

Визир и астрономи

Ријер

КУРС АСТРОНОМИЈЕ

(ТЕОРНИ ДЕО)

ОД ГЕОДЕТСКОГ ЂЕНЕРАЛА,

Dr. Н. Ј. ЦИНГЕРА,

РЕДОВНОГ ПРОФЕСОРА ГЕОДЕТСКОГ ОДЕЉЕЊА НИКОЛАЈЕВСКЕ ВИШЕ ШКОЛЕ ВОЈНЕ АКАДЕМИЈЕ
И ХИДРОГРАФСКОГ ОДЕЉЕЊА ВИШЕ ШКОЛЕ ПОМОРСКЕ АКАДЕМИЈЕ У ПЕТРОГРАДУ.

ДРУГО, ПРЕРАЂЕНО, ПОСМРТНО ИЗДАЊЕ.

ПОД РЕДАКЦИЈОМ

Адмирала **Е. Л. БЈАЛОКОЗА**, ђенерала **Д. Д. СЕРГИЈЕВСКОГ**,
и астронома **АХМАТОВА** у Петрограду.

ПРЕВОД С РУСКОГ

ОД

Ђенерала С. П. БОШКОВИЋА,

НАЧЕЛНИКА ВОЈ. ГЕОГРАФСКОГ ИНСТИТУТА И ПРОФЕСОРА
ГЕОДЕЗИЈЕ НА ВИШОЈ ШКОЛИ ВОЈ. АКАДЕМИЈЕ.



БЕОГРАД

Штампарска радионица Министарства Војске и Морнарице

1925.

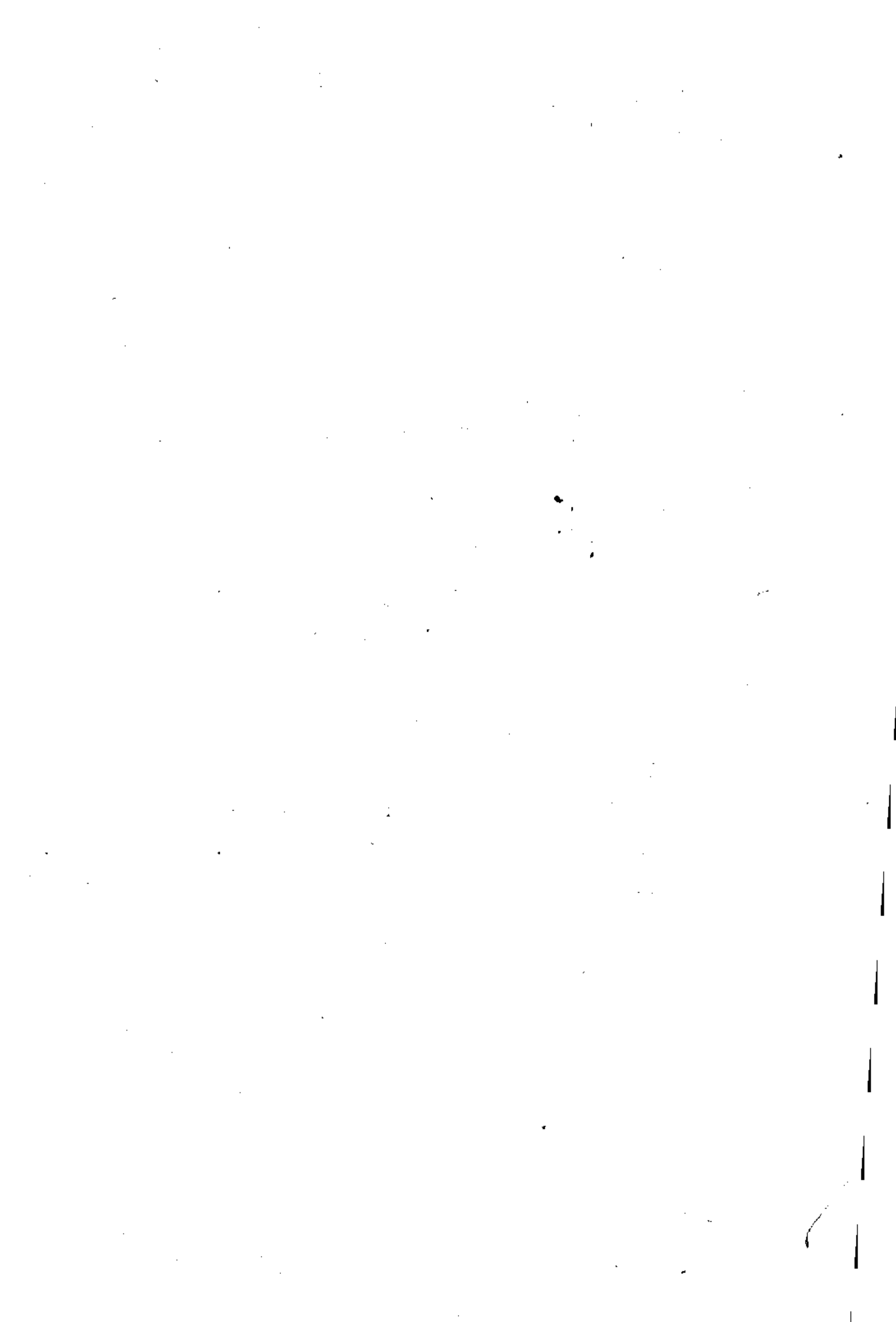


ПРЕДГОВОР

за прво издање 1899. године.

Овај сам Курс Астрономије саставио за своје слушаоце, официре Геодетског Одељења Николајевске Више Школе вој Академије и Хидрографског Одељења Више Школе Поморске Академије. Циљ је овога Курса, да се официре темељно спреми из практичних знања оних астрономских посматрања, која улазе у сферу делатности геодеза и хидрографа. Овим му је циљем одређена и садржина. Овај први његов део (теорни) садржи у себи општа правила рачунавања, теорију случајних грешака посматрања и рачунавања и Сферну Астрономију са неопходним допунама и објашњењима из Теорне и Физичке Астрономије. Други пак део (практични) садржи теорију преносних астрономских инструмената и разне методе одређивања географских координата места из астрономских посматрања помоћу тих инструмената. При расматрању разних проблема и при извођењу тачних и приближних формула, које се на њих односе, користим сам се у својем излагању највише геометриским методама, које су и природније, и очигледније и простије од аналитичких.

Н. ЦИНГЕР.



ПРЕДГОВОР

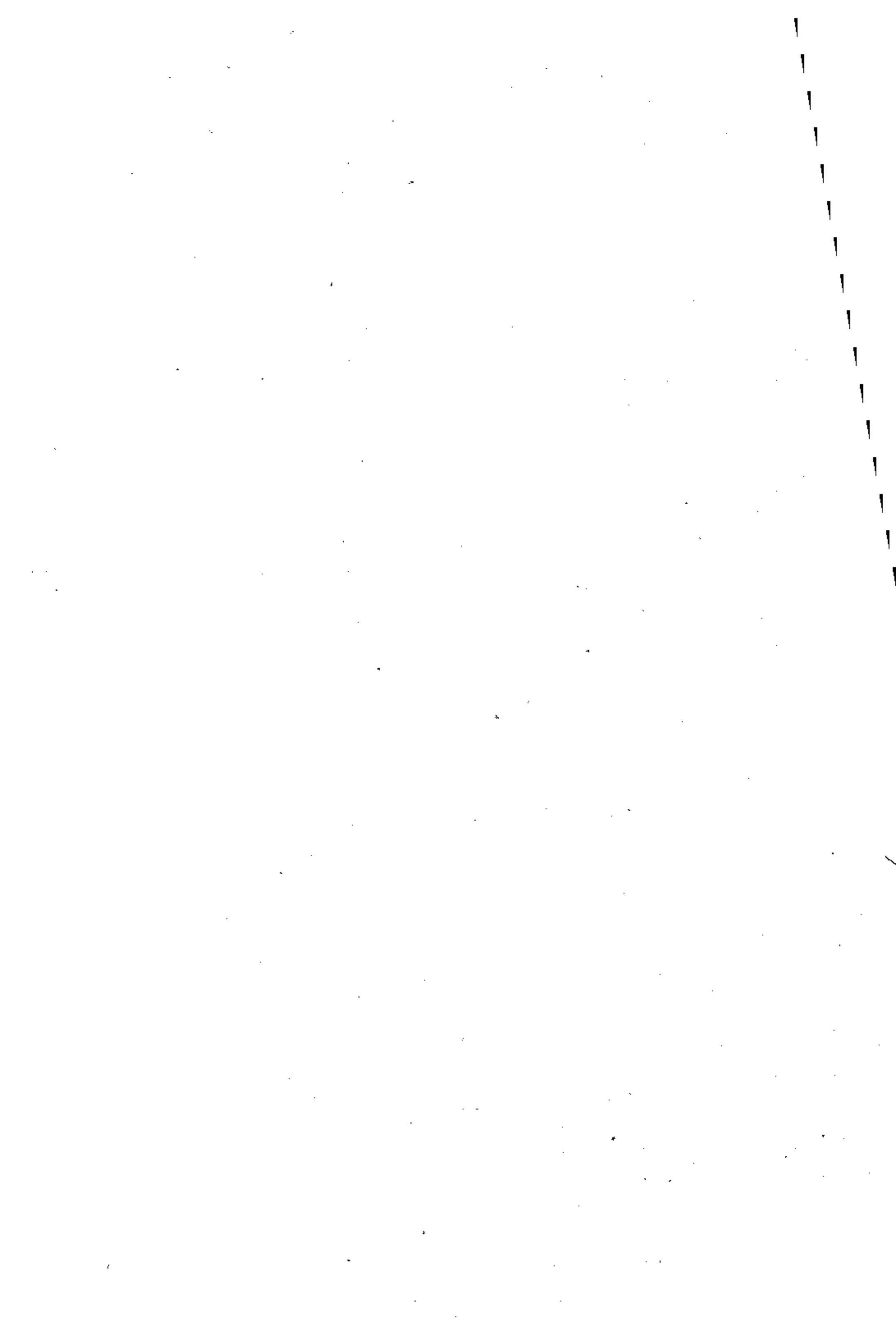
за друго поправљено и допуњено издање.

Пред своју смрт 1918. год. Н. Ј. Цингер прислушао је преради својега „Курса Астрономије“ за ново издање на основу предлога, који му је учинио Начелник Гл. Хидрографске Управе Поморског Министарства г. Е. Л. Бјалокоз. Тешке прилике у тој години нису му, к сажаљу, дале могућности да заврши потпуно овај посао. Када сам ја, — по поруци Хидрограф. Управе, — примио заоставши материјал од удовице покојникове, што се је показало, да се овај материјал састоји: прво из штампаног (првог издања) „Курса Астрономије“ са уписаним у њему изменама и допунама; друго из низа записа на засебним листовима, често пуна конспектног карактера. Због тога је, ради израде дефинитивне редакције новог издања, образован, по моме предлогу, један мали колегијум, у који су саставили: Начелник Гл. Хидрографске Управе Адмирал Е. Л. Бјалокоз, геодеш. генерал Д. Д. Сергијевски и ја. Последња двојица шребали смо да поделимо међу собом посао око припреме појединих глава „Курса“ за штампу а први је узео удела у дефинитивном редакцирању савременог текста, који је на овај начин разматрао и оцењивао цео колегијум.

Али, тешке прилике за штампање јако су развукле посао око новог издања. Оно је започето још у јануару 1919. године али је због тих неприлика, завршено тек 1922. само под мојом редакцијом, јер је г. Е. Л. Бјалокоз умро 18.-XII. 1919. год. а 4. јуна 1920. год. и Д. Д. Сергијевски после дуго-трајне и тешке болести. У то време савремено је било за штампу 17 таблица. До јула 1920. год. штампање је било сасвим обављено па је тек од тог доба обновљено. Тада сам ради коректуре позвао у помоћ г. А. Н. Рождественског, који је проконтролисао и неке примере а и прорачунао таблицу 3. са новом вредношћу за саљоштеност.

Сравњењем новог издања са првим може се запазити, да су у њему унесене местимично значајне допуне. Највећи њихов део је припремио сам Н. Ј. Цингер а редактори су имали само да им даду дефинитивни облик за штампу. Осим тога, желећи, да одржимо дух књиге, последње главе, — о физичкој природи небесних тела, које аутор није стигао да корегира, — нису стварно измењене у смислу реда излагања материјала, само је садржина доведена у склад са савременим стањем науке.

На завршетку овога крашког преговора, надамо се, да ће ово ново издање теорне астрономије у овакром облику бити достојни споменик светлој успоми Н. Ј. Цингера, дубокога научара и оснивача особите самосталне школе руских геодеша-астронома. И, надаши је се, да ће се његове методе рада моћи схватити не само непосредним слушањем његових преда-



САДРЖАЈ:

(СТРАНЕ СУ ПОКАЗАНЕ У ЗАГРАДИ).

У В О Д.

1. Задаћа астрономије (1.). — 2. Привидна и истинита кретања небесних тела (1.). — 3. Закони истинитих кретања планета Сунчеве системе (2.). — 4. Теорија истинитих кретања (2.). — 5. Верификација теорних резултата (3.). — 6. Општи пут астрономских испитивања (3.). — 7. Подела астрономије на одељке (4.). — 8. Практична примена астрономије (4.). — 9. Руководства (5.). —

ОДЕЉАК I.

ПОМОЋНА МАТЕМАТИЧКА ПИТАЊА.

ГЛАВА I.

Основне формуле сферне тригонометрије.

10. Разне системе координата и прелаз са једне од њих на другу (9.). — 11. Помоћна (небесна) сфера (10.). — 12. Аналогија међу формулама сферне и равне тригонометрије (11.). — 13. Неперова правила за формуле правоуглог сферног троугла (12.). — Задаће (14.). —

ГЛАВА II.

Општи поступци и правила за бројна срачунавања.

14. Разна средства за упрошћавање срачунавања (15.). — 15. Логаритамске таблице за сабирање и одузимање (15.). — 16. Довођење формула на логаритамски облик (17.). — 17. Преображај формула (18.). — 18. Срачунавање углова по њиховим тангенсима (19.). — 19. Употреба логаритамских таблица разне тачности (20.). — 20. Формулари и контролисање срачунавања (21.). — Задаће (23.).

ГЛАВА III.

Приближна изрази и диференцијалне формуле.

21. Употреба редова (25.). — 22. Лагранжов ред (27.). — 23. Логаритамске поправке синуса малих углова (28.). — 24. Елементарни троугли (30.). — 25. Диференцијалне формуле (31.). — 26. Диференцијални односи међу елементима сферних троуглова (32.). — Задаће (35.).

ГЛАВА IV.

Интерполовање.

27. Циљ и општи поступак при интерполовању (37.). — 28. Интерполационе формуле (39.). — 29. Интеполовање на средину (42.). — 30. Нахођење аргумената по даној вредности функције (43.). — 31. Интерполовање по даним диференцијалним променама функције (44.). — 32. Геометриско значење интерполовања (45.). — 33. Лагранжова формула (46.). — Задаће (47.).

ГЛАВА V.

Основи теорије вероватности.

34. Вероватност простог случајног догађаја (49). — 35. Вероватност сложеног догађаја (50). — 36. Закон великих бројева (51). — 37. Вероватност грешака у суми од неколико табличних бројева (52). — Задаће (53.).

ГЛАВА VI.

Теорија случајних грешака посматрања.

38. Сталне и случајне грешке посматрања (55). — 39. Основна особина случајних грешака (56.). — 40. Израз вероватности случајне грешке (57.). — 41. Највероватнија вредност мерене количине (58.). — 42. Крива и таблица вероватности случајних грешака (59.). — 43. Потврда теорије случајних грешака из огледа (61.). — Задаће (64.).

ГЛАВА VII.

Тачност разних резултата добивених из посматрања.

44. Средња и вероватна грешка ма каквог резултата (65.). — 45. Средња грешка линеарне функције измерених количина (65.). — 45а. Примери за објашњење (67.). — 46. Средња грешка ма какве функције измерених количина (68.). — 47. Тежине (важине) разних резултата (69.). — 48. Тачност одређивања средње грешке из ограниченог броја посматрања (70.). — Задаће (72.).

ГЛАВА VIII.

Метода најмањих квадрата.

49. Довођење једначина на једну и исту тачност и на линеарни облик (75.). — 50. Нормалне једначине (76.). — 51. Тежине и средње грешке тражених непознатих (78.). — 52. Извод средње грешке посматрања из основних једначина (79.). — 53. Формулар и контрола срачунавања (81.). — 54. Пример за објашњење (83.). — 55. Одређивање коефицијената периодичког реда (87.). — Задаће (88.).

ОДЕЉАК II.

АСТРОНОМИЈА.

ГЛАВА IX.

Привидни и истинити положај звезда на небу.

56. Кривина Земљине површине (93.). — 57. Даљина и спуштање привидног хоризонта (94.). — 58. Привидни и истинити правци на небесна тела (95.). — 59. Дејство астрономске рефракције (96.). — 60. Небесни свод (97.). — 61. Звезде некретнице (98.). — 62. Величине и називи звезда (98.). — Задаће (101.).

ГЛАВА X.

Привидно дневно кретање звезда.

63. Координате небесних тела у односу према хоризонту (103.). — 64. Универсални инструмент (103.). — 65. Одређивање правца меридијана (104.). — 66. Одривање висине пола (106.). — 67. Равномерност дневног кретања звезда (106.). — 68. Екваторијалне координате небесних тела (107.). — 69. Звездано време (108.). — 70. Географске ширине и дужине (109.). — 71. Инструменти са паралактичким постројем (110.).

ГЛАВА XI.

Ротационо кретање и елипсоидни облик Земље.

72. Објашњење привидног дневног кретања небесних тела (113.). — 73. Посљедице ротационог кретања Земље (114.). — 74. Дејство центрифугалне силе (115.). — 75. Елипсоидни облик Земље (117.). — 76. Скретање вертикалних линија (119.). — 77. Геоцентричке координате тачака на Земљиној површини (119.). — Задаће (121.).

Г Л А В А XII.

Задаће из дневног кретања небесних тела.

78. Опште напомене (123.). — 79. Диференцијалне промене зенитнога растојања и азимута небесног тела (124.). — 80. Пролаз небесног тела кроз дани вертикал (125.). — 81. Пролаз небесног тела кроз дани алмукантарат (126.). — 82. Астрономски сутон (128.). — 83. Две звезде у истом вертикалу (129.). — 84. Две и три звезде на једном алмукантарату (130.). —

Г Л А В А XIII.

Теорија астрономске рефракције.

85. Општи израз рефракције (131.). — 86. Погодбе за равнотежу атмосфере (133.). — 87. Разне хипотезе о построју атмосфере (135.). — 88. Израз рефракције у облику реда (138.). — 89. Таблице рефракције (139.). — 90. Поправка висине места посматрања (141.). — 91. Кривина рефракционе криве (141.). — Задаће (142.).

Г Л А В А XIV.

Паралакса небесних тела.

92. Основне формуле паралаксе (145.). — 93. Дејство паралаксе на екваторијалне координате небесних тела (146.). — 94. Дејство паралаксе на хоризонталне координате небесних тела (148.). — 95. Привидне и истините димензије небесних тела (149.). — 96. Одређивање паралакса Месеца и планета (151.). — 97. Одређивање паралаксе Сунца (152.). — Задаће (153.).

Г Л А В А XV.

Кретање Сунчево и Месечево.

98. Одређивање екваторијалних координата Сунца (155.). — 99. Одређивање положаја тачке пролетње равнодневице (156.). — 100. Еклиптика (157.). — 101. Еклиптичке координате небесних тела (158.). — 102. Прецесија (159.). — 103. Кретање Сунчево по његовој орбити (161.). — 104. Годишња доба (162.). — 105. Екваторијалне и еклиптичке координате Месечева (163.). — 106. Орбита Месечева и њене промене (164.). — 107. Разни лунарни (Месечеви) месеци*) (165.). — Задаће (167.).

Г Л А В А XVI.

Рачунање времена.

108. Истинито и средње сунчано време (169.). — 109. Једначина времена (170.). — 110. Прелаз са средњег и истинитог времена на звездано и обратно (171.). — 111. Сунчани часовник (172.). — 112. Грађанске године и месеци (календар) (173.). — 113. Цикли Месечеви и Сунчеви (174.). — Задаће (175.).

Г Л А В А XVII.

Кретање планета.

114. Кретање планета у односу према звездама**) (177.). — 115. Кретање планета у односу према Сунцу (179.). — 116. Хелиоцентричке координате планета (180.). — 117. Звездани оптицаји планета (182.). — 118. Теорија епициклова (182.). — 119. Коперникова система (184.). — 120. Тихо Брахе-ова система и његова посматрања (184.).

Г Л А В А XVIII.

Кеплерови закони.

121. Испитивање орбите Земљине (187.). — 122. Испитивање орбите Марсове (188.). — 123. Истинити закони кретања планета (189.). — 124. Одређивање места планете на њеној

*) Са „месећ“ писаћемо време од месец дана а са „Месец“ особено име небесног тела, Земљинога пратцоца.

**) Под звездом разумећемо увек звезду некретницу; планету никад нећемо звати звездом.

орбити (190.). — 125. Употреба редова (192.) — 126. Срачунавање геоцентричких координата планете (193.). — 127. Пример за објашњење срачунавања координата Сунчевих (195.). — Задаће (196.).

Г Л А В А XIX.

Њутнов закон.

128. Постављање начела механике (199.). — 129. Сила гравитације (привлачења, тежње) планета ка Сунцу (199.). — 130. Универсалност закона гравитације (200.). — 131. Привлачно (гравитационо) дејство тела на материјалну тачку (201.). — 132. Привлачење тела сферног облика (203.). — 133. Привлачење обртних (ротационих) тела са врло малом спљоштености (204.). — 134. Теориска величина спљоштености Земље и планета (207.). — 135. Средња густина и маса Земље (208.). — Задаћа (209.).

Г Л А В А XX.

Кретање тела Сунчеве системе под утицајем гравитационе силе.

136. Релативно кретање двају тела (211.). — 137. Генералисање првога Кеплеровог закона (212.). — 138. Генералисање трећег Кеплеровог закона (214.). — 139. Утицај Земљинога пратиоца на њено кретање (215.). — 140. Проблем о три тела (216.). — 141. Пертурбације у елиптичком кретању Месеца (217.). — 142. Пертурбације у елиптичком кретању планета (219.). — 143. Вековне промене у положају еклиптике (221.). — Задаће (222.).

Г Л А В А XXI.

Прецесија и нутација.

144. Пертурбација ротационог кретања Земље (223.). — 145. Приближни изрази пертурбација (224.). — 146. Вековно и периодичко колебање Земљине осе (226.). — 147. Промене екваторијалних координата звезда усљед прецесије (227.). — 148. Прелаз са координата једне епохе на другу (228.). — 149. Промене координата небесних тела усљед нутације (228.). — Задаће (230.).

Г Л А В А XXII.

Аберација и паралаксе Звезда.

150. Дејство паралаксе звезде на њене еклиптичке координате (231.). — 151. Брадлејево откриће аберације звезда (232.). — 152. Дејство аберације на еклиптичке координате звезда (233.). — 153. Аберација планета и Сунца (234.). — 154. Дневна аберација (235.). — 155. Дејство паралаксе и аберације на екваторијалне координате звезда (235.). — 156. Одређивање коефицијента аберације и паралакса звезда из посматрања (236.). — Задаће (237.).

Г Л А В А XXIII.

Властита кретања звезда и Сунчеве системе.

157. Звездани каталози (239.). — 158. Формуле за прелаз са средњих звезданих места на привидна (240.). — 159. Примери за објашњење (241.). — 160. Брзина властитих кретања звезда (242.). — 161. Привидна померања звезда усљед властитог кретања Сунчеве системе (243.). — 162. Хипотетичка растојања до звезда (244.). — 163. Правац и брзина Сунчева кретања (245.). — 164. Оптичке и физичке двојне звезде (246.). — 165. Елиптичке орбите двојних звезда (247.).

Г Л А В А XXIV.

О спољњем облику Сунца, Месеца и планета са њиховим пратиоцима.

166. Фазе планета и Месеца (249.). — 167. Облик Сатурнових прстенова (250.). — 168. Одређивање ротационог кретања небесних тела (250.). — 169. Ротационо кретање Сунца и планета (251.). — 170. Ротација и либрација Месеца (253.). — 171. Орбите планетних пратилаца (254.). — 172. Конфигурације Јупитерових пратилаца (256.). — 173. Помрачења Јупитерових пратилаца (256.). — Задаће (257.).

ГЛАВА XXV.

Теорија помрачења и других појава, сличних са њима.

174. Опште погодбе за постајање помрачења Месеца и Сунца (259.). — 175. Узроци нетачности посматрања Месечевих помрачења (261.). — 176. Конструкција Месечевих помрачења (261.). — 177. Гаусова метода за срачунавање Сунчевих помрачења (262.). — 178. Основне формуле (264.). — 179. Расматрање Сунчева помрачења за Земљу у опште (265.). — 180. Одређивање граница и централне линије помрачења (266.). — 181. Пример за објашњење (267.). — 182. Покривања (окултације) звезда Месецем (270.). — 183. Таблице за одређивање момената покривања (272.). — 184. Општи начин срачунавања момената помрачења (273.). — 185. Прелаз Венере и Меркура преко Сунчева диска (274.).

ГЛАВА XXVI.

Потоци звезда падалица и комете.

186. Кретање звезда падалица кроз Земљину атмосферу (277.). — 187. Променљивост средњег броја звезда падалица (278.). — 188. Радианти и потоци звезда падалица (278.). — 189. Одређивање параболног кретања потока (279.). — 190. Порекло потока (281.). — 191. Спољњи облик и маса комета (282.). — 192. Објашњење облика кометних репова (283.). — 193. Типови кометних репова (284.). — 194. Неке од најзначајнијих комета (285.). —

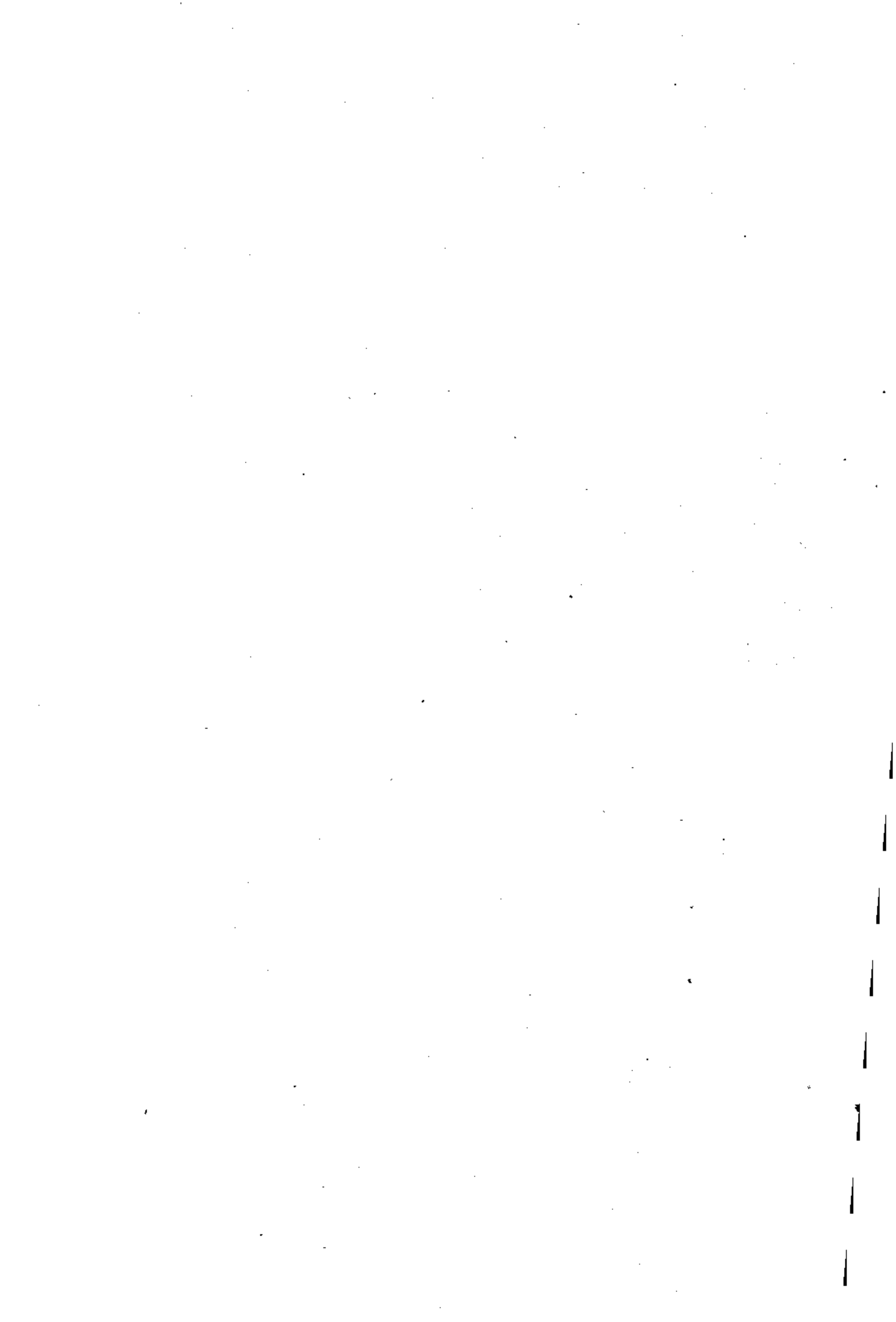
ГЛАВА XXVII.

Кратки подаци о физичкој природи небесних тела.

195. Изглед Сунчеве површине (287.). — 196. Спектри фотосфере, хромосфере, протуберанца, пега и короне (288.). — 197. Фајера теорија о построју Сунца (289.). — 198. Површина Месеца и планета (290.). — 199. Спектри комета (291.). — 200. Спектри и боје звезда (292.). — 201. Променљиве звезде (293.). — 202. Нове звезде (294.). — 203. Облици маглина и њихови спектри (295.). — 204. Млечни пут (296.).

ТАБЛИЦЕ.

1. Логоритамске поправке синуса малих углова (299).
 2. Вероватности случајних грешака (299).
 3. Геоцентричке ширине и растојања (301).
 4. Средња и истинита рефракција (303).
 5. Свођење средњег времена на звездано и обратно (305).
 6. Величине u и v за одређивање покривања звезда Месецем (307 и 309).
-



УВОД

1. Задаћа астрономије.

Задаћа се *астрономије* састоји у изучавању кретања, спољњег облика и физичке природе небесних тела.

Ова задаћа представља довитљивоме уму човековом бескрајно и непрегледно поље за испитивања. Посматрачу, наоружаноме дурбином, јављају се, осим Сунца, Месеца, јарких планета, комета и звезда, још и читаве гомиле много удаљенијих небесних тела у облику ситних звезда и магловитих маса најразличитијих контура. За ова тела нема ни краја нити граница, пошто су се досад помоћу астрономских дурбина, који виде даље од пређашњих, откривали и новији, пређе невиђени, звездани светови.

И онда чак кад бисмо оставили на страну физичку природу небесних тела, која нам је неприступачна за тачна познавања, и кад бисмо ограничили задаћу астрономије само на изучавање њиховога кретања и њиховога спољњег облика, ипак се не можемо надати да ћемо ма кад запазити са тачношћу све оно што се дешава у световима које видимо; јер нам, — због бескрајне њихове даљине, — најразличнија тамо кретања изгледају сасвим не приметна или нам се откривају тек после многих деценија или чак и векова. Али, најглавнија се задаћа астрономије, као науке, и не састоји у сличном намножавању фактичких делимичних знања, већ јој је циљ, да запази неке *опште законе* и *узроке* кретања, која се врше у сфери приступачној за њу.

2. Привидна и истинита кретања небесних тела.

Разуме се, да се *а priori*, тј. чисто путем размишљања, не може доћи до општих закона кретања небесних тела, него је потребно прво изучити та кретања из посматрања. Тачна пак посматрања, — која су неопходно потребна за познавање кретања небесних тела, — састоје се само у одређивању привидних праваца па њих; после тога се тек, по променама њиховим, долази до закључака о стварним покретима небесних тела у простору. На тај начин треба спочетка запазити са Земље *привидна кретања* небесних тела па затим прећи од њих ка *истинитим*.

Неопходно је потребно међутим објаснити, у каквом се смислу овде може и треба да разуме термин: *истинито кретање*. Разуме се, да не може бити ни речи о апсолутним кретањима небесних тела према ма чему непокретном у васиони. Под истинитим кретањима треба ипак подразумевати кретања *релативна*.

У античким су временима на пример рачунали у истинита кретања она, која била заснована на претпоставци потпуне непокретљивости Земље. Доцније тај поглед, — који се задржао доста дуго, — замењен претпоставком потпуно непомићности Сунца. У садањем пак добу ми већ знамо, да се и оно креће простору; поред свега тога може се ипак условно допустити његова непомићност ради изучавања других кретања.

Због бескрајне даљине од нас до звездâ, наша се Сунчева система с свима својим планетама и кометама може расматрати, у првом приближењу к истини, као система, потпуно засебна од осталих светова. — У том смислу узимајући њено главно тело, Сунце, за непокретни почетак, ми можемо и са рачунати, да су ова кретања планета, према томе почетку, истинита.

3. Закони истинитих кретања планета Сунчеве системе.

И тако се, у историском развићу астрономије, најглавнија њена задаћа састојала у томе, да, по привидним, са Земље, покретима Сунца и планета одреди њихове путеве. Ради тога је недостајало само довољног знања о њиховим растојањима од нас. Међутим тачно одређивање растојања до Сунца и до планета непосредним геометарским путем, — слично ономе како се мере у геодезији растојања до неприступних тачака, — не да се ни заменити чак ни помоћу савремених угломерних средстава, услед релативне ништавности димензија саме Земље, која би требала да послужи као основица (базис) за та мерења.

Али ево, геније Кеплеров око 1600. године успева да пронађе до вишег ступња оштроумни начин ради извођења веома тачног односа међу растојањима Земље и самога Марса до Сунца у различитим временима и то само на основу привидних, са Земље, положаја Сунца и планете Марса. Другим речима, он успева, да тачно изрази променљива растојања међу овим телима у јединицама средњег удаљења Земље од Сунца.

Тада је откривено, да је истинити пут Марса, — са претпоставком непомићности Сунца, — елипса и да се Сунце налази у једној од жица те елипсе. И тај се је закон елипшичкога кретања потврђавао не може боље бити на путањама и свију осталих планета па у том броју и саме Земље. Многогодишњим трпељивим истраживањима Кеплер је дошао такође и до открића других закона оних кретања, која се врше у Сунчевој системи.

4. Теорија истинитих кретања.

Али се наука није могла зауставити само на тима емпиричким законима, које је Кеплер био открио. Било је потребно још објаснити те законе, тј. наћи узрок, због чега се планете крећу баш тако, а не друкчије. То је урадио велики Њутн, доказавши, да је сила, која ствара погодбе за кретање сваке планете око Сунца по Кеплеровим законима, управно сразмерна масама оба тела и обрнуто сразмерна квадрату растојања међу њима.

Генералисање ефекта такве силе, коју је Њутн назвао *свеопштим привлачењем* (универсалном гравитацијом), на сваке две материјалне честице у природи постало је научном хипотезом, и на послу астрономије почели су се користити одговарајућим начином, и то: на основу ње створити теорију свију планетних кретања, извести из ње тако исто разне друге последице и затим верификовати, да ли све то долази у склад са стварним фактима и са посматрањима.

Овај дедуктивни пут открића кретања и других последица у свима детаљима, на основу данога закона дејства сила, врши се на основу општих правила механике и математике и ако он представља знатне тешкоће, — које треба савлађивати, — оне су чисто математичког карактера.

5. Верификација теорних резултата.

Механика доводи до закључка, да Њутнова сила гравитације може да проузрокује кретање једнога тела у односу према другоме не само по елипси већ и по другим кривим другог степена. Па се заиста и показало, да се многе комете крећу у односу према Сунцу по параболама и по хиперболама.

Даље, ако сила гравитације дела међу сваким двама планетама, то путање њихове треба више или мање да одступају од идеалних елиптичких орбита, које смо напред назвали истинитим и које, строго говорећи, имају места само за два тела. И заиста таква су се одступања или, како се то каже, *пертурбације*, и ако веома мала, доцније открила и потпуно оправдала посматрањима помоћу оптичких инструмената, ма да су спочетка била не приметна услед своје незнатне величине, услед незнатне величине и маса планетних, као и због несавршених средстава за тачна посматрања, којима су се служили до Кеплера.

Најпрецизнијим и најновијим посматрањима некојих парова звезда, врло блиских међу собом, откривена су померања њихова, једне према другој, по елипсама. То даје фактички наслон вероватној претпоставци, да исти закон гравитације управља и оним кретањима, која се врше у најудаљенијим од нас дубинама васионе.

Истом је силом гравитације, — која дејствује међу сваким двама материјалним честицама једнога и истог или разних тела, — објашњен и елипсоидни облик неких планета па и саме Земље а тако исто и колебање осовине, око које се врши њено ротационо кретање.

Убеђење у истинитост силе свеопштег привлачења (гравитације) утврдило се најзад толико непоколебљиво, да када је код планете Урана примећено кретање, које се није у свему подударало са оним које је по теорији добивено рачунским путем, оно је одмах послужило као директна индикација, да постоји још нека, дотле непозната планета, још удаљенија од Сунца него што је Уран. Дуго се није чекало, да се то оправда стварним њеним открићем (Нептуна) на унапред предсказаном месту.

Услед овакве свестране потврде основне астрономске хипотезе и потврде на њој засноване теорије са резултатима добивеним из директних посматрања; затим услед директнога пута којом је астрономија дошла до таквога стварног сазнања из најинтересантнијег одељка природних појава, — она заузима у реду других природних наука прво место. Свему је томе ишла на руку и простота појава, које се помоћу ње изучавају, тј. лакоћа издвајања многих споредних утицаја, који условљавају кретање планета, — од главног и предоминантног утицаја Сунчевог. Оно, што код других природних наука тражи примену искусних и оштроумних огледа за издвајање главних узрока појава, — у астрономији се извршило тако рећи само собом, благодарећи малој величини планетних маса у сравњењу са Сунчевом. Иначе би њихова кретања била тако комплицирана и замршена, да, може бити, ни до сад не бисмо нашли ни емпиричке њихове законе, нити силе, које им дају објашњења.

6. Општи пут астрономских испитивања.

У својим најновијим испитивањима астрономија греди оним директним путем, који јој је намењен већ самом историјом науке. Пре свега се запажају и брижљивим посматрањима изучавају привидна кретања или пак промене у спољашњем облику небесних тела; из њих се затим чине закључци о кретањима и променама истинитих; напоследку, узимајући у обзир већ унапред познате ефектне узроке, ствара се потпуна теорија испитаних кретања и промена, при чему се њени резултати морају поклапати како са свима основним, тако исто и са доцнијим посматрањима.

У оним пак случајима, када се покаже непотпуно поклапање теорије са посматрањима, тј. када је непотпуно објашњена појава, која се изучава, мора се прибегавати претпоставци неког новог узрока, који се дотле није ничим јасно манифестовао. Али теорије, створене на таквим претпоставкама, треба да очекују разностране потврде, да би се могле рачунати као довољно тачне и истините.

7. Подела астрономије на одељке.

Према свему напред реченоме о цели и методама астрономских испитивања, астрономија се дели на ове одељке:

1.) *Сферна астрономија*, која учи, како се преносе привидни, — са земље на небесна тела, — правци на неке основне равни и правце у простору и како се изводе неопходно потребни односи међу њима, помоћу пројектовања њиховог на помоћну, уображену сферу, названу у том случају *небесном сфером*. На тај се начин изучавају привидна, са Земље, кретања небесних тела у таквом облику, као да се та кретања врше на самој тој сфери. У сферну астрономију долазе и разматрања свију могућних околности, које условљавају привидне правце на небесна тела, као што су: преламање светлих зракова кроз земљину атмосферу, промена тачке посматрања на земној површини и др.

2.) *Практична астрономија*, која утврђује најбоље поступке и методе за одређивање привидних праваца на небесна тела из посматрања. Ради тога се у њој излаже теорија свију астрономских инструмената и учи, како се они употребљују те да би неизбежна њихова несавршенства имала најмањи могући штетни утицај на резултате, који се помоћу њих добијају. Овај је практични одељак астрономије очевидно у најтеснијој вези са првим.

3.) У *теорној астрономији* излажу се различне методе за одређивање истинитих елиптичких, параболних и хиперболних путања небесних тела у простору на основу само неколиких посматрања њиховог положаја; али, као што је напред објашњено, при изводу таквих путања, пертурбациона привлачна деловања свију небесних тела једних на друге још се не узимају у обзир.

4.) Испитивање пертурбација на истинитим путањама небесних тела саставља нарочити одељак у астрономији, који је Лаплас назвао *небесном механиком*. К њој се односи и теорно изучавање разних других последица закона гравитације, на име: облик планета и колебање осовина око којих се врши њихово ротационо кретање.

5.) Напоследку, све методе и посматрања, која воде ка врло интересантним али још врло непотпуним и највише само *хипотетичким* подацима и закључцима о физичкој природи Сунца, планета и осталих небесних тела, — састављају последњи одељак под именом *физичке астрономије* или *астрофизике*.

8. Практична примена астрономије.

Испитивање облика и димензија саме Земље, — које захтева сасвим друкчије поступке и методе од оних, којима се служи астрономија при изучавању облика и димензија небесних тела, — саставља задаћу засебне науке, — *геодезије*, која је ипак са астрономијом у најтеснијој вези, јер се задаћа геодезије друкчије и не решава већ помоћу астрономских посматрања; с друге стране, повољно њено решење иде на руку објашњењу многих астрономских факата. Услед тога су обе те науке увек ишле рука под руку, помажући једна другој.

Више или мање тачна посматрања привидних положаја небесних тела, извршена на каквој тачци Земљине површине, представљају не само најпростије већ понекад и једино могућно средство за одређивање положаја те тачке у односу према другим местима на Земљи. На тај начин, и геодету, и морепловцу,

и предузимљивоме путнику по непознатим пределима на Земљи — небесна светила служе као нека врста природних кула светиља. Њима се треба само умети користити.

Лако је видети, да су за практичну примену астрономије при одређивању географских положаја места на Земљиној површини од најстварнијег значаја прва два од напред изложених њених одељака тј. сферна и практична астрономија. На њихово изучавање и обратиће се најглавнија наша пажња; али ће се нарочито излагање сферне астрономије код нас гдекад прекидати и успут допуњавати неопходно потребним подацима и објашњењима из осталих одељака, тако, да заједно са њима представи за нас довољно потпуни састав *теорног дела* нашега курса.

9. Руководства.

Као извори и руководства за детаљније и свестрано изучавање сферне и практичне астрономије могу послужити ова дела:

Савича. Курсъ сферической астрономіи.

Савича. Приложение практической астрономіи къ географическому определению мѣстъ.

Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie; а у француском преводу, са многим допунама, под насловом: *Traité d' Astronomie sphérique et d' Astronomie pratique.*

Chauvenet: A Manual of spherical and practical Astronomy.

Faye: Cours d' Astronomie de l' Ecole Polytechnique; где су скраћено изложени сви делови астрономије.

Baillaud: Cours d' Astronomie à l' usage des étudiants des Facultés des sciences.

Од многих трактата и руководства из астрономије довољно ће бити, да овде укажемо на знаменито класично дело:

Gauss: Theoria motus corporum coelestium, које је преведено на све главније европске језике, а такође да препоручимо:

Савича. Курсъ теоретической астрономіи.

За претходно упознавање са небесном Механиком може послужити:

Resal: Traité élémentaire de Mécanique céleste;

а за свестрано њено изучавање — најновије опширно дело у четири свеске:

Tisserand: Traité de Mécanique céleste.

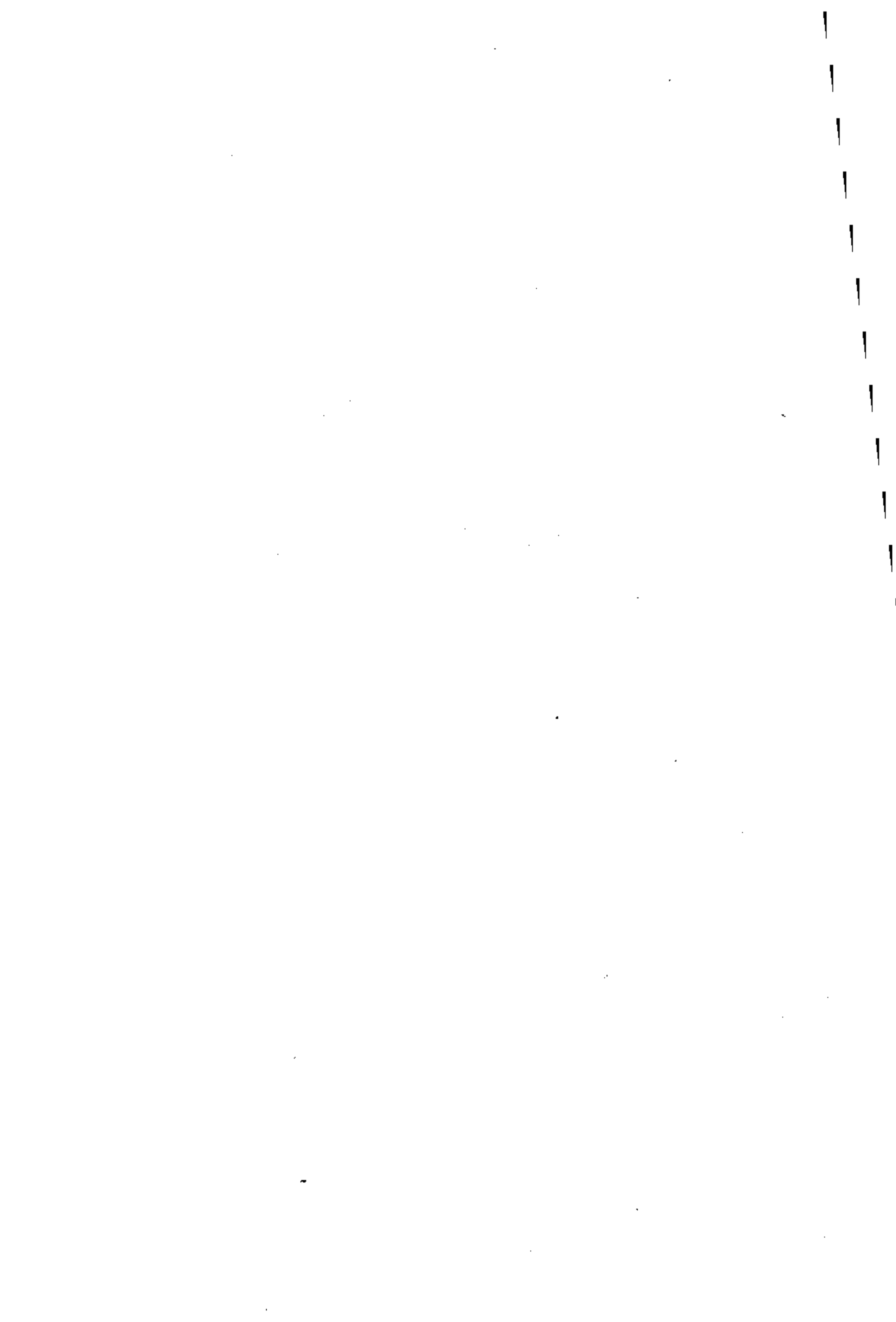
Из физичке астрономије могу се поцрпети довољни подаци из многих дела са популарним, описним излагањем астрономских факата и појава; као што су нпр:

Newcomb: Populäre Astronomie (Deutsche Ausgabe bearbeitet durch Engelmann).

Хандриковъ. Описательная Астрономія.

Young: A text-Book of general Astronomy.

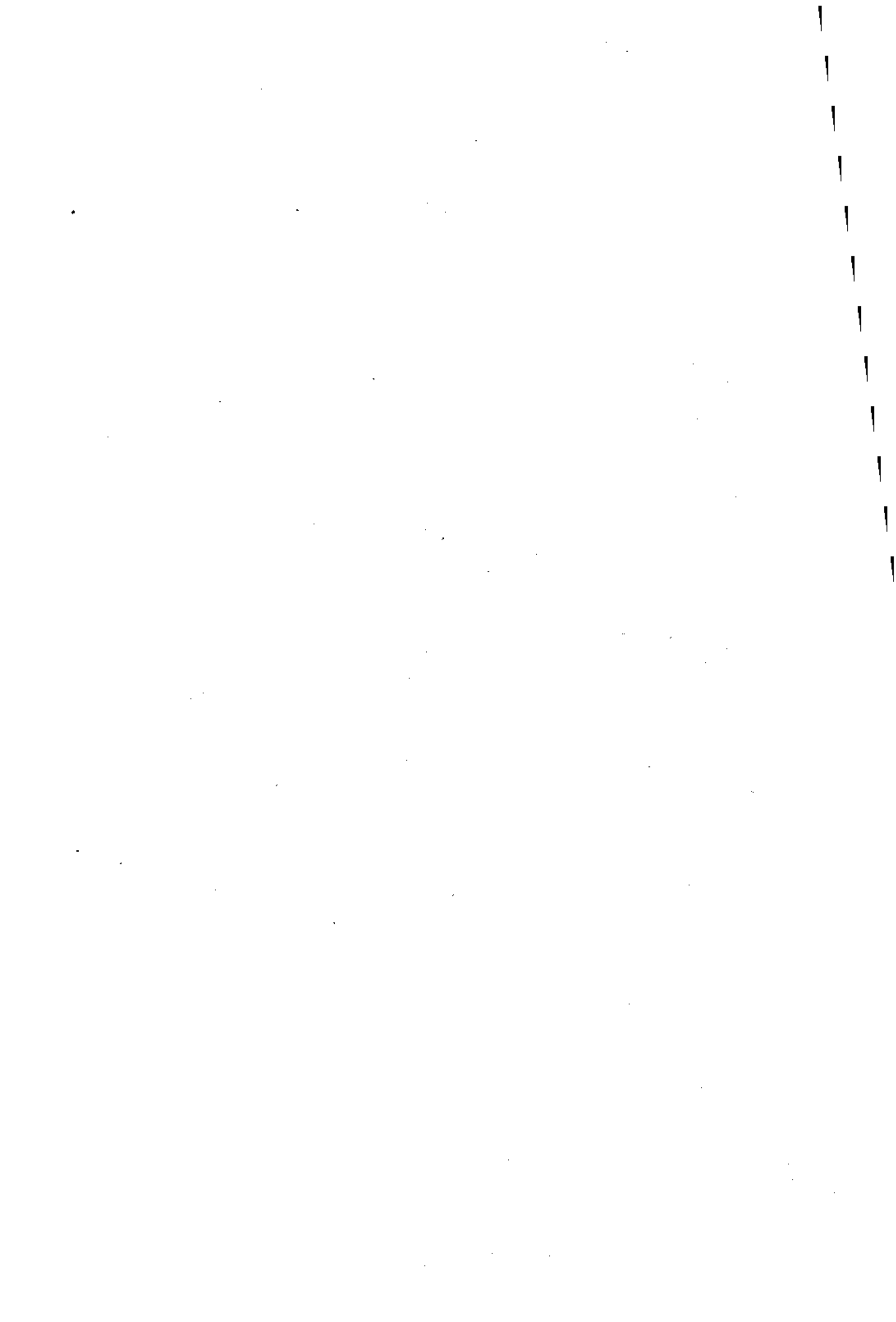




ОДЕЉАК I.

ПОМОЋНА МАТЕМАТИЧКА ПИТАЊА.





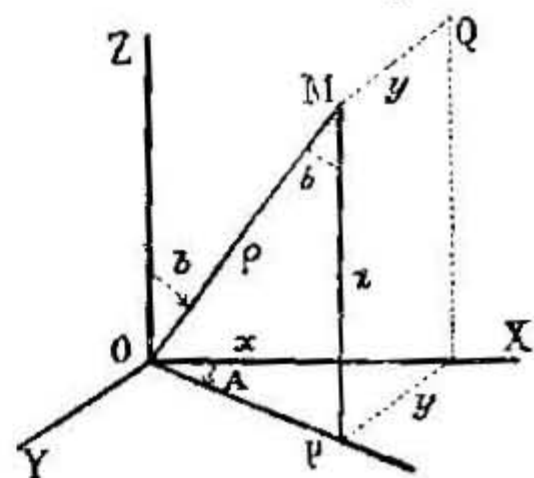
ГЛАВА I.

ОСНОВНЕ ФОРМУЛЕ СФЕРНЕ ТРИГОНОМЕТРИЈЕ.

10. Разне системе координата и прелаз са једне од њих на другу,

Положај се сваке тачке у простору одређује, — као што је познато из аналитичне геометрије, — њеним координатама у односу према неким основним или координатним равнима и правцима. На сличан начин треба да се одређују и места небесних тела у простору у ма којем извесном моменту времена. Доцније ћемо видети, какве је наиме равни и правце згодније изабрати за основне, да би се према њима одређивао положај небесних тела; засад пак напоменућемо само, да се у астрономији на природан начин јављају неколико система основних равни и праваца, тако да се на сваком кораку долази до прелаза са једне системе на другу. Због тога ће корисно бити расмотрити тај прелаз у опште.

Нека гдегод у O (сл. 1.) буде почетак координата и три узајамно управне осе или правци: OX , OY и OZ , које собом одређују три узајамно управне равни: XOY , XOZ и YOZ . Положај се неке тачке M обично одређује, у односу према њима, или са три њене *праволониске координате*, тј. са три њена растојања: x , y и z од даних равни, или са три *поларне*, наиме: 1. њеним растојањем $OM = \rho$ од почетка координата; 2. Углом $MOZ = b$, између правца OM и једне од оса (у нашем случају осе Z) и 3. углом A између равни ZOM и координатне равни ZOX ; при томе се овај угао A треба да рачуна као позитиван у одређеном правцу нпр. онако како је то стрелицом показано на сл. 1. Јасно је, да ће угао XOP између осе OX и линије OP , — по којој је координатна раван XOY нренесена управном на њу равни ZOM — бити мера угла A .

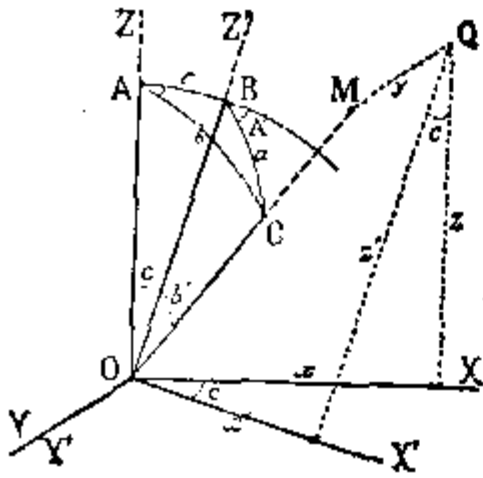


Сл. 1.

Из слике је лако видети, да ће се праволониске координате x , y и z тачке M изразити помоћу поларних A , b и ρ на овај начин:

$$z = \rho \cdot \cos b; \quad y = \rho \cdot \sin b \cdot \sin A; \quad x = \rho \cdot \sin b \cdot \cos A \quad \dots \quad (1.)$$

Замислимо сада, да су уместо пређашњих координатних оса X , Y и Z узете друге, ипак узајамно управне: X' , Y' и Z' (сл. 2.), при чему је почетак остао у истој тачци O ; оса Y' узета у истом правцу као и Y , а изменио се само правац оса X и Z у равни XZ за некакви угао c , тако да је угао $XOX' = ZOZ' = c$. У овом најпростијем случају промена правца координатних оса, пројекција ће Q тачке M на равни ZOX остати иста, а из цртежа се види, да ће се нове праволиниске координате x' , z' и y' тачке M , у односу према осама X' , Y' и Z' изразити помоћу пређашњих на овај начин:



Сл. 2.

$$z' = z \cdot \cos c + x \cdot \sin c; \quad y' = y; \quad x' = x \cdot \cos c - z \cdot \sin c. \quad (2)$$

Нека сад буду поларне координате тачке M , — у односу према новим осама, — ове: A' , b' и $\rho' = \rho$; при чему ће, као и пређе, A' означавати угао између равни $Z'OM$ и $Z'OX'$ и рачунаће се у позитивном правцу као и A ; а b' ће бити угао међу правцима OZ' и OM . Тада ћемо имати, слично са пређашњим:

$$z' = \rho \cdot \cos b'; \quad y' = \rho \cdot \sin b' \cdot \sin A'; \quad x' = \rho \cdot \sin b' \cdot \cos A'. \quad (1')$$

Ако се сад сравне ови обрасци са обрасцима (2.), замењујући у овима (2.) у место x , y и z њихове вредности из (1.), то ће се ρ скратити и добиће се:

$$\left. \begin{aligned} \cos b' &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ \sin b' \cdot \sin A' &= \sin b \cdot \sin A \\ \sin b' \cdot \cos A' &= \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A - \cos b \cdot \sin c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.)$$

Једначине (3.), — које помоћу пређашњих одређују нове поларне координате тачке M , — нису ништа друго него основне формуле сферне тригонометрије.

Да би се то боље објаснило, замислимо сферу описану из координатног почетка O , као из центра са произвољним полупречником, који ћемо сматрати за јединицу. Нека су A , B и C (сл. 2.) продори правца OZ , OZ' и OM на тој сфери; онда ће равни ZOX , ZOM и $Z'OM$ пресећи ту сферу по луцима великих кругова AB , AC и BC , који међусобом образују сферни троугао ABC са странама: $AB = c$, $AC = b$ и $BC = b'$ и углима: $BAC = A$, $ABC = 180^\circ - A'$. Означивши сад, — како се то ради у тригонометрији, — страну BC , — која лежи наспрам угла A , — са a , угао пак ABC , — који лежи наспрам стране b , — са B , тј. кад ставимо, да је

$$b' = a \text{ и } 180^\circ - A' = B$$

ми ћемо добити у место формула (3.) ове, већ познате из сферне тригонометрије:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ \sin a \cdot \sin B &= \sin b \cdot \sin A \\ \sin a \cdot \cos B &= \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (a.)$$

11. Помоћна (небесна) сфера.

На тај начин, применом помоћне сфере и на основу формула (a) сферне тригонометрије могли бисмо обрасце (3.) за преображај координата директно

написати. Исто се тако најпростије решавају, — помоћу напред споменуте замишљене сфере, — и многа друга питања о узајамном односу разних линија и равни у простору, јер се све своди на проблеме из сферне тригонометрије. У том случају сасвим је непотребно замишљати ту сферу у некаквој одређеној тачци у простору. Сасвим је безразлично, где ће бити узет њен центар, само ако се увек из њега повлаче правци паралелно са онима, који се разматрају.

Узмимо нпр. да су дате у простору три праве: M , N и P , које се међу собом не секу, при чему ће, — као што је познато, — бити код сваког пара од њих (MN) , (MP) и (NP) две паралелне равни, које садрже у себи по једну линију. И тада, ма где замислили центар O помоћне сфере са три правца из њега: OM' , ON' и OP' паралелно са даним M , N и P , добићемо на њој сферни троугао $M'N'P'$ са странама, које су равне углима између даних линија и са углима који ће бити равни углима између парова напред споменутих равни. На тај се начин, разни односи између углова, које међу собом образују дане линије и равни, изводе из тога сферног троугла исто тако просто, као и у случају пресека тих правих M , N и P у једној тачци.

Због тога што се разне тачке на помоћној сфери добијају од продора разних праваца на њој, који потичу увек из њена центра, паралелно са онима, које се разматрају у простору, — произлази:

1.) Свакоме одређеноме правцу снопа међусобом паралелних правих одговара на сфери свега једна одређена *шачка*, — и обратно.

2.) Свакоме низу међусобом паралелних равни одговара на сфери свега један одређени *велики круг*, — и обратно.

3.) Снопу зракова, који у простору образују коничну површину или који су у опште нагнути према некој одређеној линији под једним и истим углом, — одговара на сфери *мали круг* истога угловног полупречника, — и обратно.

Напред споменута помоћна сфера са потпуно произвољним полупречником, — која се замишља ради најзгоднијега разматрања на њој праваца разних линија и равни у простору, — налази примене у решавању најразличитијих геометриских проблема; у астрономији се њоме служе на сваком кораку и ту се за њу историски створио и утврдио чак и специјални назив *небесне сфере*. По томе ћемо је примеру и ми у будуће тако звати, ма да ће представа о њој остати увек само чисто геометриска, без икаквог реалног значења.

12. Аналогија међу формулама сферне и равне тригонометрије.

Сад се већ види, какву значајну улогу треба да има сферна тригонометрија у највише астрономских проблема и како је неопходно потребно добро запамтити њене формуле, да бисмо их после примењивали без икакве тешкоће. Памћење њихово олакшано је пре свега тиме, што свакоме односу између саставних делова сферног троугла ABC одговара други, по спољњем облику њему сасвим слични и који се добија из разматрања *поларног* троугла, чије су стране допуна до 180° углова: A , B и C а угли допуна до 180° страна: a , b и c . Тако из трију формула (a) произлазе ове:

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a \\ \sin A \cdot \sin b &= \sin B \cdot \sin a \\ \sin A \cdot \cos b &= \cos B \cdot \sin C + \sin B \cdot \cos C \cdot \cos a \end{aligned} \right\} \dots \dots (a)'$$

при чему је друга од њих остала иста као и пређашња.

У специјалном случају, када је угао $A = 90^\circ$, из формула (a) и $(a)'$ лако се добијају шест доле означених односа (b) међу саставним деловима правоуглог

сферног троугла, врло подесних за употребу због њиховога логаритамског облика; из њих опет, на основу својстава поларног троугла, произлазе њима слични односи $(b)'$ за специјалан случај кад је $a = 90^\circ$:

$$\begin{array}{l}
 A = 90^\circ \\
 \cos a = \cos b \cdot \cos c \\
 \sin b = \sin a \cdot \sin B \\
 \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cdot \cos C \\
 \operatorname{tg} b = \sin c \cdot \operatorname{tg} B \\
 \operatorname{cotg} B = \cos a \cdot \operatorname{tg} C \\
 \cos B = \cos b \cdot \sin C
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} A = 90^\circ \\ \cos a = \cos b \cdot \cos c \\ \sin b = \sin a \cdot \sin B \\ \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cdot \cos C \\ \operatorname{tg} b = \sin c \cdot \operatorname{tg} B \\ \operatorname{cotg} B = \cos a \cdot \operatorname{tg} C \\ \cos B = \cos b \cdot \sin C \end{array}} \right\} (b)$$

$$\begin{array}{l}
 a = 90^\circ \\
 \cos A = -\cos B \cdot \cos C \\
 \sin B = \sin A \cdot \sin b \\
 \operatorname{tg} B = -\operatorname{tg} A \cdot \cos c \\
 \operatorname{tg} B = \sin C \cdot \operatorname{tg} b \\
 \operatorname{cotg} b = -\cos A \cdot \operatorname{tg} c \\
 \cos b = \cos B \cdot \sin c
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} a = 90^\circ \\ \cos A = -\cos B \cdot \cos C \\ \sin B = \sin A \cdot \sin b \\ \operatorname{tg} B = -\operatorname{tg} A \cdot \cos c \\ \operatorname{tg} B = \sin C \cdot \operatorname{tg} b \\ \operatorname{cotg} b = -\cos A \cdot \operatorname{tg} c \\ \cos b = \cos B \cdot \sin c \end{array}} \right\} (b)'$$

Као најбоље пак и најразумније средство за памћење формула $(a)'$ и (b) могу послужити аналогии њихове са њима одговарајућим обрасцима $(\alpha)'$ и (β) равнога троугла:

$$\left. \begin{array}{l}
 \cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \\
 b \cdot \sin A = a \cdot \sin B \\
 \sin A = \cos B \cdot \sin C + \sin B \cdot \cos C
 \end{array} \right\} (\alpha)'$$

$$\left. \begin{array}{l}
 a^2 = b^2 + c^2 \\
 b = a \cdot \sin B \\
 b = a \cdot \cos C
 \end{array} \right\} (\beta)$$

аналогije природне, јер при бескрајно великом полупречнику сфере у сравању са a , b и c , сферни се троугао претвара у равни и све формуле $(a)'$ и (b) у њима одговарајуће $(\alpha)'$ (β) .

Док формуле (b) нису још добро запамћене, најбоље је доћи до њих помоћу формула (β) ; при томе ће најпростије расуђивање лако указати, шта тачно треба писати у њима — синус или тангенс стране у место саме стране, а тако исто косинус које баш стране уместо јединице у оним формулама (β) , где стране троугла сасвим не улазе. Ако би требало, например, изразити катету b помоћу супротног јој угла B и друге катете c , то узевши одговарајућу формулу равног троугла $b = c \cdot \operatorname{tg} B$ и запазив, да у сферном троуглу треба да је $b = B$ кад је $c = 90^\circ$, — јасно ће се видети, да ту треба писати тачно $\operatorname{tg} b$ у место b и $\sin c$ у место c . Слично је проверавање корисно примењивати у специјалним случајима и у опште на свима формулама с обрасцима, које треба писати директно на памет.

13. Неперова правила за формуле правоуглог сферног троугла.

Ако се у формуле $(b.)$ уведу допуне катета b и c до 90° и ако се скраћено означи

$$90^\circ - b = b' \text{ и } 90^\circ - c = c'$$

то ће свих десет ових формула дати две групе (1.) и (2.) оваквога облика:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \sin b' \cdot \sin c' \\ \cos b' &= \sin a \cdot \sin B \\ \cos c' &= \sin a \cdot \sin C \\ \cos B &= \sin b' \cdot \sin C \\ \cos C &= \sin c' \cdot \sin B \end{aligned} \right\} (1.)$$

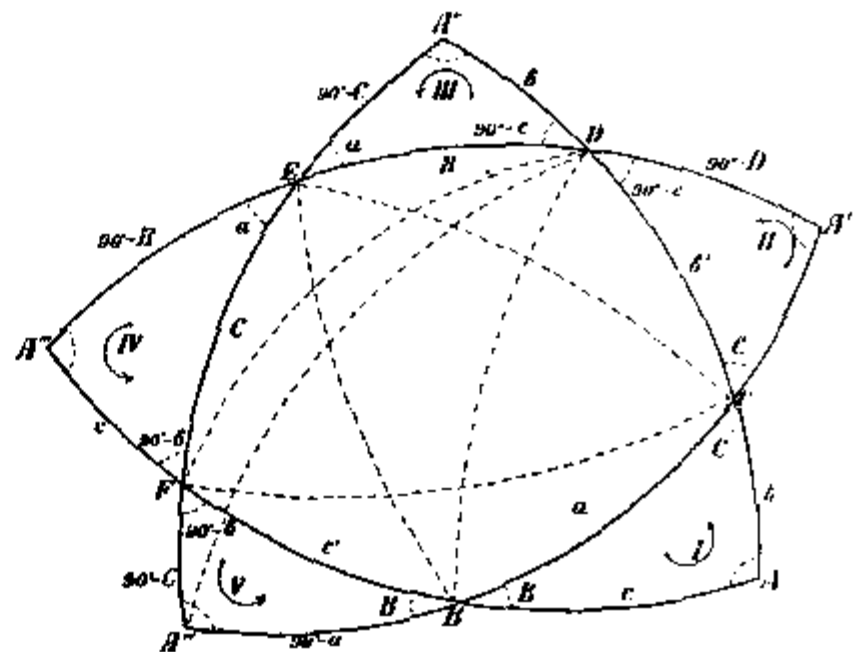
$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cotg B \cotg C \\ \cos b' &= \cotg c' \cotg C \\ \cos c' &= \cotg b' \cotg B \\ \cos B &= \cotg a \cotg c' \\ \cos C &= \cotg a \cotg b' \end{aligned} \right\} \dots \dots (2.)$$

Испуштајући прави угао A , тј. као да га и не рачунамо за саставни део троугла, увидећемо, да је у групи (1.) косинус свакога дела троугловог изражен производом из синуса она два дела који на њега належу, а у (2.) — производом из котангенса налегла два дела. Ово интересно својство правоуглог сферног троугла запазио је *Непер* још 1614. год. те је постало као мнемоничко правило за писање свију формула (b), ма да се оне, — као што је напред речено, — могу врло лако памтити и без тога.

После 150 година *Ламберт* је дао геометријско објашњење тј. прави узрок ових особитих правила.

Ми ћемо га овде дати, пошто га у уџбеницима сферне тригонометрије обично нема.

Кад се узму темена B и C сфернога правоуглог троугла ABC са правим углом A за полове па се опишу одговарајући им луци великих кругова $A'DEA^{III}$ и $A''EFA^{VI}$ (сл. 3.), они ће се пресећи међусобом у E , а са продужењем хипотенузе BC у тачкама A^I и A^{IV} , с продужењем пак катета AB у A^{III} и F , и најзад са продужењем катете AC у тачкама D и A^{II} . Пошто је угао BAD и $BD = 90^\circ$, то ће бити $AD = 90^\circ$, те ће и тачка D бити пол великога круга $ABFA^{III}$; сличним ће начином и тачка F бити пол великога круга $A'CSA^{IV}$, стога што су луци BE и CE равни 90° .



Сл. 3.

Овим постројем је на тај начин из основног троугла I образовано четири нова: II, III, IV и V чији ће углови код: A^I, A^{II}, A^{III} и A^{IV} бити такође прави; хипотенузе пак њихове биће остали делови основнога троугла једно за другим, наиме: $90^\circ - b = b', B, C$ и $90^\circ - c = c'$ и притом у свакоме од њих — ако праве углове не рачунамо, — сви ће делови основнога (или пак њихова допуна до 90°) ићи један за другим (у истом правцу показаном стрелицом) оним истим редом као и у основноме. Према томе је довољно имати само два израза (1.) и (2.) за $\cos a$, да бисмо их применили и на $\cos b'$, и на $\cos c'$, и на $\cos B$ и на $\cos C$, замењујућу катете b и c њиховим допунама b' и c' .

У томе геометријском доказу *Неперових* правила, који објашњава унутарњи њихов смисао, од особитог је значаја особина, да се I правоугли сферни троугао реконструише у друга четири, такође правоугла: II, III, IV и V са тим истим елементима (или њиховим допунама до 90°), јер се тиме понекад упрошћује разматрање извесних проблема из астрономије и геодезије. Тако на пример, бројно решење I троугла по даним у њему: хипотенузи a и углу C , ничим не треба да се разликује од случаја, када би се за дану хипотенузу узела висина C а за дани угао величина a (као у реконструисаном троуглу IV); али ће при томе бројној разлици углова $C - (90^\circ - B) = B + C - 90^\circ$, тј. сферноме ексцесу I одговарати у IV потпуно иста бројна вредност разлике $a - b$.

Задатке:

1. Одредити угао N под којим се секу дијагонале страна коцке.

На помоћној сфери угао ће N бити хипотенуза правоуглог троугла са катетама од по 45° ; отуд излази: $\cos N = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}$ или $N = 60^\circ$.

2. Одредити угле (M, M' и M''). међу суседним странама правилних полиедара са 4, 8 и 20 страна.

Замислимо центар сфере у ма коме од рогљева полиедара па ћемо добити на њој: у првом случају правилни троугао, у другом — четвороугао, а у трећем — петугао са странама од 60° ; поделивши затим угле ових фигура на пола и делећи затим добивене троугле, тако, да сви буду правоугли, — из њих ћемо најзад добити:

$$\cos 30^\circ \cdot \sin \frac{1}{2} M = \cos 60^\circ; \quad \cos 30^\circ \cdot \sin \frac{1}{2} M' = \cos 45^\circ; \quad \cos 30^\circ \cdot \sin \frac{1}{2} M'' = \cos 36^\circ;$$

одакле је

$$M = 70^\circ 32'; \quad M' = 109^\circ 28'; \quad M'' = 138^\circ 12'.$$

3. Доказати да ће се прва од основних формула (а) претворити у: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$, ако су стране a, b и c сферног троугла бескрајно мале у сравању са полупречником сфере.

4. Ако у формулама (а) ставимо:

$$\sin b \cdot \sin A = \sin p \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} b \cdot \cos A = \operatorname{tg} q,$$

какав ће геометриски значај имати луци p и q у сферном троуглу ABC ?

ГЛАВА II.

ОПШТИ ПОСТУПЦИ И ПРАВИЛА ЗА БРОЈНА СРАЧУНАВАЊА.

14. Разна средства и правила за упрошћавање срачунавања.

При извођењу бројних срачунавања по напред изложеним формулама, као и по сваким другима, од особитог је значаја придржавати се некојих основних правила и поступака, да би се постизала неопходно потребна тачност бројних резултата на најпогоднији начин, не губећи притом ни излишно време на тај механички посао. Астрономи су обрадили такве рационалне методе за срачунавање, не пренебрегавајући никаква средства, да би ма у колико скратили рачунски труд.

Најглавнија су средства, која служе за упрошћавање рачунских радњи и за достигнуће највеће тачности бројних резултата: 1.) Употреба логаритамских таблица за сабирање и одузимање; 2.) Довођење формула на логаритамски облик; 3.) Трансформирање даних формула у друге, погодније за срачунавање; 4.) Искоришћавање првенствено оних формула, у којима се тражени угли добијају по њиховим тангенсима и котангенсима; 5.) Избор логаритамских и других помоћних таблица оне баш тачности, каква је само неопходно потребна; 6.) Скраћивање труда најпогоднијим распоредом и извршењем срачунавања по систематском реду и са постепеном контролом. Постаје затим поступци сасвим специјалне природе за упрошћавање срачунавања, који понекад представљају неоцењене користи и који се састоје у употреби приближних формула и образаца у место тачних.

При разматрању свију ових општих средстава, ми ћемо их примењивати највише код задаћа сферне тригонометрије; али ће нам се на овим делимичним примерима довољно разјаснити, како ћемо се користити овим или оним средствима и при срачунавању по ма каквим другим формулама.

15. Логаритамске таблице за сабирање и одузимање.

При логаритамским срачунавањима по формулама састављених из засебних сабирака, као што су формуле (а), у место да се траже одговарајући бројеви логаритама тих сабирака, претпоставља се, да се узимају директно логаритми тражене суме или разлике помоћу нарочитих помоћних *таблице за сабирање и одузимање*. Такве се на пример таблице, са 5 децимала, налазе као додатак логаритамским таблицама са 5 децимала од Хјуела (Hoüel), са 6 децимала у таблицама Бремикера а са 7 децимала постоји специјално издање: „Tafeln der Additions und Subtraction Logarithmen“ von Zech.

Са предпоставком да је од два броја m и n први већи од другог, њихову суму и разлику можемо представити у оваквом облику:

$$m + n = m \left(1 + \frac{1}{r}\right), \quad m - n = m \left(1 - \frac{1}{r}\right),$$

где је количник $r = \frac{m}{n}$ већи од јединице. Због тога, ако су дани $\lg m$ и $\lg n$ па према томе и $\lg r = \lg m - \lg n$, те да се добије $\lg(m + n)$, треба само додати ка логаритму већег броја m количину

$$\lg \left(1 + \frac{1}{r}\right) = \lg S;$$

а да се добије $\lg(m - n)$ — додати негативну количину

$$\lg \left(1 - \frac{1}{r}\right) = \lg \frac{1}{R}$$

или, што је исто, одузети од $\lg m$ позитивну количину $\lg R$.

У напред споменутим помоћним таблицама за сабрање дају се количине $\lg S$, које одговарају свима могућним вредностима $\lg r$ од 0 до ∞ ; у таблицама пак за одузимање, — услед тога што су R и r везани међу собом симетричном једначином:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{R} = 1,$$

— количине се $\lg R$ дају само за вредности $\lg r$ између 2 и ∞ , због тога, што се количине $\lg R$, које одговарају осталим вредностима $\lg r$ од 0 до $\lg 2$, могу наћи у истим таблицама али само са обратним тражењем аргумента ($\lg r$) по количини функције ($\lg R$). Уосталом облик и распоред таквих таблица није увек подједнак.

Да нађемо, ради примера, $\lg(m + n - p)$ по даним: $\lg m = 0.34567$, $\lg n = 0.12345$ и $\lg p = 0.23456$.

\	из таблица за сабирање	$\lg m = 0.34567$
/	по $\lg r = \lg m - \lg n = 0.22222$	$\lg S = \underline{0.20398}$
\	из таблица за одузимање	$\lg(m + n) = 0.54965$
/	по $\lg r' = \lg(m + n) - \lg p = 0.31509$	$\lg R = \underline{0.28741}$
		$\lg(m + n - p) = \mathbf{0.26224}$

Овде улазе само два интерполациона изналажења $\lg S$ и $\lg R$ по таблицама; са таблицама пак обичних логаритама требало би извршити три изналажења бројева m , n и p и једно налажење логаритма по броју $(m + n - p)$.

Таблице за сабирање и одузимање су особито згодне, када је онај већи број (m) раван јединици, јер се тада логаритми: $\lg(1 + n) = \lg S$ и $\lg(1 - n) = -\lg R$ добијају директно по аргументу $\lg r = -\lg n$. Тако на пример, логаритам обрасца $\frac{1+n}{1-n}$, при $\lg n = 9.76379$ наћи ће се по аргументу 0.23621 овако:

из таблица за сабирање	$lg(1 + n) = 0.19879$
„ „ „ одузимање	$lg(1 - n) = -0.37725$
	$lg \frac{1+n}{1-n} = 0.57604$

16. Довођење формула на логаритамски облик.

У место да се, при рачунању, служимо таблицама за сабирање и одузимање, веома се често обрасци сума и разлика доводе на логаритамски облик, уводећи у њима, вештачки, помоћне угле. Нпр. ако је $m > n$, то ћемо, поставивши $\frac{n}{m} = \cos k$, добити суму и разлику бројева m и n у облику:

$$m + n = 2m \cdot \cos^2 \frac{k}{2}, \quad m - n = 2m \cdot \sin^2 \frac{k}{2}.$$

На тај ће начин и предњи образац $\frac{1+n}{1-n}$, стављајући у њему $\cos k$ место n , добити овај прости облик: $\cotg^2 \frac{k}{2}$.

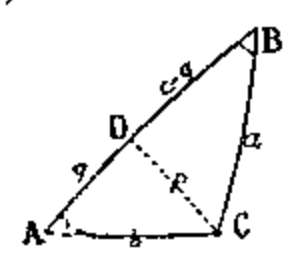
Двочлани израз: $M \cdot \sin \alpha \pm N \cdot \cos \alpha$ лако је довести на логаритамски облик стављајући у њему $tg k$ у место $\frac{N}{M}$. Тако на пример, стављајући у основним формулама сферне тригонометрије (а):

$$tg k = tg b \cdot \cos A$$

добиће се уместо њих ове, логаритамске:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \frac{\cos b}{\cos k} \cdot \cos (c - k) \\ \sin a \cdot \sin B &= \sin b \cdot \sin A \\ \sin a \cdot \cos B &= \frac{\cos b}{\cos k} \cdot \sin (c - k) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (a)$$

по којима је zgodније рачунати не само a и B по даним A, b и c , него исто тако и c са B , када се дају A, b и a . А удубљујући се у суштину овога — на први поглед чисто вештачког — увођења помоћног угла k у формуле (а), увидећемо, да је оно идентично са деобом разматраног сферног троугла ABC на два друга: ACD и $B CD$, правоугла у тачци D (сл. 4.). Заиста, означив AD са q и CD са p , наћићемо из троугла ACD :



Сл. 4.

$$tg q = tg b \cdot \cos A \text{ (т. ј. } q = k) \text{ и } \sin p = \sin b \cdot \sin A, \cos p = \frac{\cos b}{\cos q}$$

а затим из троугла $B CD$:

$$\cos a = \cos p \cdot \cos (c - q) \text{ и } \cotg B = \cotg p \cdot \sin (c - q).$$

Није тешко видети, да су ови обрасци потпуно идентични са формулама (а).

Напомена. Неки ће нас астрономски проблеми доводити до одређења угла x из једначине оваквог облика:

$$M \cdot \sin x + N \cdot \cos x = P,$$

где су M, N и P познате количине, позитивне или негативне. У томе случају,

— користећи се истим стављањем $tg k$ уместо $\frac{N}{M}$, — тражени се угао x може израчунати из обрасца:

$$\sin(x + k) = \frac{P}{M} \cdot \cos k.$$

17. Преображај формула.

Довођење некојих формула на логаритамски облик постиже се понекад још боље њиховим преображајем. Тако на пример образац

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c},$$

— који потиче из прве формуле (а) и који служи за одредбу угла A сферног троугла по даним странама a , b и c , — преобразоваће се, као што је познато из тригонометрије, у:

$$tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \cdot \sin(p-c)}{\sin p \cdot \sin(p-a)}}, \text{ где је } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Кад се пак помоћу овога одређују сва три угла у троуглу, боље је прво срачунати величину:

$$tg p = \sqrt{\frac{\sin(p-a) \cdot \sin(p-b) \cdot \sin(p-c)}{\sin p}}$$

јер после тога излази просто:

$$tg \frac{A}{2} = \frac{tg p}{\sin(p-a)}, \quad tg \frac{B}{2} = \frac{tg p}{\sin(p-b)}, \quad tg \frac{C}{2} = \frac{tg p}{\sin(p-c)}.$$

Није тешко видети, да је овде p полупречник малога круга, уписаног у разматраном сферном троуглу.

Најзад ће се сферни ексцес троугла $2P = (A + B + C) - 180^\circ$ изразити у овом случају овако:

$$tg^2 \frac{1}{2} P = \frac{1}{2} p \, tg \frac{1}{2} (p-a) \, tg \frac{1}{2} (p-b) \, tg \frac{1}{2} (p-c),$$

а $S = \pi R^2 \frac{P}{900}$ даће величину површине троугла, ако је полупречник сфере раван R .

На сличан начин служе и за израчунавање углова B и C сфернога троугла по даним b , c и A а тако исто и страна b и c по даним B , C и a ове преобразжене формуле:

$$tg \frac{B-C}{2} = cotg \frac{A}{2} \cdot \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{b+c}{2}}, \quad tg \frac{B+C}{2} = cotg \frac{A}{2} \cdot \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{b+c}{2}},$$

и

$$tg \frac{b-c}{2} = tg \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}}, \quad tg \frac{b+c}{2} = tg \frac{a}{2} \cdot \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}},$$

чији се извод излаже у свима делима сферне тригонометрије и које су познате под именом Неперових аналогија. Све оне, као и напред изложени обрасци за $tg \varphi$, $tg \frac{A}{2}$, $tg \frac{B}{2}$ и $tg \frac{C}{2}$ лако је запамтити, благодарећи природној сличности њиховој са њима одговарајућим формулама равнога троугла.

Да наведемо овде још и преображај формуле:

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cdot \cos E},$$

са којом ћемо се сусрести доцније. На исти начин, као што се изводи напред изложени образац за $tg \frac{A}{2}$ из $\cos A$ (т. ј. добијајући постепено: $2 \cdot \sin^2 \frac{v}{2} = 1 - \cos v$, $2 \cdot \cos^2 \frac{v}{2} = 1 + \cos v$ и напоследку $tg^2 \frac{v}{2}$), долазимо, — у случају $e < 1$, — до следећег најпогоднијег обрасца за рачунања угла v по даноме углу E или обратно:

$$tg \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot tg \frac{E}{2} = tg \left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right) tg \frac{E}{2}; \text{ где је } \sin \psi = e.$$

18. Срачунавање углава по њиховим тангенсима.

При срачунавању углава најкорисније ће бити, ако се изаберу формуле, сличне са тек што изведеним, тј. које одређују те угле по тангенсима или и котангенсима њиховим а не по синусима и косинусима. Да бисмо објаснили ту околност, размотримо следеће изразе диференциалних промена $\Delta (lg tg x)$, $\Delta (lg cotg x)$, $\Delta (lg sin x)$ и $\Delta (lg cos x)$ при врло малој промени Δx угла x , које се добијају по општим правилима диференциалног рачуна:

$$\Delta (lg tg x) = \frac{M}{\sin x \cdot \cos x} \cdot \Delta x'' \cdot \sin 1'', \quad \Delta (lg cotg x) = - \frac{M}{\sin x \cdot \cos x} \cdot \Delta x'' \cdot \sin 1'',$$

$$\Delta (lg sin x) = M \cdot cotg x \cdot \Delta x'' \cdot \sin 1'', \quad \Delta (lg cos x) = - M \cdot tg x \cdot \Delta x'' \cdot \sin 1'';$$

при чему је број $M = lg 2.718 \dots = 0.4343 \dots$ тј. модул обичних логаритама а број $\sin 1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{1}{206265}$ изражава дужину лука од $1''$ у деловима његовог полупречника. Множећи ове обрасце са 100 000, да бисмо изразили грешке логаритама у петој њиховој децимали, добићемо саме величине Δx , изражене у лучним секундама, у оваквом облику:

$$\Delta x'' = 2'' \cdot 4 \cdot \sin 2x \cdot \Delta_5 (lg tg x), \quad \Delta x'' = - 2'' \cdot 4 \cdot \sin 2x \cdot \Delta_5 (lg cotg x),$$

$$\Delta x'' = 4'' \cdot 8 \cdot tg x \cdot \Delta_5 (lg sin x), \quad \Delta x'' = - 4'' \cdot 8 \cdot cotg x \cdot \Delta_5 (lg cos x).$$

Према томе, ако су $lg tg x$, $lg cotg x$, $lg sin x$ и $lg cos x$ подједнако погрешни за јединицу у петој децимали, то ће највећа грешка у углу x , — који се тражи по $lg tg x$ или по $lg cotg x$, — бити при $x = 45^\circ$, и, изаћи ће око $\pm 2'' \cdot 5$; међутим при одредби тога истог угла по $lg sin x$ или по $lg cos x$ она ће изаћи два пут већа. Па и уопште, ма какав био угао x по својој величини, грешка ће у последња два случаја бити већа него ли у прва два, јер су $2 tg x$ и $2 cotg x$ увек већа од $\sin 2x$.

На основу напред реченога, најзгоднији ће обрасци за рачунање поларних координата: A , b и ρ за неку тачку, по даним праволинимским: x , y и z (формула (1) чл. 10.), бити:

$$1.) \operatorname{tg} A = \frac{y}{x}, 2.) \rho \cdot \sin b = \rho' = \frac{y}{\sin A} \text{ (или пак } \rho' = \frac{x}{\cos A} \text{)}$$

$$3.) \operatorname{tg} b = \frac{\rho'}{z}, 4.) \rho = \frac{\rho'}{\sin b} \text{ (или пак } \rho = \frac{z}{\cos b} \text{)}$$

Враћајући се основним формулама (а) или и (а)₁, које одређују страну a и угао B сферног троугла по даним b , c и A , — исто ћемо тако видети, да је уопште некорисно директно срачунавање a по првима од њих већ је много боље наћи спочетка B из обрасца:

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A}{\sin b \cdot \sin A} = \frac{\operatorname{cotg} b \cdot \sin(c - k)}{\cos k \cdot \sin A},$$

где је

$$\operatorname{tg} k = \operatorname{tg} b \cdot \cos A,$$

које се добија деобом треће формуле са другом, а после тек срачунати a по њеном тангенсу, који се добија деобом прве формуле са другом или са трећом.

19. Употреба логаритамских таблица разне тачности.

Приступајући срачунавању ма какве количине по познатој формули за ту сврху, неопходно је потребно пре свега обратити пажњу на ону висину тачности, какву можемо или желимо да достигнемо у крајњем резултату, и, на тој основи затим решити, са каквим се тачно бројем цифара треба задовољити у разним бројевима при овим срачунавањима и са каквим се наиме логаритамским таблицама треба служити (са седам, шест, пет или пак само са 4 децимале); због тога, што би свака излишна цифра, која нема осетнога утицаја на крајни резултат, само бескорисно усложњавала срачунавање.

У обичном логаритму броја a , који је (број) дат са извесном грешком Δa , произлази грешка:

$$\Delta(\operatorname{lg} a) = M \cdot \frac{\Delta a}{a} = 0.43 \dots \frac{\Delta a}{a},$$

и обратно

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta(\operatorname{lg} a)}{0.43 \dots} = 2.3 \dots \Delta(\operatorname{lg} a).$$

Тако на пример, ако би пета цифра у броју a била погрешна за 1, то $\frac{\Delta a}{a}$ може доћи до 0.0001 а $\Delta(\operatorname{lg} a)$ до 0.00004 па због тога је без вредности писати шесту децималу у $\operatorname{lg} a$. Исто тако и обрнуто, шеста цифра у броју a не може бити нађена по логаритмима са 5 децимала. Отуд потиче опште правило, да логаритме треба писати са оним бројем децимала са коликим је бројем цифара дат сам број или највише са још једном сувишном децималом.

Напред смо видели, да, при некој погрешности данога угла, грешке у логаритмима тригонометриских функција тога угла могу бити врло различите, у зависности од његове величине; али ако се будемо руководили само њиховим средњим величинама, — остављајући настрану оне изузетне случаје, када су угли блиски 0° или 90° , — то ће се показати, да ће логаритми од 5 децимала бити, у опште говорећи, потпуно довољни при тачности угла не већој од

од $0' \cdot 1 = 6''$; кад су пак угли тачни и до $1''$ треба већ употребљавати логаритме до 6 децимала а код тачности од $0'' \cdot 1$ — са 8 децимала.

У оним пак случајима, када су формуле, које изражавају тражене количине, доста сложене и изискују много рачунских радњи, корисно је изводити сва рачунања са једном децималом више, у савнању са напред реченим; због тога што грешке, — које потичу из одбацивања непотребних цифара при потраживању бројева из таблица,*) — постепено нагомилавајући се, могу саме по себи осетно да искваре тачност резултата. Али, овде је реч само о једној децимали више, на тој основи, што грешке, о којима је реч, припадају реду случајних грешака, тј. таквих, које, не излазећи из извесних граница, бивају час позитивне, час негативне те се услед тога при рачунањима нагомилавају не пропорционално општем броју потраживање по таблицама већ у много мањој мери.

Напомена. Код срачунавања треба у сваком случају исписивати све неопходно потребне децимале, макар последње од њих биле и нуле, да би се тиме јасније изразила она тачност са којом је број дат или пак срачунат.

20. Формулари и контролисање срачунавања.

Количина времена и механичког труда, који се врши при ма каквом срачунавању, зависи од поступности по којој се изводе све за то неопходно потребне радње, као што су: потраживање логаритама, одговарајућих бројева и др. Због тога је боље, пре него што се приступи извршењу целог тог посла, најпре размислити о најцелисходнијој поступности за све радње па унапред означити на хартији она места, где треба уписивати разне цифре, како би се сабирања, одузимања и друге рачунске радње вршиле згодно без икаквог преписивања једнога и истог броја на разним местима. Унапред састављени, овакви *формулари* за срачунавање, скраћујући време њихове стварне израде, корисни су још и у другом смислу, наиме, они чине да калкулатор сконцентрише сву своју пажњу само на то, да не учини ма какве чисто бројне омашке, и, води на тај начин ка бољем осигурању тачности траженога резултата.

Основне формуле за срачунавање корисно је имати пред очима, у заглављу формулара, ради јасне представе онога што се по њој врши. Добро је такође узети за неизоставно правило, да се сваки из таблица уписани број а тако исто и свака радња, која се са бројевима врши, одмах проконтлорише; због тога што једна, каква било грешка, незапажена на време, може да изазове погрешност свега онога што отуда затим потиче. Па ипак, не гледећи на све предузете предосторожности, ипак се могу десити омашке и грешке разне врсте; због тога је неопходно потребно имати потпуно убедљиву *контролу* тачности добивених резултата. Ово се најбоље достиже срачунавањем у две руке, тј. двају лица или пак контролом резултата помоћу какве друге формуле, која би их везивила међу собом и са даним величинама, али која не би и сама улазила у раније извршена срачунавања.

Ради објашњења напред реченога, даћемо овде три формулара: I) за срачунавање, по формулама чл. 18, поларних координата A , b и ρ једне тачке, када су јој дате праволиниске x , y и z ; II) за срачунавање, по формулама чл. 17. углова A , B и C сфернога троугла, када су дате његове стране a , b и c ; III) за срачунавање по формулама чл. 17. саставних делова a , B и C сфернога троугла по даним b , c и A . При томе ће ситне цифре, које су стављене у заградама, показивати, каквим се редом треба да исписују разни бројеви на местима, која су за њих унапред предвиђена.

*) Последња ће се цифра увек увећати за 1, ако непосредно за њом одбачена цифра буде већа од 5.

Формулар I.

$$\text{Дани: } \begin{cases} x = -82.807 \\ y = +65.910 \\ z = +19.623 \end{cases} \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} A &= \frac{y}{x}, & \rho' &= \frac{y}{\sin A} = \frac{x}{\cos A}, \\ \operatorname{tg} b &= \frac{\rho'}{z}, & \rho &= \frac{\rho'}{\sin b} = \frac{z}{\cos b}, \end{aligned}$$

Контрола: $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

(1) $\lg y = 1.818\ 951$	(8) $\lg \rho' = 2.024\ 631$	(13) $\lg \rho = 2.031\ 971$
(6) $\lg \sin A = 9.794\ 320$	(11) $\lg \sin b = 9.992\ 660$	(14) $\rho = 107.639$
(2) $\lg x = 1.918\ 067_n$	(3) $\lg z = 1.292\ 765$	(15) $x^2 = 6857.0$
(7) $\lg \cos A = 9.893\ 436_n$	(12) $\lg \cos b = 9.260\ 794$	(16) $y^2 = 4344.1$
(4) $\lg \operatorname{tg} A = 9.900\ 884_n$	(9) $\lg \operatorname{tg} b = 0.731\ 866$	(17) $z^2 = 385.1$
(5) $A = 141^\circ 28' 55''$	(10) $b = 79^\circ 29' 46''$	(18) $\rho^2 = 11586.2$

У овој формули нису предвиђама места за $\lg x^2$, $\lg y^2$, $\lg z^2$ и $\lg \rho^2$ пошто није тешко у глави дуплирати логаритам свакога од тих бројева и одмах потражити у таблицама њему одговарајући број. Калкулатор треба такође да се навикне, да одузима један број од другог а тако исто и да их сабира почињући са цифара вишег реда тј. с лева у десно.

Формулар II.

(2) $p = 110^\circ 38' 8''$	$p = \frac{a+b+c}{2}, \quad \operatorname{tg}^2 \rho = \frac{\sin(p-a) \cdot \sin(p-b) \cdot \sin(p-c)}{\sin p}$	
Дани: $\begin{cases} a = 88\ 17.0 \\ b = 102\ 56.5 \\ c = 30\ 4.1 \end{cases}$	$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{tg} \rho}{\sin(p-a)}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\operatorname{tg} \rho}{\sin(p-b)}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{tg} \rho}{\sin(p-c)}$	
(1) $2p = 221\ 17.6$	Контрола $\begin{cases} s = (p-a) + (p-b) + (p-c) = p, \\ \Sigma = \lg \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \lg \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \lg \sin p = \lg \operatorname{tg} \rho. \end{cases}$	
	(13) $\lg \operatorname{tg} \rho = 9.36\ 530$	
(3) $p - a = 22\ 21.8$	(7) $\lg \sin(p-a) = 9.58\ 033$	(14) $\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = 9.78\ 497$
(4) $p - b = 7\ 42.3$	(8) $\lg \sin(p-b) = 9.12\ 734$	(15) $\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = 0.23\ 796$
(5) $p - c = 80\ 34.7$	(9) $\lg \sin(p-c) = 9.99\ 410$	(16) $\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = 9.37\ 120$
(6) $s = 110\ 38.8$	(11) $\operatorname{compl.} \lg \sin p = 0.02\ 883$	(10) $\lg \sin p = 9.97\ 117$
	(12) $2 \cdot \lg \operatorname{tg} \rho = 8.73\ 060$	(17) $\Sigma = 9.36\ 530$
(18) $\frac{1}{2} A = 31^\circ 21' 7''$	(19) $\frac{1}{2} B = 59^\circ 57' 9''$	(20) $\frac{1}{2} C = 13^\circ 13' 7''$

Формулар III.

$$\text{Дани: } \begin{cases} b = \\ c = \\ a = \end{cases} \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} &= \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}(b+c)}, & \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} &= \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}(b+c)}, \\ \sin a \sin A \cdot \frac{\sin b}{\sin B} &= \sin A \cdot \frac{\sin c}{\sin C} \quad (\text{КОНТРОЛА}). \end{aligned}$$

(1)	$b - c =$	(11)	$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B - C) =$	(7)	$\lg \sin b =$
(2)	$b + c =$	(12)	$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B + C) =$	(17)	$\lg \sin B =$
(3)	$\lg \sin \frac{b - c}{2} =$	(13)	$\frac{1}{2}(B - C) =$	(8)	$\lg \sin c =$
(5)	Compl. $\lg \sin \frac{b + c}{2} =$	(14)	$\frac{1}{2}(B + C) =$	(18)	$\lg \sin C =$
(9)	$\lg \operatorname{cotg} \frac{1}{2}A =$	(15)	$B =$	(19)	$\lg \frac{\sin b}{\sin B} = \lg \frac{\sin \varphi}{\sin C} =$
(4)	$\lg \cos \frac{b - c}{2} =$	(16)	$C =$	(10)	$\lg \sin A =$
(6)	compl. $\lg \cos \frac{b + c}{2} =$	(21)	$a =$	(20)	$\lg \sin a =$

Срaчунати по овом формулару предњи пример са датим: $b = 102^{\circ}56'5$, $c = 30^{\circ}4'1$ и $A = 62^{\circ}43'4$.

Задaће.

1. Срaчунати угле x_1 и x_2 из образаца: $\operatorname{tg} x_1 = \frac{m \cdot \sin \alpha}{1 - m \cdot \cos \alpha}$ и $\operatorname{tg} x_2 = \frac{m \cdot \sin \alpha}{1 + m \cdot \cos \alpha}$ кад су $m = 9.49013$ и $\alpha = 78^{\circ}45'0$, употребом логаритамских таблица за сабирање и одузимање. [$x_1 = 17^{\circ}52'9$, $x_2 = 15^{\circ}57'4$].

2. Представити корене једначине: $x^2 + px + q = 0$ у логаритамском облику и саставити формулар за њихово срaчунавање по тако добивеним формулама.

3. У правоуглом сферном троуглу ($A = 90^{\circ}$) дани су: хипотенуза $a = 105^{\circ}14'$ и угао $B = 48^{\circ}37'$. Срaчунати остале саставне делове b , c и C таквим редом, да се сви они добију по њиховим тангенсима. [$b = 46^{\circ}23'$, $c = 112^{\circ}23'$, $C = 106^{\circ}36'$].

4. Израчунати угао x из једначине: $a \cdot \cos(x - \alpha) + b \cdot \cos(x - \beta) = c$, где су a , b , c , α и β познате величине.





ГЛАВА III.

ПРИБЛИЖНИ ИЗРАЗИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ФОРМУЛЕ.

21. Употреба редова.

Како у сферној тако и у практичној астрономији имаћемо прилике да се на сваком кораку сусрећемо са таквим случајима, када су некоје од непознатих или и даних величина врло мале у сравању са другима. Тада је у сваком случају погодније употребљавати за рачунање не строге математичке формуле и обрасце већ приближне, које се добијају од првих, њиховим развијањем у редове, уређене по степенима малих величина.

Тако нпр., ако су у познатом реду:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \dots$$

сви чланови, почев од трећег, доста мали, то се допушта писати просто:

$$(1 + x)^n = 1 + nx.$$

Например, кад је $n = \frac{1}{2}$ а $x < \frac{1}{100}$, онда ће бројна вредност $\frac{n(n-1)}{2} \cdot x^2$ изаћи мања од $\frac{1}{80000}$; због тога ће, у том степену тачности, бити и $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$. На истој се основи у место $\frac{1}{1-x}$ може понекад писати: $1 + x$.

Уопште, за развијање ма какве функције $f(a+x)$ у ред по степенима мале величине x , може послужити познати *Тејлоров* ред:

$$f(a+x) = f(a) + x \cdot f'(a) + \frac{x^2}{2} \cdot f''(a) + \frac{x^3}{2 \cdot 3} \cdot f'''(a) + \dots \quad (b)$$

ако се само посебне вредности производних $f'(a)$, $f''(a)$ и ост. не претварају у ∞ . На тај се начин добијају редови:

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= x'' \cdot \sin 1'' \left(1 - \frac{x^2}{6} \cdot \sin^2 1'' + \frac{x^4}{120} \cdot \sin^4 1'' - \dots \right) \\ \operatorname{tg} x &= x'' \cdot \sin 1'' \left(1 + \frac{x^2}{3} \cdot \sin^2 1'' + \frac{2x^4}{15} \cdot \sin^4 1'' + \dots \right) \\ \cos x &= \left(1 - \frac{x^2}{2} \cdot \sin^2 1'' + \frac{x^4}{24} \cdot \sin^4 1'' - \dots \right) \end{aligned} \right\} \dots \quad (c)$$

код којих се, кад је угао $x < 3^{\circ}$, можемо готово увек ограничити само са прва два члана, зато што занемарени при том члан $\frac{2}{15} x^4 \sin^4 1''$, у сравњењу са 1, излази раван $\frac{1}{1000000}$ а таквој релативној грешци тангенса или синуса одговара у самом углу x грешка $\Delta x = \frac{3^{\circ}}{1000000} = \frac{1''}{100}$. На тој основи, код углова x , тачних до $\frac{1''}{100}$ и мањих од $\frac{1^{\circ}}{4}$, можемо занемарити чак и друге чланове у тим редовима па писати просто:*)

$$\sin x = \operatorname{tg} x = x'' \cdot \sin 1'' \quad \text{и} \quad \cos x = 1.$$

Да би се показало како је понекад при срачунавању корисна употреба мале величине, која улази у формуле, да срачунамо угао m из обрасца

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{tg} n (1 - e),$$

у којој је e врло мали број. Очеvidно, да ће у овом случају погодније бити, срачунати не само угао m већ малу разлику $n - m = y$, која ће се добити овако:

$$\operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} n - \operatorname{tg} m}{1 + \operatorname{tg} n \cdot \operatorname{tg} m} = \frac{e \cdot \operatorname{tg} n}{1 + \operatorname{tg}^2 n - e \operatorname{tg}^2 n} = \frac{e \cdot \sin n \cdot \cos n}{1 - e \cdot \sin^2 n},$$

и ако је допуштено, да се занемари величина $e \cdot \sin^2 n$ у сравњењу са 1, то ће бити просто:

$$y'' = \frac{e}{2 \cdot \sin 1''} \sin 2n \quad \dots \dots \dots (d)$$

Тако нпр. код тачне формуле:

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cdot \cos C, \text{ —}$$

која се односи на сферни троугао, кад му је врло мали угао C између хипотенузе a и катете b , — имаћемо: $e = 2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} C''^2 \sin^2 1''$, па због тога ћемо добити, — са релативном грешком која не надмаша $\frac{1}{2} C''^2 \sin^2 1''$, — ово:

$$y'' = a - b = C''^2 \frac{\sin 1''}{4} \cdot \sin 2a = C''^2 \frac{\sin 2a}{229} \quad \dots \dots \dots (d)'$$

Например, кад је $C < 1^{\circ}$, разлика ће $(a - b)$ изаћи мања од $16''$ и израчунаће се по овој приближној формули $(d)'$ са тачношћу $0''.01$ само са логаритмима од 4 децимала; међутим за срачунавање, са истом тачности, катете b по тачној формули за њу, изашло би, да су недовољни чак ни логаритми од седам децимала.

На сличан се начин и са истим циљем трансформирају многе строге формуле, — са којима ћемо се сусретати у астрономији, — на приближне, које по својему спољњем облику, изгледају мање просте, али које су много погодније у примени бројних срачунавања.

*) Када је потребно да су синуси и тангенци малих углова познати приближно и то са тачношћу само од две или три децимале, тада је у место броја $\sin 1'' = \frac{1}{206265}$ простије употребити ове: $\sin 1' = \frac{1}{3438}$ и $\sin 1^{\circ} = \frac{1}{37}$. Тако је нпр. $\sin 10 \frac{1}{2}^{\circ} = \frac{10 \cdot 5}{57} = 0.18$.

Напомена. Лако је запазити, да израз $(d)'$, за y'' представља површину (или сферни ексцес) правоуглог троугла са врло малом хипотенузом C при ма каквој вредности a једнога од његових углова; што би се, на основу реченога на крају чл. 13, могло директно исписати и без овога извода овде.

22. Лагранжов Ред.

У астрономији се каткад дешава, да треба развити у ред, по степенима мале величине x , какву дану функцију $u = f(y)$, у којој је y изражено са x али не јавно већ на овај начин:

$$y = a + x\varphi(y) \dots \dots \dots (1.)$$

Лагранж је показао, да се тада посебне вредности (при $x = 0$) диференциалних коефицијената $\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)$ у реду (b) чл. 21.

$$u = f(a) + x \left(\frac{du}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{1.2} \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)_0 + \dots + \frac{x^n}{1.2.3\dots n} \left(\frac{d^n u}{dx^n}\right) + \dots$$

добијају у облику:

$$\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)_0 = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [\varphi^n(a) \cdot f'(a)] \dots \dots \dots (2). *$$

Да би се ово доказало, издиференцираћемо пре свега израз (1.) по x и по a

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y) + x \frac{d\varphi(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{da} = 1 + x \frac{d\varphi(y)}{dy} \frac{dy}{da}$$

Кад се одавде елиминише множител $x \frac{d\varphi(y)}{dy}$, лако се добија

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y) \frac{dy}{da}, \quad \text{па и } \frac{du}{dx} = \varphi(y) \frac{du}{da} \dots \dots \dots (3.)$$

$$\text{јер је } \frac{du}{da} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{da}, \quad \text{а } \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx}$$

Кад се пак издиференцира производ $\varphi^i(y) \frac{du}{da}$ по x , а производ $\varphi^i(y) \frac{du}{dx}$ по a , онда ћемо, на основу (3.) у оба случаја доћи до једнога и истог израза:

$$i \varphi^{i-1}(y) \cdot \varphi(y) \frac{dy}{da} \frac{du}{da} + \varphi^i(y) \frac{d^2 u}{da \cdot dx}$$

откуд је

$$\frac{d}{dx} \left[\varphi^i(y) \frac{du}{da} \right] = \frac{d}{da} \left[\varphi^i(y) \frac{du}{dx} \right].$$

А тада из (3.) излази поступно:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\varphi(y) \frac{du}{da} \right] = \frac{d}{da} \left[\varphi(y) \frac{du}{dx} \right] = \frac{d}{da} \left[\varphi^2(y) \frac{du}{da} \right] \dots \dots \dots (4.)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 u}{dx^3} &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{da} \left[\varphi^2(y) \frac{du}{da} \right] \right\} = \frac{d}{da} \left\{ \frac{d}{dx} \left[\varphi^2(y) \frac{du}{da} \right] \right\} = \\ &= \frac{d^2}{da^2} \left[\varphi^2(y) \frac{du}{dx} \right] = \frac{d^2}{da^2} \left[\varphi^3(y) \frac{du}{da} \right] \dots \dots \dots (5.) \end{aligned}$$

јасно је, да и даље треба да излази уопште:

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[\varphi^n(y) \frac{du}{da} \right]$$

*) Означа је $\varphi^n(a)$ узета за $[\varphi(a)]^n$.

а то доводи ред (b) са његовим производним, — при посебној вредности $x = 0$, — Лагранжовом реду

$$u = f(y) = f(a) + x\varphi(a)f'(a) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{da} [\varphi^2(a)f'(a)] + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [\varphi^n(a)f'(a)] \dots \dots \dots (e)$$

Примери: 1) Развити у у ред по степенима мале величине коефицијента c израза $y = a + cy^n$.

Овде је $x = c$, $f(y) = y$, $f'(a) = 1$, $\varphi(a) = a^n$, стога је

$$y = a + ca^n + \frac{c^2}{1 \cdot 2} \frac{d a^{2n}}{da} + \frac{c^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2 a^{3n}}{da^2} + \frac{c^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{d^3 a^{4n}}{da^3} + \dots =$$

$$= a + ca^n + \frac{2n}{2} c^2 a^{2n-1} + \frac{3n(3n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^3 a^{3n-2} +$$

$$+ \frac{4n(4n-1)(4n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} c^4 a^{4n-3} + \dots$$

У посебном случају, кад је $n = 2$, изаћи ће:

$$\frac{y}{a} = 1 + (ac) + 2(ac)^2 + 5(ac)^3 + 14(ac)^4 + 42(ac)^5 + \dots$$

2. Развити израз $E = M + e \sin E$ у ред по степенима мале величине e .

Овде је $x = e$, $u = f(y) = y = E$, $f(a) = M$, $f'(a) = 1$, $\varphi(y) = \sin E$ стога ће бити

$$E = M + e \sin M + \frac{e^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{dM} (\sin^2 M) + \frac{e^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2}{dM} (\sin^3 M)^2 + \dots$$

3. Развити израз $r = 1 - e \cos E$ у ред по степенима мале величине e , где је опет $E = M + e \sin E$.

Овде ће бити $x = e$, $r = f(y) = f(E)$, $f(a) = 1 - e \cos M$, $f'(a) = e \sin M$, стога ће бити

$$r = 1 - e \cos M + e^2 \sin^2 M + \frac{e^3}{1 \cdot 2} \frac{d}{dM} (\sin^3 M) + \dots + \frac{e^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} (\sin^{n+1} M).$$

23. Логаритамске поправке синуса малих углова.

Пошто ће се при срачунавањима имати чешће посла не са самим тригонометриским линијама већ са њиховим логаритмима, то да представимо сада у облику редова: $lg \sin x$, $lg \operatorname{tg} x$, и $lg \cos x$. На основу општега развијања у ред логаритма ма каквога броја $(1 + z)$:

$$lg(1 + z) = M \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \right),$$

где је $M = 0.4343 \dots$, из предидућих редова (с) добиће се ови:

$$\lg \sin x = \lg (x'' \cdot \sin 1'') - M \frac{x^2}{6} \cdot \sin^2 1'' - M \frac{x^4}{180} \cdot \sin^4 1'' - \dots$$

$$\lg \operatorname{tg} x = \lg (x'' \cdot \sin 1'') + M \frac{x^2}{3} \cdot \sin^2 1'' + M \frac{7x^4}{90} \cdot \sin^4 1'' + \dots$$

$$\lg \cos x = -M \frac{x^2}{2} \cdot \sin^2 1'' - M \frac{x^4}{12} \cdot \sin^4 1'' - \dots$$

Ако бисмо зажелели, — ограничавајући се само члановима са x , — да имамо све ове логаритме са тачношћу до шесте децимале, то највећи члан, који се одбацује $M \frac{x^4}{12} \cdot \sin^4 1''$ треба да буде мањи од 0.000 001, тј. да $x'' \cdot \sin 1'' <$

$\sqrt[4]{\frac{0.0000012}{0.4343}} = \frac{1}{13.8}$ или приближно да $x < 4^\circ$. Тада ћемо, — множећи други корекциони члан код логаритма синуса са 1 000 000, да бисмо га изразили у јединицама шесте децимале, и означавајући га ради скраћења, са

$$M \frac{x^2}{6} \sin^2 1'' = \mathfrak{E}_6(x), \text{ —}$$

добити просто:

$$\left. \begin{aligned} \lg \sin x &= \lg x'' + \lg \sin 1'' - \mathfrak{E}_6(x) \\ \lg \operatorname{tg} x &= \lg x'' + \lg \sin 1'' + 2 \mathfrak{E}_6(x) \\ \lg \cos x &= -3 \mathfrak{E}_6(x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (c)'$$

тј. бројна је вредност логаритамске поправке тангенса малог угла *два пута* већа од поправке синуса, величина пак поправке косинуса *трипут* је већа. На крају књиге дата је мала таблица (Таблица I)* за налажење ових поправака по даноме $\lg x''$ или пак по даноме углу x .

Корист од примене приближних образаца (с)' најбоље ће се показати на ова два примера:

1.) Нека је потребно решити правоугли сферни троугао ABC по даним: хипотенузи $a = 2^\circ 35' 6'' = 9306''$ и углу $C = 39^\circ 1' 48''.2$. Због мале хипотенузе па према томе и обеју катета, тачне ће формуле

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cdot \cos C \text{ и } \sin c = \sin a \cdot \sin C, \text{ —}$$

после замене величине x са a , b и c изразима (с)' — добити облик:

$$\lg b'' + 2 \mathfrak{E}(b) = \lg a'' + 2 \mathfrak{E}(a) + \lg \cos C, \quad \lg c'' - \mathfrak{E}(c) = \lg a'' - \mathfrak{E}(a) + \lg \sin C;$$

угао пак B , — на основу реченог у чл. 21. — боље ће се срачунати не по тачној формули:

$$\operatorname{cotg} B = \operatorname{tg} (90^\circ - B) = \operatorname{tg} C \cdot \cos a$$

већ по обрасцу:

$$C = (90^\circ - B) = (C + B - 90^\circ)'' = a'' \frac{\sin 1''}{2} \cdot \sin C \cdot \cos C,$$

*) У логаритамским таблицама Бремкера, Хјуела и др. дају се, поред логаритама бројева, величине: $S = \lg \sin 1'' - \mathfrak{E}(x)$ и $T = \lg \sin 1'' + 2 \mathfrak{E}(x)$.

што у даном случају представља сферни ексцес (сувишак) троугла. На тај начин срачунавања тражених b , c и B постају врло проста и извешће се по овом реду:

$$\begin{array}{lll}
 \lg \cos C = 9.89032 & \lg b + 2 \mathfrak{S}(b) = 3.85937 & \lg \sin C \cdot \cos C = 9.6895 \\
 + 2 \mathfrak{S}_3(a) = + 29 & - 2 \mathfrak{S}(b) = - 18 & \lg a^2 = 7.9375 \\
 \lg a'' = 3.96876 & \lg c - \mathfrak{S}(c) = 3.76776 & \lg \frac{\sin 1''}{2} = 4.3846 \\
 - \mathfrak{S}_3(a) = - 15 & + \mathfrak{S}(c) = + 6 & \lg(C + B - 90^\circ)'' = 2.0116 \\
 \lg \sin C = 9.79915 & b = 2^\circ 0' 31'' & C + B - 90^\circ = 1' 42''.7 \\
 & c = 1^\circ 37' 39'' & B = 50^\circ 59' 54''.5
 \end{array}$$

2.) Узмимо сада правоугли сферни троугао са даном хипотенузом a ма какве величине, нпр. $a = 39^\circ 1' 48'' 2$ али са врло малим углом C , нпр. $C = 2^\circ 35' 6'' 9306$. У том ће се случају тачне формуле:

$$\cotg B = \tg(90^\circ - B) = \cos a \tg C, \quad \sin c = \sin a \cdot \sin C, \quad \tg b = \tg a \cdot \cos C$$

преобратити у:

$$\lg(90^\circ - B)'' + 2 \mathfrak{S}(90^\circ - B) = \lg C'' + 2 \mathfrak{S}(C) + \lg \cos a$$

$$\lg c - \mathfrak{S}(c) = \lg C'' - \mathfrak{S}(C) + \lg \sin a$$

$$(a - b)'' = C^2 \cdot \sin a \cdot \cos a \frac{\sin 1''}{2}$$

и сва срачунавања по њима неће се ни по чему разликовати од оних, која су извршена у првом примеру.

24. Елементарни троугли.

Ако се у правоуглом сферном троуглу, са врло оштрим углом C , покаже, да је разлика у између хипотенузе a и катете b , — која је изражена формулом (d) чл. 21, — мања од оне грешке Δ , са којом се дају или одређују величине a и b , то ћемо имати право, да напишемо просто: $a = b$. Такав нас услов доводи до ових величина угла C :

$$\left. \begin{array}{ll}
 \text{кад је } \Delta = 0''.01 \text{ онда треба да буде } C < \sqrt{2.29} = 1'.5 \\
 \text{„ „ } \Delta = 0''.1 \text{ „ „ „ „ } C < \sqrt{22.9} = 4'.7 \\
 \text{„ „ } \Delta = 1'' \text{ „ „ „ „ } C < \sqrt{229} = 15'
 \end{array} \right\} (e)$$

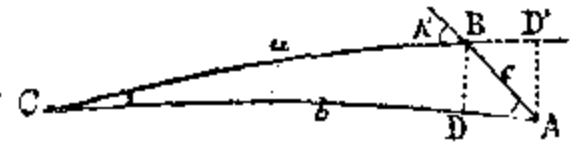
Такав троугао који задовољава тај услов маленкости угла C , зваћемо *елементарним правоуглим*. Троугао пак са врло малом хипотенузом a , који задовољава исте услове (e), тако да бисмо имали право са истом тачношћу Δ писати $90^\circ - B = C$ за његове угле B и C , — ми ћемо звати *равни правоугли*.

У првом ће троуглу разни односи међу његовим елементима бити овакви:

$$b = a, \quad c = C \cdot \sin a = C \cdot \sin b, \quad 90^\circ - B = C \cdot \cos a = C \cos b;$$

тако, да се он по величини својих страна неће разликовати од *елементарног равнокраког* троугла у коме су тачно: $a = b$ и $A = B$.

Уопште ћемо *елементарним сферним троуглом* звати такав, у коме један од углова (C) и страна (c), која му на супрот лежи, задовољавају напред речени услов меленкости. Делџи такав троугао ABC (сл. 5.) на два CBD и DBA са правим углом код D (или пак на CAD' и $D'AB$ са правим углом код D') и означив његов спољњи угао код B , тј: $180^\circ - B$, са A' , имаћемо право, да напишемо овакве разне односе међу његовим странама и углима:



сл. 5.

$$\left. \begin{aligned} b &= a + c \cdot \cos A = a + c \cdot \cos A' = a - c \cdot \cos B \\ c \cdot \sin A &= C \cdot \sin a = C \cdot \sin b = c \cdot \sin A' \\ A' &= 180^\circ - \sphericalangle CBD - (90^\circ - A) = C \cos a + A \\ &\text{или} \quad A' - A = C \cos a = C \cos b \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Последња формула показује, да кад је $a = 90^\circ$ или пак $b = 90^\circ$, онда спољњи угао A' постаје раван унутрашњем A ; отуд пак излази и обратно: ако су у елементарном сферном троуглу угли A' и A потпуно равни међу собом, то значи, да су његове стране a и b приближно равне 90° .

Напомена. Све што је овде речено о елементарним сферним троуглима, вреди исто тако и за *елементарне равне троугле*, са том само разликом, што у овима последњим треба писати a и b у место $\sin a$ и $\sin b$ и 1 у место $\cos a$ и $\cos b$.

25. Диференцијалне формуле.

Ако се величинама $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots$, које улазе у израз неке функције $y_0 = f(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots)$ додаду врло мали прираштаји $\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma, \dots$ тј. ако се промене у $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha, \beta = \beta_0 + \Delta\beta, \dots$ онда ће се нова вредност функције $y = f(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ разликовати од пређашње y_0 исто тако за врло малу величину Δy , са изузетком, разуме се, оних случајева, када код функције наступи прекид континуитета. Ова се величина Δy добија по познатом Тејлоровом реду:

$$\begin{aligned} \Delta y = y - y_0 &= \Delta\alpha \cdot f'_\alpha(\alpha_0, \beta_0, \dots) + \Delta\beta \cdot f'_\beta(\alpha_0, \beta_0, \dots) + \dots; \\ &+ \frac{1}{2} \Delta\alpha^2 \cdot f''_{\alpha\alpha}(\alpha_0, \beta_0, \dots) + \Delta\alpha \cdot \Delta\beta \cdot f''_{\alpha\beta}(\alpha_0, \beta_0, \dots) + \frac{1}{2} \Delta\beta^2 \cdot f''_{\beta\beta}(\alpha_0, \beta_0, \dots) + \dots; \end{aligned}$$

када су пак прираштаји $\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma, \dots$ толико мали, да се квадрати и њихови производи могу занемарити у сравњењу са њиховим првим степенима, — изаћи ће просто:

$$\begin{aligned} y &= \alpha \cdot f'_\alpha(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots) + \Delta\beta \cdot f'_\beta(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots) + \Delta\gamma \cdot f'_\gamma(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots) + \dots \\ \text{или} \quad \Delta y &= \Delta y_\alpha + \Delta y_\beta + \Delta y_\gamma + \dots; \end{aligned}$$

тј. потпуни прираштај функције раван је суми делимичних њених прираштаја $\Delta y_\alpha, \Delta y_\beta, \Delta y_\gamma, \dots$, од којих први произлази због промене само једне величине α_0 , други — због промене само једине величине β_0 и т. д.

Такве се приближне формуле, — које изражавају зависност међу првим степенима врло малих прираштаја променљивих и њихових функција, — називају

диференцијалним. Тачност њихова неће ни у колико да пострада, ако се у њима у место $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \dots$ ставе ма какве друге величине $\alpha_0 + k \cdot \Delta \alpha, \beta_0 + h \cdot \Delta \beta, \dots$ које се налазе у границама између α_0 и α , између β_0 и β и т. д.; зато што бисмо, — развијајући производне $f'_\alpha(\alpha_0 + k \cdot \Delta \alpha, \beta_0 + h \cdot \Delta \beta, \dots)$, $f'_\beta(\alpha_0 + k \cdot \Delta \alpha, \beta_0 + h \cdot \Delta \beta, \dots)$ по степенима прираштаја $k \cdot \Delta \alpha, h \cdot \Delta \beta, \dots$ — добили у свима тим случајима за Δ у величине, које би се разликовале једна од друге само у члановима са квадратима и производима од $\Delta \alpha, \Delta \beta, \dots$ које, по већ учињеном услову, имамо право да занемаримо.*)

Да бисмо показали примену диференцијалних формула на сферном троуглу ABC, замислимо, да су се две његове стране b и c и угао међу њима A изменили за врло малу величину $\Delta b, \Delta c$ и ΔA , услед чега треба да произађу одговарајуће мале промене $\Delta a, \Delta B$ и ΔC у осталим елементима a, B и C . Одредимо прву од њих. Узевши ради тога погодну формулу:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

и диференцирајући је прво по b , затим по c и најзад по A , — наћи ћемо:

$$\sin a \cdot \Delta a_b = \Delta b (\sin b \cdot \cos c - \cos b \cdot \sin c \cdot \cos A) = \Delta b \cdot \sin a \cdot \cos C$$

$$\sin a \cdot \Delta a_c = \Delta c (\cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A) = \Delta c \cdot \sin a \cdot \cos B$$

$$\sin a \cdot \Delta a_A = \Delta A \cdot \sin b \cdot \sin c \cdot \sin A = \Delta A \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \sin C,$$

тако, да ће напоследку изаћи:

$$\Delta a = \Delta a_b + \Delta a_c + \Delta a_A = \Delta b \cdot \cos C + \Delta c \cdot \cos B + \Delta A \cdot \sin b \cdot \sin C.$$

На сличан би се начин могли добити и диференцијалне промене углова B и C а тако исто и промене разних елемената троугла при другим погодбама. Али, као што ћемо сад видети, сви се овакви односи, међу диференцијалним променама разних елемената сферног троугла, изводе несравњено простије, брже и очигледније директно на цртежу, на основу већ напред рассмотрених особина елементарних сферних троуглова.

26. Диференцијални односи међу елементима сферних троуглова.

Да почнемо опет са истим случајем, када у сферном троуглом ABC добијају мале прираштаје стране b и c и угао A . Замислимо спочетка, да су c и A остали без промене; продужимо само страну AC (сл. 6.) за величину њенога прираштаја $CC' = \Delta b$ и опишимо лук великог круга BC' . Тада ће у новом троуглу ABC' бити: $BC' = a' = a + \Delta a$, угао $ABC' = B' = B + \Delta B$ и угао $AC'B = C' = C - \Delta C$; ако је сад Δb толико мало, да се троугао $BC'C$ може сматрати елементарним, то ћемо из њега добити непосредно:

$$a' - a = \Delta a_b = \Delta b \cdot \cos C, \quad (B' - B) \cdot \sin a = \Delta B_b \cdot \sin a = \Delta b \cdot \sin C$$

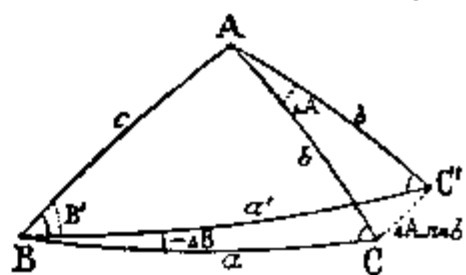
$$\text{и} \quad C' - C = -\Delta C_b = \Delta B_b \cdot \cos a = \Delta b \cdot \sin C \cdot \cotg a.$$

*) Ово је потпуно јасно још и по томе, што, имајући у виду, да бројне вредности малих количина $\Delta \alpha, \Delta \beta, \dots$ треба да се изражавају врло малим бројем децимала, то је и бројне коефицијенте њихове $f'_\alpha, f'_\beta, \dots$ довољно знати само приближно.

Остављајући затим без промене b и A а додајући прираштај само страни c , нашли бисмо на сасвим сличан начин, да је:

$$\Delta a_c = \Delta c \cdot \cos B, \quad - \Delta B_c = \Delta c \cdot \sin B \cdot \cotg a, \quad \Delta C_c \cdot \sin a = \Delta c \cdot \sin B.$$

Даље, додајући прираштај ΔA само углу A , тј. описујући лук великога круга AC' (сл. 7.) тако, да буде: $\sphericalangle C'AC = \Delta A$ и $C'A = CA = b$, добићемо нови троугао ABC' у коме су: $BC' = a' = a + \Delta a$ и $\sphericalangle ABC' = B' = B + \Delta B$; тако образовани троугли ACC' и BCC' , при знатној маленкости ΔA биће оба два елементарни; али је у првом од њих $\sphericalangle ACC' = AC'C = 90^\circ$ и $CC' = \Delta A \cdot \sin B$ па ће због тога из другог бити:



Сл. 7.

$$a' - a = \Delta a = \Delta A \cdot \sin b \cdot \sin C \text{ и } (B - B') \cdot \sin a = - \Delta B_A \cdot \sin a = \Delta A \cdot \sin b \cdot \cos C.$$

Да би се добила промена ΔC_A угла C , биће простеје замислити, да је ΔA постројена око стране $AB = c$, јер ће се тада, — на основу тек што изведеног образаца за ΔB_A , — непосредно написати:

$$- \Delta C_A \cdot \sin a = \Delta A \cdot \sin c \cdot \cos B.$$

Сакупљајући, напоследку уједно све делимичне прираштаје Δa_b , Δa_c и Δa_A , намићемо потпуни прираштај стране a у савршено истом облику, као што је раније добијен аналитичким путем:

$$\Delta a = \Delta b \cdot \cos C + \Delta c \cdot \cos B + \Delta A \cdot \sin b \cdot \sin C$$

и уједно с тим добиће се још и ови обрасци:

$$\Delta B \cdot \sin a = \Delta b \cdot \sin C - \Delta c \cdot \sin B \cdot \cos a - \Delta A \cdot \sin b \cdot \cos C,$$

$$\Delta C \cdot \sin a = - \Delta b \cdot \sin C \cdot \cos a + \Delta c \cdot \sin B - \Delta A \cdot \sin c \cdot \cos B.$$

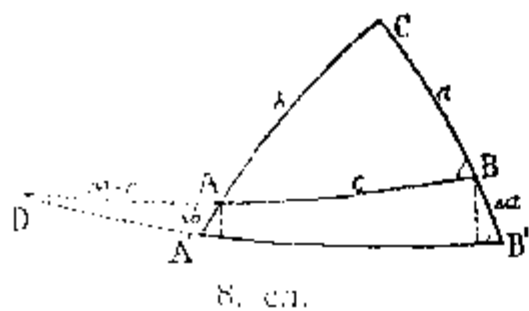
Потпуно сличном геометријском конструкцијом изводе се и диференцијалне промене у углима сфернога троугла, када се учине мале промене на његовим трима странама; на име, остављајући b и c без промене, из сл. 7. намићемо:

$$\Delta A_a \cdot \sin b = \frac{\Delta a}{\sin C} \text{ и } - \Delta B_a \cdot \sin a = \Delta a \cdot \cotg C;$$

промена пак угла C , — по сличности својој са променом угла B , — написаће се већ директно:

$$- \Delta C_a \cdot \sin a = \Delta a \cdot \cotg B.$$

Обратни случај, када се у троуглу мењају угли а траже се одговарајуће промене страна, доводи до онога што је малочас изложено ако само замислимо допунски троугао тј. поларни даноме; али се те промене исто тако могу намићти и овом непосредном конструкцијом: остављајуће угле B и C без промене и конструишући нови троугао $CB'A'$ (сл. 8.) са углом код B' потпуно равном B , добићемо тачку D у пресеку великих кругова AB и $A'B'$ на растојању 90° од B , тако, да ће се мали угао код D добити из елементарног троугла BDB' овако:



8. сл.

$$D = \Delta a_A \cdot \sin B;$$

због тога пак из другог елементарног троугла ADA' излази:

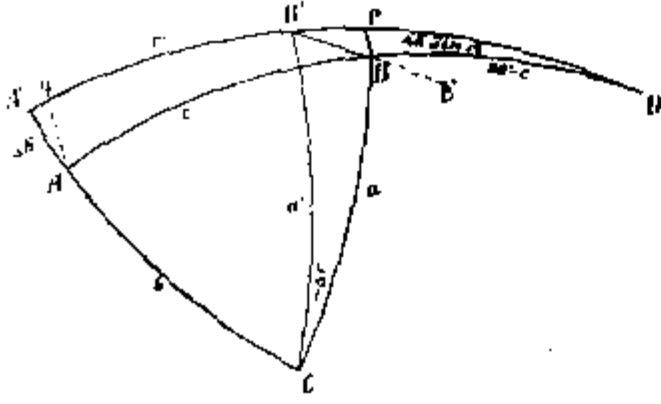
$$A' - A = \Delta A = D \cdot \sin c = \Delta a_A \cdot \sin B \cdot \sin c$$

откуд:

$$\Delta a_A \cdot \sin B = \frac{\Delta A}{\sin c}$$

и

$$\Delta b_A \cdot \sin A = D \cdot \cos c = \Delta A \cdot \cotg c.$$



сл. 8. I.

Најнезгодније се добијају геометриском конструкцијом, промене: Δc , ΔC и ΔB елемената сферног троугла, када се његова страна b промени за величину Δb а A и a остану непромењени; или пак промене: Δc , ΔC , и Δb , када се промени његов угао B за величину ΔB а A и a остану без промене. У оба ова случаја односи међу променама Δb , ΔC и Δc могу се одредити из једне само конструкције (сл. 8. I.) на овај начин:

$$BB' = -\Delta C \cdot \sin a$$

$$Bp = \Delta b \cdot \sin A \cdot \cos c$$

$$\Delta C = -\Delta b \frac{\sin A \cdot \cos c}{\sin a \cdot \cos B} = -\Delta b \cdot \frac{\operatorname{tg} B \cdot \cos c}{\sin b} \dots \dots \dots (1.)$$

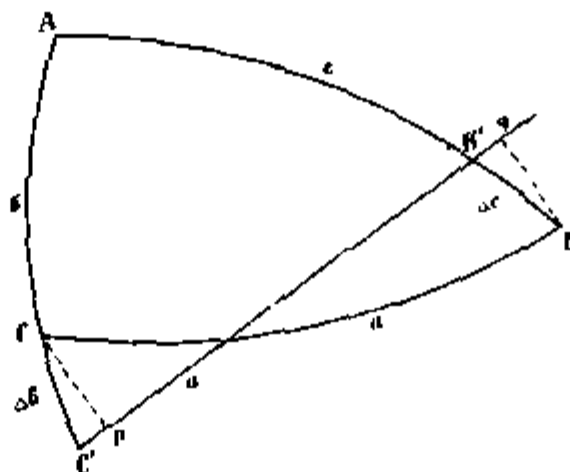
$$\Delta c = A'q - B'p = \Delta b \cdot \cos A - \Delta b \cdot \sin A \cdot \cos c \cdot \operatorname{tg} B = -\Delta b \frac{\cos C}{\cos B} \dots \dots \dots (2.)$$

$$\begin{aligned} \Delta B = B' - B = DBC - DB'C &= (DBE - DB'E) + (EBC - EB'C) = \\ &= \Delta b \cdot \sin A \cdot \sin c - \Delta C \cdot \cos a = \Delta b \cdot \sin A \left(\sin c + \frac{\cos c \cdot \cos a}{\sin a \cdot \sin B} \right) = \\ &= \Delta b \cdot \frac{\sin A \cdot \cos b}{\sin a \cdot \cos B} = \Delta b \cdot \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} b} \dots \dots \dots (3.) \end{aligned}$$

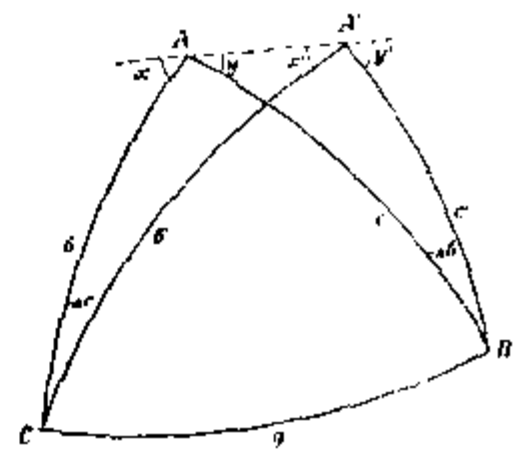
Али се ови односи између Δc , Δb и ΔB могу добити простије и очигледније из две посебне конструкције. Прва ће (сл. 8. II), (услед тачне једнакости страна $BC = B'C' = a$) дати непосредно:

$$C'p = -B'q, \text{ или } \Delta b \cdot \cos C = -\Delta c \cdot \cos B \dots \dots \dots (2.)$$

Конструкција пак сл. 8. III (услед тачне једнакости углова $A' = A$) даје:



8. сл. II.



8. сл. III.

$$x + y = x' + y', \text{ тј. } x - x' = y' - y \text{ или } \Delta C \cos b = -\Delta B \cos c \dots \dots \dots (1.)'$$

што заједно за (1.) доводи до:

$$\Delta b \operatorname{tg} B = \Delta B \operatorname{tg} b \dots \dots \dots (3.)$$

Сматрамо за сувишно, да овде објашњујемо примену ове геометриске методе на раван троугао, јер он представља само посебни случај сфернога.

Задатке:

1) Показати, да у сферном троуглу са врло малим странама a , b и c , треба да буде:

$$\mathfrak{S}(a) = \mathfrak{S}(b) + \mathfrak{S}(c) - 2 \cdot \cos A \cdot \mathfrak{S}(\sqrt{bc}).$$

2) Угао ν изражен је помоћу E и e тачном формулом: $\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{E}{2}$.

Срачунати га с тачношћу до $1'$ без логаритамских таблица са датим: $e = \frac{1}{60}$ и $E = 30^\circ 0' 0''$.

Занемарујући квадрате и више степене од e , добићемо спочетка

$$\left| \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 1 + e \text{ а затим } \nu - E = \frac{e \cdot \sin E}{\sin 1'} = \frac{3438}{120} = 29' \text{ и } \nu = 30^\circ 29'.$$

3) У сферном троуглу ABC дате су стране b и c и угао A , при чему је разлика $b - c = \Delta$ врло мала. Одредити остале елементе троугла: a , B и C на најпростији начин.

Ако на страни $AC = b$ одмеримо лук $AC' = c$, то ће се добити равнокраки троугао ABC' , чији се угли $B' = C'$ и страна $a' = BC'$ одређују по формулама:

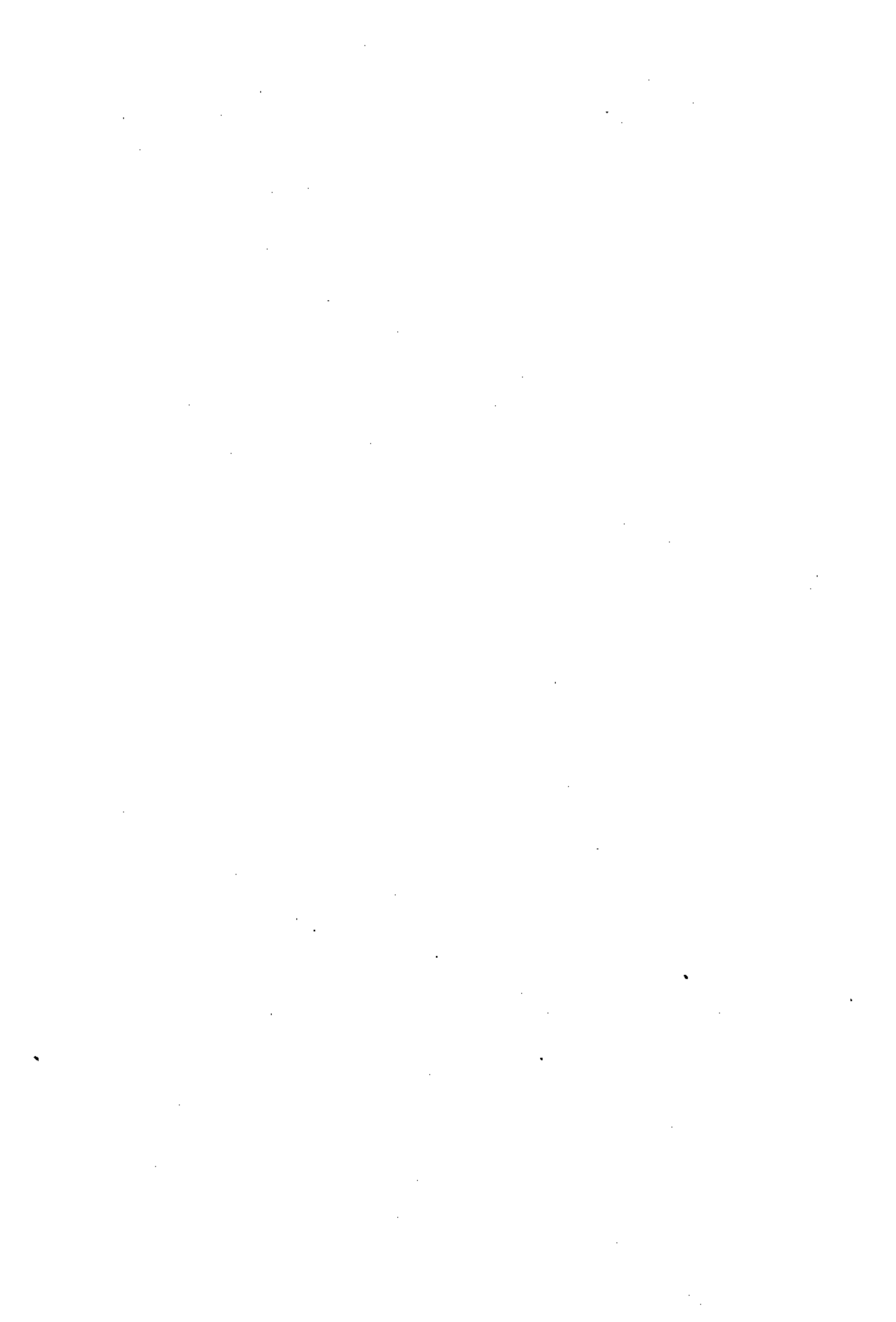
$$\operatorname{cotg} B' = \operatorname{cotg} C' = \cos c \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} \text{ и } \operatorname{tg} \frac{a'}{2} = \operatorname{tg} c \cdot \cos B';$$

из елементарног троугла пак CBC' добиће се затим:

$$a - a' = \Delta \cdot \cos C', \quad B - B' = \Delta \cdot \frac{\sin C'}{\sin a'} \text{ и } C - C' = -(B - B') \cdot \cos a'.$$

4) У равном правоуглом троуглу ($A = 90^\circ$) катете су b и c добиле врло мале прираштаје Δb и Δc . У колико се због тога променила хипотенуза a и угли B и C ?

$$[\Delta a = \Delta b \cdot \cos C + \Delta c \cdot \cos B, \Delta B'' = -\Delta C'' = \frac{1}{a \cdot \sin 1''} (\Delta b \cdot \sin C - \Delta c \cdot \sin B)].$$



ГЛАВА IV.

ИНТЕРПОЛОВАЊЕ.

27. Циљ и општи поступак при интерполовању.

Веома се често дешава, да су дане само бројне вредности y_1, y_2, y_3, \dots неке непрекидне функције $y = f(a + x)$ мале променљиве количине x за неколико посебних њених вредности: x_1, x_2, x_3, \dots —, које се мало разликују једна од друге; тада настаје потреба, да се само по тим даним нађе бројна вредност функције без икаквог знања њенога аналитичког облика — и за све остале интервалне вредности променљиве x . У тим се случајима допушта, да у неким уским границама променљиве x , она може бити представљена, са довољном приближношћу, ограниченим бројем чланова Тејлоровог реда

$$y = f(a + x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + f_4 x^4 + \dots \quad (f)$$

где је скраћења ради означено:

$$f \rightarrow f(a), f_1 = f'(a), f_2 = \frac{1}{2}f''(a), f_3 = \frac{1}{6}f'''(a), f_4 = \frac{1}{24}f^{IV}(a) \text{ и т. д.}$$

Сукцесивним стављањем у овоме реду даних величина y_1, y_2, y_3, \dots и њима одговарајућих вредности x_1, x_2, x_3, \dots добиће се неколико једначина првог степена са непознатима $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$; када пак оне буду одређене, лако је наћи, са већом или мањом приближношћу, и бројне вредности y и за интервалне вредности променљиве x . Такав начин нахођења бројне вредности функције назива се *интерполовање*.

Интерполовање се веома упрошћује, када дане вредности променљиве или *аргумента* x иду једно за другим у аритметичкој прогресији, као нпр. у овој табlici:

аргумент	функција	разлике					
.....	..						
$a - 2i$	y_{-2}	..					
$a - i$	y_{-1}	α_{-2}	..				
a	y_0	α_{-1}	β_{-1}	γ_{-1}	δ_0
$a + i$	y_1	α_1	β_1	γ_1	δ_1	ϵ_1	..
$a + 2i$	y_2	α_2	β_2	γ_2	..		
$a + 3i$	y_3	α_3	..				
.....	..						

(g)

Овде су исписане разлике међу даним величинама:

$$a_{-2} = y_{-1} - y_{-2}, \quad a_{-1} = y_0 - y_{-1}, \quad a_1 = y_1 - y_0, \quad a_2 = y_2 - y_1, \text{ и т. д.}$$

које се зову *прве разлике*; затим су написани бројеви:

$$\beta_{-1} = a_{-1} - a_{-2}, \quad \beta_0 = a_1 - a_{-1}, \quad \beta_1 = a_2 - a_1 \text{ итд.,}$$

које се зову *друге разлике*; на сличан су начин дати бројеви $\gamma, \delta, \varepsilon, \dots$, са разним значкама доле, — *шреће, четврте* и т. д. разлике.

У том случају, као што је напред речено, имаћемо, за одређивање величине непознатих f_0, f_1, f_2, f_3 итд. већи или мањи број једначина оваквога облика:

$$\left. \begin{array}{l} \text{за } x = -2i \quad y_{-2} = f_0 - 2if_1 + 4i^2f_2 - 8i^3f_3 + 16i^4f_4 - \dots \\ \text{„ } x = -i \quad y_{-1} = f_0 - if_1 + i^2f_2 - i^3f_3 + i^4f_4 - \dots \\ \text{„ } x = 0 \quad y_0 = f_0 \\ \text{„ } x = +i \quad y_1 = f_0 + if_1 + i^2f_2 + i^3f_3 + i^4f_4 + \dots \\ \text{„ } x = +2i \quad y_2 = f_0 + 2if_1 + 4i^2f_2 + 8i^3f_3 + 16i^4f_4 + \dots \\ \dots \end{array} \right\} (1.)$$

Одузимајући сваку такву једначину од следеће, добићемо:

$$\left. \begin{array}{l} a_{-2} = if_1 - 3i^2f_2 + 7i^3f_3 - 15i^4f_4 + \dots \\ a_{-1} = if_1 - i^2f_2 + i^3f_3 - i^4f_4 + \dots \\ a_1 = if_1 + i^2f_2 + i^3f_3 + i^4f_4 + \dots \\ a_2 = if_1 + 3i^2f_2 + 7i^3f_3 + 15i^4f_4 + \dots \\ \dots \end{array} \right\} (2.)$$

На сличан начин наћи ћемо затим:

$$\left. \begin{array}{l} \beta_{-1} = 2i^2f_2 - 6i^3f_3 + 14i^4f_4 + \dots \\ \beta_0 = 2i^2f_2 + 2i^4f_4 \\ \beta_1 = 2i^2f_2 + 6i^3f_3 + 14i^4f_4 + \dots \\ \dots \end{array} \right\} (3.)$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_{-1} = 6i^3f_3 - 12i^4f_4 + \dots \\ \gamma_1 = 6i^3f_3 + 12i^4f_4 + \dots \\ \dots \end{array} \right\} (4.)$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta_0 = 24i^4f_4 + \dots \\ \dots \end{array} \right\} (5.)$$

Обрасци (2.), (3.), (4.) и т. д. доводе нас до ових закључака: 1. све у опште табличне разлике ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и т. д.) треба да буду у толико мање, у

колико је мањи интервал i међу даним вредностима аргумента; 2.) смањивање разлика са смањењем i у толико је знатније, у колико је њихов ступањ виши, јер у обрасцима разлика ма ког било ступња n улази као општи множитељ i^n ; 3.) ако при даном интервалу i , сукцесивне разлике у табlici (g) почну, да бивају све мање и мање од предидућих, ове ће послужити за директни доказ свршетка реда (f), готовог за примену његову у даном случају ради довољно тачног срачунавања величина $y = f(a + x)$, које одговарају интервалним вредностима аргумента $(a + x)$.

28. Интерполационе формуле.

Из једначина се (1.), (2.), (3.) и т. д. врло различито могу да изразе тражене величине f_0, f_1, f_2, f_3 и т. д. на основу даних y или на основу ових или оних разлика између њих; стога се и за $f(a + x)$ могу добити изрази, различити по облику и по удобству за примену њихову на послу. Такви се општи изрази за $f(a + x)$, — који се зову *интерполационе формуле*, — изводе ипак згодније и простије не непосредно из једначина (1.), (2.), (3.), (4.) и т. д. већ из следеће основне и најпростије интерполационе *Њушнове формуле*.

У табlici (g) све се разлике $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и т. д. означају и састављају из предидућих потпуно онако као и дане вредности $y_x = f(a + x)$, за разне целе вредности променљиве x ; услед тога није се тешко убедити, да ће се при $x = 0, 1, 2, 3$ и т. д. добијати за y_x поступно ови изрази:

$$\begin{aligned} y_0 &= f(a) \\ y_1 &= f(a + 1) = y_0 + \alpha_1 \\ y_2 &= f(a + 2) = y_0 + 2\alpha_1 + \beta_1 \\ y_3 &= f(a + 3) = y_0 + 3\alpha_1 + 3\beta_1 + \gamma_2 \\ y_4 &= f(a + 4) = y_0 + 4\alpha_1 + 6\beta_1 + 4\gamma_2 + \delta_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Општи пак изрази за свако $y = f(a + x)$ биће:

$$\left. \begin{aligned} y_x &= y_0 + A_0 \alpha_1 + B_0 \beta_1 + C_0 \gamma_2 + D_0 \delta_2 + E_0 \varepsilon_3 + \dots \\ \text{где су: } A_0 &= x, \quad B_0 = \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}, \quad C_0 = \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \\ D &= \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \dots \dots (1.)$$

Ово и јесте *Њушнова* интерполациона формула, у којој јасни закон коефицијената код разлика $\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_2, \varepsilon_3$ и т. д. лако може бити доказан за y_{x+1} , ако је он оправдан за y_x ; остаје само да се допусти примена њена и за све интервалне вредности x , т. ј. и за разломне делове његове. Али, пошто напред речене разлике иду у њој, почевши од α_1 , по дијагонали наниже, то ће она бити згоднија од осталих интерполационих формула само у оним случајима када бројна вредност y није дана изнад y_0 , а у аргументу $(a + x)$, — који је потребан за рачунање, — вреднос x није велика или чак и негативна.

Да уведемо сад у ову формулу (1.) друге разлике, и то парне $\beta_0, \delta_0, \varepsilon_0 \dots$, које се налазе у истој хоризонталној врсти са y_0 , и непарне $\alpha_1, \gamma_1, \varepsilon_1 \dots$, које се налазе у интервалној врсти између $y_0 - y_1$. Тада треба у изразу (1.) поставити: $\beta_1 = \beta_0 + \gamma_0, \gamma_2 = \gamma_1 + \delta_1 = \gamma_1 + \delta_0 + \varepsilon_1, \delta_2 = \delta_1 + \varepsilon_2 = \delta_0 + 2\varepsilon_1 + \dots, \varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \dots$

те ће коефицијенти A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 и т. д. код уведених нам разлика $\alpha_1, \beta_0, \gamma_1, \delta_0, \varepsilon_1, \dots$ испасти са јасно израженим законом њиховога састава

$$A_1 = A_0 = x \quad B_1 = B_0 = \frac{(x-1)x}{1 \cdot 2}; \quad C_1 = B_0 + C_0 = \frac{(x-1)x(x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$D_1 = C_0 + D_0 = \frac{(x-2)(x-1)x(x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}; \quad E_1 = C_0 + 2D_0 + E_0 =$$

$$= \frac{(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \text{ и т. д.}$$

Интерполациона ће формула

$$y_x = y_0 + A_1 \alpha_1 + B_1 \beta_0 + C_1 \gamma_1 + D_1 \delta_0 + E_1 \varepsilon_1 + \dots \quad (2.)$$

бити добра за примену на послу, када је дани прираштај x (позитивни или негативни) аргумента $a + x$ доста мали разломак; али је недовољно погодна за вредности x око $\pm \frac{1}{2}$, зато што коефицијенти B_1 и D_1 достижу своју максималну вредност при $x = +0.5$ и коефицијент C_1 — при $x = 0.57$.

За све пак аргументе $a + x$, који се налазе уопште ма где између a и $a + 1$, боље је увести у ту формулу полусуме парних разлика, које непосредно леже уз интервалну врсту између y_0 и y , тј.

$$\beta = \frac{1}{2} (\beta_0 + \beta_1) = \beta_0 + \frac{\gamma_1}{2}; \quad \delta = \frac{1}{2} (\delta_0 + \delta_1) = \delta_0 + \frac{\varepsilon_1}{2} \dots$$

После такве замене $\beta_0, \delta_0 \dots$ са $\beta = \frac{\gamma_1}{2}, \delta = \frac{\varepsilon_1}{2} \dots$ изаћи ће:

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + A\alpha_1 + B\beta + C\gamma_1 + D\delta + E\varepsilon_1 + \dots \\ \text{где је } A &= A_1 = x; \quad B = B_1 = \frac{1}{2}(x-1)x; \quad C = C_1 = \frac{1}{2}B = \\ &= \frac{1}{6}(x-1)(x-\frac{1}{2}); \quad D = D_1 = \frac{1}{24}(x-2)(x-1)x(x+1); \\ E &= E_1 = \frac{1}{2}D_1 = \frac{1}{120}(x-2)(x-1)(x-\frac{1}{2})x(x+1) \dots \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Ову је формулу (h) први пут дао *Спирлинг*; примењивао ју је *Бесел*, пошто је дао помоћне таблице за нахођење коефицијената $A, B, C \dots$ при различитим вредностима x . У свему даљем и ми ћемо се искључиво њоме користити, или, — кад то буде потребно, — и другим њеним обликом:

$$y = f(a+x) = y_0 + f_1 x + f_2 \frac{x^2}{2} + f_3 \frac{x^3}{6} + f_4 \frac{x^4}{24} \dots \quad (h)'$$

у којој су чланови поређани не по реду разлика већ по степенима променљивог дела x аргумента ($a+x$), при чему ће се, са раскрыћем коефицијената A, B, C, D формуле (h), бројне вредности $f_1, f_2, f_3 \dots$ изразити помоћу разлика $\alpha_1, \beta, \gamma_1, \delta \dots$ овако:

$$f_1 = \alpha_1 = \beta + \frac{\gamma_1}{2}; \quad f_2 = \beta = \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\delta}{12}; \quad f_3 = \gamma_1 = \frac{\delta}{2} \text{ и } f_4 = \delta \dots \quad (f)'$$

Ми ћемо се овде ограничити са четвртим разликама δ са претпоставком, да су пете разлике ε ништавне, јер се табличне вредности за y дају обично са тако малим интервалом аргумента, да се ретко кад дешава узимати у обзир и четврте разлике.

Основне бројне вредности y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1 и т. д. у табlici (g) дају се обично с тачношћу до $\frac{1}{2}$ јединице последње њихове децимале (цифре); због тога је и при срачунавању $f(a+x)$ по формули (h) дозвољено, да се ограничавамо само оним њеним члановима, који, — кад се изразе у тим истим јединицама, — излазе већи од $\frac{1}{2}$. Али је се лако убедити, да при свима могућним вредностима $x-a$, у границама од 0 до 1, највеће су вредности за B и D $\frac{1}{8}$ и $\frac{3}{128}$ (и то при $x = \frac{1}{2}$); највећа пак вредност за C је $\frac{1}{72\sqrt{3}} = \frac{1}{125}$ (при $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$). Отуд излази, да се четврте разлике могу занемарити ако се докаже, да је $\delta < \frac{1}{2} \cdot \frac{128}{3} = 21$; ако ли је $\gamma_1 < \frac{1}{2} \cdot 125 = 63$ онда се и треће разлике могу занемарити; најзад се и друге разлике могу занемарити ако је $\beta < \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$.

Формула се (h) може употребити и тада, када је потребно наћи вредност функције y за аргумент, који излази из граница наше таблице; али тада величина x и коефицијенти B, C, D постају врло велики и услед тога, неизбежне грешке у разликама $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, — које произлазе од нетачности величина $y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, \dots$ — могу да искваре тачност вредности y , која се на тај начин израчунава. Исто би се то десило, разуме се, и при употреби ма које друге интерполационе формуле. Због тога се такво нахођење бројне величине функције, — које се зове *екстраполовање*, — никад не може сматрати као сигурно.

Пример. Ради објашњења свега напред изложенога, да испишемо синусне логаритме од пет децимала за угле од 6° до 15° са интервалом i од 1° . Саставивши таблицу разлика, — изражених у јединицама пете децимале, — одредимо по тим даним $lg \sin 8^\circ 47'$ и $lg \sin 12^\circ 20'$.

Аргум.	функција	α	β	γ	δ	ε
6°	9.01923					
7	9.08589	+ 6666				
8	9.14356	+ 5767	— 899	+ 209		
9	9.19433	+ 5077	— 690	+ 147	— 62	+ 17
10	9.23967	+ 4534	— 543	+ 102	— 45	+ 19
11	9.28060	+ 4093	— 441	+ 76	— 26	+ 8
12	9.31788	+ 3728	— 365	+ 58	— 18	+ 5
13	9.35209	+ 3421	— 307	+ 45	— 13	+ 3
14	9.38368	+ 3159	— 262	+ 35	— 10	
15	9.41300	+ 2932	— 227			

Срачунавање $y = \lg \sin 8^\circ 47'$

$$y_0 = f(a) = \lg \sin 8^\circ = 9.14356; \quad x = \frac{47'}{60'} = 0.7833 \dots;$$

$$a_1 = + 5077; \quad \beta = \frac{1}{2} (-690 - 543) = -616.5; \quad \gamma_1 = + 147; \quad \delta = \frac{1}{2} (-62 - 45) = 53.5$$

$\lg (x - \frac{1}{2}) = 9.452$	$\frac{1}{2} \beta = -308.2$	$\lg \frac{1}{6} \gamma_1 = 1.389$	$y_0 = 9.14356.0$
$\lg a_1 = 3.70561$	$\frac{1}{6} \gamma_1 = + 24.5$	$\lg 6 C = 8.682_n$	$A a_1 = + 3976.6$
$\lg x = 9.89394$	$\frac{1}{24} \delta = - 2.2$	$\lg C \gamma_1 = 0.071_n$	$B \beta = + 52.3$
$\lg (x - 1) = 9.3358_n$			$C \gamma_1 = - 1.2$
$\lg (x + 1) = 0.25$	$\lg \frac{1}{2} \beta = 2.4889_n$	$\lg \frac{1}{24} \delta = 0.34_n$	$D \delta = - 0.8$
$\lg (x - 2) = 0.09_n$	$\lg 2 B = 9.2297_n$	$\lg 24 D = 9.57$	
$\lg A a_1 = 3.59955$	$\lg B \beta = 1.7186$	$\lg D \delta = 9.91_n$	$y = 9.18383$

Срачунавање $y = \lg \sin 12^\circ 20'$

$$y_0 = f(a) = \lg \sin 12^\circ = 9.31788; \quad x = \frac{20'}{60'} = \frac{1}{3};$$

$a_1 = 3421$	$A = \frac{1}{3}$	$y_0 = 9.31788$
$\beta = \frac{1}{2} (-307 - 262) = -284.5$	$2 B = \frac{1}{3} \cdot -\frac{2}{3} = -\frac{2}{9}$	$A a_1 = - 1140.3$
$\gamma_1 = + 45 (< 63)$	$B \beta = -\frac{1}{9} \cdot -284.5$	$B \beta = + 31.6$
$\delta = - 11 (< 21)$		$y = 9.32960$

Из логаритамских се таблица можемо уверити, да је у оба случаја вредност за y , нађена интерполовањем, потпуно тачна.

29. Интерполовање на средину.

У специјалном случају, када је $x = \frac{1}{2}$, т.ј. када је потребно интерполовати равно на средину међу табличним аргументима, формула ће (h) добити овакав прости облик:*)

$$f(a + \frac{1}{2}) = f a + \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{8} \beta + \frac{3}{128} \delta - \dots$$

или пак
$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (y_0 + y_1) - \frac{1}{8} \beta + \frac{3}{128} \delta - \dots \quad (h)''$$

Рачунања су по овој формули тако проста, да је у многим случајима, -- уместо директног интерполовања за ма какви аргуменат, по формули (h), -- много простије саставити спочетка знатно густу таблицу величина y , дупло смањујући интервал i међу даним табличним аргументима; јер ће тада прве разлике постати дупло мање према пређашњима, друге -- четири пута, треће осам пута и т. д.; услед чега се у формули (h) можемо ограничити већ мањим

*) Она ће, постати, у даном случају, тачна са петим разликама закључно, јер се при $x = \frac{1}{2}$ коефицијент $E = \frac{1}{120} (x + 1) x (x - 1) (x - 2) (x - \frac{1}{2})$ претвара у нулу.

бројем чланова. Тако напр. пре него што би се срачунало $y = \lg \sin 8^{\circ}47'$, ми бисмо могли, по даној нам табlici величина y , саставити нову, у којој би треће и четврте разлике биле већ ништавне; наиме овако:

Аргум.	β	δ	$\frac{1}{2}(y_0 + y_1) - \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{128}\delta$	Аргум.	y	α	β	γ
8 ⁰	— 616. ₅	— 53. ₅	9.16894. ₅ + 77. ₁ — 1. ₂	8 ⁰ 0'	9.14356	+ 2614		
9	— 492. ₃	— 35. ₅	9.21700. ₀ + 61. ₅ — 0. ₈	8 30	9.16970	+ 2463	— 151	
10				9 0	9.19433	+ 2328	— 135	+ 16
				9 30	9.21761			

$$y_0 = f(a) = \lg 8^{\circ}30' = 9.16970; \quad x = \frac{17}{30} = 0.5666 \dots$$

	$\alpha_1 = + 2463$	$\beta = - 143$	$y_0 = 9.16970$
\lg	$\alpha_1 = 3.39146$	$\lg \frac{1}{2} \beta = 1.8543_n$	$A \alpha_1 = + 1395.7$
\lg	$x = 9.75333$	$\lg 2 B = 9.3901_n$	$B \beta = + 17.6$
$\lg(x-1) = 9.6368_n$	$\lg B \beta = 1.2444$		$y = 9.18383$
$\lg A \alpha_1 = 3.14479$			

30. Нахођење аргумента по даној вредности функције.

По некад је потребно решити питање обратно напред изложеноме, т. ј. наћи величину аргумента $(a + x)$ по даној вредности функције y , која се налази гдегод међу два њеним табличним вредностима y_0 и y_1 . У том случају треба узети интерполациону формулу у другом њеном облику $(h)'$ и израчунати из ње тражену вредност за x поступним приближењима, написавши је овако:

$$x = \frac{y - y_0}{f_1} - \frac{f_2}{f_1} \frac{x^2}{2} - \frac{f_3}{f_1} \frac{x^3}{6} - \frac{f_4}{f_1} \frac{x^4}{24} - \dots$$

а занемарујући у првом моменту чланове са x^2 , x^3 и т. д. наћи ћемо за x прву приближну величину $x_1 = \frac{y - y_0}{f_1}$; стављајући x_1 у другом делу формуле, добићемо другу величину x_2 већ ближе ка истинитој; затим са x_2 наћи ћемо x_3 и т. д. док не добијемо две сукцесивне величине x_n и x_{n+1} које се ни у колико не разликују једна од друге. У највише случајева није ни потребно ићи даље од четвртог приближења ка x .

Потребно је на пример, да се, по напред исписаној табlici логаритама синуса, одреди угао M , чији је логаритам синуса тј. y раван 9.18383. Тај ће се угао M очевидно налазити негде између 8° и 9° , јер је $\lg \sin 8^{\circ} = y_0 = 9.14356 < y$, а $\lg \sin 9^{\circ} = y_1 = 9.19433 > y$; због тога ћемо помоћу разлика, — које одговарају томе интервалу, —

$$\alpha_1 = + 5077, \quad \beta = - 616.₅, \quad \gamma_1 = + 147 \quad \text{и} \quad \delta = - 53.₅,$$

добити по формули $(f)'$ величине $f_1, \frac{1}{2}f_2, \frac{1}{6}f_3, \frac{1}{24}f_4$ и њихове логаритме, овако:

$$f_1 = \alpha_1 - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{12}\gamma + \frac{1}{12}\delta = + 5393.₁ [3.73184]; \quad \frac{1}{6}f_3 = \frac{1}{6}(\gamma_1 - \frac{\delta}{2}) = + 29.₀ [1.462];$$

$$\frac{1}{2}f_2 = \frac{1}{2}(\beta - \frac{1}{2}\gamma_1 - \frac{1}{12}\delta) = - 342.₈ [2.5350_n]; \quad \frac{1}{24}f_4 = \frac{1}{24}\delta = - 2.₂ [0.34_n];$$

постепена пак приближења за x биће оваква:

$$x_1 = \frac{y - y_0}{f_1} = \frac{+4027}{+5333.1}; \lg x_1 = 3.60498 - 3.73184 = 9.87314$$

x	$\lg x$	$\lg x^2$	$\lg x^3$	$\lg x^4$	x_2	x_3	x_4
$x_1 = 0.7467$	9.8731	9.7462	9.619	9.49	+ 0.7467	+ 0.7467	+ 0.7467
$x_2 = 0.7800$	9.8921	9.7842	9.676	9.57	+ 354	+ 387	+ 390
$x_3 = 0.7831$	9.8938	<u>9.7876</u>	<u>9.681</u>	<u>9.57</u>	— 22	— 25	— 26
$x_4 = 0.7833$		8.8032 _n	7.730	6.61 _n	+ 1	+ 2	+ 2
		$\lg \frac{f_2}{2f_1}$	$\lg \frac{f_3}{6f_1}$	$\lg \frac{f_4}{24f_1}$	<u>0.7800</u>	<u>0.7831</u>	<u>0.7833</u>

Тражени угао M раван је дакле $8^\circ + 0^\circ.7833 = 8^\circ 47' 0''$.

31. Интерполовање по даним диференцијалним променама функције.

Када се саставља пространа таблица вредности неке функције $y = f(a + x)$ за најразличитије вредности аргумента x , онда се јавља питање, са каквим је баш интервалима i најбоље дати табличне вредности y ? У колико је i веће у толико ће таблице бити краће, али је зато отежана њихова употреба, због неопходне потребе узимања у рачун трећих, четвртих а може бити и виших разлика; ако се пак има у виду што је могуће простије интерполовање па се због тога узме толико мали интервал i , да би се увек ограничили само са првим разликама, — као што је то нпр. у логаритамским таблицама намењених за олакшање рачунања, — онда ће таблице изаћи сувише гломазне а то је, из много разлога, такође незгодно.

Ове се две супротности (могућа краткоћа таблице и простота њене употребе) најбоље задовољавају таквим интервалом i међу аргументима, за који су друге разлике још осетне, али се треће и четврте већ могу занемарити. Такве су скоро све таблице координата Сунца, Месеца, планета и звезда, које се дају у астрономским календарима: *Nautical Almanac*, *Connaissance des Temps*, *Berliner Astronomisches Jahrbuch* и др.

У том је случају интерполациону формулу

$$y = f(a + x) = y_0 + x f'(a) + \frac{x^2}{2} f''(a)$$

погодније представити у овом облику:

$$y = y_0 + x \cdot \Delta_{\frac{x}{2}}, \dots \dots \dots (i)$$

где множител

$$\Delta_{\frac{x}{2}} = f'(a) + \frac{x^2}{2} f''(a)$$

представља диференцијалну промену функције y , која (промена) одговара аргументу $(a + \frac{x}{2})$, јер је у опште $\frac{dy}{dx} = \Delta_x = f'(a) + x f''(a)$. Ето те се диференцијалне промене $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$, — које одговарају вредностима аргумента $a, a + 1, a + 2, \dots$ — и дају у напред споменутих астрономским таблицама наспрам вред-

ности $y_0, y_1, y_2 \dots$ тако, да се за сваку интервалну вредност x , — која се налази између $x=0$ и $x=1$, — множитељ $\Delta_{\frac{x}{2}}$ добија са потребном тачношћу овако:

$$\Delta_{\frac{x}{2}} = \Delta_0 + \frac{x}{2} \cdot (\Delta_1 - \Delta_0).$$

Помоћу првих и других разлика, са претпоставком $\beta = \beta_0 = \beta_1$, обрасци ће пак за Δ_0 и Δ_1 бити овакви:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 = f'(a) - f_1 &= \alpha_1 - \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha_{-1} + \alpha_1) \\ \Delta_1 = f'(a) + f''(a) = f_1 + f_2 &= \alpha_1 + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned} \right\} \dots (j)$$

Пример. У „Nautical Almanac“-у за 1885. год. на стр. 99. у ступцу под заглављем „деклинација Месеца“, — коју ћемо означити ради скраћења са δ , — налазимо:

15. Јуна	δ	Диф. пром. Δ за 10^m
у 6^h	+ $15^\circ 5' 35''.7$	— $68''.91$
„ 7	14 58 39.3	— 69.88
„ 8	14 51 37.2	— 70.83
„ 9	14 44 29.3	— 71.78

Да срачунамо пре свега сами, по формулама (j), овде показане диференцијалне промене Δ деклинације δ за 7^h и за 8^h :

α	β	Диф. пром. Δ за 1^h	Диф. пром. Δ за 10^m
6^h — $6' 56''.4$			
7 — $7' 2.1$	— $5''.7$	— $6' 59''.2_5$	— $1' 9''.88$
8 — $7' 7.9$	— 5.8	— $7' 5.0_0$	— $1' 10.83$

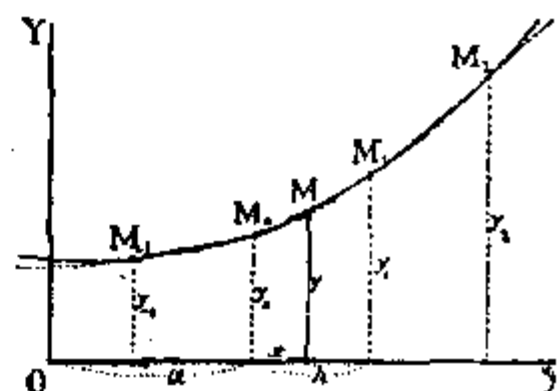
Да бисмо сад, на основу ових, срачунали величину δ , нпр. за $7^h 22^m$, треба да помножимо прираштај аргумента 22 са диференцијалном променом $\Delta_{\frac{x}{2}}$, која одговара моменту $7^h + \frac{1}{2} 22^m = 7^h 11^m$; пошто се пак мења сама величина Δ и то у нашем случају за $0''.95$ за 1 час, то ће бити:

$$\Delta_{\frac{x}{2}} = 69''.88 + 0''.95 \cdot \frac{11}{60} = 69''.88 + 0''.18 = 70''.06;$$

због тога је у $7^h 22^m$ деклинација $\delta = 14^\circ 58' 39''.3 - 7''.006 \times 22 = 14^\circ 56' 5''.2$.

32. Геометриско значење интерполовања.

Замена какве год функције $y = f(a + x)$ завршним бројем чланова реда (f) и одређивање коефицијената код разних степена од x у томе реду на основу неколико даних вредности $(x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0)$ и т. д. — у геометриском смислу означава то, да је на непрекидној кривој \curvearrowright (сл. 9.), — чија нам једначина $y = f(a + x)$ није позната, — дато само неколико тачака $M_{-1}, M_0, M_1 \dots$ и ми, провлачећи кроз њих другу алгебарску криву \curvearrowleft , допуштамо, да се обе оне скоро сливају на извесном простору међу даним тачкама. Одавде је потпуно јасна несигурност екстраполовања.



Сл. 9.

Ограничити се при нахођењу непознате величине функције y , само са првим табличним разликама α , у геометријском смислу значи, да лук криве међу два њеним суседним тачкама сматрамо за праву, т. ј. за тетиву, што је сувише грубо, међутим може да задовољи потребу само у случају незнатне кривине криве или пак у случају кад су на њој тачке сувише близу једна другој. Нахођене пак интервалних величина у интерполовањем са другим разликама, значи, да се повлачи кроз сваке три суседне тачке M_{-1} , M_0 и M_1 крива другог степена, а наиме парабола, и, да се она сматра као најближа непознатој нам кривој. Ово је већ много боље и даје у многим случајима потпуно довољну тачност.

Напоследку, диференцијалне промене Δ_0 , Δ_1 , које се дају у некојим таблицама, у геометријском смислу нису ништа друго до тангенси углова, које саставља оса X са тангентима криве у даним на њој тачкама M_0 и M_1 ; множитељ пак $\frac{\Delta_x}{2}$, који улази у интерполациону формулу (i), јесте тангенс угла између осе X и тангенте на параболу у средњој тачци међу даном тачком M_0 и траженом M_1 , или, што је у ствари исто, између осе X и тетиве $M_0 M_1$, паралелне са том тангентом.

33. Лагранжова формула.

Остаје нам још да расмотримо интерполовање даних бројних вредности $y_1, y_2, y_3, \dots, y_i, \dots, y_n$ неке функције $y = f(x)$, када интервали међу одговарајућим вредностима $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$ променљиве x нису једнаки међу собом т. ј. не иду један за другим у аритметичкој прогресији.

Тада се тражена вредност y за ма какву дану вредност x може представити у облику

$$y = \frac{F_1}{K_1} y_1 + \frac{F_2}{K_2} y_2 + \dots + \frac{F_i}{K_i} y_i + \dots + \frac{F_n}{K_n} y_n \dots \dots \dots (1)$$

где ће коефицијенти $\frac{F_1}{K_1}, \frac{F_2}{K_2}, \dots, \frac{F_i}{K_i}, \dots, \frac{F_n}{K_n}$, — на основу реченога у чл. 27, — неопходно бити целе функције од x и притом не више од n -тог ступња.

Кад расмотримо у тој суми (1.) ма који од коефицијената, нпр. $\frac{F_i}{K_i}$ код y_i , увидећемо, да ће се он при свима вредностима $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ променљиве x претворити у нулу, а при $x = x_i$ у јединицу, да би изашло $y = y_i$. Први ће од тих услова бити задовољен онда, кад је

$$F_i = (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_{i-1}) (x - x_{i+1}) \dots (x - x_n);$$

други пак онда када је

$$K_i = (x_i - x_1) (x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n);$$

због тога ће се тражена вредност y одредити средством њених посебних вредности: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ по овој *Лагранжовој* формули:

$$\left. \begin{aligned} y = & \frac{(x - x_2) (x - x_3) \dots (x - x_{n-1}) (x - x_n)}{(x_1 - x_2) (x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_{n-1}) (x_1 - x_n)} y_1 + \\ & + \frac{(x - x_1) (x - x_3) \dots (x - x_{n-1}) (x - x_n)}{(x_2 - x_1) (x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_{n-1}) (x_2 - x_n)} y_2 + \dots \\ \dots + & \frac{(x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_{n-2}) (x - x_n)}{(x_{n-1} - x_1) (x_{n-1} - x_2) \dots (x_{n-1} - x_{n-2}) (x_{n-1} - x_n)} y_{n-1} + \\ & + \frac{(x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_{n-2}) (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1) (x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-2}) (x_n - x_{n-1})} y_n \end{aligned} \right\} (2.)$$

Узмимо ради примера ове бројеве x са одговарајућим им $y = f(x)$:

$x_1 = 9$	$x_2 = 12$	$x_3 = 14$	$x_4 = 15$
$y_1 = 0.1943$	$y_2 = 0.3179$	$y_3 = 0.3837$	$y_4 = 0.4130$

Тражи се нпр., да се одавде нађе вредност y за $x = 12\frac{1}{3}$. Тада ће се у формули (2.) добити овакви коефицијенти код y_1, y_2, y_3, y_4 :

$$\frac{F_1}{K_1} = \frac{+ 1 \cdot - 5 \cdot - 8}{- 9 \cdot - 15 \cdot - 18} = - \frac{4}{243}, \quad \frac{F_2}{K_2} = \frac{+ 10 \cdot - 5 \cdot - 8}{+ 9 \cdot - 6 \cdot - 9} = + \frac{200}{243},$$

$$\frac{F_3}{K_3} = \frac{+ 10 \cdot + 1 \cdot - 8}{+ 15 \cdot + 6 \cdot - 3} = + \frac{72}{243}, \quad \frac{F_4}{K_4} = \frac{+ 10 \cdot + 1 \cdot - 5}{+ 18 \cdot + 9 \cdot + 3} = - \frac{25}{243},$$

а са њима изаћи ће:

$$243 y = - 4 \times 0.1943 + 200 \times 0.3179 + 72 \times 0.3837 - 25 \times 0.4130 = 80.104$$

$$y = 0.3296_3.$$

Бројеви y_1, y_2, y_3 и y_4 за овај пример нису ништа друго до логаритми синуса (са 4 децимале) углова $9^\circ, 12^\circ, 14^\circ, 15^\circ$ (в. пример у чл. 28.) повећани за 1; због тога и нађени интерполовањем број $(y - 1) = 9.3296_3$ за $x = 12\frac{1}{3}$ треба да буде раван $lg \sin 12^\circ 20' = 9.3296_0$, и он се, као што видимо, разликује од стварног само у петој децимали.

З а д а њ е:

1.) У следећој табlici преписане су из „Nautical Almanac“-а вредности за b , тако зване ширине Месеца:

9. Августа	y	0^h	$b = 4^\circ 51' 17''.4$
„	„	12	4 58 25.4
10.	„	0	5 1 32.0
„	„	12	5 0 40.4
11.	„	0	4 55 57.0

Одредити одавде највећу вредност b_m и одговарајући јој момент времена t_m . [Узев 12^h за јединицу за израз времена t по формули $(h)^1$, добићемо уопште: $b = 5^\circ 1' 32''.0 + 66''.70 \cdot t - 119''.24 \cdot t^2 + 0''.80 \cdot t^3 + 0''.13 \cdot t^4$; узевши пак производну $\frac{db}{dt}$ и изједначив је са нулом, — наћи ћемо $t_m = 0.2805 = 3^h 22^m.0$ (10. августа), а затим $b_m = 5^\circ 1' 41''.3$].

2.) Артиљеријски метак, у току 2, 4 и 6 секунда, после полета његова из оруђа, пролази пространство од $s_1 = 292.0$, $s_2 = 566.5$, $s_3 = 830.6$ сажњева.

Каква је његова почетна брзина? [Узев ради упрошћења интервал времена од 2° за јединицу, — добићемо по формули (h)¹: $s = 292.0 + 282.07 \cdot t - 8.75 \cdot t^2$ са.к. $= 1.18 \cdot f^2$; одатле пак $V_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)_{-1} = 151.6$ саж. $= 1601$ стопа у секунди].

3.) По табlici вредности δ , датој у чл. 31. одредити δ за $6^{\text{h}} 45^{\text{m}}.0$ помоћу датих тамо диференцијалних промена δ , затим пак одредити то исто δ двапут интерполујући на средину, користећи се том околношћу, што је дани момент раван $6^{\text{h}} + 30^{\text{m}} + 15^{\text{m}}$. [У оба случаја треба да се добије $\delta = 15^{\circ} 0' 23''.9$].

ГЛАВА V.

ОСНОВИ ТЕОРИЈЕ ВЕРОВАТНОСТИ.

34. Вероватност простого случајног догађаја.

Многи од догађаја, које посматрамо, зависе од околности и узрока, који или сасвим измичу испред наше пажње или су толико комплицирани те никако није могућно предвидети неопходно потребни резултат укупнога њиховог деловања. Не могући објаснити постанак таквих појава и факата, — зовемо их просто *случајним*. Приписујемо на пример само случајности, што бачена у вис монета, кад падне на под, лежи неки пут једном својом страном наниже а неки пут другом. На тај начин, у идеалној представи некога случајног догађаја, остаје само једно што се може подвргнути испитивању а то је, већа или мања могућност његова постанка, — већа или мања његова *вероватност*. Тако нпр. извући срећку, која добија, из лутријске вазе, у којој је свега 100 срећака, међу којима 10 које добијају, двапут је вероватније него из друге вазе, у којој на 100 свих срећака долазе 5 које добијају.

Сва слична резонувања оснивају се на представи *случајева* или *подједнако могућних догађаја*. Ако се при извесним околностима мора десити овај или онај од врло различитих догађаја и ако нема никаквог разлога очекивати појаву једнога од њих пре другог, онда су такви догађаји или случајеви подједнако могући. Тако нпр. средња се оцена релативне вероватности лутријске среће могла оснивати само на претпоставци, да је из лутријске вазе подједнако могућно извући сваку, тј. ма коју срећку.

Математичка вероватност случајног догађаја зове се однос броја подједнако могућних случајева, када се тај догађај може десити, према броју свију без разлике такође подједнако могућних случајева, када се он може и десити а тако исто и не десити. На пример, када се извлачи једна од 52 карте добро промешане, тада се представља 52 подједнако могућа случаја извући ову или ону карту; али ће од свију њих бити само 12 повољних да се извуче фигура (краљ, дама или пуб); због тога излази, да је вероватност извући фигуру равна $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$. Вероватност пак *супрошног догађаја* тј. извлачења прости карте, биће $\frac{52-12}{52} = 1 - \frac{3}{13}$.

Из добивене одредбе вероватности излази, да она треба увек да буде мања од јединице а када она постане равна јединици, онда је то већ *сигурност*.

Одредимо још, ради примера, колико је велика вероватност, да ће сума откривених поена бачених на сто двеју коштаних коцкица са натписима на њи-

ховим странама 1, 2, 3, 4, 5 и 6 — бити равна 8? Од свих 36 комбинација од шест страна једне коцке и шест друге, — могу бити повољне за жељени догађај само ових 5:

Откривени број поена на првој коцки: $2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid$
 „ „ „ „ другој „ $6 \mid 5 \mid 4 \mid 3 \mid 2 \mid$

према томе је тражена вероватност равна $\frac{5}{36}$.

Одређујући на исти начин вероватност свију других могућних сума поена, — добићемо:

за суме: $2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12$
 бројитељи вероватности: $1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1$

Код случаја са три коцке, треба комбиновати свих 36 могућних случајева првих двеју коцки са 6 случајева, могућних за трећу коцку; тада ће се показати, да ће бројитељи вероватности за разне суме, — које се могу добити на трима коцкама и које имају општи именитељ $6^3 = 216$, — бити:

за суме: $3 \text{ и } 18, 4 \text{ и } 17, 5 \text{ и } 16, 6 \text{ и } 15, 7 \text{ и } 14, 8 \text{ и } 13, 9 \text{ и } 12, 10 \text{ и } 11,$
 бројитељи: $1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 21 \quad 25 \quad 27$

35. Вероватност сложеног догађаја.

Случајни догађај, састављен из појаве од неколико других простијих, зове се *сложени* догађај. Тако се на пример може расматрати као сложени догађај појава фигурне карте из сваког од три штоса одакле се извлачи по једна карта.

Нека је уопште неки сложени догађај А састављен од s простих догађаја: a_1, a_2, \dots, a_s , чије су вероватности:

$$p_1 = \frac{m_1}{M_1}, \quad p_2 = \frac{m_2}{M_2}, \quad \dots, \quad p_s = \frac{m_s}{M_s},$$

где M_1, M_2, \dots, M_s представљају све подједнако могуће случаје, који могу бити при појави првог, другог и осталих догађаја a_1, a_2, \dots, a_s ; бројеви пак m_1, m_2, \dots, m_s представљају бројеве подједнако могућних случајева, повољних за њихову појаву. Када се сви ови прости догађаји дешавају једновремено или заједно и притом независно један од другог, то се сваки од случајева M_1 може са једнаком могућношћу комбиновати са ма којим од случајева M_2, M_3, \dots, M_s , те ће због тога број N свих подједнако могућних случајева бити за сложени догађај А овакав $N = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot \dots \cdot M_s$. Али пошто је у сложену догађају потребно, да се деси сваки од простих догађаја, из којих је он састављен, затим, пошто се сваки од случајева m_1 , повољних за a_1 , може, са једнаком могућношћу, комбиновати са ма којим од случајева m_2, m_3, \dots, m_s , повољних за остале, — то ће општи број случајева повољних за А, бити: $n = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_s$, због тога ће вероватност догађаја А бити:

$$P = \frac{n}{N} = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_s}{M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot \dots \cdot M_s} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_s;$$

тј. вероватност сложеног догађаја равна је производу из вероватности простих догађаја, из којих је он састављен.

У овој, тек што доказаној, основној теорѣми теорије вероватности ипак се претпоставља, да прости догађаји, из којих је састављен сложени, не утичу никојим начином један на другог. Ако ли пак постоји какав утицај, када се под извесним околностима дешава некакав догађај, онда се такав утицај мора узети у обзир. Тако нпр. кад се из потпуног штоса карата извлачи једна за другом по једна карта и сваки се пут карта враћа натраг у штос, то ће вероватност, да се три пут узастопце извуче пуб — на основу предње теореме — бити равна $(\frac{1}{13})^3 = \frac{1}{2197}$. Али ако се извучени пуб не враћа натраг у штос, то ће при другом извлачењу вероватност, да се опет извуче, бити сад не $\frac{1}{13}$ већ $\frac{3}{51} = \frac{1}{17}$; при трећем пак извлачењу она ће бити $\frac{2}{50} = \frac{1}{25}$ па због тога ће вероватност извлачења пуба у сва три узастопна извлачења бити $\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{5525}$.

36. Закон великих бројева.

Ако на огледу будемо пратили појаву некога случајног догађаја, који се појављује много пута под истим околностима, то ћемо запазити, да се однос броја случајева, када се тај догађај стварно дешава, према општем броју запажених случајева све више и више ближи теорној вероватности разматраног догађаја, у колико је тај општи број већи.

Ради боље очигледности, замислимо затворени суд, који у себи садржи N куглица, које се међу собом разликују само по боји, али су по величини и тежини потпуно једнаке; нека их је n_1 црвене боје, n_2 — жуте, n_3 — плаве и т. д. тако, да теорна вероватност, да се из суда извуче баш црвена куглица, — буде $p_1 = \frac{n_1}{N}$, жута — $p_2 = \frac{n_2}{N}$, плава — $\frac{n_3}{N}$ и т. д. Ако сад у самој ствари извршимо велики број вађења по једне куглице из тога суда, враћајући сваки пут извађену куглицу натраг у суд и мешајући их понова, то ће се после неког знатног броја S таквих вађења, показати, да је се црвена куглица појавила s_1 пута, жута s_2 пута, плава s_3 пута и т. д. Понављајући такве огледе све више и више и одређујући увек односе запажених бројева $s_1, s_2, s_3 \dots$ према општем броју извлачења, нашли бисмо, да би се односи

$$\frac{s_1}{S}, \frac{s_2}{S}, \frac{s_3}{S} \dots$$

све више и више приближавали одговарајућим вероватностима $p_1, p_2, p_3 \dots$ а при врло великом броју S ти би се односи могли од њих разликовати колико год желимо мало.

Ова особима великога броја огледа, коју је први пут теоретички доказао *Јаков Бернули* и који је *Паусон* назвао *законом великих бројева*, оправдава се у природи при понављању случајних догађаја и појава свију врста. На основу те особине и омогућена је примена теорије вероватности у многим питањима природних наука, као и у практичном животу; али то вреди само у том случају, ако се не разматра само некакав засебан факт случајног карактера, већ довољно велики број с њим једнородних факата.

Да покажемо потврду закона великих бројева примером.

Као што је познато, логаритми бројева у таблицама логаритама од 5 децимала тачни су само у границама од $+0.5$ и -0.5 њихове последње децимале. При томе се може сматрати за подједнако вероватне ових 10 случајева: (1.) када се грешка у последњој децимали садржи између -0.5 и -0.4 , (2.) између -0.4 и -0.3 , (3.) између -0.3 и -0.2 , (9.) између $+0.3$ и $+0.4$

и најзад (10.) између $+0.4$ и $+0.5$. Да би се видело како се теорна вероватност свакога од тих случајева, — која је равна $\frac{s}{S} = \frac{1}{10}$, — оправдава у самој ствари, — написаћемо стварне грешке логаритама од 5 децимала, — које ћемо добити сравњењем њиховим са логаритмима од 7 децимала, — и то прво за 50 бројева од 200 до 249, затим за 100 бројева од 200 до 299 и најзад за 200 бројева од 200 до 399.

Тада ће у свакој од тих група изаћи у ствари овакви бројеви s разних грешака

Грешке		(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)
при $S = 50$	$s =$	3	4	6	4	3	5	4	7	6	8
	$100\frac{s}{S} =$	6	8	12	8	6	10	8	14	12	16
при $S = 100$	$s =$	7	10	13	10	10	11	7	11	10	11
	$100\frac{s}{S} =$	7	10	13	10	10	11	7	11	10	11
при $S = 200$	$s =$	17	19	22	22	19	22	19	21	22	17
	$100\frac{s}{S} =$	8.5	9.5	11.0	11.0	9.5	11.5	9.5	10.5	11	8.5

Овде је очигледно све боље и боље приближење односа $\frac{s}{S}$ ка теорној вероватности $\frac{1}{10}$, са повећањем броја S .

37. Вероватност грешака у суми од неколико табличних бројева.

У чл. 19. главе II напоменули смо, да се грешке, које произлазе од употребе логаритамских таблица извесне тачности, не нагомилавају сразмерно броју потраживања по таблицама већ у знатно мањој мери. Да расмотримо сад тај случај нешто изближе; али ради упрошћења и очигледности, допустићемо, да у логаритму некога броја, преписаног из таблица, можемо очекивати, са подједнаком вероватности ($\frac{1}{5}$), само један од следећих пет облика за грешку Δ у последњој децимали:

$$-0.4, -0.2, 0.0, +0.2 \text{ и } +0.4$$

Поступајући исто онако као у чл. 34, — где су одређиване вероватности разних сума поена при већем броју бацања коцки, — лако ћемо добити вероватности p_{Δ} разних грешака Δ , које се могу десити у алгебарској суми од два, три, четири и уопште n разних логаритама; на име бројитељи s и именитељи $S = 5^n$ ових вероватности биће:

Грешке Δ	Бројитељи s													Имен. S
	0	±0.2	±0.4	±0.6	±0.8	±1.0	±1.2	±1.4	±1.6	±1.8	±2.0	±2.2	±2.4	
при $n = 2$	5	4	3	2	1									25
„ $n = 3$	19	18	15	10	6	3	1							125
„ $n = 4$	85	80	68	52	35	20	10	4	1					625
„ $n = 5$	381	365	320	255	185	121	70	35	15	5	1			3125
„ $n = 6$	1751	1686	1506	1246	951	666	426	246	126	56	21	6	1	15625

На тај начин видимо, да са увећањем броја n логаритама, који се сабирају, вероватност крупних грешака Δ бива све ништавнија и ништавнија у сравњењу са вероватностима грешака најближих нули.

Пошто су позитивне и негативне грешке Δ једне и исте бројне вредности подједнако могуће, то је природније и најбоље оцењивати тачност сваке суме од неколико логаритама аритметичком средином квадрата свију могућних у њој грешака Δ , тј. величином $\epsilon_n^2 = \frac{\sum \Delta^2}{S}$, која, — као што се је лако убедити из напред наведених бројева s , — излази на име оваква:

$$\epsilon_1^2 = 2 \cdot \frac{(0.4)^2 + (0.2)^2}{5} = 0.08; \quad \epsilon_2^2 = 2 \cdot \frac{4(0.2)^2 + 3(0.4)^2 + 2(0.6)^2 + 1(0.8)^2}{25} = 0.16$$

$$= 2 \epsilon_1^2; \quad \epsilon_3^2 = 0.24 = 3 \epsilon_1^2; \quad \epsilon_4^2 = 4 \epsilon_1^2 \text{ и т. д.}; \quad \text{тако да ће у опште бити } \epsilon_n^2 = n \cdot \epsilon_1^2$$

тј. величина ϵ_n , која се зове *средња квадратна грешка* или цросто *средња грешка*, расте сразмерно само са квадратним кароном из броја n логаритама који се сабирају.

Што је овде речено о грешкама логаритамских таблица, вреди, разуме се, и за све друге таблице у којима се ма какве бројне вредности дају са тачношћу до половине јединице последње цифре.

Сад ћемо узети у обзир и то, да случајна грешка Δ у последњој децимали свакога табличног броја у границама од -0.5 до $+0.5$ има у самој ствари не само пет облика, које смо ми напред допустили, већ безброј много. Стога би, строго говорећи, требало поделити јединицу последње децимале на бескрајно мале интервале $d\Delta$. Сви закључци, које смо учинили, остаће разуме се, у ствари исти, измениће се само средња квадратна грешка ϵ_1 , за коју ће се добити:

$$\epsilon_1^2 = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \Delta^2 d\Delta = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} = 0.0833 \dots,$$

што се тек нешто мало разликује (за $\frac{1}{24}$ део) од броја 0.08, који смо били нашли.

На тај ће начин с потпуном тачношћу бити:

$$\epsilon_1^2 = \frac{1}{3} (0.5)^2, \quad \epsilon_2^2 = \frac{2}{3} (0.5)^2, \quad \epsilon_3^2 = \frac{3}{3} (0.5)^2, \quad \epsilon_4^2 = \frac{4}{3} (0.5)^2 \dots, \quad \epsilon_n^2 = \frac{n}{3} (0.5)^2.$$

Задаће:

1. На кугли, баченој на под, обележимо тачку њенога додира са подом. По другом њеном паду, обежићемо већ другу тачку на њој. Каква је вероватност, да угао међу овим двема тачкама, гледан из центра кугле, буде мањи од неке задане величине Δ ?

Ако замислимо на површини кугле мали круг, који је описан из прве тачке угловним полупречником Δ , то ће број подједнако могућних случајева, повољних за тражени догађај, бити сразмеран површини сегмента куглиног, који је ограничен тим кругом, то јест $2\pi R^2 (1 - \cos \frac{\Delta}{2}) = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\Delta}{2}$, где R означава полупречник куглин. Број пак свих случајева, како повољних, тако и неповољних за положај друге тачке, биће сразмеран са целокупном површином куглином $4\pi R^2$. Због тога је тражена вероватност равна $\sin^2 \frac{\Delta}{2}$. Кад је $\Delta = 90^\circ$ она излази равна $\frac{1}{2}$ а кад је $\Delta = 180^\circ$ она се претвара у јединицу т. ј. у сигурност.

2.) Баца се округла монета пречника d на повећи сто, чија је површина подељена на квадрате, правим линијама на растојању a једна од друге. Каква је вероватност, да ће монета пасти у ма који од квадрата а да не додирне праве линије, које га ограничавају?

Када би на површини стола био само један ред паралелних линија на растојању a једна од друге, онда би вероватност недодиривања монете ни са једном од њих била, очевидно, равна $\frac{a-d}{a} = 1 - \frac{d}{a}$; догађај пак, чија се вероватност p тражи, распада се на два таква, независна један од другог; због тога је $p = \left(1 - \frac{d}{a}\right)^2$.



ГЛАВА VI.

ТЕОРИЈА СЛУЧАЈНИХ ГРЕШАКА ПОСМАТРАЊА.

38. Сталне и случајне грешке посматрања.

Мерења, на којима заснивају своје закључке како астрономија, тако и друге опсервационе науке, доводе увек до резултата више или мање недовољно тачних, услед разних узрока, који се крију 1.) у недостацима инструмената и метода, који се употребљују за мерења, 2.) у несавршенству чула самога посматрача и 3.) у неповољности разних спољних околности, под којима се врше мерења. Због тога је неопходно потребно дати себи јасан рачун о томе, како све то треба да утиче на резултате, који се изводе из тих мерења.

Некоји од напред споменутих узрока могу бити подвргнути испитивању и тако добро изучени, да се њихов утицај у сваком даном случају може предвидети и узети у рачун. *Грешке*, које из таквих узрока произлазе, зову се *сталне* или *систематске*.

Али се закон делања огромнога броја других узрока никако не може открити. Тако на пр. за око, које није наоружано дурбином, две тачке, које се виде под углом око $1'$, оне већ изгледају као да се сливају уједно; због тога су, при најпажљивијем визирању на какав предмет помоћу гледаче, могуће најразличитије грешке од $-60''$ до $+60''$ а постанак ове или оне грешке у тим границама зависи од чисте случајности. У ту исту врсту узрока, који не подлеже изучавању, увршћују се и колебања ликова предмета услед немирног стања ваздуха, као и многи други. Скуп свију тих узрока порађа грешке потпуно случајног карактера, час позитивне, час негативне, понекад врло мале а каткад и знатне, али непрелазећи ипак преко извесних граница, карактеристичних за дану врсту посматрања. Такве се грешке зову *случајне*. О њима се може резоновати само на основу теорије вероватности и само се тим начином може истраживати највероватнији резултат из многих резултата мерења, несугласних међу собом, као и одређивати потребни ступањ вере у тај највероватнији резултат.

Уосталом подела грешака посматрања на сталне и случајне остаје ипак донекле условна, зато што догод се закон делања некаквога узрока, који квари резултате мерења, не испита, — не остаје нам ништа друго него да грешке, које отуд произлазе сматрамо као случајне. Узмимо на пример, да смо мерили какав угао помоћу транспортера, израђеног врло грубо, тако да му степенска подела на свима његовим деловима није строго подједнака. Мерећи угао помоћу разних делова тога транспортера па добијајући при томе различите резултате, ми морамо сматрати запажене грешке за случајне. Али, ако се изуче и тачно испитају грешке целе поделе транспортера, онда ће све, што се пре тога приписивало случајности, постати потпуно правилно и разумљиво.

39. Основна особина случајних грешака.

Да бисмо поставили на математичку основу закључке о случајним грешкама, својствених ма каквој врсти мерења, треба увек подразумевати бескрајно велики број S мерења, извршених под једнако повољним условима и са једнаком брижљивошћу, тако, да се сви поједини резултати ових мерења могу сматрати као *подједнако повољни*. Поделимо сада на групе све случајне грешке, — које при томе могу да се десе, — по њиховим бројним вредностима Δ , које се разликују једна од друге за тако малу величину $d\Delta$, да се разне грешке из једне и исте групе, т. ј. које се садрже у границама $\Delta - \frac{d\Delta}{2}$ и $\Delta + \frac{d\Delta}{2}$, могу сматрати за равне Δ ; означимо затим са s_1 број таквих грешака, које су по величини равне Δ_1 , са s_2 — број таквих, које су равне Δ_2 и т. д. Тада ће нам — по закону великих бројева, — односи $\frac{s_1}{S}, \frac{s_2}{S}, \frac{s_3}{S} \dots$ изражавати вероватности, да ће се, у произвољно узетом мерењу, садржати грешка $\pm \Delta_1$, или $\pm \Delta_2$, или $\pm \Delta_3$ и т. д.

Пошто пак бројеви $s_1, s_2, s_3 \dots$ за разне вредности $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots$ могу бити различити, али, пошто у исто доба они треба, очевидно, да буду и сразмерни малом интервалу $d\Delta$ који смо изабрали и за колико се разликују међу собом поступне групе грешака, — то ће се уопште вероватност p_{Δ} , да ће се грешка некога мерења садржати у границама између $\Delta - \frac{d\Delta}{2}$ и $\Delta + \frac{d\Delta}{2}$ изразити овако:

$$p_{\Delta} = f(\Delta) \cdot d\Delta.$$

Ма какав био узрок постанка случајних грешака, — немамо никаквога разлога сматрати, да ће неки од тих узрока делати чешће у једну страну, него ли у другу. Због тога је *позитивна грешка какве било величине ($+\Delta$) толико исто вероватна, колико и њој равна негативна ($-\Delta$)*; т. ј. $p_{-\Delta} = p_{+\Delta}$. Ово је општа основна особина случајних грешака, која показује, да функција $f(\Delta)$ треба да буде *парна*.

Директна ће последица ове особине бити та, што *однос алгебарске суме ма којих непарних степена свију грешака многобројног низа посматрања према њиховом општем броју S треба да се приближава нули са увећањем броја S* .

И заиста, делећи све грешке на напред речене групе, имаћемо:

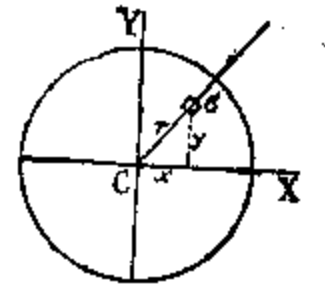
$$\frac{\sum_{\Delta} \Delta^n}{S} = \frac{s_1 \Delta_1^n + s_2 \Delta_2^n + s_3 \Delta_3^n + \dots}{S} = p_1 \Delta_1^n + p_2 \Delta_2^n + p_3 \Delta_3^n + \dots;$$

али пошто ће у овој суми свакој вредности Δ са знаком $+$ одговарати таква иста вредност Δ са знаком $-$, и, пошто је $p_{-\Delta} = p_{+\Delta}$, то при броју S и непарном броју n , мора бити:

$$\frac{\sum \Delta^n}{S} = 0 \dots \dots \dots (к)$$

40. Израз вероватности случајне грешке.

Алгебарски се облик $f(\Delta)$ одређује најпростије овим резонавањем: Замислимо, да се гађа из револвера у означену тачку С (сл. 10.) на мети. Ако уобразимо из С два, ма каква узајамно управна правца СХ и СУ, то ће се вероватност одступања поготка, од првог правца за величину x и од другог за величину y , изразити том истом функцијом $f(\Delta)$ на овај начин:



сл. 10.

$$p_x = f(x) \cdot dx \quad \text{и} \quad p_y = f(y) \cdot dy;$$

пошто пак оба ова одступања треба сматрати за независне један од другога*), то ће вероватност укупног њиховог постајања, — тј. да тачне погоди у бесконачно малу површину $\sigma = dx \cdot dy$, са координатама x и y , — бити, на основу чл. 35. гл. V.,

$$p_\sigma = p_x \cdot p_y = f(x) \cdot f(y) \cdot \sigma.$$

Ако бисмо пак за правац једне координатне осе узели праву С σ , добили бисмо, као координате за површину σ , ове вредности: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и θ , и тада би се та иста вероватност p_σ изразила овако:

$$p_\sigma = p_0 \cdot p_r = f(0) \cdot f(r) \cdot \sigma; \dots \dots \dots (1)$$

па због тога треба да буде:

$$f(x) \cdot f(y) = f(0) \cdot f(r) \quad \text{или} \quad \lg f(x) + \lg f(y) = \lg f(0) + \lg f(r).$$

Овом се једначином и одређује функција f . Јер диференцирајући је прво по x а затим по y , добићемо:

$$\frac{d \lg f(x)}{dx} = \frac{d \lg f(r)}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} = \frac{d \lg f(r)}{dr} \cdot \frac{x}{r} \quad \text{и} \quad \frac{d \lg f(y)}{dy} = \frac{d \lg f(r)}{dr} \cdot \frac{y}{r}, \quad \text{тј.} \quad \frac{d \lg f(x)}{x \cdot dx} = \frac{d \lg f(y)}{y \cdot dy} = \frac{d \lg f(r)}{r \cdot dr} = - \frac{1}{\varepsilon^2}$$

где $-\frac{1}{\varepsilon^2}$ означава неку константну количину, свакако негативну, јер се $f(x)$ са повећавањем променљиве x мора смањивати.

Даље излази:

$$d \lg f(x) = - \frac{x \cdot dx}{\varepsilon^2}, \quad \lg f(x) = \lg K - \frac{x^2}{2\varepsilon^2}$$

и напоследку:

$$f(x) = K \cdot e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}} \dots \dots \dots (2)$$

Константна количина K , у коју се претвара $f(x)$, кад је $x=0$, лако се одређује на овај начин: Изразивши елементарну површину σ са поларним координатама r и θ (сл. 10.), добићемо вероватност да се у њу погоди — на основу (1.) и (2.) — у облику

$$p_\sigma = K^2 \cdot e^{-\frac{r^2}{\varepsilon^2}} \cdot dr \cdot r \cdot d\theta;$$

*) I. Bertrand (Calcul des probabilités 1889. стр. 29.) а тако исто и H. Poincaré (Calcul des probabilités 1896. стр. 20.) не деле то мишљење.

интеграл пак тога израза од $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$ и од $r = 0$ до $r = \infty$ треба да буде раван јединици, јер се вероватност, да се погоди у мету бескрајно великих димензија, претвара у сигурност.

Према томе треба да буде:

$$1 = 2\pi K^2 \cdot \varepsilon^2 \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2\varepsilon^2}} d\left(\frac{r^2}{2\varepsilon^2}\right) = 2\pi K^2 \cdot \varepsilon^2 \left[-e^{-\frac{r^2}{2\varepsilon^2}} \right]_0^\infty = 2\pi K^2 \varepsilon^2,$$

откуд

$$K = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}$$

Уопште пак биће $f(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$ па због тога вероватност p_Δ , — да се учини, при ма каквој врсти мерења, случајна грешка Δ , која се налази у уским границама између $\Delta - \frac{d\Delta}{2}$ и $\Delta + \frac{d\Delta}{2}$, — треба да буде изражена овако:

$$p_\Delta = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\Delta^2}{2\varepsilon^2}} \frac{d\Delta}{\varepsilon} \dots \dots \dots (1)$$

41. Највероватнија вредност мерене количине.

Када се за одређивање какве количине x врши доста велики број s подједнако повољних мерења и када се отуд добију више или мање различите једна од друге величине $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s$, то ће се грешке свих ових посебних резултата, изразити овако:

$$\Delta_1 = a_1 - x, \quad \Delta_2 = a_2 - x, \quad \dots \dots \dots \Delta_s = a_s - x, \quad \dots (3)$$

а ако претпостављамо да су оне само случајне, онда ће вероватности њихове, на основу формуле (1), бити:

$$p_1 = \frac{d\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2} \Delta_1^2}, \quad p_2 = \frac{d\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2} \Delta_2^2}, \quad \dots \dots \dots p_s = \frac{d\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2} \Delta_s^2}$$

Али се појава ма какве грешке у једном посебном од тих мерења може сматрати као прост догађај, који нема никаквог утицаја на остала мерења; стога ће вероватност укупног постанка целе системе напред споменутих грешака у низу од s мерења, као сложеног догађаја, — бити

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_s = \left(\frac{d\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\right)^s \cdot \frac{1}{\varepsilon^s} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_s^2)} \quad (4)$$

Не знајући истиниту величину x , можемо чинити о њој врло различите претпоставке, при чему ће нам свака од њих дати потпуно одређене величине грешака: $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$ и довешће нас до неке одређене величине вероватности P . Оне претпоставке о вредностима за x , за које би грешке биле велике, имаће сразмерно мале вероватности P , па због тога оне треба да буду одба-

чене, а најбоља претпоставка за величину x биће она, за коју \bar{P} испадне највећа тј. за коју сума $\Sigma \Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_s^2$, која улази у образац (4), испадне најмања, а за то је неопходно потребно да буде:

$$\frac{d\Sigma \Delta^2}{dx} = \Delta_1 \cdot \frac{d\Delta_1}{dx} + \Delta_2 \cdot \frac{d\Delta_2}{dx} + \dots + \Delta_s \cdot \frac{d\Delta_s}{dx} = 0$$

или
$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_s = 0 \dots \dots \dots (5)$$

заменујући овде величине $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$ са њиховим вредностима из (3), добићемо:

$$(a_1 - x) + (a_2 - x) + \dots + (a_s - x) = 0,$$

а одакле
$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_s}{s}; \dots \dots \dots (6)$$

тј. највероватнија вредност мерене количине x јесте аритметичка средина из свих посебних подједнако повољних резултата мерења.

Знаменити Гаус, који је први поставио рационалну теорију случајних грешака са свима њеним последицама и практичким применама, примио је ово правило аритметичке средине за основни постулат и већ из њега изводио образац (1) за вероватност грешке ма какве величине Δ .

42. Крива и таблица вероватности случајних грешака.

Константна величина ϵ , од које зависи, — као што то показује формула (1), — степен смањивања вероватности p_Δ по мери увеличавања грешке Δ , у разним врстама посматрања различита је и мора бити одређена само за свако од тих посматрања посебице. А образац (4) за вероватност P укупног постанка дане системе грешака $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$, у каквоме низу од s подједнако повољних мерења, показује наиме, да ће најповољнија за овај низ величина ϵ бити таква, за коју вероватност P постаје максимална, тј. за коју је

$$\frac{dP}{d\epsilon} = \left(\frac{d\Delta}{\sqrt{2\pi}} \right)^s \left(\frac{\Sigma \Delta^2}{\epsilon^{s+3}} e^{-\frac{1}{2\epsilon^2} \cdot \Sigma \Delta^2} - \frac{s}{\epsilon^{s+1}} \cdot e^{-\frac{1}{2\epsilon^2} \cdot \Sigma \Delta^2} \right) = 0;$$

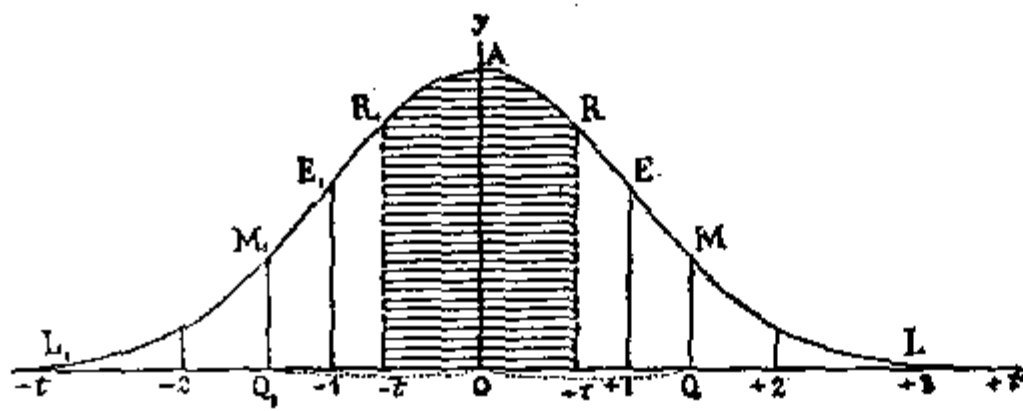
одакле
$$\epsilon^2 = \frac{\Sigma \Delta^2}{s} = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \dots + \Delta_s^2}{s}; \dots (m)$$

тако да је ϵ^2 средње из квадрата свих грешака разматраног низа s посматрања. Зато се ϵ и зове *средња квадратна грешка* или, краткоће ради, просто *средња грешка*. Она служи као природна мера за случајне грешке дане врсте посматрања и помоћу ње се потпуно карактерише тачност њихова, јер знајући њу, знаћемо вероватности грешака какве год било величине.

Кад изразимо, на основу тек што реченога, сваку грешку Δ њеним односом према средњој ϵ , тј. бројем $t = \frac{\Delta}{\epsilon}$, добићемо из формуле (1) за вероватност p_t , — да ће се учинити случајна грешка, која се налази у врло уским границама између $t - \frac{dt}{2}$ и $t + \frac{dt}{2}$, — овај израз:

$$p_t = y_t dt, \text{ где је } y_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} t^2} \dots \dots \dots (l')$$

Величине y_t , са којима су сразмерне вероватности p_t , лако се срачунавају за разне бројеве t и дате су код нас на крају књиге у табlici 2. Узев пак



бројеве t за апсцисе а у за ординате, добићемо криву $L M E A E_1 M_1 L_1$ (сл. 11), која очигледно представља закон смањивања вероватности случајних грешака са увећавањем њиховим у једну или другу страну од нуле. Она се приближава ка апсцисној оси истина осимптотички,

али врло брзо, тако да се већ при $t = \pm 3$ скоро сасвим слива са њоме (вероватности грешака постају потпуно ништавне). Исто тако није се тешко убедити, да испупчење њено прелази у угнуће у двама тачкама прегипа E и E_1 , које одговарају вредностима $t = \pm 1$.

Заиста,
$$y_t' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{1}{2} t^2},$$

$$y_t'' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-\frac{1}{2} t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t^2} (t^2 - 1),$$

за тачке прегипа

$$y_t'' = 0, \text{ т. ј. } t^2 - 1 = 0; t = \pm 1.$$

Одредимо сада дефинитивну вероватност $P(t)$, да грешка учињена у неком посебном посматрању, неће превазићи величину $\pm t$, тј. да она неће изићи из граница $+t$ и $-t$. Очевидно је, да ради тога треба узети суму вероватности p_t за све могуће величине t , које се налазе између даних; по томе се добија:

$$P(t) = \int_{-t}^{+t} y_t \cdot dt = 2 \int_0^t y_t \cdot dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2} t^2} \cdot dt. \dots \dots (n)$$

Интеграл, који овде улази, изражава собом површину криве вероватности, између ордината MQ и M_1Q_1 , које одговарају апсцисама $+t$ и $-t$. Он се може срачунати развијањем подинтегралне функције у свршени ред, уређен по степенима; али се још простије добијају његове бројне величине, за разне вредности t , по методи квадратура, тј. простим сукцесивним сумирањем величина $\frac{1}{2} (y_0 + y_1) dt$, $\frac{1}{2} (y_1 + y_2) dt$ и т. д. при чему је, за интервал dt између сукцесивних ордината y_0, y_1, y_2 и т. д., довољно узети $dt = 0.1$. Тим су најмачиниом и добивене величине $P(t)$, које су дате у табlici 2. упоредно с величинама y_t .

Треба запазити овде још и то, да је са потпуном строгости $P(t) = 1$ при $t = \infty$; стога из формуле (n) произлази између осталог и ова вредност одређенога интеграла:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \text{ или пак } \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \dots \dots (1)$$

Помоћу таблице вероватности $P(t)$ лако је одредити, колико треба да буде грешака, које не превазилазе дану величину $\pm \delta$, у једноме низу од s подједнако повољних посматрања, чија је средња грешка равна ϵ . Ради тога треба само наћи, по аргументу $t = \frac{\delta}{\epsilon}$, одговарајућу му вероватност $P(t)$ и помножити је са s . Тако се на пр. из наше таблице 2. одмах види, да у низу од 1000 посматрања треба да се деси:

око 383 грешке по бројној вредности мањих од $\frac{1}{2} \epsilon$ и 617 већих од $\frac{1}{2} \epsilon$
„ 683 „ „ „ „ „ „ „ „ „ 317 „ „ „ „ „ „ „ „ „ ϵ
„ 954 „ „ „ „ „ „ „ „ „ 2 ϵ „ 46 „ „ „ „ „ „ „ „ „ 2 ϵ
„ 997 „ „ „ „ „ „ „ „ „ 3 ϵ „ 3 „ „ „ „ „ „ „ „ „ 3 ϵ

и да је скоро сасвим невероватно, да ће се десити макар и једна грешка изнад $3\frac{1}{2} \epsilon$.

Међу разноврсним грешкама сваке врсте посматрања интересантија је од осталих и значајна она грешка ρ , чија је вероватност $P(t) = P\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right) = \frac{1}{2}$ јер број свих грешака, бројно мањих од те ρ , треба да буде приближно раван броју грешака, већих од ρ . Таква се грешка ρ зове *вероватна*. Њој одговарајуће ординате R и R_1 на кривој вероватности (сл. 11), одвајају шрафирану површину, која је тачно упола мања од целе површине криве $LMAM_1L_1$. Пошто се из таблице 2. види, да је $P(t) = 0.500$ за аргумент $t = \frac{\rho}{\epsilon} = 0.674$, то је:

$$\rho = 0.674 \epsilon = \frac{2}{3} \epsilon \text{ (приближно) } \dots \dots \dots (m')$$

У доста знатном низу извршених мерења, величина се вероватне грешке може наћи и на овај, макар и груби начин, али који је међутим очигледан и директан и који потиче из саме њене дефиниције: треба само од свега броја s грешака данога низа издвојити редом $\frac{s}{2}$ грешака најближих нули по својој бројној вредности, тада ће грешка, која стоји на граници између издвојених најмањих и осталих $\frac{s}{2}$ највећих, и бити довољно приближна вероватној.

43. Потврда теорије случајних грешака из огледа.

Сви закључци о релативном броју разних грешака у ма каквом низу подједнако повољних посматрања, које смо извели чисто теорним путем, потврђују се исто тако и из огледа, када је извршени низ посматрања доста многобројан. Исто се тако добро оправдавају ови теориски изводи и при разматрању природних појава разне врсте, када одступање њихово од извесне норме потиче само из случајних узрока. Метеорологија и статистика даје за то многобројне примере.

а.) Тако например, раст зрелог младића некога предела и народности зависи од многих околности чисто случајног карактера; због тога и одступања његова од средње норме не треба много да се разликују од закона случајних грешака, који смо извели. Да бисмо се убедили у томе, узмимо резултате измерене величине раста 14800 Малоруса од 20 година старости при рекрутовању 1875 године*). Излази, да на 1000 људи долазе наине следећи брејеви s људи разнога раста m (у вершковима**):

*) Военно-статистическое обозрение Петербургскаго военного округа.

***) 1 вершок = 0.04445 метра.

$m <$	34	34—35	35—36	36—37	37—38	38—39	39—40	40—41	$>$	41
s	11	46	118	244	269	197	88	23		4

тако, да је средњи раст m_0 свих тих људи био

$$m_0 = \frac{\sum sm}{\sum s} = \frac{\sum sm}{1000} = 37.3 \text{ верш. (= 1.66 мет.)}$$

средње пак квадратно одступање ϵ , од овога, било је:

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\sum s (m - m_0)^2}{1000}} = \pm 1.40 \text{ верш. (= } \pm 0.06^m \text{)}$$

Вероватност, да раст некога човека одступа од m_0 у негативну страну не више него за величину Δ , теорно ће се изразити са $\frac{1}{2} P\left(\frac{\Delta}{\epsilon}\right)$ а таква ће исто бити и вероватност, да раст његов не превазиђе m_0 више него за величину Δ . На тај ћемо начин наћи из таблице 2. следеће теорне бројеве s' људи свих напред показаних група:

Раст m	34	35	36	37	38	39	40	41	
$\Delta = m - m_0$	— 3.30	— 2.30	— 1.30	— 0.30	+ 0.70	+ 1.70	+ 2.70	+ 3.70	
$1000 \times \frac{1}{2} P\left(\frac{\Delta}{\epsilon}\right)$	491	449	323	85	191	388	473	496	
Теорни број s'	9	42	126	238	276	197	85	23	4
$s' - s$	— 2	— 4	+ 8	— 6	+ 7	0	— 3	0	0

У другој су врсти ове таблице дате вредности одступања Δ граничних вредности m раста од средњег раста m_0 свих људи; делећи ове дане са средњом квадратном грешком $\epsilon = 1.40$, добићемо $t = \frac{\Delta}{\epsilon}$, са којом по таблицу 2 добијамо величине $P(t) = P\left(\frac{\Delta}{\epsilon}\right)$ вероватности, да одступања неће прећи вредност грешака $\frac{\Delta}{\epsilon} = t$, не обраћајући пажњу на знак; за одступања пак са одређеним знаком $+$ или $-$, ту вероватност треба делити на пола. Овакве вероватности, помножене са 1000, дате су у трећој врсти. У четвртој врсти дате су алгебарске разлике ових вероватности. За крајње вредности разлике су узете од 500. Овде се види, да се теорија случајних одступања потврђује доста добро.

б.) Узмимо сад пример из астрономских посматрања. У току од неколико година око 1845. год. мерио се у пулковској опсерваторији врло много пута, једним и истим, врло тачним инструментом, неки угао δ (деклинација), који одређује положај Поларне звезде на небу. Примивши средњи резултат из неколико стотина таквих одређења, тј. $\delta_0 = 88^\circ 28' 58.''44$ за истиниту величину тога угла, испишимо сад одступања од тога, тј. $\Delta = \delta - \delta_0$ за 40 мерења једне само — 1843. године и поређајмо те Δ по њиховим бројним вредностима, изражених у стотим деловима од 1":

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} -47 -39 -36 -34 -32 -24 -24 -17 -14 \mid -14 -13 -11 -10 -7 -6 -5 -5 -4 \quad 0 \quad 0 \\ +61 +41 +35 +33 +28 +25 +20 +20 +18 +18 +15 \mid +14 +13 +10 +9 +7 +5 +4 +4 -2 \end{array} \right.$$

Не гледећи на малобројност низа посматрања, који смо узели, све се карактерне особине случајних грешака откривају у њему потпуно задовољавајуће, наиме:

1.) Број позитивних грешака (20) скоро је раван броју негативних (такође 20, ако у њих уврстимо и оне две, које су равне нули).

2.) Однос алгебарске суме свих грешака према општем њиховоме броју излази раван $\frac{+382 - 342}{40} \cdot \frac{1''}{100} = 0.''01$ тј. разликује се од нуле за ништавну величину.

3.) За средњу грешку ϵ ових мерења добија се величина $\epsilon^2 = \frac{\Sigma \Delta^2}{s} = \frac{2.10}{40} = 0.0525$ или $\epsilon = \pm 0.''23$; ако се са том величином израчуна вероватност $P(t) = P\left(\frac{\Delta}{\epsilon}\right)$ за $t = \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}$ и 3, то ће се добити, да се теорни бројеви (s') грешака, које излазе из узетих граница, слажу са онима, (s), који су се стварно десили:

t	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
Границе греш. $\mp \epsilon t$	0.''11 ₅	0.''23	0.''34 ₅	0.''46	0.''57 ₅	0.''69
Теор. (s') = 40 [1 - P(t)]	24.7	12.7	5.4	1.8	0.5	0.1
Стварно (s)	24	13	6	2	1	0

4.) За вероватну грешку ρ добија се величина $\rho = \frac{2}{3}\epsilon = \mp 0.''15$; због тога по теорији треба да буде 20 грешака мањих од $\mp 0.''15$ и 20 грешака већих од $\mp 0.''15$; издвојивши у самој ствари (као што је то показано пуном линијом у даном низу грешака) 20 грешака најмање бројне вредности, зауставићемо се на грешци 0.''14, која је врло блиска тачно срачунатој величини ρ .

Из овога примера видимо још и то, да је највећа грешка, која се десила, тј. 0.''61, била потпуно нормална појава, јер је по теорији било могућно, са великом вероватности, очекивати у 40 посматрања једну грешку између 0.''57 и 0.''69; због тога неби било ни најмањег разлога одбацити овај резултат (+ 0.''61), као мање сигуран само по томе, што он одступа од средњег резултата више него остали. Треба увек имати у виду, да је у низу посматрања, који су извршени под једнаким погодбама, исто тако вероватна и највећа од грешака, које су се десиле, као и свака друга, посебно узета. Само очевидна непажња у записаном броју или пак директна индикација, на неповољне околности, при којима је било извршено посматрање, може бити узрок томе, да треба или сасвим одбацити добивени резултат или се односити к њему са мањим поверењем.

с.) Ако се обратимо, напоследку, вероватностима $\frac{s}{S}$ разних грешака Δ , које могу да се десе у суми од неколико табличних логаритама или и других, ма каквих бројева, узетих из таблица извесне тачности (чл. 37.), то ћемо увидети, да се и оне, са повећањем броја n сабирака, све више и више приближују општем обрасцу вероватности случајних грешака. И заиста, ако са средњим квадратним грешкама $\epsilon_4^2 = \frac{4}{3}(0.5)^2$ (при $n=4$) и $\epsilon_5^2 = \frac{5}{3}(0.5)^2$ (при $n=5$) нађемо, по табlici 2., у колико њих од 1000 случајева грешка Δ не треба да изађе из граница $\mp 0.1, \mp 0.3, \mp 0.5$ и т. д. и ако сравнамо такве теорне бројеве N' са стварним N , који потичу од даних s и S таблице чл. 37, — то ће се показати само следеће разлике. ($N' - N$):

Границе грешака Δ	при $n = 4$		при $n = 5$	
	N'	$N' - N$	N'	$N' - N$
-0.1 и +0.1	138	+2	123	+1
-0.3 +0.3	397	+5	358	+2
-0.5 -0.5	614	+4	561	+1
-0.7 +0.7	775	-1	722	-2
-0.9 +0.9	881	-7	836	-6
-1.1 +1.1	943	-9	912	-7
-1.3 +1.3	976	-8	956	-8
-1.5 +1.5	991	-6	980	-7
-1.7 -1.7	996	-4	992	-4
-1.9 +1.9	999	-1	997	-2
-2.1 +2.1	1000	-0	999	-1

На тај начин, довољно је сабра-ти 4 или 5 табличних бројева па да се вероватност разних могућних грешака у њиховој суми већ довољно лепо изрази формулом (n). Због тога ће се и вероватна грешка ρ те суме само врло мало разликовати од величине 0.67ϵ , која се одређује по формули (m').

З а д а њ е:

Пошто је 40 пута била измерена величина a , сва су одступања Δ , измерених величина од истините a , била исписана редом по величини од највећих негативних до највећих

позитивних; али је последњих 8 бројева уништено преливеним мастилом, тако да су остала само следећа 32 одступања Δ :

-3.7	-2.3	-1.4	-0.7	-0.2	0.0	+0.5	+0.9	-	-
-3.1	-2.0	<u>-1.2</u>	-0.7	-0.1	0.0	+0.6	<u>+1.0</u>	-	-
-2.7	-1.8	-1.1	-0.4	-0.1	+0.2	+0.6	+1.3	-	-
-2.6	-1.7	-0.8	-0.3	-0.0	+0.2	+0.8	+1.7	-	-

Одредити по овим непотпуним подацима средњу (ϵ) и вероватну (ρ) грешку извршених мерења.

Пошто су вероватности позитивних и негативних одступања једне и исте величине Δ једнаке, то највероватнија величина $\sum \Delta^2$ за несталих 8 позитивних одступања треба да буде таква иста као и за првих 8 негативних, наиме:

$$\sum_{33}^{40} \Delta^2 = \sum_1^8 \Delta^2 = 52.8.$$

Отуд

$$\epsilon^2 = \frac{1}{40} \left(\sum_9^{32} \Delta^2 + 2 \sum_1^8 \Delta^2 \right) = \frac{14.6 + 105.6}{40} = 3.00$$

или $\epsilon = \pm 1.73$ а $\rho = \frac{2}{3} \epsilon = \mp 1.15$. Као контрола за нађену величину ρ може послужити то, што је у даном низу број одступања, по бројној величини мањих од 1.15, заиста раван $\frac{1}{2} \cdot 40 = 20$.

2.) Колико је велика вероватност, да ће грешка у суми од 10 логари-тама, нађених у таблицама интерполовањем, изаћи већа од 2 јединице послед-ње децимале ових таблица?

Без интерполовања би средња грешка ϵ те суме (по чл. 37.) била $0.5 \sqrt{\frac{10}{3}}$, а са интерполовањем она треба да буде приближно за $\sqrt{2}$ већа, тј. $0.5 \sqrt{\frac{20}{3}} = \pm 1.29$; због тога ће тражена вероватност бити;

$$1 - P \left(\frac{2}{\epsilon} \right) = 1 - P(1.55) = 1 - 0.88 = 0.12.$$

ГЛАВА VII.

ТАЧНОСТ РАЗНИХ РЕЗУЛТАТА ДОБИВЕНИХ ИЗ ПОСМАТРАЊА.

44. Средња и вероватна грешка ма каквог резултата.

Видели смо, да се вероватности различних грешака, својствених ма каквом мерењу или посматрању, потпуно одређују величином ϵ средње грешке многих посматрања исте каквоће. У том смислу и треба увек разумети скраћене изразе: „средња је грешка каквог и каквог посматрања равна ϵ “ или „такво и такво посматрање подвргнуто је средњој грешци ϵ “. У том се истом смислу понекад оцењује тачност посматрања и помоћу његове вероватне грешке p , која је увек приближно равна $\frac{2}{3} \epsilon$.

Затим, када нађена из посматрања количина x улази у извесан низ рачунских радњи, то ће и резултат њихов $X = f(x)$ изаћи више или мање погрешан, што зависи како од средње грешке ϵ количине x , тако и од низа рачунских радњи, које су са њим извршене, т. ј. од облика $f(x)$. Али, пошто различним, могућним, случајним грешкама Δ количине x одговара, у резултату X , читав низ случајних грешака D , то и тај низ има своју средњу грешку E , чији је квадрат раван аритметичкој средини из квадрата свих D . Помоћу те средње грешке се и характерише тачност резултата X . Према томе и скраћени израз: „средња грешка резултата X је E “ — треба разумети увек у том, напред објашњеном, смислу.

Код најпростијег случаја $X = ax$, када се количина x , — која је добивена из посматрања са средњом грешком ϵ , — множи са неким сталним бројем a , имаћемо уопште $D = a\Delta$; због тога ће, очевидно, и средња грешка E резултата X бити

$$E = a\epsilon \dots \dots \dots (1)$$

45. Средња грешка линеарне функције измерених количина.

Одредимо најпре средњу грешку израза

$$X = x \pm x',$$

т. ј. суме или разлике двеју количина x и x' , добивених из независних међу собом посматрања са средњим грешкама ϵ и ϵ' .

Као што је већ речено, средњу грешку ϵ количине x треба разумети као средњу квадратну из огромног броја s случајних грешака:

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots \dots \Delta_s,$$

које би се могле десити у њему са подједнаком вероватности, т. ј.

$$\epsilon^2 = \frac{1}{s} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \dots + \Delta_s^2) = \frac{\Sigma \Delta^2}{s}.$$

На сличан начин треба замишљати и број s' случајних грешака

$$\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \dots, \Delta'_{s'},$$

које одговарају количини x' ; при чему је:

$$\epsilon'^2 = \frac{1}{s'} (\Delta_1'^2 + \Delta_2'^2 + \Delta_3'^2 + \dots + \Delta_{s'}'^2) = \frac{\Sigma \Delta'^2}{s'}.$$

У суми пак или разлици $x \pm x'$ могу се десити са једнаком вероватношћу све могуће комбинације грешака Δ првог њиховог низа са грешкама Δ' другог т. ј. следеће грешке D :

$$D = \begin{cases} \Delta_1 \pm \Delta'_1 & \Delta_2 \pm \Delta'_1 & \Delta_3 \pm \Delta'_1 & \dots & \Delta_s \pm \Delta'_1 \\ \Delta_1 \pm \Delta'_2 & \Delta_2 \pm \Delta'_2 & \Delta_3 \pm \Delta'_2 & \dots & \Delta_s \pm \Delta'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_1 \pm \Delta'_{s'} & \Delta_2 \pm \Delta'_{s'} & \Delta_3 \pm \Delta'_{s'} & \dots & \Delta_s \pm \Delta'_{s'} \end{cases}$$

Узевши сада суму њихових квадрата и поделивши је са њиховим бројем $S = ss'$ наћићемо:

$$E^2 = \frac{\Sigma D^2}{S} = \frac{\Sigma (s' \Delta_i^2 \pm 2 \Delta_i \Sigma \Delta' + \Sigma \Delta'^2)}{ss'}$$

$$= \frac{s' \Sigma \Delta^2 \pm 2 \Sigma \Delta \cdot \Sigma \Delta' + s \cdot \Sigma \Delta'^2}{ss'} = \frac{\Sigma \Delta^2}{s} \pm 2 \frac{\Sigma \Delta}{s} \cdot \frac{\Sigma \Delta'}{s'} + \frac{\Sigma \Delta'^2}{s'};$$

али пошто је, према основној особини случајних грешака, $\frac{\Sigma \Delta}{s} = 0$ и $\frac{\Sigma \Delta'}{s'} = 0$, то је

$$E^2 = \epsilon^2 + \epsilon'^2 \dots \dots \dots (2)$$

У случају алгебарске суме $X = x + x' + x''$ трију независних једна од друге количина x, x' и x'' , а које подлеже одговарајућим средњим грешкама ϵ, ϵ' и ϵ'' , можемо сматрати $(x + x')$ као једну количину са средњом грешком $\sqrt{\epsilon^2 + \epsilon'^2}$; због тога, — на основу тек што реченог, — излази, да је

$$E^2 = \epsilon^2 + \epsilon'^2 + \epsilon''^2.$$

Очевидно је, да ће и при ма каквом броју s сабирних количина x, x', x'', x''', \dots бити

$$E^2 = \epsilon^2 + \epsilon'^2 + \epsilon''^2 + \epsilon'''^2 + \dots \dots \dots (3)$$

У специјалном пак случају, када је $\epsilon = \epsilon' = \epsilon'' = \epsilon''' \dots$, добиће се, да је

$$E = \epsilon \sqrt{s} \dots \dots \dots (4)$$

Примењујући, напоследку, формуле (1.) и (3.) на ма какву линеарну функцију X количина x, x', x'', x''', \dots , добивених из посматрања, независни међу собом, са средњим грешкама $\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \epsilon''', \dots$ т.ј. на образац

$$X = \alpha x + \alpha' x' + \alpha'' x'' + \alpha''' x''' + \dots,$$

наћи ћемо средњу грешку E таквога резултата X у овом облику:

$$E^2 = \alpha^2 \epsilon^2 + \alpha'^2 \epsilon'^2 + \alpha''^2 \epsilon''^2 + \alpha'''^2 \epsilon'''^2 + \dots \quad (p.)$$

Напомена. Формулом (4.) доказује се још и повећавање средње грешке у суми од неколико табличних логаритама сразмерно са квадратним кореном из броја сабирака (чл. 37.), јер услов, да је $\frac{\Sigma \Delta}{s} = 0$, — на коме се заснива доказ формуле (2.), (3.) и (4.), — вреди исто тако и за грешке у последњој јединици бројева, који се узимају из таблица.

45-а Примери за објашњење.

Пример I. Из чл. 41. видели смо, да када се из непосредних мерења извесне количине x добију за њу подједнако повољне вредности $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s$, онда ће највероватнији њен резултат бити средње аритметичко

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_s}{s}.$$

Ако сад средњу грешку ових мерења означимо са ϵ , то ће се средња грешка ϵ_x тога резултата x одредити, на основу формуле (p), овако:

$$\epsilon_x^2 = \frac{s \epsilon^2}{s^2} = \frac{\epsilon^2}{s} \quad \text{или} \quad \epsilon_x = \frac{\epsilon}{\sqrt{s}} \quad \dots \quad (5.)$$

Пример II. На геодетском мерењу некога доста великог растојања D помоћу ланца, чија је дужина равна a , добивено је $D = sa$. Узрок нетачности таквога мерења може бити прво у томе, што дужина a самога ланца није позната потпуно тачно већ са неком средњом грешком ϵ_a а друго, у различним случајним грешкама при појединачним одмеравањима ланцем, чија средња грешка нека буде ϵ . Због првог ће се узрока накупити у D средња грешка $E_a = s \epsilon_a$ а због друге ће произаћи у $D = a + a + a + \dots + a$ — на основу (4.) — средња грешка $E_b = \epsilon \sqrt{s}$; због оба пак узрока укупно, резултат ће мерења бити подвргнут средњој грешци

$$E = \sqrt{E_a^2 + E_b^2} = \sqrt{s^2 \epsilon_a^2 + s \epsilon^2}$$

или

$$\frac{E}{D} = \frac{E}{sa} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{s}}.$$

Према томе *релативна* грешка $\frac{E}{D}$ мерења дужине D , — многократним одмеравањем на њој, мером a , — у толико је мања, у колико је број s таквих одмеравања већи.

Пример III. Узмимо да се количине x и y одређују из двеју једначина:

$$x + y = a \quad \text{и} \quad 2x + y = b,$$

где су и a и b нађене мерењем са истом средњом грешком ϵ . Тада излази, да је

$$x = b - a \quad \text{са средњом грешком} \quad \epsilon_x = \epsilon \sqrt{2}$$

$$y = 2a - b \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \epsilon_y = \epsilon \sqrt{5}.$$

Али, ако би после тога требало одредити средњу грешку ϵ_r , разлике $r = y - x$, то — на основу опште формуле (p) — никако не би требало узети, да је $\epsilon_r^2 = \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 = 7\epsilon^2$, јер x и y зависе од једних и истих погрешних величина a и b . У томе случају, за одредбу ϵ_r , требало би изразити прво саму величину r помоћу a и b т. ј. написати:

$$r = y - x = 3a - 2b;$$

после чега — на основу (p) — тек излази, да је

$$\epsilon_r^2 = 9\epsilon^2 + 4\epsilon^2 = 13\epsilon^2.$$

46. Средња грешка ма какве функције измерених количина.

Да одредимо сада средњу грешку E резултата X , када је он представљен у облику ма какве непрекидне функције од неколико количина $x, x', x'' \dots$, нађених из независних једно од другог посматрања са средњим грешкама $\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \dots$, тј.

$$X = f(x, x', x'', \dots).$$

Тада можемо ставити:

$$x = x_0 + \Delta x, \quad x' = x'_0 + \Delta x', \quad x'' = x''_0 + \Delta x'', \quad \dots,$$

где x_0, x'_0, x''_0, \dots представљају ма какве приближне вредности количина x, x', x'', \dots , макар и произвољне, али потпуно одређене, а $\Delta x, \Delta x', \Delta x'', \dots$ врло мале њихове поправке (корекције), које ће овде већ имати исти значај као и све могуће случајне грешке извршених посматрања а тако исто, као и напред споменуте дане средње грешке $\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \dots$. Кад развијемо затим функцију f у ред по степенима малих величина $\Delta x, \Delta x', \Delta x'', \dots$ и задовољимо се при томе само њиховим првим степенима, — добићемо:

$$X = f(x_0, x'_0, x''_0, \dots) + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{df}{dx'}\right)_0 \Delta x' + \left(\frac{df}{dx''}\right)_0 \Delta x'' + \dots,$$

где $f(x_0, x'_0, x''_0, \dots)$ и коефицијенти код $\Delta x, \Delta x', \Delta x'', \dots$ представљају потпуно одређене величине, које одговарају изабраним вредностима x_0, x'_0, x''_0, \dots . Кад представимо на тај начин X у облику линеарне функције количина $\Delta x, \Delta x', \Delta x'', \dots$, имаћемо — на основу формуле (p):

$$E^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)_0^2 \epsilon^2 + \left(\frac{df}{dx'}\right)_0^2 \epsilon'^2 + \left(\frac{df}{dx''}\right)_0^2 \epsilon''^2 + \dots \quad (p')$$

Ако је пак зависност X од x, x', x'', \dots изражена скривеном функцијом

$$f(X, x, x', x'', \dots) = 0,$$

то ће се, диференцирањем њеним по X, x, x', x'', \dots , добити овај диференцијални израз за мале прираштаје $\Delta X, \Delta x, \Delta x', \Delta x'', \dots$:

$$\left(\frac{df}{dX}\right)_0 \Delta X + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{df}{dx'}\right)_0 \Delta x' + \left(\frac{df}{dx''}\right)_0 \Delta x'' + \dots = 0$$

а затим ће се — на основу пређашњег — средња грешка \bar{E} количине X одредити овако:

$$\left(\frac{df}{dX}\right)_0^2 E^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)_0^2 \epsilon^2 + \left(\frac{df}{dx'}\right)_0^2 \epsilon'^2 + \left(\frac{df}{dx''}\right)_0^2 \epsilon''^2 + \dots \dots \dots (p'')$$

Да би се, на пример, одредиле средње грешке E и E' образаца

$$X = x x' \quad \text{и} \quad X' = \frac{x}{x'},$$

— у којима независне једна од друге величине x и x' подлеже средњим грешкама ϵ и ϵ' , — простије ће бити, ако им прво дамо логаритамски облик:

$$\lg X = \lg x + \lg x' \quad \text{и} \quad \lg X' = \lg x - \lg x'$$

а затим ће се, из диференцијалних израза

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta x'}{x'} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta X'}{X'} = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x'}{x'},$$

— на основу формуле (p'') — добити:

$$\left(\frac{E}{X}\right)^2 = \left(\frac{E'}{X'}\right)^2 = \left(\frac{\epsilon}{x}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon'}{x'}\right)^2.$$

47. Тежине (важине) разних резултата.

Када се из непосредних и подједнако повољних мерења количина x , — које не садрже у себи никаквих сталних грешака (чл. 37.) већ су подвргнуте само случајној грешци ϵ , — добијају врло различите вредности $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s$, то је са увеличањем броја s таквих мерења, могућно учинити, — говорећи теоријски, — да средња грешка $\epsilon_x = \frac{\epsilon}{\sqrt{s}}$ највероватнијег резултата $x = \frac{1}{s} (a_1 + a_2 + \dots + a_s)$ буде колико год желимо мала (чл. 45.); за дане ϵ и ϵ_x тај се број одређује

$$s = \frac{\epsilon^2}{\epsilon_x^2}.$$

На тај начин, сваки се резултат x , који подлежи извесној средњој грешци ϵ_x , може расматрати, као средњи из подједнако повољних резултата, који подлеже произвољној средњој грешци ϵ .

На тој основи је лако наћи највероватнију величину количине x из неколико, независних један од другог, његових резултата x_1, x_2, x_3, \dots , који подлеже различним средњим грешкама $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$. Ради тога треба да представимо себи све те резултате x_1, x_2, x_3, \dots као средње аритметичке из подједнако повољних посматрања, подвргнутих некаквој, једној и истој средњој грешци ϵ и одредимо такве бројеве g_1, g_2, g_3, \dots ових посматрања, те да буде:

$$\frac{\epsilon_0}{\sqrt{g_1}} = \epsilon_1, \quad \frac{\epsilon_0}{\sqrt{g_2}} = \epsilon_2, \quad \frac{\epsilon_0}{\sqrt{g_3}} = \epsilon_3, \dots \dots \dots$$

тј.
$$g_1 = \frac{\epsilon_0^2}{\epsilon_1^2}, \quad g_2 = \frac{\epsilon_0^2}{\epsilon_2^2}, \quad g_3 = \frac{\epsilon_0^2}{\epsilon_3^2}, \dots \dots \dots (q)$$

Тада ћемо за количину x имати неки уображени број $G = g_1 + g_2 + g_3 + \dots$ подједнако повољних величина, чија ће општа сума бити, очевидно, равна $g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + \dots$ па ће се, због тога, највероватнија величина за x и њена средња грешка ϵ_x добити — на основу чл. 40. и чл. 45. — овако:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + \dots}{g_1 + g_2 + g_3 + \dots} \\ \epsilon_x &= \frac{\epsilon_0}{\sqrt{G}} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{g_1 + g_2 + g_3 + \dots}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (q')$$

Бројеви G, g_1, g_2, g_3, \dots , — који су обрнуто сразмерни квадратима средњих грешака разних резултата x_1, x_2, x_3, \dots , — зову се *тежине* (*важине*) ових резултата; пошто су пак све оне сразмерне једној и истој, потпуно произвољној величини ϵ_0^2 , то оне дају само релативан појам о тачности x, x_1, x_2, x_3, \dots , — ако није објашњено, каквој баш средњој грешци ϵ_0 одговара тежини g_0 , која је узета за јединицу тежинâ. —

48. Тачност одређивања средње грешке из ограниченог броја посматрања.

При одређивању средње грешке ϵ каквога низа подједнако повољних посматрања, по величинама добивених случајних грешака Δ , — средња квадратна вредност $\frac{\sum \Delta^2}{s}$ може да се разликује од истините величине ϵ^2 , јер број посматрања s може бити стварно доста ограничен а не бескрајно велики, како то тражи теорија. Означимо ту разлику $\frac{\sum \Delta^2}{s} - \epsilon^2$ са η и одредимо средњу величину њенога квадрата, јер она може бити и позитивна и негативна.

Ради тога напишимо η^2 у облику

$$\begin{aligned} \eta^2 &= \left(\frac{\sum \Delta^2}{s} - \epsilon^2 \right)^2 = \left(\frac{\sum \Delta^2}{s} \right)^2 - 2 \frac{\sum \Delta^2}{s} \cdot \epsilon^2 + \epsilon^4 = \frac{1}{s^2} (\Delta_1^4 + \Delta_2^4 + \dots + \Delta_s^4) + \\ &+ \frac{2}{s^2} (\Delta_1^2 \Delta_2^2 + \Delta_1^2 \Delta_3^2 + \dots + \Delta_2^2 \Delta_3^2 + \dots + \Delta_{s-1}^2 \Delta_s^2) - 2 \frac{\sum \Delta^2}{s} \epsilon^2 + \epsilon^4; \end{aligned}$$

затим, поставимо овде у место $\frac{\sum \Delta^2}{s}$ истиниту величину ϵ^2 , а у место суме $(\Delta_1^2 \Delta_2^2 + \Delta_1^2 \Delta_3^2 + \dots + \Delta_2^2 \Delta_3^2 + \dots + \Delta_{s-1}^2 \Delta_s^2)$ средњу њену величину $\frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} \epsilon^4$; јер у тој суми можемо приближно узети, да је средња величина сваког сабирка равна $\epsilon^2 \cdot \epsilon^2 = \epsilon^4$ а број сабирака да је раван броју комбинација по два елемента из s тих елемената: $\Delta_1^2, \Delta_2^2, \dots, \Delta_s^2$.

Што се тиче суме $\frac{1}{s} (\Delta_1^4 + \Delta_2^4 + \dots + \Delta_s^4) = \frac{1}{s} \sum \Delta^4$, то, кад поделимо свих s грешака на групе по њиховим бројним вредностима $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$, као што је то показано у чл. 38., и, кад претпоставимо да је број грешака у групама респективно раван s_1, s_2, s_3, \dots , — онда ћемо добити да су вероватности, — да ће грешка припадати одређеној групи, — равне $\frac{s_1}{s}, \frac{s_2}{s}, \frac{s_3}{s}, \dots$, које су у чл. 38. означене са $p_{\Delta_1}, p_{\Delta_2}, p_{\Delta_3}, \dots$. Тада је $\frac{1}{s} \sum \Delta^4 = \frac{s_1}{s} \Delta_1^4 + \frac{s_2}{s} \Delta_2^4 + \frac{s_3}{s} \Delta_3^4 + \dots = \sum \Delta^4 p_{\Delta}$, а тачна величина те суме (при бескрајно великом броју s) треба да буде, — на основу формуле (I) и (I'), — оваква:

$$\frac{\Sigma \Delta^4}{s} = \Sigma \Delta^4 p_{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^4 e^{-\frac{\Delta^2}{2\epsilon^2}} \frac{d\Delta}{\epsilon} = \epsilon^4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} t^2} t^4 dt;$$

кад снизимо степен множитеља t^4 у подинтегралној функцији делимичним интегрирањем, биће:

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma \Delta^4}{s} &= \epsilon^4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} t^2} t^4 dt = \epsilon^4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (-t^3) e^{-\frac{1}{2} t^2} d\left(-\frac{1}{2} t^2\right) = \\ &= \epsilon^4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-t^3 e^{-\frac{1}{2} t^2} \right]_0^{\infty} + 3 \epsilon^4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2} t^2} dt. \end{aligned}$$

Први се сабирак за обе границе претвара у нулу. Кад се други сабирак интегрира делимично још једном, — добићемо:

$$\begin{aligned} 3 \epsilon^4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (-t) e^{-\frac{1}{2} t^2} d\left(-\frac{1}{2} t^2\right) &= 3 \epsilon^4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-te^{-\frac{1}{2} t^2} \right]_0^{\infty} + \\ &+ 3 \epsilon^4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt, \text{ где је } \left[-t^2 e^{-\frac{1}{2} t^2} \right]_0^{\infty} \end{aligned}$$

опет равно нули. При $t = \infty$, формула (n) треба да даје

$$P(\infty) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt = 1 \text{ (чл. 39.), и због тога}$$

$$\frac{\Delta s^2}{s} = 3 \epsilon^4.$$

На тај ће начин изаћи, да је

$$\eta^2 = \frac{3}{s} \epsilon^4 + \frac{s-1}{s} \epsilon^4 - 2\epsilon^4 + \epsilon^4 = \frac{2}{s} \epsilon^4 \text{ или } \eta = \pm \epsilon^4 \sqrt{\frac{2}{s}}.$$

Вероватна пак величина разлике η биће равна

$$\frac{2}{3} \eta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\epsilon^2}{\sqrt{s}} = \pm \frac{\epsilon^2}{\sqrt{s}} \text{ (приближно, узимајући да је } 2\sqrt{2} = 3);$$

на тај начин је

$$s^2 = \frac{\Sigma \Delta^2}{s} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{s}}\right) \text{ и } \epsilon = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{s} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{s}}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{s}} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{s}} \pm \frac{1}{8} \frac{1}{s} \pm \dots \right),$$

или, кад из заграде избацимо све чланове ступња изнад $\frac{1}{\sqrt{s}}$, онда ће бити

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{s}} \left(1 \pm \frac{1}{2\sqrt{s}} \right), \quad \varepsilon - \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{s}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{s}},$$

т. ј. разлика између величине средње квадратне грешке ε и $\sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{s}}$ карактерише се вероватном грешком $\pm \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{s}}$ или $\pm \frac{1}{2\sqrt{s}} \varepsilon$, или релатив. грешком $\pm \frac{1}{2\sqrt{s}}$.

Према томе, у примени теорије случајних грешака на стварним посматрањима какве било врсте, треба увек имати у виду, да како средње грешке, тако и тежине, које карактеришу тачност посматрања, никада не могу бити срачунате тачније него са двама цифрама; јер се ε^2 и ε добијају, — чак и при врло великом броју $s = 100$, — тек са тачношћу $\pm \frac{1}{10}$ и $\pm \frac{1}{20}$ њихове властите величине.

Задаће:

1.) Сума и разлика двеју количина x и y измерене су са једном истом средњом грешком ε . Каквим ће средњим грешкама ε_x и ε_y бити подвргнуте величине x и y , које отуд произлазе? $\left[\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right]$.

2.) У сферном троуглу ABC дане су: две стране b и c са средњим грешкама $\varepsilon_b = \varepsilon_c = \pm 1''$.0 а угао међу њима A са средњом грешком $\varepsilon_A = \pm 10''$. Са каквом тачношћу може бити срачуната, по тим подацима, трећа страна a троугла, и, каква ће бити та тачност у специјалном случају, када су приближно $b = c = 30^\circ$ и $B = C = 60^\circ$?

На основу реченога у чл. 26, диференцијални однос међу грешкама Δa , Δb и ΔA биће овакви:

$$\Delta a = \Delta b \cdot \cos C + \Delta c \cdot \cos B + \Delta A \sin b \sin C,$$

због тога ће, при даним средњим грешкама, бити уопште

$$\varepsilon_a''^2 = \cos^2 C + \cos^2 B + 100 \cdot \sin^2 b \sin^2 C$$

а при напред реченим величинама b , c , B и C излази, да је

$$\varepsilon_a''^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 100 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{77}{4} \text{ или } \varepsilon_a'' = \pm 4''4.$$

3.) Разни посматрачи са разним инструментима нашли су за некакав угао φ ове величине:

$$\varphi_1 = 59^\circ 46' 21''71 \text{ са вероватном грешком } \rho_1 = \pm 0''12$$

$$\varphi_2 = \quad \quad .38 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \rho_2 = \pm 0.08$$

$$\varphi_3 = \quad \quad .46 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \rho_3 = \pm 0.05.$$

Одредити највероватнију величину φ и њену вероватну грешку ρ_φ .

Ако за јединицу тежинѧ узмемо тежину резултата, чија би вероватна грешка ρ_0 била равна $\pm 0''10$, то би тежине даних величина φ_1 , φ_2 и φ_3 биле:

$$g_1 = \left(\frac{0.10}{0.12}\right)^2 = 0.7, \quad g_2 = \left(\frac{0.10}{0.08}\right)^2 = 1.6 \text{ и } g_3 = \left(\frac{0.10}{0.05}\right)^2 = 4.0;$$

узевши, ради простијег срачунавања, $59^\circ 46' 21''50 = \varphi_0$, добићемо по формулама (q) и (q'):

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{0.7 \times 0''21 - 1.6 \times 0''12 - 4.0 \times 0''04}{0.7 + 1.6 + 4.0} = \varphi_0 - 0''03 = 59^\circ 46' 21''47,$$

$$g_\varphi = 0.7 + 1.6 + 4.0 = 6.3 \qquad \rho_\varphi = \pm \frac{\rho_0}{\sqrt{g_\varphi}} = \pm 0''04.$$

4.) Какав треба да буде број s подједнако повољних посматрања, која подлеже средњој грешци ϵ , па да највероватније одступање од нуле алгебарске суме s грешака Δ , које су се десиле, буде равно $\pm 4\epsilon$?

На основу формуле (4) чл. 45, средње квадратно одступање од нуле суме s случајних грешака равно је $\pm \epsilon \sqrt{s}$, највероватније пак одступање биће $\pm \frac{2}{3} \epsilon \sqrt{s}$; због тога треба да буде $\frac{2}{3} \epsilon \sqrt{s} = 4\epsilon$ или $s = 36$.

5.) У глави IV чл. 33. нађено је било интерполовањем

$$y = \frac{1}{243} [-4y_1 + 20.0y_2 + 72y_3 - 25y_4] = 0.3296.3$$

Каква је средња грешка ϵ_y , тога резултата y при претпоставци, да сваки од бројева y_1 , y_2 , y_3 и y_4 подлежи (по чл. 36. гл. V) средњој случајној грешци $\epsilon_1 = \sqrt{0.0833}$ у четвртој децимали?

По формули (p) чл. 44. добија се $\epsilon_y^2 = \frac{0.0833}{243^2} [(-4)^2 + (20)^2 + (72)^2 + (-25)^2] = 0.0596$; према томе је $\epsilon_y = \pm 0.24$ у четвртој децимали.



ГЛАВА VIII.

МЕТОДА НАЈМАЊИХ КВАДРАТА.

49. Довођење једначина на једну и исту тачност и на линеарни облик.

На пракци се врло ретко дешава да се нека тражена количина X одређује из непосредних њених посматрања или мерења. Најчешће пак добивене из посматрања величине $N_1, N_2, N_3, \dots, N_s$ зависе од неколико непознатих количина X, Y, Z, \dots , при чему је та зависност изражена ма каквим, потпуно одређеним функцијама:

$$N_1 = f_1(X, Y, Z, \dots), N_2 = f_2(X, Y, Z, \dots), \dots, N_s = f_s(X, Y, Z, \dots) \dots (1.)$$

Кад би број σ тражених X, Y, Z, \dots био раван броју s даних једначина (1) и кад међу овима неби било међусобно идентичних, то би се за X, Y, Z, \dots добиле, разуме се, потпуно одређене бројне вредности:

$$X = F_x(N_1, N_2, \dots, N_s), \quad Y = F_y(N_1, N_2, \dots, N_s), \quad \dots$$

а средње би се грешке њихове одредиле по средњим грешкама величина N_1, N_2, \dots, N_s на основу општих правила предње главе. У случају пак да је $s > \sigma$, — због немогућности, да се нађу такве величине X, Y, Z, \dots , које би тачно задовољиле свих s даних једначина (1.), — морају се изналазити *највероватније* величине непознатих, тј. такве, које би најбоље задовољавале те једначине.

Количине N_1, N_2, \dots, N_s могу да подлеже, уопште говорећи, различним средњим грешкама $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_s$; али, кад одредимо релативне њихове тежине (чл. 47.)

$$g_1 = \frac{\epsilon^2}{\epsilon_1^2}, \quad g_2 = \frac{\epsilon^2}{\epsilon_2^2}, \quad \dots, \quad g_s = \frac{\epsilon^2}{\epsilon_s^2},$$

где се под ϵ подразумева средња грешка замишљеног посматрања са тежином $g=1$, — и помножимо сваку од једначина (1.) са кореном квадратним из тежине, која њој одговара, добићемо наместо N_1, N_2, \dots, N_s овакве величине:

$$N_1 \sqrt{g_1}, \quad N_2 \sqrt{g_2}, \quad \dots, \quad N_s \sqrt{g_s},$$

које ће подлежати једној и истој средњој грешци ϵ . Због тога ћемо унапред увек претпостављати, да су све дане једначине (1.) већ доведене, таквим на име начином, на једну и исту тачност.

Затим, ма какве да су једначине (1.), оне се увек могу довести — у односу према траженим величинама X, Y, Z, \dots — на линеарни облик. Кад поступимо ради тога на исти начин као у чл. 46., изаберемо ма какве, довољно приближне величине X_0, Y_0, Z_0, \dots за X, Y, Z, \dots и ставимо да је:

$$X = X_0 + x, \quad Y = Y_0 + y, \quad Z = Z_0 + z, \dots \quad (2.)$$

имаћемо да тражимо само врло мале поправке њихове: x, y, z, \dots . Најчешће су већ унапред познате ове приближне величине X_0, Y_0, Z_0, \dots ; у противном случају, ради њиховог нахођења, можемо се користити некојим бројем s тих једначина од свију даних (1.) Према томе, кад се задовољимо — при развијању функција f_1, f_2, \dots, f_s — са првим степенима малих величина x, y, z, \dots и кад означимо уопште:

$$\left(\frac{df_i}{dX}\right)_0 = a_i, \quad \left(\frac{df_i}{dY}\right)_0 = b_i, \quad \left(\frac{df_i}{dZ}\right)_0 = c_i, \dots \dots N_i - f_i(X_0, Y_0, Z_0, \dots) = n_i,$$

добићемо s даних једначина (1.) у оваквом облику:

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \dots &= n_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots &= n_2 \\ \dots & \\ a_sx + b_sy + c_sz + \dots &= n_s \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (r)$$

или скраћено:

$$\left[a_ix + b_iy + c_iz + \dots = n_i \right]_{i=1}^{i=s}$$

У овим s линеарним једначинама, — које ћемо звати *основним*, — коефицијенти су $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$ потпуно одређени бројеви; све пак величине n_1, n_2, \dots, n_s подлеже једној и истој средњој грешци ε , јер садрже у себи оне исте случајне грешке као и количине N_1, N_2, \dots, N_s , које су доведене — по напред реченоме — на једну и исту тачност.

50. Нормалне једначине.

Што се тиче величина непознатих x, y, z, \dots , које улазе у основне једначине (r), о њима се могу чинити разне, више или мање вероватне, претпоставке, при чему свака од тих претпоставака доводи до s разлика или одступања:

$$n_i - (a_ix + b_iy + c_iz + \dots) = v_i, \dots \dots \dots (3.)$$

које собом треба да представљају s случајних грешака, које се садрже у бројевима $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$. Али, пошто су вероватности појаве сваке од грешака v_1, v_2, \dots, v_s посебице — на основу формуле (l) чл. 39. — овакве

$$p_1 = \frac{d\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v_1^2}{2\varepsilon^2}}, \quad p_2 = \frac{d\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v_2^2}{2\varepsilon^2}}, \quad \dots \dots p_s = \frac{d\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v_s^2}{2\varepsilon^2}}$$

а вероватност укупног постанка свију њих (чл. 40.) равна

$$P = p_1 p_2 \dots p_s = \left(\frac{d\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\right)^s e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2} \sum v_i^2},$$

то ће највероватнија система величина $x, y, z \dots$ бити она, за коју та вероватност P постаје максимална а за ово треба да буде

$$\sum v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_s^2 = \text{minimum} \dots \dots \dots (s)$$

Према томе, у даној системи од s основних једначина сума квадрата свих грешака v_i треба да буде најмања. Због овога се и сама метода одређивања предњих количина, из многих посматрања, назива *метода најмањих квадрата*. Њу су објавили скоро једновремено Лежандр у Француској и Гаус у Немачкој; први међутим није дао тој методи потребне доказе, док ју је Гаус извео на основу теорије вероватности и развио је у свима детаљима за њену практичну примену.*)

Пошто X, Y, Z, \dots а према томе и σ непознатих x, y, z, \dots нису везане једна за другу никаквом зависношћу, то услов (s) доводи, — по познатим правилима диференцијалног рачуна, — до броја σ оваквих једначина:

$$\sum \left(v_i \cdot \frac{dv_i}{dx} \right) = 0, \quad \sum \left(v_i \cdot \frac{dv_i}{dy} \right) = 0, \quad \sum \left(v_i \cdot \frac{dv_i}{dz} \right) = 0, \dots \dots$$

Да саставимо прву од ових једначина: Диференцирањем $v_i = n_i - (a_i x + b_i y + c_i z + \dots)$ по x добићемо $- a_i$; одакле је

$$v_i \frac{dv_i}{dx} = - a_i n_i + (a_i a_i x + a_i b_i y + a_i c_i z + \dots);$$

сумирањем ових израза за разне ознаке i , добићемо:

$$\begin{aligned} \sum v_i \frac{dv_i}{dx} &= - (a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_s n_s) + \\ &+ (a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_s a_s) x + \\ &+ (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_s b_s) y + \\ &+ (a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_s c_s) z + \dots = \\ &= - \sum a_i n_i + \sum a_i a_i x + \sum a_i b_i y + \sum a_i c_i z + \dots = 0 \end{aligned}$$

На тај начин да саставимо и остале једначине

$$\sum \left(v_i \frac{dv_i}{dy} \right) = 0, \quad \sum \left(v_i \frac{dv_i}{dz} \right) = 0, \dots$$

$$\sum \left(v_i \frac{dv_i}{dy} \right) = - \sum b_i n_i + x \cdot \sum b_i \cdot a_i + y \cdot \sum b_i \cdot b_i + z \cdot \sum b_i c_i + \dots = 0$$

$$\sum \left(v_i \frac{dv_i}{dz} \right) = - \sum c_i n_i + x \cdot \sum c_i \cdot a_i + y \cdot \sum c_i b_i + z \cdot \sum c_i c_i + \dots = 0$$

Кад се уведу скраћене ознаке, које је предложио Гаус

$$\sum k_i l_i = k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots k_s l_s = (kl),$$

онда ће једначине добити овакав облик:

$$\left. \begin{aligned} \sum a_i v_i = 0 \text{ или } (aa) x + (ab) y + (ac) z + \dots &= (an) \\ \sum b_i v_i = 0 \quad \text{„} \quad (ab) x + (bb) y + (bc) z + \dots &= (bn) \\ \sum c_i v_i = 0 \quad \text{„} \quad (ac) x + (bc) y + (cc) z + \dots &= (cn) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (t)$$

*) Gauss „Méthode des moindres carrés. Mémoires sur la combinaison des observations“, traduit par Bertrand. 1855.

Ове једначине (*t*), помоћу којих се одређују тражене, највероватније величине $x, y, z \dots$, зову се *нормалне*. Као што се види, прва се од њих добија сабирањем свију основних једначина (*r*), пошто се изврши множење сваке од њих са њеним коефицијентом код x , друга — таквим истим сабирањем њиховим после множења сваке са коефицијентом код y и т. д. Отуда излази да се у њима понављају двапут сви коефицијенти непознатих x, y, z, \dots сем (*aa*), (*bb*), (*cc*) \dots

51. Тежине и средње грешке тражених непознатих.

После решења нормалних једначина (*t*), свака од тражених количина нпр. x , треба да буде изражена средством $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$ у оваквом линеарном облику:

$$x = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \dots + \alpha_s n_s = \sum \alpha_i n_i, \dots \dots \dots (4.)$$

где су $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ неки бројеви, који зависе само од даних a_i, b_i, c_i, \dots а не подлеже грешкама посматрања. С друге пак стране, ако помножимо прву од једначина (*t*) са A' , другу са A'' , трећу са A''' и т. д. и одредимо ових s множитеља из услова:

$$\left. \begin{aligned} (aa) A' + (ab) A'' + (ac) A''' + \dots &= 1 \\ (ab) A' + (bb) A'' + (bc) A''' + \dots &= 0 \\ (ac) A' + (bc) A'' + (cc) A''' + \dots &= 0 \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (x)$$

то ће сума свију једначина (*t*) дати

$$x = (an) A' + (bn) A'' + (cn) A''' + \dots = \sum (a_i A' + b_i A'' + c_i A''' + \dots) n_i$$

па због тога, ради идентичности овога израза са (4)_x, треба да буде уопште

$$\alpha_i = a_i A' + b_i A'' + c_i A''' + \dots \dots \dots (5.)$$

На тај се начин средња грешка нађене величине x добија (чл. 44.) у облику

$$\epsilon_x^2 = \epsilon^2 \sum \alpha_i^2 = \epsilon^2 (A' \sum a_i \alpha_i + A'' \sum b_i \alpha_i + A''' \sum c_i \alpha_i + \dots).$$

Али ако α_i помножимо прво са a_i , затим са b_i , са c_i и т. д., то ће у сумама — услед услова (x) — изаћи:

$$\sum a_i \alpha_i = 1, \quad \sum b_i \alpha_i = 0, \quad \sum c_i \alpha_i = 0 \text{ и т. д.}$$

$$\text{па отуд } \epsilon_x^2 = \epsilon^2 A' \quad \text{или } g_x = \frac{\epsilon^2}{\epsilon_x^2} = \frac{1}{A'} \dots \dots \dots (6)$$

На сличан се начин доказује, да ће тежине g_y, g_z количина y и z бити бројеви $\frac{1}{B''}$ и $\frac{1}{C'''}$, који се одређују из система једначина:

$$\left. \begin{aligned} (aa) B' + (ab) B'' + (ac) B''' + \dots &= 0 \\ (ab) B' + (bb) B'' + (bc) B''' + \dots &= 1 \\ (ac) B' + (bc) B'' + (cc) B''' + \dots &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (y) \quad \left. \begin{aligned} (aa) C' + (ab) C'' + (ac) C''' + \dots &= 0 \\ (ab) C' + (bb) C'' + (bc) C''' + \dots &= 0 \\ (ac) C' + (bc) C'' + (cc) C''' + \dots &= 1 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (z)$$

саме пак непознате y и z представиће се у линеарним функцијама даних бројева n_1, n_2, \dots, n_s ОВАКО:

$$y = \sum \beta_i n_i \dots \dots (4.)_y, \quad z = \sum \gamma_i n_i \dots \dots \dots (4.)_z,$$

где је $\beta_i = a_i B' + b_i B'' + c_i B''' + \dots$, $\gamma_i = a_i C' + b_i C'' + c_i C''' + \dots$

Напоследку, ако је потребно одредити тежину g_f и средњу грешку ϵ_f ма какве функције $f(X, Y, Z, \dots)$ количина $X = X_0 + x$, $Y = Y_0 + y$, $Z = Z_0 + z$ и т. д., нађених из нормалних једначина (1), онда ту функцију треба представити спочетка у линеарном облику

$$f = f_0 + \lambda x + \mu y + \nu z + \dots,$$

где је $f_0 = f(X_0, Y_0, Z_0, \dots)$, $\lambda = \left(\frac{df}{dX}\right)_0$, $\mu = \left(\frac{df}{dY}\right)_0$, $\nu = \left(\frac{df}{dZ}\right)_0, \dots$

затим је треба изразити јавно помоћу величина $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$, које подлеже грешкама посматрања, при чему ће — ако ради скраћења означимо

$$\varphi_i = \lambda \alpha_i + \mu \beta_i + \nu \gamma_i + \dots, —$$

изаћи, на основу (4)_x, (4)_y, (4)_z, \dots , наиме:

$$f = f_0 + \varphi_1 n_1 + \varphi_2 n_2 + \varphi_3 n_3 + \dots + \varphi_s n_s.$$

Тада ће се — по формули (p) чл. 44. — добити:

$$\epsilon_f^2 = \epsilon^2 \sum \varphi_i^2 \quad \text{или} \quad g_f = \frac{\epsilon^2}{\epsilon_f^2} = \frac{1}{\sum \varphi_i^2} \dots \dots \dots (6.)_f$$

52. Извод средње грешке посматрања из основних једначина.

Средња грешка ϵ количина $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$, које улазе у основне једначине (1), ретко је кад унапред позната па је стога треба одредити по оним s одступањима $v_1, v_2, v_3, \dots, v_s$, које се покажу у једначинама (1) после замене у њима нађених највероватнијих величина непознатих x, y, z, \dots и које могу знатно да се разликују од стварних грешака посматрања $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_s$.

Пошто би минимална могућна сума $\sum v_i^2$ довела до величине $\frac{1}{s} \sum v_i^2$, мање од $\epsilon^2 = \frac{1}{s} \sum \Delta_i^2$, то се, смањивањем њенога именитеља за извесан број k , може добити ϵ^2 овако:

$$\epsilon^2 = \frac{\sum v_i^2}{s-k}.$$

Али, ако би број s основних једначина (1) био раван броју σ непознатих x, y, z, \dots , онда би сва одступања v_i и $\sum v_i^2$ испала тачно равна нули и стога неби остало никаквих даних за оцену величине ϵ^2 ; према томе горњи израз, који је за њу узет, треба да се претвори у том случају у неодређену величину $\frac{0}{0}$, тј. треба да буде

$$\sigma - k = 0, \quad k = \sigma$$

и

$$\epsilon^2 = \frac{\sum v_i^2}{s-\sigma} \dots \dots \dots (и)$$

У специјалном случају, на пример, када се за одређивање количине x , из s подједнако повољних посматрања, добијају вредности: $x = n_1, x = n_2, x = n_3, \dots, x = n_t$, онда се средња грешка њихова треба да изводи овако

$$\epsilon^2 = \frac{\sum (n_i - n_0)^2}{s-1}, \text{ где је } n_0 = \frac{\sum n_i}{s}.$$

Формула се (и) строжије доказује обично на овај начин:

Нека су *испинише* величине σ непознатих: $x = \xi, y = \eta, z = \zeta, \dots$. Ставивши их у једначине (r), ми бисмо добили s *испиниших* грешака посматрања $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_s$ у оваквом општем облику:

$$\Delta_i = v_i + a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta + \dots$$

где је

$$v_i = n_i - a_i x - b_i y - c_i z - \dots;$$

а пошто је на основу (t):

$$\sum a_i v_i = 0, \quad \sum b_i v_i = 0, \quad \sum c_i v_i = 0, \dots,$$

то би после множења Δ_i са v_i и са Δ_i изашло у сумама, да је:

$$\sum v_i \Delta_i = \sum v_i^2 \text{ и } \sum \Delta_i^2 = \sum v_i^2 + \xi \sum a_i \Delta_i + \eta \sum b_i \Delta_i + \zeta \sum c_i \Delta_i + \dots \quad (7)$$

Множећи пак изразе за Δ_i поступно са a_i , са b_i , са $c_i \dots$, добићемо суме:

$$\sum a_i \Delta_i = (a\Delta) = (aa) \xi + (ab) \eta + (ac) \zeta + \dots$$

$$\sum b_i \Delta_i = (b\Delta) = (ab) \xi + (bb) \eta + (bc) \zeta + \dots$$

$$\sum c_i \Delta_i = (c\Delta) = (ac) \xi + (bc) \eta + (cc) \zeta + \dots$$

које се разликују по својем спољњем облику од нормалних једначина (t) само по томе, што су n_i, x, y, z, \dots замењени у њима одговарајућим величинама $\Delta_i, \xi, \eta, \zeta, \dots$. Према томе, замењујући само у (4.)_x, (4.)_y и (4.)_z величине n_i са грешкама Δ_i , имаћемо овакве изразе за ξ, η, ζ, \dots

$$\xi = \sum \alpha_i \Delta_i, \quad \eta = \sum \beta_i \Delta_i, \quad \zeta = \sum \gamma_i \Delta_i, \dots$$

кад представимо сада производ $\xi \sum a_i \Delta_i$ у облику

$$\begin{aligned} \xi \sum a_i \Delta_i &= (\alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2 + \dots + \alpha_s \Delta_s) (a_1 \Delta_1 + a_2 \Delta_2 + \dots + a_s \Delta_s) = \\ &= a_1 \alpha_1 \Delta_1^2 + a_2 \alpha_2 \Delta_2^2 + \dots + a_s \alpha_s \Delta_s^2 + (a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1) \Delta_1 \Delta_2 + (a_1 \alpha_3 + a_3 \alpha_1) \Delta_1 \Delta_3 + \dots \end{aligned}$$

увидећемо, да највероватнија величина суме свију чланова са производима: $\Delta_1 \Delta_2, \Delta_1 \Delta_3, \dots, \Delta_2 \Delta_3, \dots$ треба да буде равна нули, јер су поједнако вероватне како позитивне тако и негативне грешке Δ_i ; место квадрата пак: $\Delta_1^2, \Delta_2^2, \dots, \Delta_s^2$ моћи ће се ставити њихова средња.

величина $\frac{1}{s} \sum \Delta_i^2 = \epsilon^2$. Тада ће, — на основу напоменутога већ у чл. 51., да је $\sum a_i \alpha_i = 1$, — изаћи

$$\xi \sum a_i \Delta_i = \epsilon^2 \sum a_i \alpha_i = \epsilon^2.$$

Исто се тако доказује, да је и $\eta \sum b_i \Delta_i = \epsilon^2$, и $\zeta \sum c_i \Delta_i = \epsilon^2$: због тога ће се $\sum \Delta_i^2$ одредити из (7.) овако:

$$\sum \Delta_i^2 = s \epsilon^2 = \sum v_i^2 + \sigma \epsilon^2,$$

одакле и

$$\epsilon^2 = \frac{\sum v_i^2}{s - \sigma} \quad (и)$$

Према овој, при изводу средње грешке ϵ посматраних величина n_1, n_2, \dots, n_s , — по одступањима v_1, v_2, \dots, v_s , која остају у основним једначинама, — треба делити увек $\sum v_i^2$ са бројем s тих једначина смањеног за број σ непознатих x, y, z, \dots , које се из њих одређују.

53. Формулар и контрола срачунавања.

Начин одређивања величина x, y, z, \dots из нормалних једначина (t) , — који је изложен у чл. 51. и који доводи до неколико система једначина истоветног облика $(x), (y), (z), \dots$ са помоћним непознатим $A', A'', A''', \dots, B', B'', B''', \dots, C', C'', C''', \dots$, — даје те величине x, y, z, \dots у најопштијем њиховом облику $(4.)_x, (4.)_y, (4.)_z, \dots$, т. ј. у облику линеарних функција посматраних количина n_1, n_2, \dots, n_s , ма какве биле њихове бројне вредности. Због тога, ако би некоје од даних n_1, n_2, \dots, n_s добиле доцније неке поправке, неће бити потребно, да се понова састављају и решавају нормалне једначине (t) ради нахођења нових непознатих x, y, z, \dots . У исто доба, — као што смо видели, — лако се већ одређује и тежина ма које од функција ових непознатих. Али је све то скопчано на делу са врло дугим срачунавањима а то је незгодно и сувишно, ако се не предвиђају никакве промене у даним бројним вредностима n_1, n_2, \dots, n_s и ако је потребно да се нађу само тежине и средње грешке непознатих x, y, z, \dots . Тада се најпростије решавају нормалне једначине (t) на овај начин:

Помноживши прву од једначина (t) спочетка са $\frac{(ab)}{(aa)}$, одузмимо је од друге једначине; помноживши њу затим са $\frac{(ac)}{(aa)}$, одузмимо је од треће и т. д. Означивши онда, ради скраћења

$$(bb) - (ab) \frac{(ab)}{(aa)} = (bb)_1, \quad (bc) - (ac) \frac{(ab)}{(aa)} = (bc)_1, \dots$$

$$(bn) - (an) \frac{(ab)}{(aa)} = (bn)_1$$

$$(cb) - (ab) \frac{(ac)}{(aa)} = (cb)_1, \quad (cc) - (ac) \frac{(ac)}{(aa)} = (cc)_1, \dots$$

$$(cn) - (an) \frac{(ac)}{(aa)} = (cn)_1$$

и уопште

$$(kl) - (ak) \frac{(al)}{(aa)} = (kl)_1, \quad \bullet$$

ми ћемо добити систему $\varepsilon - 1$ једначина, потпуто сличних по облику са пређашњим (t) , али које већ не садрже у себи непознату x , — а наиме:

$$\left. \begin{aligned} (bb)_1 y + (bc)_1 z + \dots &= (bn)_1 \\ (bc)_1 y + (cc)_1 z + \dots &= (cn)_1 \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (t)_1$$

Елиминирајући на исти начин непознату y из ове системе једначина $(t)_1$ и означајући ради скраћења

$$(cc)_1 - (bc)_1 \frac{(bc)_1}{(bb)_1} = (cc)_2, \dots, (cn)_1 - (bn)_1 \frac{(bc)_1}{(bb)_1} = (cn)_2,$$

и уопште

$$(kl)_1 - (bk)_1 \frac{(bl)_1}{(bb)_1} = (kl)_2,$$

имаћемо

$$\left. \begin{aligned} (cc)_2 z + \dots &= (cn)_2 \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (t)$$

На сличан начин треба поступати и даље ради елиминирања z и осталих непознатих све дотле док не остане само једна једначина $(t)_{\sigma-1}$ са једном само непознатом. Општи, најпогоднији формулар за решење једначина (t) , $(t)_1$, $(t)_2$, показан је у примеру идућег члана (54.) По њему се могу изналазити и помоћне величине A' , A'' , B' , B'' , C' , C'' из једначина (x) , (y) , (z) , о којима је говорено у чл. 51.

Такав ред поступног елиминирања непознатих има особито значајно преимућство над свима осталим због тога, што, ако се не допусте никаква аритметичка скраћивања ни у самим нормалним једначинама нити у осталим једначинама $(t)_1$, $(t)_2$, $(t)_3$ $(t)_{\sigma-1}$, онда коефицијент код једине још непознате излази да је раван њеној тежини, тако да кад се елиминисање врши у супротном правцу, тј. почевши од последње нормалне једначине, онда се на крају крајева треба да добије за x и за његову тежину g_x :

$$(aa)_{\sigma-1} x = (an)_{\sigma-1} \quad \text{и} \quad g_x = (aa)_{\sigma-1}.$$

Заиста, ако бисмо тим истим супротним редом почели да елиминирамо помоћне величине A''' , A'' , A' из системе једначина (x) , потпуно сличних са (t) , онда бисмо на крају крајева дошли, очевидно, до овакве последње једначине:

$$(aa)_{\sigma-1} A' = 1,$$

а из ње по $(6)_x$ излази

$$(aa)_{\sigma-1} = \frac{1}{A'} = g_x \quad \dots \dots \dots (8)_x$$

Ако би се при овом начину решења нормалних једначина десила потреба, да се одреде тежине g_f и највероватније величине неке количине f , чија се зависност од нађених вредности за x , y , z , изражава (по чл. 51.) у линеарном облику $f = f_0 + \lambda x + \mu y + \nu z + \dots$, онда би требало одатле изразити једну од непознатих, напр. z , помоћу f и свију осталих x , y ,, ставити је затим у све основне једначине (r) и, саставивши по њима нову систему σ нормалних једначина, — решити је по напред реченом начину тако, да f са својим коефицијентом g_f остане и да се одреди напоследку.

Неопходно је потребно, разуме се, имати потпуно сигурну контролу тачности свих срачунавања, којима се одређују тражене x , y , z , по методи најмањих квадрата. Ради тога се може, на пример, по бројним вредностима одступања

$$v_i = n_i - (a_i x + b_i y + c_i z + \dots),$$

— помоћу којих се одређује средња грешка ϵ посматрања, — саставити суму $\sum v_i n_i = v_1 n_1 + v_2 n_2 + \dots + v_s n_s$ па видети, да ли се са довољно тачности контролише једнакост

$$\sum v_i n_i = \sum v_i^2$$

која произлази, као последица, из нормалних једначина:

$$\sum a_i v_i = 0, \quad \sum b_i v_i = 0, \quad \sum c_i v_i = 0, \quad \dots$$

Најбоље је пак, — кад се саставе у свима основним једначинама (r) суме

$$r_i = a_i + b_i + c_i + \dots + n_{i1} -$$

проконтролисати поступно сав ход срачунавања помоћу ових неопходних једнакости:

$$\left. \begin{array}{l} (aa) \cdot (ab) + (ac) + \dots + (an) = (ar) \\ (ab) + (bb) + (bc) + \dots + (bn) = (br) \\ (ac) + (bc) + (cc) + \dots + (cn) = (cr) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} (bb)_1 + (bc)_1 + \dots + (bn)_1 = (br)_1 \\ (bc)_1 + (cc)_1 + \dots + (cn)_1 = (cr)_1 \\ \dots \dots \dots \\ (cc)_2 + \dots + (cn)_2 = (cr)_2 \text{ и т. д.} \end{array}$$

Овим ће се, разуме се, добити један стубац више у општем формулару за срачунавање, али ће се то потпуно надокнадити тиме, што неће требати много времена на изналагање случајно учињених грешака за време срачунавања. *)

54. Пример за објашњење.

Да ставимо, како то често у ствари и бива, да је количина N , која се мери, оваква функција променљиве величине t :

$$N = A + Bt + Ct^2$$

па нека је потребно, да се одреде највероватније константне величине A , B и C , које ту улазе, као и њихове средње грешке ϵ_A , ϵ_B , ϵ_C , на основу следећих 9 даних N , добивених из посматрања са различним тежинама g :

t	-1.5	$+1.1$	$+0.7$	$+0.3$	-0.1	-0.5	-1.0	-1.5	-2.0
N	$+6.20$	$+3.45$	$+2.00$	$+1.80$	$+2.40$	$+4.55$	$+8.85$	$+15.70$	$+24.40$
g	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

*) Из примерног формулара чл. 54. оваквог срачунавања може се видети, да ће уопште — при броју σ непознатих x, y, z, \dots — број L_σ помоћних величина (бројева и њихових логаритама), које треба да се испишу у тај формулар ради одређивања само једне непознате, бити овакав:

$$L_\sigma = 2 \begin{vmatrix} (\sigma+1) + \sigma + (\sigma-1) + \dots + 3 + 2 \\ + \sigma + (\sigma-1) + \dots + 3 + 2 \\ + (\sigma-1) + \dots + 3 + 2 \\ \dots \dots \dots \\ + 3 + 2 \\ + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\sigma+3) \sigma \\ + (\sigma+2)(\sigma-1) \\ + (\sigma+1)(\sigma-2) \\ \dots \dots \dots \\ + 2(3+2) \\ + 2 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma^2 + 3\sigma \\ + (\sigma-1)^2 + 3(\sigma-1) \\ + (\sigma-2)^2 + 3(\sigma-2) \\ \dots \dots \dots \\ + 2^2 + 3 \cdot 2 \\ + 1^2 + 3 \cdot 1 \end{vmatrix}$$

Праве црте овде означају сумирање. Врсте треће суме означају развијене и преобразоване врсте друге суме — сумама аритметичке прогресије врста прве суме. Из последње (треће) суме, — кад се сумира по ступцима, — добија се:

$$L_\sigma = \frac{\sigma(\sigma+1)(2\sigma+1)}{2 \cdot 3} + 3 \frac{\sigma(\sigma+1)}{2} = \frac{1}{3} \sigma(\sigma+1)(\sigma+5);$$

Ради напред реченога пак сталнога контролисања тачности свега написаног, — додаје се још стубац са оваквим бројем K_σ помоћних величина:

$$K_\sigma = 2[\sigma + (\sigma-1) + (\sigma-2) + \dots + 2 + 1] = \sigma(\sigma+1);$$

тако да излази $L_\sigma + K_\sigma = \frac{1}{3} \sigma(\sigma+1)(\sigma+8)$.

На тај начин кад је $\sigma=3$ онда је $L_3 = 32$, $K_3 = 12$ а $K_3 : L_3 = \frac{3}{8}$

„ „ $\sigma=6$ „ „ $L_6 = 154$, $K_6 = 42$ „ $K_6 : L_6 = \frac{3}{11}$

„ „ $\sigma=9$ „ „ $L_9 = 420$, $K_9 = 90$ „ $K_9 : L_9 = \frac{3}{11}$.

Да не бисмо имали посла при даљим срачунавањима са сувише великим бројевима, ставићемо, да је

$$A = A_0 + x, \quad B = B_0 + y \quad \text{и} \quad C = C_0 + z,$$

па одредивши помоћу прве, пете и осме једначине приближне величине

$$A_0 = +2.4, \quad B_0 = -3.2 \quad \text{и} \quad C_0 = +3.8,$$

добићемо 9 основних једначина (r) за тражене поправке x , y и z са даље показаним коефицијентима: $a = \sqrt{g}$, $b = t\sqrt{g}$, $c = t^2\sqrt{g}$, $n = (N - A_0 - B_0 t - C_0 t^2)\sqrt{g}$. Саставимо, затим (за контролу даних срачунавања), суме: $r = a + b + c + n$ и, напослетку, суме: (aa) , (ab) , (ac) , (an) , (ar) , (bb) , (bc) , (bn) , (br) , (cc) , (cn) и (cr) , које улазе у нормалне једначине (t) за највероватније величине: x , y и z .

	a	b	c	n	r	ar	br	cr
1.	0.707	+ 1.06	+ 1.591	+ 0.035	+ 0.211	+ 0.15	+ 0.225	+ 0.373
2.	1	+ 1.1	+ 1.21	- 0.03	+ 0.86	+ 0.86	+ 0.946	+ 1.041
3.	1	+ 0.7	+ 0.49	- 0.02	+ 1.19	+ 1.19	+ 0.833	+ 0.583
4.	1	+ 0.3	+ 0.09	+ 0.02	+ 1.23	+ 1.23	+ 0.369	+ 0.111
5.	1	- 0.1	+ 0.01	- 0.36	+ 0.53	+ 0.53	- 0.053	+ 0.005
6.	1	- 0.5	+ 0.25	- 0.40	- 0.15	- 0.15	+ 0.075	- 0.038
7.	1	- 1.0	+ 1.00	- 0.55	- 1.55	- 1.55	+ 1.550	- 1.550
8.	0.707	- 1.06	+ 1.591	- 0.035	- 1.979	- 1.40	+ 2.098	- 3.149
9.	0.500	- 1.00	+ 2.000	+ 0.20	- 2.30	- 1.15	+ 2.300	- 4.600
Суме	7.914	- 0.50	+ 8.232	- 1.140	- 1.958	- 0.290	+ 8.343	- 7.260

	aa	ab	ac	an	bb	bc	bn	cc	cn
1.	0.5	+ 0.75	+ 1.125	+ 0.025	1.125	+ 1.687	+ 0.038	2.531	+ 0.056
2.	1	+ 1.10	+ 1.21	- 0.03	1.21	+ 1.331	- 0.033	1.464	- 0.036
3.	1	+ 0.70	+ 0.49	- 0.02	0.49	+ 0.343	- 0.014	0.240	- 0.010
4.	1	+ 0.30	+ 0.09	+ 0.02	0.09	+ 0.027	+ 0.006	0.008	+ 0.002
5.	1	- 0.10	+ 0.01	- 0.36	0.01	- 0.001	+ 0.036	0	- 0.004
6.	1	- 0.50	+ 0.25	- 0.40	0.25	- 0.125	+ 0.200	0.063	- 0.100
7.	1	- 1.00	+ 1.00	- 0.55	1.00	- 1.000	+ 0.550	1.000	- 0.550
8.	0.5	- 0.75	+ 1.125	- 0.025	1.125	- 1.687	+ 0.037	2.531	- 0.056
9.	0.25	- 0.50	+ 1.00	+ 0.10	1.00	- 2.000	- 0.200	4.000	+ 0.400
Суме	7.250	0	+ 6.300	- 1.240	6.300	- 1.425	+ 0.620	11.837	- 0.298

$$\text{Контрола} \begin{cases} (ar) = -0.290, & (aa) + (ab) - (ac) + (an) = -0.290 \\ (br) = +8.343, & (ab) + (bb) - (bc) + (bn) = +8.345 \\ (cr) = -7.260, & (ac) + (bc) - (cc) + (cn) = -7.260. \end{cases}$$

Одређивање свију непознатих x , y , z (заједно са њиховим тежинама g_x, g_y, g_z) из нормалних једначина (t) и оних (t_1 и t_2), које из њих произлазе, да извршимо са логаритмима од четири децимале по овом формулару:

$$(aa) = 7.250 \quad (ab) = 0 \quad (ac) = +6.300 \quad (an) = -1.240 \quad (ar) = -0.290$$

$$\lg(aa) = 0.8603 \quad \lg(ab) = \dots \quad \lg(ac) = 0.7993 \quad \lg(an) = 0.0934_n \quad \lg(ar) = 9.4624_n$$

$$(bb) = 6.300 \quad (bc) = -1.425 \quad (bn) = +0.620 \quad (br) = +8.345$$

$$(ab) \frac{(ab)}{(aa)} = 0 \quad (ac) \frac{(ab)}{(aa)} = 0 \quad (an) \frac{(ab)}{(aa)} = 0 \quad (ar) \frac{(ab)}{(aa)} = 0$$

$$(bb)_1 = 6.300 \quad (bc)_1 = -1.425 \quad (bn)_1 = +0.620 \quad (br)_1 = +8.345$$

$$\lg(bb)_1 = 0.7993 \quad \lg(bc)_1 = 0.1538_n \quad \lg(bn)_1 = 9.7924 \quad \lg(br)_1 = 0.9214$$

$$(cc) = 11.837 \quad (cn) = -0.298 \quad (cr) = -7.260$$

$$(ac) \frac{(ac)}{(aa)} = +5.474 \quad (an) \frac{(ac)}{(aa)} = -1.077 \quad (cr) \frac{(ac)}{(aa)} = -0.252$$

$$(cc)_1 = 6.363 \quad (cn)_1 = +0.779 \quad (cr)_1 = -7.008$$

$$(bc)_1 \frac{(bc)_1}{(bb)_1} = +0.322 \quad (bn)_1 \frac{(bc)_1}{(bb)_1} = -0.140 \quad (br)_1 \frac{(bc)_1}{(bb)_1} = -1.888$$

$$z = +0.152 \quad g_z = (cc)_2 = 6.041 \quad (cn)_2 = +0.919 \quad (cr)_2 = -5.120$$

$$\lg z = 9.1822 \quad \lg g_z = \lg(cc)_2 = 0.7811 \quad \lg(cn)_2 = 9.9633 \quad \text{(Контроль)}$$

$$(cc)_1 = 6.363 \quad (cb)_1 = -1.425 \quad (cn)_1 = +0.779 \quad (cr)_1 = -7.008$$

$$\lg(cc)_1 = 0.8037 \quad \lg(cb)_1 = 0.1538_n \quad \lg(cn)_1 = 9.8915 \quad \lg(cr)_1 = 0.8456_n$$

$$(bb)_1 = 6.300 \quad (bn)_1 = +0.620 \quad (br)_1 = +8.345$$

$$(cb)_1 \frac{(cb)_1}{(cc)_1} = +0.319 \quad (cn)_1 \frac{(cb)_1}{(cc)_1} = -0.174 \quad (cr)_1 \frac{(cb)_1}{(cc)_1} = +1.569$$

$$y = +0.133 \quad g_y = (bb)_2 = 5.981 \quad (bn)_2 = +0.794 \quad (br)_2 = +6.776$$

$$\lg y = 9.1230 \quad \lg g_y = \lg(bb)_2 = 0.7768 \quad \lg(bn)_2 = 9.8998 \quad \text{(Контроль)}$$

$$(cc) = 11.837 \quad (cb) = -1.425 \quad (ca) = +6.300 \quad (cn) = -0.298 \quad (cr) = -7.260$$

$$\lg(cc) = 1.0733 \quad \lg(cb) = 0.1538_n \quad \lg(ca) = 0.7993 \quad \lg(cn) = 9.4742_n \quad \lg(cr) = 0.8609_n$$

$$(bb) = 6.300 \quad (ba) = 0 \quad (bn) = +0.620 \quad (br) = +8.345$$

$$(cb) \frac{(cb)}{(cc)} = +0.172 \quad (ca) \frac{(cb)}{(cc)} = -0.758 \quad (cn) \frac{(cb)}{(cc)} = +0.036 \quad (cr) \frac{(cb)}{(cc)} = +0.874$$

$$(bb)_1 = 6.128 \quad (ba)_1 = +0.758 \quad (bn)_1 = +0.584 \quad (br)_1 = +7.471$$

$$\lg(bb)_1 = 0.7874 \quad \lg(ba)_1 = 9.8797 \quad \lg(bn)_1 = 9.7664 \quad \lg(br)_1 = 0.8734$$

$$(aa) = 7.250 \quad (an) = -1.240 \quad (ar) = -0.290$$

$$(ca) \frac{(ca)}{(cc)} = +3.352 \quad (cn) \frac{(ca)}{(cc)} = -0.159 \quad (cr) \frac{(ca)}{(cc)} = -3.863$$

$$(aa)_1 = 3.898 \quad (an)_1 = -1.081 \quad (ar)_1 = -3.573$$

$$(ba)_1 \frac{(ba)_1}{(bb)_1} = +0.094 \quad (bn)_1 \frac{(ba)_1}{(bb)_1} = +0.072 \quad (br)_1 \frac{(ba)_1}{(bb)_1} = +0.924$$

$$x = -0.303 \quad g_x = (aa)_2 = 3.804 \quad (an)_2 = -1.153 \quad (ar)_2 = -2.649$$

$$\lg x = 9.4816_n \quad \lg g_x = \lg(aa)_2 = 0.5802 \quad \lg(an)_2 = 0.0618_n \quad \text{(Контроль)}$$

Кад ставимо, напоследку, нађене величине x, y, z у основних 9 једначина, добићемо следећа одступања или разлике $v = n - (ax + by + cz)$, при чему се тачност срачунавања још једном контролише тиме, што излази приближно доста тачно, да је $\Sigma vn = \Sigma v^2$:

	ax	by	cz	сума	n	v	vn	v^2
1.	— 0.214	+ 0.141	+ 0.242	+ 0.169	+ 0.035	— 0.134	— 0.0047	0.0180
2.	— 0.303	+ 0.146	+ 0.184	+ 0.027	— 0.030	— 57	+ 17	33
3.	— 0.303	+ 0.093	+ 0.075	— 0.135	— 0.020	+ 115	— 23	132
4.	— 0.303	+ 0.040	+ 0.014	— 0.249	+ 0.020	+ 269	+ 54	724
5.	— 0.303	— 0.013	+ 0.002	— 0.314	— 0.360	— 46	+ 166	21
6.	— 0.303	— 0.066	+ 0.038	— 0.331	— 0.400	— 69	+ 276	48
7.	— 0.303	— 0.133	+ 0.152	— 0.284	— 0.550	— 266	+ 1463	708
8.	— 0.214	— 0.141	+ 0.242	— 0.113	— 0.035	+ 78	— 27	61
9.	— 0.152	— 0.133	+ 0.304	+ 0.019	+ 0.200	+ 181	+ 362	328
						$\Sigma nv = 0.224$		$\Sigma v^2 = 0.224$

Средња грешка ϵ оних даних количина N , чија је тежина g равна јединици, излази по формули (и) оваква:

$$\epsilon^2 = \frac{\Sigma v^2}{9-3} = \frac{0.225}{6} = 0.0375, \quad \epsilon = \pm 0.19.$$

а отуд најзад:

$$A = + 2.4 - 0.30 = + 2.10 \text{ са сред. греш. } \epsilon_A = \frac{\epsilon}{\sqrt{g_x}} = \pm 0.10$$

$$B = - 3.2 + 0.13 = - 3.07 \text{ " " " } \epsilon_B = \frac{\epsilon}{\sqrt{g_y}} = \pm 0.08$$

$$C = + 3.8 + 0.15 = + 3.95 \text{ " " " } \epsilon_C = \frac{\epsilon}{\sqrt{g_z}} = \pm 0.08$$

Напомена: У овоме је примеру било потпуно довољно четири цифре у свима помоћним бројевима и логаритмима за добијање непознатих x, y, z, \dots са потребном тачности само стога, што су у основним једначинама дати коефицијенти a, b, c код непознатих x, y, z , приближно једнога и истог ступња, а наиме са највећим вредностима: $a_m = 0.7, b_m = 1.1, c_m = 2.0$. Али, ако би нека од њих надмашала остале 10 и више пута, онда би се неке од сума $(ab), (ac), (bc)$, које улазе у нормалне једначине, изразиле већ са пет па чак и са шест цифара те би стога требало цео рачун по формулару вршити много тачније. Да би се то избегло, у таквим случајима треба пре свега променити коефицијенте a, b, c, \dots са њима пропорционалним a', b', c', \dots тако, да се бројне највеће вредности a_m, b_m, c_m, \dots првих претворе у $a'_m = b'_m = c'_m = \dots$ а то се увек може достићи одговарајућом променом непознатих x, y, z, \dots у $x' = x \cdot \frac{a_m}{a'_m}, y' = y \cdot \frac{b_m}{b'_m}, z' = z \cdot \frac{c_m}{c'_m}$ и т. д.

55. Одређивање коефицијената периодичког реда.

У астрономији и у геодезији се врло често има посла са периодичким редовима облика

$$N = A + B \sin M + C \cos M + B' \sin 2M + C' \cos 2M + B'' \sin 3M + \dots \quad (v)$$

па да се из посматраних величина N за разне угле, одређују највероватније вредности независних коефицијената A, B, C, B', C', B'' и т. д. Ако при томе s посматраних количина N_1, N_2, \dots, N_s подлеже једној и истој грешци ϵ а дани угли M у системи једначина, растући у аритметичкој прогресији, пролазе кроз целу периферију круга, т. ј. када су овакви:

$$M_2 = M_1 + \alpha, \quad M_3 = M_1 + 2\alpha \dots \quad M_s = M_1 + (s-1)\alpha,$$

где је
$$\alpha = \frac{360^\circ}{s},$$

онда се напред речене непознате добијају ванредно просто, благодарећи тој околности, што за такве угле M , — при сваком целом броју k , са изузетком само кад је $k = s$, — излази

$$\sum \sin k M = 0 \quad \text{и} \quad \sum \cos k M = 0 \dots \dots \dots (w)$$

Да би се то доказало, најпростије је замислити на равни затворени s — угаоник и неку праву X , која заклапа са једном од његових страна угао M_1 . Тада ће угли, које заклапају остале његове стране са том правом X , очевидно, бити равни напред реченим $M_2, M_3 \dots M_s$; пошто је пак сума пројекција свију његових страна на праву X — тако исто и на праву, која је на њу управна — равна нули, то неизоставно мора бити $\sum \cos M = 0 \quad \sum \sin M = 0$ исто тако ако повежемо темена тога s — угаоника, прескачући једно, два итд. увидећемо, да за сваке, дупле, трипле и уопште $k M$ углове, — са изузетком само кад је $k = s$, — треба да изађе $\sum \cos k M = 0$ и $\sum \sin k M = 0$.

Затим, на основу познатих тригонометриских формула за суме или разлике синуса и косинуса два лука, имаћемо за сваке неједнаке међу собом целе бројеве k и l :

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum \sin k M \cdot \sin l M &= \sum \cos (k-l) M - \sum \cos (k+l) M = 0 \\ 2 \sum \cos k M \cdot \cos l M &= \sum \cos (k-l) M + \sum \cos (k+l) M = 0 \\ 2 \sum \sin k M \cdot \cos l M &= \sum \sin (k-l) M + \sum \sin (k+l) M = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (w')$$

у случају пак кад је $k = l$ излази:

$$\left. \begin{aligned} \sum \sin^2 k M &= \frac{s}{2} - \frac{1}{2} \sum \cos 2k M = \frac{s}{2} \\ \sum \cos^2 k M &= \frac{s}{2} + \frac{1}{2} \sum \cos 2k M = \frac{s}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (w'')$$

Према томе, ако су у s основних једначина (v) угли M_1, M_2, \dots, M_s онакви, како је то напред речено, а све количине N_1, N_2, \dots, N_s дане са подједнаком тачношћу, тј. са једном и истом тежином $g = 1$, онда ће у нормалним

једначинама, (t) — које служе за одредбу највероватнијих величина тражених А, В, С, В', С' и т. д., — бити

$$a = 1, \quad b = \sin M, \quad c = \cos M, \quad d = \sin 2M, \quad e = \cos 2M, \dots$$

$$(aa) = s, \quad (bb) = (cc) = (dd) = (ac) = \dots = \frac{s}{2},$$

$$(ab) = (ac) = (ad) = \dots = (bc) = (bd) = \dots = (cd) = \dots = 0$$

и због тога ће изаћи просто:

$$s A = \Sigma N, \quad \frac{s}{2} B = \Sigma N \sin M, \quad \frac{s}{2} B' = \Sigma N \sin 2M, \dots$$

$$\frac{s}{2} C = \Sigma N \cos M, \quad \frac{s}{2} C' = \Sigma N \cos 2M, \dots$$

а тежина ће резултата А притом бити равна s; тежина пак резултата В, С, В', С' и т. д. биће равне $\frac{s}{2}$.

Напомена. Ако је периодички ред облика

$$N = A + e \sin (E + M) + e' \sin (E' + 2M) + e'' \sin (E'' + 3M) + \dots (v')$$

онда је, за изналагање највероватнијих величина e, E, e', E', e'', E'' , згодније довести га прво на облик (v), стављајући:

$$e \cos E = B, \quad e' \cos E' = B', \text{ и т. д.}$$

$$e \sin E = C, \quad e' \sin E' = C',$$

Задаће.

1.) Одредити највероватније величине x, y, z и њихове тежине g_x, g_y, g_z из следећих једначина, узимајући, да су тежине даних количина n_1, n_2, \dots, n_7 равне јединици:

$$\begin{aligned} x + 2y &= n_1 & x + y &= n_3 & x - y + z &= n_5 \\ x + y + z &= n_2 & x + z &= n_4 & x - 2y &= n_7 \\ & & x - y &= n_5 \end{aligned}$$

Овде је (aa) = 7, (ab) = 0, (ac) = +3, (bb) = 12, (bc) = 0 и (cc) = 3; због тога ће три системе једначина (x), (y) и (z), — које на основу реченога у чл. 50., треба решити за изразе x, y и z у функцији n_1, n_2, \dots, n_3 , — бити овакве:

$$\begin{aligned} 7A' + 3A''' = 1 & \left\{ \begin{aligned} A' &= +\frac{1}{4} \\ A'' &= 0 \\ A''' &= -\frac{1}{4} \end{aligned} \right. & 7B' + 3B'' = 0 & \left\{ \begin{aligned} B' &= 0 \\ B'' &= +\frac{1}{12} \\ B''' &= 0 \end{aligned} \right. & 7C' + 3C''' = 0 & \left\{ \begin{aligned} C' &= -\frac{1}{4} \\ C'' &= 0 \\ C''' &= +\frac{1}{12} \end{aligned} \right. \\ 12A'' = 0 & & 12B'' = 1 & & 12C'' = 0 & & \\ 3A' + 3A''' = 0 & & 3B' + 3B''' = 0 & & 3C' + 3C''' = 1 & & \end{aligned}$$

Затим ће се по формулама чл. 51. добити:

i	1	2	3	4	5	6	7		
α	$+\frac{1}{7}$	0	$+\frac{1}{4}$	0	$+\frac{1}{4}$	0	$+\frac{1}{4}$	$x = \frac{1}{4} (n_1 + n_3 + n_5 + n_7)$	$g_x = 4$
β	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{12}$	$+\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$y = \frac{1}{12} (2n_1 + n_2 + n_3 - n_5 - n_6 - 2n_7)$	$g_y = 12$
γ	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$z = \frac{1}{3} (n_2 + n_4 + n_6) - \frac{1}{4} (n_1 + n_3 + n_5 + n_7)$	$g_z = \frac{12}{7}$

2.) Из основних једначина предње задаће срачунати највероватније величине x, y, z и $f = x + 2z$ а тако исто и њихове средње грешке $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_f$ при овим бројним вредностима даних:

$$n_1 = -2.0, n_2 = +2.2, n_3 = 0, n_4 = +5.5, n_5 = +4.0, n_6 = +7.8, n_7 = +8.0$$

Кад се ове величине ставе у напред нађеним општим изразима за x, y и z , добићемо: $x = +2.5, y = +2.5, z = +2.7$; после чега ће основне једначине дати ова одступања v и ову средњу грешку ε даних величина n :

$$v_1 = +0.5, v_2 = -0.5, v_3 = 0.0, v_4 = +0.3, v_5 = -1.0, v_6 = +0.1, v_7 = +0.5$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum v^2}{7-3}} = \pm 0.7, \quad \varepsilon_x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4}} = \pm 0.3, \quad \varepsilon_y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{12}} = \pm 0.2, \quad \varepsilon_z = \varepsilon \sqrt{\frac{7}{12}} = \pm 0.5.$$

Средња пак грешка резултата $f = x + 2z = +7.9$ одредиће се по формулама чл. 51., стављајући у њима: $\lambda = 1, \mu = 0, \nu = 2$ и $\varphi_i = \alpha_i + 2\gamma_i$, при чему излази:

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_5 = \varphi_7 = -\frac{1}{4}, \quad \varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_6 = +\frac{2}{3}, \quad \sum \varphi_i^2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{3} = \frac{19}{12},$$

па отуд

$$\varepsilon_f = \varepsilon \sqrt{\varphi_i^2} = \pm 0.9.$$

3.) У тачци М (сл. 12.) измерени су ови угли међу предметима 0, X, Y и Z, који се налазе у истој равни:

$$\sphericalangle OMX = X = 68^\circ 17' 18'', \quad \sphericalangle XMY = Y - X = 33^\circ 23' 32'',$$

$$\sphericalangle OMY = Y = 101^\circ 41' 0'', \quad \sphericalangle YMZ = Z - Y = 113^\circ 27' 50'';$$

$$\sphericalangle OMZ = Z = 215^\circ 8' 35'',$$



при чему је свако од тих пет мерења извршено са средњом грешком $\varepsilon = \pm 5''$. Одредити највероватније величине углова X, Y и Z и њихове средње грешке $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

Да ставимо, ради упрошћења даљих срачунавања:

$$X = 68^\circ 17' 18'' + x, \quad Y = 101^\circ 41' 0'' + y, \quad Z = 215^\circ 8' 35'' + z$$

па ћемо имати 5 основних једначина:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad y - x = -10'' \text{ и } z - y = +15'',$$

из којих се добијају три нормалне:

$$2x - y = +10'', \quad -x + 3y - z = -25'', \quad -y + 2z = +15'';$$

решењем пак њиховим по општем формулару чл. 53. наћи ћемо:

$$x = +1''.9 \text{ или } X = 68^\circ 17' 19''.9 \text{ са ср. греш. } \varepsilon_x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1.6}} = \pm 4''.0$$

$$y = -6.2 \text{ „ } Y = 101^\circ 40' 53.8 \text{ „ „ „ } \varepsilon_y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2.0}} = \pm 3.5$$

$$z = +4.4 \text{ „ } Z = 215^\circ 8' 39.4 \text{ „ „ „ } \varepsilon_z = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1.6}} = \pm 4.0$$

(контрола: $\sum v^2 = 84.4$ и $\sum v n = 85.0$).

4.) Бројеви $\eta = a \sin(L + A)$, који су срачунати са неким сталним величинама a и A за разне вредности променљивог угла L , после одбацивања крајних децимала из њих, изашли су овакви:

L	n	L	L	n	L	L	n	L
0°	+ 113	— 180°	60°	+ 75	— 240°	120°	— 38	+ 300°
15	+ 115	— 195	75	+ 50	— 255	135	— 65	+ 315
30	+ 109	— 210	90	+ 22	— 270	150	— 87	+ 330
45	+ 95	— 225	105	— 8	+ 285	165	— 104	+ 345

Одредити по овима 24 даним највероватније величине α и A и њихове средње грешке ϵ_α и ϵ_A .

Ставивши, ради удобнијег рачунања: $\alpha \cos A = x$ и $\alpha \sin A = y$, наћи ћемо по формулама чл. 55. следеће највероватније величине x , y , α , A а са њима и одступања v даних бројева n од срачунатих:

			v			
$12x = \sum n \sin L = + 259.4$	$g_x = 12$		— 0.15	+	— 0.29	+
$12y = \sum n \cos L = + 1357.8$	$g_y = 12$		+ 0.11	—	— 0.17	+
			+ 0.19	—	+ 0.39	—
$\alpha = 115.20$	$A = 79^\circ 11' 2$		— 0.30	+	+ 0.41	—
					— 0.29	+

тако да квадрат средње грешке ϵ даних бројева излази раван $\epsilon^2 = \frac{\sum v^2}{24 - 2} = \frac{1.64}{22} = 0.074$, што је довољно близу теоријскоме $\epsilon^2 = 0.083$ (чл. чл. 37. и 43.). Затим, ако би, ради одређивања α и A , било стављено прво $\alpha = \alpha_0 + \Delta \alpha$ и $A = A_0 + \Delta A'$, то би основне 24 једначине примиле облик

$$n = n - \alpha_0 \sin(L + A_0) = \Delta \alpha \cdot \sin(L + A_0) + \alpha_0 \Delta A' \sin L' \cos(L + A_0)$$

а из њих би се $\Delta \alpha$ и $\alpha_0 \Delta A' \sin L'$ добили, очевидно, са истим тежинама и средњим грешкама, као и напред нађене величине x и y ; због тога је:

$$\epsilon_\alpha = \sqrt{\frac{0.074}{12}} = \pm 0.08 \text{ и } \epsilon_A = \frac{1}{\alpha_0 \sin L'} \sqrt{\frac{0.074}{12}} = \pm 2.4$$

ОДЕЉАК II.
АСТРОНОМИЈА.





ГЛАВА IX.

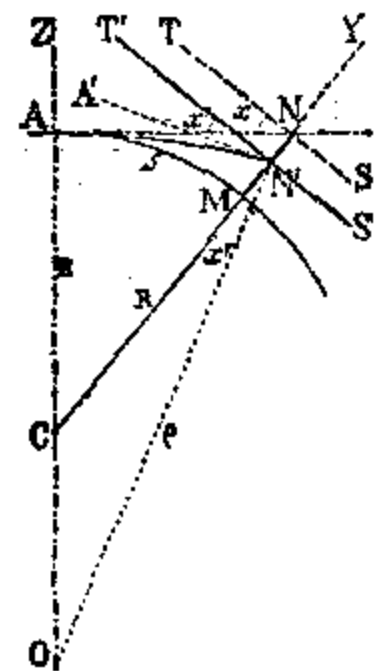
ПРИВИДНИ И ИСТИНИТИ ПОЛОЖАЈ ЗВЕЗДА НА НЕБУ.

56. Кривина земљине површине.

У свакој тачци на Земљи тежишна сила дела потпуно одређеним правцем, који показује правац *виска*, т.ј. конач о коме мирно виси какав тег. Тај се правац зове *вершикалан*. Равни, које су управне на тај правац, зову се *хоризоншалне*; она пак од њих, која пролази кроз дану тачку зове се *исшиниши* или *астрономски хоризонши* те тачке. Свака раван, која пролази кроз вертикалну линију и која је, разуме се, управна на хоризонат, зове се *вершикална* или *вершикал*.

Облик површине морâ и океанâ зависи од правца теже у разним тачкама на Земљи, јер сваки елемент површине течне масе, који се налази у мирном стању, мора бити управан на тежишни правац у тачци тога елемента. Под *исшинишим обликом Земље* и треба подразумевати ту површину океана, замишљено продужену и под континенте.

Кривина се Земљина јасно манифестује на свима океанима и морима а тако исто и на суву, у равним пределима, на тај начин, што сваки довољно високи предмет, ако се од њега удаљујемо, постепено тоне под хоризонт док напослетку и сасвим не ишчезне под њим. Узмимо да се око посматрачево налази на самој површини океана у тачци А и на неком растојању $AM = s$ од предмета М (сл. 13.). Ако замислимо кроз вертикалну линију AZ и тачку М вертикалну раван, она ће пресећи површину океана по некој кривој чији мали елемент $AM = s$ можемо сматрати за лук круга са крвином те криве, тако, да ће се центар С тога круга налазити у пресеку вертикалних линија AZ и MY. Хоризонт тачке А пресећи ће MY у некој тачци N, при чему ће права AN бити тангентна на круг у тачци А; због тога, — узимајући приближно да је AN равна s и означив MN са Н а полупречник $AC = MC$ са R, — добићемо $s^2 = (2R + H)H$ или пак, — због мале величине Н према 2R: —



Сл. 13.

$$s^2 = 2RH \dots \dots \dots (1.)$$

На тај би се начин могао израчунати полупречник R кривине овога пресека Земљине површине, кад би била позната висина Н некога предмета (на пример, висина катарке на броду, куле светиље или планине на обали) и оно растојање s на које је потребно удаљити се па да тај предмет сасвим нестане испод хоризонта.

Овај је начин, разуме се, и сувише груб, јер се ту не може одредити ни тачно растојање s , нити се тачно може узети у обзир повијање светлосног знака NA , услед његова пролаза из ређих слојева ваздуха (на висини H) у гушће (на самој површини Земље). Због тога се никако и не могу чинити закључци о стварној промени Земљине кривине на разним тачкама њене површине, нити у разним правцима са једне и исте њене тачке, на основу оних, веома различитих међу собом, резултата, који се добијају овим начином. Па ипак он даје бар неки појам о форми и димензијама Земљиним, на први мах за нас довољан, т. ј. да можемо рећи, да Земљина површина не треба много да се разликује од сферне и то са полупречником 6000 врста.*)

57. Даљина и спуштање привидног хоризонта.

Због допуштења, да је полупречник кривине R сталан, произлази пре свега то, да део Земљине површине, који се види са тачке N (сл. 13.) треба да изгледа оивичен кругом полупречника $MA = s = \sqrt{2R \cdot H}$; у самој ствари то тако и изгледа, како на мору тако и у сваком равном пределу. Овај се круг обично зове *привидни хоризонт* у тачци N , за разлику од истинитог или астрономског хоризонта у тој истој тачци, која, — по напред реченом, — представља раван TNS , која је управна на вертикалну линију CNY . Сматрајући $R = 6000$ врста и изражавајући s , — која се зове *даљина привидног хоризонта*, — такође у врстама а висину H у стопама, добићемо, по обрасцу (1.):

$$s = \sqrt{\frac{4 \times 3000}{3500} H} = 2 \sqrt{\frac{3000}{3500} H} = 2 \sqrt{\frac{6}{7} H} \dots \dots \dots (2.)$$

Угао $TNA = x$ увек је врло мали услед релативно мале висине H . Тај се угао x зове *спуштање привидног хоризонта*. Пошто је он раван углу $NCA = \frac{s}{R}$, то ћемо га добити у лучним минутама (узев приближно да је $\sin 1' = \frac{1}{3500}$ овако

$$x = \frac{s}{R \sin 1'} = \frac{7000}{6000} \sqrt{\frac{6}{7} H} = \sqrt{\frac{7}{6} H} \dots \dots \dots (3.)$$

Али, у овим изразима (2.) и (3.) још није узето у обзир напред речено повијање светлосног зрака AN , које у самој ствари, — тангирајући Земљину површину у тачци A , — достиже до вертикалне линије MN на висину MN' , унеколико мању од H . Из огледа се добија (Курс више Геодезије Н. Цингера, гл. V, чл. 46.) да при нормалном стању атмосфере, — када су доњи њени слојеви у најпотпунијој равнотежи, — тај зрак AN' можемо сматрати као лук круга са полупречником $AO = N'O = \rho$, који је 6 или 7 пута већи од Земљиног полупречника R . Услед тога, из троугла CON' , — где су: $CO = \rho - R$, $ON' = \rho$, $CN' = R + H'$ и угао $C = 180^\circ - x$, — добијамо:

$$\rho^2 = (\rho - R)^2 + (R + H')^2 + 2(\rho - R)(R + H') \cos x$$

одакле

$$\sin \frac{1}{2} x = \frac{[(\rho - R) + (R + H')]^2 - \rho^2}{4(\rho - R)(R + H')} = \frac{2\rho H' + H'^2}{4(R + H')(\rho - R)}$$

Због тога што је H' , у сравнењу са R , врло мало, као и угао x , наћи ћемо, да је

$$\frac{1}{4} x^2 = \frac{2\rho H'}{4R(\rho - R)}$$

*) 1 врста = 500 сажњева; 1 сажењ = 7 стопа (енгл.) = 84 палца (енгл.) = 2,133 5809 метра. Преводилац.

или, пошто је $x = \frac{s}{R}$ а $\rho = 7R$, то је

$$\frac{s^2}{R^2} = \frac{2\rho H'}{R(\rho - R)} = \frac{2 \cdot 7 \cdot R \cdot H'}{R \cdot 6 \cdot R},$$

одакле ће, на основу (1.), дефинитивно и приближно бити:

$$H = \frac{7}{6} H' \text{ или } H' = \frac{6}{7} H.$$

На тај се начин за даљину привидног хоризонта добија и тачнији и простији израз:

$$s = 2\sqrt{H'} \dots \dots \dots (2)'$$

Ако сад замислимо у тачци N' истинити хоризонт $T'N'S'$ и тангентну $A'N'$ на зрак AN' , то ће стварно спуштање привидног хоризонта, — посматрано са те тачке, — бити $x' = \sphericalangle T'N'A' = \sphericalangle CN'O$ а одредиће се из троугла CON' , — после замене синуса са њиховим углима, — овако:

$$x' = \frac{CO}{ON'} \cdot \sphericalangle A C N' = \frac{6}{7} x = \sqrt{\frac{6}{7}} H$$

или $x' = \sqrt{H'} \dots \dots \dots (3)'$

при чему ће се, као што је већ речено, угао x добити у минутама, ако висина H' буде изражена у стопама (енгл.).

58. Привидни и истинити правци на небесна тела.

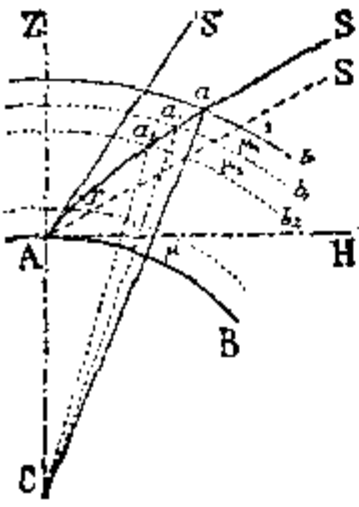
Услед преламања светлосних зракова при пролазу њиховом кроз земну атмосферу, небесна се тела виде у правцима, који су више или мање поремећени овим преламањем; због тога, да се не би долазило до погрешних закључака о положају и кретању небесних тела, треба већ у напред да се зна, уколико се могу разликовати њихови *истинити* положаји од *привидних*.

Сматрајући Земљину површину за сферу са полупречником $AC = R$ (сл. 14.), треба и атмосферу њену да замишљамо у облику концентричних са њом слојева $ab, a_1 b_1, a_2 b_2, \dots$ чије се густине повећавају са приближењем ка површини Земљиној. Тада ће зрак Sa од некога врло удаљеног небесног тела, ступивши из безваздушног простора у атмосферу и подвргавајући се познатим законима преламања, у свима тачкама својега даљег пута $a a_1 a_2 \dots A$, — све више и више да се приближава вертикалним правцима $aC, a_1 C, a_2 C \dots AC$ тих тачака и доћи ће напослетку у A правцем AS' , одступивши од свога првобитног правца aS , или од паралелног са њим AS , за неки угао $SAS' = r$, који се зове *астрономска рефракција*. При томе ће се, очевидно, сви елементи криволинијског зрака $Sa a_1 \dots A$ па и крајњи његов привидни правац, налазити у једној и истој вертикалној равни $ZACaS$. Према томе, астрономска рефракција само повишава истинити правац на небесно тело у вертикалној равни која кроз њега пролази.

Угловно надвишавање небесног тела над хоризонтом примљено је да се зове у астрономији *висина* тога небесног тела. На тај начин, ако замислимо на нашем цртежу линију AN , по којој вертикална раван ZAS пресеца хоризонт тачке A , то ће угао $S'AN = h'$ бити *привидна висина* небесног тела а угао $SAN = h = h' - r$ *истинита висина* његова.

59. Дејство астрономске рефракције.

Усљед знатне величине Земљиног полупречника R може се допустити, да су на неком пространству око тачке A , како површина Земљина тако и слојеви ваздуха над њом једнаке густине равни и паралелни међу собом; онда одступање зрака AS' од његовог првобитног правца aS (сл. 14.) не треба ниуколико да зависи од распореда густине у атмосфери и одредиће се врло просто. Заиста, кад означимо индексе преламања разних слојева, почев од највиших, са $1, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu$ а угле, које у тим слојевима образује светлосни зрак са хоризонтом тачке A , — са одговарајућим $h, h_1, h_2, h_3, \dots, h'$, — добићемо, по познатом закону преламања, поступно:



Сл. 14.

$$1 \cdot \cos h = \mu_1 \cos h_1 = \mu_2 \cos h_2 = \dots = \mu \cos h',$$

т. ј.

$$\cos h = \mu \cos h'$$

Одатле пак, кад узмемо $\cos h$ у облику $\cos (h' - r) = \cos h' \cos r + \sin h' \sin r$ и, због мале величине угла r , — ставимо $\cos r = 1$ и $\sin r = r'' \sin 1''$, наћи ћемо онда, да је

$$r = \frac{\mu - 1}{\sin 1''} \cotg h' = k \cdot \cotg h' \dots \dots \dots (4.)$$

где ће величина $k = \frac{\mu - 1}{\sin 1''}$, — при $\mu = 1.00028$ (која одговара средњој температури ваздуха $+ 10^\circ \text{C}$. и нормалноме притиску 760 мм.), — бити приближно $58''$.

Отуда је
$$r = 58'' \cotg h' \dots \dots \dots (4.)'$$

У следећој табlici дате су ове приближне величине рефракције r , срачунате по формули (4)' за разне висине h' . Поред њих дате су и тачне величине r , које ће се извести по формулама главе XIII, где ће бити узета у обзир и кривина Земљине површине.

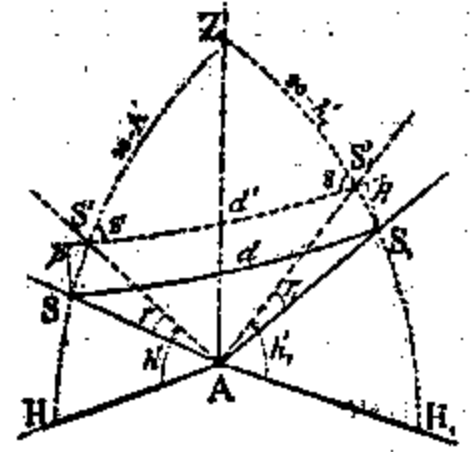
h'	90°	70°	50°	30°	20°	10°	5°	4°	3°	2°	1°	0°
$r(4)'$	0'0	0'4	0'8	1'7	2'7	5'5	11'1	13'8	18'4	27'7	55'4	∞
r (тачно)	0.0	0.4	0.8	1.7	2.6	5.3	9.8	11.6	14.2	18.1	24.4	35.1

Према томе, формуле су (4.) и (4.)' довољно тачне само за висине h' , које нису веће од 30° ; могу се оне до некле сматрати као задовољавајуће и за висине од 20° до 10° , али постају сасвим неупотребљиве за висине h' испод 5° .

Тачне величине r показују, да се рефракција близу хоризонта, и ако долази тек до $35'$, ипак мења врло јако са малом променом висине h' . Отуда нам потпуно округли дискови Сунца и пуног Месеца, кад су око $\frac{1}{2}^\circ$ над хоризонтом, изгледају у неколико спљоштени у вертикалном правцу.

Да видимо сада, како се морају да ремете усљед рефракције узајамни положаји различитих небесних тела. Кад замислимо кроз привидне правце AS' и AS'_1 ,

(сл. 15.), на нека два небесна тела, вертикалне равни ZAH и ZAH_1 и пренесемо у тим равнима величине рефракција $r = \sphericalangle S'AS$ и $r_1 = \sphericalangle S'_1AS_1$, које одговарају природним висинама тих небесних тела $h' = \sphericalangle HAS'$ и $h'_1 = \sphericalangle H_1AS'_1$, добићемо истините на њих правце $AS = AS_1$. Угао $S'AS'_1 = d'$ представља *привидно угловно растојање* међу овим небесним телима а угао $SAS_1 = d$ — *истинито*. Мерећи прво (привидно) и знајући висине h' и h'_1 , лако је срачунати и друго (истинито).



Сл. 15.

Ради тога замислимо у тачци А помоћну или тако звану небесну сферу (чл. 11.). Равни ZAS , ZAS_1 , SAS_1 , $S'AS'_1$ пресећи ће је по луцима великих кругова и образоваће на њој два сферна троугла ZSS_1 и $ZS'S'_1$. Разлике међу странама њиховим $r = ZS - ZS'$ и $r_1 = ZS_1 - ZS'_1$ моћи ће се сматрати као елементарно мале, и, због тога, кад замислимо кроз S и S_1 лукове $S\rho$ и $S_1\rho_1$ управне на $S'S'_1$, наћи ћемо директно и са довољном тачности, да је

$$d = d' + r \cos S' + r_1 \cos S'_1 \dots \dots \dots (5.)$$

при чему се угли $S' = \sphericalangle ZS'S'_1$ и $S'_1 = \sphericalangle ZS'_1S'$ могу лако срачунати из троугла $ZS'S'_1$ по даним његовим странама: $90^\circ - h'$, $90^\circ - h'_1$ и d' .

Кад узмемо за рефракције r и r_1 приближне изразе $r = k \cotg h'$ и $r_1 = k \cotg h'_1$, — где је $k = \frac{1}{\sin 1''} = 58''$ — лако је показати, да је истинито растојање d између сваке две тачке сфере S и S_1 , — које се налазе над хоризонтом, — увек веће од привидног d' . И заиста, кад поделимо троугао $S'ZS'_1$ перпендикуларом ZQ на два правоугла троугла, и означимо њихове катете $S'Q$ и S'_1Q (који никад нису већи од 90°), са q и q_1 , онда ће се разлика $(d - d')$ представити у облику

$$(d - d') = k (\cotg h' \cos S' + \cotg h'_1 \cos S'_1) = k (\tg q + \tg q_1) = k \frac{\sin (q - q_1)}{\cos q \cos q_1} = 1 - \frac{\sin d'}{\cos q \cos q_1}$$

што показује, да ће она бити увек вредност позитивна.

Јасно је затим и то, да ће најмања (min.) вредност за $(d - d')$ бити онда, када је $q = q_1 = \frac{1}{2} d'$ и тада ће наиме бити оваква:

$$(d - d')_{\min} = k \frac{\sin d'}{\cos^2 \frac{d'}{2}} = 2 k \tg \frac{d'}{2} \dots \dots \dots (6.)$$

Одатле излази између осталог и то, да нам се хоризонтални пречници Сунца и Месеца представљају, усљед рефракције, увек смањени приближно за исту величину $k \cdot \tg \frac{1^\circ}{2} = \frac{58''}{115} = \frac{1''}{2}$.

60. Небесни свод.

Простор над привидним хоризонтом, представља нам се у ведре дане у облику плавичастог свода разастртог над Земљином површином. То произлази, по теорији Релеја и хипотези Брјуке-Тиндала, слично *мушној средини*, — усљед рефлекса са честица, које се проносе у ваздуху, — светлих зракова већим делом голубије боје. Што год је ваздух чистији, тим је он мање сличан таквој средини, и због тога нам на високим планинама и са високо издигнутог балона небо изгледа интезивно плаво. Ван атмосфере оно би изгледало црно и тада бисмо могли и дању видети звезде и без дурбина.

На тај начин светлосни зраци одбијени са атмосфере, долазећи до ока посматрачева са свију могућних праваца, чине утисак, као да сви долазе са једноставне сферне површине. То, што нам само изгледа као површина, — и

зове се *небесни свод*. При томе нам он изгледа још унеколико и спљоштен у вертикалном правцу. Ово се објашњава делимично тиме, што у близини хоризонта има много водене паре и других страних честица у доњим слојевима ваздуха, услед чега је тај део небесног свода мање јасан; делимично пак и главније тиме, што се даљина до тога свода у близини хоризонта цени оком, у сравању са далеким земним предметима, међутим оцена од ока нема чиме да се руководи у правцу навише.

По јасној ноћи, без месечине, када атмосфера рефлектује ништавну количину звездане светлости, небо нам изгледа скоро црно. Тада се оку посматрачеву чини, као да су све звезде подједнако удаљене од њега па као да их тако притврђује за сам свод неба, услед чега нам оно и у овом случају изгледа облика сводасте површине. Мања пак јасноћа звездâ, које су близо хоризонта, и, близина земљашних предмета чини, по пређашњем, да нам та површина изгледа развучена у хоризонталном правцу.

61. Звезде некретнице.

У току сваке ноћи лако је запазити, да се звезде, према предметима привиднога хоризонта, премештају на сличан начин као и Сунце и Месец, наиме: са оне стране одкуда се Сунце рађа и све се звезде поступно издижу; затим, свака од њих, достигнув неку највећу за њу висину, почиње већ да се спушта у страну Сунчева заласка. При томе се неке звезде потпуно скривају за хоризонт, друге пак достижу своју најмању висину па се затим поново издижу и не залазећи. Али се истинити положај звезда, једне према другој ниуколико неће променити при тим општим покретима њиховим. Лако је се у томе уверити, ако се у различним временима измере угловна растојања међу њима каквим погодним за то инструментом, нпр. поморским угломерним инструментом — секстантом — па се измерена растојања исправе за дејство рефракције, као што је то раније објашњено.

Ни најмање се разлике у узајамном положају звезда неће открити ни тада, када се слична мерења изврше на разним местима Земљине површине, веома удаљених једно од другога; то пак значи, да је даљина звезда од нас изванредно велика у сравању са димензијама и саме Земље. Због тога та небесна тела изгледају само као просте светле тачке чак и онда када се посматрају кроз највеће дурбине, — ма да у самој ствари треба да буду врло велика. —

Услед напред речене непроменљивости узајамног положаја звезда, оне су још од прастарог доба назване *некретницама*. Међутим постоје још нека небесна тела, која су на први поглед веома слична са звездама, али која стално мењају своја места; кад се пак посматрају кроз дурбин, најсјајније од њих изгледају сличне Месецу, или као скоро пуни дискови, или пак у облику српа осетних угловних димензија (до 1'). Таквих небесних тела, која мењају своја места, рачунају сад на 500 њих а зову се, по величини, велике или мале *планете*, што грчки значи „лушалице“. Понекад се појављују нека више или мање сјајна небесна тела потпуно ориџиналног облика, праћена често пута врло дугим светлим реповима, које изврше извесан пут међу звездама некретницама за време од неколико десетина дана па их опет нестане. Ова се небесна тела зову *комете*, тј. „власаста“.

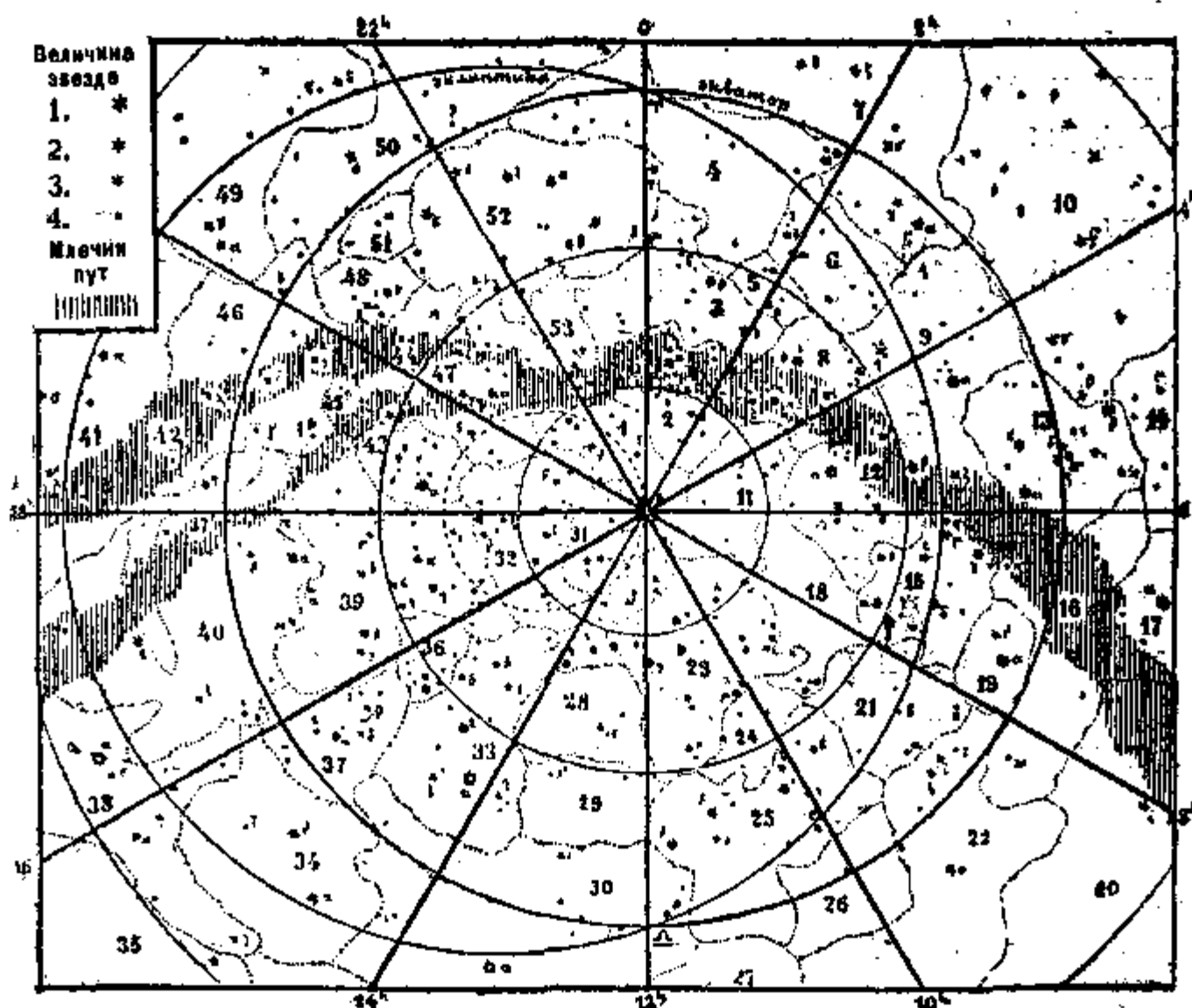
62. Величине и називи звезда.

Све су звезде биле већ издавна подељене, по интензитету њиховога сјаја, онако како се голим оком виде, на шест разреда или *величина*, тако да термин „величина“ овде ниуколико не указује на старне димензије тих тела. Најсјајније су звезде *прве* величине; за њима иду звезде *друге* величине, чији

је сјај мањи приближно за $2\frac{1}{2}$ пута; сјај звезда *шреће* величине још је за $2\frac{1}{2}$ пута мањи од друге, и тако даље до најмање сјајних звезда *шесте* величине. Таква је скала величина била проширена затим и на звезде, које се виде само помоћу дурбина, тако да се уопште рачуна, да сјај звезда $(n + 1)$ -те величине треба да буде приближно $2\frac{1}{2}$ пута мањи од сјаја звезда n -те величине. Пошто је прелаз од једнога разреда сјаја ка другоме поступан, то се понекад величина звезде означаје двама цифрама једна поред друге: $n.(n + 1)$ или пак $(n + 1).n$, што у првом случају показује, да је звезда ближе n -тој величини него ли $(n + 1)$ -тој а у другом — обратно. — Употребљује се такође и још тачнија ознака величине звездâ са целим бројевима и њиховим десетичним деловима, нпр. 2.7, што би по првом начину бало (3.2).

Најситније се звезде, 13., 14., 15. и 16. величине, могу видети само помоћу најсилнијих телескопа или се пак добијају на фотографској плочи после подуже експозиције њиховој светлости. Из таквих се звезда најслабијега сјаја састоји тако званм *млечни пут*, који се види на небу по тамној ноћи.

У узајамном распореду звезда, које се виде голим оком, не може се запазити никакав одређени закон већ оне саме по себи образују само случајне, више или мање скучене групе, које се зову *звездана јаша* или *констелације* (*сазвезђа*). Уосталом, општа густина или бројност звезда, особито пак малих — телескопских, — увећава се са приближењем ка млечном путу. Изучавање се констелација олакшава *звезданим глобусом*, који може бити тачна копија целог звезданог неба. Неки његов део може се нацртати и на равни, али, разуме се, у облику поремећеном унеколико. Такви се цртежи зову *звездане карте*, а збирка таквих звезданих карата целог неба зову се *атласи*. Овде је приложена карта (сл. 16.) онога дела звезданог неба, који се види у Петрограду. На њој су означене само најсјајније звезде (до 4. величине закључно); разне пак констелације су означене нумерама и имају ове латинске називе:



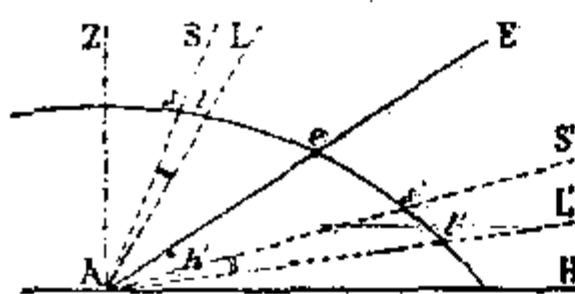
Сл. 16.

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1. Cepheus (Цефеј). | 28. Canes venatici (Хртови). |
| 2. Cassiopeia (Касиопа). | 29. Coma Berenices (Вереникине
власи). |
| 3. Andromeda (Андромеда). | 30. Virgo (Дева). |
| 4. Pisces (Рибе). | 31. Ursa minor (Мали Медвед). |
| 5. Triangulum (Троугаоник). | 32. Draco (Дракон, Змај). |
| 6. Aries (Ован). | 33. Bootes (Ловац). |
| 7. Cetus (Кит). | 34. Libra (Веси, Теразије). |
| 8. Perseus (Персеј). | 35. Lupus (Вук). |
| 9. Taurus (Бик). | 36. Corona borealis (Северни венац). |
| 10. Eridanus (Еридан). | 37. и 37.' Serpens (Змија). |
| 11. Camelopardus (Жирафа). | 38. Scorpio (Шкорпија). |
| 12. Auriga (Возар). | 39. Hercules (Херкул). |
| 13. Orion (Орион). | 40. Ophiuchus (Офиух). |
| 14. Lepus (Зец). | 41. Sagittarius (Стрелац). |
| 15. Gemini (Близанци). | 42. Scutum (Штит). |
| 16. Monoceros (Инорог). | 43. Lyra (Лира). |
| 17. Canis major (Велики Пас). | 44. Vulpecula (Лисица). |
| 18. Lynx (Рис). | 45. Sagitta (Стрела). |
| 19. Canis minor (Мали Пас). | 46. Aquila (Орао). |
| 20. Argo (Лађа). | 47. Cygnus (Лабуд). |
| 21. Cancer (Рак). | 48. Delphinus (Делфин). |
| 22. Hydra (Смук). | 49. Capricornus (Козорог). |
| 23. Ursa major (Велики Медвед). | 50. Aquarius (Водолија). |
| 24. Leo minor (Мали лаф). | 51. Equuleus (Ждребе). |
| 25. Leo (Лаф). | 52. Pegasus (Пегас). |
| 26. Sextans (Секстант). | 53. Lacerta (Гуштер). |
| 27. Crater (Чаша). | |

Свака је од најсјајнијих (1.—5. величине) звезда овде означена оном констелацијом, којој припада а сем тога и словом или бројем за разлику од осталих звезда исте констелације. Извесне су пак од најсјајнијих звезда добиле одавно нарочите називе: грчке, латинске и арапске. Овакви су нпр. називи најкрупнијих звезда:

Велич.	Ознака	Назив	Велич.	Ознака	Назив
(2)	α Ursae minoris	Polaris (Поларна, Северњача).	(2.1)	α Geminae	Кастор
(1)	α Tauri	Алдебаран	(1.2)	β Geminae	Полукс
(1)	α Aurigae	Капела	(1.2)	α Leonis	Регулус
(1)	α Orionis	Бетајхајзе	(1)	α Virginis	Спика
(1)	β Orionis	Ридел	(1)	α Bootis	Арктурус
(1)	α Canis majoris	Сириус	(1)	α Lirae	Вега
(1)	α Canis minoris	Процион	(1.2)	α Aquilae	Атаир

Кад се запамти доста добро фигура какве констелације, не може а да се не запази, како се она све више и више привидно шири са приближењем ка хоризонту. Али то је само оптичка обмана ока посматрачевог, сасвим слична



Сл. 17.

оној, што нам диск Сунца или Месеца изгледа увеличан близу хоризонта; јер тачна мерења дискова као и угловних растојања међу звездама не откривају ничега сличног. Очевидно је, да су ове, чисто субјективне појаве, у тесној вези са оним услед чега нам и небесни свод изгледа сплештен одозго. И заиста, пројектујући на такав свод (сл. 17.) привидне правце на небесна тела

S и L, око их види из A у тачкама свода s и l и цени угловно растојање међу њима $\sphericalangle SAL$ дужином лука sl ; близу хоризонта пак томе углу $\sphericalangle, S'AL' = \sphericalangle SAL$ одговара лук $s'l'$ који је већи од sl . Из истог се узрока цени од ока и свака висина небесног тела $h' = \sphericalangle EAH$, — особито ако није велика, — као знатно већа од стварне њене величине.

Задаће:

1.) На какву се висину H' треба попети над морским ниво-ом па да се са растојања од 50 врста угледа врх куле светиље, која је висока 30 сажњева над морем?

На основу формуле (2)' треба да буде: $50 = 2\sqrt{30 \times 7} + 2\sqrt{H'}$ па због тога је $H' = (25 - 14.5)^2 = 110$ стопа = 16 саж.

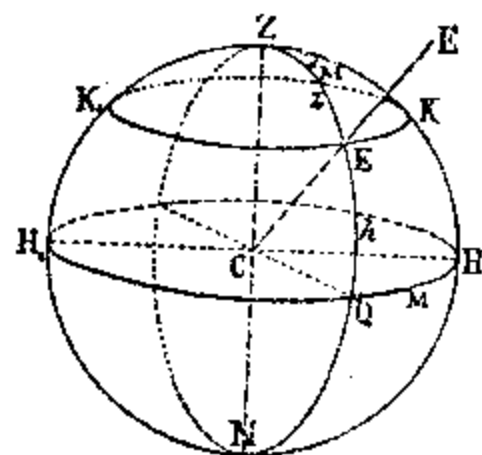
2.) Кад се узме, да је приближни израз за рефракцију $r = 58'' \cotg h'$, нека се докаже, да ће за све звезде, — које се налазе на истом растојању d од неке тачке истинитог хоризонта, — њихово привидно растојање од те тачке бити $d' = d + 58'' \cotg d$, тј. да ће се сва та растојања повећати за једну и исту величину $58'' \cotg d$.

ГЛАВА X.

ПРИВИДНО ДНЕВНО КРЕТАЊЕ ЗВЕЗДА

63. Координате небесних тела у односу према хоризонту.

Почнимо, посматрањем из неке тачке на Земљиној површини, да пажљиво изучавамо привидно дневно кретање звезда у односу према хоризонту, који нам изгледа потпуно непомичан, и, узмимо за то у помоћ небесну сферу, која је, као што је већ било објашњено, чисто геометричка представа и која нема ничега заједничког са небесним сводом. Замислимо, ради упрошћења, да је центар њен C у самом месту посматрања (сл. 18.). Хоризонт тога места као и свака уопште хоризонтална раван, представиће се на њој кругом HQH_1 ; вертикална пак линија њена CZ — двема тачкама Z и N . Прва од њих, која је над главом посматрачевом, зове се *зеница* а друга *надир*.



Сл. 18.

Узмимо да правац CE на неко небесно тело продире кроз сферу у тачци E . Вертикална раван, која пролази кроз тај правац, представиће се у облику великог круга $ZEQN$, који се зове *вертикал* а по некад и *висински круг*, зато што се висина небесног тела $h = \sphericalangle ECQ$ мери његовим луком EQ , лук пак $ZE = \sphericalangle ZCE = 90^\circ - h = z$ зове се *зенишно расхојање* небесног тела. Величином z (или и h) одређује се на небесној сфери цели мали круг KEK_1 , који се зове *алмукантараш*.

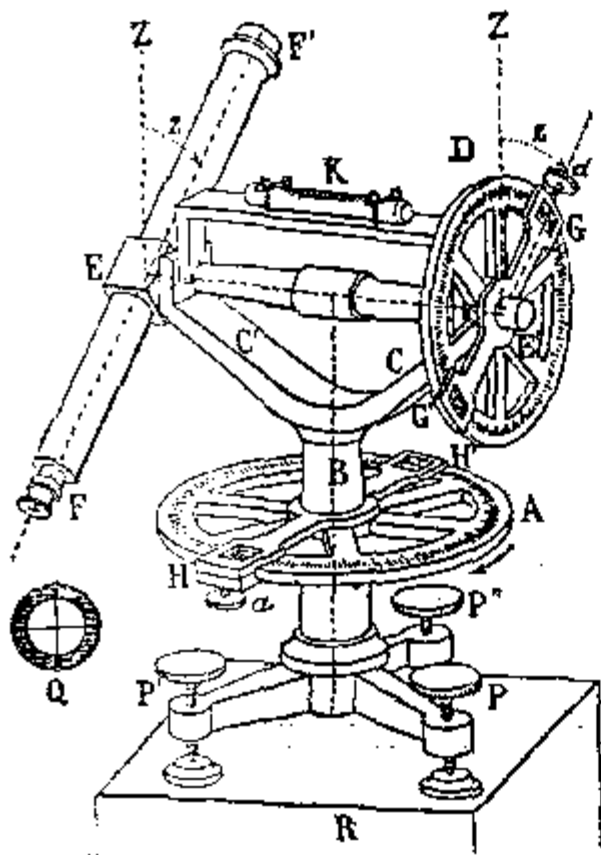
Угао међу равнима каква два вертикала ZQ и ZH мери се луком QH , који томе углу одговара на хоризонту, или, што је једно и исто, *хоризонталним углом* $\sphericalangle QCH = M$. Да би се разни вертикали разликовали међу собом, може се узети за услов, да се угли M , који их одређују, рачунају удесно, тј. у страну привидног дневног Сунчевог кретања; од које пак тачке H хоризонта треба бројити те углове, за нас је то, за сада, сасвим свеједно.

64. Универсални инструмент.

За мерење хоризонталних углова M међу различитим вертикалима, као и зенитних растојања z постоје инструменти, који се зову *универсални*. Њихова је конструкција у најопштијим цртама оваква:

Троножац са три завртка P, P' и P'' (сл. 19.), који је постављен на каквој чврстом постољу R , држи *хоризонтални круг* A , који је тачно подељен по периферији на степене и њихове делове. Над центром тога круга издиже се стуб B , који се слободно обрће око своје *вертикалне осе*. Овај се стуб навише свршава са два носача C и C' , на једноме од њих чврсто је утврђен *вертикални*

круг D , који је тако исто подељен на степене као и круг A . У гњездима носача C и C' обрће се хоризонтална оса EE' на чијем је једном крају утврђен дурбин FF' а на другом, који пролази кроз центар круга D , — лењирѝ или алхидада



Сл. 19.

са две дијаметрално супротне казаљке GG' , које одређују на подели круга D нагиб дурбина. За утврђавање пак алхидаде заједно са дурбином у жељени положај служи завртањ d . Слична алхидада са казаљкама H и H' и са завртњем a за утврђивање учвршћена је такође за стуб B ради читавања хоризонталних углова на кругу A .

За довођење осе EE' у тачно хоризонтални положај служи нарочита јахаћа справа K са либелом. Ако је доведемо у хоризонтални положај прво у правцу PP' а затим у правцу управном на PP' , — дижући или спуштајући треношчеве завртње P , P' и P'' , колико то захтева либела, — онда ће вертикална оса инструмента бити вертикална а круг A хоризонталан. У дурбину, а наиме у фокалној (жижиној) равни његова објектива, ставља се прстен Q са затегнутим на њему кончићима од паучине, од којих је један хоризонталан а други вертикалан.

Линија, која спаја тачку пресека тих кончића са оптичким центром објектива, зове се *оптичка оса дурбина*; при дизању и спуштању дурбина она треба да описује вертикалну раван па због тога треба да буде строго управна на осу EE' .

Ако дурбин инструмента будемо стављали у разне вертикалне равни и ако при сваком таквом стављању будемо читавали круг A помоћу казаљки алхидаде H и H' , то ће нам разлике тих читавања давати величине *хоризонталних углова*, које међу собом заклапају напред речени вертикали. Ако пак, — утврдивши завртањ a , — будемо давали дурбину разне нагибе у једној и истој вертикалној равни и ако, ради упрошћења допустимо, да ће казаљка G и G' на вертикалном кругу D показивати равно 0° , када је оптичка оса дурбина управљена тачно у зенит, — то ће нам читавања на томе кругу давати увек *зенишна растојања* z оптичке осе дурбинове.

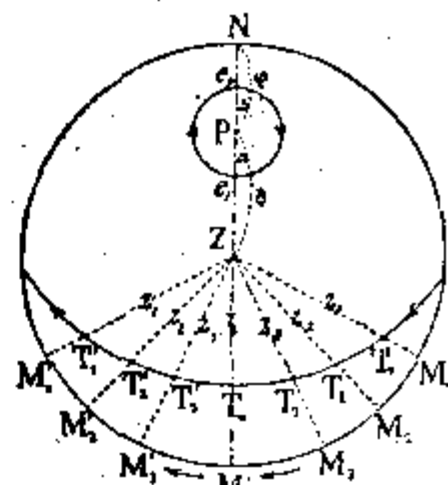
Услове, које смо поставили и које универсални инструмент треба да задовољава, као што су: чврсто постављање, тачан положај његових делова, тачно читавање његових кругова и др. — не могућно је, разуме се, испунити до савршенства; али, *задаћа је практичне астрономије*, да, по могућности, отклони утицај разних недостатака инструмента на мерења, која се са њиме врше; ми ћемо пак, — имајући за сад у виду само суштину ствари а не и детаље, — сматрати, да су ти недостаци потпуно отклоњени.

Интервали времена, који протичу између различитих момената посматрања, одређују се помоћу *часовника*, тј. механизма, на којима се одбројавају клатења клатна. Најважнији и неизоставни услов, којему треба да одговори добар часовник, састоји се у томе, да *шрајање* свакога посебног *размаха* његова клатна — који у главноме зависи од његове дужине, — буде непроменљиво (изохроно). Ово трајање и служи као *јединица* за мерење различитих интервала времена.

65. Одређивање правца меридијана.

Са универсалним инструментом и часовником пратићемо неку звезду, која се све више и више издиже над хоризонтом. Кад поставимо инструмент како треба и управимо његов дурбин на звезду, ставимо и утврдимо завртњем d казаљке вертикалног круга D на прочитање z , нешто мање од зенитног

растојања звезде, окрећући затим сав горњи део инструмента тако, да звезда не изађе из поља гледања дурбинова, очекиваћемо момент, када она сама приђе хоризонталном концу, т. ј. када ступи на алмукантарат z_1 (сл. 20.); при томе треба учинити још и то, да звезда у том моменту буде и на вертикалном концу дурбина па одма забележити како момент T_1 који показује часовник тако и прочитање M_1 на хоризонталном кругу А. Пошто ће звезда продужити да се издиже, то кад се сад постави дурбин на ново зенитно растојање z_2 , мање од z_1 , и, поступи по пређашњем, запазићемо и забележићемо момент T_2 по часовнику и прочитање M_2 на хоризонталном кругу, које одговара алмукантарату z_2 ; сличним начином ћемо, за следеће још мање зенитно растојање, наћи T_3 и M_3 . Продужујући овај поступак, увидећемо, да ће покрет звезде по висини бити све лаганији и лаганији и да ће, пошто достигне до неког најмањег зенитног растојања ζ , почети да се спушта. Тада ћемо је почети да посматрамо на сличан начин, али сад већ у обрнутом реду; тј. стављаћемо дурбин поступно на пређашња зенитна растојања $\dots z_3, z_2$ и z_1 па посматрати и бележити одговарајуће им моменте по часовнику: $\dots T'_3, T'_2$ и T'_1 као и прочитања на хоризонталном кругу: $\dots M'_3, M'_2$ и M'_1 .



Сл. 20.

Узевши за сваки пар посматрања, која су извршена при истом зенитном растојању дурбина, средње аритмет. из запажених момената, видећемо, да ће све те средње величине бити једнаке међу собом, тј.

$$\frac{1}{2}(T_1 + T'_1) = \frac{1}{2}(T_2 + T'_2) = \frac{1}{2}(T_3 + T'_3) = \dots = T_0$$

а отуд излази:

$$T'_1 - T_0 = T_0 - T_1 = \tau_1; T'_2 - T_0 = T_0 - T_2 = \tau_2 \text{ и т. д.}$$

Исто ће се тако показати и полусуме прочитања на хоризонталном кругу:

$$\frac{1}{2}(M_1 + M'_1) = \frac{1}{2}(M_2 + M'_2) = \frac{1}{2}(M_3 + M'_3) = \dots = M_0$$

а отуд:

$$M'_1 - M_0 = M_0 - M_1 = A_1; M'_2 - M_0 = M_0 - M_2 = A_2; \text{ и т. д.}$$

Све ово значи, да су, како привидан пут тако и брзина кретања звезде, потпуно симетрични у односу према ономе вертикалу, који је одређен прочитањем M_0 на хоризонталном кругу и кроз који звезда пролази тачно у моменту T_0 , када је њено зенитно растојање најмање тј. ζ .

Понављајући такве низове посматрања звезда при једном и истом, непроменљивом положају хоризонталног круга инструмента, увидећемо, да све звезде, без изузетка, достижу до својих најмањих зенитних растојања ζ у једноме и истом вертикалу M_0 , тако да се његов правац може обележити на Земљи каквим сталним знаком. Ова вертикална раван, која дели дневни пут сваке звезде на два потпуно симетрична дела зове се *небесни меридијан*; линија пак њенога пресека са хоризонтом зове се *меридијанска* или *полудневна* (због тога што у подне вертикални штап даје на хоризонталној равни сенку по правцу те линије). Напред изведени хоризонтални угли A_1, A_2, A_3 и тд., који одређују положаје осталих вертикала у односу према меридијану, зову се *азимуши*; онај пак вертикал, који је управан на меридијан ($A = \pm 90^\circ$) зове се *први вертикал*.

66. Одређивање висине пола.

Напред изведени момент T_0 по часовнику одговара горњему пролазу посматране звезде кроз меридијан или тако званој *горњој кулминацији* њеној; други пак пролаз кроз меридијан или *доњу кулминацију*, — при којој звезда има највеће зенитно растојање и креће се у супротну страну, — можемо посматрати само код звезда, које не залазе под хоризонт. За некоје од таквих звезда, нпр. за Поларну, највеће се њихово зенитно растојање врло мало разликује од најмањег а саме оне описују свакодневно на небесној сфери тек врло мале кругове око неке потпуно непокретне тачке P , која се налази на самом меридијану (сл. 20.). А пошто смо раније видели, да је узајамни положај звезда на небу непроменљив, то сад долази закључак, да су оне све на непроменљивом растојању од те тачке P , тј. њихови путеви на небесној сфери треба да буду мали кругови са заједничким полом у P .

Није тешко да се тачно одреди растојање θ тога пола P од зенита. Ради тога треба само измерити инструментом зенитна растојања једне и исте звезде, нпр. Поларне, у моментима њихових горњих и доњих кулминација. Нека прво зенитно растојање Ze_1 , — исправљено за његову рефракцију, — буде ζ_1 , а друге Ze_2 , — такође исправљено за рефракцију, — ζ_2 . Означив непознато нам још растојање те звезде од пола са Δ , имаћемо:

$$\zeta_1 = \theta - \Delta, \quad \zeta_2 = \theta + \Delta.$$

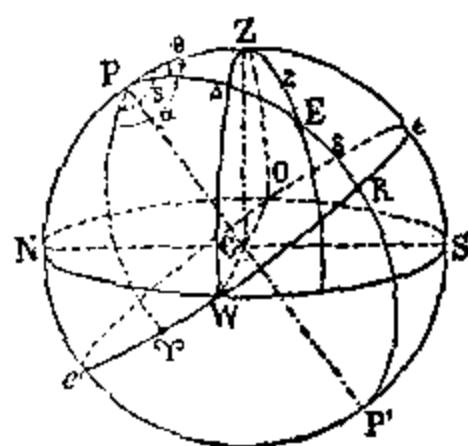
а одатле добијамо:

$$\theta = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} \quad \text{и} \quad \Delta = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}$$

На тај начин можемо одређивати висину пола $\varphi = 90^\circ - \theta$ на даном месту колико год пута желимо. Она излази, *непроменљиво* (или тачније говорећи — скоро сасвим непромењљива) и зове се *ширина места*.

67. Равномерност дневнога кретања звезда.

Закључак, који смо учинили, да пут сваке звезде на небесној сфери треба да буде мали круг са полом у тачци P , може се проконтролисати истим



Сл. 21.

посматрањима са којих смо и почели, — одредивши ширину места $\varphi = 90^\circ - \theta$. — Ради тога замислимо звезду E (сл. 21.) у моменту T по часовнику, када јој је азимут $M - M_0 = A$ и зенитно растојање z , — разуме се, поправљено за његову рефракцију. — Кад повучемо кроз E и P велики круг на сфери, добићемо сферни троугао ZPE у којем су познате: $PZ = \theta$, $ZE = z$ и $\angle ZPE = 180^\circ - A$; због тога се растојање $PE = \Delta$ и угао $\angle ZPE = t$ одређује из тог троугла по формулама:

$$\left. \begin{aligned} \cos \Delta &= \cos z \cdot \cos \theta - \sin z \cdot \sin \theta \cdot \cos A \\ \sin \Delta \cdot \sin t &= \sin z \cdot \sin A \\ \sin \Delta \cdot \cos t &= \cos z \cdot \sin \theta + \sin z \cdot \cos \theta \cdot \cos A \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

у место којих је боље за рачунање узети, — на основу реченога у чл. чл. 16. и 18. (контролишући их другом из једначина A), — ове:

$$\operatorname{tg} k = \operatorname{tg} z \cos A, \quad \operatorname{tg} t = \frac{\sin k}{\sin(\theta + k)} \operatorname{tg} A, \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{\operatorname{tg}(\theta + k)}{\cos t}, \dots \dots \dots (A')$$

где лук k означава растојање од Z до основе перпендикулара спуштенога из E на меридијан PZS . На сличан ће се начин срачунати $PE = \Delta$ и $ZPE = t_1$ за момент по часовнику T_1 , на основу истинитога зенитног растојања z_1 звезде и њенога азимута $M_1 - M_0 = A_1$; исто ће се тако наћи Δ_2 и t_2 за момент T_2 на основу даних z_2 и A_2 и тако даље.

Из таквих ће се срачунавања и показати увек, да је $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \dots \Delta$, тј. да *поларно растојање* звезде Δ остаје у току од једне ноћи непроменљиво. Осетне се промене у њему могу осетити тек после неколико дана, ради чега је најпростије да се сваки пут мери зенитно растојање звезде ζ у моменту њене горње кулминације, јер тада излази просто

$$\Delta = \theta - \zeta.$$

По напред наведеним формулама срачунати угли t_1, t_2, t_3 и ост. увек ће изаћи тачно пропорционалним интервалима времена $T_1' - T_0 = \tau_1, T_2' - T_0 = \tau_2$ и ост., који им одговарају, тако да ће уопште бити

$$t = K \tau$$

где је K стални број, један и исти за све звезде без изузетка. То значи, да је кретање звезде по малим круговима око пола P потпуно *равномерно* и да се врши за све њих са једном и истом брзином. Другим речима, кретање је њихово такво, као да су оне све притврђене за небесну сферу а она се равномерно обрће око линије PCP' (сл. 21.). Због тога је та линија још у старом веку добила назив *светске осовине*.

Пол P , који се види са свију тачака северне полукугле Земљине зове се *северни пол*; њему пак супротни P' зове се *јужни*. Тачке N и S , које одговарају северном и јужном правцу меридијанске линије NS , зову се *Север* (Nord) и *Југ* (Sud); исто тако, сав део меридијана NZ који садржи у себи пол P зове се северни за разлику од другог, јужног његовог дела ZS . Она половина небесне сфере у којој се сва небесна тела издижу над хоризонтом, зове се *источна*; друга пак, где се оне спуштају зове се *западна*; у тачној су вези такође и речи *исток* (Ost) и *Запад* (West) са тачкама O и W , у којима се хоризонт пресеца са првим вертикалом.

68. Екваторијалне координате небесних тела.

Дневно кретање звезда, које је доста сложено у односу према вертикалној линији и хоризонту места посматрања, излази, као што смо се сад убедили, као врло просто у односу према светској оси. Услед тога је, за одређивање положаја звезда и других небесних тела на небесној сфери, и природније и простије узети за координатну осу не вертикалну линију већ светску осу PP' , при чему ће се хоризонт заменити другом равни, која је на ту осу управна. Велики круг $OeWe'$ (сл. 21.), који представља ту раван, зове се *небесни екватор*; сви пак велики кругови који су управни на тај екватор, тј. који пролазе кроз пол P , зову се *деклинациони кругови*. Према томе је круг $PERP'$ деклинациони круг звезде E а његов лук $ER = 90^\circ - \Delta = \delta$ зове се *деклинација звезде*. Што се тиче угла $ZPE = t$ између тог круга и меридијана, то смо видели, да је тај угао пропорционалан интервалу времена τ , што протекне од момента T_0 горње кулминације звезде. Тај се угао зове *часовни угао* и рачуна се као позитиван у страну кретања звезда.

На тај се начин положај свакога небесног тела одређује на небесној сфери часовним његовим углом t и поларним растојањем Δ (или пак деклинацијом $\delta = 90^\circ - \Delta$) сасвим онако као и азимутом A и зенитним растојањем z (или пак висином $h = 90^\circ - z$); при томе ће се сви неопходно потребни односи

међу овима и онима координатама добити непосредно из сферног троугла ZPE, у коме се трећи угао ZEP = q зове *паралакшички*; тако на пример, ако су дани t и Δ, то ће се A и z одредити из ових формула:

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= \cos \theta \cdot \cos \Delta + \sin \theta \cdot \sin \Delta \cdot \cos t \\ \sin z \cdot \sin A &= \sin \Delta \cdot \sin t \\ \sin z \cdot \cos A &= -\sin \theta \cdot \cos \Delta + \cos \theta \cdot \sin \Delta \cdot \cos t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B)$$

или из ових:

$$\operatorname{tg}(\theta + \gamma) = \operatorname{tg} \Delta \cdot \cos t, \quad \operatorname{tg} A = \frac{\sin(\theta + \gamma)}{\sin \gamma} \operatorname{tg} t, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos A} \dots \dots \dots (B')$$

које су исте што и формуле (A') предњег чл. 67. али написане само у обрнутом реду.

Рузуме се, да је положај разних деклинационих кругова, — непроменљивих међу собом, — још згодније одређивати не помоћу променљивих њихових часовних углова t, који се рачунају од меридијана, већ помоћу неких сталних углова, који се рачунају од деклинационог круга неке конвенционално изабрате тачке неба. Као таква узета је тачка екватора γ (сл. 21.), у којој се Сунце налази у моменту пролећње равнодневице (када његова негативна деклинација прелази у позитивну) и која се због тога зове *тачка пролећње равнодневице* или *еквинокцијална тачка*. О томе пак, како се, из посматрања Сунца, одређује њен положај према звездама некретницама, биће изложено даље, — у глави XV. о Сунчевом кретању. —

Почетни декланациони круг Pγ, који пролази кроз тачку γ, зове се *колур равнодневица* или *еквинокцијални колур* а угли између њега и других деклинационих кругова, зову се *рехтасцензије* и рачунају се увек од 0° до 360° у супротном правцу привиднога дневног кретања звезда. Тако нпр. угао α = γPR или њему равни лук екватора α = γR представља рехтанцензију круга PRP' а отуд и звезде E, која је на томе кругу. Рехтасцензије α и деклинације δ и јесу тако зване *екваторијалне координате небесних тела*. Оне су за звезде некретнице у току једнога дана скоро непроменљиве, тј. оне су као и деклинације δ подвргнуте вр. малим променама (чл. 67.)

69. Звездано време.

Из напред изложенога излази, да ће се помоћу часовног угла γPZ = S (сл. 21.), — који има у извесном моменту тачку пролетње равнодневице γ, — лако одредити часовни угли t ма каквих звезда, чије су рехтанцензије познате, јер ће свагда бити

$$t = S - \alpha$$

Тај часовни угао S тачке пролећње равнодневице зове се *звездано време*; потпуни пак интервал времена између два сукцесивна горња пролаза тачке γ кроз меридијан, зове се *звездани дан* и дели се или на 360° или пак на 24 часа. Према томе и звездано време S, и часовне углове t, и рехтасцензије α небесних тела, можемо рачунати како у степенима, тако и у часовима. За претварање пак некога угла, напр. 236° 38' 21".6, у меру времена или обратно, треба увек имати у виду ове једнакости:

$$1^h = 15^m \quad 1^m = 15^s \quad 1^s = 15''$$

$$1^\circ = \frac{1^h}{15} = 4^m \quad 1' = \frac{1^m}{15} = 4^s \quad 1'' = \frac{1^s}{15}$$

и поступати овако:

$$236^\circ = \frac{1}{15} \times 236^h = 15^h + 11 \times 4^m \quad 15^h = 15 \times 15^\circ = 225^\circ$$

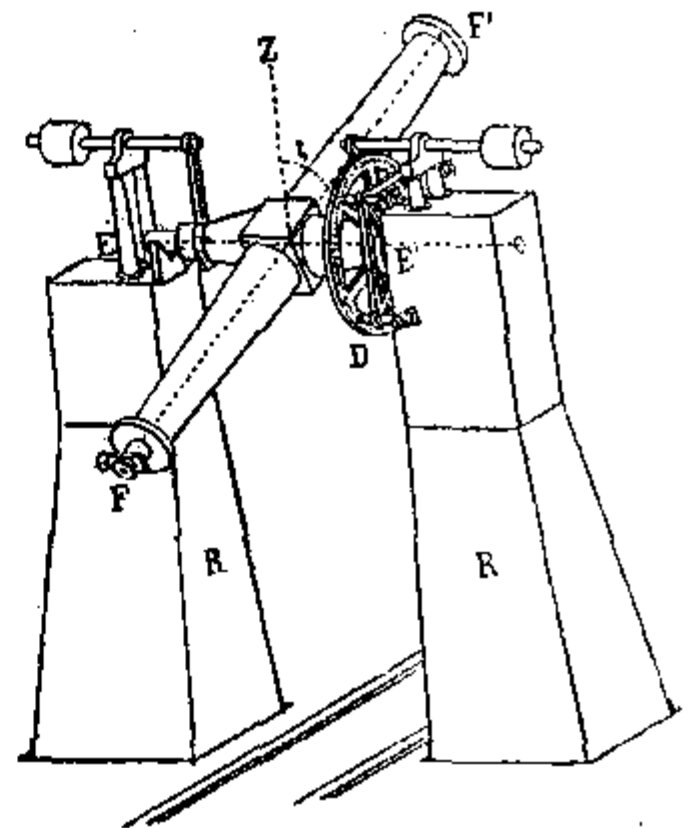
$$38' = \frac{1}{15} \times 38^m = 2^m + 8 \times 4^s \quad 46^m = \frac{1}{4} \times 46^\circ = 11 + 2 \times 15$$

$$21.6'' = \frac{1}{15} \times 21.6^s = \underline{+ 1^s 44''} \quad 33^s 44'' = \frac{1}{4} \times 33^s 44'' = \underline{8' + 1.44 \times 15''}$$

$$236^\circ 38' 21.6'' = 15^h 46^m 33^s 44'' \quad 15^h 46^m 33^s 44'' = 236^\circ 38' 21.6''$$

Сад представимо себи часовник са клатном, који учини у току једнога звезданог дана тачно $86400 (= 24 \times 60 \times 60)$ клаћења; његова ће се показана T разликовати од звезданог S само за неку сталну величину u , која се зове *поправка* (или *корекција*) *часовника*, тако, да ће увек бити: $T + u = S$. Ради одређивања u довољно је запазити, по часовнику, момент T горњег пролаза кроз меридијан ма које звезде, чија је рехтасцензија позната; јер тада излази, да је $S = \alpha$ па отуд и $u = \alpha - T$. Знајући поправку часовника u , лако је одређивати рехтасцензије осталих небесних тела, из сасвим сличних момената њихових кулминација, при чему за горње кулминације излази $S = T + u = \alpha$, а за доње $S = T + u = \alpha \pm 12^h$.

Ради таквих посматрања кулминација небесних тела, најпростије је поставити хоризонталну обртну осу EE' дурбина (сл. 22.) једном за свагда на стабилним стубовима R и R' тако, да његова оптичка оса описује тачно меридијанску раван а затим посматрати по часовнику моменте пролаза разних небесних тела кроз вертикални конач кончића дурбина. Такав се најпростији астрономски инструмент зове *пасажни* или *инструмент пролаза*. Ако ли је он снабдевен још и вертикалним кругом D за мерење зенитних растојања ζ небесних тела у моментима њихова пролаза кроз меридијан, — у циљу одредбе њихове деклинације $\delta = \varphi - \zeta$, — онда се такав инструмент зове *меридијански круг*.



Сл. 22.

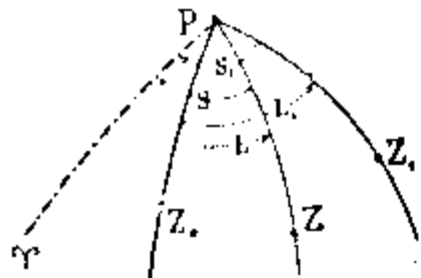
70. Географске ширине и дужине.

Ширина (лашишуда) *места* φ , услед своје непромењљивости, најприроднија је *географска координата* за одређивање положаја тога места на Земљи. Њоме ее управо одређује читав низ тачака тј. једноставна крива на Земљиној површини, која се зове *земљина паралела* (упоредник). Паралела са средњом ширином $\varphi = 0^\circ$ зове се *Земљин екватор* а две тачке, где је $\varphi \pm 90^\circ$ зову се *Земљини полови*, — северни и јужни. —

Друга је географска координата *дужина* (лонгишуда) *места* а то је угао L , који обрађује раван меридијана тога места са почетним меридијаном каквога другог, конвенционално изабратог, места на Земљи. За такво су место сви народи изабрали Гринвичку астрономску Опсерваторију, да од ње рачунају време. Непрекидни низ тачака на Земљиној површини на истој географској

дужини L зове се *Земљин меридијан (подневак)*; Земљин пак меридијан, који пролази кроз Гринвичку Опсерваторију, чије су све тачке на $L = 0^\circ$, зове се *први Земљин меридијан*. На тај се начин положај каквог места на Земљиној површини увек одређује ширином φ и дужином L .

Равни небесних меридијана у разним тачкама једнога и истог Земљиног меридијана могу и да се не поклапају, — они су само паралелни међу собом, — па се због тога морају представити на небесној сфери једним и истим великим кругом,



Сл. 23.

који пролази кроз светске полове P и P' ; отуд излази, да је у сваком узетом моменту звездано време S једно и исто за све те тачке. Замислимо сада на небесној сфери (сл. 23.) у неком моменту положај меридијана PZ_0 Гринвичке Опсерваторије и меридијана PZ_1 нека друга два места на Земљи са дужинама $L = \sphericalangle Z_0PZ$ и $L_1 = \sphericalangle Z_0PZ_1$ и нека је у првом месту, у томе моменту, било звездано време равно $S = \sphericalangle \Upsilon PZ$

а у другом $S_1 = \sphericalangle \Upsilon PZ_1$. Јасно је отуд, да је

$$L_1 - L = S_1 - S,$$

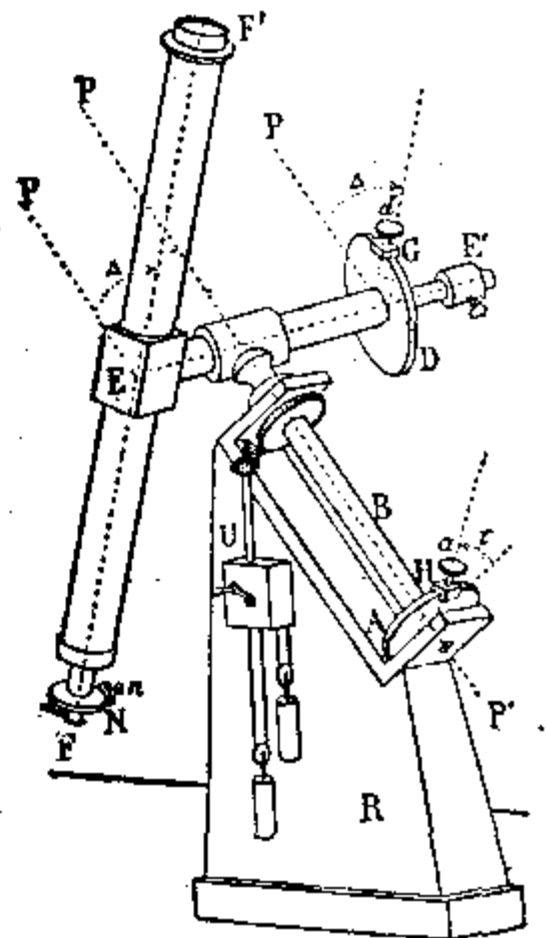
тј. да је разлика дужина двају места увек равна разлици звезданих времена, која су била у истом моменту у та два места. На тај се управо начин и одређују разлике дужина разних места на Земљи, тј. простим сравањем показанја часовника двају разних места, што се најпростије и најтачније врши помоћу телеграфа.

71. Инструменти са паралактичким постројем.

Према екваторијалним координатама α (или t) $\Delta = 90^\circ - \delta$ конструишу се нарочити инструменти — *екваторијали* — са тако званом *паралактичким постројем*. Општа ће се представа о таквом инструменту (сл. 24.) лако добити, ако замислимо, да је вертикална оса B описаног у чл. 64.

универсалног инструмента постављена не у правцу вертикалне линије већ у правцу светске осе PP' . Вертикални његов круг постаће тада *деклинациони круг* D а казаљка алхидаде G показиваће на њему поларно растојање Δ оне звезде на коју је управљен дурбин FF' ; на кругу пак A , који је управан на осу B , казаљка ће показивати непосредно часовни угао t звезде, ако је само његова 0° постављено тачно у јужном правцу меридијана. Због тога се круг A , у том случају, зове *часовни круг* а оса B — *часовна оса*.

Таквоме се инструменту обично додаје још и часовни механизам U те да се помоћу њега даде оси B равномерно обртање, брзином једнога целог обрта на дан. Ако тада навизирамо дурбином FF' на какву звезду и пустимо часовни механизам, да се оса B окреће, звезда тад неће ни изаћи из поља гледања дурбиновог и изгледаће као да је непомична. Ови су екваторијали врло подесни за детаљно изучавање облика разних небесних тела, за одређивање њихових димензија а тако исто и за мерење малих разлика $\alpha_1 - \alpha$ и $\delta_1 - \delta$ између ректасцензија и деклинација извесних звезда и небесних тела, која се могу једновремено видети у пољу гледања дурбина.



Сл. 24.

Да би се екваторијалом могла мерити мала угловна растојања ρ и разлике $\alpha_1 - \alpha$ и $\delta_1 - \delta$, на окуларни крај F његова дурбина ставља се справа, која се зове *микромешар*. Осим два стална унакрсна кончића, уздужног и попречног, у тој је справи намештен још један попречни кончић, који се може померати помоћу фино израђеног *микромешарног завршња* n ,

при чему се ово померање — па, разуме се, и њему одговарајући угао из центра објектива — мери са ванредном тачношћу бројем оброта и деловима једнога оброта тога завртња. Мрежи кончића а с тим уједно и завртњу л можемо давати какав желимо правац (положај) прочитањем угла оброта на спољњем кругу N, који је подељен на степене и који се зове *позицијски круг*. Овај се угао рачуна управо од правца уздужног кончића ка полу Р у ону страну куда расту рехтасцензије, и, зове се такође *позицијски* или *положајни* угао.

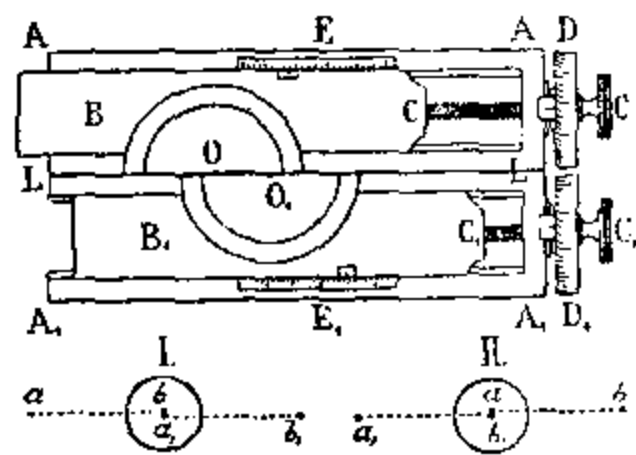
Замислимо сада, да се у пољу гледања дурбина виде две међу собом врло блиске звезде или уопште две тачке *a* и *b*, чије су екваторијалне координате α, δ и α_1, δ_1 . Пошто дурбину дамо дневно покретање помоћу часовног механизма U, удесимо уздужни кончић микрометра правцем *ab* а затим поставимо попречни покретни кончић једно за другим на *a* и на *b*; при томе ће нам прочитање на кругу N дати позицијски угао $\text{Pab} = p$ а разлика прочитања микрометарног завртња — углавно растојање $ab = \rho$. Тада ће се из сферног троугла *Pab*, — по даним у њему странама $\text{Pa} = \Delta = 90^\circ - \delta$, $ab = \rho$ и углу $\text{Pab} = p$, — и одредити тражена разлика $\text{Pa} - \text{Pb} = \Delta - \Delta_1 = \delta_1 - \delta$ и $\angle \text{aPb} = \alpha_1 - \alpha$; а како су оне врло мале то ће изаћи просто:

$$\delta_1 - \delta = \rho \cdot \cos p \quad \text{и} \quad \alpha_1 - \alpha = \frac{\rho \cdot \sin p}{\cos \delta}$$

Ово је најтачнији начин за одређивање малих разлика $\alpha_1 - \alpha$ и $\delta_1 - \delta$.

Ради сличних и тачних одређивања растојања ρ и разлика $\alpha_1 - \alpha$ и $\delta_1 - \delta$, која износе и $\frac{1^\circ}{2}$ па и више, употребљује се дурбин чији је објектив пресечен напола, обе су му половине O и O₁ (сл. 25.) утврђене на плочицама B и B₁ и могу да се покрећу у општој справи AAA₁A₁ помоћу микрометарних завртња CC и C₁C₁, који су паралелни са линијом пресека LL. Допустимо да је једна половина O дала у фокалној равни дурбина лик двеју тачака *a* и *b* толико далеко једна од друге, да се не могу једновремено да виде у пољу гледања окуларара. Пошто и друга половина O₁ даје такве исте њихове ликове *a*₁ и *b*₁, то је, — пошто се намести разрез LL у правцу *ab*, — могућно померити O₁ завртњем C управо толико, да лик *a*₁ падне тачно на *b* (I) а у другу страну толико да *a* падне на *b*₁ (II). Ако је при томе половина O остала непокретна, то ће разлика прочитања завртња C₁ у положајима I и II (број целих оброта завртња C₁ чита се на скали E₁ а делови једнога оброта на добошу D₁) дати линеарну величину удвојеног растојања $\rho = ab$; позицијски пак угао линије пресека LL, или, што је исто, угао $\text{Pab} = p$ чита се на позицијском кругу, који је удешен непокретно на објективном крају F' дурбина. Услед тога што се са таквим инструментом може да мери са особитом тачношћу чак и пречник Сунчевог диска, — он је назват *хелиометар*.

У најновије се време астрономи служе (осим дурбина) још двама врло моћним средствима за изучавање детаља у васиони и физичке природе небесних тела а то су *фотографија* и *спектрофотографија*, јер фотографија, при дугој експозицији фотографске плоче, открива у васиони и тако сићушне звезде, које се никад не би могле угледати ни кроз најсилније дурбине; спектрофотографија пак указује на хемијски састав небесних тела и по померању спектралних линија пружа могућност, да се изводе закључци о кретању небесних тела у правцу зрака гледања на њих. За фотографију неба служе или специјални инструменти *аспрографи* или обични дурбини са заменом њихових окуларара *фотографском комором*; за спектрофотографију пак служе дурбини са *спектроскопима* или пак *спектрографи*. И за једне је и за друге неопходно потребан паралактички построј. Узајаман положај звезда и других објеката, снимљених на фотограф. плочама са разних делова неба, а исто тако и спектралних линија, добивених фотографски на *спектрограмима*, — испитују се затим у кабинету на нарочитим апаратима при потпуној удобности.



Сл. 25.

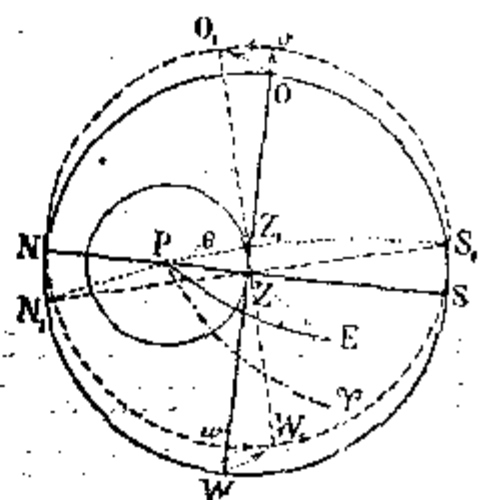
ГЛАВА XI.

РОТАЦИОНО КРЕТАЊЕ И ЕЛИПСОИДНИ ОБЛИК ЗЕМЉЕ.

72. Објашњење привидног дневног кретања небесних тела.

Земља, као и свако друго слободно тело, може да има *прогресивно* (напредно) кретање у простору, при којем је довољно разматрати само кретање њенога центра инерције (названог иначе центром тежишта), и *ротационо* (обртно) кретање око сталне или променљиве осе, која пролази кроз њен центар инерције. Што се тиче првог кретања Земље, оно нас се засад не тиче јер, због бескрајне удаљености звезда, оно се не може показати на привидном нам узајамном положају њиховом; друго пак, — мењајући сваке секунде положај равни хоризонта посматрачевог места у односу према звездама, — мора да изазове оно привидно, правилно и сагласно, дневно њихово кретање, које смо изучили у предњој глави и које, разуме се, није стварно, пошто би то било нелогично и немогућно са механичке тачке гледишта.

Пошто претпоставимо, да су сва небесна тела непокретна а оса и брзина обртања Земље као непроменљиве (макар и у току мало времена), — замислимо небесну сферу са разним правцима из њенога центра, који су паралелни са стварним правцима у простору. Северни правац Земљине обртне осе представиће се на њој тачком P (сл. 26.), стално постављеном у односу према разним звездама E и тачци пролећње равнодневице Υ ; вертикални пак правац некога места на Земљи, — који образује са обртом Земљином осом неки угао θ , — представиће се тачком Z , која ће се — остајући на непроменљивом растојању $PZ = \theta$ од P , — кретати равномерно по маломе кругу сфере у правцу од Z ка Z_1 (супротно привидном кретању звезда) и доћи у свој првашњи положај, у односу према ма којој звезди, после свакога потпуног обрта Земље. На тај начин излази, да је небесна тачка P непокретна у односу према вертикалној линији и хоризонту посматрачевог места. Ово је, услед тога, она тачка, коју смо пређе назвали северним светским полом; велики је круг PZ меридијан места; PE — деклинациони круг; $P\Upsilon$ — колур равнодневица. По пређашњим нашим ознакама биће затим:



Сл. 26.

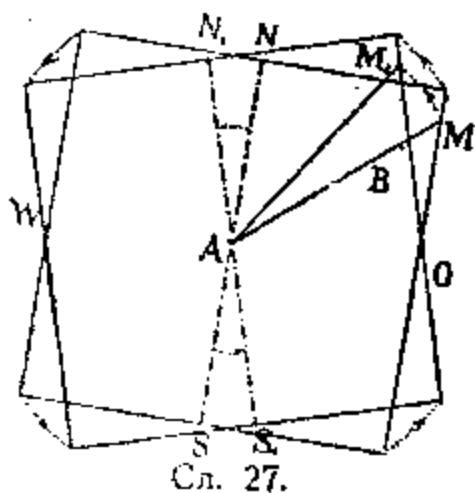
$$PZ = \theta = 90^\circ - \varphi, \quad \sphericalangle ZP\Upsilon = S, \quad \sphericalangle ZPE = t, \quad \sphericalangle \Upsilon PE = \alpha, \quad PE = \Delta = 90^\circ - \delta, \\ ZE = z = 90^\circ - h, \quad \sphericalangle PZE = 180^\circ - A$$

а сви ранији изведени односи (A) , (A') , (B) , (B') међу координатама звезда z , A , Δ и $t = S - \alpha$ остаће без промене.

Прелазећи обратно од небесне сфере ка стварним правцима у простору, треба сад да сматрамо *свешску осу*, као обртну Земљину осу а *небесни меридијан* места посматрања као раван, која пролази кроз вертикалну линију, паралелно са том обртном осом. Она околност, — коју смо напоменули у чл. 66., — да је величина Θ за свако место на Земљи непроменљива, доказује нам сада, да се обртна оса не премешта у телу Земљином већ да има увек један и исти сталан положај.*) Што се тиче правца Земљине осе у простору, то променљивост његову показују постепене и сагласне за све звезде промене њихових поларних растојања Δ (чл. 67.) и рехтасцензија α (чл. 68.) али те промене произлазе тако лагано, да у току од једнога дана можемо сматрати и тај правац Земљине осе као непроменљив. Напослетку, посматрањем откривена равномерност привиднога дневног кретања звезда (чл. 67.) и јесте директна последица потпуно равномернога обртања Земље око осе, које и не може бити друкчије, пошто се врши по инерцији не наилазећи ни на какве стварне препреке.

73. Последице ротационог кретања Земље.

Размотримо изближе, како се управо премешта раван хоризонта каквога места, при обртању Земље око њене осе. Узмимо, да — при положају зенита у тачци Z (сл. 26.), — велики кругови на небесној сфери $NWSO$, $NPZS$ и WZO представљају респективно: хоризонт, меридијан и први вертикал тога места, а, $N_1W_1S_1O_1$, $N_1PZ_1S_1$ и $W_1Z_1O_1$, те исте кругове по истеку врло малог елемента



Сл. 27.

времена $\Delta S = \sphericalangle ZPZ_1$, када зенит прође у правцу ка тачци истока O врло мали лук $ZZ_1 = \Delta S \cdot \sin \Theta$ (из елементарног сферног троугла PZZ_1). Разуме се, да ће се за такав исти угао $Ww = Oo = ZZ_1 = \Delta S \cdot \sin \Theta$ обрнути око своје меридијанске линије NS и раван хоризонта; али ће у исто доба та линија заузети положај N_1S_1 тј. помериће се за врло мали угао, који се мери луком $NN_1 = SS_1 = \Delta S \cdot \cos \Theta$, што се види из елементар. сфер. троугла PNN_1 (или PSS_1).

Замислимо сада у месту посматрања A раван хоризонта $NWSO$ (сл. 27.) са ма чиме означеном на њој меридијанском линијом NAS . На основу тек из то реченога, ми можемо да представимо себи потпуно покретање те равни у простору, у интервалу времена ΔS , као компоновано из три разна покретања: 1.) Не мењајући ниуколико свој правац, она се заједно са линијом NAS обрће око тачке A у страну, која је показана страницом (за сва места северне полукугле) и управо за угао $NAN_1 = \Delta S \cdot \cos \Theta$. 2.) Затим се она обрће око линије N_1AS_1 за угао $\Delta S \cdot \sin \Theta$, при чему се западна њена страна W издиже а источна пак O спушта. 3.) Напослетку, остајући паралелна самој себи, она се преноси у простору заједно са тачком A у правцу ка истоку и управо за линеарну величину $r \cdot \Delta S \cdot \sin 1^\circ$, — ако са r означимо растојање места A од обртне осе Земљине. —

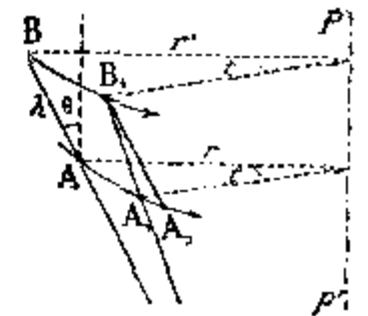
Прво, обртно кретање хоризонта око тачке A треба да се манифестује скретањем баченога тела у неком правцу ABM (сл. 27.) увек у десну страну (на нашој северној полукугли), зато што ће оно пасти где год у B , сама пак линија AM успеће да се обрне, за време t његова полета, за угао $MAM_1 = NAN_1 = t \cdot \cos \Theta$. Једва ли је ипак то могуће и приметити у самој ствари, јер, чак и при најгачнијем артиљерском гађању, скретање зрна бива час у једну час другу страну, као последица многих других и при том потпуно случајних узрока. Много се лакше открива ово обртање равни хоризонта на привидној промени правца клађења

*) Тек најновијим и најгачнијим астрономским посматрањима откривена је врло мала периодична промена у ширинама места на Земљи (за $\pm \frac{1}{4}''$ у току од $1 \frac{1}{6}$ године), која указује на такво исто периодично премештање обртне осе у телу земљинome.

каквога клатна у облику обичног виска привезаног за непокретну тачку. Ако се такво клатно треба да клати у правцу AM_1 који је ма чиме обележен на хоризонталној равни, клаћење ће се продужити у истом правцу у току подужег времена t (цели час па и више); у односу пак према променљивом правцу AM_1 , правци тих клаћења све ће више и више скретати удесно ($\angle MAM_1 = l \cdot \cos \theta$ достићи ће до неколико степени). Овај дивни оглед, који је смислио и извео први пут 1851. г. Француски физичар Фуко, служи као најпростији и најбољи очигледни доказ ротационог кретања Земље.

Друго, обртно кретање хоризонта око меридијанске линије треба у неколико да повећа или пак да смањи даљину домета баченог тела, према томе, да ли је оно бачено, са истом почетном брзином, у правцу ка истоку или ка западу; али, запазити ово, још је теже него ли напред речено скретање његово у десну страну.

Као последица трећег, прогресивног (унапредног) кретања хоризонта ка истоку треба да буде скретање такође ка истоку свакога тела, које слободно пада са довољно велике висине. И заиста, ако из тачке B , која се налази на истој вертикалној линији над тачком A (сл. 28.) на висини $AB = h$, пустимо, без икаквог ударца, тешко тело, оно ће по истеку времена t пасти гдегод у A_2 , прешав по хоризонталном правцу (услед почетне своје брзине) лук $AA_2 = BB_1 = r' \cdot t^2 \sin^2 1^s$, где $r' = r + h \cdot \sin \theta$ означава растојање тачке B од обртне осе Земљине pp' ; тако пак A прећиће за то време лук $AA_1 = r \cdot t^2 \sin^2 1^s$, који је нешто мањи од AA_2 ; према томе привидно скретање тела које пада, треба да буде



Сл. 28.

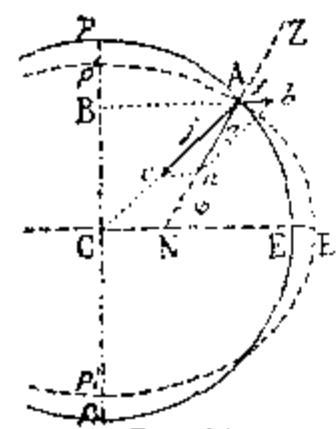
$$A_1 A_2 = AA_2 - AA_1 = h \cdot \sin \theta \cdot t^2 \sin^2 1^s,$$

где је $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, ако се не узме у рачун отпор ваздуха. На пример, при $\theta = 45^\circ$, $g = 32.2$ стопе (енгл.) у 1^s и $h = 9_g = 290$ стопа, треба да изађе приближно $A_1 A_2 = 0.8$ палца (енгл.). Ма како да је мало ово скретање оно је доста добро потврђено брижљивим огледима, који су доста пута вршени у Немачкој (у рудницима каменог угла) и у Италији (у цркви Св. Петра у Риму.)

74. Дејство центрифугалне силе.

Поред напред изложених очигледних доказа ротационог кретања Земље, може се указати на још неке појаве на Земљиној површини, које се јављају као последица тога кретања, као што су: пасатни ветрови, спирање највише десних обала река северне полукугле и др. Али су за науку најзначајније последице ротационог кретања Земље неједнакост интезитета теже g на њеној површини и спљоштени, елипсоидни облик њене површине.

Са претпоставком да је Земља облика кугле са концентричним слојевима једнаке густине, — њена *централна, привлачна* сила $Ac = j = 32.2$ стопе у 1^s (сл. 29.) на свима тачкама њене овршине била би једна и иста и упућена право



Сл. 29.

к центру C . Али ротационо кретање Земљино око осе pCp_1 порађа још у ма којој тачци A , — која узима удела у том обртању и која се налази на растојању $AB = r$, — *центрифугалну* (центробежну) силу $Ab = f = \frac{v^2}{r} = r \cdot \sin^2 1^s$ тако, да је оно, што зовео интезитетом теже g , управо компонента обеју сила j и f а равна је дијагонали Al паралелограма тих сила. Али се сила f поступно увећава са удаљењем од полова p и p_1 ка екватору E и на њему досеже величине око $6000 \times 3500 \times \left(\frac{15}{206000}\right)^2 = \frac{1}{9}$ стопе $= \frac{1}{290} j$;

Због тога интезитет теже g , као резултанта Al сила j и f , треба да се смањује са опадањем ширине φ а на самом екватору треба да буде за $\frac{1}{290}$ део мањи него ли на половима.

Ове се промене у интезитету теже најбоље манифестују променом трајања t клађења клатна сталне дужине l , кад се оно премешта с једног места на друго; јер је $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Први је то приметио француски астроном Ришер, када је 1672. г. прешао био из Париза ($\varphi = 48^\circ 50'$) у Кајену ($\varphi = 4^\circ 56'$) јер му је часовник почео изостајати у Кајени за $2\frac{1}{2}$ минуте на дан. Али му је потребно објашњење дао Њутњ, онако, како смо то напред изложили.

При испитивању дејства центрифугалне силе на Земљи, дубоки поглед Њутнов одмах је запазио и другу неизоставну последицу. Површина мирне течне масе у тачци А (сл. 29.) треба сад да стоји управно не на правац полупречника АС, већ на вертикални правац ZAN , тј. промењени услед центрифугалне силе; стога и површине Земљиних мора и океана не могу остати сферног облика, већ треба да приме облик $p'AE'p'$, сплоштен у неколико на половима p' и p' . Због тога и Земљина кора, за коју се претпоставља, да је постала хлађењем некада тачне масе и Земљине површине, требала је да добије слични облик тј. сплоштеноста обртног елипсоида. Овај елипсоидни облик Земљин, — који је предсказао велики Њутњ и који себи налази логичне потврде у врло приметној сплоштености дискова планета Јупитера и Сатурна, — сјајно се потврдио геодетским мерењима, која су одмах затим извршена.

Мерење најкраћега лука s међу два паралелама Земљиним φ_1 и φ_2 , што даје средњу величину полупречника кривине тога лука, тј. $R = \frac{s}{(\varphi_2 - \varphi_1)' \sin 1''}$, представља директно и најбоље средство за испитивање кривине Земљиних меридијана. Таква мерења, која су добила назив *мерења степена* (*gradmässung*, *mesure des degrés*), вршена су много пута чак и у прастара времена*) у циљу одређивања димензија Земљиних као тела сфернога облика; али, због тадањих грубих метода за одређивање ширина φ и растојања s , та мерења, разуме се, нису ни могла давати повољне резултате. Тек у XVII је веку смислио холандски научар *Снелиус* тачну методу за одређивање великих растојања на Земљи. Та се метода зове *триангулација* и састоји се управо у овоме: међу крајњим тачкама лука s , који се одређује, узме се доста других, интервалних тачака, које су међу собом повезане непрекидним ланцем троуглова; у тим се троуглима измере само угли; дужине страна, као и тражени лук s , добијају се тригонометријским срачунавањем по измереној дужини једне, ма које, сразмерно кратке стране, која се зове *базис* или *основица*. Са применом пак — у XVII веку — дурбина на угломерним инструментима, повећана је с друге стране тако исто и тачност одређивања ширина тачака.

На тај је начин омогућено испитивање, да ли се заиста смањује полупречник кривине Земљиних меридијана са приближењем ка екватору, као што то захтева елипсоидни њихов облик. У ту сврху је Париска Академија Наука била предузела око 1735. године мерења степена у трима, једна од друге далеким, земљама: Лапландији, Перу и у самој Француској и тада се показало:

у Лапландији, при $\varphi_1 = +66^\circ 5'$, $R_1 = 329\ 0000$ тоаза**) $= 6010.9$ врста

*) Прво мерење степена извршио је Ератостен (250. г. пре Христа). По плановима долине Нила он је знао растојање између Александрије и Сијене (око 5000 стодија) а равлику географских ширина ($7^\circ 12'$) ових тачака одредио је по висинама Сунца.

**) Стара Француска мера, — тоаз $= 0.91350$ сажења.
 $= 1.94904$ метра.

у Француској, при $\varphi_2 = +49.5$, $R_2 = 326\ 9850$ тоаза = 5974.0 врста

у Перу, при $\varphi_3 = -1.5$, $R_3 = 325\ 1540$ тоаза = 5940.6 врста.

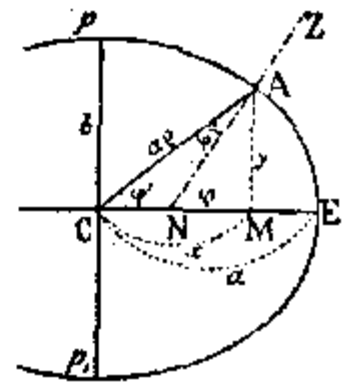
Овим се резултатима и потврдила спљоштеност Земље на половима.¹⁾

Сад треба да приступимо одређивању димензија Земљинога елипсоида на основу оних даних, које се добијају из мерења степенâ у опште; али пре тога да напоменемо још, — у допуну ка раније реченом о интезитету теже, — да при елипсоидном облику Земље централна, привлачна сила j не може сад да остане непроменљива већ (као што ће бити објашњено у глави XIX) се мора смањивати са опадањем ширине места; због тога и интензитет теже на екватору излази не за $\frac{1}{290}$ већ за $\frac{1}{189}$ део мањи него на половима (в. чл. 135.).

75. Елипсоидни облик Земље.

Ако се узме, да је површина Земљина облика елипсоидног, што долази од обртања неке елипсе pEp_1 (сл. 30.) око њене краће осе pCp_1 , то ће и сви меридијани на Земљи бити исто такве елипсе а правац вертикалне линије у ма којој тачци А поклопиће се са нормалом те елипсе AN, под углом ANE, који је раван ширини φ тачке А. Кад означимо главне полуосе њене CE и Cp са a и b ; правоугле координате тачке А — у односу према њима — са x и y , имаћемо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \operatorname{tg} \varphi = - \frac{dx}{dy} = \frac{a^2 y}{b^2 x} \quad (1.)$$



Сл. 30.

а из ових двеју једначина лако је добити прво за x и y а затим за полупречник (радиус) кривине $R = \frac{ds}{d\varphi}$ меридијана у тачци А ове тачке изразе у функцијама ширине φ :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \quad y = \frac{b^2 \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \\ R &= \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^3}} \end{aligned} \right\} \quad (2.)$$

Под *спљоштености* елипсе или обртнога елипсоида подразумева се увек број $c = \frac{a-b}{a}$, који је за Земљин елипсоид толико мали, да се квадрати и виши степени његови могу занемарити у сравњењу са јединицом, па да се ипак у свему идућем не учине јако осетне грешке. Тада ће, према томе, изаћи:

$$b = a(1 - c), \quad b^2 = a^2(1 - 2c), \quad \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + a^2(1 - 2c) \sin^2 \varphi} = \sqrt{a^2(1 - 2c \sin^2 \varphi)} = \sqrt{a^2(1 - c \sin^2 \varphi)^2} = a(1 - c \sin^2 \varphi)$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = a \frac{1 - 2c}{1 - 3c \sin^2 \varphi} = a \left[1 - 2c + \frac{3}{2}c(1 - \cos 2\varphi) \right] = a \left(1 - \frac{c}{2} - \frac{3}{2}c \cos 2\varphi \right) \quad (3.)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{тј.} \quad R &= a - nd \\ \text{где је} \quad d &= ac = a - b, \quad a \quad n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.)$$

¹⁾ Сама величина спљоштености Земљинога елипсоида још није могла бити изведена, са довољном тачношћу, из ових даних, због малог броја мерених лукова (в. 3. вадаћу ове главе).

Интегрирањем пак добивенога израза (3.) за ds , у границама између φ_1 и φ_2 ширина тачака А, добиће се, да је:

$$s = a (\varphi_2 - \varphi_1) \left[1 - \frac{c}{2} \right] - \frac{3}{4} ac (\sin 2 \varphi_2 - \sin 2 \varphi_1) = \\ = a (\varphi_2 - \varphi_1) \sin 1'' \left[1 - \frac{c}{2} - \frac{3}{2} c \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_1) \cos (\varphi_2 + \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)'' \sin 1''} \right]$$

или $\frac{s}{(\varphi_2 - \varphi_1)'' \sin 1''} = a - md$ где је $m = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_1) \cos (\varphi_2 + \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)'' \sin 1''}$ } (5.)

Измерени какав лук s земног меридијана и разлика ширина φ_2 и φ_1 паралела, између којих се он протеже, даје нам на тај начин једну једначину (5.) са две непознате a и d . За тачно одређивање тих непознати потребно је, разуме се, измерити бар два што дужа лука s под разним средњим ширинама $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ (да би се коефицијенти у добивеним једначинама што више разликовали међу собом). По себи се разуме, да што год је већи број тих измерених лукова, у толико боље, и то не само због тога, што ће се онда a и d одредити тачније (по методи најмањих квадрата) већ и због тога, што се само на основу много измерених лукова може открити веће или мање одступање истинитог облика Земљине површине од очекиваног тачног елипсондног облика њеног.

У прошлом је столећу (до 1860 г.) било измерено, са великом тачношћу, неколико великих лукова на разним меридијанима, на име: 1.) *Руски лук* од 20°5 од Дунава до Торнео-а, и у продужењу његовом на север — *Скандинавски лук* од 4°8 до Сев. Леденог Океана; 2.) *Француски лук* од 12°4 од острва Форментера до Динкирхена и у продужењу његовом — *Енглески лук* од 9°8 до Шкотских острва; 3.) *Источно-Индијски лук* од 23°8, који су измерили енглеске геодете; *Француско-Енглески лук* од 4°6 на *Ршу Добре Наде*; 5.) неколико других мањих лукова, измерених у *Перу*, *Немачкој* и т. д.

Из свију ових градуских мерења, са додатком к њима и лукова паралела, измерених у *Индији*, енглески је геодет, пуковник *Кларк* добио ове највероватније вредности за a и c Земљинога елипсона:

$$a = 5978.91 \text{ врста}; c = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{293.5}; \left[a - b = 20.37 \text{ врста} \right] \\ = 6378.25 \text{ km} \quad \left[\quad = 21.73 \text{ km} \quad \right]$$

Међутим се у астрономији и у геодизији чак и досад придржавају често *Бесолових* елемената за a и c , које је он много раније извео из мањег броја меридијанских лукова, јер су на основу њих састављене многобројне пемоћне таблице.

Беселови су елементи ови:

$$a = 5978.11 \text{ врста} \text{ и } c = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{299.15}; \left[a - b = 19.98 \text{ вр.} \right] \\ = 6377.40 \text{ km} \quad \left[\quad = 21.32 \text{ km} \quad \right]$$

У најновије време (1905. г.) американски научари *Хајфорд* и *Титман* обрадили су огромну триангулациону мрежу Сједињених Сев. Америч. Држава, узевши у обзир и астрономску одредбу многих тачака те триангулације, па су отуд извели нове вредности за a и c са ванредном тачности. Они су на име добили:

$$a = 5978.89 \text{ врста}, c = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{297.8}; \left[a - b = 20.07 \text{ вр.} \right] \\ = 6378.23 \text{ km} \quad \left[\quad = 21.43 \text{ km} \quad \right]$$

Напомена. У астрономији а често и у геодезији се спљоштеност земљиног меридијана па и уопште ма које елипсе не одређује из њене спљоштености $c = \frac{a-b}{a}$ већ из ексцентрицитета e , чији је квадрат $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$. Тачан је однос између њих овај:

$$e^2 = \frac{(a-b)(a+b)}{a^2} = c(2-c) = 2c - c^2.$$

При малој пак спљоштености c , приближно је

$$e^2 = 2c.$$

76. Скретање вертикалних линија.

На свакоме од напред споменутих мерења степена одређиване су из астрономских посматрања ширине не само оних, крајњих тачака лукова меридијанских већ и многих интервалних, тако, да се по формули (5.), — ако се у њој ставе величине $a = 5968.74$ врста и $c = \frac{1}{293.5}$, које у целини најбоље задовољавају сва мерења степенâ, — могу срачунати многи луци s и, тада се они могу сравнити са стварно измереним. Из таквих упоређивања излази, да несугласице у дужинама s знатно превазилазе могуће грешке мерења, и, досежу по некад до ± 60 саж., што директно указује на то, до истинита површина Земљина (*геоид*) доста осетно одступа од правилне елипсоидне форме. Другим речима, то значи, да се правац вертикалне линије у ма којем месту на Земљи, уопште говорећи, не поклапа се правцем линије, нормалне на елипсоид у томе месту и да таква *местимична скретања вертикалних линија* уздуж мерених лукова разних меридијана досежу до $\pm 4''$; јер промени ширине за $1''$ одговара на Земљиној површини приближна дужина $\Delta s = 6000 \times 500 \times \sin 1'' = 14\frac{1}{2}$ саж. Ова скретања још и немају великог значаја за астрономе, кад им је потребно да сравњују међу собом извесна посматрања небесних тела са разних тачака на Земљи; јер чак и при посматрањима најближега нама небесног тела — Месеца, требало би да се померимо (као што ћемо видети у глави XIV) бар за 100 саж. па да се правац са Земље на њега измени свега за $0''.1$. Због тога се, у астрономији, површина Земљина може сматрати као потпуно правилни обртни елипсоид напред споменутих димензија. Ипак, има предела, понајвише у близини великих планинских масива (Кавказ, Алпи), где скретање вертикалних линија достиже до неколико десетина секунда, како по ширини, тако и по дужини; таква се скретања, — која се специјално изучавају у геодезији, — већ не могу занемаривати при посматрањима Месеца, када се оне врше у таквим пределима.

77. Геоцентричке координате тачака на Земљиној површини.

Положај сваке тачке A на елипсоидној површини Земљиној, у односу према њеноме центру C (сл. 30.) удобније је одређивати не по њеним правоуглим координатама x и y већ по поларним, тј. 1.) по углу $\angle ACE = \varphi'$, који образује полупречник AC са равни екватора и који се зове *геоцентричка ширина* тачке A , и, 2.) по *геоцентричком растојању* њеном $AC = a\rho$, при чему је ρ апстрактни број, свагда мањи од јединице. Треба дакле изразити φ' и ρ у функцији географске ширине φ те тачке A .

Кад се одреди φ' по њеноме тангенсу и притом, као и пређе, занемаримо квадрате и више степене спљоштености c , — добићемо

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi = (1-2c) \operatorname{tg} \varphi;$$

али, разуме се, да је уместо тога боље и простије срачунати малу разлику $\varphi - \varphi'$ на овај начин

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'}{1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi'} = \frac{2c \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = c \sin 2 \varphi$$

или $(\varphi - \varphi')'' = \frac{c}{\sin 1''} \sin 2 \varphi$ (6.)

тако да ће, при $c = \frac{1}{293}$, максимална угловна вредност за $(\varphi - \varphi')$ изаћи, за ширину $\varphi = 45^\circ$, свега $11' 44''$.

Што се тиче геоцентричког растојања од тачке, његов ће се множитељ ρ изразити, по формули (2.), овако

$$\rho = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - 4c) \sin^2 \varphi}}{1 - c \sin^2 \varphi} = \frac{1 - 2c \sin \varphi}{1 - c \sin^2 \varphi}$$

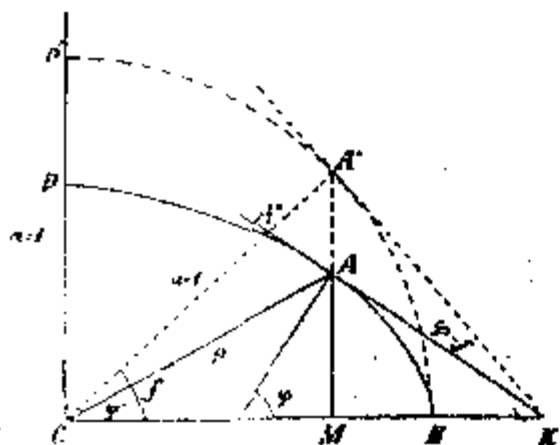
или $\rho = 1 - c \sin^2 \varphi$ (7.)*

Тачне вредности за $(\varphi - \varphi')$ и $\lg \rho$ за све ширине φ дају се у облику таблица у свима астрономским календарима а тако исто у астрономским делима, при чему се обично узима Беселова спљоштеност $c = \frac{1}{299.15}$. Такву смо таблицу ми дали (табл. 3.) на крају књиге, али за вероватнију вредност спљоштености Земљиног сфероида, тј. за $c = \frac{1}{297}$.

Овде треба још напоменути, да ако је висина H посматрачевога места над морским ниво-ом доста знатна, онда треба ка нађеној из таблица вредности за ρ додавати корекцију $\frac{H}{a}$, а логаритму ρ — корекцију $M \frac{H}{a}$, која износи свега 1 шесте децимале за $H = 48$ стопа (енгл.). — Тако на пример за Пулковску Опсерваторију ($\varphi = 59^\circ 46' 18''.7$ и $H = 243$ стопе) наћићемо из наше 3. таблице $\varphi - \varphi' = 10' 6''.2$, т. ј. $\varphi' = 59^\circ 36' 12''.5$ и $\lg \rho = -0.001091 + 5 = 9.998914$; за спљоштеност пак Земљину $c = \frac{1}{299.1}$, изашло би

$$\varphi - \varphi' = 10' 1''.8, \text{ тј. } \varphi' = 59^\circ 36' 16''.9 \text{ и } \lg \rho = 9.998917 + 5 = 9.998922.$$

*) Ове приближне формуле (6.) и (7.), — које се употребљују највише у практичној астрономији, — добијају се још простије и очигледније из геометријског цртежа (сл. 31.), у којем је ордината MA елипсине тачке A продужена до њенога пресека у A' са кругом, описаним из елипсиног центра C полупречником $CE = CA' = a = 1$. Кад се кроз A и A' повуку тангенте AK и $A'K$ на елипсу и круг, које се пресецају са продужењем дуге елипсине осе CE у истој тачци K ; кад се затим споје A са C , и, кад се означи угао $A'CE$ са f , — онда ћемо имати



Сл. 31.

$$\frac{A'A}{A'M} = \frac{A'M - AM}{A'M} = \frac{1 - b}{1} = \frac{a - b}{a} = c; \text{ тј. } A'A = c \sin f,$$

па ће због тога из елементарног равног троугла CAA' изаћи

$$\rho = AC = A'C - A'A'' = 1 - c \sin f \cdot \sin f = 1 - c \sin^2 f \quad (6.)'$$

затим се из троугла $KA'A''$ добија за угао $(\varphi - f)$ код K

$$\varphi - f = \frac{A'A''}{AK} = \frac{c \sin^2 f}{\operatorname{tg} f} = c \sin f \cos f$$

а из троугла CAA''

$$f - \varphi' = \frac{AA''}{AC} = \frac{c \sin f \cos f}{\rho} = c \sin f \cos f$$

према томе

$$\varphi - \varphi' = 2c \sin f \cos f = c \sin 2f \quad (7.)'$$

Остаје још само, да укажемо на наше право, — с условом пређашње апроксимације, — да замењујемо како у формулама (6.) и (7.), тако и у (6.)' и (7.)' географску ширину φ са геоцентричком φ' или и интервалном f

Задаће:

1.) Артиљеријско зрно, полазећи из оруђа са некаквом почетном брзином и под неким висинским углом у равни меридијана, пада по истеку времена од свога поласка $t = 30$ сек. на растојању од оруђа $d = 2000$ сажњева под углом ка хоризонту $i = 45^\circ$. Колико велико треба да буде његово привидно скретање у страну услед ротационог кретања Земљиног, и, уколико треба да се промени напред речена даљина његова домета d , ако оно буде избачено у правцу првог вертикала, при ширини места $\varphi = 60^\circ$?

Скретање његово у десну страну — при сваком правцу — треба да буде равно $d \cdot \frac{v}{g} \sin i \sin \varphi = 3.8$ саж.; у првом пак вертикалу даљина његова домета d повећаће се или ће се смањити за $d \cdot \frac{v}{g} \sin i \cos \varphi \cdot \cotg i = 2.2$ саж., према томе, да ли је избачено у правцу ка истоку или ка западу.

2.) Срачунати дужину праве $AB = d$, која спаја две тачке А и В на елипсоидној Земљиној површини, чије су ширине $\varphi = 60^\circ$ и $\varphi_1 = 45^\circ$ а разлика дужина $l = 90^\circ$.

Нашав по табlici 3. геоцентричке координате тачака φ', ρ и φ'_1 и ρ_1 , имаћемо за угао i , — који међусобом заклапају полупречници ρ и ρ_1 у центру Земље С, — овакав израз:

$$\cos i = \sin \varphi' \cdot \sin \varphi'_1 + \cos \varphi' \cdot \cos \varphi'_1 \cos l$$

а затим из равнога троугла ABC, — који је скоро равнокрак, — у место тачнога израза

$$d^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos i$$

добићемо (као у 3. задаћи главе III) овај приближни:

$$d = (\rho + \rho_1) \cdot \sin \frac{i}{2}.$$

На тај начин, при даним бројним величинама за φ , φ_1 и l , излази

$i = 52^\circ 27' 48''$, $\rho = 0.997480$ и $d = 0.88215$ у деловима екваторијалнога Земљиног полупречника a .

3.) Одредити полуосе Земљинога сфериода и његову спљоштеност s по датим у чл. 74. величинама радиуса кривина R_1 (у Лапландији), R_2 (у Француској) и R_3 (у Перу), конбинујући ради тога спочетка R_1 и R_2 , затим R_2 и R_3 и најзад R_1 и R_3 .

Са даним тамо средњим ширинама $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ коефицијенти ће n код непознате d у једначинама (4.) изаћи овакви:

$$n_1 = -0.5230, \quad n_2 = +0.2912, \quad n_3 = +0.5785$$

а с њима ће се добити:

	a	$d = a - b$	$c = \frac{d}{a}$
у првој комбинацији	5987.2 вр.	45.3 вр.	0.0076
у другој „	6007.9	116.2	0.0193
у трећој „	5977.2	63.8	0.0107
у средњем из свију	5990.8	75.1	0.0125

ГЛАВА XII.

ЗАДАЋЕ ИЗ ДНЕВНОГ КРЕТАЊА НЕБЕСНИХ ТЕЛА.

78. Опште напомене.

У прошлој смо глави (чл. 72.) видели, да је, при разматрању разних питања о привидноме дневном кретању небесних тела, са геометријске тачке гледишта сасвим све једно, да ли ћемо на небесној сфери замишљати зенит и хоризонт као непомичне а сва небесна тела да се крећу равномерно по својим паралелама са истом и општом за све њих угловном брзином, или обрнуто, тј. да су небесна тела непомична а да се зенит креће са том истом брзином, али само у обратном правцу, по маломе кругу око светскога пола P . Некоја од ових питања решаваће се простије и згодније са првом претпоставком, некоја пак — са другом.

Имајући у виду у свему ономе, што буде слѣдовало, на првом месту само разјашњење главне суштине ових питања и задаћа, — ми се нећемо овде задржавати на довођење њихових формула за решење на облик најзгоднији за рачунање, јер су општа правила за то већ била показана у глави II; поред тога, ми ћемо се сусрести још и у II одељку „практичног дела“ курса астрономије, са најзначајнијим задаћама одређивања времена и ширине места по овоме или ономе положају небесних тела у односу према зениту места посматрачева, где ће бити дана и најпогоднија — у практичном смислу — решења њихова са бројним примерима за објашњење.

И даље ћемо се придржавати оних истих ознака, које смо већ раније усвојили, наиме:

φ — ширина места (са знаком $+$ ако је северна).

$\Theta = 90^\circ - \varphi$ — растојање зенита од северног светскога пола.

α — ректасцензија небесног тела.

δ — деклинација небесног тела (са знаком $+$ ако је северна).

$\Delta = 90^\circ - \delta$ — растојање небесног тела од светскога пола.

z — зенитно растојање небесног тела.

$h = 90^\circ - z$ — висина његова.

A — азимут небесног тела, рачунајући га од југа ка западу.

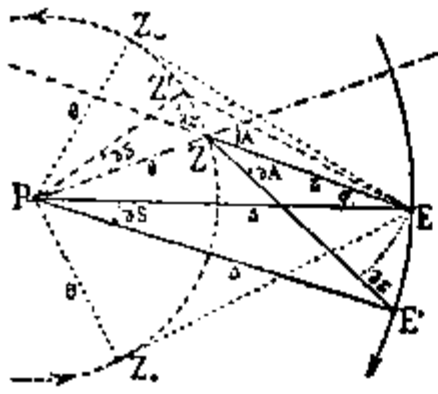
t — часовни угао, рачунајући га такође као и азимут.

q — паралактички угао небесног тела.

S — локално звездано време.

79. Дифференцијалне промене зенитнога растојања и азимута небесног тела.

Задаћа 1. Одредити за дано небесно тело (A, z) мале прираштаје dz и dA, који одговарају маломе интервалу времена dS.



Сл. 32.

Замислимо на небесној сфери (сл. 32.), да је зенит места посматрачевог Z непокретан а небесно тело E да се је померило у току времена $dS = dt = \sphericalangle EPE'$ за мали лук $EE' = dS \cdot \sin \Delta$, онда ћемо наћи из елементарног троугла ZEE', да је

$$dz = ZE' - ZE = EE' \cdot \sin q = dS \cdot \sin \Delta \cdot \sin q \dots (1.)_z$$

$$dA = \frac{EE' \cos q}{\sin z} = dS \cdot \frac{\sin \Delta \cdot \cos q}{\sin z} \dots (1.)_A$$

Ако пак замислимо, да је небесно тело E непокретно а зенит Z да се преместио у току времена $dS = \sphericalangle ZPZ'$ за лук $ZZ' = dS \cdot \sin \theta$, онда из елементарног троугла EZZ' излази, да је

$$dz = Z'E - ZE = ZZ' \cdot \sin A = dS \cdot \sin \theta \cdot \sin A \dots (1.)'_z$$

Затим, пошто је у томе троуглу угао $ZEZ' = ZZ' \frac{\cos A}{\sin z}$, то ће се, само услед премештаја Z у Z' азимут небесног тела променити за угао $\sphericalangle ZEZ' \cos z = ZZ' \cos A \cotg z$; услед промене пак правца меридијана од PZ на PZ', он ће се изменити још (за сва небесна тела подједнако) за угао $\sphericalangle ZPZ' \cos \theta = dS \cos \theta$; због тога је целокупно

$$dA = dS (\cos \theta + \sin \theta \cos A \cotg z) \dots (1.)'_A$$

Очевидно је, да су ова друга два израза (1.)'_z и (1.)'_A за dz и dA истоветна са (1.)_z и (1.)_A и показују: 1.) да су промене зенитних растојања за сва небесна тела, која се налазе у једном и истом вертикалу, подједнаке, и, да су оне највеће ($dS \sin \theta$) за она небесна тела, која се налазе у првом вертикалу; 2.) Да су промене азимута за сва небесна тела, која се налазе како на хоризонту тако и у првом вертикалу, подједнаке и равне $dS \cos \theta$. На пример, у Петрограду ($\varphi = 59^\circ 56'$) ће, при $A = \pm 90^\circ$, промене зенитних растојања и азимута за 1 минуту времена бити:

$$\Delta z = \pm 15' \sin 30^\circ 4' = \pm 7'.5 \quad \text{и} \quad \Delta A = 15' \cos 30^\circ 4' = + 13'.0.$$

Задаћа 2. Показати, да паралакшички угао q за сваку звезду са декли-нацијом $\delta < \varphi$ постојаје највећи, кад она пролази кроз први вертикал.

Велики круг ZE на сфери (сл. 32.) заклопиће највећи угао q са декли-национим кругом PE при положајима зенита у тачкама Z_0 и Z_w, у којима кругови Z_0E и Z_wE тангирају мали круг Z_0ZZ_w; у првом ће се случају звезда E налазити на источној страни првог вертикала а у другом на западној. До истог се закључка долази и на основу општег израза за паралакшички угао

$$\sin q = \frac{\sin \theta \cdot \sin A}{\sin \Delta}$$

80. Пролаз небесног тела кроз дани вертикал.

Задаћа 3. Одредиши звездано време S и зенишно растојање z данога небесног тела (α, Δ), кад оно пролази кроз први вертикал.

Из сферног троугла ZPE , са правим углом у Z , излази да је

$$\cos t = \frac{\operatorname{tg} \Theta}{\operatorname{tg} \Delta}, \quad \cos z = \frac{\cos \Delta}{\cos \Theta} \dots \dots \dots (2.)$$

Ови изрази за t и z показују, 1.) да се у случају, кад је $\Delta > \Theta$, добијају два решења, и то: $S_0 = \alpha - t$ (пролаз кроз источни део првог вертикала) и $S_w = \alpha + t$ (кроз западни); затим, 2.) да се у случају $\Delta = \Theta$ добија једно решење, тј. $S = \alpha$ и $z = 0$; напослетку, 3.) да у случају $\Delta < \Theta$ задаћа постаје немогућна.

Пример. При деклинацији Сунца $\delta = +23^\circ 27' 0$, за пролаз његов кроз први вертикал у Петрограду ($\varphi = 59^\circ 56' 5$), налазимо, да је

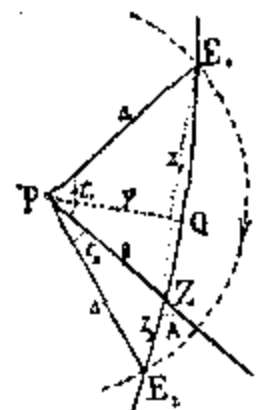
$$t = \mp 75^\circ 27' 7 = \mp 5^h 1^m 51^s \text{ и } z = 62^\circ 37' 6.$$

Задаћа 4. Одредиши време S и зенишно растојање z небесног тела (α, Δ), када му је даш азимут A .

Узмимо да је PZ — меридијан, QZ — дани вертикал (сл. 33.), који са меридијаном заклапа угао A , а $PQ = F$ — његово најкраће растојање од пола P , које се одређује из троугла PQZ по формули:

$$\sin F = \sin \Theta \sin A \dots \dots \dots (3.)$$

При $\Delta > F$ дневна ће паралела небесног тела пресећи вертикал QZ у двама тачкама E_1 и E_2 , које симетрично стоје према кругу PQ који је управан на њега; због тога, пошто се срачуна $\sphericalangle QPE_1 = \sphericalangle QPE_2 = \tau$ и $QE_1 = QE_2 = \gamma$ из троугла PQE_2 по формулама:



Сл. 33.

$$\cos \tau = \frac{\operatorname{tg} F}{\operatorname{tg} \Delta} \text{ и } \cos \gamma = \frac{\cos \Delta}{\cos F} \dots \dots \dots (3.)'$$

а $\sphericalangle QPZ = T$ и $QZ = c$ из троугла PQZ по формулама:

$$\operatorname{cotg} T = \cos \Theta \cdot \operatorname{tg} A \text{ и } \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} \Theta \cdot \cos A \dots \dots \dots (3.)''$$

добићемо тражена времена пролаза звезде S_1 и S_2 и зенишна њена растојања z_1 и z_2 у тим моментима на овај начин:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \alpha - \tau - T, & z_1 &= \gamma + c \\ S_2 &= \alpha + \tau - T, & z_2 &= \gamma - c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.)'''$$

У специјалном случају, када је $A = 90^\circ$, излази: $F = \Theta$, $T = 0$ и $c = 0$ а формуле се (3.)' и (3.)''' претварају у формуле (2) прошле задаће.

Пример. За звезду *Вега* или α *Lyrae* ($\alpha = 18^h 33^m 3^s$, $\Delta = 51^\circ 19' 4$) при $\varphi = 59^\circ 56' 5$ (у Петрограду) и $A = -23^\circ 16'$ — излази:

$$\begin{aligned} S_1 &= 17^h 48^m 35^s, & z_2 &= 22^\circ 23' 6 \\ S_2 &= 4 \ 34 \ 12, & z_1 &= 78 \ 23.3 \end{aligned}$$

Задаћа 5. За звезду са деклимацијом δ , која је већа од ширине места φ , одредиши положај (A и z) и момент S највећег њеног азимушалног удаљења од меридијана места φ . Такав се положај звезде зове њена елонгација.

У том ће случају звездана паралела $E_1Z E_2$ само додирнути тражени вертикал ZQ у тачци Q (сл. 33.) па због тога из правоуглог троугла PQZ са странама $PQ = \Delta$, $PZ = \theta$, $QZ = z$ и са углима $\sphericalangle PZQ = A$ и $\sphericalangle QPZ = \mp t$ излази:

$$\sin(\pm A) = \frac{\sin \Delta}{\sin \theta}, \quad \cos z = \frac{\cos \theta}{\cos \Delta}, \quad \cos t = \frac{\operatorname{tg} \Delta}{\operatorname{tg} \theta} \quad \text{и} \quad S = a \mp t \quad \dots (4)$$

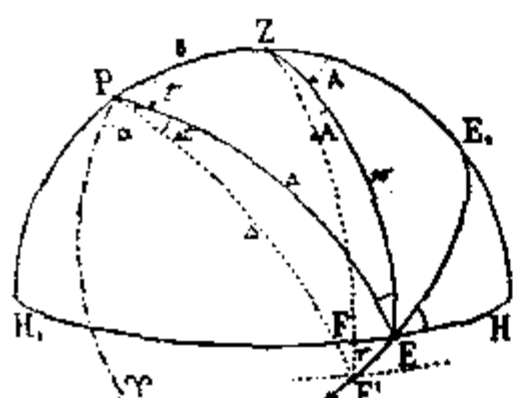
На пример, за *Поларну* звезду ($\Delta = 1^\circ 18' 0$), при $\varphi = 59^\circ 56' 5$, у Петрограду добићемо:

$$A = \pm 2^\circ 35' 8, \quad z = 30^\circ 2' 0 \quad \text{и} \quad t = \mp 5^h 51^m 0.$$

81. Пролаз небесног тела кроз дани алмукантарат.

Задаћа 6. Одредиши време S рађања и заласка небесног тела (a , Δ) а тако исто азимуш и паралакшички угао његов у то време, не узимајући у обзир ушницај рефракције.

Замислимо на небесној сфери хоризонт места посматрачева $НН_1$ (сл. 34), меридијан ZPH_1 и деклинациони круг небесног тела PE па ћемо добити правоугли сферни троугао PH_1E са хипотенузом $PE = \Delta$, кате-



Сл. 34.

тама $PH_1 = \varphi$ и $H_1E = 180^\circ - A$ и углима $\sphericalangle H_1PE = 180^\circ - t$ и $\sphericalangle PEH_1 = 90^\circ - q$; због тога се за залазак тога небесног тела добија из тога:

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\frac{\cos \Delta}{\cos \varphi}, & \cos q &= \frac{\sin \varphi}{\sin \Delta}, \\ \cos t &= -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \Delta} \quad \text{и} \quad S = a + t; \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

за рађање пак небесног тела, те исте бројне вредности A , q и t треба да се узму са знаком $-$. На пример, при деклиналији Сунца $\delta = +23^\circ 27' 0$ за залазак његов у Петрограду ($\varphi = 59^\circ 56' 5$) добиће се

$$A = 142^\circ 37', \quad q = 19^\circ 22' \quad \text{и} \quad t = 138^\circ 33' = 9^h 14^m 2.$$

Задаћа 7. По посматраноме зенишном растојању z' у моменту S' небеснога тела (a , Δ), одредиши колики је на z' ушницај рефракције r .

При даној ширини места посматрачевог φ , истинитно зенитно растојање z небесног тела у времену S' одредиће се из формуле

$$\cos z = \sin \varphi \cos \Delta + \cos \varphi \sin \Delta \cos t', \quad \text{где је} \quad t' = S' - a \quad \dots (6)$$

после чега се добија

$$r = z - z'.$$

Напомена. Из таквих се управо посматрања и одређује величина рефракције r_z , које одговарају разним зенитним растојањима z' , при даном стању барометра и термометра на месту посматрања. Тако нпр. при нормалном притиску атмосфере 760 mm и температури ваздуха $+10^\circ \text{ C}$, за привидно зенитно растојање $z' = 90^\circ$, величина рефракције r излази око 35.1 .

Задаћа 8. Одредити ушцај рефракције у хоризонту $r_{90} = 35'.1$, на време и место изласка или пак заласка небесног тела (α, Δ) .

Небесно тело E (сл. 34.), пошто се покрене по својој паралели за величину лука EE' , треба да се спусти испод хоризонта HEH , за величину лука $FE' = r_{90}$ те да зенитно растојање његовога привидног места F буде равно 90° . Како тај лук није велики, то, кад срачунамо време S и азимут A за положај небесног тела E по формули (5.), — добићемо по формулама (1.) $'_z$ и (1.) $'_A$ (чл. 79.) овакве њихове приближне поправке:

$$\Delta t = \Delta S = \frac{r_{90}}{\sin \Theta \cdot \sin A}, \quad \Delta A = \Delta S \cdot \cos \Theta = \frac{r_{90}}{\operatorname{tg} \Theta \cdot \sin A}; \quad (7.)$$

после чега, за привидно место небесног тела F , излази, да је:

$$S' = S + \Delta S \text{ и } A' = A + \Delta A.$$

Тачније пак добиће се по формули (6.) и часовни угао t' и звездано време S' изласка и заласка небесног тела, ако се у тој формули стави $z = 90^\circ + r_{90}$, тј. $\cos z = -\sin r_{90}$; после чега излази:

$$S' = \alpha \mp t' \text{ и } \sin A' = \frac{\sin \Delta \cdot \sin t'}{\sin z} \quad (7.)'$$

Пример. За залазак сунца ($\delta = +23^\circ 27'.0$) у Петрограду, са срачунатим већ величинама t и A у задаћи 6. — имаћемо по формулама (7.), да је:

$$\Delta t = +1^\circ 55' = +7^m 7 \text{ и } \Delta A = +1^\circ 40';$$

према томе

$$t' = 140^\circ 28' = 9^h 21^m 9 \text{ и } A' = 144^\circ 17';$$

тачне пак величине t' и A' изаћи ће по формулама (6.) и (7.)' овакве:

$$t' = 140^\circ 30' = 9^h 22^m 0 \text{ и } A' = 144^\circ 18'.$$

Задаћа 9. На каквим ће се тачкама на Земљи показати дано небесно тело (α, δ) једновремено на једном и истом зенишном растојању z ?

Ако означимо са S_0 звездано време, рачунато од Гринвича, а са l источну дужину места од Гринвича, то ће се тражена зависност дужине места од његове ширине φ представити једначином

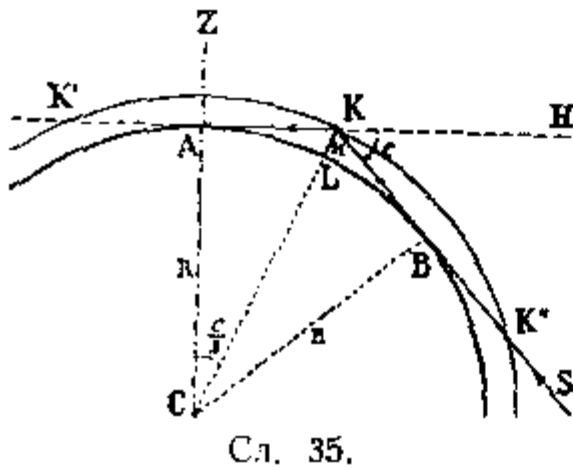
$$\cos z = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos (S_0 + l - \alpha) \quad (8.)$$

У тачкама Земљиног меридијана са дужином $l_0 = \alpha - S_0$ дано ће небесно тело кулминирати, показујући се на зенитном растојању z у тачкама са ширинама $\varphi_1 = \delta - z$ и $\varphi_2 = \delta + z$; за сваку пак интервалну тачку са ширином φ између ових граничних φ_1 и φ_2 , добиће се из ове једначине одговарајућа дужина места $\mp l$.

Кад би Земља била правилна кугла, онда би опште геометриско место на њој за све такве тачке (φ, l) био мали круг полупречника z са полом у оној тачци у којој се небесно тело показује у зениту, тј. са дужином $l_0 = \alpha - S_0$ и са ширином $\varphi = \delta$.

82. Астрономски сутон.

У току извеснога времена, како пре рађања Сунчевог, тако и после заласка његовог, зраци његови осветљавају горње слојеве атмосфере над хоризонтом АН посматрачеве тачке А (сл. 35.) и производе појаву сутона. *Астрономски сутон* рачуна се до онога момента, до којег се на целом небу, — без облака и без месечине, чак и на оним деловима његовим који су сунцу окренути, — могу још да виде голим оком и најслабије звезде 6. величине. Разуме се, да се тај момент не може тачно одредити, али, у средњем из многобројних повољних посматрања излази, да Сунце ради тога треба да буде испод хоризонта за величину угла $c = 17^\circ$.



Сл. 35.

Задаћа 10. Колика приближно треба да буде висина H Земљине атмосфере па да се никакав део њеног сегмента $КАК'$ (сл. 35.), — који се налази над хоризонтом тачке посматрања A , — не осветли непосредним зрацима Сунца S , при напред реченој висини његовој $\angle HKS = -c = -17^\circ$?

Ако узмемо ради упрошћења, да је Земљина површина сферног облика полупречника $R = 6000$ врста и не узмемо у обзир ни преламање сунчаних зракова, нити рефлекс њихов са осталих делова атмосфере, то ће зрак SK , — који се налази у вертикалној равни $ZAKS$, која и кроз Сунце пролази, — само додирнути Земљину површину у тачци B . Тада ће угли $\angle BSK$ и $\angle KCA$ при центру Земљиноме C изаћи равни $\frac{1}{2}c$, и из правоуглог троугла AKC добиће се:

$$R + H = \frac{R}{\cos \frac{c}{2}} \text{ или } H = R \frac{2 \sin^2 \frac{c}{4}}{\cos \frac{c}{2}} = 66 \text{ врста}^*).$$

Задаћа 11. При даној ширини места φ и деклинацији Сунца δ , одредити трајање τ астрономског сутона.

Кад означимо часовни угао Сунца при његову заласку (или изласку) са t_0 а при висини његовој $h = -c = -17^\circ$ — са t , добићемо тражено трајање $\tau = t - t_0$, пошто се t и t_0 одреде из израза:

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta \text{ и } \cos t = -\frac{\sin c + \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cdot \cos \delta} \quad (9.)$$

Пример. За Петроград ($\varphi = 59^\circ 56' 5$), при најмањој деклинацији Сунца $\delta = -23^\circ 27'$ (зими), излази да је:

$$t_0 = 41^\circ 27', \quad t = 83^\circ 30' \text{ и } \tau = 42^\circ 3' = 2^h 49^m;$$

при $\delta = 0$ (у пролеће и у јесен) излази:

$$t_0 = 90^\circ, \quad t = 125^\circ 43' \text{ и } \tau = 35^\circ 43' = 2^h 23';$$

при већој пак деклинацији δ од $+13^\circ 3' 5$ (што бива од краја априла до почетка августа), Сунце се неће ни спуштати ниже од 17° испод хоризонта те ће се стога вечерњи сутон сливати са јутарњим (зором), тј. трајаће целе ноћи („беле ноћи“).

*) На тој је висини ваздух толико већ разређен, да он губи способност рефлектовања сунчаних зракова; атмосфера пак са још ређим ваздухом треба да се простире и много даље од 66 врста, као што се то и потврђује из посматрања звезда падалица, о којима ће бити речи у XXVI глави овога дела.

Задаћа 12. Какво ће и при каквој ће деклинацији δ Сунца бити најмање трајање τ сушона на даноме месту са ширином φ ?

Врло би сложено било решење тога питања аналитичким путем, излазећи из израза (9.); међутим оно се решава директно и вр. просто геометричким начином, ако се на небесној сфери представи Сунце S као непомично (сл. 36.), а зенит посматрачевог места да се креће у току времена $Z_0PZ = t - t_0$ из Z_0 (када је $SZ_0 = 90^\circ$) у Z (када је $SZ = 90^\circ + c$).

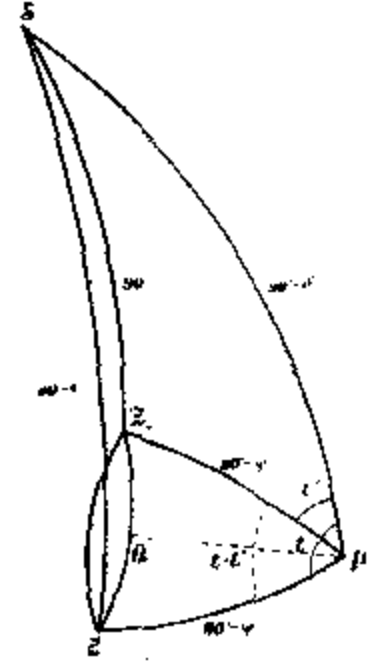
И заиста, тетива Z_0Z а с њоме заједно и угао $t - t_0$ троугла Z_0PZ постаће најмањи, када у троуглу Z_0SZ угао код S буде раван нули а страна $Z_0Z = SZ - SZ_0 = c$. На тај начин, ако уобразимо из P перпендикуларну PQ на тетиву Z_0Z , ми ћемо добити из троугла Z_0PQ

$$\sin \frac{\tau}{2} = \frac{\sin Z_0Q}{\sin Z_0P} = \sin \frac{c}{2} \sec \varphi$$

а из троугла SPQ

$$\sin \delta = \cos PS = \cos SQ \cos PQ = - \sin \frac{c}{2} \frac{\sin \varphi}{\cos \frac{c}{2}} = - \operatorname{tg} \frac{c}{2} \sin \varphi.$$

у Петрограду је на пример $\tau = 34^\circ 20' = 2^h 17^m$ при $\delta_\odot = -7^\circ 26'$.

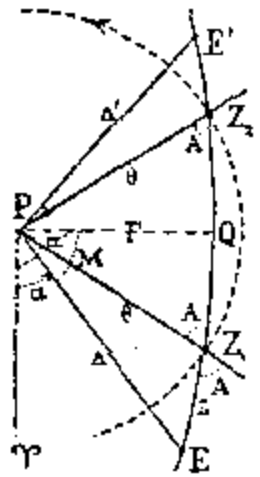


Сл. 36.

83. Две звезде у истом вертикалу.

Задаћа 13. Знајући ширину места, одредиши звездано време S , када ће се две дане звезде (α, Δ) и (α', Δ') налазити у истом вертикалу, чији азимуш A такође одредиши.

Пошто се зенит места посматрања треба да налази на великом кругу небесне сфере, која спаја две дане звезде E и E' (сл. 37.), то, кад опишемо из пола P мали круг полупречником $\Theta = 90^\circ - \varphi$, добићемо две тачке (Z_1 и Z_2) пресека његова са кругом EE' , које задовољавају услове наше задаће и помоћу којих ће се одредити тражена звездана времена $\angle \gamma PZ_1 = S_1$ и $\angle \gamma PZ_2 = S_2$.



Сл. 37.

Ради угоднијег срачунавања ових времена и њима одговарајућих азимута звездâ A и $180^\circ - A$, повуцимо управну $PQ = F$ и означимо угао EPQ са M у сферном троуглу EPE' са даним странама $PE = \Delta$, $PE' = \Delta'$ и углом међу њима $\angle EPE' = \alpha' - \alpha = \beta$. Онда ће се из два правоугла троугла EPQ и $E'PQ$ добити:

$$\operatorname{tg} F = \operatorname{tg} \Delta \cdot \cos M = \operatorname{tg} \Delta' \cdot \cos (\beta - M); \dots (10.)$$

одредивши одатле спочетка M а затим F , имаћемо из правоуглог троугла PZ_1Q (или из равнога њему PZ_2Q):

$$\cos (M + \alpha - S) = \frac{\operatorname{tg} F}{\operatorname{tg} \Theta}, \quad \sin A = \frac{\sin F}{\sin \Theta} \dots (11.)$$

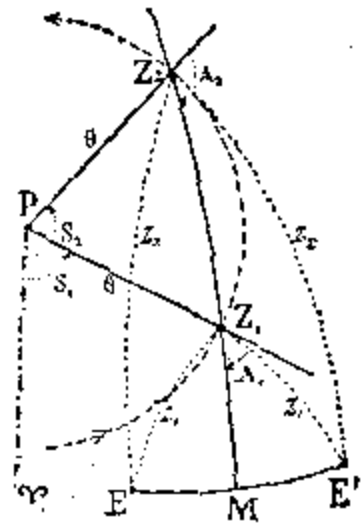
Задаћа 14. По даноме моменшу S једновременога пролаза двеју звезда (α, Δ) и (α', Δ') кроз један и исти вертикал, одредиши ширину места посматрања и азимуш шога вертикала.

Као и у прошлој задаћи, треба прво срачунати F и M из једначина 10. па ће се затим одредити $\operatorname{tg} \Theta$ и $\sin A$ по формулама 11.

84. Две и три звезде на једном алмукантарату.

Задаћа 15. Са познатом ширином месца, одредиши звездано време S , када две дане звезде (α, Δ) и (α', Δ') имају једнака зенишна растојања.

Ако кроз средину M лука EE' (сл. 38.), који спаја две дане звезде E и E' , повучемо велики круг сфере управно на тај лук, онда ће две тачке Z_1 и Z_2 пресека његова са малим кругом, описаним из пола P полупречником $\theta = 90^\circ - \varphi$, и бити тражени положаји зенита, који одговарају условима задаће и који стварају могућност, да се одреде тражена звездана времена $\angle \gamma PZ_1 = S_1$ и $\angle \gamma PZ_2 = S_2$. Аналитички пак услови задаће биће изражени једначинама:



Сл. 38.

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= \cos \theta \cos \Delta + \sin \theta \sin \Delta \cos (S - \alpha) \\ &= \cos \theta \cos \Delta' + \sin \theta \sin \Delta' \cos (S - \alpha') \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

из којих се добијају спочетка две величине S_1 и S_2 за тражено звездано време S (в. напомену из чл. 16.) а затим и њима одговарајућа зенишна растојања звезда $Z_1E = Z_1E' = z_1$ и $Z_2E = Z_2E' = z_2$.

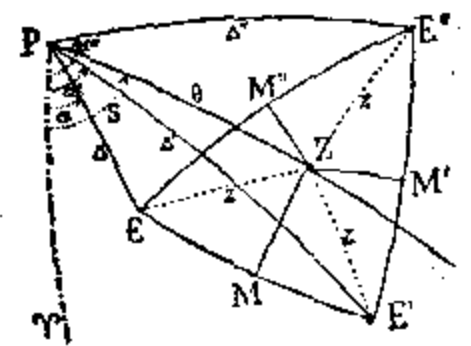
Задаћа 16. По даноме моменту S , у којем две звезде (α, Δ) и (α', Δ') имају једнака зенишна растојања, одредиши ширину месца посматрања.

Угао $\angle PZ = S$ потпуно одређује положај меридијана места посматрања односно даних звезда E и E' (сл. 38.); тачка пак Z пресека тога меридијана PZ са споменути — у предњој задаћи — кругом MZ , који пролази кроз средину M лука EE' , биће тражени положај зенита Z , чиме се добија $PZ = \theta = 90^\circ - \varphi$. Срачунавање пак траженог лука θ може се извршити и из следећег израза, који се добија из једначине (12.)

$$\cotg \theta = \frac{\sin \Delta' \cdot \cos (S - \alpha') - \sin \Delta \cdot \cos (S - \alpha)}{\cos \Delta - \cos \Delta'} \dots (13.)$$

Задаћа 17. Три дане звезде (α, Δ) , (α', Δ') и (α'', Δ'') налазе се једновремено на једном и истом алмукантарату. Одредиши тај момент S , ширину месца посматрања φ и сами алмукантарат z .

Геометријским се постројем задаћа решава врло просто: треба само кроз средине M, M' и M'' (сл. 39.) лукова, који спајају три дане звезде E, E' и E'' , повући управне на њих лукове великих кругова, тада ће заједничка тачка њихових пресека Z одредити све непознате: $\angle \gamma PZ = S$, $PZ = \theta = 90^\circ - \varphi$ и $ZE = ZE' = ZE'' = z$. За бројну пак одредбу непознатих послужиће у овом случају ове једначине:



Сл. 39.

$$\cotg \theta = \frac{\sin \Delta' \cdot \cos (S - \alpha') - \sin \Delta \cdot \cos (S - \alpha)}{\cos \Delta \cdot \cos \Delta'} = \frac{\sin \Delta'' \cdot \cos (S - \alpha'') - \sin \Delta \cdot \cos (S - \alpha)}{\cos \Delta \cdot \cos \Delta''} \dots (14)$$

по којима се срачунавају S и θ а затим се по формули (12.) добија за сваку звезду (тј. са дуплом контролом) тражено зенишно растојање z .

ГЛАВА XIII.

ТЕОРИЈА АСТРОНОМСКЕ РЕФРАКЦИЈЕ.

85. Општи израз рефракције.

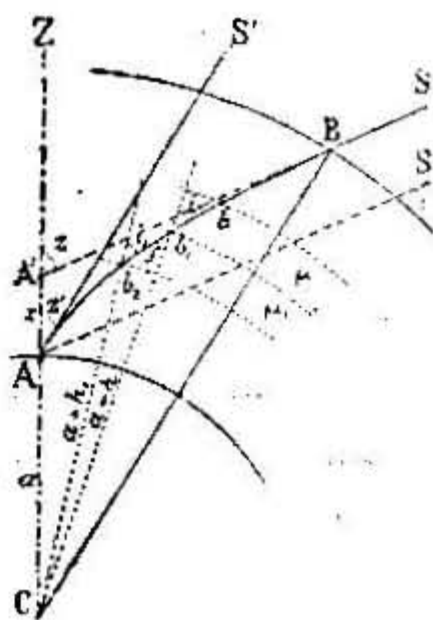
У глави IX (чл. 59.) ми смо извели за астрономску рефракцију, тј. за угао r , — који треба додати привидноме зенитноме растојању z' , да би се добило истинито z , — приближни израз $r'' \sin 1'' = (\mu - 1) \operatorname{tg} z'$, сматрајући при том, да је мали део криве Земљине површине исто што и равна површина. Сада пак, — занемарујући само врло малу спљоштеност Земље, — сматраћемо је као куглу полупречника $a = 5979$ врста*) а Земљину атмосферу замислићемо у облику такође сферних слојева, густине δ која непрекидно опада са увећање висине h тих слојева над Земљином површином. Као што је познато из физике, индекс преламања μ свакога слоја одредиће се тада на овај начин:

$$\mu = \sqrt{1 + 2k\delta},$$

где је $k = 0.0002825 = \frac{1}{3540} \cdot 58''.27 \cdot \sin 1''$, ако се за јединицу израза δ узме она густина ваздуха, која има места при нормалној температури од $+10^\circ \text{C}$ и при нормалном барометарском притиску од 760 mm .

Замислимо светлосни зрак $SBbb_1b_2\dots A$ са бескрајно удаљеног небесног тела S (сл. 40.), који спочетка иде правцем праве линије SB а затим, пошто ступи у атмосферу код B , он се све више и више повија, док напослетку не достигне до Земљине површине у тачци A привидним правцем $S'A$, који образује са вертикалном линијом ZAC угао $\angle ZAS' = z'$. За разматрање елемената bb_1 и b_1b_2 овога зрака у ма коме у два суседна слоја, који се налазе на висинама h и h_1 , са индексима преламања μ и μ_1 , да означимо углове, које заклапају ови елементи са продуженим полупречницима Cb_1 и Cb_2 , са i и i_1 а угао $\angle b_2b_1C$ са f . Тада ће (по познатом закону преламања из троугла b_1b_2C) изаћи, да је:

$$\frac{\sin f}{\sin i} = \frac{\mu}{\mu_1} \quad \text{и} \quad \frac{\sin i_1}{\sin f} = \frac{a+h}{a+h_1},$$



Сл. 40.

*) Ово захтева објашњења, јер за R такве сфере треба узети средњи из полупречника кривине на целој Земљиној површини. За нас је довољно да разматрамо само крајње његове величине: R_0 — на тачкама земног екватора ($\varphi = 0^\circ$) и R_{90} на земним половима ($\varphi = 90^\circ$). На првим ће се у меридионалном правцу добити за R најмања величина $\frac{b^2}{a}$ (форм. 2. чл. 75.) а у правцу управном, тј. по самом екватору — највећа, наиме a , тако да ће средње (геометриско) из њих бити $\sqrt{\frac{b^2}{a} \cdot a} = b$. На половима пак ($\varphi = 90^\circ$) и околним тачкама у свима правцима биће $R = R_{90} = \frac{a^2}{b}$ па због тога ће средња величина за R бити средње из R_0 и R_{90} тј. $\sqrt{R_0 \cdot R_{90}} = \sqrt{b \cdot \frac{a^2}{b}} = a$. —

према томе

$$(a + h) \mu \sin i = (a + h_1) \mu_1 \sin i_1.$$

То значи, да производ $(a + h) \mu \sin i$ треба да остане непромењљив у свима слојевима; пошто је пак на самој Земљиној површини

$$h = 0, \delta = \delta_0, \mu = \mu_0 \text{ и } i = \angle ZAS' = z', \text{ то је}$$

$$(a + h) \mu \sin i = a \mu_0 \sin z' \dots \dots \dots (1.)$$

Бескрајно мали прелом зрака dr при прелазу његовом из ма којег слоја густине δ у следећи слој густине $\delta + d\delta$ добиће се, ако у првој пропорцији, — која изражава закон преламања, — ставимо, да је

$$f = i - dr \text{ и } \mu_1 = \mu + d\mu.$$

Тада ће изаћи:

$$1 - dr \cdot \sin 1'' \cotg i = 1 - \frac{d\mu}{\mu}$$

или

$$dr \cdot \sin 1'' = \frac{d\mu}{\mu} \operatorname{tg} i \dots \dots \dots (2.)$$

Кад изразимо сада μ помоћу δ , кад означимо, затим, ради скраћења $\frac{\delta}{\delta_0} = \delta'$ и $\frac{h}{a} = h'$ и ограничимо се са првим степенима врло малих разломака k и h' , имаћемо.

$$\frac{\mu_0}{\mu} = \frac{1 + k\delta_0}{1 + k\delta} = (1 + k\delta_0) (1 + k\delta)^{-1} = 1 + k\delta_0 (1 - \delta'),$$

одакле, пошто се логаритмира и диференцира (задржавајући исту тачност) добијамо

$$\frac{d\mu}{\mu} = k\delta_0 \cdot d\delta'$$

Даље ће по (1.) бити:

$$\sin i = \frac{\mu_0}{\mu} \cdot \frac{\sin z'}{1 + h'} = [1 - h' + k\delta_0 (1 - \delta')] \sin z' = (1 - u) \sin z'$$

и

$$\operatorname{tg} i = \frac{\sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 i}} = \frac{(1 - u) \sin z'}{\sqrt{\cos^2 z' + 2u \sin^2 z'}} = \frac{1 - u}{\sqrt{\cotg^2 z' + 2u}}$$

где је

$$u = h' - k\delta_0 (1 - \delta') \dots \dots \dots (3.)$$

На тај начин, потпуна величина астрономске рефракције r , од највише границе атмосфере, где је $\delta' = 0$, па до површине Земљине, где је $\delta' = 1$, изразиће се, на основу диференцијалне једначине (2.), овако:

$$r \cdot \sin 1'' = k\delta_0 \int_0^1 \frac{(1 - u) d\delta'}{\sqrt{\cotg^2 z' + 2u}} \dots \dots \dots (C.)$$

Може се још изнети ван интеграла множитељ $(1 - u)$ ако заменимо врло мали разломак u следећом његовом средњом величином на простору целе атмосфере:

$$u_m = \int_0^1 u d\delta'$$

а та величина u_m , као што ћемо одмах видети, износи $\frac{1}{863}$; тада ће дефинитивно изаћи:*)

$$r = k' \delta_0 \int_0^1 \frac{d\delta'}{\sqrt{\cot^2 g^2 z' + 2u}}, \dots \dots \dots (C')$$

где је

$$k = 58''.27 (1 - u_m) = 58''.20.$$

86. Погодбе за равнотежу атмосфере.

Тачно се незна, како се управо мења густина ваздуха у Земљиној атмосфери, када је у равнотежи; због тога је, за израчунавање интеграла (C'), потребно прибећи некој претпоставци о аналитичној зависности δ' од h' или пак од u . При томе се може сматрати, да ће свака од таквих претпоставака задовољити наше потребе, ако само она пре свега не одступа од неизоставне погодбе за равнотежу атмосфере. Да видимо у чему ће се и како ће се та погодба изразити.

Замислимо вертикални стуб атмосфере, произвољно малога попречног пресека, чију раван можемо ради простоте узети за јединицу. По познатоме хидростатичком закону, да притисак p у ма којем слоју таквога стуба, — који је на висини h и са густином δ , — треба да буде раван тежини ваздуха који се на више у стубу налази; стога се он на висини $h + dh$ треба да смањи за величину dp , која је равна тежини ваздушнога стуба висине dh а густине δ , т. ј.

$$dp = -g\delta \cdot dh = -ag\delta \cdot dh',$$

где се, због мале висине $h' = \frac{h}{a}$, може узети интензитет теже g онакав исти као и на површини Земљиној. На тај ће се начин изразити притисак p_0 на самој површини Земљиној интегралом

$$p_0 = ag \int_0^{H'} \delta \cdot dh',$$

у којем $H' = \frac{H}{a}$ одговара горњему крају атмосфере ($p = 0$).

С друге пак стране, притисак се p_0 мери непосредно тежином барометарског живниог стуба висине b_0 (у милиметрима) или, равном њој, висином стуба ваздуха густине δ_0 и одговарајуће висине $l = b_0 \frac{\Delta}{\delta_0}$, где је Δ густина живе 10910 пута већа од густине ваздуха, која се узима за јединицу. Ако пак температуру ваздуха на површини Земље означимо са t_0 а коефицијент његове дилатације (ширења) за 1°C — са $\varepsilon = \frac{1}{273} = 0.00366$, то по познатоме Мариотову закону

$$\frac{\delta_0}{1} = \frac{b_0}{760} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon(t_0 - 10^\circ)},$$

излази управо:

$$l = 760 \cdot \Delta [1 + \varepsilon(t_0 - 10^\circ)] = l_0 [1 + \varepsilon(t_0 - 10^\circ)] \quad (4)$$

где је $l_0 = 760 \times 10910$ милиметара $= 8292 \text{ m} = 7 \frac{3}{4}$ врсте $= \frac{a}{769}$

*) Radau. „Recherches sur la théorie des refractions astronomiques“ (Annales de l'Observatoire de Paris. 1881.)

Густина ваздуха δ смањује се још унеколико због водене паре, која се у њему налази, али пошто се стога у исто време повећава његова моћ преламања, то утицај веће или мање количине влаге на величину рефракције постаје, уопште говорећи, неосетан те се обично и не узима у рачун.

Према томе је
$$p_0 = ag \int_0^{H'} \delta \cdot dh' = g \delta_0 l, \quad \text{тј. неопходно треба да буде}$$

$$\int_0^{H'} \delta' \cdot dh' = \frac{l}{a} = l' \quad \dots \dots \dots (5.)$$

Ово и јесте она погодба, коју треба да задовољи свака хипотеза о зависности δ' од h' . У примени пак на промењљиву $u = h' - k\delta_0(1 - \delta')$, која улази уместо h' у израз рефракције (C'), ова ће погода бити оваква:

$$\int_0^U \delta' \cdot du = \int_0^{H'} \delta' \cdot dh' + k\delta_0 \int_1^0 \delta' \cdot d\delta' = l' - \frac{1}{2} k\delta_0 = l'', \quad \dots \dots \dots (5.)'$$

при чему нормална величина за l'' (при $\delta_0 = 1$ и $t_0 = + 10^\circ \text{C}$) излази равна $\frac{1}{769} - \frac{1}{7080} = \frac{1}{863}$.

Ако пак последњи интеграл узмемо делимично, примивши

$$\int \delta' \cdot du = \delta' \cdot u - \int u \cdot d\delta'$$

и ако напоменемо при том, да се производ $\delta' \cdot u$ претвара у нулу како за горњу границу атмосфере ($u = 1$) тако и за доњу ($u = 0$), — онда ћемо исту погодбу ($5.)'$ добити у оваквом облику:

$$\int_0^1 u \cdot d\delta' = l'' \quad \dots \dots \dots (5.)''$$

Одатле излази, да ће напред речена средња величина u_m за сву атмосферу бити $u_m = l'' \left(= \frac{1}{863} \right)$.

Овде је место напоменути да Мариотов закон

$$\delta' = \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{p}{p_0} \frac{1}{1 + \varepsilon(t - t_0)}$$

заједно са изразом

$$\frac{dp}{p_0} = \delta' \frac{dh'}{l'} \quad \text{или пак} \quad \frac{p}{p_0} = - \frac{1}{l'} \int \delta' \cdot dh'$$

даје

$$1 + \varepsilon(t - t_0) = \frac{1}{\delta'} \frac{p}{p_0} = - \frac{\int \delta' \cdot dh'}{l' \delta'} \quad \dots \dots \dots (T)$$

тј. потпуно одређује закон промене температуре t у разним слојевима атмосфере, када је дата зависност густине тих слојева δ' од висине h' ; и обратно, одредио би се закон промене густине δ' , кад би била дата зависност t од h' . Према томе би се теорија рефракције могла израдити и на основу какве хипотезе о аналитичком облику те последње зависности.

Други захтеви, које треба тражити од хипотезе, изабране за срачунавање величине рефракције r по формули (С)' (осим тек што расмотрене неизоставне погодбе атмосферне равнотеже), закључиваће се у довољној сагласности њеној са констатованим већ метеоролошким подацима о слојевима атмосфере најближих Земљиној површини, и, што је најважније, у сагласности добивених, по тој хипотези, бројних вредности рефракције са онима до којих се долази из најтачнијих астрономских посматрања (чл. 81. задаћа 7.), која се врше специјално ради испитивања рефракције. Тако на пример, према првом хипотеза треба да даје смањивање температуре t приближно за 5°C . са издизањем на сваку једну врсту од Земљине површине; према другом пак треба при тим истим условима да даје хоризонталну рефракцију r_{90} близу $35'6''$, као што је речено у чл. 81.

87. Разне хипотезе о построју атмосфере.

I. У почетку је за основу рефракције (Симпсона и Бугера) служила претпоставка, да густине δ' разних слојева атмосфере опада — са повећањем висине тих слојева — у аритметичкој прогресији, тј. да је

$$\delta' = 1 - \frac{h'}{H'} \dots \dots \dots (6.)$$

Али је по таквој претпоставци и по услову (5.) излазило, да је висина атмосфере $H = aH' = 2l = 15\frac{1}{2}$ врта, тј. више од четири пута мања од оне, која се добија из трајања астрономских сутона (чл. 82., задаћа 10.); по њој се, затим, добијала сувише мала величина ($28'5$) хоризонталне рефракције r_{90} , а по формули (Т) и сувише брза промена температуре t (скоро за 18°C) са издизањем на 1 врсту изнад Земљине површине. Према томе та претпоставка ни у ком погледу не задовољава.

II. Ближе стварности подилази Њутнова хипотеза по којој густина δ' опада са повећањем висине h' у прогресији геометриској, т. ј.

$$\delta' = e^{-\frac{h'}{m}}, \quad \text{где је } e = 2.718\dots, \dots \dots (7)$$

при чему погодба (5.) даје

$$\int_0^\infty \frac{h'}{e^{\frac{h'}{m}}} dh' = m = l' = \frac{1}{769}.$$

Овде је безгранично простирање атмосфере само привидно, јер густина δ' постаје бројно сасвим ништавна (око $\frac{1}{60000}$) већ при $11 l = 85$ врта. Али величина рефракцијâ за велика зенитна растојања излазе толико већа од стварних, да је Бесел, — оснивајући своју теорију рефракције на истој претпоставци, — принуђен био, да узме за m број $\frac{1}{743} = l' \left(1 + \frac{1}{28}\right)$, који знатно одступа од неизоставне погодбе равнотеже у атмосфери. Па ипак се при томе он морао ограничити у својим таблицама са зенитним растојањима z' мањим од 85° , јер је и при том броју m излазило да је $r_{90} = 36'4$ уместо $35'1$.

Ова хипотеза излази недовољно тачна и по томе, што из ње по формули (Т) излази $t = t_0$, тј. температура t треба да остаје стална и то онаква, каква је на површини Земљиној.

Из свега овде реченог треба извести закључак, да стварни закон промене густине δ' у атмосфери подилази много ближе другој него ли првој хипотези, те треба да се представља као нешто средње међу њима. Због тога ако се, у том смислу, оцени вредност прве хипотезе сразмерно малом тежином n а друге — тежином $(1 - n)$, онда се за δ' може узети овакав израз

$$\delta' = (1 - n) e^{-\frac{h'}{m}} + n \left(1 - \frac{h'}{m}\right)$$

па да се одреде константне вредности за m и n тако, да би задовољена била и погодба (5.) и да би излазило $r_{90} = 35' 6''$. Сличним је начином поступио нпр. Крамп у својој теорији рефракције. Али је за интегрирање израза (С) требало прибећи тада развијању интегралне функције у врло компликовани и незгодни ред.

III. Боље ће бити зауставити се на најоштроумнијој хипотези Лапласовој која такође спада у ред интервалних међу напред реченим. Он није узео висину h' за независну променљиву већ $u = h' - k\delta_0 (1 - \delta')$ па је представио зависност δ' од u у облику

$$\delta' = e^{-\frac{u}{m}} \left(1 + n \frac{u}{m}\right) \quad (8.)$$

који омогућава тачно интегрирање израза (С). И заиста ако ставимо

$$\cotg^2 z' + 2u = 2m x^2 \text{ и } \frac{\cotg z'}{\sqrt{2m}} = c,$$

онда ћемо добити

$$d\delta' = -e^{-\frac{u}{m}} \left(1 - n + n \frac{u}{m}\right) \frac{du}{m} = -e^{-\frac{c^2 - x^2}{m}} \cdot [1 - n + n(x^2 - c^2)] 2x \cdot dx$$

и

$$r = k' \delta_0 \sqrt{\frac{2}{m}} e^{c^2} \left[(1 - n - nc^2) \int_c^\infty e^{-x^2} dx - n \int_c^\infty x^2 e^{-x^2} dx \right];$$

али делимичним интегрирањем излази

$$\int_c^\infty x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} c e^{-c^2} + \frac{1}{2} \int_c^\infty e^{-x^2} dx$$

па због тога, ако се означи

$$e^{c^2} \int_c^\infty e^{-x^2} dx = \psi(c)^*$$

онда ће бити

$$r = k' \delta_0 \sqrt{\frac{2}{m}} \left[\left(1 - \frac{n}{2} - nc^2\right) \psi(c) + \frac{n}{2} c \right];$$

рефракција пак у хоризонту ($z' = 90^\circ$, $c = 0$), усљед тога што је

$$\psi(0) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(чл. 42, формула p), изразиће се овако

$$r_{90} = k' \delta_0 \left(1 - \frac{n}{2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2m}}$$

*) За изналажење бројне вредности $\psi(c)$ постоје у Беселовој „Fundamenta Astronomiae“ помоћне таблице.

Сад остаје само да се одреди бројна вредност константних m и n тако, да би при нормалним атмосферским погодбама ($\delta_0 = 1$) излазило $r_{90} = 35'6''$ и да би задовољена била погодба (5'), а наиме:

$$\int_0^U \delta' du = - \int_0^\infty e^{-\frac{u}{m}} du + \frac{n}{m} \int_0^\infty e^{-\frac{u}{m}} u du = m(1+n) = l''.$$

Из две једначине:

$$58'2 \left(1 - \frac{n}{2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2m}} = 35'6'' \text{ и } m(1+n) = \frac{1}{863}$$

те бројне вредности излазе овакве:

$$n = 0.2213 \text{ и } m = 0.0009489.$$

На овој Лапласовој хипотези основане су таблице рефракције, које се сваке године дају у француском астрономском календару „*Connaissance des Temps*“.

IV. За основу теорије рефракције може да послужи још и тако исто прости закон промене густине δ' у атмосфери, као што је и Њутнов, али у облику

$$\delta' = e^{-\frac{u}{m}} \dots \dots \dots (9.)$$

који се добија, ако у тек што разматраној Лапласовој хипотези ставимо $n = 0$, и који према томе приводи к оваквој најпростијем изразу рефракције

$$r = k' \delta_0 \sqrt{\frac{2}{m}} \psi(c) \dots \dots \dots (c)$$

Тада погодба (5)' даје $m = l''$ (у средњем $= \frac{1}{863}$), а с тим бројем нормална величина (при $\delta_0 = 1$) хоризонталне рефракције r_{90} излази нешто већа, а наиме за $36''$ већа од $35'6''$. Али, ако се попут Бесела одступи од погодбе атмосферске равнотеже и узме — као што је то урадио Ополцер — број

$$m = l' \left(1 + \frac{1}{35}\right) - \frac{k \delta_0}{2},$$

који је при $\delta_0 = 1$ раван $\frac{1}{833.6}$, то ће се по формули (c) добити величина r , која се доста добро слаже са посматрањима при свима могућним зенитним растојањима z' од 0° до 90° закључно.

V. Све остале теорије рефракције, које се заснивају на овој или оној хипотетичкој зависности густине δ или температуре t у атмосфери од висине h , подударујући се са посматрањима не боље од Лапласове, воде само ка сложенијим изразима за r . Таква је на пример Хилденова теорија по којој су састављене таблице рефракције за Пулковску Опсерваторију. Полазећи са претпоставке, да се опадање температуре t у атмосфери са висином $h' = \frac{h}{a}$ изражава формулом

$$1 + \varepsilon(t - t_0) = (1 - \beta h')^2 \dots \dots \dots (10.)$$

и одредивши средњу величину коефицијента β из огледних дана, — добивених на високим планинама и у долинама, — Хилден добија рефракције нешто мање од оних основних, које потичу из посматрања Аргеландера у Кенигсбергу а тако исто и од Фусових у Пулкову.

У таблци, која следује, показана су одступања величина рефракције, — која се добијају за велика зенитна растојања по формулама Бесела, Ополцера, Лапласа и Хилдена, — од онога што дају непосредна посматрања:

z'	Посматрања	Бесел	Лаплас	Ополцер	Хилден
75°	3' 34"	0"	0"	0"	0"
85	9 50	+ 1	0	+ 1	0
87	14 21	+ 2	+ 1	+ 2	0
88	18 17	+ 6	+ 1	+ 3	— 3
89	24 36	+ 14	— 4	— 1	— 19
90	35 6	+ 77	+ 3	0	— 39

88. Израз рефракције у облику реда.

Пре него што би се интегрирао израз (C'), — при ма каквој претпоставци о $\delta' = f(u)$, — подинтегралну његову функцију $\frac{tg z'}{\sqrt{1 + 2u tg^2 z'}}$ можемо представити у облику реда

$$= tg z' [1 - \frac{1}{2} (2u tg^2 z') + \frac{1.3}{2.4} (2u tg^2 z')^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6} (2u tg^2 z')^3 + \dots],$$

који ће, због мале величине променљиве u , бити свршен чак и за велика зенитна растојања z' . Тада излази:

$$r = k' \delta_0 (A tg z' - B tg^3 z' + C tg^5 z' - D tg^7 z' + \dots), \dots (D)$$

где је $A = \int_0^1 d\delta' = 1$, $B = \int_0^1 u \cdot d\delta'$, $C = \frac{3}{2} \int_0^1 u^2 d\delta'$, $D = \frac{5}{2} \int_0^1 u^3 d\delta'$

Помоћу таквих редова (D), са наизменично променљивим знацима, сређених по растућим непарним степенима $tg z'$, и срачунавају се, — по разним хипотезама о функцији $f(u)$, — табличне вредности рефракције за сва могућна зенитна растојања, која не превазилазе 85°. При томе за све хипотезе о $f(u)$, које задовољавају погодбу (5) атмосферске равнотеже, коефицијент ће B у другоме члану реда бити један и исти, а наиме $B = l''$.

Да одредимо сад остале коефицијенте C и D реда (D) са најпростијом претпоставком $\delta' = e^{-\frac{u}{m}}$ и са нормалним бројевима за њу $\delta_0 = 1$ и $m = l'' = \frac{1}{863}$. Пошто делимичним интегрирањем излази уопште, да је

$$\int_0^1 u^n \cdot d\delta' = \int_0^\infty e^{-\frac{u}{m}} \cdot u^n \cdot \frac{du}{m} = nm \int_0^\infty e^{-\frac{u}{m}} \cdot u^{n-1} \cdot \frac{du}{m} = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 (m^n),$$

то ће бити $B = m$, $C = \frac{3}{2} \times 2 m^2 = 3 m^2$, $D = \frac{5}{2} \times 3 \cdot 2 m^3 = 15 m^3$, па ће се добити, да је

$$r = \left. \begin{aligned} &58''.20 tg z' - 0.0674 tg^3 z' + \\ &+ 0''.000234 tg^5 z' - 0''.0000014 tg^7 z' + \dots \end{aligned} \right\} \dots (D')$$

Овде је трећи члан са $tg^5 z'$ већ толико мали (мањи од $1''$ при $z' = 79^\circ$) да промена његова због друкчије хипотезе о построју атмосфере може осетно утицати на срачунавану величину рефракције r само при зенитним растојањима z' , већим од 80° (што се види и из предње таблице); при зенитним пак растојањима, мањим од $75'$, он се може и сасвим одбацити.

А ако се за исту хипотезу (9.) узме $m = \frac{1}{833.6}$, то ће изаћи

$$r = \left. \begin{aligned} &58''.20 \, tg \, z' - 0''.0696 \, tg^3 \, z' + \\ &+ 0''.000250 \, tg^5 \, z' - 0''.0000015 \, tg^7 \, z' + \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots ; (D'')$$

Разлика између рефракција, срачунатих по овој формули и по формули (D') чини свега $0''.3$ за $z' = 80^\circ$; за зенитна пак растојања мања од 75° , она ће бити потпуно неосетна. На тај се начин убеђујемо, да мало одступање од погодбе атмосферске равнотеже, — које је допустио Ополцер попут Бесела, — доводи формулу (c) ка бољој сагласности са посматрањима близу хоризонта а не мењајући при том величине ни осталих рефракција, оно је потпуно оправдано.

Па тако је и у самој ствари, јер се слојеви атмосфере, који су најближи Земљиној површини, никада не налазе у потпуној равнотежи; ноћу пак, најновија метеоролошка посматрања константовала су, да се у њима јављају тако зване температурне *инверсије* тј. не опадање већ пењање температуре са издизањем над Земљином површином. Услед тога, чак и при истом барометарском притиску и истој температури на Земљиној површини, посматране рефракције бивају час веће, час мање од нормалне њихове величине r и представљају управо, — као што је Бесел показао, — оваква вероватна њена одступања Δr у сваком посебном случају:

при z'	45°	75°	80°	85°	90°
	$\pm 0''.3$	$\pm 0''.7$	$\pm 0''.9$	$\pm 1''.7$	$\pm 20''$.

То значи, да се на посматрања зенитних растојања небесних тела близу 90° не можемо сигурно ослањати ни при каквој теорији рефракције па их је стога боље просто избегавати.

89. Таблице рефракције.

Из напред изложенога види се, да се рефракција r , — ма каква била узета теорија за њу, — може представити у облику

$$r = \alpha \, \delta_0 \, tg \, z' \dots \dots \dots (11.)$$

где ће множитељ α зависити на познати начин од привидног зенитног растојања небесног тела z' и од величина (чл. 86.)

$$l = \frac{a}{760} \left[1 + \varepsilon (t_0 - 10^\circ) \right] \text{ и } \delta_0 = \frac{b_0}{760} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon (t_0 - 10^\circ)}$$

Рефракција $r_0 = \alpha_0 \, tg \, z'$, која је срачуната за нормалну температуру ваздуха на површини Земље $t_0 = +10^\circ \text{ C.}$ и за нормални барометарски притисак $b_0 = 760 \text{ mm.}$ — зове се *средња рефракција*. *Истиништа* пак рефракција r , која одговара другим величинама t_0 и b_0 , добија се помоћу r_0 на овај начин:

$$r = r_0 \, \delta_0 \cdot \frac{\alpha}{\alpha_0} \text{ или } \lg r = \lg r_0 + \lg \delta_0 + (\lg \alpha - \lg \alpha_0),$$

где ће разлика $(\lg \alpha - \lg \alpha_0)$ бити осетна тек при доста великим зенитним растојањима z' . Ако означимо ради скраћења

$$\lg \frac{b_0}{760} = \beta_0 \text{ и } \lg \frac{1}{1 + \varepsilon (t_0 - 10^\circ)} = \tau_0$$

и ако се ограничимо само са првим степенима малих величина β_0 и τ_0 (пошто се, уопште говорећи, b_0 и t_0 неће много разликовати од 760 mm и $- 10^\circ \text{ C.}$), то ће се по Тејлоровом реду добити

$$\lg \alpha = \lg \alpha_0 + p \beta_0 + q \tau_0, \text{ где је } p = \left(\frac{d \lg \alpha}{d \beta_0} \right) \text{ и } q = \left(\frac{d \lg \alpha}{d \tau_0} \right)$$

а затим

$$\lg r = \lg r_0 + (1 + p) \beta_0 + (1 + q) \tau_0 \dots \dots \dots (12.)$$

Треба још напоменути, да b_0 треба да представља стање барометра, које је сведено на температуру живе 0° ; због тога, ако термометар код барометра показује температуру t° а посматрана висина барометра је b , то ће бити

$$b_0 = \frac{b}{1 + \varepsilon t},$$

где је $\varepsilon = \frac{1}{5550}$ коефицијент ширења живе. Означујући тада, ради скраћења,

$$\lg \frac{b}{760} = \beta \text{ и } \lg \frac{1}{1 + \varepsilon t} = \tau,$$

добићемо дефинитивну формулу за срачунавање истините рефракције r , коју је предложио *Бесел*:

$$\lg r = \lg \operatorname{tg} z' + \lg \alpha_0 + (1 + p) (\beta + \tau) + (1 + q) \tau_0 \dots \dots \dots (12.)'$$

За величине α_0 , p и q састављају се помоћне таблице по аргументу привидног зенитног растојања z' ; за остале пак величине β , τ и τ_0 као аргументи служе показања барометра (b), термометра код барометра (t) и спољњег термометра (t_0). У таблици 4., која је дата на крају књиге, величине $\lg_4 \alpha_0$ (за $z' < 83^\circ$) и $\lg_4 r_0$ (за $z' > 83^\circ$) срачунате су управо по формулама (D'') и (c) са *Ополцеровим* бројем $m = \frac{1}{833.6}$; поправке β , τ и τ_0 ових логаритама изражене су у јединицама четврте децимале; величине пак p и q узете су из *Беселових* таблица рефракције.

Например, при $z' = 84^\circ 45' 30'' 0$, $b = 741.0 \text{ mm.}$, $t = + 15^\circ 0$ и $t_0 = - 10^\circ 0 \text{ C.}$, истинита рефракција r и истинито зенитно растојање z срачунаће се, по даним у тој таблици, на овај начин:

$p = 0.01$	$q = 0.11$	$\lg r_0 = 2.7545$	$r = 599'' 4$
$\beta = - 110$	$\tau_0 = + 318$	$(1 + p) (\beta + \tau) = - 121$	$= 9' 59'' 4$
$\tau = - 10$	$q \tau_0 = + 35$	$(1 + q) \tau_0 = + 353$	
$\beta + \tau = - 120$		$\lg r = 2.7777$	$z = 84^\circ 55' 29'' 4.$

Напомена. Ако је дато истинито зенитно растојање z , рефракција се r може наћи помоћу истих таблица поступним приближењима, при чему ће се у првом приближењу за $z' = z$ добити средња рефракција r_0 , затим се по $z' = z - r_0$ нађе истинита r . Тако нпр. ако би при истим метеоролошким погодбама, као и у прошлом примеру, било дано $z = 84^\circ 55' 29'' 4$, то би се из 4. таблице добило:

у 1. приближењу	$\lg r_0 = 2.7659$	$r_0 = 9' 43''$	$z' = 84^\circ 45' 46''$
„ 2. „	$\lg r = 2.7547 + 232$	$r = 9' 59.7$	$z' = 84^\circ 45' 29.7$
„ 3. „	$\lg r = 2.7545 + 232$	$r = 9' 59.4$	$z' = 84^\circ 45' 30.0$

90. Поправка висине места посматрања.

Кад се зрак $SBb_1b_2\dots$ од небесног тела S (сл. 40.), који долази до тачке посматрања A правцем AS' , не би преламао у атмосфери, већ би ишао првобитним својим правцем, по правој линији SB , он би доспео до вертикалне линије у некој тачци A' и образовао би код ње угао $\sphericalangle ZA'S = z = z' + r$, који се зове истинито зенитно растојање небесног тела. Правац пак AS , који је одређен тим истим углом $\sphericalangle ZAS = z$, неће се моћи сматрати као истинити правац на небесно тело, ако се дужина $AA' = x$ покаже доста велика због близине тога небесног тела. Према томе, да би се поступило потпуно строго при свима могућним посматрањима небесних тела, најближих Земљи, треба преносити ова посматрања управо на тачку A' , тј. увек додавати висини места посматрања над морем још и дужину $AA' = x$.

Величина x лако се одређује на овај начин: За тачку B , — у којој зрак од небесног тела S улази у атмосферу ($\mu = 1$) под углом i према нормали BC , — из троугла се $A'BC$ добија, да је $(a + x) \sin z = BC \sin i$; по основној пак формули (1.) ове главе $BC \sin i = a \mu_0 \sin z'$; према томе је

$$(a + x) \sin z = a \mu_0 \sin z' = a (1 + k \delta_0) \sin z', \text{ одакле је}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{(1 + k \delta_0) \sin z'}{\sin(z' + r)} - 1 = \frac{1 + k \delta_0}{1 + \sin r \cdot \cotg z'} - 1;$$

због мале пак величине $\sin r \cdot \cotg z'$ у савјезу са јединицом, излази да је, при средњој вредности $\delta_0 = 1$, просто

$$\frac{x}{a} = k - \sin r \cdot \cotg z' \dots \dots \dots (e)$$

Према томе, при $\delta_0 = 1$, највећа величина за x (када је $z' = 90^\circ$) излази равна $ak = \frac{a}{3540} = 1.7$ врсте; због тога се она несме занемаривати при посматрањима Месеца.

На основу ове формуле (e), логаритму од 6 децимала геоцентричкога растојања ρ данога места посматрања (в. таблицу 3.) треба увек додавати ове поправке $\Delta \lg_6 \rho = M \frac{x}{a} = 0.434 \frac{x}{a}$:

при z'	$\lg_6 \rho$	при z'	$\Delta \lg_6 \rho$	при z'	$\Delta \lg_6 \rho$
60°	0	81°	5	86°	19
65	1	82	6	87	28
70	1	83	8	88	42
75	2	84	10	89	69
80	4	85	14	90	123

91. Кривина рефракционе криве.

У свакој тачци b_1 рефракционе криве $Vb_1b_2\dots A$ (сл. 40.) кривина $\frac{1}{\rho}$ те криве добиће се деобом бескрајно малог прелома зрака $dr = i - f$ са дужином одговарајућег елемента криве $bb_1 = ds = -\frac{dh}{\cos i}$ и, на основу формуле (2.) чл. 85., изразиће се уопште овако:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\mu}{\mu} \operatorname{tg} i: - \frac{dh}{\cos i} = - \frac{d\mu}{\mu} \cdot \frac{\sin i}{dh} = - \frac{k \delta_0}{a} \cdot \frac{d\delta'}{dh'} \cdot (1 - u) \sin z'$$

а ако занемаримо величину u , ништавну у сравању са 1, то ће при нормалној густини ваздуха $\delta_0 = 1$ на Земљиној површини, изаћи просто

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{k}{a} \sin z' \cdot \frac{d\delta'}{dh'}, \dots \dots \dots (13.)$$

На тај начин, са претпоставком опадања густине δ' са висином h' у прогресији аритметичкој ($\delta' = 1 - \frac{h'}{2l}$), добија се

$$\frac{1}{\rho} = \frac{k}{2al} \sin z' = \frac{1}{9.2a} \sin z' \dots \dots \dots (13.)'$$

тј. пут зрака је кроз атмосферу круг полупречника $\frac{9.2a}{\sin z'}$. Са претпоставком пак опадања густине δ' са висином h' у прогресији геометријској ($\delta' = e^{-\frac{h'}{l}}$), добија се

$$\frac{1}{\rho} = \frac{k}{al} \sin z' e^{-\frac{h'}{l}}; \dots \dots \dots (13.)''$$

стога ће код саме површине Земљине ($h' = 0$) полупречник кривине рефракционе криве изаћи најмањи, а наиме $\frac{4.6a}{\sin z'}$.

Али, у чл. 87. ми смо видели, да прави закон опадања густине у атмосфери треба да представља нешто средње међу тим двама претпоставкама; због тога полупречник кривине зрака близу Земљине површине треба да има неку средњу величину између $\frac{9.2a}{\delta_0 \sin z'}$ и $\frac{4.6a}{\delta_0 \sin z'}$. Тако то и излази у самој ствари из геодетских мерења висина земљишних предмета ($\sin z' = 1$), када се она врше при нормалној густини ваздуха $\delta_0 = 1$ и при најмирнијем његовом стању, што наступа обично за два часа до заласка Сунчева. Тада полупречник кривине зрака ρ_0 излази раван око $6a$ или $7a$ тј. средњој величини између $9.2a$ и $4.6a$, о чему је већ било речи у чл. 57. главе IX при одређивању удаљености и спуштања привидног хоризонта.

Задаће:

1.) У времену привидног зенитног растојања $z' = 86^\circ 0'$ центра Сунчевог диска, чији је тада истинити угловни полупречник $R = 16' 0''$, — одредити вертикалну привидну спљоштеност тога диска, што је чини рефракција (средња).

Ако означимо привидна зенитна растојања горње и доње тачке Сунчевога диска са z_1' и z_2' , одговарајуће им рефракције — са r_1 и r_2 а рефракцију за $z_0' = 86^\circ 0'$ — са r_0 , то ће спљоштеност горње половине диска бити $\Delta R_1 = r_0 - r_1$ а доње $\Delta R_2 = r_2 - r_0$. Узев спочетка приближно: $z_1' = z_0' - 16' = 85^\circ 44'$ и $z_2' = z_0' + 16' = 86^\circ 16'$, наћи ћемо из таблице 4. да је:

$$r_1 = 11' 0'', \quad r_0 = 11' 43'' \quad \text{и} \quad r_2 = 12' 20'', \quad \text{тј.} \quad \Delta R_1 = 33'' \quad \text{и} \quad \Delta R_2 = 37'';$$

после тога имаћемо тачније:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_0' - 16' + \Delta R_1 = 85^\circ 44' 33'', & r_1 &= 11' 11'' \quad \text{и} \quad \Delta R_1 = 32'' \\ z_2' &= z_0' + 16' - \Delta R_2 = 86^\circ 15' 23'', & r_2 &= 12' 19'' \quad \text{и} \quad \Delta R_2 = 36. \end{aligned}$$

На тај начин средња спљоштеност Сунчевог диска, у односу према хоризонталноме његовом полупречнику $R = 16' 0''$, — који се смањује услед рефракције само за $\frac{1''}{4}$ (чл. 59.), — излази равно $\frac{34''}{966''} = \frac{1}{28.2}$.

2.) Са подацима из предње задаће, сматрајући деформисани услед рефракције диск Сунца за елипсу са средњом спљоштеношћу $c = \frac{\Delta R_1 + \Delta R_2}{2R}$, — одредити привидни пречник његов $2R'$ у правцу, који саставља са вертикалним пречником угао $M = 45^\circ$.

Приближно ће се $2R'$ добити по формули (6)' чл. 77. и изаћи ће:

$$2R' = 2R (1 - c \cdot \cos^2 M) = 2R - \frac{1}{2} (\Delta R_1 + \Delta R_2) = 32' 0'' - 34'' = 31' 26''.$$

3.) Имамо t' и Δ' као привидни часовни угао и поларно растојање небесног тела (издигнутог рефракцијом). Одредити истините величине и часовног угла његовог t и поларног растојања Δ , узев за рефракцију r приближни израз $k' \delta_0 \operatorname{tg} z'$ и са претпоставком да је Δ врло мало.

Ако замислимо на небесној сфери положај пола у P , зенита у Z , истинитог и привидног места небесног тела у S и S' , добићемо елементарни троугао PSS' са врло малом страном $SS' = r$ и са паралактичким углом код ње $\sphericalangle PSS' = \sphericalangle PS'Z = q'$, а, из тога троугла излази:

$$\Delta - \Delta' = r \cdot \cos q' = k' \delta_0 \cdot \operatorname{tg} z' \cos q' \text{ и } (t - t') \sin \Delta' = r \cdot \sin q' = k' \delta_0 \cdot \operatorname{tg} z' \sin q'.$$

Ако још поделимо троугао $PS'Z$, управном Zp на деклинациони круг PS , на два правоугла троугла PZp и pZS' и означимо $Pp = f$, — имаћемо:

$$\operatorname{tg} f = \operatorname{tg} \Theta \cos t', \quad \sin z' \sin q' = \sin \Theta \cdot \sin t',$$

$$\operatorname{tg} z' \cos q' = \operatorname{tg} (\Delta' - f), \quad \cos z' = \cos Zp \cdot \cos (\Delta' - f) = \frac{\cos \Theta \cos (\Delta' - f)}{\cos f},$$

а због тога

$$\Delta - \Delta' = k' \delta_0 \operatorname{tg} (\Delta' - f) \text{ и } (t - t') \sin \Delta' = k' \delta_0 \frac{\operatorname{tg} \Theta \sin t'}{\cos (\Delta' - f)} \cdot \cos f = k' \delta_0 \frac{\sin f \cdot \operatorname{tg} t'}{\cos (\Delta' - f)}.$$

ГЛАВА XIV.

ПАРАЛАКСА НЕБЕСНИХ ТЕЛА.

92. Основне формуле паралаксе.

Растојања до Месеца, Сунца и планета нису тако велика, да бисмо правце на та небесна тела са разних места Земљине површине могли сматрати за паралелне; стога се ти правци зову *привидни*. Правац пак на неко небесно тело M из центра Земље C (сл. 41. I), — као правилног ротационог елипсоида, — усвојено је да се у тим случајима зове *истинити*. Најзад, угао $\sphericalangle AMC = p$ између овога геоцентричког правца CM и привидног AM са неке тачке Земљине површине A — зове се *паралакса*.

Нека је A место на Земљиној површини, $PCA = \theta' = 90^\circ - \varphi'$ — допуна његове геоцентричке ширине φ' до 90° , $AC = ar$ — геоцентричко његово растојање (чл. 77.) а CAZ — продужење Земљинога полупречника CA , коме ће на небесној сфери одговарати тачка Z (сл. 41. II), која се налази на меридијану места PZ а на растојању $\psi = \varphi - \varphi'$ од зенита Z ; та тачка Z зове се *геоцентрички зениш места* A . Тачка M на тој сфери нека одговара истинитоме правцу CM ка небесном телу а тачка M' — привидном правцу AM ; онда је очевидно, да ће се ова тачка M' налазити на великом кругу ZM , који одговара равни ZCM , а наине на растојању од прве тачке M

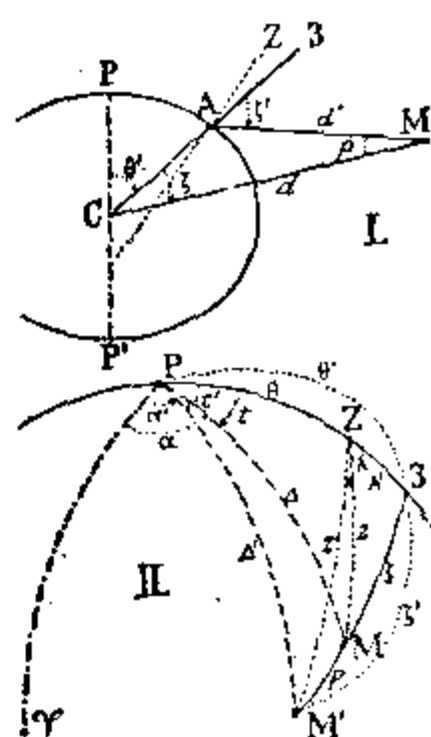
$$MM' = \sphericalangle AMC = p$$

Пошто означимо угловна растојања $ZM = \sphericalangle ZCM$ и $ZM' = \sphericalangle ZAM$ са ζ и ζ' , линеарно пак растојање CM до небесног тела — са d , имаћемо из троугла AMC овакав израз за p :

$$\sin p = \frac{ar}{d} \cdot \sin \zeta'$$

Највећа паралакса, — која се добија при $p = 1$ и $\zeta' = 90^\circ$, тј. када је место посматрања на екватору а само небесно тело на хоризонту, — зове се *хоризонтална екваторијална паралакса небесног тела*. Другим речима, то је угао под којим се представља екваторијални полупречник Земље a , гледан са тога небесног тела. Означивши га са π , добићемо

$$\sin \pi = \frac{a}{d} \quad \text{и} \quad \sin p = p \cdot \sin \pi \cdot \sin \zeta' \dots \dots \dots (E)$$



Сл. 41.

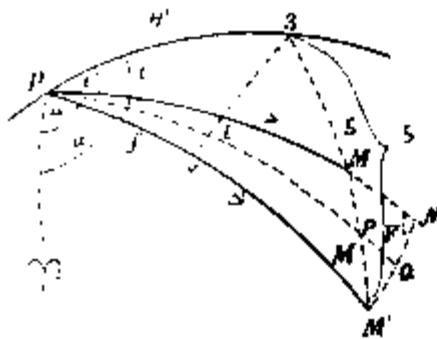
На тај ће се начин одредити $\zeta = \zeta' - p$, при познатој величини d или пак π , када је дано привидно место M' небесног тела. Обрато пак, ако буде дато истинито његово место M па разуме се и ζ , то за одређивање величине p треба у израз (E) ставити $\zeta' = \zeta + p$; тада ће изаћи:

$$\operatorname{tg} p = \frac{\rho \cdot \sin \pi \cdot \sin \zeta}{1 - \rho \sin \pi \cdot \cos \zeta} \dots \dots \dots (E)'$$

Из свега реченога већ је јасно, са каквом би се тачношћу могле одредити истините екваторијалне координате небесног тела Δ и $t = S - \alpha$ по даним, привидним и добивеним из непосредних посматрања Δ' и $t' = S - \alpha'$ или и обрато; тако исто и истините хоризонталне његове координате z и A по даним привидним z' и A' или и обрато (сл. 41. II); при томе под z' треба увек подразумевати, да је то зенитно растојање небесног тела, које је већ ослобођено од утицаја рефракције. Али, због мале величине паралаксе π небесних тела, свагда је повољније изналазити директно само мале разлике $\Delta' - \Delta$ и $t' - t$ или пак $z' - z$ и $A' - A$. Извођење доста приближних израза за ове разлике одмах ћемо и започети.

93. Дејство паралаксе на екваторијалне координате небесних тела.

Узмимо да на небесној сфери (сл. 42.) тачка P представља северни светски пол, Z — геоцентрички зенит места посматрања, M — истинито а M' — привидно место небесног тела. Из сферног троугла PMM' , — ако означимо у њему угао $\sphericalangle PM'M$ са M' , — излази



Сл. 42.

$$\sin (t' - t) \sin \Delta = \sin p \sin M' = \rho \sin \pi \sin \zeta' \sin M' = \rho \sin \pi \sin \Theta' \sin t$$

или $\sin (t' - t) = m \sin t'$, где је $m = \frac{\rho \cdot \sin \pi \sin \Theta'}{\sin \Delta} \dots \dots (1)$,

Ако пак овде ставимо

$$\sin t' = \sin [t + (t' - t)] = \sin t \cos (t' - t) + \cos t \sin (t' - t),$$

то ће се добити

$$\operatorname{tg} (t' - t) = \frac{m \cdot \sin t}{1 - m \cos t} \dots \dots \dots (2),$$

За одређење разлике $\Delta' - \Delta$ пренесимо по деклинационом кругу PM лук $PN = PM' = \Delta'$ и, — пошто повучемо кроз тачке M' и N велики круг, — означимо угао $\sphericalangle PM'N = \sphericalangle PNM'$ са F . Тада ће из троугла MNM' изаћи

$$\frac{\sin MN}{\sin p} = \frac{\sin (\Delta' - \Delta)}{\rho \cdot \sin \pi \cdot \sin \zeta'} = \frac{\sin (F - M')}{\sin F} = \cos M' - \sin M' \operatorname{cotg} F;$$

пошто пак правоугли троугао $PM'Q$, — добивени деобом угла NPM' луком PQ напола, — даје

$$\operatorname{cotg} F = \cos \Delta' \operatorname{tg} \frac{t' - t}{2},$$

то је $\sin (\Delta' - \Delta) = \rho \sin \pi (\sin \zeta' \cos M' - \sin \zeta' \sin M' \cos \Delta' \operatorname{tg} \frac{t' - t}{2})$
 $= \rho \sin \pi (\cos \Theta' \sin \Delta' - \sin \Theta' \cos \Delta' \cos t' - \sin \Theta' \cos \Delta' \sin t' \operatorname{tg} \frac{t' - t}{2})$

$$= \rho \sin \pi \cos \Theta' \left(\sin \Delta' - \cos \Delta' \operatorname{tg} \Theta' \frac{\cos \frac{t'+t}{2}}{\cos \frac{t'-t}{2}} \right)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sin (\Delta' - \Delta) &= n \sin (\Delta' - f), \\ \operatorname{tg} f &= \operatorname{tg} \Theta' \frac{\cos \frac{t'+t}{2}}{\cos \frac{t'-t}{2}} \text{ а } n = \frac{\rho \sin \pi \cos \Theta'}{\cos f} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)_{\Delta}$$

где је

Ако пак овде ставимо $\Delta' - f = (\Delta - f) + (\Delta' - \Delta)$, то ће изаћи

$$\operatorname{tg} (\Delta' - \Delta) = \frac{n \sin (\Delta - f)}{1 - n \cos (\Delta - f)} \dots \dots \dots (2)_{\Delta}$$

Није тешко запазити, да овде f означава поларно растојање Pr оне тачке r , у којој перпендикуларна Zl , спуштена из Z на лук PQ , сусреће деклинациони круг PM' (или и PM), јер је

$$\operatorname{tg} Pr \cos \frac{t'-t}{2} = \operatorname{tg} Pl = \operatorname{tg} \Theta' \cos \frac{t'+t}{2}.$$

Ове тачне формуле $(2)_t$ и $(2)_{\Delta}$ за одређивање разлика $(t' - t) = \alpha - \alpha'$ и $(\Delta' - \Delta) = \delta - \delta'$ по даним *истинским* координатама небесних тела $t = S - \alpha$ и $\Delta = 90^\circ - \delta$, служе највише за Месец, чија паралакса π достиже до 1° .

Ако би пак било потребно, да се срачунавају исте разлике по даним *привидним* координатама $t' = S - \alpha'$ и $\Delta' = 90^\circ - \delta'$, онда ће за то бити погодније формуле $(1)_t$ и $(1)_{\Delta}$, ма да ће и оне при томе захтевати поступних приближења: у првој од њих треба спочетка ставити Δ' уместо Δ а затим, кад се по другој нађе приближна величина $\Delta' - \Delta$ па разуме се и Δ , онда треба поновити све срачунавање још једном.

За Сунце и планете, чија паралакса π не превазилази $30''$, у формулама се $(2)_t$ и $(2)_{\Delta}$ могу занемарити мале величине m и n у сравњењу са јединицом па срачунавати разлике $t' - t$ и $\Delta' - \Delta$ с тачношћу до $0''.01$ по следећим приближним изразима за њих, који би се, уосталом, могли добити и директно из троугла PMM' , као елементарног:

$$t' - t = \alpha - \alpha' = \frac{\rho \pi \sin \Theta'}{\sin \Delta} \sin t \dots \dots \dots (3)_t$$

$$\Delta' - \Delta = \delta - \delta' = \frac{\rho \pi \cos \Theta'}{\cos f} \sin (\Delta - f), \text{ где је } \operatorname{tg} f = \operatorname{tg} \Theta' \cos t \dots \dots (3)_{\Delta}$$

Са истом ће се тачности добити ове разлике и по даним *привидним* координатама Сунца и планета $t' = S - \alpha'$ и $\Delta' = 90^\circ - \delta'$ ако се на десним странама формула $(3)_t$ и $(3)_{\Delta}$ ставе t' и Δ' уместо t и Δ .

Пример. По даној хоризонталној екваторијалној паралакси Сунца $\pi = 8''.80$ и геоцентричким његовим координатама $\Delta = 100^\circ$ и $t = +3^h 0^m$, срачунаће се по формулама $(3)_t$ и $(3)_{\Delta}$ привидне његове координате Δ' и t' за Петроград ($\Theta' = 30^\circ 13.3$, $\lg \rho = 9.9989$) на овај начин:

(1) $\Theta' = 30^\circ 13'$	(2) $lg \rho = 9.999$	(16) $lg \frac{\sin t}{\sin \Delta} = 9.856$	(18) $lg (t' - t) = 0.501$
(3) $lg tg \Theta' = 9.765$	(9) $lg \pi = 0.944$	(4) $lg \sin \Theta' = 9.702$	
(6) $lg \cos t = 9.849$	(7) $lg \sin t = 9.849$	(10) $lg \rho \pi = 0.943$	(19) $lg (\Delta' - \Delta) = 0.903$
(11) $lg tg f = 9.614$	(8) $lg \sin \Delta = 9.993$	(5) $lg \cos \Theta' = 9.936$	
(12) $f = + 22^\circ 21'$	(13) $lg \cos f = 9.966$	(17) $lg \frac{\sin (\Delta - f)}{\cos f} = 0.024$	
(14) $\Delta - f = 77^\circ 39'$	(15) $lg \sin (\Delta - f) = 9.990$		

$t' = 3^h 0^m 0^s 21$ $\Delta' = 100^\circ 0' 8'' 00$

94. Дејство паралаксе на хоризонталне координате небесних тела.

При одређивању разлика између привидног азимута Месечевог A' и геоцентричког A , и, између привидног зенитног растојања његовог z' и геоцентричког z , ми ћемо имати посла са сферним троуглима $Z3M$ и $Z3M'$ (сл. 43.) уместо пређашњих $P3M$ и $P3M'$; због тога ће се тачни изрази за $A' - A$ и $z' - z$ добити из (1.)_t, (2.)_t, (1.)_Δ и (2.)_Δ простом заменом у њима: часовних углова t' и t са азимутима A' и A , поларних растојања Δ' и Δ са зенитним растојањима z' и z а допуна геоцентричке ширине места Θ' са луком $\psi = \varphi - \varphi' = \Theta' - \Theta$. Али пошто тај лук ψ не превазилази $11' 44''$ (чл. 77.), то ће бити просто: $\sin \psi = \psi'' \cdot \sin 1''$ и $\cos \psi = 1$ а ако при том и само зенитно растојање z буде не мање од 3° , то ће разлика $A' - A$ изаћи увек тако мала, да ће се срачунати са потпуно довољном тачности из израза:



Сл. 43.

$$A' - A = \rho \psi \sin \pi \frac{\sin A'}{\sin z} \dots \dots \dots (1.)_A$$

разлика пак $z' - z$ добиће се са даним z' и A' , у облику

$$\sin (z' - z) = \rho \sin \pi \sin (z' - \gamma'), \text{ где је } \gamma' = \psi \cos A' \dots \dots \dots (1.)_z$$

Може се чак узети просто

$$z' - z = \rho \pi \sin (z' - \gamma') \dots \dots \dots (1.)'_z,$$

због тога што максимална величина корекционог члана

$$-\frac{\rho \pi^3}{6} \sin^2 1'' \sin (z' - \gamma') [1 - \rho^2 \sin^2 (z' - \gamma')],$$

који се при томе добија, износи (при $\pi = 1^\circ = 3600''$ и $z' - \gamma' = 35^\circ$) свега $0' 07$.

На тим истим основама, при даним геоцентричким координатама Месечевим z и A , имаћемо:

$$A' - A = \rho \psi \sin \pi \frac{\sin A}{\sin z} \dots \dots \dots (2.)_A$$

и
$$tg (z' - z) = \frac{\rho \sin \pi \sin (z - \gamma)}{1 - \rho \sin \pi \cos (z - \gamma)}, \text{ где је } \gamma = \psi \cos A \dots \dots \dots (2.)_z$$

Мали луци $\gamma' = Zq'$ и $\gamma = Zq$, који овде замењују пређашњи лук $f = Pr$, разликују се један од другог веома неосетно.

Најзад, за Сунце и планете, због мале величине њихове паралаксе, допуштено ће бити, да се сматра: $\rho = 1$, $\psi = 0$ и $\gamma = 0$, при чему излази просто:

$$A' - A = 0 \dots \dots (3.)_A \quad \text{и} \quad z' - z = \pi \sin z' = \pi \sin z \dots \dots (3.)_z$$

Пример. Нека су за Петроград ($\varphi = 59^\circ 56' 30''$, $\psi = 10' 10''.8$ и $\lg \rho = = 9.998892$), при хориз. екват. паралакси Месеца $\pi = 1^\circ 0' 0''.0$, дане привидне координате центра његовога диска $A' = 60^\circ 0' 0''.0$ и $z' = 60^\circ 0' 0''.0$. Срачунавање истинитих координата A и z тога центра извршиће се по формулама (1.)_A и (1.)_z на овај начин:

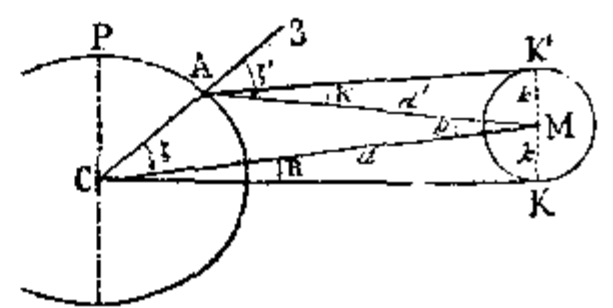
(4) $\lg \cos A' = 9.6990$	(6) $\lg \gamma' = 2.4849$	(2) $\lg \rho = 9.998892$
(1) $\lg \psi = 2.7859$	(7) $\gamma' = + 5' 5''.4$	(3) $\lg \sin \pi = 8.241855$
(5) $\lg \sin A' = 9.9375$	(8) $z' - \gamma' = 59^\circ 54' 54''.6$	(9) $\lg \sin (z' - \gamma') = 9.937159$
(13) $\lg \sin z = 9.9337$	(15) $\lg (A' - A) = 1.0304$	(10) $\lg \sin (z' - z) = 8.177906$
(14) $\lg \psi \frac{\sin A'}{\sin z} = 2.7897$	(16) $A' - A = + 10''.7$	(11) $z' - z = 0^\circ 51' 47''.4$
$\lg \rho \sin \pi = 8.2407$	(17) $A = 59^\circ 59' 49''.3$	(12) $z = 59^\circ 8' 12''.6$

Обратно пак, привидне координате A' и z' наћи ће се по овима A и z на основу формула (2.)_A и (2.)_z овако:

(3) $\lg \cos A = 9.6990$	(5) $\lg \gamma = 2.4849$	(11) $\lg \rho \sin \pi \cos (z - \gamma) = 7.95193$
(1) $\lg \psi = 2.7859$	(6) $\gamma = + 5' 5''.4$	(8) $\lg \cos (z - \gamma) = 9.71118$
(4) $\lg \sin A = 9.9375$	(7) $z - \gamma = 59^\circ 3' 7''.2$	(2) $\lg \rho \sin \pi = 8.240747$
(10) $\lg \sin z = 9.9337$	(17) $\lg (A' - A) = 1.0304$	(9) $\lg \sin (z - \gamma) = 9.933302$
(16) $\lg \psi \frac{\sin A}{\sin z} = 2.7897$	(18) $A' - A = + 10''.7$	(12) $\lg [1 - \rho \sin \pi \cos (z - \gamma)] = 9.996095$
$\lg \rho \sin \pi = 8.2407$	(19) $A' = 60^\circ 0' 0''.0$	(13) $\lg \lg (z' - z) = 8.177954$
		(14) $(z' - z) = 0^\circ 51' 47''.4$
		(15) $z' = 60^\circ 0' 0''.0$

95. Привидне и истините димензије небесних тела.

Пошто нам се Сунце, Месец и велике планете представљају у облику округлих дискова, то се у свему предидућем подразумевало, да је правац AM на неко небесно тело онај управо правац, који иде ка центру његовоме. Замислимо сада из тачке посматрања A какву тангенту AK' на посматрано округло небесно тело M (сл. 44.) линеарног полупречника $MK = MK' = k$, па ћемо добити привидни његов угловни полупречник $MAK' = R'$, који се може измерити са великом тачношћу (чл. 71.). Слични пак угао $MCK = R$ при центру Земље C биће истинити угловни полупречник и одредиће се по привидноме на основу ових тачних односа:



Сл. 44.

$$k = d \cdot \sin R = d' \sin R'$$

одакле, због малих величина R и R' , излази просто:

$$\frac{R}{R'} = \frac{d'}{d} = \frac{\sin \zeta}{\sin \zeta'} \dots \dots \dots (4.)$$

Али из троуглова $M'Zr$ и MZq (сл. 42.), — у којима је угао код Z заједнички а угли код тачака r и q допуњују један другога до 180° , — излази:

$$\frac{\sin \zeta}{\sin \zeta'} = \frac{\sin Mq}{\sin Mr} = \frac{\sin (\Delta - f)}{\sin (\Delta' - f)},$$

на због тога је

$$\frac{R}{R'} = \frac{\sin (\Delta - f)}{\sin (\Delta' - f)} \dots \dots \dots (5.)$$

Тако се може срачунати R по даноме R' (и обратно) помоћу формула (1)_Δ. По изложеноме у чл. 94. на сличан ће се начин, и помоћу формула (1)_z, добити

$$\frac{R}{R'} = \frac{\sin (z - \gamma)}{\sin (z' - \gamma)} \dots \dots \dots (6.)$$

Ако сад из ове формуле (6.) изведемо израз за малу разлику $R' - R$, допустив при томе, да је

$$2 \sin \frac{z' - z}{2} = \sin (z' - z) = \rho \sin \pi \sin (z' - \gamma), \quad —$$

имаћемо из (6.):

$$\frac{R' - R}{R'} = \frac{\sin (z' - \gamma) - \sin (z - \gamma)}{\sin (z' - \gamma)} = \frac{2 \sin \frac{z' - z}{2}}{\sin (z' - \gamma)} \cos \left(\frac{z + z'}{2} - \gamma \right)$$

или

$$R' - R = R' \rho \sin \pi \cos \left(\frac{z + z'}{2} - \gamma \right) \dots \dots \dots (7.)$$

Одатле се види, да паралактичко повећање истинитог угловног полупречника R за Месец може достићи, при најкраћем растојању од Земље, до $18''$ па га због тога треба срачунавати по тачним формулама (5.) и (6.); за Сунце пак и планете може се увек сматрати за нулу, тј. $R' = R$, не чинећи при томе грешку већу од $\frac{1''}{20}$.

Из основних израза паралаксе π и полупречника R небесног тела, а наиме из:

$$\sin \pi = \frac{a}{d} \quad \text{и} \quad \sin R = \frac{k}{d}$$

излази

$$\frac{\sin R}{\sin \pi} = \frac{k}{a} \dots \dots \dots (8.)$$

На тај начин по променама истинитога полупречника R , може се судити о промени паралаксе π или, што је исто, о промени растојања d од Земље до небесног тела. А ако при том буде позната величина паралаксе π ; онда ће се одредити и линеарни полупречник k небесног тела.

96. Одређивање паралакса Месеца и планета.

За одређивање паралаксе π небесног тела потребно је имати довољно дугачку базу, тј. посматрати то небесно тело приближно једновремено са две тачке, удаљене једна од друге на Земљиној површини, или пак, посматрати га са једне и исте тачке, али у разво доба дана, да би се сама та тачка помакла у простору услед ротације Земљине.

По првој је методи најпростије посматрати меридионална зенитна растојања небесних тела или, што је исто, привидне деклинације центра његовога диска $\delta' = 90^\circ - \Delta'$ и $\delta'_1 = 90^\circ - \Delta'_1$ са два места, која се налазе приближно на истом меридијану Земљином*) са геоцентричким ширинама $\varphi' = 90^\circ - \Theta'$ и $\varphi'_1 = 90^\circ - \Theta'_1$. Тада ће дејство паралаксе π на деклинацију постати највеће и изразиће се, на основу формуле (1.) $_{\Delta}$ при $t = t' = 0$ и $f = \Theta'$, овако:

$$\sin(\delta - \delta') = \sin(\Delta' - \Delta) = \rho \sin \pi \sin(\Delta' - \Theta') = \rho \sin \pi \sin(\varphi' - \delta'),$$

одатле пак, са довољном тачношћу, излази просто

$$\delta = \delta' + \rho \pi \sin(\varphi' - \delta') \dots \dots \dots (9.)$$

На исти се начин из посматрања привидне деклинације δ'_1 небесног тела, са друге тачке на Земљи, добија

$$\delta + \Delta \delta = \delta'_1 + \rho_1 \pi \sin(\varphi'_1 - \delta'_1) \dots \dots \dots (9.)_1$$

а после елиминације δ из двеју једначина (9.) и (9.) $_1$, излази

$$\pi = \frac{\delta' - \delta'_1 - \Delta \delta}{\rho_1 \sin(\varphi'_1 - \delta'_1) - \rho \sin(\varphi' - \delta')} \dots \dots \dots (10.)$$

Али, апсолутна одређивања деклинација δ небесних тела подлеже увек знатним сталним грешкама, које потичу од нетачности поделе кругова на инструментима, од нетачности познавања величина рефракције и др. Због тога упоредно са небесним телом, чија се паралакса одређује, треба увек посматрати и какву суседну са њом звезду, да би се све напред споменуте грешке, — које делају потпуно тако исто и на њену деклинацију δ_* , — елиминирале у разликама $(\delta - \delta_*)$ и $(\delta'_1 - \delta_*)$. Тада се врло тачно добија бројитељ израза (10.):

$$\delta' - \delta'_1 = (\delta' - \delta_*) - (\delta'_1 - \delta_*).$$

По тој су управо методи и одређене, са великом тачношћу, паралаксе Месеца и планете Марса из многих посматрања ових небесних тела, која су извршена у прошлом и у садањем столећу са разних опсерваторија у Европи и са Рта Добре Наде.

За одређивање паралаксе небесних тела по другој методи, тј. са једне и исте тачке Земљине површине, најпогодније је користити се дејством паралаксе на рехтасцензију, које се изражава приближно овако:

$$l' - l = \alpha - \alpha' = \frac{\rho \pi \sin \Theta' \sin l'}{\sin \Delta}, \text{ где је } l' = S' - \alpha \dots \dots \dots (11.)$$

*) Могу се посматрати и кулминације небесних тела на местима са различитим дужинама, али тада треба да се узму у обзир промене истинитих деклинација δ небесних тела, које произлазе у току времена.

При том друго посматрање небесног тела у звезданом времену S_1 , — ако са $\Delta \alpha$ означимо извесну промену истините рехтасцензије α за протекши интервал времена $S_1 - S$, — даје другу сличну једначину са двама непознатим α и π :

$$(\alpha + \Delta \alpha) - \alpha_1' = \frac{\rho \pi \sin \Theta' \sin t_1'}{\sin \Delta}, \text{ где је } t_1' = S_1 - \alpha_1' \dots (11.)_1$$

те ће стога из (11.) и (11.)₁ изаћи

$$\pi = \frac{\sin \Delta}{\rho \sin \Theta'} \cdot \frac{\alpha' - \alpha_1' + \Delta \alpha}{\sin t_1' - \sin t}, \dots (12.)$$

Одавде се види, да је за најтачнију одредбу π увек боље посматрати небесно тело са неке тачке ближе Земљином екватору при часовним углима $t' = -6^h$ и $t_1' = +6^h$ и при том, као и код прве методе, одређивати не саме рехтасцензије α' и α_1' већ само мале разлике између њих и рехтасцензије α_* какве довољно блиске звезде томе небесном телу (чл. 71.) те да се у бројитељу формуле 12. добивају што тачније разлике

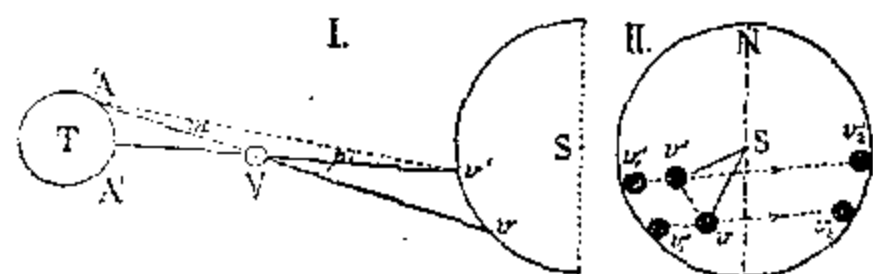
$$\alpha' - \alpha_1' = (\alpha' - \alpha_*) - (\alpha_1' - \alpha_*).$$

Из напред речених посматрања Месеца и најближих Земљи планета Венере и Марса, добивене су даље означене величине њихових хоризонталних екваторијалних паралакса π , истинитих угловних полупречника R и линеарних полупречника k (у сравњењу са полупречником Земљиног екватора a):

	$R \text{ max.}$	$R \text{ min.}$	$\pi \text{ max.}$	$\pi \text{ min.}$	$\frac{k}{a}$
за Месец	16'.8	14'.7	61'.5	53'.9	0.2726
„ Венеру	33".2	5".1	33".3	5".1	1.00
„ Марс	12".8	2".3	24".2	4".3	0.53

97. Одређивање паралаксе Сунца.

Напред изложене тачне методе за одређивање паралаксе, које се заснивају на посматрањима небесног тела и њему блиске звезде, не могу се применити на Сунце, јер је немогућно видети ни кроз најсилније телескопе звезде у његовој близини. Доцније ће се објаснити



Сл. 45.

разне друге методе за ту циљ, од којих је једна заснована на посматрањима планете Венере V (сл. 45. I), када она, при пролазу између Земље T и Сунца S , изгледа на самом његовом диску као потпуно црна округла пега v (сл. 45. II). Ову ћемо методу и расмо-

трити сад у најопштијим цртама.

За разна места A и A' на Земљи Венера се при томе пројектује у једном и истом моменту времена на разним тачкама v и v' Сунчевог диска; због тога ако се и у A и у A' измере угловна растојања $Sv = \rho$ и $Sv' = \rho'$ међу центрима дискова Венере и Сунца и позицијски угли $\sphericalangle NSv = P$ и $\sphericalangle NSv' = P'$ (чл. 71.), то ће се прво по овим подацима одредити врло мали угао $\sphericalangle vAv' = d$ из

$$d^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2 \rho \rho' \cos (P' - P);$$

затим ће се по познатој паралакси Венериној, добити угао $\sphericalangle AVA'$; напоследку, из троугла $AA'v'$, по нађеном његовом углу $\sphericalangle Av'A' = p = \sphericalangle AVA' - d$, извешће се растојање до Сунца Av' (или $A'v'$) па према томе и тражена његова паралакса π . А да неби на извод угла d имале осетног утицаја грешке мерења углова P и P' , они треба да буду приближно једнаки на обадва места A и A' .

У глави XXV о помрачењима видећемо још, да се тражена паралакса π може одредити исто тако и из самих момената ступања Венере на диск Сунчев (у тачкама v_1 и v_1') или пак силаска њенога са тога диска (у тачкама v_2 и v_2'), који се посматрају са врло великом тачношћу. На тај начин, из многих посматрања Венере, која су вршена са разних места Земљине површине за време последња два њена пролаза (1874. и 1882. г.), добивена је величина средње хоризонталне екваторијалне паралаксе Сунца $\pi = 8''.80$, којој одговара средњи угловни полупречник R Сунчевог диска $R = 16' 2''$; отуда пак линеарна величина k полупречника Сунчевог излази оваква

$$\frac{k}{a} = \frac{\sin 16' 2''}{\sin 8''.80} = \frac{962}{8.80} = 109.$$

Из посматрања полупречника R излази затим, да се највећа и најмања његова величина разликују од средње $16' 2''$ у току сваке године за $\pm 16''$ тј. за $\frac{1}{60}$ део саме величине R ; због тога и највеће и најмање паралаксе Сунца, које њима одговарају, треба да буду $8''.80 (1 + \frac{1}{60}) = 8''.95$ и $8''.80 (1 - \frac{1}{60}) = 8''.65$.

Задаће.

1.) Колико велика треба да буде хоризонтална паралакса небесног тела па да њено дејство на зенитно растојање тога небесног тела $z = 45^\circ$ буде равно по својој бројној вредности дејству средње рефракције?

$$[\text{Приближно } \pi = 58''.2 \sqrt{2} = 1' 22''].$$

2.) Доказати, да ће велики круг, који пролази кроз геоцентрички зенит места посматрања и који тангира привидни диск небесног тела, додирнути исто тако и његов истинити диск.

ГЛАВА XV.

КРЕТАЊЕ СУНЧЕВО И МЕСЕЧЕВО.

98. Одређивање екваторијалних координата Сунца.

Да се Сунце премешта у односу према звездама некретницама, показују нам прво, периодичке промене његове деклинације; пошто и полудневна његова висина, као и тачке његова рађања и заласка на хоризонту на свакоме месту посматрања бивају различите у разво доба године, а, друго, постепено рашћење његове рехтасцензије; јер је лако запазити, да сваке ноћи пролазе кроз меридијан места посматрања звезде са све већом и већом рехтасцензијом. Темељно пак изучавање овога *привидног годишњег кретања* Сунчевог, треба, разуме се, да се заснива на тачним одређивањима речених његових координата у разне дане у години помоћу меридијанског круга.

Измерена у подне меридионална зенитна растојања Z' и Z'' горњег и доњег краја Сунчевог диска, ослобођена од дејства рефракције, дају нам полупречник тога диска $R' = R = \frac{1}{2}(Z'' - Z')$ а зенитно растојање његовог центра $Z = \frac{1}{2}(Z' + Z'')$ па према томе и истиниту (тј. геоцентричку) деклинацију његовог центра

$$D = \varphi - Z + \pi \sin Z, \dots \dots \dots (1.)$$

где је π паралакса Сунца, која одговара нађеној величини полупречника R (сл. 95. и 97.). Из запажених пак по часовнику момената T' и T'' пролаза кроз меридијан првог и другог краја Сунчевог диска, изводи се време пролаза његовог центра $T = \frac{1}{2}(T' + T'')$ а затим и рехтасцензија његова

$$A = T + u,$$

где под u треба подразумевати поправку (корекцију) часовника, коју треба додавати свакоме његовоме показању ради добивања одговарајућег звезданог времена S (чл. 69.). Да пак промене ове поправке и нетачно њено познавање неби утицали на извод величине A , треба истога дана нешто мало пре и после кулминације Сунца посматрати момент кулминације T_* неке довољно крупне звезде. Тада ће се при познатој њеној рехтасцензији α , добити $u = \alpha - T_*$ те ће дефинитивно изаћи

$$A = \alpha - \tau, \text{ где је } \tau = T_* - T \dots \dots \dots (2.)$$

99. Одређивање положаја тачке пролетње равнодневице.

Када смо говорили у чл. 69. о одређивању ректасцензија разних звезда помоћу часовника и пасажног инструмента или меридијанског круга, остало нам је још необјашњено, како се управо може одредити положај на небесној сфери саме тачке пролетње равнодневице Υ у односу према ма каквој једној звезди те да бисмо имали апсолутну ректасцензију α те звезде. Ради тога треба извршити посматрање Сунца и те звезде онако како је то изложено у предњем члану, у току од неколико дана око 20. марта, када његова деклинација прелази из негативне (јужне) у позитивну (северну). Тада ће се из Сунчевих деклинација D_1, D_2, D_3, \dots нађених у те дане и из разлика $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ које им одговарају, наћи простим интерполовањем величина τ_0 , која одговара деклинацији $D = 0$ тј. пролазу Сунца кроз тачку Υ ; пошто је пак у томе моменту $A = 0$, то ће на основу (2.) бити

$$\alpha = \tau_0$$

Ради бољег објашњења рецимо, да је 1884. г. из посматрања Сунчевих кулминација и звезде Прациона (α Canis minoris) у Гринвичу добивено:

	D	разл.	$\tau = T_* - T$	разл.
18. марта	$-0^\circ 40' 6''$		$+ 7^h 39^m 25^s 2$	
		$+ 23'42''$		$- 3^m 38^s 6$
19. „	$- 0 16 24$		$7 35 46.6$	
		$+ 23 42$		$- 3 38.5$
20. „	$+ 0 7 18$		$7 32 8.1$	
		$+ 23 41$		$- 3 38.4$
21. „	$+ 0 30 59$		$7 28 29.7$	

Одатле ћемо наћи, да је

$$\tau_0 = \alpha = 7^h 35^m 46^s 6 - 3^m 38^s 5 \frac{16'24''}{23'42''} = 7^h 33^m 15^s 3$$

а у исто време увидећемо, да је 19. марта, у самоме моменту Сунчева пролаза кроз тачку Υ , његов заједнички са звездом часовни угао, — тј. гринвичко звездано време, — било

$$S = 24^h \frac{16'24''}{23'42''} = 24^h \times 0.692 = 16^h 36^m 5.$$

Показаће се на тај исти начин из посматрања идуће 1885. г., да је ректасцензија α те исте звезде (Проциона) равна $7^h 33^m 18^s 3$, тј. да је се повећала за $3^s 0 = 45''$ а да Сунце пролази кроз тачку Υ 19. марта у звездано гринвичко време $S = 24^h \times 0.934 = 22^h 25^m 0$, тј. за $5^h 48^m 5$ или за 0.242 дана доцније него 1884. год. Сав тај период времена T између два сукцесивна Сунчева пролаза кроз тачку Υ зове се *шропска година*. Она дакле садржи, — сем онога разломка од 0.242 дана — 365 пуних сунчаних или пак 366 пуних звезданих дана. Средње пак њено трајање, које се одређује са довољном тачности тек из врло великог броја година, износи:

$$T = 366.2422 \text{ звезд. дана} = 365.2422 \text{ сред. сунч. дана.}$$

Одатле излази, да је средњи сунчани дан дужи од звезданог за $\frac{1}{365.2422}$ део његов тј. за $3^m 56^s 56$; звездани је дан пак краћи за $\frac{1}{366.2422}$ део средњег сунчаног дана тј. за $3^m 55^s 91$. Тај средњи сунчани дан и служи за рачунање разних интервала времена, као zgodнија и очигледнија јединица времена него што је звездани.

100. Еклиптика.

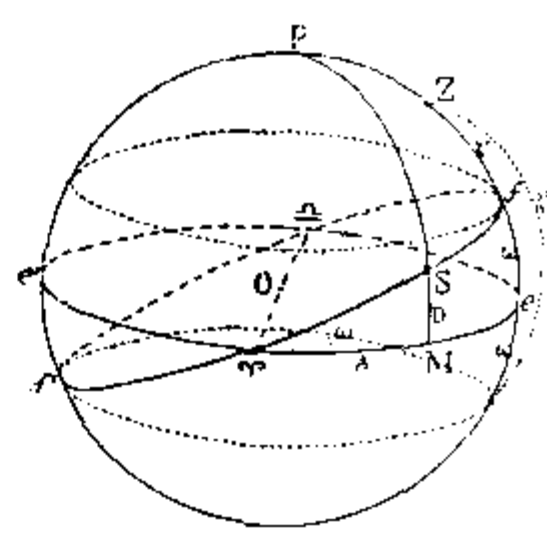
Да бисмо очигледније видели, како се управо мења рехтасцензија A , деклинација D и угловни полупречник R Сунца у току сваке тропске године, испишимо те величине из Nautical Almanac-а за 1884. и 1885. годину за кулминацију Сунца у Гринвичу у интервалима од 30 дана.

У подне		A	D	R	d	L	dL	L_0
1884. г. јануара	1	18 ^h 45 ^m 52 ^s	—23° 2' 16"	18" 2	0.9832	280°33'		280°34'
"	31	20 54 11	—17 27 16	16. 0	0.9854	211 5	61.2	310 8
марта	1	22 51 14	— 7 18 16	10. 0	0.9915	341 22	60.9	339 42
"	31	0 41 8	+ 4 26 16	2. 0	0.9998	11 11	60.1	9 16
априла	30	2 32 22	+14 59 15	54. 1	1.0081	40 31	59.2	38 50
маја	30	4 30 57	+21 52 15	48. 3	1.0142	69 25	58.2	68 34
јуна	29	6 35 9	+23 12 15	46. 0	1.0167	98 4	57.5	97 58
јула	29	8 36 23	+18 36 15	47. 6	1.0150	126 42	57.2	127 33
аугуста	28	10 29 23	+ 9 29 15	52. 8	1.0094	155 32	57.4	157 7
септем.	27	12 17 29	— 1 54 16	0. 4	1.0015	184 46	58.0	186 40
октобра	27	14 8 53	—13 1 16	8. 5	0.9931	214 29	59.0	216 14
новемб.	26	16 10 54	—21 5 16	15. 1	0.9864	244 41	60.0	245 49
децем.	26	18 22 40	—23 21 16	18. 1	0.9833	275 12	60.8	275 23
1885. г. јануара	25	20 32 33	—18 50 16	16. 1	0.9847	305 46	61.2	304 58
фебр.	24	22 31 31	— 9 17 16	11. 3	0.9902	336 6	61.0	334 32
марта	26	0 22 4	+ 2 23 16	3. 5	0.9982	6 1	60.3	4 6
							59.3	

Ако се на глобус пренесе по овим координатама $A = \gamma M$ и $D = MS$ низ тачака S (сл. 46.), показаће се, да је привидни годишњи пут Сунца $\gamma S f \approx f'$ велики круг сферни, који пресеца екватор $\gamma e \approx e'$ у тачкама γ и \approx и образује с њим угао $\omega = 23^\circ 27'$. И заиста, ако се узме ма који положај S Сунца, из правоугног троугла γSM за тај се угао $\angle S\gamma M = \omega$ добија по формули

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{tg} D}{\sin A} \dots \dots \dots (3)$$

једна и иста напред наведена величина $23^\circ 27'$. Из овога излази, да се Сунце креће увек у равни, која пролази кроз Земљин центар O . Та се раван зове *еклиптика* а линија $\gamma O \approx$ по којој она сече екватор — *линија равнодневница* (*еквинокцијална*). Њен је правац представљен на небесној сфери с једне стране тачком γ а с друге дијаметрално супротном тачком \approx *јесње равнодневнице* (*еквинокције*), која се може одредити исто онако као и γ (чл. 99.) тј. по услову, да у њој буде $D = 0^\circ$ а $A = 12^h = 180^\circ$ (око 22. септембра). Сам пак назив тачака γ и \approx и линије $\gamma \approx$ равнодневница произлази отуд, што је при $D = 0^\circ$ дужина дана на свима местима на Земљи равна дужини ноћи (не узимајући, разуме се, у обзир утицај рефракције на Сунце).



Сл. 46.

Деклинација Сунца, достижући 21. јуна највећу величину $D = +\omega = +23^\circ 27'$ а око 21. децембра — најмању $D = -\omega = -23^\circ 27'$, остаје при томе у току некојега времена скоро непромењљива; због тога се положаји Сунца f (када је $A = 90^\circ$) и f' (када је $A = 270^\circ$), — који одговарају тим деклинацијама, — зову: тачка *летње дугодневице* (*солстиције*) и тачка *зимње крашкодневице* (*солстиције*). Оне су најпогодније за одређивање нагиба ω еклиптике према еква-

тору јер тада именитељ израза (3.) постаје највећи. Ако означимо са ζ' истинито меридионално растојање Сунца Zf , које се добија из посматрања у првој солстицији а са ζ'' — у другој, имаћемо: $\zeta' = \varphi - \omega$ и $\zeta'' = \varphi + \omega$, због тога се, и без познавања ширине места φ добија*)

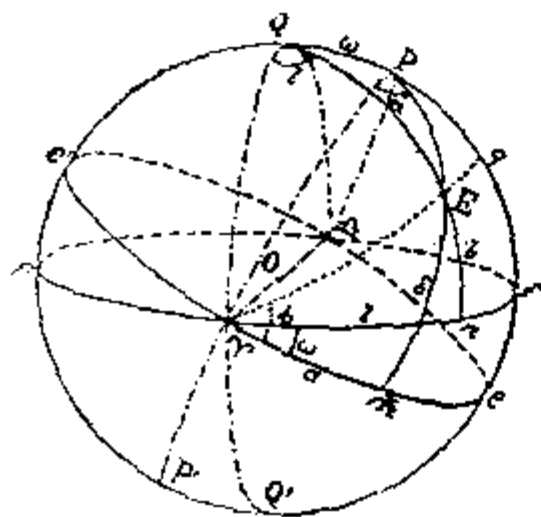
$$\omega = \frac{1}{2} (\zeta'' - \zeta') \dots \dots \dots (3.)'$$

На карти се звезданог неба (сл. 15.) може видети, да Сунце при свако-годишњем своме кретању по великоме кругу еклиптике пролази кроз ове констелације (сазвежђа): *Ован* (Υ), *Бик* ($\var�$), *Близанци* (II), *Рак* (♋), *Лаф* (♌), *Дева* (III), *Веси* (♍), *Шкорпија* (m), *Стрелац* (♐), *Јарац* (♑), *Водолија* (♒), *Рибе* (♓). Још у прастара су времена тих 12 констелација добиле општи назив констелације *зодијака* тј. круга животињског. Пошто се у томе појасу крећу, — не удаљавајући се сувише много од еклиптике, — још и Месец и све велике планете, које се виде голим оком: Меркур, Венера, Марс, Јупитер и Сатурн, то су још стари грчки астрономи почели узимати велики круг еклиптике за основни, да према њему поставе положај како ових небесних тела, тако и звезда некретница а то је довело до врло значајних открића у астрономији, као што ћемо видети у чл. 102.

Да напоменемо још, да се свако кретање, које се врши у ону страну куда се Сунце премешта, зове *напредно* (*директно*); оно пак које се врши у супротном правцу зове се *обратно* (*ретроградно*). Тако је на пример, обртање Земљино око осовине — кретање напредно (директно) а привидно кретање свију небесних тела — обратно (ретроградно).

101. Еклиптичке координате небесних тела.

Угао, који образује правац на какво небесно тело са равни еклиптике, зове се *ширина* небесног тела; угао пак између пројекције тога правца на еклиптику и линије равнодневица (еквинокцијалне линије) зове се *дужина* небесног тела. Те ћемо еклиптичке координате небесних тела означавати увек словима b и l или са њима сличним.



Сл. 47.

Нормала на еклиптику представиће се на небесној сфери (сл. 47.) двома дијаметрално супротним тачкама Q и Q' , прва од њих, која је ближе сев. полу P екуатора и која се налази управо на угловном растојању од њега $PQ = \omega$, биће *северни пол еклиптике*; рехтасцензија њена биће очевидно равна 18^h или 270° а деклинација $90^\circ - \omega = +66^\circ 33'$. Лук QE великога круга, повучен кроз пол Q и кроз место E каквога небесног тела до пресека (под правим углом) у n са еклиптиком $\Upsilon f \approx f'$, биће раван ширини b небесног тела,

услед чега се уопште сви такви кругови QE зову *кругови ширина*. Од њих се онај, који пролази кроз тачке равнодневица Υ и \approx зове *колур равнодневица* (*еквинокционални*) а онај који кролази кроз тачке солстиција f и f' — *колур солстиција*. Лук пак Υn или њему равни угао $\angle \Upsilon Qn$ биће дужина l небесног тела. Ширина b , — слично деклинацији $Em = \delta$, — може бити северна (+) или јужна (-); дужина пак l , — слично рехтасцензији $\Upsilon m = \alpha$, — рачуна се увек од тачке Υ у страну Сунчева кретања.

*) Ова је метода, одређивања нагиба еклиптике према екуатору, имала особитог значаја у пређашња времена, када још није било тачних средстава за одређивање ширине φ и када су се угловне полудневне висине Сунца $h' = 90^\circ - \zeta'$ и $h'' = 90^\circ - \zeta''$ добијале *гноманом* тј. мерењем дужине сенке вертикалног штапа по хоризонталној равни. Ма да се крај те сенке није одређивао оштро нити тачно, ипак су грешке од тога у висинама h' и h'' изазивале у оба случаја приближно једнаке па су се у разлици $h' - h'' = \zeta'' - \zeta'$ поништавале.

Не постоје такви астрономски инструменти помоћу којих би се непосредно одређивале еклиптичке координате b и l небесног тела већ се те b и l увек добивају срачунавањем из измерених екуаторијалних његових координата. Оче- видно је, да ће се неопходно за то потребне формуле добити из већ познатих нам (A') (чл. 67.) ако се у њима просто замене θ , A , z , t и Δ са величинама које њима одговарају, а то су: ω , $90^\circ - \alpha$, $90^\circ - \delta$, $90^\circ - l$ и $90^\circ - b$ са којима ћемо сад имати посла; али се оне из правоуглих троуглова ΥEm и ΥEl (или и PEq и QEg), — ако у првом од њих означимо угао $E\Upsilon m$ (равни $90^\circ - Pq$) са k , — могу написати директно и у оваквом облику:

$$tg k = \frac{tg \delta}{\sin \alpha}; \quad tg l = \frac{tg \alpha}{\cos k} \cdot \cos(k - \omega), \quad *) \quad tg b = \sin l \cdot tg(k - \omega) \quad \dots \quad (F.)$$

За обратни пак прелаз од даних l и b ка α и δ имаћемо:

$$tg(k - \omega) = \frac{tg b}{\sin l}, \quad tg \alpha = \frac{tg l \cos k}{\cos(k - \omega)}, \quad tg \delta = \sin \alpha \cdot tg k \quad \dots \quad (F'.)$$

У оба случаја може служити као контрола нађених бројних величина ова неизоставна једнакост:

$$(\cos \Upsilon E =) \cos l \cos b = \cos \alpha \cos \delta \quad \dots \quad (F'')$$

Да срачунамо на пример, дужину и ширину звезде Проциона, за коју је $\alpha = 7^h 33^m 15^s.3 = 113^\circ 18.8$ и $\delta = +5^\circ 31.0$ при $\omega = 23^\circ 27.1$:

$lg \, tg \, \delta = 8.98490$	$lg \, \cos(k - \omega) = 9.97954$	$lg \, tg(k - \omega) = 9.49736_n$	к нтрола
$lg \, \sin \alpha = 9.96301$	$lg \, tg \alpha = 0.36558_n$	$lg \, \sin l = 9.96008$	$lg \, \cos \delta = 9.99798$
$lg \, tg k = 9.02189$	$lg \, \cos k = 9.99761$	$lg \, tg b = 9.45744_n$	$lg \, \cos \alpha = 9.59743_n$
$k = +6^\circ 0.2$	$lg \, tg l = 0.34751_n$		$lg \, \cos b = 9.98284$
$k - \omega = -17^\circ 26.9$	$l = 114^\circ 11.5$	$b = -15^\circ 59.9$	$lg \, \cos l = 9.61256_n$

За само Сунце, разуме се, да ширина треба да буде увек равна нули и $k = \omega$; због тога ће се његова дужина L изразити из формуле (F) овако

$$tg L = \frac{tg A}{\cos \omega} \quad \dots \quad (4.)$$

што се види и непосредно из троугла ΥSM (сл. 47.). Тако се управо, — по даним у табlici чл. 100. величинама A и D , — и могу добити показане тамо дужине L Сунца и његове диференцијалне (чл. 31.) дневне промене dL .

102. Прецесија.

Запажено у чл. 99. повећавање рехтасцензије Проциона у току 1884. године за $2^s 8 = 42''$ произлази сваке године. Сличне се постепене промене у току времена запажају како код рехтасцензија α , тако исто и код деклинација δ свију звезда некретница. У свима више или мање подробним списковима звезда, — који се уопште зову *кашалози*, — те се свакогодишње промене $d\alpha$ и $d\delta$ стављају увек поред самих координата α и δ и по њима се може видети, да се рехтасцензије повећавају код огромног броја звезда; особито пак оштро пада у очи правилност промена деклинација, наиме: све звезде, које се налазе у близини колура еквинокцијалног на страни тачке Υ ($\alpha = 0$), приближују се

*) Она се формула добива из односа $tg l = tg \Upsilon E \cos[\cos(k - \omega)]$ и $tg \alpha = tg \Upsilon E \cos k$.

полу Р екватора сваке године за $20''.0$ а на страни тачке $\approx (\alpha = 180^\circ)$ за толико се исто удаљују од њега; код свију пак звезда, које се налазе у колуру солтиција ($\alpha = 90^\circ$ и $\alpha = 270^\circ$), деклинације се сасвим не мењају. На тај начин излази, да су ове промене поларних растојања звезда сличне са диференцијалним променама зенитних растојања звезда у првом вертикалу и у меридијану каквога места услед ротационог кретања Земље.

Још ће се боље представити сличност годишњих промена da и $d\delta$ са диференцијалним променама зенитних растојања z и азимута A звезда, ако пређемо на еклиптичке координате l и b . Тада ће се показати, да ширине b остају скоро без промена, дужине се пак l повећавају приближно за једну и исту величину од $50''.2$ за годину дана, тј. као да се све звезде крећу равномерно око пола Q еклиптике, завршавајући свој потпуни обрт у периоду времена од $\frac{360^\circ}{50''.2} = 25800$ година. У староме веку, када се Земља замишљала као непомична, ово су кретање звезда почели приписивати материјалној небесној сфери са утврђеним звездама на њој. Откада је знаменити астроном *Хиаарх* открио (на 150 година пре Р. Х.) промењљивост дужина звездâ, срањујући своја посматрања са онима, која су раније била извршена, отада се у староме веку Земља замишљала као непомична а ова кретања звезда почело приписивати кретању материјалне небесне сфере са утврђеним звездама на њој.

Ако се сада сетимо онога, што је речено у чл. 72, о могућности промене правца обртне осе Земљине у простору или, што је исто, о промени положаја пола P у односу према звездама, то ће нам постати сасвим јасно, да је ово откривено премештање свију звезда само привидно и да промене деклинације звезда, које се налазе у колуру еквинокција — за $20''$ сваке године, директно указују на такво исто премештање пола P у правцу ка тачци Υ , при чему она, — стојећи увек од пола (P) на растојању од 90° , — треба да одступа по еклиптици на сусрет годишњем кретању Сунца за $\frac{20''.0}{\sin \omega} = 50''.2$ у току од године дана и да повећава за ту исту величину дужине l , — које се од ње рачунају, — за све звезде.*) Сама пак раван еклиптике остаје у простору скоро непомична пошто се у ширинама b звезда примећују само врло мале промене у току времена.

Према томе долазимо до закључка, да Земљина оса, — образујући са нормалом ка еклиптици скоро непроменљиви угао $\omega = 23^\circ 27'$, — описује око те нормале коничну површину и враћа се у свој првобитни положај после 25800 године. Узрок тога сталнога и равномернога премештања Земљине осе у простору, које се зове *прецесија*, објасниће се доцније, када ће се показати, да оно треба да је пропраћено још и малим колебањем Земљине осе, како по дужини тако и по ширини, које се врши у периоду од 18.6 године и које се зове *нунација*. Услед ове пак, *истиниши* положај тачке Υ на еклиптици може да се разликује од *средњега*, — који зависи само од прецесије, — за $\pm 18''$.

У годишњем кретању Сунца, прецесија производи *преране равнодневице*, тј. повратак Сунца у тачку Υ (или \approx) нешто пре него што оно заврши свој потпуни оптицај око Земље (у односу према звездама некретницама). Трајање његово S зове се *звездана година* и изводи се из познатог нам већ *средњега* трајања тропске године, из сразмере:

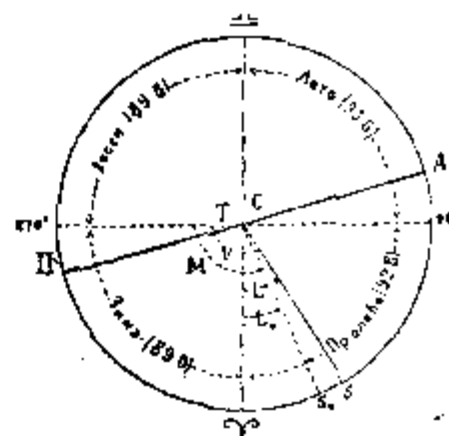
$$\frac{S}{T} = \frac{360^\circ}{360^\circ - 50''.2} = 1 + \frac{1}{25800},$$

т. ј. $S = 365.2422 + 0.0142 = 365.2564$ средњих сунчаних дана.

*) За тачке равнодневица Υ и \approx сачувале су се и до сад исте ознаке као и за сазвежђа Овна и Весова, у којима су се оне налазиле још 200 година до Р. Х.; сада пак (1900. г.), покренувши се за $50''.2 \cdot 2100 = 29'$, оне се налазе већ у сазвежђима Риба (Υ) и Деве (\approx).

103. Кретање Сунчево по његовој орбити.

Знајући равн, у којој се врши кретање Сунчево и његове дужине L у тој равни за разне дане у години, остаје само, да се одреде линеарна растојања до њега d по одговарајућим његовим угловним полупречницима R (чл. 95.) па да се потпуно одреди његова *орбиша*, т. ј. пут његов у простору у односу према центру Земљиноме, сматрајући га за непомичног. Наша таблица у чл. 100. показује, да око 1. јануара угловни полупречник Сунца достиже величину $R_p = 16' 18'' 2$ а око 2. јула — најмању $R_a = 15' 46'' 0$. Прва, најближа Земљи T , тачка Π Сунчевога пута, чија је дужина око 281° (сл. 48.) зове се *перихел* или *перигеј*; друга пак A , најудаљенија са дужином 101° , зове се *афел* или *апогеј*. Називају их још и *апсидама* а праву ΠTA — *апсидном линијом*.



Сл. 48.

Узев средње из растојања ΠT и AT за јединицу и означивши са R_0 полупречник Сунца, који одговара томе сред. растојању, добићемо сва остала растојања $TS = d$ до Сунца S (в. таблицу у чл. 100.) из израза

$$d = \frac{\sin R_0}{\sin R} = \frac{R_0}{R}, \dots \dots \dots (5)$$

где ће се сама величина R_0 одредити из услова

$$\frac{1}{2} (\Pi T + AT) = \frac{R_0}{2} \left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_a} \right) = 1,$$

одакле је

$$R_0 = \frac{2R_p R_a}{R_p + R_a} = 16' 1'' 8 \dots \dots \dots (6)$$

Конструисана на тај начин крива $\Pi SA\Pi$ показује се као круг са центром C на апсидној линији и управо на растојању од Земље $TC = e = \frac{1}{2} (TA - T\Pi) = 0.0167 = \frac{1}{60}$, које се зове *ексцентрицитет* Сунчеве орбите. Доцније ћемо увидети, да је та крива управо елипса са истим ексцентрицитетом $e = \frac{1}{60}$, али је спљоштеност њена $c = \frac{1}{2} e^2 = \frac{1}{7200}$ толико мала, да се, при даној тачности полупречника R и растојања d (до $\frac{1}{10000}$ дела њиховог), та елипса једва разликује од круга.

Дневне промене dL дужина Сунчевих (таблица чл. 100.) показују затим, да највећа његова угловна брзина ($61' 2$), како нам се представља са Земље T , има места баш у перихелу Π а најмања ($57' 2$) у афелу A , и, да су уопште ове промене dL , — слично са растојањима d , — потпуно симетричне у односу према апсидној линији ΠTA . Одатле излази, да кад би се Сунце кретало око Земље са непромењљивом угловном брзином $n = \frac{360^\circ}{S} = 59' 8'' 2$ на дан, то би угао $\angle \Pi TS_0 = M = n \tau$, који оно пређе у току од τ дана од момента перихела, био у првој половини пута мањи а у другој половини већи од истинитог угла $\angle \Pi TS = \nu$ за неку величину $\angle S_0 TS = \eta$, која се претвара у нулу при $M = 0^\circ$ и при $M = 180^\circ$ и која постаје, усљед нагомилавања разлика ($dL - n$), највећа приближно при $M = 90^\circ$ и $M = 270^\circ$. Ова величина $\eta = \nu - M$, која се доста добро изражава формулом

$$\eta = 1^\circ 56' \sin M, \text{ где је } \sin 1^\circ 56' = \frac{1}{30} = 2e, \dots \dots \dots (7)$$

добила је одавно назив *једначине центра*; угли пак ν и M , који се рачунају од перихела Π у страну кретања небесног тела, добили су назив *аномалија* — *исшиништа* и *средњих*.

Према томе, ако означимо уопште дужину перихела, тј. угао $\sphericalangle \Upsilon \Pi$, — који се рачуна од положаја тачке Υ у времену τ , — са Π , то ће се за свако дано време τ (изражено у сред. сунч. данима) добити спочетка *средња дужина* Сунца $L_0 = \sphericalangle \Upsilon TS_0$ а затим *исшиништа* $L = \sphericalangle \Upsilon TS$, по формулама:

$$M = n \tau, \quad L_0 = M - (360^\circ - \Pi) \quad \text{и} \quad L = L_0 + \eta \dots \dots \dots (8.)$$

Те су средње дужине L_0 и показане у последњем ступцу таблице чл. 100.

Стари астрономи нису могли судити о релативним растојањима до Сунца по променама његовога угловног пречника $2R$, које су неосетне за ненаоружано око оптичким средствима. Али су они, излазећи из обичне у та времена поставке, да је кретање Сунца, као и других небесних тела, око Земље најсавршеније тј. кружно и равномерно, почели објашњавати, — почев од *Хипарха*, — несугласност истинитих дужина L са средњима L_0 ексцентричношћу Сунчеве кружне орбите у односу према Земљи T (сл. 48.). Отуда је и произашао израз „једначине центра“. Само је код њих ексцентрицитет TS , — да би одговарао максималној валичини једначине центра $\eta = 1^\circ 56'$, — излазио да је раван $\sin 1^\circ 56' = \frac{1}{30}$ уместо $\frac{1}{60}$.

104. Годишња доба.

Топлотни утицај сунчаних зракова а према томе и разлика разних годишњих доба на неком месту Земљине површине зависи углавном од промена деклинација Сунца, јер се са њиховим повећањем Сунце и више издиже и дуже остаје над хоризонтом. Али при томе немали значај има и неједнакост растојања од Земље до Сунца у разна доба године. Сл. 48. нам даје јасну представу о томе, у каквим се управо деловима своје орбите налази Сунце у моментима еквinoxија (равнодневица Υ и \sphericalangle), који се рачунају за почетак *пролећа* и *јесени* а када у моментима солстиција (дугодневица, $L = 90^\circ$ и краткодневица $L = 270^\circ$) који се рачунају за почетак *лета* и *зиме*, за нашу северну полукуглу Земљину. Као што се види, северна се полукугла налази у повољнијим климатским погодбама него јужна, због тога што се суровост зимњег доба и релативни сувишак летње топлоте умеравају на њој већом близином Сунца до Земље у првом случају и већом његовом удаљеношћу у другом случају (јужна полукугла). При томе и само трајање јесени и зиме излази краће од трајања пролећа и лета, усљед тога што део $\sphericalangle \Pi \Upsilon$ својега пута Сунце прелази брже, него онај други $\Upsilon A \sphericalangle$.

За одређење времена, које Сунце употреби за прелаз свакога од она четири сектора, који одговарају пролећу, лету, јесени и зими, користећемо се формулама (8.), по којима ће се број средњих сунчаних дана τ , — који се рачуна од момента Сунчевог пролаза кроз перихел ($\Pi = 281^\circ$), — добити за сваку дужину L са довољном за нас тачношћу, овако:

$$\tau = \frac{L + 79^\circ - \eta}{n} = (L + 79^\circ - \eta) \left(1 + \frac{1}{69}\right)^* \quad \text{где је } \eta = 1^\circ 93 \sin (L + 79^\circ).$$

Стављајући овде једно за другим: $L = 0^\circ$, $L = 90^\circ$, $L = 180^\circ$, $L = 270^\circ$ и $L = 360^\circ$, добићемо:

*) Јер је $n = \frac{360}{s}$; према томе $\frac{1}{n} = \frac{365.2564}{360} = \left(1 + \frac{5.2564}{360}\right) = \left(1 + \frac{1}{69}\right)$.

	η	τ дана	трајање
при $L = 0^\circ$	$+ 1^\circ 90$	$78^\circ 21$	пролећа 92.86 дана
„ $L = 90$	$+ 0.37$	171.07	лета ... 93.61 „
„ $L = 180$	$- 1.90$	264.68	јесени .. 89.76 „
„ $L = 270$	$- 0.37$	354.44	зиме ... 89.01 „
„ $L = 360$	$+ 1.90$	443.45	

Према томе је на нашој северној полукугли трајање пролећа и лета, укупно узето, дужи од јесени и зиме за 7.7 дана; на јужној пак полукугли то је обротно. Али ћемо доцније увидети, да правац ТП апсидне линије Сунчеве орбите не остаје у простору непомичан већ мења сваке године свој положај за $11''.5$ у исту страну куда се и Сунце креће. Услед тога се тачка равнодневица γ приближује перихелу П сваке године за $50''.2 + 11''.5 = 61''.7$ тако, да ће после $\frac{180^\circ}{61''.7} = 10500$ година заузети на Сунчевој орбити исти положај, који сад има тачка γ . Тада ће се трајања разних доба године и све климатске погодбе наше и јужне полукугле узајамно променити.

Из тек што реченога о свакогодишњој промени правца апсидне линије за $11''.5$ излази, да се Сунце враћа својему перихелу П и у опште својим пређашњим аномалијама М и ν по истеку периода времена од

$$S = \frac{11''.5}{360^\circ} = 365.2564 + 0.0033 = 365.2597 \text{ ср. сунч. дана.}$$

Тај се период зове *аномалијска година*.

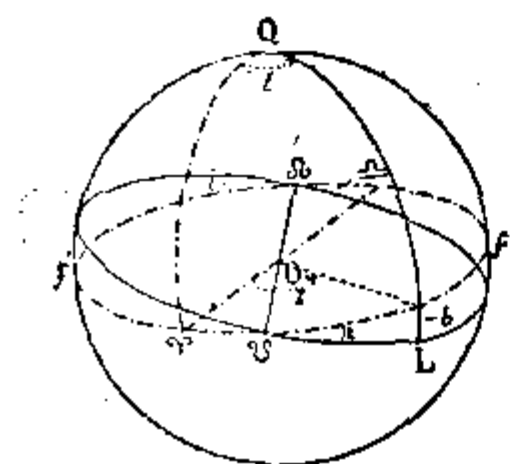
105. Екваторијалне и еклиптичке координате Месечеве.

Екваторијалне се координате Месечеве α и δ добијају из сасвим сличних посматрања Месеца помоћу меридјанског круга, као што се посматра и Сунце (чл. 98.), при чему се упоредно с њиме посматра увек и каква звезда недалеко од њега те да на извод α и δ неби имали утицаја нити нетачност корекције часовника, ни разне инструменталне погрешке, нити пак погрешност таблица рефракције. Разлика је само у томе, што се код Месеца може посматрати зенитно растојање, као и момент пролаза кроз меридијан само једнога краја његова диска, који је осветљен Сунцем; због тога се величине угловнога његовог полупречника R и хоризонталне екваторијалне паралаксе π , — која му одговара и што је све неопходно потребно за извод геоцентричких координата α и δ центра Месечевог, — узимају обично из већ постојећих таблица Месечевих, нпр. из „Nautical Almanac“-а. У осталом, Месечев се привидан пречник $2R'$, — који спаја шиљке његових рогова, — може непосредно измерити у ма које доба специјалним за то инструментом — хелиометром.

Ради одређивања привиднога Месечевог пута на небесној сфери, погодније је прећи, — као што је напоменуто у чл. 101. — од α и δ на еклиптичке координате l и b по формулама (F). Да испишемо, ради прегледности, те (приближне) координате Месечеве из Nautical Almanac-а за 1885. годину за сваки средњи сунчани дан месеца марта па да срачунамо уједно стим, — по даним тамо угловним полупречницима његовим R , — растојања до њега d , узев за јединицу растојања одговарајућу средњу величину полупречника $R_0 = 15' 33''.0$ или, што је исто, средњу величину његове паралаксе $\pi = 57' 2''.6$ (чл. 96.)

Марта	l	b	R	d	Марта	l	b	R	d
1.	165° 5	— 1° 44' 16"	17	0.970	16.	353° 2	+ 1° 3' 15" 33"	1	1.000
2.	179.2	— 0 30 15	50.4	0.982	17.	6.5	— 0 10 15	42.4	0.990
3.	192.7	+ 0 44 15	38.0	0.995	18.	20.0	— 1 24 15	50.7	0.981
4.	205.7	+ 1 53 15	25.4	1.008	19.	33.8	— 2 36 15	57.5	0.974
5.	218.4	+ 2 55 15	13.6	1.021	20.	47.7	— 3 37 16	2.9	0.969
6.	230.8	+ 3 48 15	3.5	1.033	21.	61.7	— 4 26 16	6.8	0.965
7.	243.0	+ 4 29 14	55.5	1.042	22.	75.9	— 5 0 16	9.2	0.963
8.	255.0	+ 4 57 14	50.3	1.048	23.	90.1	— 5 16 16	10.3	0.962
9.	266.9	+ 5 13 14	47.8	1.051	24.	104.3	— 5 12 16	10.2	0.962
10.	278.7	+ 5 15 14	48.2	1.050	25.	118.5	— 4 50 16	8.7	0.963
11.	290.7	+ 5 4 14	51.4	1.047	26.	132.6	— 4 10 16	5.8	0.966
12.	302.8	+ 4 39 14	57.0	1.040	27.	146.6	— 3 16 16	1.4	0.970
13.	315.0	+ 4 1 15	4.5	1.032	28.	160.5	— 2 10 10	55.3	0.977
14.	327.5	+ 3 11 15	13.5	1.021	29.	174.1	— 0 58 58	47.7	0.985
15.	340.2	+ 2 11 15	23.2	1.011	30.	187.6	+ 0 16 16	38.8	0.994

Кад замислимо из центра Земље O (сл. 49.) небесну сферу са еклиптиком $f\Upsilon f'$ и конструишемо по овим координатама l и b места Месечева L , видећемо, да ће се сва она налазити на великом кругу, који пресеца еклиптику

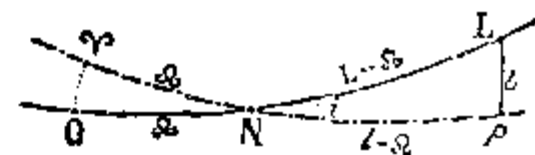


Сл. 49.

у двама дијаметрално супротним тачкама Ω и Ω' . Прва од њих, где Месец прелази са јужне стране еклиптике на северну, зове се *узлазни* или *горњи чвор* а друга — *силазни* или *доњи*; овим се истим знацима Ω и Ω' означавају обично и њихове дужине, које су у садањем случају равне $\Upsilon = 184^\circ 7'$ и $\Omega = 4^\circ 7'$. Исто се тако види, да је Месец достигао до највеће и најмање своје ширине $\pm 5^\circ 16'$ при његовим дужинама $l = \Omega \pm 90^\circ$. Све ово показује, да је кретање Месечево извршено у равни, која пролази кроз центар Земљин и да је та раван нагнута према еклиптици под углом $i = 5^\circ 16'$.

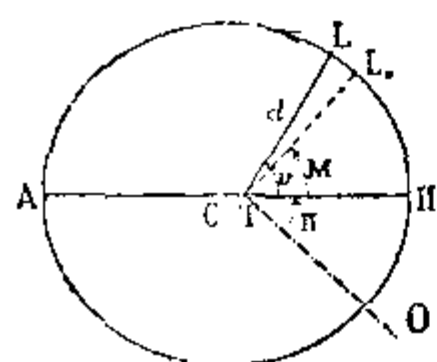
106. Орбита Месечева и њене промене.

Да бисмо конструисали орбиту Месечеву по напред нађеним растојањима d , прећићемо прво од дужина l на угле или дужине L , које се рачунају у орбитиној равни. Нека је на небесној сфери (сл. 50.) та раван представљена великим кругом ONL , који образује са еклиптиком ΥNp угао $\angle LNP = i$. Ако одмеримо на њему лук $NO = N\Upsilon = \Omega$ од узлазног (горњег) чвора N а од добивене тачке O будемо рачунали дужине по орбити $L = OL$, то ће се оне, тј. дужине, одредити по формули



Сл. 50.

$$\operatorname{tg}(L - \Omega) = \frac{\operatorname{tg}(l - \Omega)}{\cos i} \dots \dots \dots (9.)$$



Сл. 51.

а због мале величине i , оне ће се разликовати од l не више од $\frac{1^\circ}{8}$ (чл. 21.).

Конструисана Месечева орбита, као и за Сунце, по L и d у односу према Земљи T показате се као круг или, тачније говорећи као елипса (сл. 51.) са дужом полуосом

$\frac{1}{2}(TP + TA) = a = 1.006$ и са врло малим линеар. ексцентрицитетом $\frac{1}{2}(TA - TP) = TC$, чија релативна нумерична вредност $e = \frac{TC}{a}$ излази да је равна $\frac{1}{22.5}$ (а приближ. спљоштеност $c = \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{1000}$); сам пак правац осе $\sphericalangle PTA$ или линије апсида P и A одредиће се дужином $P = \sphericalangle OTP = 95^\circ.4$ најближе тачке Земљи P , тј. *перихела (перигеја)*.

Али, разматрајући на исти начин кретање Месечево за време претходних и доцнијих кружења његових око Земље, видећемо, да су сви уопште елементи Ω , i , P , e и a , који одређују његову орбиту, подвргнути знатним периодичким променама. Линија се чворова $\delta T \zeta$ премешта још притом стално у правцу обратнога (ретроградног) кретања (као и тачка Υ) у средњем за $19^\circ 20'5$ у току године (или за $3' 10''.6$ у току средњег сунчаног дана) па се, разуме се, враћа у првобитни свој положај по истеку периода времена од $\frac{360^\circ}{19^\circ 20'.5} = 18.6$ година, који је у исто време и период колебања нагиба i орбите у границама од $5^\circ 0'$ до $5^\circ 16'$. Линија се пак апсидна премешта у правцу напредног (директног) кретања у средњем за $40^\circ 41'.4$ годишње (за $6' 41''.1$ дневно) прелазећи пуни круг у току од $\frac{360^\circ}{40^\circ 41'.4} = 8.8$ година; у зависности пак од овога периода произлазе и промене у дужој полуоси a орбитиној и у њеном ексцентрицитету e , који се колеба у границама од $\frac{1}{23}$ до $\frac{1}{14}$.

У нашем примеру узетом за орбиту Месечеву, он се је враћао у своје пређашње дужине L (или l) по истеку 27.37 ср. сунч. дана; средња пак величина тога периода T , — која се зове *шропски месец*, — ако се изведе из огромног броја кружења Месечевих, износи 27.321 дана, чему одговара средња промена дужине l за један дан $n_t = \frac{360^\circ}{T} = 13^\circ 10' 35''.0$. Али разлика између истините дужине Месеца $L = \sphericalangle OTL$, у неком моменту, и средње $L_0 = \sphericalangle OTL_0$, која би се добила при таквом равномерном рашћењу n_t , ту се већ не изражава тачно оном, тако простом *једначином ценшра* $L - L_0 = \frac{2e}{\sin 1^\circ} \cdot \sin(L_0 - P)$, као за Сунце (чл. 103.), већ тражи још многе накнадне корекције, које зависе од положаја Месечевог и саме његове орбите у односу према Сунцу и које се зову *неједнакост Месечева* кретања. На тај се је начин показало, да је ово кретање изванредно сложено.

107. Разни лунарни (Месечеви) месеци.

Периоде времена, после којих се Месец враћа у пређашње своје положаје (по дужини): у односу према звездама некретницама, према својим чворовима; према својим апсидама и најзад према Сунцу, зову се респективно: *звездани* или *сидерски* (S), *драконски* (D), *аномалијски* (A) и *синодски* (C) месеци. Кад означимо средње дневно померање Месеца по дужини: у односу према звездама некретницама, према средњем положају његовога чвора Ω , према средњем положају његова перихела P , и, према средњем положају Сунца, респективно са: n_s , n_d , n_a и n_c , и приметимо, да се за један сунчани дан: тачка Υ премешта у обратном правцу за $\frac{50''.2}{365.24} = 0''.14$, да се дужина $\delta \Omega$ смањује за $3' 10''.6$ а дужина P и Сунца да се повећава за $6' 41''.1$ и $59' 8''.3$, — ми ћемо са напред нађеном величином $n_t = 13^\circ 10' 35''.0$ добити, да је:

$$n_s := n_t - 0'' 14 = 13^\circ 10' 34'' 9, \quad n_d = n_t + 3' 10'' 6 = 13^\circ 13' 45'' 6$$

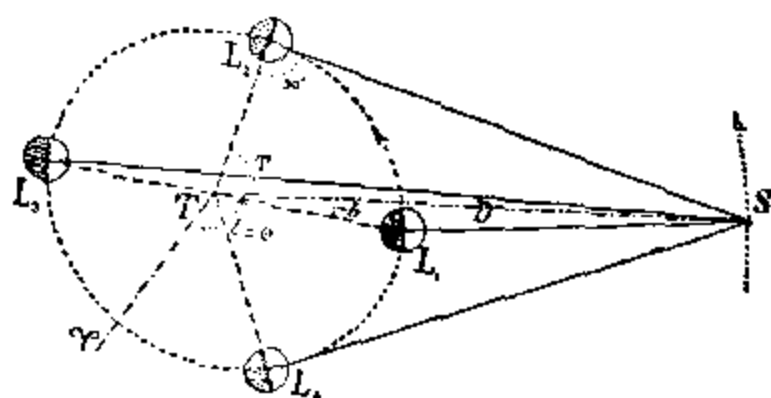
$$n_a = n_t - 6' 41'' 1 = 13 \quad 3 \quad 53.9, \quad n_c = n_t - 59' 8'' 3 = 12 \quad 11 \quad 26.7;$$

после чега средња трајања тако званих лунарних (Месечевих) месеца излазе, изражени у ср. сунч. данима, оваква:

$$T = \frac{360^\circ}{n_t} = 27.3216, \quad S = \frac{360^\circ}{n_s} = 27.3217, \quad D = \frac{360^\circ}{n_d} = 27.2123,$$

$$A = \frac{360^\circ}{n_a} = 27.5546 \quad \text{и} \quad C = \frac{360^\circ}{n_c} = 29.5306.$$

У току свакога синодског оптицаја Месец се, гледан са земље Т (сл. 52.), представља у разним фазама, што зависи од положаја његовога према Сунцу S, којим је осветљен. Сизигије се зову положаји Месечеви L_1 и L_3 , када му је



Сл. 52.

дужина l или равна дужини Сунца \odot (конјукција, сједињење) или се разликује од ње за 180° (опозиција, прошивстајање). У првом је случају младина или нов месец, у другом уштан или пун месец. Интервални положаји Месечеви L_2 и L_4 , када је угао при њему између праваца на Земљу Т и на Сунце S раван 90° , и када се са Земље види осветљена тачно половина његовога диска, зову се *квадрашуре* или *четврши* (прва и последња).*)

Ако се конјукција (сједињење) или опозиција (противстајање) Месеца према Сунцу деси у оно време, када је он довољно близу једнога од својих чворова, тј. еклиптици, онда у првом случају он може да покрије неки део Сунчева диска те ће произаћи *Сунчево помрачење*; у другом пак, — он ће проћи кроз сенку Земљину те ће и сам да се помрачи.

Као што ћемо доцније видети (гл. XXV), такве се појаве могу десити од 2 до 7 пута годишње; да би се пак помрачења почела опет да понављају у истом реду као и раније, потребно је, да неки цео број N_c синодских оптицаја Месечевих буде раван, по својему трајању, такође целога броју N_d оптицаја драконских. Да би се нашли овакви бројеви, треба представити однос напред нађених величина С и D у облику верижног разломка па срачунати сукцесивне повољне за њега просте разломке; они ће наине бити: $\frac{12}{11}, \frac{13}{12}, \frac{38}{35}, \frac{51}{47}, \frac{242}{228}$ и последњи ће од њих дати с тачношћу 0.03 дана:

$$223 C = 242 D = 6585 \frac{1}{3} \text{ дана} = 18 \text{ год.} + 11 \frac{1}{3} \text{ дана.}$$

Али се сам облик помрачења може мењати још услед тога, што угловни полупречници Месечеви и Сунчеви бивају различити, што зависи управо, — као што смо видели, — од аномелија тих небесних тела; период пак од $6585 \frac{1}{3}$ дана садржи у себи скоро равно 239 аномалиских месеца и само је за 10.7 дана већи од аномалиских година; према томе, по истеку тога периода, паралаксе и угловни полупречници оба небесна тела враћају се врло приближно пређашњим својим величинама и свако се помрачење треба да понови у истом својем облику. Тај период понављања помрачења био је запажен још у прастара времена и добио је назив *Сароса*.

*) Правоугли троугао у квадратурама TLS даје $\frac{d}{D} = \cos T = \cos (l - \odot) \cos b$. Аристрах је још за 260 г. до Р. Хр. био предложио на овоме засновану методу, за одређивање растојања D до Сунца; али су му изводи били несигурни, због немогућности одређивања момената квадратура Месечевих.

Задатке:

1.) Одредити угао, који заклапа еклиптика са хоризонтом места ($\Theta = 90^\circ - \varphi$) у звездано време S и показати, када ће он бити највећи и најмањи.

Тај ће угао x бити изражен страном QZ сфернога троугла QPZ , у коме су $PQ = \omega$, $PZ = \Theta$ и $\sphericalangle QPZ = 90^\circ + S$ па је стога

$$\cos x = \cos \omega \cos \Theta - \sin \omega \sin \Theta \sin S.$$

Највећи ($\Theta + \omega$) ће он бити при $S = +90^\circ = 6^h$, а најмањи ($\Theta - \omega$) при $S = -90^\circ = 18^h$,

2.) Одредити дужину l и ширину b небесног тела по даној његовој деклинацији и рехтасцензији $\alpha = 0$.

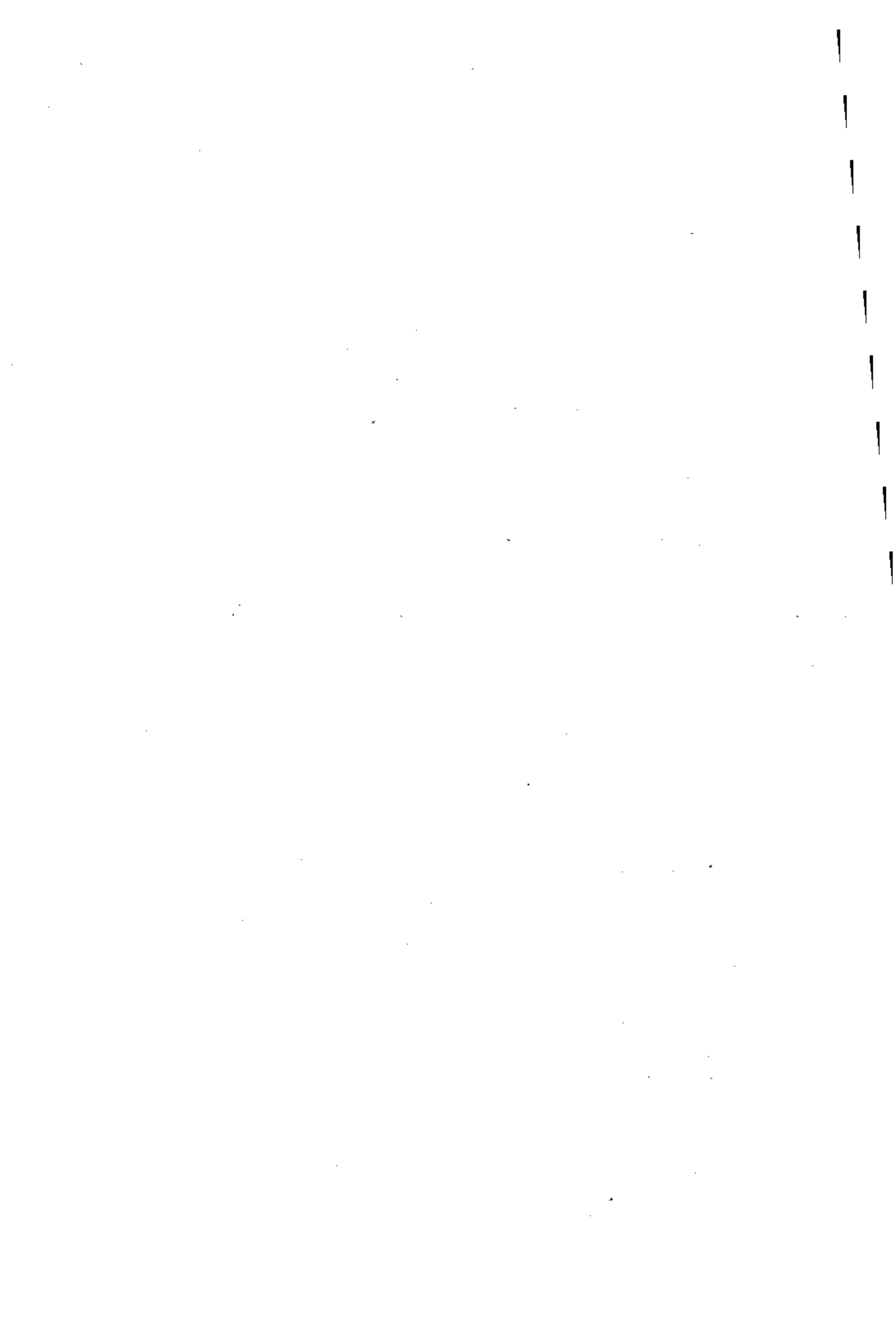
На овај се специјални случај не могу применити формуле (F), чл. 101. јер по њима излази $k = 90^\circ$ и $\operatorname{tg} l = \frac{0}{0}$; али се опет из троугла $\Upsilon E\eta$ (сл. 47.) непосредно добија, да је $\operatorname{tg} l = \operatorname{tg} \delta \sin \omega$ и $\operatorname{tg} b = \sin l \operatorname{cotg} \omega$.

3.) На основу реченога у чл. 101. и чл. 102. добити опште изразе за годишње промене $d\alpha$ и $d\delta$, које произлазе у координатама звезде α и δ усљед прецесије.

Ако ставимо у формулама (1.)_z и (1.)_A главе XII, уместо dS , Θ , A и z одговарајуће им у томе случају величине: $50''.2$, ω , $90^\circ - \alpha$ и $90^\circ - \delta$ и, ако напоменемо, да је $50''.2 \cos \omega = 46''.0$ а $50''.2 \sin \omega = 20''.0$, онда ће се добити:

$$d\alpha = 46''.0 + 20''.0 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \quad \text{и} \quad d\delta = 20''.0 \cos \alpha.$$





ГЛАВА XVI.

РАЧУНАЊЕ ВРЕМЕНА.

108. Истинито и средње сунчано време.

Ротационо кретање Земљино, које се врши по инерцији са непромењљивом угловном брзином, пружа најбоље средство за мерење разних интервала времена. У астрономији се наине узима за *јединицу времена звездани дан*, који је унеколико краћи од времена потпунога обрта Земље око њене осе, јер тачка Υ успева за то време да се премести по еклиптици обратним кретањем за угао $\frac{50''.2}{360} = 0''.14$. У чл. 69. ми смо већ видели, да се као почетак звезданих дана у каквом месту рачуна момент кулминације тачке Υ и да се *звездано време S*, као део звезд. дана, изражава непосредно часовним углом те тачке па према томе одмах даје и часовни угао свакога небесног тела, чија је рехтасцензија α позната.

Рачунање времена по сунчаним данима има свој особити значај у обичном животу, зато што је очигледније. Као астрономски почетак *исшиниших сунчаних дана* у каквом месту узима се *исшинишо подне*, тј. момент горњег пролаза центра Сунчевог кроз меридијан а под *исшинишим сунчаним временом* подразумева се часовни угао t тога небесног тела.

Али, услед неравномернога прираштаја рехтасцензије Сунчеве A , трајање таквих дана излази неједнако па због тога не може ни да послужи као тачна мера времена. За такву се меру због тога узима средња вредност сунчаних дана или т. зв. *средњи дан*, који би био створен неким замишљеним *средњим Сунцем* са рехтасцензијом A_0 , која би увек била равна *средњој дужини L_0 исшинишого Сунца* (чл. 103.); стога што би се таква рехтасцензија A_0 тако исто равномерно мењала у току времена као и средња дужина L_0 и то за величину $\Delta L_0 = \Delta A_0 = \frac{360^\circ}{365.242} = 3^m 56^s 56$ у току 1 сред. дана или за величину $\Delta L'_0 = \Delta A'_0 = \frac{360^\circ}{366.242} = 3^m 55^s 91$ у току 1 звезд. дана.

За почетак средњег дана узима се момент горњег пролаза кроз меридијан тога замишљеног средњег Сунца или т. зв. *средње подне (полудан)*; уопште пак под *средњим се временом* подразумева часовни угао T тога замишљеног Сунца. У грађанском пак обичном животу рачунање времена почиње од поноћи т. ј. од момента доње кулминације средњег Сунца.

Разуме се, да ће се часовни угли и времена S , t и T , — која се рачунају у каквоме једном месту, — разликовати увек од часовних углова или и времена S' , t' и T' , која одговарају првима у истоме моменту на другом месту. Очевидно је, да та разлика треба да буде равна разлици дужина l та два места, т. ј.

$$S' - S = t' - t = T' - T = l.$$

109. Једначина времена.

Међу истинитим сунчаним временом t , средњим T и звезданим S постоји увек овај однос:

$$S = t + A = T + A_0 \dots \dots \dots (1.)$$

при чему се ректасцензије A и A_0 одређују по истинитим и средњим дужинама L и L_0 Сунца на овај начин:

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} L \cos \omega \quad \text{и} \quad A_0 = L_0.$$

Према томе, за прелаз са истинитог сунчаног времена на средње и обратно, треба знати само разлику $y = A - A_0$, која се зове *једначина времена*.

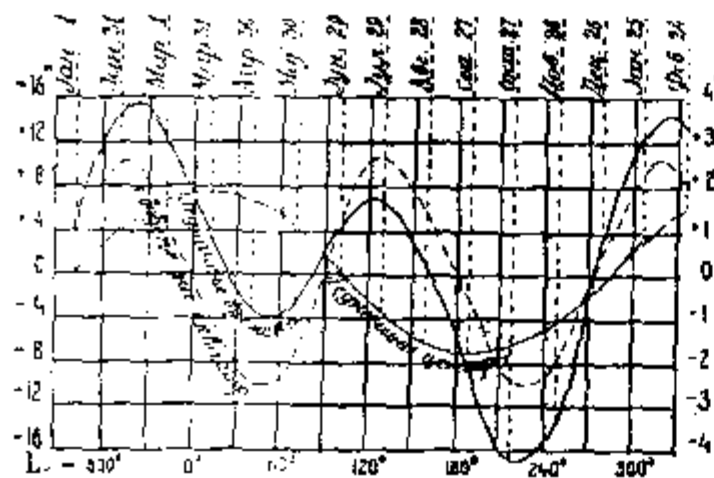
Ради грубог одређења те величине y , с тачношћу само до десетих делова минуте времена, ако се користимо приближним формулама (7.) и (8.) чл. 103. и (d) чл. 21., изаћи ће, да је:

$$L - L_0 = 1^{\circ} 56' \sin M = 7^m 7 \sin (L_0 - 79^{\circ}) \quad \text{и} \quad L - A = \sin^2 \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\sin 2L}{\sin 1^m} = 9^m 5 \sin 2L_0;$$

због тога ће бити

$$y = A - A_0 = 7^m 7 \sin (L_0 + 79^{\circ}) - 9^m 5 \sin 2L_0 \dots \dots \dots (2.)$$

Први је члан ове формуле — *једначина центра* (y у минутама времена) и представља се графички (сл. 53.) у облику синусоидне криве са годишњим периодом; други ($L - A$), зове се *свођење на екватор* и представља се у облику синусоидне



Сл. 53.

криве са полугодишњим периодом; сумом пак или разликом њиховом одређују се ординате y криве једначине времена. Као што се види, једначина времена у току године достиже два пута максималну величину ($+14^m 5$ и $+6^m 2$), два пута минималну ($-3^m 9$ и $-16^m 3$) и четири пута се претвара у нулу (око 15. априла, 14. јуна, 31. августа и 24. децембра).

Тачне величине једначине времена y и њихове диференцијалне промене за 1^h (чл. 31.) дају се у Nautical Almanac-у за сваки дан го-

дине, како за истинито, тако и за средње гринвичко подне, да би се омогућило нахођење у простим интерполовањем, како за дано истинито време t , тако и за средње T . Нека је нпр. потребно наћи средње петроградско време T по часовном углу Сунца $t = +6^h 16^m 7^s 80$, — који је посматран у Петрограду ($l = +2^h 1^m 12^s$) 19. јула 1884. г. на основу следећег преписа из Nautical Almanac-а за ту годину:

1884. г.	У истинит. гринв. подневу		У сред. гринв. подневу
јули	y { треба додавати истин. времену	промена за 1^h	y { треба одузимати од сред. времена
19.	$6^m 2^s 33$	$0^s 160$	$6^m 2^s 31$
20.	$6 \ 5.91$	0.137	$6 \ 5.89$

Интерполујући величину y онако како је то објашњено у чл. 31., за истинито гринвичко време $t_0 = t - l = 4^h 14^m 56^s$, добићемо:

$$y = 6^m 2^s 33 + t_0 \left(0^s 160 - 0^s 023 \times \frac{t_0}{48} \right) = 6^m 2^s 33 + 0^s 67 = 6^m 3^s 00$$

па је стога

$$T = t + 6^m 3^s 00 = 6^h 22^m 10^s 80.$$

Обратно пак, за нахођење истинитог петроградског времена t по даноме средњем $T = 6^h 22^m 10^s 80$, требало би одредити величину y за сред. гринв. време $T_0 = T - t = 4^h 20^m 59^s$, при чему би изашло

$$y = 6^m 2^s 31 + T_0 \left(0^s 160 - 0^s 023 \times \frac{T_0}{48} \right) = 6^m 2^s 31 + 0^s 69 = 6^m 3^s 00$$

а

$$t = T - 6^m 3^s 00 = 6^h 16^m 7^s 80.$$

110. Прелаз са средњег и истинитог времена на звездано и обратно.

Рехтасцензија средњег Сунца у моменту горње његове кулминације у Гринвичу дата је у Nautical Almanac-у под заглављем *звездано време у средњем гринвичком подневу*. Ако то звездано време у средњем подневу ($T = 0$) каквога данога места на Земљи означимо са S_0 , то ће за сваки други момент T по локалном средњем времену бити $A_0 = S_0 + \frac{dA_0}{24^h} \cdot T$; због тога ће се звездано време S , које овоме одговара, изразити овако:

$$S = T + A_0 = S_0 + T + \mu T \quad \left. \begin{array}{l} \text{где је} \\ \mu = \frac{3^m 56^s 56}{24^h} = \frac{1}{365.24} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3.)$$

Обратно пак, кад је дато звездано време S , рехтасцензија ће се A_0 добити, ако ка S_0 буде додата промена тога A_0 за интервал времена $(S - S_0)$; тада ће изаћи $A_0 = S_0 + \frac{dA_0}{24^h} (S - S_0)$ па је према томе

$$T = S - A_0 = S - S_0 - \mu' (S - S_0) \quad \left. \begin{array}{l} \text{где је} \\ \mu' = \frac{3^m 55^s 91}{24^h} = \frac{1}{366.24} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3.)$$

Величине *свођења* μT и $\mu' (S - S_0)$ интервалâ ср. времена T на звездано и интервалâ $(S - S_0)$ на средње изналазе се најпростије по помоћним таблицама, које су додате на крају Вегиних логаритамских таблица од 7 децимала. У њима су дати интервали T и $S - S_0$, који одговарају прво округлим бројевима секунада самога *свођења* μT или пак $\mu' (S - S_0)$ а затим и деловима секунада. Сличне, скраћене таблице дали смо и ми на крају ове књиге (таблица 5.), за нахођење тражених *свођења* без икаквих писмених срачунавања.

Нека је на пример:

дано $T = 6^h 22^m 10^s 80$	дано $S - S_0 = 6^h 23^m 13^s 58$
за $6^h 5^m 15^s$ $\mu T = 1^m 0^s$	за $6^h 6^m 15^s$ $\mu' (S - S_0) = 1^m 0^s$
„ 12 10 2.	„ 12 12 2.
„ 4 16 0.7	„ 4 16 0.7
„ 29 0.08	„ 29 0.08
<hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> $\mu T = 1^m 2^s 78$	<hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> $\mu' (S - S_0) = 1^m 2^s 78$

Да нађемо сад, на основу следећег преписа из Nautical Almanac-a, прво звездано петроградско време S , које одговара средњему $T = 6^h 22^m 10^s 80$ за 19. јула 1884. г. а затим T по даноме S .

1884.	У истинитом гринвичком подневу				У сред. гринв. подневу
јула	Рехтасцензија A	промена за 1^h	Деклинација D	промена за 1^h	Звездано време S
19.	$7^h 56^m 47^s 70$	$10^s 017$	$+ 20^{\circ} 44' 27'' 5$	$27'' 81$	$7^h 50^m 44^s 37$
20.	$8 \ 0 \ 47.84$	9.994	$20 \ 33 \ 9.5$	28.68	$7 \ 54 \ 40.93$

Пошто је, у моменту кулминације средњег сунца у Петрограду, часовни угао тога сунца у Гринвичу раван $-l = -2^h 1^m 12^s$, то ће звездано време S_0 у средњем петроградском подневу 19. јула бити мање него у гринвичком подневу за величину $\mu l = 19^s 91$. На тај начин, по формулама (3.) и (3.)' и помоћу таблице 5. излази:

Дано ср. петр. вр. $T = 6^h 22^m 10^s 80$	Дано зв. петр. вр. $S = 14^h 13^m 38^s 04$
у ср. петр. подневу $S_0 = 7 \ 50 \ 24.46$	у ср. петр. подневу $S_0 = 7 \ 50 \ 24.46$
свођење $\mu T = + \ 1 \ 2.78$	$S - S_0 = 6 \ 23 \ 13.58$
Тражено звезд. вр. $S = 14^h 13^m 38^s 04$	свођење $\mu' (S - S_0) = - \ 1 \ 2.78$
	Тражено ср. време $T = 6^h 22^m 10^s 80$

Да би се добило звездано време S по даноме истинитом t , треба само додати томе t рехтасцензију A истинитог Сунца, нашав је у Nautical Almanac-у за истинито гринвичко време $t_0 = t - l$. Тако на пример ако је 1884. г. јула 19. било у Петрограду $t = 6^h 16^m 7^s 80$, то ће се добити, на основу горњег преписа из Nautical Almanac-a:

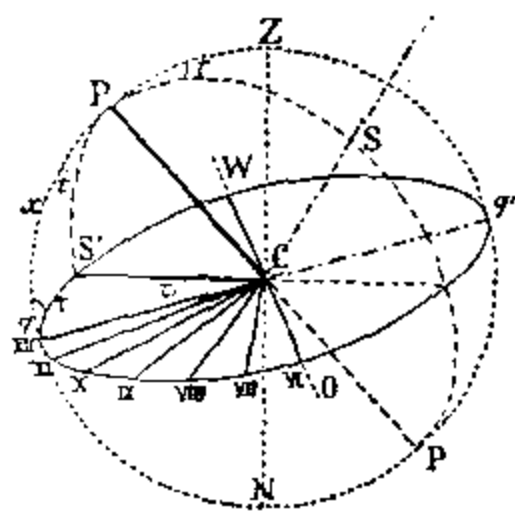
$$A = 7^h 56^m 47^s 70 + t_0 (10^s 017 - 0^s 023 \times \frac{t_0}{48}) = 7^h 56^m 47^s 70 + 42^s 55 = 7^h 57^m 30^s 25$$

и $S = t + A = 14^h 13^m 38^s 05.$

Напоследку, за нахођење истинитог времена t по даноме звезданом S најпростије је прећи прво са звезданог времена S на средње T а затим том T додати једначину времена u .

111. Сунчани часовник.

За грубо одређивање времена често се пута у обичном животу служ



Сл. 54.

тако званом сунчаним часовником на коме се Сунче часовни угао t оцртава на хоризонталној или на вертикалној равни сенком подуже шипке. Разуме се да т шипка CP (сл. 54.) не треба да буде вертикална ве паралелна са Земљином осом те да правац њене сенке не зависи од промењљиве деклинације Сунца S . Д видимо, како управо треба унапред нацртати права сенке CS' за разне часовне угле $t = \angle SPq'$ Сунца у равни $qOq'W$, која је управна на раван меридијана $qPZq$ данога места и која се пресеца са њоме по лини qCq' и образује са правцем CP неки угао $\angle PCq =$

Ако замислимо у тачци С помоћну сферу, добићемо на њој правоугли троугао PqS' са катетом $Pq = x$ и налеглим углом $qPS' = t$; због тога ће се друга његова катета $qS' = \tau$, — која одређује тражени угао $\sphericalangle qCS'$, — срачунати овако

$$tg \tau = \sin x \, tg t \dots \dots \dots (4.)$$

Ако је раван $qOq'W$ сунчаног часовника хоризонтална, онда је угао x раван ширини места φ ; ако је она у првом вертикалу, онда је $x = 90 + \varphi$ а $\sin x = \cos \varphi$ и онда шипка, разуме се, треба да буде управљена наниже по линији CP' ; ако најзад она буде управна на шипку, тј. паралелна са равни екватора, то излази да је просто $\tau = t$.

Разуме се, да за добивање локалног средњег времена T треба показанима сунчаног часовника додавати са потребним знаком (+ или —) одговарајуће вредности једначине времена.

112. Грађанске године и месеци (календар).

Сунчани је дан сувише мала и незгодна јединица за изражавање великих интервала времена међу разним догађајима; због тога су сви народи одавно узимали за ту сврху друге природне јединице, као што су: синодски месец, као период понављања фаза Месечевих, и, тропска година, као период понављања разних доба године. Али је тешко било довести у сагласност Месечев (лунарни) период од $29 \frac{1}{2}$ дана са Сунчевим од $365 \frac{1}{4}$ дана, и то је био узрок, што су трајања *хронолошких* или *грађанских година и месеца* узимана произвољно те су знатно одступала од истинитих. Код Египћана је, на пример, грађанска година садржала у себи равно 365 дана, од којих су се 360 делили на 12 месеци, по 30 дана у свакоме, а осталих 5 дана су се просто додавали на крају године. Према томе код њих је свака година почињала за $\frac{1}{4}$ дана раније одпредидуће те се је, — прелазећи постепено кроз сва годишња времена, — могла понова покlopити са тропском годином тек после периода времена од $4 \times 365 = 1460$ година, и тај је период назван *Сошисом*. Код Грка пак Месечев је период био узет за основу а година је била састављена из 12 месеци, који су садржали наизменично 30 и 29 дана, а, ради сагласности тих година са тропском, они су некојим таквим годинама додавали одједном цео сувишни месец од 30 дана.

Римљани су делили своју грађанску годину на 12 месеци: *martius, aprilis, junius, quintilis, sextilis, september, october, november, december, januarius, и february*; али, савршено не познавајући право трајање тропске године, они су почели да мењају, често и сасвим произвољно, број дана у тим месецима, да би ту своју годину довели у сагласност са сунчаном. Све је то учинило, да им је рачунање времена или *календар* (од речи *календа*, којом су звали сваки први дан у месецу) био у таквом нeredу, да је *Јулије Цезар* (46. г. до Р. Хр.) решио, да учини у њему корениту реформу. За ту сврху позват је био из Александрије астроном *Созиген*, који је узео за основу годишњег рачунања дужину тропске године од $365 \frac{1}{4}$ дана па је усталио, да се у три *просхе* године, које иду једна за другом, рачуна по 365 дана а у четвртој *пресхупној* (од речи „*bissextus*„ — две шестице) по 366 дана. Ово је рачунање времена, — са истим називима месеца (са изузетком петог и шестог, који су доцније назвати јули и август) и са истим бројем дана, — било примљено 325. године. на Никејском Васељенском Сабору од стране хришћанске цркве и по њему се и сад рачуна по православном календару.

Разлика од 0.0078 дана између истинитог трајања тропске године (365.2422) и јулијанске грађанске (365.25) постепено се накупљала и по истеку 128 година она је представљала већ један цео дан. Услед тога је пролетња равнодневница, — која је у времену Никејског Сабора падала 21. марта, — у XVI веку падала већ 11. марта, тј. за 10 дана раније. То је исправио папа *Грегорије XIII* 1582. године, а, да би пролетња равнодневница падала и у будуће око 21. марта, он је утврдио, да се у будуће рачунају у просте године оне од заокругљених у стотинама, које нису дељиве са 400 без остатака (тј. 1700, 1800, 1900, 2100 и т. д.) а оне које су дељиве са 400 (тј. 1600, 2000 и т. д.) да буду по пређашњем преступне.

По томе правилу излази, да је средње трајање грегоријанске године равно $365 \frac{97}{400} = 365.2425$ дана и да се разликује од истините тропске године већ тако мало, да ће грегоријанско годишње рачунање, — т. зв. *нови стил*, — задовољавати постављени услов у току од скоро 4000 година. Оно је спочетка било примљено као обавезно код свију католичких а затим и код осталих европских држава.

113. Цикли Месечев и Сунчеви.

За старе је Грке, — који су синодски месец имали као основну јединицу за рачунање времена, — врло важно било да знају, да се у *19 тропских година садржи 235 тих синодских месеца*. И заиста, производ $19 \times 365.2422 = 6939.60$ разликује се од $235 \times 29.5306 = 6939.69$ мање од $\frac{1}{10}$ дела дана. Овај се деветнаесто-годишњи период, — који је *Метон* поставио у грчком календару још за 400 година до Р. Хр., — почео називати *циклом* или *кругом Месечевим*, због тога што се по истеку његовом све фазе тога небесног тела почињу да понављају опет у пређашње годишње дане; бројеви пак *R* од 1 до 19, који показују ред разних година у том циклусу добили су назив *злашних бројева*.

Започев прву гонину Месечева циклуса ($R = 1$) од његове младине (нов мц.) и запазив да се у једној години садржи 12 месеци + 10.88 дана, увидећемо, да ће у почетку друге године ($R = 2$) пораст Месечев, тј. број дана *M*, који протекне од младине, бити раван 10.88 дана; затим ће, у почетку треће, четврте и ост. година, пораст Месечев *M* бити: 2×10.88 , $3 \times 10.88 - 29.53 = 3.11$ и т. д. до $R = 20 = 1$, када ће понова изаћи $M = 19 \times 10.88 - 7 \times 29.53 = 0$. Краће речено, пораст Месечев у почетку сваке године *R*, — који се зове *епакша* те године, — добија се као остатак после деобе $(R - 1) \times 10.88$ са 29.53 или приближно, као остатак после деобе $(R - 1) \times 11$ са 30. Сам пак златни број *R* за ма коју годину нашега (новог) стила добиће се као остатак после деобе $(N + 1)$ са 19. Тако ће на пример за 1885. год. изаћи, да је $R = 5$ а $M = 14$.

Независно од године и месеца, код нас се је сачувао још из старина седмодневни период или *недеља*, који произлази из обичаја, да се дани зову именима: Сунца (☉), Месеца (☾), и планета: Марса (♂), Меркура (☿), Јупитера (♃), Венере (♀), и Сатурна (♄). При томе се разне године и месеци започињу разним данима, јер проста година има 52 недеље + 1 дан а преступна 52 недеље + 2 дана. Али, пошто се цео број дана садржи у 4 јулијанске године, то ће се тек по истеку $4 \times 7 = 28$ година почети да понављају датуми месеца у пређашњим недељним данима. Овај 28 годишњи период назван је *циклом* или *кругом Сунчевим*.

Месечев и Сунчеви циклуси служе као најглавнија основа за одређивање у ма којој години *N* ускршње недеље, која по црквеним правилима мора да дође иза првог уштапа (пуног месеца) после 21. марта (пролетње равнодневнице).

Два се правила најпростије изражавају следећом формулом Гаусовом са сталним бројевима $m = 15$ и $n = 6$ за календар Јулијански и променљивим за разна столећа за календар Грегоријански:

Нека је a остатак после деобе N	са 19	} Столећа	m	n	
„ „ b „ „ „ N	са 4		XVIII	23	3
„ „ c „ „ „ N	са 7		XIX	23	4
„ „ d „ „ „ $(19a + m)$	са 30		XX	24	5
„ „ e „ „ „ $(2b + 4c + 6d + n)$	са 7		XXI	24	5

Дан ускршње недеље: $(22 + d + e)$ марта, или $(d + e - 9)$ априла.

На пример, за 1885. годину по јулијанском је календару било: $a = 4$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 1$, $e = 1$ а датум Ускрса $22 + 2 = 24$. марта; по Грегоријанском пак календару било је: $d = 9$, $e = 5$ а датум Ускрса $14 - 9 = 5$ априла.

Као што се види, дан ускршње недеље зависи само од бројева: a , b и c , који одговарају даној години N и који се понављају: први после сваке 19., други после 4. а трећи после 7. године; услед тога дан ускршње недеље биће исти за $[N + (19 \times 4 \times 7)] = [N + 532]$ -ту годину, као и за N -ту. Тај се 532 годишњи период зове *пасхални цикл*.

Задаће:

1.) По датим у чл. 109. и чл. 110. преписима из Nautical Almanac-а одредити са тачношћу до $0^m 1$ средња времена изласка горњег краја Сунца 18. јула и заласка његова 19. јула 1884. године у Петрограду ($\varphi = 59^\circ 56' 5$, $l = 2^h 1^m 12^s$), узев да је рефракција на хоризонту $r_{90} = 35' 1$ и угловни полупречник Сунца $R = 15' 8$.

Кад узмемо за истинито петроградско подне 19. јула $D_0 = 20^\circ 44' 27'' - 1(-27'' 8) = 20^\circ 45' 23''$, наћи ћемо по формули (6.) чл. 81., при $z = 90^\circ 50' 9$, часовне угле центра Сунчевог $t = \mp 8^h 53^m 4$ а затим, — узимајући у обзир промену деклинације $\Delta D = \mp 27'' 8 t = \mp 4' 8$, — добићемо, по општим правилима чл. 25. мале поправке за t , које ће обадве изаћи равне $- 0^m 8$. На тај ће начин истинита времена рађања и заласка Сунца бити: $15^h 5^m 8$ и $8^h 52^m 6$ а средња времена: $15^h 11^m 7$ и $8^h 58^m 6$.

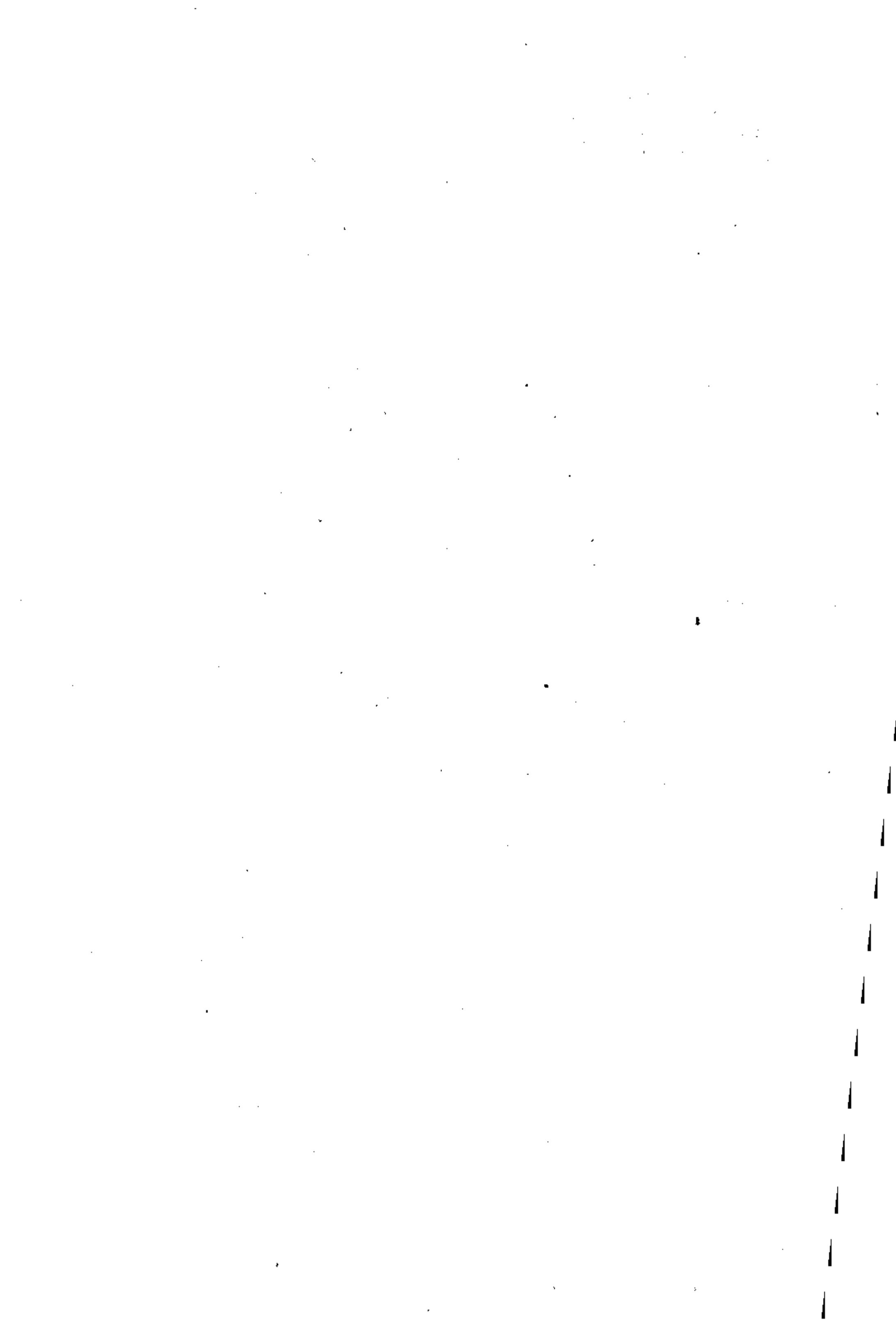
2.) 19. јула 1884. г. звездано је време у сред. гринв. подневу $S_0 = 7^h 50^m 44^s$, рехтасцензија је Месечева у 21^h сред. времена $\alpha = 5^h 52^m 24^s$ а промсна њена $\Delta \alpha$ за 1^m равна $2^s 6$. Одредити по овим подацима средње време T горње кулминације Месечеве у Гринвичу.

Ако ставимо да је $T = 21^h + \tau^m$, то ће одговарајуће звездано време бити $S = S_0 + T(1 - \mu) = 4^h 54^m 11^s + 60^s 2\tau$ а пошто треба да буде $S = \alpha = 5^h 52^m 24^s + 2^s 6\tau$, то ће се τ^m одредити из једначине:

$$(60^s 2 - 2^s 6) \tau = 58^m 13^s, \text{ одакле је } \tau = \frac{58^m 2}{57^s 6} = 1^h 0^m 7 \text{ и } T = 22^h 0^m 7.$$

3.) За колико ће се разликовати средње време T' Месечеве кулминације у Петрограду од напред нађеног времена T његове кулминације у Гринвичу?

Звездано време S_0 у сред. петроградском подневу биће мање од гринвичког за $9^s 85^m = 19^s 7$ а рехтасцензија Месечева α у моменту његове кулминације у Петрограду биће мања него у Гринвичу за $2^s 6$ $l^m = 5^m 15^s$; по томе ће за Петроград та иста поправка τ^m изаћи мања за $\frac{4^m 9}{57^s 6} = 5^m 1$ тј. $T' = T - 5^m 1 = 21^h 55^m 6$.



ГЛАВА XVII.

КРЕТАЊЕ ПЛАНЕТА.

114. Кретање планета у односу према звездама.

Разлике између екваторијалних координата неке планете и какве звезде, која је близу ње, могу се одредити или у моменту њене кулминације помоћу меридијанског круга, или, што је још zgodније и тачније, у сваком жељеном времену из микрометарских посматрања ње и звезде помоћу екваторијала (чл. 71.). У овом се другом случају веома тачно мери и угловни њен полупречник R , по коме се може судити, макар и доста грубо, о променама њенога растојања d од Земље (чл. 95. и чл. 96.). Из екваторијалних се пак координата α и δ лако добивају и еклиптичке l и b (чл. 101.).

У следећој су таблици дате те приближне координате l , b и d за планете Марса и Венере кроз 30-то дневне интервале за 1875, 1876. и 1877. годину, где су уместо дана у години дате истините дужине \odot Сунца а за јединицу растојања d примљено је средње растојање од Земље до Сунца, које одговара његовој паралакси $\pi = 8''.80$ (чл. 97.).

Ради боље пак очигледности, привидне путање ових двеју планета у односу према звездама конструисане су по координатама l и b на сл. 55., где је велики круг еклиптике развијен у праву линију. Као што се види, ове су путање



Сл. 55.

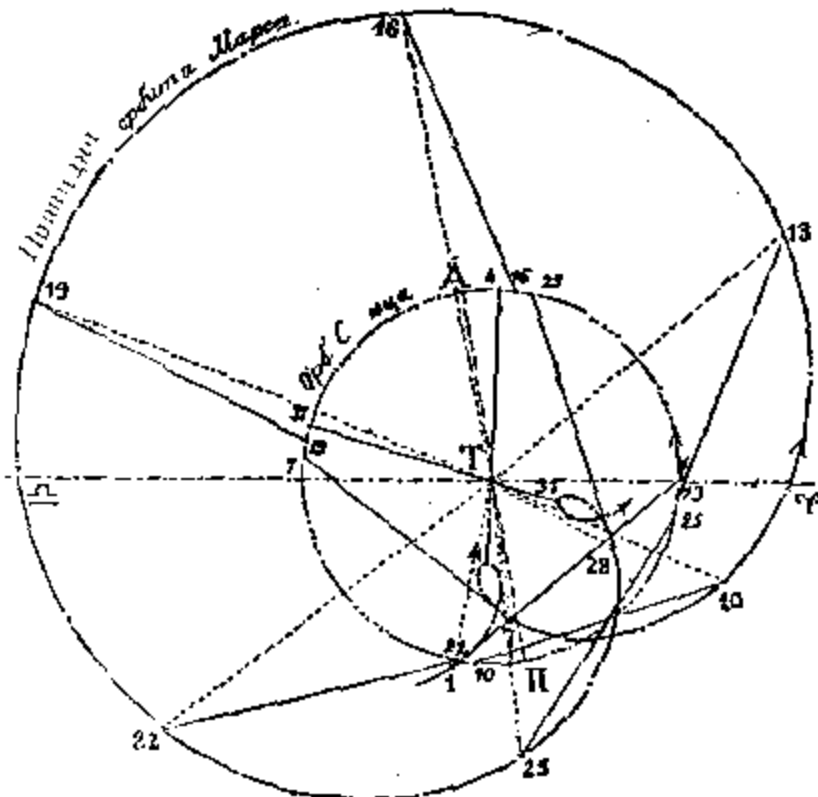
врло сложене криве, које пресецају еклиптику у тачкама Ω и Υ , које се зову *узлазни (горњи) и силазни (доњи) чворови*, и, које показују, да је обично кретање Марса и Венере *напредно (директно)* али понекад и *обрашно (ретроградно)*. Тако се премештају у односу према звездама и све остале планете без разлике,

како велике, Меркур, Јупитер, Сатурн, који се виде голим оком, тако и оне мале, телескопске. Положаји планете код s и s' , где се њена дужина у току неког времена не мења, зову се *шачке засшаја* (*стагнације*).

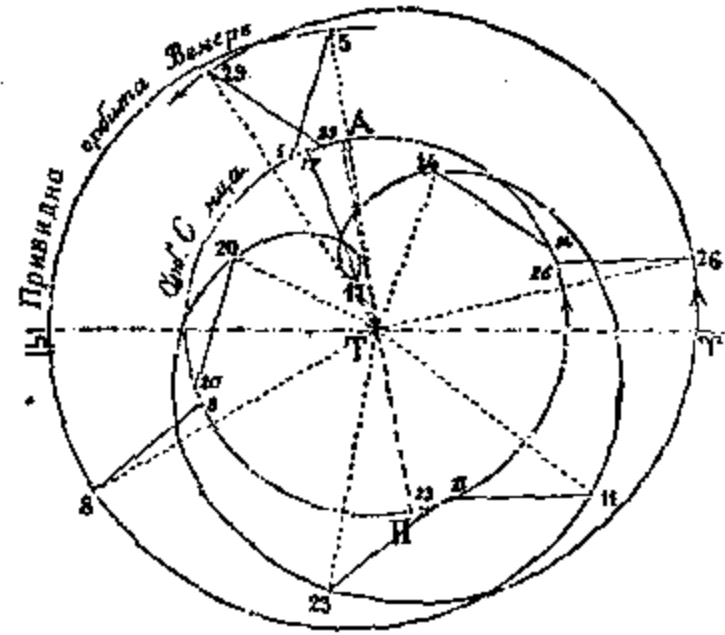
№ ☉	М а р с						В е н е р а							
	l	$l-\odot$	b	d	λ	β	r	l	$l-\odot$	b	d	λ	β	d
1	0°	258°	258°	0°	1.03	220°	0°	1.57						
2	30	270	240	-1	0.76	235	0	1.53						
3	59	274	215	-2	0.55	251	-1	0.49						
4	88	269	181	-4	0.44	268	-1	1.45						
5	116	262	146	-5	0.46	286	-2	1.42	98°	-18°	0°	1.62	73°	0° 0.72
6	145	265	120	-4	0.48	304	-2	1.40	135	-10	+1	1.69	122	+2 0.72
7	174	278	104	-3	0.74	323	-2	1.38	172	-2	+1	1.72	170	+3 0.72
8	204	297	93	-3	0.92	342	-2	1.38	210	+6	+1	1.70	219	+2 0.72
9	234	316	82	-2	1.12	1	-1	1.39	248	+14	0	1.66	267	-1 0.73
10	264	337	73	-1	1.34	19	-1	1.42	285	+21	-1	1.56	314	-3 0.73
11	295	359	64	0	1.57	37	0	1.45	323	+28	-2	1.43	2	-3 0.73
12	325	21	56	0	1.80	54	0	1.49	359	+34	-1	1.28	50	-1 0.72
13	355	41	46	+1	2.03	70	+1	1.53	35	+40	+1	1.09	98	+1 0.72
14	25	62	37	+1	2.24	85	+1	1.56	69	+44	+3	0.88	147	+3 0.72
15	54	82	28	+1	2.42	100	+1	1.60	99	+45	+3	0.64	195	+3 0.72
16	83	102	19	+1	2.55	114	+2	1.63	119	+36	+1	0.41	243	+1 0.73
17	111	121	10	+1	2.64	127	+2	1.65	113	+2	-5	0.29	291	-2 0.73
18	140	140	0	+1	2.67	140	+2	1.66	105	-35	-6	0.40	338	-3 0.73
19	169	159	350	+1	2.65	153	+2	1.67	124	-45	-3	0.61	26	-3 0.72
20	198	178	340	+1	2.56	167	+2	1.66	153	-45	0	0.84	74	0 0.72
21	229	198	329	+1	2.42	180	+1	1.65	188	-41	+2	1.05	123	+2 0.72
22	259	217	318	+1	2.22	193	+1	1.63	224	-35	+2	1.25	171	+3 0.72
23	289	236	307	+1	1.99	207	+1	1.60	260	-29	+1	1.41	220	+2 0.72
24	320	256	296	0	1.73	222	0	1.57	298	-22	0	1.54	268	-1 0.73
25	350	276	286	0	1.46	237	0	1.53	335	-15	-1	1.64	315	-3 0.73
26	20	295	275	-1	1.20	253	-1	1.49	13	-7	-1	1.71	3	-3 0.73
27	49	314	265	-2	0.95	270	-1	1.45	50	+1	-1	1.73	51	-1 0.72
28	78	331	253	-3	0.74	288	-2	1.42	87	+9	+1	1.71	99	+1 0.72
29	106	343	237	-5	0.55	306	-2	1.39	123	+17	+1	1.63	149	+3 0.72
30	135	349	214	-6	0.42	325	-2	1.38						
31	164	343	179	-6	0.38	344	-2	1.38						
32	193	338	145	-4	0.46	3	-1	1.40						

Да занемаримо сад, само за извесно време, врло мале ширине b Марса и Венере, па да конструишемо по њиховим дужинама l и растојањима од Земље d , — као што смо то раније учинили за Сунце и Месец, — саме орбите тих планета или, тачније говорећи, пројекције тих орбита на раван еклиптике. На сл. 56. конструисана је на тај начин орбита Марсова, по тачкама: 1, 2, 3, 4, 31 и 32 а на сл. 57. орбита Венерина. На њима се види, да путеви планета у простору и у односу према Земљи

представљају такође врло сложене и незатворене криве линије са листићима, који се образују увек онда, када се планета приближује Земљи. (тачка 4 и 31 код Марса и 17 код Венере).



Сл. 56.



Сл. 57.

115. Кретања планета у односу према Сунцу.

Срачунате у предњој табlici разлике ($l - \odot$), — које се зову *елонгације*, т. ј. чворовна удаљења планета од Сунца, — показују, да су периодични прелази са напредног (директног) кретања на обратно (ретроградно) у најтешњој вези са годишњим кретањем тога небесног тела. Тако се нпр. код Марса, — који се по дужини креће увек спорије од Сунца, — највеће брзине Δl напредног кретања (у тачкама *a* на сл. 55.) дешавају при $l - \odot = 0$ а обратнога (у тачкама *b*) при $l - \odot = 180^\circ$. Први се положаји планете према Сунцу зову *сједињања* (конјукције, ϵ) са њиме по дужини, а друге — *прошивсшајања* (опозиције, ξ). Венера пак час претиче Сунце, час изостаје позади њега, али се од њега не удаљује никада више од $\pm 46^\circ$ по дужини тако, да она никад и не долази у положај противстајања (опозиције) а највеће брзине Δl , како напредног (*a*), тако и обратног њенога кретања (*b*), достиже у моментима њенога сједињења (конјукције) са Сунцем ($l = \odot$); при томе прва сједињења добивају назив *горњих* а друга — *доњих*.

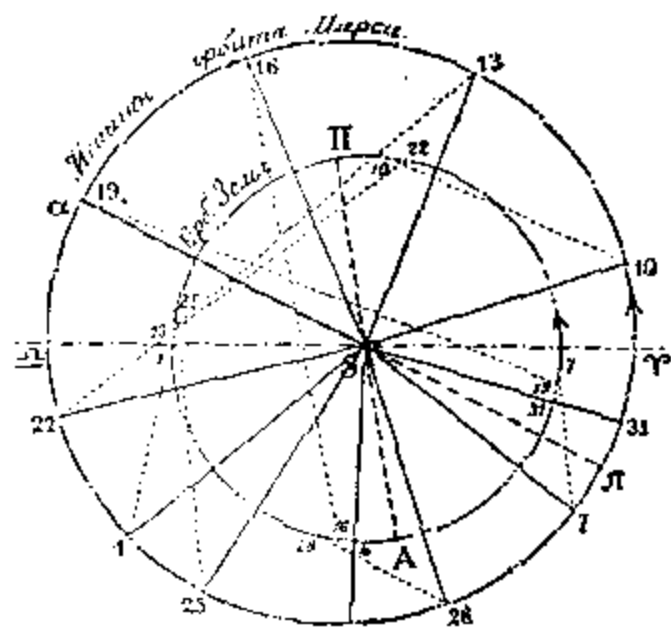
Све се планете премештају у односу према Сунцу, стално изостајући иза њега као и Марс, једино се Меркур креће слично Венери са максималним удаљењима $\pm (l - \odot)$, који понекад долазе до $\pm 28^\circ$ а понекад само до $\pm 16^\circ$.

Период времена *C* између два сукцесивна противстајања или два једнака сједињења какве планете са Сунцем зове се *синодски опшицај* њен, и та је величина више или мање промењљива. Средње се пак трајање њено добива из врло великог броја оптицаја планете око Сунца и излази:

за Меркур,	Венеру	Марс,	Јупитер,	Сатурн	
$C = 116$	584	780	398.9	378.1	средњих дана.

На сл. 56. и 57. конструисана је такође и орбита Сунчева по његовим дужинама \odot и по растојањима *TS* (чл. 103.) и на њој су нагнутим цифрама

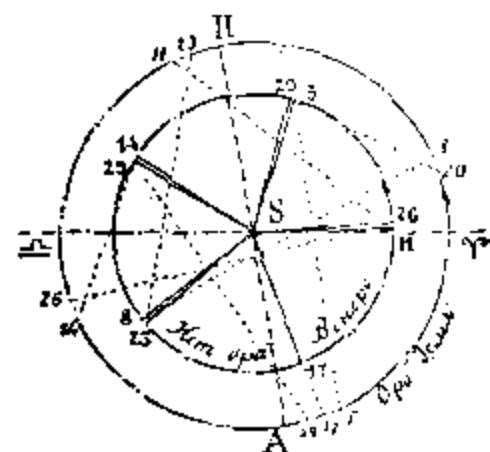
означени положаји његови, који одговарају положајима Марса и Венере на њиховим орбитама. Ту су очигледније представљена противстајања Марса (4. Т. 4, 31. Т. 31.) и разлике доњих сједињења Венере (Т. 17. 17.) од горњих (Т. 8. 8. и Т. 26. 26.). Уопште пак, ако спојимо одговарајуће положаје планете и Сунца правим линијама (1. 1.) и (4. 4.) и т. д., то ћемо запазити, да су та растојања (1. 1.), (4. 4.) и т. д. увек приближно једнака, т. ј. да врло сложено кретање планете у односу према Земљи Т, излази врло просто у односу према Сунцу. То ће се још боље разјаснити на сл. 56. bis и 57. bis, где су од Сунца S повучене праве (S. 1.), (S. 4.) и ост. паралелне и једнаке са пређашњим (1. 1.), (4. 4.) и ост. и где се види, да се Марс и Венера крећу према Сунцу по затвореним кружним орбитама и то увек у напредном правцу са приближно сталном угловном брзином. Одатла



Сл. 56. bis.

излази закључак, да њихове орбите у односу према Земљи Т (сл. 56. и 57.) треба да буду епициклоиде, т. ј. криве, које постају кретањем тачке (планете) по кругу, чији се центар (Сунце) креће такође по кругу око непомичног центра (Земље).

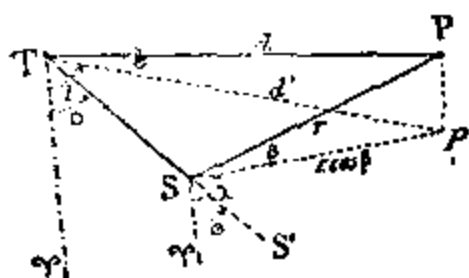
Али, ако се кроз S (сл. 56. bis и 57. bis) повуку праве (S. 1.), (S. 4.) и т. д. подједнаке и паралелне са (1. Т.), (4. Т.) и т. д. (сл. 56. и 57.), т. ј. ако замислимо да се Земља креће око Сунца а не Сунце око Земље, онда ће се положај планете према Земљи одредити правим линијама (1. 1.), (4. 4.) и т. д., које су једнаке и паралелне са пређашњим правим (Т. 1.), (Т. 4.) и т. д. Из овога излази, да је у геометриском смислу потпуно све једно, да ли ће се Земља сматрати као непомична а Сунце и све планете да се око ње крећу, или, да је Сунце непомично а Земља као и све ост. планете да око њега оптичу у смислу напредног кретања.



Сл. 57. bis.

116. Хелиоцентричке координате планета.

Убедивши се сада, да се планете крећу несравњено простије у односу према Сунцу, да узмемо њега сад за почетак координата па да пређемо са геоцентричких координата l, b и d какве планете на, сличне са њима, хелиоцентричке.



Сл. 58.

Неке су Т, S и P (сл. 58.) једновремени положаји Земље, Сунца и планете, нека је затим, SГ правац који је паралелан са линијом равнодневица ТГ а p — пројекција P на раван еклиптике. Угао $\sphericalangle \Gamma Sp = \lambda$, који наличи на $\sphericalangle \Gamma Tp = l$, биће хелиоцентричка дужина планете а угао $\sphericalangle PSp = \beta$ — хелиоцентричка ширина њена. Означивши дужину Сунца т. ј. угао $\sphericalangle \Gamma TS = \sphericalangle SS'$ са \odot , растојања TS и SP са R и r а пројекцију $Tp = d \cos b$ и $Sp = r \cdot \cos \beta$ са d' и r' , — добићемо из троугла TSp:

$$r' \sin (\lambda - \odot) = d' \sin (l - \odot) \text{ и } r' \cos (\lambda - \odot) = d' \cos (l - \odot) - R,$$

одакле је

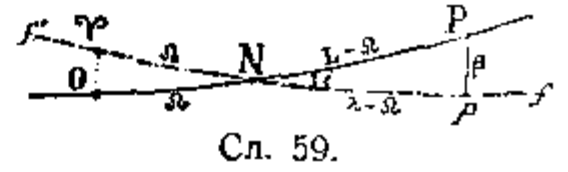
$$\operatorname{tg} (\lambda - \odot) = \frac{d' \sin (l - \odot)}{d' \cos (l - \odot) - R} \text{ и } r' = \frac{d' \cdot \sin (l - \odot)}{\sin (\lambda - \odot)} = \frac{d' \cdot \cos (l - \odot) - R}{\cos (\lambda - \odot)} \dots (1.)$$

а затим, из троуглова PSp и PTp излази, да је:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Pp}{r'} = \frac{d \sin b}{r'} \quad \text{и} \quad r = \frac{r'}{\cos \beta} \quad \dots \dots \dots (2.)$$

По себи се разуме, да ће се хелиоцентричка дужина саме Земље увек разликовати од хелиоцентричке дужине \odot за $\pm 180^\circ$.

На тај начин, по формулама (1.) и (2.) и по даним l, b, d, \odot и R , добијамо стављене у таблици чл. 114. хелиоцентричке координате Марса и Венере λ, β и r а по њима се одмах убеђујемо, — као пређе за орбите Суња и Месеца, — да се обе те планете крећу у равнима, које пролазе кроз Сунце. Нека на небесној сфери, — која је замишљена из центра Сунчева S , — велики круг ff' представља еклиптику (сл. 59.), тачка Υ — правац $S\Upsilon$ паралелан са $T\Upsilon$, велики круг ONP — раван орбите планетине а тачка N — правац пресека те равни са еклиптиком. Означивши са $\delta\Omega$ хелиоцентричку дужину узлазног чвора N , т.ј. угао $\sphericalangle \Upsilon SN = \Upsilon N$ а са i нагиб равни орбите према еклиптици, т.ј. угао $\sphericalangle PNf$, — имаћемо за два ма која положаја планете P и P' (из правоуглих троуглова PNp и $P'Np'$ са катетама $Np = \lambda - \delta\Omega$, $Pp = \beta$, $Np' = \lambda' - \delta\Omega$ и $P'p' = \beta'$) два идентична израза за угао i :



Сл. 59.

$$\operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin (\lambda - \delta\Omega)} = \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\sin (\lambda' - \delta\Omega)} \quad \dots \dots \dots (3.)$$

који ће и послужити за срачунавање тражених $\delta\Omega$ и i . Јасно је, да је за најтачније одређивање $\delta\Omega$ најбоље узети положај планете P са ширином $\beta = 0$, када ће изаћи, да је просто $\delta\Omega = \lambda$ или $\delta\Omega = \lambda - 180^\circ$; за одређивање пак i најбоље је узети положај њен P' са дужином λ' блиски $\delta\Omega = \pm 90^\circ$, када ће изаћи, да је $i = \pm \beta'$. Тако ће се нпр. за Марс добити, да је $\delta\Omega = 48^\circ$ и $i = 1^\circ 8'$ а за Венеру $\delta\Omega = 75^\circ$ а $i = 3^\circ 4'$.

Замислимо најзад, — као што смо то већ чинили за Месец (чл. 106.) — у самој равни орбите планетине правац SO , који образује са SN угао $\sphericalangle NSO = NS\Upsilon = \delta\Omega$, па од тачке O да рачунамо дужине на орбити т.ј. $\sphericalangle OSP = OP = L$. Тада ће се те дужине срачунати (сл. 59.) овако:

$$\operatorname{tg} (L - \delta\Omega) = \frac{\operatorname{tg} (\lambda - \delta\Omega)}{\cos i} \quad \dots \dots \dots (4.)$$

а због мале величине угла i и на основу формуле (d') чл. 20., још простије овако:

$$(L - \lambda)'' = \frac{i'^2}{229} \sin 2 (L - \delta\Omega) = \frac{i'^2}{229} \sin 2 (\lambda - \delta\Omega) \quad \dots \dots \dots (4')$$

те ће заједно са растојањима r послужити за тачније одређивање орбите и закона кретања по њој. На тај се начин открива на кружној орбити Марсовој, са полупречником $\frac{1}{2} \alpha \pi = 1.52$ (сл. 56. bis), довољно велики ексцентрицитет

$$e = \frac{S\alpha - S\pi}{\alpha\pi} = \frac{1}{11} \quad \text{у правцу } OS\pi = \Pi = 334^\circ$$

а дневне промене дужине L (или λ) да се разликују, — у близини перихела π ($\Delta L_p = 0^\circ 63$) и афела α ($\Delta L_a = 0^\circ 43$) — од средње промене $\Delta L = 0^\circ 53$ за $\pm \frac{1}{53}$ део те промене ΔL . Меркур се још више одликује ексцентричношћу

орбите и неравномерношћу кретања по њој; код кога је $\frac{1}{2} \alpha \pi = 0.39$ а $e = \frac{1}{5}$. Ексцентрицитет пак кружне путање Венерине, — са полупречником 0.72, — скоро је не приметан а кретање се њено око Сунца врши скоро равномерно са дневном угловном брзином $\Delta L = 1^{\circ}60$.

Сад је јасно, да Меркур и Венера не могу доћи у положај противстајања са Сунцем, јер су те две планете увек ближе Сунцу него ли Земља. Отуда је за њих и дошао назив *нижих* или *унутрашњих*, за разлику од свију осталих, *горњих* или *спољњих*, које су даље од Сунца него ли Земља.

117. Звездани оптицаји планета.

Период времена T , после којег се планета враћа на своје пређашње хелиоцентричке дужине (L или λ), зове се *шропски оптицај* њен; за Марс излази да је он, по табlici чл. 114., раван приближно 687 ср. дана а за Венеру 225 ср. дана. Трајање пак S потпунога оптицаја планете око Сунца (у односу према звездама некретницама), — услед обратног кретања еквинокцијалне линије за $0''14$ за 1 ср. дан, — добиће се по познатоме T из израза

$$n = n_t - 0''14$$

у којем су $n = \frac{360^{\circ}}{S}$ и $n_t = \frac{360^{\circ}}{T}$ средња дневна покретања планета у односу према звездама и према еквинокцијалној линији.

Овај се период S зове *звездани оптицај* планете. Он је скоро непромењљив, као и T , и, може се наћи по средњем трајању синодског оптицаја C планете, који се изводи из непосредних посматрања сједињења и противстајања њених према Сунцу (чл. 115.). И заиста, ако означимо трајање звездане године (365.2564 ср. дана) са S_0 а средњи дневни покрет Земље око Сунца ($\frac{360^{\circ}}{S_0} = 59'8''2$) са n_0 , онда ће се средњи дневни покрет планете према Земљи изразити разликом $s = n - n_0$ или пак $s = n_0 - n$; због тога ће уопште бити:

$$n = n_0 \pm s \text{ или } \frac{1}{S} = \frac{1}{S_0} \pm \frac{1}{C} \dots \dots \dots (5.)$$

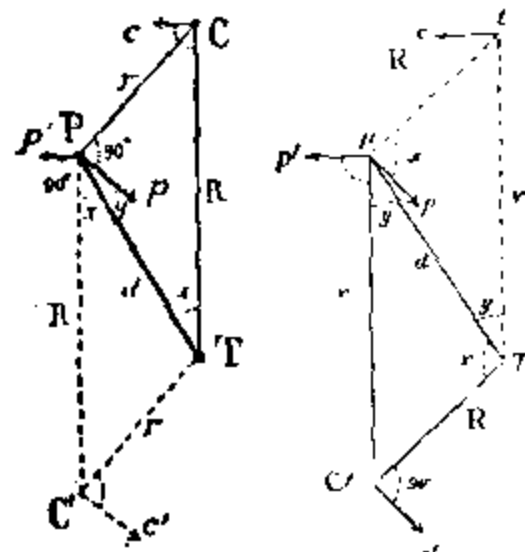
где за доње планете, — код којих је $n > n_0$, — треба узети знак $+$ а за горње: знак $-$. На тај ће се начин, по даним горе величинама C , добити, да је:

за	Меркур,	Венеру,	Марс,	Јупитер,	Сатурн
S (у ср. данима) =	88.0	224.7	687.0	4333	10759
S (у зв. годинама) =	0.241	0.615	1.881	11.86	29.46

108. Теорија епициклова.

Користећи се, за посматрања планета, садањим тачним астрономским инструментима, помоћу којих се могу одређивати и паралаксе, и угловни полупречници дискова тих небесних тела, није нам било тешко да саставимо макар и приближну, али ипак довољно јасну представу о путањама њиховим у простору, у односу према Земљи и према Сунцу. У ствари пак, астрономија је постепено дошла до тих истих представа и закључака још и пре проналаска дурбина, када се, због грубих средстава за посматрања, није могло ни мислити о непосредном одређивању растојања до планета. Због тога ће бити интересно и поучно, да се зачас зауставимо и да бацимо макар и најповршнији поглед на историјско развиће питања о истинитим путањама тих тела за време пређашњих, више или мање превратних појмова о механизму васионе уопште.

Објашњења свију уопште кретања небесних тела, која се опажају са Земље, оснивала су се код старих грчких астронома на двама поставкама: 1.) да је сама Земља потпуно непомична и 2.) да кретања небесних тела око ње треба да буду правилна, т. ј. да се врше по круговима и равномерно. На основу тога, запажена неравномерност промена Сунчевих дужина објашњавана је ексцентричношћу његове орбите (чл. 103.). За објашњење пак тачака застоја (стагнација) и обратних (ретроградних) кретања какве планете P (сл. 60.) примљено је било, да се она креће равномерно по кругу некојега полупречника $CP = r$, свршавајући по њему потпуни свој оптицај за време S (чл. 117.), и, да се у исто време и сâм центар C тога круга креће око непомичне Земље T по кругу полупречника $TC = R$ са брзином Сунца, т. ј. свршавајући потпуни оптицај у току једне звездане године S_0 . Први се круг звао *епицикл* а други — *деферент*. На тај су се начин, — при одговарајућем односу $\frac{r}{R}$ полупречника



Сл. 60.

Сл. 60. bis.

епицикла и деферента, — сва кретања планета, у односу према звездама и Сунцу, доста добро поклапала са посматрањима а сам се пут планетин добијао у облику онакве исте *епициклонде* (сл. 56. и 57.), какву она и описује у односу према Земљи T .

Ова је теорија епициклова била изложена у делу „*Алмагест*“ (што значи „велики построј“) александријског астронома *Птоломеја* (100 г. до Р. Хр.) те је добила назив *Птоломејеве системе*. Односи $\frac{r}{R}$, — који су задовољавали посматране дужине планета — излазили су приближно овакви:*)

за Меркур, Венеру, Марс, Јупитер, Сатурн

$$\frac{r}{R} = 0.39 \quad 0.72 \quad 1.52 \quad 5.2 \quad 9.5$$

*) У самој ствари у тој се теорији узимало, да се свака планета креће по своје епициклу са угловном брзином Сунца, т. ј. за време S_0 , а центар епицикла да се креће око Земље за време S ; при чему се однос полупречника епицикла и деферента добијао изврнуто, т. ј. као $\frac{R}{r}$. Али стварне разлике ту нема са оним што смо рекли, јер, при овој представи о кретању планете, положај ће се центра њенога епицикла C' (сл. 60. bis) одредити, за сваки жељени момент, линијом TC' , која је једнака и паралелна са пређашњом $CP = r$; положај пак планете на овоме епициклу одредиће се линијом $C'P$, која је једнака и паралелна са пређашњом $TC = R$; на тај се начин неће изменити нити правац TP , нити пак растојање $TP = d$, од којих зависи облик епициклоиде.

Сами пак односи $\frac{r}{R}$ за обе доње планете одређују се непосредно помоћу њихових максималних угловних удаљења од Сунца $x = \pm (l - \odot)$ чије су средње величине: 23° за Меркур и 46° за Венеру, јер је тада $\angle TPC = 90^\circ$ а $\frac{r}{R} = \sin x$. За сваку пак од горњих планета тај се однос одређује по њеној елонгацији $\angle PTC' = x = \pm (l - \odot)$, (сл. 60. bis) која се опажа у моментима њених застоја (стагнација). И заиста, дневна померања планете $Pp = C'c' = Rn$ и $Pp' = Cc = r \cdot n_0$ (сл. 60. bis) треба да се виде тада са Земље T под једнаким углима и да се узајамно поништавају, а, пошто прво од тих померања образује са правцем TP угао $\angle pPT = x - 90^\circ$ а друго $\angle p'PT = 90^\circ + y$, то треба да буде

$$-R \cdot n \cos x = r \cdot n_0 \cos y, \text{ где је } \sin y = \sin \angle CTP = \frac{R}{r} \cdot \sin x;$$

кад се пак исклучи y из тих двеју једначина, изаћи ће

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \sin^2 x + \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 \cos^2 x = \sin^2 x + \left(\frac{S_0}{S}\right)^2 \cos^2 x.$$

Ако се овде ставе добивене из посматрања средње величине: $x = 136^\circ$ за Марс $x = 116^\circ$ за Јупитер и $x = 109^\circ$ за Сатурн, то ће се и добити даље наведени односи $\frac{r}{R}$.

Промене су се привидних ширина b планета потпуно добро објашњавале тиме, што се равни епициклова нису поклапале са равни еклиптике. Када су се пак накупила и побољшала посматрања и почела запажати код некојих планета, на пример код Марса, *неједнакости* ($l - l_0$) међу стварним дужинама l и онима l_0 , које произлазе из ове теорије, — што је указивало управо на неравномерно кретање планете по њеном епициклу, — то су прибегавали епициклима другог степена, допуштајући на име, да се по првом епициклу равномерно креће центар другога епицикла а по овоме тек и сама планета.

119. Коперникова система.

После *Птоломеја* наступа доба неповољно за даље развиће астрономије, исто тако као и за остале науке, а теорију епициклова су продужили да подржавају Арабљани, који су се са успехом бавили астрономским посматрањима у Шпанији. Тек у почетку XVI века поколебали су се основи античних погледа на свет, када је Коперник доказао (у своме делу „*De revolutionibus orbium coelestium . . .*“), да се привидно дневно кретање небесних тела објашњава просто обртањем Земље око њене осе, као што се објашњује и привидно годишње кретање Сунца и врло сложене орбите планета кружним окретањем њиховим као и саме Земље око непомичног Сунца.

Са геометријске тачке гледишта овај је прелаз са системе епициклова на Коперникову врло прост, као што смо већ видели у чл. 115. Бројеви Птоломејеве теорије, који су изражавали односе $\frac{r}{R}$ у чл. 118. и угловне брзине $n = \frac{360^\circ}{S}$ кружења разних планета по њиховим епициклима у чл. 117. остали су исти; само се сада под R и r почело подразумевати средње растојање Земље и планета од Сунца а под S_0 и S звездани њихови оптицаји око њега. Еклиптика (в. чл. 100.) је постала непроменљива раван, у којој се окреће Земља око Сунца. Путање пак свију планета ма да су и постале у односу према Сунцу *равне и затворене* криве, у неколико нагнуте према еклиптици, оне су ипак остале у пређашњем облику кружних епициклова пропраћених другостепеним мањим епициклима ради објашњења неравномерности кретања по њима.

Измене у деклинацијама Сунца, разна доба године која свуд произлазе (чл. 100. и чл. 104.), раније равнодневице (чл. 101.) и друге астрономске појаве објашњују се у Копериковој системи исто тако просто, као и при представи о непомичној Земљи. Треба само узети, уместо пређашње ексцентричне (чл. 103.) путање Сунца, тачно такву исту путању Земље око Сунца и замислити, да Земљина обртна оса не остаје стално у истоме правцу у простору већ да описује на небесној сфери, око непомичног пола еклиптике, мали круг полупречника од $23^\circ 27'$ у току од 26000 година.

120. Тихо Брахе-ова система и његова посматрања.

Ма да су основна становишта Каплерова, — да се Земља окреће око своје осе и да она кружи око Сунца, — била чисто теорна и ма да се у то време нису могла доказати никаквим фактима, ипак је и сама та простота целокупног погледа на свет, — која из њих произлази, — била већ довољна, да се је убеђење у њихову истинитост почело постепено да учвршћује.

Остала је зар само једна околност, која се није могла лако да помири са другим од ових становишта, наиме, требало је раширити до невероватно огромних димензија сву васиону а међутим са разних се положаја Земље у простору нису откриле ни најмање промене у правцима на звезде некретнице. То је и изазвало чак и изврсног астронома Тихо-Брахе-а, из краја XVI века, да предложи своју властиту систему, која се разликовала од Коперникове само у томе, што су се по њој све планете окретале око Сунца, али се и оно заједно са свима њима окретало око непомичне Земље.

Тихо Брахе је био конструисао на својој опсерваторији у Данској нове инструменте врло великих димензија и пронашао оштроумне методе за посматрања, чиме је повећао тачност у одређивању ректасцензија и деклинација звезда од највишег ступња, каква је само могућна била без помоћи телескопа, — на име, до 2 лучне минуте. — Плод његових неуморних двадесетогодишњих радова био је изврсни каталог више од 1000 звезда и огромни број тачних одредаба места разних планета према тим звездама. Али, он сâм није стигао да обради тај драгоцен материјал а 1601. он је завештао, да то учини млади немачки математичар Кеплер.

Како је управо започео Кеплер тај посао и до каквих је значајних и општих закључака дошао о кретањима планета, видећемо у наредној глави.

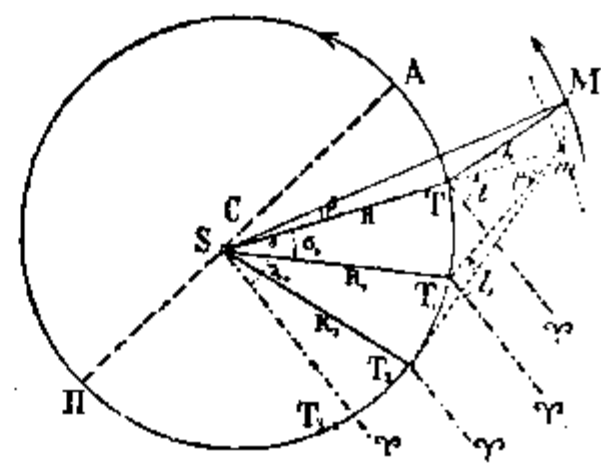


ГЛАВА XVIII. КЕПЛЕРОВИ ЗАКОНИ.

121. Испитивање орбите Земљине.

Приступивши својим испитивањима о кретању планета на основу Тихо-Брахе-ових посматрања, Кеплер је био допустио само, да се све оне, исто тако као и Земља, крећу према непомичном Сунцу по неким равним затвореним кривим; непромењљиво пак трајање S звезданог оптицаја, — по истеку којег је свака од њих требала да дође у свој пређашњи положај у простору, — изводило се при томе са изванредном тачности по средњем (за више од 15 векова) трајању њенога синодског оптицаја S (чл. 117.). За срачунавање растојања планета од Земље и од Сунца у разна времена, њему је предстојало, да испита спочетка, што је могуће тачније, орбиту саме Земље, што је он и извршио сљедећом оштроумном методом, благодарећи многобројности посматрања планете Марса, која је извршио Тихо-Брахе.

Замислимо једно од Марсових противстварања (опозиција) M (сл. 61.), када се пројекција m те планете на равни еклиптике налази са Земљом T и Сунцем S на истој правој и када се геоцентричка дужина Марсова $\sphericalangle \gamma Tm = l$ разликује од Сунчеве дужине $\sphericalangle \gamma TS = \odot$ тачно за 180° . Такав се момент одређује интерполовањем Тихо-Брахе-ових посматрања најближих противстајању (опозицији); затим се за тај момент, — поред одговарајућих му вредности за l и \odot , — налази из посматрања још и геоцентричка ширина планете $M T m = b$. После својега звезданог оптицаја $S = 686.95$ дана, т. ј. у моменту $t_1 = t_0 + S$ Марс ће поново доћи у ту исту тачку M на својој орбити; Земља ће пак бити у T_1 , тада ће се из посматрања добити $\sphericalangle \gamma T_1 m = l_1$ и $\sphericalangle \gamma T_1 S = \odot_1$. На тај ће начин у троуглу $ST_1 m$ бити познати угли $\tau_1 = \sphericalangle ST_1 m = \odot_1 - l_1$ и $\sigma_1 = \sphericalangle m S T_1 = \odot - \odot_1$ па отуд и трећи угао $\mu_1 = 180^\circ - \tau_1 - \sigma_1$, који се уопште зове *годишња паралакса планете*. Ако се означе непозната нам растојања Sm , ST и ST_1 са ρ , R и R_1 , имаћемо



Сл. 61.

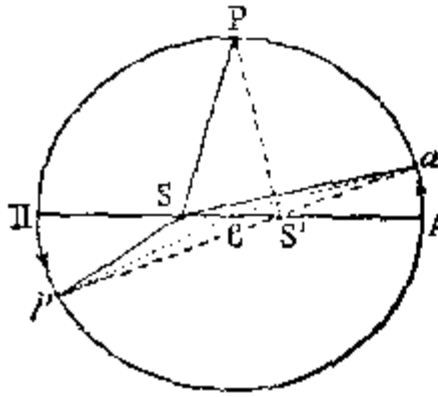
$$\frac{R_1}{\rho} = \frac{\sin \mu_1}{\sin \tau_1} \dots \dots \dots (1)$$

Исто ће се тако добити за друге моменте $t_2 = t_0 + 2S$, $t_3 = t_0 + 3S$ и т. д., када се Земља буде налазила у T_2 , $T_3 \dots$ на растојањима од Сунца $T_2 S = R_2$, $T_3 S = R_3$ и т. д., да је

$$\frac{R_2}{\rho} = \frac{\sin \mu_2}{\sin \tau_2}, \quad \frac{R_3}{\rho} = \frac{\sin \mu_3}{\sin \tau_3} \text{ и т. д.}$$

Разуме се по себи, да под дужинама $l_1, l_2, l_3 \dots$ и $\odot_1, \odot_2, \odot_3 \dots$ треба подразумевати не истините дужине планете и Сунца у моментима $t_1, t_2, t_3 \dots$, већ пренете заједно са l и \odot на једну и исту почетну линију равнодневица, која је била на пример у моменту t_0 .

Многобројне величине R_1, R_2, R_3, \dots које су се изразиле на тај начин са великом тачношћу $\left(\frac{1}{2000}\right)$ једном и истом јединицом ρ , показале су Кеплеру, да је Земљина орбита круг (чл. 103.) са центром C , који стоји на оном истом правцу PSA (сл. 62.), где су дневне промене Земљиних хелиоцентричних



Сл. 62.

дужина L највеће и најмање, наиме $PSp = \Delta L_p = 61'.2$ и $ASa = \Delta L_a = 57'.2$. Али пошто се ексцентрицитет CS показао раван $\frac{1}{60}$ средњег растојања од Сунца до Земље $R_0 = \frac{1}{2} (PS + AS)$ а ΔL_p и ΔL_a се разликовале од средње дневне промене $\Delta L_0 = 59'.2$ за $\pm \frac{1}{30}$ део ове промене, то је значило, да се Земља креће са непроменљивом брзином ΔL_0 не око центра C већ око тачке S' , која се налази од

њег на растојању $CS' = CS = \frac{1}{60} R_0$ као и Сунце, само с друге стране. И заиста, тако су се потпуно лепо објасниле промене дужине ΔL и за све остале дане у години. У осталом, таква се тачка S' узимала још и пре Кеплера, ради објашњења привидне неравномерности кретања некојих планета и звала се *тачка једнакости*.

Тако је Кеплер могао, да за сваки жељени момент t израчуна са овом неопходно потребном тачности како хелиоцентричку дужину Земље $L = \odot \pm 180^\circ$, тако и растојање њено R у деловима напред реченога њенога средњег растојања R_0 од Сунца. Интересантно је још и то, што је Кеплер, при одређивању правца апсидних линија т. ј. дужине Π перихела за Земљу, могао запазити, — благодарећи тачности и многогодишњим посматрањима Тихо-Брахеовим, — поступно рашћење те дужине Π у средњем за $11''.5$ годишње (чл. 104.)

122. Испитивање орбите Марсове.

Ако ставимо у једначини (1.) познату за момент t , величину R_1 , то ће се из ње изразити, — у тим истим јединицама R_0 , — и величина ρ а затим је лако одредити, за момент t_0 противстајања Марсовог, и хелиоцентричку ширину његову $Msm = \beta$ па и само растојање његово од Сунца $SM = r$ (сл. 61.), јер из троуглова Msm и MTm излази, да је:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Mm}{\rho} = \frac{\rho - R}{\rho} \cdot \operatorname{tg} b \text{ и } r = \rho \cdot \sec \beta \dots \dots \dots (2.)$$

Што се тиче хелиоцентричке дужине Марсове $\sphericalangle \sphericalcap Sm = \lambda$, то ће она у моменту t_0 бити просто равна геоцентричкој дужини његовој l .

Тако је Кеплер могао поступити само за 8 разних противстајања Марса, које је успео да посматра Тихо-Брахе. Нешто сложеније, али потпуно на тим истим основама, — а наиме по ма каквом пару посматрања Марса (при положајима Земље у T_1 и T_2) раздвојених једно од другог интервалом времена $S = 686.95$ дана, — Кеплер је одређивао (из троуглова ST_1T_2 , T_1T_2m и ST_1m) растојања $\rho = Sm$ а затим и координате λ , β и r за врло много положаја те планете на њеној орбити; после овога, као што је речено у чл. 116, он је добио вредности за Ω и i , које одређују раван орбите, и, најзад, дужине L

у тој равни. Тада се по тачно нађеним координатама L и r , истинити пут Марса показао не као круг већ као приметно овална а наиме елиптична крива са дужом полуосом $a = \frac{1}{2} (SP + SA) = 1.524 R_0$ и са ексцентрицитетом $e = \frac{SC}{a} = \frac{1}{2a} (SA - SP) = \frac{1}{11}$ (сл. 62.); само пак Сунце било је једна од жижа те елипсе.

Много је труда утрошио Кеплер на безуспешно изналагање тачке једнакости на дужој оси PA те елипсе, из које би се кретање Марса показало равномерно са средњом угловном брзином $\Delta L_0 = \frac{360^\circ}{686.95}$ за 1 дан.

Уосталом, при обичном њеном положају у S' на растојању $S'C = SC$, за дневна померања планете Pp у перихелу и Aa у афелу и одговарајућих им углова при центру Сунчеву $\Delta L_p = \sphericalangle PSp$ и $\Delta L_a = \sphericalangle ASa$ излазило је

$$PS'p = AS'a = \Delta L_0$$

$$\Delta L_p = \frac{Pp}{SP} = \frac{PS' \cdot \Delta L_0}{PS} = \frac{AS \cdot \Delta L_0}{PS}, \quad \Delta L_a = \frac{Aa}{AS} = \frac{AS' \cdot \Delta L_0}{AS} = \frac{PS \cdot \Delta L_0}{AS},$$

па према томе:

$$\frac{\Delta L_p}{\Delta L_a} = \frac{(AS)^2}{(PS)^2}$$

т. ј. угли, које планета прелази у току 1 дана близу перихела и афела, обратно су пропорционални са квадратима њенога растојања од Сунца. Када је Кеплер то запазио, и пошто се убедио да та пропорционалност постоји за промене ΔL и на свима осталим местима орбите, он је дошао до дефинитивног закључка, да при кретању планете остаје увек непромењљива вредност производа $(PS)^2 \Delta L_p = (AS)^2 \Delta L_a = r^2 \Delta L$, т. ј. дупле површине, коју описује радиус вектор за јединицу времена.

123. Истинити закони кретања планета.

Све напред изложено, што је откривено на кретању Марса, показало се да је тачно и за Земљу и да ниуколико не противуречи пређе нађеном њеном кретању по кругу; јер је, због малог ексцентрицитета $e = \frac{1}{60}$, елиптичност њене орбите била раније једва тек приметна (задаћа 2. на крају ове главе). Убедивши се контролом и на другим планетама (Јупитеру и Сатурну) у истинитост и универсалност тога карактерног кретања, који је откривен код Марса, — Кеплер је дошао до ова два општа закона:*)

- 1.) Орбита је сваке планете елипса, у чијој се једној жижи налази Сунце.
- 2.) Површина елиптичког сектора, који описује радиус вектор и планете, расте пропорционално са временом.

Али је њега занимало још и питање о међусобној вези кретања свију планета. Проникнут идејом потпуне хармоније у природи, он се старао, да запази сличност разних средњих растојања планета од Сунца, — т. ј. полуоса a њихових орбита, — спочетка са хармоничним односима основних музичких тонова, затим са полупречницима сфера описаних и уписаних око свега пет могућних правилних полиједара; али, из свега тога није ништа тачно излазило. Напоследку, срањујући ове полуосе a са трајањем S оптицаја планета и запазив

*) Кеплер их је објавио 1609. г. у делу „Astronomija nova astrologicae sue physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellae Martis ex observationibus Tychoonis Brahe; plurium annorum pertinaci studio elaborata Pragae.“

да односи $\frac{a}{S}$, који су пропорционални линеарним брзинама кретања, расту са приближењем ка планети, њему је синула мисао о сили, која као да излази из Сунца и као да управља кретањима свију њих. Односи $a^2 : S$, као што показује даље таблица, већ су опадали са смањењем a ; односи пак $a^3 : S^2$ показали су се тачно једнаки код свију планета:

за	♃	♀	♄	♅	♁	♁
$a = 0.3871$	0.7233	1	1.524	5.203	9.539	
$S = 0.2408$	0.6152	1	1.881	11.86	29.46	
$a : S = 1.607$	1.176	1	0.810	0.439	0.324	
$a^2 : S = 0.622$	0.850	1	1.235	2.282	3.088	
$a^3 : S^2 = 1.000$	1.000	1	1.000	1.001	1.000	

На тај је начин откривен *шрећи закон* кретања планета,^{*)} т. ј.

3.) *Квадраши трајања оптицаја планета пропорционални су са кубовима средњих растојања њихових од Сунца,*

Огромни значај последњег закона је очевидан: на његовој се основи непосредно одређује дужа полуоса a оне елипсе коју описује планета, ако је познато трајање S њенога звезданог оптицаја; исто тако и обратно.

Тако су на пример, за најудаљеније од Сунца велике планете, Урана (♅) и Нептуна (♆), — који су откривени помоћу дурбина тек у новија времена, — дуже полуосе орбита a равне: 19.18 и 30.06; према томе за Уран излази, да је $S = (19.18)^{2/3} = 84.0$ а за Нептун $S = (30.06)^{2/3} = 164.8$ звезд. година.

При томе излази, да су сва три закона Кеплерова тачни и за комете, које припадају Сунчевој системи и које се крећу по врло развученим елиптичким орбитама. Тако ће, на пример, за телескопску комету Енке, — која се периодички враћа на свој перихел $SP = a(1 - e) = 0.341$ по истеку времена од $S = 3.305$ зв. године, — бити $a = (3.305)^{3/2} = 2.218$; због тога ексцентрицитет њене орбите излази раван $1 - \frac{0.341}{2.218} = 0.846$. По тим се истим законима крећу, најзад, око планета и њихови пратиоци (гл. XX).

124. Одређивање места планете на њеној орбити.

Ако је e ексцентрицитет и ако су a и $b = a\sqrt{1 - e^2}$ полуосе елипсе, коју описује планета, то ће се дупла површина σ , коју прелази њен радиус вектор у току t ср. дана, изразити, на основу 2. закона Кеплеровог, овако:

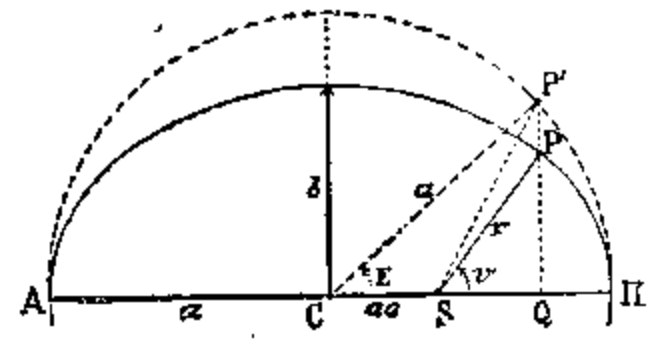
$$\sigma = 2 \frac{\pi ab}{S} = n a^2 \sqrt{1 - e^2} \dots \dots \dots (3.)$$

где је S потпуни оптицај планете (у средњим данима) а $n = \frac{2\pi}{S}$ средња угловна брзина њенога кретања око Сунца, која се, на основу 3. закона Кеплеровог, може добити у лучним секундима по истој таквој брзини кретања Земље $n'' = \frac{2\pi}{365 \cdot 2564} = 59'8''.193$ на овај начин:

$$n'' = \frac{n_0''}{a^{3/2}} \dots \dots \dots (4.)$$

^{*)} Дело Кеплерово: „*Harmonices mundi libri V.* 1619“.

Узмимо, да је планета P (сл. 63.) прошла кроз свој перихел Π у моменту t_0 па да видимо, како ће се за свако друго време t срачунати истинита њена аномалија $\sphericalangle PSP = v$ и радиус вектор $SP = r$ по даној површини пређенога елиптичког сектора $(\text{ПСП}) = \frac{1}{2} \sigma (t - t_0)$. Ову је задаћу *Кеилерову* решио он сâм, на основу познатих геометријских особина елипсе, на овај начин:



Сл. 63.

Кад опишемо из центра елипсе C круг полупречником $C\Pi = CA = a$, кад спустимо на $C\Pi$ управну PQ , која сече круг у тачци P' , и, кад спојимо P' са S , добићемо површину сегмента $(\text{П}P'Q)$ и површину троугла $(\text{S}P'Q)$, које стоје у односу према респективним елиптичким површинама $(\text{П}PQ)$ и $(\text{S}PQ)$ исто онако као a према b ; због тога је и

$$(\text{ПСП}) = \frac{b}{a} (\text{ПСП}') = \sqrt{1 - e^2} (\text{ПСП}');$$

кад пак повучемо полупречник $P'C$ и означимо угао $\sphericalangle \text{ПСП}'$ са E , имаћемо, да је

$$(\text{ПСП}') = (\text{ПСП}') - (\text{SCP}') = \frac{a^2 E}{2} - \frac{a^2 e}{2} \sin E = \frac{a^2}{2} (E - e \sin E).$$

или
$$E - e'' \sin E = n'' (t - t_0) = M \dots \dots \dots (G)$$

Овде $e'' = \frac{e}{\sin \Gamma''}$ изражава ексцентрицитет e у угловној мери; дани угао M , који расте пропорционално са временом, то је тако звана *средња аномалија* планете; помоћни пак угао E , који се по њој одређује, добива назив *ексцентричне аномалије*. Да би се помоћу њега (e и E) изразиле тражене r и v , да напоменемо, да је $SQ = CQ - CS$, т. ј.

$$r \cos v = a \cos E - ae \dots \dots \dots (5)$$

а по познатој поларној једначини елипсе, да је

$$r = \frac{p}{1 - e \cos v} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \dots \dots \dots (6)$$

излази
$$\frac{r}{a} = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v} = \frac{\cos E - e}{\cos v}$$

а одатле се за v и r добивају ови изрази:

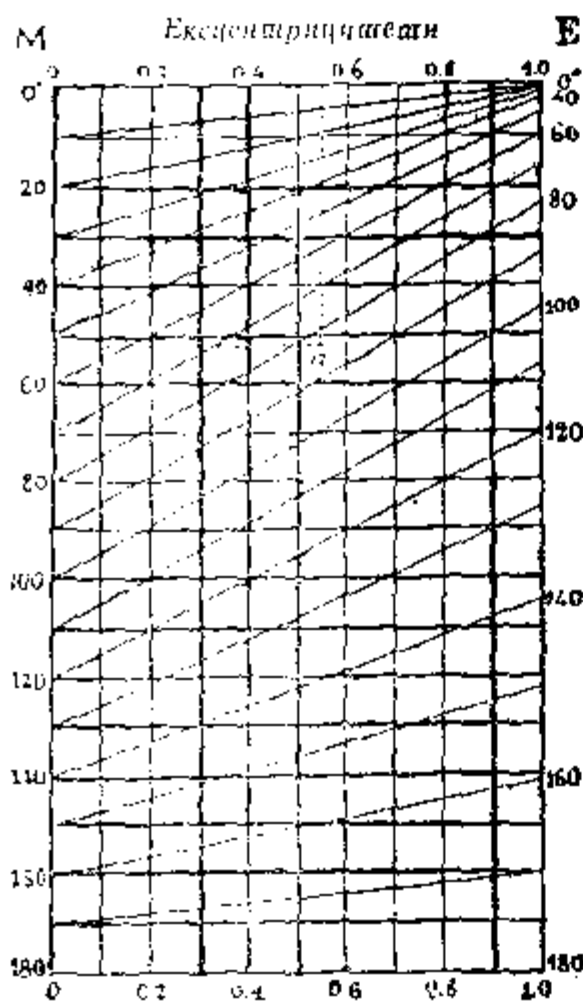
$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \text{ и } r = a (1 - e \cos E); \dots \dots \dots (H)$$

при чему се израз за $\cos v$ лако преображава (чл. 17.) у много погоднији за рачунање угла v :

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{tg } \frac{E}{2} = \text{tg} \left(45^\circ + \frac{\psi}{2} \right) \text{tg } \frac{E}{2} \\ &\dots \dots \dots (I) \end{aligned} \right\}$$

где је $\psi = \text{arc sin } e$.

Што се тиче ексцентричне аномалије E , бројна ће се вредност њена одредити из трансцендентне Кеплерове једначине (G), али, разуме се, само поступним приближењима, при чему ће се са ма како грубо приближно узетом величином E_0 , нпр. $E_0 = M$, у првом приближењу добити $E_1 = M + e \sin E_0$, у другом $E_2 = M + e \sin E_1$ и т. д. док се не добије са жељеном тачношћу $E_n = E_{n-1}$.



Сл. 64.

Она прва вредност E_0 налази се најпростије (с тачношћу до 1°) помоћу приложене овде графичке таблице француског астронома Радо (сл. 64.), чија је оштроумна конструкција основана на томе, што при разним вредностима ексцентрицитета e , — које су узете за апсцисе, — ординате M треба да припадају (као што то показује једначина G) правим линијама, које одговарају разним вредностима угла E .

Узмимо, да треба срачунати E са тачношћу до 0.1 по даној средњој аномалији $M = 52^\circ 8' 0''$ комете Фаја (Faue), за коју је $e = 0.54902 = 1887.4$. Из таблице се одмах види, да тачци (a), — која се одређује по овим даним и која пада управо између две косе линије са натписима $E = 80^\circ$ и $E = 90^\circ$, — одговара приближна вредност $E_0 = 83^\circ$ а са њоме, као што је напред речено, добиће се рачуном са логаритмима од 5 децимала ова поступна приближења ка правој вредности за E :

$$E_1 = 83^\circ 21', \quad E_2 = 83^\circ 22.7 \quad \text{и} \quad E_3 = 83^\circ 22.8$$

125. Употреба редова.

Због незнатних величина ексцентрицитета e планетних орбита, на име;

за	♃	♀	♄	♂	♁	♁	♃♃	♃♃
$e =$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{146}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{112}$

повољније ће бити ако се сасвим избегне срачунавање помоћног угла E , изразивши истиниту аномалију v и радиус вектор r планете непосредно у функцији дане средње аномалије $M = n(t - t_0)$, али већ само у облику приближних редова по растућим степенима e .

Узмимо за тај циљ овај израз бескрајно мале површине, коју прелази планета за време $2dt$:

$$r^2 dv = \sigma dt = a^2 \sqrt{1 - e^2} \cdot n dt = a^2 \sqrt{1 - e^2} dM,$$

Одатле ће се, на основу једначине елипсе (6.), добити

$$dM = (1 - e^2)^{3/2} (1 + e \cos v)^{-2} dv$$

а ако се ограничимо, ради упрошћења, само са другим степенима e , то ће изаћи

$$dM = (1 - 2e \cos v + \frac{3}{2} e^2 \cos 2v - \dots) dv:$$

према томе је

$$M = v - 2e \sin v + \frac{3}{4} e^2 \sin 2v - \dots$$

Одређујући из ове једначине обратно, т. ј. v помоћу M , наћи ћемо спочетка у првом приближењу $v = M + 2e \sin M$, а затим ће у другом приближењу изаћи

$$\eta = v - M = 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \dots \quad (I')$$

Затим ће једначина (6.) дати

$$\frac{r}{a} = (1 - e^2)(1 + e \cos v)^{-1} = 1 - e \cos v - e^2 \sin^2 v - \dots;$$

одатле пак, после стављања овде величине M уместо v из израза (I'), излази, да је

$$r = a(1 - e \cos M + e^2 \sin^2 M - \dots) \quad (H')$$

Ово је довољно ради разјашњења, да кад би се продужило развијање dM и $\frac{r}{a}$ до четвртог степена e закључно, онда би се за η и $\frac{r}{a}$ добили ови још тачнији редови:

$$\eta = \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right) \sin M + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4\right) \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M + \frac{103}{96}e^4 \sin 4M + \dots \quad (I'')$$

$$\begin{aligned} \text{и } \frac{r}{a} = & 1 + \frac{1}{2}e^2 - \left(e - \frac{3}{8}e^3\right) \cos M - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^4\right) \cos 2M - \\ & - \frac{3}{8}e^3 \cos 3M - \frac{1}{3}e^4 \cos 4M + \dots \quad (H'') \end{aligned}$$

На тај се начин редом (I') или (I'') изражава једначина центра $\eta = v - M = L - L_0$, т. ј. разлика између истините дужине планетине $L = v + \Pi$ у моменту t и средње $L_0 = M + \Pi$. Због тога се и за полазно место планете може узети не њен перихел већ и ма које друго, одредивши га управо средњом дужином K планете у дани момент t_0 . У астрономији је примљено, да се тај полазни момент t_0 зове *епоха*. После тога ће се за сваки други момент t наћи једно за другим: средња дужина планете $L_0 = K + n(t - t_0)$, средња аномалија $M = L_0 - \Pi$, једначина центра η , радиус вектор r и најзад, истинита дужина

$$L = L_0 + \eta, \quad (I''')$$

која ће се притом ипак рачунати од првобитне тачке пролетње равнодневице Υ епохе t_0 , а, да би је пренели на тачку Υ за момент t , њој треба додати још и премештај тачке Υ за време $(t - t_0)$ дана, т. ј. величину $0''.138(t - t_0)$.

126. Срачунавање геоцентричких координата планете.

Из свега напред реченога види се, да се место планете у простору одређује, за ма који жељени момент t , помоћу шест величина, које се зову *елементи елиптичког кретања планете*, а то су: Ω , i , a , e , Π и K . Од њих Ω и i дају раван орбите у односу према еклиптици, a , e и Π дају димензије и положај елиптичке орбите у тој равни а K показује место планете на тој елипси у епохи t_0 .

Кад се нађу L и r по формулама (I), (I''') и (H'), ако је ексцентрицитет e доста мали, или, кад се одреде тачно по формулама (I) и (H), ако је то e

веће, онда је лако по даним Ω и i добити еклиптичке координате планете λ и β на основу формула (3.) и (4.) чл. 116. (сл. 59.), при чему ће изаћи:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} (\lambda - \Omega) &= \operatorname{tg} (L - \Omega) \cos i \\ \operatorname{tg} \beta &= \sin (\lambda - \Omega) \operatorname{tg} i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (K)$$

Затим, за прелаз са хелиоцентричких координата λ , β и r на геоцентричке l , b и d , требаће, да се срачуна за тај исти момент t Земљино место, т. ј. истинита дужина Сунца \odot и растојање до њега r_{\odot} и тада ће се, на основу формула (1.) чл. 116. (сл. 58.), — али само у обратном реду, — одредити l , b и d , овако:

$$\left. \begin{aligned} d' \sin (l - \odot) &= r \cdot \cos \beta \sin (\lambda - \odot) \\ d' \cos (l - \odot) &= r_{\odot} + r \cdot \cos \beta \cos (\lambda - \odot) \\ \operatorname{tg} b &= \frac{r}{d'} \cdot \sin \beta \quad \text{и} \quad d = d' \sec b \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (L)$$

Што се тиче рехтасцензије α и деклинације δ планете, то ће се оне наћи по l и b помоћу општих формула (F') чл. 101.

Ако се најзад означи са π'' паралакса планете и са R'' угловни полупречник њенога диска, при растојању њеном d , а са π_{\odot} паралакса Сунца, која одговара узетом за јединицу средњем растојању његовом од Земље, онда ће се по формулама чл. 95. добити, да је

$$\pi'' = \frac{\pi_{\odot}}{d} \quad \text{и} \quad R'' = k \cdot \pi'',$$

где k означаје однос линеарног полупречника планете према полупречнику Земљиног екватора. Одатле излази и обратно, да, ако је паралакса π'' планете одређена бар један пут из посматрања, како је то изложено у чл. 96., онда ће се помоћу ње добити и паралакса Сунца, сматрајући је као непознату. Из многих најпогоднијих одређења паралаксе Марсове и некојих малих планета (око момената њиховога противстајања према Сунцу), тим се управо начином и одређује доста тачна величина $\pi_{\odot} = 8''.84$; најновија пак многобројна посматрања најближе Земљи планете *Ерос*, извршена 1900. и 1901. г. дала су још тачнију вредност Сунчеве паралаксе $\pi_{\odot} = 8''.806$ са средњом грешком од свега $\pm 0''.003$.

Ни изблиза није тако просто наћи, обратно, саме елементе елиптичког кретања планете из неколико само праваца посматраних са Земље на њу. Ми смо показали само методу, коју је за ту циљ оштроумно пронашао Кеплер (чл. 122); али се та метода оснивала на већ познатим трајањима S звезданих оптицаја великих планета и на многобројним посматрањима тих планета у току од неколико њихових оптицаја. У садање време, међутим, када се свакодневно открива много телескопских планета, постаје неопходно потребно, да се одреде елементи елиптичког кретања сваке од њих само из неколико првих посматрања сваке од њих, да би се што пре саставила таблица или тако звана *ефемерида* даљих привидних места такве планете, те да би се згодније налазила на небу, иначе се може изгубити. Разуме се, да је за одређивање оних шест непознатих: Ω , i , a , e , Π и K , потребно имати бар шест геоцентричких њених координата (l_1, b_1) , (l_2, b_2) и (l_3, b_3) т. ј. три *поштуна* њена посматрања у различитим моментима времена: t_1 , t_2 и t_3 . Тада треба, по трима познатим положајима Земље T_1 , T_2 и T_3 у тим моментима и по трима правцима посматраним са ње на плацету, повући кроз непомично Сунце S такву раван, а затим, кроз три тачке P_1 , P_2 и P_3 њенога пресека са тим правцима — такву елипсу, у којој би тачка S била њена жижа а притом да површине елиптичких сектора (P_1SP_2) и (P_2SP_3) буду једна према другој у односу као и интервали времена $(t_2 - t_1)$ и $(t_3 - t_2)$. Ову је задаћу прво решио Лаплас а потом још погодније Гаус у његовом знаменитом трактату „*Theoria motus corporum coelestium*. 1809.“ Али све то, — као што је већ речено у „уводу“ — саставља особити одељак „*теорие*“ астрономије, не у општем већ у специјалном смислу те речи.

127. Пример за објашњење срачунавања координата Сунчевих.

Да објаснимо све што је изложено у чл. 124., 125. и 126. за одређивање места Земље на њеној орбити или, што је све једно, за одређивање геоцентричких координата Сунца за некоји момент t , нпр. за гринвичко средње подне 30. јула 1885. године.

По таблицама елиптичког кретања Сунца од Леверие-а (Annales de l'Observatoire Impérial de Paris. Vol. IV), — које служе као основа за та срачунавања, — у епоси $t_0 = 1.0$ јануара 1885. г. по гринвичком сред. времену треба да буде:

$$K = 281^\circ 18' 2'' \quad e = \sin \psi = 0.016756 \quad \text{или} \quad e'' = \psi'' = 57' 36''$$

$$P = 280^\circ 57' 21'' \quad (\lg e = 8.22417) \quad (\lg e'' = 3.53860).$$

Пошто је у овом случају $t - t_0 = 210$ дана и $n''(t - t_0) = 210 \times 59' 8''.193 = 206^\circ 58' 41''$, то ће се за момент t добити

$$L_0 = K - n''(t - t_0) = 128^\circ 16' 43'' \quad \text{и} \quad M = L_0 - P = 207^\circ 19' 22'';$$

Затим ће се срачунати истинита дужина L и радиус вектор r Сунца по тачним формулама (G), (H) и (I) на овај начин:

$$\begin{array}{lll} \lg \sin M = 9.66182_n & \lg \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \psi) = 0.007269 & \lg \cos E = 9.95031_n \\ e'' \sin M = -26' 26'' & \lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} E = 0.621510_n & \lg e \cos E = 8.17448_n \\ E_1 = 206^\circ 52' 56'' & \lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = 0.628779_n & e \cos E = -0.014944 \\ \lg \sin E_1 = 9.65529_n & \frac{1}{2} v = 103^\circ 13' 44''.6 & \underline{r = 1.014944} \\ e'' \sin E_1 = -26' 3'' & v = 206^\circ 27' 29'' & L = L_0 + \eta = 127^\circ 24' 50'' \\ E = E_2 = 206^\circ 53' 19'' & \eta = v - M = -51^\circ 53' 0''.138 & (t - t_0) = +29 \end{array}$$

Доцније ћемо видети, да за добивање тачне привидне дужине Сунца \odot треба нађеној дужини L додати још неке поправке, а наиме: пертурбационо дејство планете (гл. XX.), нутацију (гл. XXI.) и оберацију (гл. XXII), које у овом случају све заједно износе $-26''$; радиус пак вектор добиће услед пертурбационог дејства планета поправку -0.000043 . Тада ће дефинитивно изаћи, да је

$$\odot = 127^\circ 24' 53'' \quad \text{и} \quad r = 1.014901.$$

Изналажење рехтасцензије Сунца A , деклинације D , једначине времена $y = A - A_0$ угловног полупречника R'' и хоризонталне екваторијалне паралаксе π , извршиће се срачунавањем по нагибу еклиптике $\omega = 23^\circ 27' 5''$, која одговара моменту t и по величинама $R_0'' = 16' 1''.82$ и $\pi_0 = 8''.85$, које се узимају у Nautical Almanac-у за $r = 1$. Ова се срачунавања врше по формулама:

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \odot \cos \omega, \quad \sin D = \sin \odot \sin \omega, \quad R'' = \frac{R_0''}{r} \quad \text{и} \quad \pi = \frac{\pi_0}{r},$$

на овај начин:

$lg \operatorname{tg} \odot = 0.116359_n$	$lg \sin \odot = 9.899962$	$lg R_0'' = 2.98309$
$lg \cos \omega = 9.962557$	$lg \sin \omega = 9.599852$	$lg r = 0.00642$
$lg \operatorname{tg} A = \overline{0.078916}_n$	$lg \sin D = \overline{9.499814}$	$lg \pi_0 = 0.9468$
$A^\circ = 129^\circ 49' 22''$		
$A^h = 8^h 39^m 17^s.47$	$D = + 18^\circ 25' 36''.4$	$R'' = 15' 47''.7$
$L_0 = A_0 = 8 \ 33 \ 8.80$	$y = + 6^m 8^s.67$	$\pi = 8.72$

Ове су исте вредности \odot , r , A , A_0 (звездано време у ср. гринв. подневу), y , R'' и π и дате за 30. јули у Nautical Almanac-у за 1885. г.

Задаће:

1.) Одредити елементе елиптичке орбите Марса: Ω , i , a , e , Π и епоху t_0 пролаза његова кроз перихел, по хелиоцентричким његовим координатама, које су овде преписане из Naut. Almanac-а за 1885. годину:

у гринв. сред. подневу.	λ	β	$lg r$
1. фебр. $= t_1$	$316^\circ 41'.2$	$- 1^\circ 51'.0$	0.14198
1. јула $= t_2 = t_1 + 150$ дана	$48 \ 22.4$	$- 0 \ 0.6$	0.16834
28. децем. $= t_3 = t_2 + 180$ дана	$136 \ 6.3$	$+ 1 \ 50.9$	0.21951

где се све дужине λ односе на еквинокцијалну линију од 1. јула.

Пре свега одредиће се по формулама чл. 116:

$$L_1 = 48^\circ 41'.0, \quad i = 1^\circ 51'.0, \quad L_2 = 316^\circ 41'.3, \quad L_3 = 48^\circ 22'.4 \quad \text{и} \quad L_3 = 136^\circ 6'.4.$$

Ако означимо затим у изразу (6.):

$$\frac{1}{r} = \rho, \quad \frac{1}{p} = \pi, \quad \frac{e}{p} \cos \Pi = x \quad \text{и} \quad \frac{e}{p} \sin \Pi = y,$$

то ће се за три непознате π , x и y добити три једначине облика:

$$\pi + x \cos L_1 + y \sin L_1 = \rho_1$$

после чијег решења излази, да је:

$$\pi = 333^\circ 55'.9, \quad e = 0.09337, \quad a = \frac{p}{1-e^2} = 1.5237 \quad \text{и} \quad n = \frac{n_0}{a^{3/2}} = 31'.443.$$

После тога ће се по формулама (I) и (H) срачунати аномалије:

t_1	t_2	t_3
$v = 342^\circ 45'.4$	$74^\circ 26'.5$	$162^\circ 10'.5$
$E = 344 \ 16.7$	$69 \ 20.6$	$160 \ 27.4$
$M = 345 \ 43.7$	$64 \ 20.3$	$157 \ 40.0$

и најзад епоха $t_0 = t - \frac{M}{n} = 28.23$ фебруара по гринв. ср. времену.

2.) Кад би се кретање планете P око Сунца S вршило по елипси, али не по другоме закону Кеплеровом, већ са сталном угловном брзином n око тачке једнакости S' , која се налази у другој жижи елипсе (сл. 62.), показати онда приближно (с тачношћу само до другог степена малог ексцентрицитета e), уколико би се разни положаји планете разликовали од истинитих и какве би управо највеће грешке требале при том да изађу за Марс ($e = \frac{1}{10.7}$) и за Земљу ($e = \frac{1}{60}$)?

При таквој би претпоставци угао $\sphericalangle PS'P = M = n(t - t_0)$ био средња аномалија, угао пак $\sphericalangle PSP = v'$ — истинита аномалија а угао $\sphericalangle SPS' = \eta' = v' - M$ — једначина центра; ова последња одредила би се из троугла SPS' овако:

$$\sin \eta' = \frac{2ae}{SP} \cdot \sin M = \frac{2e \sin M}{1 - e^2} [1 + e \cos(M + \eta')]$$

или

$$\eta' = v' - M = 2e \sin M + e^2 \sin 2M.$$

Истинита пак величина $\eta = v - M$ изражава се редом (1'); према томе је разлика

$$v' - v = -\frac{e^2}{4} \cdot \sin 2M.$$

За Марс је највећа грешка $\pm \frac{1}{4} e^2$ равна ± 7.5 а за Земљу $\pm \frac{1}{4}$.

3.) У Nautical Almanac-у за 1885. г. показани су елементи елиптичког кретања мале планете Јуноне (3):

за епоху $t_0 = 13.0$ априла 1885. г. по гринв. ср. вр.: $K = 189^\circ 22' 10''$

$$\psi = \arcsin e = 14^\circ 50' 12'' \quad \Pi = 55 \ 24 \ 43$$

$$n = 813''.93 \quad \Omega = 170 \ 39 \ 55$$

$$\lg a = 0.42628 \quad i = 13 \ 1 \ 56$$

Срчунати по њима за момент $t = 30.0$ јула 1885. г. гринв. ср. вр. хелиоцентричке координате планете (λ, β, r) и геоцентричке (α, δ, d) са тачношћу до 1' лучне.

Као што је објашњено у чл. 124. и 126. наћи ће се, за дани момент $t = t_0 + 180$ дана са логаритмима од пет децимала, редом ове величине:

$$L_0 = 213^\circ 47' 2 \quad M = 158^\circ 22' 5 \quad E = 162^\circ 43' 8 \quad v = 166^\circ 40' 1, \quad \eta = 8^\circ 17' 6$$

$$L = 222 \ 4.8 \quad \lambda = 221 \ 21.0 \quad \beta = +10^\circ 9' 1 \quad r = 33211;$$

Затим ће се са координатама Сунца: $\odot = 127^\circ 24' 9$ и $r_0 = 1.049$, — које су већ срчунате за момент t у чл. 127., — по формулама (L и F') добити:

$$l = 203^\circ 47' 4 \quad b = +9^\circ 53' 7 \quad d = 3.4066$$

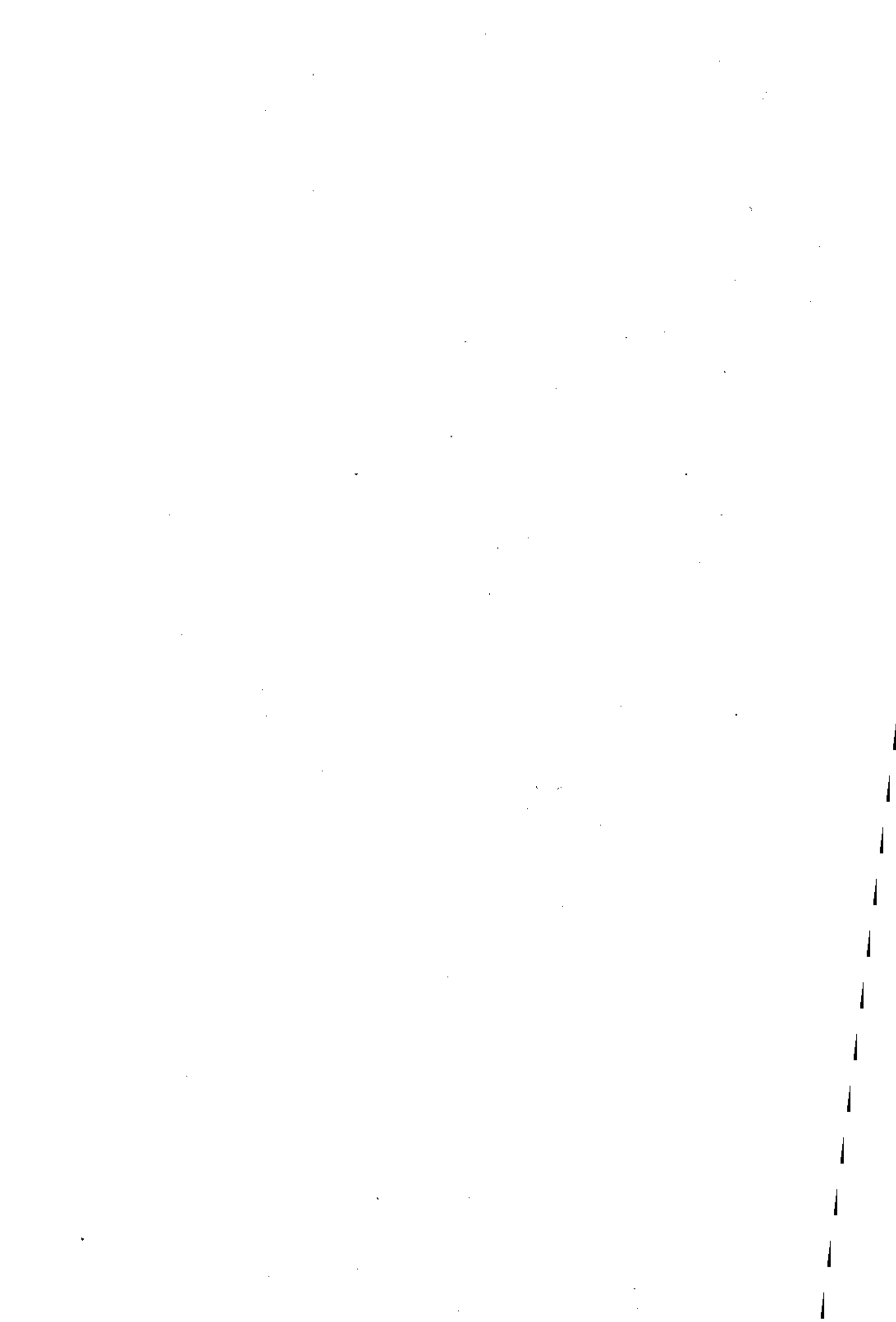
$$\alpha = 13^h 42^m 6 \quad \delta = -0^\circ 1' 7 \quad \text{и} \quad \pi = \frac{8''.8}{d} = 2''.6.$$

4.) Кад се допусти, да је Земљина орбита круг ($a = 1$), и кад би се узело, да је дужа полуоса a елиптичке орбите неке од спољњих планета мања од $\frac{1+e}{1-e}$, онда доказати, да ће њено привидно кретање, које се са Земље посматра у времену њенога противстајања према Сунцу и при најмањем њеном растојању од њега $a(1-e)$, бити напредно а не обратно. Овом се особиним одликује наиме мала планета Ерос, коју је недавно открио Вит, чији се већи део орбите налази између орбита Земље и Марса ($a = 1.46, e = 0.21, \frac{1+e}{1-e} = 1.53$).

Линеарна брзина кретања планете у перихелу V треба да буде већа од брзине кретања Земљиног V_0 а пошто је, на основу формула (3.) и (4.),

$$V = \frac{a}{a(1-e)} = \frac{n_0}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad \text{и} \quad V_0 = n_0,$$

то треба да буде $a < \frac{1+e}{1-e}$.



ГЛАВА XIX.

ЊУТНОВ ЗАКОН.

128. Постављање начела механике.

У 1687. години појавило се на свет велико, генијално дело Њутново „Philosophiæ naturalis principia mathematica“, у којем су први пут била јасно устаљена начела теоријске механике те је на њиховој основи откривен закон универсалне гривитације (свеопште тежње, привлачења) и све последице, које из њега потичу, као што су: кретање планета и њихових пратилаца по Кеплеровим законима, појава прецесије и прилива, спљоштени облик Земљин и др.

Ево тих основних позиција механике, које су остале и до данас непоколебане:

1.) Праволинијско и равномерно кретање свакога тела треба да остане такво све дотле, док не почне на њега да дејствује нека сила F . То је особина инерције тела.

2.) Промена брзине кретања тела или убрзање (акцелерација) G врши се тачно у правцу дејства силе F , при чему је то G управно пропорционално тој сили F и обратно пропорционално маси тела m , тако, да је уопште

$$F = m \cdot G.$$

3.) При једновременом дејству двеју сила на тело, свака од њих мења његово кретање независно од друге; због тога оне могу бити замењене једном резултантом, која је изражена, како по величини тако и по правцу, дијагоналном паралелограма, конструисаног из тих сила.

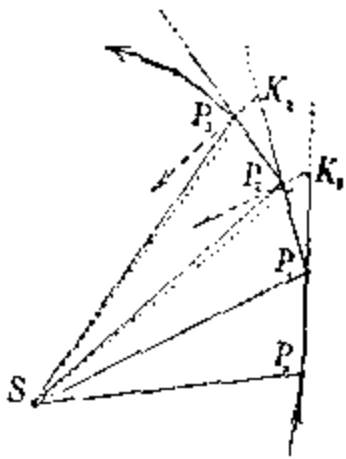
4.) Свако дејство $F = mG$ на тело, сусреће се са таквим истим, директно супротним дејством $F = Mg$ са његове стране, услед чега је

$$\frac{M}{m} = \frac{G}{g}.$$

129. Сила гравитације (привлачења, тежње) планета ка Сунцу.

Замислимо орбиту $P_0P_1P_2 \dots$ какве год планете у односу према непомицином Сунцу S (сл. 65.) и радиусе векторе њене P_0S, P_1S, P_2S, \dots кроз равне и тако мале интервале времена dt , како би се елементарни сектори P_0SP_1, P_1SP_2, \dots могли сматрати као троугли; тада ће, по другоме Кеплерову закону, површине њихове бити равне једној и истој величини $\sigma \cdot dt$. Али, кад на планету, у положају њеном P_1 , неби дејствовала никаква сила, она би, по истеку времена dt ,

прошла у продужењу праве P_0P_1 , простор $P_1K_1 = P_0P_1$, а површина троугла P_1SK_1 изашла би такође равна $P_0SP_1 = \sigma \cdot dt$; због тога тачке K_1 и P_2 троуглова P_1SK_1 и P_1SP_2 , — са истим површинама и општом основицом P_1S , — треба да се налазе на линији K_1P_2 паралелној са P_1S . Одатле излази, да је сила, — која је преместила планету, у интервалу времена dt , из положаја K_1 у P_2 , — дејствовала у правцу P_1S . Тако ће се доказати, да је та сила увек упућена ка центру Сунца S .



Сл. 65.

Разуме се, да ће бити оправдан и обратни закључак, о непромењљивости равни у којој се врши кретање и о одржању једнакости површина, ако каква год сила произлази из непомицног центра S . На тај начин други закон Кеплеров изражава само неопходну особину свакога тако званог *централног кретања*.

Да би се простије одредио мали премештај $K_1P_2 = z$, којим се мери величина силе F или њој пропорционално убрзање (акцелерација) G , замислићемо планетину орбиту као круг. Кад по пређашњем означимо угловну брзину њенога кретања око Сунца S за 1 дан са n а полупречник орбите $SP_0 = SP_1 = SP_2 \dots$ са r , имаћемо, по познатој особини круга, да је

$$z = \frac{(P_1P_2)^2}{2r} = \frac{(r n dt)^2}{2r} = \frac{r}{2} (n dt)^2$$

с друге пак стране, простор z , који прође планета за време dt под утицајем убрзања G , — као у сваком подједнако убрзаном кретању, — треба да буде равно $\frac{1}{2} G dt^2$ па због тога је

$$G = \frac{2z}{dt^2} = n^2 r \dots \dots \dots (1)$$

Али, кад се означи средње дневно кретање Земље око Сунца са n_0 а средње њено растојање од Сунца са r_0 , онда по трећем закону Кеплеровом треба да буде:

$$\frac{n^2}{n_0^2} = \frac{S_0^2}{S^2} = \frac{r_0^3}{r^3},$$

према томе је

$$G = n_0^2 r_0^3 \frac{1}{r^2} \dots \dots \dots (2)$$

ит. ј. убрзање G је обрашно пропорционално квадрату растојања r планете од Сунца.

130. Универсалност закона гравитације.

Са сличном силом, која потиче од Сунца и којом се одржавају све планете на својим приближно кружним орбитама, треба да дејствује и Земља на Месец, који око ње кружи. Ако означимо средње дневно кретање Месеца са v а средње растојање његово од Земље са d , то ће се убрзање g , које Земља саопштава Месецу, изразити на основу (1.) овако

$$g = v^2 d \dots \dots \dots (3)$$

а на растојању Земљинога полупречника ρ оно треба да буде повећано у односу $d^2: \rho^2$ и да да у 1 секунди времена величину:

$$g_0 = g \frac{d^2}{\rho^2} \frac{1}{(86400)^2} = \rho \left(\frac{d}{\rho}\right)^3 \left(\frac{v}{86400}\right)^2.$$

Кад се овде ставе бројеви: $\rho = 5970 \times 3500$ стопа, $\frac{d}{\rho} = \frac{1}{\sin \pi} = 60.2$ и $\nu = \frac{2\pi}{27.32} = 0.230$, онда излази, да је $g_0 = 32.3$ стопе, што је скоро сасвим равно убрзању силе теже, под чијим утицајем произлази и падање тела на Земљину површину, које је још Галилеј био изучио.

Да напоменемо овде, да Њутн добива доста сличну вредност за g_0 тек за неколико година после извршеног Пикаровог мерења степенâ по меридијану 1669. г. у Француској, на основу којег је први пут са довољном тачности одређена величина Земљинога полупречника; раније су га сви сматрали само за 5 200 врста па је стога и g_0 излазило свега око 28 стопа т. ј. знатно мање од стварно очекиване. То је и био узрок што је Њутн за много година био задржао публикување својих открића.

Напред наведено размишљање о бројном резултату за g_0 убедило је Њутна у идентичност гравитационе силе планета ка Сунцу и силе теже на Земљи; али је он увидео још и то, да се баш тим привлачним дејством Сунца и Месеца, — али већ не на сву Земљу у целости него на сваку од њених честица посебице, — објашњује и појава прилива и одлива (плиме и осеке) а тако исто и Земљина прецесија, као последица њенога елипсоидног облика. Све ово довело га је до постављања универсалног (свеопштег) закона гравитације (привлачења) у овом облику:

Сваке се две материјалне честице привлаче међусобно са силом dF , која је управно сразмерна њиховим масама dm и dm' и обрнуто сразмерна квадрату растојања d међу њима ш. ј.

$$dF = k \frac{dm \cdot dm'}{d^2} \dots \dots \dots (4.)$$

где k означава величину (интензитет) гравитационе силе двеју маса, — које су узете за јединице, — на растојању d .

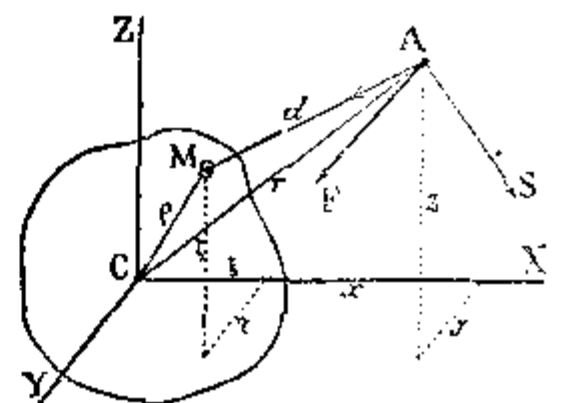
После тога је остало, да се развију чисто аналитичким путем све могуће последице тога закона, ослањајући се само на бројне резултате астрономских посматрања, чија се тачност тада већ знатно повећала у савређењу са пређашњом, благодарећи проналаску дурбина и примени његовој на угломерним астрономским инструментима. Почећемо пре свега са излагањем принципа теорије гравитације, која се доцније развила већ у општу, на основу Њутновог закона.

131. Привлачно (гравитационо) дејство тела на материјалну тачку.

Сила F , са којом ма какво тело привлачи материјалну тачку A , треба да буде резултанта од посебних привлачења те тачке са стране свију бескрајно малих елемената dm тога тела. Да би се одредила њена величина и правац, узмимо центар инерције тела C за почетак трију узајамно управних оса координатних CX , CY и CZ (сл. 66.). Кад означимо координате каквога елемента тела M масе dm — са ξ , η и ζ а саме тачке A — са x , y и z , имаћемо:

$$(AM)^2 = d^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \dots (5.)$$

и ако узмемо у изразу (4.), ради упрошћења писања, масу тачке A и коефицијент привлачења k за јединице, онда ће привлачење A ка M у правцу AM бити $dF = \frac{dm}{a^2}$.



Сл. 66.

Пошто га расчланимо на три компоненте dF_x , dF_y и dF_z у правцу осâ X, Y и Z и пошто напоменемо, да су косинуси углова, које заклапа права AM са тим правцима, равни $\frac{x-\xi}{d}$, $\frac{y-\eta}{d}$ и $\frac{z-\zeta}{d}$, добићемо овакве изразе:

$$dF_x = \frac{dm}{d^2} \cdot \frac{x-\xi}{d}, \quad dF_y = \frac{dm}{d^2} \cdot \frac{y-\eta}{d}, \quad dF_z = \frac{dm}{d^2} \cdot \frac{z-\zeta}{d};$$

због тога ће компоненте F_x , F_y и F_z привлачења тачке A са стране целокупног тела бити:

$$F_x = \int \frac{x-\xi}{d^3} \cdot dm, \quad F_y = \int \frac{y-\eta}{d^3} dm, \quad F_z = \int \frac{z-\zeta}{d^3} dm \quad \dots \quad (6.)$$

при чему интегрирање треба да буде извршено међу извесним границама за ξ , η и ζ , које одређују форму и димензије данога тела. После тога ће се одредити и тражена резултанта F и угли (F,X), (F,Y) и (F,Z), које она образује са координатним осама, — на овај начин:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2, \quad \cos (F,X) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos (F,Y) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos (F,Z) = \frac{F_z}{F} \quad \dots \quad (7.)$$

Али се компоненте привлачења F представљају и добијају још простије, као посебне производне по x, y и z овакве њихове функције:

$$U = U(x, y, z) = \int \frac{dm}{d} \quad \dots \quad (f.)$$

где овај интеграл треба да буде распрострањен на све елементе данога тела, као код (6.). И заиста, из (5.) излази:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dd}{dx} = \frac{x-\xi}{d} \\ \frac{dd}{dy} = \frac{y-\eta}{d} \\ \frac{dd}{dz} = \frac{z-\zeta}{d} \end{array} \right\}; \text{ па је стога } \left. \begin{array}{l} -\frac{dU}{dx} = \int \frac{dm}{d^2} \cdot \frac{dd}{dx} = F_x \\ -\frac{dU}{dy} = \int \frac{dm}{d^2} \cdot \frac{dd}{dy} = F_y \\ -\frac{dU}{dz} = \int \frac{dm}{d^2} \cdot \frac{dd}{dz} = F_z \end{array} \right\} \quad \dots \quad (f.)$$

Ова се функција U зове *пошенцијал привлачног дејства данога тела на тачку A*.

Пошто правац осâ X, Y и Z није ничим условљен, то, при замени у нађеној функцији U координата x, y и z тачке A са ма каквим другим r, s и t, треба да се добију овакве једначине, сличне са (f.) и (7.):

$$-\frac{dU}{dr} = F_r = F \cos (F,R), \quad -\frac{dU}{ds} = F_s = F \cos (F,S), \quad -\frac{dU}{dt} = F_t = F \cos (F,T) \quad \dots \quad (f'')$$

На тај се начин лако одређује компонента или пак пројекција резултанте привлачне силе F у ма којем правцу AS (сл. 66.).

Када су димензије тела врло мале у сравању са растојањем SA — $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, онда се могу занемарити квадрати и виши степени малих величина $\frac{\xi}{r}$, $\frac{\eta}{r}$, $\frac{\zeta}{r}$ и представити тада у интегралу U функцију $\frac{1}{d}$ у облику

$$\frac{1}{d} = [r^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta) + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r^2} + \dots \right)$$

а пошто је по особини центра инерције тела

$$\int \xi \, dm = 0, \int \eta \, dm = 0 \text{ и } \int \zeta \, dm = 0,$$

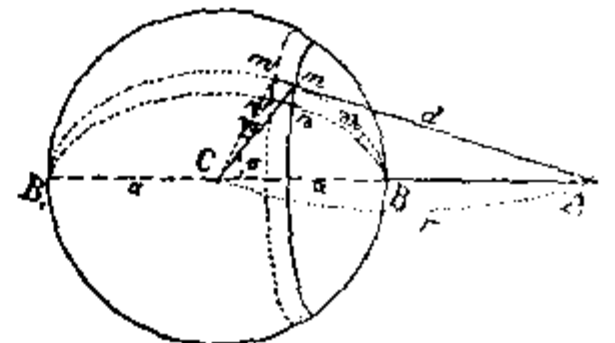
то излази просто:

$$U = \frac{m}{r} \text{ и } F = -\frac{dU}{dr} = \frac{m}{r^2},$$

т. ј. при врло великом растојању између два шела, она ће се привлачити приближно онако исто, као кад би масе њихове биле сконцентрисане у њиховим центрима инерције.

132. Привлачење тела сферног облика.

Да представимо себи сферни, једнородни и изванредно танки слој полупречника $CB = CB_1 = a$ (сл. 67.) па да одредимо привлачно његово дејство F на тачку A , која се налази од његова центра C на растојању $AC = r$. У овоме ће случају бити повољније поларне координате у место правоуглих. Узмимо тачке B и B_1 продора праве AC на сферној површини за полове и замислимо, прво, систему великих кругова BmB_1 са разним дужинама λ , а затим систему малих кругова са разним угловним полупречницима $BCm = \sigma$. Тада ћемо, у пресеку два бескрајно блиска круга прве системе са два бескрајно блиска круга друге, добити на површини правоугаоник са странама $mm' = nn' = a \, d\sigma$ и $mn = m'n' = a \sin \sigma \cdot d\lambda$, а кад означимо густину слоја са δ и дебљину његову са Δa , имаћемо у изразу (f):



Сл. 67.

$$d^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \sigma, \quad dm = \delta \cdot \Delta a \cdot a^2 \sin \sigma \, d\sigma \cdot d\lambda = \delta \cdot \Delta a \cdot \frac{a^2}{r} d \cdot dd \cdot d\lambda$$

и

$$U = \int \frac{dm}{d} = \delta \Delta a \frac{a^2}{r} \int dd \int_0^{2\pi} d\lambda = 2\pi \delta \Delta a \frac{a^2}{r} \int dd.$$

Што се тиче граница промењљиве d , оне ће бити различите, према томе, да ли се тачка A налази ван слоја или пак у унутрашњој његовој шупљини. У првом ће случају граничне вредности за d бити $r + a$ и $r - a$ па ће због тога изаћи, да је

$$U = 4\pi \delta \Delta a \frac{a^2}{r} = \frac{m}{r} \text{ и } F = -\frac{dU}{dr} = \frac{m}{r^2},$$

где је $m = 4\pi a^2 \Delta a \cdot \delta$ маса целог слоја; у другом пак случају граничне ће вредности за d бити $a + r$ и $a - r$ па ће стога изаћи, да је

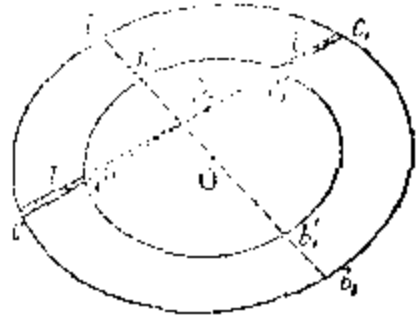
$$U = 4\pi \delta a \Delta a \text{ и } F = -\frac{dU}{dr} = 0;$$

т. ј. танки, једнородни сферни слој привлачи спољњу тачку тако, као да је сва његова маса m сконцентрисана у његовом центру C ; унутарње пак тачке он сасвим и не привлачи.

Разуме се, да ће такво исто бити и привлачно дејство на тачку A целог непрекидног низа концентричних слојева па ма њихове густине $\delta, \delta', \delta'' \dots$ биле и различите. Према томе, свако сферно шело, у којему су подједнаке

густине распоређене шакође у облику концентричним сферних слојева, привлачи спољњу тачку A са силом $F = \frac{M}{r^2}$ ш. ј. онако, као да је сва његова маса $M = \sum m$ сконцентрисана у његову центру C ; унутарњу пак тачку A , она привлачи са силом $F' = \frac{M'}{r^2}$, која зависи само од оне масе M' , која се садржи у унутрашњости сфере полупречника $CA = r$.

Особина једнородних сферних слојева да никако не дејствују својим привлачењем на тачке унутрашњег пространства, вреди исто тако и за слојеве, који су ограничени концентричним, сличним и подједнако распоређеним елипсоидним површинама. И заиста, у пресеку двеју таквих



Сл. 68.

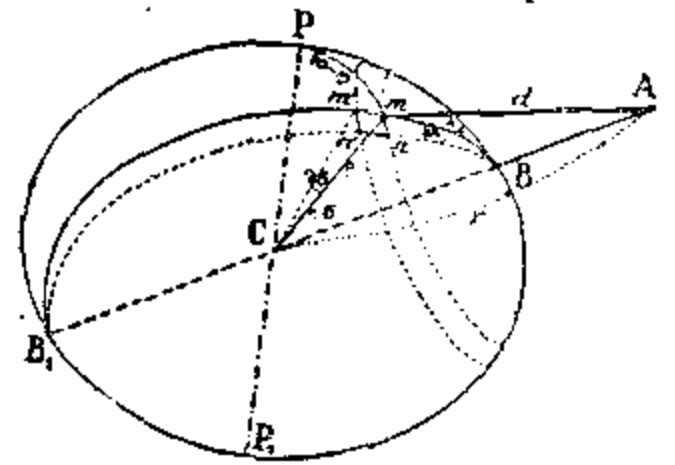
површина са некаквом равни добиће се увек две сличне елипсе $bc b_1 c_1$ и $b'c'b'_1c'_1$ (сл. 68.) са истим центром и са подједнаким положајем, и свака ће права cAc' дати на једној и на другој од њих, тетиве cc_1 и $c'_1c'_1$, које су пресечене напола спрегнутим им пречником bb_1 и $b'_1b'_1$; због тога ће дужина одсечака cc' и $c_1c'_1$ увек бити равне међу собом.

Замислимо сада кроз тачку A вр. много бескрајно блиских једна другој правих, које би образовале на слоју две бескрајно танке зарубљене пирамиде cc' и $c'_1c'_1$. Пошто су површине попречних пресека таквих пирамида управно сразмерне са квадратима растојања њихових од врха A , то ће сваки елемент пирамиде cc' привлачити врх њен A у правцу Ac ; ово би привлачење било пропорционално само дужини и густини тога елемента па ће се стога и поништити супротним му привлачењем таквога истог елемента пирамиде $c_1c'_1$.

133. Привлачење обртних (ротационих) тела са врло малом спљоштеношћу.

Привлачење елипсоиднога тела са врло малом спљоштеношћу, може се одредити на сличан начин као и за тело сферног облика. Замислимо испрва један танки, једнородни слој густине δ међу два елипсоидним обртним (ротационим) површинама (сл. 69.) у којима су

центар C , оса PCP_1 и мала спљоштеност c једни и исти а да се њихове екваторијалне полуосе a и a_1 разликују за врло малу величину Δa . Ако се у свему, што даље буде сљедовало, ограничимо само са првим степенима мале спљоштености c а квадрате и више степене њене занемаримо, онда ће се полупречник $mC = r$ неке тачке m такве површине, — која заклапа са осом PC угао $\angle PCm = 90^\circ - \varphi$, — и дебљина Δr слоја у тој тачци изразити, — на основу формула (6.)' и (7.)' чл. 77., — овако:



Сл. 69.

$$r = a (1 - c \sin^2 \varphi) \quad \text{и} \quad \Delta r = \Delta a (1 - c \sin^2 \varphi).$$

Нека су поларне координате тачке A , коју тело привлачи, у односу према тој истој оси CP : $\angle PCA = 90^\circ - \varphi_0$ и $CA = r$. Повуцимо кроз линије PC и $ABCB_1$ раван PBP_1B_1 и означимо са λ и $d\lambda$ угле образоване између те равни и неких двеју суседних равни, које пролазе кроз исту праву $ABCB_1$ и које секу спољњу површину слоја по елипсама BmB_1 и BnB_1 . Да пресечемо, затим, слој правим конусима, који полазе из заједничког им врха C под разним углима отвора $\angle ACm = \sigma$ према заједничкој њиховој оси $ABCB_1$. Пошто ће два таква суседна пресека mn и $m'n'$ на елипсоидној површини пресећи прва

два mm' и nn' под углом $\angle nmm'$, који се разликује од 90° само за вр. малу величину истога степена као што је и c , то ће, — према напред устаљеној тачности, — бити $\sin \angle nmm' = 1$; исто ће тако, по формули (6.) чл. 77., бити раван 1 и косинус угла, који образује полупречник mC са нормалом тачке m . Због тога ће се маса dm , одсеченога на тај начин елементарног паралелопипеда код тачке m , као и његово растојање $mA = d$ од тачке A , изразити овако:

$$dm = \delta \cdot \Delta \rho \cdot \rho^2 \sin \sigma \cdot d\sigma \cdot d\lambda = \delta \cdot \Delta \alpha \cdot \alpha^2 (1 - 3c \sin^2 \varphi) \sin \sigma d\sigma d\lambda,$$

$$d^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \sigma = r^2 + \alpha^2 - 2r\alpha \cos \sigma + c \sin^2 \varphi (2r\alpha \cos \sigma - 2\alpha^2);$$

ако сад ставимо ради скраћења, да је

$$r^2 + \alpha^2 - 2r\alpha \cos \sigma = s^2 \quad \text{т. ј. да је} \quad \sin \sigma d\sigma = \frac{s ds}{r\alpha},$$

то ће изаћи, да је:

$$d^2 = s^2 \left[1 + c \sin^2 \varphi \left(\frac{r^2 - \alpha^2}{s^2} - 1 \right) \right] \quad \text{и} \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{c}{2} \sin^2 \varphi \left(\frac{r^2 - \alpha^2}{s^2} - 1 \right) \right].$$

На тај ће се начин потенцијал гравитационог дејства f целокупног слоја на тачку A представити у облику

$$U = \int \frac{dm}{d} = \delta \cdot \Delta \alpha \cdot \frac{\alpha}{r} \int \int (1 - 3c \sin^2 \varphi) \left[1 - \frac{c}{2} \sin^2 \varphi \left(\frac{r^2 - \alpha^2}{s^2} - 1 \right) \right] ds \cdot d\lambda$$

или

$$U = \delta \cdot \Delta \alpha \frac{\alpha}{r} \int ds \int d\lambda = \delta \cdot \Delta \alpha \frac{\alpha}{2r} c \int ds \left(\frac{r^2 - \alpha^2}{s^2} + 5 \right) \int \sin^2 \varphi d\lambda,$$

где је $\sin \varphi = \sin \varphi_0 \cos \sigma + \cos \varphi_0 \sin \sigma \cos \lambda$.

Кад се то интегрира прво по промењљивој λ од $\lambda = 0$ до $\lambda = 2\pi$ и кад се напомене, да ће у овим границама бити:

$$\int d\lambda = 2\pi, \quad \int \cos \lambda d\lambda = 0 \quad \text{и} \quad \int \cos^2 \lambda d\lambda = \pi,$$

онда ћемо добити, да је

$$\int \sin^2 \varphi d\lambda = 2\pi \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \sigma + \pi \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \sigma = \pi \cos^2 \varphi_0 + \pi (3 \sin^2 \varphi_0 - 1) \cos^2 \sigma;$$

ако пак ставимо овде, да је

$$\cos^2 \sigma = \left(\frac{r^2 + \alpha^2 - s^2}{2r\alpha} \right)^2$$

и ако означимо ради скраћења

$$4r^2\alpha^2 \frac{\cos^2 \varphi_0}{3 \sin^2 \varphi_0 - 1} + (r^2 + \alpha^2)^2 = b$$

то ће изаћи, да је

$$\frac{U}{\pi \delta \Delta \alpha} = 2 \frac{\alpha}{r} \int ds + c \frac{1 - 3 \sin^2 \varphi_0}{8 \alpha r^3} \int \left[(r^2 - \alpha^2) \frac{b}{s^2} + 5b - 2(r^4 - \alpha^4) - (9r^2 + 11\alpha^2) s^2 + 5s^4 \right] ds.$$

При томе интегрирању горња ће граница промењљиве s , — која одговара $\sigma = 180^\circ$ и $d = AB_1$, — бити $s = r + \alpha$; доња пак, — која одговара $\sigma = 0$ и $d = AB$, — биће или $s = r - \alpha$, ако се тачка A налази изван слоја, или пак $s = \alpha - r$, ако је она њиме обухваћена. У првом ће случају изаћи, да је:

$$\int \frac{ds}{s^2} = \frac{2z}{r^2 - a^2}, \int ds = 2a, \int s^2 ds = 2a \left(r^2 + \frac{a^2}{3} \right), \int s^4 ds = 2a \left(r^4 + 2r^2 a^2 + \frac{a^4}{5} \right),$$

а после одговарајућих скраћивања добиће се дефинитивно, да је

$$U = 4 \pi \delta \Delta a a^2 (1 - c) \frac{1}{r} + \frac{4}{3} \pi \delta \Delta a a^4 c (1 - 3 \sin^2 \varphi_0) \frac{1}{r^3} \dots (g)$$

Да напоменемо још, да коефицијент при $\frac{1}{r}$ у првом члану овога израза представља масу $m = \delta \cdot v$ целог елипсоидног слоја, јер је због мале величине Δa његова запремина (волумен) равна

$$v = \frac{4}{3} \pi a^3 (1 - c) - \frac{4}{3} \pi (a - \Delta a)^3 (1 - c) = 4 \pi a^2 \Delta a (1 - c).$$

У другом ће пак случају бити:

$$\int \frac{ds}{s^2} = \frac{2r}{a^2 - r^2}, \int ds = 2r, \int s^2 ds = 2r \left(a^3 + \frac{r^2}{3} \right), \int s^4 ds = 2r \left(a^4 + 2a^2 r^2 + \frac{r^4}{5} \right),$$

а после свију скраћења, према реченоме у чл. 132., изаћи ће просто, да је:

$$U = 4 \pi \delta \cdot \Delta a \cdot a \left(1 - \frac{2}{3} c \right), \text{ т. ј. } F = - \frac{dU}{dr} = 0.$$

Замислимо сада тело, које се састоји из непрекидног низа концентричних елипсоидних слојева, сличних овима, које смо сад расматрали, т. ј. таквих, који имају једну и исту спљоштеност c , при чему се њихове густине δ мењају непрекидно по неком закону $\delta = f(a)$. Ако означимо ради скраћења:

$$4 \pi (1 - c) \int_0^a \delta a^2 da = M \text{ и } 4 \pi c \int_0^a \delta a^4 da = \gamma a^2 M \dots (h)$$

где је a екваторијална полуоса површине тела, M — сва његова маса, а γ — мала величина истога степена као и спљоштеност c , онда ће се из формуле (g) добити за потенцијал U гравитационог дејства целокупног тела на тачку A , овакав израз:

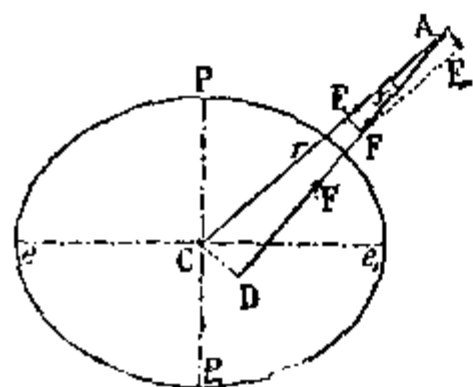
$$U = \frac{M}{r} \left[1 + \gamma \frac{a^2}{3r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi_0) \right] \dots (i)$$

Одатле се види, — као што и треба код симетричне фигуре тела, — да ће сила F његовога дејства на тачку A бити управљена у меридијанској равни PCA (сл. 70.), при чему ће се компоненте F_c и F_m те силе, — у правцу AC и њему управном, — изразити, на основу формуле (i'') овако:

$$F_c = - \frac{dU}{dr} = \frac{M}{r^2} \left[1 + \gamma \frac{a^2}{r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi_0) \right] \text{ и } F_m = - \frac{dU}{r d\varphi_0} = \gamma \frac{M a^2}{r^4} \sin 2 \varphi_0 \dots (i')$$

Затим ће се угао $CAD = y$, — који ће образовати резултанта F са правцем AC , — добити са тачношћу до првог степена од γ овако:

$$\operatorname{tg} y = \frac{F_m}{F_c} = \gamma \frac{a^2}{r^2} \sin 2 \varphi_0 \dots (i'')$$



Сл. 70.

па ће због тога, са истом тачности, изаћи да је $\cos y = 1$ и $F = F_c$. Са том ће истом силом $F = F_c$, која дела у правцу DA , бити привлачено и само тело од стране тачке A ; али пошто се његов центар C налази од тога правца на растојању $CD = r \sin y$, то ће момент силе F у односу према C бити

$$F \cdot r \sin y = \gamma M \frac{a^2}{r^3} \sin 2 \varphi_0 \dots (j)$$

134. Теориска величина спљоштености Земље и планета.

Ако се тачка А, која се привлачи, налази на самој површини планете са унутарњим постројем онаквим, као што смо сад претпоставили у чл. 133., и ако притом та тачка узима удела и у ротационом кретању планете око осе pCp_1 (сл. 29. чл. 74.) са угловном брзином w , онда ће се компонентама (i'), планеног привлачења додати још сличне компоненте f_c и f_m , које произлазе од дејства на њу (управно на осу pCp_1) центрифугалне силе $f = w^2 r \cos \varphi_0$, а на име:

$$f_c = -f \cos \varphi_0 = -w^2 r \cos^2 \varphi_0 \quad \text{и} \quad f_m = +f \sin \varphi_0 = \frac{1}{2} w^2 r \sin 2 \varphi_0,$$

где је $r = a (1 - c \sin^2 \varphi_0)$

због тога ће се тежишна сила g у тачци А и угао $\sphericalangle CAN = \psi$, (који је образован са полупречником АС), одредити управо овако:

$$g \sin \psi = g_m = F_m + f_m \quad \text{и} \quad g \cos \psi = g_c = F_c + f_c.$$

Али пошто код таквог тела, — које је добило напред речену форму и построј још онда, када је оно било у стању течне ротационе масе, — правац силе тежишне на површини треба да буде нормалан на њу, то угао ψ , као разлика истините и геоцентричке ширине А, треба такође да буде раван $c \sin 2 \varphi_0$ (чл. 77.); из овога пак излази, да и однос центрифугалне силе f према сили теже g треба рачунати као врло мали, истог ступња као и спљоштеност c . Кад са q означимо, ради краткоће, максималну величину тога односа $\frac{w^2 a}{g_0}$, — која се добива управо на екватору планете ($\varphi_0 = 0, r = a$ и $g = g_0$), — и кад се, као и пређе ограничимо у изразима за F_m, F_c, f_m и f_c само са првим степенима малих величина c, γ и q , имаћемо, да је

$$\psi = \frac{g_m}{g_c} = (\gamma + \frac{1}{2} q) \sin 2 \varphi_0 = c \sin 2 \varphi_0, \quad \text{т. ј.} \quad c = \gamma + \frac{1}{2} q \dots (M)$$

Затим ће изаћи, да је

$$\text{на екватору, при } \varphi_0 = 0 \quad \text{и} \quad r = a: \dots \dots \dots g_0 = \frac{M}{a^2} (1 + \gamma - q),$$

$$\text{на половима, при } \varphi_0 = 90^\circ \quad \text{и} \quad r = a (1 - c): \dots \dots \dots g_1 = \frac{M}{a^2} (1 + 2c - 2\gamma)$$

уопште пак,

$$g = g_0 (1 + \frac{g_1 - g_0}{g_0} \sin^2 \varphi_0), \quad \text{где је} \quad \frac{g_1 - g_0}{g_0} = \frac{5}{2} q - c \dots \dots (M')$$

Ови су односи (M) и (M') од изванредног значаја за теорију фигуре Земље и осталих планета. Њих је дао први пут француски научењак Клеро*). Други од ових односа, независно од величине γ , т. ј. од закона промене густине δ у унутрашњости тела, допушта одређивање спљоштености Земљиног елипсоида из посматрања само интензитета силе теже на њему. У „Курсу Више Геодезије“ видећемо, како се из многобројних посматрања клатна на разним местима Земљине површине изводе ове величине:

$$g_0 = 32.085 \text{ стопе, } g_1 = 32.255 \text{ стопе у 1 сек. ср. времена и } \frac{g_1 - g_0}{g_0} = \frac{1}{189};$$

а при полупречнику Земљиног екватора $a = 5979$ врста излази, да је:

*) Clairaut. „Théorie de la figure de la Terre. 1743“.

$$q = \frac{w^2 a}{g_0} = \left(\frac{2\pi}{86164} \right)^2 \frac{5979 \times 3500}{32.09} = \frac{1}{288} \text{ а отуда и } c = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{288} = \frac{1}{189} = \frac{1}{295},$$

што је сагласно са величином спљоштености Земље, која се добива из мерења степенâ (в. чл. 75.).

Први пак однос (M) даје крајње границе за спљоштеност c , сваке планете, чија је маса M и брзина ротације w позната. И заиста, пошто слојеви, који су ближе центру, — подвргавајући се притиску горњих, — треба да буду гушћи од њих то ће и ове претпоставке: 1.) да је сва планета једнородна и 2.) да је сва њена маса M сконцентрисана у њеном центру, бити крајње од свију могућних; али у првом случају из израза (h) излази, да је:

$$\int_0^a \delta \alpha^2 da = \frac{1}{3} \delta a^3, \quad \int_0^a \delta \alpha^4 da = \frac{1}{5} \delta a^5 \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{3}{5} c,$$

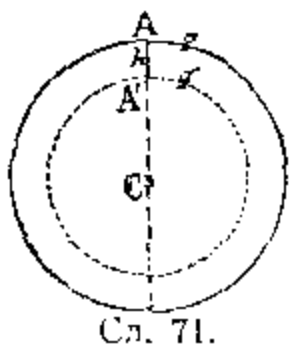
а у другом, да је $\gamma = 0$; кад пак ставимо у (M) ове крајње вредности за γ , имаћемо, да је

$$c < \frac{5}{4} q \quad \text{и} \quad c > \frac{1}{2} q \dots \dots \dots (M'')$$

Тако ће за Земљу бити $q = \frac{w^2 a}{g_0} = \frac{1}{288}$; због тога се спљоштеност њена мора налазити између граница $\frac{1}{230}$ и $\frac{1}{576}$. Прва од њих одговара једнородном построју Земље и њу је теоријски предказао Њутн (чл. 74.).

135. Средња густина и маса Земље.

Узмимо сада, ради веће простоте оваква расуђивања (услед којих тачност ниуколико неће пострадати): нека је Земља сферно тело некаквога полупречника $CA = \rho$ (сл. 71.), које се унутра састоји из сличних концентричних једнородних слојева густине δ , а ова да зависи на некакав начин од полупречника α тих слојева. Тада ће, на основу реченога у сл. 132., силе теже g и g' , у тачци A на Земљиној површини и у тачци A' на некој дубини $h = AA'$ бити



Сл. 71.

$$g = \frac{M}{\rho^2} \quad \text{и} \quad g' = \frac{M-m}{(\rho-h)^2},$$

где M означава масу целе Земље а m — масу површининог слоја до дубине h ; када је пак h и m релативно мало према ρ и M , онда ће изаћи приближно, да је

$$g' = \frac{M}{\rho^2} \left(1 - \frac{m}{M} + 2 \frac{h}{\rho} \right) \quad \text{и} \quad \frac{g'-g}{g} = 2 \frac{h}{\rho} - \frac{m}{M};$$

Треба напоменути, да је скоро неосетно то, што смо при томе пренебегли дејство центрифугалне силе.

Означимо сада са δ_1 густину површинског слоја, која је у средњем равна 2.7, ако се густина воде узме за јединицу; средњу пак густину целе Земље означимо са Δ . Тада ће се однос $\frac{m}{M}$ представити у облику

$$\frac{m}{M} = \frac{4\pi\rho^2 h \delta_1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3 \Delta} = 3 \frac{h}{\rho} \frac{\delta_1}{\Delta};$$

а отуд је

$$\frac{g' - g}{g} = 2 \frac{h}{\rho} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\delta_1}{\Delta}\right) \dots \dots \dots (k)$$

На тај начин, кад се одреди тежа g , како на површини Земљиној, тако и на некој дубини h (у дубоким шахтама), онда ће се моћи закључивати и о величини средње густине Δ целе Земље. Из таквих је посматрања луковник Штернек нашао у Ческој, да се на дубини од $h = 1$ км или $2 \frac{h}{\rho} = \frac{1}{3000}$ сила теже g повећава приближно за $\frac{1}{10000}$ део своје величине; због тога из једначине (k) излази, да је

$$\Delta = \frac{10}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot \delta_1 = \frac{15}{7} \times 2.7 = 5.8.$$

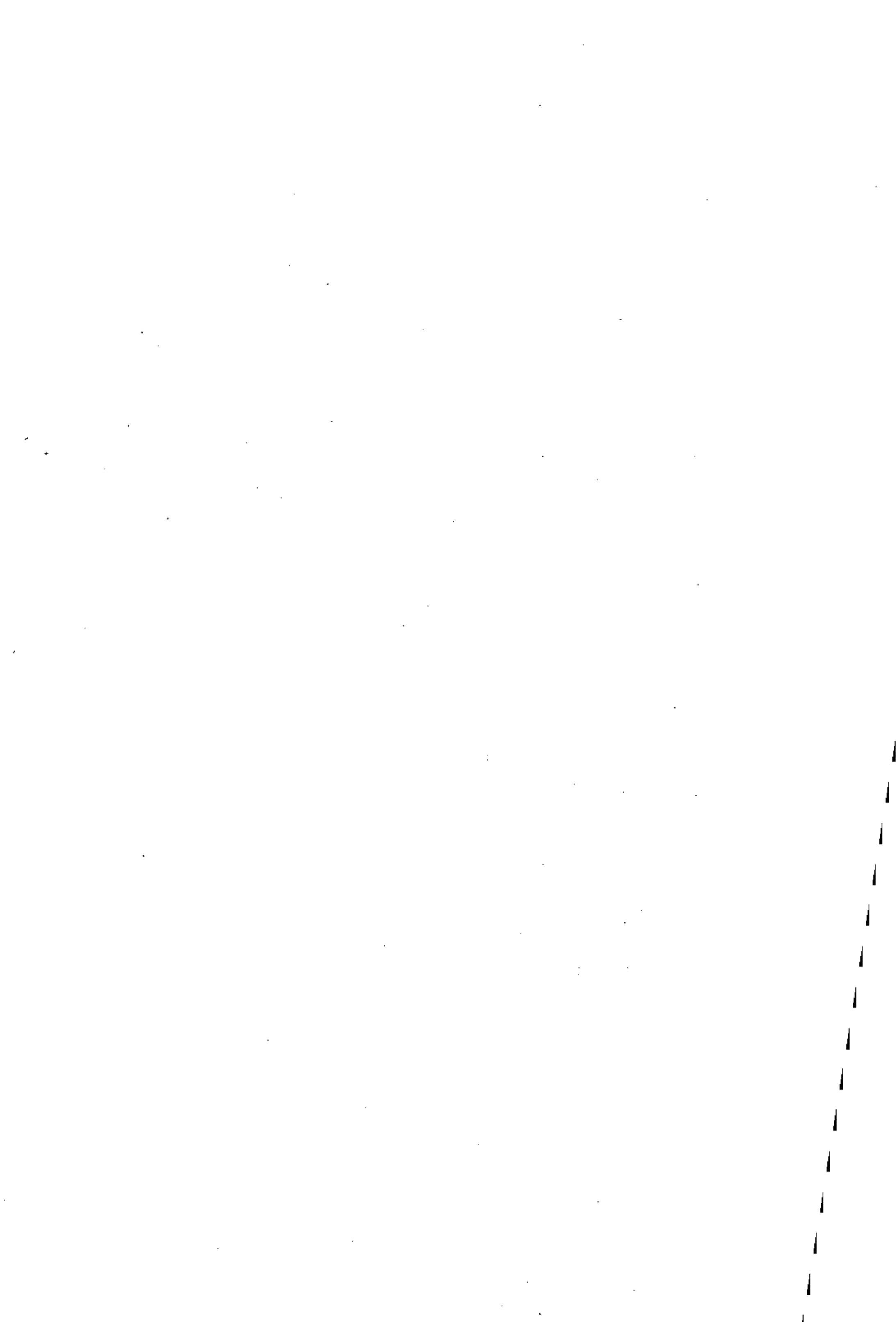
Средњу су густину Земље изводили и из геодетских испитивања скретања вертикалних линија у близини високих планина, које долазе услед њиховога привлачног дејства (атракције) (в. „Курс Више Геодезије“), при чему та густина излази око 5.4. Најтачније се пак она одређује врло деликатним и тачним огледима из узајамног привлачења оловних кугли на апарату, који се зове *шорсиона вага* и излази тада од 5.5 до 5.6, тако, да се доста приближно може узети, да је $\Delta = 2 \delta_1$.

Маса M целе Земље може да се срачуна по средњој њеној густини Δ доста приближно по формули $M = \frac{4}{3}\pi\rho^3 \Delta$, кад се за полупречник ρ узме таква величина, те да запремина кугле $\frac{4}{3}\pi\rho^3$ буде равна запремини елипсида $\frac{4}{3}\pi a^2 b = \frac{4}{3}\pi a^3(1 - c)$. Овако добивена величина $\rho = a \left(-\frac{1}{3}c\right) = 5972$ врсте (чл. 75.) одговара Земљиној паралели под $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} = 35^\circ$

Задаћа :

Каква је густина δ_0 у центру Земљином и на којој је дубини $h = \rho - a$ сила теже g' највећа, кад је закон густине $\delta = f(a) = \delta_0(1 - ka^2)$?

Ако се за $a = \rho$ узме, да је $\delta_1 = \frac{1}{2}\Delta$, то ће изаћи, да је: $k\rho^2 = \frac{5}{7}$.
 $\delta_0 = \frac{7}{4}\Delta = 9.6$, $\frac{h}{\rho} = 1 - \frac{\sqrt{7}}{3} = 0.118$ и $g' = \frac{M'}{(\rho - h)^2} = \frac{7\sqrt{7}}{18}g = \left(1 + \frac{1}{35}\right)g$.



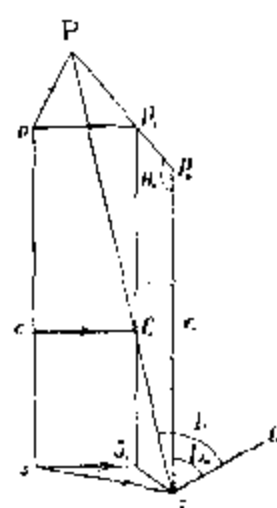
ГЛАВА XX.

КРЕТАЊЕ ТЕЛА СУНЧЕВЕ СИСТЕМЕ ПОД УТИЦАЈЕМ ГРАВИТАЦИОНЕ СИЛЕ.

136. Релативно кретање двају тела.

Да расмотримо најпростији случај узајамног дејства само двају тела, једно на друго, на пример, Сунца S и неке од планета P (сл. 72.) при чему ћемо, — како због удаљености једно од другог (чл. 131.), тако и због незна-тног одступања њихове фигуре од сферног облика (чл. 132.), — моћи да сматрамо њихове масе M и m сконцентрисане у њиховим центрима S и P .

По Њутновом закону, при сваком растојању $PS = r$, прво ће од њих S саопштавати ономе другом P , у правцу к себи, убрзање $G = k \frac{M}{r^2}$ пропорционално својој маси M , са своје пак стране оно ће тежати ка ономе P са убрзањем $g = k \frac{m}{r^2}$. Али се оба та тела, — ако не постоји никаква друга спољња, страна сила, — могу кретати у простору равномерно са некаквим брзинама потпуно независно од њиховога узајамног привлачног дејства. Претпоставимо, да се је на тај начин S преместило из s у току некога интервала времена, а тако исто и P из p , тако, да центар њихове инерције C , — који се раније налазио у c на линији ps и на растојању $sc = sp \cdot \frac{m}{M+m}$ од s и $pc = sp \cdot \frac{M}{M+m}$ од p , — буде сада на линији PS на растојању $SC = SP \cdot \frac{m}{M+m}$ од S и $PC = SP \cdot \frac{M}{M+m}$ од P . Ако сад повучемо кроз C праву S_1CP_1 паралелно са scp а из s и p праве sS_1 и pP_1 паралелне са cC до пресека њиховог са S_1P_1 у тачкама S_1 и P_1 , то ћемо увидети, да се премештаји pP и sS могу заменити, прво, са два, pP_1 и sS_1 , паралелна и равна са cC ; али нас се ово не тиче, јер ће се тиме линија psc , не мењајући свој правац, само пренети у простору праволинијски и равномерно; а друго, ти се премештаји pP и sS могу заменити и са P_1P и S_1S у односу према центру инерције C , као непо-мичном, при чему ће они очевидно бити паралелни међу собом а однос њихов један према другом $\frac{P_1P}{S_1S}$ биће раван $\frac{PC}{SC} = \frac{M}{m}$. Али ће се у том истом односу, $\frac{M}{m}$ једно према другој налазити и напред речена убрзања G и g оба тела P и S ; због тога ће кретања и орбите њихове у односу према непомичном



Сл. 72.

центру S , — дешавајући се увек у непромењливој равни PP_1CS_1S , — бити потпуно сличне међу собом, само ће им правци бити супротни, као што је то показано стрелицама на сл. 72.

Још простије ће бити, ако се једно од два тела, нпр. S , узме за непомично па се у односу према њему разматра кретање другог тела P . Тада за првобитно премештање P у односу према S , треба да буде примљено $P_0P = P_0P_1 + P_1P$, рачунајући од тачке P_0 , која се налази на линији SP_0 паралелној са S_1P_1 , а на продужењу PP_1 ; услед тежње пак оба тела да се приближе једно другоме, потребно ће бити приписивати телу P у правцу ка S убрзање

$$G' = G + g = \frac{\mu}{r^2}, \quad \text{где је } \mu = k(M + m) \dots \dots \dots (1.)$$

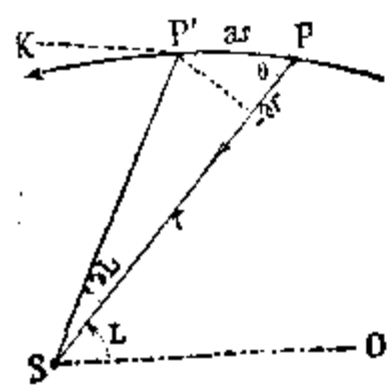
На основу реченога у чл. 129. о централном кретању уопште, тачка P треба да се креће у односу према S по некој равној кривој, прелазиће са својим радиус-вектором у једнаким интервалима времена једнаке површине, при чему ће се раван тога кретања одредити, ако буде дат почетни положај тачке P_0 у односу према S у неком моменту времена t_0 а тако исто и правац P_0P њене брзине V_0 у томе моменту. Кад се пак означи са θ_0 онај угао SP_0P , који образује брзина V_0 са радиус-вектором $SP_0 = r_0$ (сл. 72.), онда ћемо за сталну величину σ удвојене површине, коју пролази радиус вектор за јединицу времена, (чл. 129.), добити управо овакав израз:

$$\sigma = r_0 V_0 \sin \theta_0 \dots \dots \dots (2.)$$

Остаје још, да се да дужина L_0 почетнога положаја тачке P_0 , која се рачуна од правца SO , као уобичајеног почетка за рачунање дужина L у равни орбите (чл. 115.). Тада ће се помоћу силе $\frac{\mu}{r^2}$ и помоћу четири дане величине L_0 , r_0 , θ_0 и V_0 и условити потпуно даље кретање тачке P у напред реченој равни, као што ћемо то одмах видети.

137. Генералисање првога Кеплеровог закона.

Узмимо, да су у некаквом моменту времена t координате тачке P у равни њене орбите и у односу према непомичној тачци S овакве: $\sphericalangle OSP = L$ и $SP = r$ (сл. 73.) па нека се она креће у томе моменту под углом $\sphericalangle SPK = \theta$ према своје радиус-вектору са брзином V , пролазећи у току бескрајно кратког времена dt лук $PP' = ds = V dt$ или пак површину



Сл. 73.

$$2 (PSP') = r^2 dL = \sigma dt \dots \dots \dots (3.)$$

Пошто је пројекција убрзања G' на тангенцијалну PK , — које дејствује правцем PS , — равна $G' \cos \theta = -G' \frac{dr}{ds}$, то ће се прираштај њене брзине V за време dt изразити овако:

$$dV = G' \cos \theta \cdot dt = -\frac{\mu}{r^2} \cdot dr \frac{dt}{ds} = \mu \cdot d\left(\frac{1}{r}\right) \frac{1}{V}$$

а одатле ће, — ако се означи са $\frac{1}{a}$ константна величина, која се јавља при интегрирању, — изаћи, да је

$$\frac{V^2}{\mu} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \quad \text{где је } \frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{V_0^2}{\mu} \dots \dots \dots (N)$$

Ставимо сада овде уместо V^2 однос $\frac{ds^2}{dt^2}$, узевши у њему за ds^2 и dt^2 ове њихове изразе у функцији dL и dr :

$$ds^2 = (r dL)^2 + dr^2 \quad \text{и} \quad dt^2 = \left(\frac{r^2 dL}{\sigma}\right)^2.$$

Тада ћемо добити овај диференцијални однос између L и r :

$$\frac{(rdL)^2 + dr^2}{(r^2 dL)^2} \cdot \frac{\sigma^2}{\mu} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a},$$

кад ставимо ради скраћења писања, да је $\frac{\sigma^2}{\mu} = p$ (4.)

и $1 - \frac{p}{a} = e^2$, ¹⁾ (5.)

имаћемо из њега, да је

$$\left(\frac{p dr^2}{r^2 dL}\right)^2 = \frac{2p}{r} - \frac{p}{a} - \frac{p^2}{r^2} = e^2 - \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2$$

или
$$dL = \frac{d\left(\frac{p}{r}\right)}{\sqrt{e^2 - \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2}}$$

Према томе је

$$L - \Pi = \arccos \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1\right), \quad \frac{p}{r} - 1 = e \cos(L - \Pi)$$

и
$$r = \frac{p}{1 + e \cos(L - \Pi)} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \quad \dots \dots \dots (N')$$

Што се тиче константног угла Π , који је при овом интегрирању уведен, — он ће се одредити стављањем у тој истој једначини (N') даних, за момент t_0 величина L_0 и r_0 и представиће собом очевидно ону дужину тачке P , при којој је растојање $PS = r$ најмање т. ј. дужину перихела. Угао пак $v = L - \Pi$, — који се рачуна од правца тога најкраћег растојања P од S , — то је она тако звана истинита аномалија тачке P .

Једначина (N') припада, као што је познато, свима могућним кривим другог степена са једном и истом жижом у тачци S , при чему је a дужа полуоса криве, e — њен ексцентрицитет, а $p = a(1 - e^2)$ — параметар. Та једначина показује, да она иста гравитациона сила, која чини, да се све планете крећу око Сунца по елипсама (први Кеплеров закон), може при извесним погодбама да изазове кретање тела и по хиперболи (а у специјалном случају и по пароболи, као што се у ствари и креће највећи број комета.) При томе, врста криве, по којој се врши кретање тела P , не зависи од угла θ_0 , т. ј. од правца почетне брзине, већ само од њене величине V_0 у савршењу са растојањем r_0 . И заиста, из израза се (N) и (5.) види, да ће

1) Разлика $1 - \frac{p}{a}$ означена је овде са e^2 стога, што је она увек позитивна вредност. Заиста по (4.) и (2.) излази:

$$\frac{p}{a \cdot \sin^2 \theta_0} = \frac{r_0^2 V_0^2}{a \mu} = 2 \frac{r_0}{a} - \frac{r_0^2}{a^2} = 1 - \left(1 - \frac{r_0}{a}\right)^2; \quad 1 - \frac{p}{a \cdot \sin^2 \theta_0} > 0,$$

па због тога и $1 - \frac{p}{a} > 0$.

при $V_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$ бити a са $+$, $e < 1$ т. ј. крива је елипса,
 „ $V_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}$ „ $a = \infty$, $e = 1$ „ „ „ парабола,
 „ $V_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}$ „ a са $-$, $e > 1$ „ „ „ хипербола,

У специјалном случају када је орбита круг, т. ј. када је $e = 0$ и $r = p = a = r_0$, величина V^2 треба да буде равна $\frac{\mu}{r}$, т. ј. *двапут мања*, него код параболне путање при истом радиус-вектору r .

Напомена: Хиперболно се кретање тела P врши, очевидно, по грани криве, која је ближа жижги S , по другој пак грани, која је окренута ка S својом испупченошћу, оно би се кретало само у случају негативне величине μ , т. ј. при сили која не привлачи већ одбија, т. ј. $-\frac{\mu}{r^2}$, пошто би тада излазило, да је a са $+$, p са $-$ и $e > 1$.

138. Генералисање трећег Кеплеровог закона.

Орбитни параметар p , ма каква била та орбита, елиптичка или хиперболна, одређује се по формули (4.) само величином површине σ , коју тело пролази, и још, масом m , која улази скривена у коефицијент μ ; због тога та зависност између p и σ представља собом у општем облику трећи Кеплеров закон. И заиста, у случају затворене елиптичке орбите, трајање S потпунога оптицаја планете око Сунца добиће се из формуле (4.) и (1.) на овај начин:

$$S^2 = \left(\frac{2\pi ab}{\sigma}\right)^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{\mu p} = \frac{4\pi^2}{kM} \cdot \frac{a^3}{1 + \frac{m}{M}} \quad (6)$$

а то и јесте онај исти Кеплеров закон, јер ћемо сад одмах видети, да су масе m код свију уопште планета врло мале у сравњењу са масом M Сунца, и да се $\frac{m}{M}$ у сравњењу са 1 може увек занемарити.

Ако планета има пратиоца, а такве су све велике планете са изузетком само Венере и Меркура, онда се о маси њеној m може судити по посматраном трајању S' оптицаја пратиочевог и по средњем удаљењу a' његовом од планете. И заиста, елиптичко кретање пратиоца, које се врши под утицајем гравитације ка планети, треба да доведе до сличног израза као што је (6.), т. ј.

$$S'^2 = \frac{4\pi^2}{km} \cdot \frac{a'^3}{1 + \frac{m'}{m}} \quad (6.)'$$

где m' означава масу пратиоца; у првом пак приближењу могу се занемарити, у изразима (6.) и (6.)' мали разломци $\frac{m}{M}$ и $\frac{m'}{m}$ у сравњењу са 1, и тада ће, кад се подели (6.) са (6.)', изаћи

$$\frac{m}{M} = \left(\frac{S}{S'}\right)^2 \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \text{ или пак } \frac{m}{M} = \frac{a'^3}{S'^2} \quad (7.)$$

где трајање S' оптицаја пратиоца око планете треба да буде изражено у звезданим годинама ($S_0 = 365.256$ ср. дана) а дужа полуоса a' његове орбите у јединицама средњег растојања Земље од Сунца.

Кад се ставе у (7.) бројне вредности за S' и a' , које се изводе из посматрања пратилаца разних планета (глава XXIV), онда ће масе m планета према маси Сунца M и према маси Земље m_0 изаћи овакве:

	за Земљу,	Марс.	Јупитер,	Сатурн.	Уран,	Нептун.
при $M = 1, m =$	$\frac{1}{327000}$	$\frac{1}{3090000}$	$\frac{1}{1048}$	$\frac{1}{3530}$	$\frac{1}{23000}$	$\frac{1}{19000}$
при $m_0 = 1, m =$	1	0.11	312	93	14	17

Одатле се види, да се трећи Кеплеров закон може рачунати као довољно тачан чак и у примени његовој на највеће планете, Јупитера и Сатурна.

Ова релативна ништавност масе Земљине и осталих планета јавља се као први убедљиви и строго научни доказ о томе, да не кружи Сунце око Земље већ она и све планете око њега; али, као што је речено у чл. 136., ни Сунце не може при томе да стоји непомично, већ се и оно, услед гравитационог дејства на њега и само јединог Јупитера, мора премештати у односу према заједничком њиховом центру инерције приближно за линеарну величину властитог свога полупречника $(\frac{5.23}{1048} = \frac{1}{200} = \sin 17')$.

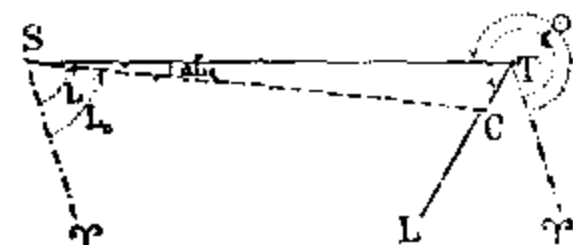
Сад видимо још и то, да се у елиптичком кретању планете, — које смо разматрали у чл. 124, 125. и 126, — средње угловно кретање њено око Сунца n'' условљава још седмим њеним елементом т. ј. њеном масом m и да треба да се одређује сад већ не по формули (4.) чл. 124. него по овој

$$n'' = \frac{2\pi}{S} = \frac{n''_0}{a^{3/2}} \frac{\sqrt{1 + \frac{m}{M}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{M}}}, \dots \dots \dots (8.)$$

где n''_0 , као и пређе, означава средње угловно кретање Земље, а за јединицу маса m и M узета је маса Земље.

139. Утицај Земљинога пратиоца на њено кретање.

Да применимо сад на Земљу са Месецем оно што је речено у чл. 136. о кретању двају тела према општем њиховом центру инерције. Под утицајем гравитације ка Сунцу S , око њега се креће по елипси управо не центар Земљин T већ центар инерције C Земље T и Месеца L (сл. 74).; због тога под еклиптиком треба сад подразумевати раван кретања тога центра C . Земља пак T треба да се креће око њега исто онако као што се Месец креће око ње, т. ј. да остане увек на правој LCT на растојању од њега



Сл. 74.

$$CT = LT \frac{m'}{m_0 + m'} = r \frac{m'}{m_0 + m'},$$

где r означава растојање LT , а m_0 и m' — масе Земље и Месеца.

Ако се, ради упрошћења, занемари мала ширина Месеца и означе хелиоцентричке координате тачке C и Земље T са L_0, R_0 и L, R а геоцентричке дужине Сунца и Месеца знацима \odot и ζ то ће се из троугла SCT , као елементарног, добити:

$$L - L_0 = \Delta L = \frac{CT}{R_0 \sin 1''} \sin \sphericalangle SCT = \frac{r}{R_0 \sin 1''} \frac{m'}{m_0 + m'} \sin (\zeta - \odot) \dots (9.)$$

Ова се разлика ΔL , — која се периодички мења у току свакога синодског месеца, — у самој ствари и открива на дужинама Сунца ($\odot = L \pm 180^\circ$), посматраним са Земље, која у квадратурама Месечевим ($\ominus - \odot = 90^\circ$) досеже до максималне своје вредности $\Delta L_m = \pm 6''.5$. На тај се начин из једначине (9.) одређује доста тачно маса Месеца m' , а наиме

$$\frac{m'}{m_0} = \frac{1}{81}.$$

Из тога се истог троугла SCT добива израз и за разлику $R - R_0 = \Delta R$. Услед пак нагиба Месечеве орбите према равни еклиптике ($i = 5^\circ 8'$) центар Земљин T излази помало из те равни, при чему свакога синодског месеца хелиоцентричка ширина Земље β достиже два пут максималну бројну вредност

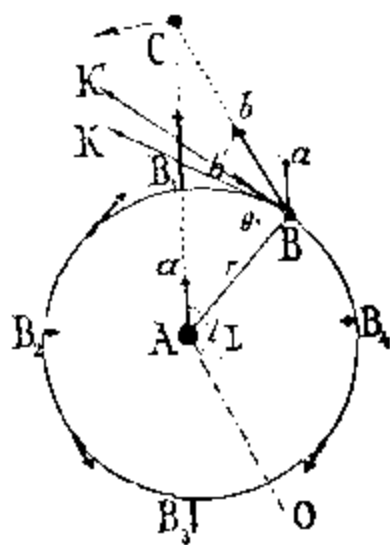
$$\beta_m = \frac{CT}{R_0} \cdot \frac{\sin 5^\circ 8'}{\sin 1''} = \Delta L_m \sin 5^\circ 8' = \pm 0''.6$$

Али пошто и планете по мало изводе Земљу из равни еклиптике, то хелиоцентричка ширина Земље или, што је исто, привидна са ње ширина центра Сунчевог (који се даје у Nautical Almanac-у упоредо са истинитом дужином његовом \odot) може достићи до $\pm 1''.1$.

140. Проблем о три тела.

Проблем о релативном кретању двају тела А и В под утицајем њихове гравитације не само једнога ка другоме већ још и ка трећем С, још нема општег и строгог решења у математичком смислу. Али, када је то треће тело С врло удаљено од прва два, — као што је на пример Сунце од Земље и Месеца, — или када је његова маса врло мала у сравњењу са масом централнога тела А, — као што је случај дејства планета или пратилаца какве планете једно на друго, — онда бива, да се елиптичко кретање В у односу према А може узимати, као прво приближење ка истинитоме његовом кретању па изналазити само релативно мала скретања од њега, која чини тело С. Таква скретања од елиптичког кретања зову се уопште *пертурбације* (поремећаји).

Ради упрошћења замислимо спочетка, да се кретање самога пертурбационог тела С врши у равни орбите $B_1 B_2 B_3 B_4$ тела В (сл. 75.), које подлежи пертурбационом дејству тела С; нека су координате тела В у некаквом моменту t , у односу према А, — које се рачуна као непомицно, — овакве: $\sphericalangle OAB = L$ и $AB = r$ и нека се оно креће брзином V у правцу ВК; при томе овим величинама L , r , V и углом $\sphericalangle ABK = \theta$ одговарају елементи елиптичке орбите: a , e , Π и епоха t_0 дужине Π (чл. 136.). Тело С, чије се координате $\sphericalangle OAC = l$ и $AC = \rho$ за тај исти момент t могу сматрати као познате, саопштаваће телу А у правцу АС убрзање $Aa = G_0 = \frac{\mu}{\rho^2}$ а телу В — у правцу ВС — убрзање



Сл. 75.

$Vb = \frac{\mu}{d^2}$, где је $d^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(l - L)$. Али, разла-

гањем, по правилу о паралелограму сила, посљедњег убрзања на два таква, од којих би једно Va' било једнако и паралелно са $Aa = G_0$, увидећемо, да ће само друго од њих $Vb' = j$ пореметити (пертурбирати) кретање тела В у односу према А и приморати В, да се креће у моменту t сад већ са другом брзином V' и под другим углом $\sphericalangle ABK' = \theta'$ према радиус-вектору $AB = r$; услед тога ће се и сви пређашњи елементи орбите a , e , Π и t_0 изменити

на a' , e' , Π' и t_0' . У сљедећем моменту t' , при новим положајима тела В и С, на сличан ће се начин добити већ унеколико другојачија величина *пертурбационог убрзања* j , која ће са своје стране изменити елементе орбите на a'' , e'' , Π'' и t_0'' , и т. д.

На сл. 75. показано је, у какву ће баш страну бити упућено пертурбационо убрзање j при разним положајима В у односу према А и С. Али, ако се В и С крећу у разним равнима, њему ће се придружити још и друго j_1 , — које тежи да изведе В из равни његова кретања, усљед чега ће се и елементи Ω и i , — који одређују положај те равни, — поступно мењати на Ω' и i' , Ω'' и i'' и т. д.

На тај се начин кретање тела В може сматрати, у разним интервалима времена $t' - t$, $t'' - t'$ и т. д., по пређашњем, као елиптичко, али са различитим елементима Ω , i , a , e , Π и t_0 за сваки од тих интервала. Ове се промене елемената зову *оскуларне*. Теорија доводи до тога, да се зависност њихова од времена t изражава, прво, једним редом чланова облика

$$c_1 t + c_2 t^2 + \dots$$

у којима t улази јавно а стални коефицијенти c_1, c_2, \dots зависе од релативног положаја орбита тела В и С, и, друго, још једним редом чланова облика

$$q_k \sin k Q \text{ или пак } q_k \cos k Q$$

у којима разни угли Q , који се мењају са временом, зависе од положаја самих тела В и С на њиховим орбитама. Први чланови добивају назив *вековних пертурбација* а други — *периодичких*.*) Слични се изрази за вековне и периодичке пертурбације кретања тела В употребљују и у том случају, када на њега делује пертурбационим начином не само једно тело С, већ неколико њих.

Није тешко увидети, да се са напред речених *пертурбација елемената* елиптичког кретања тела В може прећи на изразе *пертурбација координата* његових: ширине, дужине и радиус-вектора. Такви се изрази управо и употребљују за срачунавање истинитих места Месеца и планета. Ограничивши се овим општим напоменама о пертурбацијама, чија теорија представља најтежи проблем Небесне Механике, навешћемо сад за нас најзначајније резултате те теорије у примени њеној на кружење Месеца око Земље и планета око Сунца.

141. Пертурбације у елиптичком кретању Месеца.

Још Њутн је објаснио био узрок изванредне сложености Месечева кретања око Земље, које смо делимично већ размотрили у чл. 106. Тај се узрок састоји у огромности оних пертурбација, које чини маса Сунчева на нормално елиптичко кретање Месеца. Тамо смо видели, да *вековне*, пропорционалне времену, пертурбације у дужини Ω узлазног чвора Месечеве орбите и у дужини Π њенога перихела произлазе са брзинама — $3' 10'' 6$ и $+ 6' 41'' 1$ у току једнога средњег дана, тако, да кад се означе ове дужине за неку исходну епоху t_0 са Ω_0 и Π_0 , онда ћемо имати по истеку времена $t - t_0$, да је

$$\Omega_1 = \Omega_0 - 3' 10'' 6 (t - t_0) \text{ и } \Pi_1 = \Pi_0 + 6' 41'' 1 (t - t_0) \dots (10.)$$

Да би се добиле истините дужине Ω и Π треба ће, да се овима *средњим* Ω_1 и Π_1 додаду још и њихове *периодичке* пертурбације или неједнакости. За чвор она произлази у једном и истом периоду (нешто мање од p_0 године)

*) Појава једних и других чланова објасниће нам се у глави која сљедеће при разматрању аналогичног питања о пертурбацијама ротационог кретања Земље.

са колебањем нагиба i Месечеве орбите према еклиптици, изражавајући се, у зависности од дужине Сунца \odot , приближно овако:

$$\Omega - \Omega_1 = 1^\circ 26' \sin 2 (\Omega_1 - \odot) \quad \text{и} \quad i = 5^\circ 8'.8 = 8'.8 \cos 2 (\Omega_1 - \odot). \quad (10.)'$$

Периодичка пак пертурбација дужине перихела произлази заједно са колебањем ексцентрицитета Месечеве орбите $e = 0.055$, при чему се и једна и друга изражава члановима са синусом и косинусом угла $2 (\Pi_1 - \odot)$.

Пошто ни елиптичка орбита саме Земље у односу према Сунцу не остаје непромењљива, већ је подложна вековним пертурбацијама, усљед гравитационог дејства планета (чл. 140.), то не само напред речена средња кретања Месечева чвора и перихела него и средња угловна брзина кретања Месеца око Земље ($n = 13^\circ 10' 35''.0$ за сред. дан) излази да није стална већ подлежи малим вековним убрзањима. По теорији ово убрзање средњег Месечевог кретања n треба да повећава средњу његову дужину L_0 на орбити за $6''$ у току од 100 година, што се ипак потпуно не слаже са посматрањима над Месецем, која дају око $10''$ уместо $6''$. Још није потпуно доказано, али је вероватно, да је узрок тој несугласници између теорије и посматрања неко ништавно успоравање ротационог кретања саме Земље т. ј. повећавање трајања дана. На тај начин, кад означимо интервал времена $(t - t_0)$, изражен у годинама, са s а средњу дужину епохе t_0 са K , добићемо, по општим правилима чл. 125. и 126. за средњу дужину Месеца L_0 на његовој орбити, у моменту t , овакав израз

$$L_0 = K + n (t - t_0) + 0''.001 s^2 \dots \dots \dots (11.)$$

При простом елиптичком кретању истинита дужина L Месечева разликовала би се од те средње L_0 само за величину *једначине центра* $\tau_1 = L - L_0$, која је изражена редом (I'); радиус-вектор пак или њему обратно пропорционална хоризонтална, екваторијална паралакса Месеца π добила би се помоћу реда (II'). При средњој величини ексцентрицитета Месечеве орбите $e = 0.055$, ти редови излазе управо овакви:

$$\left. \begin{aligned} L &= L_0 + 6^\circ 17'.2 \sin M + 12'.8 \sin 2 M + \dots \dots \dots \\ \pi &= 57' 2''.6 + 3' 6''.5 \cos M + 10''.2 \cos 2 M + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11.)'$$

где је $M = L_0 - \Pi$. Али овде сад треба да буде додато још много чланова, који се изводе по теорији гравитације и који изражавају *периодичке пертурбације* дужине L и паралаксе π усљед гравитационог дејства Сунца и планета. Највећи и најзначајнији од њих, откривени посматрањима далеко још пре Њутна, јесу ови:

пертурбације	дужине L	паралаксе π	
свекција	$+ 1^\circ 16'.5 \sin (2\tau - M) + \dots$	$+ 34''.4 \cos (2\tau - M) + \dots$	} (11.)''
варијација	$+ 39'.5 \sin 2\tau + \dots \dots \dots$	$+ 28''.5 \cos 2\tau + \dots \dots \dots$	
годишња једначина	$- 11'.2 \sin m + \dots \dots \dots$	$- 0''.3 \cos m + \dots \dots \dots$	
паралактичка неједнакост	$- 2'.1 \sin \tau \dots \dots \dots$	$- 1''.0 \cos \tau \dots \dots \dots$	
$\dots \dots \dots$	$\dots \dots \dots$	$\dots \dots \dots$	

при чему τ овде означава разлику средњих и истинитих дужина Месеца и Сунца а m — средњу аномалију Сунчеву.*) Услед свију ових пертурбација, разлика $L - L_0$ може да достигне скоро до $\pm 8^\circ$; паралакса пак π и њој одговарајући угловни полупречник R — до оних крајњих величина, који су били наведени у чл. 96. Што се тиче геоцентричке ширине Месеца b и дужине његове l , која се рачуна по еклиптици, — оне се добивају из истините његове дужине L у орбити по већ познатим нам правилима и формулама (чл. 106., 116. и 126.).

У астрономским се календарима срачунавају места Месечева по теорији и по таблицама Ханзен-овим, основаним на многобројним посматрањима Месеца у Гринвичу од 1824. до 1850. године. Али су несугласице између ових места и стварних, поступним увећањем, достигле сад већ до $27''$ (по дужини); због тога се срачунатим координатама по теорији, сада додају емпириски срачунате корекције (по Њукомбу), које се дају засебно на крају Nautical Almanac-а за сваку годину.

142. Пертурбације у елиптичком кретању планета.

Знаменити математичари Лагранж и Лаплас разрадили су општу теорију пертурбација великих планета Сунчеве системе, која даје ове најзначајније резултате:

1.) Дуже полуосе a елиптичких планетних орбита као и трајања S њихових револуција око Сунца (чл. 138.), која зависе од тих полуоса, неподлеже вековним пертурбацијама већ само периодичким.

2.) Ексцентрицитети e и нагиби i орбита мењају се такође само периодички, али у тако дугим периодима, да се у току од неколико хиљада година, слично са вековним пертурбацијама, изражавају члановима облика $c_1 t + c_2 t^2 + \dots$. Тако се на пример ексцентрицитет Земљине орбите ($e = 0.0168$) смањује сваке године за 0.0000004, али, кад приближно после 20000 година достигне најмању своју величину (0.005), онда ће се почети поново да повећава. Исто ће тако и нагиб еклиптике i , који се мења сваке године за $0''.48$, достићи после 30000 година до $2\frac{1}{2}^\circ$ у односу према садањој еклиптици, затим ће се мењати већ у супротном смислу.

3.) Вековним пертурбацијама на планетним орбитама подврнута су управо само линије чворова ($\delta\Omega$) и апсида (Π), које прелазе са већом или мањом брзином цео круг. Код свију планета, са изузетком само Венере, апсиде се померају у смислу директног кретања (за Земљу $11''.5$ за годину дана) а чворови у смислу ретроградном (за Земљу $8''.7$ годишње.)

Из свега овде реченога излази, између осталог, закључак о стабилности садашњег облика Сунчеве системе, која је окарактерисана приближно кружним обликом планетних орбита, малим нагибом њихових равни једне према другој и кретањем свију планета у једном и истом (директном) правцу.

При одређивању места какве планете, за сваки дани момент времена, на основу потпуне теорије пертурбација, које се на њу врше утицајем свију осталих планета, — њене се хелиоцентричке координате λ , β и r срачунавају

*) Којфицијент код $\sin \tau$ у паралактичкој неједнакости, слично са Месечевом једначином у теорији кретања Земље (чл. 139.), зависи од истих величина m_0 , m' , R_0 и r ; због тога, пошто је одређен из посматрања, он може да послужи за извод Сунчеве паралаксе, која и излази на тај начин око $8''.81$. Из броја осталих, мањих неједнакости особито је интересантна $8''.6 \sin L$, која произлази због елипсоидног облика Земље (чл. 133.) па због тога може да послужи за оцену спљоштености Земље s по бројној вредности коефицијента $8''.6$, откривеног из посматрања Месеца. Изведена на тај начин спљоштеност s излази скоро исто таква $\left(\frac{1}{294}\right)$ као и из мерења стелена. Колико је сложена теорија Месечева кретања, може се судити по томе, што за срачунавање истините дужине његове L са тачношћу до $0''.1$, треба да се узме у напред споменутих изразама његових редова не мање од 80 чланова.

узимајући прво у обзир само напред споменуте вековне промене елемената Ω, i, e и Π елиптичког њеног кретања а затим се тек њима додају и теорне перисодичне њихове пертурбације $\Delta\lambda, \Delta\beta$ и Δr , које, уопште говорећи, не бивају врло велике. На пример, пертурбације $\Delta\lambda$ у дужинама Меркура, Венере, Земље и Марса не превазилазе $\pm \frac{1}{4}'$, $\pm \frac{1}{2}'$, $\pm 1'$ и $\pm 2'$, али се код Јупитера и Сатурна оне накупе у току дугог 900 годишњег периода до $28'$ и $48'$.

Знатна несугласица између, срачунатих по теорији, дужине α и ширине β какве планете и њене дужине α' и ширине β' , које су добивене из посматрања, треба, разуме се, да указује на неку нетачност основаних величина њених елемената Ω, i, n, e, Π и K или пак на неку нетачност, у теорији узетих, маса m', m'', m''' и т. д. пертурбационих планета. Овако, из посматрања, откривене разлике $\lambda - \lambda'$ и $\beta - \beta'$ и служе обично за изналажење највероватнијих корекција $\Delta\Omega, \Delta i, \Delta n, \Delta e, \Delta\Pi, \Delta K, \Delta m', \Delta m'', \Delta m'''$ и т. д. тих величина. На тај се начин не само контролишу већ раније изведене масе планета, које имају пратилаца (чл. 138.), већ се одређују и масе Меркура и Венере, које су без пратилаца те у односу према маси Сунца M и Земље m_0 , излазе:

$$\text{маса Меркура} = \frac{1}{5300000} M = 0.06 m_0$$

$$\text{„ Венере} = \frac{1}{412000} M = 0.79 m_0.$$

Ускоро после Хершеловог открића планете Урана (1781. год.) појавио се један проблем сасвим нове врсте. Разлика између места, срачунатих за ту планету по теорији и оних, добивених из посматрања, које су око 1840. године досезале до $2'$, указивале су на пертурбације њенога кретања, које произлазе од неке још удаљеније планете од Сунца па је требало одредити макар и приближно њену орбиту, да би се могла наћи на небу дурбином. Теоријска истраживања Леверије-ова по томе питању увенчана су тако сјајним успехом, да је предвиђена планета (Нептун) била нађена 1846. године скоро на истом месту, које је он већ предсказао био. До тога открића могла се сматрати као довољно задовољавајућа слеедећа елиптичка формула Бодје-ова за средње растојање a сваке планете од Сунца у зависности од њене нумере N , ако се нумере рачунају редом почев од Сунца и ако се под $N = 5$ подразумева сав широки појас малих планета између орбита Марса и Јупитера:

$$(a) = 0.4 + 0.3 \times 2^{N-2}$$

И заиста по њој се добивају најме такве вредности (a) , које су доста сасгласне са истинитим a (чл. 123.):

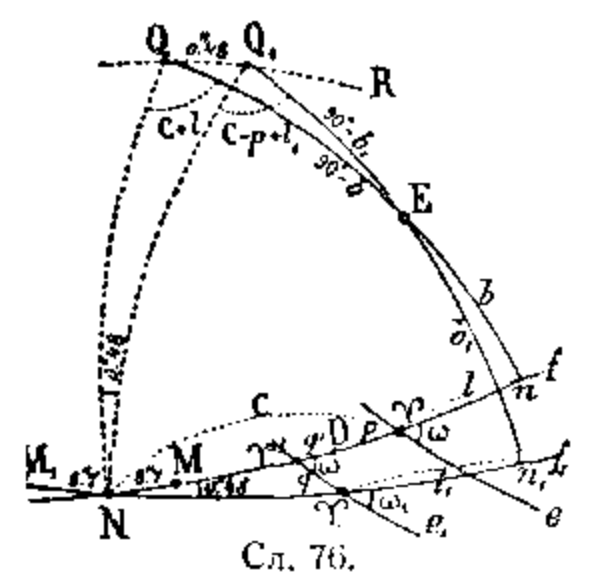
За планете:	Мерк.,	Вен.,	Земљу,	Марса,	Појаса м. пл.,	Јуп.,	Сат.,	Урана
N	1	2	3	4	5	6	7	8
(a)	0.5	0.7	1.0	1.6	2.8	5.2	10.0	19.6
a	0.4	0.7	1.0	1.5	(3.3)	5.2	9.5	19.2

На основу овога је Леверије узео у својим срачунавањима за предвиђену планету, по реду девете, да је $a = 38.8$; у самој пак ствари за Нептун је затим изашло, да је $a = 30.0$ (чл. 123.)

143. Вековне промене у положају еклиптике.

Да расмотримо сада темељније, како се управо мења положај еклиптике у току времена и какве промене треба отуд да произађу у еклиптичким координатама небесних тела.

Узмимо, да велики круг $N\Upsilon f$ на небесној сфери (сл. 76.) представља еклиптику а Υe екватор у неком одређеном моменту, на пример у почетку $1850 + t$ године. Као што је напред речено, по истеку једне године нова ће се еклиптика $M_1N\Upsilon_1f_1$ нагнути према старој за угао $\sphericalangle fNf_1 = 0''48$, при чему ће се то нагибање започети у тачци M а завршити у M_1 , на растојању $8''7$ од тачке пресека N . На тај ће начин овај силазни (доњи) чвор N покретне еклиптике одступити по првобитној за $8''7$ у току године а по покретној за лук $MM_1 = 2 \times 8''7 = 17''4$; према томе, у односу према тачци пролетње равнодневице Υ , — која такође одступа у истом ретроградном правцу за $50''2$, — растојање тога чвора $N\Upsilon = C$, које је 1850. године било равно $7^\circ 0'$, треба да се смањи сваке године за $50''2 - 17''4 = 32''8$, т. ј. треба да се изрази уопште овако



$$N\Upsilon = C = 7^\circ 0' - 32''8 t \dots \dots \dots (l)$$

Прецесија премешта годишње тачку Υ управо за величину лука $\Upsilon\Upsilon' = P$, не мењајући ниуколико нагиб екватора $\sphericalangle f\Upsilon e = \sphericalangle f\Upsilon' e_1 = \omega$ према почетној еклиптици Nf ; али повртање њено у нов положај Nf_1 изазива још и премештање тачке Υ' у директном правцу по екватору за величину лука $\Upsilon'\Upsilon_1 = q$ и мења нагиб његов ω на $\omega_1 = f_1\Upsilon_1e_1$. Кад се пренесе по Nf лук $ND = N\Upsilon_1$ и означи $\Upsilon'D$ са q' , увидеће се, да се она годишња величина прецесије $p = 50''23$, која се открива посматрањем (чл. 102.) претставља управо луком $p = P - q'$; саме пак величине $\omega_1 - \omega$, q и q' лако се добивају из елементарног троугла $\Upsilon'N\Upsilon_1$, које при вредностима $C_0 = 7^\circ 0'$ и $\omega_0 = 23^\circ 27' 31''8$ за 1850. г. излазе овакве:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 - \omega &= - 0''48 \cos (C - p) = 0''476 \\ q &= 0''48 \frac{\sin (C - p)}{\sin \omega} = 0''147 \\ q' &= q \cos \omega = 0''135 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (l')$$

Смањивање нагиба еклиптике ω према екватору за $0''476$ које отуда произлази, потпуно се потврђује и на тачном његовом одређивању у разним годинама из посматрања.

Замислимо сада полове Q и Q_1 (сл. 76.) почетне еклиптике Nf и оне промењене у току године Nf_1 па повуцимо кроз њих лук великога круга QQ_1R и кругове ширина QE_n и $Q_1E_{n_1}$ неке звезде E ; при чему ће $\Upsilon n = l$ и $E_n = b$ бити њена дужина и ширина у почетку године, а $\Upsilon_1 n_1 = l_1$ и $E_{n_1} = b_1$ — на крају те године. Пошто је $NQR = NQ_1R = 90^\circ$, $QQ_1 = 0''48$, $NQn = N\Upsilon + \Upsilon n = C + l$ а $NQ_1 n_1 = N\Upsilon_1 + \Upsilon_1 n_1 = C - p + l_1$, то ће се из елементарног троугла QQ_1E , са доста малим углом $\sphericalangle QEQ_1 = 0''48 \frac{\cos (C + l)}{\cos b}$, лако добити за годишње промене $\Delta l = l_1 - l$ и $\Delta b = b_1 - b$ овакви изрази:

$$\left. \begin{aligned} \Delta l &= + p - 0''48 \cos (C + l) \operatorname{tg} b \\ \Delta b &= + 0''48 \sin (C + l) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (m.)$$

Кад се помноже ове величине Δl и Δb са бројем година τ , које растављају ма какве две епохе $1850 + t$ и $1850 + t'$ и кад се при том стави за угао C бројна вредност, која одговара средини тога интервала τ , онда је већ лако прећи са координата звезде l и b , које су дане за прву епоху, на такве исте њене координате l' и b' друге епохе.

Задаће:

1.) Показати, да је брзина V кретања планете по њеној елиптичкој орбити при сваком радиус-вектору r исто таква, као и она, коју би та планета добила на том истом растојању r од Сунца, при падању на њега без икакве почетне брзине са растојања $r_0 = 2a$.

У другом ће случају полуоса праволиниске орбите бити такође равна a ; због тога ће се и величина брзине V добити по формули (N) таква иста.

2.) Применити формулу (N) на падање тела на Земљину површину.

Ако у тој формули будемо разумели под r полупречник Земљин, под $\frac{\mu}{r^2} = g$ убрзање силе теже а под $2a - r = h$ висину, са које пада слободно пуштено тело, онда ће, због релативно мале h , изаћи, да је $V^2 = \frac{\mu h}{ar} = 2gh$.

3.) Показати, да ће једначине (I) и (G) предње главе (чл. 124.) у случају параболне орбите ($e = 1$) довести до следеће једначине трећег степена за одређивање истините аномалије v по даноме времену $(t - t_0)$, које је протекло од епохе t_0 пролаза тела кроз перихел:

$$tg \frac{v}{2} + \frac{1}{3} tg^3 \frac{v}{2} = \frac{2n''}{p^{3/2}} \cdot (t - t_0) \dots \dots \dots (G')$$

Ако ставимо да је $a = \frac{p}{\epsilon}$ или $e^2 = 1 - \epsilon$, где је ϵ бескрајно мала величина, онда из формула (4.) и (I) излази, да је $n'' = \frac{n'_0}{p^{3/2}} \epsilon \sqrt{\epsilon}$, $E = \sqrt{\epsilon} tg \frac{v}{2}$ и Кеплерова ће се једначина (G) претварати у (G') на овај начин:

$$E - \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \left(E - \frac{1}{6} E^3 + \dots\right) = \frac{\epsilon}{2} E + \frac{1}{6} E^3 = n'' (t - t_0).$$

4.) Колико би било трајање звезданог Месечевог оптицаја S , кад средња паралакса његова неби била равна $57'$ већ $6^\circ = 360'$?

$$\left[S = 27.32 \left(\frac{57}{360}\right)^{3/2} = 0.685 \text{ ср. дана} = 16 \frac{1}{2} \text{ часова} \right].$$

5.) Колико би било трајање звезданог Месечевог оптицаја S , кад би маса његова била 10 пута мања?

$$\left[\text{Тада би било } S = 27.32 \left(\frac{1 + \frac{1}{81}}{1 + \frac{1}{810}}\right)^{3/2} = 27.32 \left(1 + \frac{1}{180}\right) = 27.46 \text{ ср. дана} \right].$$

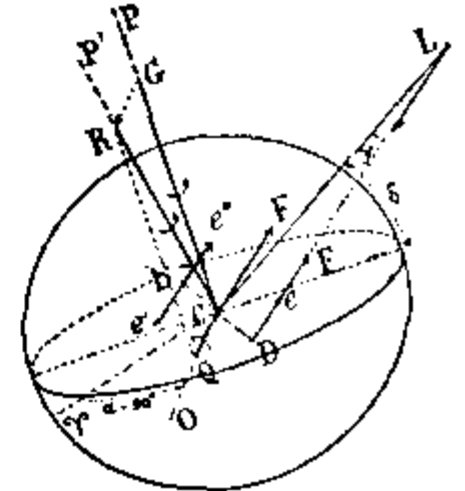
6.) Како се помера по небесној сфери пол еклиптике Q ?

Он се помера по маломе кругу сфере, чији (малогa круга) се центар налази на пресеку великих кругова MQ и M_1Q_1 (сл. 76.), т. ј. на кругу ширина са дужином $360^\circ - C$; полупречник пак тога круга у садање време износи $\frac{0'' 48}{17'' 4 \sin 1^\circ} = 1^\circ 35'$.

Г Л А В А ХХІ. ПРЕЦЕСИЈА И НУТАЦИЈА.

144. Пертурбација ротационог кретања Земље.

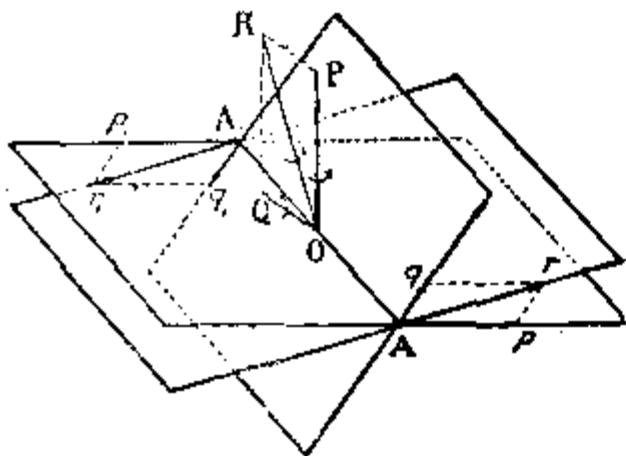
Услед елипсоидног облика Земље сила $DF = F$, — којом Сунце или Месец L (сл. 77.) привлачи Земљу, — дејствује, у равни PCL деклинационог круга небесног тела, правцем DL , који не пролази кроз центар Земље C , већ на неком малом растојању од њега $CD = CL \sin \angle CLD = r \cdot \sin y$ (чл. 133.). Због тога, ако се на продужењу CD пренесе $CD' = CD$ и у тачци D' замисле, паралелно са DF , две силе, које се узајамно поништавају т. ј. $D'e' = D'e'' = \frac{1}{2} F$, онда ће се једна од њих $D'e''$ сложити са $De = \frac{1}{2} F$ у резултанту $CF = F$, која ће имати утицаја само на прогресивно кретање центра C Земљиног; друга $D'e'$ са оном која је још остала $De = \frac{1}{2} F$ саставиће спрег силе, који тежи да обрне сву Земљу око осе CO , која је управна на раван PCL и то тако, да приближи Земљин екватор правцу CL . Положај осе CO тога спрега у равни екватора одредиће се углом $\angle \gamma CO = \alpha - 90^\circ$, где α означаје рехтасцензију небесног тела L ; момент пак спрега (производ силе $\frac{1}{2} F$ са краком $DD' = 2 CD$) биће



Сл. 77.

$$X = F r \sin y \dots \dots \dots (1.)$$

Да би се одредило дејство пертурбационог спрега ($De, D'e'$) на ротацију Земље, која се врши по инерцији око стабилне њене осе CP , — да видимо спочетка, како се две ротације чврстога тела слажу у једну, резултантну. Пошто се крак свакога спрега може узети ма какав, само ако његов момент остане исти, — од кога само и зависи његово дејство, — онда, да замислимо, да на



Сл. 78.

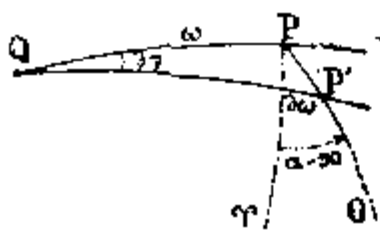
тачку O каквога чврстог (сл. 78.) тела дејствују у разним равнинама два спрега (Ar, A_1r_1) и (Aq, A_1q_1) са једним истим краком $AA_1 = 1$ тако, да ће моменти њихови бити $Ar = P$ и $Aq = Q$. Кад сложимо сада силе Ar са Aq и A_1q_1 , са A_1q_1 по правилу о паралелограму сила, добићемо две једнаке и међусобом паралелне резултате њихове Ar и A_1r_1 ; најзад је очевидно, да ће се правац осе OR овога резултантног спрега (Ar, A_1r_1) и сам момент његов $Ar = R$ одредити још простије и директно, ако се на осам OP и OQ , компонентних спрегова пренесу

дужине OP и OQ пропорционалне моментима P и Q и ако се по њима конструише паралелограм $POQR$. Треба само узети за услов, да се момент сваког спрега

пренаша по његовој оси у неком одређеном правцу, на пример тако, да се ротација, коју он изазива, представља с десна у лево, — ако замислимо, да стојимо у правцу осе, ногама у тачци O. —

На тај начин, ако на тело, које се обрће око стабилне осе OP, подејсвује какав спрег (Aq A₁q₁), који тежи да га обрне око друге осе OQ, онда ће се пређашња његова оса OP преместити у раван POQ. Лако је и врло интересантно да се у томе убедимо на огледу са чигром, која се брзо обрће, на тај начин, што бисмо јој дали лак ударац. Сила теже такође стално тежи да промени нагиб њене осе, али уместо тога, њена оса, као што је познато, описује око вертикалне линије коничну површину и то утолико спорије уколико је брзина њене ротације већа.

Сасвим се то исто дешава и са ротационом осом Земљинога елипсоида под утицајем на њега пертурбационог дејства Месеца а тако исто и Сунца у сваком бескрајно малом елементу времена dt. Ако пренесемо по оси CO (сл. 77.) величину CQ = Xdt а по оси CP величину момента CG = Z, који одговара брзини ω ротације Земљине по инерцији, и, ако по њима конструишемо паралелограм QCGR, онда ће се дијагоналном његовом CR и одредити оса резултантне ротације; пошто је пак Земљина оса стабилна оса, то ће она по истеку времена dt и заузети тај нови правац CRP', који заклапа са



Сл. 79.

пређашњим CP бескрајно мали угао $\frac{Xd\tau}{Z}$; сама пак брзина Земљине ратације ω неће се при томе ни уколико променити, јер ће се момент CR, који њој одговара, разликовати од CG само за бескрајно малу величину другог степена.

Услед напред реченога премештаја $\frac{Xd\tau}{Z}$ пола P на небесној сфери, у односу према пепомичном полу Q еклиптике (сл. 79.), колур ће солстиције PQ заузети, по истеку времена dt, нов правац P'Q, који заклапа са пређашњим PQ бескрајно мали угао $\angle PQR' = d\psi$ а лук PQ, који представља нагиб екватора према еклиптици ω, промениће се на P'Q = ω' = ω + dω. Разуме се, да ће се за величину истог угла dψ преместити по еклиптици и тачка пролетње равнодневице Υ. У току пак ограниченог времена τ накупиће се и ограничене величине угла $\angle PQR' = \psi$ и промене нагиба ω' - ω = Δω.

145. Приближни изрази пертурбација.

На основу реченога у предњем члану, бескрајно мали премештај PQR' = dψ колура солстиције PQ (сл. 79.) и промена dω лука PQ за време dt изразиће се из елементарног троугла PQR' овако:

$$d\psi \cdot \sin \omega = PP' \cdot \cos(\alpha - 90^\circ) = \frac{X dt}{Z} \sin \alpha, \quad d\omega = PP' \cdot \sin(\alpha - 90^\circ) = \frac{X dt}{Z} \cos \alpha. \quad (1)$$

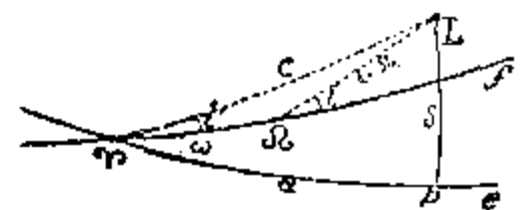
Ако пак у формули (j) чл. 133. уместо φ₀ и M ставимо деклинацију δ и масу m' Месечеву, онда ћемо, на основу (1), имати:

$$\frac{X dt}{Z} = \frac{F r \sin \gamma dt}{Z} = x \cdot \sin 2\delta \cdot dt, \quad \text{где је } x = \frac{\gamma m' a^2}{r^3 Z} \quad (2)$$

па је због тога

$$d\psi \sin \omega = x \sin 2\delta \sin \alpha \cdot dt, \quad d\omega = -x \sin 2\delta \cos \alpha \cdot dt \quad (3)$$

Ради упрошћења, током свега што буде следовало, овде можемо сматрати као променљиве са времена τ само величине α и δ а растојање r Месеца од Земље па, разуме се, и x — као сталне. Замислимо на небесној сфери (сл. 80.) екватор Γe, еклиптику Γf, велики круг Месечеве орбите δL под углом $\angle f\delta L = i = 5^\circ 8' 8''$ и место самога Месеца L; да повучемо затим лук Lp управно на Γe, да спојимо Γ и L луком ΓL па кад означимо Γδ = δ, δL = c - δ, $\angle f\Gamma L = i'$ и ΓL = c, да узмемо у свему што даље следује, да је приближно $\cos i = 1$ а $\sin^2 i = 0$. Тада ће из троуглова LΓδ и LΓp изаћи:



Сл. 80.

$$\begin{aligned} \sin c \sin i' &= \sin (\epsilon - \delta) \sin i \\ \sin c \cos i' &= \cos (\epsilon - \delta) \sin \delta + \sin (\epsilon - \delta) \cos \delta = \sin \epsilon \\ \cos c &= \cos (\epsilon - \delta) \cos \delta - \sin (\epsilon - \delta) \sin \delta = \cos \epsilon \\ \sin \delta &= \sin c \sin (\omega + i') = \sin \omega \cdot \sin \epsilon + \cos \omega \sin i \sin (\epsilon - \delta) \\ \cos \delta \sin \alpha &= \sin c \cos (\omega + i') = \cos \omega \cdot \sin \epsilon - \sin \omega \sin i \sin (\epsilon - \delta) \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos c = \cos \epsilon \end{aligned}$$

Према томе је

$$\begin{aligned} \sin 2\delta \sin \alpha &= 2 \sin \omega \cos \omega \sin^2 \epsilon + 2 \cos 2\omega \sin i \sin \epsilon \sin (\epsilon - \delta) \\ &= \sin \omega \cos \omega - \sin \omega \cos \omega \cos 2\epsilon + \cos 2\omega \sin i [\cos \delta - \cos (2\epsilon - \delta)] \\ \sin 2\delta \cos \alpha &= \sin \omega \sin 2\epsilon - \cos \omega \sin i [\sin \delta - \sin (2\epsilon - \delta)]. \end{aligned}$$

Сматрајући приближно ϵ и δ за средње дужине Месеца и његовог чвора и ако означимо са n и v њихове дневне промене: $13^\circ 10' 6'' = \frac{1}{4.35}$ и $3' 10'' 6 = \frac{1}{1082}$, онда треба да помножимо у овим изразима чланове са $\cos 2\epsilon$ и $\sin 2\epsilon$ — са $d\tau = \frac{d2\epsilon}{2n}$, чланове са $\cos \delta$ и $\sin \delta$ — са $d\tau = -\frac{d\delta}{v}$ а чланове са $\cos (2\epsilon - \delta)$ и $\sin (2\epsilon - \delta)$ — са $d\tau = \frac{d(2\epsilon - \delta)}{2n + v}$; али пошто ће коефицијент $\frac{1}{2n + v}$ у последњим члановима бити 500 пута мањи од коефицијента $\frac{1}{v}$ у предидућим, то, интегрирајући израз (3.), ми ћемо просто одбацити те сразмерно мале чланове, и, тада ће изаћи:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= x \cos \omega \cdot \tau - x \frac{\cos \omega}{2n} \sin 2\epsilon - x \frac{\cos 2\omega \sin i}{v \sin \omega} \sin \delta \\ \omega - \omega_0 = \Delta \omega &= x \frac{\sin \omega}{2n} \cos 2\epsilon + x \frac{\cos \omega \sin i}{v} \cos \delta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.)$$

На сличан ће се начин изразити и пертурбационо дејство Сунца, само треба у овим формулама (4.) сматрати $\sin i = 0$ и ставити уместо n — дневну промену $n_\odot = 59' 8''$ средње дужине Сунца \odot а уместо x — величину

$$x_\odot = \frac{\gamma M a^2}{R^3 Z} \dots \dots \dots (2.)_\odot$$

где је M маса Сунчева а R средње растојање његово од Земље. На тај ће се начин укупно дејство оба небесна тела представити у облику:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= (x_\odot + x) \cos \omega \cdot \tau - x_\odot \frac{\cos \omega}{2n_\odot} \sin 2\odot - x \frac{\cos \omega}{2n} \sin 2\epsilon - x \frac{\cos 2\omega \cdot \sin i}{v \cdot \sin \omega} \sin \delta \\ \Delta \omega &= x_\odot \frac{\sin \omega}{2n_\odot} \cos 2\odot + x \frac{\sin \omega}{2n} \cos 2\epsilon + x \frac{\cos \omega \cdot \sin i}{v} \cos \delta \end{aligned} \right\} \dots \dots (5.)$$

Први члан узрза ψ показује, да се колур солстиције а с њиме заједно и тачка пролетње равнодневице Υ стално и равномерно премештају у ретроградном правцу, у чему се и састоји појава *прецесије*. Као што је већ било речено у чл. 102. ово премештање из посматрања излази да је равно $50'' 24$ за годину дана; али ако се узме у обзир премештај тачке Υ у директну страну за $0'' 135$ услед пертурбационог дејства планета на еклиптику (чл. 143) и ако под τ подразумевамо број протеклих дана, онда ће изаћи

$$(x_\odot + x) \cos \omega = \frac{50'' 37}{365.25} \text{ или } x_\odot + x = 0'' 1503,$$

а из (2.) и (2.)_⊙ имаћемо

$$\frac{x}{x_\odot} = \frac{m'}{M} \cdot \frac{R^3}{r^3} = \frac{(389)^3}{81 \times 327000} = 2.22;$$

из тих двеју једначина са x_\odot и x добиће се $x_\odot = 0'' 0467$ и $x = 0'' 1036$. На тај ће начин бројне вредности свију осталих коефицијената у формулама (5.) изаћи овакве:

$$\begin{aligned} x_\odot \frac{\cos \omega}{2n_\odot} &= 1'' 27, & x \frac{\cos \omega}{2n} &= 0'' 20, & x \frac{\cos 2\omega \sin i}{v \sin \omega} &= 17'' 26 \\ x_\odot \frac{\sin \omega}{2n_\odot} &= 0'' 55, & x \frac{\sin \omega}{2n} &= 0'' 09, & x \frac{\cos \omega \sin i}{v} &= 9'' 22 \end{aligned}$$

При тачнијем изводу зависности пертурбационих дејства Месечевих од елемената елиптичке орбите његове i, δ, e и Π , ка овим нашим нађеним изразима за ψ и $\Delta\omega$ додало би се још неколико чланова са незнатним бројним коефицијентима, од којих су највећи: $+ 0''.21 \sin 2\delta$ у изразу за ψ и $- 0''.09 \cos 2\delta$ у изразу за $\Delta\omega$.

146. Вековно и периодичко колебање Земљине осе.

Укупно пертурбационо дејство Сунца и Месеца на положај Земљине осе у простору, т. ј. на њене координате ψ и ω' , у односу према полу еклиптике Q, изражава се, као што смо мало пре видели, са довољном за нас тачности на овај начин:

$$\psi = P \cdot \tau + N \quad \text{и} \quad \omega' = \omega + \Delta\omega.$$

$$\text{где је } N = - 1''.27 \sin 2\odot - 0''.20 \sin 2\zeta - 17''.26 \sin \delta + 0''.21 \sin 2\delta \quad (P)$$

$$\text{а} \quad \Delta\omega = + 0''.55 \cos 2\odot + 0''.09 \cos 2\zeta + 9''.22 \cos \delta - 0''.09 \cos 2\delta$$

Вековни премештај Земљине осе са коефицијентом $P = 50''.37$, који се врши пропорционално са бројем година τ у ретроградном правцу, зове се *луно-соларна прецесија*; периодичка пак колебања Земљине осе N и $\Delta\omega$ зову се *луно-соларна нутација по дужини и по ширини* (или пак по нагибу еклиптике). Линија пресека екуатора, — који је одређен првим, *средњим* положајем Земљине осе, — са еклиптиком, — која се такође равномерно помера (чл. 143.), — зове се *средња линија равнодневица*; тачка Υ , која јој одговара, зове се *средња тачка пролешње равнодневице*; угловна пак величина $p = P - q' = 50''.24$, за колико се она сваке године помера по еклиптици, усљед померања њеног и екуатора, зове се *општа годишња прецесија**) На тај се начин *испиниши* правац еквинокцијалне линије разликује од *средњега* за величину нутације N а *испиниши нагиб* еклиптике према екуатору ω' од *средњега* ω за величину нутације $\Delta\omega$.

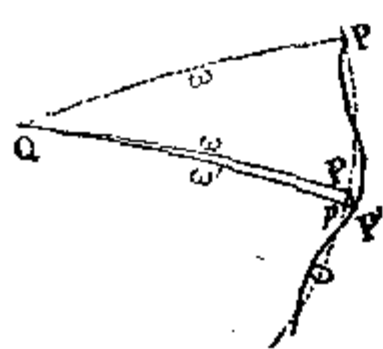
Например, за 1. јануар 1898. године, при $\odot = 281^\circ 9'$, $\zeta = 24^\circ 51'$ и $\delta = 297^\circ 47'$, добићемо по овим формулама (P) и по формулама (I') чл. 143. да је

$$N = + 15''.5, \quad \omega = 23^\circ 27' 31''.8 - 0''.476 \times 48 = 23^\circ 27' 9''.0$$

$$\Delta\omega = + 3.8, \quad \omega' = \omega + \Delta\omega = 23^\circ 27' 12.8$$

Ове су се величине N , $\Delta\omega$, ω и ω' пређе давале на 1. страни Nautical Almanac-а за разне дане у години.

Усљед луно-соларне прецесије средњи се пол екуатора P_0 помера на небесној сфери (сл. 81.) око пола еклиптике Q по маломе кругу полупречника ω за угао $P_0QP = 50''.37$ τ . На нашој се карти звезданог неба (сл. 15.), —



Сл. 81.

где је показан тај круг, — може видети, да ће се приближно кроз 12000 година налазити у близини пола врло сјајна звезда Вега (α Lyrae) и да ће она тада играти улогу Поларне.

Положај се истинитог пола P' одређује увек у односу према средњему P врло малим правоуглим координатама

$$Pp = x = N \sin \omega \quad \text{и} \quad P'p = y = \Delta\omega,$$

па стога, ако се ограничимо само главним члановима нутације $N = - 17''.2 \sin \delta$ и $\Delta\omega = + 9''.2 \cos \delta$, изаћи ће

*) Величине P и q' не остају потпуно сталне, већ се, — као што коказује строга теорија, — изражавају за ма какву $1850 + t$ годину овако:

$$P = 50''.37 - 0''.00024 t, \quad q' = 0''.135 - 0''.00048 t.$$

Усљед тога, коефицијент опште пресеције излази раван $p = 50''.235 + 0''.00024 t$; т. ј. она се свако годишње повећава, а трајање се тропске године $T = 365.2422$ ср. дана (чл. 98. и 101.) постепено унеколико смањује (у току од 1000 година за 6 секунда).

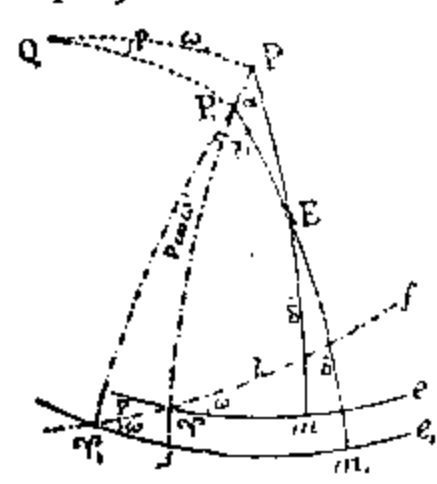
$$\frac{x^2}{(17'' 2 \sin \omega)^2} + \frac{y^2}{(9'' 2)^2} = 1$$

а то значи, да у току од 18.6 годишњег периода повраћаја средње дужине δ Месечева чвора на пређашње своје величине, пол P' описује око средњег P елипсу са полуосама $17'' 2 \sin \omega = 6'' 9'$ и $9'' 2$. Стварни пак пут његов на небесној сфери, који је условљен укупним дејством прецесије и нутације, излази вијугав, како је то показано на сл. 81.

Положај ротационе осе у самоме телу Земљином такође не остаје потпуно сталан. Из тачних су посматрања у садање време откривене једновремене и сагласне међу собом мале периодичке промене у ширинама φ свију места на Земљи, које се завршују у периоду од 428 дана и досежу каткад до $\pm \frac{1''}{4}$ а понекад до $\pm \frac{1''}{10}$, у средњем пак до $\pm \frac{1''}{6}$. То значи, да се у току тога периода Земљин пол (чл. 70.) премешта (у директном правцу) око средњег свог положаја приближно по кругу полупречника $6000 \times 500 \cdot \sin \frac{1''}{6} = 2.5$ сажења (5 метара). Услед тога ни правац меридијана, у свакој тачци на Земљиној површини, не остаје, строго говорећи, сталан, већ се колеба у границама између $\pm \frac{1''}{6} \sec \varphi$.

147. Промене екваторијалних координата звезда услед прецесије.

Да разгледамо, како треба да се мењају екваторијалне координате звезда некретница услед луно-соларне прецесије. Да предпоставимо еклиптику Υf и њен пол Q (сл. 82.) као непомичне и да замислимо у неком одређеном моменту времена t средњи положај тачке пролетње равнодневице у Υ , екватора у Υe и његова пола у P а такве исте положаје њихове у Υ_1 , у $\Upsilon_1 e_1$, и у P_1 по истеку године дана, при чему ће, као што је напред речено, бити $PQ = P_1Q = \sphericalangle f \Upsilon e = \sphericalangle f \Upsilon_1 e_1 = \omega$ и $\sphericalangle PQR_1 = \sphericalangle \Upsilon \Upsilon_1 = P = 50'' 37$. Ако замислимо велике кругове $P_1 \Upsilon_1$ и $P \Upsilon$, — продуживши овај послењи до пресека његова са екватором $\Upsilon_1 e_1$ у тачци s , — и, ако повучемо кроз какву звезду E кругове PEm и $P_1 E m_1$, то ће $\sphericalangle \Upsilon P m = \alpha$ и $E m = \delta$ бити старе њене координате а $\sphericalangle \Upsilon_1 P_1 m_1 = \alpha_1$ и $E m_1 = \delta_1$ нове, после годину дана; због тога ће се годишње промене $\Delta \alpha = \alpha_1 - \alpha$ и $\Delta \delta = \delta_1 - \delta$ извести из елементарног троугла $PP_1 E$ са врло малим углом $E = \sphericalangle PEP_1 = PP_1 \sin \alpha \sec \delta$ у овом облику:



Сл. 82.

$$(\alpha_1 - \sphericalangle \Upsilon_1 P_1 s) - \alpha = E \sin \delta = PP_1 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta$$

$$PE - P_1 E = \delta_1 - \delta = PP_1 \cdot \cos \alpha.$$

Кад се сада потсетимо (чл. 143.) да се тачка Υ_1 , услед промене положаја саме еклиптике, премешта још у директном правцу за величину $q = 0'' 147$ по екватору, онда треба у првој од ових формула у место $\sphericalangle \Upsilon_1 P_1 s = \Upsilon_1 \Upsilon \cdot \cos \omega = P \cos \omega$ ставити $P \cos \omega - q$. На тај ћемо начин, — кад још ради скраћења означимо

$$m = P \cos \omega - q \quad \text{и} \quad n = P \sin \omega, \quad -$$

имати, да је

$$\Delta \alpha = m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta, \quad \Delta \delta = n \cos \alpha \dots \dots \dots (n)$$

где се бројне вредности $m = 46'' 06$ и $n = 20'' 05$ могу без осетне погрешке сматрати као сталне за период времена од 1850. до 1900. године па чак и нешто дуже*).

*) За сваку ће се $1850 + t$ годину величине m и n тачније изразити овако:

$$m = 46'' 06 + 0'' 00028 t, \quad n = 20'' 05 - 0'' 00009 t.$$

148. Прелаз са координата једне епохе на другу.

При прелазу са екваторијалних координата звезда α_0 и δ_0 за епоху t_0 на α и δ за епоху $t = t_0 + \tau$, неопходно је потребно узети у обзир промењљивости годишњих промена $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ у интервалу времена τ , слично са оним, како се при интерполовању узимају у рачун друге разлике (чл. 29.). Кад под $\Delta\alpha_0$ и $\Delta\delta_0$ будемо подразумевали ове промене за епоху t_0 а под $d(\Delta\alpha)$ и $d(\Delta\delta)$ годишње промене њих самих, — које се добивају диференцирањем формула (п), — онда ћемо имати за интервал времена τ овакве средње величине годишњих промена.

$$\Delta\alpha_m = \Delta\alpha_0 + d(\Delta\alpha) \cdot \frac{\tau}{2} \quad \text{и} \quad \Delta\delta_m = \Delta\delta_0 + d(\Delta\delta) \cdot \frac{\tau}{2}$$

а са њима ће се већ са довољном тачности наћи

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha_m \cdot \tau \quad \text{и} \quad \delta = \delta_0 + \Delta\delta_m \cdot \tau$$

У звезданим се каталозима дају координате α_0 и δ_0 увек за *почешак* какве године t_0 а за сваку звезду показане су, како величине $\Delta\alpha_0$ и $\Delta\delta_0$, које тој епохи (t_0) одговарају, тако и њихове промене $d(\Delta\alpha)$ и $d(\Delta\delta)$, помножене ради удобства са 100 (*variatio saecularis*). Помоћу ових пак даних прелази се на координате α и δ за другу епоху $t = t_0 + \tau$ увек за округли број година τ т. ј. поново за *почешак* t године; дејство пак прецесије за остали *разломак* године τ узима се у рачун већ после, заједно са нутацијом, као што ћемо то видети у наредном члану. Да препишемо, ради примера, из „Каталога Фундаменталних Пулковских Звезда“ за 1875.0 годину координате α_0 и δ_0 звезде ζ *Herculis*:

α_0	$\Delta\alpha_0$	100 $d(\Delta\alpha)$	δ_0	$\Delta\delta_0$	100 $d(\Delta\delta)$
16 ^h 36 ^m 34 ^s 497	+ 2 ^s 2956	+ 0 ^s 0035	+ 31° 49' 49" 38	− 7" 139	+ 0" 316

Да бисмо нашли координате те звезде α и δ , кроз $\tau = 10$ година, т. ј. за почетак 1885. године, израчунаћемо:

$$\Delta\alpha_m = + 2^s 2956 + \frac{0^s 0035}{100} \cdot 5 = + 2^s 2958 \quad \text{и} \quad \Delta\delta_m = - 7'' 139 + \frac{0'' 316}{100} \cdot 5 = - 7'' 123$$

а затим

$$\alpha - \alpha_0 = + 2^s 2958 \times 10 = + 22^s 958 \quad \text{и} \quad \delta - \delta_0 = - 7'' 123 \times 10 = - 1' 11'' 23.$$

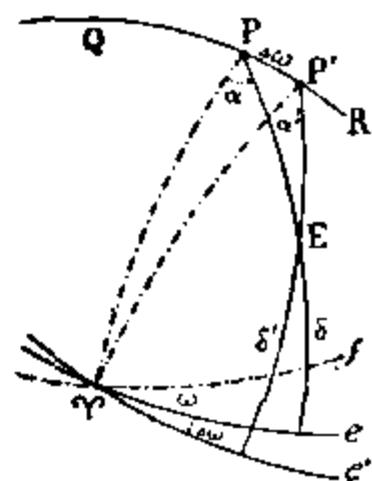
па ћемо добити: $\alpha = 16^h 36^m 57^s 455$ и $\delta = + 31^\circ 48' 38'' 15$.

Разуме се, да се при сувише великом размаку времена τ а исто тако и за звезде сувише блиске полу P не можемо користити диференцијалним формулама (п), већ треба или срачунати нове координате α и δ по тачним формулама из сферних троуглова P_0PQ и P_0PE , или пак наћи прво по даним α_0 и δ_0 еклиптичке координате звезде l_0 и b_0 , затим прећи од њих на l и b за епоху $t_0 + \tau$ по формулама (м) прошле главе и најзад обратити ове l и b понова у α и δ .

149. Промене координата небесних тела усљед нутације.

На еклиптичке координате небесног тела има утицаја, разуме се, само нутација по дужини N , која мења дужину l тога небесног тела управо за

потпуну своју величину. Тако је, у примеру чл. 127. потребно, да се ка срачунатој тамо дужини Сунца L за 30. јули 1885 г., — пре него што се пређе са ње на рехтасцензију, — дода нутација $N = + 0''.6$, која је показана у Nautical Almanac-у за тај дан. Дејство пак нутације N са $\Delta\omega$ на екваторијалне координане одредиће се и узеће се у рачун на овај начин:



Сл. 83.

Узмимо да су α и δ екваторијалне координате какве звезде, срачунате, — како је то речено у предњем члану, — за почетак какве године, узимајући у обзир само прецесију, а, α' и δ' нека су истините њене координате за дани дан године, т. ј. по истеку неког разломака (дела) године $\Delta\tau$. Разлика ће $\alpha' - \alpha$ и $\delta' - \delta$ зависити: 1.) од дејства прецесије за то време $\Delta\tau$, 2.) од дејства нутације по дужини N и 3.) од дејства нутације по нагибу екватора $\Delta\omega$.

Прецесија ће за разломак (део) године $\Delta\tau$ дати

$$(\alpha' - \alpha)_1 = \Delta\alpha \cdot \Delta\tau \quad \text{и} \quad (\delta' - \delta)_1 = \Delta\delta \cdot \Delta\tau \dots \dots \dots (6)$$

Дејство нутације N , које премешта средњи екваторов пол по дужини потпуно онако, као што га прецесија премешта у току од године дана за $P = 50''.37$, представиће се у облику.

$$(\alpha' - \alpha)_2 = \Delta\alpha \cdot \frac{N}{P} \quad \text{и} \quad (\delta' - \delta)_2 = \Delta\delta \cdot \frac{N}{P} \dots \dots \dots (7.)$$

Нутација пак нагиба, премештајући средњи екваторов пол P по кругу солстиција QPR (сл. 83.) за величину $PP' = \Delta\omega$, произвешће у координатама звезде E разлике $(\alpha' - \alpha)_3$ и $(\delta' - \delta)_3$ које ће се одредити из елементарног троугла $PP'E$ са врло малим углом $\sphericalangle PEP' = E = \Delta\omega \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \delta}$, на овај начин:

$$\left. \begin{aligned} \sphericalangle EPR - \sphericalangle EP'R = (\alpha' - \alpha)_3 &= -E \sin \delta = -\Delta\omega \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \\ PE - P'E = (\delta' - \delta)_3 &= +\Delta\omega \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots (8.)$$

Кад сумирамо сад све изразе (6.), (7.) и (8.) и кад означимо при том, ради скраћења писања, да је:

$$\begin{aligned} \Delta\tau + \frac{N}{P} &= C, & \Delta\alpha &= m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta = c, & \Delta\delta &= n \cos \alpha = c', \\ -\Delta\omega &= D, & \cos \alpha \operatorname{tg} \delta &= d, & -\sin \alpha &= d', \end{aligned}$$

онда ћемо имати, да је:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= Cc + Dd \\ \delta' - \delta &= Cc' + Dd' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (p.)$$

где величине C и D не зависе од положаја звезде већ само од данога дана у години; величине пак c , c' , d и d' , напротив, различите су код разних звезда, али су за сваку од њих непромењљиве у току целе године па чак и дуже. Формуле се (p) дају још и у другом облику, који је такође врло погодан за срачунавање. Наиме, стављајући у њима:

$$m \cdot C = f, \quad n \cdot C = g \cos G \quad \text{и} \quad D = g \sin G$$

изаћи ће, да је:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= f + g \sin(\alpha + G) \operatorname{tg} \delta \\ \delta' - \delta &= g \cos(\alpha + G) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (p')$$

Задатке:

1.) Екваторијалне су координате Поларне Звезде (*α Ursae minoris*) у почетку 1885. г. биле: $\alpha = 1^{\text{h}} 16^{\text{m}} 6$ и $\delta = 88^{\circ} 42'$. После ког ће броја година τ поларно растојање те звезде бити најмање?

Средњи екваторов пол треба тада да прође кроз круг ширине те звезде; због тога, ако се по даним α и δ срачуна њена дужина $l = 86^{\circ} 58' 1$ и ширина $b = 66^{\circ} 5' 7$, онда ће тражено време τ да се одреди овако: $\tau = \frac{90^{\circ} - l}{50' 24} = 217$ година (т. ј. око 2102. г.); само пак поларно растојање звезде биће тада

$$90^{\circ} - b - \omega_{\tau} = 28' 8 \quad [\text{јер је } \omega_{\tau} = 23^{\circ} 27' 32'' - 0'' 48 (35 + 217) = 23^{\circ} 25' 5]$$

2.) Расматрајући само најглавније чланове нутације, показати, да је кретање истинитога пола P' по елипси нутације — ретроградно.



ГЛАВА XXII.

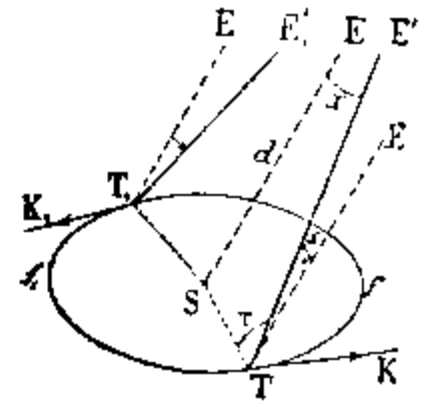
АБЕРАЦИЈА И ПАРАЛАКСЕ ЗВЕЗДА.

150. Дејство паралаксе звезде на њене еклиптичке координате.

Нека је Tff_1 (сл. 84.) орбита Земље T у односу према непомичном Сунцу S . Утврдимо при том да правац SE на неку звезду E или њему паралелни TE називамо *истиинским*; стварни пак правац на њу TE' , који ће се разликовати од TE само за врло мали угао $\sphericalangle ETE' = x$, — ако растојање $SE = d$ до ње није бескрајно велико усравњењу са ST , — да називамо *привидним*.

Кад означимо угао $\sphericalangle STE'$ са T и примимо ST за стално и за јединицу, — што је сасвим допуштено за срачунавање малог угла x , — онда ћемо из троугла STE' наћи, да је:

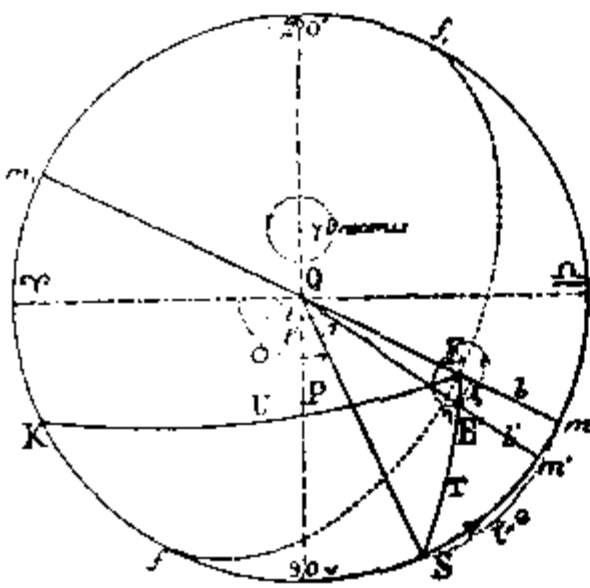
$$x = \pi \sin T, \quad \text{где је} \quad \pi = \frac{1}{d \sin l''} \dots (1)$$



Сл. 84.

За величину тога угла x , — који се мења у зависности од положаја Земље на њеној орбити, — и изгледаће да звезда одступа у равни ETS од истиног правца на њу TE и то увек у правцу ка Сунцу. Стални пак угао π , под којим би се представљало са звезде E средње растојање од Земље до Сунца (при $T = 90^\circ$), зове се *годишња паралакса* или просто *паралакса звезде*.

На основу већ реченога, није тешко одредити, како треба да се мењају у току године привидне са Земље еклиптичке координате звезде l' и b' при даној величини њене паралаксе π . Узмимо, да је на пројекцији небесне сфера fmf, m , (сл. 85.) велики круг еклиптике, Q њен пол, E истино место звезде са дужином $\sphericalangle m = l$ и ширином $\sphericalangle m = b$. Повуцимо кроз звезду E и Сунце S лук великога круга $SE = STE = T$, пренесимо по њему у правцу ка Сунцу лук $EE' = x = \pi \sin T$, при чему ће E' бити привидно место звезде са



Сл. 85.

координатама $\sphericalangle m' = l'$ и $\sphericalangle m' = b'$, и, кад затим означимо дужину Сунца $\sphericalangle S = \sphericalangle QS$ са \odot , а врло мале правоугле координате тачке E' у односу према E — са ξ и η , онда ћемо из елементарног троугла QEE' и правоуглог ESm добити:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (l - l') \cos b = x \sin \sphericalangle m ES = \pi \sin (l - \odot) \\ \eta &= b - b' = x \cos \sphericalangle m ES = \pi \cos (l - \odot) \sin b \end{aligned} \right\} \dots (2.)$$

Одатле се види, да дејство паралаксе π на ширину звезде b достиже максималну величину $\pm \pi \sin b$ онда, када се Сунце при своје годишњем кретању налази на њеноме кругу ширине ($\odot = l$ или $\odot = l \pm 180^\circ$) и да постаје равно нули онда, када је $\odot = l \pm 90^\circ$. Пошто су ξ и η врло мале правоугле координате тачке E' у односу према E и пошто је

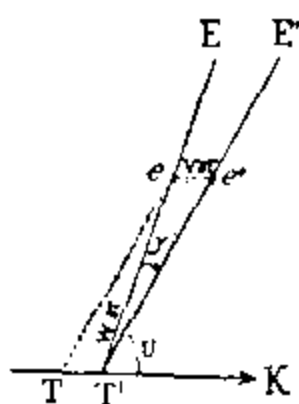
$$\frac{\xi^2}{\pi^2} + \frac{\eta^2}{(\pi \sin b)^2} = 1,$$

то привидно место звезде E' треба уопште да описује у току године елипсу, чија је краћа полуоса $\pi \sin b$ упућена по кругу ширине QEm а дужа π по правцу управноме.

151. Брадлејево откриће аберације звезда.

Са усавршењем дурбинâ и применом њиховом на угломерним астрономским инструментима, тачност се одређивања привидних праваца на небесна тела повећала према пређашњим до тако високог ступња, да је већ било наде, запазити напред речена паралактичка померања звезда некретница те да би се по њима добила макар и приближна представа о даљини до тих небесних тела. Ради тога је, на опсерваторији у Кију-у близу Лондона ($\varphi = 51^\circ 28'$), био постављен 1725. године специјални инструмент (зенитни сектор) великих димензија, који је био специјално удешен за откриће малих промена у меридионалним растојањима или пак у деклинацијама звезда, које кулминирају близу зенита тога места. Из многих посматрања са тим инструментом, Брадлеј је заиста открио некакве годишње промене у деклинацијама звезда, које су достизале до $\pm 20''$, али унеколико другојачије врсте него што су паралактичке. Тако на пример, код звезде γ *Draconis* ($\alpha = 17^h 50^m$, $\delta = +51^\circ 31'$, $b = 75^\circ$), која се налазила у близини колура солстиција (сл. 85.), требало је да се ове промене врло мало разликују од промена у њеним ширинама b , т. ј. требало је, да достигну своју максималну величину лети и зими (при $\odot = 90^\circ$ и $\odot = 270^\circ$); међутим, то се у ствари десило у јесен и у пролеће (при $\odot = 180^\circ$ и $\odot = 0$), тако, да је звезда скренула не у правцу ка Сунцу већ ка тачци еклиптике K , чија је дужина била увек за 90° мања од \odot . Такве су исте резултате давала и посматрања других звезда.

Ово неочекивано откриће годишњег скретања привидних положаја звезда за $20''$, које је у почетку било потпуно неразумљиво, названо је било *аберацијом звезда некретница*; али је ускоро затим сам Брадлеј објаснио и узрок његов, свсвим сличан ономе, како нам, кад се брзо крећемо, изгледа да се мења правац кише или ветра, чим и сами променимо правац својега кретања. Нека су T и e (сл. 86.) две тачке које служе за визирање на звезду и које одређују правац на њу (у дурбину ће то бити тачка пресека кончанице код



Сл. 86.

окулара и оптички центар објектива). Пошто се те две тачке преносе у простору по истоме правцу TK , куда се и Земља креће, и са њеном брзином V , то ће оне у току врло мало времена dt , — које је потребно зраку светлости да пређе простор од e до T , — стићи већ да се премести на растојање $ee' = TT' = V dt$; због тога, *истинити* правац EeT' , — по коме зрак светлости са небесног тела E долази до тачке T' , — треба да се разликује од *привидног* $E'e'T'$ за врло мали угао $eT'e' = u$, који управо и представља напред речену аберацију; јер је максимална његова вредност равна односу средње брзине Земљиног кретања $V = 28$ врста за 1° према

брзини светлости $W = 280000$ врста за 1° , т. ј. $\frac{1}{10000 \cdot \sin 1^\circ} = 20''$,

Настављајући своја посматра, Брадлеј је запазио још и промену у деклинацијама звезда са 18-то годишњом периодом времена, која је досезала наине до $\pm 9''$ те је на тај начин открио главни члан нутације (чл. 146.), који је Њути изгубио из вида при теориском расматрању те појаве.

152. Дејство аберације на еклиптичке координате звезда.

Скретање привидног правца $T'E'$ (сл. 86.) на небесно тело од истинитога правца к њему TE за угао y , разуме се, да треба увек да произлази у равни ETK , која пролази кроз правац Земљинога прогресивног кретања, а наине у правцу K тога кретања. Кад означимо угао $E'T'K$ са U , имаћемо из елементарног паралелограма $TT'e'e$ са дијагоналном $eT' = W d\tau$, да је

$$W \cdot d\tau \cdot \sin y = V \cdot d\tau \cdot \sin U$$

одакле је

$$y = \frac{V}{W} \cdot \frac{\sin U}{\sin 1''} = \frac{V_0}{W} \cdot \frac{V}{V_0} \frac{\sin U}{\sin 1''} = \kappa \frac{V}{V_0} \sin U,$$

где је $V_0 = \frac{2\pi}{s} = 27.9$ врта *средња* брзина Земљиног кретања на растојању њеном од Сунца $= 1$ а $\kappa = \frac{V_0}{W \cdot \sin 1''} = 20''.45$, кад се узме да је $W = 281000$ врта за 1^s .

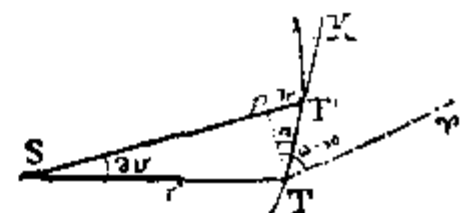
Не гледећи на знатну вредност сталнога коефицијента аберације κ , — да допустимо сад, да је прогресивно Земљино кретање кружно, равномерно па према томе и управно на правац ка Сунцу. Тада ће се оно на небесној сфери (сл. 85.) представити тачком K , која се зове *апекс*, и чија је дужина равна $\odot - 90^\circ$; према томе ће — на основу тек што реченога — *привидно* место E' (l' , b') какве звезде скренути од *истинитога* E (l , b) по луку великога круга $EK = U$ за величину $EE' = y$.

Због потпуне сличности ових скретања звезда са паралактичким, разлике ће се $l - l'$ и $b - b'$ одредити простом заменом у формулама (2.) паралаксе π са величином κ , а дужине Сунца \odot са дужином $\odot - 90^\circ$ тачке K па ће изаћи овакве:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (l - l') \cos b = \pm \kappa \cos (l - \odot) \\ \eta &= b - b' = - \kappa \sin (l - \odot) \sin b \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.)$$

На тај начин привидно место звезде E' описује услед аберације у току године око истинитога E сличну елипсу са полуосама κ и $\kappa \sin b$, као и услед паралаксе, али се увек налази на њој не у правцу ка Сунцу S , већ у правцу ка тачци K , онако, како је то и Брадлеј открио.

Доста је значајна и интересантна та околност, што формуле (4.), које изражавају дејство аберације на координате звезда некретница, остају потпуно тачне и у том случају, кад се узме у њима у рачун ексцентрицитет Земљине орбите $e = \frac{1}{60}$. Заиста, уместо сталне вредности $\kappa = 20''.45$, која одговара брзини кретања Земље V_0 при средњем њеном растојању од Сунца $a = 1$ и уместо приближне дужине $\odot - 90^\circ$ правца тога кретања TK , треба у овим формулама да улазе променљива величина $\kappa \frac{V}{V_0}$ и дужина $\sphericalangle \Gamma TK = \odot - 90^\circ - n$ (сл. 87), при чему се, због мале величине корекционог угла $n = \sphericalangle pTT'$, може узети, да је $n = \text{tgn} = \frac{dr}{rdv}$. По формулама пак (N') и (N) елиптичког кретања, — ограничавајући се само са првим степенима од e , — имаћемо:



Сл. 87.

$$\frac{1}{r} = 1 + e \cos v, \quad \frac{v}{V_0} = \sqrt{\frac{2}{r} - 1} = 1 + e \cos v \quad \text{и} \quad \frac{dr}{rdv} = e \sin v,$$

где v означава истиниту аномалију Земље; због тога ће се формуле (4.) претворити у ове тачније, са корекционим члановима, који зависе од ексцентрицитета e

$$\left. \begin{aligned} (l - l') \cos b &= x(1 + e \cos v) \cos(l - \odot + n) = x \cos(l - \odot) + x e \cos(l - \odot + v) \\ (b - b') \operatorname{cosec} b &= -x(1 + e \cos v) \sin(l - \odot + n) = -x \sin(l - \odot) - x e \sin(l - \odot + v) \end{aligned} \right\} (4.)$$

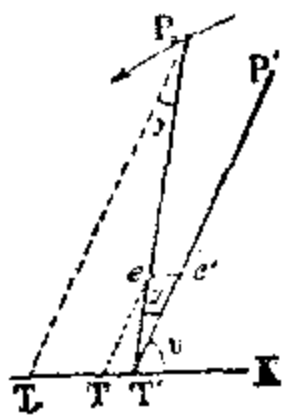
Али, пошто је у тим корекционим члановима $\odot - v = \Pi$ дужина Сунчева перихела, која се у току времена врло лагано мења, то ће други корекциони чланови пређашњих израза (4.) — остајући као стални, — променити врло мало и једино средње место E звезде а не и привидно E' .

153. Аберација планета и Сунца.

Када светлосни зрак P_0T' (сл. 88.) достигне са какве планете P_0 до Земље T' , у том ће се моменту t привидни правац на њу $T'P'$ разликовати од истинитог $T'P_0$ за онај исти угао u , какав је био и за звезде некретнице (чл. 151). Али, пошто је светлосни зрак употребио време $\tau = \frac{d}{W}$, на пролаз растојања $P_0T' = d$, то је требало да се планета налази у том положају P_0 у моменту $t_0 = t - \tau$. Са Земље је тада истинити правац на планету био T_0P_0 , јер се тада Земља налазила у T_0 на растојању $T_0T' = V \cdot \tau$. Из пропорције пак

$$\frac{T_0T'}{P_0T'} = \frac{V}{W} = \frac{T'T'}{eT'}$$

излази, да су правци T_0P_0 , T_0T' и $T'T'$ паралелни па због тога видимо планету увек у правцу $T'T'$, паралелном са оним истинитим T_0P_0 , који је био раније за интервал времена $\tau = \frac{d}{W}$. Време $\frac{1}{W}$, које при томе употреби светлост за пролаз средњег растојања од Земље до Сунца $\left(\frac{5979 \text{ врста}}{\sin \pi_{\odot}}\right)$, узетог као јединица за растојања d , излази да је равно $8^m 18^s$.



Сл. 88.

Тако ће привидне координате планете l' и b' (или и α' и δ') у ма каквом моменту времена t бити исте што и истините l и b (или и α и δ) за момент $t - \tau = t - 498^s d$. За Сунце пак, разлика ће се између истините његове дужине \odot и привидне \odot' изразити непосредно углом $\sphericalangle T_0P_0T' = u = x \frac{V}{V_0} \sin U$, а пошто се у том случају угао U разликује од 90° само за величину ступња $e = \frac{1}{60}$, то ће са тачности до првог степена од e бити:

$$\sin U = 1 \quad \text{и} \quad \frac{V}{V_0} = 1 - e \cos v \quad (\text{чл. 152.})$$

па због тога

$$\odot - \odot' = x(1 + e \cos v) = 20''.45 (1 + e \cos v) \dots \dots \dots (5.)$$

Тако на пример, око 1. јануара, т. ј. када је $v = 0$, треба да буде $\odot - \odot' = 20''.45 \left(1 + \frac{1}{60}\right) = 20''.79$ а око 1. јула $\odot - \odot' = 20''.45 \left(1 - \frac{1}{60}\right) = 22''.11$. Ове се разлике између истините и привидне дужине и дају на првој страни Nautical Almanac-а за разне дане године под заглављем *аберација Сунца*.

154. Дневна аберација.

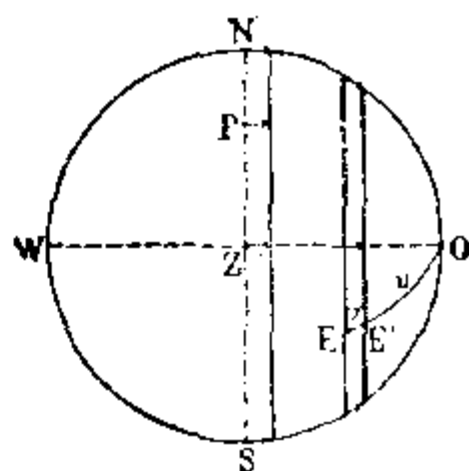
Место на Земљи са кога се врше посматрања премешта се у простору још и услед ротације Земљине и то у правцу источне тачке O хоризонта тога места, при чему брзина v тога премештаја зависи од геоцентричке ширине места φ' и излази, изражена у врстама, оваква:

$$V = \frac{2\pi \times 5979}{86400 - 237} \cos \varphi' = 0.43 \cos \varphi' = \frac{V_0}{65} \cos \varphi';$$

т. ј. за тачке на Земљиним екватору она је 65 пута мања од средње брзине кретања Земље око Сунца V_0 ; због тога ће се дејство *дневне аберације*, — која произлази због ротације Земљине, — изразити истом оном формулом (3.), кад се у њој стави уместо κ величина $\frac{\kappa}{65} \cos \varphi' = 0''.31 \cos \varphi'$ а уместо U угловно растојање посматраног небесног тела од источне тачке хоризонта O .

Према томе, кад Z на небесној сфери (сл. 89.) представља зенит а $NWSO$ хоризонт места посматрања, онда ће *привидно* место E' свакога небесног тела скренути од *истинишког* E по великом кругу EO у правцу ка источној тачци хоризонта O за величину

$$EE' = y = 0''.31 \cos \varphi' \sin EO, \dots \dots \dots (6.)$$

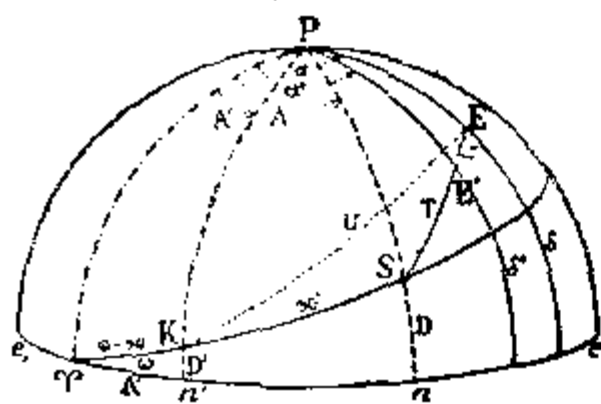


Сл. 89.

која се неће осетно изменити, ако место φ' узмемо географску ширину φ . На тај ће начин сва небесна тела, — која се налазе у извесном моменту на маломе кругу, паралелном са меридијаном $NPZS$, — скренути ка тачци O за једну и исту величину y ; она пак која се налази на самоме меридијану, представиће се на маломе кругу, паралелном са њим, на растојању $0''.31 \cos \varphi$. Ово се, једва приметно дејство дневне аберације, узима у обзир само при најтачнијим посматрањима небесних тела, о чему ће још детаљније бити речи у практичном делу нашега курса.

155. Дејство паралаксе и аберације на екваторијалне координате звезда.

Да нађемо сада изразе за оне мале разлике $\alpha' - \alpha$ и $\delta' - \delta$ између привидних екваторијалних координата какве звезде E и истинитих α и δ , које треба да се појаве услед дејства паралаксе π те звезде и аберације κ . Кад замислимо ради тога на небесној сфери (сл. 90.) екватор $e\tau e$, са његовим северним полом у P , онда ћемо имати,



Сл. 90.

да је $\sphericalangle \tau PE = \alpha$, $PE = 90^\circ - \delta$, $\sphericalangle \tau PE' = \alpha'$, $PE' = 90^\circ - \delta'$; координате пак Сунца S нека буду: $\sphericalangle \tau PS = A$ и $PS = 90^\circ - D$. Онда ћемо из

елементарног троугла PEE' , — користећи се основним изразом (1.) дејства паралаксе π , — добити:

$$\begin{aligned} (\alpha - \alpha') \cos \delta &= EE' \sin \sphericalangle PES &= \pi \sin T \sin \sphericalangle PES \\ \delta - \delta' &= EE' \cos (180^\circ - PES) &= -\pi \sin T \cos \sphericalangle PES; \end{aligned}$$

ако пак уместо $\sin T \sin \sphericalangle PES$ и $\sin T \cos \sphericalangle PES$ ставимо њихове изразе из сфернога троугла PES , онда ће изаћи:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= m \cdot \pi \\ \delta' - \delta &= n \cdot \pi \end{aligned} \right\} \text{ где је } \left. \begin{aligned} m &= -\cos D \sin (\alpha - A) \sec \delta \\ n &= \sin D \cos \delta - \cos D \sin \delta \cos (\alpha - A) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7.)$$

Због потпуне сличности дејства аберације са дејством паралаксе, оно ће се добити из истих формула простом заменом у њима координата Сунца A и D рехтасцензијом A' и деклинацијом D' апекса, т. ј. оне тачке еклиптике K (чл. 152.), која представља у даном моменту правац кретања Земље, а чија је дужина равна $\odot = 90^\circ$. На тај ће начин изаћи:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha = m' x \\ \delta' - \delta = n' x \end{aligned} \right\} \text{ где је } \left. \begin{aligned} m' = -\cos D' \sin (\alpha - A') \sec \delta \\ n = \sin D' \cos \delta - \cos D' \sin \delta \cos (\alpha - A') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8.)$$

Али се овим формулама може дати и онај исти облик, какав имају формуле (р) за нутацију, ако се у њима развију $\sin (\alpha - A')$ и $\cos (\alpha - A')$ и ако се затим ставе следећи изрази, који потичу из правоуглог троугла $\triangle K n'$ са катетама A' и D' и хипотенузом $\angle K = \odot = 90^\circ$:

$\cos D' \cos A' = \sin \odot$, $\cos D' \sin A' = -\cos \omega \cos \odot$ и $\sin D' = -\sin \omega \cos \odot$. Кад се означи ради скраћења писања

$$\begin{aligned} -x \cdot \cos \omega \cos \odot = A, \quad \cos \alpha \sec \delta = a, \quad \operatorname{tg} \omega \cos \delta - \sin \delta \sin \alpha = a', \\ -x \cdot \sin \odot = B, \quad \sin \alpha \sec \delta = b, \quad \sin \delta \cos \alpha = b', \end{aligned}$$

тада ћемо добити

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha = Aa + Bb \\ \delta' - \delta = Aa' + Bb' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (q)$$

где количине A и B , које се мењају у току године, не зависе од положаја звезде; супротно томе пак, количине a , b , a' и b' , које су различите за разне звезде, остају скоро непромењљиве у току чак и од неколико година.

Ако се стави, најзад, у овим формулама (q):

$$A = h \sin H, \quad B = h \cos H \quad \text{и} \quad A \operatorname{tg} \omega = i,$$

онда их можемо представити, као у чл. 149. још и у оваквом облику, врло погодном за рачунање:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha = h \sin (\alpha + H) \sec \delta \\ \delta' - \delta = h \cos (\alpha + H) \sin \delta + i \cos \delta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (q')$$

156. Одређивање коефицијента аберације и паралакса звезда из посматрања.

За непосредно одређивање бројне вредности коефицијента аберације x из посматраних годишњих промена деклинације или пак рехтасцензије какве звезде, могу да послуже формуле (8.). Нека су нпр. $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ деклинације неке звезде, које су добивене из посматрања у разне дане године и корегиране за дејство прецесије и нутације, и, нека тим данима године одговарају величине n_1', n_2', n_3', \dots . Тада ће се истинита деклинација те звезде δ и величина x одредити по методи најмањих квадрата из целе системе једначина:

$$\delta - n_1' x = \delta_1, \quad \delta - n_2' x = \delta_2, \quad \delta - n_3' x = \delta_3, \dots \dots$$

На тај је начин В. Струве из много и врло тачних посматрања деклинација звезда на опсерваторији у Пулкову нашао, да је $x = 20'' 45$; по доцнијим пак посматрањима на истој опсерваторији излази, да је $x = 20'' 49$. Око $20'' 47$

добивено је κ и из посматрања рехтасцензија / разних звезда у Пулкову и на другим опсерваторијама. Кад ставимо сад средњу од ових вредности т. ј. $\kappa = 20''.47$, коју је усвојила и међународна конференција у Паризу 1896. г., у израз

$$\kappa = \frac{V_0}{W \sin l''} = \frac{2\pi}{S \cdot W \sin l''} \frac{a}{\sin \pi_{\odot}},$$

где је a полупречник Земљиног екватора а S трајање звездане године у секундама, и, кад узмемо за брзину простирања светлости W број 299940 километара — 281160 врта, — коју је као најтачнију нашао из огледа физичар Михелсон, — онда ћемо добити средњу паралаксу Сунца $\pi_{\odot} = 8''.80$ која се потпуно слаже са нађеном из посматрања планете Ероса (чл. 126.).

Сличним се начином, на основу формула (7.), могу извести и паралаксе π разних звезда. Али се овом методом успело да одреди и сигурно докаже, да постоје осетне паралаксе само код врло мало звезда (за α *Centauri* $\pi = 0''.9$, за β *Cygni* $\pi = 0''.4$, за α *Canis majoris* $\pi = 0''.2$, за α *Lyrae* $\pi = 0''.1$); јер и у рефракцији и у самом инструменту, који служи за посматрања, могу такође да произађу систематске годишње промене, које је тешко испитати. Због тога се за откриће паралакса кад звезда прибегава другој методи, заснованој на врло тачним микрометарским мерењима разлика деклинација или пак рехтасцензија двеју звезда које су близо једна до друге. Пошто су паралаксе код највећег броја ситних звезда сасвим ништавне, то се овом методом добивају релативне паралаксе других звезда, које су сјајније или пак које имају знатније властито кретање (чл. 157. и 160.), и које указују на нешто мање растојање од њих до нас, него ли друге звезде. Тако је Бесел помоћу хелиометра био већ тачно одредио паралаксу $\pi = 0''.3$ звезде β у констелацији Лабуда, а затим су и други астрономи одредили паралаксе од неколико десетина других звезда.

Ова се метода особито развила и распространила у последњој четврти прош. столећа са применом фотографије на њу, која омогућава, да се испитивана звезда веже за знатно већи број суседних јој звезда, такође изазваних на истој фотографској плочи. Из таквих већ сигурних одређивања паралакса за неколико стотина звезда, излази, да је код огромног броја њих паралакса мања од $0''.1$.

У табlici чл. 160. наредне главе дате су највеће паралаксе звезда северне половине неба и њима још додата звезда α Центаура, чија највероватнија паралакса $0''.75$ излази највећа од свију до сад нађених. Растојање до ње $\frac{1}{\sin 0''.75}$ 275000 пута је веће од растојања до Сунца па због тога светлост од ње треба да доспе да нас тек после $275000 \times 498^s = 4.4$ године. У таквим се свешлосним годинама, обратно пропорционално паралаксама π , изражавају обично и растојања до других звезда, при чему ће нпр. $\pi = 0''.1$ одговарати 33 светлосним годинама.

Из таблице чл. 160. може се још видети да је средња паралакса за 8 звезда прве величине, која се у њој налази, равна $0''.17$, која одговара растојању од 20 светлосних година.

Задаће :

1.) За које звезде годишње обертационе промене у деклинацијама достижу највећу могућну вредност од $\pm 20''.45$?

Дужа оса обертационе елипсе (чл. 152.), за такву звезду E , треба да буде упућена правцем круга њене деклинације EP па због тога тај круг треба да буде управан на круг

ширине EQ. Неопходни однос међу координатама α и δ такве звезде ($\cotg \delta = -tg \omega \sin \alpha$), који произлази из правоуглог троугла PQE, може се добити такође и по општем правилу нахођења максималне величине разлике $\delta' - \delta = Aa' + Bb'$, која зависи од двеју независних једна од друге промењљивих α и δ .

2.) Одредити, уколико ће дневна аберација изменити ректасцензију α и деклинацију δ некога небесног тела, кад му је часовни угао $t = S - \alpha$?

Ако се замисле на небесној сфери (сл. 89.) деклинациони кругови PE, PE' и PO, то ће се из троуглова PEE' и PEO добити:

$$(\alpha' - \alpha) \cos \delta = EE' \sin PEO = + 0'' 31 \cos \varphi \cos t$$

$$\delta' - \delta = EE' \cos PEO = + 0'' 31 \cos \varphi \sin \delta \sin t;$$

у специјалном пак случају, при $t = 0$, излази

$$(\alpha' - \alpha) \cos \delta = 0'' 31 \cos \varphi \quad \text{и} \quad \delta' - \delta = 0$$

ГЛАВА XXIII.

ВЛАСТИТА КРЕТАЊА ЗВЕЗДА И СУНЧЕВЕ СИСТЕМЕ.

157. Звездани каталози.

Екваторијалне се координате звезда могу рачунати или према средњем положају екватора и еквинокцијалне линије, који зависи једино од прецесије, или, према истинитој, који зависи осим тога још и од нутације (чл. 146.). У првом се случају координате зову *средње* а у другом *истините*; истините пак координате, корегиране још и за дејство годишње аберације (чл. 155.), добивају назив *привидних*.

У тако званим *звезданим каталозима*, т. ј. у више или мање подробним списковима звезда, које публикују разне опсерваторије, (Гринвичка, Париска, Пулковска, Вашингтонска и др.) дају се увек средње координате α_0 и δ_0 за сваку звезду у почетку какве године t_0^*), које су изведене из непосредних посматрања у току најближих година томе t_0 . Нека су пак α_1 и δ_1 средње координате те звезде у почетку t_1 године, добивене из посматрања по истеку знатнога броја година $\tau = t_1 - t_0$. Ако означимо са $\Delta\alpha_m$ и $\Delta\delta_m$ средње годишње промене тих координата за интервал времена τ , који зависи на извесан начин (чл. 147.) од коефицијента P прецесије, онда ће се за одредбу те величине P добити, из посматрања разних звезда, врло много једначина облика

$$\Delta\alpha_m = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\tau} \quad \text{и} \quad \Delta\delta_m = \frac{\delta_1 - \delta_0}{\tau} \dots \dots \dots (1.)$$

При решавању оваквих једначина по методи најмањих квадрата, код многих се звезда појављују тако велика одступања μ_α и μ_δ , да се не могу приписати само грешкама посматрања, које ту улазе са врло великим делитељем τ , већ им треба тражити узрока у премештањима самих звезда. Оваква свакогодишња *власишта кретања* μ_α и μ_δ често пута надмашају 1" а код некојих звезда, као нпр. код 61 Сугни, достижу до 5" па чак и више, и оне су успеле већ довољно јасно да се манифестују, благодарећи томе, што је највештији посматрач XVIII века Брадлеј саставио био за 1755. годину веома тачни каталог од 3200 најсјајнијих звезда, највише северне половине неба. Та се властита кретања и дају у каталозима за сваку звезду упоредно са њеним координатама α_0 и δ_0 . У већини каталога дају се, уопште, тачније него до 1" средња места од много хиљада звезда на основу посматрања на напред споме-

*) Под почетком године овде је примљено, да се рачуна онај момент, када је средња дужина Сунца равна 280°. што бива управо 31. око децембра по новоме стилу.

нутим опсерваторијама. У том се погледу одликује високом тачности каталог Боса, који у себи садржи позиције од 6188 звезда за 1900. годину. Интересантан је такође и каталог Амброна, који даје позиције свију звезда до величине 6.5 за епоху 1900. г. а изабране из најбољих каталога. Најпотпунији пак, ма да и не тако тачни каталог, који је издало „Астрономско Друштво“ у Немачкој, садржи у себи 320000 звезда северног дела неба до $9\frac{1}{2}$ величине закључно. У одређивању места тих звезда, које су расподељене на уске зоне по деклинацијама, узимале су удела многе европске и руске опсерваторије. Ипак свагда треба имати у виду, да координате α и δ за сваку звезду могу бити не сасвим подједнаке у разним каталозима, што долази не само због случајних грешака већ и систематских, које зависе од самих величина α и δ , и које произлазе отуд, што су инструменти, методе посматрања и посматрачи били различити.

Што се тиче властитих кретања μ_α и μ_δ , која се дају у најновијим списковима звезда, а која нису ушла у списак Брадлеја, то се она одређују, ма да и за краће интервале времена ипак зато по знатно савршенијим методама посматрања рехтасцензија и деклинација звезда. У најзадње време пак за одређивање μ_α и μ_δ почела се примењивати стереоскопска метода, која се састоји у томе, што се два фотографска дијазитива, снимљена са каквог дела неба у току више или мање дужег интервала времена, разматрају једновремено, као у стереоскопу, у нарочитом инструменту — *стереокомпаратору*. Ако се је каква год звезда за то време знатно покренула у односу према другима, онда ће се она представити не у њиховој равни већ као да виси у простору. Стереокомпаратор омогућава да се измери довољно тачно та трећа координата у простору и да се по њој одреди бројна вредност релативног померања звезде или властитог њеног кретања μ . Овом је методом пулковски астроном Костински открио с потпуном сигурности властита кретања врло великом броју звезда.

158. Формуле за прелаз са средњих звезданих места на привидна.

Да би се прешло са средњих координата звезде α_0 и δ_0 , које су дане у каталогу за почетак какве године t_0 , на привидне α' и δ' , за ма какво време $t = t_0 + \tau + \Delta\tau$, — где је τ цео број година а $\Delta\tau$ неки разломак (део) године, — треба пре свега наћи средње координате α и δ за почетак t године по формулама чл. 148. са додатком ка њима властитог свако годишњег кретања звезде по рехтасцензији μ_α и по деклинацији μ_δ т. ј.

$$\alpha = \alpha_0 + (\Delta\alpha_m + \mu_\alpha)\tau \quad \text{и} \quad \delta = \delta_0 + (\Delta\delta_m + \mu_\delta)\tau.$$

Затим, пошто се још узме у обзир исто овакво њено кретање μ_α и μ_δ за време $\Delta\tau$, имаћемо по формулама нутације (p) (чл. 148.) и оберације (q) (чл. 154.) овакве изразе за разлике $\alpha' - \alpha$ и $\delta' - \delta$.

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= Aa + Bb + Cc + Dd + \mu_\alpha \Delta\tau \\ \delta' - \delta &= Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + \mu_\delta \Delta\tau \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (Q)$$

по формулама пак (p') и (q') добиће се овакви изрази за њих:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= g \sin(\alpha + G) \operatorname{tg} \delta + h \sin(\alpha + H) \operatorname{sec} \delta + f + \mu_\alpha \Delta\tau \\ \delta' - \delta &= g \cos(\alpha + G) + h \cos(\alpha + H) \sin \delta + i \operatorname{cosec} \delta + \mu_\delta \Delta\tau \end{aligned} \right\} (Q')$$

Као што је било већ пређе напоменуто, величине се $a, b, c, d, a', b', c', d'$, за сваку звезду могу овде сматрати скоро као непромењљиве у току од неколико година па због тога, ако се звезда посматра доста често, онда ће, — срачунавши само једанпут логаритме тих величина, — згодније бити, да се употребе формуле (Q); ако ли се каква звезда случајно посматра, или се врло ретко посматра, онда ће бити простије, да се срачунавања за њу врше по формулама (Q'). Што се тиче величина A, B, C и D у првим формулама и g, G, h, H, f и i у другим, — оне се, или пак њихови логаритми од 4 децимале, дају већ готови у свима астрономским календарима за све дане сваке године. Осим тога, у тим се календарима дају и сама привидна места неких сјајнијих звезда кроз сваких 10 дана у години; при томе треба сматрати за најтачније координате оваквих звезда (око 600) оне, које се дају у „Berliner Astronomisches Jahrbuch“.

159. Примери за објашњење.

Ради објашњења реченога у предњем члану, да срачунамо за гринвичку поноћ 8. септембра 1885. године привидно место звезде ζ Herculis, чија су властита кретања дата у „каталогу главних пулковских звезда“: $\mu_\alpha = - 0''.0346$ и $\mu_\delta = + 0''.413$.

Са оним подацима (за 1875.0 г.), који су наведени у чл. 148., средње ће се њене координате α и δ , за почетак 1885. године, добити овако:

$$\begin{aligned} \alpha &= 16^h 36^m 57^s.455 - 0''.0346 \times 10 = 16^h 36^m 57^s.109 \\ \delta &= + 31^\circ 48' 38''.15 + 0''.413 \times 10 = 31^\circ 48' 42''.28. \end{aligned}$$

Кад срачунамо сад са овим α и δ по формулама (p) (q) логаритме од четири децимале величина a, a', b, b' и ост. и кад препишемо из Nautical Almanac-а за 1885. г. дане тамо за 8. септебар $lg A, lg B, lg C$ и $lg D$ а тако исто разломак године $\Delta\tau = 0.6845$ (стр. 479.), онда ћемо наћи тражене координате α' и δ' по првоме начину (Q) овако:

$lg a = 8.4442_n$	$lg c = 0.3612$	$Aa = - 0^s.507$	$Aa' = + 15''.71$
$lg A = 1.2609$	$lg C = 9.8301$	$Bb = + 0.351$	$Bb' = + 0.90$
$lg a' = 9.9353$	$lg c' = 0.8517_n$	$Cc = + 1.553$	$Cc' = - 4.81$
$lg b = 8.8655_n$	$lg d = 8.1661_n$	$Dd = - 0.129$	$Dd' = + 8.23$
$lg B = 0.6803_n$	$lg D = 0.9444$	$\mu_\alpha \Delta\tau = - 0.023$	$\mu_\delta \Delta\tau = + 0.28$
$lg b' = 9.2716_n$	$lg d' = 9.9708$	$\alpha' - \alpha = + 1^s.245$	$\delta' - \delta = + 20''.31$
		$\alpha = 16^h 36^m 58^s.354$	$\delta = + 31^\circ 49' 2''.59$

Ако се пак узме други начин (Q') и испишу ради тога из Nautical Almanac-а количине: $f, G, H, lg g, lg h$ и $lg i$, онда треба да извршимо са логаритмима од четири децимале оваква срачунавања:

$G = 32^\circ 58'$	$\alpha + G = 282^\circ 12'$	$lg \operatorname{tg} \delta = 9.7926$	} 0.9912 _n
$\alpha = 249 14$	$\alpha + H = 353 57$	$lg \sin (\alpha + G) = 9.9901^n$	
$H = 104 43$		$lg g = 1.2085$	} 0.5335
		$lg \cos (\alpha + G) = 9.3250$	

$lg i = 0.8982$	} 0.8275	$f = + 31'' 16$	$i \cos \delta = + 6'' 72$
$lg \sec \delta = 0.0707$		$g \sin(\alpha + G) \operatorname{tg} \delta = - 9.80$	$g \cos(\alpha + G) = + 3.42$
$lg \sin(\alpha + H) = 9.0229_n$	} 0.3690_n	$h \sin(\alpha + H) \sec \delta = - 2.34$	$h \cos(\alpha + H) \sin \delta = + 9.89$
$lg h = 1.2754$		+ 19'' 02	+ 20.03
$lg \cos(\alpha + H) = 9.9976$	} 0.9950	= + 1° 268	
$lg \sin \delta = 9.7220$		$\mu_\alpha \Delta \tau = - 0.023$	$\mu_\delta \Delta \tau = + 0.28$
		$\alpha' - \alpha = + 1° 245$	$\delta' - \delta = + 20° 31$

160. Брзина властитих кретања звезда.

Узмимо, да на небесној сфери (сл. 91.) $EE_1 = \mu$ представља властито померање какве звезде E у току од једне године по правцу, који саставља са њеним деклинационим кругом угао $\sphericalangle PEE_1 = \psi$. Кад замислимо из E_1 управну E_1p на PE , видећемо, да ће властито њено кретање μ_α по рехтасцензији и μ_δ по деклинацији бити:

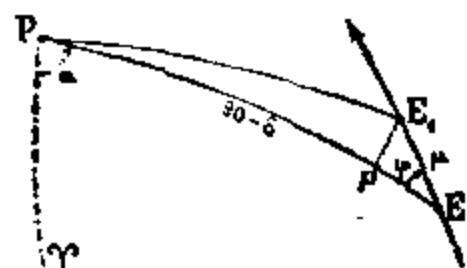
$$E_1p = \mu_\alpha \cos \delta = \mu \sin \psi \quad \text{и} \quad pE = \mu_\delta = \mu \cos \psi;$$

само пак μ и ψ одредиће се по даним величинама μ_α и μ_δ овако:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\mu_\alpha \cos \delta}{\mu_\delta} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{\mu_\alpha \cos \delta}{\sin \psi} = \frac{\mu_\delta}{\cos \psi} \quad (2.)$$

Највећи број звезда има врло незнатну величину μ . Тако, од 3240 звезда Брадлејевог каталога, који је прерадио Ауверс, само 24 % имају властито кретање веће од 10'' за столеће а 51 % веће од 5''.

Ако означимо затим паралаксу те звезде са π а растојање до ње, изражено у јединицама средњег растојања од Звезде до Сунца, са d , онда ће се њено линеарно годишње померање у правцу управном на правац гледања на њу, добити на овај начин:



Сл. 91.

$$v = d \mu \sin 1'' = \frac{\mu}{\pi} \quad (3.)$$

Друга компонента кретања звезде, у правцу самога зрака гледања на њу, ма да остаје за нас и непозната*) ипак је не мање интересантно, да се добије појам и о тој јединој брзини v , срањујући је, на пример, са дужином пута $l = 2\pi a$, који пређе Земља око Сунца за годину дана, и који ће се при $a = 1$ изразити броје $2\pi = 6.3$. Ради тога су у доњој табlici дате паралаксе π , властита кретања μ и односи $\frac{v}{l}$ за некоје звезде са доста великом паралаксом π .

Звезда	велич.	π	μ	$\frac{v}{l}$	Звезда	велич.	π	μ	$\frac{v}{l}$
α Centauri	(1)	0'' 75	3'' 7	0.7	μ 1830 Grumbr.	(7)	0'' 16	7'' 0	7.0
α Canis maj.	(1)	0. 37	1. 3	0.7	Θ Ursae maj.	(3)	0. 13	1. 6	2.0
α Canis min.	(1)	0. 33	1. 2	1.6	α Tauri	(1)	0. 11	0. 2	0.3
β Cygni	(5 $\frac{1}{2}$)	0. 30	5. 2	1.9	α Aurigae	(1)	0. 08	0. 4	0.4
α Aquilae	(1)	0. 23	0. 7	0.5	α Lyrae	(1)	0. 16	0. 4	0.4
α Geminorum	(1 $\frac{1}{2}$)	0. 25	0. 2	0.2	α Bootis	(1)	0. 17	2. 1	2.6

*) Теоријски може та компонента да буде одређена довољно силним спектроскопом по скретању тамних линија на спектру звезданом у једну или другу страну од нормалног њиховог положаја; али су та скретања толико ништавна, да су одређивања брвине кретања звезда по њима за сада још доста сумњива.

Одатле се види, да се звезде померају у простору са врло различитим брзинама v , које су по својој величини, уопште говорећи, сличне са релативним брзинама $\frac{v}{l}$ кретања планета око Сунца (оне су дате у чл. 123. у облику $\frac{a}{s} = 1.6$ за Меркур и 0.3 за Сатурн), ма да има и таквих, код којих су те брзине много веће, као нпр. у означеној звезди μ 1830. из каталога Грумбрица *).

У садање се време накупило такође око 1500 одредаба властитих кретања различитих звезда у правцу самога зрака гледања на звезду, тј. зрачне њене брзине, помоћу спектроскопа и спектрографа. Излази, да је и та брзина истога ступња као и напредречене попречне, тј. само у ретким случајима надмашују брзину кретања планета око Сунца, достижући до 60 км. у секунди.

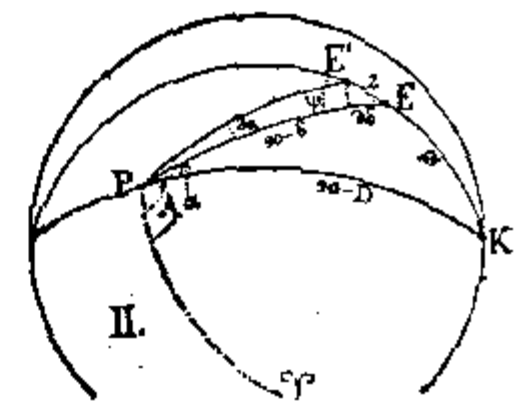
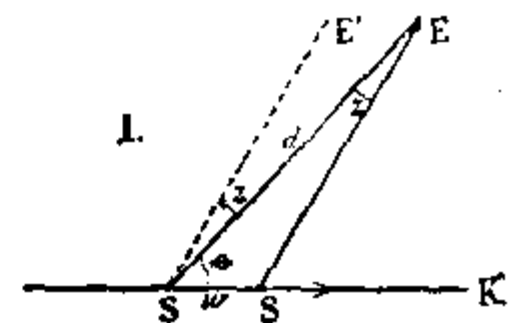
По одредби В. В. Кембела средња брзина звезда у простору износи 21.2 км. у секунди.

Уопште говорећи, не постоји ничега што би нарочито падало у очи односно веза између праваца и брзина кретања разних звезда. Уосталом, један и исти правац кретања имају звезде окупљене у познатој групи Плејада, затим оне из групе Гиада у костелацији Телца и неке друге. Као особито интересантни изузетак јавља се запажена сличност властитих кретања, како попречних тако и зрачних код пет најсјајнијих звезда из констелације Великог Медведа.

161. Привидна померања звезда усљед властитог кретања Сунчеве системе.

Ако замислимо да смо се удаљили од Сунца на исто такво растојања $d = \frac{1}{\sin 0''.75} = 275000$, на каквом се растојању налази нама најближа звезда α Centauri, онда ће се Сунчев угловни пречник претворити у сасвим неосетну величину и за најсилнији телескоп, — т. ј. у величину $\frac{1920''}{275000} = 0''.008$ па и јасност ће се његова смањити за $(275000)^2$ пута, т. ј. изгледало би нам највише као звезда 1. величине. Сматрајући га на тој основи као тело сасвим слично са осталим звездама, да видимо, како треба да се промене координате α и δ тих звезда, ако се оно, заједно са свима својим планетама, прогресивно креће у простору.

Узмимо, да се Сунце креће правцем SK (сл. 92. I.) и да за једну годину прелази простор $SS' = w$. Правац ће се SE на какву звезду E, — који образује са SK угао $\angle ESK = \theta$, — променити при том у правац S'E или њему паралелан SE', скренувши у равни KSE за угао $\angle ESE' = \angle SES' = z$, који ће се изразити из елементарног троугла SEE', овако



Сл. 92.

$$z = \frac{w}{d \cdot \sin 1''} \sin \theta = \pi \sin \theta \quad \dots \dots \dots (4.)$$

*) 1916. год. откривена је у констелацији Орхиуши звезда 9.4 величине са највећим властитим кретањем $\mu = 10''.27$ по одредби С. К. Костинскога. Паралакса је њена $\pi = 0''.67$, тако да је $\frac{v}{l} = 2.6$. Наредну звезду по брзини кретања открио је још раније Каптајн на плочама Cape Photogr. Dichtmustezung. Она има $\mu = 8''.7$, $\pi = 0.31$ и $\frac{v}{l} = 4.5$. Положај је њен: $\alpha = 5^h 8^m$, $\delta = -45^\circ 0'$.

Место пак звезде Е на небесној сфери (сл. 92. II.) треба да се помери од тачке К, — која се зове *апекс*, — по великоме кругу КЕЕ' сваке године за величину малога лука $EE' = z$. Кад повучемо деклинационе кругове РК, РЕ, РЕ', кад означимо рехтасцензију и деклинацију тачке К са А и D а угао $\sphericalangle PEE'$ са ψ и кад напоменемо, да је лук $EK = \sphericalangle ESK = \theta$, онда ћемо добити (спочетка из елементарног троугла РЕЕ' а затим из сферног троугла ЕРК) овакве изразе за померање звезде Е, по рехтасцензији и деклинацији, које бисмо запазили усљед прогресивног кретања Сунчеве системе:

$$\left. \begin{aligned} d\alpha \cdot \cos \delta &= z \sin \psi = \pi w \cos D \sin (\alpha - A) \\ d\delta &= z \cos \psi = -\pi w [\sin D \cos \delta - \cos D \sin \delta \cos (\alpha - A)] \end{aligned} \right\} \dots (5.)$$

Разуме се, да ће се ова привидна систематска померања da и $d\delta$, — која улазе као саставни део посматраних њихових кретања μ_α и μ_δ , — моћи издвојити за какав део неба са довољном очигледности тек у средњем из огромног броја звезда; јер ће се само тада властита њихова померања узајамно уништити, пошто су код једних позитивна а код других негативна, као што то бива и са случајним грешкама посматрања. На тој се основи може помоћу врло много једначина облика (5.) одредити највероватнија величина трију непознатих А, D и w по методи најмањих квадрата. Тешкоћа се састоји само у томе, што у те формуле улазе и паралаксе за разне звезде, које нам нису познате па се зато мора прибећи некој другој, више или мање вероватној претпоставци о њима.

162. Хипотетичка растојања до звезда.

Не гледећи на то, што стварне димензије и светлосне моћи разних звезда могу бити врло различите, уопште ће бити доста вероватно допустити, да су сјајније звезде ближе нама него ли оне са слабијом светлошћу, па узети, да је средње растојање d_n до звездâ какве год величине (n) у обрнутој пропорцији са кореном квадратним из њихова сјаја i_n . А пошто, при прелазу са једнога разреда величине (n) ка следећем ($n + 1$), сјај звезда слаби $2\frac{1}{2}$ пута (чл. 62.), — по фотометрским пак мерењима тачније 2.3 пута, — то ће се d_n изразити помоћу средњег растојања d_1 до звезда 1 величине овако

$$\frac{d_n}{d_1} = \sqrt{\frac{i_1}{i_n}} = \sqrt{(2.3)^{n-1}} = (1.5)^{n-1} \dots \dots \dots (6)$$

Срачуната по овој формули хипотетичка растојања могу се проконтролисати бројем звезда разних величина, полазећи са претпоставке, да су звезде, — бар оне најјасније до 7. или и до 8. величине, — равномерно распоређене у простору. Код такве претпоставке заиста треба да број N_n свију звезда до n -те величине расте са повећањем n приближно пропорционално са d_n^3 ; пошто је пак број свију звезда на небу до 7. величине закључно око 27.000, то ће хипотетички бројеви N_n бити овакви:

$$N_n = 27000 \left(\frac{d_n}{d_7}\right)^3;$$

кад се пак они срачунају по формули (6.) и сравне са стварним (N_n), увидећемо ово што следује:

(n) =	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_n:d_1 =$	1	1.5	2.3	3.4	5.1	7.6	11.4	17.1
$N_n =$	18	62	208	704	2370	8000	27000	91000
$(N_n) =$	19	84	280	770	2200	7100	27000	95000

На тај се начин доста добро контролишу релативна хипотетичка растојања d_n . На основу њих добићемо, — за цели показане у прош. члану, — ове односе паралакса π_n звезда разних величина (n) према средњој паралакси π_1 звезда 1. величине:

n =	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{\pi_n}{\pi_1} =$	1	0.67	0.44	0.30	0.20	0.13	0.09	0.06

163. Правац и брзина Сунчева кретања.

Као што је већ речено у чл. 161., за повољно одређивање тражених A , D и w из једначина (5.), број звезда са добро познатим властитим кретањима μ_α и μ_δ треба да буде врло велики. О. Струве је први одредио те величине, оснивајући се на свега 400 звезда северног дела неба па је помоћу напред означених хипотетичких растојања d_n добио по методи најмањих квадрата, да је

$$A = 261^\circ 4, \quad D = + 37^\circ 6 \quad \text{и} \quad w = d_1 \sin 0'' 34 = \frac{0'' 34}{\pi_1}.$$

По последњем пак срачунавању Л. Струве, основаном на 2500 звезда истога дела неба, те су се величине показале овакве:

$$A = 273^\circ 3, \quad D = + 27^\circ 3 \quad \text{и} \quad w = d_1 \sin 0'' 34 = \frac{0'' 34}{\pi_1},$$

које се доста добро слажу са величинама $A = 273^\circ 1$ и $D = + 23^\circ 4$, које су добивене из властитих кретања 274 звезда јужне небесне полукугле. Тачка неба, којој је упућено прогресивно кретање Сунца и која се одређује помоћу ових координата A и D , налази се у сазвежђу Херкула; брзина пак w тога кретања, ако се узме да је $\pi = 0'' 10$, излази да је равно $3.4 = 0.54 l$. Сада се, као најтачније рачуна одредба Л. Боса, која даје $\alpha = 270^\circ 5$ и $\delta = + 34^\circ 3$.

Врло се просто и очигледно можемо уверити у прогресивном кретању Сунца, ако узмемо из Nautical Almanac-а за 1898. г. само оне звезде северне и јужне полукугле неба, чије се деклинације налазе у границама $\pm 30^\circ$ а при том са властитим кретањима μ_α и μ_δ , која не превазилазе $0'' 8$ те да сувише велике вредности μ_α и μ_δ , — које се вр. ретко дешавају, — не искваре средње резултате. Показаће се, да таквих звезда има 260 и да ће их на сваки део неба по рехтасцензији од $15^\circ = 1^h$ доћи од $s = 8$ од $s = 15$ на броју. Због мале пак величине δ може се у средњим изводима за све овакве делове неба узети приближно, да је $\cos \delta = 1$ и $\sin \delta = 0$ па представити формуле (5.) у оваквом облику:

$$\frac{\sum \pi}{s} \cdot w \cos D \sin \left(\frac{\sum \alpha}{s} - A \right) = \frac{\sum \delta \alpha}{s} = \frac{\sum \mu_\alpha}{s} \dots \dots \dots (5.)_1$$

$$- \frac{\sum \pi}{s} \cdot w \sin D = \frac{\sum \delta \delta}{s} = \frac{\sum \mu_\delta}{s} \dots \dots \dots (5.)_2$$

На тај се начин види, да средњи резултати $\frac{\sum \mu_\delta}{s}$, који зависе од средњих рехтасцензија звезда $\frac{\sum \alpha}{s} = \frac{1^h}{2}, 1\frac{1^h}{2}, 2\frac{1^h}{2}$ и т. д., треба да изађу на једној половини неба позитивни на другој нега-

тивни; средњи пак резултати $\frac{\Sigma\mu_{\delta}}{s}$ треба да изађу свуда са једним и истим знаком. Тако то у самој ствари и излази, као што показују ови бројни резултати:

$\frac{\Sigma\alpha}{s}$	$\frac{\Sigma\mu_{\alpha}}{s}$	$\frac{\Sigma\mu_{\delta}}{s}$	$\frac{\Sigma\alpha}{s}$	$\frac{\Sigma\mu_{\alpha}}{s}$	$\frac{\Sigma\mu_{\delta}}{s}$	$\frac{\Sigma\alpha}{s}$	$\frac{\Sigma\mu_{\alpha}}{s}$	$\frac{\Sigma\mu_{\delta}}{s}$
0 ^h 5	+ 0 ^o 01	- 0 ^o 05	8 ^h 5	- 0 ^o 08	- 0 ^o 01	16 ^h 5	- 0 ^o 07	- 0 ^o 02
1. 5	+ 2	- 4	9. 5	- 9	- 2	17. 5	- 5	- 11
2. 5	+ 1	- 5	10. 5	- 9	- 0	18. 5	- 8	- 9
3. 5	+ 2	- 4	11. 5	- 11	- 1	19. 5	+ 4	- 5
4. 5	+ 7	- 4	12. 5	- 19	- 3	20. 5	+ 1	- 1
5. 5	- 2	- 3	13. 5	- 14	- 4	21. 5	+ 4	- 5
6. 5	- 3	- 2	14. 5	- 6	- 0	22. 5	+ 9	- 1
7. 5	- 10	- 2	15. 5	- 3	- 2	23. 5	+ 16	- 9

У средњем $\frac{\Sigma\mu_{\delta}}{s} = - 0^o 035$ са вероватном грешком $\pm 0^o 004$.

Овај оштроумни начин очигледног доказа властитог кретања Сунца припада Тисерану. Али се може поћи и даље па по овим нашим бројевима одредити приближно из једначина (5)₁ и (5)₂ саме величине непознатих А, D и w. Ако допустимо, да су средње величине $\frac{\Sigma\pi}{s}$ у сва наша 24 дела неба приближно једнаке, онда ћемо из 24 једначине (5)₁ одредити по методи најмањих квадрата највероватније величине А и $\frac{\Sigma\pi}{s} w \cos D$, што је, на основу изложенога у чл. 55. ванредно просто. На овај ћемо начин наћи, да је:

$$A = 270^{\circ}, \quad \frac{\Sigma\pi}{s} \cdot w \cos D = 0^o 094 \quad \text{и} \quad \frac{\Sigma\pi}{s} \cdot w \sin D = + 0^o 035,$$

а одатле:

$$\operatorname{tg} D = \frac{0.035}{0.094} = 0.37, \quad D = + 20^{\circ} \quad \text{и} \quad \frac{\Sigma\pi}{s} \cdot w = 0^o 100.$$

Затим, пошто су свих 260 звезда, које смо узели, поређане по њиховим величинама (n) овако

величина (n)	1	2	3	4	5	6	7 и мање
број звезде s'	9	20	77	88	49	12	5

то ће, по изведеној у чл. 162. таблци хипотетичких паралакса, изаћи

$$\frac{\Sigma\pi}{s} = \frac{\Sigma s' \pi_n}{260} = 0.33 \pi_1 \quad \text{па према томе и} \quad w = \frac{0^o 100}{0.33 \pi_1} = \frac{0^o 33}{\pi_1}$$

Не гледећи на грубост и нетачност употребљене методе, све су се величине А, D и w ипак одредиле доста добро.

164. Оптичке и физичке двојне звезде.

На небу се може набројати тако много парова звезда, које су врло близу једна до друге и које се стога зову двојне, да то никако није могућно објаснити случајним распоредом звезда у простору. Вероватност, да се две звезде десе на врло малом угловном растојању Δ једна од друге, — као што је то

одређено у првој задаћи главе V, — равна је $\sin^2 \frac{\Delta}{2} = \frac{1}{4} \Delta''^2 \sin^2 1''$ па због тога, ако је помножимо са бројем $\frac{1}{2} (100.000)^2$ свију могућних парова, које образују свих 100.000 звезда на небу до 8. величине закључно, онда ће изаћи, да има свега 8 парова са растојањима мањим од $16''$ а да нема ни једнога са растојањем мањим од $1''$; међутим се у самој ствари може набројати до 500 првих парова а других око 200. Сама та околност већ указује на физички узрок везе ових звезда једне за другу.

Кад би се две звезде E и E₁ (сл. 93.), које су врло далеко једна од друге у простору, само случајно десиле на малом угловном растојању EE₁ = Δ једна од друге, онда би, услед властитог њиховог кретања, померање једне од њих E₁E₂E₃... према другој E требало да се представи у току многих година као праволиниско и равномерно. Микрометарска мерења растојања EE₁ и позициских углова ∠PEE₁, која се врше од времена на време, одређују овакве релативне путање E₁E₂E₃... са великом тачношћу и показују, да двојних звезда са таквим праволиниским путањама има врло мало у самој ствари. Овакве се двојне звезде зову *опшичке*.

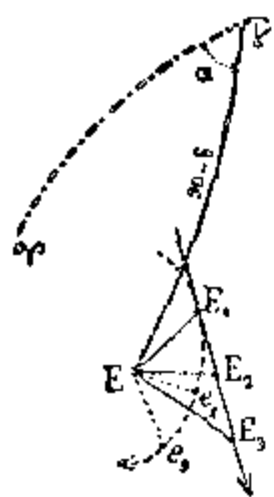
Код свију осталих парова, звезда се E₁ помера према другој E по некој елипси E₁e₂e₃... и, по истеку већег или мањег броја година извршује око ње потпуни оптицај, што директно указује на стварну близину тих звезда E и E₁ једне према другој и на силу гравитације међу њима. Ово су *физичке двојне звезде*. На небу се опажају такође и *сложене системе* од три и већег броја звезда везаних једна за другу физички тј. гравитационом силом; али се кретања њихова, која су врло интересантна са теоријског гледишта (чл. 140.), још нису довољно тачно објаснила из посматрања.

165. Елиптичке орбите двојних звезда.

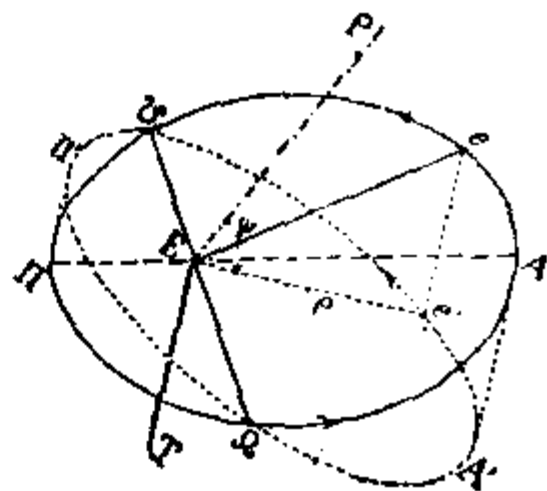
Код физичког пара звезда узима се она сјајнија E (сл. 94.) као *главна* и *непомична* а она мање сјајна e' као њен *пратилац* па се из многогодишњих посматрања растојања Ee' = ρ и позициских углова PEE' = ψ добива или *цела привидна елипса* Π'e'A', коју описује пратилац e' у односу према E или пак њен повећи део. Али се та елипса представља, гледана са Земље T, у равни управној на правац TE па је стога она само пројекција *истинише* елипсе ΠeA, по којој се стварно и креће пратилац e под утицајем гравитационе силе главне звезде E, која треба да је у жижи те елипсе. Овај последњи услов и даје могућности, да се одреди положај истините елипсе ΠeA у простору, њене димензије у угловној мери и трајање S потпуне револуције пратиоца e.

У табели, која следује, дата су та трајања S (у годинама) и дуже полуосе елипса α (у секундима) за оне парове звезда, чије су паралаксе π такође одређене доста добро, после чега се за њих добивају линеарне величине тих полуоса, $a = d \sin \alpha = \frac{d}{\pi}$ (у јединицама средњег растојања од Земље до Сунца) и сума маса m и m' обеју звезда (у односу према маси Сунца M), јер на основу формуле (6.) чл. 138. треба увек да изађе

$$\frac{m + m'}{M} = \frac{a^3}{S^2}$$



Сл. 93.



Сл. 94.

Двојвне звезде	Величина	π	α	a	S год.	$\frac{m + m'}{M}$
α Canis majoris . . .	(1) и (9)	0".28	7".5	27	44	10.0
α Canis minoris . . .	(1) и (13)	0.26	4.7	18	35	4.8
α Centauri	(1) и (2)	0.86	17.5	20	77	1.4
ρ Ophiuchi	(4) и (6)	0.16	4.8	30	94	3.1
η Cassiopejae	(4) и (7)	0.15	8.6	57	195	4.9

Према томе, и по средњим растојањима a , и по временима њихових револуција S , релативне орбите код двојних звезда излазе сличне са орбитама најудаљенијих планета од Сунца; масе пак $(m + m')$ нешто мало надмашују масу Сунца.

Односно врло слабог пратиоца Сириуса (α Canis majoris), може се напоменути, да је, пре него што је угледан кроз силне дурбине (1862. г.), његово је постојање био већ предказао Бесел на основу промена, које су се откриле у ректасцензији и деклинацији самога Сириуса и које су указивале на то, да под утицајем другог тела та звезда описује у простору апсолутну елипсу (чл. 136.) са привидном дужом полуосом од 2".3. Сравнијући ову величину од 2".3. са дужом полуосом $a = 7".5$ релативне орбите пратиоца, — каква је нађена после његова открића, — увидећемо, да маса његова m' треба да буде врло велика ($m' = 10.0 \times \frac{2.3}{7.5} = 3.1$) па према томе да је његова моћ сјаја врло мала, судећи по ништавном његовом сјају, који видимо. Сличне су периодичке промене ($\pm 0".7$) запажене и у координатама Проциона (α Canis minoris), те су и оне указивале на то да и он има пратиоца; али се тек недавно (новембра 1898.) успело, да се он угледа и да му се одреди стваран положај. Откривен је на име са опсерваторије Лика (у Сев. Америци) помоћу огромног рефрактора са објективом од 36 егл. палаца у пречнику.

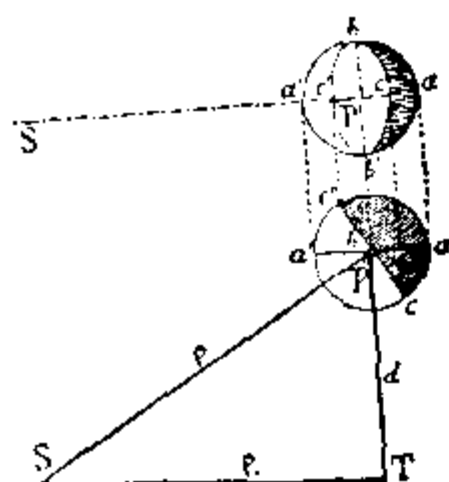
Г Л А В А XXIV.

О СПОЉЊЕМ ОБЛИКУ СУНЦА, МЕСЕЦА И ПЛАНЕТА СА ЊИХОВИМ ПРАТИОЦИМА.

166. Фазе планета и Месеца.

Са Земље се Т (сл. 95.) обично види само један део $a'c$ тела Р, сфернога облика, који је осветљен сунчаним зрацима, — па био то Месец или каква планета. — То се зове *фаза*. У пројекцији пак на округлом његовом диску $aba'b'$

граница се између његовог осветљеног и тамног дела ac представља у облику полуелипсе bcb' , чија је краћа полуоса Pc упућена правцем ка Сунцу S. Ако се угловни пречник тога диска узме за јединицу, онда ће се ширина осветљеног његовог дела $a'c$ изразити помоћу угла $\sphericalangle SPT = P$, овако очевидно:



Сл. 95.

$$a'c = a'P + Pc = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos P = \cos^2 \frac{P}{2}$$

а из троугла ће PST, — са познатим странама $PS = \rho'$ $TS = \rho_0$ и $PT = d$, — изаћи, да је

$$a'c = \cos^2 \frac{P}{2} = \frac{(d + \rho + \rho_0)(d + \rho - \rho_0)}{4\rho d} \dots \dots \dots (1.)$$

За доње планете и за Месец тај се *угао фазе* P може мењати од 0° до 180°, за горње пак планете он достиже своју највећу величину у њиховим квадратурама, када је $\sphericalangle STP = 90^\circ$ па отуд и $\sin P = \frac{\rho_0}{\rho}$. На тај начин код Марса ($\rho_0 = 1, \rho = 1.52$) највећи мањак осветљенога диска излази (при $P = 41^\circ 2$) раван $1 - \cos^2 \frac{P}{2} = \sin^2 \frac{P}{2} = 0.12$, код Јупитера ($\rho = 5.2$) нешто мање од 0.1 а код осталих горњих планета он је сасвим неосетан.

Овакве се промене у фазама могу занемарити код сваке од оних малих планета, које револуционирају око Сунца између Марса и Јупитера, и тада ће се сјај њен i , који се са Земље види, изразити просто овако

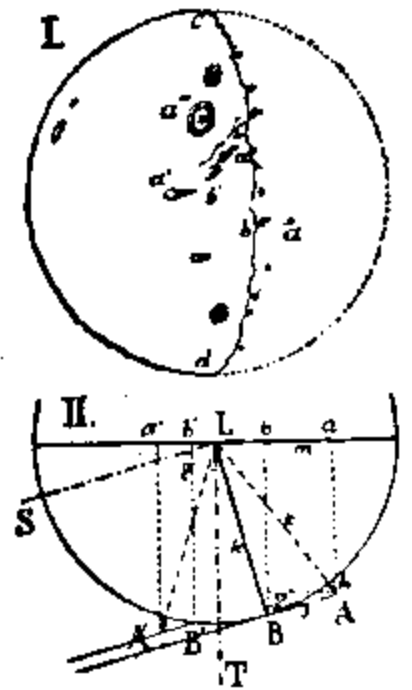
$$i = \frac{c}{\rho^2 d^2} \dots \dots \dots (2.)$$

где c означава неку сталну величину за ту планету. Само се из сравњења оваквих сјајева i са сјајем великих планета и може судити о приближним димензијама ових малих тела, јер чак ни највеће од њих, Церера ни Веста, не

показују никакве приметне дискове. Овим се начином показало, да њихове димензије не надмашају $\frac{1}{30}$ део Земљинога пречника; димензије пак осталих из највећег њиховог броја још 10 пута су мање.

Кроз велике се дурбине на површини Месеца (сл. 96. I.) ванредно јасно оцртавају поједине планине (a'), планински гребени (a''), прстенасти кратери (a''') и други детаљи. Због тога елиптички лук, који раздваја осветљени део диска од тамнога, увек изгледа више или мање зупчаст; суседни пак врхови високих планина, који се налазе у близини тога лука, виде се на тамном делу диска у облику сјајних тачака (a). По даљини $ab = m$ овакве тачке a од видне линије границе cbd лако је оценити и саму висину h планине А (сл. 96. II.) И заиста, кад одредимо по углу фазе $\angle SLT = P$ истинито растојање $s = AB = \frac{m}{\sin P}$ врха А од граничне линије, имаћемо, да је приближно

$h = \frac{s^2}{2k}$, где је $k = 0.2726$ линеарни полупречник Месеца. О висини планине a' , која се види на осветљеном делу Месечева диска, може се *такође* судити по дужини сенке $a'b'$, коју она оставља позади себе. На тај начин излази да планине на Месецу досежу до 6 и 7 врста; услед тога и сами крајеви (периферија) Месечева диска изгледају као неправилна, таласаста линија, која отежава тачно одређење величине k Месечева полупречника.

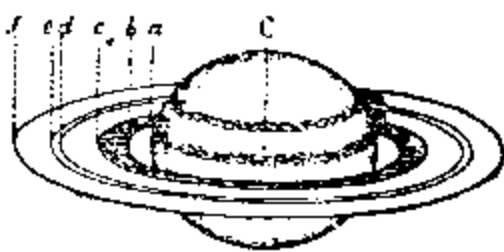


Сл. 96.

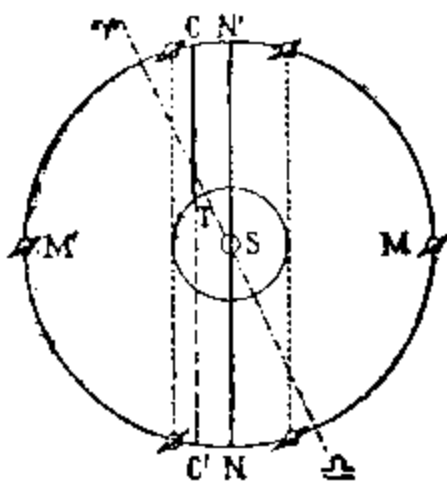
167. Облик Сатурнових прстенова.

Сатурн се одликује од свих осталих планета тиме, што је окружен системом равних, концентричних прстенова (сл. 97.), који су нагнути према еклиптици под углом $\eta = 28^\circ 2'$. Унутрашњи од њих bc једва се види, средњи пак cd и спољњи ef јасно су осветљени сунчаним зрацима и раздвојени један од другог интервалом de . Ови нам прстени изгледају као елипсе чије су дуже полуосе, у савређењу са полупречником планете $k = Ca = 9.2$, овакве:

$Cb = 1.10k$, $Cc = 1.33k$, $Cd = 1.77k$, $Ce = 1.80k$, $Cf = 2.04k$; краће се пак полуосе њихове мењају са положајем Сатурна на његовој орбити $NMN'M'$ око Сунца S (сл. 98.). Када се он и Земља налазе на правој $СТ$ или пак $ТС'$, паралелној са линијом чворова NN' равни његових прстенова ($\angle SN = 168^\circ$), тј. кад Земља пролази управо кроз ту раван, онда ће ти прстени изгледати као ванредно танка права линија, која се једва види и кроз најсилнији дурбин. Такви они изгледају још и при пролазу Сатурна кроз линију NSN' , јер је тада Сунцем S осветљен само спољњи крај крајњег прстена. У интервалним пак положајима Сатурна M и M' краће полуосе прстенова излазе највеће тј. равне напред наведеним дужим полуосама њиховим, помноженим са $\sin 28^\circ 2'$.



Сл. 97.



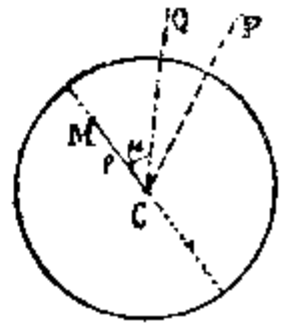
Сл. 98.

168. Одређивање ротационог кретања небесних тела.

На диску се Сунчевом скоро увек могу видети кроз дурбин тамне пеге неправилног облика, које се одједном појављују и, пошто се одрже не-

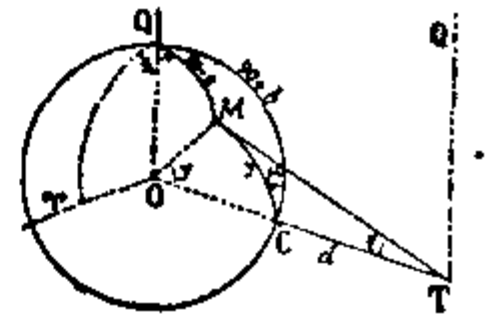
лолико дана, опет их нестане. По привидном померању њиховом још Галилеј је донео закључак о ротацији Сунца у истом правцу у коме се и Земља обрће. На дисковима се некојих планета такође запажају кроз силне телескопе или сталне пеге или које се повремено појављују и које указују на ротационо кретање тих тела.

Положај пеге M (сл. 99.) на округлом диску Сунчевом или каквога другог небесног тела може се одредити из посматрања, помоћу угловног растојања његовог $MC = \rho$ од центра диска C и позицијског угла $\sphericalangle PCM$ (чл. 71.), који се рачуна од деклинационог круга небесног тела PC ; помоћу овога се пак угла лако добива позицијски угао $\sphericalangle QCM = \mu$, који се рачуна од круга ширинâ QC .



Сл. 99.

Да бисмо прешли са ових координата ρ и μ пеге M , које се виде у неком моменту времена t са Земље T (сл. 100.), на њене координате односно центра O самога небесног тела, — да означимо геоцентричку дужину и ширину тога центра са l и b а растојање његово OT са d ; линеарни пак полупречник његов $OC = k$ да узмемо за јединицу. Кад замислимо кроз правац OCT , кроз OM и кроз правац OQ управни на еклиптику — три равни, које секу сферну површину небесног тела по великим круговима QC , MC и QM , онда ћемо добити сферни троугао QMC са страном $QC = 90^\circ + b$, са углом $\sphericalangle QCM = \mu$ и са страном $MC = \rho$, при чему ће се угао $\sphericalangle MOC = \gamma$ одредити из равног троугла MOT овако



Сл. 100.

$$\sin(\gamma + \rho) = d \sin \rho$$

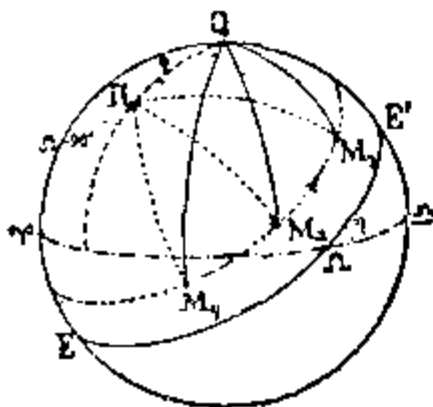
Тако ће се по трима даним: $90^\circ + b$, μ и ρ срачунати $QM = 90^\circ - \beta$ и $\sphericalangle MQC = (l \pm 180^\circ) - \lambda$, где ће β и λ бити еклиптичке координате пеге M , како се виде из центра небесног тела O .

У случају пак посматрања пеге на Сунцу, из троугла QCM са страном $QC = 90^\circ$ (јер је тада $b = 0$) добићемо директно:

$$\sin \beta = \cos \mu \sin \rho \quad \text{и} \quad \text{tg}(\odot - \lambda) = \sin \mu \text{tg} \rho,$$

где \odot означава привидну са Земље дужину Сунца.

Кад се добију из посматрања пеге у разним моментима t_1, t_2, t_3 , овакве њене координате $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и кад се по њима конструише на небесној сфери њени положаји M_1, M_2, M_3 (сл. 101.), чији број не треба да буде мањи од



Сл. 101.

три, — онда већ није тешко, да се одреди како ротациона оса, тако и време T потпунога обрта небесног тела. Пол P те осе наћи ће се наиме, као центар малог круга $M_1M_2M_3\dots$, по коме се помера пеге те ће се у односу према тачци Q одредити помоћу растојања од ње $QP = \eta$ и помоћу дужине $\sphericalangle PQQ = \Omega - 90^\circ$; при чему ће η бити нагиб еквадора небесног тела EQE' према еклиптици $\sphericalangle Q\Omega\omega$, а $\Omega = \sphericalangle P\Omega$ дужина њеног узлазног чвора Ω . Угли пак код пола P : $\sphericalangle M_1PM_2$ и $\sphericalangle M_2PM_3$, пошто се поделе са интервалима времена $t_2 - t_1$, и $t_3 - t_2$, који им одговарају, даће углову брзину ω ротације

небесног тела а отуд и време потпунога његовог обрта $T = \frac{360^\circ}{\omega}$. Очевидно, да ће се с тиме уједно добити и сама ширина пеге $90^\circ - PM = \varphi$ у односу према екватору EE' небесног тела.

169. Ротационо кретање Сунца и планета.

Из многобројних посматрања пеге на Сунцу, излази, да је Сунчев екватор нагнут према еклиптици под углом $\eta = 7^\circ$ и да му је положај такав, да је

дужина његовог узлазног чвора Ω равна 74° . Брзина пак ротације w за разне зоне Сунчеве површине излази различита и изражава се у зависности од ширине зоне φ приближно овако:

$$w = 14^\circ 2' - 3^\circ 1' \sin^2 \varphi \text{ у току једнога средњег дана;}$$

тако, да је највећа ротациона брзина на екваторској зони, и да њој одговара трајање потпуног обрта $T = \frac{360^\circ}{14^\circ 2'} = 25.3$ средњих дана. Али са Земље, која се обрће за по $1^\circ 0'$ на дан у исту страну, у коју се обрће и Сунце, привидно трајање потпуне његове ротације излази равно $\frac{360^\circ}{13^\circ 2'} = 27.3$ дана.

На дисковима Меркура и Венере скоро је немогућно запазити пеге, због силног осветљења сунчаним зрацима; стога су досадањи закључци о ротацији тих планета доста сумњиви. По посматрањима Скиаптарели--а 1890. г. излази, да су трајања T њихових ротација таква иста као и трајања њихових револуција око Сунца тј. 88. resp. 225 средњих дана; пређе се пак у XVIII столећу држало, да је то код Меркура било 24 часа а код Венере 23 часа.

Исто тако и најновија спектрална испитивања *Бјелопољског* у Пулкову и *Ганског* на Монблану, као и визуална посматрања *Васиљева* у Одеси и *Рабе-а* у Бреслави дају за Венеру кратки период ротације, око 24 часа.

Површина Марса (сл. 102.), са разним контурама на њој, види се по некад кроз силне телескопе тако јасно, да су за њу већ давно састављене детаљне карте сличне са географским. Због тога су већ давно одређени и сви елементи ротационог кретања те планете, која се обрће у исту страну као и Земља. На име:

$$\eta = 26^\circ 3', \quad \Omega = 84^\circ \quad \text{и} \quad T = 24^h 37^m 22^s 7$$



Сл. 102.

На Јупитеру се (сл. 103.), као и на Сунцу, појављују од времена на време час тамне час светле пеге, које се по некад одржавају врло дуго те је по њима одређена ротација те планете ($k = 11.1$), такође у директном правцу, са елементима:

$$\eta = 2^\circ, \quad \Omega = 336^\circ \quad \text{и} \quad T = 9^h 55^m 6$$

Разуме се, да овако великој брзини ротационог кретања одговара и знатна спљоштеност на Јупитеру тј. око $\frac{1}{17}$. Тамнији појаси на тој планети су промењљиви, али су увек приближно паралелни са њеним екватором. Посматрања њихових детаља показују, да се, слично Сунцу, разне зоне различитом брзином обрћу.

Сличне се пеге и тамнији појаси опажају и на Сатурну, чији су елементи ротације овакви:



Сл. 103.

$$\eta = 28^\circ, \quad \Omega = 168^\circ \quad \text{и} \quad T = 10^h 15^m$$

тако, да се екватор његов скоро сасвим поклапа са равни његових прстенова (чл. 167.), али се они обрћу у неколико спорије, наиме за време од $T = 10^h 30^m$. Сплљоштеност Сатурна

(сл. 97.) по мерењима излази равно $\frac{1}{9}$ и она се запажа чак и од ока. На Сатурну се опажа исти закон промењљивости брзине ротације разних зона његових.

Најзад, што се тиче најдаљих планета од Сунца, т.ј. Урана и Нептуна, то њихове ротације још нису одређене непосредно, пошто се на њиховим врло малим дисковима ($4''$ resp. $2\frac{1}{2}''$ пречника при $k = 4.2$ resp. 3.8) не могу да запазе никакве пеге.

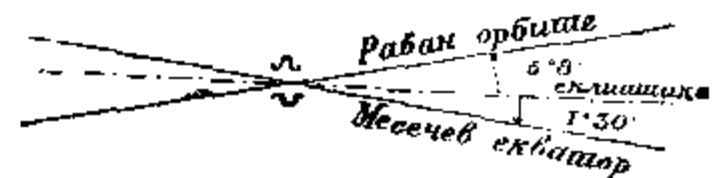
Али, за Уран је 1912. г. откривена у Америци његова ротација спектроскопски, са периодом од $10\frac{3}{4}$ часа у исту страну у коју се крећу његови пратиоци; при томе и екватор се планете приближно поклапа са равни орбита њених пратилаца. Тако исто 1924. г. Хол је одредио период обртања Нептуна од 8 часова, по променама његовога сјаја. У чл. 134. видели смо, како треба да зависи спљоштеност s планете од угловне брзине w њене ротације, т.ј. кад се зна њена маса m и линеарна дужина њенога полупречника $a = k$, добићемо приближно силу теже на њеној површини $g_0 = \frac{m}{a^2}$ и крајње границе спљоштености $\frac{1}{2}q$ и $\frac{4}{5}q$, где је $q = -\frac{w^2 a}{g_0}$. На тај начин, излази да су за Марс, Јупитер и Сатурн:

	$a = k$	g_0	$s > \frac{1}{2}q$	$s < \frac{5}{4}q$	Стварна спљоштеност
за Марс	0.53	0.38	1 : 430	1 : 172	—
за Јупитер	11.1	2.25	1 : 23	1 : 9	1 : 17
за Сатурн	9.2	0.83	1 : 10	1 : 4	1 : 9

Према томе се теорне границе за спљоштеност Јупитера и Сатурна потпуно потврђују посматрањима; мала пак спљоштеност Марса још није добивена довољно тачно из посматрања.

170. Ротација и либрација Месеца.

Планине и остали детаљи, који се виде на Месечеву диску, показују, да је ка Земљи окренута увек једна и иста половина Месечеве површине; отуд пак излази, да је истинито трајање T потпуног обрта Месеца око његове осе тачно равно трајању звезданог његовог оптицаја (револуције) око Земље $S = 27.3217$ сред. дана (чл. 107.) тј. да је угловна брзина ротације $w = n = 13^\circ 10' 34''.9$ за 1 сред. дан. Из тачних посматрања положаја тих планина према центру и крајевима Месечева диска (чл. 168.) излази, да је екватор Месечев нагнут према еклиптици под углом $\eta = 1^\circ 32'$, силазни се пак његов чвор ζ (сл. 104.) поклапа увек са средњим узлазним чвором Ω саме орбите Месечева па се отуд заједно са њим помера у ретроградном правцу сваке године за $19^\circ 20'.5$.



Сл. 104.

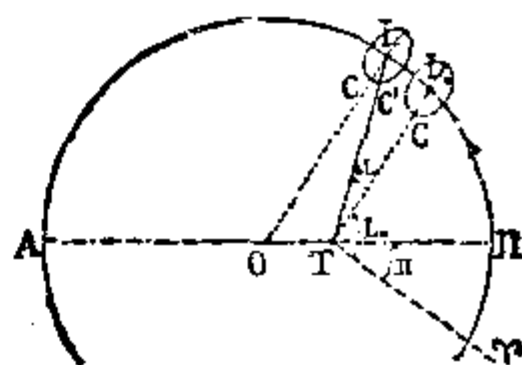
Да би се објаснило, по теорији гравитације, како ово прецесионо кретање ротационе осе Месечева, — које се не би могло појавити код потпуно сферног тела (чл. 144.), — тако и потпуна једнакост трајања ротације T и револуције S , неопходно је потребна претпоставка, да је Месец добио био унеколико развучену форму у правцу ка Земљи још онда, када је био у течном стању. И заиста, кад Месец производи својом привлачном снагом прилив и одлив на воденом обмотачу Земљином, онда је и обратно, на још не стврдутој површини Месечевој требало било да произађу још несразмерно веће

приливне испупчености*). Дејствујући на супрот ротационом кретању Месеца по инерцији, те су испупчености и могле поступно да изравнају брзину његове ротације са брзином револуције његове око Земље. То се исто могло десити и код планета Меркура и Венере, које су најближе Сунцу (чл. 169.). Овде је место напоменути, да се једнакост ротационог и револуционог кретања опажа још и код неких пратилаца Јупитера и Сатурна, о чијој се ротацији да закључити само по периодичким променама њихова сјаја.

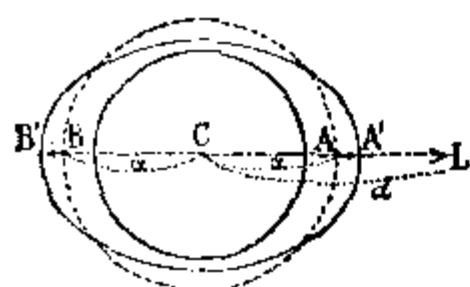
Кад би се правац са Земље Т на Месец L_0 (сл. 106.) одређивао само помоћу средње његове дужине $L_0 = \Pi + \pi\tau$, где је τ број средњих дана, истеклих од момента пролаза Месеца кроз перихег Π , — онда би, услед једнакости $w = n$, централна тачка С привиднога Месечевог диска остала непромењљива. Али, пошто се истинита дужина Месечева L разликује од L_0 за угао $\Delta L = \sphericalangle L_0TL = \sphericalangle CLC'$, који по некад може да достигне до $\pm 8^\circ$ (чл. 141.), то тачка С одилази од центра Месечева диска час удесно час улево за величину $CC' = \pm k \sin 8^\circ = \pm \frac{1}{7}k$, тј. за $\frac{1}{7}$ део Месечева полупречника. Таква се, привидна са Земље, колебања Месеца зову *либрације његове по дужини*. Због нагиба пак екватора Месечевог према равни његове орбите на угао од $5^\circ 8' + 1^\circ 32' = 6^\circ 40'$, произлази на личан начин и привидно колебање или *либрација Месечева по ширини*. Најзад, услед знатне паралаксе Месеца, и само премештање тачке посматрања на Земљиној површини осетио мења облик Месечева диска и тиме изазива *дневну или паралакшичку либрацију*.

171. Орбите планетних пратилаца.

Пратиоци се планета обично означавају нумерама I, II, III и т. д. по реду њихове даљине од своје планете, али сваки од њих има такође и свој особени назив. Број је њихов овакав: код Земље 1, код Марса 2, код Јупитера 9, код Сатурна 10, код Урана 4 и код Нептура 1. Сви су они много мањи од својих планета; орбите пак њихове мало се разликују од кругова, (само је код VII пратиоца Сатурновог ексцентрицитет $e = \frac{1}{9}$) а код свију су планета, које их имају неколико, они распоређани скоро у једној и истој равни па и револуционо кретање пратилаца око планете врши се увек у једну и исту страну. Орбите пак некојих недавно откривених пратилаца Јупитера и Сатурна одликују се знатно већим ексцентрицитетом и нагибом (нпр. код X пратиоца Сатурновог је $e = 0.23$ и $i = 39^\circ$);



Сл. 106.



Сл. 105.

*) Сила са којом Месец L (сл. 105.) пертурбира нормални облик Земљиних океана AB управно је пропорционална његовој маси m' и обрнуто пропорционална кубу његовог растојања од Земље $CL = d$. Заиста, ако означимо полупречник Земљин $CA = CB$ са a , то ће се убрзања g_c, g_a , и g_b , која Месец саопштава геср. центру Земље C , најближој тачци A и најдаљој B , изразити приближно овако:

$$g_c = \frac{m'}{d^2}, \quad g_a = \frac{m'}{(d-a)^2} = g_c \left(1 + \frac{2a}{d}\right) \quad \text{и} \quad g_b = \frac{m'}{(d+a)^2} = g_c \left(1 - \frac{2a}{d}\right);$$

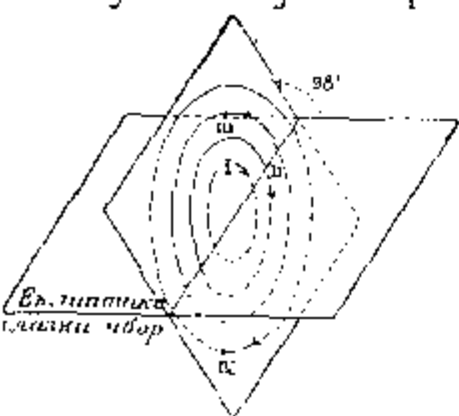
па због тога ће померања тачака A и B у положај A' и B' , тј. висине AA' и BB' приливних испупчености (плиме) зависити од разлика убрзања

$$g_a - g_c = g_c - g_b = 2a \frac{m'}{d^3}.$$

Висине прилива (плиме) од дејства Сунца треба да буду скоро $\frac{1}{4}$ пута мања него од дејства Месеца, јер и ако је његова маса већа $\left(\frac{M}{m'} = 18 \times 327000 = 26500000\right)$ ипак је и растојање до њега R знатно веће d $\left(\left[\frac{R}{d}\right]^3 = (389)^3 = 59000000\right)$.

им тога VIII се пратилац Јупитеров и IX Сатурнов крећу ретроградно. На њ начин системе пратилаца Марса, Јупитера, Сатурна и Урана представљају потпуно сличног са системом свију великих планета према Сунцу.

Што се тиче самога положаја орбитних равни, оне се код пратилаца Марса, Јупитера и Сатурна скоро поклапају са екваторима тих планета, т. ј. оне су нагнуте према еклиптици под *resp.* оваквим углима: 26°, 2° и 28°.



Сл. 107.

Ово поклапање без сумње није случајно, и, ма да оно не постоји код Земљиног пратиоца, ипак се са великом вероватности може претпоставити, да су код Урана и Нептуна (о чијим се ротацијама ништа непосредно не зна) екватори нагнути према еклиптици исто тако као и орбите њихових пратилаца, тј. под углом око 98° код првог и око 143° код другог. Ови нагиби, већи од 90°, показују, да обично, директно кретање прелази овде у ретроградно, као што се то види на сл. 107. за пратиоце Уранове.

Највећу планету, Јупитера прате и највећи пратиоци. Четири од њих, II, III и IV открио је још Галилеј 1610. године одмах пошто је пронашао Јупитерове мјесечине. Они би се могли видети чак и голим оком, кад би били знатно даље од своје сјајне планете; кроз силне пак дурбине они се виде са приметним мјесечинама у пречнику око 1" па и више. Према томе, по својим линеарним димензијама најмањи од та четири главна пратиоца Јупитерова раван је Месецу ($k = 0.27$) а највећи ($k = 0.45$) — већи је од Меркура; али судећи по оним вртљивостима, које произлазе на њиховим орбитама услед привлачног дејства њиховог један на другог, масе њихове излазе већ не тако велике, него сразмерно мање за: $\frac{1}{200}$, $\frac{1}{140}$, $\frac{1}{33}$ и $\frac{1}{77}$ од масе Земљине. Најближи пак пратилац Јупитеров изванредно је мален и откривен је тек недавно, због чега га и означавамо нумером I'. Сатурнов је само један IV, пратилац (Титан) скоро још исто велик као и Меркур, међутим маса му ($\frac{1}{51}$) је скоро дупло мања од масе Меркурове. Сви остали пратиоци Сатурнови и осталих планета много су мањи од нашега Месеца.

У табели, која сљедује, наведене су: дужа полуоса a' орбита пратилаца, изражена у јединицама екваторијалног полупречника Земље; хоризонталне екваторијалне параласке њихове π у односу према својим планетама, изражене у степенима, и трајања S' истинитих или звезданих њихових оптицаја око својих планета, изражена у средњим данима.

Пратиоци:	Марса		Сатурна							
	I	II	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
a'	1.5	3.7	28.8	37.0	45.9	58.7	82.1	190.1	233.2	554.1
π°	21.2	8.3	18.8	14.5	11.7	9.1	6.5	2.8	2.3	1.0
S'	0.32	1.26	0.94	1.37	1.89	2.74	4.52	15.95	21.31	79.33

Пратиоци:	Јупитера					Урана				Нептуна
	I'	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I
a'	28.2	65.6	104.4	166.5	292.9	29.8	42.0	68.2	91.2	55.9
π°	23.1	9.7	6.1	3.8	2.2	8.2	5.8	3.6	2.7	3.9
S'	0.50	1.77	3.55	7.15	16.69	2.52	4.14	8.71	13.46	5.88

Овде нису дате орбите нових пратилаца Јупитера и Сатурна, који су откривени фотографски тек крајем прошлог и почетком овога века, јер још нису довољно тачно одређене. Ради извесне њихове карактеристике може се напоменути, да су периоди VI, VII и VIII Јупитеровог пратиоца оцењени у: 250, 265 и 740 дана а дуже полуосе њихове у: 1790, 1870, 3690 екваториалних радиуса Земље; време пак оптицаја IX и X Сатурновог пратиоца: 550 и 21 дан а полуосе: 2060 и 230 Земљиних радиуса.

172. Конфигурације Јупитерових пратилаца.

Међу горе наведеним *звезданим опшицајима* S трију пратиоца Јупитерових, I, II и III, или, међу одговарајућим им средњим кретањима за 1 дан:

$$n'_1 = \frac{360^\circ}{S'_1} = 203^\circ 29' 3, \quad n'_2 = \frac{360^\circ}{S'_2} = 101^\circ 22' 5 \quad \text{и} \quad n'_3 = \frac{360^\circ}{S'_3} = 50^\circ 19' 1$$

постоји овај однос

$$n'_1 + 2n'_3 - 3n'_2 = 0, \dots \dots \dots (3.)$$

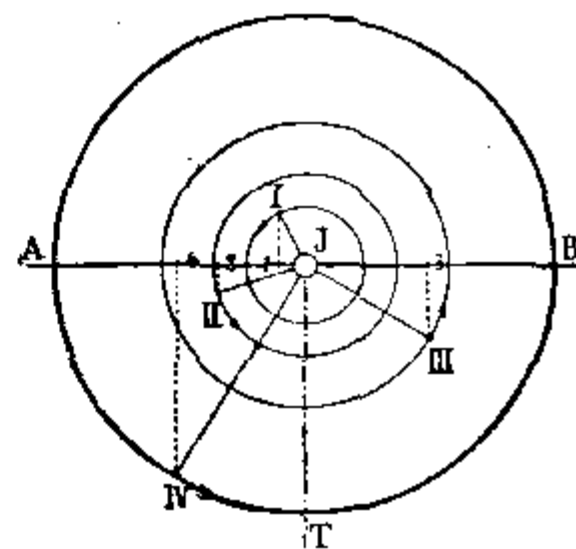
чија се потпуна строгост, — као што је Лаплас показао, — стално одржава узајамним привлачењем тих тела. Из овога пак непосредно излази, да су и средње планетоцентричке дужине тих пратилаца, L_1, L_2 и L_3 везане међу собом сличном једначином

$$L_1 + 2L_3 - 3L_2 = C, \dots \dots \dots (3.)'$$

где је C стална величина, равна управо 180° .

Кад се одузме од средњег кретања n' пратиоца средње кретање $n = 0^\circ 5' 0$ самога Јупитера око Сунца, онда се добива средње трајање његовога *синодског опшицаја* $T' = \frac{360^\circ}{n' - n}$, које ће се, уосталом, врло мало и разликовати од S' . По истеку тога времена T' , пратилац по својој орбити долази у пређашњи свој положај према Сунцу.

Услед врло малог нагиба ($i = 1^\circ 30'$) орбите самога Јупитера J према еклиптици а тако исто и орбита свију његових пратилаца, ти се пратиоци представљају са Земље T увек приближно на правој AJB , која је управна на правац JT (сл. 108.); места пак 1, 2, 3 и 4 на којима они треба да буду, лако се одређују, за жељени момент, као пројекције на линији AB истинитих места пратилаца I, II, III и IV на њиховим орбитама. Сличне се слике или *конфигурације* дају у „Nautical Almanac-у“ по једанпут за сваки дан у години, при чему се цифре 1, 2, 3 и 4 стављају увек са оне стране места пратиоцевог, куда је упућено његово привидно кретање по правој AB . На тај је начин по даној конфигурацији лако обратно успоставити истинито место свакога пратиоца на његовој *gesp.* кружној орбити.



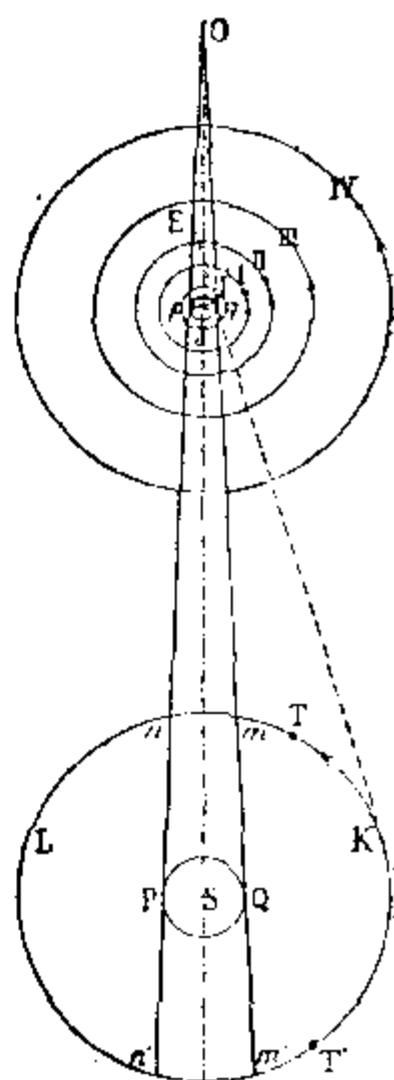
Сл. 108.

173. Помрачења Јупитерових пратилаца.

Замислимо орбиту Земљину $KTLT'$ око Сунца S (сл. 109.) и конус $PpOqQ$, који тангира Сунце и Јупитер по круговима PQ и pq . Орбите су свих пет прати-

лаца те планете, — као што је напред речено, — тако мало нагнуте према равни њене властите орбите; да само IV, најдаљи од њих, може да прође мимо конуса сенке pOq ; сваки од осталих пак, при сваком својем оптицају, мора да прође кроз њега и да се помрачи. Из разматрања момената почетка и свршетка ових помрачења обично се и одређују не само синодски оптицаји пратилаца већ и остали елементи елиптичког њиховога кретања. Уосталом, ступање пратилаца у сенку и излаз њихов из ње врши се не моментално па су због тога, у оцени момената њихових, могуће грешке до 10 секунда и више, према величини дурбина, који је употребљен за та посматрања.

Али се код свију пратилаца не може да посматра како почетак, тако и крај једнога и истог помрачења. Кад се повуче тангента KqE на орбиту Земљину и на ектаторијални пресек Јупитера pq , који пресеца изводницу PpO конуса сенке у тачци E , увидеће се, да ће се за пратиоце, који се налазе ближе Јупитеру него та тачка E , — тј. чија је дупла паралакса π (чл. 171.) већа од угла $\sphericalangle PEK$, — моћи посматрати са Земље у делу њене орбите mKm' само почетци помрачења а у делу nLn' само њихови свршетци; пошто је пак $\sphericalangle PEK = \frac{1}{5.2} \frac{1}{\sin 1^\circ} = 11^\circ$, то се код I пратиоца обе појаве не могу од



Сл. 109.

једном посматрати (десети), а код II у врло ретким случајевима. Једначина (3.) показује још, да се пратиоци I, II и III не могу помрачити једновремено.

У „Nautical Almanac“-у дају се не само почетци и свршетци помрачења пратилаца I, II, III и IV већ и моменти ступања на диск Јупитеров и силази са њега самих пратилаца и њихових сенки, када они пролазе између Сунца и планете.

Као што је познато, посматрања Јупитерових помрачења довели су Ремера (1675. год.) до открића да се светлост не простира моментално. И заиста, услед тога се појављују врло осетне *неједнакости* у моментима посматрања тих појава са Земље. Узмимо да су посматрани моменти t и t' почетка помрачења каквога пратиоца са положаја Земље у T и T' , при чему су нам позната растојања њена од њега d и d' . Истинити ће се моменти θ и θ' тих појава изразити овако

$$\theta = t - \frac{d}{W} \quad \text{и} \quad \theta' = t' - \frac{d'}{W},$$

где је W брзина простирања светлости. Пошто је потпуно добро познат интервал времена $\theta' - \theta$, који у себи садржи одређени број синодских оптицаја пратиоца, то се за одређивање W добива једначина

$$(d' - d) \cdot \frac{1}{W} = (t' - t) - (\theta' - \theta).$$

На тај начин, при највећој величини разлике $d' - d = 2$, посматрања дају $\frac{2}{W} 16^m 6$; т. ј. време $\frac{1}{W}$, које употреби светлост на пролаз средњег растојања од Земље до Сунца, — које се узима за јединицу, — излази равно $8^m 3$.

Задаће:

1.) По даним линеарним полупречницима k разних небесних тела, — израженим у јединицама екваторијалног полупречника Земље, — који су наведени у табlici што следује, — срачунати приближно средње густине Δ тих небесних тела и убрзање силе теже g на њиховим површинама, са претпоставком, да су те површине сферне.

Односи густинâ Δ према средњој густини Земље Δ_0 и убрзања g према убрзању теже g_0 на Земљиној површини изразиће се овако:

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = \frac{m}{m_0} \cdot \frac{1}{k^3}, \quad \frac{g}{g_0} = \frac{m}{m_0} \cdot \frac{k}{k^2}$$

те ће са оним релативним масама небесних тела $\frac{m}{m_0}$, које су наведене у чл. чл. 138, 139. и 142. изаћи овакви:

Небесна тела	☉	♄	♃	♂	♅	♁	♂	♃	♄	♃	♃
k	109	0.38	1.00	1	0.27	0.53	11.0	9.2	4.1	4.1	
$\Delta : \Delta_0$	0.25	1.13	0.80	1	0.61	0.74	0.24	0.13	0.20	0.25	
$g : g_0$	27.5	0.43	0.80	1	0.17	0.39	258	1.10	0.83	1.01	

2.) У које дане године треба да се представи виђени са Земље пут пеге на Сунчевом диску као права линија и под којим углом према деклинационом кругу Сунца?

Дужина Сунца треба тада да буде или $\Omega = 74^\circ$ (око 4. јуна) или $\Omega + 180^\circ = 254^\circ$ (око 6. децембра); пошто пак у троуглу PQS са странама $QS = 90^\circ$, $PQ = \omega$ и углом $\sphericalangle PQS = 90^\circ - 74^\circ = 16^\circ$ (или $180^\circ - 16^\circ$) излази, да је $tg \sphericalangle PSQ = tg x = tg \omega \sin 16^\circ$ и $x = 6^\circ 8'$, то ће у првом случају тражени нагиб пута према деклинационом кругу PS бити раван $90^\circ - x = 83^\circ 52'$ а у другом $90^\circ + x = 96^\circ 8'$.

3.) Са претпоставком, да је сјај планете i увек пропорционалан са истинитом површином осветљеног дела њенога диска, — одредити при којем ће положају Венере на њеној орбити њен сјај i бити највећи.

На основу формула (1.) и (2.) тај ће се сјај i уопште изразити овако:

$$i = \frac{C}{\rho^2 d^3} \cos^2 \frac{P}{2} = \frac{C}{4\rho^3} \cdot \frac{(d + \rho)^2 - \rho_0^2}{d^3},$$

где је $\rho_0 = 1$, $\rho = 0.72$ а $\frac{C}{4\rho^3}$ нека стална количина. Услов пак $\frac{\partial i}{\partial d} = 0$ даће за тражено растојање d Венере од Земље квадратну једначину, из које ће изаћи, да је

$$d = -2\rho + \sqrt{\rho^2 + 3\rho_0^2} = 0.43.$$

Тада ће у троуглу STP (сл. 95.) угли код Сунца, код Земље и код Венере бити: $S = 22^\circ$, $T = 39^\circ$ и $P = 119^\circ$; фаза пак Венерина биће $\cos^2 \frac{P}{2} = 0.25$. При овој је фази њен сјај четири пута силнији, него ли при пуном осветљеном диску у горњој конјукцији њеној са Сунцем.

Г Л А В А XXV.

ТЕОРИЈА ПОМРАЧЕЊА И ДРУГИХ ПОЈАВА СЛИЧНИХ СА ЊИМА.

174. Опште погодбе за постајање помрачења Месеца и Сунца.

Посматрање Месечевих а особито Сунчевих помрачења служе као изврсно средство за контролу координата Месеца, које се срачунавају по веома сложеној теорији његова кретања. Тај исти значај имају и покривања (окултације) звезда Месецем, која су по суштини слична са Сунчевим помрачењима и која осим тога служе често и за одређивање дужина разних места на Земљиној површини. Најзад, за време потпуних Сунчевих помрачења јављају се веома погодне околности за све врсте посматрања оних делова неба, који су најближи Сунцу и који су у обично време силно осветљени његовим зрацима. Све ово налаже, да треба темељно размотрити, како оне опште погодбе, под којима произлазе све те појаве, тако и оне најпростије методе за благовремено одређивање самих момената тих појава.

Сматрајући Земљу T за куглу, да замислимо конус $MM'KN'N$ (сл. 110), који тангира њу и Сунце S по круговима $M'N'$ и MN . Он се зове *конус сенке*, зато што у њега може да доспе сразмерно мала количина сунчаних зракова, преломљених Земљином атмосфером. Кад спојимо затим тачку M са центром Земље T и напоменемо да је угао $\sphericalangle STM$ угловни полупречник Сунца R_{\odot} а угао $\sphericalangle TMM'$ његова хоризонтална паралакса π_{\odot} , онда ћемо добити за угао $\sphericalangle TKM' = f$ овакав израз

$$f = R_{\odot} - \pi_{\odot}.$$

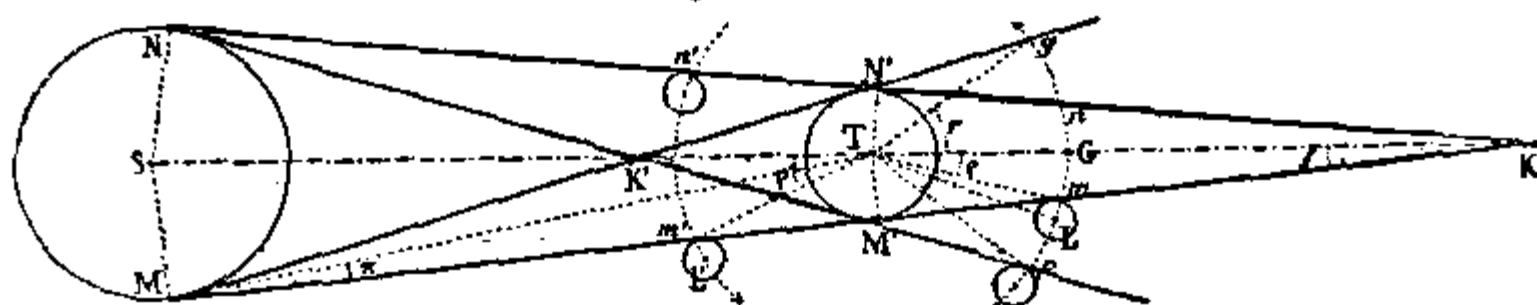
Ради одређења угловног полупречника $\sphericalangle mTC = \rho$ круга сенке mCn , кроз који може да прође Месец L за време своје опозиције са Сунцем, — да спојимо тачку m тога круга са T и да означимо хоризонталну паралаксу Месеца $\sphericalangle M'mT$ са π , а његов угловни полупречник $\sphericalangle LTm$ — са R ; тада ћемо из троугла TmK добити

$$\rho = \pi - f = \pi + \pi_{\odot} - R_{\odot} \dots \dots \dots (1.)$$

На тај начин, ако центар Месеца L прође од осе TC конуса у највећем угловном растојању d , које је мање од величине

$$\Delta = \rho + R = \pi + \pi_{\odot} + R - R_{\odot}, \dots \dots \dots (2.)$$

онда ће насигурно произаћи помрачење макар и врло малог дела Месеца; ако ли то d , буде веће од Δ , онда помрачења бити неће.



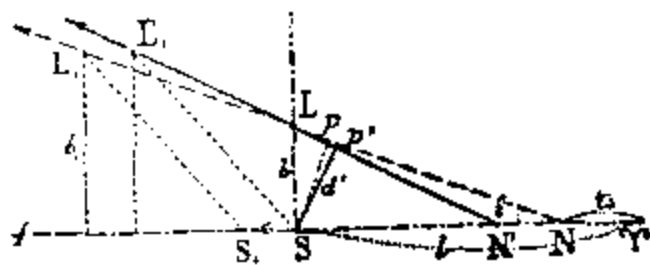
Да одредимо сад угловни полупречник $m' TS = \rho'$ кружног пресека $m' n'$ истога конуса MKN , кроз који треба да прође макар један део Месеца L' око његове конјукције са Сунцем, да би се пројектовао на његов диск са неких тачака Земљине површине те да у њима произведе помрачење неког његовог дела. Као и мало час, из троугла $Tm' K$ са углом $\sphericalangle Tm' K = \pi$ добиће се

$$\rho' = \pi + f = \pi - \pi_{\odot} + R_{\odot} \dots \dots \dots (1)'$$

па због тога најкраће растојање d' центра Месечевог од осе TS конуса треба да буде у овом случају мање од величине

$$\Delta' = \rho' + R = \pi - \pi_{\odot} + R + R_{\odot} \dots \dots \dots (2)'$$

Што се тиче угловног растојања d' (или d), оно се добива са довољном тачношћу из овакве конструкције привидног пута Месечевог у односу према осе конуса сенке STK : Нека на небесној сфери (сл. 111.) ΥSf буде еклиптика а L и S центри Месеца и Сунца (или супротне му тачке C) у моменту њихове конјукције T_0 , када је дужина Месеца l тачно равна дужини Сунца $\Upsilon S = \odot$ а ширина његова $LS = b$. По истеку извесног времена Месец ће се померити у L_1 а Сунце у S_1 ; али, ако се од промене дужине Месеца одузме промена дужине Сунца, онда ће се уместо L_1 добити тачка L'_1 , која се налази у односу према S



Сл. 111.

у таквом истом положају као L_1 у односу према S_1 . Оваква се конструкција по тачкама привидног пута Месечевог $N' LL_1$ у односу према Сунцу S (или тачци C) може извршити врло просто и са довољном тачношћу на равни у произвољној размери, при чему ће се лако одредити и тражено најкраће растојање Месеца $Sp' = d'$ (или $Cp' = d$) и сама

величина његовог улаза у конус сенке, када то d' изађе мање од ρ' (или d мање од ρ).

Како релативан тако и истинити пут Месеца NLL_1 , — нагнути према еклиптици Υf под углом $\sphericalangle NLF = i = 5^{\circ} 17' 6''$ (јер $\cos 2 (\delta_{\odot} - \odot)$ у формули (10)' чл. 141. треба да буде у времену помрачења близак јединици), — изаћи ће при њиховој конструкцији приближно као праве линије и толико блиске једна другој, да се растојање $Sp' = d'$ може сматрати да је равно управној Sp на правцу NLL_1 тј.

$$d' = Sp = SN \cdot \sin i = \frac{SN}{10.8} \quad (\text{или } d = Cp = \frac{CN}{10.8});$$

при чему тачка N може бити и као узлазни и као силазни чвор истините Месечеве орбите. С друге пак стране, при средњим величинама паралакса и полупречника ($\pi = 57' 7''$, $R = 15' 8''$, $\pi_{\odot} = 0' 1''$, $R_{\odot} = 16' 1''$), по формулама (2.) (2.)' излази, да је $\Delta = 57' 6''$ и $\Delta' = 89' 4''$ те ће због тога неопходна погодба за постајање помрачења бити:

- за Сунчева $\dots \frac{SN}{10.8} < 89' 4''$ или $SN < 16^{\circ} 1'$,
- за Месечева $\dots \frac{SN}{10.8} < 57' 6''$ или $CN < 10^{\circ} 4'$.

Према томе, Сунчева помрачења треба да се дешавају чешће од Месечевих, за Земљу уопште; али се Месечева помрачења виде једновремено са свију тачака целе полукугле Земљине, Сунчева пак у највише се случајева виде само са сразмерно малог дела Земљине површине. Број једних и других помрачења у периоду од 18 година + 11 дана = 223 синод-синодска месеца (чл. 107.), — после којег се сва она понављају у пређашњем својем облику, — одредиће се приближно, ако напоменемо, да ће се при 223 конјукција и толико исто опозиција Месеца према Сунцу, узлазни и силазни чворови Месечеве орбите налазити у најразличитијим удаљењима од тих небесних тела, почев од 0° па до $\pm 180^{\circ}$; помрачење ће се пак десити само при удаљењима њиховим, која нису већа од $\pm 16^{\circ} 1'$ и $\pm 10^{\circ} 4'$. Услед тога

број Сунчевих помрачења треба да буде приближно раван $223 \cdot \frac{2 \times 16^\circ 1}{180^\circ} = 40$, број пак Месечевих — $223 \cdot \frac{2 \times 10^\circ 4}{180^\circ} = 26$ (у самој ствари првих бива 41 а других 29); сваке пак године треба да се деси у средњем по четири помрачења (у самој ствари не мање од два нити више од седам).

175. Узроци нетачности посматрања Месечевих помрачења.

Посматрања Месечевих помрачења, чак и потпуних, сад већ немају особитог практичног значаја, пошто се моменти почетка и свршетка опажају врло нетачно због ових узрока:

1.) Пре него што ће ући у конус сенке $M'KN'$ (сл. 110.), Месец L пролази кроз конус полусенке $pK'q$, који изнутра тангира Земљу и Сунце па се због тога његово осветљење Сунцем поступно ослабљује. Није тешко видети, да се угловни полупречник $\sphericalangle STq = STp = r$ кружног пресека тога конуса одређује овако:

$$r = \sphericalangle TrK' + \sphericalangle TK'p = \pi + \pi_{\odot} + R_{\odot} \dots \dots \dots (3.)$$

2.) Доњи слојеви земне атмосфере са њеним облацима апсорбује знатну количину сунчаних зракова те чини границе конуса нејасним и у неколико раширеним, усљед чега постоји емпиричко правило, за повећање полупречника p и r , срачунатих по формулама (1.) и (3.), за $\frac{1}{60}$ део његове величине.

3.) Преломљени земном атмосфером сунчани зраци, највише они црвене боје, улазе у сам конус сенке те осветљавају Месец чак и онда, када је он потпуно ушао у њега.

Услед свега овога у посматраним моментима почетка или и свршетка потпуног помрачења Месеца могу се десити грешке од минуте па чак и веће; остале се фазе помрачења посматрају још са мањом тачношћу. Због тога се потпуно достиже циљ претходног одређивања тих момената напред указаном конструкцијом чак и у размери не особито крупној, као што је то и урађено на примеру, који следује ради објашњења.

176. Конструкција Месечева помрачења.

Да одредимо конструкцијом, на карираној милиметарској хартији, све окожности Месечева помрачења, које се десило 30. марта 1885. године а ради тога да проитерполујемо пре свега из таблица „Nautical Almanac“-а еклиптичке координате тих небесних тела, за неколико целих часова гринвичкога средњег времена, најближих моменту опозиције Месеца према Сунцу $T_0 = 4^m 40^h$,

Средње Гринв. вр.	Дужина Месеца l .	Дужина $\odot + 180^\circ$	$l - (\odot + 190^\circ)$	Ширина Месеца b .	У моменту опозиције.
2 ^h	188°40'4	190° 2'3	—1° 21.9	+0° 21.9	$T_0 = 4^h 40^m$
3	189 13.5	4.7	—0 51.2	25.1	
4	189 46.7	7.2	—0 20.5	28.2	$R = 15.62$
5	190 19.8	9.6	+0 10.2	31.2	$\pi = 57.22$
6	190 52.9	12.1	+0 40.8	34.3	$R_{\odot} = 16.04$
7	191 26.0	190 14.6	+1 11.4	37.3	$\pi_{\odot} = 0.15$

Кад узмемо на правој ff' (сл. 112.), — која представља еклиптику, — тачку S за центар круга сенке и по размернику нашега цртежа пренесемо у односу према њој (линији ff') координате центра Месеца $l - (\odot + 180^\circ)$ и b

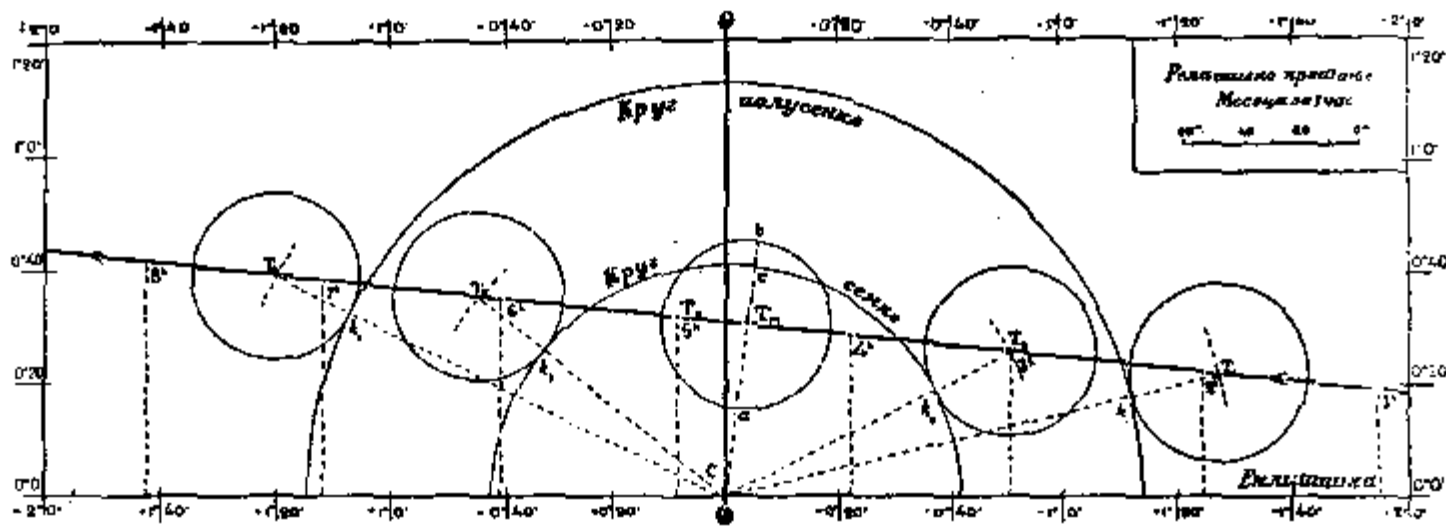
за разне часове гринв. ср. времена, онда ћемо добити релативни пут тога центра С скоро по правој линији; затим, кад срачунамо по формули (1.) и (3.) полупречнике

$$\rho = 41'.33 \left(1 + \frac{1}{60}\right) = 42'.0 \text{ и } r = 73.41 \left(1 + \frac{1}{60}\right) = 74'.6$$

и кад их узмемо у истој размери, са њима ћемо описати круг сенке и поку-сенке. Помоћу растојања

$$CT_1 = CT_4 = r + R = 90'.2 \text{ и } CT_2 = CT_3 = \rho + R = 57'.6$$

одредиће се положај центра Месеца T_1, T_4 и T_2, T_3 , када ће он додирнути у тачкама k_1 и k_4 круг полусенке а у тачкама k_2 и k_3 круг сенке; положај пак T_m центра Месечева у самој средини помрачења одредиће се подножјем управне CT_m , спуштене из С на пуг Месечев, при чему однос одсечка ac према пречнику Месечевом излази раван $\frac{27'.5}{31'.2} = 0.88$ и то ће изразити највећу фазу помрачења.



Сл. 112.

Што се тиче самих момената, када ће се центар Месеца налазити у тачкама T_1, T_2, T_m, T_3 и T_4 , они ће се лако одредити деловима покрета његовога за 1 час па онда излазе и овде тачно као и у „Nautical Almanac“-у овакви:

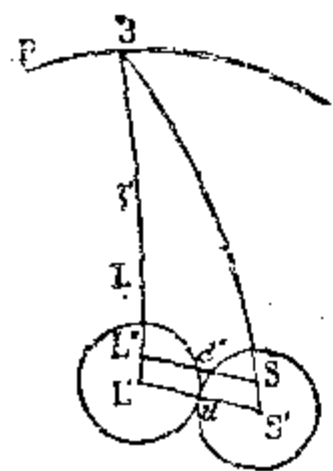
Ступање Месеца у полусенку	$T_1 = 1^h 50^m$	Гринв. ср. вр.
„ „ у сенку	$T_2 = 2 59$	„ „ „
Средина помрачења	$T_m = 4 34$	„ „ „
Излаз из сенке	$T_3 = 6 10$	„ „ „
„ „ полусенке	$T_4 = 7 19$	„ „ „

Да би се добили ти исти моменти у локалном времену, нпр. у петроградском средњем времену, њима би требало додати само дужину тога места $2^h 1^m$ У Петрограду се могло видети само друга половина тога помрачења, пошто се сам Месец рађао тек око $6\frac{1}{2}$ часова по средњем времену.

177. Гаусова метода за срачунавање Сунчевих помрачења.

За Сунчева се помрачења не можемо ограничити таквим истим разматрањем њиховим за Земљу уопште, као за Месечева, због тога што се она са разних тачака на Земљи представљају у различитом облику. За срачунавање њихових момената у зависности од географских координата места посматрања постоје потпуно тачне методе, које су дали Бесел и Ханзен; али, користећи се

врло оштрумним начином, који је за исту циљ био предложио Гаус, може се несразмерно простије доћи и до много простијих формула, које не остављају желети ничега бољег ни у смислу тачности.



Сл. 113.

Гаус је наиме предложио, да се у овом случају занемари паралакса Сунца π_{\odot} , т. ј. да се то небесно тело сматра као бескрајно удаљено од Земље, али да се уместо истините паралаксе Месеца π узме величина $\pi' = \pi - \pi_{\odot}$. Разуме се, да при томе и истинити линеарни полупречник Месеца k треба заменити са $k' = k \frac{\pi}{\pi'}$, те да би угловни полупречници оба небесна тела R и R_{\odot} остали онакви исти, какви су они и у самој ствари. Тада ће се привидни додир дискова тих небеских тела у моменту почетка или свршетка Сунчевог по-мрачења нарушити тек неосетно.

Да би се то доказало, замислимо на небесној сфери геоцентрички зенит Z тачке посматрања (сл. 113.), истинита места L и S центара Месеца и Сунца и њихова привидна места L' и S' на растојању $L'S' = d' = R' + R'_{\odot}$, при чему су R' и R'_{\odot} привиди полупречници дискова тих небесних тела, која се додирују. Са напред реченим смањењем паралаксе Месеца $\pi' = \pi - \pi_{\odot}$, привидно ће се место центра Месеца L'' показати од S већ на другом растојању $L''S' = d''$ него што је $L'S' = d'$ а у исто ће време и привидни полупречници R'' и $R''_{\odot} = R_{\odot}$ бити унеколико друкчији него ли R' и R'_{\odot} . Да видимо дакле, уколико ће се у овом случају разликовати од нуле величине

$$\delta = (R'' + R_{\odot}) - d'' = (d' - d'') - (R' - R'') - (R'_{\odot} - R_{\odot}).$$

Али претходно да напоменемо, да све те разлике $(d' - d'')$, $(R' - R'')$ и $(R'_{\odot} - R_{\odot})$ треба очевидно да буду пропорционалне са малом величином $\pi_{\odot} = 9''$ па због тога за паралаксу Месеца $\pi' = 1^{\circ}$ и осталих још мањих углова d' , R' и R_{\odot} , који ће у њих улазити, биће допуштено, да се узме, да је $\cos \pi' = 1$ и $\sin^2 \pi' = 0$, јер ће производ $\pi_{\odot} \sin^2 \pi'$ саставити свега $\frac{1}{360}$ део од секунде.

Кад се, ради скраћења, означи $LL'' = \lambda$, $SS' = \sigma$, $ZL = \zeta$, $ZS = \zeta'_{\odot}$, $\sphericalangle ZL'S' = L'$ и $\sphericalangle ZS'L' = S'$ и одреде мале величине λ и σ са довољном тачности на овај начин:

$$\lambda = LL' - LL'' = \pi \sin \zeta' - \pi' \sin (\zeta' - \lambda) = \pi_{\odot} \sin \zeta'_{\odot} + \lambda \sin \pi' \cos \zeta'$$

или
$$\lambda = \pi_{\odot} \sin \zeta'_{\odot} + \frac{1}{2} \pi_{\odot} \sin \pi' \sin 2\zeta' \quad \text{и} \quad \sigma = \pi_{\odot} \sin \zeta'_{\odot},$$

онда ћемо добити за разлику $(d' - d'')$, — као и у чл. 59. — овакав израз:

$$\begin{aligned} (d' - d'') &= \lambda \cos L' + \sigma \cos S' \\ &= \pi_{\odot} \sin \zeta'_{\odot} \cos L' + \frac{1}{2} \pi_{\odot} \sin \pi' \sin 2\zeta' \cos L' + \pi_{\odot} \cos \zeta'_{\odot} \sin d' - \pi_{\odot} \sin \zeta'_{\odot} \cos L' \end{aligned}$$

или

$$(d' - d'') = \pi_{\odot} \cos \zeta' (\sin R' + \sin R'_{\odot}) + \frac{1}{2} \pi_{\odot} \sin \pi' \sin 2\zeta' \cos L'.$$

Али ће на основу формула чл. 95., са сличном тачности, изаћи:

$$(R'_{\odot} - R_{\odot}) = R'_{\odot} \sin \pi_{\odot} \cos \zeta'_{\odot} = \pi_{\odot} \cos \zeta' \sin R'_{\odot}$$

и

$$(R' - R'') = \pi_{\odot} \frac{\partial (R' - R)}{\partial \pi} = \pi_{\odot} \cos \zeta' \sin R';$$

па због тога ће после скраћења тих чланова, који улазе и у разлику $(d' - d'')$, изаћи просто

$$\delta = \frac{1}{2} \pi_{\odot} \sin \pi' \sin 2\zeta' \cos L'.$$

Према томе тражена грешка δ не премаша $\frac{9'}{112} = \frac{1''}{12}$; а та је величина потпуно ништавна у савршењу са нетачношћу са којом су нам познати угловни полупречници Сунца и Месеца из посматрања.

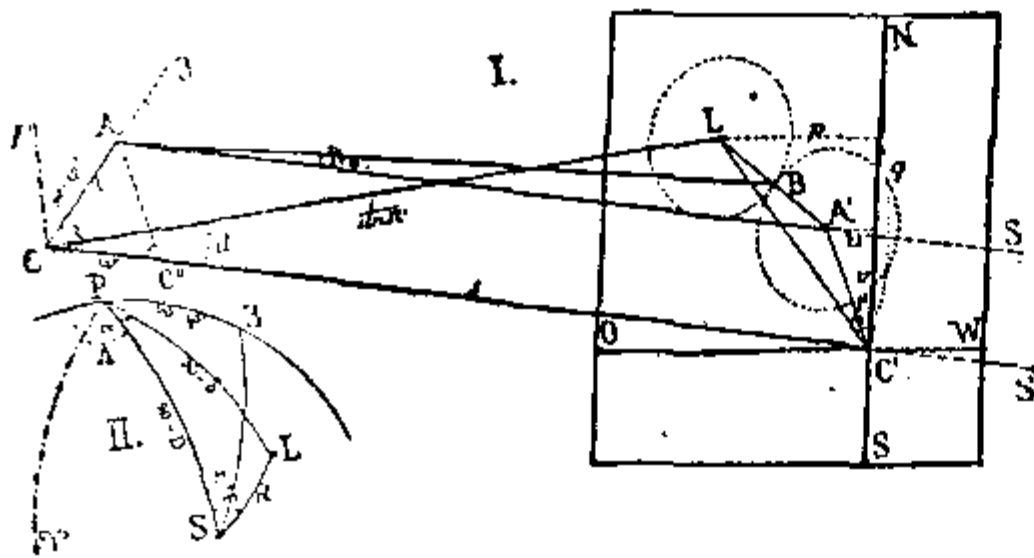
178. Основне формуле.

Узев, на основу напред реченога, за растојање Δ' Месеца L од Земље C (сл. 114., I) и за линеарни његов полупречник LB величине:

$LC = \Delta' = \frac{l}{\sin \pi'}$ и $LB = k' = 0.2726 \frac{\pi'}{\pi}$, где је $\pi' = \pi - \pi_{\odot}$, — да повучемо из:

C и неке тачке A Земљине површине паралелне правце CS и AS ка центру Сунца S , као да је оно бескрајно далеко, и да замислимо кроз L управну на њих раван, која ће се са њима пресећи у тачкама C' и A' а са равни pCC' ,

— која пролази кроз Земљину осу Sp , — по линији $NC'S$. У тој ћемо равни линију $C'N$ и на њу управну $C'O$ узети за координатне осе па ћемо означити координате центра Месеца L у односу према C' са p и q а координате тачке A' са u и v . Кад још замислимо из тачке A Земљине површине линију $AC'' = A'C'$, управну на CS и означимо: $AC = \rho^*$, $\sphericalangle pCA = 90^\circ - \varphi'$, $\sphericalangle ACS = \zeta$, $CC'' = w$, $CC' = s$, $\sphericalangle LCS = d$, $\sphericalangle NC'L = m$ и $\sphericalangle NC'A' = \mu$, онда



Сл. 114.

ћемо имати:

$$\begin{aligned} p &= LC' \sin m = \Delta' \sin d \sin m \\ q &= LC' \cos m = \Delta' \sin d \cos m \\ s &= LC \cos d = \Delta' \cos d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= A'C' \sin \mu = \rho \sin \zeta \sin \mu \\ v &= A'C' \cos \mu = \rho \sin \zeta \cos \mu \\ w &= AC \cos \zeta = \rho \cos \zeta \end{aligned}$$

Да би се сад изразили p, q и s у функцији геоцентричких екваторијалних координата α и δ за Месец и A и D за Сунце а u, v и w у функцији геоцентричке ширине φ' тачке A и часовног угла Сунца t (локалног истинитог времена), замислићемо на помоћној небесној сфери (сл. 114., II) полус P , геоцентрички зенит Z тачке A и центре: Месеца у L а Сунца у S , при чему ће бити: $PZ = 90^\circ - \varphi'$, $\sphericalangle ZPS = t$, $ZS = \zeta$, $\sphericalangle PSZ = \mu$, $LS = d$ и $\sphericalangle PSL = m$. Тада ће се из сферних троуглова PSL и PSZ и добити, на основу предидућих формула:

$$\left. \begin{aligned} p &= \Delta' \sin (\alpha - A) \cos \delta \\ q &= \Delta' [\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos (\alpha - A)] \\ s &= \Delta' [\sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A)] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (R)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \rho \cos \varphi' \sin t \\ v &= \rho [\sin \varphi' \cos D - \cos \varphi' \sin D \cos t] \\ w &= \rho [\sin \varphi' \sin D + \cos \varphi' \cos D \cos t] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (S)$$

*) Да би се узело у обзир дејство рефракције на привидни додир дискова Месеца и Сунца, треба геоцентричком растојању места посматрања $AC = \rho$ додати исту корекцију, као и уопште при посматрању Месеца (чл. 90.).

Линеарно растојање $LA' = l$ од центра Месеца L до правца AS на Сунце одредиће се помоћу координата p, q, u и w уопште овако:

$$l^2 = (p - u)^2 + (q - v)^2 \dots \dots \dots (T)$$

а да би се из тачке A видело, да диск Месеца додирује диск Сунца, — чији је угловни полупречник R_{\odot} , — то растојање l треба да буде овакво:

$$l = A'B \pm LB = (s - w) \operatorname{tg} R_{\odot} \pm k' = l_0 - w \operatorname{tg} R_{\odot} \left. \vphantom{l} \right\} \dots \dots \dots (U)$$

$$l_0 = s \operatorname{tg} R_{\odot} \pm k' \left. \vphantom{l_0} \right\}$$

где је

Знак $+$ код k' одговара овде, очевидно, спољњем додиру, т.ј. почетку и крају делимичног (парцијалног) Сунчевог помрачења за тачку A ; знак пак $-$ одговара унутрашњем њиховом додиру, т.ј. почетку или свршетку потпуног (тоталног) или прстенастог помрачења Сунчевог.

Напомена. Пролази доњих планета, Меркура и Венере, преко диска Сунчевог и покривања (окултације) разних планета и звезда Месечевим диском потпуно су слични са Сунчевим помрачењима, јер се у првом случају уместо Месеца, као тела најближег Земљи, јавља планета а код осталих улогу Сунца игра планета или Звезда. Преме томе основне се формуле (R), (S) и (T) примењују и на све те појаве, разуме се, са потребном изменом значења оних величина, које у њих улазе.

179. Расматрање Сунчева помрачења за Земљу уопште.

Пошто се величине p, q, s и l_0 , — које су опште за сва места на Земљи, — могу сматрати као познате за ма који момент T по гринвичком средњем времену, то ће се из двеју једначина

$$(p - u)^2 + (q - v)^2 = l^2 = (l_0 - w \operatorname{tg} R_{\odot})^2 \dots \dots \dots (T)$$

и
$$u^2 + v^2 + w^2 = \rho^2 \dots \dots \dots (V)$$

одредити координате u, v и w целог низа тачака A на Земљиној површини, у којима треба да произађе у том моменту почетак или крај помрачења. Ако пак заједно с тим буде дата и величина w или, што је једно и исто, зенитно растојање Сунца ζ у моменту T , онда ће се добити потпуно одређење вредности за u и v па прама томе и географске координате φ и L за тачку A . И заиста, истинито се локално време t и геоцентричка ширина φ' лако добивају из израза (S) у оваквом облику:

$$\operatorname{cotg} t = \frac{1}{u} (w \cos D - v \sin D) \dots \dots \dots (W_1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\sin t}{u} (w \sin D + v \cos D); \dots \dots \dots (W_2)$$

тражена пак дужина L , која се рачуна на исток од Гривнича, и географска ширина φ (по табlici 3.) тачке A срачунаће се овако:

$$L = t - (T + \text{једначина времена}) \text{ и } \varphi = \varphi' + (\varphi - \varphi') \dots \dots \dots (W_3)$$

Код напред наведеног одређивања координата u и v за разне, произвољно изабрате, величине T и w јавља се само једна незгода, која се састоји у томе, што у једначину (V) улази геоцентричко растојање

$$\rho = 1 - c \sin^2 \varphi',$$

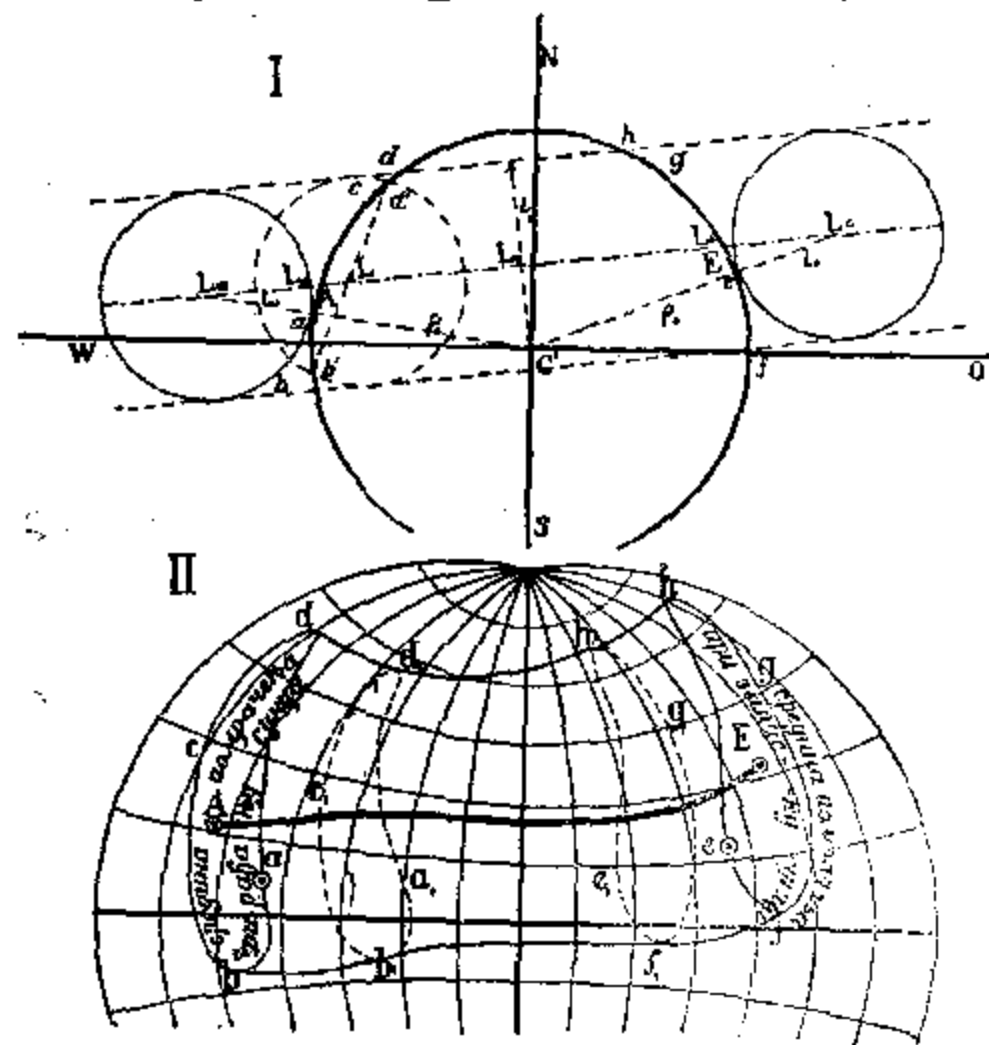
које такође зависи од непознатих u и v . Али се услед мале Земљине спљоштености $c = \frac{1}{297}$ може спочетка узети ρ као стално и равно средњој његовој вредности $\rho_0 = 1 - \frac{1}{2}c = 0.9983$, која одговара $\varphi' = 45^\circ$; а после, пошто се добију из једначина (Т), (V) и (W₂) приближне вредности за u , v и φ' , ваља поновити, у случају потребе, њихова срачунавања. Даље ћемо видети, да се те непознате u и v одређују не може бити простије и са потпуно довољном тачношћу не срачунавањем већ графички као координате тачака пресека двају круга (са полупречницима l и $\sqrt{\rho^2 - w^2}$), представљених једначинама (Т) и (V).

180. Одређивање граница и централне линије помрачења.

Узећемо, да посматрамо напред узету (чл. 178.) пројекциону раван са координатним осама $SC'N$ и $W'CO$ (сл. 115., I) са стране Сунца. Земља ће се на њој пројектовати приближно у облику круга $bdfh$ ($w = 0$), описаног из тачке C' полупречником $\rho_0 = 0.9983$; помоћу пак координата p и q , — које су срачунате по формулама (R) за неколико произвољних момената T по гринвичком средњем времену, — одредиће се на њој скоро праволиниски и равномерни пут центра Месечевог $L_a L_A L_E L_e$. Кад из разних места L тога центра, — која одговарају разним моментима T , — опишемо сад кругове полупречником $l = l_0$ (једначина (Т) при $w = 0$), и обележимо тачке њихова пресека b' и d' са кругом полупречника ρ_0 (једначина (V) при $w = 0$), онда можемо одредити, по координатама тих тачака u , v и времену T (чл. 179.), ширине φ и дужине L многих места на Земљи, у којима ће почетак и свршетак помрачења произаћи при рађању или при заласку Сунца (јер је $\zeta = 90^\circ$ при $w = 0$). Та ће места дати на географској карти две затворене линије $abcd$ и $efgh$ (сл. 115. II).

Са двеју тачака на Земљи a и e , — у којима ће произаћи само контакт напред споменутих кругова ρ_0 и l_0 , — са прве ће се, a , увидети почетак помрачења пре него са свију других а са друге, e , крај његов доцније него са свију других; помоћу пак одговарајућих положаја центра Месечевог L_a и L_e одредиће се гринвичка времена: T_a *почешка* и T_e *свршешка помрачења за сву Земљу уопште*. Онај део затворене линије $abcd$ са чијих се тачака $b..c..d$ види само свршетак помрачења при рађању Сунца биће *западна граница* предела са којих се може видети помрачење; део пак $f..g..h$ оне друге сличне линије $efgh$, где ће се почетак помрачења десити при заласку Сунца, биће *источна граница*. Разуме се, да ће те границе прелазити непосредно једна у другу, ако најкраће растојање L_0C' Месечевог пута од тачке C' буде било веће од разлике $\rho_0 - l_0$.

На тај би се начин и за сваки други круг, — који је описан из центр C' полупречником $\rho_0 \sin \zeta = \sqrt{\rho_0^2 - w^2}$, — могли добити сличне линије $a_1 b_1 c_1 d_1$ и $e_1 f_1 g_1 h_1$ на Земљи, помоћу којих се одређују границе видљивости помрачен при зенитном растојању Сунца, које не превазилази неку задану вредност. Тада би јужне и северне додирне линије $bb_1 f_1 f$ и $dd_1 h_1 h$, свију система ти



Сл. 115.

линија представљале јужну и северну границу помрачења. Али се, разне тачке тих граница могу одредити и непосредно на тој наине основи, што за њих треба да произађе само додир дискова Месеца и Сунца; из чега излази, да се за њих израз $(p - u)^2 + (q - v)^2$ у формули (Т) не треба да мења са прираштајем времена. На тај начин, означивши промене величина p, q, u и v за малу јединицу времена, на пример за 1 минуто, са p', q', u' и v' , имаћемо две једначине

$$(p - u)^2 + (q - v)^2 = l^2 = (l_0 - w \operatorname{tg} R_{\odot})^2$$

$$(p - u)(p' - u') + (q - v)(q' - v') = 0,$$

из којих ће изаћи, да је

$$u = p \pm l \sqrt{\frac{q' - v'}{(p' - u')^2 + (q' - v')^2}} = p \pm l \cos M$$

и

$$v = q \mp l \sqrt{\frac{p' - u'}{(p' - u')^2 + (q' - v')^2}} = q \mp l \sin M$$

где је

$$\frac{p' - u'}{q' - v'} = \operatorname{tg} M$$

а пошто u' и v' и сами зависе од u, v , и w , — изражавајући се на основу формула (S) управо на овај начин:

$$u' = p \cos \varphi' \cos t \cdot \sin 1^m = (w \cos D - v \sin D) \sin 1^m$$

$$v' = p \cos \varphi' \sin D \sin t \cdot \sin 1^m = u \sin D \sin 1^m,$$

$$w' = u \cos D \sin 1^m —$$

то ће се u и v одредити само помоћу поступних приближења. Због мале величине $\operatorname{tg} R_{\odot}$ може се прво узети, да је $l = l_0$ и занемарити ротационо кретање Земље, т. ј. ставити, да је $u' = 0$ и $v' = 0$; затим са нађеним величинама u, v и $w = \sqrt{p_0^2 - u^2 - v^2}$ срачунати u', v' и $l = l_0 - w \operatorname{tg} R_{\odot}$ па одредити већ и тачније u и v , и тако даље.

Од особитог је значаја, да се знају она места на Земљи за која ће произаћи потпуно (тотално) или пак прстенасто помрачење Сунца. Северна и јужна граница врло уског појаса, који садржи у себи сва та места, одредиће се врло просто усљед мале вредности — у том случају — величине $l_0 = s \operatorname{tg} R_{\odot} - k'$ а још простије ће се одредити оне тачке на том појасу, за које ће центар Месеца проћи тачно кроз центар Сунца, јер за све њих треба да буде

$$(p - u)^2 + (q - v)^2 = 0 \quad \text{т. ј.} \quad u = p \text{ и } v = q.$$

Нађене тачке по тим координатама u и v за разне моменте T , дају на карти линију централног помрачења АЕ (сл. 115. II); гринвичка пак времена $T_a = T_c$, — која одговарају крајевима њеним А и Е (сл. 115. I), где ће се то помрачење десити тек при рађању и заласку Сунца, — биће почешак и свршетак централног помрачења за Земљу уопште.

181. Пример за објашњење.

Ради објашњења свега напред реченога, да расмотримо за Земљу уопште Сунчево помрачење од 18. августа 1887. године. Пошто препишемо из „Naut. Alm.“ за ту годину екваторијалне координате Месеца и Сунца за неко-

лико часова T гринвичкога средњег времена, најближих средњему моменту конјукције тих небесних тела, добићемо по формулама (R) и (U) ове вредности за p , q , $stg R_{\odot}$ и l_0 :

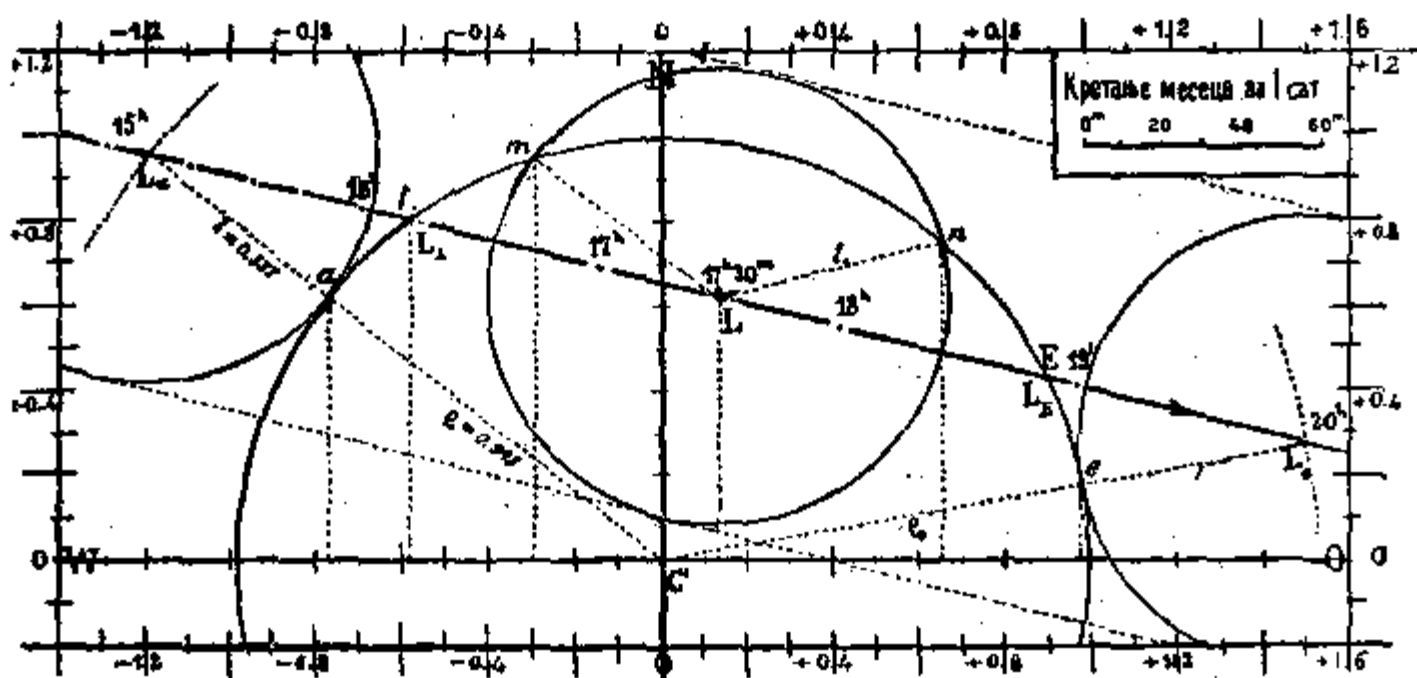
T	15^h	16^h	17^h	18^h	19^h	20^h
$\alpha =$	$9^h 46^m 59^s.9$	$49^m 26^s.6$	$51^m 53^s.2$	$54^m 19^s.7$	$56^m 46^s.2$	$59^m 12^s.5$
$A =$	9 52 10.1	52 19.4	52 28.7	52 38.0	52 47.3	52 56.6
$\delta = +$	$13^{\circ} 53' 46''$	$44' 43''$	$35' 35''$	$26' 20''$	$17' 0''$	$7' 35''$
$D = +$	12 55 55	55 6	54 18	53 29	52 40	51 51
$\pi =$	60 10.8	60 12.0	60 13.2	60 14.4	60 15.5	60 16.6

$p = -$	1.2541	0.6988	0.1435	+0.4117	+0.9668	+1.5219
$q = +$	0.9667	+0.8271	+0.6872	+0.5471	+0.4068	+0.2662
$s \operatorname{tg} R_{\odot} =$	0.2638	0.2638	0.2637	0.2636	0.2635	0.2634

У ср. моменту $\left\{ \begin{array}{l} R_{\odot} = 15^{\circ} 50' 6'', \quad \pi_{\odot} = 8'' 7'', \quad k' = k \frac{\pi}{\pi'} = 0.2733, \text{ једнач. вр. } = -3^m 32^s; \\ T_m = 17^h 30^m \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{за спољни додир } l_0 = 0.5370, \\ \text{за унутраш. додир } l_0 = -0.0096. \end{array} \right.$

Да узмемо на милиметарској карираној хартији (сл. 116.) праве $C'N$ и $WC'O$ за координатне осе у пројекционој равни, да опишемо, затим, из почетка њиховога C' круг полупречником $\rho_0 = 0.9983$ и да по срачунатим координатама p и q конструишемо пут центра Месечевог, причему да његов покрет за 1 час послужи као размерник времена. Помоћу растојања $C'L_a = C'L_e = \rho_0 + l_0 = 1.535$ одредиће се на томе путу положаји L_a и L_e центра Месечевог при почетку и крају помрачења за Земљу уопште па отуд и моменти

$T_a = 15^h 5^m 5$ и $T_e = 19^h 58^m 8$ по гринв. ср. времену.

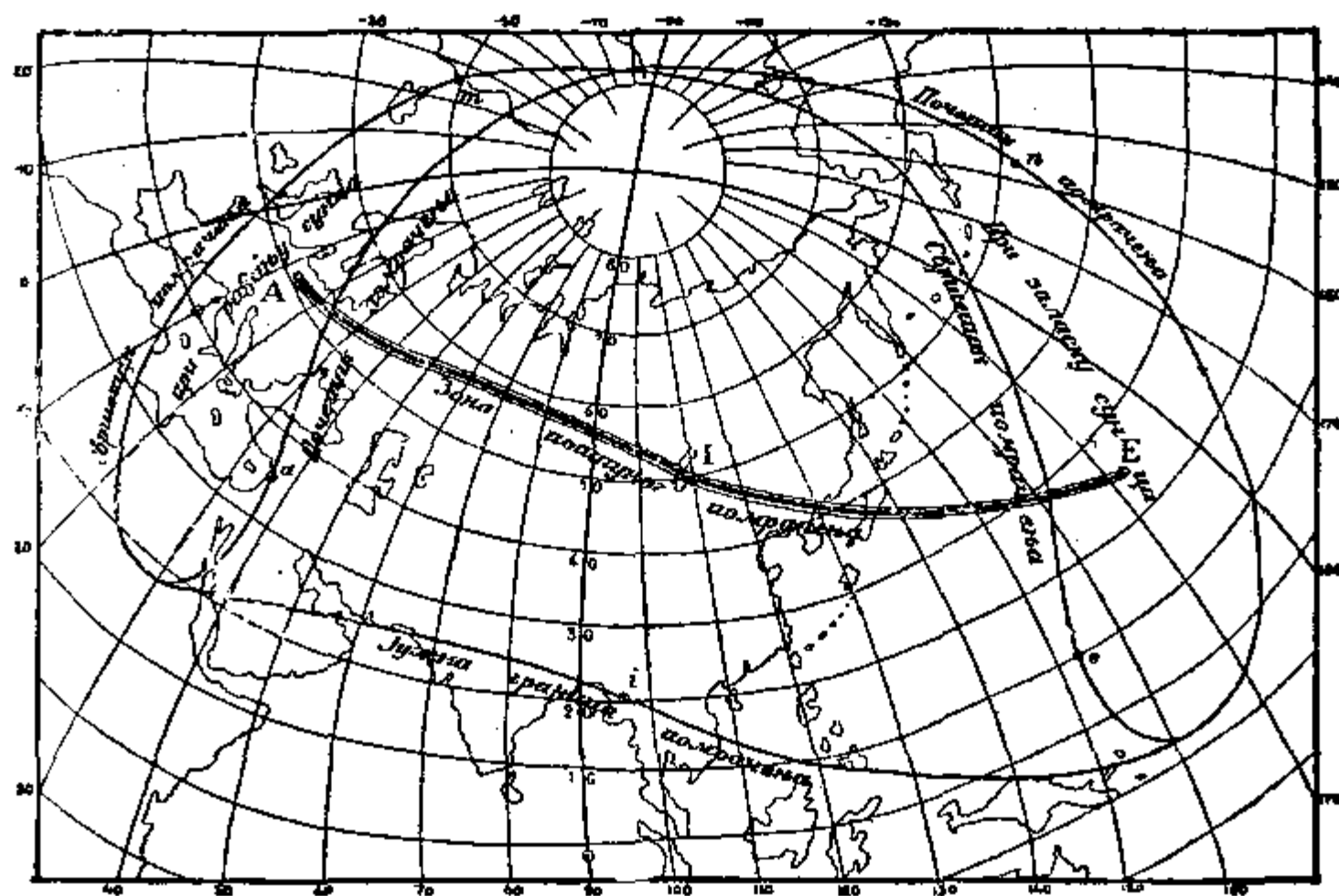


Сл. 116.

Уједно с тим добиће се координате u и v тачака a и e на Земљи, у којима ће управо произаћи тај почетак и свршетак помрачења. Тако исто добиће се и координате тачака A и E у којима се пут Месечев пресеца са кругом полупречника ρ_0 и у којима ће произаћи почетак $T_A = 16^h 11^m 2$ и свршетак $T_E = 18^h 53^m 2$ централног помрачења за Земљу уопште.

Да опишемо сад круг полупречником l_0 из ма којег места L центра Месечевог, например које одговара моменту $T=17^h30^m$. Тачка m пресека његовог са оним истом кругом полупречника ρ_0 видеће у том моменту само крај попречења при рађању Сунца а друга n — само почетак његов при заласку Сунца. На тај ће се начин одредити и остале тачке, које се налазе на западној и на источној граници помрачења. Ширине пак φ и дужине L свију тих тачака a, A, m, n, E, e (сл. 117.) срачунаће се по формулама $(W_1), (W_2)$ и (W_3) ако у њима ставимо, да је $w=0$, те ће изаћи овакве:

T	тачке	u	v	t	φ	φ	L
15 ^h 5 ^m 5	a	-0.782	+0.620	17 ^h 19 ^m 7	+37°16'	+37°27'	+ 34°26'
16 11. 2	A	-0.595	0.801	16 53. 0	51 29	51 40	+ 11 20
17 30. 0	m	-0.285	0.956	15 32. 7	69 5	69 13	- 28 27
17 30. 0	n	+0.653	0.755	6 57. 9	47 30	47 42	-157 9
18 49. 7	E	+0.906	0.422	6 23. 7	24 18	24 27	+173 30
19 55. 3	e	+0.982	+0.175	6 9. 1	9 51	9 55	+153 27



Сл. 117.

Да бисмо показали, како се добивају, поступним приближењима, координате u, v и w разних тачака јужне и северне границе помрачења (северна у овом специјалном случају не постоји), да их срачунано, например за ону тачку i , у којој прост додир дискова произлази у моменту $T=17^h30^m$ по гринв. ср. вр. За ову ће по формулама чл. 180. изаћи:

у првом приближењу	$u = +0.001$	$v = +0.095$	$w = 0.994$
„ другом „	$= -0.089$	$= +0.132$	$= 0.986$
„ трећем „	$= -0.080$	$= +0.127$	$= 0.987$

а са тим последњим вредностама за u, v и w добиће се по формулама $(W_1), (W_2)$ и (W_3) , да је

$$\varphi_i = +20^{\circ}16' \quad \text{и} \quad L_i = +93^{\circ}30'$$

Да одредимо, најзад, једну од тачака L , које се налазе на линији централног помрачења, за коју ће поклапање центара Месеца и Сунца произаћи, на пример, у моменту $T = 17^h 30^m$. Координате ће њене бити овакве:

$$u = -p = +0.132, \quad v = q = +0.616, \quad w = \sqrt{\rho_0^2 - u^2 - v^2} = 0.779,$$

$$\varphi_L = +51^\circ 4' \quad \text{и} \quad L_L = +110^\circ 30'.$$

На приложеној карти (сл. 117.) уцртане су по многим тачкама, одређеним на тај начин, како границе, тако и централна линија тога Сунчевог помрачења.

182. Покривања (окултације) звезда месецем.

При покривању какве звезде, са даном ректасцензијом A и деклинацијом D , диском Месечевим, требаће да се у формулама (R), (S) и (T) стави:

$$R_0 = 0, \quad \pi_0 = 0, \quad \pi' = \pi, \quad k' = k \quad \text{и} \quad \Delta' = \Delta = \frac{1}{\sin \pi}$$

и тада ће оне добити овај простији и потпуно тачни облик:

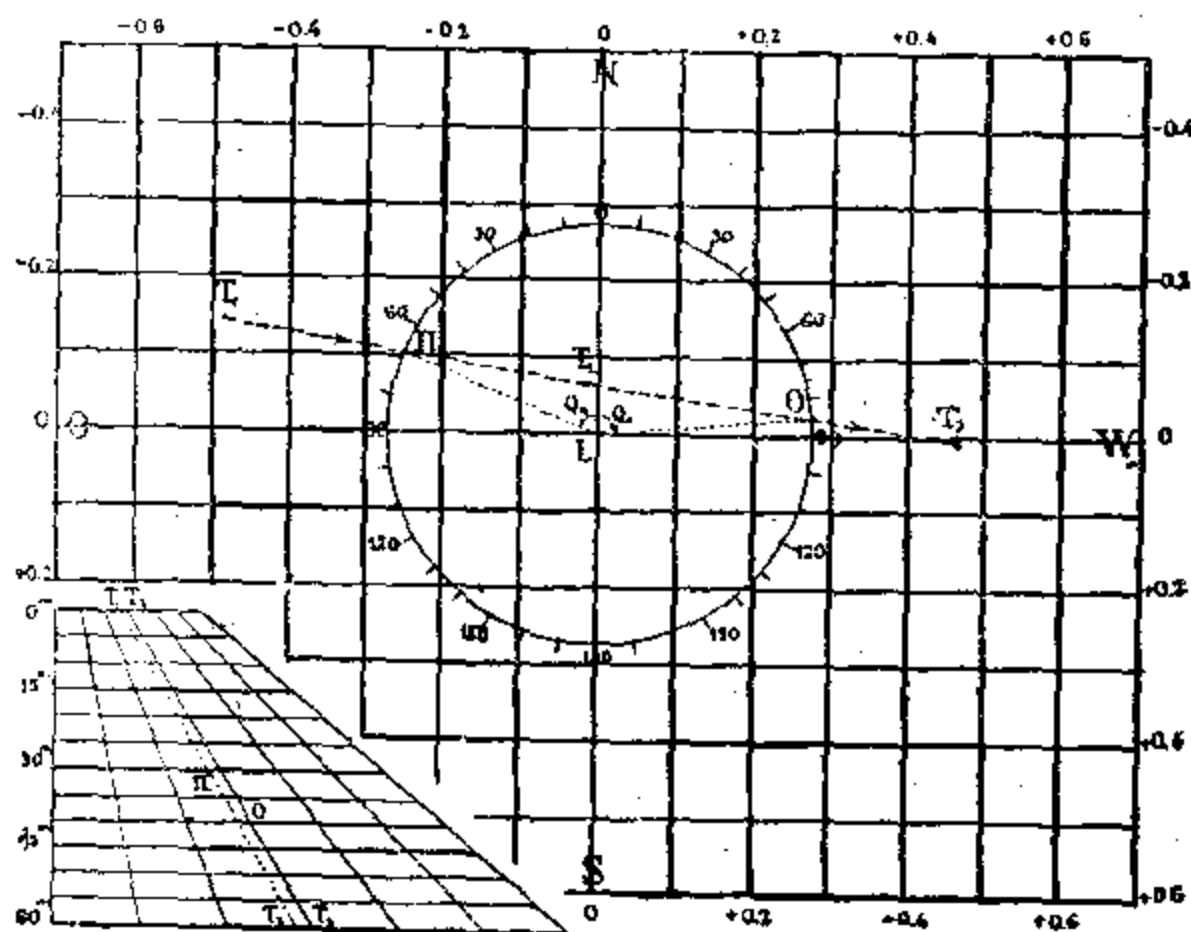
$$p = \Delta \cdot \sin(\alpha - A) \cos \delta, \quad q = \Delta [\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A)] \quad \dots (R')$$

$$u = p \cdot \cos \varphi' \sin t, \quad v = p [\sin \varphi' \cos D - \cos \varphi' \sin D \cos t] \quad \dots (S')$$

$$(p - u)^2 + (q - v)^2 = k^2 = (0.2726)^2 \quad \dots (T')$$

Последња од њих и послужиће за одређивање момената покрића (T_{II}) и открића (T_0) звезде Месечевим диском за тачке на Земљиној површини са даном геоцентричком ширином φ' и дужином L од Гринвича.

Ради посматрања ових појава, треба унапред одредити моменте T_{II} и T_0 макар приближно, с тачношћу до 1 минуте времена. До овога је најпростије доћи на овај начин: Да нацртамо, једном за свагда (сл. 118.), на карираној хартији круг полупречника $k = 0.2726$, који представља диск Месечев у пројекционој равни (чл. 178. сл. 114.) и да центар његов L узмемо за почетак координатних оса NLS и OLW . Кад се срачунају величине q, p, u, v за два или три произвољна момента T_1, T_2, T_3 , најближа моменту T_c геоцентричке конјукције Месеца са



Сл. 118

звездом, и пренесу по осам LS и LW разлике $(p - u)$ и $(q - v)$, онда ћемо добити привидни пут звезде T_1, T_2, T_3 у односу према диску Месечеву, као да је он непомичан, а тачке пресека P и O тога пута са крајевима диска биће тражени положаји звезде у моментима њенога покрића T_{II} и открића T_0 . Ради zgodнијег одређивања тих момената може послужити коси размерник са различитим могућим часовним покретима: звезда T_1, T_2, T_3, T_4 и т. д. позицијски пак угли звезде на Месечевом диску $Q_{II} =$

$= \text{NLP}$ и $Q_0 = \text{NLO}$ добиваће се непосредно, ако поделимо његов круг на степене.

Да напоменемо још, да се за приближно срачунавање координата p и q може у формулама (R') узети, да је $\cos(\alpha - A) = 1$ а уместо синуса малих углова π , $(\alpha - A)$ и $(\delta - D)$ узети саме угле; тада ће изаћи просто:

$$p = \frac{\alpha - A}{\pi} \cos \delta \quad \text{и} \quad q = \frac{\delta - D}{\pi} \dots \dots \dots (R'')$$

Ради примера да одредимо моменте покрића и открића звезде α *Tauri* ($A = 4^h 29^m 23^s.6$, $D = +16^\circ 16' 38''$) 22. новембра 1885. године за Петроград ($\varphi = 59^\circ 56'$, $\varphi' = 59^\circ 46'$, $\lg \rho = 9.9989$, $L = 2^h 1^m 2$). Срачунавања координата p , q , u и v за целе часове гринв. ср. времена $T_1 = 10^h$, $T_2 = 11^h$ и $T_3 = 12^h$, који су најближи моменту $T_c = 10^h 52^m 8$ конјукције звезде са Месецем по рехт-асцензији, датоме у „Nautical Almanac-у“, врше се по овом формулару:

Гр. ср. вр.	10 ^h	11 ^h	12 ^h		10 ^h	11 ^h	12 ^h
свођење	1 ^m 6	1 ^m 8	2 ^m 0	α	4 ^h 27 ^m 11 ^s 1	4 ^h 29 ^m 41 ^s 5	4 ^h 32 ^m 12 ^s 1
$S_0 + L$		18 ^h 7. 7		δ	+16° 49' 4"	53' 53"	58' 36"
Петр. зв. вр. S	4 ^h 9 ^m 3	5 9. 5	6 ^h 9 ^m 7	π		59 48.6 =	59.81
$S - A = t^h$	-0 20. 1	+0 40. 1	+1. 40. 3	$(\alpha - A)^h$	-2 ^m 12 ^s 5	+0 ^m 17 ^s 9	+2 ^m 48 ^s 5
t°	-5° 1' 5	+10° 1' 5	+25° 4' 5	$(\varphi - A)^\circ$	-33' 12	+ 4' 48	+42' 12
				$\delta - D$	+32. 43	+37. 25	+41. 97
$\lg \sin t$	8.9425 _n	9.2412	9.6272				
$\lg \rho \cos \varphi'$		9.7009		$\lg \cos \delta$	9.9810	9.9808	9.9806
$\lg \cos t$	9.9983	9.9933	9.9570	$\lg(\alpha - A)$	1.5201 _n	0.6513	1.6245
$\lg \sin D$		9.4476		compl. $\lg \pi$		8.2232	
$\lg \rho \cos \varphi' \sin t$	8.6434 _n	8.9421	9.3281	$\lg(\delta - D)$	1.5109	1.5711	1.6229
$\lg \rho \cos \varphi' \sin D \cos t$	9.1468	9.1418	9.1055	$\lg p$	9.7243 _n	8.8553	9.8283
$\lg \rho \sin \varphi'$		9.9354	9.9176	$\lg q$	9.7341	9.7943	9.8461
$\lg \cos D$		9.9822					
$\lg \sin \varphi' \cos D$		+0.8271		p	-0.5301	+0.0717	+0.6734
$\cos \varphi' \sin D \cos t$	+0.1402	+0.1386	+0.1275	q	+0.5421	+0.6227	+0.7017
u	-0.0440	+0.0875	+0.2129	$p - u$	-0.486	-0.016	+0.460
v	+0.6869	+0.6885	+0.6996	$q - v$	-0.145	-0.066	+0.002

Кад се сад унесу у цртеж 118. три тачке T_1 , T_2 и T_3 по срачунатим координатама $(p - u)$ и $(q - v)$ и споје правим линијама $T_1 T_2$ и $T_2 T_3$, добићемо положаје звезде П и О у моментима T_π и T_0 њенога покрића и открића, при чему ће изаћи наиме:

$T_1 \text{П} = 29^m 8$ или $T_\pi = 10^h 29^m 8$ гр. ср. вр. = **12^h 31^m 0** петр. ср. вр.; $Q_\pi = + 68^\circ$
 $T_2 \text{О} = 36^m 2$ „ $T_0 = 11 36.2$ „ „ „ = **13 37.4** „ „ „ $Q_0 = - 85^\circ$

Напомена. На сасвим се сличан графички начин могу одредити momenti почетка и свршетка Сунчевог помрачења за какво дано место на Земљи (а тако исто и покриће Месецем какве год планете). Кад се конструише на сл. 118.

по координатама ($p - u$) и ($q - v$) релативни пут центра Сунчевог (или планете), треба само још да се обележе на њему тачке T_a и T_e , које се налазе од центра Месечевог L на растојању $l = l_0 - w \operatorname{tg} R_e$. Тако на пример, за Сунчево помрачење 18. августа 1887. године у Петрограду, имаћемо са већ срачунатим у чл. 181. величинама p , q и l_0 :

Гр. ср. вр.	15 ^h	16 ^h	17 ^h	18 ^h
t	16 ^h 57 ^m 7	17 ^h 57 ^m 7	18 ^h 57 ^m 7	19 ^h 57 ^m 7
u	-0.4848	-0.5022	-0.4864	-0.4373
v	+0.8703	+0.8412	+0.8121	+0.7850
w	0.071	0.192	0.317	0.435
$w \operatorname{tg} R_e$	0.0003	0.0009	0.0015	0.0020
$p - u$	-0.770	-0.197	+0.343	+0.849
$q - v$	+0.096	-0.014	-0.125	-0.238
l	0.537	0.536	0.536	0.535

по цртежу:
 Гр. ср. вр. $T_a = 15^h 24^m 5$, $T_e = 17^h 19^m 3$
 Пет. „ „ $= 17 25. 8$, $= 19 20. 6$

Позицијски угли тачака додира
 на диску Месечевом:

$$Q_a = + 96^\circ, \quad Q_e = - 72^\circ$$

по диску Сунчевом:

$$Q_a = - 84^\circ, \quad Q_e = + 108^\circ.$$

183. Таблице за одређивање момената покривања.

У „Nautical Almanac“-у, исто тако као и у другим астрономским календарима, дају се све звезде до $6\frac{1}{2}$ величине, чија се покривања Месецем могу посматрати са ма које тачке на Земљи; при томе се за сваку од њих даје гринвичко средње време T_c геоцентричке конјукције с Месецем по рехтасцензији ($\alpha = A$) и граничне географске ширине, изван којих се та звезда већ не покрива. У последње време почели су сем ових даних додавати још, — као што је то увек било у „Berliner Astr. Jahrbuch“-у — и величину $q = q_0$ у напред речени момент конјукције T_c (када је $p = 0$) и часовне промене p' и q' величина p и q *) тако, да се добивају за свако жељено гринвичко време $T = T_c = \tau$ на овај начин:

$$p = p' \tau \quad \text{и} \quad q = q_0 + q' \tau \dots \dots \dots (R''')$$

Тако би за покривање α *Tauri*, — које смо размотрили у предидућем члану, — било дано:

$$T_c = 10^h 52^m 8, \quad q_0 = + 0.6131, \quad p' = + 0.6018 \quad \text{и} \quad q' = + 0.0799$$

За величине u и v , које се изражавају формулама (S'), такође се могу саставити помоћне таблице, једном за свагда, те да би се моменти покривања и откривања ма какве звезде одређивали графички без икаквих логаритамских срачунавања. На крају ове књиге дали смо овакве таблице за географске ширине од 32° до 72° , где су величине u и v дате само са три децимале (што је потпуно довољно за одређивање тражених момената са тачношћу 0.1 минуте) и само за целе часовне угле звезда $S - A = t = 0^h, t = \pm 1^h, t = \pm 2^h$ и т. д. до $t = 12^h$; због тога што се на сл. 118. увек могу унети релативна места звезда по координатама ($p - u$) и ($q - v$), која одговарају управо тим основним часовним углима t а не целим часовима гринвичког ср. времена T , као што је то урађено у примеру чл. 182.

У истом примеру за покриће звезде α *Tauri* ($A = 4^h 29^m 4, D = + 16^\circ 17'$), са напред наведеним величинама за њу: q_0, p' и q' и по нашим таблицама величине u и v добиће се на тај начин:

*) У алманасима су последњих година за ове величине унесене ознаке: U, x' и y' .

за $t = S - A =$	0^h	$+ 1^h$	$+ 2^h$	по таблицама			
Петр зв. вр. $S =$	$4^h 29^m 4$	$5^h 29^m 4$	$5^h 29^m 4$	за $\varphi = 59^\circ 56'$	и	$D = + 16^\circ 17'$	
$S_0 + L =$		18 7.7					
свођење $=$	- 1.7	- 1.8	- 2.0	$t =$	0^h	$+ 1^h$	$+ 2^h$
Гр. ср. вр. $T =$	10 20.0	11 19.9	12 19.7	$u =$	0.000	+ 0.130	+ 0.251
$\tau = T - T_c =$	- 32.8	+ 27.1	+ 86.9	$v =$	+ 0.687	+ 0.692	+ 0.706
$p = p' \tau =$	- 0.329	+ 0.272	+ 0.873	$p - u =$	- 0.329	+ 0.142	+ 0.622
$q = q_0 + q' \tau =$	+ 0.569	+ 0.649	+ 0.729	$q - v =$	0.118	- 0.043	+ 0.023

Кад се унесе у сл. 118. по тим координатама $(p - u)$ и $(q - v)$ релативни пут звезде $t_1 t_2 t_3$, паћи ћемо као и пређе, да је:

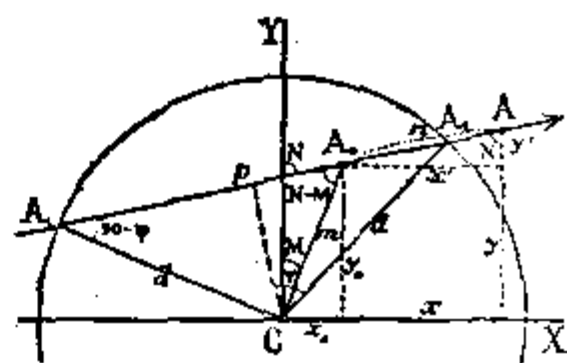
$$T_{II} = 10^h 20^m 0 + 9^m 8 = 10^h 29^m 8 \quad \text{Грин сред. вр.} = 12^h 31^m 0 \quad \text{Петр. ср. вр.}; \quad Q_{II} = - 68^\circ$$

$$T_0 = 11 19. 9 + 16.2 = 11 36. 1 \quad \text{„ „ „} = 13 37. 3 \quad \text{„ „ „}; \quad Q_0 = - 85^\circ$$

184. Општи начин срачунавања момената помрачења.

При одређивању момената помрачења и покривања звезда ми смо употребљавали једино графичку методу, као најпростију, брзу и очигледну. Да видимо сада, како се ти моменти могу и срачунавати са каквом год желимо тачношћу. У свима тим случајима положај ће се неке покретне тачке A (сл. 119.), у жељеном моменту времена t , одредити на равни, у односу према другој тачци C , која се рачуна као непомична, помоћу њених правоуглих координата:

$$x = x_0 + x' t + x'' t^2 \quad \text{и} \quad y = y_0 + y' t + y'' t^2,$$



Сл. 119.

где су $x = x_0$ и $y = y_0$ дане координате њенога места A_0 у полазном моменту $t = 0$, а x' , y' и x'' , y'' њихове промене у току какве јединице времена, нпр. 1 часа или 1 минуте. Питање се састоји у томе, да се одреди онај момент τ , када је растојање између тих тачака $A_1 C$ или $A_2 C$ равно даној величини d , т. ј. када је $x^2 + y^2 = d^2$.

Кад узмемо у првом приближењу, да је релативно кретање тачке A праволинијско и равномерно, т. ј. да је $x'' = 0$ и $y'' = 0$, добићемо за тражено време τ квадратну једначину

$$(x_0 + x' \tau)^2 + (y_0 + y' \tau)^2 = d^2,$$

ако се у њој стави, да је

$$\begin{aligned} x_0 &= m \sin M & \text{и} & \quad x' = n \sin N \\ y_0 &= m \cos M & \quad \quad \quad & \quad y' = n \cos N \end{aligned}$$

она ће онда добити овакав облик:

$$m^2 + 2 m n \tau \cos (N - M) + n^2 \tau^2 = d^2.$$

Ако сад означимо $\frac{m}{d} \sin (N - M) = \cos \psi,$

онда ћемо из ње наћи, да је:

$$\tau_1 = -\frac{m}{n} \cos(N - M) - \frac{d}{n} \sin \psi \quad \text{и} \quad \tau_2 = -\frac{m}{n} \cos(N - M) + \frac{d}{n} \sin \psi.$$

Затим, кад се узму у обзир одбачени чланови $x''\tau^2$ и $y''\tau^2$, т. ј. кад се стави:

$$x'_0 = x_0 + x''\tau_1^2 \quad \text{и} \quad y'_0 = y_0 + y''\tau_1^2$$

или пак

$$x'_0 = x_0 + x''\tau_2^2 \quad \text{и} \quad y'_0 = y_0 + y''\tau_2^2,$$

онда се могу поновити сва срачунавања, те да се тако нађу већ потпуно тачне величине τ_1 и τ_2 . Што се тиче геометриског значења помоћних величина m и n и углова M, N и ψ , који улазе у изразе за τ_1 и τ_2 , оно се јасно види из цртежа. Позициски пак угли тачака A_1 и A_2 у моментима τ_1 и τ_2 , који се рачунају од осе SU , очевидно је, да ће се изразити, на тај начин, овако:

$$Q_1 = (90^\circ - N) + \psi \quad \text{и} \quad Q_2 = (90^\circ - N) - \psi.$$

185. Прелаз Венере и Меркура преко Сунчевог диска.

Видели смо у чл. 97. да посматрања прелаза Венере преко Сунчевог диска представља једно од бољих средстава за одређивање Сунчеве паралаксе π_\odot . Да видимо сад, како се она управо изводи из посматрања момената ступања те планете на диск Сунца и силаска са њега.

У том случају треба да се у основној једначини (Т) за помрачења подразумева под величином π' разлика паралакса π , Венере и π_\odot Сунца а под k' однос полупречника Венере $R_v = k' \pi$, према величини π' (чл. 177.). Кад се помноже сви чланови те једначине са $\sin \pi'$ и занемари у њој величина w , која је ништавна у сравњењу са s , па означе ради скраћења

$$p \sin \pi' = p_1, \quad q \sin \pi' = q_1, \quad s \sin \pi' = s_1,$$

онда ће се она представити у облику:

$$(p_1 - u \sin \pi')^2 + (q_1 - v \sin \pi')^2 = (l \sin \pi')^2 = (s_1 \operatorname{tg} R_\odot \pm \sin R_v)^2, \quad \dots (t)$$

где се знак $+$ при R_v односи на спољњи додир дискова Венере и Сунца а знак $-$ на унутрашњи, који се посматра несравњено тачније од првога.

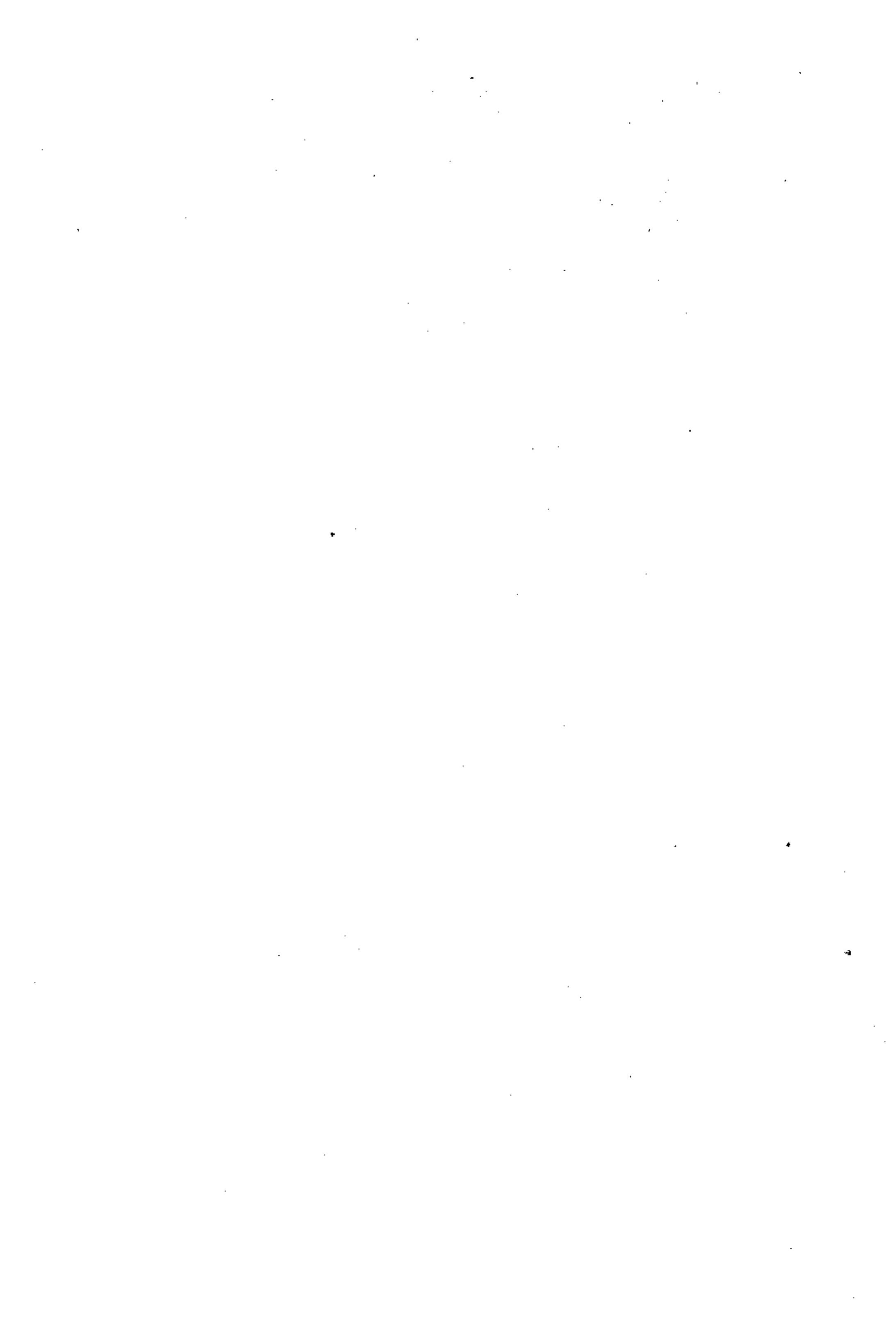
Према томе ако са каквог места на Земљи, — чија је ширина φ и дужина L позната, — буде опажен момент спољњег или, још боље, унутрашњег додира Венере са Сунцем, онда ће за тај момент све величине u, v, p_1, q_1, s_1, R_v и R_\odot бити познате, и, из једначине (t) одредиће се

$$\pi' = \pi_v - \pi_\odot = \pi_\odot \left(\frac{\pi_v}{\pi_\odot} - 1 \right) = \pi_\odot \left(\frac{r}{d} - 1 \right) \dots \dots \dots (v)$$

Одатле ће се и добити тражена паралакса Сунца π_\odot , пошто је однос растојања r од Земље до Сунца према растојању d од Земље до Венере увек познат са потпуном тачношћу. Треба ипак напоменути, да се величине $(\alpha - A), (\delta - D), R_v$ и R_\odot , које улазе у једначину (t), не могу сматрати као доста добро познате за такво одређивање величине π' па је стога потребно и њих одређивати заједно са њоме по методи најмањих квадрата из многих једначина (t),

које се добивају из посматрања једнога и истог прелаза Венере са разних тачака Земљине површине.

Прелаз Венере преко Сунца дешава се доста ретко а наиме, кроз овакве неједнаке интервале: 8, $121\frac{1}{2}$, 8, $105\frac{1}{2}$, 8, $121\frac{1}{2}$ године и т. д. Прелаз пак Меркура ма да се и дешава много чешће, за одређивање Сунчеве паралаксе он је непогодан са тог узрока, што тада коефицијент $\left(\frac{r}{d} - 1\right)$ код π_0 у једначини (v) излази раван $\frac{1}{1-0.39} - 1 = \frac{0.39}{0.61} = 0.64$; међутим он је за Венеру раван $\frac{1}{1-0.72} - 1 = \frac{0.72}{0.28} = 2.57$, т. ј. четири пута већи.

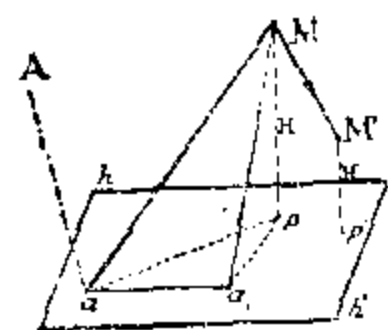


ГЛАВА XXVI.

ПОТОЦИ ЗВЕЗДА ПАДАЛИЦА И КОМЕТЕ.

186. Кретање Звезда падалица кроз Земљину атмосферу.

На своме путу око Сунца Земља се сусреће са ситним честицама космичке материје у чврстом или прашинастом облику. Улазећи у Земљину атмосферу, оне се услед отпора и трења у њој усијевају и у највише случајева сагоревају и не достигнувши још до Земљине површине; услед тога се њихови путеви представљају у облику више или мање сјајних црта. Зову се оне *звезде падалице*. Знатно већа пак по обиму чврста, камениста телца (често са смешом гвожђа), која падају и на саму Земљу, зову се *аеролиши* или *метеорити*.

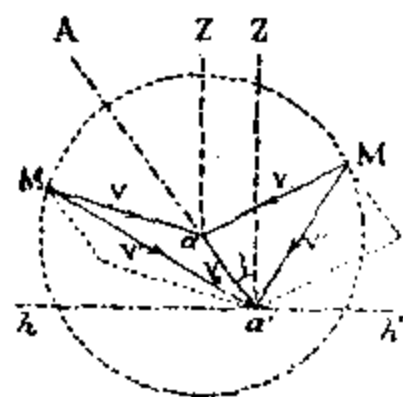


Сл. 120.

По тамној и ведрој ноћи, без месечине, пажљиви ће посматрач набројати обично од четири до десет па и више звезда падалица у току од 1 часа. При том он може занезити и пренети на карту звезданог неба оне тачке у којима се таква звезда појавила и где ју је нестало; тако исто може оценити приближно и дужину времена њенога сијања, која у највише случајева не премаша једну или две секунде. Када се пак оваква посматрања изврше на двама тачкама a и a_1 (сл. 120.), које одстоје једна од друге на неколико десетака километара, онда ће се по запаженим правцима aM и a_1M са њих одредити и сам положај оне тачке M , у којој је почело сагоревање какве звезде падалице па, разуме се, и висина $Mr = H$ те тачке над Земљиним површином $h h_1$. Тако се исто добива и висина $M'r' = H'$ тачке M' , у којој се та звезда угасила.

Из таквих се посматрања показало: 1) да су правци кретања звезда падалица врло различити, 2) да су брзине V' тих кретања, у односу према Земљи, такође врло различите а наиме од 10 до 70 километара у секунди и 3) да сагорерање тих звезда произлази на висинама H и H' од 150 до 100 километара, не гледећи на ванредну разређеност Земљине атмосфере у тим регионима. О маси пак тих тела суди се по интензитету сјаја, који се развија при њиховом сагоревању па се налази, да њихова тежина уопште не превишава 5 грамова.

Али је посматрана брзина кретања звезде падалице $V' = Ma'$ (сл. 121.) релативна и она се компонује у самој ствари (по правилу паралелограма) из истините брзине $Ma = V$, са којом се тело креће у простору, и брзине $a'a = V_0$, са којом се премешта сама тачка посматрања; ова је пак бзина V_0 , — ако се занемари ротација Земље, — по својој величини скоро стална и равна 28 врта у секунди. Услед тога излази, — како из највеће посматране величине $V' =$



Сл. 121.

$= V + V_0 = 70$ врста, тако и из најмање $V'' = V - V_0 = 10$ вр., — да је истинита брзина V приближно једна и иста, а наиме око 40 врста.

187. Промењљивост средњег броја звезда падалица.

Средњи број звезда падалица, који се посматра у току од 1 часа обично се поступно повећава у току ноћи а пред саму зору постоје, — у зависности од ширине φ места посматрања, — од 2 до 4 пута већи него у почетку ноћи. То се врло просто објашњава промењљивошћу (у односу према хоризонту $ha'h'$ места посматрања a') правца $a'aA$ (сл. 121.) прогресивног кретања Земље.

И заиста, ако допустимо да се звезде падалице крећу доста равномерно у свима могућним правцима Ma са неком за све њих средњом брзином $Ma = V$, и конструишемо на линији померања $a'a = V_0$ одговарајуће паралелограме, —

при чему ће се правци и величине брзина V' изражавати дијагоналама Ma' , онда ћемо увидети, да уопште број n звезда падалица, — који се може посматрати у току неке јединице времена над хоризонтом $ha'h'$ места посматрања, — треба да буде пропорционалан са површином сфернога сегмента hMh' , т. ј.

$$n = C (V + V_0 \cos \zeta) \dots \dots \dots (1)$$

где је C нека стална количина а $\zeta = Za'A$ — зенитно растојање апекса A . Кад пак замислимо на небесној сфери (сл. 122.) екватор $\Gamma E \Omega$ са његовим полом P , еклиптику $\Gamma A S \Omega$ са апексом

A , — који се налази увек позади Сунца S на растојању $SA = 90^\circ$, — и зенит Z места посматрања, онда ћемо имати из сферног троугла PZA :

$$\cos \zeta = \sin \varphi \sin D + \cos \varphi \cos D \cos t' \dots \dots \dots (2)$$

где је D деклинација апекса а $t' = S - A$ часовни његов угао. Према томе, при напред реченом допуштењу, средњи број n звезда падалица треба да буде највећи при $t' = 0$, т. ј. када је часовни угао близу -6^h (изјутра) а најмањи при $t' = 180^\circ$, када је часовни угао Сунца близу $+6^h$ (у вече).

Ако у формули (2) ставимо у средњем за целу годину $D = 0$ и, — на основу многобројних посматрања звезда падалица у ширинама φ близу око 45° , — узмемо, да је број n при $t' = 0$ трипут већи него при $t' = 180^\circ$, онда ће из израза (1) изаћи

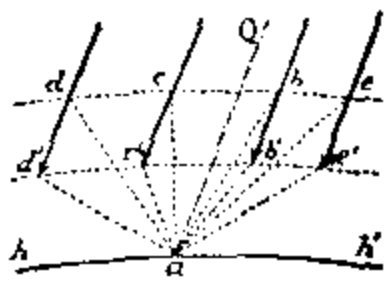
$$\frac{V + V_0 \cos \varphi}{V - V_0 \cos \varphi} = \frac{V + V_0 \cos 45^\circ}{V - V_0 \cos 45^\circ} = 3,$$

одакле је $V = 2 V_0 \cos 45^\circ = 1.41 V_0 = 40$ врста.

Оваквим је наиме размишљењем милански астроном Скиапарели дошао 1866. године до закључка, да је квадрат брзине V приближно двапут већи од квадрата брзине кретања Земље V_0 и да отуд истините путање звезда падалица у простору, — које су условљене Сунчевим привлачењем, — треба да буду блиске параболичком облику (чл. 137).

188. Радианти и потоци звезда падалица.

Привидни пут звезда падалица на небу увек је неки лук великога круга небесне сфере те собом одређује ону раван bab' (сл. 123.), која пролази кроз



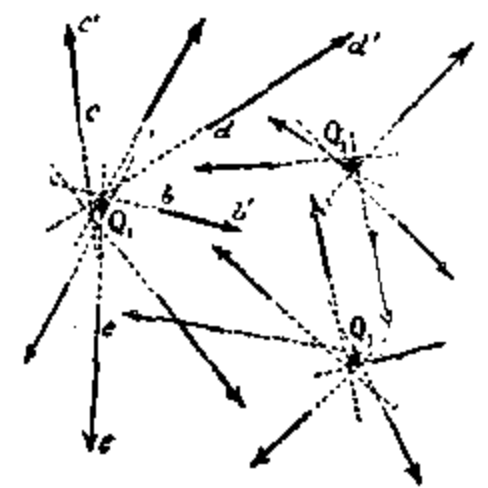
Сл. 123.

тачку посматрања a и кроз праволинијски елемент bb' орбите те звезде у Земљиној атмосфери. Кад се уцртају на карти звезданог неба и довољно продуже, ти ће се привидни путеви многих звезда bb' , cc' , dd' (сл. 124.), који се посматрају у току једне ноћи, показати као да излазе из једне или из неколико тачака неба Q_1, Q_2, Q_3, \dots , које се зову *радианти* или *шачке разилажења*.

То произлази отуд, што се Земља сусреће са целим *пошочицама* телаца или згомилане космичке прашине, која се паралелно међусобно крећу, тако да, ако замислимо слој (сл. 123.) атмосфере $dcbe$ у којем почиње њихово сагоревање и слој $d'c'b'e'$ у којем се највише њих гаси, онда паралелни путеви bb , cc , dd, \dots једнога и истог потока и треба да се пројектују на небесној сфери, из тачке посматрања a , у облику лукова великих кругова, који се пресецају у једној и истој тачци Q . На тај начин, тај радиант Q одређује собом правац Qa целог потока звезда падалица. Отуд излази још и то, да путеви звезда падалица, уцртани на карту, излазе у толико дужи, у колико им је почетак даљи од њиховога радианта.

Пажљивијим испитивањем потока, показало се ипак, да уместо тачака радианта постоје у ствари читаве површине радиације, из којих потичу звезде падалице. Услед тога што путеви метеорита нису строго паралелни, — ова појава налази објашњења у Бредихиновој хипотези, по којој звезде падалице постају од распадања аномалних кометних репова. Том истом хипотезом добро се објашњује како могућност егзистенције потока са јавно израженим периодским максимумима, тако и сталних, по обилности, звезда падалица, које се запажају.

Најновија посматрања и испитивања показују, да готово и не постоје засебне звезде падалице, које неби припадале ма каквом одређеноме потоку и које би се звале *спорадичке*; али се зато самих потока, више или мање густих, са најразличитијим правцима у простору, набраја сада више од 1000. Особито су и нарочито интересантни потоци *Персеида*, *Леонида* и *Андромедида*, који су добили свој назив по констелацијама у којима се налазе њихови радианти. Први се од њих појављује с давних времена сваке године ноћу од 6. до 15. августа и бива најгушћи око 10. августа; при томе је запажено још, да се његова густина мења периодички, приближно кроз 108 година. Други се поток појављује 12. и 13. новембра периодички кроз 33 године (напр. 1799., 1833., 1866. . .); при чему три године узастопце бива ванредно обилан звездама падалицама па се затим за 30 година скоро сасвим прекида. Трећи је тако исто густ поток, сразмерно новог порекла и посматрао се 27. новембра 1872., 1885. године и т. д. тј. после интарвала времена од 13. година.

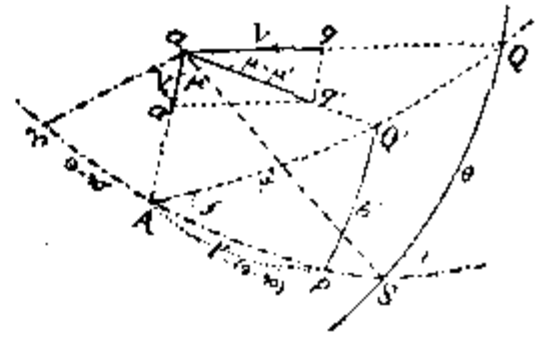


Сл. 124.

189. Одређивање параболног кретања потока.

При сусрету каквога потока са Земљом T , у извесном моменту t , растојање $mS = r$ сваке његове честице m од Сунца S приближно је равно Земљиноме радиус-вектору $TS = r_0$; правац пак њене релативне брзине V' , па отуд и истините V , — као што је напред речено, — указан је положајем на небу

привидног радианта Q' тога потока. На тај начин остаје само да се зна сама величина брзине V или пак V' те да се по формулама чл. 136. и 137. одреде сви елементи кретања те честице у односу према Сунцу. Ако се на основу предидућег допусти, да је за све честице потока $V^2 - 2V_0^2 = \frac{2k(M+m)}{r_0}$ онда ће се за њих добити нека средња параболна орбита.



Сл. 125.

Замислимо центар небесне сфере у тачци посматрања a (сл. 125.) па нека је на тој сфери тачка Q' , — са познатом дужином $\gamma p' = l'$ и ширином $p'Q' = b'$, — привидни радиант, тј. онај који је нађен непосредно из посматрања а S и A нека буду положаји Сунца и апекса на еклиптици са познатим њиховим дужинама $\gamma S = \odot$ и $\gamma A = \odot - 90^\circ$, које одговарају даноме моменту t посматрања. Кад се на сфери повуче велики круг кроз Q' и A и означи $Q'A = \mu'$ и $\sphericalangle Q'Ap' = f$, онда ћемо добити из правоуглог троугла $Q'Ap'$:

$$\operatorname{tg} f = \frac{\operatorname{tg} b'}{\cos(\odot - l')} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \mu' = \frac{\operatorname{cot} g(\odot - l')}{\cos f};$$

из паралелограма пак $aa'q'q$, — који је конструисан у равни AaQ' из брзине Земљине $aa' = V_0$ и из истините брзине потока $aq = V$, — наћићемо (занемарајући брзину тачке посматрања a усљед Земљине ротације) углавно удаљење $\sphericalangle AaQ = \mu$ истинишког радианта Q од A по формули

$$\sin(\mu - \mu') = \frac{V_0}{V} \sin \mu' = \frac{\sin \mu'}{\sqrt{2}}.$$

Тада ће се угао $\sphericalangle QaS = \Theta$, — који образује правац брзине V са правцем aS Земљинога радиус-вектора, — а тако исто и нагиб i према еклиптици оне равни QaS , у којој се креће поток, — добити из сферног троугла QAS са страном $AS = 90^\circ$ на овај начин

$$\cos \Theta = \sin \mu \cos f \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} i = -\operatorname{tg} \mu \sin f.$$

Дужина пак Ω узлазног чвора те равни QaS , очевидно је равна \odot .

Замислимо сада у равни QaS параболну орбиту потока $aOP\Omega$ (сл. 126.) и правац на њој SO под углом $\sphericalangle OS\Omega = \Omega = \odot$ према линији $aS\Omega$ чворова те орбите. Пошто тангента Qa у тачци a образује са радиус-вектором aS такав исти угао Θ , као и са осом SP параболе, то ће дужина перихела $\sphericalangle OSP = \Pi$, — која се рачуна у равни орбите од правца SO , — бити оваква

$$\Pi = \odot - 2\Theta$$

Кад се најзад стави приближна величина $r = r_0 = 1$ и $v = \Psi Sa = 180^\circ - 2\Theta$ у једначину орбите

$$r = \frac{p}{1 + \cos v} = \frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}}$$

— где је $q = \frac{1}{2} p = \Psi S$, — одредићемо онда $q = \sin^2 \Theta$.

Тако на пример, координате Персеида 10. августа ($\odot = 138^\circ 3$) излазе из посматрања овакве:

$$\alpha' = 2^h 56^m = 44^\circ \quad \text{и} \quad \delta' = +56^\circ \quad \text{или} \quad l' = 59^\circ 6 \quad \text{и} \quad b' = +37^\circ 3;$$

због тога ће се по изведеним формулама добити спочетка

$$f = 75^\circ 5, \quad \mu' = 38^\circ 8, \quad \mu = 65^\circ 0, \quad \Theta = 76^\circ 9,$$

а затим и

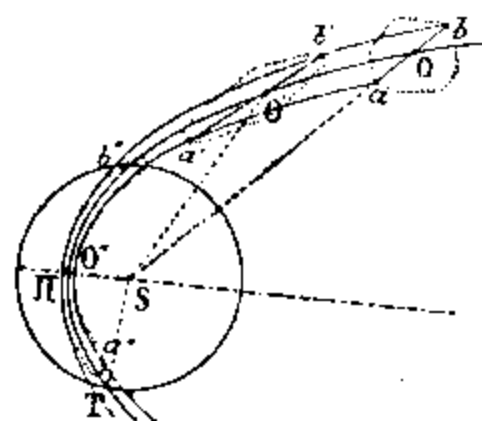
$$i = 115^\circ 7, \quad \Omega = 138^\circ 3, \quad \Pi = 344^\circ 5 \quad \text{и} \quad q = 0.962.$$

Али је довољно, да се смањи претпостављена брзина тога потока $V = V_0 \sqrt{2}$ за $\frac{1}{2}$ њен део па да се та параболна његова орбита претвари у елиптичку са дужом полуосом $a = 23$ и са трајањем потпунога оптицаја око Сунца $S = 110$ година.

190. Порекло потока.

Стварни путеви звезда падалица у односу према Сунцу, облика скоро параболног, показују нам, да материјал за безброј таквих потока допире до наше Сунчеве системе изван ње. Скиапарели је први разјаснио образовање њихово на овај начин.

Замислимо неку гомилу aOb (сл. 127.) сићушних телаца, која су толико удаљена једно од другог, да се узајамно привлачење међу њима може рачунати као ништавно; да се она креће равномерно по праволинијском путу у простору међу звездама, и, да на томе путу ступа у сферу гравитационог дејства Сунца S . Свако се од тих телаца, нпр. O , почиње тада да креће по хиперболној или параболној орбити $OO'O''\dots$, која се све више и више приближује сличним орбитама осталих телаца $aa'a''$, $bb'b''$ и др. по мери приближења ка перихелу Π . Али оне честице a , које су најближе Сунцу, — пролазећи са својим радиус-векторима Sa скоро исто такве равни као и најудаљеније b , — почеће све брже да одилазе унапред; због тога, ма каква била почетна форма гомиле, она ће у близини Сунца добити ванредно развучани облик те ће требати десетину и више година на пролаз целог, тако образованог, дугачког потока кроз његов перихел Π . При случајном пресеку његовине са Земљином орбитом у тачци T и произлази свакогодишња појава звезда падалица у једном и истом правцу. Велике пак планете, као Јупитер, Сатурн и др. лако могу својим привлачењем да измене облик путања оних честица, — које поред њих пролазе, — на облик издужено-елиптички те да учине, да појава потока на Земљи постане периодичка.



Сл. 127.

Потоци се звезда падалица могу образовати и из гушћих гомила космичке материје, као што су комете, о којима ће одмах бити реч. Ако ради упрошћења замислимо такву гомилу облика кугластог са полупречником $Oa = Ob = \rho$ (сл. 127.) и означимо сву њену масу са m , онда ће се спољашње њене честице привлачити од свију осталих силом $f \frac{m}{\rho^2}$. На неком пак ограниченом растојању r од Сунца њему најближа честица a , као и најудаљенија b добиће полета да се удаљи од централне O са силом

$$\mp \rho \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{fM}{r^2} \right) = \pm 2f \frac{M\rho}{r^3},$$

где је M маса Сунца; због тога ће се, — као и при појави прилива — сферна форма гомиле спочетка развући у правцу ка Сунцу; кад пак, са поступним смањењем r , величина $2f \frac{M\rho}{r^3}$ надмаши $f \frac{m}{\rho^2}$, онда ће се честице a и b почети већ да крећу, под утицајем гравитације Сунца, по самосталним орбитама, независно од осталих те ће на тај начин дати више или мање обилати поток малих телаца.

Да баш ово разорно дејство Сунца на кометну материју образује потоке звезда падалица, доказује се потпуном сличношћу орбита некојих потока са

орбитама комета које њима одговарају. То се види например из овога сравањења *Персеида* са великом кометом 1862. г. и *Леонида* са првом телескопском кометом 1866. године.

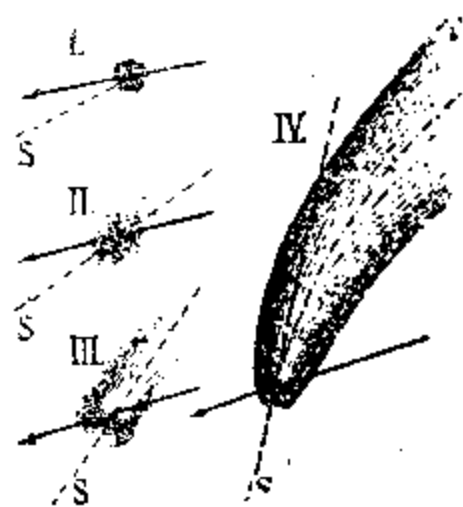
Елементи орбита	Персеиде	Комета 1862. год.	Леониде	Комета 1866. год.
Ω	138°3	137°5	231°5	231°4
i	63.1	66.4	17.7	17.3
Π	343.6	344.7	56.4	60.5
a	22.7	24.5	10.3	10.3
e	0.958	0.961	0.905	0.906
S (у год.)	108	121	33.2	32.2
кретање	ретроградно		ретроградно	

Да потоци звезда падалица произлазе од комета, најбоље се то потврђује на периодичкој комети Биели, која је престала да се појављује од 1852. године; али, када се 27. новембра 1872. год. очекивало да она мора проћи у најближем растојању од Земље и да се, тако рећи, судари са њоме, појавила се изванредно обилна киша звезда падалица — Андромедида. То се поновило и 1885. год. (чл. 188).

191. Спољњи облик и маса комета.

Комете пролазе кроз Сунчеву систему по орбитама, које се мало разликују од параболних и нагнуте су према еклиптици под најразличитијим углима од 0° до 180° ; оне пак од њих, чије су се орбите услед гравитационог дејства великих планета претвориле у издуљено-елиптичке, постале су већ саставни део Сунчеве системе те се периодски појављују кроз одређене интервале времена.

Комета се обично спочетка види само кроз силне дурбине као слабо светла пега у пречнику $1'$, $2'$, а понекад и више, кад се она већ приближи Сунцу S (сл. 128. I) на растојању само 3 до 4 пута већом од растојања Земље



Сл. 128.

до Сунца. Са даљим приближењем ка Сунцу та се пега обично издуљује у правцу ка Сунцу а унутра се у њој образује сјајнији део, који се зове *језгро* (II). Из тога језгра затим почиње као да истиче светла материја, упућујући се спочетка ка Сунцу и образујући *главу* комете; али одмах затим оштро изгиба уназад (III) и добива, по мери приближења комете перихелу, облик све више и више издуљен са искривљеним *репом* (IV). Уосталом, код мањих се телескопских комета понекад сасвим и не појављују репови. После пролаза комете кроз перихел, светлосна изливања из њенога језгра потпуно ослабљују; реп пак, који је као и пређе окренут у супротну страну од Сунца, почиње да се смањује а она, — добивајући понова облик прости маглине, — престаје најзад да се види.

До којег је ступња ништавна густина материје комета, може се судити по томе, што се чак и кроз најгушћи део њен прозиру слабе звезде, не трпећи при томе никакво приметно преламање зракова; затим још и по томе, што комете, не гледећи на њихове врло велике апсолутне димензије, не производе ни најмање пертурбације у кретању планета, поред којих пролазе. Кад се из

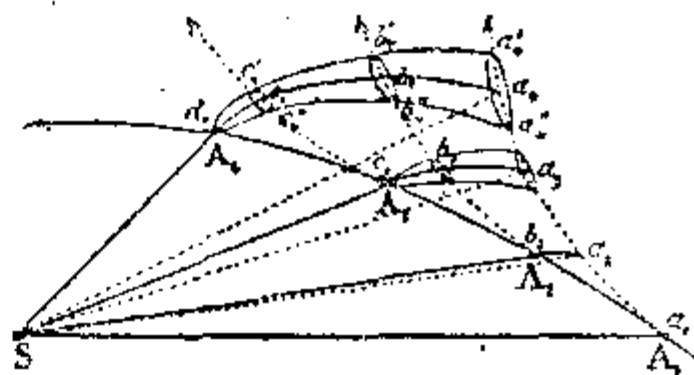
тога изведе закључак, да маса целокупне кометне маглине није никако већа од $\frac{1}{20000}$ Земљине масе m_0^*) и кад се претпостави да је њен пречник ($r \sin 2' = \frac{1}{600}$) око 20 пута већи од пречника Земљиног, онда ћемо увидети, да средња густина њена треба да буде мања за $\frac{1}{20000} \left(\frac{1}{20}\right)^3$ од Земљине густине, т. ј. мања за $\frac{1}{40000}$ од густине ваздуха у доњим слојевима Земљине атмосфере.

На основу свега овога а тако исто на основу напред наведене везе између комета и потока звезда падалица, треба да замишљамо управо комету а не њен реп као више или мање густу гомилу посебних телаца или метеорне прашине, која светли једним делом помоћу одбијених сунчаних зракова са ње, делом пак својом властитом светлошћу, која у њој може да се развије при довољном приближењу ка Сунцу.

192. Објашњење облика кометних репова.

Најфинија материја, која се издваја из језгра и главе кометине и која образује њен реп, очевидно да је подвргнута некаквој сили која одбија и која излази из Сунца, јер тај реп увек заузима правац супротан Сунцу те и не следи за кометом кад она већ прође кроз перихал већ иде испред ње. Беселу припада прва успела теорија облика кометних репова. Он је претпостављао, да је природа те силе електричног порекла. Најновија пак испитивања показују, како изгледа, да овде дејствује нека сила, која је пропорционална изливању материје или тако звани светлосни притисак. Егзистенција таквога притиска светлосних зракова потиче из Максвелове теорије светлости, што је потврђено у 1901. — 1910. година огледима московског професора физике П. Н. Љебеђева. Та одбојна сила ν у обрнутој је пропорцији са квадратом растојања r од Сунца, као и сила Сунчевог привлачења $\frac{\mu}{r^2}$, тако да се укупно дејство обеју тих сила на сваки посебни делић репове материје изражава разликом $\frac{\mu}{r^2} - \frac{\nu}{r^2}$, која може бити и позитивна и негативна, што зависи од бројне вредности коефицијента ν у сравању са μ .

Да замислимо параболну орбиту језгра кометиног (сл. 129.) са разним његовим положајима у A_1, A_2, A_3, \dots у моментима t_1, t_2, t_3, \dots и да претпоставимо, да је одбојна сила почела да делује на некоје честице a_1 тек са онога момента t_1 , када су се оне одвојиле од осталих A_1 . Тада ће се свака од њих, под дејством силе $\frac{\mu - \nu}{r^2}$, почети да креће по новој и управо по хиперболној орбити $a_1 a_2 a_3 a_4$ (чл. 137.) и да ће, — прелазећи у току $(t_2 - t_1), (t_3 - t_2), \dots$ оне исте пређашње површине $a_1 S a_2 = A_1 S A_2, a_2 S a_3 = A_2 S A_3, \dots$, — почети све више и



Сл. 149.

*) Ако претпоставимо да је линеарни полупречник сферне кометне маглине $\rho = \frac{1}{1200}$ а да је маса њена $m = \frac{1}{20000} m_0$, онда, — на основу реченога у чл. 190., — поступно распадање њено, под утицајем гравитације Сунца, треба да почне са растојања r , који се одређује из услова :

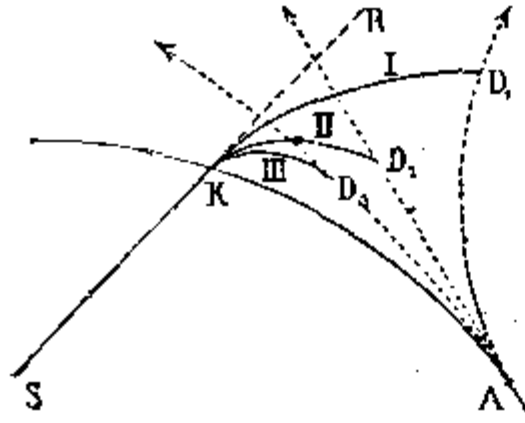
$$2f \frac{M\rho}{r^3} > f \frac{m}{\rho^2}, \quad \text{т. ј.} \quad r^3 < 2 \frac{M}{m_0} \frac{20000}{(1200)^3} = 7.4 \quad \text{или} \quad r < 2;$$

а са оваквог растојања и почиње обично да се јасно опажа развлачење кометне пеге у правцу њенога радиус-вектора r .

више да изостаје иза одговарајућих положаја језгра. Исто ће тако свака о честица b_2 , — пошто се издвоји из A_2 у моменту t_2 , — описати сасвим сличну хиперболну орбиту $b_2b_3b_4\dots$ и т. д. Па због тога ће се једновремена места разних честица $a, b, c\dots$ распоредити по неким кривим $b_2a_2, c_3b_3a_3, d_4c_4b_4a_4\dots$ које иду спочетка у правцу $SA_2, SA_3, SA_4\dots$, али се затим све више и више искривљују уназад.

Али пошто се код разних честица a_i — у моменту њиховог издвајања t_i , — правци и брзине могу у неколико да разликују, то ће се по истеку некога времена, нпр. у моменту t_4 , све оне распоредити на више или мање знатно површини $a'_4a_4a_4''$; доцније пак одвојене честице b_2 распоредиће се у истом моменту t_4 по нешто мањој површини $b'_4b_4b_4''$; честици c_3 — по површини $c'_4c_4c_4''$, још мањој и т. д. На тај начин ће се реп, — који има за осу напред речену криву $d_4c_4b_4a_4$, — поступно ширити са удаљењем његовим од главе кометине и све више и више расејавати у простору, услед тога ће наступити и потпуно његово ишчезнуће у простору, после пролаза комете кроз перихелиј, када се заврши процес њенога распадања и истицањања репове материје из ње.

Да се по тој теорији објасне облици кометних репове, остаје само да се знају за сваки реп повољна величина коефицијента ν силе одбијања. При



Сл. 130.

$\nu > \mu$ орбите ће свију честица репа изаћи као хиперболе AD_1 , које су окренуте Сунцу својом испупченом страном (сл. 130.) и реп ће се добити врло дугачак који тек мало одилази уназад од продужења радиус-вектора SKR . При $\nu = \mu$ орбите ће честица бити праве линије AD_2 а реп ће KD_2 изаћи краћи али искривљенији. При $\nu < \mu$ орбите ће честица бити хиперболе AD_3 , окренуте Сунцу својом издубљеном страном а реп KD_3 излази врло мали, али за то са оштрим изгибом уназад.

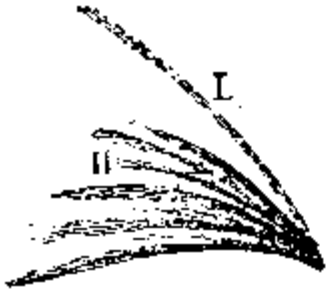
Ради објашњења облика главе кометине, — која се формира истицањем материје из језгра, спочетка у страну Сунца а потом већ у супротном правцу, — допушта се слична одбојна сила, која потиче из самога језгра комете, али која је несравњено мања од Сунчеве силе одбијања, и, која се стога изједначава с њоме на неком довољно блиском растојању од језгра.

193. Типови кометних репова.

Испитивања рускога астронома и академичара Бредихина облика репова многих комета, које су посматране за последњих 300 година, доказала су, да се Беселова теорија примењује на све њих не може боље бити и довела га у исто доба до веома интересантне и значајне поделе свију репова на три типа. Код репова *првога типа* (сл. 130. I) бројна је вредност коефицијента силе одбијања од 17 од 10 пута већа од μ , у средњем пак $\mu - \nu = -11 \mu$; код репова *другога типа* (II) ν не излази из граница 2μ и 0.8μ , а у средњем је $\mu - \nu = 0$; код *трећег типа* (III) ν се колеба између 0.5μ и 0.2μ тако, да је у средњем $\mu - \nu = +0.7 \mu$. Код 40 комета, које је он изучио, репови су се показали управо овакви:

репови	прости			дупли			трипли
	I	II	III	I и II	I и III	II и III	I, II и III
број комета	5	10	5	10	5		2

Али у сваком типу, а особито у другом, различне величине ν , у напред показаним границама, могу да произведу *сложени реп* у облику лепезе. Таква је била на пример у 1744. години сјајна *комеша Шезо* (сл. 131.), која се могла видети чак и дању голим оком.



Сл. 131.

Код неких се комета опажао још и један мали додатак, који је претходио језгру и који је из њега био упућен правцем саме орбите или нешто и унутра од ње ка Сунцу. Постапак се оваквих *аномалних репова* објашњава егзистенцијом крупнијих честица, за које привлачна сила преовлађује силу одбијања.

194. Неке од најзначајнијих комета.

Мале се телескопске комете откривају сваке године по три, четири и више њих; многе пак од њих прелазе без сумње и не примећене кроз Сунчеву систему. Великих комета, које су се виделе голим оком, рачуна се да је од рођења Христ. било до 700. Од ових су најзначајније:

Сјајна комеша 1680. године (са репом II типа), која је прошла на врло блиском растојању од Сунца ($q = \frac{p}{2} = 0.0062$). Она је послужила Њутну за доказ, да су параболне путање комета уопште условљене гравитацијом Сунца.

Халејева комеша (са главним репом I типа и са малим III типа), при чијој је појави 1682. г., — због њене потпуне сличности са кометама 1456., 1531. и 1607., — Халеј закључио о њеној периодичности кроз сваких $75\frac{1}{2}$ година и предсказао доцније њене поновне појаве 1759. и 1835. године. Њена појава у тим годинама, као и последња 1910. год. изазвале су цели низ радова, који су сјајно потврдили изводе небесне механике о пертурбацији у кретањима небесних тела и који представљају нови ступањ у развићу ове гране астрономије.

Комеша 1811. год. одликовала се огромном дужином својега репа (I типа), која је превазилазила $\frac{1}{2}$ растојања од Земље до Сунца.

Велика комеша 1843. године (са дуплим репом I и II типа), која је скоро додирнула Сунчеву површину ($q = 0.0054 = \frac{8}{7}$ Сунчева полупречника), имала је тада тако јак сјај, да се видела и дању поред Сунца. После 37 год. т. ј. 1880. г. прошла је поред Сунца под истим погодбама комета, чији су се елементи скоро сасвим поклапали са елементима комете 1843. г. тако, да се појавила претпоставка о њеној периодичности. Па ипак орбите тих комета, добивене срачунавањем, показале су се толико развучене, да је и најмања погрешка у одређивању положаја комета врло много утицала на трајање периода оптицаја. Због тога, када се 1882. г. појавила нова комета, која је обишла Сунце у току од 3 часа и ишла по таквој истој орбити, онда су у астрономији усталио нов појам о тако званим *пародицама комеша*. Под тим се именом подразумевају комете, које се крећу по скоро идентичним орбитама и које су сличне по својему облику и саставу, при чему повратак њихов Сунцу треба да произлази после знатног периода времена. На тај начин, приметна сличност тих комета служи само указањем на могућност постанка њихова из једне и исте масе, која се кретала или се креће заједно са Сунчевом системом.

Комеша Донаши 1858. године, са огромним сјајним репом II типа и мање сјајним I типа (сл. 132.), била је особито лепа по построју своје главе, који се састојао из неколико сјајних лукова око језгра.

Морехоузова комеша 1908. г. представила је низ врло интересантних промена у построју својега репа. Упочетку је она имала један реп I типа, којему се затим



Сл. 132.

придружила још два зрака, који одговдују репу III типа. Благодарјећи примени фотографије, успело се у исто време да открију скоро непрекидне а притом компликоване пертурбације у материји репа, а тако исто и обртање њено. Спољњи вблик комете се за све време мењао; испитивање пак репа по теорији Бредихина показало је, да одбојна сила, која образује реп I типа, није била стална, достижући каткад вредности 72. На тој се комети особито јасно изразила вредност фотографисања тих тела, јер се само помоћу фотографије могу открити оне fine промене, које је она показала.

Од 30 периодичких комета са врло кратким периодима оптицаја ($S < 8$ година), да напоменемо ове:

Комета Лексела, која се појавила први пут 1770. године, значајна је по томе, што је њена орбита постала елиптичка (са периодом оптицаја $S = 5\frac{1}{2}$ г.) под утицајем гравитације Јупитера, поред којег је прошла та комета још раније; али, 1779. године, када је она понова црошла поред њега, утицај се његов показао супротан те ју је избацио из Сунчеве системе, изменивши јој орбиту на хиперболну.

Комета Биели, о којој је већ било речи у чл. 190., пре него што се распала у прост поток звезда падалица појављивала се у почетку XIX века неколико пута кроз интервале од $6\frac{3}{4}$ године; али је 1845. год. представљала одједном интересантан и први пример *раздвајања* на две посебне комете са паралелним реповима. При слѣдећој се њеној појави 1852. г. оба њена дела још више удаљила а после се није више ни појављивала, т. ј. више се није ни видела. Слично се распадање на неколико делова десило на очиглед астронома и са једном кометом 1882. године.

Комета Енке-Баклунд-ова. Енке је срачунао 1818. године елиптичке њене елементе и нашао за њу изванредно кратки период оптицаја $S = 3\frac{1}{2}$ год. Она је постала знатна због некога поступног скраћивања тога периода, што је дало повода претпоставци о осетноме отпору етерне средине према њеном кретању у простору између звезда. Али су доцнија тачна испитивања и срачунавања пулковског астронома и академичара Баклунда доказала, да то убрзање није стално и може бити објашњено једино претпосавком, да у близини перихела комета пролази кроз средину сличну роју метеорита са несталним простирањем и местом положаја.

ГЛАВА XXVII.

КРАТКИ ПОДАЦИ О ФИЗИЧКОЈ ПРИРОДИ НЕБЕСНИХ ТЕЛА.

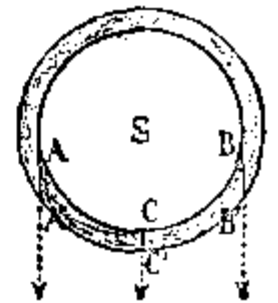
195. Изглед Сунчеве површине.

Силно светла Сунчева површина зове се *фотосфера*. Кад се посматра кроз велики телескоп, она изгледа као да је састављена из малених сјајних честица, *гранула*, по облику налик на пиринчана зрна; између њих се виде тамне мрље које се зову *поре*; али се местимично, нарочито у близини крајева Сунчева диска и у суседству са великим тамним пегама, појављују на њој по-



Сл. 133.

некад и једноставни сјајни делови, који се зову *буктиње* (сл. 133). Интензитет како светлосних, тако исто и топлотних и хемијских зракова те фотосфере опада поступно са удаљењем од центра диска ка његовим крајевима, што произлази очевидно од веће апсорпције крајњих зракова AA' и BB' (сл. 134.) него



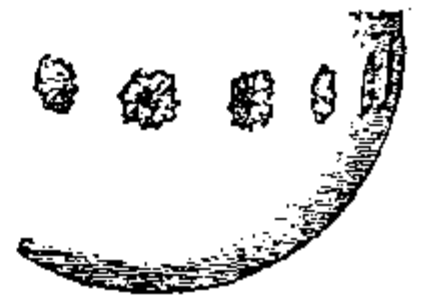
Сл. 134.

централних CC', при пролазу кроз гасовити омотач Сунчеве *атмосфере* а чијој егзистенцији директно указује множина црних линија на Сунчевом спектру. Тамне пеге, које се образују на фотосфери, бивају најразличитијег облика и достижу понекад до тако великих димензија (до 2' и више у пречнику), да се могу видети и без дурбина. Најтамнији централни део пеге који се зове



Сл. 135.

језгро, скоро је увек окружен рубом *полусенке* зракастог или спиралног построја (сл. 135.); најситније пеге, које се зову *поре* нису никад спиралног облика. Али, језгра пеге и пора изгледају скоро црне само због контраста са околном светлом површином, која блиста светлошћу која заслепљава; у самој



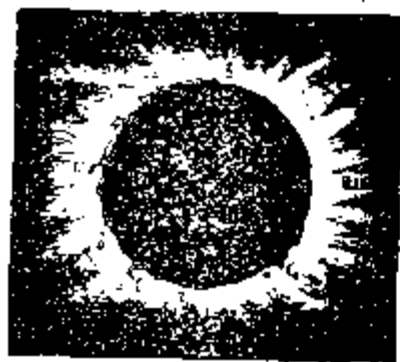
Сл. 136.

пак ствари њихов је сјај ипак изванредно велик, јер је тек око 70 пута мањи од сјаја фотосфере. Свака пега уколико је ближа крају Сунчевом, у толико постаје све ужа и ужа те језгро њено поступно ишчезава (сл. 136.), сасвим слично ономе, као кад би се скривало дно левкастог удубљења у фотосфери.

Велика се пеге обично појављује спајањем из много ситних пора у једно опште језгро и после свог образовања она понекад брзо мења свој облик, час спајајући се са суседним пегама, час распадајући се на посебне делове. Оваква се образовања пеге дешавају највише у зонама од 10° до 30° северно и јужно од Сунчева екватора; у близини пак полова његових, пеге никад нема. Општи број како пеге тако и буктиња бива час већи час мањи и то скоро правилно у току 11-то годишњег периода, што се подудара са сличним периодом повећања

или ослабљења магнетних појава на Земљи. Тако су се у XIX столећу 1848., 60., 70., 82. и 94. год. одликовале изобиљем пега и буктиња, интервалне пак године: 1856., 67., 79., 89. и 1900. биле су врло сиромашне.

За време Сунчевих тоталних помрачења види се око његове фотосфере редак слој црвенкасте боје b, b (сл. 137), која се зове *хромосфера* (то је Сунчева атмосфера) са дугачким истакнућима из ње, која се зову *протуберанце* c, c , а тако исто и широки сребрнасти ореол, који се зове *корона* (венац).



Сл. 137.

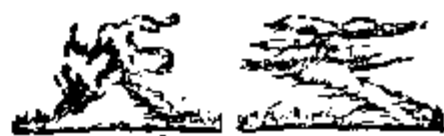
Уосталом, хромосфера и протуберанце се виде кроз довољно широки прорез силнога спектроскопа у свако доба, због тога што се једнородни и једнобојни зраци њихови не расејавају спектроскопом те отуд постају много јаснији од непрекидног спектра Земљине атмосфере, који је знатно ослабљен. Тада хромосфера изгледа као омотач, који као да кључа; на некојим се пак местима њеним дешавају ерупције огромне масе гасова са изванредном енергијом (протуберанце), чија висина износи понекад до $2\frac{1}{2}'$, т. ј. до 100 000 километара (сл. 138.); понекад се избачени тако гасови одржавају над хромосфером као облаци (сл. 138. bis).

Још интересантније резултате даје метода *спектрохелиографска*, коју је недавно применио Хел и Деландр. Та справа допушта, да се, помоћу другог прореза, — који је смештен на месту где се образује спектар, — издвоји ма која линија његова па затим да се њена светлост прими на фотографску плочу. Померајући нарочитим механизмом прорез спектроскопа по целој диску Сунчевој,



Сл. 138.

добићемо на плочи фотографију, која представља размештај по диску Сунчевој онога хемијског елемента, чија је линија спектра била издвојена и у чијим је зрацима, разуме се, извршено фотографисање. Помоћу ове су мето-



Сл. 138. bis.

де пре свега откривена комадаста образовања, облаци пора, назване *флокуле*, које се представљају у облику множине светлих пега, разбацаних по целој диску, и напомињу буктиње. Фотографије разних зракова показале су, да постоје калцијеве, водоникове и др. флокуле. На тај је начин облик Сунца различит и у гасовима. Осим тога, при претпоставци, да су узрок сложености калцијевих линија на Сунцу, (које се распадају на 2 линије апсорпције и 2 зрачења,) различите висине на којима се налазе светлеће масе, од којих оне произлазе, — ове су фотографије омогућиле, да се изучи вертикални распоред гасова у Сунчевом обматачу, а тиме се коракнуло напред у решењу питања о стварању многих појава, запажених на Сунцу.

196. Спектри фотосфере, хромосфере, протуберанца, пегâ и короне.

Непрекидност и изванредни сјај свију боја спектра, који се добива са Сунчеве фотосфере (сл. 139.), показује, да се она састоји из силно усијаних чврстих или течних материја; пошто се пак у њему налазе тамне линије, чији број досеже до неколико хиљада, то доказује да је фотосфера окружена гасовитом средином (атмосфером), чија је температура нешто нижа те због тога апсорбира зраке, оне боје, који су својствени гасовима из којих је та атмосфера састављена. Тако нпр., две врло блиске линије D_1 и D_2 у жутом делу спектра одговарају пари натриума, четири тамне линије у црвеном (C), зелено-плавом (F), плавом и љубичастом (h) одговарају водонику, 460 тамних линија, расејаних по целој спектру, одговарају пари жељеза; тако исто и остале ли-

није показују, да у Сунчевој атмосфери има паре калиума, магниума, бариума, никла, марганца и некојих других метала¹⁾.

Али ако се управи прорез силнога спектроскопа на сами крај Сунчева диска, стављајући га управно на њега, то ће се спектар Сунчеве атмосфере добити у облику посебних светлих линија, својствених напред споменутим гасовима и парама (сл. 139.), при чему веома незнатна а различита дужина тих линија директно указује на то, да у том доста ретком слоју разних парâ најлакше од њих достижу већу висину него теже. Са померањем прореза спектроскопа до онога места Сунчева краја, где се налази протуберанца, издуљују се на сву њену дужину само четири линије (сл. 139.), које припадају водонику и још једна жута, која припада хелиуму тако, да се само из тих најлакших гасова и састоје екстремне ерупције из корпуса Сунчевог.

Кад се управи прорез спектроскопа на пегу, добивају се један поред другога спектри њенога језгра и њене полусенке. Први се разликује од спектра фотосфере тиме, што су му тамне линије раширене и расплинуте а то произлази због веће густине паре и гасова на томе месту; тамне се пак водоникове линије ту понекад испрекидају, одступајући у страну црвене боје спектра те тиме указују на кретање расхлађеног и гушћег водоника у дубину пеге. У спектру полусенке све се уопште тамне линије раширују са приближењем њиховим ка језгру, водоникових пак линија најчешће или сасвим и нема или су замењене чак са сјајним. Као сјајне се оне јављају и на буктињама и на сјајним *мостовима* који секу понекад језгро пеге на неколико делова, — а то значи, да је у свима тим случајима температура еруптивног водоника изванредно висока.

Што се тиче спектра Сунчеве короне, он је изванредно слаб и може се посматрати само за време тоталних помрачења. Осим тамних линија обичнога Сунчевог спектра на њему је откривена једна сјајна линија на зеленој боји, која припада некој непознатој материји.

197. Фај-ева теорија о построју Сунца.

Ни посматрања спољњег облика Сунчеве површине, као ни спектрална, ни изблиза нису довољна за потпуно објашњење физичког построја Сунца нити процеса који се на њему врше. Мишљења су и претпоставке најауторитетнијих астронома и физичара о свему томе врло противуречна. За пеге на Сунцу, например, мислили су час да су облаци, који се образују у његовој атмосфери (Кирхоф), час да су шлаке, згушћене на течној површини (Целнер), час да су удубљења у згушћеној фотосфери (Секи).

Фај-ева теорија, која је развијена до најситнијих детаља, најбоље доводи у сагласност сва могућа посматрања Сунца. По његовој представи унутрашњост се Сунца састоји из простих хемијских елемената у гасовитом стању, тако да се при изванредно високој температури, — која се цени на 6000° за фотосферу, а за унутрашње делове Сунца и на стотине пута више²⁾, — не могу ни да за-



Сл. 139.

¹⁾ Неке групе тамних линија (А и В), које се јављају у Сунчевом спектру припадају кисеонику, азоту и воденој пари Земљине атмосфере, кроз коју пролазе сунчани зраци; али и број и ширина тих линија зависи од чистоће ваздуха и висине Сунца над хоризонтом те су веома нестабилне и при посматрањима са високих планина (опсерваторија на Монблану) скоро ишчезавају. Овим се начином дознало да у Сунчевој атмосфери нема кисеоника.

²⁾ О оваквој се температури на површини Сунца суди по мерењу количине топлотних зракова његових, који долазе на одређену површину, узимајући при том у обзир, како слабљење њихово са удаљењем од Сунца, тако и апсорбирање њихово Сунчевом и Земљиним атмосфером.

мисле никаква једињења међу њима. Због силног пак расхлађивања њиховог, на површини се образују облачне масе са течним или чак и са чврстим честицама разних сложених материја, које пливају по мање сјајној, гасовитој средини. Тиме се објашњава и онај изванредно силни блесак Сунчеве фотосфере, и зрнасти њен састав, и непрекидност њенога спектра. Расхлађени пак гасови, који још нису стигли да образују хемијска једињења и да се претворе у честице чврсте или течне прашине, — образују атмосферу и производе у спектру тамне линије. Али пошто чврсте и течне честице одмах падају наниже те се тамо понова распадају и претварају у гасове, то се међу спољњим и унутарњим деловима Сунца стално одржава размена материјала.

Ради објашњења неједнакости брзина ротације разних зона Сунчеве површине (чл. 169.), Фај претпоставља, да напред речена размена материја, постоји само у спољњем одређеном слоју, у чијој се унутрашњости налази већ сталније језгро у облику елипсоида, спљоштенога на половима, и које се обрће са већом угловном брзином од спољашње површине. Различност пак у брзинама кретања разних зона, треба да порађа у фотосфери вихрове и циклоне сличне са онима, који се образују често и у Земљиној атмосфери а у таквом циклону згушћена пара и гасови распоређују се у облику левка те изгледају као пега, окружена полусенком. Пошто оне нагле ерупције водоника, које се јављају изнутра на површини (у облику протуберанца или буктиња), још више помажу образовању таквих циклона, то постаје јасна и она напред споменута тесна веза између пега и протуберанца или буктиња. Али остаје још непотпуно неразјашњен онај 11-то годишњи период делатности Сунца, који је изражен већим или мањим изобиљем и величином пега, буктиња и протуберанца.

Остаје још хипотетичан и састав короне. Претпоставља се, да је образују сићушна телца или метеори, који треба да падају на Сунце у несравњено већој количини него на Земљу. Држи се чак, да је огромно развијање топлоте, при њиховом падању на Сунце, довољно да надокнади онај губитак, који произлази од његова силнога зрачења.

Космичком се или метеорном прашином, — која се преноси у великој количини на простору између Земље и Сунца, — објашњава такође и оно сијање које је познато под називом *зидијакалне свешлости*. Оно се простире од Сунца највише у правцу еклиптике и посматра се најбоље на екваторијалним ширинама при крају вечерњег и у очеку јутарњег сутона.

198. Површина Месеца и планета.

Најбрижљивија посматрања помоћу великих телескопа показују, да је површина Месеца успела већ толико да очврсне, да се на њој не дешавају никакве промене. Уједно с тим, оштра граница осветљеног дела од мрачнога и моменталност нестајања звезда без икаквог слабљења њихове светлости, при њиховом покривању тамним крајем месеца, најзад и спектар Месеца, потпуно слични сунчаном, — јер и он произлази од зракова који се одбијају од њега, — све то указује на околност, да на Месецу нема ни трага од атмосфере па отуд ни мора. Називи су мора просто дати некојим доста пространим глатким пространствима његове површине.

Осам се планета Сунчеве системе, како по њиховим димензијама, тако и по густини, доста оштро деле на две групе: Меркур, Венера, Земља и Марс су најмање а у исто време са највећом густином; Јупитер се пак, Сатурн, Уран и Нептун одликују и већим димензијама и несравњено мањом густином (глава XXIV, задаћа 1.). Али се још битнија разлика међу планетама тих двеју група показује у односу физичких особина њихових површина.

У спектрима Јупитера, Сатурна, Урана и Нептуна има врло много тамних линија, којих нема у спектру сунчаних зракова, који пролазе кроз Земљину атмосферу; отуд излази, да су те планете обмотане веома густим атмосферама. То се исто да закључити и из реченога у чл. 169. о променљивости појасева и тамних пега на Јупитеру и Сатурну. По силноме сјају тих планета, који се не може објаснити једино рефлексом сунчаних зракова, а тако исто и по појави сјајних пега на њима, — треба претпоставити, да течна њихова површина још није покривена тврдом кором те је још сачувала способност, да сама од себе светли. Најглавнију особину Сатурна чине његови прстени, који га окружују. Највероватније је, да се они састоје из безбројне множине посебних ситних телаца, која оптичу око планете по кружним орбитама, слично са осталим њеним пратиоцима.

Насупрот томе, површина је Марса у сваком погледу слична са Земљином. На њој се понекад оцртавају непроменљиве контуре континената, испресецаних каналама, и мора у правом смислу те речи. Особито су интересантне на њој две беличасте пеге на половима p и p' (сл. 102.), које се периодички и наизменично повећавају и смањују према тамошњим добима године. То може да произађе наине од таложења водене или каквих других парâ у облику снега у зимње доба и од топљења тих талоба у летње доба. И заиста, присуство се таквих пара у атмосфери Марса доказује, прво облачним масама, које понекад покривају контуре његових континената, а друго извесним сувишним линијама на црвеној боји његова спектра.

На површини је Венере немогућно разликовати ма какве сталне контуре, због тога што је врло јако осветљена сунчаним зрацима; слабе пак и променљиве пеге на њој приписују се облацима, који се крећу по њеној атмосфери. Да та атмосфера несумњиво постоји, доказује се још и овим фактима: 1) кад Венера прелази преко Сунца она је окружена, још до ступања на његов диск, врло танким свелим прстеном; 2) граница осветљеног њеног дела од тамног, никад није тако оштро оивичена као код Месеца, што треба приписивати појави сутона на њој; 3) у спектру се њеноме налазе сличне групе тамних линија, као и од водене паре Земљине атмосфере.

Још неповољније су погодбе за посматрање Меркура услед извенредне близине његове до Сунца па због тога се ништа сигурно не може рећи о разним особинама његове површине.

199. Спектри комета.

Комете дају најчешће спектар из три широке светле пруге (у жутој, зеленој и плавој боји), који је сасвим идентичан са спектром доњег плавичастог пламена обичне свеће или светлећег гаса, али је пропраћен још и слабим непрекидним (обојеним) спектром. Овај последњи произлази, сигурно од сунчаних зракова одбијених са комете; први пак показује да у њој постоје некакви угљеводонични гасови, који светле. При довољном приближењу некојих комета ка Сунцу, у спектрима се њиховим појављују још и светле металне линије паре натриума, магниума а понекад и гвожђа; угљеводоничне пак пруге при том су ишчезавале, појављујући се понова тек при следећем удаљењу тих комета од Сунца. Сасвим слична појава произлази, кад се кроз Гајслерову цев са паром натриума и петролеума пропусти низ електричних варница при разним температурама.

Што се тиче кометних репова, то је изванредна различност одбојних убрзања, које добивају њихове честице (чл. 193.) код разних њихових типова. довела академичара Бредихина до закључка, да се репови I типа образују

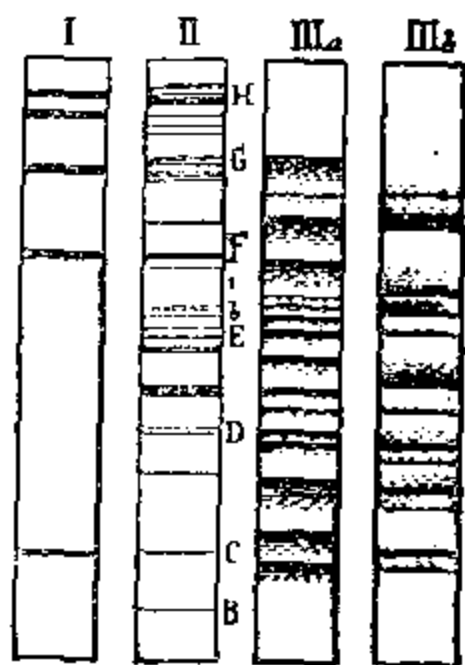
од најлакшег гаса-водоника, репови II типа — од угљеводоничних једињења, а III — од гвожђа и других метала; али то још није довољно потврђено из непосредних посматрања, пошто су спектри репова I типа уопште врло слаби, а и зато што су посматране и такве комете, чији спектри репова нису одговарали тим претпоставкама.

200. Спектри и боје звезда.

У сјају је звезда лако запазити разне нијансе боја, почевши од отворено плаве (Вега) или чисто беле, — које су заступљене код највећег броја звезда, — па до интензивно жуте (Капела) и црвене (Арктур, μ Серије). Са том је разликом у бојама у најтеснијој зависности различитост у њиховим спектрима.

С једне стране разноличност а с друге пак поступни прелаз и сличност разних спектра побудили су астрономе, да их групишу у извесне класе, које

су више или мање једноредни по својему облику. Зnamenити италијански астрофизичар Секи први је дао класификацију ове врсте. Он је груписао све звездане спектре у ова три типа:



Сл. 140.

Спектар првога типа (сл. 140. I), који се добива од белих и плавичастих звезда, одликује се од сунчаног већим интензитетом отворено-плаве и љубичасте боје и врло незнатним бројем тамних линија, од којих су четири, које припадају водонику, шире од осталих. Спектар другог типа (II), који је врло сличан са сунчаним, добива се од жутих звезда и показује, да се оне налази у сличном физичком стању као и Сунце, т. ј. да су обмотане доста густом атмосфером из различитих гасова и пара; некоје пак црвенкасте звезде (Арктур), које се убрајају у тај тип, дају спектре са јако проширеним тамним линијама, као код Сунчевих пега. Спектар трећег типа (III_a и III_b) припада понајвише црвеним звездама и садржи уместо линија читаве широке пруге које му дају облик разнобојне колоне. Код највише звезда тога типа, (α Herculis, α Orionis, μ Ceti) тамноћа се ових пруга повећава поступно у страну љубичасте боје; код неких пак слабих звезда — у страну црвене и при том тако, да се јасни интервали међу пругама издвајају особито оштро.

Временом се ипак накупила множина спектралних испитивања звезда, нарочито са применом фотографије, и појавила толика различитост спектра, да је Секијева класификација постала недовољна. Некоји се спектри, карактерни за читав низ звезда, не могу да уметну у њу, као нпр. звезде (β Lyrae), на чијем се непрекидном спектру, поред тамних линија, виде и светле, понајвише водоничне.

Због тога су биле предложене друге системе, од којих је сада надвладала тако звана Харвардска система. У њој су звезде груписане по спољњим одликама спектра — по појави или ишчезнућу некојих линија, по променљивости интензитета линија или непрекидног спектра, по присуству пруга и т. сл. За ознаке ова се система служи великим латинским словима: O, B, A, F, G, K, M, N, а ради тачније карактеристике, интервални се спектри означају у облику десетих делова (нпр. K7 означава, да спектар дане звезде лежи на 7. десетном делу интервала међу класама од K ка M). Некоје су класе, осим тога, подељене на подкласе a, b, c..., тако да Oa5 означава спектар, који лежи на средини између подкласе Oa и класе B.

Секијева се класификација уметне у Харвардску на овај начин: класе B, A, F, одговарају I типу; G и K II типу; M типу III_a, и N типу III_b.

Одлике су класа ове системе овакве: *Спектар класе O* (кога није било у Секијевој класификацији), садржи сјајне линије водоника при потпуном одсуству металних линија и интензивности плавог и љубичастог дела његовог (звезде Волфа-Раје, ζ Navis). *Спектар класе B* — карактерише се линијама апсорпције водоника и хелиума, и slabим линијама метала (Хелијеве и Орионове звезде, β , γ , и δ Orionis, β Lyrae, β Persei). *Спектар класе A* — водонична линија врло интензивна, хелиумове нема, калцијева линија танка, запажају се линије метала (Сириусове звезде, α Canis M., α Lyrae). *Спектар класе F* има врло интензивне калцијеве линије, много линија метала и знатно ослабеле водоничне линије (Калцијеве звезде, α Ursae min., α Canis min.). *Спектар класе G* — калцијеве линије интензивне, врло много линија метала, водоничне линије још слабије, љубичасти крај спектра уопште ослабио (Сунчане звезде, Сунце, α Aurigae.) *Спектар класе K* — за њега је карактерно јачање многих линија метала, интензивност калцијевих линија и извесно слабљење доњих (љубичастих) делова спектра (α Bootis, α Tauri). *Спектар класе M* карактерише се још већим јачањем линија метала, даљим слабљењем доњег дела спектра и појавом тамних пруга у плавом и зеленом делу његову (α Scorpii, α Herculis). *Спектар класе N*, најзад, садржи за њега карактерне пруге апсорпције угљеника и угљеводоника; понекад се сем тога виде сјајне линије; линије водоника, хелиума и калциума у њему нема.

Веза између боје и спектра звездâ; могућност да се Сунце уврсти у једну од класа, а тако исто и резултати лабораторних испитивања, — све то изазива помисао, да тако груписане звезде по класама имају тесну везу са њиховом физичком природом. Представљајући сваку звезду у облику централног језгра, више или мање чврстог, са гасовитим обмотачем, које се заједно са овим охлађује, — јавља се могућност, да се по облику спектра суди о саставу звезда и о оном стадиуму развића у коме се она налази. На тај се начин долази до резултата, да старост звезде (подразумевајући под тим ступањ њеног стврдњавања) расте са повишењем спектралне класе. Одатле излази, да се наше Сунце налази у средини својега развића.

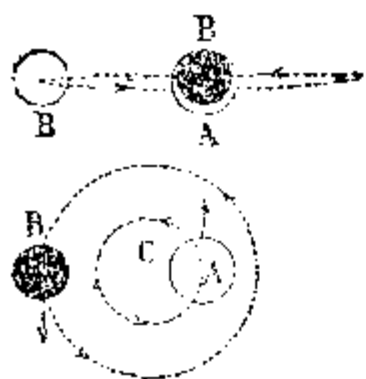
Интересантно је, да од свију испитиваних звезда 62% припадају I типу Секијевом, 37% II типу и скоро 1% III типу. У харвардској пак класификацији групи B припада 11%, групи A 33%, групи F 11%, групи G 10%, групи K 27%, групи M 7% а групи O и N заједно око пола процента.

201. Променљиве звезде.

Фотометријска мерења откривају код многих звезда, особито код црвених, више или мање знатне и при том периодичке промене њиховога сјаја. Такве се звезде зову *променљиве*. Ове промене сјаја бивају врло различите. Ипак се оне могу груписати у класе, које се одликују општим особинама. По Пикеринговој класификацији узимају се класе овако: 1) променљивост је изазвана помрачењем од пратиоца; 2) врло правилни кратки периоди промене сјаја; 3) доста правилне промене сјаја са дужим периодом; 4) потпуно неправилне промене сјаја.

Бела звезда 2 величине Алгол (β Persei) типична је представница прве класе промене сјаја. Остајући у току од 2 $\frac{1}{2}$ дана сасвим бсз измене, она одједном почиње поступно да слаби, кроз 3 $\frac{1}{2}$ минуте постаје за кратко време звезда 4 величине а затим се кроз 3 $\frac{1}{2}$ часа враћа ка пређашњем своме сјају, и то се врши са изванредном правилности, наиме у току од 2.87 дана. Слична, само кратковремена, слабљења сјаја, запажена су скоро у стотини звезда, и то се не да другчије објаснити него тиме, што променљива звезда A има таквог пратиоца B (сл. 141.), која при свакоме свом оптицају пролази испред ње те је помрачи. За Алгола се то објашњење потпуно потврдило тиме, што

тамне водоничне линије његовога спектра пред svakим слабљењем његова сјаја одступају у правцу црвене боје т. ј. указују на удаљење самога Алгола (А) од нас (сл. 141.), што и треба да буде, кад се његов пратилац (В) приближује к нама (чл. 139.); после пак повратка Алгола на нормални његов сјај, те се линије померају у правцу љубичасте боје.



Сл. 141.

зима од опште суме сјаја.

Други облик промена код звезда ове класе опажа се највише код некојих (око 20) звезда жуте боје (β Lyrae). Сјај се њихов враћа на пређашњи такође врло правилно, после кратких интервала времена од неколико дана, али, кад достигне своју највећу јачину, он почиње непрекидно да слаби; код неких се звезда у току тога периода дешавују два maximum-а сјаја (β Lyrae) па и више. Оваква се променљивост може објаснити тиме, да постоји светли пратилац, чија се светлост час додаје, час оду-

зима од опште суме сјаја. Друга класа садржи у себи звезде, које непрекидно и правилно мењају свој сјај у периоду почев од неколико часова па до неколико месеци. Најкраћи припада звезди XX Cygni и цени се у $3\frac{1}{4}$ часа. Типична звезда ове класе (која обухвата више од половине познатих променљивих звезда) јесте δ Cephei, услед чега је и цела та класа добила назив Цефеида. Испитивања последњих година показала су, да се код њих врши једновремено промена сјаја, спектралног типа и зрачне брзине кретања. Та компликација појаве не допушта за сада наћи јој узрока, који би свуда био признат за исправни.

Трећа се класа састоји из звезда, највише црвенкастих, чија боја расте периодички. Периоди промена по својему трајању досежу до целе године па и више; исто је тако велика и разлика самих ступњева максималног и минималног сјаја њихова; јачина пак тога сјаја произлази код свију њих несравњено брже него слабљење његово, које затим наступа. Представница је њихова α Ceti, која је добила назив *Mira*, што значи „чудновата“. Она је обично тако слаба, да се не види голим оком, али после интерва од 300—360 дана достиже одједном до сјаја звезде 4. или 3. а понекад и 2. величине, и пошто остане у таквом облику неколико дана, она понова почиње да слаби. Спектрална посматрања дају доста основа претпоставци, да су такве звезде у стадиуму, сличноме нашем Сунцу, и да се променљивост њихова сјаја објасни више или мање енергичним ерупцијама усијаних гасова из њих, што се може понављати периодички, слично са слабљењем и јачањем делатности Сунца. (чл. 195. и чл. 197.).

У последњу, четврту класу долазе звезде са потпуно неправилном периодичком променом сјаја. Беле звезде, које улазе у ту класу, мењају свој сјај у широким границама; црвене пак обрнуто, — у сразмерно уским. У ту класу звезда долазе: α Orionis, α Herculis и др.

Најинтереснија је η Navis, која је првобитно у 1677. г. означена као звезда 4. величине; доцније је достигала до 2. па чак и до 1. величине, а сад се јавља као звездица 7.—8. величине, при чему се сваки час мењала у границама целих величина.

202. Нове звезде.

Последња класа променљивих звезда као да служе прелазом ка новим или, као што је то сад предложено звати их, *повременим* звездама, код којих се запажају највеће промене сјаја.

Нове се звезде одједном појављују, сјаје у току од неколико дана или недеља врло јако а затим поступно слабе до тог ступња, да постану невидљиве

чак и кроз најсилније телескопе. Тако је напр. знаменити Тихо-Брахе подробно описао нову звезду, која се у његово доба појавила у сазвежђу Касиопе и која је блистала максималним сјајем Венере у току од неколико дана па је кроз 1½ годину сасвим већ исчезла; при томе се са поступним слабљењем њенога сјаја мењала и боја њена, од беле спочетка на жуту а затим на црвену. Од двеју нових звезда, које су се појавиле у добу Кеплера, једна је исчезла па се је појавила још неколико пута а сад остаје као стална жута звезда 6. величине.

Спектрална су посматрања била изведена први пут 1866. године над новом звездом у сазвежђу Северне Круне. Доцније се показало, да је та звезда и раније постојала као врло слаба звездица 9½. величине, али се одједном појавила до звезде 2. величине па се кроз два месеца понова вратила на првобитни свој сјај. Сјајне линије водника, које су се при томе оштро издвајале у њеном спектру, указивале су на привремену ерупцију тога гаса из ње, као и на Сунцу, али у несравњено јачем степену. Овакве су се исте сјајне линије показале и на непрекидном спектру са тамним линијама апсорпције и код нових звезда, које су се појавиле 1876. г. (у сазвежђу Лобуда) и 1891. г. (у сазвежђу Возара), али са том само разликом, што се са слабљењем сјаја тих звезда њихов спектар тако изменио, да је постао сличан са спектром гасовитих маглина (сл. 142.). При томе је спектар оне друге звезде испао дупли, т. ј. као да произлази од два тела, која се крећу са различитим брзинама. На тај начин, узрок појачања сјаја те звезде могао је бити у изванредном повећању њене температуре због судара њеног са каквом другом, после чега је природно наступило претварање њихово у усијано гасовито спање.

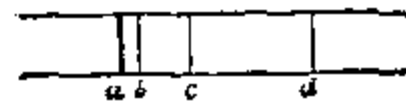
На тај начин сумарно излази, да се спектар повременних звезда претвара у спектар класе О Харвардске системе, т. ј. у спектар звезда које су открили Волф и Раје, указујући тим самим на вероватност, да су те звезде такође повремене звезде далеких векова.

Примена фотографије на изучавању нових звезда открива још неколико интересантних појава у историји развића тих звезда. У том је погледу врло много дала звезда, коју је у фебруару 1901. год. открио Андерсон у констелацији Персеја, када је она била већ 2.7 величине. На фотографији околне области неба, снимљеној у очи тога дана и на којој је било звезда до 12 величине, — ње није било; али на целом низу фотогр. плоча Харвардске опсерваторије, почев од деведесетих година, на месту „нове“ види се звездица 13—14 величине. На тај се начин експлозија Nova Persei десила страшно брзо. После открића су се почеле опажати обична колебања сјаја, спочетка неправилна, при чему је „нова“ за неколико часова постала равна Сириусу а после 1½ — 2 звезд. величине с постепеним слабљењем сјаја и амплитуде колебања. Уједно с променом сјаја мењала се и боја, прелазећи од плаво-беле у жуту и црвену. С прекидом колебања звезда је поступно опет постала бела. Најинтересантнија појава, која је откривена код ове звезде састојала се у појави око ње (приближно на по године после открића) слабог и неправилног, магловитог обмотача. Обмотач се састојао из два прстенаста: унутрашњег, сјајнијег и спољњег, веома слабог. Доцније фотографије показале су, да се део светлих места почео да покреће са великом брзином, при чему се спољњи прстен кретао два пут брже од унутрашњег. У току времена то се кретање прекинуло и сада се око звезде види само слаба, расејана маглина. Тако представљена слика Нове Персеја омогућила је, да се потпуно одређено подвуче веза између егзистенције маглина и образовања нове. Сама појава кретања светлих прстенова највероватније може бити објашњена простирањем јарког пламена светлости од експлозије, која је наступила после судара звезде се са маглином,

осветљавајући све удаљеније и удаљеније њене делове; на основу те хипотезе може се чак срачунати, да је звезда удаљена од нас на 300 светлосних година.

203. Облици маглина и њихови спектри.

Посматрањем кроз више или мање силне дурбине а тако исто и помоћу фотографије откривају се на разним местима неба читаве хиљаде магловитих пега најразличитијег облика и величине. То су или *маглине* у ужем смислу речи, које се састоје из једноставне гасовите материје и које слабо светле; или су то *звездане гомиле*, које само изгледају као магловите масе услед изванредне сићушности појединих звезда, које се налазе у њој врло близу једна до друге. Спектар се маглина састоји само из три до четири сјајне линије (сл. 142.), од којих је најсјајнија *a* (зелена), која, изгледа, да припада азату, друга *b* — неком непознатом гасу а остале *c* и *d*, врло танке, тако, да по каткад исчезавају, — припадају водонику. Спектар пак звезданих гомила непрекидан је, као код највећег броја звезда и понекад је лишен тамних линија апсорпције само због изванредне своје слабости. Такав је, на пример, спектар велике магловите пеге елиптичког облика у сазвежђу Андромеде, која се, у осталом, није могла још да раздвоји у посебне звезде ни кроз најсилније телескопе.

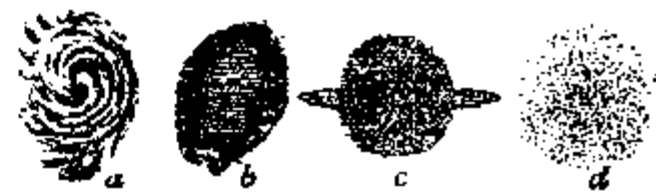


Сл. 142.



Сл. 143.

Маглине се јављају у најразличнијем ступњу сгушћења, час облика клубета, час у разгранатој форми те се понекад распростиру на неколико квадратних степена, као што је, на пример, маглина у сазвежђу Ориона (сл. 143.), која окружује мали трапез од четири звезде 5. и 7. величине.



Сл. 144.

Али постоје магине и ванредно правилног облика: *спиралног* (сл. 144. *a*), *прстенастог* (*b*) и *округлог*, са јасно оцртаним диском. Последње се називају још и *планетарним*, а једна је од њих (*c*), која се налази у сазвежђу Водолије, окружена још и елиптичким прстеном, слично са Сатурном. Са правилним сферним обликом а са највећом густином у њеноме центру, сусрећемо се понекад и код обичних звезданих гомила, као на пример код гомиле од неколико хиљада звезда (*d*), која се налази у сазвежђу Херкула. Најзад, врло често магловити обмотач, — који даје и спектар од неколико светлих линија, — окружује посебне, двојне или сложене звезде, које услед тога добивају облик и назив *магловиших звезда*.

На тај се начин у маглинама и у звезданим гомилама може да угледа постпуни прелаз од крајње разређених гасовитих маса ка стању са већом или мањом густином под утицајем гравитационе силе. Кроз такве је прелазне ступњеве, по свој вероватности, требало да прође некада и Сунце са целокупном својом планетном системом.

204. Млечни Пут.

Тако звани Млечни Пут или Кумовска Слама (сл. 15.), који се простире приближно по великом кругу обеју полукугла неба у облику широког магловитог појаса, није ништа друго до скуп гомила сићушних звезда, који се на неким местима раздваја а на неким распада на више или мање густе масе клупчастог облика. Дебљина његова треба такође да је изванредно велика, јер се звезде, из којих је састављен, представљају, гледане кроз најсилније телескопе, не на тамном већ на мат-светлом пољу.

У близини се млечнога пута налазе и остале гомиле најобилније звездама, као што су на пример: Плејаде у сазвежђу Телца, две гомиле звезда у сазвежђу Персеја, напред споменута гомила у сазвежђу Херкула, исто таква гомила сферног облика у сазвежђу Центаура и др. Највише се у њему или у областима неба најближих њему групирају и све уопште ситне посебне звезде, почев од 7. и 8. величине, тако, да се равномерни распоред звезда у простору, који смо представили раније у чл. 162., оправдава управо само за сјајније звезде, које се виде голим оком. Маглина је, напротив, у млечном путу и око њега врло мало.

На основу свега тога треба извести закључак, да у најближем простору васионе, до кога досежу наша посматрања, све звезде и њихове гомиле образују нешто у облику диска, распрострањеног у правцу млечнога пута, у чијој се унутрашњости налази и наше Сунце. Многе пак гомиле и маглине веома је вероватно, да су сличне са системом млечнога пута.

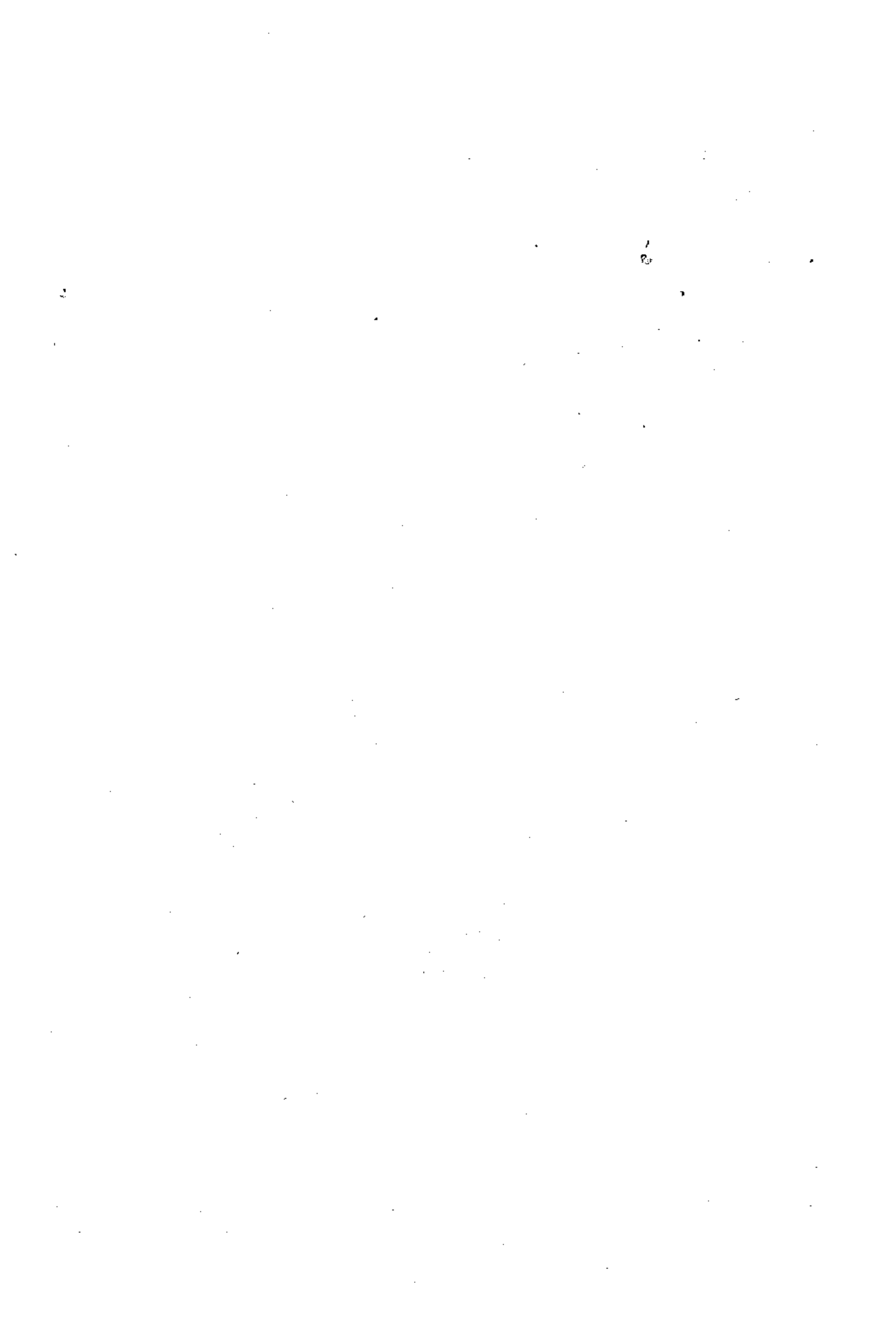


Таблица 1.

$$\mathfrak{E}_5(x) = 0.4343 \frac{x''^2}{6} \sin^2 1'' \text{ (у шестој децимали).}$$

$lg x''$	$\mathfrak{E}_5(x)$	x	$lg x''$	$\mathfrak{E}_5(x)$	x	$lg x''$	$\mathfrak{E}_5(x)$	x
3.385	10	0°40' 3	3.9414	130	2°25' 7	4.0833	250	3°22' 0
3.535	20	0 57. 2	3.9575	140	2 31. 2	4.0918	260	3 26. 0
3.623	30	1 10. 0	3.9725	150	2 36. 5	4.1000	270	3 30. 0
3.686	40	1 20. 8	3.9865	160	2 41. 6	4.1079	280	3 33. 8
3.734	50	1 30. 3	3.9997	170	2 46. 6	4.1155	290	3 37. 6
3.774	60	1 39. 0	4.0121	180	2 51. 4	4.1228	300	3 41. 3
3.807	70	1 46. 9	4.0238	190	2 56. 1	4.1299	310	3 45. 0
3.836	80	1 54. 3	4.0349	200	3 0. 7	4.1368	320	3 48. 6
3.862	90	2 1. 3	4.0455	210	3 5. 2	4.1435	330	3 52. 1
3.885	100	2 7. 8	4.0556	220	3 9. 5	4.1500	340	3 55. 6
3.905	110	2 14. 0	4.0653	230	3 13. 8	4.1563	350	3 59. 0
3.924	120	2 19. 9	4.0745	240	3 18. 0	4.1624	360	4 2. 4
3.941	130	2 25. 7	4.0833	250	3 22. 0	4.1683	370	4 5. 8

Таблица 2.

$$y_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad \text{и} \quad P(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

t	y_t	$P(t)$	t	y_t	$P(t)$	t	y_t	$P(t)$
0.0	0.399	0.000	1.3	0.171	0.806	2.6	0.014	0.991
0.1	0.397	0.080	1.4	0.150	0.838	2.7	0.010	0.993
0.2	0.391	0.159	1.5	0.130	0.866	2.8	0.008	0.995
0.3	0.381	0.236	1.6	0.111	0.890	2.9	0.006	0.996
0.4	0.368	0.311	1.7	0.094	0.911	3.0	0.004	0.997
0.5	0.352	0.383	1.8	0.079	0.928	3.1	0.003	0.998
0.6	0.333	0.451	1.9	0.066	0.942	3.2	0.002	0.999
0.7	0.313	0.516	2.0	0.054	0.954	3.3	0.002	0.999
0.8	0.290	0.576	2.1	0.044	0.964	3.4	0.001	0.999
0.9	0.265	0.632	2.2	0.036	0.972	3.5	0.001	0.999
1.0	0.242	0.683	2.3	0.028	0.979	3.6	0.001	1.000
1.1	0.218	0.729	2.4	0.022	0.984	3.7	0.001	—
1.2	0.194	0.770	2.5	0.017	0.988	3.8	1.000	—



Таблица 3.

Геоцентричке ширине φ' и радиуса ρ за спљоштеност земног елипсонада $c = \frac{1}{297}$.
($lg_{60}\rho$ у шестој децимали).

φ	$\varphi - \varphi'$	$lg_{60}\rho$	φ	$\varphi - \varphi'$	$lg_{60}\rho$	φ	$\varphi - \varphi'$	$lg_{60}\rho$
0°	0'00"0	—000	30°	10'00"4	— 363	60°	10'02"5	—1094
1	0 24.2	000	31	10 22.2	385	61	9 50.0	1116
2	0 48.3	002	32	10 23.2	408	62	9 36.8	1138
3	1 12.4	004	33	10 33.6	430	63	9 23.0	1158
4	1 36.3	007	34	10 43.1	454	64	9 08.4	1178
5	2 00.2	—011	35	10 51.8	— 478	65	8 53.2	—1199
6	2 23.9	016	36	10 59.8	502	66	8 37.3	1218
7	2 47.5	022	37	11 07.0	526	67	8 20.7	1237
8	3 10.8	028	38	11 13.3	551	68	8 03.6	1255
9	3 33.9	036	39	11 18.8	576	69	7 45.9	1273
10	4 56.8	—044	40	11 23.5	— 601	70	7 27.6	—1290
11	4 19.4	053	41	11 27.4	626	71	7 08.7	1306
12	4 41.6	063	42	11 30.4	651	72	6 49.3	1321
13	5 03.5	073	43	11 32.6	677	73	6 29.4	1336
14	5 25.1	085	44	11 34.0	702	74	6 09.1	1350
15	5 46.2	—097	45	11 34.5	— 728	75	5 48.3	—1364
16	6 07.0	110	46	11 34.2	753	76	5 27.0	1376
17	6 27.3	124	47	11 33.0	779	77	5 05.4	1388
18	6 47.1	138	48	11 30.9	804	78	4 43.4	1399
19	7 06.4	154	49	11 28.1	829	79	4 21.0	1409
20	7 25.3	—170	50	11 24.3	— 855	80	3 58.3	—1418
21	7 43.5	186	51	11 19.8	880	81	3 35.3	1426
22	8 01.3	203	52	11 14.4	905	82	3 12.1	1434
23	8 18.4	221	53	11 08.2	929	83	2 48.6	1441
24	8 34.9	240	54	11 01.2	954	84	2 24.9	1446
25	8 50.9	—259	55	10 53.4	— 978	85	2 01.0	—1451
26	9 06.1	279	56	10 44.7	1002	86	1 37.0	1456
27	9 20.7	299	57	10 35.3	1025	87	1 12.8	1458
28	9 34.7	320	58	10 25.1	1048	88	0 48.6	1461
29	9 47.9	341	59	10 14.2	1072	89	0 24.3	1462
30	10 00.4	—363	60	10 02.5	—1094	90	0 00.0	—1462



Таблица 4.

$$\lg r_0 = \lg \operatorname{tg} z' + \lg \alpha_0$$

$$\lg r = \lg r_0 + (1 + q) \tau_0 + (1 + p) (\beta + \tau)$$

t_0 темпер. воздуха по Целс.

t " барометра "

b_0 висина барометра у милим.

z'	$\lg \alpha_0$	z'	$\lg \alpha_0$	q	z'	$\lg \alpha_0$	пром. за 10'	q	p
0°	1.7649	70°	1.7611	0.01	77°	1.7557	2.3	0.03	0.00
20	1.7649	71	1.7606	.01	78	1.7541	2.9	.03	.00
30	1.7648	72	1.7601	.01	79	1.7521	3.7	.04	.00
40	1.7646	73	1.7595	.02	80	1.7496	4.8	.04	.00
50	1.7642	74	1.7588	.02	81	1.7462	6.2	.05	.00
60	1.7634	75	1.7580	.02	82	1.7418	8.7	.06	.01
70	1.7611	76	1.7569	0.02	83	1.7355	12.2	0.06	0.01
z'	$\lg r_0$	пром. за 1'	q	p	τ	t_0 и t	τ	b_0	β
83° 0'	2.6464	9.2	0.08	0.01	+589	—26°	+18	692	—407
20	2.6652	9.6	.08	.01	+554	—24	+17	696	—382
40	2.6847	10.0	.09	.01				700	—357
					+520	—22	+15	704	—332
84 0	2.7050	10.4	.10	.01	+485	—20	+14	708	—308
20	2.7261	10.8	.10	.01	+451	—18	+12		
40	2.7482	11.3	.11	.01	+417	—16	+11	712	—283
								716	—259
85 0	2.7712	11.8	.12	.01	+384	—14	+10	720	—235
20	2.7953	12.3	.13	.01	+350	—12	+8	724	—211
40	2.8206	12.9	.15	.02	+318	—10	+7	728	—187
					+285	—8	+6		
86 0	2.8471	13.6	.16	.02				732	—163
20	2.8751	14.3	.18	.02	+252	—6	+4	736	—139
40	2.9045	15.1	.20	.02	+220	—4	+3	740	—116
					+188	—2	+1	744	—92
87 0	2.9356	16.0	.22	.02	+156	—0	0	748	—69
20	2.9685	16.9	.25	.03					
40	3.0034	18.0	.28	.03	+124	+2	—1	752	—46
					+93	+4	—3	756	—23
88 0	3.0405	19.2	.31	.04	+62	+6	—4	760	+0
20	3.0801	20.4	.36	.04	+31	+8	—6	764	+23
40	3.1223	21.8	.41	.05				768	+46
					0	+10	—7		
89 0	3.1674	23.4	.47	.06	—31	+12	—8	772	+68
10	3.1912	24.2	.50	.06	—61	+14	—10	776	+90
20	3.2159	25.1	.54	.07	—91	+16	—11	780	+113
30	3.2414	26.0	.58	.08				784	+135
40	3.2680	27.0	.62	.08	—121	+18	—12	788	+157
50	3.2945	28.1	.67	.09	—151	+20	—14	792	+179
					—180	+22	—15		
90 0	3.3241	29.2	0.73	0.10	—209	+24	—17		

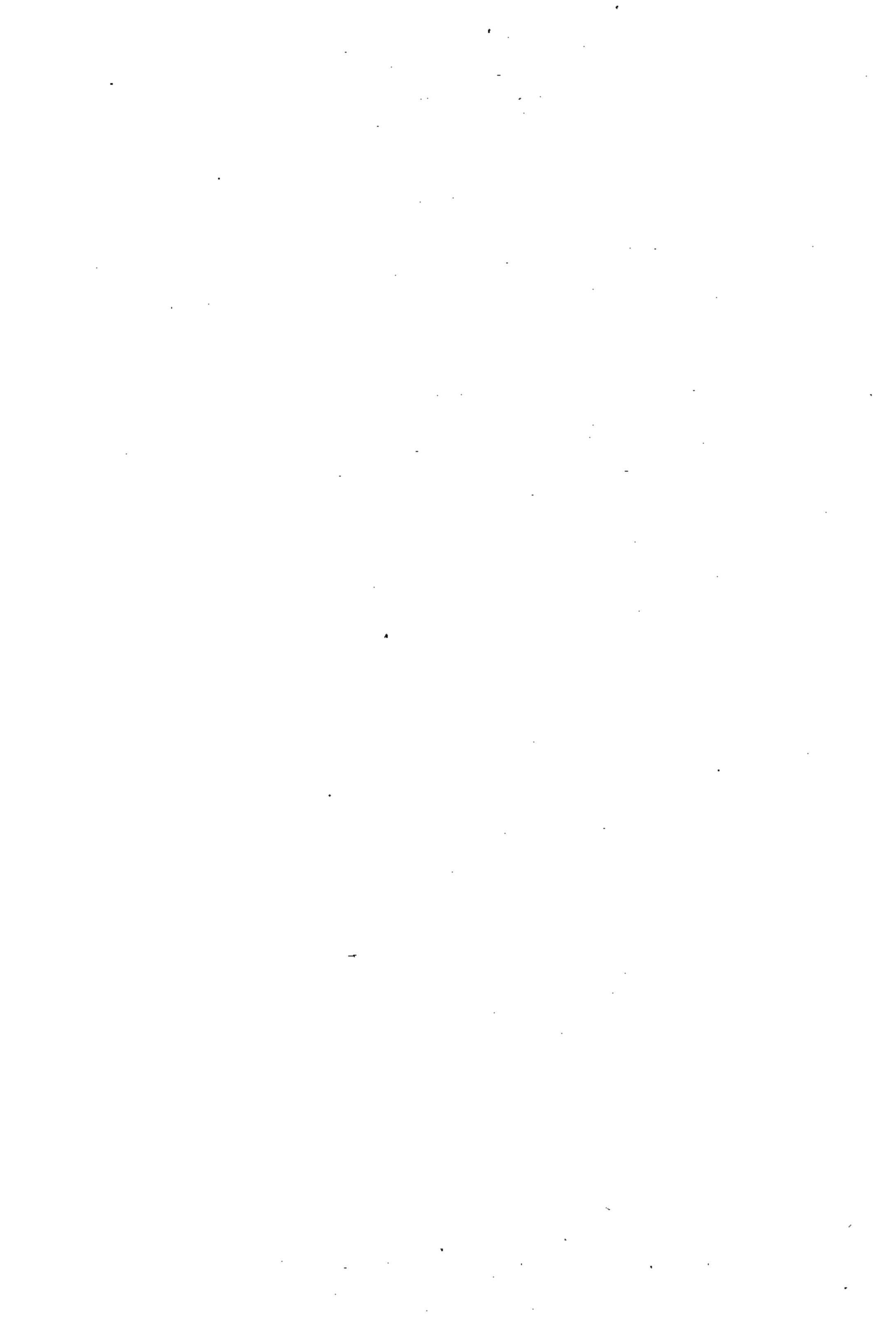


Таблица 5.

Звездано време $S = \text{ср. вр. } T + S_0 + \mu T.$

Средње време $T = (S - S_0) - \mu' (S - S_0).$

$$\mu = \frac{3^m 56^s 56}{24^h}$$

$$\mu' = \frac{3^m 55^s 91}{24^h}$$

μT	T	μT	T
$0^m 0^s$	$0^h 0^m 0^s$	1^s	$6^m 5^s$
10	1 0 52	2	12 10
20	2 1 45	3	18 16
30	3 2 37	4	24 21
40	4 3 30	5	30 26
50	5 4 22	6	36 31
		7	42 37
1 0	6 5 15	8	48 42
10	7 6 7	9	54 47
20	8 6 59		
30	9 7 52	$0^s 1$	0 37
40	10 8 44	0.2	1 13
50	11 9 37	0.3	1 50
		0.4	2 26
2 0	12 10 29	0.5	3 3
10	13 11 21	0.6	3 39
20	14 12 14	0.7	4 16
30	15 13 6	0.8	4 52
40	16 13 59	0.9	5 29
50	17 14 51		
		$0^s 01$	4
3 0	18 15 44	0.02	7
10	19 16 36	0.03	11
20	20 17 28	0.04	15
30	21 18 21	0.05	18
40	22 19 13	0.06	22
50	23 20 6	0.07	26
		0.08	29
4 0	24 20 58	0.09	33

$\mu' (S - S_0)$	$S - S_0$	$\mu' (S - S_0)$	$S - S_0$
$0^m 0^s$	$0^h 0^m 0^s$	1^s	$6^m 6^s$
10	1 1 2	2	12 12
20	2 2 5	3	18 19
30	3 3 7	4	24 25
40	4 4 10	5	30 31
50	5 5 12	6	36 37
		7	42 44
1 0	6 6 15	8	48 50
10	7 7 17	9	54 56
20	8 8 19		
30	9 9 22	$0^s 1$	0 37
40	10 10 24	0.2	1 13
50	11 11 27	0.3	1 50
		0.4	2 26
2 0	12 12 29	0.5	3 3
10	13 13 31	0.6	3 40
20	14 14 34	0.7	4 16
30	15 15 36	0.8	4 53
40	16 16 39	0.9	5 30
50	17 17 41		
		$0^s 01$	4
3 0	18 18 44	0.02	7
10	19 19 46	0.03	11
20	20 20 48	0.04	15
30	21 21 51	0.05	18
40	22 22 53	0.06	22
50	23 23 56	0.07	26
		0.08	29
4 0	24 24 58	0.09	33

Таблица 6.

$$\text{величина} \begin{cases} u = \rho \cos \varphi' \sin t \\ v = \rho \sin \varphi' \cos D - \rho \cos \varphi' \sin D \cos t \end{cases}$$

за одређивање момента покривања звезда Месецем на ширинама

φ од $+32^\circ$ до $+72^\circ$.

Знак код u исти је, као и код часовног угла звезде t .

Подвученим вредностима v одговара приближно зенитно растојање звезде $\zeta = 90^\circ$.

1000 u

$t \backslash \varphi$	32°	36°	40°	44°	48°	52°	56°	60°	64°	68°	72°	$\varphi \backslash t$
0^h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12^h
1	220	210	199	187	174	160	145	130	114	97	80	11
2	424	405	384	360	335	308	280	251	220	188	155	10
3	600	573	543	510	474	436	396	354	311	266	219	9
4	735	701	664	624	581	534	485	434	381	325	268	8
5	820	782	741	696	647	596	541	484	425	363	299	7
6	849	810	767	720	670	617	561	501	439	376	310	6

1000 v за $t = \pm 6^h$

$D \backslash \varphi$	32°	36°	40°	44°	48°	52°	56°	60°	64°	68°	72°	$\varphi \backslash D$
$+30^\circ$	455	506	554	599	640	679	715	747	775	800	821	$+30^\circ$
$+26$	474	525	575	621	665	705	742	775	805	830	852	$+26$
$+22$	489	542	593	641	686	727	765	800	830	856	879	$+22$
$+18$	501	556	608	657	703	746	785	820	851	878	901	$+18$
$+14$	511	567	620	671	718	761	801	837	869	896	919	$+14$
$+10$	519	576	630	681	728	772	813	849	881	909	933	$+10$
$+6$	524	581	636	687	735	780	821	858	890	918	942	$+6$
$+2$	526	584	639	691	739	784	825	862	895	923	947	$+2$
0	<u>527</u>	<u>585</u>	<u>640</u>	<u>691</u>	<u>740</u>	<u>784</u>	<u>825</u>	<u>862</u>	<u>895</u>	<u>924</u>	<u>948</u>	0



1000 ν за $t = \pm 5^h$

D \ φ	32°	36°	40°	44°	48°	52°	56°	60°	64°	68°	72°	
+ 30°	346	401	454	505	554	600	642	682	718	751	780	
+ 26	377	433	488	539	589	635	678	718	755	788	816	
+ 22	406	463	518	571	621	667	711	751	787	820	849	
+ 18	433	491	547	600	650	697	740	680	816	848	876	
+ 14	458	516	572	626	676	722	766	805	841	873	900	
+ 10	481	539	595	648	698	745	788	827	862	893	919	
+ 6	501	559	615	668	717	763	806	844	878	908	934	
+ 2	519	577	632	684	733	778	820	857	891	920	944	
— 2	534	591	646	697	745	789	830	866	899	926	950	+ 2°
— 6	547	603	657	707	754	797	836	871	902	929	951	+ 6
— 10	557	612	664	713	758	800	838	872	901	926	947	+ 10
— 14	564	618	668	716	760	800	836	868	896	920	939	+ 14
— 18	569	621	669	715	757	795	830	860	887	909	926	+ 18
— 22	571	621	667	711	751	787	820	848	873	893	909	+ 22
— 26	570	617	662	703	741	775	806	832	854	873	887	+ 26
— 30	566	611	653	692	727	759	787	812	832	849	861	+ 30
	32°	36°	40°	44°	48°	52°	56°	60°	64°	68°	72°	D φ

1000 ν за $t = \pm 7^h$

1000 ν за $t = \pm 4^h$

D \ φ	32°	36°	40°	44°	48°	52°	56°	60°	64°	68°	72°	
— 30°	244	304	362	418	473	525	575	622	665	706	743	
— 26	288	348	406	463	518	570	619	665	708	748	784	
+ 22	330	390	449	506	560	612	660	706	748	786	821	
+ 18	370	431	490	546	600	651	698	743	783	820	853	
+ 14	409	469	528	583	636	687	733	776	815	851	882	
+ 10	445	505	563	618	670	719	764	806	843	877	906	
+ 6	480	539	596	650	700	748	792	831	867	899	926	
+ 2	512	570	626	678	727	773	815	853	887	916	942	
— 2	541	598	652	703	751	795	835	871	902	930	952	
— 6	568	624	676	725	770	812	850	884	913	938	959	+ 6°
— 10	593	646	696	743	786	826	862	893	920	942	960	+ 10
— 14	614	665	713	758	799	836	869	897	922	942	957	+ 14
— 18	632	681	727	769	807	841	872	898	919	937	949	+ 18
— 22	648	694	736	776	811	843	870	894	912	927	937	+ 22
— 26	660	703	743	779	812	840	865	885	901	912	920	+ 26
— 30	669	709	746	779	808	834	855	872	885	894	898	+ 30
		40°	44°	48°	52°	56°	60°	64°	68°	72°		D φ

1000 ν за $t = \pm 8^h$

ДОЦНИЈЕ ЗАПАЖЕНЕ ГРЕШКЕ:

Страна

2.
51.
100.
100.
178.
225.
236.

Врста
23. оздо
12. "
13. "
14. "
3. одозго
1к. "
4. оздо

Одштампано

жица
Паусон
Ридел
Бешајгајзе
васшаја
Скиатарели
оберације

Треба да буде:

жица
Паусон
Ридел
Бешајгајзе
васшоја
Скиапарели
аберације

Свуда где је одштампано: *рехшасцензија* треба поправити на *рехшасцензија*, а то је на странама: 108, 109, 110, 111, 123, 151, 152, 155, 156, 158, 159, 169, 170, 171, 172, 175, 185, 194, 195, 229, 236, 237, 238, 240, 242, 244, 245, 270.

34.

35.

39.

39.

40.

40.

7. одозго
2. оздо
5. "
3. одозго
12. оздо

арске грешке.

штампано:

сажаљу
эвакром
треговора
ова
phörischen
бати
пренесена
равол ниске

A^{II}EFA^{VI}

внина

СВА^{IV} уметнути: ACDA^{II}; тачка пак Е биће пол. вел. круга

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{2}$$

Subtraction

Постаје

те

$$\lg\left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

$$\lg^2 \frac{1}{2} P = \frac{1}{2} p.$$

упште

8 децимала

потраживање

$\sin a \sin A \dots$

$m =$

x

$\lg a_2$

$$n = \frac{1}{2} a x < \frac{1}{100}$$

$$\lg m = \lg n (1 - e)$$

$y' =$

$$+ \frac{1}{2} \Delta \beta^2 f''_{\beta} (\alpha_0, \beta_0, \dots)$$

$\Delta A \cdot \sin B$

простеје

за

$$\frac{\cos c \cdot \cos a}{\sin a \cdot \sin B}$$

$$\dots \lg \frac{E}{1}$$

$y_0 - y_1$

вредност

$$A_1 = A_0 = x$$

$$= \frac{1}{6} (x - 1) \left(x - \frac{1}{2}\right);$$

Треба да буде:

сажаљењу

оваквом

предговора

сва

sphärischen

бити

пресечена

праволиниске

A^{II}EFA^{IV}

величина

$$\cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}$$

Subtraction

Постоје

то

$$\lg\left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

$\lg 2$

$$\lg^2 \frac{1}{2} P = \lg \frac{1}{2} p.$$

упште

7 децимала

потраживања

$\sin a = \sin A \dots$

$\lg m =$

a

$\lg x_2$

$$n = \frac{1}{2} a x < \frac{1}{100}$$

$$\lg m = (1 - e) \lg n$$

$y' =$

$$+ \frac{1}{2} \Delta \beta^2 f''_{\beta} (\alpha_0, \beta_0, \dots)$$

$\Delta A \cdot \sin b$

простије

са

$$\frac{\cos c \cdot \cos a}{\sin a \cdot \cos B}$$

$$\dots \lg \frac{E}{2}$$

y_0 и y_1

вредност

$$A_1 = A_0 = x;$$

$$= \frac{1}{6} (x - 1) \left(x - \frac{1}{2}\right) x;$$

Запажене штампарске грешке.

Страна	Врста	Одштампано :	Треба да буде :
V	6 одозго	са жаљу	са жаљењу
V	4. оздо	овакром	оваквом
V	5. „	преговора	предговора
2.	11. одозго	ова	сва
5.	18. „	sphärischen	sphärischen
5.	16. оздо	бати	бити
9.	5. „	пренесена	пресечена
9.	15. „	правол. ниске	праволињиске
13.	19. одозго	A ^{II} EFA ^{VI}	A ^{II} EFA ^{IV}
13.	4. оздо	висина	величина
13.	24. „	испред A ^I CBA ^{IV} уметнути: ACDA ^{II} ; тачка пак Е биће пол. вел. круга	
11.	4. „	$\cos 45^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}$
15.	1. оздо	Subraction	Subtraction
15.	17. „	Постаје	Постоје
16.	5. одозго	те	то
16.	7. одозго	$\lg\left(1 - \frac{1}{r}\right)$	$\lg\left(1 + \frac{1}{r}\right)$
16.	16. „	2	$\lg 2$
18.	6. оздо	$\lg^2 \frac{1}{2} P = \frac{1}{2} p...$	$\lg^2 \frac{1}{2} P = \lg \frac{1}{2} p...$
19.	3. „	упште	уопште
21.	2. одозго	8 децимала	7 децимала
21.	12. „	потраживање	потраживања
22.	1. оздо	$\sin a \sin A...$	$\sin a = \sin A...$
23.	9. „	$m =$	$\lg m =$
23.	„ „	x	a
23.	10. „	$\lg \alpha_2$	$\lg x_2$
25.	11. „	$n = \frac{1}{2} \alpha x < \frac{1}{100}$	$n = \frac{1}{2} \alpha x < \frac{1}{100}$
26.	10. одозго	$\lg m = \lg n (1 - e)$	$\lg m = (1 - e) \lg n$
26.	16. „	$y' =$	$y'' =$
31.	11. оздо	$+\frac{1}{2} \Delta \beta^2 f''_{\beta}(\alpha_0, \beta_0, \dots)$	$+\frac{1}{2} \Delta \beta^2 f''_{\beta^2}(\alpha_0, \beta_0, \dots)$
33.	10 одозго	$\Delta A \cdot \sin B$	$\Delta A \cdot \sin b$
33.	12. „	простеје	простије
34.	2. оздо	за	са
34.	15. „	$\frac{\cos c \cdot \cos a}{\sin a \cdot \sin B}$	$\frac{\cos c \cdot \cos a}{\sin a \cdot \cos B}$
35.	7. одозго	$... \lg \frac{E}{1}$	$... \lg \frac{E}{2}$
39.	2. оздо	$y_0 - y_1$	y_0 и y_1
39.	5. „	вреднос	вредност
40.	3. одозго	$A_1 = A_0 = x$	$A_1 = A_0 = x;$
40.	12. оздо	$= \frac{1}{6} (x - 1) (x - \frac{1}{2});$	$= \frac{1}{6} (x - 1) (x - \frac{1}{2}) x;$

Страна	Врста	Одштампиано:	Треба да буде:
41.	10. одозго	$x - a,$	$x - a,$
42.	3. „	$= 53 \cdot 5$	$= - 53 \cdot 5$
42.	10. оздо	$= fa$	$= f(a)$
43.	2. „	$+ \frac{1}{12} \gamma$	$+ \frac{1}{12} \gamma_1$
44.	2. одоздо	$\frac{+ 4027}{+ 5333.1}$	$\frac{+ 4027}{+ 5393.1}$
45.	11. оздо	$(f a + x)$	$f (a + x)$
51.	22. одозго	$-\frac{p_3}{N}$	$- p_3 = \frac{p_3}{N}$
52.	14. „	115	110
53.	9. одозго	кароном	кореном
59.	8. „	$x = \frac{a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_s}{s}$	$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_s}{s}$
60.	3. „	y	yt
70.	3. и 6. оздо	(чл. 38.)	(чл. 39.)
71.	5. оздо	$\eta = \pm \epsilon^4 \sqrt{\frac{2}{s}}$	$\eta = \pm \epsilon^2 \sqrt{\frac{2}{s}}$
71.	7. „	$\frac{\Delta s^4}{s} = 3 \epsilon^4.$	$\frac{\Sigma \Delta^4}{s} = 3 \epsilon^4.$
71.	8. „	(чл. 39.)	(чл. 42.)
71.	10. „	$\left -te - \frac{1}{2} t^2 \right _0^\infty$	$\left -te - \frac{1}{2} t^2 \right _0^\infty$
73.	2. „	чл. 41.	чл. 45.
73.	4. „	(по чл. 36. гл. V)	(по чл. 37. гл. V)
76.	3. оздо	v_i^2 (код p_1)	v_i^2
76.	3. „	v_i^2 (код p_2)	v_i^2
76.	4. „	чл. 39.	чл. 40.
79.	1. „	$\frac{\Sigma v^2}{s - \sigma}$	$\frac{\Sigma v_i^2}{s - \sigma}$
80.	10. одозго	v_i	v_i
81.	1. оздо	$\dots (t)$	$\dots (t)_2$
85.	8. одозго	(cr)	(ar)
88.	4. одозго	(ac)	(ce)
88.	9. „	тежина	тежине
88.	8. оздо	$+ 3B''$	$+ 3B'''$
89.	5. „	± 40	± 40
91.	4. „	$\sin \frac{1}{2} x =$	$\sin^2 \frac{1}{2} x =$
95.	2. одозго	$\frac{2 p H'}{R(p - R)} = \frac{2.7.R.H'}{R.6.R}$	$\frac{2 p H'}{R(p - R)} = \frac{2.7.R.H'}{R.6.R}$
97.	3. „	природним	природним
99.	18. „	констелације	констелације
100.	19. „	Sagitta	Sagitta
103.	17. оздо	распојање	распојање
106.	20. „	непроменљиво	непроменљива
107.	2. одозго	$PE = \Delta$	$PE = \Delta_1$
107.	13. „	пропорционалним	пропорционални
107.	16. оздо	тога	тога
107.	21. „	исток	Исток
109.	5. одозго	$= 11 + 2 \times 15$	$= 11^\circ + 2 \times 15'$
109.	4. оздо	обрађује	обрађује
109.	7. „	$\varphi \pm 90^\circ$	$\varphi = \pm 90^\circ$
110.	22. одозго	α (или t) $\Delta =$	α (или t) и $\Delta =$
113.	14. оздо	од P_1	од P
114.	9. „	полукугли), зато	полукугли): зато
114.	17. „	страницом	стрелицом
114.	21. „	тек из то	тек што

Страна	Врста	Одштампано :	Треба да буде :
115.	2. одозго	A M ₁	A M
115.	5. "	= l. cos θ	= l. cos θ
115.	22. "	тако пак А	тачка пак А
115.	13. одзо	Земље	Земље,
115.	22. "	9g	9g
116.	17. одозго	тачне масе и Земљине	тачне масе Земљине
116.	4. одзо	стодија	стадија
117.	1. одозго	φ = + 49.5	φ = + 49° 5
119.	12. "	a = 5968.74	a = 5978.91
119.	6. одзо	AC = α ρ	AC = a ρ
120.	7. "	φ - f = $\frac{A'A''}{AK}$	φ - f = $\frac{A'A''}{A'K}$
121.	14. "	ρ = 0.997 480	ρ = 0.997 480, ρ ₁ = 0.998 323
125.	1. "	z ₁	z ₂
125.	2. "	z ₂	z ₁
127.	12. "	од Гринвича	у Гринвичу
129.	19. "	која	који
131.	14. одозго	= $\frac{1}{3540} 58'' 27. \sin 1''$	= $\frac{1}{3540} = 58'' 27. \sin 1''$
134.	8. одзо	$\frac{dp}{p_0} = \delta' \frac{dh'}{r'}$	$\frac{dp}{p_0} = -\delta' \frac{dh'}{r'}$
142.	8. одзо	z ₂ ' = z ₀ ' - 16' - ...	z ₂ ' = z ₀ ' + 16' - ...
142.	11. "	r ₁ = 11' 0''	r ₁ = 11' 10''
145.	7. одозго	ратационог	ротационог
156.	16. "	Прациона	Проциона
157.	7. — 8. одозго	61 2	61.2
157.	20. одозго	16 16.1	16 16.7
158.	2. "	растојање	зенитно растојање
159.	18. одзо	- 17 26.9	- 17 26.9
162.	18. одозго	валични	велични
163.	3. "	78с 21	78.21
164.	14. "	10 55.3	15 55.3
164.	15. "	58 47.7	15 47 7
164.	16. "	16 38.8	15 38.8
165.	14. одзо	неједнакост	неједнакости
165.	21. "	27 321	27.3216
171.	15. — 16. одзо	(3.)	(3)'
178.	8. одозго	- 1 0.49	- 1 1.49
180.	12. "	(S.1.), (S.4.)	(S.1.), (S.4.)
180.	17. "	Одатла	Одатле
180.	1. одзо	r' = $\frac{d' \sin (l - \odot)}{\sin (\gamma - \odot)}$	r' = $\frac{d' \sin (l - \odot)}{\sin (\lambda - \odot)}$
181.	1. "	± $\frac{1}{53}$	± $\frac{1}{5.3}$
181.	9. "	чл. 20.	чл. 21.
182.	12. "	108.	118.
183.	20. одозго	епициклонде	епициклонде
185.	9. "	од	до
189.	3. "	ἀπολογητος	ἀπολογητος
191.	14. одозго	= $\sqrt{1 - e^2}$ (PSΠ');	= $\sqrt{1 - e^2}$ (PSP');
191.	после 16. врсте одозго додати нову врсту: према томе је 2 (PSP) = σ(t - t ₀) = a ² √(1 - e ²) (E - e ² sin E)		
197.	19. одзо	t = t ₀ + 180	t = t ₀ - 108
201.	1. одзо	dF = $\frac{dm}{a^2}$	dF = $\frac{dm}{d^2}$
202.	13. одзо	...(f.)	...(f.)
204.	1. одозго	концентричним	концентричних
204.	12. "	cAc'	cAc ₁
204.	15. "	дужина	дужине

Сѣрана	Врста	Одштампаано :	Треба да буде :
204.	* 6. оздо	λ и $d\lambda$	λ и $\lambda', d\lambda$
204.	12. "	— која	— који
206.	9. одозго	$2r \left(a^3 + \frac{r^2}{3} \right)$	$2r^2 \left(a^2 + \frac{r^2}{3} \right)$
209.	7. оздо	$a \left(1 - \frac{1}{3} c \right)$	$a \left(1 - \frac{1}{3} c \right)$
211.	14. одозго	тежати	тежити
212.	12. оздо	* SPK — θ	* SPK = θ
212.	18. "	чл. 115.	чл. 116.
213.	9. одозго	$\left(\frac{p dr^2}{r^2 dL} \right)^2$	$\left(\frac{p dr}{r^2 dL} \right)^2$
214.	4. оздо	$\left(\frac{a'}{a} \right)^2$	$\left(\frac{a'}{a} \right)^3$
216.	7. оздо	$Vb = \frac{\mu}{a^2}$	$Vb = G = \frac{\mu}{a^2}$
221.	16. "	= 0' 476	= — 0' 476
222.	13. "	(I) излази	(II) чл. 124. излази
222.	" "	$\frac{n'_{\circ}}{p^{3/2}}$	$\frac{n''_{\circ}}{p^{3/2}}$
222.	16. "	епохо	епохе
223.	9. "	$A_1 q_1$, са $A_1 q_1$	$A_1 p_1$ са $A_1 q_1$
225.	2. "	(чл. 98. и 101.)	(чл. 99. и 102.)
227.	21. "	последњи	последњи
228.	5. одозго	чл. 29.	чл. 31.
229.	5. одозго	N са $\Delta \omega$	N и $\Delta \omega$
231.	12. оздо	сфера	сфере
233.	16. "	$\pm \times \cos (I - \odot)$	$\pm \times \cos (I - \odot)$
234.	4.—5. одозго	(4.)	(4.)'
234.	3. оздо	= 22' 11	= 20' 11
235.	4. одозго	v	V
236.	17. "	$\delta' - \delta = Aa' +$	$\delta' - \delta = Aa' +$
236.	4. оздо	$\delta - n_1' \dots, \delta - n_2' \dots, \delta - n_3' \dots$	$\delta + n_1' \dots, \delta + n_2' \dots, \delta + n_3' \dots$
239.	1. "	31. око	око 31.
242.	7. одозго	+ 20s 31	+ 20' 31
243.	17. "	Телца	Бика
243.	22. "	растојања	растојање
243.	23. "	звезде	звезда
244.	9. "	$\pi w \cos D \dots$	$\pi w \cos D \dots$
244.	10. "	$\pi w [\sin D \dots$	$\pi w [\sin D \dots$
245.	2. оздо	$\frac{\Sigma \mu \delta}{s}$	$\frac{\Sigma \mu \alpha}{s}$
245.	17. оздо	влатитих	власитих
247.	1. "	= $\frac{a^3}{S_2}$	= $\frac{a^3}{S^2}$
249.	15. одозго	PS = ρ'	PS = ρ ,
249.	9. оздо	0.1	0.01
251.	8. "	његовог	њеног
252.	13. "	88.	88
253.	10. "	1924.	1914.
253.	16. "	пљоштеност	спљоштеност
254.	10. одозго	перихел	перихел
254.	20. "	осетио	осетно
254.	2. оздо	веће	веће од
257.	8. "	$\frac{2}{W} 16^m 6$	$\frac{2}{W} = 16^m 6$
257.	14. "	$\frac{d'}{W'}$	$\frac{d'}{W}$
258.	3. одозго	$\frac{k}{k^2}$	$\frac{1}{k^2}$

Страна	Врста	Одштамљано :	Треба да буде :
259.	4. одозго	Посматрање	Посматрања
260.	1. „	$m' n$	$m' n'$
260.	4. оздо	напоменемо	напоменемо
260.	17. „	працу	праца
260.	20. „	$\times NLF$	$\times NLF$
261.	10. „	$l - (\odot + 190^\circ)$	$l - (\odot + 180^\circ)$
261.	15. одозго	апсорбује	апсорбују
263.	18. „	$L''S' = d''$	$L''S = d''$
265.	2. „	w	v
266.	11. „	$W'CO$	$WC'O$
267.	13. „	$u v,$	$u, v,$
267.	17. „	$w' = u \cos D \sin 1^m -$	$w' = -u \cos D \sin 1^m$
267.	8. оздо	$T_a \doteq T_e,$	T_a и $T_e,$
269.	3. одозго	истом	истим
270.	9. „	месецем.	Месецем.
272.	21. оздо	$T = T_c = \tau$	$T = T_c = \tau$
273.	2. одозго	$5^h 29^m 4$ \approx $h 29^m 4$	$5^h 29^m 4$ $6^h 29^m 4$
273.	8. одозго	0.118	-0.118
277.	6. „	усијевају	усијавају
277.	18. оздо	$h h_1$	$h h'$
280.	14. „	таи-	тан-
282.	20. „	веком	већем
283.	7. „	AS_2A_3	A_2SA_3
284.	23. „	$\nu > \mu$	$\nu < \mu$
285.	14. „	су	се
285.	17. „	показазе	показале
286.	15. одозго	исбацио	избацио
286.	3. оздо	претпоставком	претпоставком
292.	2. „	калсе	класе
293.	2. „	која	који
293.	3. „	другчије	дручкије
293.	7. „	мунуте	часа
295.	17. одозго	звеза.	звезда
295.	24. „	спање	стање
295.	1. оздо	звезде се са	звезде са
299.	1. „	1.000	0.000
301.	6. одозго	10 22.2	10 12.2
301.	15. „	4 56.8	3 56.8
303.	2. оздо	3.2945	3.2955



Поправке на сликама.

- 1.) На сл. 8. III одштампано је $-\Delta c$ и Δb а треба $-\Delta C$ и $-\Delta B$.
- 2.) На сл. 36. уместо $t-t_0$ и t_0 треба да буде $t-t_0$ и t_0 , уместо $90-c$ треба $90+c$.
- 3.) На сл. 42. $\star PM'3$ означен је са M а треба са M' ;

$\star M'P3$	„	„	„	t	„	„	„	P'
$\star \Upsilon PM$	„	„	„	a	„	„	„	α
$\star \Upsilon PM'$	„	„	„	a	„	„	„	α'
лук $3M'$	„	„	„	ζ	„	„	„	ζ'
- 4.) На сл. 56. и 57. стоји *Орб. С нца* а треба *Орб. Сунца*.
- 5.) На сл. 56. bis, између цифара 25 и 28 на пресеку праве $S4$ са орбитом Марса јасније означати 4.
- 6.) На сл. 72. треба ставити стрелице у правцу од p ка P , од P' ка P и од S_1 ка S .
- 7.) На сл. 111. јасније обележити са δ растојање $N\Upsilon$.
- 8.) На сл. 116. јасније обележити са l_0 растојања $La a$ и $Le e$.

Напомена: Због тога што у почетку штампања овог дела у штампарији није било слова d за диференцијалне формуле морало се употребити слово a , као нпр. $\frac{dn a}{dx}$ уместо $\frac{dn d}{dx}$ на стр. 27. и т. д. Тек при крају штампања добивено је то слово те је затим (од стр. 245.) и употребљено, као погодније, ма да је и то све једно, кад се зна садржина предмета о коме је реч, на шта се упозорава читалац.

За белешке.