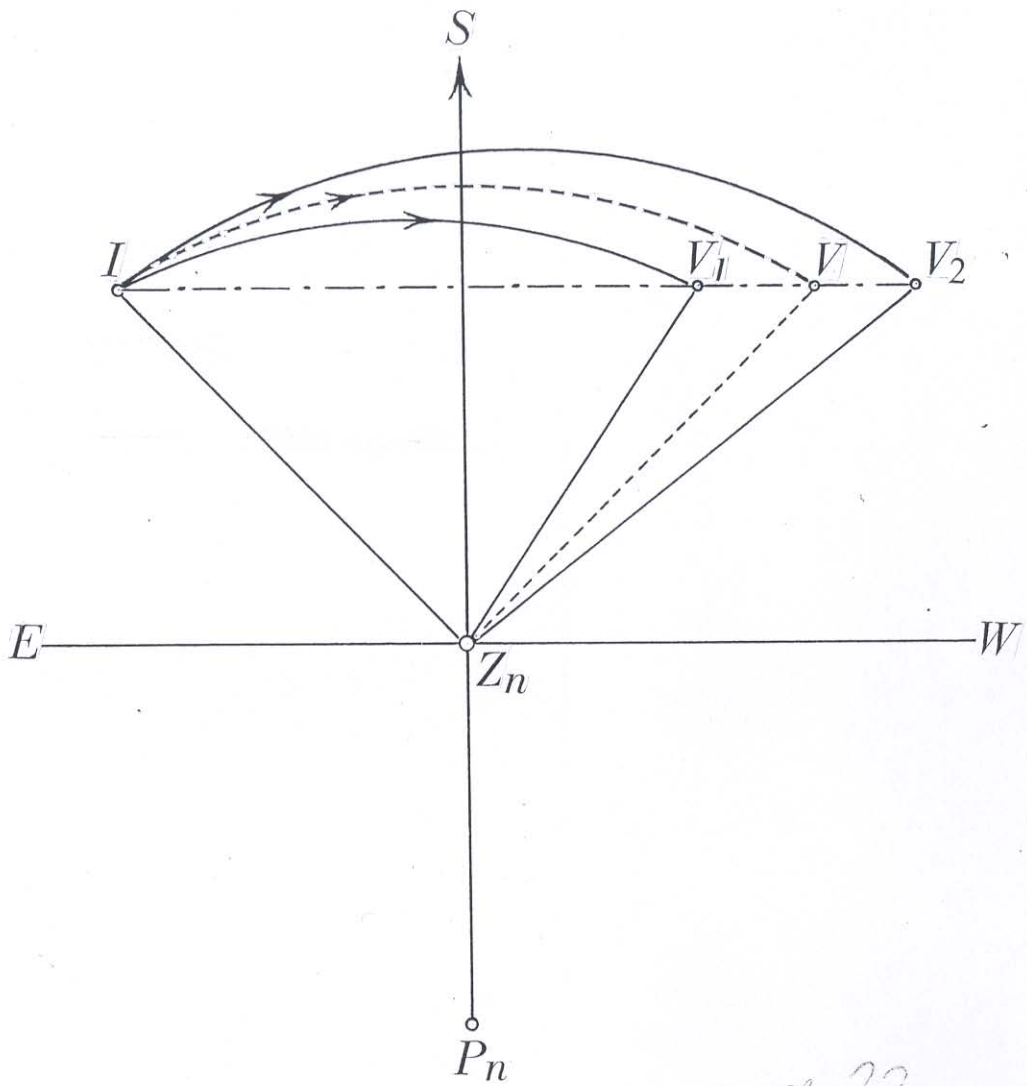
sc. 19



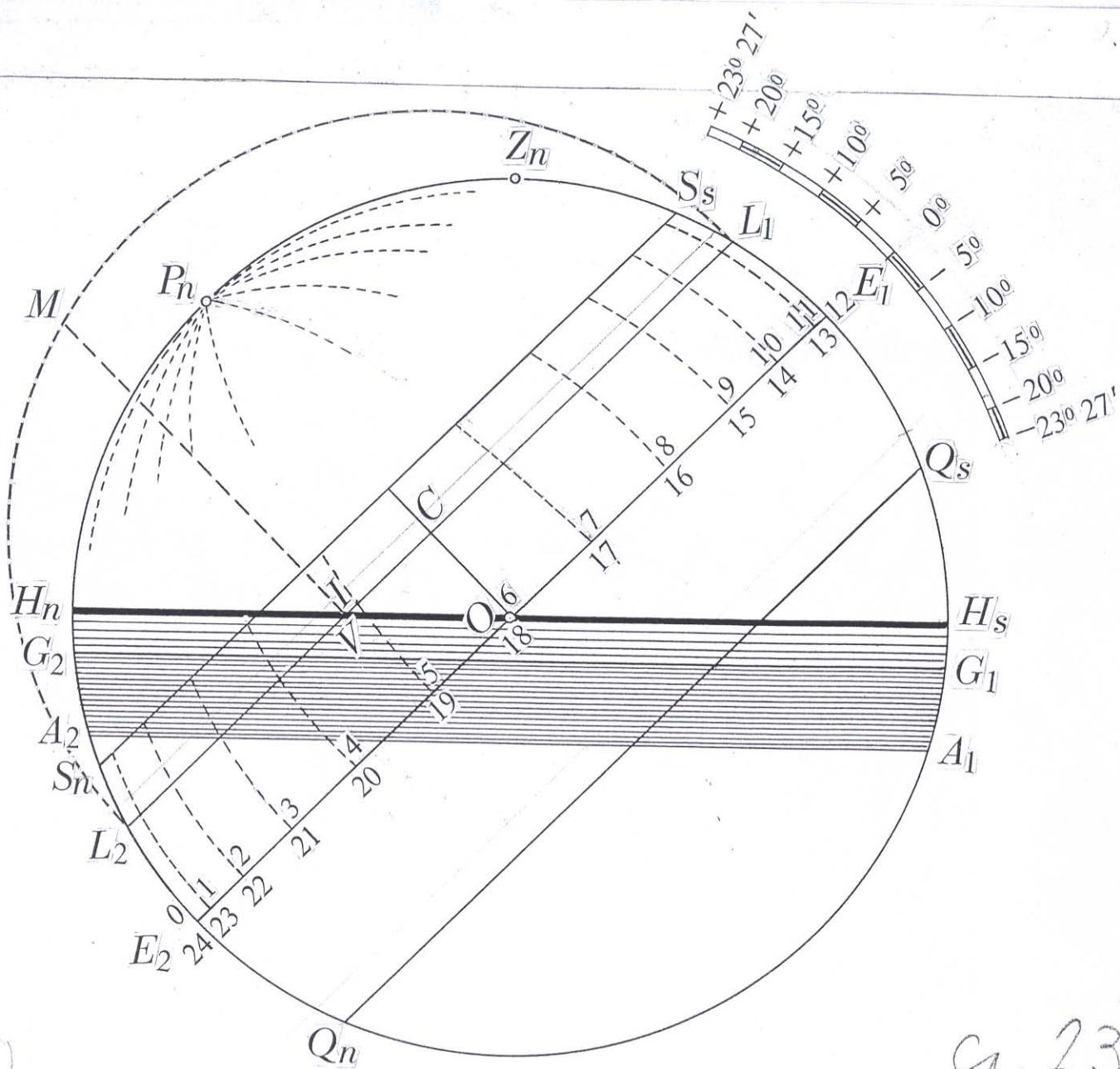


$\frac{m}{2}$

sl. 21

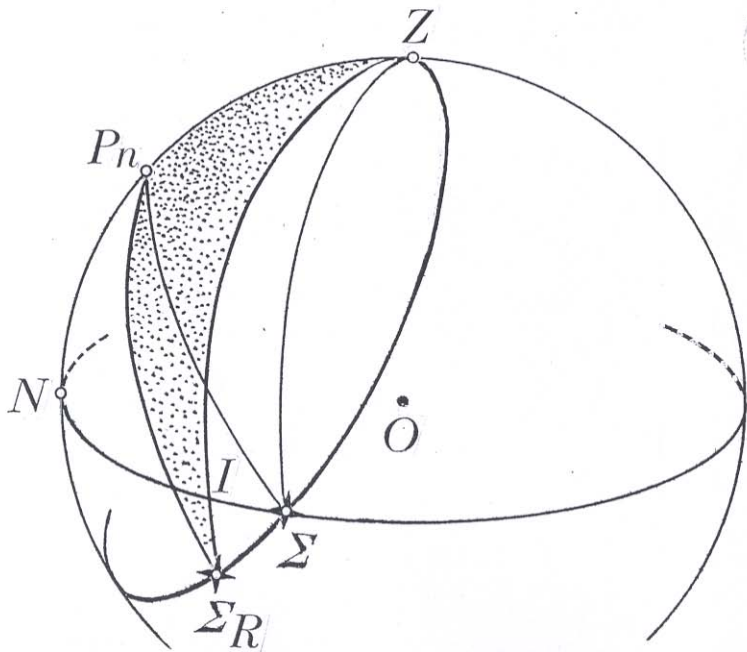


sl. 22



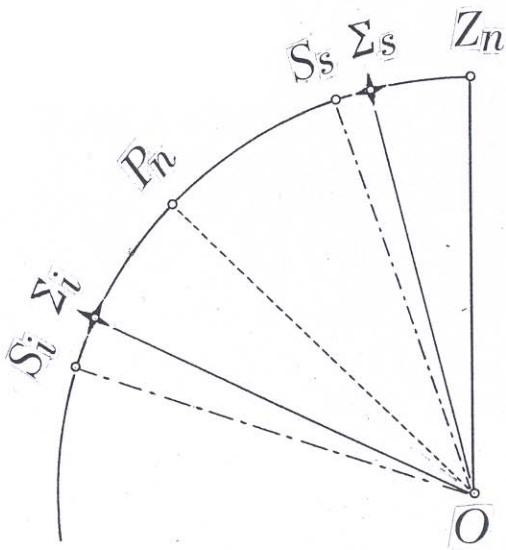
na 1/2

cr. 23

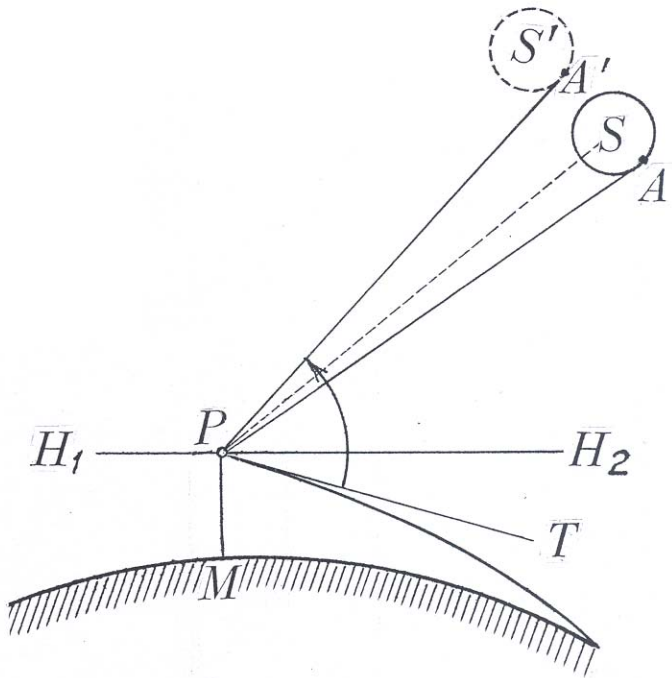


map 1/2

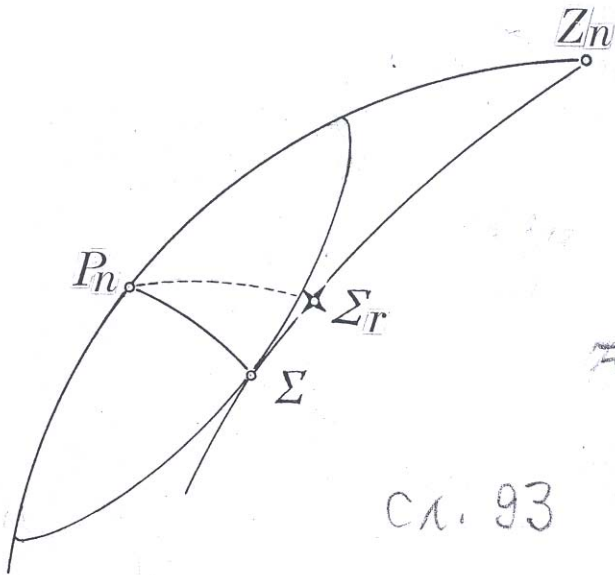
Ch. 90



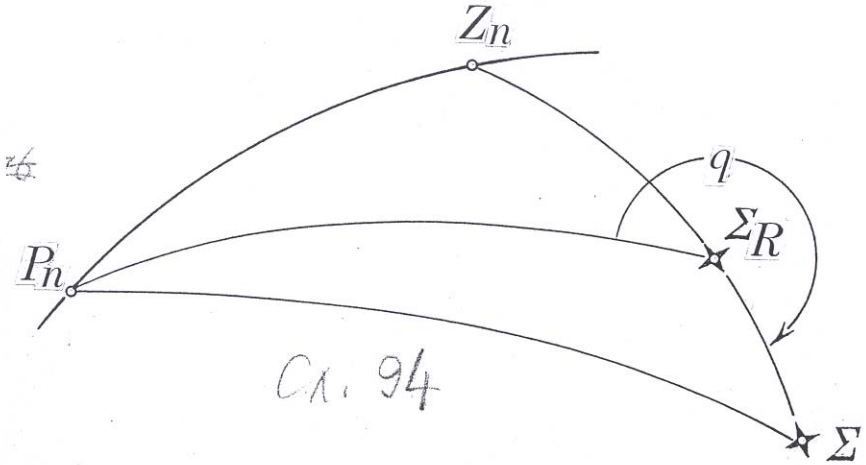
$C_n: 91$

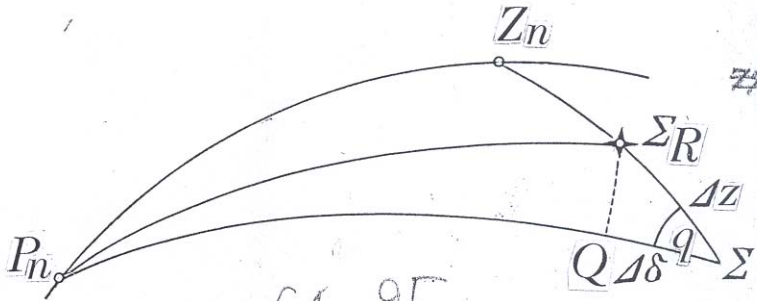


Ca. 92

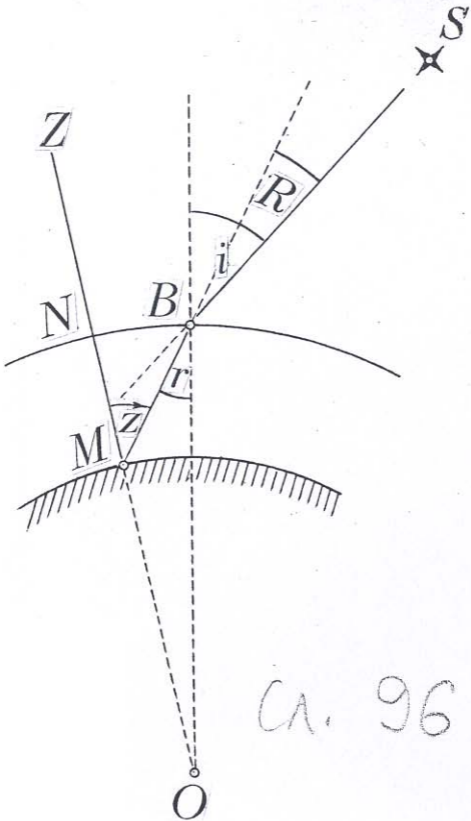


Сл. 93

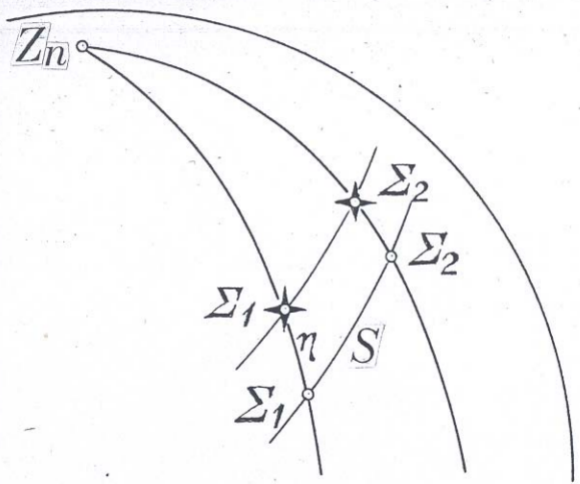




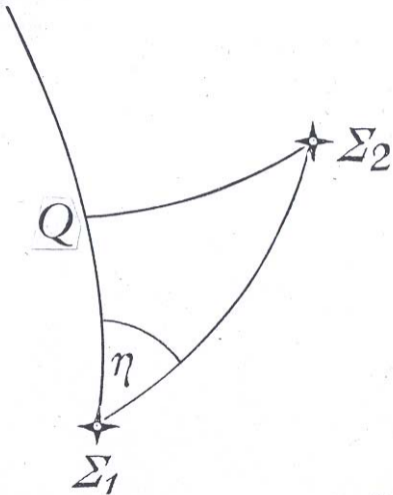
ca. 95



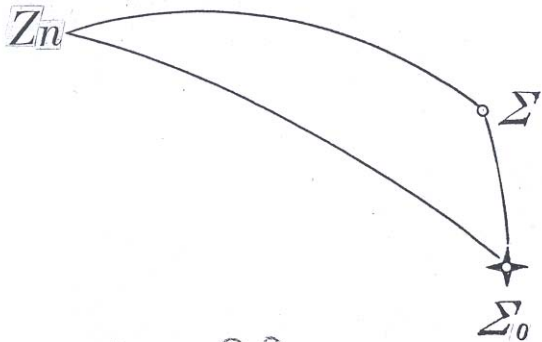
CA. 96



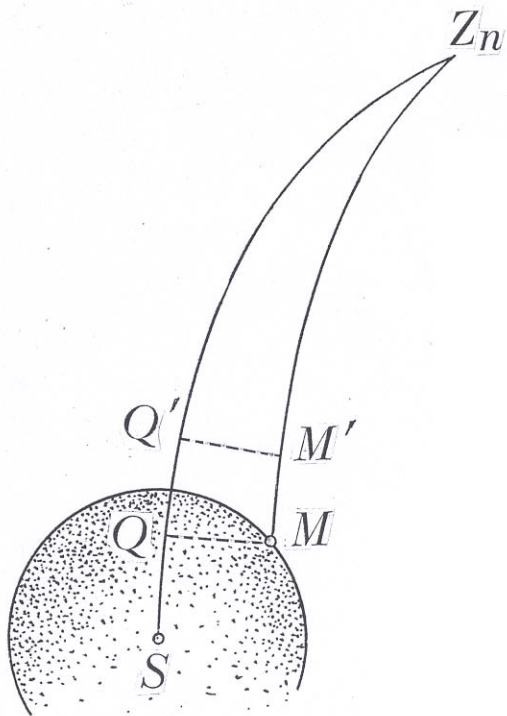
Ca. 97



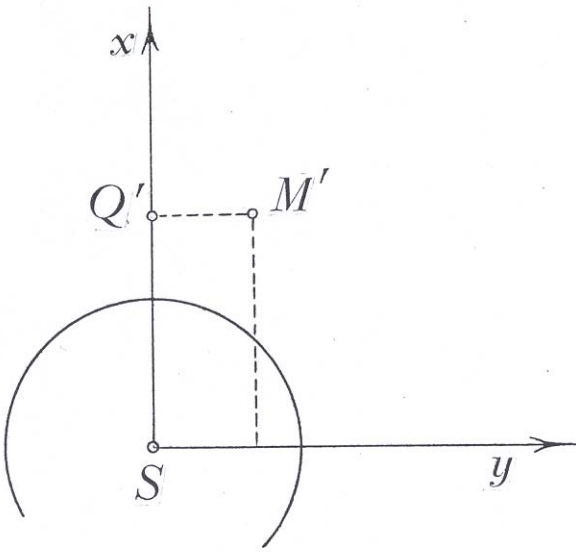
Ca. 98



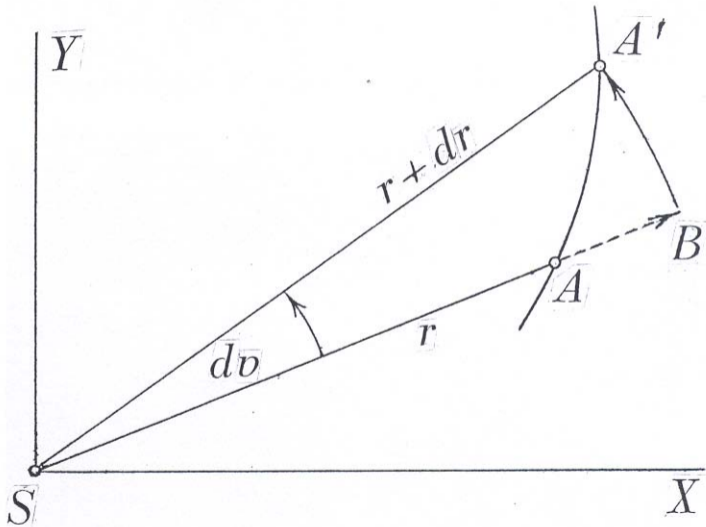
Сл. 99

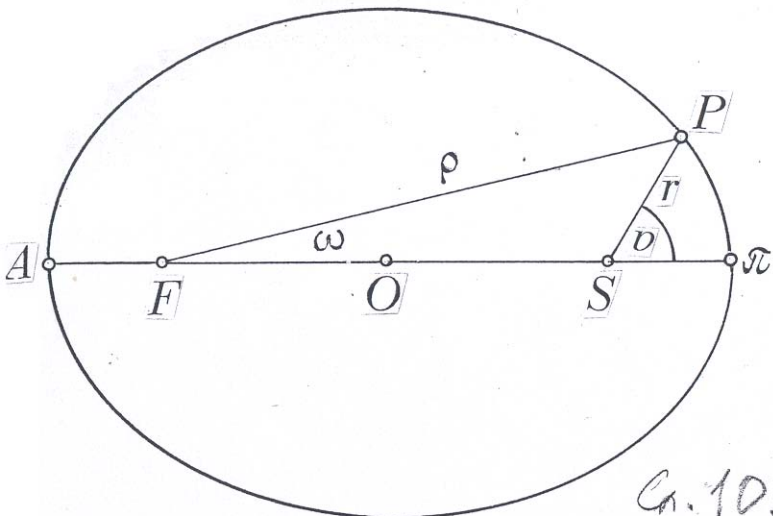


Ca. 100

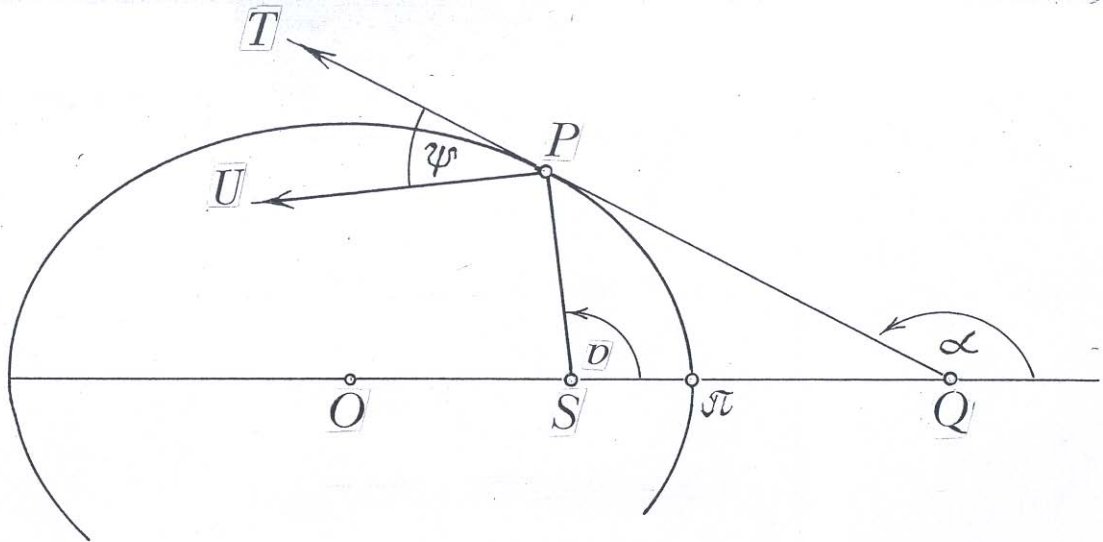


Ch. 101

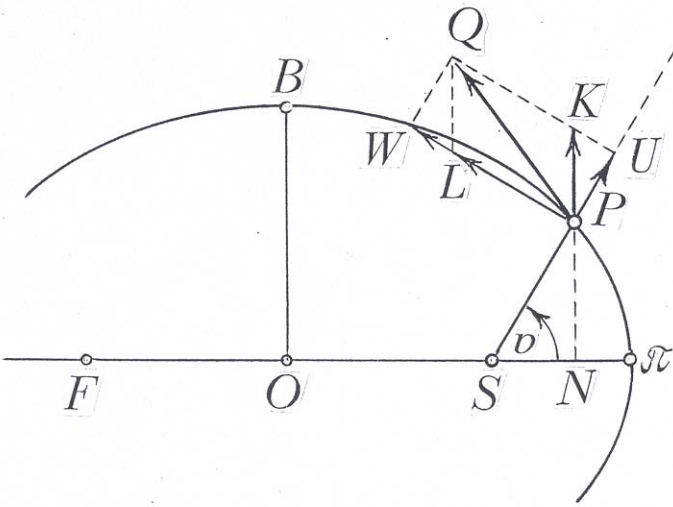




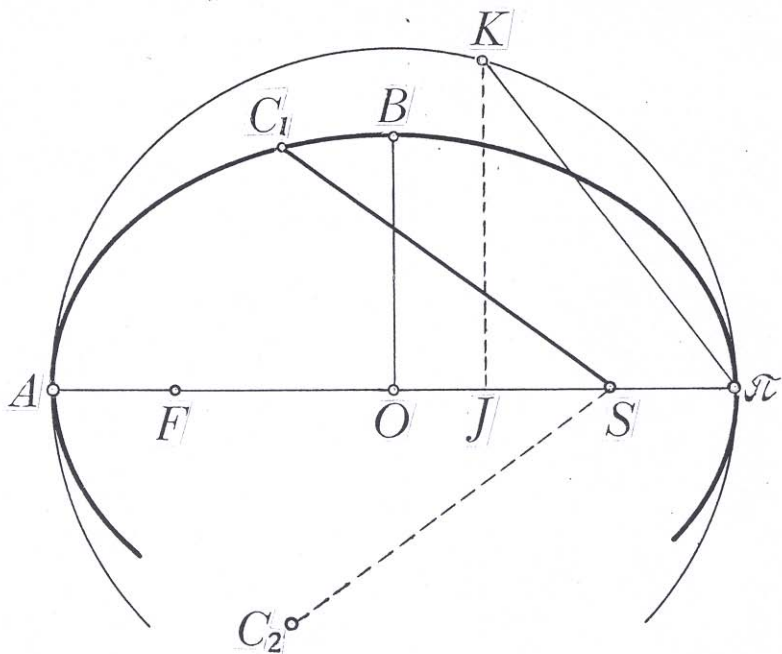
C. 103



Ca. 104



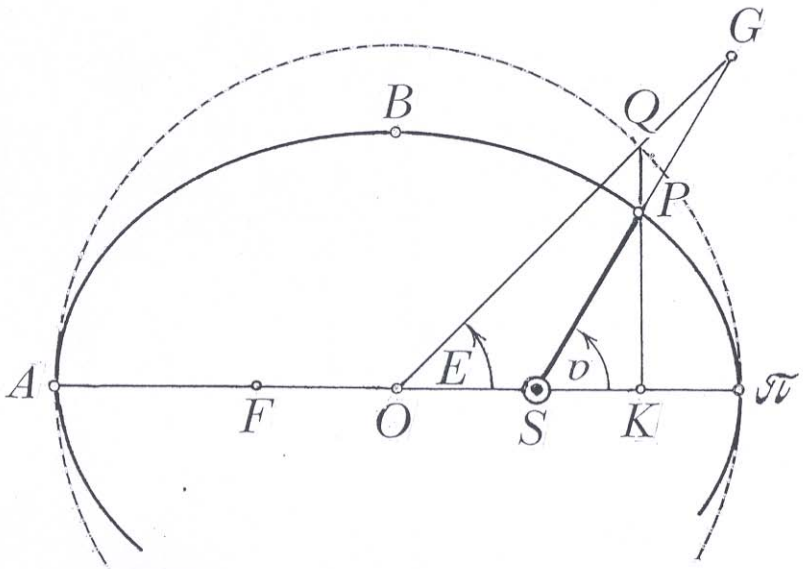
Ca. 105



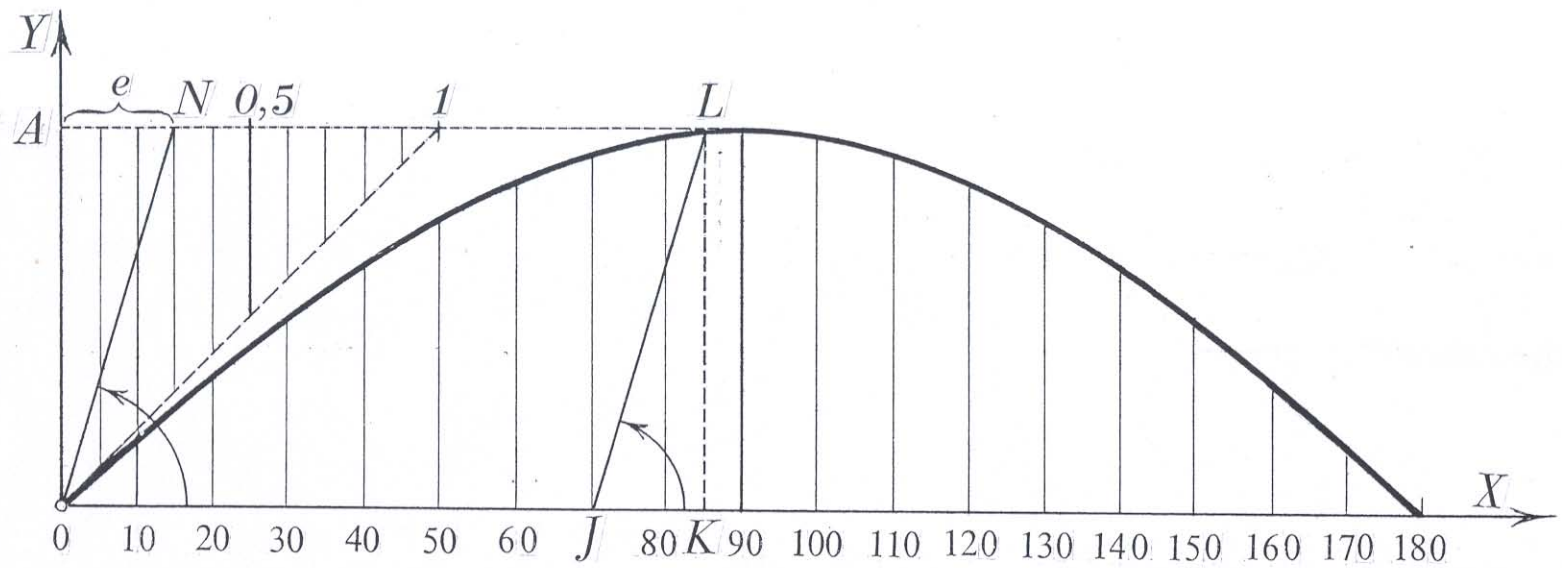
CA. 106

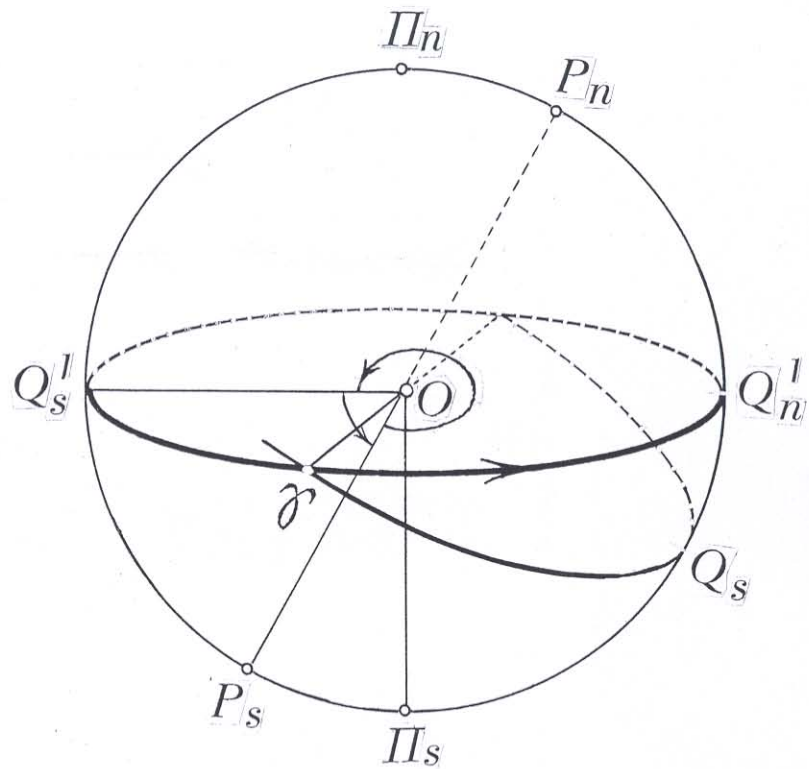
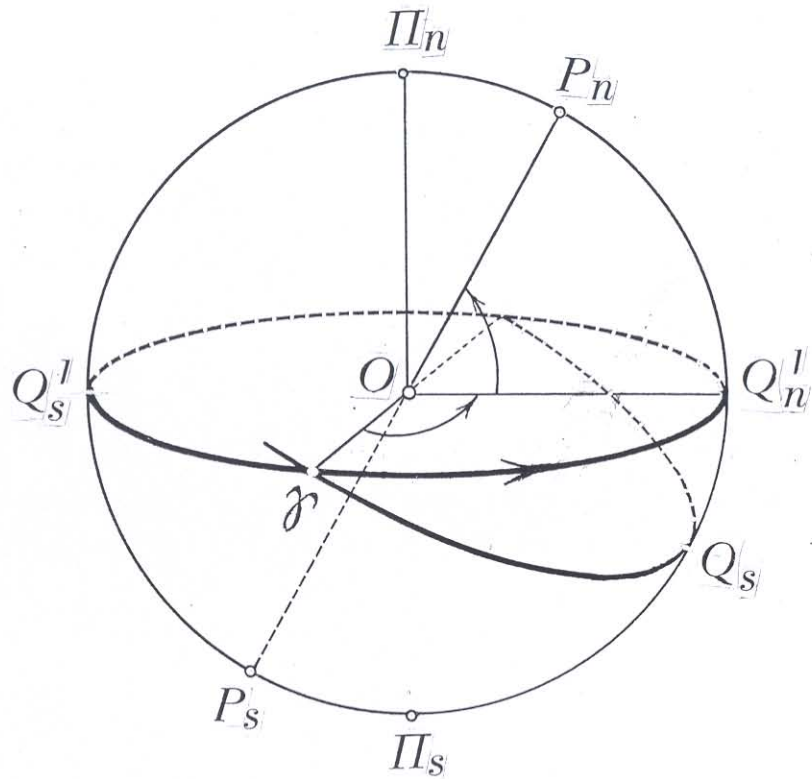
CA, 107

math



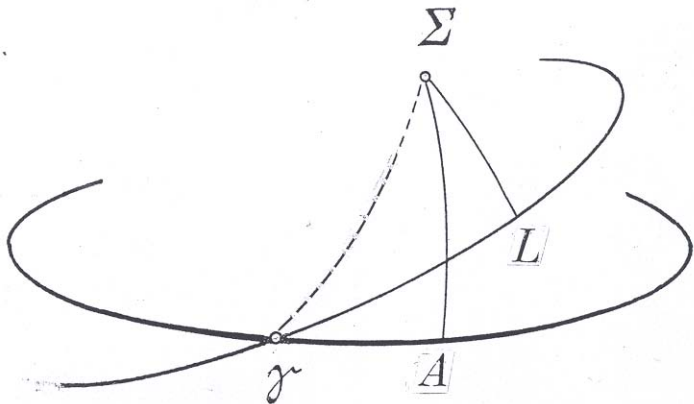
Ca. 108

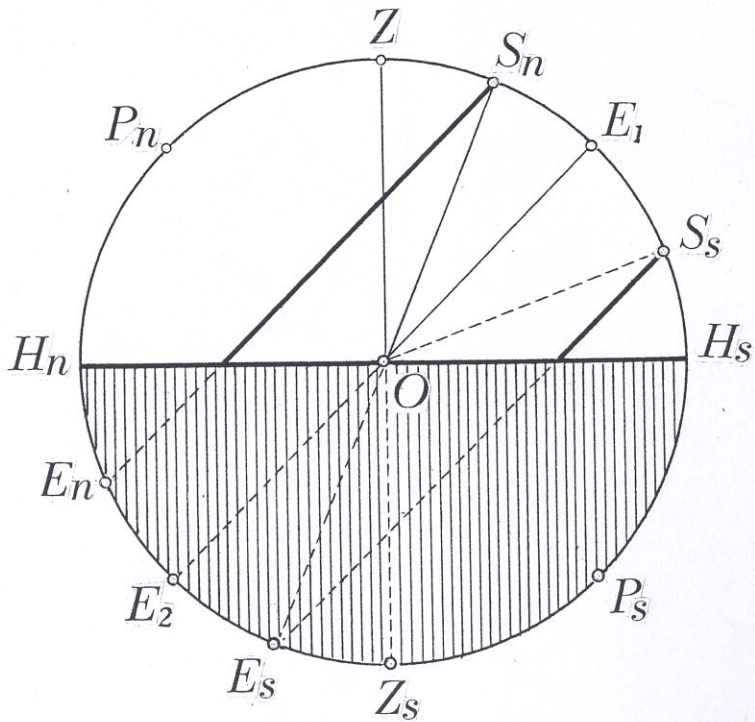




Сл. 110

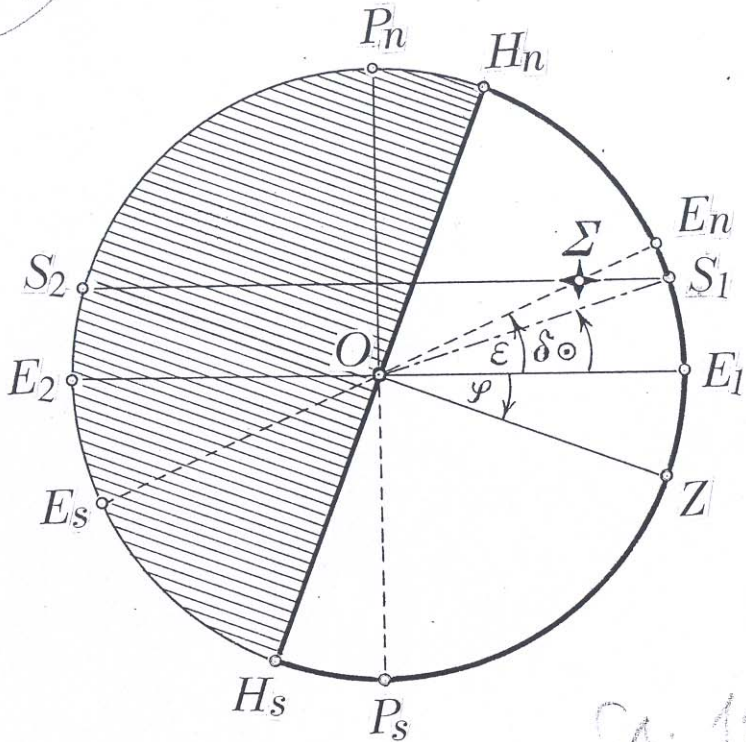
Ca. 111



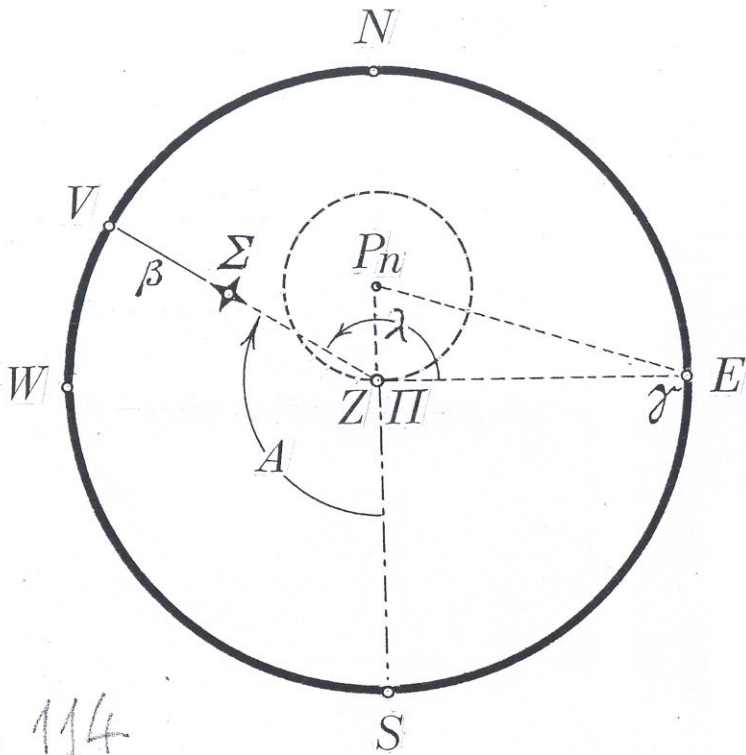


CA. 112

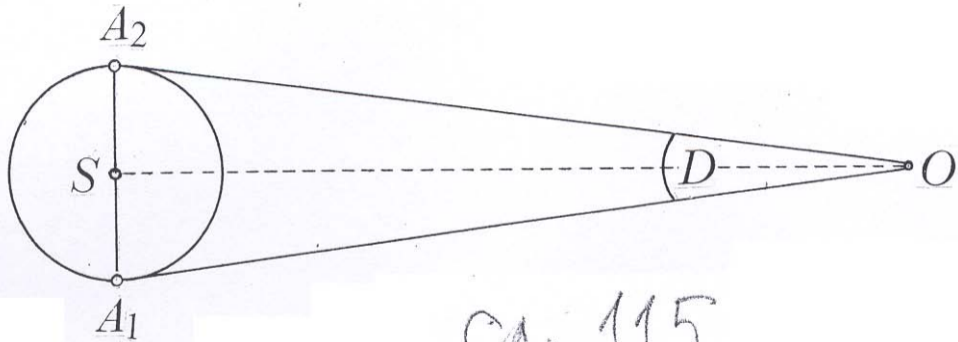
no 7/2



Ca. 113

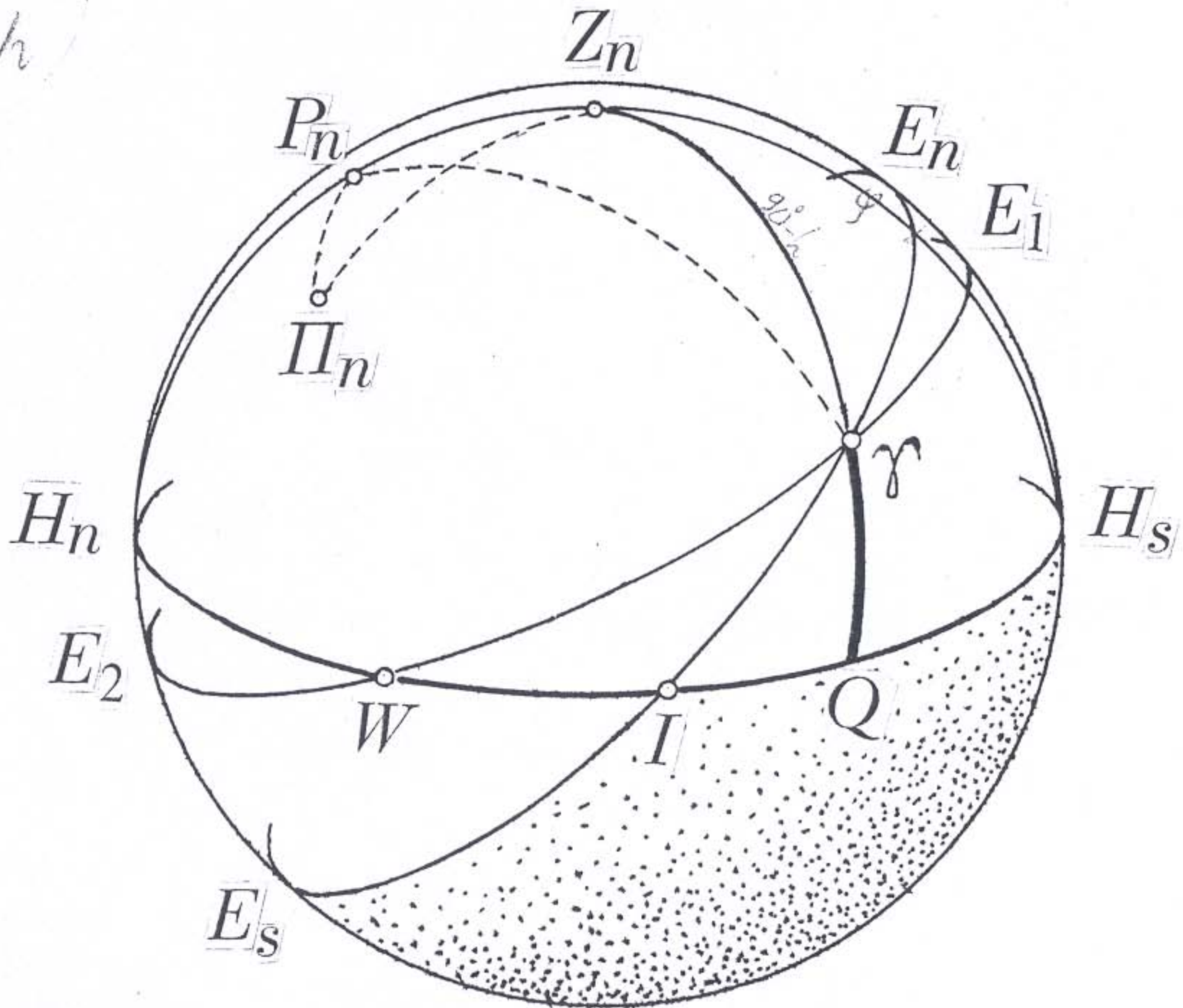


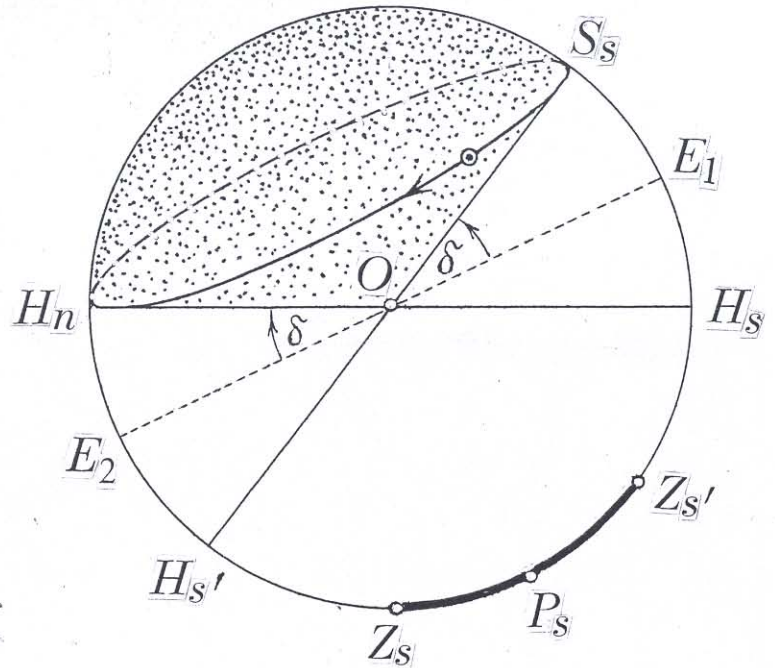
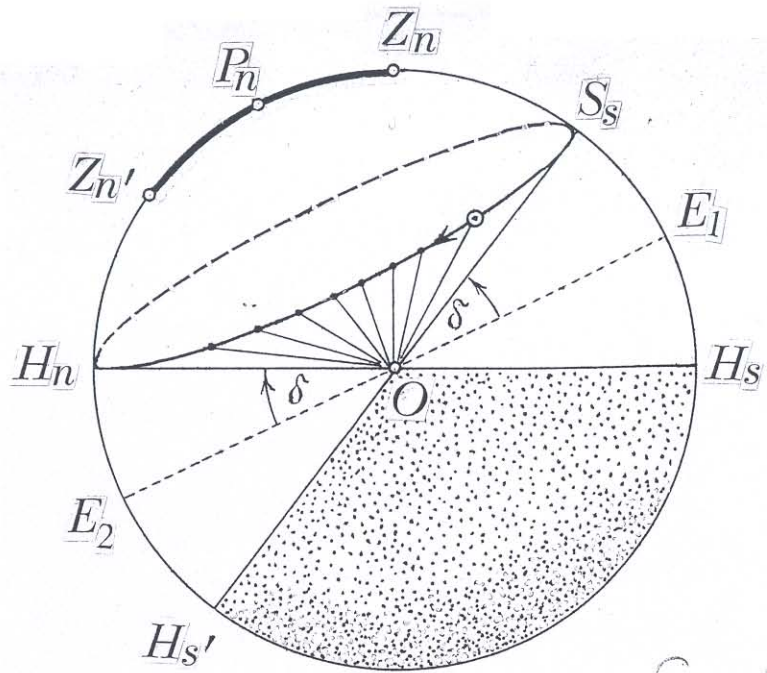
Ca. 114



CA. 115

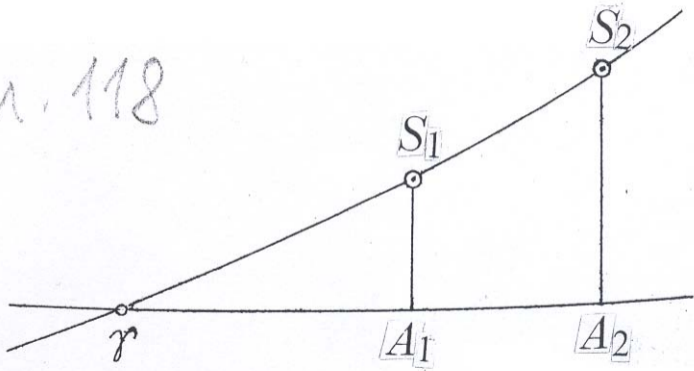
na 4/2



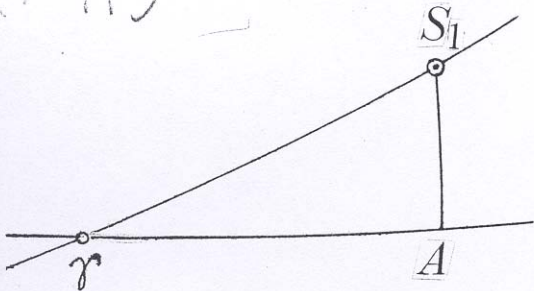


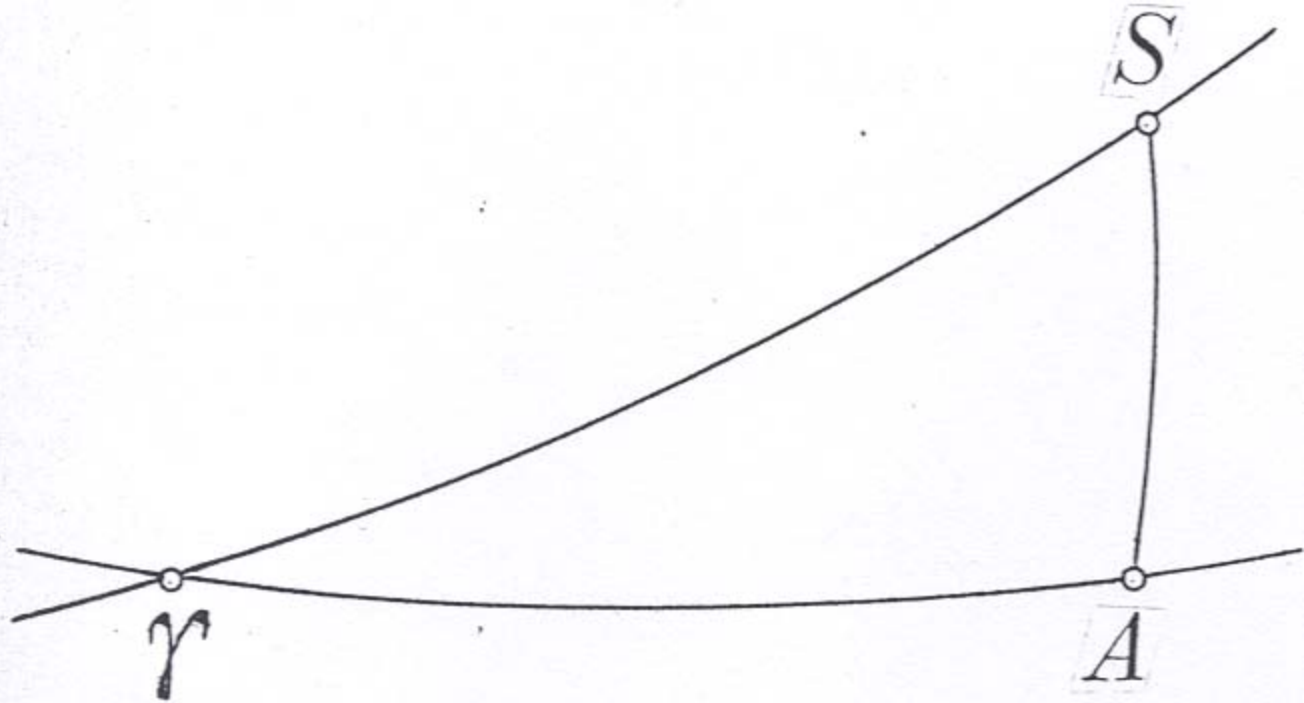
Ca. 117

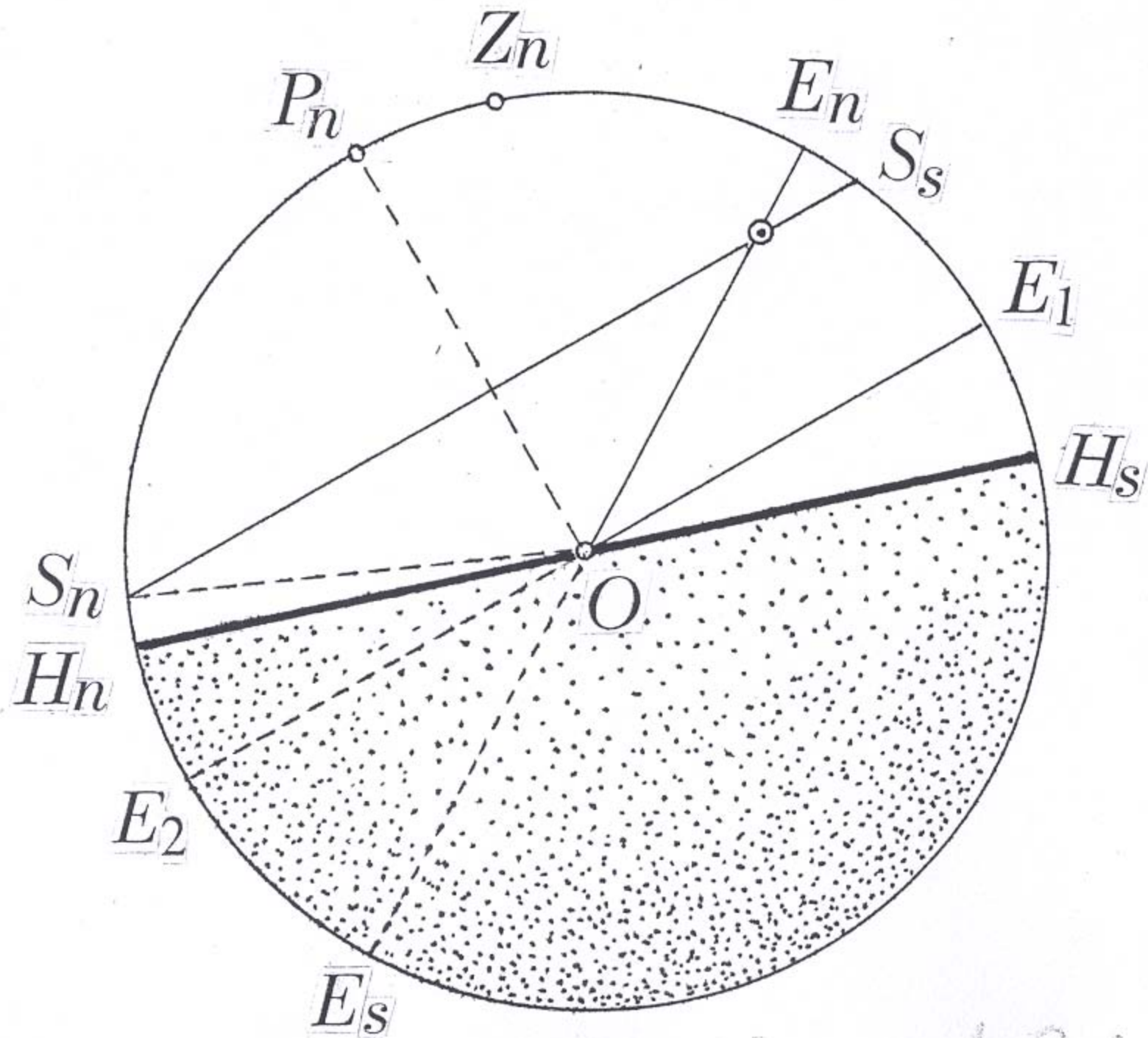
CA. 118

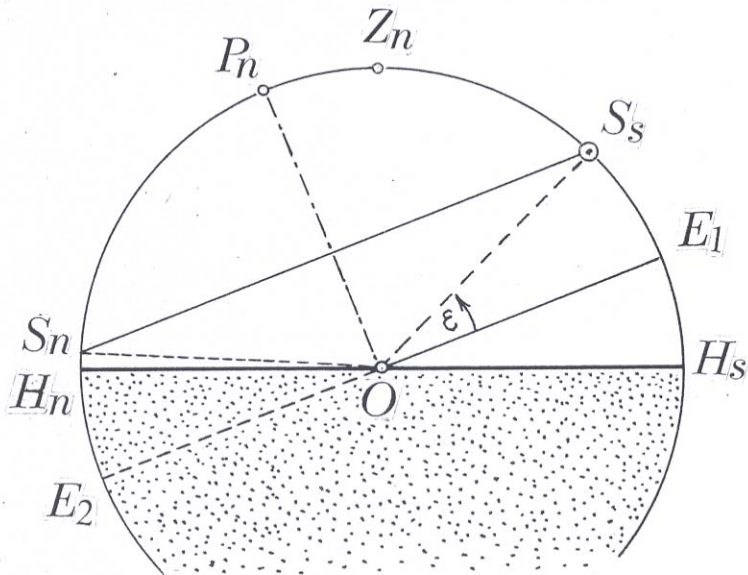


119

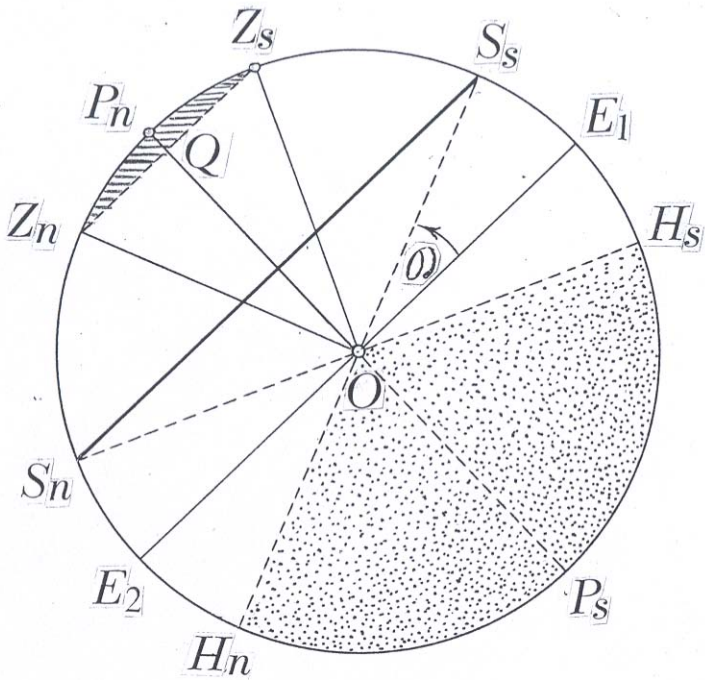




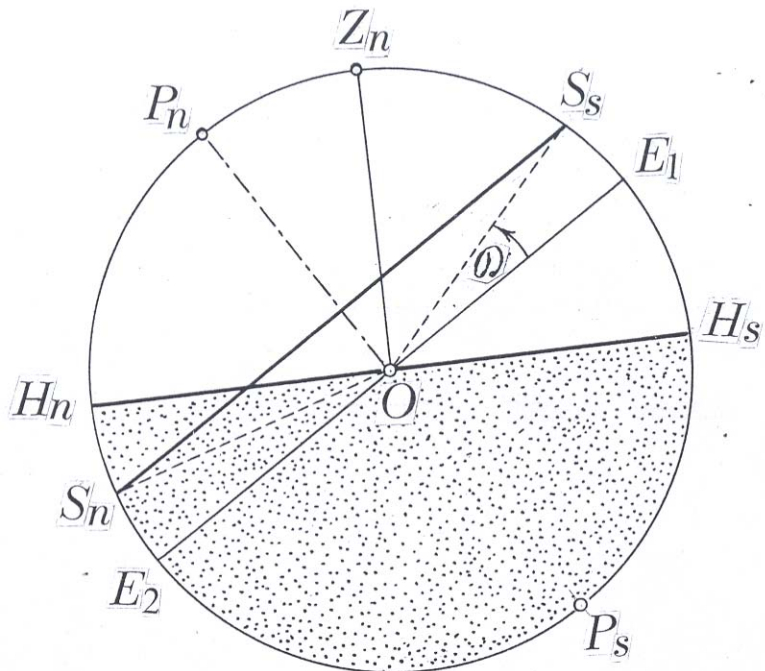


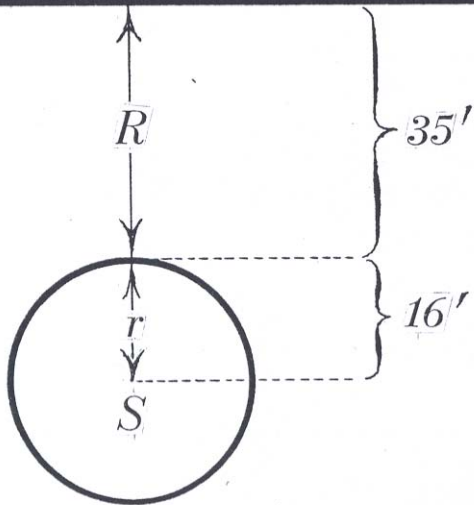


Ca. 123

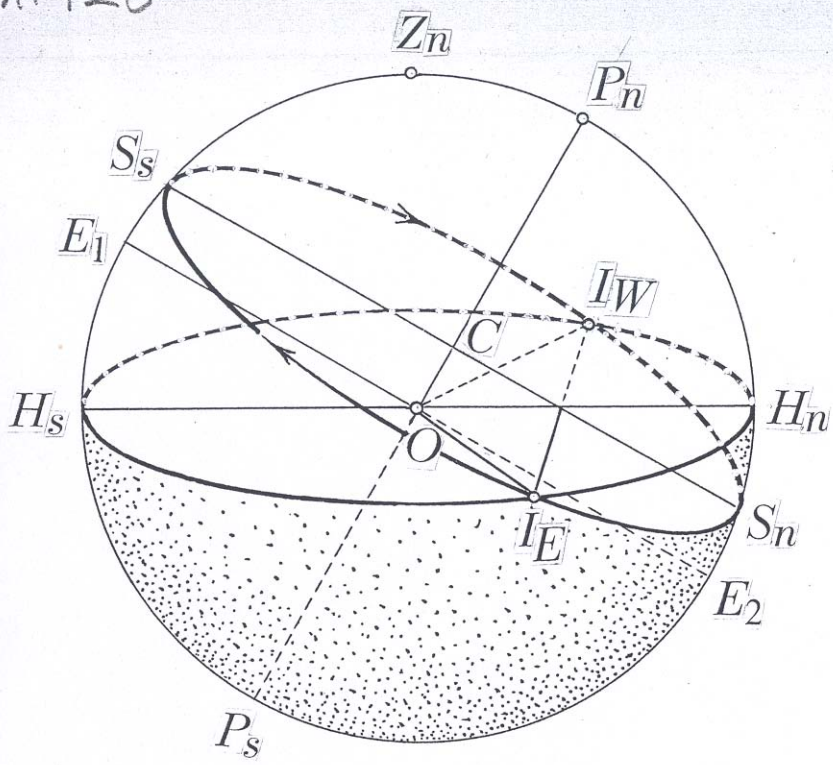


ca. 124

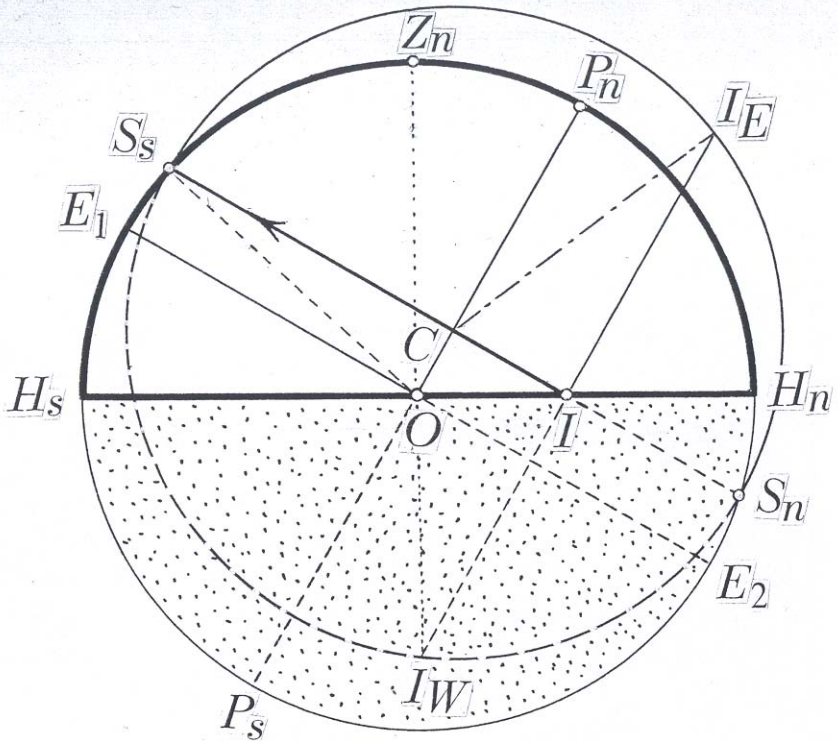


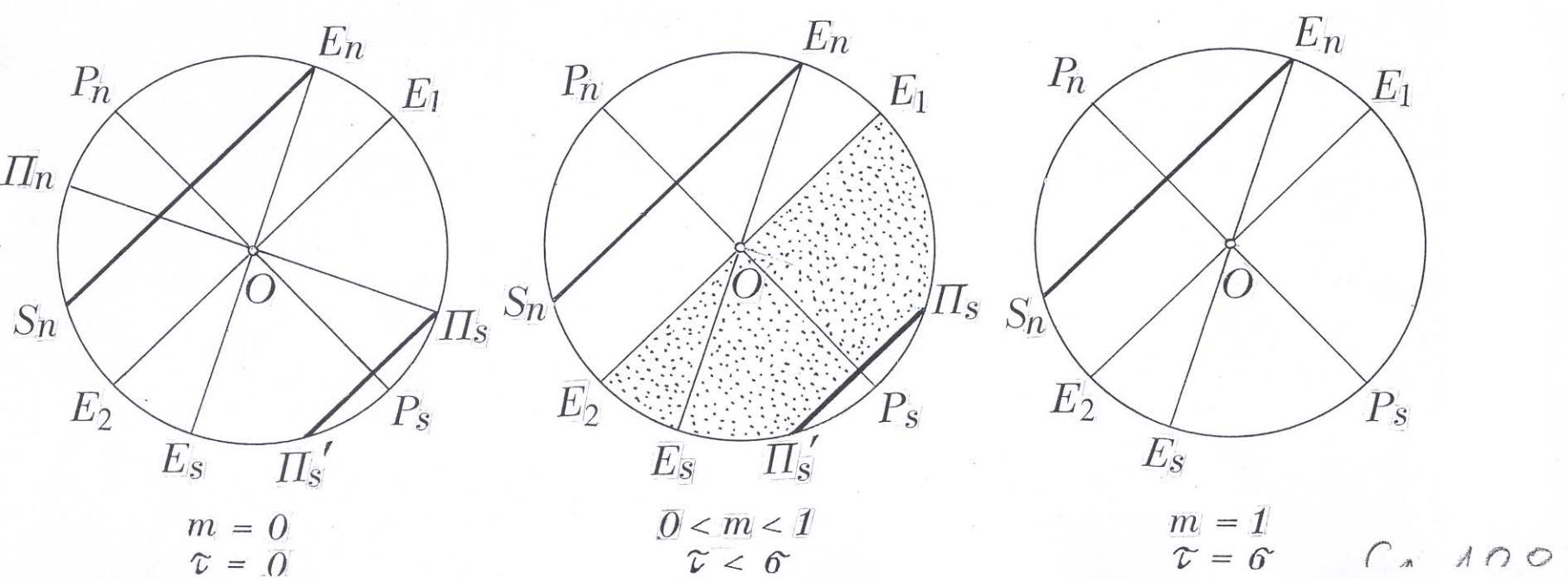
H_1 H_2 

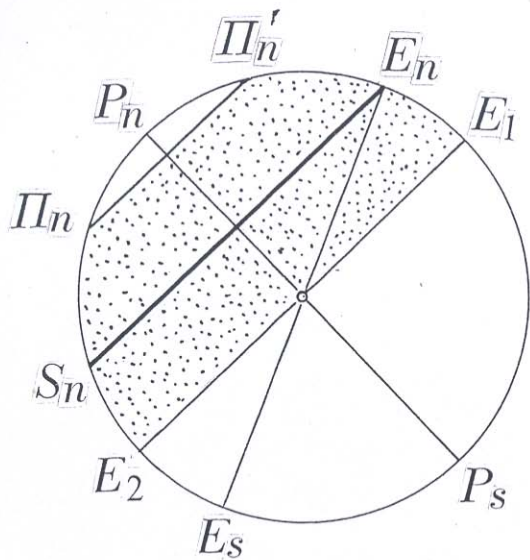
CA 105



CN. 127

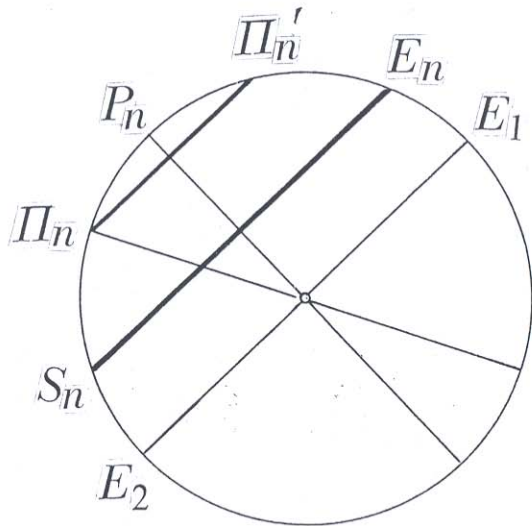






$$1 < \bar{m} < \infty$$

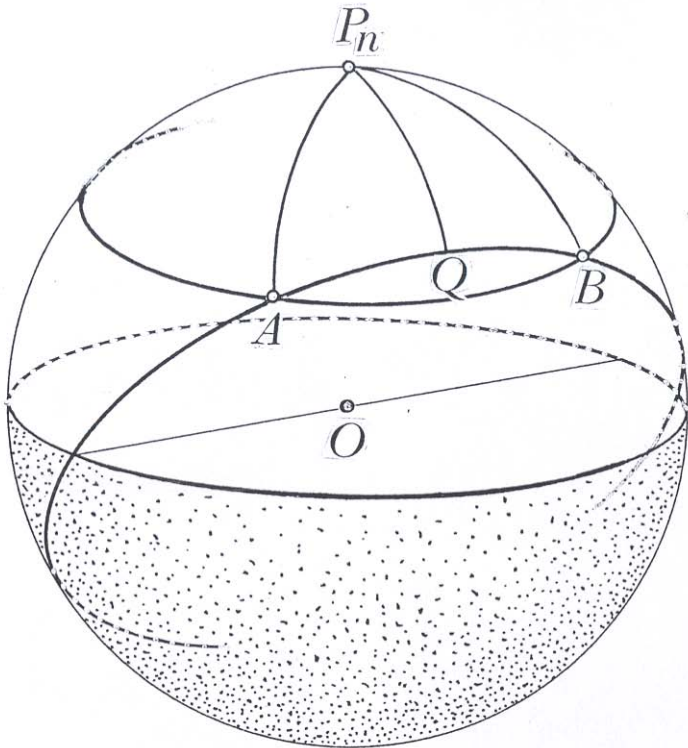
$$\bar{\tau} > \bar{\sigma}$$



$$\bar{m} \rightarrow \infty$$

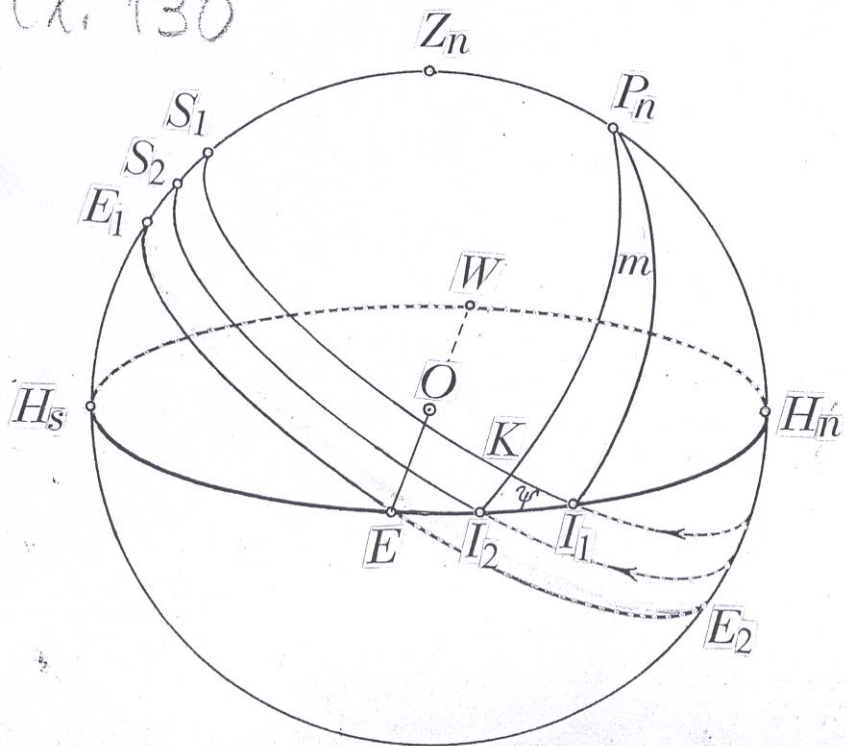
$$\bar{\sigma} = 0$$

ca. 128.4-5

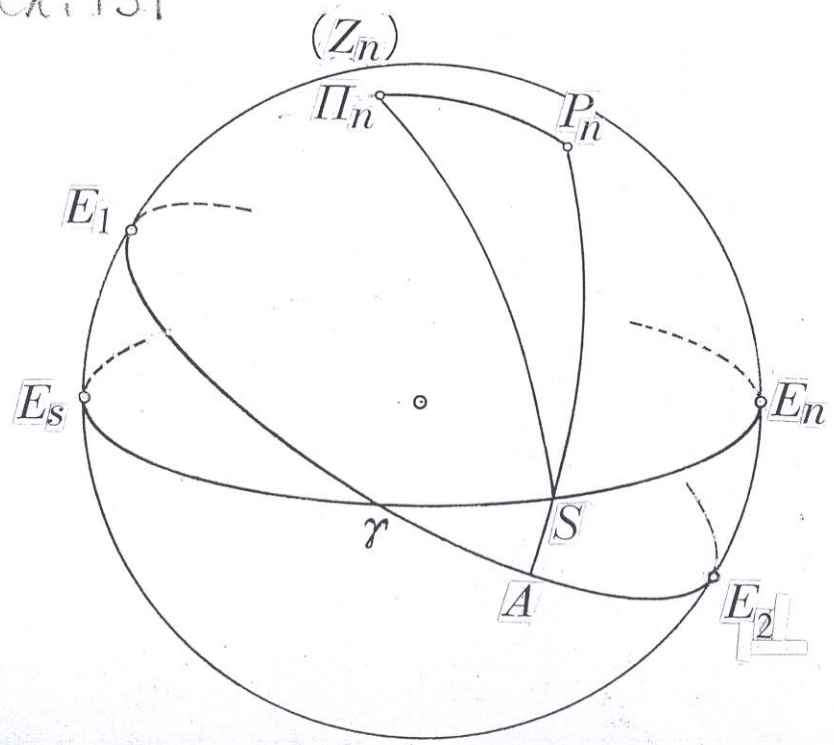


ca. 129

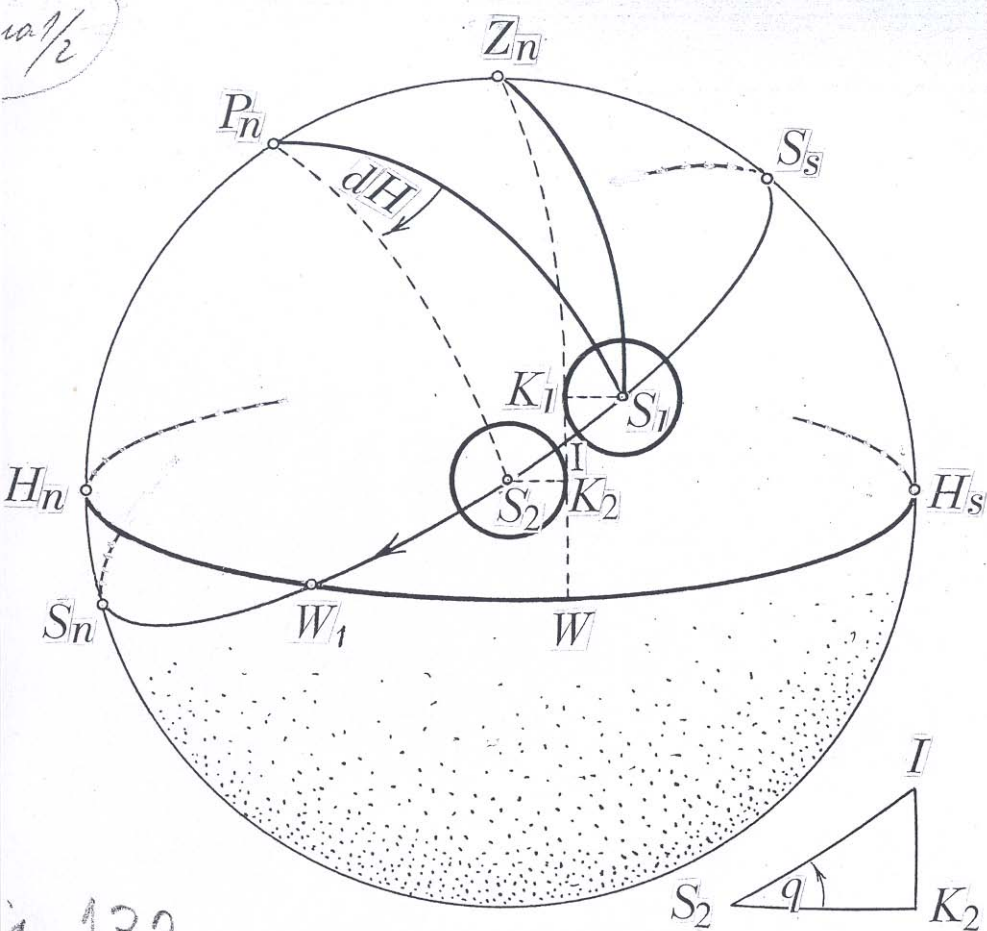
Ch. 130



CA. 131



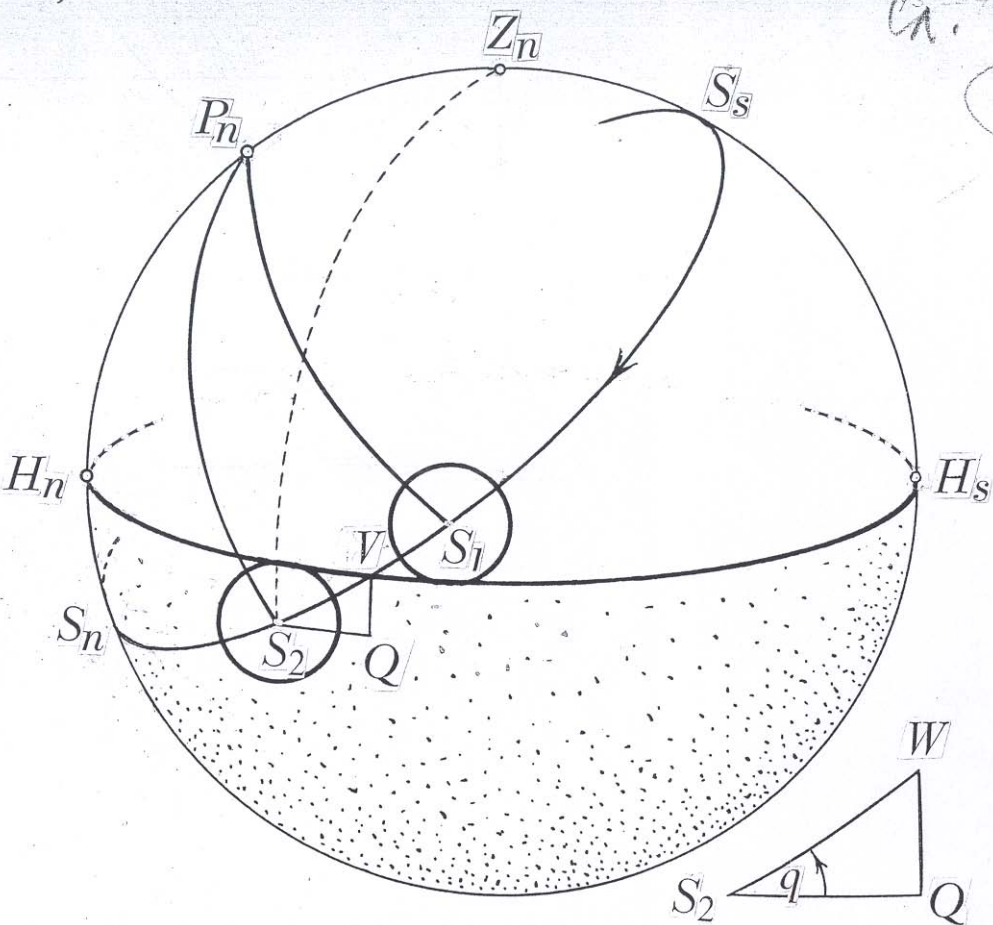
ω^2/c

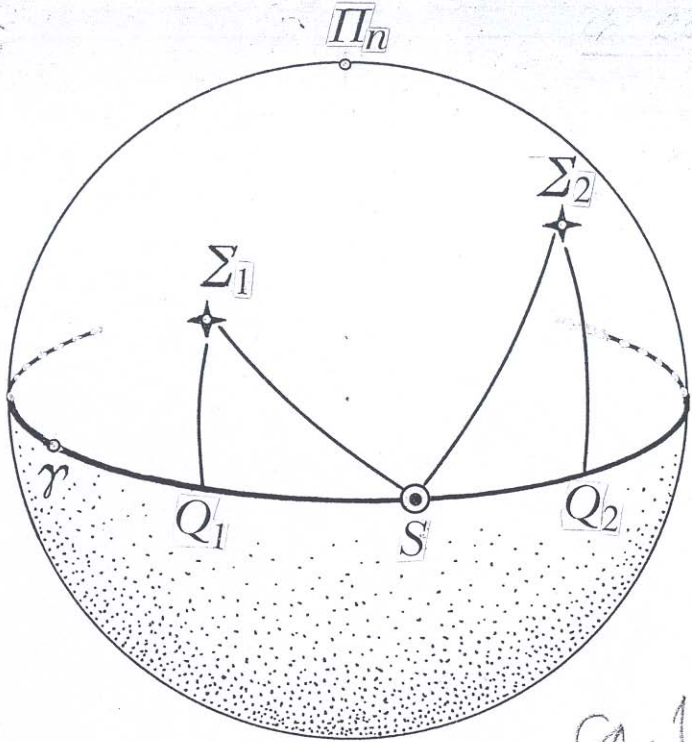


132

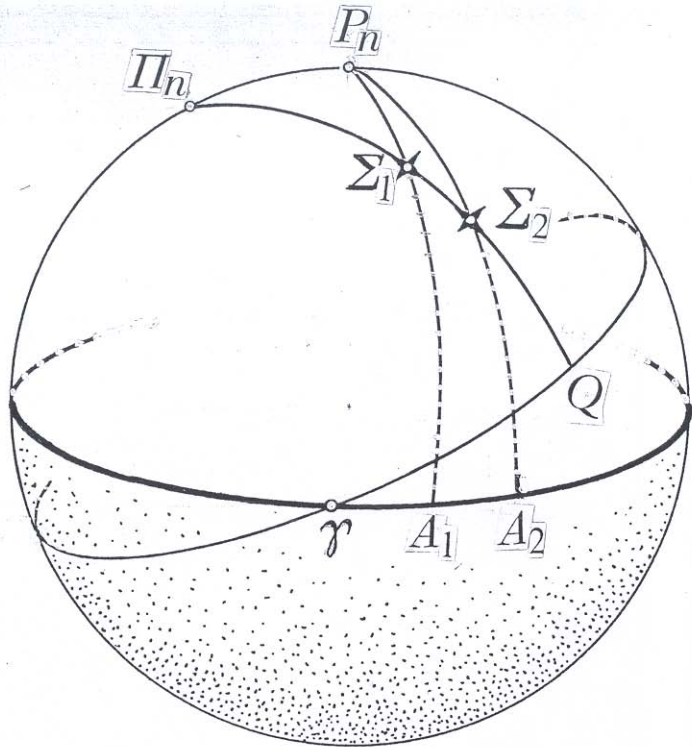
Cr. 133

ma 1/2

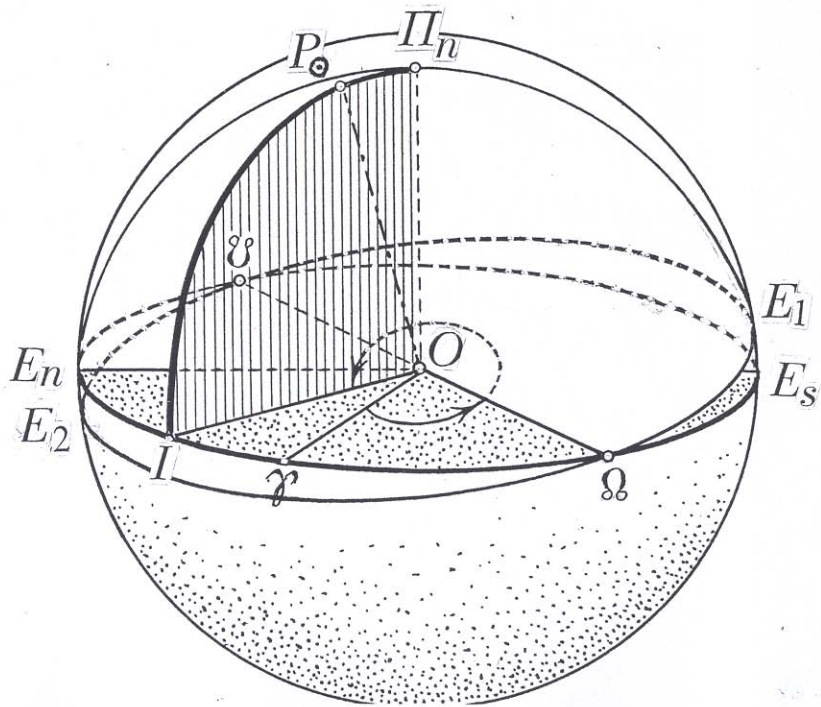




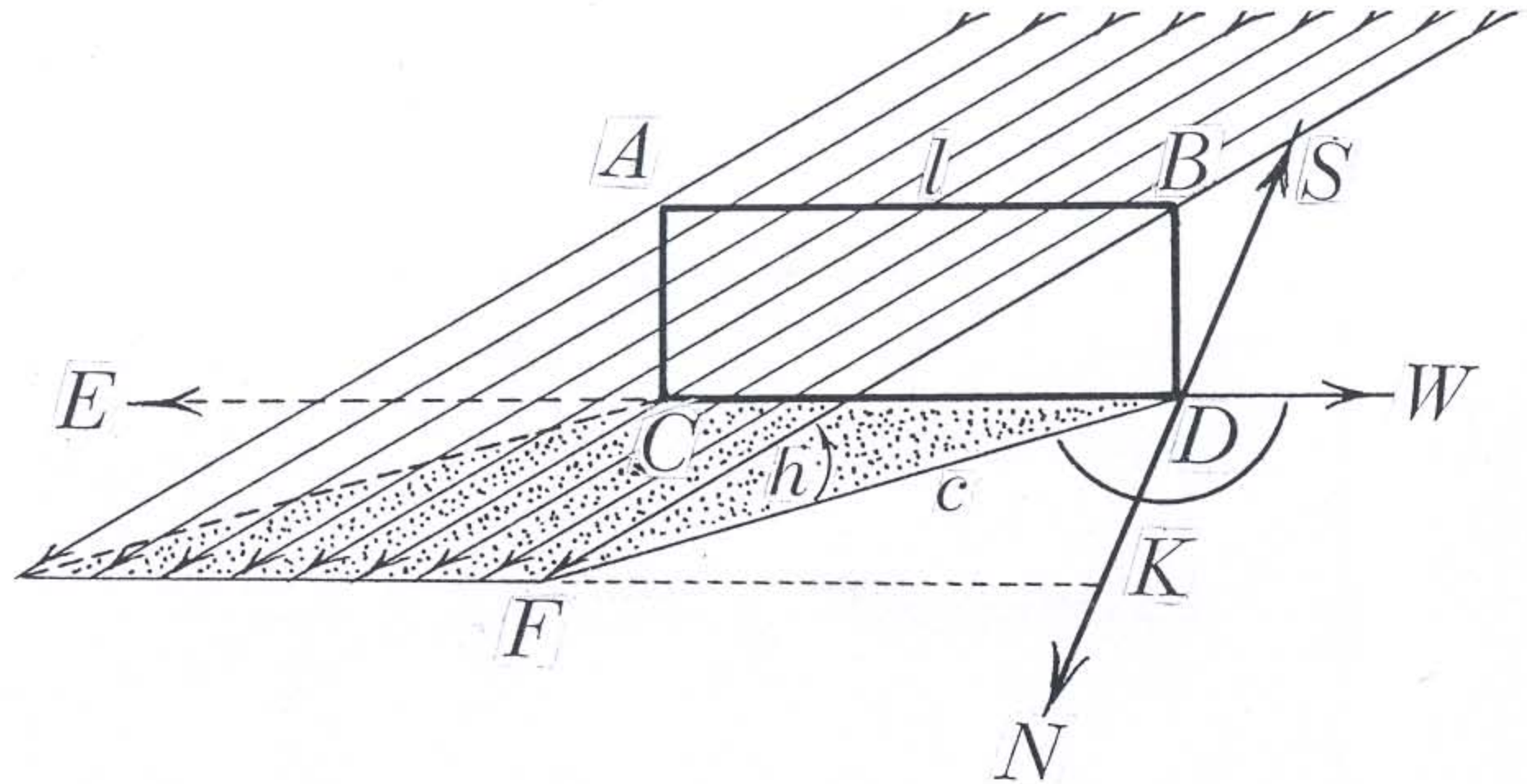
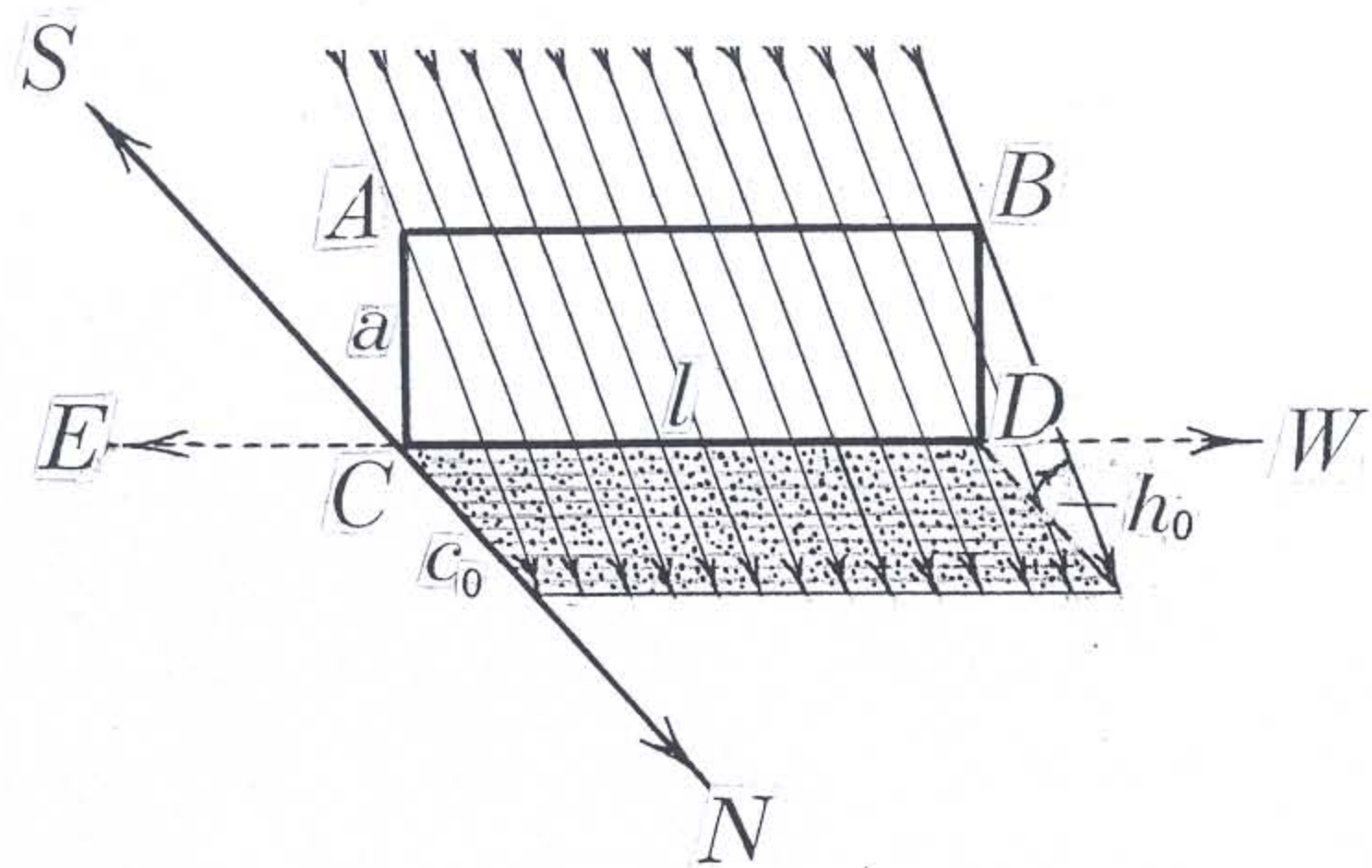
ca. 134



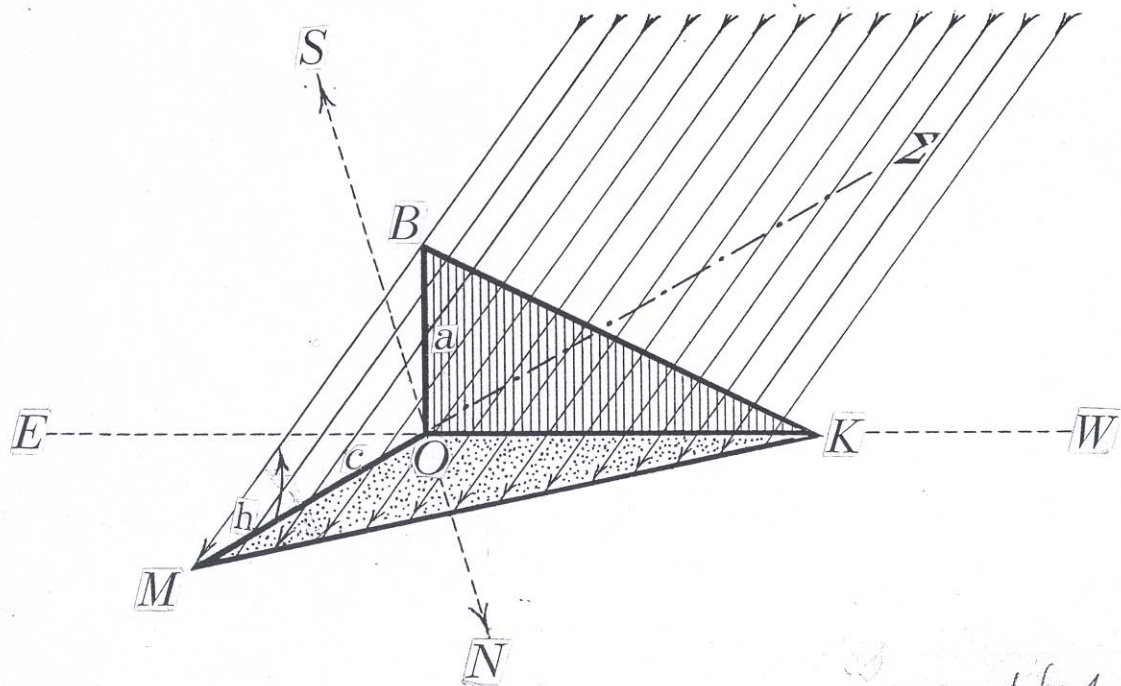
Сл. 135



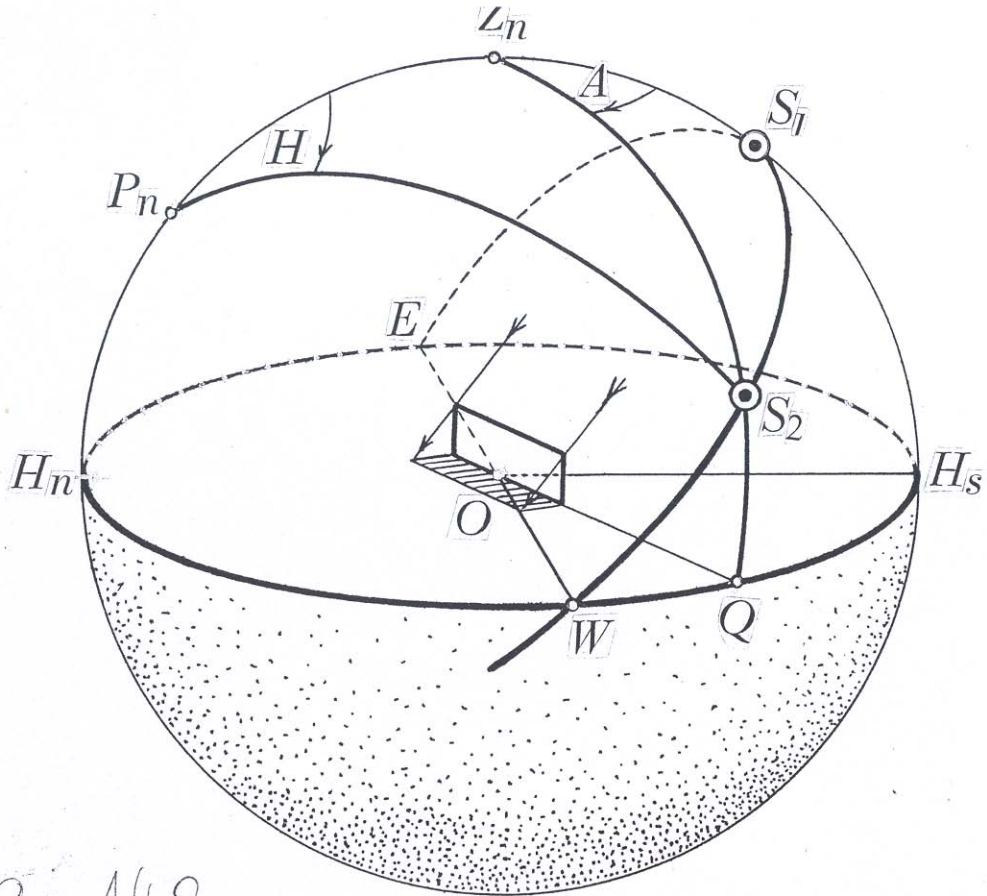
Сл. 139



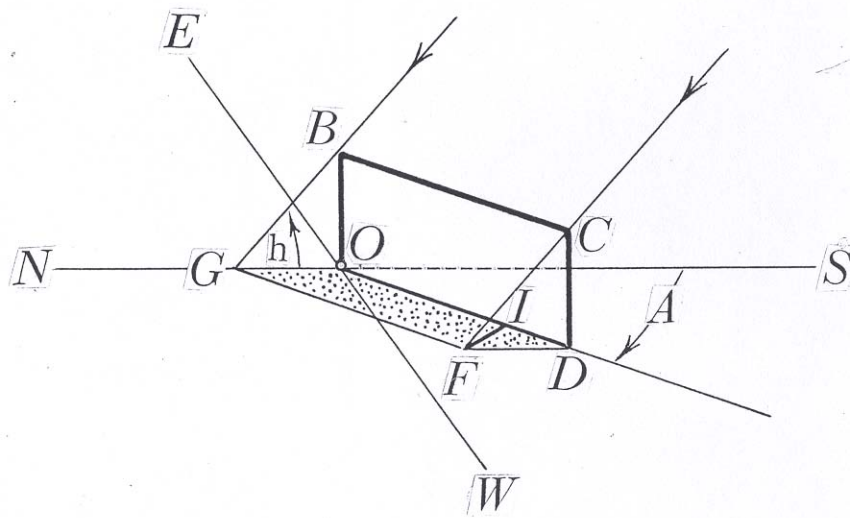
Ca. 140



ca. 141

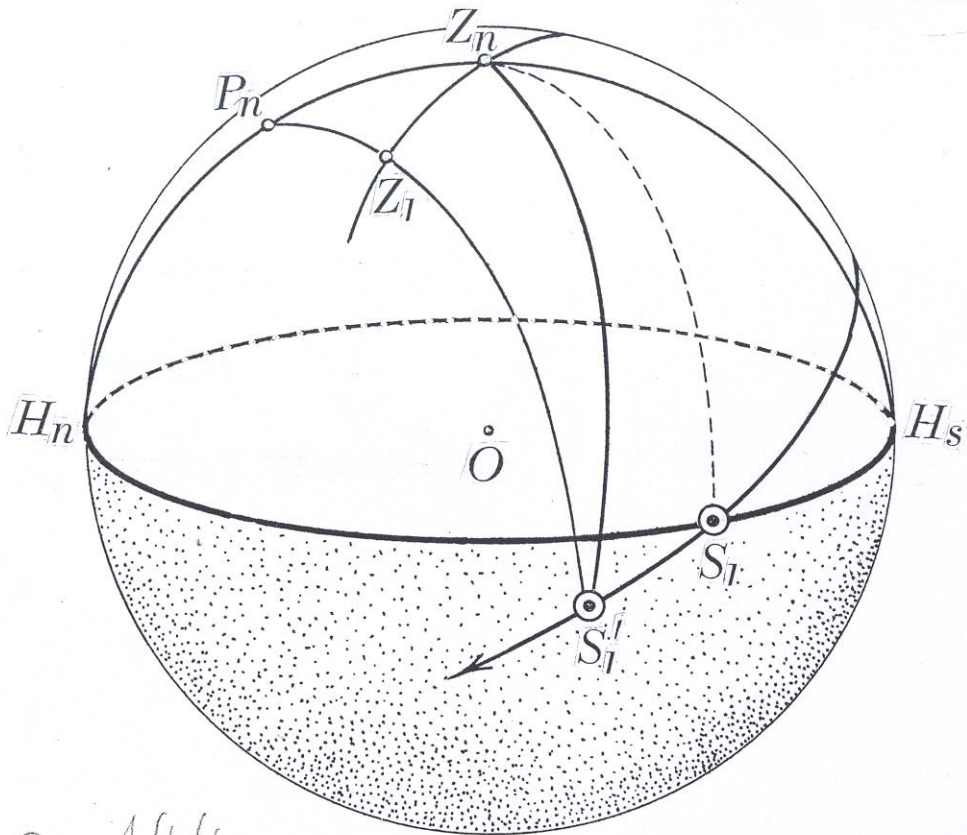


Ca. 142

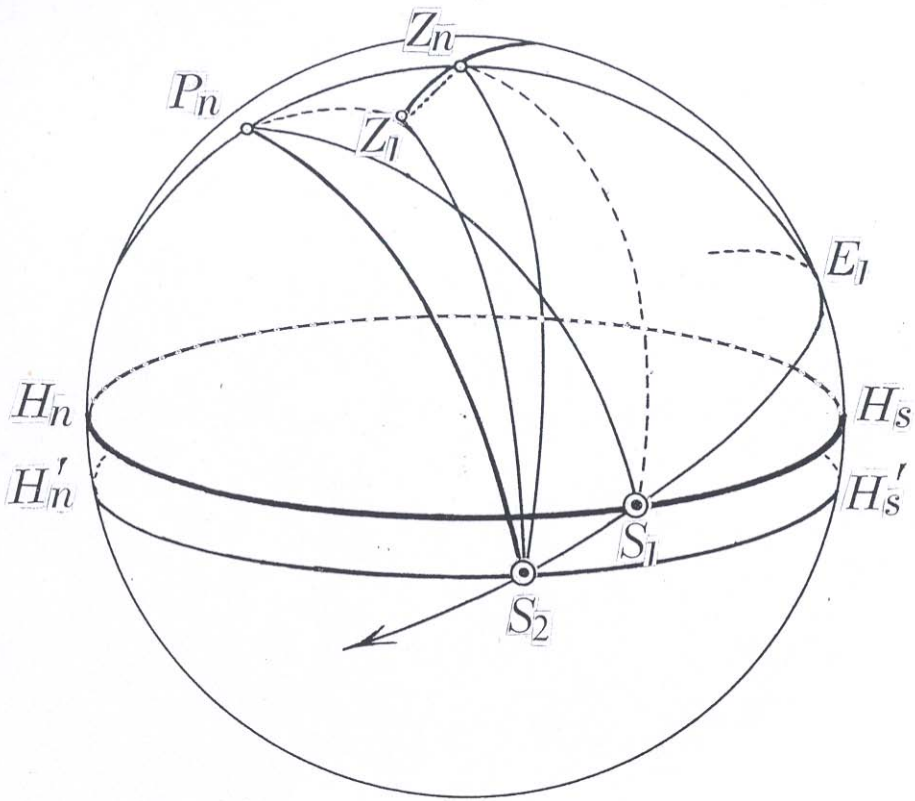


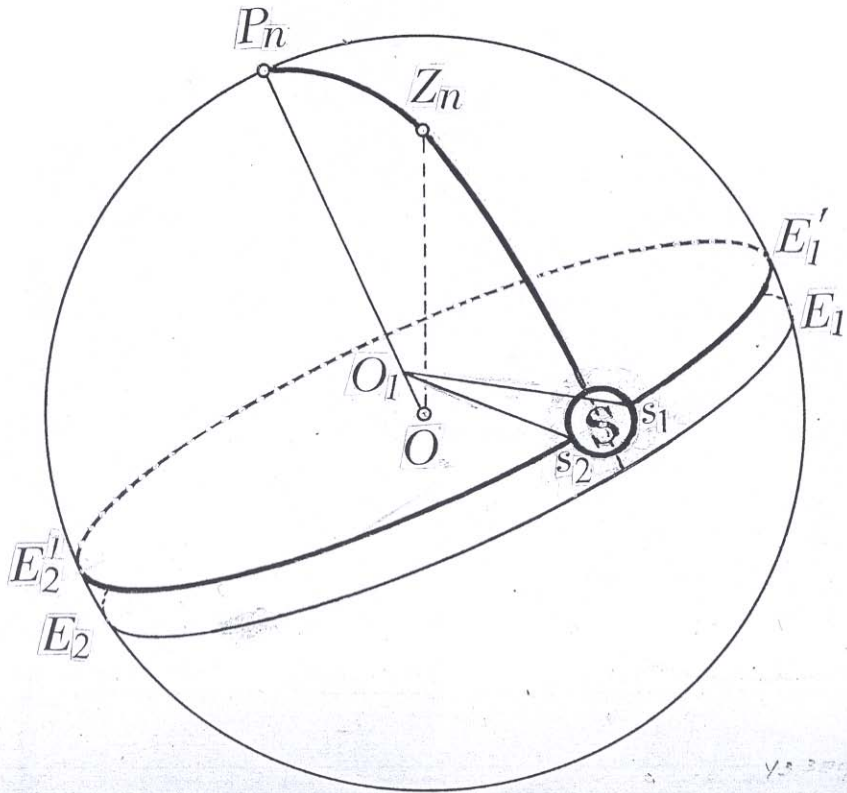
YB 2004, 2004 (2)

ca. 143

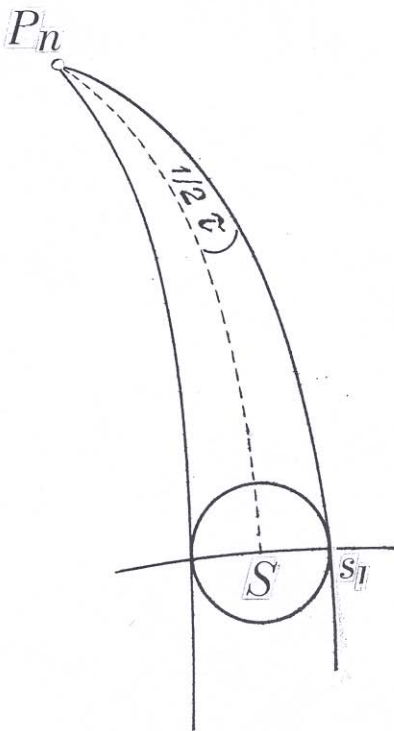


ca. 144

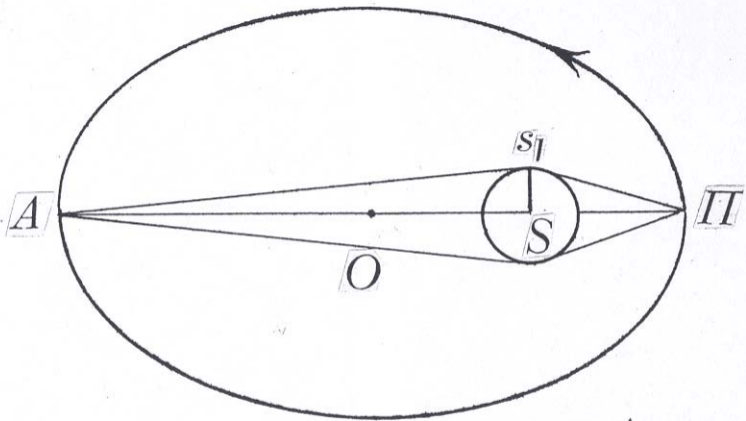




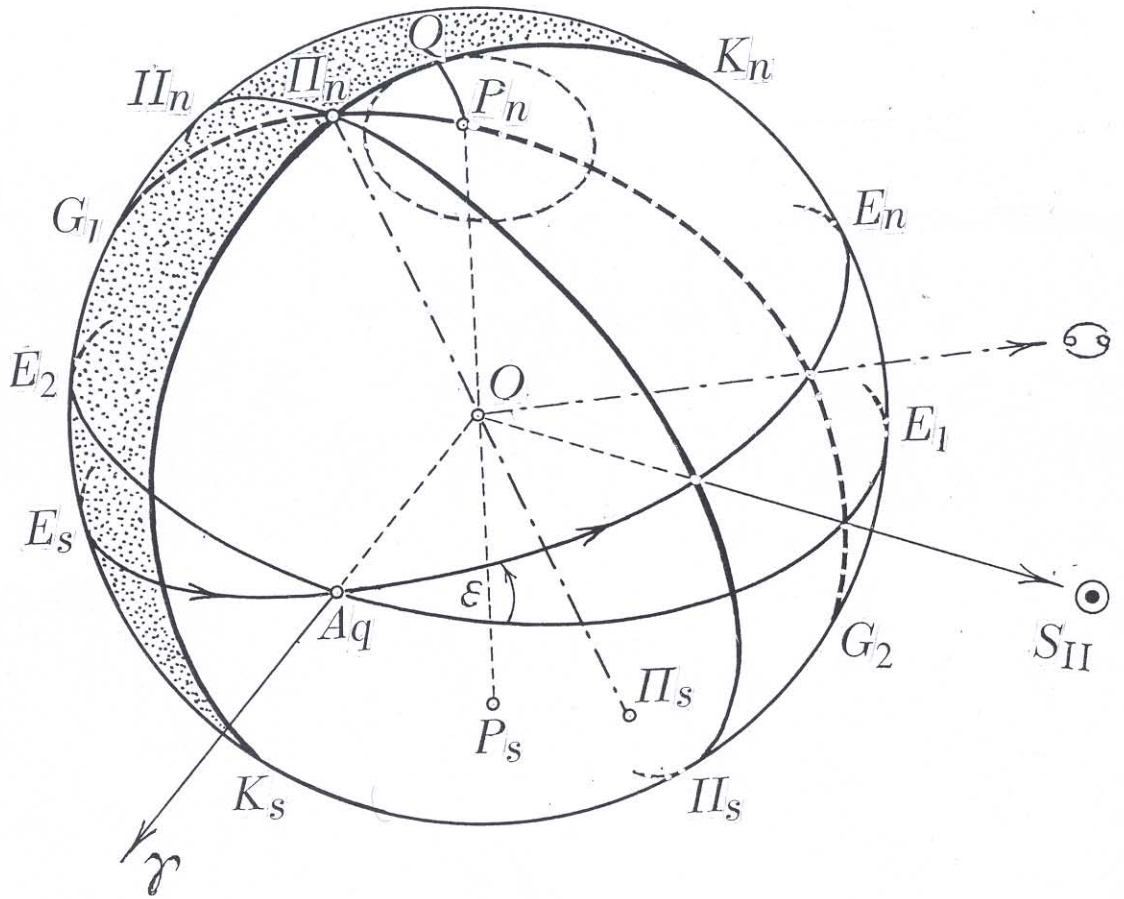
Cr. 146



ca. 147



Ca. 148



Ca. 151