ELEMENTORUM UNIVERSÆ MATHESEOS

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH

Societatis JESU

PUBLICO MATHESEOS PROFESSORE

TOMUS III.

CONTINENS

SECTIONUM CONICARUM ELEMENTA nova quadam methodo concinnata & Dissertationem de TRANSFORMATIONE LOCORUM GEOMETRICORUM, ubi de Continuitatis lege, ac de quibusdam Infiniti Mysteriis.

EDITIO PRIMA VENETA,
summo labore ac diligentia ab erroribus expurgata.

VENETIIS, MDCCLVII.

APUD ANTONIUM PERLINI.

SUPERIORUM PERMISSU, AC PRIVILEGIIS.

AUCTORIS PRÆFATIO.

Sectionum Conicarum Elementa promiseram jam a pluribus annis, ac pluribus in locis, nova quadam methodo ex generali definitione deducta ac in Romano Litteratorum diario ad annum 1746. extat schediasma brevissimum, quo ex eadem illa definitione demonstratur in primis ratio constans inter bina rectangula segmentorum binarum chordarum Sectionis Conicæ cujusvis habentium inclinationem constantem, & se invicem secantium; tum partim ex eo theoremate, partim iterum ex ipsa definitione præcipua omnia, quæ ad ejusmodi curvas pertinent, derivantur.

Id quidem argumentum plus quam decies ergo sane orditus sum in Auditorum meorum gratiam, neque unquam impetrare potui a me ipso, ut ordinem, quem simel susceperam, tenerem, ac porro pergerem; sed novam quandam viam, quamvis ab eadem definitione digressus, inii semper, & sæpe etiam fere usque ad exitum tenui. Ex altera enim parte admirabilis quidam inter geometricas veritates nexus, ut in intricatissimo quodam labyrinto, mille ad eundem exitum diversos offerebat tramites; ex altera vel brevioris, vel expeditioris itineris oborta spes tædium quoddam jam tolerati laboris induxerat.

Et sane hæsissem diutius, nisi superiore anno gravissimum accessisset ad maturandam editionem incitamentum. Conscripseram ego quidem latino sermone jam ab anno 1737 in usum nobilis adolescentis, quem geometricis studiis initiandum susceperam, breve quoddam Geometriæ planæ compendiolum, quam ad 14 propositio-

num summa veluti capita redegeram, adjectis corollariis nonnullis, & scholiis ita, ut propositionibus quidem, & corollariis aperte contineretur, vel fere sponte inde flueret, ac facillime deduci posset, quidquid ad cæteras facultates mathematicas, vel Physicas ex ipsa Geometria requiritur, in scholiis autem usus haberentur nonnulli eorum, quæ pertractata jam fuerant, quibus Tyronis animus incitaretur, & eorum fructuum, quos olim ex ipsa Geometria percepturus esset, jam aliquam voluptatem præciperet. Haud ita multo post Italico sermone breve itidem Arithmetices compendiolum exaraveram in aliorum quorundam usum, ubi primo capite præcepta, quæ ad computationem pertinerent, indicaveram tantummodo, secundo proportiones, ac argumentandi modos, tertio progressiones, ac logarithmos aliquanto diligentius persecutus eram, demonstrationibus, in iis, quæ ad computationem pertinebant, plerumque omissis, in reliquis summo semper cum rigore deductis. Compendiosa itidem Trigonometriæ sphericæ elementa Romanæ Taquetianorum Elementorum editioni inserueram, quæ simplicitate quadam, & ordine se commendabant, nec omnium improbabantur.

Dum Geographiæ corrigendæ causa, & Meridiani accuratius per Pontificiam ditionem traducti mensurandorum graduum, ditionem ipsam percurrerem itinere per summos montes laboriosissimo; & ab amicis, & ab iis, quibus ut paream, mihi ob ipsam instituti mei rationem religio est, per litteras inductus sum, ut eorum editionem permitterem tanquam exordium quoddam Elementorum universæ Matheseos, adjectis iis, quæ necessaria viderentur. Ipsum autem Geometriæ planæ compendium illud meum, ejus discessu, in cujus gratiam conscriptum fuerat, jam tum amiseram, quod extabat ab alio Italice redditum, unde iterum ab Editore latinitate donatum fuerat, & idem Arithmeticæ quoque compendium in latinum sermonem converterat, quibus in versionibus mutationes etiam extiterant nonnullæ, uti fit, aliis etiam quandoque adjectis, omissis aliis arbitrio interpretum. Interea vero Editor mihi amicissimus Geometriæ Solidorum compendium, & Planam Trigonometriam, ac Al-

gebræ

gebræ finitæ elementa a me ipſo urgentiſſimis litteris expoſcebat.

Itaque ipſa elementa ſolidorum in medio itinere conſcripta Romam tranſmiſi, ſatis, ni fallor, & expedita, & perſpicua, & vero ſimul etiam copioſa. Trigonometriæ autem ſphericæ illi parum admodum mutatæ planam adjeci, quæ in unum cum ea veluti corpus coaleſceret. Et ſane utriuſque elementa adeo paucis innituntur principiis, & tam expedita methodo, ac tam continua, & neceſſaria deductione ſunt concinnata, ut in iis, ſi iterum etiam edenda eſſent, nihil fere ſit, quod mutatum velim, ſive ordinem ſpectem, ſive demonſtrationum textum. Atque ea quidem omnia cum ad Urbem veniſſem, redeundum enim erat identidem, impreſſa inveni, quibus omnino addendam cenſui appendicem quandam aliquanto fuſiorem ad calcem, qua quædam, quæ ad Geometriam illam, & Arithmeticam neceſſaria cenſebam, continerentur. In ea demonſtrationes, quæ deerant, ſupplentur paſſim, ac uberrima theorematum omnium elementarium ſeges colligitur, indicaturque, quo ordine, qua ratione ex iis ſolis 14 Geometriæ propoſitionibus vel 12 potius, (nam binæ ad proportiones ſecundo Arithmeticæ capite uberius pertractatas pertinent), quidquid ad Elementarem Geometriam requiritur, deducendum ſit, ac plura innuuntur problemata Tyroni exercendo aptiſſima.

In hac appendice continentur ea, quæ meis ego quidem Tyronibus viva voce inſinuare conſueveram, vel in quibus eoſdem exercebam, quæ ſane ad Geometriam addiſcendam cum fructu ſummæ arbitror utilitatis. Obruitur plerumque Tyronis animus rerum diſparatarum multitudine, dum ea omnia, quæ ad elementa pertinere poſſunt, unico velut hiatu percurrit; ac licet ſingula perquam facile arripiat, rerum ſummam, ac admirabilem quemdam nexum non tenet. Hinc utiliſſimum fore arbitratus ſum, ſi ad præcipua quædam capita tota hæc tam ampla materies redigeretur, quæ ſine aliorum adjumento ſuſtinerent ſeſe, ex quibus autem, ut ex primariis quibuſdam fontibus, cætera omnia facile deducerentur. Ubi illa Tyro perſpexerit, & totius ædificii quoddam veluti e tra-

bibus compactum fulcimentum habuerit, tum reliqua illa cum longe majore fructu adjiciet, in quibus deducendis si vires primum suas experiatur, tum ubi impares senserit, Praeceptoris opem imploret, næ ille & ad inventionem, necessariam sane, sed raram admodum, viam sibi sternet expeditissimam. Illud enim omnino mihi persuasum est, idcirco tam paucos prodire Geometras, qui nova invenire possint, vel propositorum theorematum demonstrationes supplere, licet tam multi Geometricis studiis operam navent, & multi itidem ad aliorum inventa percipienda deveniant; quod ubi primum se ad Geometriam addiscendam applicuerunt, explicata omnia, ac diserte deducta repererint, nullo aut inventioni, aut deductioni relicto loco, quo acueretur industria, & exercitatio mentem excoleret. Verum ad eam hujus disciplinæ rationem ductore est opus exercitato, qui noverit ejusmodi insinuare notitias, quas ad inventionem pro Tyronis captu satis fore censuerit; quæ si adhuc ipsum, quo tendit, nequaquam perduxerint, ita ipsi reliqua paulatim addat; ut semper itidem relinquat aliquid, quod demum per se ipse inferat, quo nimirum ille tamquam invento suo, gratulabitur sibi, & ingentem inde voluptatem percipiet. Et hæc quidem de appendice illa, de qua in ipsa prima libri fronte, ac editoris præfatione, quæ nimirum impressa jam fuerant, nulla tum quidem injecta est mentio.

Dum hæc ederentur Algebræ Elementa exposcebantur. Ea ex Urbe iterum digresso conscribenda fuerunt partim in itinere, partim Arimini, ubi diutius ob plures observationes ibidem institutas sum commoratus, unde ipsa elementa, ut effluebant e calamo, ita Romam transmittebantur edenda, in quibus ea omnia quæ ad æquationum proprietates generales pertinent, ac ad tertium, & quartum gradum in primis, quæ ad variabiles formularum valores, ad earundem incrementa, & decrementa, ad maximorum, ac minimorum determinationem spectant, aliquanto accuratius, & fusius sum persecutus, ac imaginariarum quantitatum usum in radicibus æquationum gradus tertii, ex eadem unica formula eruendis protuli nec inutilem, ut arbitror, nec inelegantem. At

quod

quod ad illum, quem algorithmum vocant, sive ad præcipuas computandi rationes pertinet, compendiosiore methodo, institutionum more, quæ maxime necessaria videbantur, innui tantummodo, ac demonstravi, exemplis ubique adjectis, sed admodum paucis, plura Præceptoris arbitrio relinquens, qui ea pro Tyronis captu suggerat, & quæ opportuna videantur ad uberiorem rerum intelligentiam, suppleat viva voce.

Ea omnia jam prodierant sine meo nomine, cum demum observationibus omnibus confectis Romam regressus, ac meo Matheseos tradendæ muneri restitutus, ad Conicarum Sectionum elementa perficienda animum applicare coactus sum, & ipsorum editionem maturare. Ita autem applicui, ut veteribus illis laboribus omnibus prætermissis novam rursum rationem inierim, & ab iis omnino diversam veritatum seriem adornarim. Id autem aliquanto plus otii nactus in hoc mihi opere præstandum in primis duxi, ut singula quam dilucide fieri posset, exponerem, nihil non accuratissime demonstrarem per finitam Geometriam, quam unam hic mihi adhibendam constitui, ita, ut quod ad Algebræ usum in Conicis pertineret, eo reservarem, ubi de ipsius Algebræ applicatione ad Geometriam agendum erit. Nexum autem quemdam in primis, & deductionis ordinem ita rerum naturæ consentaneum persecutus sum; ut inde manifesto apparere posset, ipsa Geometria duce ex assumpta definitione ad proprietates omnes necessario deveniri, quæ latere nequeant inquirentem, licet earum omnino ignarus ad hunc ordinem contemplationis accedat. Atque id quidem ita me assecutum esse arbitror, ut quicumque satis in Geometria peritus ad hæc elementa percurrenda animum applicuerit, per se ipse sine ductore ullo & theorematum demonstrationes omnes admodum facile assequi posset, & ordinem ipsum, ac nexum perspicere, cujus vi per sese iterum eodem ingressus calle eadem possit vel problemata sibi solvere, vel demonstrare theoremata, & eamdem præcipuarum veritatum seriem contexere. Eam ob causam illum ipsum ordinem, quem in eo schesdiasmate proposueram, immutavi plurimum, & quod ibi ex ipsa definitione theorema deduxeram primum, hic ad sextam *propositionem rejectum est, ut generalis cujusdam constructionis fructus præcipuus quidem, sed qui alios ante se plurimos, ex eadem itidem profluentes, haberet; qui prætermittendi, ac differendi non essent. Ordinem autem hunc ipsum novum, quem reliquis præferendum censui, præcipua, quæ congessi, quæ scholiis interjectis adjeci, quæ in fusiore dissertatione ad calcem addita pertractavi, hic quam brevissime fieri poterit, perstringam.*

In primis curvas hasce considerandas mihi duxi non in cono ipso, a quo nomen habent, cum solidorum consideratio multo complicatior sit, & multo majorem vim imaginationis requirat, sed in plano positas, quod & alii præstiterunt sane multi. Definita autem earum forma, & proprietatibus plurimis in ipso plano deductis, tum demum ad Coni, Cylindri, Conoidum sectiones gradum feci, quæ ita multo expeditiores evadunt.

Eam igitur Sectionis Conicæ perimetrum appellavi (nihil enim refert, si interea quamcumque nominis, ad arbitrium assumpti, definitionem usurpes, undecumque id nomen fluxerit, ac nominis ipsius derivationem alio reserves), in qua puncti cujusvis distantia a dato quodam puncto, quod Focus *dicitur, ad distantiam a data quadam recta, quam* Directricem *appellavi, sit in ratione data, quæ ut esset minoris inæqualitatis, æqualitatis, vel majoris inæqualitatis, ad Ellipsim, Parabolam, vel Hyperbolam perimeter pertineret, ubi illud accidit satis ad rem opposite, ut defectus, æqualitas & excessus qui iis ipsis curvis Græco vocabulo id nomen jam olim dederant in communi methodo ex longe alia proprietate petitum, in hac mea ex ipsa definitione penderent.*

Mira sane atque incredibilis est ejus definitionis ubertas, atque fœcunditas, qua, ut in adjecta dissertatione demonstravi num. 766, omnis hæc tractatio ad unicum problema reducitur, quo ex datis foco, directrice, ratione illa data, datæ rectæ concursus cum perimetro inquiritur; cujus problematis solutio rite ad casus omnes applicata, vel immediate per sese, vel ex iis, quæ inde primo deducta sunt, omnes exhibet harum curvarum proprietates, quas ad 9. propositiones redegi. Priores tres

tria

tria problemata continent (num. 34, 128, 140) & definiunt concursum perimetri cum recta quavis directrici parallela, cum transeunte per focum, cum habente directionem quamcumque, cujus tertii problematis constructio generalis satis elegans, & fecundissima, cum in prioribus binis casibus falleret, bina illa coegit præmittere singularia problemata, minus illa quidem fecunda, at ad naturam, & varias trium curvarum formas determinandas, sistendas animo, & vero etiam delineandas, atque oculis proponendas aptissima. Reliqua sunt theoremata e tertio problemate derivata. Quarta propositio (num. 181) focorum proprietatem effert, quæ iis nomen dedit, ab æqualitate angulorum cum tangente petitum, quinta (num. 206) diametros exhibet secantes bifariam ordinatas suas. Sexta (num. 299) enunciat theorema illud generale constantis rectangulorum rationis, de quo mentio superius injecta est. Et ea quidem tria theoremata ab ipso tertio problemate singula per sese immediate deducuntur. Ex eorum autem postremo potissimum alia bina proveniunt. Septima nimirum propositio complectitur (num. 351.) relationem quadrati semiordinatæ cujusvis diametri ad rectangulum sub abscissis, vel ad abscissam unicam in Parabola, & latus rectum. Octava (num. 397.) proportionem quandam armonicam rectæ e binarum tangentium concursu ductæ, & occurrentis perimetro bis, ac rectæ contactus jungenti semel; cujus quidem theorematis mira est sane, atque incredibilis fecunditas. Ex septima propositione nona deducitur (num. 495.) quæ itidem ex illa sexta deduci immediate posset, & illam exponit quadrati semiordinatæ relationem ad latus rectum, & abscissam, quæ apud Veteres Ellipseos, Parabolæ, Hyperbolæ nomen dedit; quæ quidem propositio viam stravit ad demonstranda accuratissime per finitam Geometriam, quæcumque ad circulos Conicarum Sectionum osculatores pertinent, quos pluribus corollariis diligentissime sum persecutus.

Et quidem propositionibus omnibus corollaria adjecta sunt plurima, quibus singulis sæpe ingens theorematum numerus, & ex propositionibus ipsis, & ex se mutuo confertim prorumpentium continetur. Habet definitio ipsa

Corollaria 5, propositio prima 4 sua, & cum novis definitionibus conjuncta alia 20: secunda propositio tantummodo 2, multa enim ex iis, quæ prima exhibuit, ex ea itidem deduci possent: tertia 9, nam reliqua omnia, quæ consequuntur ad finem usque pro ejus corollariis haberi possunt; primum autem ejusdem corollarium tam multa simul theoremata continet ex diversis casuum conditionibus derivata pariter (num. 49) ut soli enunciationi vix integra pagina suffecerit: quarta 7: quinta 22, quibus inprimis ea omnia continentur, quæ ad Hyperbolarum asymptotos spectant: sexta 13: septima 12: octava reliquis fæcundior 28: nona demum 10 ad circulos osculatores potissimum pertinentia.

Corollarii immixta sunt scholia sane multa sunt enim numero 44, quibus vel, quæ maxime notatu erant digna, adnotarentur, vel quæ cum earumdem curvarum proprietatibus copulata ad Geometriam generaliter pertinerent, pertractarentur, vel quibus ordo deductionis indicaretur, quod in tanta fæcunditate, in tanto veritatum nexu necessarium omnino extitit. Illud enim res ita arcte inter se copulatas, & pendentes a se invicem litteris consignaturo accidit perquam incommodum, quod, licet diutius meditatus, farraginem omnem tot veritatum, & deductionum unico etiam demum intuitu complectatur, & quæcumque velit sibi animo seorsum sistat; non nisi singula enunciare possit, atque conscribere, dum alia deducit ipsa iterum æque fæcunda, aliis interea omnibus prætermissis, ad quæ regredi debeat memor, & ad omnes derivationes delatus iterum, ramos jam peragratos omittere intactos aggredi, ac nullo surculo nulla pretermissa fronde, pari circuit perlustrare.

Finge tibi densis confertum frondibus arbustum: tot ramos exurgentes e trunco, tot minores e ramis ramusculos, e ramusculis surculos prorumpentes, e surculis frondes, e frondibus flores, & folia. Hæc tum omnia unico intuitu contemplaris, quæ e quibus prorumpant, vides, quod libuerit folium, quemcumque florem animo elegeris, i tenta acie, admota manu per aerem, carpis, nullo ramo, nullo surculo attacto. At si formicam quampiam docere debeas, qua iter disponendum ratione sit, ut ad singula

gula folia, ad singulos flores, nullo demum prætermisso, pertingat, quanta tibi arte opus erit, ne quid omittas, ne quopiam iterum labore irrito formicam tuam reducas? Ascendendum per truncum: ubi primum derivantur rami, notandus diligenter eorum numerus, ac cæteris interea prætermissis, arripiendus unicus, per quem ascendas: post paucos gressus plures occurruntur ramusculi: unicus iterum seligendus, sepositis cæteris: idem in surculorum, idem in frondium, idem in foliorum, & florum, eruptione multiplici præstandum semper, donec in unicum florem, vel folium, exiguum illum viatorem tuum invexeris. Inde ad proximum bivium, vel etiam trivium redeundum, & ad alia subinde, atque alia, donec fronde tota peragrata descendas iterum ad frondium ipsarum derivationem, tum ad divisiones singulas surculorum omnium, ramusculorum, ramorum, initere molestissimo sane, & ambiguitatis ubique plenissimo.

Hæc quidem imago quædam est ineundi laboris, rei adumbrandæ utcumque par, satis exponendæ omnino impar. Neque enim ibi, ubi se surculi, frondesque diviserint, iterum coeunt, novo ambiguitatis fonte, & erroris periculo; quod ipsum si forte aliquando accidat; poteris sane ad postremum florum ascendere unica, & continua via, licet ad novam plurium surculorum conjunctionem deveneris unico peragrato, reliquis adhuc intactis. At hic, ubi e definitione constructiones quasdam erueris, ex iis theoremata demonstraris plura, quaquaversum fœcunda, fere semper ab novam quamdam veritatem educendam, ex illis veluti ramis, & surculis plura simul necessaria sunt, ex quibus ea ita pendet, ut nisi omnia perlustraris, & mente adhuc retineas, illo veluti flore potiri omnino non possis.

En igitur incredibilem sane difficultatem, quam ego, scholiis identidem interjectis, mollire saltem conatus sum, quorum ope quid omittam interea, unde recesserim, quo regrediar, Tyronem admoneo. Illud enim mihi in hisce elementis concinnandis proposui, ut deductionis pateret ordo, & Geometriæ mira indoles, atque arctissimus omnium veritatum nexus transpiceretur utcumque; nam tum demum is patere omnino posset, cum aliis, atque

aliis

aliis definitionibus assumptis, alio, atque alio ordine; veritates eædem deducerentur, quod innumeris sane, & a se invicem in immensum discrepantibus rationibus præstari posset. Illud in mentem venerat, ut hujus meæ methodi quamdam, quemadmodum in familiarum derivationibus fieri solet, arborem designarem, in qua truncum teneret definitio, tria prima problemata ternos ramos: theoremata reliquis propositionibus, corollariis, scholiis contenta abirent in ramusculos, surculos, frondes, ac folia ita, ut a quovis theoremate curvæ quædam lineæ ad definitionem usque traducerentur per illa omnia theoremata numeris paragraphorum, quibus continentur, designata, quibus ad ejus demonstrationem est opus; ubi etiam signis quibusdam denotari poterat, quæ omnibus tribus communia essent Conicis Sectionibus, quæ ad singulas, vel binas pertinerent. Verum arbor ejusmodi ita excrescit, ut tanta amplitudo exigui voluminis mole contineri non possit. Eam parieti affigendam facile sibi quisque efformare poterit, si velit, regressu e singulis theorematis facto, usque ad definitionem ipsam, ac adnotatis diligenter iis, quæ ad absolutam ejus demonstrationem assumuntur jam demonstrata.

Et hæc quidem ad ea scholia pertinent, quibus deductionis series identidem denotatur. In reliquis continentur sane multa adnotatu dignissima. Aliud (num. 18.) proportionis armonicæ proprietates persequitur; aliud (num. 111.) figurarum similitudinem contemplatur, quarum complementum quoddam est determinatio satis elegans puncti communis homologi, quod nisi in infinitum recedat in binis quibusque figuris habetur semper, & unicum, ac rectarum homologarum communium, quarum in inversa similitudine semper habetur unica per id punctum traducta, in directa vero vel omnes ejusmodi sunt, vel nulla; & ea quidem in adjecta dissertatione habetur a num. 328. aliud (num. 12, 102) Conicarum Sectionum transformationem in rectas, in circulum, in se invicem persequitur: aliud (num. 102, 280, 388, 435, 442) ipsarum constructiones multiplices, ac determinationes exponit: aliud (num. 280) curvaturas determinat, & plures tangentium, ac secantium proprietates pro diversa positione puncti, per quod

dican-

ducantur, definit. Aliud (num. 270) docet inventionem binarum mediarum continue proportionalium inter binas rectas datas, & arcus circularis, sive anguli trisectionem, quam omnino haberi non posse per Euclideam Geometriam satis ibi quidem accurate, ni fallor, evinco, & ipsius repugnatiæ fontem aperio: aliud (num. 337) longe alium ordinem exhibet, quo elementa hæc ipsa diggeri potuissent: aliud (num. 343) similium Ellipsium, & Hyperbolarum, ac æqualium Parabolarum proprietatem evolvit, qua aliæ respectu aliarum fungantur vicibus asymptotorum: aliud (num. 536) varias circuli Sectionem Conicam contingentis mutationes considerat, donec demum is in osculatorem desinat. Accedit iis, ut alia breviora scholia prætermittam, unicum generale geometricum lemma (num. 204) de tribus rectis ad punctum quoddam convergentibus, & parallelas rectas intercipientibus, quod mihi summæ pluribus in locis extitit utilitatis.

Hisce omnibus absolutis, quæ pertinent ad harum curvarum considerationem in plano, ad solidorum sectiones gradum feci. Definitis Cono (num. 546), Cylindro (num. 590), Conoide (num. 516), sectionum formas evolvi corollariis quibusdam, ac scholia suo loco disposui, quibus mira in primis trasformationum geometricarum indoles continetur. Ibi autem notatu omnino dignissima sunt, quæ occurrunt (num. 653) in solido genito conversione Hyperbolæ circa axem conjugatum, in quo (num. 666) quædam etiam puncti cujusdam adest veluti discissio, & crurum permutatio, post recessum Hyperbolæ in rectas lineas, mira sane, & ad continuitatis legem illustrandam aptissima. Verum, quod ad ejusmodi transformationes pertinet, in adjecta dissertatione multo est uberius pertractatum.

Dissertatio autem ipsa aliquanto longior, quam initio arbitrarer, evasit; at ea in Geometriæ arcana intimiora irrumpere meditanti facem præferet, & viam sternet mirum in modum. Multa autem continet, quæ licet scitu sane dignissima, ego quidem nusquam alibi offendi, multa, quæ licet alibi etiam occurrant sæpe, nusquam ego quidem ad certos reperi redacta canones, & geometrica methodo pertractata. Ea tamen pro novis venditare non audeo; cum mihi quidem inscitiæ meæ culpa, nova esse possint, licet fortasse sint apud Litterariam Remp. vetustissima.

Dissertatio ipsa de Locorum Geometricorum transformationibus agit. Ubi nimirum problema quodpiam generaliter solveris; mutata nonnihil datorum dispositione; plerumque ipsa constructio mutari plurimum debet; quædam summæ in differentias abeunt, quædam rectarum, & angulorum directiones mutantur, quidam termini evadunt impossibiles, quidam in infinitum excrescunt ita, ut intersectio, quæ ad problematis solutionem necessaria erat, nusquam sit, ut ubi binæ rectæ convergentes abeunt in parallelas, quidam circuli, abeunte centro in infinitum, mutantur in rectas lineas; ac alia ejusmodi accidunt sane multa. In iis autem constantissimas quasdam leges observat Geometria, quæ nihil usquam operatur per saltum. Sed in ejusmodi continuitate servanda occurrunt sæpe quidam progressus in infinitum, & quidam transitus per infinitum, qui secum trahunt quædam, quæ haud suo, an alio melius nomine appellari possint, quam mysteriorum quorundam infiniti, quæ tamen eo excrescunt, ut in vera demum absurda videantur recidere.

Hoc argumentum in ea mihi dissertatione evolvendum constitui, quo successu, videbit, qui legerit: nihil autem uspiam, præter communia Geometricæ, & mea Conicarum Sectionum elementa, requiritur ad absolutam omnium intelligentiam. Primo quidem negativas quantitates in Geometria considerandas esse, ut in Algebra; geometrica methodo ostendo, & ubi directio quantitatum mutatur, mutationum numerum parem in quantitatibus determinantibus, evinco, relinquere directionem quantitatis determinatæ; imparem vero numerum eandem mutare; unde mihi imaginariæ quoque quantitates profluunt in lateribus quadratorum, quæ in negativa migrarint. Eorum vero omnium plura exempla profero e simplici Geometria admodum manifesta.

Ex theorematis demonstratis deduco a num. 693 formam curvarum omnium, quæ ad sublimiores Parabolas, vel Hyperbolas inter asymptotos reducuntur, in quibus ordinata est in aliqua ratione rationali abscissæ, quarum

cur-

curvarum geometricam accuratam constructionem profero per puncta, quæ cum erutis ex positivorum, negativorum, imaginariorum legibus mirum in modum consentiunt. Tum a num. 714 ad continuitatis legem considerandam gradum facio, quam ubi quantitates è positivis transeunt in negativas, religiosè observari demonstro. Transitum autem ejusmodi, ostendo fieri, tam per nihilum, quam per infinitum, ubi ingens quoddam infiniti mysterium se prodit. Recta nimirum linea, quæ utrimque in infinitum producta in illis quibusdam infinitis distantiis oppositis connectitur quoddamodo, & in se ipsam redit, tamquam si esset circulus quidam infinitus, cui rectam lineam æquivalere demonstro, ac eundem nexum, & in cruribus infinitis curvarum evinco manifestissimum, plurima exempla proferens, & præcepta quædam adjiciens, quæ pertinent ad ejusmodi transitus. Illud autem imprimis ostendo a num. 729, ubi devenitur ad nihilum, vel ad infinitum, aliquando quidem transitu per eum limitem facto, quantitatem abire in negativam, aliquando vero inde regredi retro ex eadem parte, cujus exempla profero plura, & inde crurum seu parabolici, sive hyperbolici generis, quorum naturam doceo, regressus ex infinito multiplices, ac cuspidum naturam, & quædam alia, quæ ad tangentes, & curvaturam pertinent, evolvo, quæ sane omnia sunt ad continuitatis legem, & Geometriæ indolem cognoscendam aptissima.

Accedit alius quendam rectæ per modum circuli infiniti in se redeuntis considerata usus, quem contemplor a num. 751, vi cujus quantitatem, quæ post negativam, & binas positivas sit quarta, non negativam revera esse debere, demonstro, sed veluti plusquam infinitam, & datis binis punctis in recta infinita, ejus segmentum iis punctis interceptum, ostendo, esse duplex, alterum finitum, alterum per infinitum traductum, quorum primum bifariam secetur in puncto quodam datis interjacente, secundum in infinito illo ipso, in bini infiniti tractus rectæ a binis illis punctis utrinque in infinitum productæ connectuntur quodammodo, & copulantur, quæ quidem consideratio ingentis est usus in Sectionum Conicarum analogia consideranda. Tum a num. 775 migrationem persequor a

statu

ſtatu reali ad imaginarium, qui numquam haberi poſſit, niſi quantitas vel ad nihilum deveniat, vel ad infinitum, & in utroque caſu bina puncta collidantur quodammodo, ac in ſe mutuo irruant velocitate vel infinities majore, quam alibi, vel infinities minore, quod analogiam etiam quamdam exhibet haud ſane inelegantem ejus migrationis cum vero viventium interitu. Ibidem autem in cono ſecto per planum mobile quoddam, ſeries curvarum naſcentes, in ſe mutuo transformatas, ac in imaginarietatem deſinentes oſtendo.

His expoſitis, & tanquam materia quadam novi cujuſdam ædificii præparata, ad ordinandam transformationum theoriam progredior num. 760, quam duplicis analogiæ definitione, & 11 Canonibus complector. Analoga dico, puncta, quæ eadem conſtructione petita ab interſectionibus eorumdem Locorum Geometricorum definiuntur: lineas analogas, quæ punctis analogis, ſuperficies, quæ lineis, ſolida, quæ ſuperficiebus analogis terminantur. Bina autem diſtinguo analogiæ genera primarium alterum, ubi etiam directio ſervatur, alterum ſecundarium, ubi ea contraria exiſtit. Canon primus num. 764 pertinet ad quantitates, quæ primario analogiæ genere ſunt analogæ, in quibus nulla mutatio fit, niſi quæpiam quantitates per infinitum traducta pluſquam infinitæ cenſendæ ſint, ubi etiam infiniti myſteria quædam occurrunt. Secundus num. 772 ad eas pertinet, quæ ſecundario genere analogiæ ſunt analogæ, ubi oſtenditur, quando ſummæ in differentias migrare debeant, & modi argumentandi mutentur. Tertius num. 777 mutationes directionis exponit, quæ in quavis proportione utcumque compoſita nonniſi numero pari haberi poſſint. Quartus num. 790 ad angulorum mutationes pertinet, quæ laterum mutationem conſequuntur. Quintus num. 799 tranſitum continet anguli e poſitivo in negativum, mutata hiatus directione, ſive ejuſmodi mutatio fiat tranſeundo per nihilum, ſive per duos rectos. Sextus num. 807, quadrati negativi latera determinat imaginaria, & mediam inter binas quantitates, alterius tantum directione mutata, imaginariam, binas autem medias reales magnitudine æquales, directione contrarias, qui quidem Canon in Sectionibus Coni-

cis

tis considerandis incredibilem usum habet, ut mox ostendam.

Septimus num. 835 *ad quantitates transit, quæ in nihilum abeunt, vel ita in infinitum, ut saltem alter limes nusquam jam sit, quod si in aliqua proportione binis terminis manentibus finitis contingat uni e reliquis, continget idem & alteri, nisi forte, qui manent, vel extremi fuerint, vel medii, quo casu abeunte altero in nihilum, alter in infinitum abire debet. Octavus num.* 839 *est de rectis, quæ e convergentibus parallelæ fiunt, intersectione ita in infinitum recedente, ut nusquam jam sit, quarum & angulus ex altera parte evanescit, ex altera desinit in binos rectos. Nonus (num.* 853*) præscribit, quid agendum sit, ubi vertice trianguli abeunte in latus aliquod, rectæ, quæ se prius intersecabant, superponuntur. Decimus circuli peripheriam, docet (num.* 858*), abire in rectam, ubi altero radii termino extante, centrum ita in infinitum recedat, ut nusquam jam sit. Demum undecimus (num.* 862*) rationem definit, quam habere debeant binæ rectæ in infinitum excrescentes, quæ evadit æqualitatis ratio, ubi differentia finita maneat, ubi autem ea etiam in infinitum excrescat, quævis esse potest, nulla, infinita, æqualitatis, vel finitæ inæqualitatis cujuslibet.*

Porro singuli Canones demonstrantur accurate: singulorum exempla ex iis, quæ præmissa fuerant proferuntur: singula ad Conicarum Sectionum naturam, & analogiam contemplandam applicantur, ac eorum usus in hisce meis earundem elementis concinnandis ostenditur. Plura sane occurrunt adnotatu digna, ut ea, quibus num. 784 *ratio redditur ex infiniti mysteriis quibusdam repetita, cur etiam ubi quantitates per infinitum traductæ abeunt in negativas, adhuc subtrahendæ sint; atque alia ejusmodi sane multa; illud in primis non omittendum, quod pluribus in locis ostenditur, potissimum vero, ubi secundaria analogia exponitur, & ubi fœcundissimus ille sextus Canon ad Conicas Sectiones applicatur. Nimirum ubi Ellipsis in Hyperbolam transit per Parabolam, axi finito Elipseos, & centro non succedit analogus primario analogiæ genere axis finitus Hyperbolæ, sed axis* *per infinitum traductus, & finito illius centro, non centrum hujus finitum, sed punctum quoddam in infinito delitescens. Diametri autem secundariæ Hyperbolæ nullo analogiæ genere analogæ sunt diametris Ellipseos, sed horum quadrata negativè sumpta quadratis illorum negativis æquantur, quorum quadrata idcirco secundario analogiæ genere sunt analoga illorum quadratis, latera vero, quæ lateribus analoga essent, imaginaria sunt. Id ipsum manifesto ibidem evincitur. Inde autem deducitur, quæ proprietates communes esse debeant Ellipsi, & Hyperbolæ, quæ ab altera ad alteram transferri nequeant. Inde nimirum patet, cur Ellipsis finito centro cavitatem, Hyperbola convexitatem obvertat: cur axis transversus, & quævis conjugata diameter in Ellipsi ad perimetrum terminetur, axis conjugatus Hyperbolæ finitus ille, & secundariæ diametri omnes ipsi perimetro nusquam occurrant: cur asymptotis, & tam multis elegantissimis asymptotorum proprietatibus Ellipsis carere debeat; ac alia ejusmodi evolvuntur sane multa earum curvarum discrimina, atque illud generaliter ostenditur, proprietates, quæ a solis diametris conjugatis pendeant, nusquam esse debere communes, nec communi demonstratione, & constructione erui posse; quæcumque autem ab earum quadratis pendeant, ea communia fore omnia, si quadrata diametrorum secundariarum Hyperbolæ habeantur pro negativis. Exempla eorum proferuntur plurima, quæ ad harum curvarum naturam cognoscendam & meorum elementorum commendationem plurimum conferunt.*

Porro ubi in fine postremi Canonis de rationibus agitur quantitatum abeuntium in infinitum, ibi jam demum incipiunt ipsa infiniti mysteria migrare in absurda, de quibus a num. 878 ad finem usque ita agitur, ut infinitum ipsum extensum pro impossibili haberi omnino debere videatur. Ratio autem impossibilitatis ipsius ex ipsa Conicarum Sectionum natura demum eruitur, quæ ejusmodi invenitur, ut infiniti ipsius natura simplicitatem infinitam requirat, quæ cum infinitis partibus ab omni quantitatum excrescentium genere requisita conjungi omnino non potest; unde demum

ad

ad ipsam illam Dei O. M, immunem ab omni compositione simplicitatem immensam cum infinitate conjunctam contemplandam traducimur, in qua ipsa contemplatione fusior hæc dissertatio tandem aliquando abrumpitur.

Hæc universi hujus operis est Synopsis quædam, in qua prætermissis quamplurimis, præcipua tantummodo capita innuuntur. Consequetur aliud agens de infinitis, & infinite parvis, quæ mihi indefinita sunt, quorum naturam explicabo, ordines diggeram, elementa tradam geometrico rigore demonstrata, & ex iis ad curvarum generales proprietates gradum faciam, cuspides, flexus contrarios crura infinita, contactus, oscula, evolutas, maximorum, & minimorum theoriam, atque alia ejusmodi evolvam, ac singulares præcipuarum, & maxime utilium curvarum proprietates deducam, ac demonstrabo.

Illud unum hic demum monendum est. Si quis in hoc volumine vel non possit, vel nolit singula persequi, & præcipuas tantummodo, ac maxime necessarias Sectionum Conicarum proprietates inquirat; is & universam dissertationem, & scholia fere omnia, & plurima etiam Corollaria omittere poterit sine demonstrationis, ac deductionis damno. Ita enim præcipua quædam inter se copulavi eam ipsam ob causam, ut reliquis non indigerent. Vix autem paginas 100 *requirunt præcipuæ ejusmodi proprietates inter se satis arctè connexæ. En numerorum seriem, quam reliquis omissis poterit persequi, in qua, ubi binis numeris puncta interseruntur, illud significatur, intermedios numeros omnes percurrendos esse.*

1 ... 3, 6 ... 11, 18 ... 30, 34 ... 47, 54, 56, 57, 62 ... 84, 87, 93, 128 ... 137, 140 ... 144, 149 ... 159, 164 ... 171, 173 ... 183, 189 ... 195, 198 ... 201, 204 ... 213, 221 ... 231, 242 ... 247, 256 ... 258, 260, 261, 299, 300, 305 ... 308, 328, 331, 351 ... 355, 357, 358, 363, 364, 397, 398, 402 ... 407, 411 ... 414, 436 ... 441, 457 ... 461, 495, 497, 503 ... 508, 546, 550 ... 568, 590 ... 605, 615 ... 643.

Huc usque habentur, quæ pertinent ad Conicas Sectiones consideratas vel in plano, vel in cono. Si Cylindri, & Conoidum Sectiones addere libeat, numeros 590 ... 605, 615 ... 643, superioribus addat, & voti penitus compos fiet.

SECTIONUM CONICARUM
ELEMENTA.
DEFINITIO I.

1. *S*I *ex omnibus punctis* P *cujusdam lineæ ducta* PD *perpendiculari ad rectam* AB *indefinitam positione datam, & alia rectæ* PF *ad punctum* F *datum extra ipsam* AB, *fuerit semper* FP *ad* PD *in ratione data; lineam illam dico* Sectionem Conicam, Ellipsim, Parabolam, *vel* Hyperbolam, *prout illa ratio fuerit minoris inæqualitatis, æqualitatis, vel majoris inæqualitatis: rectam* AB Directricem, *punctum* F, Focum, *rationem illam datam*, Rationem determinantem; *rectam* PD, Ordinatam directrici ad angulos rectos, *rectam* FP, Foci radium. F. 1.

Coroll. I.

2. *Si in quovis alio angulo dato ordinentur directrici* PH, *semper ratio cujusvis radii foci ad suam ordinatam in angulo illo dato erit constans & data: nimirum composita ex ratione determinante, & ratione sinus inclinationis ad radium.*

3. Nam ratio FP ad PH componetur ex ratione FP ad PD; quæ est ratio determinans, & ratione PD ad PH, quæ ob angulum PDH rectum est ratio sinus anguli PHD ad radium (num. 88. Trig.)

Coroll. 2.

4. *Et si in quadam linea ratio cujusvis* FP *jungentis quodvis ejus punctum* P *cum dato puncto* F *ad suam* PH *in dato angulo ordinatam datæ rectæ non transeunti per* F *fuerit in ratione data; erit illa linea Sectio Conica, & ejus ratio determinans componetur ex illa ratione constanti, & ex ratione radii ad sinum inclinationis.*

5. Ducto enim perpendiculo PD; ratio FP ad PD componetur ex ratione FP ad PH; & PH; ad PD; quarum prima datur ex hypotesi; secunda est ratio radii ad illum sinum.

Coroll. 3.

6. *Bini radii foci erunt ad se invicem, ut suæ ordinatæ in quovis angulo communi.*

7. Cum enim sit FP ad PH, ut F*p* ad *ph*; erit alternando FP ad F*p*, ut PH ad *ph*.

Coroll. 4.

F.3.4 8. *Si recta quævis occurrens foco in* F, *directrici in* Q *occurrat Sectioni Conicæ in binis punctis* P, p, *altero ex iis jacente inter ipsa puncta* F, Q *altero ad partes utriuslibet; erit divisa in punctis* p, F, P, Q *in proportione harmonica.*

9. Erit enim F*p* ad FP, ut *p*Q ad PQ. Sunt autem in fig. 3. in tribus rectis *p*Q, FQ, PQ rectæ *p*Q, PQ extremæ rectę vero F*p*, FP differentiæ extremarum a media; at in figura 4. trium F*p*, FQ, FP rectę F*p*, FP extremæ, rectæ *p*Q, PQ extremarum differentiæ a media. Igitur utrobique erunt extremæ ad se invicem, ut pariter ad se invicem differentiæ extremarum a media, quę est ipsa notio proportionis harmonicę.

Coroll. 5.

10. *Ratio radii foci ad ordinatam in quovis angulo obliquo erit in Ellipsi, & Parabola ratio minoris inæqualitatis, in Hyperbola minoris inæqualitatis, æqualitatis, vel majoris inæqualitatis, prout radius ad sinum inclinationis habuerit rationem majorem, æqualem, vel minorem ratione determinante, quam quidem inclina-*

tionum

tionum eam , quæ rationem exhibet æqualitatis ; dicemus Inclinationem æqualitatis, *& ejus angulum acutum cum directrice ; angulum* Rationis æqualis ; *sive angulum* Æqualitatis.

11. Nam in triangulo rectangulo PDH semper basis PH major est latere PD. Adeoque cum PD in Ellipsi sit major , quam PF (num. 1.) , ac in Parabola æqualis, erit semper in iis PH major , quam PF. At in Hyperbola, in qua PD est minor ; quam PF, prout ratio PH ad PD fuerit major , æqualis , vel minor respectu rationis PF ad PD, erit quoque PH major, æqualis, vel minor respectu PF. F. 1. 2.

SCHOLIUM I.

12. Lineas hujusmodi appellavimus Sectiones Conicas , quia deinde demonstrabitur , cono utcumque secto non per verticem , obvenire hujusmodi lineas, ut pariter Ellipsis , Parabola , & Hyperbola nomen accipiunt Græca origine in communi methodo tractandi Sectiones Conicas , a quodam defectu , æqualitate , vel excessu , qui deinde demonstratur . Quæcumque sit nominis ratio , modo semper in ea significatione accipiatur , in qua in definitione usurpatum est; nihil interest . Ellipseos autem defectus ille , Parabolæ æqualitas, & Hyperbolæ redundantia in hac nostra methodo etiam ex ipsa definitione constat; cum ratio determinans in prima sit minoris inæqualitatis , in secunda æqualitatis , in tertia majoris inæqualitatis .

13. Porro mirum sane , quam immediate ex hac proprietate, quam assumpsimus pro definitione, & quam alij in Ellipsi saltem , & Hyperbola postremam fere demonstrare solent (nam pro Parabola hanc ipsam assumpsit etiam Hospitalius) præcipuæ Sectionum Conicarum proprietates fluant , & quidem , quæ iis communes sunt , communi semper demonstratione eruuntur vinculo quodam , ac miro nexu , quo Geometriç

indolès, & vis ſane incredibilis ſponte incurrant in oculos.

14. Præterea multo expeditior harum linearum conſideratio Tyroni evadit, ſi eæ in plano conſiderentur, quod & ipſe Hoſpitalius præſtitit, & alii multi, quam ſi ſolidorum Geometria opus ſit, & variis planorum in cono interſectionibus.

15. Demum hæc definitio ita Conicis Sectionibus eſt propria, ut eas quodammodo & a circulo diſtinguat, qui cæteroquin inter Ellipſes enumerari debet, & è Cono Secto, ut infra videbimus, ipſe etiam prodit, ſive is ſecetur ſectione baſi parallela, ſive alia quadam, quæ dicitur ſubcontraria. Si enim Ellipſis in circulum abeat, directrix, ut patebit paullo inferius, abit in infinitum, nec uſquam jam eſt.

16. At ſi directrix tranſiret per ipſum punctum datum pro foco, nullum aliud punctum inveniri poſſet, cujus diſtantia ab ipſo foco ad perpendiculum in directricem ductum haberet rationem datam, ubi ea ratio eſt minoris inæqualitatis. Sed ſi ratio eſſet æqualitatis, ſatisfacerent quæſtioni puncta omnia rectæ directrici perpendicularis ductæ ex ipſo puncto dato in utramvis plagam; & ſi ratio eſſet majoris inæqualitatis, ſatisfacerent puncta omnia binarum rectarum hinc inde inclinatarum, ut radius ad ſinum inclinationis eſſet in ratione determinante.

F. 5. 17. Nam ſi punctum datum in directrice AB ſit F, quodvis aliud punctum vel jacet in recta *h*FH perpendiculari ipſi AB ducta per F, ut R, & eſt FR tam diſtantia a puncto F, quam perpendiculum in directricem demiſſum, adeoque ea duo æquantur; vel jacet extra, ut Q, & ducto perpendiculo QZ in directricem, ſemper erit ipſo major diſtantia QF baſis trianguli rectanguli QZF. Quare nuſquam haberi poteſt in eo caſu ratio minoris inæqualitatis. Ratio autem æqualitatis habetur in ipſa recta perpendiculari HF*h*, in qua ſumptis ubicumque punctis R, & *r*, eſt ſemper diſtantia FR, vel F*r*, ad perpendiculum RF, vel *r*F in ratione æqualitatis. Ac demum ſi ratio ſit majoris

æquainæqualitatis sumpto in perpendiculari FH segmento EF ad arbitrium, ductaque per E recta *u*EV indefinita parallela directrici, centro F intervallo rectæ, quæ ad EF, sit in ratione data determinante, inveniantur in ipsa bina puncta *u*, & V, ac ducantur per ea, & per F rectæ indefinitæ G*g*, I*i*, & quodvis punctum utriuslibet, ut Q, *q*, satisfaciet quæstioni. Erit enim FQ ad QZ, ut FV ad EF in ratione data, & eadem est demonstratio pro *q*. Est autem ratio illa determinans FQ ad QZ, ut radius ad sinum inclinationis QFZ. Quare patent quæcumque fuerant proposita.

SCHOLIUM II.

18. IN Coroll. 4. invenimus divisionem harmonicam, quæ in Sectionibus Conicis potissimum sæpe occurrit, & in Geometria elegantissimas proprietates habet. Præcipuas quasdam, quarum usus nobis occurret, hic exponemus.

19 *Si quatuor puncta* A, B, C, D, *ita disposita sint, ut distantiæ* AB, CB, *binorum* A, C *alternatim sumptorum ab altero e reliquis* B *eandem rationem habeant, ac distantiæ eorundem* AD, CD *ab altero* D, *erunt in proportione harmonica tres distantiæ utriuslibet extremi a reliquis tribus, nimirum tam* AD, BD, CD *quam* AB, AC, AD. F.6.

20. Primum patet: nam AD, DC erunt primi ternarii extremæ, & AB, BC extremarum differentiæ a media. Secundum facile deducitur. Cum nimirum sit AB ad BC, ut AD ad DC; erit & alternando AB ad AD, ut BC ad DC. Sunt autem AB, AD extremæ secundi ternarii, BC, DC extremarum differentiæ a media AC.

21. Patet autem eadem demonstratione, non posse proportionem harmonicam terminari ad alterum extremum D, quin simul terminetur ad alterum A.

22. *Si jam intervallum binorum alternorum quorumvis* AC *dividatur bifariam in* R, *erunt* RB, RC, RD *in ea continua ratione geometrica, quam habet proportio*

portio harmonica trium quantitatum terminatarum ad extremum A *assumptum pro bissectione*, *nimirum* AB *ad* AD, *vel* BC *ad* CD.

23. Assumptis enim R*b*, R*d* æqualibus RB, RD, erunt & A*b*, A*d* æquales CB, CD, adeoque erit *b*B rectarum AB, BC differentia, AC earum summa; ipsa AC, rectarum AD, DC differentia, *d*D earum summa. Cum igitur sint BC ad CD, & BA ad DA in eadem ratione, erit in eadem ratione & antecedentium differentia *b*B ad consequentium differentiam AC, & illorum summa AC ad horum summam *d*D; (Cap. 2. Arit. num. 13.) ac sumptis dimidiis, erit RB ad RC, & RC ad RD in eadem ratione.

24. *Contra vero si fuerint* RB, RC, RD *in continua ratione geometrica*, *& mediæ* RC *assumatur æqualis* RA *ad partes oppositas*, *puncta*, A, B, C, D *constituent binas proportiones harmonicas quantitatum terminatarum ad* D *&* A, *& ratio illa* RB, *ad* RC, *vel* RC *ad* RD *erit eadem*, *ac ratio proportionis terminorum terminatorum ad* A, ut facile patebit regressu demonstrationis ipsius.

25. *Datis binis punctis alternis* A, C, *& ratione proportionis harmonicæ*, *habebuntur facile*, *& reliqua duo*, *medium quidem secando* AC *in ea ratione in* B, *extremum secando* AC *bifariam in* R, *& sumendo* RD *tertiam proportionalem post* RB, RC. Patet autem ex ipsa demonstratione debere D assumi ad partes B respectu R, quod quidem eo recedet magis a C, quo ratio data accedet magis ad rationem æqualitatis, puncto B eo pariter magis accedente ad R, quod quidem punctum abibit in ipsum R, punctum vero D ita in infinitum recedet, ut nusquam jam sit, ubi ratio data evaserit ratio æqualitatis.

26. *Quotiescunque quatuor puncta* A, B, C, D, *constituunt proportionem harmonicam*, *secta bifariam in* R *distantia binorum alternatorum* AC, *erunt geometrice proportionales quatuor distantiæ ab extremo* D *in bisectione non assumpto*, *nimirum* AD *ad* RD, *ut* BD *ad* CD,

CD; & quatuor a puncto B *ejus alterno, nimirum* AB *ad* RB, *ut* DB *ad* CB.

27. Cum enim (num. 22.) sit invertendo RD ad RC, sive ad RA in illa ratione DC ad CB, erit priorum summa AD ad primam RD, ut posteriorum summa DB ad tertiam DC. Cum vero sit invertendo DC ad CB, ut RC, sive RA ad RB; erit componendo DB ad CB, ut AB ad RB.

28. *Si assumpta pro diametro distantia* AC *binorum e quatuor punctis constituentibus proportionem harmonicam alternatim sumptorum, describatur circulus, & ad quodvis peripheriæ punctum* E *ducantur ex reliquis binis punctis rectæ* BE, DE, *erunt eæ ad se invicem semper in eadem ratione* BC *ad* CD, *sive* BA *ad* AD, *recta* CE *earum angulum* BED *secabit bifariam, & recta* AE *angulum* BEG, *quem altera* BE *continet cum altera* DE *producta.*

29. Ductis enim BF, BG parallelis AE, CE, & occurrentibus rectæ DE in F, & G, erit ob parallelas DE ad EF, ut DA ad AB, nimirum ob proportionem harmonicam ut DC ad CB, sive ob parallelas ut illa eadem DE ad EG. Quare æquales erunt GE, EF, angulus autem GBF, quem continent rectæ GB, BF æquatur angulo, quem continent AE, EC ipsis parallelæ qui rectus est in semicirculo. Igitur & is rectus erit; & circulus centro E diametro GF descriptus transibit per B, adeoque EB æqualis erit tam EF, quam EG, & habebit, ut illæ, ad ED eam rationem, quam BA ad AD, vel BC ad CD. Anguli vero BEC, FEC æquales, ille alterno EBG, hic interno & opposito G æqualibus ad basim trianguli isosceli BEG æquabuntur inter se; & eodem argumento AEB, AEG æquales angulis EBF, EFB.

30. *Contra vero si recta* CE *secet bifariam angulum ad* E *trianguli* BED, *&* EA *ipsi perpendicularis occurrat diametro in* A, *quatuor puncta* A, B, C, D *constituent proportionem harmonicam, cujus ratio in ternario*

ter-

terminato ad D *erit eadem, ac ratio laterum* BE, ED *ipsius trianguli*. Ducta enim BG parallela CE, anguli EBG, EGB erunt æquales æqualibus BEC, DEC, adeoque & inter se & EG, EB æquales, ac facta EF æquali ipsis EG, EB, angulus GBF erit rectus, adeoque BF congruet cum recta rectæ AE parallela, quæ ibidem rectum angulum continere debet. Erit igitur DA ad AB, ut DE ad EF, sive ut ipsa DE ad EG, nimirum ut DC ad BC. In hoc casu etiam recta EA secabit bifariam angulum BEG, & pariter si recta EC secante bifariam angulum BED, recta EA secet bifariam angulum BEG, puncta A, B, C, D proportionem harmonicam constituent.

F. 8. 31. *Demum si in eadem circulo ducatur per* B *chorda* EH *perpendicularis diametro, rectæ quidem* DE, DH *contingent circulum in* E, *&* H, *quævis autem recta in earum angulo ducta ex* D, *& occurrent chordæ ipsi in* L, *circulo in* I, *&* M *secabitur in punctis* M, L I, D, *in proportione harmonica*.

32. Primum patet ex eo, quod (num. 22.) erit RB ad RC, sive ad RE, ut hæc ad RD, ac proinde triangula RBE, RED ob angulum ad R commune similia erunt, & angulus RED recto RBE æqualis: adeoque ED perpendicularis radio ER erit tangens, & eadem est demonstratio pro recta DH.

33. Secundum sic demonstratur: Ductis per I, & M chordis I*i*, M*m* parallelis EH, ac proinde perpendicularibus ad DA, & bifariam secus, quæ occurrant rectis DE, DH in F, G, & *f*, *g*, patet ipsas quoque F*f*, G*g* bifariam debere secari ab ipsa DA, adeoque fore F*i* æqualem I*f*, & G*m* æqualem *g*M, ac rectangula FI*f*, GM*g* rectangulis IF*i*, MG*m*, Porro erunt FI ad GM, & I*f* ad M*g*, ut DI ad DM: adeoque quadratum DI ad quadratum DM ut rectangulum FI*f*, seu IF*i*, sive quadratum tangentis EF ad rectangulum GM*g*, sive MG*m*, vel quadratum GE: adeoque ut quadratum IL ad quadratum LM. Erit igitur DI ad DM, ut LI ad LM ut oportebat.

PRO-

PROPOSITIO I. PROBL.

34. *Dato foco, directrice, & ratione determinante, invenire omnia Sectionis Conicæ puncta.*

35. Ducatur per focum F recta HF*h* indefinita occurrens directrici AB ad angulos rectos in E, ponaturque H ad partes F. Capta in directrice versus partem utramlibet, ut versus A, recta EK æquali EF ducatur per F, & K recta indefinita T*t*, posito T ad partes F. Ducatur per F recta perpendicularis ipsi EF, ac in ea capiantur FV, F*u*, quæ sint ad FE in ratione determinante, posito V in angulo FKE, quas quidem patet (num. 1.) fore minores FE, in Ellipsi, æquales in Parabola, majores in Hyperbola. Per E, & *u* ducatur recta indefinita G*g*, posito G circa directricem ad partes F, quæ necessario occurret rectæ T*t* citra directricem inter K, & F alicubi in L; tum per E, & V recta indefinita I*i*, posito I citra directricem ad partes F, quam patet in parabola in fig. 10. debere esse parallelam ipsi T*t* (cum nimirum EK, VF ex una parte parallelæ sint, & ex alia æquentur eidem FE, adeoque & inter se) ac proinde in Ellipsi in fig. 9. debere occurrere ipsi T*t* alicubi in *l* citra directricem ad partes T ob FV ibi minorem, quam FE; & contra in Hyperbola (fig. 11.) debere ipsi T*t* pariter occurrere, sed ultra directricem alicubi in *l*. Demum ex punctis L, *l* ducantur rectæ directrici parallelæ, occurrentes ipsis G*g*, H*h*, I*i* in L, M, N, *l*, *m*, *n*. F.9. 10. 11.

36. His ita semel præparatis, per quodvis punctum S rectę T*t* jacens in fig. 9. intra segmentum L*l*, in fig. 10. ab L versus T, in fig. 11. extra segmentum L*l*, ducta recta parallela directrici, quæ occurrat rectis G*g* H*h*, I*i* alicubi in O, R, Q, centro F intervallo RQ, vel RO, quæ ipsi æqualis erit, inveniantur in ipsa OQ bina puncta *p*, P: Inveniri autem semper poterunt bina, ac bina tantum, & omnia, ac sola puncta ita inventa una cum punctis M, *m* in Ellipsi, & Hy-

Hyperbola, & cum puncto M in Parabola erunt ad Sectionem Conicam quæsitam.

37. In primis enim si centro F intervallo RQ, vel RO in recta OQ directrici parallela inveniatur punctum P, vel *p*, id esse debet ad quæsitam Sectionem Conicam, & si sit, ita invenietur. Ducta enim PD perpendiculari ad directricem, adeoque parallela RE, cui proinde erit æqualis, erit FP ad PD, ut RQ, vel RO ad RE, sive ob *u*V, OQ parallelas FP ad PD, ut FV, vel F*u* ad FE, nimirum per constructionem in ratione determinante; unde etiam patet ob FV, F*u* assumptas æquales fore etiam æquales RQ, RO. Si autem P fuerit ad Sectionem Conicam, erit contra FP, ad PD, ut FV, vel F*u* ad FE; adeoque FP ad PD ut RQ, vel RO ad RE æqualem PD: adeoque oportebit FP esse æqualem RQ, vel RO, & punctum P inveniri centro F, radio RQ; & eadem est demonstratio pro puncto *p*.

38. Porro per quodvis punctum S rectæ T*t* ducta ORQ parallela directrici, invenientur centro F intervallo RQ bina puncta P, *p* hinc inde ab R, vel unicum congruens cum R, vel nullum, prout RQ fuerit major, vel æqualis, vel minor respectu FR. Nam EFR ipsi OQ perpendicularis est, cum sit perpendicularis directrici AB; adeoque circulus centro F descriptus, transcurrit ultra OQ, eamque secat in binis punctis hinc inde a perpendiculo FR, vel contingit in R, vel ad eam non pertingit.

39. Est autem FR semper æqualis RS, cum angulus FRS sit rectus, & ob KE, FE æquales, ac angulum KEF rectum, sit semirectus KFE, adeoque & SFR. Ipsa vero RS, assumpto S intra limites enunciatos in constructione, erit semper pars ipsius RQ, vel RO, adeoque minor ipsis: abeunte S in L, vel *l*, cum ipsis congruet: assumpto vero S extra limites enunciatos, erit è contrario RQ, vel RO pars ipsius RS, adeoque RS ipsis major, quod quidem admodum manifestum erit in figuris 12, 13, 14.

40. Nam

40. Nam in fig. 12. in Ellipsi tota linea *l*T jacebit extra angulum GEI, adeoque puncto S assumpto in *l*T, erit RQ pars ipsius RS. Quod si S assumeretur in *l* congruerent ibi puncta Q, S. Tum tota *l*L jacet intra angulum GEI, adeoque assumpto S in *l*F, est RS pars ipsius RQ; abeunte S in F, ea evanescit; assumpto S in FL evadit RS pars ipsius RO, abeunte verò S in L, rursus conveniunt S, O. At tota L*t* jacet extra angulum GEI, & extra ipsi ad verticem oppositum *g*E*i* ita, ut assumpto S in LK, sit RO pars ipsius RS, abeunte S in K, evanescat RO, assumpto S in K*t* sit iterum RQ pars RS. F. 12. 13. 14.

41. In fig. 13. in Parabola eadem prorsus accidunt, cum eo solum discrimine, quod ob T*t*, I*i* parallelas nusquam habetur earum concursus *l*, adeoque tota indefinita LT jacet intra angulum GEI, tota L*t* extra ipsum, & extra *g*E*i* ipsi ad verticem oppositum: ac proinde per totam LT est RS pars RQ, vel RO, per totam L*t* contra RO, vel RQ pars RS.

42. Demum in fig. 14. in Hyperbola tota pariter LT jacet intra angulum GEI, jacet autem *l* ultra directricem, & tota quidem L*l* jacet extra angulos GEI, *g*E*i*, sed tota *lt* intra *g*E*i* jacet; adeoque per totam FT est RS pars RQ, per FL pars RO, per LK contra RO pars RS, per K*l* vero RQ pars RS, & per totam *lt* rursum RS pars RQ.

43. His omnibus perspectis patet, assumpto S in fig. 9. intra L*l*, in fig. 10. per totam LT, in fig. 11. per totas LT, *lt* inveniri in recta directrici parallela bina puncta ad Sectionem Conicam quæsitam: eo assumpto in L, vel *l*, coeuntibus in primo punctis S, O, in secundo punctis S, Q, fieri FM, F*m* æquales ML, *ml*, adeoque coire ibi puncta P, *p* in unicum M, vel *m*, in quo nimirum circulus centro F radio ML, vel *ml* descriptus rectam MN, vel *mn* contingeret, existente ibidem FM, vel F*m* ad ME, vel *m*E, ut ML, vel *ml* ad ipsas ME, vel *m*E, nimirum ut F*u*, vel FV ad FE, sive in ratione determinante: at assumpto S F. 9. 10. 11.

ubicunubicumque extra eos limites, nullum inveniri punctum: Q.E.D.

Coroll. 1.

44. *Datis foco, directrice, & ratione determinante, datur Sectio Conica.*

45. Patet, cum iis datis, inveniantur omnia ejus puncta.

Corolll 2.

46. *Ellipsis tota citra directricem jacet, & in se ipsam redit: Parabola unicum habet ramum citra directricem in infinitum excurrentem; Hyperbola binos ramos in infinitum excurrentes, alterum citra, alterum ultra directricem.*

47. Patet ex ipsa problematis constructione, cum nimirum ex omnibus rectis directrici parallelis omnes, & solæ rectæ ductæ in fig. 9. intra limites *Ll* occurrant Ellipsi hinc inde a recta M*m* in binis punctis P, & *p*, quæ deinde in M & *m* coeunt; omnes autem, & solæ secantes infinitam LT in fig. 10. occurrant Parabolæ, ac omnes, & solæ in fig. 11. per infinitas LT, *lt* Hyperbolæ occurrant.

Coroll. 3.

48. *Ellipsis, Parabola, & ramus citerior Hyperbolæ contingunt rectas* LN, Lu, NV *in* M, u, V; *Ellipsis autem, & ramus ulterior Hyperbolæ rectum* ln *in* m.

49. De punctis M, *m* patet; cum ibi puncta P, *p* coalescant in unicum, & quævis directrici parallela ex altera parte rectæ LM, vel *lm*, ducta occurrat Sectioni Conicæ in binis punctis hinc inde ab M. De punctis autem V, *u* colligitur ex eo, quod abeunte S in F, abeunt puncta O, R, Q in *u*, F, V, adeoque in ipsa V*u* invenienda sunt bina puncta centro F intervallo FV; quæ erunt ipsa V, *u*, evanescente nimirum ibidem FR, & factis RP, RQ æqualibus inter se, ac ipsi FV. At utcumque parum distet OQ ab *u*V utralibet ex parte, semper latus RP minus est, quam basis EP, adeoque quam RQ, ac proinde Sectionis Conicæ punctum P utrinque circa V jacet citra rectam NV, & eadem est demonstratio pro *u*.

Co-

Coroll. 4.

50. *Sectionis Conicæ perimeter est linea curva, nusquam interrupta.*

51. Esse lineam curvam constat ex eo, quod recta esse non possit ea linea, quam plures rectæ ita contingant in unico puncto singulæ, ut ipsa utrinque circa contactum jaceat ad easdem ejusdem rectæ partes.

52. Numquam autem interrumpi, patet ex constructione ipsa, cum satis pateat, puncto S excurrente motu continuo per rectam L*l* in Ellipsi, & per rectas LT, L*t* indefinitas in Parabola, ac Hyperbola, debere punctum P pariter excurrere motu continuo. Sed sic accuratius demonstratur.

53. Si alicubi abrumpatur, ut fig. 15, 16 in P, vel recta SP alteri arcui *p*A occurreret iterum in *p*, ut in fig. 15, vel nusquam, ut in fig. 16. Primum fieri non potest, cum recta directrici parellela nonnisi in unico puncto possit occurrere Sectioni Conicæ ad eandem partem rectæ MH (num. 38.). Secundum fieri non potest, quia ex altero extremo *p* arcus *p*A abrupti ducta *ps* parallela directrici, aliæ parallelæ VO numero infinitæ ductæ per puncta V interposita punctis S, *s*, licet interceptæ iis limitibus definitis, in quibus quævis parallela debet occurrere perimetro sectionis hinc inde a recta MH, ipsi numquam ex ea parte occurrerent.

DEFINITIO II.

54. CHordam illam Vu *per focum ductam dico* Latus Rectum Principale *Sectionis Conicæ*; *rectam* Mm *in Ellipsi* (*fig.* 9.) *&* *in Hyperbola* (*figur.* 11) Latus Transversum Principale, *sive* Axem Transversum, *ejusque vertices* M, m, *ac ipsa* Mm *secta bifariam in* C, *dico* C Centrum: *erectis autem hinc inde rectis* CX, Cx *perpendicularibus axi transverso, ac mediis geometrice proportionalibus inter* FM, Fm

binas distantias foci , a binis verticibus axis transversi , *dico* Xx Axem Conjugatum , *ejusque vertices* x , X. *Rectam autem* MH *indefinitam in Parabola* (*fig.* 10.) *dico ejus* Axem transversum , *&* M *ejus verticem . Sed cum axem dixero, & ejus magnitudinem non definivero , intelligam totam rectam utrinque indefinitam, in qua sunt axium vertices . Rectas axi utrilibet perpendiculares , & ad Sectionis perimetrum utrinque terminatas dico ejus* Ordinatas *, ut sunt chordae* Pp *respectu axis transversi ; segmentum autem axis interceptum inter ordinatam , & verticem , vel centrum , dico* Abscissam *ab eo vertice , vel a centro , ut* MR , mR *sunt abscissae a verticibus* M, *&* m ; *&* CR *abscissa a centro*.

SCHOLIUM I.

35. POst hasce definitiones eruemus primo tria Corollaria, quae ab iis non pendent , nisi in sola nominum usurpatione , & debuissent continuare seriem Corollariorum propositionis primae , cum ex sola ejus constructione sponte fluant , sed definitiones interserendae fuerunt , ut ea , quorum proprietates enunciantur, suis in ipsa enunciatione nominibus appellarentur . Consequentur Corollaria 4, & 5 , quae erunt proprie Corollaria definitionum lateris recti , & semiaxis conjugati , qui hic assumptus est ita , ut ejus quadratum sit aequale rectangulo distantiarum foci a binis verticibus . Tum Corollarium 6 erit iterum Corollarium propositionis primae , & continebit praecipuam Sectionum Conicarum proprietatem , quae earum naturam exhibet , & foecundissima est ita, ut reliqua omnia Corollaria deinde ab ipsa pendeant , & ejus potissimum Corollaria sint . Potuisset idcirco enunciari per propositionem , tum ob enunciati theorematis dignitatem , tum ob foecunditatem novam , tum idcirco , quod paullo majore ambitu indigeat ad sui demonstrationem , binarum nimirum rationum compo-

sitione

sitione. Verum consultius duximus id quoque Corollariis immiscere; tum quia vix quidquam ad sui demonstrationem postulat prætet constructionem problematis primi; tum quia proprietatem enunciat axis transversi, quam deinde inveniemus generalem & axi conjugato, & diametris omnibus, (quæ in quavis Sectione Conica infinitæ sunt) & in propositione 6 enunciabimus.

Coroll. 1.

56. *Axis transversus bifariam secat suas ordinatas, & secat tam aream, quam perimetrum Sectionis Conicæ terminatæ quavis ordinata in duas partes prorsus æquales, & similes.*

57. Nam ordinata Pp esset chorda circuli descripti centro F, radio FP, adeoque (Coroll. 4. prop. 5. Geom. à perpendiculo FR per centrum ducto secatur bifariam. Inde autem patet, totam Figuram MPR, vel mRP conversam circa axem transversum debere prorsus congruere figuræ MRp, vel mRp, cum quævis semiordinata RP debeat ob angulos ad R rectos congruere sibi æquali Rp.

Coroll. 2.

58. *Omnium foci radiorum minimus in Ellipsi est is, qui terminatur ad verticem axis transversi propiorem, maximus, qui ad remotiorem reliqui eo minores, vel majores, quo ad illum, vel hunc verticem accedunt magis puncta perimetri, ad quæ terminantur: in Parabola, & utrovis Hyperbolæ ramo ille minimus, qui ad axis verticem terminatur in eo ramo situm, reliqui eo majores, quo terminantur ad puncta ab eodem vertice remotiora, nec nisi hinc inde bini æquales haberi possunt in eodem hinc inde angulo ab ipso axe transverso.*

59. Nam radius foci FP, cum habeat ad PD, sive RE rationem constanter eandem (num. 1.), crescet, vel decrescet, ut ipsa ER. Patet autem abeunte P in M, vel m, abire pariter R in eadem puncta, recedente P ab M, vel m, recedere & R ab iisdem,

 ac

ac proinde ipsarum ER in Ellipsi, Parabola, & ramo citeriore Hyperbolæ minimam esse ipsam EM, tum vero perpetuo crescere in his quidem in infinitum Ellipsi vero donec in *m* evadat maxima, ac pariter in ramo ulteriore Hyperbolæ in fig. 11. fore omnium FR' minimam F*m*, tum eas in recessu puncti P ab *m* crescere in infinitum. Binæ vero FP, F*p*, quæ solæ communem RE habent, jacebunt hinc inde in angulis RFP, RF*p* æqualibus ob FR communem, & latera RP, R*p*, ac FP, F*p* æqualia.

Coroll. 3.

60. *Differentia dimidii lateris recti principalis, & radii foci in Ellipsi, Parabola, ac ramo citeriore Hyperbolæ summa in ulteriore ad distantiam ordinatæ a foco est in ratione determinante.*

61. Cum enim sit & FP, ad RE, & FV ad FE in ea ratione, erit & illarum differentia, vel summa ad harum differentiam, vel summam in ratione eadem (cap. 2. Arit. n. 13. Porro distantia FR ordintaæ P*p* a foco F est ubique differentia ipsarum ER, EF, & in ramo ulteriore Hyperbolæ in fig. 11 est FR: summa ipsarum ER', EF.

Coroll. 4.

62. *Dimidium latus rectum principale ad distantiam foci a directrice est in ratione determinante, & in Parabola latus rectum principale est duplum ejus distantiæ, quadruplum tum distantiæ foci a vertice, tum distantiæ verticis a directrice.*

63. Patet primum ex ipsa constructione prop. 1. cum sit FV ad FE in ratione determinante. Porro in Parabola ea est ratio æqualitatis, & FM, ME æquantur inter se. Patent igitur & reliqua.

Coroll. 5.

64. *Quadratum semiaxis conjugati æquatur differentiæ quadratorum semiaxis transversi, & distantiæ foci a centro, existente illo majore in Ellipsi, minore in Hyperbola; ac quadratum distantiæ foci a centro æquatur*

in

in Ellipsi differentia quadratorum semiaxium existente semiaxe transverso semper majore, in Hyperbola eorum summa.

65. Patent ex eo, quod ex definitione ipsa quadratum semiaxis conjugati debeat esse æquale rectangulo MF*m*, & ob M*m* sectam bifariam in C, quadratum CM (*Coroll.* 2 & 5 prop. 13. Geom.) æquetur in Ellipsi, ubi CF est minor quam CM, quadrato CF, & rectangulo MF*m* simul. At in Hyperbola, ubi CF est semper major quam CM, quadratum CF æquatur quadrato CM, & rectangulo MF*m* simul.

Coroll. 6.

66. *Quadratum semiordinatæ axis transversi æquatur in Parabola rectangulo sub abscissa a vertice, & quadrupla distantia foci ab ipso vertice, sive sub eadem abscissa, & latere recto principali: in Ellipsi vero & Hyperbola est ad rectangulum sub binis abscissis; ut quadruplum rectangulum sub binis distantiis foci a binis verticibus ad quadratum axis transversi, sive ut quadratum axis, vel semiaxis conjugati ad quadratum axis, vel semiaxis transversi, sive ut latus rectum principale ad latus transversum, quæ rationes omnes æquales sunt.*

67. Nam ob OQ sectam bifariam in R, & non bifariam in S, erit (Coroll. 4. 5. prop. 13. Geom.) quadratum RS cum rectangulo OSQ simul æquale quadrato RQ, sive quadrato FP, seu quadratis FR, RP. Cum igitur & quadratum RS æquetur quadrato RF ob ipsas RS, RF æquales (num. 39.), erit & quadratum RP æquale rectangulo OSQ.

68. Est autem in fig. 10. SQ æqualis FV dimidio lateri recto *u*V, & æqualis LN, sive duplæ LM, nimirum (cum ob angulum LMF rectum, & LFM semirectum (num. 39.) æquentur inter se MF, ML) duplæ FM. Ducta vero L*y* normali ad OS, quæ proinde erit parallela & æqualis abscissæ MR, erunt

Oy ; yS ipsi æquales. Nam triangula SyL, OyL similia sunt triangulis NME, LME ob singula latera singulis lateribus parallela, adeoque ut NM, LM æquantur MF, sive ME, ita & Sy, Oy æquantur yL. Erit igitur OS dupla Ly, sive dupla abscissæ MR, & rectangulum OSQ, sive quadratum illud semiordinatæ RP æquale rectangulo sub dupla abscissa MR æquali duplæ Ly, sive toti OS, ac dimidio latere recto FV æquali SQ, adeoque æquale rectangulo sub abscissa MR, & toto latere recto uV, sive rectangulo sub abscissa, & quadrupla distantia FM foci a vertice.

69. Ducta autem pariter Ly in fig. 9, & 11, quę, si opus sit, producta occurrat rectæ ln in Y, erit OS ad nt duplam ml, sive duplam mF (num. 43.) ut LS ad Ll, sive ut Ly ad LY, vel ut MR ad Mm, & SQ ad LN duplam LM, vel pariter duplam MF, ut Sl ad Ll, sive ut yY ad LY, vel ut Rm ad Mm. Igitur conjunctis rationibus erit rectangulum sub OS, & SQ, sive quadratum RP ad quadruplum rectangulum sub MF, & Fm, ut rectangulum sub MR, & Rm ad quadratum Mm, vel alternando quadratum semiordinatæ RP ad rectangulum MRm sub abscissis, ut quadruplum rectangulum MFm sub binis distantiis foci a verticibus ad quadratum axis transversi Mm.

70. Porro cum CX, Cx sint mediæ inter FM, Fm (num. 54.), erit quadratum CX, vel Cx æquale rectangulo MFm; & proinde quadratum totius axis conjugati Xx æquale quadruplo rectangulo MFm, adeoque ratio ejus quadrupli rectanguli ad quadratum axis transversi eadem est, ac ratio quadrati axis, vel semiaxis conjugati ad axem, vel semiaxem transversum quadratum.

71. Demum cum ipsa FV sit semiordinata, & FM, Fm abscissæ a verticibus erit quadratum FV ad rectangulum MFm, sive ad quadratum CX, ut ipsum quadratum CX ad quadratum CM: Ac proinde FV, CX, CM sunt continue proportionales, & earum dupla Vu,

latus

latus rectum principale, xX axis conjugatus, Mm axis transversus sunt continue proportionales, adeoque ratio primi ad tertium, est eadem, ac ratio quadrati secundi ad quadratum tertii.

Coroll. 7.

72. *Vertices axis conjugati in Ellipsi sunt in ipsa ejus perimetro.*

73. Nam quadratum semiordinatæ per centrum ductæ ad rectangulum sub MC, Cm, quæ sunt ejus abscissæ, sive ad quadratum CM, debet esse, ut quadratum semiaxis conjugati CX ad quadratum idem semiaxis transversi CM. Ac proinde semiordinata per centrum ducta æquatur ipsi CX, & punctum X est ad perimetrum, ac eadem est demonstratio pro x.

Coroll. 8.

74. *Quadrata semiordinatarum axis transversi sunt in Parabola, ut abscissæ a vertice, in Ellipsi, & Hyperbola, ut rectangula sub binis abscissis a verticibus.*

75. Erit enim quadratum unius ordinatæ in Parabola ad quadratum alterius, ut rectangulum sub abscissa illius, & latere recto principali ad rectangulum sub abscissa hujus & eodem (num. 66.), ac idem illud latus rationem non mutat.

76. In Ellipsi autem, & Hyperbola erit quadratum unius semiordinatæ ad rectangulum sub suis abscissis, ut quadratum alterius ad rectangulum sub suis; adeoque alternando erunt illa quadrata, ut illa rectangula.

Coroll. 9.

77. *Perimeter Parabolæ, & utriusque rami Hyperbolæ utrinque ab axe transverso recedunt ultra quoscumque limites.*

78. Nam abscissa MR in illa, & utraque abscissa MR, mR′ in hac crescunt ultra quoscumque limites,

adeoque & ſemiordinatarum quadrata ultra quoſcunque limites creſcunt.

Coroll. 10.

79. *Semiordinatæ axi transverſo æque diſtantes a centro, vel a reſpectivis verticibus ſunt æquales inter ſe in Ellipſi, & Hyperbola, quo autem centro propiores, eo majores in Ellipſi, minores in axe transverſo Hyperbolæ.*

80. Erunt enim in ordinatis æque diſtantibus binæ abſciſſæ unius æquales binis abſciſſis alterius, abſciſſa nimirum unius a vertice M, abſciſſæ alterius a vertice *m*, & viceverſa, adeoque rectangula ſub abſciſſis æqualia, & æqualia ſemiordinatarum quadrata. At cum rectangulum MR*m* ſit differentia quadratorum CM, CR, quo minor erit CR in Ellipſi, eo major erit exceſſus quadrati CM ſupra ejus quadratum; & in Hyperbola eo minor ejus quadrati exceſſus ſupra quadratum CM. Quare eo ibi majus, hic minus rectangulum MR*m*, & proinde etiam quadratum ſemiordinatæ, & ipſa ſemiordinata.

Coroll. 11.

81. *Quævis recta in Ellipſi, & Hyperbola per centrum ducta, & ad perimetrum utrinque terminata, in ipſo centro bifariam ſecatur.*

F.17 18 82. Ducta enim in fig. 17, 18 quavis PC ad centrum, ac ſemiordinata PR axis tranſverſi, tum aſſumpta C*r* æquali CR, & erecta ad partes oppoſitas ſemiordinata *rp*, ac ducta C*p*, erit *rp* æqualis RP ob diſtantias C*r*, CR æquales. Igitur ob angulos ad R & *r* alternos æquales, erunt in triangulis PRC, *pr*C æquales & anguli ad C, & rectæ PC, *p*C, ac proinde cum recta PC producta debeat efficere angulum ad verticem oppoſitum æqualem angulo RCP, debebit abire in ipſam C*p*, & terminari ad *p*, ac in ipſo centro ſecari bifariam.

Coroll. 12.

83. *In Ellipſi, & Hyperbola axis conjugatus omnes ſuas ordinatas bifariam ſecat, & ejus ordinatæ æque diſtantes a centro æquales ſunt; quo autem remotiores a centro,*

tro, eo in Ellipsi minores, in Hyperbola majores, ac in Hyperbola quævis ordinata axi conjugato major axe transverso.

84. Sumptis enim, in fig. 19, 20, CR, *Cr* in axe transverso æqualibus, semiordinatę RP, *rp* ad eandem axis partem ductę æquales erunt inter se. Quare & P*p* jungens ipsas parallelas, & æquales erit parallela, & ęqualis R*r*, cui cum perpendicularis sit axis Xx, erit & ipsi P*p* perpendicularis, quam habebit pro sua ordinata, & secabit in I ita, ut PI, *p*I ęquentur ipsis CR, *Cr* inter se ęqualibus, adeoque & inter se ęquales sint. Completis autem ordinatis PP', *pp'* axi transverso, erit eodem argumento P'*p'* ordinata axi conjugato. Patet autem fore ęquales P'*p*, P'*p'*, & earum distantias CI, CI' a centro C ęquales ęqualibus semiordinatis RP, RP' axis transversi. Quo autem distantia CI fuerit major, eo semiordinata RP axis transversi erit major adeoque ejus distantia CR a centro eo minor in Ellipsi, major in Hyperbola, & proinde eo ibi minor, hic major etiam semiordinata IP axis conjugati, & tota ordinata P*p*. Cumque in Hyperbola quęvis CR abscissa axis transversi a centro major sit semiaxe CM, erit quęvis semiordinata PI axi conjugato major ipso semiaxe, transverso CM, & tota ordinata P*p* major toto axe M*m*. F.19. 20

Coroll. 13.

85. *Quadratum semiordinatæ axi conjugatæ ad summam in Hyperbola, & differentiam in Ellipsi quadratorum semiaxis conjugati, & abscissæ a centro, vel in hac ad rectangulum sub binis abscissis a binis verticibus est, ut quadratum semiaxis, vel axis transversi ad quadratum semiaxis, vel axis conjugati.*

89. Est enim (num. 66.) quadratum RP, sive CI ad rectangulum MR*m*, ut quadratum CX ad quadratum CM, adeoque alternando quadratum CI ad quadratum CX, ut rectangulum MR*m* ad quadratum CM. Porro ob M*m* sectam bifariam in C (Coroll. 2. 5. propos. 13. Geom.) in fig. 19 quadratum CM

est

est æquale quadrato CR, & rectangulo MR*m*. At in fig. 20. quadratum CR æquale quadrato CM, & rectangulo MR*m*. Igitur ibi dividendo erit differentia quadratorum CI, CX, vel rectangulum XI*x*, hic componendo, eorum summa ad quadratum CX, ut quadratum CR ad quadratum CM, & alternando, tum invertendo quadratum CR sive PI ad summam in Hyperbola quadratorum CI, CX, differentiam in Ellipsi, vel in hac ad rectangulum XI*x*, ut quadratum CM ad quadratum CX, vel ut quadratum M*m* ad quadratum X*x*.

Coroll. 14.

87. *Axis conjugatus Ellipsim secat in duas partes prorsus æquales, & similes; ac bini Hyperbolæ rami sunt prorsus inter se æquales & similes, & tam Ellipsis, quam Hyperbola alium focum habent, ac directricem æque distantes a centro, & ab alternis verticibus, ac habentes easdem prorsus proprietates, quas prior focus, & prior directrix.*

88. Si enim super axe *x*X convertatur dimidia figura 19, 20 ita, ut abeat punctum *m* in M, abibit quævis *rp* in RP, & I*p*, in IP, adeoque Semiellipsis *xm*X in *x*MX, ac tam in Ellipsi, quam in Hyperbola *mp* in MP.

89. Quod si captis C*f*, C*e* æqualibus, & oppositis CF, CE, ductaque *aeb* perpendiculari axi transverso, tota figura convertatur circa axem conjugatum *x*CX, abibit *aeb* in locum AEB, *m* in locum M, *f* in locum F, & viceversa: quævis autem perimetri puncta adhuc erunt in locis, in quibus alia perimetri puncta erant ante. Adeoque omnia, quæ respectu omnium perimetri punctorum verificabantur de foco F, & directrice AB, jam verificabuntur de foco *f*, & directrice *ab*. Porro ob CM, C*m*, ac CF, C*f*, & CE, C*e* æquales inter se, erunt pariter inter se æquales & ME, *me*, & MF, *mf*, & M*e*, *m*E.

Co-

Coroll. 15.

90. *In Ellipsi, & Hyperbola distantia focorum a se invicem, axis transversus, & distantia binarum directricum a se invicem, sive distantia centri a foco, a vertice axis transversi, & a directrice sunt continue proportionales in ratione determinante.*

91. Cum enim recta FE per focum ducta occurrat Sectioni Conicæ in punctis M, *m*; jacente altero M inter puncta F, E, quatuor puncta *m*, F, M, E constituent proportionem harmonicam, (num.8.), adeoque cum M*m* secta sit bifariam in C, erunt (num. 22.) CF, CM, CE continue proportionales in ratione FM ad ME, nimirum in ratione determinante: ac in eadem ratione erunt eorum dupla Ff, M*m*, E*e*.

Coroll. 16.

92. *Si e quovis perimetri puncto ad binos focos ducantur bina recta, erit earum summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola æqualis axi transverso.*

93. Ducta enim per P recta axi transverso parallela, quæ binis directricibus occurrat in D, d, erit tam FP ad PD, quam *f*P ad P*d* in ratione determinante, sive ut M*m* ad E*e*. Quare ipsarum summa in Ellipsi (fig. 19) differentia in Hyperbola (fig. 20) ad D*d* summam in illa, differentiam in hac ipsarum PD, P*d*, erit pariter, ut M*m* ad E*e*. Cum igitur D*d*, E*e* æquales sint, erit & ipsarum FP, *f*P summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola æqualis axi transverso M*m*.

Coroll. 17.

94. *Si ab extremis punctis Chordæ axi tranverso parallelæ ducantur ad eundem focum binæ rectæ, earum summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola æquatur axi transverso.*

95. Ducta enim F*p*, patet ipsam debere æquari *f*F, cum conversa figura circa axem conjugatum abeat F in *f*, & P in *p*. Quare summa vel differentia binarum FP, F*p* erit eadem, ac binarum FP, *f*P.

Coroll. 18.

96. *Si ad extrema puncta rectæ per centrum ductæ,*

& ad

& ad perimetrum utrinque terminatæ ducantur in Ellipsi, & Hyperbola ex eodem foco binæ rectæ, earum summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola æquabitur axi transverso.

F.21 97. Nam in triangulis *p*CF, PC*f*, erunt latera CP,
22 C*f* æqualia lateribus C*p*, CF, & anguli ad C ad verticem oppositi æquales. Quare & P*f*, *p*F æquales erunt. Cum igitur summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola rectarum PF, P*f* æquetur axi transverso, æquabitur eidem etiam ibi summa, hic differentia rectarum FP, F*p*.

Coroll. 19.

98. *Differentia in Ellipsi, summa in Hyperbola laterum recti, & transversi ad distantiam focorum sunt in eadem ratione determinante, in qua est ea distantia ad axem transversum, & is ad distantiam directricum.*

F.19 99. Est enim (num. 60) differentia in Ellipsi, summa
20 in Hyperbola rectæ *f*P, & dimidii lateris recti, nimirum & F*u*, ad *f*R in ea ratione. Porro abeunte P in V, abit R in F, & evadit *f*R ipsa distantia focorum F*f*, recta vero FP abit in FV. Quare in Ellipsi differentia *f*P ab F*u* evadit differentia binarum *f*P, PF, sive (num. 92) totius axis transversi, a toto latere recto VF*u*; at in Hyperbola cum *f*P contineat axem transversum, & PF (num. 92), sive in eo casu axem transversum, & FV, erit summa *f*P, & F*u* in eo casu summa axis transversi, & totius V*u*.

Coroll. 20.

100. *Si facto centro in altero foco* f *Ellipseos* in fig. 23, *vel Hyperbolæ in fig.* 24, *intervallo* fE, *vel se æquali axi transverso describatur circulus, & ex quovis puncto* P *perimetri Ellipseos, vel Hyperbolæ ducantur binæ rectæ altera* PF *ad alterum focum* F, *altera* PD *perpendicularis peripheriæ ipsius circuli in Ellipsi ad partes oppositas ejus centro* f, *in Hyperbola versus ipsum, donec ipsi peripheriæ occurrat citra* f *in* D, *ut* PD, *vel ultra in* d, *ut* pd, *prout punctum perimetri jacuerit, ut* P, *in eodem ramo*

cum

cum F, vel in opposito, ut p, erunt semper ea recta æquales.

101. Nam periphæriæ circuli perpendiculares lineæ sunt radii, qui per centrum f transeunt; in Ellipsi autem binæ fP, FP æquantur toti fD (num. 91.), adeoque remanet FP æqualis PD. In Hyperbola vero fP excedit FP per differentiam æqualem axi transverso (num. 92), adeoque æqualem fD. Quamobrem erit FP æqualis residuæ PD, & cum Fp excedat pf per axem transversum æqualem fd, eo addito, erit Fp æqualis pd.

SCHOLIUM II.

102. EST satis elegans ejus circuli analogia cum directrice Parabolæ. In fig. 1. si ea Parabolam referat, distantia perpendicularis PD a directrice rectilinea AB æquatur distantiæ FP a foco F. Hic in fig. 23. 24. distantia perpendicularis PD a peripheria circuli curvilinea AEB idem præstat, cum æquetur distantiæ FP, & cum ipsa directrix in Parabola directionem non mutet, in Ellipsi est cava versus F, in Hyperbola convexa.

103. Ex tam multis vero, quæ huc usque ex ipsa prima definitione fere sponte profluxerunt, jam hinc patet, quam apta sit definitio a nobis assumpta ad percipiendam Sectionum Conicarum naturam, atque indolem. Earum autem formam multo sibi evidentius oculis subjiciet Tyro, si curvas ipsas hujus problematis ope delineaverit, ac, si ductum perpendet, naturam intelliget. Delineabit autem admodum facile hoc pacto.

104. Facto quovis angulo acuto GEI, ut in fig. 25, F.25
vel recto, ut in fig. 26, vel obtuso, ut in fig. 27, ac 26
bifariam secto per rectam EH, assumatur in ea pro 27.
foco punctum F ad arbitrium, ducaturque recta Tt, quæ cum Hh faciat angulum semirectum, quæ quidem alteri lateri anguli assumpti, ut EG, occurret

ali-

alicubi in L; alteri vero, ut EI, occurret in l ad easdem partes in fig. 25, erit parallela in fig. 26; occurret in l ad partes oppositas in fig. 27, lateri nimirum IE producto versus i. Nam ubi angulus GEI est rectus, ut in fig. 26, angulus HEI erit semirectus, & æqualis externo HFT; adeoque FT, EI parallelæ erunt; ubi vero est acutus agulus GEI, ut in fig. 25; erit HEI semirecto minor; ubi ille obtusus, ut in fig. 27, erit hic semirecto major; ac proinde EI; FT ibi convergent, hic vero divergent; convergentes ex parte opposita t, i.

105. Assumptis autem in lateribus EI, EG, vel Eg segmentis EN, En æqualibus ipsis EL, El, & applicata regula in LN, ln definientur puncta M, m vertices axis transversi; tum assumptis pluribus EO, EQ æqualibus in ipsis lateribus anguli GEI inter puncta L, n, & N, l in fig. 25, a punctis L, N versus G, I in fig. 26, ab ipsis versus G, I; & a punctis l, n versus partem oppositam g, i in fig. 27, ac applicata semper regula ad puncta O, Q, quæ rectæ HEh occurret in R ita, ut ob isoscelismum trianguli OEQ, & angulum ad E sectum bifariam, ipsa OQ secetur ibi bifariam, & ad angulos rectos; centro F intervallo RQ, vel RO inveniantur bina puncta P, p hinc inde. Pluribus demum punctis ita inventis delineari per ipsa poterit Sectio Conica, quæ determinatis præterea punctis u, V per rectam ipsi EH perpendicularem facilius quam alibi delineabitur circa puncta u, V, M, m sequendo ductum rectarum Eu, EV, LN, ln, quas in iis punctis debet curva contingere.

106. Porro collata hac constructione cum figuris 9, 10 11, & cum solutione problematis, facile patebit rem eodem redire. Recta autem FM sive LM erit minor, vel æqualis, vel major respectu ME, prout angulus LEM fuerit semirecto minor, æqualis, vel major, nimirum prout totus GEI fuerit acutus, rectus, vel obtusus; ac proinde in primo casu obveniet Ellipsis, in secundo Parabola, in tertio Hyperbola,

Quod

107. Quod si manente angulo mutaverit distantiam foci a vertice anguli E, perspiciet simul manere penitus curvæ formam, & mutari solam magnitudinem. Et quidem si binas ejusmodi figuras descripserit, ac assumpserit semper rectas EQ, EO in eadem ratione utrobique ad rectas EN, EL, facile perspiciet, manere angulos omnes, & omnia semper obvenire utrobique similia; at mutato angulo GEI, statim forma ipsa curvæ mutabitur, ita, ut manentibus punctis F, M, & accedente E ad M is accedat ad rectum, Ellipsis oblongetur per omnes magnitudinum gradus, donec, eo evadente recto, desinat in Parabolam, vertice *m* ita in infinitum recedente, ut nusquam jam sit, ac eodem facto obtuso mutabitur Parabola in Hyperbolam, vertex *m* regredietur ex infinito ex parte opposita, ac bini Hyperbolæ rami erunt quodammodo veluti quædam Ellipseos jam plusquam infinitæ dimidia oppositas oras spectantia. Inde autem patebit & affinitas quædam Ellipseos in immensum oblongatæ cum Parabola, qua fit, ut in Astronomia motus Cometarum in Ellipsibus maxime oblongis habeantur pro Parabolicis, sine ullo errore notabili in eo arcu, qui est proximus foco, ac vertici nobis conspicuo.

108. Quoniam vero ab angulo LEM pendet ratio LM ad ME, sive ratio illa determinans FM ad ME, & ille ab hac; patet omnes Parabolas fore inter se similes, cum in iis angulus sit semper rectus; Ellipses vero fore inter se similes, & Hyperbolas inter se, si ratio determinans fuerit eadem. Nimirum si in fig. 9, F.9
10, 11, maneat ratio determinans, & mutetur utcumque distantia FE a directrice; rectæ omnes FP in da- 10
to angulo inclinatæ ad ipsam FE, sive ad axem trans- 11
versum ex eadem parte verticis M, mutabuntur in eadem ratione. Si enim sint binæ ejusmodi Sectiones Conicæ, erit in utraque FP ad PD sive RE in eadem ratione, ob eandem rationem determinantem, & PF ad FR ob æquales angulos in triangulis FRP, adeoque & FP ad FE summam vel differentiam FR, RE, prout

R cadat intra FE, vel extra, in eadem ratione erit, & proinde etiam FP in una ad FP in altera constanter, ut FE in illa ad FE in hac. Quin imo cum ratio CF ad CM in Ellipsi, & Hyperbola sit eadem, ac ratio determinans (num. 90): ea manente, manebit eadem ratio quadrati CM ad quadratum CF, adeoque & ad eorum differentiam, nimirum ad quadratum semiaxis conjugati, (num. 64) & viceversa. Quare si in pluribus Ellipsibus, vel Hyperbolis fuerit eadem ratio semiaxium, vel axium, adeoque & ratio lateris recti principalis ad transversum, illæ erunt inter se similes; dissimiles, si diversa.

109. Quod si rectæ Ii, Gg manentibus punctis F, L, M, N in fig. 25. evadant parallelæ, & punctum E, ac directrix nusquam jam sit, Ellipsis mutatur in circulum, coeuntibus foco f, & centro C cum F, ac

F.28 fig. 25 abit in fig. 28, in qua cum RQ sit semper æqualis eidem FV, vel MN, punctum P est semper ad circulum descriptum radio eodem FV, ac centro F. Quamobrem circulus quidem est quædam veluti Ellipsis, cujus foci coeant, sed ejus diretrix ita in infinitum recedit, ut nusquam jam sit, & ejus ratio determinans ita in infinitum decrescit, ut penitus evanescat, & sit prorsus nulla; adeoque definitio a nobis assumpta ipsi revera in Geometrica saltem, ac reali consideratione aptari non possit, ut in Scholio 1. post ipsam Definitionem 1. innuimus.

110. Atque hoc quidem pacto Conicæ Sectiones in se invicem transformantur, vel in circulum. Possunt autem & ad rectas lineas, & ad punctum ita accedere, ut demum in eas desinant. Nam si potius manen-

F. 9 te foco F, (fig. 9. 10. 11.) & directrice, adeoque pun-

10 cto E, minuatur in casu Ellipseos ratio determinans in

11 infinitum, & penitus evanescat, accedentibus in infinitum punctis V, u ad F, ac recidentibus demum in ipsum; latera IEi, GEg accederent ad axem EFH in infinitum, & in ipsum reciderent, ac interea tota Ellipsis contraheretur versus focum F, & in ipsum unicum

pun-

punctum desineret. Si vero in casu Hyperbolæ ratio cresceret in immensum, & conciperetur jam omnes finitarum magnitudinum limites transgredi, recedentibus punctis *u*, V in infinitum ita, ut nusquam jam sint; latera ipsa IE*i*, GE*g* accederent ad directricem consideratam positionibus AEB, BEA, ac demum in ipsam reciderent, utroque Hyperbolæ ramo interea se expandente, ac verticibus M, *m* accedentibus ad ejus punctum E ita, ut demum in ipsum reciderent, & abeuntibus ramis ipsis in directricem. Si demum manente directrice, & ratione determinante, focus F ita accedat ad directricem, ut demum in eam recidat in E; patet ex numer. 16., Ellipsim quidem debere abire in ipsum unicum punctum E, Parabolam in rectam axi perpendicularem EFH, Hyperbolam in binas rectas ita inclinatas directrici, ut radius ad sinum inclinationis sit in ratione determinante. Nam si contra focus F recedat ultra quoscunque limites ita, ut nusquam jam sit, secum avehet & rectam T*t*, & axium vertices, & totas curvas in infinitum, quo demum obrutæ nusquam jam erunt. Proderit autem plurimum hasce transformationes locorum Geometricorum contemplari, quibus vis quædam, atque admirabilis Geometriæ indoles intimius aliquanto perspicitur.

SCHOLIUM III.

111. Quoniam de Sectionum Conicarum similitudine mentio injecta est superiore Scholio, non erit abs re pauca quædam de figurarum similitudine hic demonstrare, futura usui tum in Sectionibus Conicis, tum in omni late Geometria. *Sint in fig.* 29, 30, 31. F. 29
bina recta data FG, fg, *& ad binas figuras cujuscumque formæ* FADB, fadb *ductis utcunque* FE, fe, *quæ faciant angulos* GFE, gfe *semper æquales, & vel semper ad easdem plagas, ut exhibent fig.* 29, *ac* 30, *vel ad oppositas, ut* 29, *ac* 31, *sit autem semper* FE *ad* fe *in* 30 31

data ratione ; *ejusmodi figuras dico* Similes , *in primò casu* Directe , *in secundo* Contrarie , *&* *rectas illas* FE , fe Latera Homologa , *eas autem ipsas* ; *vel quasvis alias facientes cum iis* , *vel cum* FG ; fg *angulos æquales ad easdem pariter plagas* ; *vel ad oppositas* ; *dico rectas* Positione Homologas , *quæ si assumantur pariter in illa constanti ratione* ; *easdem dico pariter* Latera Homologa ; *vel rectas etiam* Magnitudine Homologas , *puncta vero illa* F , f *dico itidem* Homologa .

112. *Si ductis utcumque* FC , fc *magnitudine & positione homologis* , *factis nimirum angulis* GFC , gfc *æqualibus* ; *&* *captis* FC , fc *in illa constanti ratione* ; *erunt &* C , c *puncta homologa* ; *ac rectæ* CE , ce *pariter in iisdem angulis ductæ ad ipsas* CF , cf *incurrent in puncta homologa* E , e ; *& erunt in eadem illa ratione constanti* , *nimirum erunt & positione* , *& magnitudine homologæ* .

113. Ductis enim FE , *fe* in angulis æqualibus ad FG , *fg* , adeoque & ad FC , *fc* , tum EC , *ec* , erunt in triangulis FEC , *fec* tam angulis ad F , *f* æquales ; quam latera FE , FC proportionalia lateribus *fe* , *fc* ; adeoque ipsa triangula similia ; & anguli FEC , *fec* æquales , ac latera CE , *ce* in eadem illa ratione . Quamobrem rectæ ex C , *c* in æqualibus angulis ductæ ad CF *cf* congruet cum ipsis CE , *ce* , & incident in illa puncta homologa .

114. Patet , illa ipsa puncta E , *e* fore homologa , cum & FE , *fe* inclinentur ad FG , *fg* in angulis æqualibus , & sint in illa constanti ratione : ac datis in singulis figuris singulis punctis homologis , cum rectis per ea transeuntibus , & positione homologis , ac ratione illa constanti posse inveniri infinita alia numero puncta homologa , & rectas , quę bina puncta homologa binarum figurarum conjungunt , fore pariter homologas & positione , & magnitudine , ac facile colligitur binas rectas , quę bina puncta conjungunt in una , ad aliam , quę in ea conjungunt alia bina quęvis ,

de-

debere inclinari in eodem angulo, in quo in altera inclinantur rectæ jungentes puncta iis homologa: ac triangula ad terna quævis homologa puncta terminata fore similia.

115. *Si altera e figuris similibus habuerit rectam aliquam pro perimetro, habebit & altera rectam ipsi & positione, & magnitudine homologam, ac si binæ ejusmodi rectæ concurrant in singulis figuris angulos æquales constituent.*

116. Sit enim ejusmodi recta EB in prima e figuris (29); & ductis FE, FB; & ad quodvis ejus punctum I recta FI; ducantur in secunda (30; vel 31) recte *fe*; *fb* homologæ ipsis FE; FB tum positione tum magnitudine; eruntque puncta *e*; *b* in perimetro secundæ figuræ; ac homologa ipsis E; B; adeoque ducta *eb* erit & positione; & magnitudine homologa EB, ac angulus *feb* æqualis angulo FEB. Facto igitur angulo *efi* æquali EFI versus *b*; donec recta *fi* occurrat rectæ *eb* in *i*; erunt similia triangula EFI; *efi* adeoque & FI ad *fi* in ea ratione constanti; adeoque & punctum *i* erit in perimetro secundæ figuræ; ac homologum I: Quare secunda figura habebit pro perimetro rectam *eb*, & si prima habuerit plures rectas, secunda habebit totidem iis homologas; & in iisdem angulis ad se invicem inclinatas.

117. *Si prima figura habuerit perimetri partem aliquam curvilineam; habebit & secunda; ac chordæ per bina singularum puncta homologa ductæ; cum rectis quibusvis homologis continebunt angulos æquales, eruntque & positione; & magnitudine homologæ; ac tangentes indefinitæ per puncta homologa ductæ erunt positione homologæ; ipsi vero arcus punctis homologis terminati erunt in eadem illa ratione constanti; quos proinde itidem* Homologos *dico; areæ vero quæcunque clausæ lineis homologis sive rectis; sive curvis erunt in ratione duplicata laterum homologorum.*

118. Cum enim singulis lateribus rectis alterius figuræ, debeant respondere latera recta alterius, non

potest latus curvilineum non respondere lateri curvilineo, quod nimirum si non curvilineum sed rectilineum esset, illi in altera pariter rectilineum responderet. Porro puncta in illis homologa erunt ea, in quæ incident rectæ homologæ a quibusvis singulis singularum homologis punctis ductæ, & iccirco chordæ, quæ jungent homologa ejusmodi puncta; & ipsæ homologæ erunt & positione, & magnitudine, quæ iccirco ad rectas quascunque homologas habebunt inclinationem eandem. Si ejusmodi chordę sint DE, *de*, quę indefinite producantur in M, N; *m*, *n*, erunt ipsę MN, *mn* positione homologę, & cum homologis rectis eosdem continebunt angulos. Coeuntibus vero punctis D, E; *d*, *e*, secantes MN, *mn* evadunt tangentes, quę iccirco remanent positione homologę, & cum homologis eosdem continent angulos. Porro cum arcubus in plures, ac plures particulas sectis in infinitum, chordę semper homologę sint & positione, & magnitudine, ac earum summę ad arcuum ipsorum magnitudinem accedant in infinitum, arcus ipsi erunt in ea ratione constanti. Si autem a quibusvis perimetri angulis, vel ab extremis chordarum homologarum utcumque parvarum punctis, ad bina puncta homologa assumpta singula in singulis figuris ducantur rectę, triangula illa omnia jungent terna puncta homologa, adeoque similia erunt, & areas habebunt in ratione duplicata laterum homologorum. Quare omnes homologę areę figurarum similium sive rectilineę sint, sive curvilineę, ad quas areę chordarum in infinitum accedunt, erunt in ratione duplicata laterum homologorum.

F. 32 33 119. *Si ex quodam puncto* F *in fig.* 32, 33 *ad quævis puncta* E *figuræ* AEB *ductis rectis* FE, *capiantur in iis semper* F e *ad* FE *in ratione data, vel versus* E, *ut in fig.* 32, *vel ad partes oppositas, ut in fig.* 33, *punctum* e *describet perimetrum figuræ* aeb *directe similis figuræ* AEB, *binis punctis homologis coeuntibus* *in* F, *quod erit utrique commune*, *& puncta* E, e *erunt homologa*, *ut & recta* FE, Fe; *ac in iis quævis rectæ homologæ erunt inter se parallelæ*, *quævis puncta homologa jacebunt in directum cum puncto communi F*, *& si fuerint curvæ perimetri*, *tangentes ductæ per puncta homologa*, *sive per puncta*, *in quibus perimetro occurrent ad easdem partes*, *vel ad oppositas recta ducta per* F *erunt parallelæ*.

120. Patet, cum ducta per F quavis indefinita FG, & in ea assumpto *g* ad easdem partes in fig. 32, ad oppositas in fig. 33, semper GFE, *g*F*e* debeat esse ibi idem angulus, hic æqualis ad verticem oppositus, & ratio FE ad F*e* ponatur constans. Rectæ vero quævis homologæ ad quamvis rectam per F transeuntem debebunt ita eque inclinari, ut parallelismum servent: Ex puncto F ad quodvis punctum primæ figuræ ducta recta, assumenda erit in ea ipsa ad easdem partes, vel ad oppositas recta ipsi homologa, quæ punctum homologum definiat, ac tangentes per puncta homologa E, *e* ductæ debebunt cum recta E*e* homologa continere angulos æquales ita, ut servent parallelismum.

121. *Si autem figuræ sint directæ similes*, *& bina puncta homologa coeant*, *ac congruat directio unius rectæ cum recta homologa*, *vel ad easdem partes*, *vel producta ad partes oppositas*, *rectæ omnes ex eo communi puncto ductæ usque ad perimetrum ad easdem pariter*, *vel ad oppositas partes erunt in data ratione*, *& homologæ*, *ac habebuntur ea omnia*, *quæ superiore numero dicta sunt*.

122. Nam si punctum F sit commune, & congruant binæ quævis rectæ homologæ FG, F*g* utrovis modo, ducta quavis FE, quæ occurrat perimetro secundæ figuræ in *e*, erit angulus GFE idem ac *g*F*e* in fig. 32, æqualis ad verticem oppositus in fig. 33, adeoque FE, F*e* debebunt esse recte homologe, & in illa ratione constanti.

123. Sed jam redeundum ad ipsas Sectiones Conicas,

 qua-

quarum elegantem constructionem per motum continuum ope filorum videbimus sequenti Scholio.

SCHOLIUM IV.

124. EX proprietate, quam num. 93. demonstravimus, facile eruitur methodus describendi Ellipsim, & Hyperbolem motu continuo ope filorum qua quidem passim utuntur fabri lignarii, & murarii pro Ellipsi. *Assumpto filo, cujus longitudo æquetur axi futuræ Ellipseos, ejus extrema capita defiguntur punctis*
F.19 *focorum* F, f *in fig.* 19. *tum stylo* P *filum circumducitur ita, ut semper extensum maneat, & excurrat, ac Ellipsis describitur*, cum nimirum binæ FP, fP simul semper æquentur, eidem longitudini fili. *Et vero etiam datis binis Ellipseos axibus* Mm, Xx, *sive longitudine & latitudine Ellipseos quæsitæ, foci* F, f *admodum facile invenientur, duplicato nimirum filo, ac medio ejus puncto, sive ipso flexu superposito alteri vertici* x *axis conjugati, diducantur bina capita, donec ad axem transversum deveniant, extenso filo in* F, *&* f. Patet enim eos fore focos, & Ellipsim transituram per x, vel geometrice facto centro in altero vertice x axis conjugati intervallo CM semiaxis transversi, invenientur in ipso axe transverso foci F, f; cum nimirum (num. 64. debeat esse quadratum CF differentia quadratorum Cx, CM, nimirum bina quadrata Cx, CF quæ æquantur quadrato xF, debeant æquari quadrato CM, adeoque ipsa xF semiaxi CM.

125. *At si bina fila ita jungantur, ut alterius caput tantum excurrat ultra caput alterius, quanta est longitudo axis transversi quæsitæ Hyperbolæ, & ea capita*
F.20 *defigantur focis* F, f, *tum stylo* P *simul evolvantur illa bina fila, ut extensa maneant, & æquales utriusque partes in illa divaricatione, & explicatione excurrant ex ipso stylo, describetur ramus Hyperbolæ circa eum focum, cui filum brevius infixum fuerat*. Semper enim

enim differentia filorum FP, fP manebit, eadem, quæ fuerat initio. Tum permutatis capitibus, describetur etiam alter ramus. Foci autem F, f datis axibus invenientur in axe transverso centro C intervallo Mx, cum nimirum (num. 64) quadratum CF, vel Cf in Hyperbola æquetur summæ quadratorum semiaxium CM, Cx, adeoque ipsa CF, vel Cf ipsi Mx.

126. Parabola autem hoc pacto describi poterit ope fili. *Sit regula* AB *in fig. 34, quæ collocetur loco directricis, ac ipsi applicetur norma* HDI *ita, ut alterum ejus latus* DI *excurrat per ipsam regulam alteri lateri* DH *affigatur in* H *caput alterum fili* HPF, *cujus longitudo æquetur lateri ipsi, alterum vero caput affigatur in* F *foco Parabolæ describendæ, & dum norma movetur, detineatur stylo mobili* P *filum ipsum partim applicatum regulæ in* HP, *partim distentum in* FP. Patet fore semper PF æqualem PD, adeoque punctum P ad Parabolam foco F, directrice AB. Descripto autem arcu dimidio MP, poterit conversione normæ alter arcus Mp describi ex parte opposita. F. 34

SCHOLIUM V.

127. Constructione problematis primi determinatus est concursus rectarum directrici parallelarum, & axi perpendicularium cum Sectionis Conicæ perimetro. Sequenti vero problemate determinabimus concursum rectæ cujusvis per focum ductæ, ac ejus quoque constructio harum curvarum formam proponet ob oculos.

PROPOSITIO II. PROBL.

128. *Datis directrice, foco, & ratione determinante invenire concursum rectæ datæ transeuntis per focum cum Sectionis Conicæ perimetro.*

129. Sit primo recta data per focum transiens pa-

rallela directrici. Demisso in ipsam directricem in fig. 35, 36 perpendiculo FE, capiantur in ea recta data FV, Fu ad ipsam FE in ratione determinante; & (num. 48) ejus concursus cum perimetro Sectionis Conicæ, erunt puncta *u*, V.

130. Si autem sit alia quævis non parallela; ea directrici occurret in aliquo puncto Q. Capiantur in ipsa directrice QG, Q*g* æquales ipsi QF, posito puncto G ad eam plagam respectu Q, ad quam jacet F respectu V. Ductisque GV, *g*V, earum occursus, si qui erunt, cum recta data QF, productis & ipsis, & QF utravis ex parte, quantum opus fuerit, erunt quæsiti concursus cum Sectionis Conicæ perimetro, eruntque ii soli.

131. Nam ducta PD perpendiculari ad directricem, similia erunt triangula FPV, QPG, QFE, QPD, adeoque erit FP, ad FV, ut QP, ad QG, sive ad QF, nimirum ut PD ad FE; adeoque alternando FP ad PD, ut FV ad FE in ratione determinante, & eadem est demonstratio pro puncto *p*, substitutis *p*, *g*, *d* pro P, G, D. Contra vero si punctum P fuerit ad Sectionem Conicam, & ducatur per V, ac P recta occurrens directrici in G, erit FP ad PD, ut FV ad FE in ratione determinante, & PD ad PQ, ut FE ad FQ, ob FE, PD parallelas, adeoque ex æqualitate ordinata FP ad PQ, ut FV ad FQ. Est autem FP ad PQ, ut FV ad GQ ob ipsarum FV, GQ parallelismum: Ergo erit GQ æqualis FQ. Quare punctum, quod ad Conicam Sectionem sit, determinari omnino debet assumpta QG, vel Q*g* æquali QF, & ducta GV, vel *g*V; adeoque puncta inventa ea constructione sunt ad ipsam Sectionem Conicam, & sunt ea sola. Q. E. D.

Coroll. I.

132. *Quævis recta per focum ducta occurrit Ellipsi in binis punctis hinc inde a foco: quævis pariter occurrit Parabolæ hinc inde a foco, præter unicam directrici perpendicularem, cujus altera intersectio a di-*

rectri-

rectrice remotior ita in infinitum recedit, ut nusquam jam sit. In Hyperbola autem quavis occurrit semel inter focum, & directricem; alter vero occursus in infinitum ita recedit, ut nusquam jam sit in binis rectis hinc inde directrici inclinatis in angulo, quem num. 10: *diximus angulum æqualitatis, in reliquis inclinatis in angulo minore habetur citra directricem ultra focum, in inclinatis in angulo majore ultra directricem.*

133. Nam rectę quidem QF, GV se decussantes, necessario semper sibi occurrent alicubi in P inter focum, & directricem: rectæ vero QF, *g*V vel erunt parallelę, puncto *p* ita in infinitum abeunte, ut nusquam jam sit; vel convergent ad partes FV, ut in fig. 35, vel ad partes Q*g*, ut in fig. 36, prout Q*g*, sive QF fuerit æqualis, major vel minor respectu FV. Porro in Ellipsi in qua FE est major, quam FV, semper FQ, quę vel congruit cum FE, vel est ipsa major, erit ęque major; vel multo magis major quam ipsa FV, adeoque punctum *p* semper habebitur, ut in fig. 35, citra directricem ad partes oppositas P respectu F. In Parabola, in qua FE ęquatur FV, si FQ congruat cum FE, nimirum sit perpendicularis directrici, erit ęqualis ipsi FV, & punctum *p* ita in infinitum recedet, ut nusquam jam sit. In reliquis vero positionibus omnibus erit FQ major, quam FE, adeoque major, quam FV, & punctum *p* habebitur, ut in Ellipsi. In Hyperbola vero, in qua FE est minor quam FV, si angulus FQE fuerit ejusmodi, ut radius ad ejus sinum habeat rationem determinantem, quam nimirum habet FV ad FE, ipsa FQ habebit ad FE rationem eandem, adeoque ęquabitur ipsi FV, & punctum *p* ita in infinitum recedet, ut nusquam jam sit. Si autem is angulus fuerit minor, erit FQ major, quam FV & habebitur casus figurę 35, ut in Ellipsi, & Parabola; si autem is angulus fuerit major, erit FQ minor, quam VF, & concursus *p* abibit, ut in fig. 36, ultra directricem.

Coroll. 2.

F.37 134. *Si recta Pp per focum F ducta in fig. 37, 38,*
38 *39, 40, & occurrens directrici in Q, sectioni Conicæ*
39 *in P, p secetur bifariam in R, erunt RF, RP, RQ*
40 *continue proportionales in ratione, quam habet foci radius ad ordinatam directrici in eo angulo FQE, & si recta ipsi FQ perpendicularis ducta e foco F occurrat directrici in I, recta per I, & R ducta; erit in Parabola perpendicularis directrici, in Ellipsi, & Hyperbola per centrum transibit.*

135. Primum patet ex num. 22. Cum enim puncta *p*, F, P, Q constituant proportionem harmonicam (num. 8.), & P*p* secetur bifariam in R, erunt RF, RP, RQ in continua ratione FP ad PQ. Secundum sic demonstratur.

136. Ducta præterea PD perpendiculari directrici, & FH eidem parallela, quæ occurrat rectæ IR productæ, si opus sit, in H, erit RF ad RQ, nimirum HF ad IQ in duplicata ratione FP ad PQ, nimirum ut illius quadratum ad hujus quadratum. Est autem ob angulos IFQ, IEF rectos, & angulum ad I communem triangulis FIQ, EIF, recta IQ ad IF, ut IF ad IE, adeoque QI ad IE, ut quadratum QI ad quadratum FI, sive ob similia triangula rectangula QFI, QDP, ut quadratum QP ad quadratum PD; Erit igitur ex æqualitate ordinata FH ad IE ut quadratum FP ad quadratum PD, nimirum in ratione determinante duplicata.

137. Porro ea ratio in Parabola est ratio æqualitatis adeoque in fig. 38 æquantur FH, IE; & proinde IH parallela est rectæ EF, & directrici perpendicularis. At in Ellipsi in fig. 37, & in Hyperbola in fig. 39, 40, est (num. 90) ad CF ad CM, & CM ad CE in ratione determinante, adeoque CF ad CE in eadem ratione duplicata. Erit igitur in utraque FH ad EI, ut CF ad CE, ac proinde ductis CH, CI, triangula CFH, CEI similia erunt (Coroll. 2. prop. 12. Geom.) & angulus FCH, ECI æqualibus, puncta I, H, C in directum jacent.

SCHO-

SCHOLIUM.

138. HÆC quidem constructio minus fœcunda est, quam constructio primi problematis, adhuc tamen & expedita est, & formam Conicarum Sectionum, ac earum discrimen proponit ob oculos; cum nimirum ex coroll. 1. statim pateat Ellipsim quidem redire in Orbem circa focum, Parabolam habere unicum ramum citra directricem protensum in infinitum, Hyperbolam vero binos ejusmodi ramos hinc inde a directrice. Secundi autem Corollarii summus in praecipua quadam Sectionum Conicarum proprietate demonstranda usus erit paullo infra.

139. Satis autem facile perspicitur & illud, rectam F.35 quoque per G, & *u* ductam debere transire per *p*, & 36 rectam ductam per *g*, & V debere transire per *p*, adeoque vel alterum e punctis V, *u* cum utroque G, *g*, vel alterum e punctis G, *g* cum utroque V, *u* problemati solvendo satisfacere.

PROPOSITIO III. PROBL.

140. *Datis foco, directrice, & ratione determinante, invenire concursum rectæ datæ cujusvis cum Sectione Conica.*

141. Si recta data sit directrici parallela, solvetur problema per constructionem problematis 1 (n. 34, 36), F.41 si transeat per focum solvetur per constructionem pro- 42 blematis 2 (num. 128). Si sit quævis alia KH, quæ 43 quidem directrici necessario alicubi occurret in H, con- 44 struetur problema hoc pacto. 45

142. In figuris 41, 42, 43, 44, 45, quarum prima ad Ellipsim pertinet, secunda ad Parabolam, reliquæ ad Hyperbolam pro casibus, in quibus occurrat recta data soli ramo citeriori, vel soli ulteriori, vel utrique. Assumpto puncto L ubivis extra directricem demissoque in ipsa directricem perpendiculo LG, ac in eo, si opus sit, producto

cto capta LS, quæ sit ad ipsum in ratione determinante, centro L, radio LS describatur circulus, ductaque LO parallela rectæ datæ KH, donec occurrat directrici in O, tum conjunctis punctis H, F, ducatur per O recta zOZ ipsi HF parallela posito in ea puncto Z ad eamdem directricis partem cum centro L, puncto vero z ad partem oppositam; & si ipsa OZ producta utravis ex parte indefinite alicubi occurrat circulo in T vel *t*, ducta LT vel L*t*, ac ex F recta ipsi parallela, hujus concursus cum HK in P vel *p* determinabit punctum quæsitum, nec in aliis punctis præter hoc modo inventa recta data potest datæ Sectioni Conicæ occurrere.

143. Ducta enim PD, vel *pd* perpendiculari ad directricem; ob rectas LO, GL parallelas rectis PH, DP, similia erunt triangula LGO, PDH; & ob rectas LO, OT, TL parallelas rectis PH, HF, FP, similia LTO, PFH; quare FP ad PH, ut LT ad LO, & PH ad PD, ut LO ad LG; adeoque & ex æqualitate ordinata FP ad PD, ut LT, sive LS ad LG, nimirum in ratione determinante; adeoque punctum P est ad datam Sectionem Conicam; & eadem est demonstratio pro puncto *p*.

144. Contra vero si quoddam punctum P sit ad Sectionem Conicam datam, & manentibus cæteris ducatur LT parallela FP, donec occurrat rectæ OZ alicubi in T, erit LT ad LO ut FP ad PH, & LO ad LG ut PH ad PD, adeoque LT ad LG ut FP ad PD in ratione determinante, in qua cum sit LS ad LG, erit LT æqualis LS, adeoque punctum T ad circulum. Quare punctum quodvis, in quo recta HK occurrat Sectioni Conicæ, debet inveniri exposita constructione per concursum rectæ zOZ cum circulo, & sola puncta eo pacto inventa sunt ad Sectionem Conicam datam: Q. E. D.

SCHO-

SCHOLIUM.

145. Mirum sane quam foecunda est hęc constructio, quam Tyroni exercendo apta. Plurima quidem ex ea inferri possunt theoremata, & pleraque utilissima ac iterum foecunda: curabimus autem quantum fieri poterit, ne tanta rerum copia confusionem pariat. Interea notandum illud; posse punctum L assumi etiam ultra directricem, quamquam nos in hisce schematis ipsum semper citra directricem assumpsimus. Deinde posse ipsum assumi diversis locis, quæ multo faciliorem constructionem exhiberent, sed minus generalem, & generalibus theorematis eruendis minus aptam. Potissimi casus, in quibus constructio contrahitur, sunt ii, in quibus assumatur punctum L in ipsą perimetro Sectionis Conicę, nimirum in aliquo puncto P jam invento, quo casu radius circuli esset ipsa recta PF, quæ ad perpendiculum PD rationem habet determinantem; vel assumatur in foco ipso F, quo casu radius circuli esset dimidium latus rectum; sive in fig. 9, 10, 11 FV, cum nimirum sit FV, ad perpendiculum FE pariter in ratione determinante, vel pro Ellipsi, & Hyperbola in centro, quo casu in fig. 19, 20 radius circuli esset semiaxis transversus CM, qui (num. 90) ad perpendiculum CE habet pariter rationem determinantem, vel pro quavis Sectione Conica in ipsa recta data, quo casu hic punctum Q congrueret cum puncto H, puncto nimirum L jacente in ipsa KH. Poterit Tyro constructionem hanc generalem ad hosce casus particulares contrahere ac notare quo pacto mutata positione, vel directione rectæ datę, possint erui plures satis diversę & elegante constructiones, quibus omnia quęsitæ Sectionis Conicæ puncta inveniantur.

146. Et quidem ipsa constructione nostra generali patet inveniri puncta omnia, si nimirum manente directio-

ne

ne rectæ datæ mutetur ejus positio; nimirum si manente angulo ad H excurrat punctum H per totam directricem; vel si per datum punctum quodvis, ut per focum; vel in Ellipsi & Hyperbola per centrum convertatur recta. In iis omnibus positionibus rectæ motu parallelo delatæ, vel per datum punctum conversæ habebuntur omnia Sectionis Conicæ puncta; & earum discrimen facile detegetur; atque hanc ipsam ferme tenebimus viam in eruendis iis, quæ tam multa se sponte offerunt.

147. Interea quod ad ipsam constructionem pertinet, notetur illud. *Si recta data directrici parallela sit; puncta* H, O *ita in infinitum abeunt; ut nusquam jam sint; ac si ea recta transeat per focum* F; *congruentibus* HK, HF; *congruunt etiam* OZ, OL; *&* LT; Lt *abeunt in has*; FP, Fp *in illas*; *adeoque in utroque hoc casu a generali hac constructione deserimur*. Posset quidem ex ipsa pro utroque casu peculiaris constructio derivari; sed utrique casui consultum est in Prop. 1; & 2. Proinde iis omissis, eruemus hic primo loco generalia theoremata, quæ fluunt e motu parallelo rectæ datæ eandem semper inclinationem retinentis ad directricem.

148. Ac primo quidem Corollario plurima simul conjungemus nimis inter se analoga, quæ proveniunt ex unico casu Ellipseos; in quo recta data quamcumque positionem habeat; & e binis Parabolæ, in quorum primo ea sit directrici utcumque obliqua; in secundo perpendicularis; ac demum e ternis Hyperbolæ, in quorum primo recta data faciat cum directrice angulum minorem angulo æqualitatis, in secundo æqualem; in tertio majorem.

Coroll. 1.

149. *E rectis omnibus datæ rectæ parallelis binæ semper Ellipsim contingunt singulæ in singulis punctis, reliquæ omnes, quæ iis interjacent eam secant in binis singulæ punctis; quæ extra illas cadunt, ipsi nusquam occurrunt. In Parabola unica contingit in unico puncto, reliquæ*

liquæ omnes bis secant, vel ipsi nusquam occurrunt, prout jacent a tangente versus focum, vel ad partes oppositas præter casum, quo recta data sit directrici perpendicularis, quo casu nulla tangit; secant vero omnes in singulis punctis singulæ, altera intersectione ita in infinitum abeunte; ut nusquam jam sit: In Hyperbola si recta data efficiat cum directrice angulum minorem angulo æqualitatis, binæ contingunt singulos ramos in singulis punctis, reliquæ vero nusquam occurrunt; vel eundem ramum in binis punctis secant; prout iis tangentibus interjacent; vel extra eas cadunt: Si recta data efficiat angulum æqualitatis; unica ex omnibus ipsi parallelis nusquam Hyperbolæ occurrit; sed binos ramos reliquit hinc inde; licet ad eos accedat magis; quam pro quavis data distantia utcunque parva; atque idcirco dicitur Asymptotus; *reliquæ omnes secant in singulis punctis singulæ ramum citeriorem; vel ulteriorem; prout jacuerint hinc inde ab ipsa asymptoto; altera earum intersectione ita in infinitum abeunte; ut nusquam jam sit: Si demum angulus inclinationis sit angulo æqualitatis major; omnes rectæ secant bis Hyperbolam; singulos nimirum ramos qualibet in punctis singulis:*

150. Horum omnium demonstratio sponte fluit rite F.41
perspectis positionibus omnibus circuli respectu directri- 42
cis, & rectarum LO, OZ positione respectu circuli. 43
Ac primo quidem in Ellipsi, in qua ratio determinans 44
est ratio minoris inæqualitatis; erit LS minor; quam 45
LG, ut in fig. 41; in Parabola æqualis; coeuntibus in ea punctis G, S; ut in fig. 42; in Hyperbola major; ut in fig. 43; 44; 45. Quare circulus in Ellipsi ad directricem non pertinget; in parabola eam continget in eo puncto, in quo coeunt G, S; in Hyperbola ultra eam transcurret, quam proinde secabit in binis punctis N, *n*; ad quæ ductę LN, L*n* inclinabuntur ad ipsam directricem in angulo æqualitatis; cum nimirum sit radius ad sinum anguli LNG; vel L*n*G, ut LN, vel L*n* ad LG; nimirum in ratione determinante.

151.

151. Praeterea si recta zOZ circulo occurrat in binis punctis T, t, patet rectam KH debere Sectioni Conicę occurrere pariter in binis punctis, dempto casu, quo LT, vel Lt congruat cum directione rectæ OL, recta vero KH non transeat per focum F, quo nimirum casu recta FP, vel Fp evadit parallela rectæ KH, puncto P vel p, in quo deberent concurrere ad determinandum Sectionis Conicæ punctum, ita in infinitum abeunte, ut nusquam jam sit. Quod si recta zOZ circulo nusquam occurrat, recta quoque KH nusquam occurret Sectioni Conicæ. Facile autem colligitur & illud: punctum P vel p debere jacere citra vel ultra directricem, prout punctum T, vel t jacuerit ad easdem partes directricis cum centro L, vel ad oppositas, cum in figuris prorsus similibus FHDP, TOGL, & ad directricem AB similiter positus, directrix ipsa debeat vel utrumque e lateribus secare, vel neutrum. Demum si coeuntibus punctis T, t, recta zOZ evadat tangens circuli, evanescente arcu illo intermedio Tt, coibunt etiam puncta P, p in Ellipsi, & recta KH evadet tangens.

152. Manente igitur inclinatione rectæ KH ad directricem, sive manente angulo ad H, concipiatur ea recta motu continuo translata ita, ut punctum H percurrat totam directricem, deveniendo ex parte sinistra A ex distantia quavis indefinite magna versus dexteram B, Habebuntur eo pacto omnes rectæ illam directionem habentes, & licebit contemplari quando, & qua ratione in datæ Sectionis Conicę perimetrum incurrent. In omni eo motu punctum O manebit semper cum maneat punctum L, & inclinatio LO ad directricem. Recta FH perficiet dimidiam conversionem circa punctum F, tendente puncto H dextrorsum; adeoque & rectæ Oz, OZ illi semper parallelæ dimidiam conversionem absolvent eodem ordine; sed si centrum circuli L assumptum fuerit citra directricem, quod ubique præstitimus, punctum z tendet a sinistra ad dexteram, punctum vero Z ipsi oppositum contra a dex-

tera

tera ad finiſtram. Ea mentis oculis diligenter ſiſtenda ſunt, ut liceat unico velut conſpectu caſus complecti omnes, toto ſpatio per lineas KH, OZ indefinite utrinque productas tanquam per everricula quædam velut perraſo.

153. Incipiendo ab Ellipſi in fig. 46 habebuntur 7 diverſi caſus lineæ zOZ reſpondentes totidem caſibus rectæ HK, ſive FH. In primo caſu OZ1 extra circulum cadet ex parte dextera, tum in ſecundo recta OZ2 jam ipſum continget alicubi pariter ex parte dextera in unico puncto Q, deinde recta OZ3 adhuc centrum L relinquens ad ſiniſtram circulum ipſum ſecabit in binis punctis T 1, *t* 1 tum OZ4 tranſiens per ipſum centrum ſecabit circulum in binis punctis T 2, *t* 2 deinde OZ5 relinquens jam centrum ad partem dexteram ipſum circulum pariter ſecabit in punctis T 3, *t* 3, tum OZ6 continget iterum alicubi in unico puncto *q* ex parte ſiniſtra, at demum OZ7 extra circulum cadet pariter ex parte ſiniſtra. Eodem igitur paſſu in primo caſu recta H1K1 extra Ellipſim cadet ex parte ſiniſtra, tum in ſecundo recta H2K2 jam ipſam continget alicubi pariter ex parte ſiniſtra in unico puncto I, deinde recta H3K3 adhuc focum F relinquens ad dexteram Ellipſim ipſam ſecabit in binis punctis P1, *p*1, tum H4K4 tranſiens per ipſum focum ſecabit Ellipſim in binis punctis P2, *p*2, illis nimirum, quæ determinavimus conſtructione ſecundi problematis num. 128 juxta num. 132; deinde H5K5 relinquens jam focum ad partem ſiniſtram ipſam pariter ſecabit in punctis P3, *p* 3; tum H6K6 continget iterum alicubi in unico puncto *i* ex parte dextera, ac demum H7K7 extra Ellipſim cadet pariter ex parte dextera. Quamobrem *e rectis omnibus datæ rectæ parallelis binæ ſemper Ellipſim contingunt ſingulæ in ſingulis punctis, reliquæ omnes, quæ iis interjacent, eam ſecant in duobus punctis, quæ extra illas cadunt, ipſi nuſquam occurrunt*: quod quidem de Ellipſi propoſueramus. F.46

154. In Parabola ſi recta data ſit obliqua ad directri- F.47

tem, quem casum exhibet fig. 47. habebuntur casus tantummodo quinque; qui nimirum eodem prorsus pacto procedent; ac numero superiore in Ellipsi. Sed quoniam hic ipsa directrix OA contingit circulum in illo puncto, in quo coeunt G, & S, post lineam z4OZ4 quævis linea z5OZ5 utcumque exiguum cum directrice angulum continens ipsum circulum secabit in binis punctis T3, t3. Quare utcunque punctum H5 recedat versus B, recta FH5 continente cum directrice angulum utcunque exiguum; semper recta H5K5 Parabolam secabit in binis punctis P3, p3. At si recta data sit per-
F.48 pendicularis directrici, ut in fig. 48; jam etiam LO evadente perpendiculari ad directricem, ipsum O congruit cum G, S in eo puncto, in quo directrix circulum tangit; & casus deducuntur ad tres tantum. Quævis enim zOZ ex illo contactu ducta circulum secabit in ipso puncto O, in quod proinde abibunt omnia puncta t, & præterea in aliquo alio puncto T: Nulla igitur ejusmodi recta HK Parabolam continget; secabit autem quævis ex iis in aliquo puncto P; quod determinabit recta FP parallela rectę LT, & in casu rectę H2 K2 transeuntis per focum punctum P2 determinabitur constructione Problematis secundi; vel Problematis primi, in quo verticem axis cujusvis Conicę Sectionis invenimus num. 36 & quidem in Parabola unicum. Recta autem ex F parallela rectæ Lt ducta, quæ deberet alteram intersectionem determinare rectę H1K1 vel H3K3 cum Parabola, congruet cum ipsa FK2, quæ ipsis parallela est ita, ut intersectio post recessum in infinitum nusquam jam sit. Quare omnium ejusmodi rectarum *unica contingit in unico puncto; reliquæ omnes ipsam bis secant; vel ipsi nusquam occurrunt prout jacent a tangente versus focum, vel ad partes oppositas; præter rectas directrici perpendiculares sive axi parallelas; quarum nulla tangit, secant vero omnes in singulis punctis singulæ, altera intersectione ita in infinitum abeunte, ut nusquam jam sit*. Quod de Parabola fuerat propositum.

155. Pro

155. Pro Hyperbola faciat primo data recta cum directrice angulum minorem angulo æqualitatis, ut in fig. 49; & quoniam Ln, LN inclinantur in ipso æqualitatis angulo (num. 150.); recta LO datæ rectæ parallela, adeoque continens angulum minorem ipsius LNn, LnN debebit directrici occurrere in aliquo puncto O extra circulum sito: Quare dum recta KH satis distat à foco F ita, ut $FH1$ satis inclinetur ad directricem; recta quidem $z1OZ1$ non occurret circulo ex parte $Z1$; sed tamen ipsum secabit bis ex parte opposita $z1$ in arcu ultra directricem excurrente. Eo casu patet ex num. 151. rectas $FP1$, $Fp1$ parallelas rectis $LT1$, $Lt1$ debere occurrere ipsi $K1H1$ in binis punctis $P1$, $p1$ ultra directricem sitis; nimirum debere occurrere ramo ulteriori Hyperbolæ, atque id accidet, donec $z2OZ2$ contingat illum ipsum arcum alicubi in q, recta $H2K2$ ipsum ulteriorem ramum contingente in i: tum recta $Z3Oz3$ nusquam circulo occurret; & recta $H3K3$ nusquam occurrat Hyperbolæ. Ubi autem iterum $OZ4$ contigerit circulum in Q citra directricem; recta $K4H4$ continget jam ramum citeriorem alicubi in I; ac deinceps casus quintus, sextus, & septimus se habebunt prorsus ut casus tertius, quartus, & quintus in Ellipsi; ac quocumque in immensum recedat $H7$ versus B semper obtinebit idem casus septimus. Igitur *si recta data efficiat cum directrice angulum minorem angulo æqualitatis, binæ ex omnibus rectis ipsi parallelis contingunt singulos ramos singulæ in punctis singulis, reliquæ vero nusquam occurrunt, vel secant in binis punctis eundem ramum, prout iis interjacent vel extra eas cadant*. Quod primo loco de Hyperbola proposuimus. F.49

156. Quod si recta data faciat cum directrice angulum æqualitatis, ut in fig. 50, recta LO abibit in ipsam LN, abeunte puncto O in N. Quamobrem quævis recta per O ducta secabit circulum in ipso puncto O, vel N, in quod proinde abibunt omnia puncta t; ac præterea in alio puncto T, præter unicam $Z2Oz2$ F.50

perpendicularem radio LN, quæ circulum continget, ipsa quoque intersectione T2 ibi coeunte cum t, &cum O, ac N. Donec igitur punctum H1 fuerit satis remotum a foco, angulo FH1B satis acuto, recta Z1Oz1 secabit ex parte z1 in T1 arcum circuli jacentem ultra directricem, & recta K1H1 ramum ulteriorem in P1, abeunte autem t in O recta ipsi Lt parallela ex F ducta, erit parallela ipsi H1K1, ac ejus intersectio ita in infinitum recedet, ut nusquam jam sit facta Z2z2 tangente circuli, ubi & FH2 evadit perpendicularis rectæ K2H2, ac proinde abeunte in O ipso etiam puncto T2, recta ipsi LT2 parallela ducta e foco F evadet parallela ipsi K2H2, ac proinde utraque intersectio determinanda nimirum a punctis t, T ita in infinitum abit, ut nusquam jam sit: unde consequitur rectam K2H2 nusquam occurrere Hyperbolæ. Reliquis autem omnibus OZ3, OZ4, OZ5 secantibus circulum in puncto t coeunte cum O, & in alio puncto T3, T4, T5, citra directricem sito, reliquæ omnes K3H3, K4H4, H5H5 secabunt ramum citeriorem Hyperbolæ in unico puncto P2, P3, P4 singulæ, altera intersectione, quæ nimirum in rectis K3H3 K5H5 determinanda erat per punctum t, ita in infinitum abeunte, ut nusquam jam sit, quod de intersectione rectæ K4H4, constat ex constructione probl. 2. num. 130. Cum vero quævis Z1O, Z3O utcumque parum inclinata ad illam Z2O perpendicularem radio LO circulum necessario secet in aliquo puncto T1, T3 hinc, vel inde a contactu O, pariter quævis K1H1, K3H3 utcunque proxima illi K2H2 secabit ramum citeriorem, vel ulteriorem in aliquo puncto P1, P2, ac proinde recta illa K2H2 indefinite producta accedet hinc ramo ulteriori, inde citeriori indefinite productis magis, quam pro data quavis distantia, quin ipsis umquam occurrat, quod ipsum exprimit asymptoti nomen. Quare in Hyperbola, si rectæ, quæ parallelæ sunt rectæ datæ, cum directrice *efficiant angulum æqualitatis, nulla Hyperbolam contingit, una ex*

iis

iis omnibus est asymptotus, quæ nimirum nusquam ipsi occurrit, sed binos ramos relinquit hinc inde, licet ad eos accedat magis, quam pro data quavis distantia utcunque parva: reliquæ omnes secant in singulis punctis singula ramum citeriorem, vel ulteriorem, prout jacuerint hinc inde ab asymptoto sibi parallela, altera earum intersectione ita in infinitum abeunte, ut nusquam jam sit. Quod secundo loco de Hyperbola proposuimus.

157. Si vero demum recta data faciat cum directrice angulum majorem angulo æqualitatis, ut in fig. 51, recta LO accedet magis ad perpendiculum LS, abeunte puncto O intra circulum. Quamobrem quævis recta ZO per ipsum O ducta secabit circulum in binis punctis, quorum alterum *t* jacebit ultra directricem, alterum T citra. Quevis igitur recta KH secabit pariter Hyperbolam in binis punctis, quorum alterum *p* jacebit ultra, alterum P citra directricem, quod de recta K2H2 transeunte per focum demonstratum est ex constructione problematis secundi. Quare si ille inclinationis angulus sit major angulo æqualitatis, *omnes illæ rectæ secant Hyperbolam in binis punctis, nimirum singulos ramos in singulis*: Quod erat postremo loco propositum de Hyperbola. F. 51

Coroll. 2.

158. *Recta Conicam Sectionem nec in pluribus, quam in duobus punctis secat, nec in pluribus, quam in unico, contingit.*

159. Patet ex Coroll. 1., ex eo nimirum, quod recta OZ circulum nec in pluribus, quam duobus punctis, secat, nec in pluribus, quam in unico, contingit.

SCHOLIUM II.

160. Admirabilis sane ac notatu dignissima est asymptotorum natura, quæ nimirum si perpetuo producantur, perpetuo ad lineas pariter productas ita accedunt, ut nulla sit distantia utcunque parva, quam aliquando non transcendant; licet omnino nunquam coincidant, in quo cum convergentibus seriebus analogiam habent summam, & plurima sunt earum genera, de quibus agemus suo loco. Interea, ut evidentior evadat Tyroni res, immediate etiam hoc pacto demonstrabitur.

161. Si recta K2H2 in fig. 50 uspiam Hyperbolę occurreret in R, vel r, deberet esse FR ad RH2, vel Fr ad rH2 in ratione æqualitatis cum linea data in angulo æqualitatis ponatur inclinata ad directricem. Id autem fieri omnino non potest ob angulos RH2F, rH2F rectos. Recta igitur K2H2 quantumlibet producatur, nusquam Hyperbolæ occurret. At si sumatur, quævis K1H1, vel K3H3 jacens ultra ipsam, vel citra, & ipsi utcunque proxima, illa Hyperbolæ occurret, atque occursus facile determinatur. Si enim ea occurrat rectæ FH2 in i, vel I, erit angulus FH1i, FH3I acutus ob angulum FiH1, FIH3 rectum. Quare si fiat angulus H1FP1, H3FP2 æqualis ipsi FH1i, FH3I, adeoque pariter acutus, recta FP1, FP2 occurret alicubi rectæ H1i, H3I in P1, P2, eritque triangulum FP1H1, FP2H3 isosceles, ac proinde FP1, FP2 ad P1H1, P2H3 in ratione æqualitatis, & punctum P1, P2 ad Hyperbolam, quorum primum jacebit ultra directricem, ut i, secundum citra, ut I. Quę quidem demonstratio & simplicissima, & evidentissima est.

162. Simul autem hic etiam sine circulo problema admodum facile solvitur inveniendi punctum ad Hyperbolam in recta inclinata in angulo æqualitatis, & patet ex constructione ipsa eam in unico puncto Hyper-

per-

perbolæ occurrere. Eodem pacto etiam in parabola fig. F.48
48 rectarum KH directrici perpendicularium intersectio cum Parabola facilius invenitur facto angulo HIFPI æquali angulo FHIPI. Res eodem redit, cum ibi angulus rectus æqualem rationem requirat, & proinde angulorum æqualitatis vices gerat.

163. Sequentibus hujus constructionis Corollariis eruemus primum proprietates quasdam harum linearum, quæ solæ inter omnes sibi parallelas Sectioni Conicæ nusquam occurrant, reliquis omnibus eam secantibus semel, tum faciemus gradus ad eas, quarum aliæ bis secant, aliæ contingunt.

Coroll. 3.

164. *In Hyperbola asymptoti sunt binæ, sunt perpendiculares rectis a foco ductis ad earum intersectionem cum directrice, transeant per centrum, binos ramos binis ad verticem oppositis angulis continent, quos angulos axis transversus bifariam secat, ac earum segmenta intercepta inter centrum & directricem æquantur singula semiaxi transverso.*

165. Binas esse constat ex eo, quod habeantur binæ inclinationes LN, L*n* in fig. 50 hinc inde in angulo æqualitatis, ac singulæ habere debeant asymptotum sibi parallelam. Esse perpendiculares rectis a foco ductis ad earum intersectiones cum directrice, demonstratum est num. 156. Reliqua sic demonstrantur. Centro C intervallo semiaxis transversi CM in fig. 52 inveniantur in directrice puncta H, *h* ductisque CH, C*h*, F.52
& FH, F*h*, erit CF ad CH, ut CH ad CE in ratione determinante, cum in ea sit CF ad CM, & CM ad CE (num. 90). Quare primo quidem rectæ CH, C*h*, quarum ratio ad CE est eadem, ac ratio radii ad sinum anguli CHE, C*h*E, inclinantur directrici in angulo æqualitatis (num. 10). Deinde similia erunt triangula CHF, CHE (Coroll. 2. Prop. 12. Geom.) Quare angulus CHF erit æqualis recto CEH, adeoque CH erit asymptotus, & eadem est demonstratio pro C*h*, quarum utraque præterea ex constructione æ-

quatur semiaxi transverso CM. Patet autem trianguli HC*h* isoscelis angulum HC*h* ab axe CM perpendiculari basi secari bifariam, ut & basim ipsam, ac cum singulæ asymptoti binas ramos hinc inde relinquant, oportet rami ipsi jaceant in binis earum angulis ad verticem oppositis.

Coroll. 4.

166. *Distantia foci ab intersectione asymptoti cum directrice æquatur semiaxi conjugato; ac utrique æquatur segmentum tangentis per verticem axis ductæ, & interceptum ipso vertice, atque asymptoto.*

167. Nam ob angulum FHC rectum; est quadratum FH differentia quadratorum CF, CM, cui (num. 64) æquatur quadratum semiaxis conjugati CX, adeoque FH, CX æquantur inter se. Si autem recta axi perpendicularis per M ducta, quæ ibi Hyperbolam continget (num. 48), occurrat asymptotis in T, *t*, æqualia erunt triangula rectangula CMT, CHF, quorum angulus ad C communis, & latera CM; CH æqualia, adeoque & MT æquatur FH, & CT æquatur CF, ac eadem est demonstratio pro F*h*, M*t*, C*t*.

Coroll. 5.

168. *Asymptoti sunt diametri ejus rectanguli; quem efficiunt rectæ utrique axi parallelæ, ductæ per alterius vertices, habentis latera ipsis axibus æqualia; ac radius ad tangentem anguli, quem utravis asymptotus continet cum utrolibet axe, est ut ille axis ad alterum: & Hyperbolæ, quæ habent eosdem cum eodem axe asymptotorum angulos, sunt similes, & viceversa.*

169. Si enim per alterum axis verticem *m* ducatur recta axi transverso perpendicularis, occurrens asymptotis CT, C*t* in I, & *i*, erunt eadem demonstratione *m*I, *mi* æquales ipsi CX, C*x*; cum & eç, & M*t*, MT sint iis præterea parallelæ, recta quoque *t*X, T*x* parallelæ erunt, & æquales (Coroll. 1. Prop. 2. Geom.) semiaxi transverso CM, & recta IX, *ix* semiaxi C*m*, ac totum T*t*I*i* rectangulum habens latera æqualia ipsis

ſis axibus Mm, Xx; ubi radius ad tangentem anguli MCt eſt, ut CM ad Mt, ſive ad CX, vel ut Mm ad Xx; ac radius ad tangentem anguli XCt, ut CX ad Xt, vel ad CM, ſive ut Xx ad Mm. Hyperbolæ vero, quę eandem habebunt ad eundem axem aſymptotorum, inclinationem, eandem habebunt rationem axis tranſverſi ad conjugatum, adęoque erunt ſimiles, & viceverſa.

Coroll. 6.

170 *Si altera e binis Hyperbolis habeat pro axe tranſverſo axem conjugatum alterius, & viceverſa, quas dicimus* Hyperbolas Conjugatas, *communes habebunt aſymptotos, & æqualem focorum diſtantiam a communi centro.*

171. Si enim alia Hyperbola habeat pro axe tranſverſo, Xx, pro conjugato Mm, rectangulum illud ſuperioris Corollarii erit pro utraque idem; adeoque communes utrique diametri ejus rectanguli, & diſtantię focorum a centro, quæ in ſingulis æquari debent eidem CT, vel Ct, communes erunt.

SCHOLIUM III.

172. HÆC quidem de Hyperbolarum aſumptotis fere ſponte fluxerunt, ex quibus facile ſolvuntur plurima problemata, quibus quærantur aſymptoti dato foco, centro, & directrice, vel foco, centro, & vertice axis tranſverſi, vel binis axibus, vel quæratur directrix datis aſymptotis, & foco, vel alia hujuſmodi, quæ per ſe quiſque facile ſolvet; pendent autem a combinatione eorum, quæ in iis theorematis connectuntur inter ſe. Plures aliæ maxime notabiles aſyptotorum proprietates occurrent infra. Notanda interea mira indoles quatuor ramorum pertinentium ad binas Hyperbolas conjugatas, quorum crura in infinitum producta ad ſe invicem accedunt magis, quam pro quavis data differentia, quin uſquam concurrant. Porro ejus figuræ, quam ſimul concludunt, ana-

analogia quædam satis elegans cum Ellipsi ultro pariter se nobis offeret infra. Interea transibimus ad nonnullas proprietates rectarum Conicam Sectionem secantium, quæ ad plures tangentium proprietates nos deducent.

Coroll. 7.

173. *Si recta directrici alicubi occurrens Sectionem Conicam in binis punctis secet, bini radii foci ad Sectionum puncta ducti, cum recta transeunte per illum occursum, & focum continebunt angulos hinc inde æquales. Si autem contingat, rectæ ductæ a foco ad contactum, & occursum cum directrice rectum angulum continebunt.*

F.41 174. Nam in fig. 41, 42, 43, 44 in quibus puncta
42 P, *p* jacent in eodem ramo, posito V in recta HF pro-
43 ducta ad partes F, in fig. vero 45 eo posito ad partes
44 H; anguli HFP, VF*p*, quos rectæ FP, F*p* continent
45 cum recta VF, erunt æquales angulis LT*t*, L*t*T, quos radii LT, L*t* iis paralleli continent cum chorda T*t* parallela ipsi VFH; adeoque cum hi æquentur inter se ob isoscelismum trianguli TL*t*, etiam illi inter se pariter æquales erunt.

175. Inde autem jam patet, si coeuntibus punctis P, *p*, ubi ad eundem ramum terminantur, recta KH evadat tangens, foci radiis FP, F*p* coeuntibus in unicum, debere ipsum hunc radium evadere perpendicularem ipsi VFH. Sed idem multo magis manifestum fit in fig. 46, 47, 49, ubi angulus, quem IF, vel *i*F continet cum
F.46 FH sibi respondente, debeat esse æqualis angulo, quem
47 circuli radius LQ, vel L*q* priori parallelus continet cum
49 QO, *q*O tangente circuli parallela posteriori, adeoque rectus.

Coroll. 8.

176. *Binæ tangentes ductæ per extrema puncta chordæ transeuntis per focum* (Chordam *autem dico rectam, quæ jungit bina quævis perimetri puncta, licet in Hyperbola ea pertineat ad ramos oppositos) concurrunt in directrice, & ibi continent angulum in Ellipsi acutum, in Parabo-*

rabola rectum, in Hyperbola obtusum, vel acutum, prout chorda jungit bina puncta ejusdem rami, vel ramorum oppositorum.

177. Si enim chorda Pp, in fig. 53, 54 transeat per focum F, ducta FH ipsi perpendiculari, donec occurrat directrici in H, rectæ PH, pH erunt tangentes (num. 173). Ductis autem in primo casu in fig. 53 rectis PD, pd perpendicularibus directrici, erit PF in Ellipsi minor, in Parabola æqualis, in Hyperbola major, quam PD, adeoque cum PD, PF sint sinus angulorum PHD, PHF ad radium communem HP (num. 25. Trig.), erit angulus PHF in Ellipsi minor, in Parabola æqualis, Hyperbola major, quam PHD; ac pariter etiam pHF respectu pHd. Quare totus angulus PHp constans e binis PHF, pHF minor in Ellipsi, æqualis in Parabola, major in Hyperbola binis PHD, pHd simul sumptis, sive residuo ad duos rectos, quibus nimirum æquantur omnes anguli prodeuntes ex H versus F simul sumpti; ac proinde ipse PHp recto minor in Ellipsi, æqualis in Parabola, major in Hyperbola. At in fig. 54, ubi P, p sunt ad ramos oppositos, ob angulum HFP rectum, acutus est totus FHp, adeoque multo magis PHp acutus est. F. 53 54

Coroll. 9.

178. *Recta ex concursu tangentium directrici perpendicularis in Parabola chordam per focum ductam secat bifariam, & ejus segmentum inter directricem, & chordam interceptum æquatur dimidiæ chordæ, ac secatur bifariam in ipsa Parabolæ perimetro.*

179. Nam in Parabola fig. 53 ob æquales angulos PHD, PHF, & angulos PDH, HFP rectos, angulus quoque HPI æqualis erit angulo HPD, sive ducta perpendiculari ad directricem, & proinde parallela PD, æqualis angulo PHI alterno ipsius HPD. Igitur & latera IH, IP trianguli PIH, æqualibus angulis opposita, æqualia erunt, ac eadem demonstratione ip æquatur IH, adeoque & IP. Si autem ipsa HI occurrat perimetro in V, erit FV æqualis VH, adeoque angulus VFH æqualis

lis VHF. Cum igitur in triangulo rectangulo IFH bini anguli VHF, VIF simul æquentur tertio IFH recto, erit & VIF æqualis VFI, & VI æqualis VF, adeoque & VH.

SCHOLIUM IV.

180. E Corollario septimo admodum facile deducitur aliud Theorema, quod quidem posset hic in Corollariorum serie collocari. Verum cum contineat unam è præcipuis Sectionum Conicarum generalibus proprietatibus, & ipsam itidem admodum fœcundam, eandem sequenti Propositione enunciabimus: tum ex ea plura deducemus Corollaria, quorum pleraque summum habent usum. At primi raro admodum usus adveniet, nec ab eo alia pendent. Cum tamen in Elementis demonstrari soleat, ipsum etiam deducemus, & ita exprimemus, ut generaliter verum sit, licet ab aliis ita exprimi soleat, ut in aliquo casu sit falsum.

PROPOSITIO IV. THEOREMA.

181. *SI è quovis puncto perimetri in Ellipsi, vel Hyperbola ducantur binæ rectæ ad binos focos, vel in Parabola altera ad unicum focum, altera axi parallela, eæ cum tangente per idem punctum ducta æquales continent angulos hic inde.*

182. De Parabola patet ex eo, quod ob angulum HFP in fig. 53 rectum (num. 173.), & basim HP communem, ac latera PF, PD æqualia, æquatur angulus HPF angulo HPD, vel productis DP, HP in O, & Q, angulo quoque OPQ ipsi ad verticem opposito.

183. In Ellipsi autem, & Hyperbola fig. 55, 56 si
F.55 tangens per P ducta occurrat directrici AB pertinenti
56 ad focum F in H, & directrici *ab* pertinenti ad focum *f* juxta num. 87. in *h*, inclinabitur in eodem angulo ad utramque, cum eæ nimirum sint parallelæ.

Qua-

Quare erit (num. 2, & 87) FP ad PH, ut *f*P ad P*h*, adeoque ob angulos ad F, & *f* rectos æquales (nu. 173) etiam (num. 25. Trig.) cosinus angulorum FPH, *f*P*h*, & ipsi anguli FPH, *f*P*h* inter se, ac in Hyperbola, productis pariter *h*P, *f*P in Q, & O, anguli FPH, OPQ æquales erunt. Q.E.D.

Coroll. I.

184. *Duplum anguli, quem continent binæ tangentes, æquatur in Parabola angulo, quem binæ rectæ a contactibus ad focum ductæ ibi continent si ibi continent ita, ut cuspis anguli spectet concursum tangentium; in Ellipsi vero differentiæ, in eodem Hyperbolæ ramo summæ binorum angulorum, quos ejusmodi rectæ ad binos focos ductæ in iis continent, si in Ellipsi bini hiatus se mutuo spectent, & in Hyperbola uterque spectet eandem plagam; quod si anguli diversas positiones habeant, alter ex iis substitui debet ejus complemento ad quatuor rectos.*

185. Nam in fig. 57 in Parabola si tangentes sint MPH, *mp*H, ducantur PO, *po*, H*n* parallelæ axi ad eam plagam, ad quam ipsa in infinitum protenditur intra Parabolam, & recta HFN per focum F, erunt bini anguli FPH, F*p*H æquales binis in contactu MPO, *mpo*, sive ob parallelas binis PH*n*, *p*H*n*, adeoque simul toti PH*p*. Angulus autem NFP externus æquatur simul binis FPH, FHP, & NF*p* binis F*p*H, FH*p*, adeoque totus PF*p* toti PH*p* una cum binis FPH, F*p*H ipsi æqualibus, nimirum duplo FH*p*. F.57

186. At in Ellipsi in fig. 58 ductis HFN, H*fn*, bini FPH, F*p*H æquales erunt binis *f*PM, *fpm*, sive quatuor internis, & oppositis P*f*H, PH*f*, *pf*H, *pf*H, nimirum toti PH*p*, & toti P*fp*. Angulus autem PF*p* æqualis binis PFN, *p*FN, sive quatuor internis FPH, FHP, F*p*H, FH*p*, vel binis illis FPH, F*p*H cum angulo PH*p*, adeoque angulo PH*p* bis, & toti P*fp* semel. Quare angulo P*fp* dempto a PF*p*, remanet angulus PH*p* bis. F.58

187. Demum in Hyperbola fig. 59 ductis *f*H*n*, HFN,

angu-

F.59 angulus PFp constans binis PFN, pFN cum æquetur quatuor FPH; FHP; FpH; FHp; excedit PHp per binos FPH; FpH. Simili argumento PHp excedit Pfp per binos HPf; Hpf prioribus æquales. Igitur PFp, PHp; Pfp sunt in continua arithmetica proportione; & binorum extremorum summa equatur duplo medio.

F.60 61 62 188. Quod si angulus PFp ut in fig. 60; 61; 62 obvertat hiatum ad partes oppositas N, pro ipso sumendum erit ejus complementum ad quatuor rectos; nimirum aggregatum binorum PFN; pFN; ac demonstratio eodem redibit.

Coroll. 2.

189. *In Ellipsi normalis tangenti; & in Hyperbola tangens dividit bifariam angulum, quem continent bini binorum focorum radii ad contactum ducti, ac ipsa normalis; & tangens una cum binis focis axem dividunt in proportione harmonica.*

190. Primum patet: si enim in Ellipsi in fig. 63; & in Hyperbola in fig. 64 tangens occurrat axi in T, ac PI ipsi normalis in I; FP; fP in Hyperbola debent equales angulos continere cum tangente PT; quę si in Ellipsi producatur indefinite in H ad partes oppositas T; erunt pariter equales anguli FPT; fPH; adeoque & FPI; fPI; eorum complementa ad rectos TPI; HPI equales erunt.

F.63 64

191. Secundum autem deducitur ex primo, & ex nu. 30, cum nimirum rectarum PT, PI altera secet bifariam angulum FPf, altera sit huic ipsi perpendicularis.

Coroll. 3.

192. *Binæ distantiæ* FP; fP *focorum a contactu, binæ* FI, fI *in axe computatæ a normali, binæ* FT, fT *ibidem computatæ a tangente sunt in eadem ratione inter se: Tres distantiæ* CI, CF, CT *centri* C *computatæ in axe a normali; a foco; a tangente sunt in continua ratione geometrica rectarum* FI; FT; *in qua focus dividit distantiam* IT *normalis a tangente. Si e binis focis, & centro demittantur perpendicula* FA; CL;

fa in

fa in tangentem, sunt in eadem ratione inter se quatuor rectarum binaria, 1 TF, TI, 2. TC, Tf, 3. FA, IP, 4. CL, fa.

193. Patent omnia ex proprietatibus proportionis harmonicæ propositis ante Prop. 1. a num. 18. Nimirum eandem esse rationem FI, I*f*, & FT, T*f*, ac FP, F*f* partim ex ipsa notione proportionis harmonicæ; partim ex num. 30: Rectas CI, CF, CT; esse continue proportionales in ratione I*f* ad *f*T patet ex num. 22 ob F*f* intervallum binorum punctorum alterniorum sectum bifarium in C. Sunt autem IF ad FT, ut I*f* ad *f*T, ex prima hujus parte. Demum ob parallelismum; rectæ FA, IP, CL, *fa* sunt inter se, ut FT, IT, CT, *f*T. Has autem esse gometrice proportionales constat ex num. 26.

Coroll. 4.

194. *In Ellipsi, & Hyperbola si ex utrovis foco ducatur perpendiculum in tangentem, recta jungens hujus extremum punctum cum centro, parallela est rectæ jungenti contactum cum foco altero, & æqualis semiaxi transverso; adeoque ipsi æqualis erit recta ex centro ad tangentem ducta parallela jungenti focum cum contactu ipso; eidem vero æquale est etiam segmentum rectæ transeuntis per contactum, & focum utrumlibet interceptum ipso contactu, & recta tangenti parallela ducta per centrum.*

195. Nam si tangens TP in fig. 63, 64 occurrat in A; & O rectis CA, FO parallelis rectæ *f*P, recta vero ducta per C parallela ipsi HP rectis PF, F*f*, OF, in B; *b*, R, ob CF, C*f* æquales; erunt æquales etiam PA, AO (Coroll. 5 Propos. 12 Geom.) interceptę iisdem parallelis FO, CA; *f*P, ac ob eandem rationem CR, C*b* æquales erunt inter se, ac proinde æquales etiam FR, *fb* in triangulis RCF, *b*C*f* ęqualibus. Cum vero recta FP contineat cum tangente eundem angulum, quem *f*P, adeoque eundem, quem FO huic parallela, triangulum PFO erit isosceles, & FO ęqualis FP. Quare primo quidem in triangulis FAO, FAP

ob omnia latera ęqualia, anguli ad A erunt ęquales; & recta FA perpendicularis tangenti. Deinde cum RF ęquetur *fb*, & FO ęquetur FP in fig. 63, summa FP, P*b*, *bf*, quę (num. 92) ęquatur axi transverso, ęqualis erit summę OF, P*b*, FR, sive binis OR, P*b*, quarum singulę cum ęquentur inter se, & ęquentur CA ob parallelismum, erit tam CA parallela *f*P, quam P*b* ęqualis semiaxi transverso CM: imo cum & triangulum BP*b* sit isosceles ob angulos ad B, & *b* ęquales angulis alternis ad P, erit & PB ęqualis P*b*, adeoque ipsi semiaxi. In Hyperbola vero in fig. 64 excessus P*f* supra FF, erit idem, ac summa excessuum P*f* supra *bf*, sive FR, & ipsius FR supra PF, sive FO, quę nimirum ęquabitur binis PB, OR ęqualibus inter se, vel duplę AC. Cum igitur ille excessus P*f* supra PF ęquetur pariter axi transverso, ęquabitur ejus dimidio tam CA, quam P*b*, & eodem, quo in Ellipsi, argumento FB.

Coroll. 5.

196. *Perpendiculum e foco in tangentem ductum incidit in Ellipsi, & Hyperbola in concursum tangentis ipsius cum circulo habentis pro diametro axem transversum, in Parabola vero in rectam axi perpendicularem in ipso vertice.*

197. Primum constat ex precedenti, cum nimirum in fig. 63 64, ob rectam CA ęqualem CM, circulus centro C radio CM debeat transire per A. Secundum
F.65 patet in fig 65 ex eo, quod si tangens occurrat rectę FD in A, eam ibi secabit bifariam, cum secet bifariam angulum ad P trianguli isoscelis FPD. Ac proinde, si ducatur MA, ea ob FD, FE sectas bifariam in A, & M erit parallela directrici ED, adeoque perpendicularis axi.

Coroll. 6.

198. *In ipsa Parabola id perpendiculum est medium geometrice proportionale inter quadrantem lateris recti principalis, & distantiam contactus a foco, ac mutato*

utcum

utcumque puncto contactus, est in ratione subduplicata distantiæ ipsius.

199. Nam triangula rectangula FMA, FAP similia sunt, cum habeant unum angulum rectum æqualem, & angulus PFA æqualis PDA ob PD, PF æquales, æquatur etiam alterno AFM, ac proinde FM ad FA, ut FA ad FP. Hinc autem quadratum FA æquatur rectangulo sub FM, quæ (n. 68.) est quarta pars lateris recti principalis, & FP, adeoque ob FM invariatam, ut cumque mutetur P, id quadratum est, ut FP, nimirum ipsa FP in ratione duplicata FA, & hæc in subduplicata illius.

Coroll. 7.

200. *In Parabola ipsa normalis terminata ad axem est dupla perpendiculi e foco in tangentem demissi: distantia foci tam a normali, quam a tangente computata in ipso axe, æqualis distantiæ contactus a foco; subtangens dupla abscissæ, subnormalis dimidia lateris recti principalis; normalis ad tangentem, ut latus rectum ad ordinatam.*

201. Nam nomine *Tangentis*, *Normalis*, *Subtangentis*, *Subnormalis*, intelligitur PQ intercepta inter contactum & axem; PI perpendicularis tangenti pariter terminata ad axem; QR segmentum axis inter tangentem, & ordinatam; RI segmentum ejusdem inter normalem, & ordinatam. Porro primo PI æquatur FD ob parallelas, adeoque est dupla FA. Secundo erit inde, ut IP dupla FA, ita IQ dupla FQ; adeoque FQ æqualis FI, sive PD, nimirum distantiæ FP. Tertio ut IP dupla FA, ita PQ dupla AQ, adeoque & subtangens RQ dupla MQ, adeoque dupla etiam abscissæ residuæ RM. Quarto in triangulis FED, IRP ob laterum omnium parallelismum similibus, &, ob RP, ED æquales, æqualibus, erit subnormalis RI æqualis FE dimidio lateri recto principali. Quinto demum ob angulum ad I communem triangulis rectangulis IRP, IPQ erit normalis IP ad tangentem PQ, ut IR ad semiordinatam RP, adeoque ut totum latus rectum ad totam ordinatam.

SCHOLIUM.

202. PRoprietas, quam in hac propositione demonstravimus est una è potissimis Sectionum Conicarum proprietatibus, quæ nimirum ipsis focis nomen dedit. Nam radii lucis in speculum incidentes ita reflectuntur, ut angulum reflexionis faciant angulo incidentiæ æqualem, qui anguli, ubi speculi superficies est curva, æstimantur penes tangentem in ipso incidentiæ,
F.66 & reflexionis puncto. Nimirum in Ellipsi in fig. 66
67 radii omnes fP egressi e foco f incidentes in perime-
68 trum debent reflecti ab F, & viceversa: in Parabola in fig. 67 radii omnes OP delati per rectas axi parallelas debent pariter colligi in F, & radii egressi ex F debet abire paralleli. In Hyperbola in fig. 68. si radii OP deferentur cum directione tendente ad f debent pariter colligi in F, & si egrediantur ex F, debent abire tanquam si egressi essent ex f. Atque hoc pacto igne satis valido excitato in f, potest in magna distantia accendi ignis in F, ac speculo Parabolico obverso soli, cujus radii adveniunt ad sensum paralleli, excitatur ignis in ejus foco F, ibidem vero accensa candela in ipso F, lumen satis validum ad magnam distantiam transmitti potest per radios post reflexionem parallelos.

203. His perspectis regrediemur iterum ad constructionem illam nostram, & motum lineæ parallelæ, unde aliam admodum insignem Sectionum Conicarum proprietatem eruemus, nimirum secundas diametros, quæ chordas omnes parallelas bifariam secant, ac ex hac ipsa alia theoremata tanquam ex novo quodam ramo novos surculos quoquoversum prorumpentes deducemus. Sed præmittemus Lemma quoddam generale, cujus usus etiam infra occurret, & in Geometria late patet.

LEMMA.

204. *SI tres rectæ, Pp, Qq, Tt in fig. 69; 70 conveniant in eodem puncto F, & a binis punctis H, h unius ex iis, ut Pp, ducantur binæ parallelæ HA, ha usque ad alteram e reliquis, Tt, & binæ itidem parallelæ HR, hr, vel jacentes, vel non jacentes cum iis in directum usque ad alteram Qq, erit semper* HA ad HR, *ut* ha *ad* hr, *ac mutato utcumque puncto* H *per rectam* Pp, *manentibus rectarum* HA, HR *directionibus, manebit earum ratio constans. Contra vero si fuerint* Ha, ha *parallelæ inter se*, & HR, hr *inter se, fuerit autem* HA *ad* HR, *ut* ha *ad* hr, *jacentibus punctis* H, R; h, r, *vel ad eandem plagam, ut in fig.* 69. *vel ad oppositas, ut in fig.* 70, *prout* HA, ha *jacuerint ad easdem, vel ad oppositas, rectæ* Qq, Pp, Tt *ductæ per extrema parallelarum puncta* H, h; A, a; R, r, *vel nusquam concurrent, vel simul concurrent in eodem puncto* F: & *si manente ratione* HR *ad* HA, *earumque directione, bina puncta* H, A *excurrant per binas rectas, excurret etiam* R *per rectam, si illæ coeunt, convergentem ad idem punctum* F. 69. 70

205. Prima pars patet, quia triangula HFA, *h*F*a* ob angulos parallelarum æquales erunt semper similia, ut & HFR, *h*F*r*. Quare erit HA ad HF, ut *ha* ad *h*F & HF ad HR, ut *h*F ad *hr*, adeoque ex æqualitate ordinata HA ad HR, ut *ha* ad *hr*. Secunda pars directe facile demonstrari potest, sed deducitur facilius e prima. Si enim coeuntibus rectis H*h*, A*a* in F, recta per F, & *r* ducta non transiret per R, transiret per aliud punctum O rectæ HR, & esset HA ad HO, ut *ha* ad *hr*, sive ex hypothesi ut HA ad HR, & proinde HO, HR æquales, pars, & totum.

PROPOSITIO V. THEOREMA.

206. *Chordas omnes parallelas inter se bifariam secat diameter, quæ in Ellipsi, & Hyperbola semper per centrum transit, in Parabola est direcrici perpendicularis, sive axi parallela, & data Sectione Conica, ac inclinatione ordinatarum, datur.*

207. De chordis parallelis, vel perpendicularibus directrici patet ex num 56, & 83, per quos bifariam secantur hæ ab axe conjugato, illæ ab axe transverso.
F.71 De reliquis sic demonstratur. In fig. 71, 72, 73, 74
72 quæ constructæ sunt juxta num. 142, & quarum pri-
73 ma pertinet ad Ellipsim, secunda ad Parabolam, tertia
74 ad chordas jungentes in Hyperbola bina ejusdem rami puncta, quarta ad chordas jungentes in ipsa Hyperbola ramos oppositos, agatur LV perpendicularis ad chordam circuli T*t*, quam & secabit bifariam: producatur LO, qua opus est, ut circulo ipsi occurrat in M, & *m*, secetur chorda P*p* bifariam in R, ducaturque per focum F chorda P'*p*' ipsi parallela, occurrens directrici in Q, erectaque FI ipsi perpendiculari, quæ necessario alicubi occurret directrici in I, ducatur IR' ipsam *p*'P' secans bifariam in R', quæ (num. 134) in Ellipsi, & Hyperbola transibit per centrum, in Parabola erit perpendicularis directrici, adeoque paralle la axi.

208. Jam vero cum sit HP ad HF, ut OL ad OT, & HF ad H*p*, ut O*t* ad OL, erit ex æqualitate perturbata HP aad H*p*, ut O*t* ad OT, & HR ipsarum HP, H*p* semisumma in prioribus tribus figuris, semidifferentia in postrema, ad priorem HP, ut OV pariter semisumma, vel semidifferentia ipsarum O*t*, OT ad priorem O*t*. Quare cum ratio HR ad HA componatur ex tribus HR ad HP, HP ad HF, HF ad HA, & prima sit eadem ac OV ad O*t*, secunda eadem ac OL ad OT, ac tertia, ob triangulorum rectangulorum

HAF,

HAF, OVL similitudinem, eadem, ac OL ad OV; erit ipsa ratio HR ad HA eadem, ac solidi sub rectis OV, OL, OL ad solidum sub rectis Ot, OT, OV; nimirum ob VO communem; ut quadratum OL ad rectangulum TOt, sive ad rectangulum MOm ipsi aequale (Prop. 13. Geom.). Ea ratio est constans; utcumque mutata positione chordae Pp, dummodo ejus inclinatio ad directricem sit semper eadem, manentibus nimirum semper punctis O, M, L, m. Inde autem deducitur ex num. 204, omnia puncta R fore semper in eadem recta. Cum nimirum maneat & directio rectarum HA, HR, & ratio, ac puncta H, A excurrant per rectas IH, IF; excurret etiam punctum R per rectam ex I ductam, & chordae omnes parallelae ab eadem diametro bifariam secabuntur. Ea autem diameter erit illa ipsa IR', quae chordam per focum transeuntem bifariam secat. Atque id quidem patet ex eo, quod ea recta debet secare bifariam chordam quamvis utcumque proximam chordae P'Rp' transeunti per focum F. Sed sic accuratissime demonstratur; nam demonstratio illa generalis pro chordis omnibus non habet locum pro ea; quae per focum transit, licet facile ad eandem reduci possit.

209. Ratio HR ad HA est eadem, ac quadrati LO ad rectangulum MOm (num. 208), nimirum (Coroll. 2, & 5. Prop. 13. Geom.) ad differentiam quadratorum OL, LM. Quare erit HR ad RA differentiam in prioribus tribus figuris, summam in quarta ipsarum HR, HA, ut quadratum OL ad quadratum LM, quod pariter provenit si in illis a quadrato OL auferatur differentia quadratorum OL, LM, & in postrema figura addatur, nimirum ut quadratum OL ad quadratum LT, vel ut quadratum HP ad quadratum PF; sive ut quadratum QP' ad quadratum P'F; & invertendo RA ad RH in ratione duplicata FP' ad P'Q, in qua ipsa ratione est R'F ad R'Q, cum (num. 134) R'F, R'P, R'Q sint continue in ea ratione simplici. Recta igitur IR debet transire per R' (num. 204). Cum vero

ipsa IR' in Ellipsi, & Hyperbola transeat per centrum (num 134), in Parabola sit perpendicularis directrici, patet chordas omnes parallelas habere suam diametrum, quæ eas omnes bifariam secet, & transeat in illis per centrum, in hac sit perpendicularis directrici, & parallela axi, adeoque detur invento puncto I per rectam FA perpendicularem cuilibet ex hujusmodi chordis, Q. E. D.

Coroll. I.

210. *Quævis recta per centrum transiens in Ellipsi, & Hyperbola, præter solas Hyperbolæ asymptotos, & parallela axi in Parabola, est diameter suas habens ordinatas, quas bifariam secat, & quarum directio datur, data Sectione Conica, & ipsa diametro, nec præter axes ulla diameter suis ordinatis perpendicularis est.*

211. Rectam enim directrici parallelam, ac perpendicularem, sive axes ipsos, in Ellipsi & Hyperbola, quæ quidem ordinatis suis perpendicularis sit, esse ejusmodi constat ex num 56., & 83. Data autem quavis alia recta, quæ per centrum C transeat in fig. 71, 73, 74, ea directrici occurret in aliquo puncto I, ex quo ducta recta ad focum IF, & per F recta QF perpendiculari ipsi IF, ipsa IC secabit bifariam chordas omnes Pp parallelas ipsi QF, quæ (num. 149) semper habebuntur in fig. 71 in Ellipsi, ac in Hyperbola habebuntur semper, præter casum, quo in fig. 73, 74 recta FQ inclinetur ad directricem in angulo æqualitatis, quo solo casu rectarum eam inclinationem habentium altera intersectio ita recedit in infinitum, ut nusquam jam sit. At is casus est ille ipse in quo CI est alterutra ex asymptotis, & ipsi QF parallela. Nam in fig. 50 recta FH2 est perpendicularis asymptoto K2H2 transeunti per centrum, & rectæ K4FH4 habenti inclinationem æqualitatis ad directricem, juxta num. 156. In Parabola vero in fig. 72 quævis recta parallela axi transverso occurrit directrici alicubi in I, unde ducta recta IF, recta FQ huic perpendicularis,

ris ; non poterit esse perpendicularis directrici, in quo solo casu rectarum ipsi parallelarum altera intersectio ita in infinitum recedit, ut nusquam jam sit: cumque semper IF sit perpendicularis ordinatae Pp, nusquam erit ipsi perpendicularis diameter IR.

Coroll. 2.

212. *Quævis diameter in Ellipsi occurrit perimetro in duobus punctis, in Parabola quævis in unico, in Hyperbola quævis in duobus pertinentibus ad binos ramos oppositos, vel in nullo, prout jacuerit in iisdem asymptotorum angulis, quos axis transversus bifariam secat, vel extra, quæ puncta diametrorum vertices dico; ut in axibus: ac recta per hos ipsos vertices ducta ordinatis parallela est tangens. Porro cum diametri magnitudinem non definio, intelligo segmentum ipsius interceptum binis verticibus, ac in Hyperbola diametros jacentes in angulis asymptotorum, in quibus jacet axis transversus, dico* primarias, *quæ jacent extra, dico* secundarias, *& hæ quidem occurrunt binis ramis Hyperbolæ conjugatæ, ac eorum quoque vertices, dico illa occursuum puncta, pro earum magnitudine assumens segmentum interceptum binis verticibus. In Ellipsi autem quamvis diametrum primariam dico respectu suarum ordinatarum, ac in utraque diametrum parallelam ordinatis alterius diametri, seu tangentibus per ejus vertices ductis, dico ejus* conjugatam.

213. Nam in primis in Ellipsi chordæ omnes (num. 149.), in quocumque angulo inclinentur, habent binas tangentes parallelas, quibus clauduntur, in quam tangentem si desinat chorda Pp in fig. 71, debent binæ semiordinatæ RP, Rp, quæ nimirum semper æquantur inter se, simul evanescere, punctis P, p simul cum puncto diametri R abeuntibus in ipsum contactum. Eodem argumento in Parabola, in qua ordinatæ quæcumque unicam tangentem sibi parallelam habent; diameter, quæ cum sit perpendicularis directrici, in unico puncto debet occurrere curvæ, illi occurret in illo ipso contactu. At in Hyperbola ordinatæ omnes, quæ

ad directricem inclinantur in angulo minore, quam sit angulus æqualitatis; habent binas tangentes parallelas; contactibus pertinentibus ad ramos oppositos; quæ in angulo majore nullas habent. Porro in fig.
F.75 75. si CH sit altera ex asymptotis, & diameter quædam CI accedat ad perpendiculum CE magis, quam ipsa, Ci minus, ac ipsis FI, FH, Fi perpendiculares sint FO, FQ, Fo; (num. 134) quæ num. 211. erunt parallelæ ordinatis diametrorum CI, CH, Ci, satis patet, FO inclinari ad directricem in angulo minore, quam FQ, quę ipsi asymptoto parallela, ob angulum FHC pariter rectum, inclinatur in angulo æqualitatis; Fo in angulo majore; adeoque prout diameter accesserit magis, quam utravis ex asymptotis CH, Ch ad axem CEF, vel minus, nimirum prout jacuerit in eo asymptotorum angulo HCh; quem axis transversus secat, vel extra, habebit binas tangentes suis ordinatis parallelas, & pertinentes ad ramos oppositos, vel nullas (nu. 149); & in primo casu per illos ipsos contactus transire debebit, eodem argumento, in secundo nusquam occurret perimetro, cui si uspiam occurreret, haberetur ibi tangens ordinatis parallela; deberet enim ejus ordinata abire in tangentem, coeuntibus nimirum binis ejus extremis punctis, quę si non coirent, diameter ipsa ordinatam per idem punctum non secaret bifariam.

Coroll. 3.

214. *Diameter aream Conicæ Sectionis terminatam ordinata quavis, & totam in Ellipsi aream bifariam secat.*

215. Patet ex eo, quod si concipiatur ordinata a vertice diametri motu continuo, & parallelo delata, binæ semiordinatæ semper sibi æquales, & eadem celeritate progredientes, generabunt areas semper æquales.

Corll. 4.

Coroll. 4.

216. *Chordæ per bina extrema binarum ordinatarum puncta ductæ, ac tangentes per bina extrema ductæ ejusdem chordæ, si parallelæ non sunt, concurrunt in diametro: diameter vero per concursum tangentium ducta habet pro ordinata chordam jungentem binos contactus.*

217. Cum enim in Fig. 76, 77, ordinatę AB, *ab* bifariam secentur a diametro in E, & *e*, erit *eb* ad *ea*, ut EB ad EA, adeoque binæ rectę *a*A, *b*B debent (num. 204) concurrere cum diametro E*e* in eodem ejus puncto D. Ubi autem coeuntibus ordinatis *ab*, AB, rectę AD, BD desinunt in tangentes A*d*, B*d*, debebit punctum *d* manere in ipsa diametro. Hinc autem & postremum sponte fluit. F.76 77

Coroll. 5.

218. *Ellipsis centro, & utrique foco cavitatem obvertit, Parabola foco cavitatem, Hyperbolæ ramus uterque centro convexitatem, foco vero ramus citerior cavitatem, ulterior convexitatem.*

219. Nam in Ellipsi chordę omnes, adeoque omnia arcus puncta (num. 149.) jacent inter binas tangentes; inter quas & centrum jacet, quod situm est in medio inter binos contactus, & focus uterque, cum chordæ per eos ductæ debeant iisdem tangentibus contineri; adeoque Ellipsis & centro, & utrique foco cavitatem obvertit. In parabola focus jacet ad eas partes, ad quas chordæ jacent respectu tangentis, & in Hyperbola centrum inter binas tangentes, extra quas chordę jacent cum arcubus, focus ad eam plagam versus quam ramus citerior protenditur, ramo ulteriore vergente ad partes oppositas. Patent igitur, quę proposuimus etiam in iis.

SCHO-

SCHOLIUM I.

220. Quod ad curvaturam pertinet respectu focorum, poterat erui etiam immediate ex nu. 149; sed libuit potius huc reservare, ut simul haberentur etiam ea, quæ pertinent ad centra. Porro quo vergat curvatura respectu foci & centri, necessario demonstrandum est, cum inter cætera ubi in Mechanica inquiritur in vires, quibus Sectiones Conicæ describi possunt, inde pendeat, utrum eæ tendere debeant ad datum punctum, an ab ipso: nimirum utrum attractivæ esse debeant, an vero repulsivæ. Jam vero faciemus gradum ad proprietates quasdam Hyperbolæ relatæ ad asymptotos, quæ ab hac diametrorum chordas bifariam secantium proprietate pendent, & fœcundissimæ iterum sunt, ac quædam etiam, quæ Hyperbola habet Ellipsi quoque communia, sponte progignunt.

Coroll. 6.

221. *In Hyperbola segmentum chordæ interceptum inter unum extremum, & unam asymptotum, æquatur segmento intercepto inter alterum, & alteram, ac diameter, ubi ordinatas bifariam secat, secat etiam bifariam earum, si opus est, productarum segmentum interceptum asymptotis.*

222. Sit enim ejusmodi chorda Pp terminata ad eundem ramum in fig. 78, ad oppositos in fig. 79, quæ F.78 79 occurrat asymptotis in punctis H, h. Si PH, ph non sunt æquales, erit altera, ut PH, major. Abscissa PO æquali ph, ex C per O ducatur recta, quæ (num. 212) occurret alicubi eidem ramo in P', ac recta per P' parallela chordæ priori occurrat asymptotis in H', & h', Hyperbolæ iterum in p'. Diameter quidem, quæ hujusmodi chordas pro ordinatis habet, per centrum C transibit, & ipsas chordas secabit bifariam in R, & R' (num. 206). Cum igitur æquentur & RP, Rp, & PO, ph, erit & RO æqualis Rh; adeoque (n. 204) & R'P', & R'h' æquales erunt, nimirum & R'p, R'h'

æquan-

æquantur, pars, & totum. Æquales igitur sunt ipsæ PH, *ph*, & adita communi P*p*, ipsæ *p*H, P*h* æquales erunt, ac additis RP, R*p* æqualibus erunt & RH, R*h* æquales.

Coroll. 7.

223. *Tangens Hyperbolæ asymptotis terminata, secantur bifariam in ipso contactu, ac recta ex ipso contactu ducta parallela alteri asymptoto usque ad alteram, erit dimidia segmenti asymptoti prioris intercepti inter centrum & tangentem, ac secabit bifariam segmentum ejusmodi posterioris.*

224. Si enim in fig. 78 recta HP*ph* abeat in tangentem AI*a*, abeuntibus punctis P, *p* in contactum I debebit AI esse æqualis I*a*: quare ducta præterea ID parallela CA, donec occurrat C*a* in D, erit & DC æqualis D*a*: ac ob I*a* dimidiam A*a*, erit & ID dimidia AC.

Coroll. 8.

225. *Si e binis punctis* P, p *quibusvis Hyperbolæ, in fig.* 80, 81 *inclinentur ad binas asymptotos binæ rectæ* F.80
PB, PO, *&* pb, po *in quibusvis binis angulis datis*, 81
rectangulum BPO *sub binis inclinatis ab uno puncto, erit semper æquale rectangulo* bpo *sub inclinatis ab alio, quod proinde mutato puncto* P *utcumque manebit semper magnitudinis ejusdem.*

226. Nam ob parallelas erit PB ad *pb*, ut PH ad *p*H, sive sumptis æqualibus, ut *ph* ad P*h*, nimirum, ob parallelas, ut *po* ad PO: ac proinde rectangulum sub extremis PB, PO æquale rectangulo sub mediis *pb*, *po*.

Coroll. 9.

227. *Si e quovis puncto Hyperbolæ* P *ordinetur* PD *alteri asymptoto, parallela alteri, rectangulum sub abscissa a centro* CD, *& ejusmodi ordinata erit semper constans, quod rectangulum dicitur* Potentia Hyperbolæ, *adeoque mutato utcunque puncto, erunt ordinatæ in ratione reciproca simplici abscissarum.*

228. Nam si PO, PB abeant in PD, PR parallelas binis asymptotis, erit adhuc constans rectangulum sub

PD,

PD, PB, quæ abiens in PR evadit æqualis CD; lateri opposito parallelogrammi PRCD. Erit igitur constans etiam rectangulum sub CD, DP; & respectu binorum punctorum P, p, erit PD ad pd, ut cd ad CD.

SCHOLIUM II.

229. HÆC constans Hyperbolæ potentia est una e præcipuis proprietatibus Hyperbolarum, & assumi solet pro determinatione naturæ ipsius Hyperbolæ relatæ ad asymptotos, ita ut curvæ, in quibus ordinatæ sunt in aliqua ratione multiplicata, vel submultiplicata reciproca abscissarum, ut hic sunt in simplici, appellentur Hyperbolæ altiores. Ex ea plurimæ proprietates profluunt, quarum aliquas, ut monui eruam sequentibus Corollariis, tum regrediar ad eas, quæ eruuntur e præcedentibus Corollariis, ex quibus etiam illa ipsa potentia sponte profluxit.

Coroll. 10.

230. *Positis iisdem, area tam parallelogrammi* CDPR, *quod continent binæ rectæ ordinatæ ab eodem Puncto* P *ad binas asymptotos cum ipsis asymptotis, quam trianguli* CDP, *quam continet abscissa, ordinata asymptoto, & semidiameter, ac area in fig.* 78 ACa, *quam continet tangens ad asymptotos terminata cum ipsis asymptotis, sunt magnitudinis semper constantis.*

231. Si enim PB sit asymptoto perpendicularis, adhuc erit constans rectangulum sub PD, & PB, sive sub CR, & PB, nimirum factum ex basi, & altitudine parallelogrammi CDPR, adeoque tam ejus area, quam area trianguli PCD ejus dimidii. Du-
F.78 cta autem ID in fig. 78. parallela asymptoto AC, erit ob Aa sectam bifariam in I (numer. 223), area ACa dupla areæ ICa, adeoque, ob aC sectam itidem bifariam in D, quadrupla areæ CDI constantis.

Coroll. 11.

232. *Si in fig.* 80. *e binis punctis* P, p *ejusdem rami Hyperbolæ ducantur binæ ordinatæ* PD, pd *ad alteram asymptotum, & binæ aliæ* PR, pr *ad alteram, area* DPpd *clausa arcu, asymptoto, & prioribus binis ordinatis, æquabitur areæ* RPpr *clausæ eodem arcu, altera asymptoto, & posterioribus binis, ac earum singulæ erunt æquales areæ sectoris* PCp *terminati ad centrum* C. F.80

233. Si enim PD, *pr* sibi mutuo occurrant in *e*, area C*rpd* equabitur (num. 230) areæ CRPD. Quare dempta communi C*re*D, & addita communi P*ep*, erit area DP*pd* equalis aree RP*pr*. Quoniam vero & area trianguli CDP æquatur areæ trianguli C*dp*, si PD, C*p* sibi invicem occurrant in I, dempta communi CID, & addita communi PI*p*, erit area sectoris PC*p* æqualis areæ DP*pd*, adeoque & RP*pr*.

Coroll. 12.

234. *Concursus* e *ordinatæ* PD *in fig.* 82 *ad alteram asymptotum, cum ordinata* rp *ad alteram, & concursus* E *ordinatæ* RP *cum ordinata* dp *fit in diametro primaria* ICi *habente pro ordinata chodam* Pp, *& si e vertice* I *ejus diametri ducatur ordinata* IM *ad alteram asymptotum, erunt & abscissæ* CD, CM, Cd, *& ordinatæ* DP, MI, dp *continue proportionales* F.82

235. Ductis enim C*e*, CE, erit (num. 227) CD ad C*d*, ut *pd*, sive D*e* ad DP, sive *d*E. Quare ob angulos CD*e*, C*d*E in parallelis equales, similia erunt triangula CD*e*, C*d*E, & angulus DC*e* æqualis angulo *d*CE ac propterea recta C*e* supra CE cadit: ipsa autem E*e* diameter parallelogrammi P*ep*E bifariam secat alteram ejus diametrum P*p* in B, ut facile colligitur. Quare cum E*e* transeat per centrum C, ipsa erit diameter habens pro ordinata eandem P*p*, quæ si occurrat perimetro in I, & ducatur IM ordinata ad asymptotum C*d*, erit ob triangulorum

gulorum similitudinem CD ad CM, ut De, sive *dp* ad MI, nimirum (num. 227.) ut CM ad C*d*, adeoque CD, CM, C*d* in continua proportione, quibus cum sint reciproce proportionales (num. 227) PD, IM, *pd*; erunt & ipsæ in continua proportione.

Coroll. 13.

236. *Si sumantur abscissæ in altera asymptoto in continua proportione geometrica, & erigantur ordinatæ alteri asymptoto parallelæ, areæ clausæ binis quibusvis proximis ordinatis, arcu, & asymptoto erunt inter se æquales; ac inter se æquales areæ Sectorum terminatorum ad centrum a binis quibusvis proximis ordinatarum verticibus, constituentibus progressionem geometricam abscissis; vel ordinatis: area computata a data quavis ordinata; vel a data quavis semidiametro per ordinatæ verticem ducta usque ad sequentes ordinatas, vel semidiametros crescet in progressione arithmetica, & area clausa ordinata quavis, arcu, & asymptoto crescet in infinitum; si arcus & asymptotus in infinitum producantur.*

237. Nam existentibus CD, CM, C*d* in continua proportione geometrica, ut & DP, MI, *dp*, recta CI (num. 234) secat bifariam chordam P*p* in B, & proinde triangula PCB, *p*CB habentia bases PB, *p*B æquales, & eandem altitudinem in C habent areas æquales, a quibus si demantur areæ hyperbolicæ PIB, *p*IB æquales (n. 214) remanebunt æquales etiam areæ sectorum PCI, IC*p*, adeoque & areæ Hyperbolicæ PDMI, IM*dp*, quæ illis æquales sunt (num. 232) erunt inter se æquales. Eodem autem pacto sumpta C*m* tertia post CM, C*d*, invenietur area sectoris *p*C*i*, vel quadrilinei *dpim* æqualis prioribus, atque ita porro assumptis novis abscissis in continua proportione geometrica, ac remanentibus in eadem reciproca ordinatis, areis sectorum incipientibus a quavis semadiametro CP, vel areis quadrilineis incipientibus a quavis ordinata PD accedent nova incrementa semper æqualia, atque areæ proinde crescent in ratione arithmetica. Cumque numerus abscis-

fcissarum in geometrica proportione assumptarum augeri possit in infinitum, potest etiam in infinitum augeri numerus incrementorum illorum æqualium, quorum proinde summa, quamvis finitam magnitudinem excedet.

SCHOLIUM III.

238. HÆC areæ in arithmetica progressione crescentis proprietas, dum abscissæ crescunt in progressione geometrica est admodum insignis & notatu digna. Inde enim fit, ut areæ Hyperbolicæ haberi possint pro logarithmis numerorum, quos exprimunt abscissæ; quin imo ope ipsius areæ Hyperbolicæ computatæ methodo, quæ ope calculi integralis facile invenitur, logarithmi quoque computantur, & computatis semel logarithmis, area Hyperbolæ clausa datis ordinatis, & abscissis facile invenitur. Sed hic geometricas, non arithmeticas proprietates persequimur Sectionum Conicarum.

239. Pergam igitur ad aliam proprietatem, quæ pariter ex constanti illa potentia Hyperbolæ deducitur, cui alias ex aliis prorumpentes adjiciam.

Coroll. 14.

240. *Recta alteri asymptoto parallela, occurrens binis ramis Hyperbolarum conjugatarum, secatur bifariam ab altera asymptoto, ac Hyperbolarum conjugatarum potentiæ æquales sunt.*

241. Sint enim in fig. 83 juxta num. 170 axes communes M*m*, X*x*, communes asymptoti TB, *tb* occurrentes tangentibus per axium vertices ductis in T, *t*, B, *b*. Recta MX parallela asymptoto TB secabitur ab asymptoto C*t* bifariam in O, ut TB in C. Si autem quævis alia ipsi parallela IL occurrat C*t* in D, erit (n. 227) DI ad MO, ut CO ad CD, ut DL ad OX, adeoque ob OM, OX æquales, æquabuntur & DI, DL. Inde vero & rectangula CDI, CDL, quæ sunt bina-

rum

rum Hyperbolarum conjugatorum potentiæ, æqualia sunt.

Coroll. 15.

242. *Tangens asymptotis intercepta æquatur diametro conjugatæ ejus diametri, quæ per contactum transit, ac recta jungens in vertice binas diametros conjugatas, & alteri asymptoto parallela ab altera secatur bifariam.*

243. Si enim AIa fig. 83. sit ejusmodi tangens, erit (num. 223) CA dupla DI, adeoque æqualis IL, cui cum parallela sit, erunt & AI, CL equales, & parallele adeoque & eorum dupla Aa, Ll equalia. Diameter autem LCl cum parallela sit tangenti AIa, erit (num. 213) conjugata diametri ICi, & recta IL jungens earum diametrorum vertices, asymptoto TB parallela, ab asymptoto bt bifariam secatur.

Coroll. 16.

244. *Diametri conjugatæ in Hyperbolis sunt sibi invicem conjugatæ quatuor tangentes per earum vertices ductæ concurrunt in asyptotis, ubi parallelogramum constituunt inscriptum figuræ clausæ quatuor Hyperbolarum ramis, cujus area est semper constans, æqualis nimirum rectangulo sub axibus; ac parallelogrammum semidiametrorum conjugatarum rectangulo sub semiaxibus.*

245. Ducta enim in fig. 83. aLQ patallela iCI, erit segmentum asymptoti CQ equale IL, adeoque duplum DL, ac proinde aLQ tangens (num. 223), & ducta ldi, ac sumpta dq æquali dC, patet ob Cl, Ci, æquales CL, CI, fore & li æqualem LI, adeoque æqualem tam CA, quam CQ, & proinde dl, di dimidias CA, CQ. Quare Al, Qi convergent ad idem punctum q ita, ut sit Cq dupla dq, & Aq Qq sectæ bifariam in l, i, adeoque tangentes. Erit igitur & diameter Ii parallela tangentibus ductis per vertices diametri Ll, adeoque ejus conjugata: & AaQq erit parallelogrammum, quatuor tangentium, cujus area constanter æqualis erit areæ rectanguli TtBb, cum sint quadruple

druplę triangulorum ACa, TCt ęqualium (num. 230) & area $CIaL$ parallelogrammi semidiametrorum conjugatarum, vel area $ACLI$ cui ea ęquatur, ęqualis areę $TMCx$, cum sint duplę triangulorum ACI, TCM pariter ęqualium.

Coroll. 17.

246. *Omnium diametrorum primariarum minima est axis transversus, secundariarum conjugatus; quarum vertices quo magis ab axe ipso transverso vel conjugato recedunt, eo majores sunt, nec nisi binæ hinc inde in æqualibus angulis inclinatæ æquales: primaria autem est major, æqualis, vel minor respectu suæ conjugatæ, ac anguli asymptotorum, in quibus jacet axis transversus, & Hyperbola, sunt acuti recti, vel obtusi, prout axis transversus fuerit, major, æqualis, vel minor respectu conjugati.*

247. Nam quo magis semiordinata RI distat a vertice axis M, eo magis crescit (num. 79) & ipsa, ac crescente abscissa a centro CR, crescit & summa quadratorum utriusque, adeoque crescit semidiameter CI. Eo autem magis & IL recedit ab MX, adeoque L ab X, & proinde eo magis crescit semidiameter secundaria CL, cum ea sit primaria Hyperbolę conjugatæ. Binæ autem CI, CN, terminatę ad puncta I, N ordinatæ ejusdem in angulis RCI, RCN cum axe CM ęqualibus ob CR latus commune, & RI, RN latera æqualia triangulorum rectangulorum CRI, CRN, æquales sunt. Porro cum in triangulis COM, COX latus CO sit commune, & OM, OX latera æqualia (n. 240), prout semiaxis transversus CM fuerit major, æqualis, vel minor respectu conjugati CX, etiam angulus COM erit major æqualis, vel minor angulo COX, adeoque, ob MX, IL parallelas, & CDI major, æqualis, vel minor CDL, & semidiameter primaria CI major, æqualis, vel minor CL. Contra vero angulus asymptotorum TCt æqualis alterno COX erit minor, æqualis, vel major OCB, qui ęquatur MOC, adeoque is angulus TCt asymptotorum, in quo jacet

axis transversus & Hyperbola erit acutus, rectus, vel obtusus.

Coroll. 18.

248. *Differentia quadratorum binarum semidiametrorum conjugatarum est ad quadruplam potentiam Hyperbolæ ipsius, ut cosinus anguli asymptotorum ad radium adeoque semper constans; & æqualis differentiæ quadratorum semiaxium.*

F.78 249. Ducta enim in fig. 78 IV perpendiculari asymptoto C*a*, differentia quadratorum semidiametri CI, & tangentis I*a* quę tangens æquatur (num. 242) semidiametro conjugatę diametri I*i* erit semper eadem, ac differentia quadratorum CV, V*a*; cum ob angulos ad V rectos; quadratum illius semidiametri æquetur quadratis CV, VI simul, & quadratum I*a* quadratis *a*V, VI simul. Porro quadratum CV excedit bina quadrata CD, DV per bina rectangula CDV, & quadratum *a*V deficit a binis quadratis D*a*, DV per bina rectangula VD*a*; sive a binis quadratis illis ipsis CD, DV per bina illa ipsa rectangula CDV. Igitur differentia quadratorum CV, V*a* æquatur quadruplo rectangulo sub CD, DV. Est autem rectangulum sub CD, DV ad rectangulum sub CD, DI; sive ad potentiam Hyperbolæ in ratione DV ad DI; nimirum ut cosinus anguli VDI, sive interni, & oppositi *a*CA ad radium, adeoque constans; & cum axes ipsi sint diametri conjugatę, erit æqualis differentiæ quadratorum semiaxium.

SCHOLIUM IV.

250. Hisce jam ex constanti illa Hyperbolæ potentia deductis redeundum ad n. 223, ex quo potentia ipsa constans deducta est, ut alium surculum inde simul cum ea prorumpentem persequamur, qui tamen minus fœcundus est.

Co-

Coroll. 19.

251. *Si chorda occurrat asymptotis, rectangula sub utravis intersectione cum asymptoto, & binis cum perimetro Hyperbolæ; vel utravis ex his; & illis binis, æqualia erunt inter se, & mutata utcumque positione chordæ; dummodo maneat directio; erunt semper magnitudinis constantis, æqualia nimirum semper quadrato semidiametri parallelæ ipsis chordis; ac ubi chorda ad unicum ramum terminatur; quadrato etiam tangentis interceptæ contactu, & utravis asymptoto; & si ipsa chorda occurrat etiam Hyperbolis conjugatis, ejusmodi rectangula inter se æqualia; & constantia erunt octo.*

252. Cum enim sint in fig. 78, 79 æquales inter se (num. 221). HP, ph; & Hp, hP; æqualia erunt quatuor rectangula HPh, Hph, PHp, Php, & manentibus directionibus PH, Ph ad asymptotos, rectangulum HPh erit semper magnitudinis constantis (num. 225): Abeuntibus autem in fig. 78 punctis P, p in contactu I, abit rectangulum PHp in quadratum tangentis AI; cui æqualis est (num. 242) semidiameter parallela ipsi, & chordis Pp: ac in fig. 79 abeuntibus punctis H, h in centrum C, abit rectangulum HPh in quadratum semidiametri CI. Hinc autem si in fig. 84 sint iI, Ll diametri conjugatæ; & ipsa chorda Pp occurrat præterea Hyperbolæ conjugatæ in N, n; tum quatuor illa rectangula HPh, Hph, PHp, Php; tum quatuor NHn, Nhn, HNh, Hnh erunt æqualia eidem quadrato semidiametri CL. F. 78 79

Coroll. 20.

253. *Si fig. 84 e vertice* p *semidiametri primariæ in quamvis diametrum primariam* ICi *ducatur semiordinata* pR; *& e vertice* D *semidiametri* CD *ejus conjugata recta* DE *ipsi* pR *parallela; erit quadratum* CE *abscissæ a centro per posteriorem, æquale rectangulo sub* IR, Ri *abscissis a binis verticibus per priorem, & differentia binorum quadratorum binarum abscissarum a centro* CE, CR *æquabitur quadrato semidiametri* CI,

in quam semiordinata est demissa : differentia vero quadratorum semiordinatæ pR , *&* *parallelæ* DE *quadrato semidiametri* CL *conjugatæ ipsius* CI , *& idem habebitur si ea semiordinata , & ejus parallela ducantur in diametrum secundariam , sed ibi quadratum abscissæ a centro per ordinatam æquabitur rectangulo sub abscissis a binis verticibus per parallelam.*

354. Nam si C*p*, CD sint semidiametri conjugatæ, *p*D erit parallela asymptoto AQ (num. 242) , & secta bifariam a C*a* in V. Quare si R*p* occurrat asymptotis in, H, *h*, & ducatur *h*D , quæ occurrat asymptoto HC in H' , erit (n. 204) etiam HH' secta bifariam in C, & cum H*h* secetur bifariam in R (nu. 221) erit *h*H' parallela CR, adeoque ordinata diametri *l*CL, & ab ea secta bifariam in R'.

255. Jam vero rectangulum *h*DH' (quod est æquale (num. 251) quadrato CI) una cum quadrato R'D, sive CE equatur quadrato R'*h* , sive CR, vel quadrato CI, & rectangulo IR*i* ; adeoque dempto utrobique quadrato CI , quadratum CE equatur rectangulo IR*i*. Pariter cum quadrata CE, CI simul æquentur quadrato CR , erit quadratum CI differentia quadratorum CR, CE; quadratorum vero ED, R*p* , sive R*h* , R*p* differentia est rectangulum *hp*H, sive (num. 251) quadratum CL. Demum ut C*p*, CI sunt semidiametri primarię, CD, CL secundarię respectu Hyperbolę PI*p*, illę sunt secundariæ, hę primariæ respectu Hyperbolæ DL. Quare patent tam quæ de primariis , quam , quæ de secundariis diametris affirmaveram.

Coroll. 21.

256. *Quadratum semiordinatæ ad differentiam quadratorum suæ semidiametri, & abscissæ a centro in diametris primariis, summam in secundariis, & ad rectangulum in illis sub binis abscissis a binis diametri verticibus est ut quadratum semidiametri, vel diametri conjugatæ ad quadratum illius ipsius suæ semidiametri , vel diametri.*

256. Si

257. Si enim præterea diameter primaria Ii occurrat suæ ordinatæ in R, erit quadratum Rh, sive quadratum Rp cum rectangulo Hph, nimirum bina quadrata Rp, CL ad quadratum Ia, sive CL, ut quadratum CR, sive quadratum CI cum rectangulo IRi ad quadratum CI; ac dividendo quadratum Rp ad quadratum CL, ut differentia quadratorum CR, CI, sive ut rectangulum IRi ad quadratum CI; vel alternando quadratum Rp ad differentiam quadratorum CR, CI, vel ad rectangulum IRi, ut quadratum CL ad quadratum CI; vel ut quadratum totius Ll ad quadratum totius Ii.

258. Quod si diameter secundaria lL occurrat in R suæ ordinatæ $P'p'$, asymptotis autem in h, H', erit quadratum $R'h$ ad quadratum La, sive CI, ut quadratum CR' ad quadratum CL, & componendo quadratum $R'h$ cum quadrato CI, sive cum rectangulo $p'hP'$, (n. 251) nimirum quadratum $R'p'$ ad quadratum CI, ut summa quadratorum CR', CL ad quadratum CL, & alternando quadratum $R'p'$ ad summam quadratorum CR', CL, ut quadratum CI ad quadratum CL, sive ut quadratum totius Ii ad quadratum totius Ll

SCHOLIUM V.

259. Hisce deductis generaliter pro quavis Hyperbolarum specie, addam hic postremo nonnulla, quæ pertinent ad Hyperbolam æquilateram, quæ nimirum habet latus rectum æquale axi transverso, adeoque & ipsos axes æquales, & juxta num. 246 angulos asymptotorum rectos. Pleraque, quæ ad ipsam Hyperbolam æquilateram pertinent, deducuntur ex iis, quæ hic pro Hyperbolis in genere demonstravimus, adeoque hic pariter locum sibi vindicant. Interea notandum illud: Hyperbolam æquilateram esse id inter Hyperbolas, quod est circulus inter Ellipses. Nam Ellipsis, cujus axes æquales sint, jam in circulum migrat.

Coroll. 22.

260. *Hyperbola, quæ axem transversum habet æqualem conjugato, habet primo latus rectum æquale axi transverso, unde &* æquilatera *dicitur: Secundo quadratum distantiæ foci a centro duplum quadrati axis utriuslibet: Tertio angulos asymptotorum rectos: Quarto potentiam æqualem dimidio quadrato semiaxis utriuslibet: Quinto quasvis diametros conjugatas æquales: Sexto quadratum cujusvis semiordinatæ cujuslibet diametri primariæ æquale rectangulo sub binis abscissis a binis verticibus: Septimo quadratum cujusvis semiordinatæ cujuslibet diametri secundariæ æquale summæ quadratorum semidiametri ipsius vel primariæ, vel ejus conjugatæ, & abscissæ a centro: Octavo ipsam semiordinatam ad axem conjugatum æqualem distantiæ sui concursus cum ipso axe a vertice axis transversi: Nono e binis diametris primariis, vel e binis secundariis æqualibus, habet alteram alterius conjugatæ perpendicularem.*

261. Primum patet, cum sit (num. 71) latus rectum tertium proportionale post binos axes. Secundum deducitur ex num. 64. cum quadratum distantiæ foci a centro æquetur summæ quadratorum binorum semiaxium, adeoque ubi ii equales sunt, duplo quadrato utriuslibet. Tertium demonstratum est num. 246.

F.83 Quartum patet in fig. 83. Nam si angulus TC*t* fuerit in ea rectus & COM ac MCO semirectus, & OC equalis OM, adeoque rectangulum sub CO, & OM, quod (num. 227) dicitur potentia Hyperbolæ, æquabitur quadrato utriuslibet CO, vel OM, nimirum dimidio quadrato CM, vel CX. Quintum demonstratum est n. 246, & eruitur etiam ex n. 248: cum quadratorum differentia nulla sit in axibus, adeoque nulla in quibusvis diametris conjugatis. Sextum deducitur ex quinto, & ex num. 256, cum nimirum quadratum semiordinatæ ad rectangulum sub iis abscissis debeat esse ut quadratum semidiametri conjugatæ, ad quadratum ejus semidiametri primariæ, quæ in Hyperperbola, æquilatera est ratio æqualitatis. Septimum patet ex eodem numero, nam in diametris secundariis quadratum semiordinatæ eodem argumento erit ad summam quadratorum ejus semidiametri, & abscisse a centro pariter in ratione æqualitatis. Octavum patet ex septimo & tertio. Nam ex septimo si in fig. 84 Ii, Ll sint axes, erit quadratum $R'p'$ æquale quadratis CR', CI, & ex tertio angulus ICR' rectus, adeoque si concipiatur $R'I$, erit ejus quadratum æquale pariter quadratis CI, CR' adeoque quadrato $R'p'$, ac proinde ipsa $R'p'$ ipsi $R'I$ æqualis. Nonum facile deducitur e quinto: nam in fig. 83 si CN sit æqualis CI erit & angulus NCR æqualis ICR (nu. 245). adeoque & NCG æqualis ICD, qui ob omnia latera triangulorum CDI, CDL æqualia, erit æqualis angulo DCL. Quare addito NCD communi erit NCL æqualis recto GCD. Sunt autem NC, IC semidiametri primariæ respectu Hyperbolæ NMI, & CL conjugata posterioris, ac eædem sunt secundariæ respectu Hyperbolæ LX, adeoque valet idem pro utroque diametrorum genere. F.84 F.83

Coroll. 23.

262. *Si e binis verticibus* V, u *in fig.* 85 *cujusvis diametri primariæ Hyperbolæ æquilateræ, ducantur binæ rectæ ad quodvis punctum* P *ejus perimetri, & per verticem* V *ejusdem rami tangens* VI *occurrens ipsi* uP *in* I, *angulus* VuP *æquabitur angulo* VPR, *vel* PVI, *adeoque quadratum chordæ* VP *æquabitur rectangulo* uPI; *differentia angulorum ad basim* Vu *trianguli* VPu *constanter æquabitur angulo* uVI, *quem continet tangens* VI *cum diametro* Vu.

263. Ducta enim semiordinata PR, quæ erit parallela tangenti VI, erit (num. 260) quadratum ipsius PR æquale rectangulo uRV, adeoque uR ad PR, ut PR ad RV, nimirum ob angulum ad R communem similia triangula VRP, PRu, & angulus RuP æqualis angulo VPR, adeoque & alterno PVI. Quare ob angulum ad P communem etiam triangula IVP, PuV re-

manent similia, & IP ad PV, ut PV ad P*u*, ac quadratum VP æquale rectangulo *u*PI. Est autem angulus *u*VI differentia anguli *u*VP ab angulo IVP, sive V*u*P.

SCHOLIUM VI.

264. Atque hoc quidem pacto ex constructione problematis tertii eruimus primariam proprietatem diametrorum ordinatas suas secantium bifariam, & inde Hyperbolæ ad asymptotos relatæ proprietates deduximus alias nihilo minus fœcundas, ac Hyperbolę demum ęquilaterę naturam, & proprietates plerasque. In hac postrema habetur etiam alia quędam elegans analogia ipsius Hyperbolę æquilaterę cum circulo, & constructio loci geometrici, cujus usus nonnunquam occurrit.

F.86 265. Constat ex primis Geometriæ elementis in circulo supra chordam quamvis V*u* in fig. 86 ad quodvis peripheriæ punctum P ad eandem ab ipsa chorda partem jacentis ductas binas rectas, continere angulum VP*u* semper æqualem, cujus nimirum mensura est arcus dimidius VH*u*, cui insistit, sive qui ab eadem chorda subtenditur ad partem oppositam. Quare in circulo reliquorum angulorum PV*u*, P*u*V summa est semper constans, ęqualis nimirum complemento anguli VP*u* duos rectos; qui cum sit ęqualis angulo *u*VI, quem tangens V*i* ad partem oppositam ducta continet cum ipsa chorda, erit summa illa angulorum PV*u*; P*u*V æqualis angulo *u*VI, quem ea chorda ad eandem partem continet cum tangente VI; dum in Hyperbola non summa, sed differentia angulorum PV*u*, P*u*V æquatur angulo *u*VI, quem diameter *u*V continet pariter cum tangente VI ad eandem partem.

266. Hinc si queratur hujusmodi Problema, *super data basi constituere triangulum ita, ut summa, vel differentia angulorum ad basim æquetur angulo dato*; utrumque Problema erit indeterminatum, infinitas nimirum solutiones admittens, quas omnes idem continuus

tinuus locus geometricus complectitur, qui pro summa erit arcus circuli, pro differentia crus infinitum Hyperbolæ. Pro utroque autem constructio est hujusmodi. *Ad punctum V extremum datæ basis fiat angulus* uVI *æqualis datæ summæ, vel differentiæ. Tum pro summa in fig.* 86 *construatur arcus circuli* VPu *habens* VI *pro tangente;* Vu *pro chorda;* & *pro differentia in fig.* 86. *arcus Hyperbolæ æquilateræ* VP *indefinite productus habens pariter* VI *pro tangente,* & Vu *pro diametro primaria,* & *ad quodvis punctum* P *eorum arcuum ductis rectis* VP, Pu *habebitur solutio problematis*: F.85 86

267. Porro circulus cum iis conditionibus admodum facile describitur: Ducatur VC perpendicularis ad VI; ac secta bifariam V*u* in O, erigatur OC perpendicularis ad V*u*; donec occurrat in C priori perpendiculo, ac centro C intervallo CV; vel C*u*, quas patet fore æquales, fiat circulus; quem patet debere transire per V, *u*; & habere pro tangente VI perpendicularem ejus radio. Ac eadem constructio esset, si quæreretur, quod eodem recidit, punctum P ita; ut angulus VP*u* esset æqualis dato. Tum nimirum faciendus esset angulus *u*V*i* ad partes oppositas P æqualis dato, & peracta reliqua constructione haberetur, quod quærebatur: ac eodem pariter redit Problema, quo semper data V*u* quæratur segmentum circuli capiens angulum VP*u* æqualem dato.

268. Hyperbola vero æquilatera facile pariter determinatur data diametro primaria V*u*; & tangente VI. Secta enim diametro ipsa V*u* bifariam in C, & acta per C recta parallela tangenti, in qua capiantur CB, C*b* æquales semidiametris CV, C*u*, erit B*b* diameter conjugata æqualis primariæ V*u*, ac datis binis diametris conjugatis datur Hyperbola.

269. Nam in primis ex num. 221 eruitur expeditissima methodus describendi Hyperbolam per puncta dato puncto P & asymptotis concurrentibus in C in fig. 87. Circumducta circa P regula, quæ ipsis asympto- F.87
tis

tis occurrat in H, *h*, sumatur semper *hp* æqualis HP directione contraria eritque *p* ad Hyperbolam, cujus uterque ramus facile describitur. Datis autem binis dia-
F.84 metris conjugatis I*i*, L*l* in fig. 84 facile inveniuntur asymptoti (num. 244) ducendo per I, *i*, *l*, L rectas ipsis parallelas ac per puncta, A, Q, *a q*, in quibus concurrunt, asymptotos, quibus datis, & dato puncto I jam dantur omnia puncta per expositam constructionem.

SCHOLIUM VII.

270. EX eadem proprietate Hyperbolæ, ex qua ejusmodi constructio derivatur, & illud ostendi potest, admodum facile per concursum Hyperbolæ datæ cum dato circulo inveniri binas medias continue proportionales inter binas rectas datas, cujus Problematis casus particularis est etiam celebris illa cubi duplicatio ab Apolline olim præscripta, quod Problema idcirco Veteres usque adeo torsit, & tandiu frustra per planam Geometriam, sive per rectarum intersectiones inter se, vel cum circulo est quæsitum.

271. *Capiantur in lateribus anguli recti* HCh *in fig.*
F.88 88. *binæ rectæ* CR, Cr *æquales datis, & completo rectangulo* RPrC *ducatur* CP, *qua assumpta pro diametro describatur circulus, qui ob angulos ad* R, r *rectos transibit per ipsa puncta* R, r: *per punctum autem* P, *asymptotis* HC, Ch *describatur Hyperbola, quæ ubi circulo occurret iterum in* p *solvet problema; ducta enim* pi *perpendiculari* Ch, *erunt* ip, Ci *mediæ continue proportionales inter* Cr, CR.

272. Ducta enim per P, *p* recta, quæ asymptotis occurrat in H, *h*, erit ex natura Hyperbole HP æqualis *ph*, & H*p* æqualis P*h* adeoque & C*r* æqualis *ih*. Ex natura vero circuli recta C*p* erit perpendicularis P*p*, ac triangula rectangula C*ip*, *pih* similia toti C*ph*, adeoque & inter se. Erit igitur C*r* ad C*i*, ut HP ad H*p*, sive sumptis æqualibus, ut *hp* ad *h*P, sive ut *ip* ad *r*P

Erit

Erit autem & hi ad ip, ut ip ad Ci; quamobrem & Cr ad ip erit, ut ip ad Ci, adeoque eadem erit ratio Cr ad ip, ip ad Ci, Ci ad rP, vel CR, & Cr, ip, Ci, CR continue proportionales.

273 Verum etiam sine totius Hyperbole constructione satis erit descripto circulo unicum ejus punctum p determinare, circumducendo regulam circa P donec deprehendatur PH æqualis ph; quin imo etiam sine circulo secta PC bifariam in O satis erit regulam circumducere, donec deprehendatur OH equalis Oh; ductis enim OB, Cp perpendicularibus ad Hh ob triangulum HOh isoscelium erit HB æqualis Bh, & ob PO, OC æquales, erit PB æqualis Bp, adeoque & PH æqualis ph. Sed determinatam problematis solutionem dat binorum locorum geometricorum circulis, & Hyperboolæ concursus, ubi se continui eorum arcus intersecant.

274. Circuli pariter & Hyperbole intersectio exhibet etiam admodum expeditam methodum trisectionis anguli, quod Problema pariter diu a Geometris per planam Geometriam nequicquam quæsitum, quam nimirum transcendit prorsus; ac ex ipsa constructione patebit, fieri omnino non posse, ut per circulum, & rectam lineam solvatur unquam. Satis autem constat, angulum quemvis secari in partes æquales tres, si secetur in tres partes æquales arcus circuli habentis centrum in anguli vertice, & interceptus inter anguli ipsius crura, seu latera.

275. *Sit igitur arcus circuli* FBm *fig.* 89 *secandus in partes æquales tres. Chorda* mF *secetur bifariam in* E. *Agatur per* E *recta* AB *ipsi perpendicularis, quæ transibit per centrum* C. *Foco* F, *directrice* AB, *ratione determinante* 2 *ad* 1 *sit Hyperbola, quæ arcui circuli occurrat in* P, *eritque* FP *pars tertia arcus* FBm *ita, ut ducta* PO *parallela* Fm, *quæ ipsi directrici occurrat in* D *arcus in binis punctis* P, O *sectus sit in tres partes æquales*. F. 89

276. Demonstratio est admodum facilis. Quoniam chor-

chorda PO est diametro AB perpendicularis, ab ea secatur bifariam. Est autem FP ad PD in ratione determinante 2 ad 1. Quare FP est dupla PD, adeoque æqualis PO, & proinde arcus FP, PO æquales: Ob chordas autem Fm, PO parallelas, etiam FP est æqualis mO. Quare tres partes FP, PO, Om sunt inter se æquales, ut opportebat. Quoniam autem est & Fm ad mE, ut 2 ad 1, patet m fore alterum axis transversi verticem. Quod si alter vertex sit M, erit FM dupla ME, & assumpta m V versus M æquali FM, erit & mV dupla VE, adeoque VE, ME æquales, & FM æqualis MV, sive FM, MV, Vm æquales: nimirum divisa Fm in M, & V in partes tres, erunt, M, m vertices axis transversi, V centrum Hyperbolæ.

277. Porro idem ramus Hyperbolæ secabit circulum etiam alicubi in p, ac ramus oppositus alicubi in P', & erit Fp dupla pd, æqualis po, ac tres chordæ, & arcus Fp, po, om æquales, ac pariter FP' dupla P'D' æqualis P'O', quę etiam ob P'O', mF parallelas erit æqualis O'm. Quare tres chordæ, & arcus FP', P'O', O'm æques. Nimirum sicut FP erit pars tertia arcus FBm, ita FBP, erit pars tertia arcus FBP'...FBm-AFBm, sive ipsius Fm integro circulo aucti, & FBmAp erit pars tertia arcus FBmAFBmAFBm; sive arcus Fm aucti binis circulis, & e contrario arcus Fp erit tertia pars arcus FAm; FAP' erit tertia pars FAmBFAm ejusdem FAm circulo aucti FAmBP pars tertia FAmBFAmBFAm ejusdem aucti binis circulis, & cum FP sit tertia pars arcus FBm, & Fp tertia arcus FAm, erit PFp tertia totius circuli: cumque FP sit tertia FBm, & FBP' tertia FBmAFBm, sive ipsius FBm circulo aucti, erit PP' pars itidem tertia circuli totius, & puncta p, P, P' totum circulum divident in partes æquales tres.

278. Id autem semper continget in quavis solutione geometrica, qua quæratur pars tertia arcus cujuspiam, Semper omnino inveniri debebunt puncta tria, quę totum circulum dividant in partes ęquales tres, nec

eorum

eorum punctorum inveniri umquam poterit unum, sine reliquis binis. Ratio ejus est ipsa circuli natura in se ipsum redeuntis in infinitum, infinito quodam quarumdam veluti spirarum numero, quarum nulla prima, nulla ultima. Semper autem ipse circulus ita sibi similis erit, ut quascumque proprietates habuerit quivis ejus arcus binis punctis interceptus generales, & pendentes unice ab eo, quod singula ejus puncta ęque distent a centro eodem, easdem habere debeat tam arcus, qui ab altero ex iis punctis incipiens desinat in alterum in eadem spira, quam qui desinat post unam integram conversionem peractam, tam qui post duas, tam qui post earum numerum quemcumque, idque tam progrediendo ab eo puncto versus unam plagam, quam tendendo versus oppositam. Quare ubi quęritur pars tertia arcus incipientis ab F, & desinentis in *m*, fieri omnino non potest, ut aliqua geometrica constructione determinetur pars tertia arcus FB*m*, non vero simul & arcus FB*m*AFB*m*, & ita porro quocumque numero integrarum conversionum assumpto. Quin imo eadem simul constructione invenienda erit pars tertia omnium omnino arcuum, qui pergendo ab F versus A desinunt in *m*, sive in eadem assumatur spira punctum *m*, sive in quavis quotcumque integris conversionibus disjuncta.

279. Quamobrem licet eo problemate videatur requiri unica pars tertia unici arcus, revera requiruntur innumerę innumerorum arcuum, quod prima fronte videretur factu impossibile non solum per circulum, & rectam lineam, sed per curvas in immensum magis compositas. Sed illud perquam commode accidit, ut omnium illorum numero infinitorum arcuum trisectiones habeantur in illis ipsis tribus punctis P P', *p*, a se invicem distantibus per tertiam circuli partem. Si enim FP sit tertia pars arcus FB*m*; addendo huic integrum circulum, addenda erit parti tertiæ priori pars circuli tertia POP', & habebitur

pro

pro parte tertia totius FB*m*AFB*m* arcus FPP' : addito toti arcui trisecando alio integro circulo: addenda erit parti tertiæ iterum pars tertia circuli P*p*, & jam pars tertia arcus trisecandi erit FPP'*p*: addendo vero iterum alium circulum, addenda erit parti tertiæ iterum pars tertia circuli totius *p*P; eritque pars tertia arcus trisecandi FB*m*AFP, & ita porro novis advenientibus circulis arcui trisecando, novi semper accedent parti tertiæ trientes circuli, & trisectionum puncta semper discurrent per P, P', *p* in infinitum: Existente autem pariter F*p* parte tertia arcus FA*m*, ac novis integris adjectis circulis trisectiones discurrent per *p*, P'; P in infinitum. Quamobrem tria requiruntur ad hoc Problema circuli puncta, & cum recta, vel circulus circulum nonnisi in duobus punctis secare possit, id Problema solvere omnino non poterunt: poterit Hyperbola, quæ potest in tribus punctis circulo occurrere; immo posset etiam si quatuor puncta requirerentur; ac in applicatione Algebræ ad Geometriam ostendemus binas quasvis Sectiones Conicas problemati solvendo sufficere, vel quamvis cum circulo. Sed hisce omissis regrediendum est jam ad illam nostram generalem Problematis constructionem.

SCHOLIUM VIII.

280. UT ex generali construtione Propositionis tertiæ novos & satis uberes capiamus fructus, punctum illud L, quod ibi assumpseramus ubicumque, F.90 assumamus jam in fig. 90, 91, 92 in ipsa recta data 91 KH, cujus concursus quæritur cum Conica Sectione. 92 Patet punctum O fig. 41 debere hic abire in H, cum ibi recta LO ducta sit parallela ipsi KH, adeoque & illius rectam OZ, quæ ibidem erat parallela rectæ HF, abire in ipsam HF hujus. Quare jam constructio evadet multo simplicior. Sumpto radio LM, qui ad perpendiculum demissum ex L in directricem sit in ratione

deter-

determinante, & descripto circulo, si is alicubi occurrat rectæ FH, in T, *t*, rectæ FP, F*p* parallelæ ipsis LT, L*t* determinabunt puncta P, *p* ad Conicam Sectionem; ac si punctis T, *t* coeuntibus recta HF contigerit circulum, etiam puncta P, *p* coibunt, & recta HL Sectionem Conicam continget. Quod si prætereа punctum L abeat in aliquod perimetri punctum P, ut in fig. 93, patet etiam PF fig. 90, 91, 92 debere abire in LT sibi parallelam, circulo transeunte per focum, ubi coibunt bina puncta F, T. At si L fuerit extra F.93 Ellipsim, vel Parabolam, vel inter binos Hyperbolæ ramos oppositos, focus F jacebit extra circulum, si vero L assumatur intra Ellipsim, vel Parabolam, vel utrumvis Hyperbolæ ramum; focus cadet intra circulum, quod sic etiam accuratissime demonstrari potest.

281. Sit in fig. 94, 95, 96 P in perimetro Sectio- F.49 nis Conicæ citra directricem, & ducta PH perpendi- 95 culari ad direttricem ipsam, ac producta tantundem ad 96 partes oppositas ita, ut PQ æquetur PH; per H, P, Q ducantur ex F rectæ indefinite ad partes H, P, Q, & vel neutra rectarum FP, FQ incidet in directricem, ut in fig. 94, vel incidet FP in I, ut in fig. 95; vel etiam FQ in *h*, ut in fig. 96. Assumpto in FP quovis puncto L, agatur recta AL*a* parallela HQ occurrens directrici in S, rectis FH, FQ in A, *a*, ac ipsis parallela in fig. 96 sit *hpq* occurrens rectis FH, FP in *q*, *p*, & patet fore semper FL ad LA, vel L*a*, ut FP ad PH, vel PQ ipsi æqualem, nimirum in ratione determinante, ac in eadem ratione fore F*p* ad *ph* in fig, 96 coeuntibus ibi punctis *a*, S cum *h*, ubi L congruat cum *p*.

282. Inde vero patet, solum in fig. 96 punctum *p* fore iterum ad Sectionem Conicam existente F*p* ad *ph* in ratione determinante, cum nimirum in nullo puncto L haberi possit FL ad LS in ea ratione, nisi id vel congruat cum P congruentibus A, S cum H, vel abeat in *p* congruentibus *a*, S cum *h*. Erit igitur punctum L extra Ellipsim, Parabolam, & utrumque Hyperbolæ

ramum,

ramum, si assumatur in fig. 94, 95 ubicumque ultra P, & in fig. 96 inter P, *p*, erit autem intra illas, vel intra alterum hujus ramum, si assumatur citra P inter ipsum & F, vel in fig. 96 ultra *p*.

283. Porro cum radius circuli assumi debeat ad LS in ratione determinante, in qua semper est LF ad LA, vel L*a* patet, ipsum fore majorem, æqualem, vel minorem respectum LF, prout LS fuerit major, æqualis, vel minor respectu LA, vel L*a*. Patet autem assumpto L1 ubicumque inter F, & P, fore L1S1 majorem, quam L1A1, assumpto L in P, fore LS æqualem LA, & eodem assumpto in fig. 96 in *p* fore LS æqualem L*a*; assumpto autem L2 ubicumque ultra P in fig. 94, & inter P ac I in reliquis, fore L2S2 minorem quam L2A2, si L assumeretur in ipsa directrice in I evanescente LS, evanescit & circulus, ac in punctum abit, at assumpto L3 ubicumque ultra I in fig. 95, & inter I, ac *p* in fig. 96, fore L3S3 minorem, quam L3*a*3, ac demum assumpto L4 ubicumque ultra *p* in fig. 96, fore iterum L4S4 majorem quam L4*a*4. Quare radius circuli erit major, æqualis, vel minor, quam distantia LF a foco, prout punctum L assumptum fuerit intra Ellipsim, Parabolam, utrumlibet Hyperbolæ ramum, vel in perimetro, vel extra: Q. E. D.

284. Inde autem facile eruitur primo illud. *Si assumatur punctum intra Ellipsim, Parabolam, vel utrumlibet ramum Hyperbolæ, nullam rectam inde posse duci, quæ Sectionem Conicam contingat, & quamvis rectam per ipsum ductam debere ipsam secare bis, præter rectas parallelas axi in Parabola, vel utrilibet asymptoto in Hyperbola, quarum altera intersectio ita in infinitum recedit, ut nusquam jam sit.*

F.91 285. Nam in hoc casu punctum F, ut in fig. 91, cadet intra circulum, nec ulla ex eo duci poterit recta FH, quæ circulum tangat, quævis ex iis, quæ per ipsum ducatur, circulo occurret bis punctis T, *t* adeoque & HL Sectioni Conicæ occurret in binis punctis P, *p*, nisi forte alterum ex iis ita in infinitum recedat, ut nusquam jam sit, quod in iis casibus posse fieri patet ex num. 149.

286. *Quod si punctum assumatur in perimetro Sectionis Conicæ, unica e rectis omnibus per ipsum transeuntibus, continget ibidem ipsam Sectionem Conicam, reliquæ omnes ipsi occurrent iterum, præter rectas parallelas axi Parabolæ, vel Hyperbolæ asymptotis.*

287. Nam in eo casu focus F jacebit, ut in fig. 93 in circuli peripheria, adeoque unica e rectis per ipsum transeuntibus, ut FH3 ipsum circulum continget, reliquis secantibus iterum: unde consequitur unicam P3H3 e rectis transeuntibus per P debere Sectionem Conicam contingere ibidem in P, reliquis extra expositos casus occurrentibus ipsi iterum. F. 93

288. *Si vero punctum assumatur extra Ellipsim, Parabolam, vel utrumque Hyperbolæ ramum, binæ e rectis per ipsum transeuntibus Sectionem Conicam contingent, reliquarum omnium eæ, quæ jacebunt in iis tangentium angulis, in quibus focus jacet, occurrent bis, altero tamen occursu in rectis axi Parabolæ, vel utrilibet asymptoto Hyperbolæ parallelis abeunte in infinitum ita, ut nusquam jam sit, utroque autem occursu in Hyperbola pertinente ad eundem ramum, vel ad oppositos, prout recta inclinabitur ad directricem in angulo minore quam asymptoti, vel majore; bini vero contactus jacebunt in eodem Hyperbolæ ramo, vel in oppositis, prout punctum ipsum jacuerit in iis asymptotorum angulis, in quibus foci jacent, vel extra; & in priore casu terminabuntur ad eum ramum, qui jacet in eodem asymptotorum angulo cum puncto assumpto. Sed cadente puncto in alteram asymptotum, alter contactus in infinitum recedet, eo cadente in centrum, recedet uterque, nec usquam jam erit.*

289. Nam in eo casu focus F jacebit, ut in fig. 97, 98, 99 extra circulum, adeoque binæ ad ipsum ex F tangentes duci poterunt FQH1, FqH2 quę binas LI, Li Sectionis Conicæ tangentes determinabunt. Ex rectis vero omnibus transeuntibus per F, eæ omnes, quę F. 97 98 99

transibunt per quodvis directricis punctum H3 jacens inter puncta H1, H2, circulum secabunt bis, quævis transiens hinc inde per puncta H4, H5, nusquam circulo occurret. Quare idem accidet & rectis transeuntibus per L respectu Sectionis Conicæ, & patet punctum H3 fore in iis rectarum LI, L*i* productarum, qua opus est, angulis, in quibus jacet focus F; ut in fig. *97*, *98*, in angulo H1LH2, qui in illa est ipsi IL*i* ad verticem oppositus; in hac est ipse IL*i*; at in fig. *99* in angulo ILH2, quem continet tangens IL, cum tangente *i*L producta. Quod autem attinet ad punctum intersectionis P, vel *p* recedens in infinitum; jam toties vidimus ex num 149. Puncta vero contactuum I, *i* jacebunt in ramo citeriori vel ulteriori, vel ita in infinitum recedent, ut nusquam jam sint, prout puncta Q, *q* jacuerint respectu directricis in arcu circuli secti a directrice ipsa in N, & *n* eodem cum centro L, vel in opposito, vel inciderint in illa ipsa puncta N, *n*.

290. Concipiatur autem centrum circuli L1 positum citra directricem, vel L2 ultra deferri ex parte A directricis versus B ita, ut intersectio N ipsius circuli
F.100 cum directrice primo quidem in fig. 100 distet a pun-
101 cto axis E magis, quam intersectio H asymptoti CH
102 parallelę ipsi LN; tum in fig. 101 abeat L in ipsam asymptotum CH, adeoque N in H, ac demum in fig. 102 transcurrat ultra ad partes B, ac arcus quidem NO*n* jaceat ad eandem directricis partem cum centro L, arcus No*n* ad oppositam, & recta VN*u* perpetuo tangat ipsum circulum in N. Quoniam ea rectum angulum continet cum NL, & FH cum HC (num. 164), patet, ipsam V*u* fore parallelam ipsi FH, ac focum F relinquere in fig. 100 ad partes B, in ipsum incidere in fig. 101, eum relinquere ad partes A in fig. 102. Quare etiam tangens F*q* jacebit in primo casu in arcu No*n*, abibit in secundo in N, jacebit in tertio in NO*n*, & contactus Hyperbolæ respondens ipsi *q* in primo casu jacebit in ramo ulteriore,

in secundo abibit in infinitum ita, ut nusquam jam sit, in tertio jacebit in ramo citeriore. Cumque idem debeat pariter evenire contactui Q, ubi centrum circuli deveniat ex parte B versus A; patet, productis asymptotis HC, *h*C in D, *d*, donec punctum L erit in angulo HC*d*; vel *h*CD; binos contactus terminari ad binos ramos oppositos illo existente in angulo HC*h*, utrumque contactum debere jacere in ramo citeriori; illo jacente in *d*CD; utrumque jacere in ramo ulteriori, illo vero abeunte in alteram asymptotum; alterum contactum debere abire in infinitum, alterum remanere in eo ramo; ad quem id asymptoti punctum accedit; at illo demum abeunte in centrum, utrumque contactum ita removeri; ut nusquam jam sit.

291. Ex hisce autem omnibus plurima sponte consequuntur, quorum pauca utiliora attingemus. Ex num. 284 constat, *Ellipsim Parabolam, ramum Hyperbolæ utrumvis cavitatem obvertere quaquaversus cuicumque puncto intra ipsas sito, convexitatem aliquo saltem arcu punctis sitis extra*. Nam si aliqua ex parte puncto intra sito convexitatem obverteret arcus aliquis, posset pergendo versus eum deveniri ad locum, ex quo ad illum tangens duci posset. Non potest autem punctis intra sitis obvertere cavitatem, nisi obvertat convexitatem sitis extra.

292. Ex num. 286 patet *in quovis puncto perimetri Sectionis Conicæ nonnisi unicam tangentem haberi posse*. Facile autem demonstrari posset, ibi *arcum curvæ utrinque circa contactum jacere semper ad eandem tangentis partem*, quod tamen & ex num. 149, & ex num. 288 sponte fluit; cum nimirum recta ibi motu parallelo delata, hic circumvoluta circa punctum situm extra Sectionem Conicam primum incipiat eam contingere, tum in binis hinc inde a contactu punctis secare. Inde autem consequitur *Sectionem conicam nullibi flexum mutare; sed perpetuo in eadem plagam incurvari*.

293. Ope ipsius num. 286 facile demonstratur & illud, *licet recta Conicam Sectionem contingat in unico puncto, nullam aliam rectam duci posse in angulo, quem ea bina linea in ipso contactu constituunt*. Nam in fig. 93, in qua $KP3H3$ est tangens, sit quævis $FH1$,
F.93 $FH5$ utcumque parum inclinata ad tangentem circuli $FH3$, & ea circulum secabit iterum alicubi in $T1$, vel $T5$, & recta $H1P3$, vel $H5P3$ Sectionem Conicam in aliquo puncto $P1$, vel $P5$. Sumatur jam punctum quodvis $P2$, vel $P4$ ipsi $P3$ propius, & puncto $T2$, vel $T4$ jacente in arcu $FT1$, vel $FT5$, ac recta $FH2$, vel $FH4$ subeunte angulum tangentis circuli $H3F$, productæ, si opus est, versus chordam, cum ipsa chorda, $FT1$, vel $FT5$, subibit $H2P3$, vel $H4P3$ angulum, quem continet tangens Sectionis Conicæ $KP3H3$ cum illa $FH1$, vel $FH5$, & jacebit in arcu $P3P1$, vel $P3P5$, adeoque ut arcus circuli aliquis $FT2T1$, vel $FT4T5$ hinc inde a contactu subit semper inter tangentem, & rectam quamvis tangenti utcumque proximam, ita idem in Sectionibus Conicis evenit.

294. Patet inde *quo pacto dato puncto in Sectionis Conicæ perimetro duci possit tangens*, ducendo nimirum inde ad focum rectam $P3F$, tum huic perpendicularem $FH3$ usque ad directricem, ac jungendo puncta $H3$, $P3$, quod quidem jam ex num. 173 innotuerat. At hic præterea ex num. 288 eruitur *methodus admodum expedita ducendi tangentem ad Sectionem Conicam e puncto L ubivis dato extra ipsam*. Centro L
F.97 in fig. 97, 98, 99, intervallo, quod ad perpendicu-
98 lum demissum ex L in directricem sit in ratione de-
99 terminante, describatur circulus, ad quem ducantur rectæ FQ, Fq tangentes, quæ occurrant directrici alicubi in $H1$, & $H2$. Rectæ ductæ per ea puncta, & per L contingent Sectionem Conicam, & puncta contactuum I, *i* invenientur ductis FI, F*i* perpendicularibus ad $FH1$, $FH2$, quæ semper invenientur, præter casum, quo L cadat in Hyperbolæ asymptotos. Quod

si forsi forte altera e tangentibus circuli FQ, Fq evaderet parallela directrici; puncto H1, H2 abeunte in infinitum ita, ut nusquam jam sit, ipsa quoque LI; vel Li evadet directrici parallela, & contactus I, vel *i* abibit in verticem axis transversi. Si vero punctum detur in directrice, ut H in fig. 53, 54, circulus quidem evanescet, sed ducta ad focum HF, & chorda Pp per focum ipsi perpendiculari, habebuntur binæ tangentes Hp, HP, juxta num. 177. F. 53 54

295. Præterea facile deducitur & illud, *rectam, quæ ex concursu binarum tangentium ad focum ducitur, secare bifariam angulum, quem ibi continent bini radii foci ducti ad binos contactus, vel, ubi bini contactus jacent in binis ramis oppositis, alter ex iis cum altero producto*: Nam in fig. 97 si angulis F. 97 H1FI, H2F*i* rectis (num. 173) auferantur anguli 98 LFH1, LFH2 æquales ob latera triangulorum FLQ, 99 FL*q* æqualia, relinquentur anguli LFI, LF*i* æquales. In fig. 98 a rectis QFI, *q*F*i* demptis æqualibus QFL, *q*FL relinquuntur æquales LFI, LF*i*: at in fig. 99 producta IF in O, a rectis QFO, *q*F*i* demptis QFL, *q*FL æqualibus, pariter remanent LFO, LF*i* æquales.

296. Posset hic etiam facile deduci, *in Ellipsi quamvis rectam per centrum ductam bis occurrere Ellipsi hinc inde a centro, Hyperbolæ autem bis, vel numquam, prout jaceat in illis asymptotorum angulis, quos axis secat, vel in reliquis*, deducendo primum ex num. 284, cum nimirum centrum intra Ellipsim jaceat, secundum vero ex num. 288, quorum utrumque jam a num. 212 deduximus; quin imò assumpto centro Ellipseos vel Hyperbolæ pro centro circuli L, cujus radius esset ipse semiaxis transversus, ut innuimus num. 145, deduci possent multa ex iis, quæ in fig. 63, 64 demonstravimus num. 195.

297. Sed admodum elegans est ratio, qua hinc directa demonstratione deducatur illa Hyperbolæ ad asymptotos relatæ proprietas, quam num. 221 deduximus

ex natura diametrorum per reductionem ad absurdum;
F.103 nimirum *si chorda* Pp *in fig* 103, 104, *occurrat asym-*
104 *ptotis in* L, L', *fore* PL, *æqualem* pL'. Si enim asymptoti occurrant directrici in punctis R, r, & pro centro circuli assumatur tam L, quam L', patet (num. 290) debere circulos transire illum per R, hunc per r, & contingi ibidem ab FR, Fr æqualibus inter se cum hic puncta R, r sint illa intersectio asymptoti cum directrice, quæ in fig. 101 est in H, quæ chorda si de more occurrat directrici in H, ac recta HF circulis in T, t, T', t', erit FP parallela tam LT, quam L'T', & Fp tam Lt, quam L't', ac rectangula TFt, T'Ft' æqualia erunt quadratis æqualibus FR, Fr. Quare erit FT' ad FT, sive PL', ad PL, ut Ft ad Ft', sive ut pL ad pL', & componendo in fig. 103, dividendo in fig. 104 erit LL' ad LP, ut ipsa LL' ad pL', & proinde LP, Lp æquales.

298. Atque ex his omnibus jam patet, quam fœcunda sit hæc constructio. At multa, & multo graviora supersunt, ac ipsa iterum ita fœcunda, ut quocumque te vertas novi semper ex eodem veluti trunco rami, e singulis ramis ramenta alia, surculi, frondes quoquoversum prorumpant, atque prosiliant. Sequenti Propositione præcipuam quandam, & fœcundissimam Sectionum Conicarum proprietatem ex eadem constructione deducemus.

PROPOSITIO VI. THEOREMA.

299. *IN rectis omnibus transeuntibus per punctum datum quodcumque, & Sectioni Conicæ bis occurrentibus, rectangula, quæ continentur sub binis distantiis puncti ipsius a binis occursibus singularum rectarum, sunt inter se in ratione, quæ pendet a sola ratione determinante speciem Sectionis Conicæ, & inclinatione rectarum ipsarum, substituto etiam quadrato tangentis, ubi bini occursus coeuntes abeant in contactum; manente vero inclinatione binarum recta-*

ctarum, ac mutato utcumque illo puncto in data Sectione Conica manebit semper constans ratio unius rectanguli, vel quadrati ad aliud.

300. Occurrat enim circulo recta KH in fig. 90, F.90
91, 92 in M, *m*, recta vero per L, & F ducta in D, 91
d. Erit LP ad TF, ut LH ad TH, & L*p* ad *t*F, ut LH 92
ad *t*H. Igitur conjunctis rationibus erit rectangulum PL*p* ad rectangulum TF*t*, sive ad rectangulum DF*d*, ut quadratum LH ad rectangulum TH*t*, sive MH*m*, nimirum ad differentiam quadratorum LH, LM. Jam vero ratio LH ad LM sive ad LT est eadem, ac ratio HP ad PF, sive quam habet ordinata ad directricem in angulo AHL ad foci radium FP, quae pendet a sola ratione determinante speciem Sectionis Conicae, & inclinatione rectae LH, cum sit FP ad PH (num. 2.) in ratione composita ex ratione determinante, & ratione sinus ejus inclinationis ad radium. Pendebit igitur ab iis solis etiam ratio quadrati HL ad quadratum LM, & quadrati HL ad eorum quadratorum differentiam, adeoque & ratio rectanguli PL*p* ad rectangulum DF*d*. Sed si quevis alia HL eodem modo occurrat in aliis punctis P, *p* manente puncto L, ratio quoque rectanguli ejusdem DF*d* ad rectangulum novae PL*p* pendebit a sola ratione determinante speciem Sectionis Conicae, & inclinatione hujus novae LH. Ergo & ratio unius rectanguli PL*p* ad quodvis aliud pendebit a sola ratione illa determinante, & inclinatione rectarum ipsarum. Quare si jam illud punctum, per quod rectae transeunt, mutetur utcumque, sive ubicumque accipiatur, & per ipsum transeant rectae cum iisdem semper inclinationibus, ea ratio rectanguli pertinentis ad unam ex iis rectis ad rectangulum pertinens ad aliam in omnibus diversis puncti positionibus manebit constans, ac patet coeuntibus punctis P, *p* in fig. F.97
97, vel 98 in I, adeoque in ipso contactu factis LP, 98
L*p* aequalibus LI, rectangulum PL*p* debere abire in quadratum tangentis LI, quod illi rectangulo substitui poterit. Patet igitur quidquid derat propositum.

SCHOLIUM I.

301. Si rationem ipsam velimus expressam sinibus inclinationis, & algebraicis signis, facile obtinebimus. Si nimirum ratio determinans dicatur P ad Q, sinus autem inclinationis dicatur in priore S, in posteriore s, erit ratio rectæ FP ad PH in priore ratio SP ad Q, & in posteriore sP ad Q. Quare ratio primi rectanguli ad secundum erit composita ex rationibus QQ ad QQ−SSPP, & QQ−ssPP ad QQ, sive QQ−ssPP ad QQ−SSPP, quę quidem est expressio ejus rationis admodum simplex.

302. Porro cum Sectiones Conicæ possint aliquando in rectas desinere; proprietas rationis constantis rectangulorum in rectis datam directionem habentibus & se intersecantibus communis est etiam, ubi eæ occurrant binis anguli rectilinei lateribus, ut Pp, P'p'
F.105 in fig. 105, 106, vel binis rectis parallelis, ut in fig.
106 107. Id autem in iis casibus multo facilius perspicitur.
107 Nam manebunt semper anguli triangulorum PRP' pRp' adeoque & ratio rectæ RP ad RP', & Rp ad Rp' erit semper eadem: ac proinde ratio quoque rectanguli PRp ad rectangulum P'Rp'.

SCHOLIUM II.

303. Demonstratio propositionis cum pendeat a constructione Problematis tertii, non habet vim, ubi punctum detur in directrice ipsa, quo casu circulus evanescit, nec ubi recta sit directrici parallela, vel per focum transeat, ut notavimus in ipsa Problematis constructione. Posset quidem & iis casibus aptari demonstratio longiore ambitu; sed satis erit notare illud: cum ex generali constructione Theorema locum habeat in casibus omnibus, in quibus punctum datum accedit ad directricem quantumlibet, & rectæ ad eas binas positiones pariter accedant quantum-

cumlibet, oportet sane, ut & in iis casibus sit vera; in quos generalis constructio desinit, postquam ultra quoscunque limites ad eos accesserit.

304. Sic etiam liceret ex propositione ipsa deducere hæc bina Theoremata pro rectis axi, vel asymptoto utrilibet parallelis in Parabola, vel Hyperbola, quarum nimirum altera intersectio ita in infinitum recedit, ut nusquam jam sit, considerando, quid accidat rectis ad eas directiones accedentibus ultra quoscumque limites. Sed libet per finitam Geometriam hosce casus evolvere ex ipsa constructione, cum ex primo potissimum pendeat diametrorum omnium natura in Parabola, & asymptotorum in Hyperbola.

Coroll. I.

305. *Si recta per datum punctum transiens sit parallela axi in Parabola, & alteri asymptoto in Hyperbola, quæ nimirum (num.* 149.) *altera intersectione ita in infinitum recedente, ut nusquam jam sit, in unico puncto occurrat perimetro; in ea pro constanti ratione rectangulo sub binis distantiis a binis occursibus substitui potest rectangulum sub distantia ab unico occursu, & recta quavis constanti in Parabola, vel illi ipsi asymptoto inclinata in Hyperbola ex ipso dato puncto in angulo constanti; & ratio illa constans pendebit præterea a magnitudine rectæ constantis in Parabola, & rectæ ductæ in inclinatione ad asymptotum in Hyperbola.*

306. Nam si in fig. 108, 109, 110, quarum prima F. 108.
pertinet ad Parabolam, reliquæ ad Hyperbolam, recta 109.
HL occurrat bis in P'p perimetro Sectionis Conicæ, 110.
recta vero t'L semel in P', recta t'FT' per focum transeat, erit recta FP', æqualis P't', cum P't' sit ordinata in angulo æqualitatis, & FP' parallela T'L. Centro F intervallo Ft' inveniatur in recta t'P' punctum I, eritque triangulum isosceles IFt' simile isoscelio FP't', cum habeant unum angulum ad basim communem in t', adeoque & reliquos equales. Quare erit It' ad t'F, ut t'F ad t'P', sive ut FT' ad P'L, adeoque rectangulum sub It' & P'L æquale erit rectangulo t'FT' sive

rectan-

rectangulo constanti MFm, cui æquatur rectangulum TFt, & quod ad rectangulum PLp in data Sectione Conica, in qua ratio determinans est semper eadem, habet rationem pendentem a sola inclinatione rectæ LH juxta Propositionis demonstrationem.

307. Porro si per F ducatur recta FO in fig. 108 directrici parallela, & in fig. 109, 110 recta tendens ad R occursum directricis cum asymptoto parallela ipsi Lt', ea ipsam secabit in O ad angulos rectos, cum $t'P'$ sit perpendicularis directrici in fig. 108 ex hypothesi, & FR occurrat asymptoto CR ad angulos rectos (num. 164). Quare basim $t'I$ trianguli isosceli tFI secat bifariam in O. Est autem $t'O$ in fig. 108 semper constans, nimirum æqualis distantiæ foci F a directrice, quę (num. 62) est dimidia lateris recti principalis Parabolæ, adeoque $t'I$ semper æqualis lateri recto principali, & rectangulum sub It', & P'L, ad rectangulum sub P'L & quavis recta constanti habebit rationem constantem, quam habebit latus rectum principale ad illam rectam, quæ proinde pendebit a magnitudine ipsius rectæ.

308. At in fig. 109, 110 est $t'O$ ad OR, quæ æquatur distantiæ perpendiculari puncti L ab asymptoto CR, in ratione constanti, nimirum ob similitudinem trianguli rectanguli ROt' cum rectangulo FER, cum quo habet angulum æqualem, vel eundem ad R, adeoque cum triangulo rectangulo FRC, in ratione FR ad RC, sive (num. 164, & 166) semiaxis conjugati ad semiaxem transversum. Quare cum quævis recta in quovis dato angulo inclinata ex L ad asymptotum CR debeat habere ad rectam ex ipso L perpendicularem asymptoto ipsi, sive ad distantiam illam perpendicularem, quæ æquatur OR, rationem constantem, quæ pendebit ab inclinatione ejus rectæ; illa ipsa Ot' & recta quoque ejus dupla It' habebunt ad quamvis inclinatam ex L in quovis angulo dato rationem constantem pendentem ab ejus inclinatione, compositam ex binis constantibus $t'O$ vel $t'I$ ad OR, & OR ad eandem

dem inclinatam, adeoque & rectangulum sub It' & P'L ad rectangulum sub P'L & ejusmodi recta inclinata in angulo constanti habebit rationem constantem pendentem ab inclinatione ejus ipsius rectæ.

Coroll. 2.

309. *Si e quovis puncto* L *in fig.* 111, 112 *ducantur binæ rectæ* LP, Lp *asymptotis parallelæ, occurrentes perimetro in* P, p, *& ex punctis* P, p *ducantur binæ rectæ* PD, pd *in datis quibusvis angulis ad asymptotos alternas; rectangula* LPD, Lpd *erunt in ratione constanti, mutato utcumque puncto* L, *& si inclinationes rectarum* PD, pd *ad suas asymptotos æquales fuerint, ratio erit æqualitatis.* F. 111 112

310. Nam si per L ducatur quevis alia recta in dato angulo, quæ nimirum occurrat perimetro in I, & *i*, tam rectangulum LPD, quam *Lpd* habebunt (num. 308) rationem constantem ad IL*i*, cum IL*i* occurrat perimetro bis, LP semel, & tam PD, quam *pd* in datis angulis inclinentur; adeoque habebunt rationem constantem etiam inter se. Porrò cum ea ratio pendeat ab inclinatione rectarum PD, *pd* ad asymptotos, si inclinatio fuerit utrobique eadem, ratio utriusque rectanguli LPD, *Lpd* ad idem IL*i* erit eadem, adeoque ipsa erunt inter se æqualia.

Coroll. 3.

311. *Si e quovis puncto* P *Hyperbolæ ducantur binæ rectæ* PG, PV *singulæ parallelæ alteri asymptoto, & terminatæ ad alteram, continebunt rectangulum magnitudinis semper constantis, & si ex altero puncto* p *ducantur pariter* pu, pg, *quarum prior sit parallela* PG, *posterior* PV, *erunt rectæ* Pp, Gg, Vu *inter se parallelæ, & concurrentibus* GP, gP, *in* L; VP, up *in* l, *recta* Ll *transibit per centrum* C, *& parallelogramma* CGLg, CLVl, LPlp *similia erunt.*

312. Erit enim ex Corollario præcedenti rectangulum LPV æquale rectangulo *Lpu*. Quare *pu*, sive C*g* ad LP, sive *g*V, ut PV sive CG ad *l*P, sive G*u*: adeoque per conversionem rationis C*g* ad CV, ut CG

ad

ad C*u*, & rectangulum sub C*g* & C*u*, sive sub *pg* & *pu*, ęquale rectangulo sub CG & CV, sive sub PG & PV, quod proinde manebit constantis magnitudinis, utcunque mutato puncto P.

313. Jam vero proportionalium terminorum capiendo summas, vel differentias, vel substituendo rectas iis parallelas, & ęquales, patebit, fore LP ad LG, ut L*p* ad L*g*, adeoque P*p*, G*g* parallelas, & CG ad C*u*, ut C*g* ad CV, adeoque G*g*, V*u* parallelas, & demum inde CG ad C*u*, ut LG ad *lu*, adeoque triangula GCL, *u*C*l* similia; & eorum angulos ad C æquales recta C*l*, si producatur, qua opus est, abeunte in L, unde patent omnia.

SCHOLIUM III.

314. HOC quidem pacto delapsi sumus ad potentiam illam Hyperbolæ constantem, quam demonstravimus num. 227, cum nimirum hic habeatur constans rectangulum etiam sub CG, & GP. Inde autem facili regressu demonstrarentur ea omnia, quæ ad asymptotos pertinentia eruimus e proprietate diametrorum chordas bifariam secantium a num. 221, quæ quidem demonstrari potuissent etiam ope num. 297. At quoniam ea jam demonstrata sunt, hic progrediemur ad Corollaria quædam generalia, quæ ab ipsa Propositione, vel ab hisce Corollariis sponte consequuntur.

Coroll. 4.

315. *Si per quoddam punctum transeant bina recta secantes Sectionis Conicæ perimetrum, rectangula sub binis distantiis puncti ipsius a binis singularum intersectionibus erunt inter se, ut quadrata tangentium iis parallelarum, siqua sunt, a concursu ad contactum, & ut quadrata semidiametrorum parallelarum.*

316. Primum patet ex ipsa enunciatione Propositionis, cujus est casus particularis. Nam si ex uno puncto ducantur binæ rectæ, & ex alio binæ iis paralle-

le

læ: hæ habebunt ad directricem eandem inclinationem ac illæ. Quare si illæ secent bis, hæ tangant, illarum rectangula ad se invicem, erunt ut harum quadrata. Secundum in omnibus diametris Ellipseos, & in diametris primariis Hyperbolarum patet ex eo, quod eæ semper ad perimetrum Sectionis Conicæ terminentur, & secentur bifariam in centro. Debebunt enim rectangula sub binis semidiametris per idem centrum ductis esse in eadem ratione, in qua sunt rectangula rectarum iis parallelarum transeuntium per illud alium quodvis punctum. Pro secundariis Hyperbolæ diametris, quæ non terminantur ad perimetrum Hyperbolæ ejusdem, sed ad perimetrum conjugatæ, sic demonstratur. Occurrat chorda Pp in fig. 113 eidem ramo $P'p'$ binis & utraque binis in fig. 114, prior autem F. 113
utrobique alteri asymptoto in G, & per G ducatur 114
chorda Ii parallela $P'p'$. Erit rectangulum PLp ad rectangulum $P'Lp'$, ut rectangulum PGp ad rectangulum IGi (num. 299). Sunt autem rectangula PGp, IGi æqualia (num. 251) quadratis semidiametrorum sibi parallelarum.

Coroll. 5.

317. *Si plures chordæ, vel tangentes parallelæ ab una aliqua chorda transversim secentur, erunt quadrata tangentium; & rectangula sub segmentis chordarum, ut rectangula sub segmentis chordæ transversæ.*

318. Si enim in fig. 115, 116 chordę Vu occur- F. 115
rant tangentes IA, ia inter se parallelę in A, a, & 116
chordæ Pp, $P'p'$ in L, L', oportebit esse quadrata IA, ia, & rectangula PLp, $P'L'p'$ ad rectangula VAu, Vau, VLu, $VL'u$ in eadem ratione, adeoque & illa inter se, ut hæc inter se.

Coroll. 6.

319. *Singula ejusmodi quadrata, vel rectangula tangentium, vel chordarum parallelarum æquantur singulis rectangulis sub segmento chordæ transversæ intercepto inter alterum ejus extremum, ac tangentem, vel chordam parallelam, & segmento tangentis, vel chordæ parallela*

rellela

rallelæ intercepto inter ipsam chordam transversam ; & aliam rectam datam ductam per alterum verticem chordæ transversæ.

320. Si enim ex quovis puncto chordæ transversæ R ducatur RS iis chordis, vel tangentibus parallela, quæ sit ad *u*R in ea ratione data, in qua est rectangulum P*lp* ad VL*u*, & per *u*, & S ducatur recta tangentibus occurrens in B, *b*; chordis in D, D', erit rectangulum VLD ad rectangulum VL*u*, ut LD ad L*u*; sive ut RS ad R*u*, nempe ut rectangulum PL*p* ad idem illud VL*u*. Quare illi rectangulo VLD æquabitur hoc rectangulum PL*p*, sive abeuntibus L in A; P, *p* in contactum I, D in B, æquabitur rectangulo VAB quadratum AI.

Coroll. 7.

321. *Si pro chorda transversa substituatur tangens, quam rectæ parallelæ secent, utrumque præcedens Corollarium habebit locum, dummodo rectangulo segmentorum chordæ transversæ substituatur quadratum tangentis interceptæ inter contactum, & parallelas.*

F.117 322. Si nimirum in fig. 117 tangens per V ducta occurrat chordis P*p*, P'*p*' parallelis, & tangenti IA in L, L', A, erunt rectangula PL*p*, P'L'*p*', & quadratum AI ad se invicem, ut quadrata VL, VL', VA, (num. 317.) & ex puncto quovis R tangentis AL ducta RS illis parallela, quæ sit ad VR in ratione data rectanguli PL*p* ad quadratum LV; si ducatur VS illis rectis parallelis occurrens in D, D', B, erunt rectangula PL*p*, P'L'*p*', & quadratum AI æqualia rectangulis VLD, VL'D', VAB.

Coroll. 8.

F.118 119 323. *Si binis tangentibus* IE, iE *in fig.* 118, 119 *concurrentibus in* E *occurrat tangens ducta per* V *in* A, a, *ejus segmenta* AV, aV *erunt in ratione composita* AI, ai, & Ei, EI.

324. Si enim ex A ducatur recta parallela tangenti Ei occurrens perimetro in P, *p* erit quadratum VA ad quadratum V*a*, ut rectangulum PA*p* ad quadratum *ai*,

sive

sive in ratione composita ex rationibus rectanguli PAp ad quadratum AI, & quadrati AI ad quadratum *ai*. Cum igitur, (nu. 317) sit rectangulum PAp ad quadratum AI; ut quadratum Ei ad quadratum EI, erit quadratum AV ad quadratum *a*V, in ratione composita quadrati AI ad quadratum *ai*, & quadrati E*i* ad quadratum EI, adeoque AV ad V*a* in ratione composita AI ad *ai*, & E*i* ad EI.

Coroll. 9.

325. *Si tangens* AVa *fig.* 120, 121 *binis tangentibus parallelis* AI, ai *occurrat, erit* VA *ad* Va, *ut* AI *ad* ai; *quæ si præterea in Ellipsi fuerit parallela rectæ jungenti contactus bifariam secabitur in ipso contactu.* F.120 121

326. Erit enim quadratum VA ad quadratum AI; ut quadratum V*a* ad quadratum *ai*. Quare VA ad AI, ut V*a* ad *ai*, & alternando VA ad V*a*, ut AI ad *ai*. Quod si Ellipsi in fig. 120 fuerit A*a* parallela *i*I, erunt AI, *ai* æquales, adeoque æquales & VA, V*a*.

SCHOLIUM IV.

327. HUc usque deduximus Corollaria ex ipsa Propositione. Hoc postremum sponte exhiberet aliud Theorema utilissimum ac itidem fœcundissimum aliorum quamplurium, quæ ex ultimo pariter profluunt. Sed ne nimis late evagentur, id eruam ex alio generaliori, quod reservo propositioni integræ 8, ex qua ipsum cum suis Corollariis pariter fluit. Interea huc usque deductis alia analoga, quæ a Corollario primo hujus propositionis 6 deducuntur, persequar, quæ nimirum pertinent ad casum rationis æqualitatis, in quo altera intersectio in Parabola, & Hyperbola ita in infinitum recedit, ut nusquam jam sit, ac sequentia quidem duo Corollaria respondent quinto & sexto e Propositione deductis; nam quartum transferri non potest ad rectas parallelas axi in Parabola, directrici in Hyperbola, quæ nullam

tan-

tangentem habent sibi parallelam, nec semidiametrum, diametris nimirum omnibus in Parabola in infinitum productis, & nulla diametro existente in Hyperbola parallela asymptotis.

Coroll. 10.

328. *Si plures chordæ, vel tangentes parallelæ secentur transversim a recta axi parallela in Parabola, vel alteri asymptoto in Hyperbola, erunt quadrata tangentium, & rectangula sub segmentis chordarum, ut segmenta ejus parallelæ abscissa ab ipsius concursu cum perimetro.*

329. Si enim in fig. 122, 123, quarum illa ad
F.122 Parabolam, hæc ad Hyperbolam pertinet, rectæ VL
123 parallelæ ibi axi, hic alteri asymptoto, quæ quidem occurret perimetro in unico puncto V (num. 149), occurrant tangentes IA, *ia* inter se parallelæ in A, *a*, & chordæ P*p*, P'*p*' in L, L', oportebit (num. 305) esse quadrata IA, *ia*, & rectangula PL*p*. P'L'*p*' ad rectangula in Parabola quidem sub quavis recta constanti, in Hyperbola vero sub recta ducta a punctis A, *a*, L, L' in dato quovis angulo ad asymptotum illam ipsi VL parallelam, quæ idcirco constans pariter erit, & abscissis VA, V*a*, VL, VL' in ratione constanti. Igitur erunt etiam illa quadrata, vel rectangula inter se, ut hæc rectangula inter se, quæ ob rectam illam constantem sunt, ut ipsæ VA, V*a*, VL, VL'.

Coroll. 11.

330. *Singula ejusmodi quadrata, vel rectangula æquantur singulis rectangulis sub ejusmodi abscissis rectæ illius parallelæ axi, vel asymptoto, & recta quadam data.*

331. Si enim assumatur quarta proportionalis post quamvis VL, LP, L*p*, rectangulum sub VL, & ipsa æquabitur rectangulo PL*p*, rectangula autem sub VA, V*a*, VL', & ipsa ad rectangulum sub ipsa, & VL erunt, ut VA, V*a*, VL' ad VL, sive ut quadrata AI, *ai*, & rectangulum P'L'*p*' ad rectangulum PL*p*, adeoque quadrata AI, *ai*, & rectangulum P'L'*p*' pariter æqualia rectangulis sub illa eadem quarta proportionali, & abscissis VA, V*a*, VL' singula singulis.

SCHO-

SCHOLIUM V.

332. Hujus Corollarii 11. relatio ad Corollarium 6 facilius perspicietur, si assumpto pariter in recta VL quovis puncto R, ducatur RS parallela tangentibus, vel chordis, & equalis illi constanti quarte proportionali, tum per S ducatur ipsi VL parallela: quæ occurrat tangentibus in B, *b*, chordis in D, D'; erunt enim pariter quadrata AI, *ai*, & rectangula PL*p*, P'L'*p*' æqualia rectangulis VAB, V*ab*, VLD, VL'D' ac figura 115, vel 116 abit in 122 vel 123, si puncto *u* in illis ita in infinitum abeunte, ut nusquam jam sit, recte VR, BS nusquam jam sibi occurrant, adeoque parallele evadant.

Coroll. 12.

333. *Si in chordam* Vu, *vel tangentem* IB *in fig.* 124, 125 *incurrant plures rectæ* LP, L'P' *axi parallelæ in Parabola, vel alteri asymptoto in Hyperbola, erunt rectangula* VLu, VL'u *sub segmentis chordæ, vel quadrata* IL, IL' *tangentis ibi, ut segmenta* LP, L'P' *rectæ illius parallelæ intercepta inter chordam, vel tangentem, & perimetrum, hic ut rectangula sub iisdem segmentis, & recta in quovis angulo dato ducta ex intersectione ipsius cum chorda, vel tangente, ad asymptotum parallelam.* F.124 125

334. Patent ex ipso Coroll. 1, vel etiam 11. Sunt enim ibi quadrata IL, IL', vel rectangula VL*u*, VL'*u* in Parabola, ut rectangula sub L'P'; L'P, & recta constanti, que rationem non mutat; hic ut rectangula sub ipsis LP, L'P' & rectis ex L, & L' ductis ad asymptotum parallelam in quovis angulo dato.

Coroll. 13.

335. *Segmenti Parabolici* VMu *in fig.* 126. *area est ad aream trianguli* VMu *habentis pro basi chordam* Vu, *& verticem in* M *in vertice diametri* MR, *cujus ipsa est ordinata, ut* 4 *ad* 3; *ad parallelogrammum vero* VEeu *clausum tangente per* M *ducta, & proinde ipsi* F.126

Vu parallela, sive ad rectangulum sub ipsa chorda Vu, & perpendiculo in eam demisso ex eodem vertice, ut 2 ad 3.

336. Secta enim bifariam MV in B, agatur per B recta parallela diametro MR, occurrens chordæ *u*V in L, perimetro Parabolæ in D. Patet fore LB ad MR, ut VB ad VM, ut 1 ad 2, vel ut 2 ad 4. Erit autem MR ad LD (n. 333) ut rectangulum VR*u* ad rectangulum VL*u*, sive in ratione composita VR ad LV, & R*u* ad L*u* nimirum 2 ad 1, & 2 ad 3 sive ut 4 ad 3; ac proinde BL ad LD, ut 2 ad 3, & BL ad BD ut 2 ad 1. Quare & area trianguli BVL dupla erit areæ BVD ob altitudinem communem in V, sumptis BL, BD pro basibus. Area autem trianguli VDM pariter dupla est areæ trianguli VDB ob basim VM duplam baseos VB. Igitur area trianguli VDM erit equalis areæ BVL, quæ cum sit ad aream trianguli similis MVR, ut quadratum BV ad quadratum VM, erit, ut 1 ad 4. Eodem vero argumento area trianguli M*du* erit quarta pars areæ MR*u*. Quare totum triangulum VM*u* ad bina triangula VDM, *ud*M simul, ut 4 ad 1. Eodem vero pacto sectis bifariam chordis VD, DM, M*d*, *du* haberentur quatuor triangula, ad quæ priora illa duo simul essent, ut 4 ad 1 tum octo alia, ad quæ illa quatuor essent pariter, ut 4 ad 1, & ita porro, ac series rectarum semper magis in infinitum accederet ad perimetrum Parabolæ, & area ad aream segmenti parabolici, qua concluderetur omnis illa progressio in infinitum producta, cujus progressionis primus terminus esset triangulum CM*u*, & ratio primi termini ad secundum, ut 4 ad 1. Quoniam igitur in progressionibus geometrice decrescentibus est (c. 3. n. 10. Arith.) differentia primi termini a secundo ad primum, ut primus ad totam progressionis summam: erit ut 3 differentia 4 ab 1 ad 4, ita illud triangulum ad aream sectoris parabolici. Parallelogrammum vero CE*eu* est duplum ejus trianguli, & æquale rectangulo sub basi C*u*, & altitudine MI. Igitur erit id parallelogrammum, &

id

id rectangulum ad aream ipsius sectoris ut 6 ad 4, sive ut 3 ad 2.

SCHOLIUM VI.

337. NISI supra demonstrata fuisset proprietas diametrorum chordas omnes bifariam secantium adinodum facile hic ex hac ipsa propositione deduci posset pro omnibus diametris Ellipseos, ac Parabolæ, & pro secundariis Hyperbolæ.

338. Si enim sint binæ tangentes IB, *ib* parallelæ in Ellipsi in fig. 127, vel in Hyperbola in fig. 128, ac in eas incidat in L, *l* chorda P*p* parallela I*i* jungenti contactus, debebunt rectangula PL*p*, P*lp* ad quadrata tangentium LI, *li* habere rationem eandem; cumque ipsæ IL, *il* æquales esse debeant, erunt æqualia etiam ea rectangula, adeoque P*l* ad PL, ut *p*L ad *pl*, sive componendo in Ellipsi, dividendo in Hyperbola L*l* ad PL, ut ipsa L*l* ad *pl* adeoque P*l*, *pl* æquales. Quare si secta bifariam *i*I in C agatur per C recta CR ipsius tangentibus parallela, quæ nimirum abscindet rectas RL, R*l* æquales rectis CI, C*i*, adeoque & inter se, ea ipsa & chordam P*p* secabit bifariam in eodem puncto R.

339. Et eo quidem pacto haberetur proprietas diametrorum omnium in Ellipsi, si nimirum concipiatur, tangentes parallelas BI, *bi* in fig. 127 converti circa omnem Ellipsim, conversa cum iis I*i*, & positione chordarum P*p*. In Hyperbola vero habentur omnes diametri secundariæ, quæ solæ tangentes habent sibi parallelas. Sed pro primariis hoc pacto progredi liceret. Assumpta in fig. 128 CR' æquali CR, & ducta P'L'R'*l'p'* parallela rectæ PLR*lp*, debebunt esse æquales IL, IL', adeoque æqualia rectangula P'L'*p'*, PL*p*, quæ ad æqualia quadrata IL', IL eandem rationem habent. Essent autem æquales P'L', *p'l'*. Quamobrem ob L'*l'* æqualem L*l*, si P'L' esset major, vel minor PL, etiam L'*p'* esset pariter respectu L*p*: adeoque rectangulum P'L'*p'* non erit æquale rectangulo PL*p*, nisi PL æquetur P'L'.

Ducta igitur PP', quam CI secet in *r*, ea erit parallela LL', & bifariam rectam in *r*, ut LL' in I, ac CI erit diameter omnes chordas PP' parallelas tangenti LL' secans bifariam, & eadem est demonstratio pro chordis *pp'*.

F.129 340. At in Parabola in fig. 129 si sit quævis chorda P*p*, ac e contactu I tangentis ipsi parallelæ ducantur recta parallela axi, ea ipsam chordam secabit bifariam in R. Ductis enim PL, *pl* pariter axi parallelis, erunt quadrata IL, *il* ad se invicem, ut ipsæ LP, *lp*, quæ cum æquales esse debeant, erunt æqualia & ipsa quadrata, & rectæ IL, I*l*, & RP, & R*p* ipsis æquales.

341. Porro jam ex ipsa hac demonstratione patet, in Parabola omnes diametros debere esse axi parallelas: ac in Ellipsi, & Hyperbola omnes debere transire per centrum, demonstraretur ex eo, quod omnes chordæ per centrum transeuntes in ipso centro bifariam secantur (n. 81 & diametri ejusmodi chordas etiam secare debeant bifariam, adeoque per illud idem centrum transire. Atque hæc quidem innuere libuit, ut pateret, quam facile alio prorsus pacto ex eadem definitione series proprietatum deduci posset, deducta ante alias hac constanti ratione rectangulorum sub chordarum segmentis.

342. Sed iis omissis contemplabimur hic potius miram quandam analogiam, quam habent Ellipses, & Hyperbolæ similes communi centro, & positione axis transversi, ac Parabolæ æquales communi positione axis, cum asymptotis Hyperbolarum, quæ profluit partim ex Prop. 5, partim ex hac Prop. 6, & Corollariis.

SCHOLIUM VII.

F.130 131 132 133 343. *SI sint in fig.* 130. *binæ Ellipses, & in fig.* 131, 132 *binæ Hyperbolæ similes, quarum commune centrum* C, *& axes transversi* Cu, C'u' *positione congruant; ac in fig.* 133 *binæ Parabolæ æquales, congruente axium positione; ordinatarum eandem in utraque positionem habentium diametri positione congruent, & si quædam alterius ordinata* Pp *occurrat alteri in* H, h *ja-*

h jacentibus P, p *in fig.* 131 *in eodem ramo*, *in fig.* 132 *in ramis oppositis erunt semper æqualia segmenta* HP, hp; *&* Hp, hP *intercepta hinc inde inter interiorem, & exteriorem.*

344. Si enim ducatur in fig. 130 & 131 diametri *Ii* chordæ *Pp*, quæ alteri Ellipsi, & Hyperbolæ occurrat in E, & *e*, tangentes per I, & E ductæ, erunt parallelæ (n. 119.). Quare cum ordinata *Pp* debeat esse parallela tangenti per verticem suæ diametri I, erit & *Hh* parallela tangenti ductæ per verticem diametri E, adeoque ipsius ordinata. In fig. vero 132 si ipsi *Pp* diameter parallela *Ii* occurrat alteri Hyperbolæ in *A*, diameter habens pro ordinata *Pp* debet esse (n. 212.) parallela tangenti ductæ per verticem I. cum debeat esse conjugata diametri *Ii*, & pariter diameter ordinatæ *Hh* parallela tangenti ductæ per *A*. Cum igitur eæ tangentes parallelę esse debeant, eandem habebunt directionem earum ordinatarum diametri, & cum debeant transire per idem centrum commune C, positione congruent. Demum in fig. 133 si concipiatur Parabola *HVh* translata per axem ita, ut segmentum axis VF abeat in segmentum axis V'F' sibi æquale, congruet tota cum illa Parabola sibi æquali ita, ut diameter ER abeat in IR' existente vertice I in eadem distantia ab axe, in qua erat, adeoque in eadem recta priore erit diameter IR, & quoniam adhuc tangens per I ducta cum diametro eundem angulum continebit, quem tangens per E, erunt hujusmodi tangentes parallelæ, & proinde communis directio ordinatarum utriusque diametri, & communis ordinatarum eandem directionem habentium diameter.

345. Igitur in omnibus ejusmodi figuris a communi diametro secabuntur ambæ ordinatæ *Pp*, *Hh* bifariam in R; ac proinde erit HP æqualis *hp*, & *Hp* æqualis *Ph*.

346. *Manente ordinatarum ejusmodi directione quatuor rectangula* HPh, PHp, Hph, Php *semper erunt inter se æqualia, & magnitudinis constantis, ac semper æqualia in fig.* 130, 131, 133 *quadrato tangentis* IA, *vel*

Ia ducta per verticem I *diametri interioris*, *ac determinata contactu*, *& perimetro exteriori*, *ipsa tangente* Aa *secta bifariam in* I; *in fig. vero* 132 *differentiæ quadratorum semidiametrorum paralleIarum* CI, CA.

347. Ducta enim per P, & I recta, quæ alteri curvę occurrat in M, & N, erit & PM æqualis IN, & MI æqualis PN. Quare rectangulum MPN erit equale rectangulo MIN. Est autem n. 299.) rectangulum MPN ad rectangulum HP*h*, ut MIN ad rectangulum AI*a*. Igitur etiam rectangulum HP*h* erit equale rectangulo AI*a*. Porro rectangula HP*h*, PH*p*, H*ph*, P*hp*, patet, æqualia esse ob PH, *ph*, & H*p*, *h*P æquales, rectangulum autem AI*a* erit in fig. 130, 131, 133 æquale quadrato AI, cum coeuntibus punctis P, *p* in I abeant HP, *hp* æquales in AI, *a*I, & in fig. 132 ob diametrum A*a* sectam bifariam in C erit rectangulum AI*a* differentia quadratorum CI, C*a*.

348. Hic autem jam patet analogia Sectionis Conicæ externæ respectu internæ cum asymptotis. Segmenta rectæ interceptæ hac externa perimetro, & interna æquantur hic inter se (num. 345), ut (n. 221) segmenta rectæ intercepte asymptotis, & Hyperbola. Ex ea æqualitate infertur hic (num. 346) constans mensura illorum quatuor rectangulorum, quæ continentur sub distantia alterius intersectionis cum altera e binis perimetris, & binis intersectionibus cum altera, ut in asymptotis (numer. 251), & ut ibi, ita etiam hic, ubi habetur tangens ordinatis rectis parallela, eą in ipso contactu secatur bifariam, ac illa rectangula æquantur quadrato tangentis interceptæ contactu, & perimetro exteriore. Ubi autem in fig. 132 non habetur tangens parallela, æquantur illa rectangula differentię quadratorum CI, CA, quæ in asymptotis, ubi CA evanescit, æquantur (num. 251) quadrato toti ipsius CI. At in eo etiam conveniunt. Si enim axis V*u* minuatur in infinitum ita, ut demum evanescat, Hyperbola desinit in binas rectas transeuntes per C juxta numer. 16 & 110, quæ erunt

runt ipsæ asymptoti, quo casu evanescente AC, differentia quadratorum CI, CA est idem, ac ipsum quadratum CI. Quamobrem proprietates asymptotorum sunt generales in Hyperbola omnibus Hyperbolis similibus communi centro, & axium positione, quæ, axe evanescente, desinunt demum in asymptotos ipsas, in quibus generales illæ proprietates manent, licet aliquæ ex iis ita immutentur, ut remaneant accommodatæ ipsis rectis, & evanescentiæ axis transversi, ac ex natura rectæ lineæ cum iis ipsis proprietatibus conjuncta deducantur alia Theoremata.

349. Et quidem in ejusmodi similibus perimetris analogia cum asymptotis in Hyperbola, & Parabola etiam ulterius progreditur. Nam in iis, ubi in infinitum producuntur, perimeter exterior ad interiorem accedit ultra quoscunque limites, quin tamen unquam sibi occurrant. In Ellipsi quidem perimetrorum distantia est semper finita, & quidem minima in ipsis axium conjugatorum verticibus, maxima in verticibus transversorum. At in Hyperbola in fig. 131, & in Parabola in fig. 133 recedente ordinata Pp in infinitum, crescit ipsa in infinitum, adeoque crescit in infinitum & Hp ipsa major, & cum sit Hp ad AI, ut IA ad ph, ob rectangulum illud æquale quadrato AI ipsa ph decrescit pariter in infinitum. Sed cum Hp nusquam abeat in infinitum (nam omnes chordæ parallelæ alicui secanti bis eundem ramum inclinantur ad directricem (num. 149) in angulo minore, quam sit angulus æqualitatis), & proinde eam secant bis, ac omnes pariter in Parabola bis secent (n. 154) nusquam ph evanescet.

SCHOLIUM VIII.

350. Sed jam regrediendum ad seriem Theorematum hisce scholiis interruptam ac eruemus proprietatem maxime notabilem, quę licet sit quoddam

simplex veluti Corollarium ipsius Propositionis 6, tamen hic nova Propositione 7 enunciabitur cum nimirum naturam ipsam Sectionum Conicarum contineat, & usum habeat frequentissimum.

PROPOSITIO VII. THEOREMA.

351. *Quadratum semiordinatæ cujusvis diametri primariæ in Ellipsi & Hyperbola ad rectangulum sub abscissis a binis verticibus est in constanti ratione, nimirum ut quadratum diametri, vel semidiametri conjugatæ ad quadratum ejus diametri vel semidiametri sive si, ut in axe, tertia continue proportionalis post diametrum ipsam, & diametrum conjugatam dicatur parameter, vel latus rectum, & ipsa diameter latus transversum, erit, ut latus rectum, vel parameter ad latus transversum, vel diametrum illam ipsam. In Parabola vero æquatur rectangulo sub abscissa ab unico diametri vertice, & recta constanti, quam dico parametrum; vel latus rectum, & quæ æquatur ordinatæ per focum ductæ, ac æquatur quadruplæ distantiæ verticis diametri a foco; vel a directrice.*

F.134 135 352. Pro Ellipsi, & diametris primariis Hyperbolæ, in fig. 134, 135 haberi rationem constantem quadrati semiordinatę LP, vel Lp ad rectangulum VLu sub binis abscissis a binis verticibus V, u patet ex Propositionibus 5, & 6. Nam ex prop. 6 rectangulum PLp ad rectangulum VLu habet rationem constantem, manente ordinatarum directione, & ex Propositione 5 recta Pp bifariam secatur in L, adeoque rectangulum PLp æquatur quadrato PL, vel pL. Idem pro Hyperbola constat etiam ex numer. 256.

353. Eam rationem esse eandem, quam parametri, vel lateris recti ad diametrum, vel latus transversum, patebit ex definitione perametri, si demonstretur esse eandem, ac rationem quadrati diametri, vel semi-

semidiametri conjugatæ ad quadratum diametri, vel semidiametri primariæ. Id autem pro Ellipsi patet in fig. 134; cum diametri omnes in ea terminentur ad perimetrum, adeoque si ACa sit diameter conjugata, esse debeat in eadem illa ratione rectangulum ACa ad rectangulum VCu, sive quadratum AC ad quadratum VC, adeoque & quadratum Aa ad quadratum Vu. Pro Hyperbola demonstratum est num. 256.

354. In Parabola vero in fig. 136 cum rectangulum PLp, sive quadratum PL sit per Coroll. 1. Prop. 6 ad rectangulum sub abscissa VL, & quavis recta constante in ratione constanti; si semel assumatur pro recta illa constanti, sive pro parametro tertia proportionalis post aliquam abscissam, & ejus semiordinatam, jam quadratum semiordinatæ fiet æquale rectangulo sub abscissa, & ea parametro, adeoque ea ratio constans in reliquis omnibus ordinatis erit ratio æqualitatis. F.136

355. Quod si ordinata $P'L'p'$ transeat per focum F, & diameter LV occurrat directrici in H, erit (num. 178) VL' dimidia $L'H$, & $L'H$ dimidia $P'p'$, ac proinde æqualis $P'L'$. Quare erit $L'V$ ad $L'P'$ ut $L'P'$ ad $P'p'$; & proinde ordinata $P'p'$ per focum ducta erit illa parameter constans, quæ erit quadrupla VH, adeoque & quadrupla VF. Q. E. D.

SCHOLIUM I.

356. Cum ex hac quoque Propositione plurima consectaria profluant, ordinem quemdam in iis deducendis persequar. In primis quæ omnes Sectiones Conicæ communia habent in diametris omnibus cum iis; quæ initio de axibus sunt Demonstrata Corollario 1. indicabo; tum deducam bina, quę Parabolę soli sunt propria, quibus demonstratis progrediar ad Theoremata quędam pertinentia ad Ellipsim, & Hyperbolam generaliter: demum occasione nacta comparationis Ellipseos cum circulo, plures ejus proprietates evolvam.

Co-

Coroll. 1.

357. *Quæ deducta sunt pro ordinatis axis transversi in Corollariis* 8, 10, 12, 13 *definit.* 2 *num.* 74, 79, 83. 85, *eadem locum habent in ordinatis diametrorum omnium, si pro axe conjugato ponatur in binis postremis diameter conjugata.*

358. Demonstratio est eadem utrobique, petita pariter ex ratione constanti, quam habet quadratum semiordinatæ ad rectangulum sub abscissis, & quod pertinet ad Coroll. 13 demonstratum est pro Hyperbola num. 256.

Coroll. 2.

359. *Latus rectum cujusvis diametri in Parabola æquatur lateri recto principali, & quadruplæ abscissæ a vertice axis per ordinatam ductam ex ejus diametri vertice.*

F. 65 360. Est enim in fig. 65 parameter diametri transeuntis per P quadrupla (num. 351) PD, adeoque quadrupla ER compositæ ex EM quarta parte lateris recti principalis, & MR ejusmodi abscissæ a vertice.

Coroll. 3.

F. 124 125 361. *Si e quovis puncto* L *chordæ* Vu *Parabolæ in fig.* 124, *vel tangentis* IL *in fig.* 125. *ducatur* LP *axi parallela usque ad perimetrum, erit ibi rectangulum* VLu, *hic quadratum* IL *æquale rectangulo sub* PL, *& latere recto ejus diametri, cujus ibi chorda* Vu *est ordinata, & quæ hic transit per contactum* I.

362. Secta enim in fig. 124 chorda V*u* bifariam in R, & erecta RM parallela axi, quæ erit (num. 206, & 212) diameter ejus chordæ, erit quadratum VR, sive rectangulum VR*u* (num. 351) æquale rectangulo sub RM, & latere recto diametri ipsius. Erit autem rectangulum VL*u* ad rectangulum VR*u* (num. 333) ut rectangulum sub LP, & illa parametro assumpta pro constanti, ad rectangulum sub RM, & eadem parametro, adeoque & rectangulum VL*u* erit æquale rectangulo sub LP, & eadem parametro. Porro si coeuntibus V, *u* secans LV*u* abeat in tangentem, quadratum

ejus

ejus tangentis debebit æquari rectangulo sub L'P, & ea parametro. Sed idem in fig. 125. patebit, si in diametrum IR axi, adeoque ipsi PL parallelam ducatur semiordinata PR, quæ erit parallela, & æqualis LI. Erit enim quadratum RP æquale rectangulo sub IR, & parametro diametri IR, adeoque & quadratum IL æquale rectangulo sub LP, & eadem parametro.

Coroll. 4.

363. *In Ellipsi, & Hyperbola diametri conjugatæ sunt sibi invicem conjugatæ.*

364. Pro Hyperbola demonstratum est etiam (n. 244.), sed pro utraque sic evincitur communi demonstratione. Sint in fig. 137, 138 binæ ordinatæ Pp, $P'p'$ eidem diametro Vu æqualiter distantes a centro C per CL, Cl, & proinde æquales (num. 357, & 79). Si ducatur per centrum C diameter ACa parallela ordinatis Pp, $P'p'$, ea secabit chordas PP', pp' bifariam, cum L'P, L'P', & $l'p$, $l'p'$ debeant æquari æqualibus CL, Cl, ac proinde habet ipsas chordas PP', pp' pro ordinatis. Igitur binæ diametri Vu, Aa ejusmodi sunt, ut alterius ordinatæ sint alteri mutuo parallelæ, adeoque (num. 312) ipsæ diametri sibi mutuo conjugatæ sunt. F. 137, 138

Coroll. 5.

365. *Si communem diametrum habeant plures Ellipses, vel plures Hyperbolæ eandem primariam diametrum, ordinatæ vero sint in quibusvis angulis inclinatæ ad ipsas diametros; semiordinatæ ad idem diametri punctum pertinentes erunt in omnibus in constanti ratione inter se, quam habebunt diametri conjugatæ, & idem respectu Ellipsium contingit semiordinatæ ad circulum, & respectu Hyperbolarum tangenti ex eodem puncto diametri ductæ ad circulum ipsum eadem diametro descriptum, habita ipsius circuli diametro pro diametro ejusdem conjugata, cui tangenti semiordinata Hyperbolæ æquilateræ æqualis erit.*

366. Si enim in fig. 139, 140 ejusmodi Ellipsium, vel Hyperbolarum semiordinatæ fuerint LP, LP', erunt, invertendo in proportione hujus Propositionis 7, quadrata F. 139, 140

drata

drata semiordinatarum LP LP' ad quadrata suarum semidiametrorum conjungatarum in eadem ratione communis rectanguli VLu ad quadratum communis semidiametri CV, adeoque & LP ad suam semidiametrum conjugatam, ut LP' ad suam, ac proinde alternando LP ad LP', ut altera semidiameter conjugata ad alteram.

367. Quod si in fig. 139 VPu sit circulus, in eo quadratum LP æquatur rectangulo VLu, & si in fig. 140. ducatur LT tangens ad circulum VTu, quadratum ipsius æquatur rectangulo VLu. Quare etiam in iis erit quadratum LP figuræ 139, & LT fig. 140. ad quadratum semidiametri circuli, ut rectangulum VLu ad quadratum CV, nimirum in ratione æqualitatis, ac proinde manebit demonstratio. In Hyperbola vero æquilatera diametri conjugatæ erunt æquales, (num. 260), adeoque ratio quadrati LP' in fig. 140 ad rectangulum VLu, vel quadratum LT ratio æqualitatis, adeoque LP' æqualis LT.

Coroll. 6.

368. *In eodem casu chordæ* Pp, P'p' *ductæ per vertices binarum ordinatarum pertinentium ad bina communia diametri puncta* L, l, *vel tangentes ductæ per bina extrema puncta* P, P' *ordinatarum pertinentium ad commune diametri punctum* L *concurrent in ipsa diametro alicubi in* Q, *quod etiam in Ellipsi cum circulo comparata contingit, in qua iccirco erit abscissa a centro ad semidiametrum, ut hæc ad distantiam tangentis a centro comparatam in ipsa diametro.*

369. Patet ex lemmate generali num. 204. Erit enim LP ad LP', ut lp ad lp', adeoque rectæ Pp, Ll, P'p' ad idem punctum Q convergent. Accedent autem puncto l ad L, donec cum ipso congruat, evanescentibus simul chordis Pp, P'p', simul ambæ secantes pPQ, p'P'Q abibunt in tangentes, & adhuc ipsæ tangentes in eodem diametri puncto Q concurrent. Porro si in fig. 139 VPu sit circulus, & PQ tangens, angulus CPQ erit rectus, & similia triangula CLP, CPQ ob angulum ad C communem, adeoque CL ad CP, sive CV, ut CV ad CQ.

SCHO-

SCHOLIUM II.

370. PLures hinc Ellipseos proprietates profluunt sane elegantissimæ, tam quæ ad ejus diametros conjugatas pertinent, quam quæ ad ipsius comparationem cum circulo, quæ quidem Hyperbolę vel nullo modo conveniunt, vel non omnino communes sunt. Eas aliquot Corollariis persequar eo ordine, quo alię ex aliis oriuntur.

Coroll. 7

371. *In Ellipsibus, annumerato iis etiam circulo, habentibus diametrum communem, si ordinatæ ductæ per vertices binarum diametrorum, quarum singulæ ad singulas pertineant, transeant per idem cujusvis diametri punctum, transibunt etiam ordinatæ ductæ per vertices diametrorum conjugatarum per aliud diametri punctum commune.*

372. Sint enim in fig. 141 semidiametri CP, CP' & ordinatę ad communem diametrum V*u* ductę per P, P' transeant per idem diametri V*u* punctum L. Sit quoque C*p* semidiameter conjugata CP, adeoque parallera tangenti PQ, & ducta semiordinata *pl*, tum semiordinata *lp'*, demonstrandum est fore C*p'* semidiametrum conjugatam CP'. Sic autem facile demonstratur. Tangens ducta per P' terminatur ad idem punctum Q, & ob similia triangula *pl*C, PLQ est C*l* ad *lp*, ut QL ad LP; & (num. 365) *lp* ad *lp'*, ut LP ad LP'. Quare ex equalitate ordinata C*l* ad *pl'* ut QL ad LP', adeoque ob angulos QLP', C*lp'* in parallelis ęquales, similia erunt triangula QLP', C*lp'*, &, C*p'* parallela QP', adeoque conjugata semidiametri CP'. F.141

Coroll. 8.

373. *In Ellipsi si ad quamvis diametrum* uV *e verticibus* P', p' *diametrorum quarumvis conjugatarum ducantur semiordinatæ* P'L, p'l, *alterius abscissa a centro* CL *erit media proportionalis inter alterius abscissas* Vl, ul *a binis verticibus, ac summa quidem quadratorum binarum-*

rum abscissarum a centro CL, CI aequabitur quadrato semidiametri CV, in quam ea demissa sunt; summa vero quadratorum semiordinatarum P'L, p'l quadrato semidiametri CA' conjugatae ipsius CV.

374. Si enim eadem diametro sit circulus VPu, & erigantur semiordinatae LP, lp erit (num. 371) Cp parallela tangenti QP, adeoque angulus PCp equalis alterno CPQ recto in contactu. Quare bini anguli PCL, pCl simul equantur recto. Cum igitur equentur recto & bini PCL, CPL in triangulo rectangulo CLP, erit angulus CPL equalis pCl, & proinde similia triangula CPL, pCl, que preterea ob bases CP, Cp equales erunt equalia; adeoque CL equalis lp medie proportionali inter Vl, ul ex circuli natura. Preterea vero summa quadratorum CL, Cl equabitur quadrato CP, sive quadrato CV; cumque sit Cl sive PL ad LP', & CL, sive lp ad lp', ut semidiameter CA ad semidiametrum CA' conjugatam CV, erit & summa quadratorum Cl, CL ad summam quadratorum LP', lp', ut quadratum CA, seu CV equale illi prime summe ad quadratum CA, quod proinde erit equale summe posteriori.

Coroll. 9.

375. *Summa quadratorum diametrorum, seu semidiametrorum conjugatarum in Ellipsi constanter aequatur summae quadratorum axium, vel semiaxium; parallelogrammum, cujus latera semidiametri conjugatae, rectangulo sub semiaxibus; ac parallelogrammum Ellipsi circumscriptum, quod continent tangentes ductae per diametrorum conjugatarum vertices rectangulo sub axibus, cujus parallelogrammi angulorum vertices erunt semper in perimetro Ellipseos alterius priori similis, cujus latera ad ejus latera homologa erunt in ratione subduplicata 2 ad 1.*

F. 142. 376. Nam in fig. 142. si Vu fuerit axis Ellipseos VPu, & diameter circuli VPu, & CP', Cp' semidiametri conjugatae, ductis P'LP, p'lp axi perpendicularibus usque ad circuli peripheriam, tum CP, Cp, erit quadratum CA ad quadratum CA', ut quadratum LP ad quadratum LP', & quadratum lp ad quadratum lp',

adeo-

adeoque ut summa quadratorum LP', *lp* ad summam quadratorum LP, *lp'*, seu ob PL æqualem C*l* (num. 373) summa quadratorum PL, *pl* æquatur summæ C*l*, *lp*, sive quadrato C*p*, vel CA. Igitur & summa quadratorum LP', *lp'* æquatur quadrato CA'. Cum vero etiam C*l* æquetur LP, adeoque bina quadrata C*l*, CL æquentur binis PL, CL, sive quadrato CP, vel CV, quatuor quadrata LP', *lp'*, CL, C*l*, sive bina semidiametrorum conjugatarum CP', C*p'* æquabuntur binis quadratis semiaxim CA', CV; adeoque & quadrata diametrorum conjugatarum quadratis axium.

377. Ductis autem *p*L, *p'*L, erunt, ut CA ad CA', tam areæ triangulorum P*p*L, P'*p'*L, & PCL, P'CL, quæ, cum sint inter easdem parallelas, sunt ut bases LP, LP', quam areæ triangulorum *pLl*, *p'Ll*, & *p*C*l*, *p'*C*l*, quæ pariter sunt ut bases *pl*, *p'l*. Sunt igitur in eadem ratione & tota quadrilinea PL*lp*, P'L*lp'*, & triangula PCL, P'CL, ac *p*C*l*, *p'*C*l*; adeoque & residua triangula PC*p*, P'C*p'*; est autem triangulum PC*p* rectangulum ad C dimidium rectanguli sub PC, C*p*, sive sub VC, CA, & triangulum P'C*p'* dimidium parallelogrammi P'C*p'*T. Quare erit rectangulum sub AC, & CV ad parallelogrammum P'C*p'*T pariter, ut CA ad CA', sive ut idem rectangulum sub AC, & CV ad rectangulum sub CA', & eadem CV, nimirum ad rectangulum sub semiaxibus; cui proinde æquale erit illud parallelogrammum.

378. At in fig. 143 si QT*qt* sit parallelogrammum tangentium ductarum per vertices P, *p'*, P, '*p* diametrorum conjugatarum P*p'*, P'*p*, satis patet ob ipsarum tangentium parallelismum cum ipsis diametris, fore inter se æqualia quatuor parallelogramma CT, CQ, C*t*, C*q*; quorum proinde cum singula ut CT, æquentur rectangulo sub semiaxibus, simul omnia æquabuntur rectangulo sub axibus. Ducta vero CQ, quæ Ellipsi occurrat in V, chordam P*p* ea bifariam secabit in R, & ibidem ab ea bifariam secabitur; cum sint binæ diametri parallelogrammi, eritque PP' F. 143

ordi-

ordinata semidiametri VC, adeoque (num. 368) CR ad CV, ut CV ad CQ, & CQ ad CV, in ratione subduplicata CQ ad CR, sive 2 ad 1. Pariter si Pp', CT sibi occurrant in r, & CT Ellipsi in B, erit CT ad CB in ratione subduplicata CT ad Cr, sive 2 ad 1, adeoque Q, T ad hujusmodi Ellipsim per num. 119.

Coroll. 10.

379. *Diametrorum omnium in Ellipsi maxima est axis transversus, minima axis conjugatus, reliquarum ea major, quæ axis transverso propior, ac binæ hinc inde in angulis cum ipso æqualibus æquales.*

F.142 380. Nam in fig. 142 si Vu sit axis transversus, qui conjugato semper est major (num. 64), erit LP major, quam LP' in eadem ratione; adeoque quadratum CP æquale quadratis CL, PL erit majus quadrato CP', quod est æquale quadratis CL, LP'; ac proinde CP, vel CV major quam CP', & axis transversus duplus CV major quavis diametro dupla CP'.

381. Porro quoniam quadratum PL ad quadratum P'L est in constanti ratione, in eadem ratione crescent, & decrescent & ipsa, & eorum differentia. Crescit autem semper sinus PL in circulo, dum P ab V ab A tendit, decrescente CL, ac in A est maximus, adeoque & differentia quadratorum LP', LP quæ eadem est, ac differentia quadratorum CP, CP', semper crescit ab V ad A, vel A'; & proinde cum quadratum CP sit semper idem, decrescet perpetuo CP', & abeunte P' in A' fiet minimum. Quare diametri quoque quo magis distant ab axe transverso eo minores sunt, & axis conjugatus est omnium minimus.

382. Demum si Ellipsis completa occurrat ipsi PP' in I, erit LI æqualis LP', adeoque & CI æqualis CP', & angulus LCI æqualis LCP'. Quare binæ semidiametri CP', CI hinc inde in æqualibus angulis ab axe transverso æquales, adeoque æquales & integræ diametri.

Coroll. 11.

383. *Diameter per cujus verticem ducta ordinata ad axem habebit abscissam a centro ejusmodi, ut ejus quadratum sit dimidium quadrati ejusdem semiaxis, habebit diametrum conjugatam sibi æqualem, & ea, datis axibus, facile determinatur.*

384. Si enim fuerint CP', Cp' æquales, erunt æquales & anguli P'CL, p'Cl, adeoque & CL, Cl, nimirum (si Cp' fuerit conjugata CP') CL, LP, & quadratum CL dimidium quadrati CP, sive CV. Dato autem axe uV, si fiat angulus VCP semirectus, tum capta CP æquali CV, ducatur PL' perpendicularis ipsi axi, & capiatur LP' ad LP in ratione semiaxis CA' ad semiaxem CV, erit P'C semidiameter, quæ suæ conjugatæ æqualis erit.

Coroll. 12.

385. *Si eodem axe sit Ellipsis, & circulus; erit area circuli ad aream Ellipseos, ut is axis ad alterum, quæ ratio erit eadem in segmentis communes abscissas habentibus; ac area totius Ellipsis erit media geometrice proportionalis inter areas circulorum habentium pro diametris binos ejus axes, sive circuli circumscripti & inscripti, ac æqualis areæ circuli habentis diametrum mediam geometrice proportionalem inter binos axes.*

386. Si enim Vu sit jam axis uterlibet, & circulus rectæ PP' occurrat in I', erit PI' ad IP' semper ut PL ad LP', sive ut semiaxis CV ad CA', sive ut totus axis Vu ad axem alterum. Quare & areæ genitæ eodem motu earundem rectarum PI', IP' erunt in eadem ratione, nimirum area segmenti PVI' ad segmentum IVP', & area totius circuli ad aream totius Ellipseos.

387. Porro cum hinc area circuli habentis pro diametro axem transversum sit ad aream Ellipseos, ut axis transversus ad conjugatum, & area Ellipseos ad aream circuli habentis pro diametro axem conjugatum sit iterum, ut axis transversus ad conjugatum, erit area Ellipseos media inter areas illorum circulorum, & cum

quævis semidiameter sit minor semiaxe transverso, major semiaxe conjugato, patet, circulum descriptum, assumpto pro radio illo priore, fore circumscriptum, assumpto vero hoc posteriore, fore inscriptum. Cumque areę circulorum sit in ratione duplicata diametrorum, patet, circulum pariter habentem diametrum mediam geometrice proportionalem inter binos axes, habiturum aream pariter mediam inter areas eorundem illorum circulorum, & æqualem areæ Ellipseos.

SCHOLIUM III.

388. ATque hoc quidem pacto multa deducimus, quæ Ellipsi ita propria sunt, ut ad Hyperbolam saltem eodem pacto transferri non possint, licet suas habeat Hyperbola ipsa proprietates, quæ earum plerisque respondeant. Sic nonnullis eorum, quæ hic proponuntur n. 373, 375, 379 respondent, quæ pro Hyperbola proposita sunt num. 253, 248, 244.

389. Ex ipsa Propositione facile deducitur, *datis latere transverso, & recto, ac directione ordinatarum, vel datis in Ellipsi & Hyperbola binis diametris conjugatis magnitudine, & positione, posse inveniri omnia Sectionis Conicæ puncta*. Assumpta enim quavis abscissa in latere transverso, & ducta recta in ea directione, quam habere debent ordinatæ, quæ nimirum in Ellipsi, & Hyperbola parallela est diametro conjugatæ, satis erit pro Parabola assumere in ipsa hinc inde binas semiordinatas medias proportionales inter abscissam, & latus rectum, in Ellipsi, & Hyperbola assumpta media proportionali inter binas abscissas a binis verticibus, satis erit assumere hinc & inde binas semiordinatas, quæ ad eam sint in ratione simplici diametri conjugatæ ad diametrum illam, in qua assumpta est abscissa, sive in ratione subduplicata lateris recti ad illam diametrum. Habebitur enim, ut patet, debitus semiordinatæ valor, & mutata utcumque abscissa, describetur omnis Sectio Conica per puncta.

390. Sed

390. Sed ut pro Hyperbola ex datis binis diametris conjugatis elegantissimam, & expeditissimam constructionem habuimus num. 269 ope regulæ gyrantis circa datum punctum inter binas asymptotos, sic hic pariter habemus aliam nihilo minus expeditam, & elegantem constructionem Ellipseos per puncta, datis itidem binis diametris conjugatis, idque pariter ope regulæ alia quadam data lege gyrantis inter datas binas rectas.

391. Sint binæ diametri conjugatæ in fig. 144, 145 VC*u*, ACP. Ex alterius vertice A demisso in alteram F. 144
perpendiculo AB, capiatur AD in eodem, vel ad par- 145
tes A producto, ut in fig. 144, vel versus B, ut in fig. 145, AD æqualis semidiametro CV, ac per C, & D ducta indefinita EF, productaque indefinite utrinque V*u* in G, & H, moveatur linea BD ita, ut puncto B excurrente per rectam GH, ac puncto D per EF abeat in *db*; & punctum A abiens in *a* describet Ellipsim. Ducta enim ex *d* recta parallela DB, quæ occurrat rectis AP, V*u* in L, N, erit (num. 204) *d*L ad *d*N, ut DA ad DB, sive ut *da* ad *db*. Quare ducta *a*L, erunt similia triangula *adL*, *bd*N; adeoque *a*L parallela diametro VC*u*. Erit autem DA ad *d*L, ut AC ad LC, adeoque quadratum DA, sive CV ad differentiam quadratorum DA, *d*L, sive *da*, *d*L, nimirum ad quadratum *a*L, ut quadratum AC ad differentiam quadratorum AC, LC, sive ad rectangulum sub abscissis AL, LP. Quare alternando quadratum VC ad quadratum AC, ut quadratum *a*L ad rectangulum ALP sub abscissis, & proinde *a*L æqualis semiordinatæ, & punctum *a* ad Ellipsim.

392. Quod si in fig. 146, 147 V*u*, AP fuerint axes, F. 146
constructio evadet facilior. Sumpto enim in axe CA 147
segmento AD vel ad partes oppositas centri C, ut in fig. 146, vel versus ipsum, ut in fig. 147, & notatis in regula punctis D, C, A, ipsa regula ita convertatur, ut punctum C excurrat per axem VC*u* in *c*, puncto D excurrente per ACP in *d*, ac punctum A translatum in *a* discribet Ellipsim. Ducta enim *a*L paralle-

la VC, erit da ad dL, ut ca ad CL, adeoque quadratum da, sive CV ad differentiam quadratorum da, dL, sive quadratum aL, ut quadratum ca, sive CA ad differentiam quadratorum ca, CL, sive CA, CL; nimirum ad rectangulum ALP, adeoque alternando quadratum CV ad quadratum CA, ut quadratum La ad rectangulum ALP, ut oportebat.

393. Quoniam vero illa puncta a, b, d in fig. 144 145, vel a, c, d in fig. 146, 147 possunt etiam notari in extremo rectilineo chartæ margine, & charta ipsa ita translata, ut puncta b, d, vel e, d semper sint in rectis GH, EF, notari, facile possunt quotcumque puncta a, & per ea duci linea continua; admodum facile Ellipsis describitur. Solet autem & instrumentum construi respondens fig. 147, in quo virga dca habeat in a stylum, in c, & d binos pedes insertos ita crenis in lamina incavatis secundum directiones CV, Cu, CA, CP, ut per ipsas excurrant, ac stylus a motu continuo Ellipsim describat, & ut plurima Ellipsium genera describi possint, virga paratur longior, per quam stylus a, & pedes c, d possint excurrere, & admoveri ad se invicem, ac removeri ita, ut da fiat æqualis semiaxi transverso ca conjugato.

394. Ovalem lineam, quæ referat Ellipsim, sic et-
148 iam ope circini licebit describere. Fiat in fig. 148. rhombus quivis HDBE, cujus latera ad partes angulorum oppositorum B, & H producantur: tum centris B, & H, quovis, sed utrobique eodem intervallo, describantur arcus circuli FG, IL, ac centris E, & D reliqui FL, GI, qui apte connectentur cum prioribus in F, G, I, L cum perpendiculares sint iisdem EF, DG, DI, EL, habentibus eorum centra. Quin etiam
F.149 si dentur in fig. 149. axis major VCu, & minor ACP, facile sic determinabitur rhombus HDBE, cujus ope ejusmodi ovalis fiat. Centro C radiis Cu, CA fiant quadrantes circuli uK, AS occurrentes in K, S ipsis CA, Cu. Ducatur Au occurrens arcui AS in G, ac per quodvis punctum I arcus DG ducatur recta CI occur-

currens quadranti *u*K in L, ducanturque rectæ *u*L, AI, per quarum concursum F ducta recta parallela ipsi LC, quæ occurrat rectis C*u*, CP in B, E assumptisque CH, CD versus V, & A æqualibus CB, CE, habebitur rhombus quæsitus EBDH. Nam triangula FB*u*, FEA erunt similia isosceliis LC*u*, ICA, adeoque arcus circuli radio B*u* abibit in F, & radio EF in A.

395. Pro quovis rhombo sic facilius invenietur quadratum. Sumatur AN versus P æqualis *u*C, tum CM versus *u* æqualis CN, ductaque MN, ac bifariam secta in R, sumantur MB, NE ad partes oppositas C æquales MR, vel NR, & CH, CD æquales ipsis CB, CE, ac habebitur intentum. Patet enim HDBE fore quadratum, ob æqualia triangula BCD, DCH, HCE, ECB. Ductis autem RB, RC, & RO parallela NE, ob CM, CB æquales CN, CE patet, MN, BE fore parallelas, & proinde angulum RBO æqualem alterno MRB, sive MBR ob MB, MR æquales, vel CBR. Angulus quoque ROB æqualis est semirecto NEO, sive semirecto BCR, & BR communis triangulis BRC, BRO. Igitur erit OB æqualis CB, & ducto arcu *u*F, erit OF æqualis C*u*, sive NA. Quare additis EO, EN, æqualibus eidem NR, erit & EF æqualis EA, ac arcus radio EF abibit in A. Sed hæc constructio locum non habet, ubi CN differentia semiaxium sit ita magna, ut MB evadat major, vel æqualis M*u*.

SCHOLIUM IV.

396. Progrediemur jam ad aliud Theorema deducendum e Prop. 6, ac pariter fœcundissimum plurimorum pertinentium potissimum ad tangentes, quorum nonnulla etiam e Corollariis ipsius Prop. 6, deduci poterant, ut monui num. 327. Ordinem deductionis indicabo in Scholiis interjectis.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA.

397. *SI per concursum* Q *fig.* 150, 151, 152 *tangentis* PQ *cum diametro* QR *ducatur recta occurrens perimetro sectionis Conicæ in* T, t, *& ordinatæ* Pp *in* K, *erit* QK *media harmonice proportionalis inter* QT, Qt *in fig.* 150: 151, *in quibus* T, t *sunt in eodem ramo, vel* KT, Kt *in fig.* 152, *in qua eadem jacent in ramis oppositis.*

398. Ducta enim recta Q*p*, agantur per T, *t* rectæ parallelæ ipsi P*p* occurrentes rectis QP, QR, Q*p* in
F.150 H, *h*, I, *i*, L, *l*, & perimetro iterum in S, *s*. Quo-
151 niam ordinatæ TS, *ts* a diametro pariter bifariam se-
152 cantur in I, *i*, & (num. 204) rectæ HL, *hl* a recta QR debent secari bifariam in I, *i*, ut recta P*p* in R; erunt & HS, *hs*, æquales TL, *tl* & rectangula THS, *ths* rectangulis HTL, *htl*. Porro cum sit HT ad *ht*, & TL ad *tl*, ut QT ad Q*t*; erit quadratum QT ad quadratum Q*t*, ut rectangulum HTL ad rectangulum *htl*, sive ut rectangulum THS ad rectangulum *ths*, nimirum (num. 321) ut quadratum PH ad quadratum P*h*, vel ut quadratum KT ad quadratum K*t*. Quare QT ad Q*t*, ut KT ad K*t*. Sunt autem QT, Q*t* in fig. 150, 151 trium QT, QK, Q*t* extremæ, & KT, K*t* differentiæ extremarum a media, ac in fig. 152 hæ extremæ trium KT, KQ, K*t*, illæ differentiæ earundem a media. Habetur igitur utrobique ratio harmonica proposita.

SCHOLIUM I.

399. SI recta QK sit parallela axi in Parabola, vel alteri asymptoto in Hyperbola, puncto *t* ita in infinitum recedente, ut nusquam jam sit, fiet juxta num. 25 QT æqualis TK. Sed quoniam eo casu in Parabola QK deberet congruere cum diametro QR, cum ipsum casum, qui nimirum usui futurus est,

accu-

accurate post hoc Scholium per finitam Geometriam demonstrabo.

400. Quod si punctum R abiret in centrum; Pp in fig. 150, 151 evaderet diameter, & tangens PH diametro RQ parallela, adeoque punctum Q abiret in infinitum, quo casu recta Tt pariter parallela tangenti Hh, esset ordinata diametri Pp, & ab ea bifariam secaretur in K, quod pariter congruit cum iis, quæ num. 25. demonstrata sunt de harmonicæ proportionis ratione in æqualitatem desinente, ubi alterum e quatuor punctis extremis abit in infinitum.

401. In casu vero, in quo QK evadat diameter, & congruat cum QR, punctum T ubique, & t in Ellipsi, ac Hyperbola evadit ejus vertex, adeoque evanescentibus TS, ts, fiunt HL, hl tangentes, & rectangula HTL, htl evadunt quadrata tangentium, quo tamen casu adhuc demonstratio vim habet, & in casu Ellipseos, ac Hyperbolæ coincidit cum demonstratione Coroll. 9. Propositionis 6. expositi num. 325, in qua seriem quandam consectariorum ejusdem Propositionis abrupimus, ut num. 327. monui, ne nimis late evagaremur, huc reservatis iis, quæ jam deducemus.

Coroll. 1.

402. *Tangens* PQ *in fig.* 153, 154, *& ordinata per idem punctum* P *ducta in Ellipsi, & diametris* Vu *primariis Hyperbolæ, ipsam diametrum secant in* Q, *&* R *in eadem ratione directa, & ad eandem centri partem, in Parabola in fig.* 155, *abscindunt segmenta* VR, VQ *a vertice æqualia.* F. 153 154 155

403. Nam in fig. 153, 154 puncta Q, V, R, *u* respondent punctis Q, I, K, *i* fig. 150, 151. Ac proinde erit VQ ad *u*Q, ut VR ad R*u*. Idem autem eruetur etiam ex illo Coroll. 9. Prop. 6: si enim tangentes per V, & *u* ductæ occurrant tangenti PQ in A, & B, erunt parallelæ, & per id Corollarium erit AV ad B*u*, ut AP ad PB, adeoque VQ ad Q*u*, ut VR ad R*u*.

404. Inde autem sequitur puncta Q, & R debere ja-

cere ad eandem centri partem ,. quia binę distantiæ VQ , VR ab eodem vertice V , quę sunt primus & tertius proportionis terminus , debent esse vel simul majores , vel simul minores quam binæ distantiæ ab altero vertice *u* , adeoque jacere ad eandem partem centri verticibus interjecti , ad quam jacet vertex propior .

405. In Parabola verò in fig. 155 sic per finitam Geometriam demonstratur fore QV , VR æquales . Preterea diameter ducta per P occurrat tangenti ductę per V in M , ordinatæ in *r* , ac ex concursu A binarum tangentium ducatur AN diametris , & axi parallela usque ad perimetrum . Erunt ob parallelismum æquales QV , P*r* , & VR , MP , adeoque etiam QR , M*r* . Erit autem (num. 328) QV ad AN , ut quadratum QP ad quadratum PA , sive ut quadratum QR ad quadratum VR , & AN ad MP , sive VR ut quadratum VA ad quadratum VM , sive ut quadratum *r*P ad quadratum *r*M, vel ut quadratum QV ad quadratum QR . Igitur ex æqualitate perturbata , erit QV ad VR , ut quadratum QV ad quadratum VR , quod ostendit eam esse rationem æqualitatis; erit enim rectangulum sub QV & se ipsa , nimirum ejus quadratum, ad rectangulum sub QV , & VR , ut ipsum quadratum QV ad quadratum VR , adeoque rectangulum sub QV & VR æquale quadrato VR , sive QV æqualis VR .

Coroll. 2.

406. *In Ellipsi & diametris primariis Hyperbolæ segmenta diametri* VR, VQ, *quæ abscindit ab altero vertice* V *ordinata* PRp , *& tangens* PQ *per idem punctum* P *ducta , sunt ut ejusmodi segmenta abscissa ab altero vertice , & ea ratio in Ellipsi est minoris , in Hyperbola majoris inæqualitatis , in Parabola æqualitatis .*

407. Patet primus ex precedentis Corollarii proportione . Nam alternando est VQ ad VR , ut *u*Q ad *u*R

uR, sive invertendo VR ad VQ, ut uR ad uQ. Patet secundum, quia ordinata Pp secat diametrum in R in Ellipsi inter vertices Vu, in Hyperbola extra; cum debeat (num. 149) jacere ibi inter binas tangentes sibi parallelas transeuntes per diametri vertices (num. 212), hic extra. Iacebit igitur contra Q ibi extra, hic intra, & in Ellipsi uR erit minor, quam uQ, in Hyperbola major. In Parabola vero ex Corollario superiore equantur VQ, VR.

Coroll. 3.

408. *Si tangens* VM *ducta per verticem* V *diametri occurrat in* M *recta transeunti per quodvis perimetri punctum* P, *& per alterum verticem* u *in Ellipsi & Hyperbola, ac diametri parallela in Parabola, ea secabitur bifariam in* A *a tangente ducta per* P, *ac in Parabola tangentes* VM, PQ *ducta per binos binarum diametrorum vertices* V, P, *& terminata ad ipsas diametros se mutuo secant bifariam in* A.

409. Erit enim in fig. 153, 154 Bu ad AV, ut uQ ad VQ, adeoque (nu. 406) ut uR ad VR, nimirum ut uP ad PM, vel demum ut eadem Bu ad AM, adeoque AV, AM æquales. At in fig. 155 ob QV dimidiam QR, erit VA dimidia PR, vel VM, & QA dimidia QP, ac proinde æquales & AV, AM, & AQ, AP.

SCHOLIUM II.

410. HActenus Propositionis consectaria quędam deduxi, quæ a rationis harmonicæ proprietatibus non pendent. Nunc quoniam puncta quoque Q, R, V, u in Ellipsi & Hyperbola harmonicam proportionem constituunt, cujus tum priora illa duo, tum hæc posteriora alterna sunt, deducam ea, quæ ex proprietatibus ejusdem harmonicę proportionis consequuntur, secta distantia binorum alternorum V, u bifariam a centro C, quorum bina potissimum demonstravi num. 22, 26. Quod autem ibi in fig. 6. sunt

sunt puncta A, R, B, C, D, hoc hic in Ellipsi in fig. 153. sunt puncta, *u*, C, R, V, Q, & in Hyperbola in fig. 154. *u*, C, Q, V, R. Primum autem prioris proprietatis consectaria, tum posterioris persequar.

Coroll. 4.

411. *In Ellipsi, & Hyperbolæ diametris primariis semidiameter* Cu, *vel* CV *est media geomtrice proportionalis inter* CQ, CR *distantias ordinatæ* Pp, *& tangentis* PQ *in eadem diametro assumptas, quæ ad eandem centri partem jacent ambæ.*

412. Patet primum ex num. 22. ob proportionem harmonicam punctorum Q, R, V, *u*: quorum alterna sunt V, *u*, & eorum distantia secta est bifariam in C Debere autem R, & Q jacere ad eandem partem centri C patet ex num. 402.

Coroll. 5.

413. *In iisdem est* CR *abscissa a centro ad* Ru *abscissam ab uno vertice, ut* VR *abscissa ab altero, ad* RQ *subtangentem.*

4 4. Cum enim sit CR ad CV, ut CV ad CQ, erit in eadem ratione & RV differentia ipsarum CR, CV ad VQ differentiam ipsarum CV, CQ, adeoque CR, ad CV, ut VR ad VQ, & proinde CR ad R*u* priorum summam, ut VR ad RQ summam posteriorum.

Coroll. 6.

F.156 415. *In Hyperbola in fig.* 156. *semidiameter quoque secundaria* CV, *vel* Cu *est media geometrice proportionalis inter* CR, CQ *distantias ordinatæ* Pp, *& tangentis* PQ *in eadem diametro assumptas; sed eæ ad partes oppositas jacent, & tangens, ac ordinata diametrum ipsam conjugatam secant in eadem ratione, sed reciproca.*

416. Si enim diametro primariæ D*d* conjugatæ ipsius V*u* occurrat tangens PQ in I, semiordinata sua PE parallela ipsi V*u* in E, erunt EP, EC æquales RC, RP, eritque RQ ad CQ, ut RP, sive CE ad CI, nimirum ob CI, CD, CE continue proportiona-

tionales (num. 411), ut quadratum CE vel RP ad quadratum CD. Quare dividendo RC ad CQ, ut differentia quadratorum RP, CD ad quadratum CD. Eſt autem (num. 351) quadratum CP, vel CR ad rectangulum DE*d*, ſive differentiam quadratorum CD, CE, vel CD, RP, ut quadratum CV ad quadratum CD, adeoque alternando quadratum CR ad quadratum CV in eadem illa ratione differentiæ quadratorum RP, CD ad quadratum CD. Igitur erit RC ad CQ, ut quadratum RC ad quadratum CV, adeoque RC, CV, CQ ſunt continue proportionales.

417. Jacebit autem CQ ad partes oppoſitas CR, quia cum CI, CE jaceant ad eaſdem partes (num. 411) tangens PQ prius incidet in diametrum primariam CD, quam in ſecundariam V*u*, ac proinde jacebit Q ultra centrum reſpectu PR.

418. Jam vero ſi capiatur C*q* equalis, & contraria CQ, ob CR, CV, C*q* continue proportionales, & C*u* æqualem CV, quatuor puncta *q*, V, R, *u* conſtituent proportionem hormonicam (num. 24) adeoque erit VR ad R*u*, ut V*q* ad *qu*, ſive ut *u*Q ad QV, & diameter V*u* ſecta in Q, & in R in eadem ratione, ſed reciproca.

Coroll. 7.

419. *Semidiameter quævis in Ellipſi & Hyperbola eſt media proportionalis inter ſemiordinatam diametri ipſi conjugatæ, & ſuum ſegmentum interceptum inter centrum, ac tangentem per extremum ſemiordinatæ ductam.*

420. Si enim in fig. 153, 154 ſit PE ſemiordinata ad diametrum CD conjugatam CV, erit æqualis CR, adeoque erit (num. 411) ipſa EP ad CV, ut CV ad CQ. Si vero in fi. 153 ſemidiameter CD producatur uſque ad tangentem QP in H, cum ſit pariter CE æqualis ſemiordinatæ PR, erit CD media inter CE, CH (num. 411), adeoque inter PR, CH. In figura vero 154 cum CV ſit media inter F. 153 154

ter CR, CQ, erit media inter semiordinata EP, & segmentum CQ.

Coroll. 8.

421. *In quavis Sectione Conica tangentes ductæ per extrema puncta cujusvis ordinatæ, coeunt in aliquo puncto ejus diametri, cujus ea est ordinata, ac si plures Ellipses annumerato iis etiam circulo, vel plures Hyperbolæ communem habeant diametrum, tangentes ductæ per extrema puncta ordinatarum eandem abscissam habentium convergent ad idem ejusdem diametri punctum. Si autem Hyperbola communem cum Ellipsi, vel circulo habeat diametrum primariam, & hujus tangens cum illius ordinata congruat in ipsa diametro, concurret etiam hujus ordinata cum illius tangente.*

422. Tangentes per extrema ordinatæ puncta ductas concurrere in diametro, demonstratum est etiam num. 216; tangentes Ellipsium & circuli, vel Hyperbolarum communem habentium diametrum, & abscissam, concurrere in eodem diametri puncto, demonstratum est num. 368. Idem hic patet, quia in Parabola distantia concursus cum diametro utriusque tangentis ductæ per bina extrema puncta ordinatæ a vertice ipsius diametri debebit esse æqualis eidem abscissæ, ac in reliquis omnibus casibus Ellipsium, & Hyperbolarum existente abscissa a centro, & semidiametro communi, debebit esse communis etiam distantia concursus tangentis cum diametro ab ipso centro,
F.157 & ad eandem partem jacere. Pro circulo autem est itidem manifestum; quia si in fig. 157. PQ sit tangens, PR semiordinata circuli; in triangulis rectangulis similibus CRP, CPQ erit CR ad CP, ut CP ad CQ, adeoque CP, sive CV media itidem inter abscissam CR, & distantiam CQ a tangente.

423. Quod si fuerit VP*u* vel circulus, vel Ellipsis & V*p* Hyperbola eadem diametro primaria V*u*, & RP semiordinata prioris, ac R*p* posterioris tangens pertineat ad idem diametri punctum R, etiam prioris tangens ducta per P, ac posterioris semiordinata

per *p* debent convergere ad idem punctum Q diametri, cum pro utraque debeat esse illa CQ tertia post CR, CV.

Coroll. 9.

424. *Tangens* Aa, *vel* Bb *in fig.* 153, 154, 155 F.153
per diametri verticem V, *vel* u *ducta*, *& terminata* 154
ad tangentes PQ, pQ *ductas per extrema puncta or-* 155
dinatæ Pp *in ipso vertice secatur bifariam*, *& binæ rectæ* Ba, bA *jungentes in Ellipsi*, *& Hyperbola angulos oppositos quadrilinei* AabB *earum quatuor tangentium*, *transeunt per concursum* R *ordinatæ cum diametro*.

425. Patet primum (num. 204), cum P*p* secetur bifariam in R, & rectæ PQ, RQ, *p*Q per idem punctum Q transeant. Secundum sic demonstratur. Cum sit V*a* æqualis VA, erit ipsa ad B*u*, ut VA ad ipsam B*u*, sive ut VQ ad Q*u*, vel ut VR, ad *u*R: adeoque ob angulos RV*a*, R*u*B in parallelis æquales, similia triangula RV*a*, R*u*B, & anguli ad R æquales, ac proinde recta *a*R producta ex parte R in fig. 153, ex parte *a* in fig. 154 congruet cum RB.

SCHOLIUM III.

426. HÆc quidem profluxerunt ex illa prima proprietate proportionis harmonicæ indicata num. 410, & proposita num. 22; nunc progrediar ad alteram ibidem indicatam, & propositam n. 26 nihilo minus fœcundam.

Coroll. 10.

427. *In Ellipsi*, *& Hyperbola in fig.* 153, 154 *sunt geometricè proportionales tum quatuor distantiæ* QV, QR, QC Qu *concursus* Q *tangentis cum diametro a vertice* V, *ab occursu ordinatæ* R, *a centro* C, *& ab altero vertice* u; *tum quatuor* RQ, RV, Ru, RC, *occursus ordinatæ* R *ab occursu tangentis* Q, *a vertice* V, *ab altero vertice* u, *& a centro* C.

428. Est proprietas (numer. 26) proportionis harmonicæ quatuor punctorum *u*, V, R, Q, quorum alterna V, *u*, & eorum distantia dividitur bifariam in C, adeoque Q & R sunt reliqua bina in bisſectione non assumpta, & Q est extremum in fig. 152, & 154.

Coroll. 11.

429. *Si tangens ducta per extremum ordinatæ punctum* P *in fig.* 158, 159 *occurrat tangentibus ductis per vertices diametri* V, u, *in* A, & a, & *semidiametro conjugatæ* CD *in* H, *erunt tam* RP, CH *mediæ, licet non continue proportionales, quam semidiameter*

F.158 CD *media continue proportionalis inter binas tangen-*

159 *tes* VA, ua.

430. Nam VA, RP. CH, *au* erunt ad se invicem ut QV, QR, QC, Q*u*, quę (num. 427) sunt in geometrica proportione, quamobrem inter VA, *au* erunt mediæ RP, CH, adeoque erit etiam media CD; quę (num. 419) est media in ipsas PR, HC, semiordinatam nimirum, & segmentum diametri conjugatæ interceptum centro C, ac tangente PQ.

Coroll. 12.

431. *Rectangula, quæ continentur sub binis tangentibus parallelis* VA, ua *interceptis inter contactus, & quamvis aliam tangentem* QP, *ac sub binis hujus segmentis* PA, Pa *interceptis inter illas, & contactum æquantur quadratis semidiametrorum parallelarum iis ipsis tangentibus alterum alteri.*

432. Cum enim (num. 429) CD sit media inter tangentes AV, *au*, erit ejus quadratum æquale rectangulo sub iisdem. Quod si CI sit semidiameter parallela tangenti QP, erit (n. 315) tam AV ad AP, quam *au* ad *a*P, ut CD ad CI; adeoque rectangulum sub AV, *au* ad rectangulum AP*a*, ut quadratum CD ad quadratum CI. Cum igitur rectangulum sub AV, *au* æquetur quadrato CD, etiam rectangulum AP*a* equabitur quadrato CI.

Coroll. 13.

433. *Rectangulum* QPH *sub segmentis tangentis cujusvis interceptis inter contactum, & binas quaslibet dis-*

diametros conjugatas est æquale quadrato semidiametri CI *parallelæ ipsi tangenti*.

434. Cum enim sit (num. 427) VR ad RQ, ut CR ad R*u*, erit etiam AP ad PQ, ut HP ad P*a*: adeoque rectangulum QPH æquale rectangulo AP*a*. sive (num. 431) quadrato CI.

SCHOLIUM IV.

435. His deductis progrediendum ad alia, quæ inde profluunt, si consideretur præterea perpendiculum ductum e centro in tangentem, vel e puncto contactus ad tangentem ipsam usque ad axem utrumvis, nimirum ad proprietates perpendiculi in tangentem, & normalium terminatarum ad axes ipsos, ubi cum diametris & axibus comparantur, quæ & elegantes sunt per sese, & summi sæpe usus in Astronomia, ac Physica.

436. At interea in binis Scholiis ad alia quædam nihilo minus utilia digrediemur. In primis notandum illud, ope hujus postremi Corollarii *admodum facile definiri axes datis binis diametris conjugatis*. Si enim sint in fig. 160, 161 diametri conjugatæ F.160
PC*p*, IC*i*, & ducta per P recta indefinita HQ pa- 161
rallela I*i*, quæ nimirum debet esse Ellipseos, & Hyperbolæ tangens, ac sumpta PS æquali dimidio lateri recto diametri P*p* in Ellipsi in fig. 160 in CP producta, in Hyperbola in fig. 161 versus C, sectaque bifariam CS in T, agatur TG perpendicularis ipsi CS, donec occurrat HQ in G, ac cento G intervallo GC, GS, quæ intervalla patet fore æqualia, inveniantur in ipsa tangente puncta Q, H; rectæ CV, CH, determinabunt positiones axium, & sumpta CV media geometrice proportionali inter CQ, CR, & CD inter CE, CH, tum sumptis C*u*, C*d* ipsis æqualibus ad partes oppositas, habebuntur axes V*u*, D*d*.

437. Cum enim circulus transire debeat per puncta C, S, Q, H, erit rectangulum HPQ æquale re-

ctan-

ctangulo CPS, adeoque quadrato CI mediæ nimirum inter CP, & dimidium latus rectum; angulus HVC rectus erit, ut oportebat, in axibus, & CD, CV erunt mediæ inter CE, CH, & CR, CQ, quæ nimirum haberi debebant in ejusmodi Ellipsi, vel Hyperbola, existente HPQ tangente parallela diametri I*i* conjugatę P*p*.

438. Erit autem in fig. 160 axis transversus is, qui evadet longior, in fig. 161 is, cujus occursus cum tangente ut Q est propior contactui P. Inventis axibus facile (num. 124, & 125) inveniuntur foci, & datis focis, ac axe transverso invenitur (nu. 90) directrix, atque adeo Conica Sectio ex definitione, qua ab initio usi sumus. Porro descripta iis axibus Sectione Conica, ea necessario transibit per punctum P, & habebit P*p*, I*i* pro diametris conjugatis. Erit enim quadratum CV sive rectangulum sub CR, CQ, ad rectangulum VR*u*, sive differentiam quadrati CR a quadrato CV, sive a rectangulo sub CR, & CQ, nimirum rectangulum sub RC & RQ, ut CQ ad RQ, sive CH ad RP, vel ad CE, nimirum (num. 411) ut quadratum CD ad quadratum CE, sive ad quadratum RP, adeoque alternando quadratum CV ad quadratum CD, ut rectangulum VR*u* ad quadratum RP; ac proinde ipsa RP erit semiordinata, & perimeter transibit per P, cujus tangens erit (num. 411) HTQ ob CR, CV, CQ continue proportionales, & CI, C*i* semidiameter conjugata, cum tangenti parallela fit, & ejus quadratum ęquetur rectangulo HPQ, juxta n. 433.

439. Hinc inde illud consequitur: *si in quadam figura recta* Bb *in dato angulo inclinata ad datam re-*
F.162 *ctam* Vu *secentur bifariam ab ipsa in* K, *vel inter pun-*
163 *cta* V, u, *ut in fig.* 162, *vel extra ut in fig.* 163, *ac sint quadrata* BK, *ut rectangula* VKu, *sive, quod eodem redit, quadratum* KB *ad rectangulum* VKu *in data ratione; ea figura erit Ellipsis in primo casu, Hyperbola in secundo*. Secta enim bifariam V*u* in C

& du-

& ducta per C recta ICi in eodem illo angulo ita, ut quadrata CI, Ci ad quadratum CV sint in illa eadem ratione, ac constructis Ellipsi & Hyperbola, quę habeant ipsas Vu, Ii pro diametris conjugatis, ejus Ellipseos, vel Hyperbolæ semiordinata quævis pertinens ad punctum K debebit congruere cum KB, vel Kb, cum debeat esse parallela Ii (n. 212) & debeat (n. 351) ejus quadratum ad rectangulum VKu esse in eadem illa ratione quadrati VC ad quadratum CI, adeoque ejus figurę puncta omnia congruent cum punctis ejusmodi Ellipseos, vel Hyperbolæ.

440. Id vero summo usui erit infra, ubi demonstrandum erit, Cono non per verticem secto, obvenire unam e tribus Conicis sectionibus initio definitis, & proinde habere omnes proprietates, quas ex illa definitione deduximus. Sed præterea addendum illud, *si in fig. 164. quadrata semiordinatarum* BK *fuerint, ut abscissa* PK *a vertice diametri* PK, *curvam fore Parabolam, cujus parameter tertia continue proportionalis post quamvis abscissam, & suam semiordinatam* BK. Nam in ea curva productum sub parametro, & quavis alia abscissa erit æquale quadrato suæ semiordinatæ, cum hoc aliud quadratum ad illud prius debeat esse, ut rectangulum sub sua abscissa, & illa recta ad rectangulum sub abscissa priore, & recta eadem. Data autem diametro PK, & directione ordinatarum Bb, ac magnitudine unius ex iis, vel parametro, tertia post abscissam PK, & semiordinatam KB, determinatur focus, & directrix Parabolæ, quibus datis, datur Parabola ipsa, quam debere congruere cum ejusmodi curva, facile demonstratur. F.164

441. Producta nimirum diametro KP, donec sit PM quarta parametri pars, recta AM ipsi PM perpendicularis erit directrix. Ducta vero PQ parallela ordinatis, & facto angulo QPF æquali QPM, ac recta PF æquali PM, erit F focus: Si enim foco F, directrice AM describatur Parabola, erit (num. 1) P

ad ipsam ob PF æqualem PM: erit PQ tangens (nu. 181) ob angulum MPF sectum bifariam a PQ; erit PK diameter (num. 206) ; & ejus parameter (nu. 351) quadrupla PM . Quare ejus ordinata congruet cum Bb & directione , & magnitudine , cum debeat esse parallela tangenti PQ, & semiordinatę quadratum æquale (num. 351) rectangulo sub PK, & parametro, adeoque ęquale quadrato KB , vel Kb.

SCHOLIUM V.

442. EOdem pacto plurima alia Problemata ex demonstratis Theorematis solvi facile possunt, in quibus vel se quisque , vel Tyronem Pręceptor exercere poterit . Nonnulla hìc innuam, ex quibus constent, *datis 5 punctis determinari Sectionem Conicam, ac proinde binas Sectiones non posse occurrere sibi mutuo , vel circulo , qui inter Ellipses enumerari potest , in pluribus , quam in quatuor punctis*.

443. In primis *datis binis chordis parallelis , patet, dari directionem unius diametri* , sectis nimirum ipsis chordis bifariam , & per sectionum puncta ducta recta indefinita. Hinc autem *dato arcu Sectionis Conicæ facile potest inveniri ejus centrum*. Si nimirum ducantur bina paria chordarum parallelarum , quarum singula determinabunt suarum diametrorum directionem, quæ proinde diametri , si concurrant , determinabunt centrum ipsius Sectionis , quæ si diametri evaserint parallelæ erit Parabola , centro in ea in infinitum abeunte ; & ubi eæ convergunt , ac centrum determinant , arcus ille Ellipsim , vel Hyperbolam pertinebit, (num. 83) prout ipsum centrum fuerit propius longiori e binis chordis parallelis , vel breviori, quæ si forte æquales evaserint , satis erit aliam chordam ducere aliquando priorem centro , quam sit altera e ductis , & videre , an chorda ipsa priore longior evaserit an brevior. Quanquam idem patebit etiam

iam (nu. 218), videndo, an arcus centro cavitatem, an convexitatem obvertat.

444. *Datis binis chordis parallelis inæqualiter a centro distantibus; adeoque inæqualibus (num. 83), & centro, facile inveniri possunt binæ diametri sibi invicem conjugatæ; vel si centro in infinitum abeunte constet, Sectionem Conicam debere esse Parabolam, facile invenietur unius diametri vertex, & parameter, quibus datis cum ipsa ordinatarum positione; datur (n. 436, 438, 441) Sectio Conica.*

445. Sint in fig. 165, 166, 167, binæ chordæ Pp, $P'p'$, & centrum C jaceat in prima ad partes majoris, in reliquis ad partes minoris, ac si inter utramque jaceret res esset prorsus eadem, dummodo in illa esset majori propius, in hac minori, ut illa Ellipseos casum referat, hæc Hyperbolæ binos casus, in quarum priore chordæ datæ sint ordinatæ ad diametrum primariam, in posteriore ad secundariam. Sectis bifariam ipsis chordis in R. R' habebitur directio diametri Vu eas habentis pro suis ordinatis, ignotis adhuc ejus verticibus; & ducta per centrum C recta iis parallela, ea exhibebit positionem diametri Bb ejus conjugatæ, cujus pariter vertices B, b adhuc ignorantur. Ducta vero per P recta parallela RR', quæ occurrat $P'p'$ in I, Bb in H, si sumatur in ea HA æqualis, & contraria HP, patet CA fore ordinatam diametro Bb: & proinde A ad Sectionem Conicam. Debebit autem esse (n. 299) rectangulum datum $P'Ip'$ ad rectangulum datum PIA in fig. 165, 166, ut rectangulum PRp, sive quadratum PR datum, ad rectangulum VRu sive ad differentiam quadratorum CR, CV, & in fig. 167 ut rectangulum BHb, sive differentia quadratorum CH, CB ad quadratum HP, sive CR datum. Dabitur igitur utrobique ea quadratorum differentia, & data præterea CR in fig. 165, 166, ac CH in fig. 167, dabitur ibi CV, & Cu, hic CB, & Cb.

446. Constructio autem erit hujusmodi. Capta in fig

fig. 165. media proportionali inter P'I, Ip', tum inter AI, IP inveniatur quarta post ipsas, & PR, cui æqualis ad angulos rectos cum CR erigatur RQ, & centro C intervallo CQ, invenientur puncta V, *u*. Erit enim quadratum primæ mediæ ad quadratum secunde, sive rectangulum P'Ip' ad rectangulum AIP, ut quadratum PR ad quadratum RQ, quod proinde debebit esse equale differentiæ quadratorum CR, CV existente CV majore, & erit, cum sit differentia quadratorum CR, CQ.

447. In fig. 166 inventa eodem pacto quarta illa, erigatur CQ ex C ipsi æqualis, & ad angulos rectos eidem CR, tum centro Q intervallo CR inveniantur vertices V, *u*, & demonstratio erit eadem. Sed si CQ evaserit æqualis CR, puncta V, *u* abibunt in C evanescet diameter V*u*, & Hyperbola abibit in rectam lineam, ut numer. 110. Erit enim eo casu P'Ip' differentia quadratorum P'R', R'I, sive P'R', PR ad rectangulum PIA, sive differentiam quadratorum HI, HP, vel CR', CR, ut quadratum PR ad quadratum CR; adeoque additis proportionalibus etiam quadratum PR ad quadratum CR, ut quadratum P'R', ad quadratum CR', adeoque si ducerentur CP, CP', angulus ad C in triangulis R'CP', RCP esset idem, & puncta C, P, P' in directum.

448. Quod si quarta illa proportionalis obvenerit major quam CR in fig. 166, centro Q intervallo CR non poterunt inveniri puncta V, *u*, & tum casus pertinebit ad fig. 167, & V*u* non erit diameter primaria, sed secundaria. Nimirum factis ut media inter PI, IA ad mediam inter P'I, Ip', ita HP, sive CR ad quartum, debebit obvenire recta minor, quam CH, sive PR, cum nimirum recta major, quam CR habuerit in priore casu ad PR eam rationem, quam media inter PI, IA ad mediam inter P'I, Ip'. Erecta igitur CQ perpendiculari ad HC æquali quartæ inventæ, centro Q, intervallo CH, vel RP determinabuntur vertices B, *b* diametri primariæ conjugatæ ipsius

V*u*,

Vu, cum debeat quadratum illius quartæ æquari differentiæ quadratorum CH, CB.

449. Inventa autem diametro primaria Vu in fig. 165, 166, & Bb, in fig. 167, admodum facile invenitur diameter ejus conjugata. In illis enim sumenda erit CB ad CV, ut PR ad mediam inter VR, Ru, in hac CV ad CB, ut HP ad mediam inter BH, Hb, cum nimirum (n. 351) quadratum semidiametri conjugatæ sit ad quadratum semidiametri primariæ, ut quadratum semiordinatæ ad rectangulum sub abscissis.

450. In parabola autem in fig. 168 ducta PI parallela RR', si capiatur media inter P'I, Ip', tum tertia post ipsam, & PR, erit illa media ad hanc tertiam, ut PI ad R'V sumendam in directum cum RR' ad partem ordinatæ minoris. Erit enim PI ad R'V, ut quadratum illius mediæ, sive rectangulum P'Ip' ad quadratum PR, seu rectangulum PRp ut debet esse per num. 361. F.168

451. Datis autem binis diametris conjugatis, & centro determinatur Ellipsis, vel Hyperbola (num. 436, 438), & dato vertice, ac directione diametri, & una quavis ordinata, adeoque & latere recto tertio post abscissam, & semiordinatam, ac ordinatarum directione datur Parabola num. 440.

452. *Quod si bina chordæ datæ æquales sint, Problema erit indeterminatum, vel impossibile, prout æqualiter, vel inæqualiter a centro distiterint*. In eo casu punctum I cadet in P, & assumpta alia chorda parallela binis illis æqualibus magnitudinis cujuscumque, per eam, & per alteram e datis determinata Sectione Conica, ea debebit habere pro chorda sua illam etiam alteram e binis æqualibus datis, quæ si a centro æque non distiterint Problema impossibile erit, cum quævis Sectio Conica debeat habere ordinatas, quæ inæqualiter a centro distant, inæquales, & pertinebit casus ad Ellipsim desinentem in binas rectas parallelas, ubi axe conjugato manente, & æquali ipsis chordis datis, axis transversus concipiatur excrescere in infinitum

ita, ut ejus vertices jam nusquam sint, in quas & Parabola abibit, si binæ ejus ordinatæ æquales sint, vertice V in fig. 168 ita in infinitum abeunte, ut nusquam jam sit.

F.169 453. *Dentur jam* in fig. 169, 170 *quinque puncta* 170 A, P, p, B, P', *per quæ oporteat Sectionem Conicam determinare*. Conjungantur bina quævis paria punctorum rectis, at BA, P*p*, quæ si fuerint parallelæ, jam definient unius diametri positione (num. 443), si non fuerint parallelæ concurrent alicubi in Q. Ducta per quintum punctum P' recta alteri ex iis, ut P*p* parallela occurrens alteri, si opus est productæ in I, fiat ut media inter AQ, QB ad mediam inter QP, Q*p*, ita media inter AI, IB ad quartum. Tum capiatur tertia continue proportionalis post P'I & quartum terminum inventum, cui in ipsa recta P'I producta, si opus est, capiatur æqualis I*p*' ad partes P, vel ad oppositas ita, ut si punctum Q fuerit vel simul intra utramque AB, P*p*, vel simul extra utramque etiam I vel sit simul inter utramque AB, P'*p*', vel simul extra utramque, si vero illud fuerit inter alteram, & extra utramque, si vero illud fuerit intra alteram ex his, & extra alteram, eritque etiam *p*' ad eandem Sectionem Conicam. Erit enim rectangulum AQB ad rectangulum PQ*p*, ut rectangulum AIB ad rectangulum P'I*p*': ac binæ chordæ P*p*, P'*p*' parallelæ determinabunt unius diametri positionem. Eodem modo conjunctis A*p*, PB, & ducta P'*i* parallela A*p* determinabitur *ia*, & alterum par chordarum parallelarum P'*a*, A*p*, ac per ipsas altera diameter. Si binæ diametri fuerint parallelæ, Sectio Conica erit Parabola, & per binas chordas parallelas determinabitur juxta nu. 450: si concurrant alicubi, determinabunt centrum, ac per ipsum, & binas chordas parallelas definietur Ellipsis, vel Hyperbola juxta n. 444. Quod si forte binæ ordinatæ, ut P*p*, P'*p*' evaserint æquales, & æqualiter a centro distantes, ad earum diametrum ex utrovis reliquorum datorum punctorum A, B ducta recta

pa-

parallela iis usque ad diametrum, & producta tantumdem, jam habebitur alia chorda inæqualiter a centro distans, & Problemati determinando par.

454. In fig. 169 punctum Q erat extra utramque Pp AB, erat I intra AB, assumenda fuit Ip' ad partes oppositas respectu IP', ut I remaneret simul intra utramque AB; Pp', & eodem pacto quoniam q fuit intra utramque Ap, BP, & i intra AB, assumpta est ia ad partes oppositas iP'. At in fig. 170 erat Q intra Pp, sed extra BA. Quare cum I fuerit intra AB, assumenda fuit Ip' ad partes IP', ut I jaceret extra Pp'. Et cum q fuerit intra PB, sed extra Ap, & i extra BA, assumenda fuit contra ia ad partes oppositas iP', ut i remaneret intra aP'. Id autem semper necessario habendum præ oculis. Nam ubi agitur de Ellipsi, & Parabola, semper concursus binarum chordarum habebitur inter utramque, vel extra utramque, prout id punctum jacuerit intra Sectionem Conicam, vel extra. In Hyperbola vero si utraque recta vel simul inclinetur directrici in angulo majore, quam sit angulus æqualitatis, vel simul in angulo minore, utraque vel binos conjunget ramos oppositos, vel ejusdem rami puncta, & concursus utriusque in primo casu habebitur intra utramque chordam, si id punctum jacuerit inter utramque ramum, habebitur vero extra, si jacuerit intra utrumvis ramum; in secundo vero casu habebitur intra utramque, si jaceat intra eum ramum, extra utramque, si extra eum jaceat. At si altera inclinetur in angulo majore, altera in minore; illa conjunget utrumque ramum, hæc ejusdem rami bina puncta, quo casu concursus necessario jacebit semper intra alteram, & extra alteram. Quare generaliter hoc verum erit *in binis paribus chordarum, quarum priores binæ posterioribus binis sunt parallelæ, debere utrumque concursum, vel simul esse intra utramque, vel simul extra utramque, vel simul intra alteram, & extra alteram, qui postremus casus solum habebitur in Hyperbola, ubi altera chorda debeat*

conjungere binos ramos oppositos; altera bina puncta ejusdem rami.

455. Infinitum esset persequi omnes casus, in quibus constructio rectas lineas pro Sectionibus Conicis exhibebit. Verum id generaliter licebit etiam ante constructionem deprehendere. Sectio enim Conica nonnisi in unam rectam, vel duas abire potest. Quamobrem nisi saltem tria puncta in directum jaceant, in rectas non incidetur, quæ si jacuerint in directum, rectæ lineæ omnino habebuntur. Pariter si pro binis punctis detur tangens cum ipso contactu, res eodem redibit; considerato puncto dato pro duplici, ut si puncta P, p coirent, & recta QPp abiret in tangentem; ac icciteo si detur tangens cum contactu, & tria puncta præterea, vel dentur binæ tangentes cum binis contactibus, & aliud punctum, eodem pariter res rediret: sed ista, & alia ejusmodi persequi, ut ubi dantur tangentes sine contactu, infinitum esset, quorum nonnullos casus Nevvtonus elegantissime solvit principiorum lib. 1.

456. Illud unum satis erit inferre, quod supra innuimus, *Sectionem Conicam alteri Sectioni Conicæ non posse occurrere, nisi in quatuor punctis*. Si enim quinque puncta congruant, congruit jam tota Conica Sectio cum tota. Porro si binæ intersectiones coeant habetur contactus, si tertia iis accedat habetur contactus arctior extra verticei axium, qui, ut infra patebit, fiet id, quod osculum dicimus: ubi autem omnes concurrunt in unicum punctum, evadit osculum adhuc arctius in axium verticibus. Sed hæc non sunt hujus loci, & post excursum fusiorem ad solutionem Problematum pertinentium ad determinationem Sectionum Conicarum ex quibusdam datis, regrediemur ad seriem Corollariorum interruptam numero 435, persequentes ea, quæ pertinent ad normalem, ac perpendiculum e centro in tangentem adjecta reliquis ante consideratis.

Co-

Coroll. 14.

457. *Rectangulum sub binis normalibus* PM, Pm *in fig.* 171, 172 *ad quodvis punctum* P *pertinentibus, ac* F. 171. *terminatis ad binos axes aequatur tam rectangulo* HPQ 172 *sub binis segmentis* QH *tangentis per idem punctum* P *ducta & terminata ad binos axes* Vu, Dd, *quam quadrato semidiametri* CI *parallela ipsi tangenti, & conjugata diametri transeuntis per idem punctum* P.

458. Sunt enim similia bina triangula rectangula MPQ, *m*PH, cum ob angulum ad Q in fig. 171 communem triangulis rectangulis MPQ, HCQ, & in fig. 172 angulos ad verticem Q oppositos aequales sit ipsum MPQ simile HCQ, ac ob angulum ad H communem sit eidem HCQ simile *m*PH. Quare erit MP ad PQ, ut PH ad P*m*, & rectangulum sub MP, & P*m* aequale rectangulo sub HP, & PQ, adeoque etiam (num. 433) quadrato CI.

Coroll. 15.

459. *Rectangulum sub perpendiculo* CL *ducto e centro in tangentem, ac normali* PM, *vel* Pm *ad alterum axem* Vu, *vel* Dd *terminata aequatur quadrato semiaxis alterius* CD, *vel* CV, *& bina normales inter se sunt in ratione reciproca duplicata axium, ad quos terminantur, perpendicula vero e centro in tangentem, mutato utcumque puncto contactus in ratione reciproca normalis utriuslibet.*

460. Ductis enim semiordinati PR, PE ad axes V*u*, D*d*, erunt similia triangula rectangula CLH, PRM ob angulos ad C, & P a parallelis contentos aequales, & pariter similia CLQ, P*m*E. Erit igitur CL ad CH, ut PR ad PM, adeoque rectangulum sub CL, & PM aequale rectangulo sub CH, & PR, sive (num. 419) quadrato semiaxis conjugati CD, ac pariter CL ad CQ, ut PF ad *m*P, adeoq; rectangulum sub CL, & *m*P aequale rectangulo sub CQ, & PE: sive (num. 419.) quadrato semiaxis CV.

461. Hinc autem ob CL utrique rectangulo communem, erunt PM, P*m*, ut quadrata CD, CV, ob

ma-

magnitudinem vero constantem rectanguli sub CL, & utravis normali, ipsum perpendiculum CL augebitur, vel minuetur in eadem ratione, in qua contra minuetur, vel augebitur normalis ipsa.

Coroll. 16.

462. *Subnormalis ad abscissam a centro in utroque axe est, ut quadratum alterius axis ad quadratum ipsius, & in axe transverso abscissa est ad distantiam occursus normalis cum axe ipso a centro, ut quadratum semiaxis transversi ad quadratum distantiæ foci utriuslibet a centro.*

463. Est enim in iisdem triangulis tam subnormalis MR ad PE, sive RC, quam PR ad subnormalem E*m*, ut PM ad P*m*, sive (num. 459.) ut quadratum semiaxis CD ad quadratum semiaxis CV. Hinc autem erit CR ad CM differentiam in Ellipsi, summam in Hyperbola ipsarum CR, RM, ut quadratum semiaxis transversi ad quadratum distantię foci a centro, quod (num. 64) in Ellipsi æquatur differentiæ in Hyperbola summę quadratorum semiaxium.

Coroll. 17.

F.173 464. *Si per verticem axis* V *in fig.* 173, 174,
174 175. 176, *ducantur recta* VO *perpendicularis axi, &*
175 *æqualis dimidio lateri recto ipsius axis, tum* CO *in Ellipsi*
176 *in fig.* 173, *ac in Hyperbola in fig.* 174, 175 *per centrum, & in Parabola in fig.* 176 OI *parallela axi, occurrens ordinatæ* RP *in* D, *erit* RD *æqualis subnormalis* RM.

465. Erit enim Ellipsi in Hyperbola RD ad abscissam CR, ut dimidium latus rectum VO ad semiaxem CV, nimirum ut quadratum alterius axis ad quadratum axis V*u*, sive (num. 462), ut RM ad ipsam RC. In Parabola vero in fig. 176 erit RD æqualis dimidio lateri recto VO, adeoque (num. 200) subnormali RM.

Coroll. 18.

466. *Rectangulum sub semidiametro* CI *conjugata semi-*

semidiametri CP *in fig.* 171, 172, *& perpendiculo, vel* PO *e vertice* P *diametri ejus conjugatæ demisso in ipsam, vel* CL *e centro* C *in tangentem per* P *ductam æquatur rectangulo sub semiaxibus, & semidiametri, vel diametri omnes sunt in ratione reciproca ejusmodi perpendiculorum.* F.171 172

467. Est enim tam quadratum CL ad rectangulum sub CL, & PM, quam rectangulum sub CL, & P*m* ad rectangulum sub PM, & P*m*, ut CL ad PM, ob CL communem in utroque termino primæ rationis, & P*m* in utroque secundæ. Quare cum & (num. 459) rectangulum sub CL, & PM æquetur quadrato semiaxis CD, rectangulum vero sub CL, & P*m* quadrato semiaxis CV; rectangulum sub PM, & P*m* (num. 457) quadrato CI, erit quadratum CL ad quadratum CD, ut quadratum CV ad quadratum CI, adeoque CL ad CD, ut CV ad CI, & rectagulum sub CL, & CI, vel sub CI, & PO æquali ipsi CL in parallelogrammo CLPO æquale rectangulo sub semiaxibus CD, CV.

468. Porro cum rectangulum sub eo perpendiculo, & CI constanter æquetur eidem rectangulo sub semiaxibus, mutato ipso perpendiculo, mutabitur CI in ratione ejus reciproca.

SCHOLIUM VI.

469. POsset hic jam admodum facile communi demonstratione pro Ellipsi, & Hyperbola erui, illud parallelogrammum circumscriptum Ellipsi, vel inscriptum quatuor ramis Hyperbolarum conjugatarum, quod continetur rectis ductis per vertices alterius e diametris conjugatis parallelis alteri, æquari rectangulo sub binis axibus, quod pro Hyperbola demonstravi num. 244; pro Ellipsi num. 375. Nam parallelogrammum, quod potest continere semidiameter CI cum semidiametro CP in suo angulo, esset ejus pars quarta, & æquatur rectangulo sub basi CI, & altitudine CL, nimirum rectangulo sub semiaxibus. Sed ad alia pergendum nondum eruta.

Co-

Coroll. 19.

470. *Quævis semidiameter est ad normalem ductam per verticem ejus conjugatæ, & terminatam ad alterum axem, ut is semiaxis, vel axis ad alterum; & omnes semidiametri sunt, ut ejusmodi normales.*

471. Est enim IC ad PM, vel P*m*, ut rectangulum sub IC, & CL, sive (num. 466) sub CD, CV ad rectangulum sub CL, & PM, vel P*m*, nimirum (num. 459) ad quadratum CD, vel CV, adeoque ut CV ad CD, vel ut CD ad CV. Cumque ea ratio sit constans, mutabuntur eodem pacto ipsæ CI, PM, P*m*.

SCHOLIUM VII.

472. HUC usque persequuti sumus precipuas proprietates, quæ ex illa harmonica tangentis proportione profluunt, considerando prius ejus unius consectaria, tum introducendo considerationem centri, & diametrorum conjugatarum, ac deinde normales ad curvam, & perpendiculum e centro in tangentem. Nunc etiam focos inducemus, quorum relationem ad tangentem vidimus num. 181, cum nimirum radii foci ad contactum ducti debeant cum ipsa tangente continere angulos æquales, adeoque & cum normali, & aliam ibidem habuimus proportionem harmonicam (num. 189) definitam a tangente, normali, & binis focis. Quo tamen plures assumuntur termini comparandi, eo plures etiam combinationes proveniunt, quibus animus defatigatur, atque obruitur. Quamobrem multis omissis, quas persequi infinitum esset, præcipuas tantummodo delibabimus.

Coroll. 20.

F.177 473. *Diameter* Mm *in fig.* 177, 178, 179 *est media*
178 *proportionalis inter cordam* Pp *ductam per focum, & a-*
179 *xem transversum.*

474. Si enim ipsi M*m* occurrat tangens per P ducta in A, & semiordinata in D, ac ordinatam P*p* sua diameter ipsi PD parallela secet in I, erit (num. 194) CA

æqua-

æqualis semiaxi transverso CV ob suum parallelismum cum FP ducta per focum, PI vero dimidia Pp erit æqualis CD. Cum igitur (num. 411, & 415) sit CM media inter CA, CD, erit tota Mm media inter Vu duplam CA, & Pp.

Coroll. 21.

475. *Si in fig.* 180, 181 *in Ellipsi, & Hyperbola ex occursu* M *normalis terminatæ ad axem transversum* Vu *cum axe ipso, ducatur perpendiculum* MT *in rectam e foco* F *ductam ad punctum* P *perimetri, ex quo normalis ducitur, id in ipsa ab eodem puncto abscindet segmentum* PT *æquale dimidio lateri recto principali, quod & in Parabola locum habet.* F.180 181

476. Ducta enim per C diametro Ii parallela tangenti PQ, ea a recta PF abscindet (num. 194) segmentum PD æquale semiaxi transverso; & in normali PM segmentum PO æquale perpendiculo CL ex centro C ducto in tangentem PQ, eritque (num. 459) rectangulum OPM æquale quadrato semiaxis conjugati. Erunt autem similia triangula rectangula PTM, POD, adeoque erit PD ad PO, ut PM ad PT, & rectangulum sub PT, & PD semiaxe transverso æquale rectangulo sub PM, & PO, sive quadrato semiaxis conjugati, nimirum PT tertia post semiaxem transversum, & conjugatum, sive æqualis dimidio lateri recto principali. In Parabola vero in fig. 176 ducta MT perpendiculari ad PF æqualia erunt triangula rectangula PTM, MRP, cum ob latera FP, FM æqualia (num. 200) sint æquales anguli FPM, FMP, & PM communis. Quare erit PT æqualis subnormali RM, sive (num. 200) dimidio lateri recto principali. F.176

Coroll. 22.

477. *Dimidium latus rectum principale ad normalem axi transverso est, ut perpendiculum e centro in tangentem ad semiaxem ipsum transversum.*

478. Est enim fig. 180, 181 PT ad PM, ut PD æqualis semiaxi transverso ad PO æqualem perpendiculo CL. Poterat etiam deduci ex num. 459, ex quo rectan- F.180 181

rectangulum sub PM, & CL æquatur quadrato semiaxis conjugati, sive (n.71, vel 351) rectangulo sub dimidio latere recto principali, & semiaxe transverso.

Coroll. 23.

479. *Differentia quadratorum normalis ad axem transversum terminatæ, & dimidii lateris recti principalis æquatur in Parabola quadrato semiordinatæ ipsius axis; est in Ellipsi, & Hyperbola ad ipsum, ut quadratum distantiæ focorum ad quadratum axis transversi, sive ut differentia in Ellipsi; summa in Hyperbola quadratorum semiaxis transversi, & conjugati ad quadratum semiaxis conjugati, sive ut differentia in Ellipsi, summa in Hyperbola totius, vel dimidii lateris recti principali, & totius, vel dimidii axis tansversi ad totum, vel dimidium axem transversum, quæ rationes omnes eadem sunt.*

F.176 177 178 480. Patet in Parabola in fig. 176, cum in triangulis illis PTM, PRM æqualibus, etiam MT debeat æquari PR, ac ob angulum ad T rectum ejus quadratum differentiæ quadratorum normalis PM, & dimidii lateri recti PT, quod immediate patet in triangulo rectangulo PRM, in quo PM normalis, RM æqualis dimidio lateri recto, PR semiordinatæ. Pro Ellipsi & Hyperbola sic demonstratur in fig. 180, 181. Ducta Pf ad alterum focum, & semiordinata PR, similia erunt triangula rectangula FMT, FPR ob angulum ad F communem. Quare erit PR ad MT, ut FP ad FM, adeoque etiam (num. 192) ut fP ad fM, nimirum ut summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola ipsarum FP, fP, sive utrobique axis transversus ad summam in Ellipsi, differentiam in Hyperbola rectarum FM, fM, sive utrobique ad distantiam focorum Ff. Adeoque quadratum semiordinatæ PR ad quadratum MT, sive differentiam quadratorum normalis PM, & dimidii lateris recti PT, ut quadratum axis transversi ad quadratum distantiæ focorum, vel sumendo dimidiorum quadrata, ut quadratum semiaxis transversi ad quadratum distantiæ foci a centro; nimirum (num. 64) ad differentiam in Ellipsi, summam in Hyperbola quadratorum semiaxis transversi, & conjugati; cumque sit (nu. 66) quadratorum semiaxis transversi ad quadratum conjugati, ut axis, vel semiaxis transversus ad totum, vel dimidium latus rectum; eadem illa ratio erit differentiæ totius, vel dimidii axis transversi, & totius, vel dimidii lateris recti in Ellipsi; summæ in Hyperbola ad totum, vel dimidium axem transverso.

Coroll. 24.

481. *Differentia in fig.* 182 *in Ellipsi, binarum* PF, Pf *ductarum a quovis puncto* P *ad binos focos, & summa in fig.* 183 *in Hyperbola ad* CR *abscissam a centro in axe transverso est constanter, ut distantia focorum* Ff *ad semiaxem transversum* CV. F.182 183

482. Si enim recta Pf occurrat in B, & D rectis FB, CD ductis e foco F, & centro C parallelis tangenti QP, erit PD (num. 194) æqualis semiaxi transverso VC, & ob angulos PFB, PBF æquales iis, qui fiunt in P cum tangente, adeoque (num. 181) æquales inter se, erit PB æqualis PF, & fB in Ellipsi differentiæ, in Hyperbola summæ binarum Pf, PF, quæ ob fF duplam FC, sive fC, erit dupla fD. Erit autem summa illa, vel differentia ad fF distantiam focorum, ut fD ad fC, ut DP, sive CV ad CQ, nimirum (num. 411) ut CR ad CV, & alternando fB ad CR, ut fF ad CV.

Coroll. 25.

483. *Rectangulum sub binis rectis* PF, Pf *in fig.* 184, 185 *ductis a quovis puncto* P *ad binos focos æquatur quadrato semidiametri conjugatæ ejus, quæ tendit ad* P; *rectangulo sub binis normalibus terminatis ad binos axes, ac rectangulo sub segmentis tangentis interceptis inter contactus, & binos axes; & ipsius rectanguli* FPf, *ac quadrati ipsius* CP *summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola æquatur ibi summæ, hic differentiæ quadratorum semiaxium.* F.184 185

484. Concipiatur enim circulus circumscriptum triangulo FPf, qui occurrat axi conjugato in *m*, & N,

posito

posito N in arcu FPf in fig. 184 in opposito in fig. 185, ducatur Pm occurrens axi transverso Vu in M, & NP secans axem uV in Q, ac recta Fm. Ob rectam Ff sectam bifariam, & ad angulo rectos in C a diametro Nm; arcus FNf, Fmf secabuntur bifariam in N, m. Quare tam recta Pm in fig. 184, quam PN in fig. 185 secabit bifariam angulum FPf, cum anguli insistente æqualibus arcubus Fm, fm in fig. 184, FN, fN in fig. 185 ęquales esse debeant; recta vero PN erit ipsi Pm perpendicularis ob angulum mPN rectum in semicirculo. Erit igitur utrobique num. 181, Pm normalis, PN tangens. Angulus autem FmP, erit ęqualis angulo MfP, cum uterque insistat eidem arcui FP, adeoque ob angulos ad P ęquales in triangulis FPm, MPf, erunt similia ea triangula, & FP ad Pm, ut PM a Pf, ac rectangulum FPf ęquale rectangulo MPm, adeoque num. 457) tum quadrato semidiametri conjugatę ejus, quę tendit ad P, tum rectangulo NPQ. Cumque summa in Ellipsi num. 375, 248), differentia in Hyperbola quadratorum semidiametrorum conjugatarum ęquetur ibi summę, hìc differentię quadratorum semiaxium, ęquabitur eidem ibi summa, hìc differentia rectanguli FPf, & quadrati PC.

Coroll. 26.

485. *Rectangulum* FMf *sub binis distantiis concursus normalis cum axe transverso a binis focis æquatur in Ellipsi differentiæ, in Hyperbola summæ quadrati normalis* PM *ad ipsum terminatæ, & quadrati semidiametri conjugatæ ejus, quæ terminatum ad* P, *vel rectanguli* FPf *binarum ductarum ab binos focos, & rectangulum* FQf *sub binis distantiis concursus tangentis a binis focis æquatur in Ellipsi summæ, in Hyperbola differentiæ quadrati tangenti* PQ *terminatæ ad axem transversum, & quadrati ejusdem illius semidiametri conjugatæ, vel rectanguli* FPf.

486. Nam ex circuli natura rectangulum FMf æquatur rectangulo mMP, & rectangulum FQf rectangulo PQN. Porro rectangulum sub Mm, & MP, addito qua-

quadrato MP in fig. 184, & ablato in fig. 185, evadit rectangulum sub *m*P, & PM, sive quadratum illius semidiametri conjugatæ, vel rectangulum FP*f*, & rectangulum sub PQ, & QN, ablato in fig. 184 quadrato PQ & addito in fig. 185, evadit rectangulum sub PQ, & PN, sive illud idem quadratum semidiametri conjugatę, vel rectangulum FP*f*.

Coroll. 27.

487. *Si e binis focis* F, f *in Ellipsi in fig.* 63, *&* F. 63 *Hyperbola in fig.* 64. *ducantur in tangentem* PT *bina* 64 *perpendicula* FA, fa *eorum rectangulum æquabitur quadrato semiaxis conjugati.*

488. Erit enim (num. 192) FA ad normalem IP, ut perpendiculum CL e centro in tangentem ad *fa*; ac proinde rectangulum sub FA, & *fa* æquabitur rectangulo sub IP, & CL, sive (n. 459) quadrato semiaxis conjugati.

Coroll. 28.

489. *Radius ad sinum anguli, quem recta e foco ducta ad contactum continet cum tangente, est in Ellipsi, & Hyperbola, ut semidiameter parallela tangenti ad semiaxem conjugatum, & is angulus in Ellips. a recto maxime in ipsius axis conjugati verticibus distat, angulo quem binæ rectæ inde ad focum ductæ continent ibi existente maximo: tum illius differentia a recto, quæ æquatur duplo hujus, eo magis minuitur, quo punctum contactus ad verticem propiorem axis transversi accedit magis: in Hyperbola is angulus eo magis recedit a recto, & ille, quem eæ binæ rectæ continent, eo magis minuitur, quo contactus magis distat a vertice axis transversi.*

490. Nam ob angulos FPA, *f*P*a* utrobique æquales (num. 181) est FP ad FA, ut *f*P ad *fa* in eadem ratione, ac proinde quadratum FP ad quadratum FA, ut rectangulum FP*f*, sive (n. 483) quadratum semidiametri parallelæ tangenti PT ad rectangulum sub FA, & *fa*, sive (n. 487) quadratum semiaxis conjugati; ac

proinde FP ad FA, sive radius ad sinum Anguli FPA, ut illa ipsa semidiameter ad eum semiaxem.

491. Quamobrem is sinus eo erit minor, & angulus proinde eo magis recedet a recto, quo ea semidiameter major erit. Porro ea semidiameter in Ellipsi eo est major, quo ejus conjugata CP est minor; cum summa quadratorum utriusque sit (num. 375) constanter æqualis summæ quadratorum semiaxium, & CP eo est minor (num. 379), quo magis P accedit ad vertices axis conjugati, & recedit a vertice propiore axis transversi. Quare angulus FPA eo magis recedit a recto, quo magis P accedit ad verticem axis conjugati, ubi maxime a recto recedit. Cumque ejus differentia a recto API sit angulus FPI, & FP*f* sit duplus ipsius FPI; ipse angulus FP*f* erit maximus puncto P congruente cum semiaxis conjugati vertice; & eo major erit, quo magis P ad eum verticem accedet, & recedet a vertice sibi propiore axis transversi.

492. At in Hyperbola in fig. 64 cum diameter CP in recessu a vertice axis conjugati perpetuo crescat (num. 246), & differentia quadratorum semidiametrorum conjugatarum sit constanter eadem; etiam semidiameter conjugata perpetuo augebitur, adeoque perpetuo recedet a recto angulus FPA, & minuetur tam ipse, quam FP*f* ejus duplus.

SCHOLIUM VIII.

493. Postrema hæc Corollaria, quæ ad focum pertinent, licet non profluxerint immediate ab ipsa propositione hac 8, tamen profluxerunt a Corollariis ex ea deductis combinatis cum iis, quæ antea fuerant eruta, quam ob causam hinc divellenda non fuerant. Postremum hoc determinat anguli, quem foci radius cum tangente continet, magnitudinem, ac incrementa, & decrementa pro Ellipsi, & Hyperbola. Pro Parabola idem deduci facile potest e num. 198. Est nimirum radius ad sinum anguli FPA in fig. 65, ut FP

ad

ad FA, sive ob FP, FA, FM continue proportionales; & FP æqualem (num. 351) quartæ parti lateris recti pertinentis ad diametrum transeuntem per P; erit radius ad eum sinum in ratione subduplicata distantiæ contactus a foco ad quartam partem lateris recti principalis; sive in subduplicata ratione lateris recti diametri ductæ per contactum ad latus rectum principale; & quoniam in recessu puncti P a vertice axis transversi semper augetur (num. 58) distantia FP; semper angulus rectæ FP cum tangente magis recedet a recto.

494. Jam vero progrediar ad aliam proprietatem Sectionum Conicarum, quæ ipsis nomen dedit; & quæ ita pariter a sexta Propositione profluit; ut sit merus particularis casus Theorematis demonstrati (num. 319). Verum hic iterum demonstratur ope Prop. 7; & sternet nobis viam ad definiendos circulos osculatores Sectionum Conicarum per finitam Geometriam, qui nimirum ita ad arcum Sectionis Conicæ accedant; ut quemadmodum inter arcum circuli, & rectam tangentem nulla alia recta duci possit, licet infiniti numero circulares arcus possint duci; ita inter arcum Sectionis Conicæ; & arcum ejus circuli osculatoris, nullus alius circularis arcus transire possit, licet in unico puncto se contingant, & infiniti numero arcus Sectionum Conicarum possint interseri, quæ generalis est proprietas pro circulis osculatoribus curvarum quarumcumque. Sed aggrediamur rem ipsam.

PROPOSITIO IX. THEOREMA.

495. *Si per verticem* V *diametri cujusvis in Ellipsi in fig.*186, *& Parabola in fig.* 187; *ac cujusvis diametri primariæ Hyperbolæ in fig.* 188 *ducatur tangens* VA *æqualis lateri recto ipsius; & per* A *recta transiens per alterum verticem* u *in Ellipsi, ac Hyperbola, ac parallela axi in Parabola, quæ ordinatæ* PRp *occurrat in* L; *erit quadratum semiordinatæ* RP *æquale rectangulo* F.186 187 188

sub abscissa VR, & intercepta RL inter diametrum, ac rectam ductam per A, quæ intercepta erit quarta proportionalis post latus transversum, rectum, & abscissam ab altero vertice, cui latus rectum non applicatur. Idem vero quadratum, & rectangulum in Parabola æquabitur rectangulo sub illa abscissa VR, & latere recto; in Ellipsi ab eodem deficiet; in eo Hyperbolæ ramo, cui latus rectum est applicatum, excedet ipsum, per rectangulum sub ipsa abscissa, & quarta proportionali post latus transversum, rectum, & ipsam abscissam.

496. Est enim (num. 351) quadratum PR in Parabola in fig. 187 æquale rectangulo sub abscissa VR, & latere recto VA, adeoque sub VR, & RL. At in Ellipsi, ac Hyperbola est ipsum quadratum PR ad rectangulum VR*u*, ut latus rectum AV ad transversum V*u*, sive ut LR ad R*u*, vel assumpta VR communi, ut rectangulum sub VR, & RL ad idem rectangulum VR*u*. Quare quadratum ipsum RP æquale erit rectangulo sub VR, & RL.

497. Patet autem in Parabola RL æquari lateri recto VA, in Ellipsi esse minorem ipso VA, in Hyperbola majorem; & si in his ducatur VO usque ad P*p* parallela AL, cui & æqualis erit, & abscindet OL æqualem lateri recto VA, erit V*u* ad VA, ut VR ad RO, ac proinde ipsa RO quarta post latus transversum V*v*, rectum VA, & abscissam VR, ac rectangulum sub VR, & RL a rectangulo sub VR, & OL, vel VA deficiet in Ellipsi, ipsum excedet in Hyperbola per rectangulum sub VR, & OR. Q. E. D.

SCHOLIUM I.

498. CUM quadratum semiordinatæ rectangulo illi sub abscissa, & latere recto æquetur in Parabola, deficiat ab eo in Ellipsi, redundet in Hyperbola, hinc Parabolæ, Ellipsi, Hyperbolæ nomen datum a Veteribus, quod Græco semone æqualitatem, defectum, & redundantiam mensuræ exprimit. Sed in nostra defini-

finitione, ut num. 12 notavimus, habentur statim æqualitas quædam alia, desectus, & excessus rationis illius determinantis.

499. Porro hic recta AL data idem prorsus præstat pro Ellipsi, & Hyperbola, quod num. 319. in fig. 115, F.115
116 illa BD, quæ ibi etiam transit per u, & si ipsum 116
V congruat ibi cum contactu I, & chorda Vu evadat diameter; illæ figuræ abibunt in has ita, ut ibi puncta D, L sint eadem; quæ hic L, R; ordinata vero Pp secabitur in R bifariam, ac rectangulum illud PDp æquale rectangulo sub VL, & DL evadet hic ipsum quadratum semiordinatæ RP æquale rectangulo sub VR, & RL.

500. Sed jam ex hac Propositione comparata cum num. 464 eruam Corollarium non inutile, & sponte fluens; quod ad subnormalem pertinet, tum ad osculatores circulos faciemus gradum.

Coroll. 1.

501. *Subnormalis in axe transverso deficit per dimidium lateris recti principalis in Parabola ab ipso latere recto principali, in Ellipsi & Hyperbola a quarta proportionali post latus transversum, rectum, & abscissam a vertice axis remotiore, sive ab illa recta, cum qua continet abscissa rectangulum æquale quadrato semiordinatæ.*

502. Nam in fig. 173, 174, 176 si capiatur VA du- F.173
pla VO, adeoque æqualis lateri recto principali, tum 174
recta ex A parallela axi VR in Parabola in fig. 176, 176
tendens ad u in reliquis, & occurrens ordinatæ PR in L, subnormalis RM, quæ æquatur RD (num. 464), deficiet ab RL, quæ est illa ipsa recta enunciata in hac Prop. 9, & in hoc Coroll. 1, per DL æqualem AO dimidio lateri recto principali VA.

Coroll. 2.

503. *Circulus qui communem in aliquo puncto tangentem habet cum Conicæ Sectionis perimetro, & e diametro per id punctum transeunte abscindit chordam æqualem lateri recto ejus diametri, maxime omnium accedit ad arcum Se-*

ctionis ipsius ita, ut nullius alterius circuli arcus inter arcus ipsorum transire possit, sed cujuscumque majoris arcus aliquis continuus utrinque a contactu extra utrumque cadat inter ipsos & tangentem, cujuscumque minoris a tangente recedat magis, quam uterlibet ex iis, & jaceat ex parte ipsorum cava; quem circulum osculatorem voco.

504. Manentibus enim in fig. 189, 190, 191 pun-
F.189. ctis V, R, *u*, A, L, O, ut in Propositione in fig. 186,
190 187, 188 (perimeter autem Sectionis Conicæ non du-
191 citur vitandæ confusionis gratia) eadem recta VA, quæ Sectionem Conicam contingit in V, tangat ibidem & circulum MV*m*, qui a diametro abscindat chordam aliquam VH, ac rectæ LR parallelæ tangenti occurrat in M, *m*; ipsi vero tangenti VA occurrat tangens HT ducta per H in T, & rectæ MN, *mn* parallelæ tangenti HT occurrant rectæ VH in N, *n*.

505. In primis erit quadratum MR æquale rectangulo sub VR, & NH, ac quadratum *m* R rectangulo sub VR, & *n*H. Nam in fig. 189 ob MN, MR parallelas tangentibus TH, TV, anguli MRN, MNR æquantur angulis THV, TVH æqualibus, cum eos singulos mensuret dimidius arcus VH, adeoque & ipsi æquales erunt, & æquales MRV, MNH eorum complementa ad binos rectos, ac rectæ MN, MR æquales. Quare cum etiam angulus VMR æquetur alterno TVM chordæ VM cum tangente VT, qui (Coroll. 6 Prop. 9. Geom.) æquatur angulo MHN insistenti in alterno segmento, similia erunt triangula VRM, MNH, eritque VR ad RM, ut MN, sive ipsa MR ad NH, & quadratum MR æquale rectangulo sub VR, & HN. Eodem prorsus argumento anguli VR*m*, H*nm* æquales sunt, & æquales V*m*R, & *n*H*m*, adeoque est etiam VR ad R*m*, ut *mn*, sive R*m* ad H*n*, adeoque quadratum R*m* æquale rectangulo sub H*n*, & VR.

506. Cum igitur quadratum semiordinatæ Sectionis Conicæ, in quavis e tribus figuris æquetur (num. 495) rectangulo sub VR, & RL, patet fore id quadratum ma-

majus, æquale, vel minus quadrato MR, vel *m*R, ac punctum M, vel *m* debere jacere intra eam Sectionem Conicam, in ea, vel extra prout RL fuerit major, equalis, vel minor respectu HN, vel H*n*.

507. Jam vero si is circulus intercipiat chordam VH majorem latere recto VA, accipiatur recta HB versus V, si intercipiat chordam minorem, accipiatur pariter versus V recta H*b* æqualis ipsi lateri recto. Et quoniam chorda M*m* potest accedere ad tangentem VA quantum libuerit, ac in eo accessu possunt puncta M, R, *m* ad V, & ad se invicem accedere quantumlibet: & ob MN, *mn* semper parallelas eidem rectæ HT, etiam puncta N, *n* possunt accedere ad R, & V quantumlibet, in quo accessu incipiet aliquando HN esse in primo casu major, & in secundo H*n* minor, quam RL, quod in parabola in fig. 190 accidet statim ac punctum N subierit inter B, & V, vel *n* inter *b* & V, cum nimirum recta RL ibi æquetur VA, sive HB in primo casu, H*b* in secundo. In Ellipsi vero in fig. 189 in primo casu ante etiam quam N subeat inter B, & V, HN incipiet esse major, quam RL, cum HB æqualis AV jam sit major RL, & in Hyperbola in secundo casu in fig. 191 antequam *n* subeat inter *b* & V, jam H*n* erit minor quam RL, cum H*b* sit æqualis VA, adeoque minor RL. At pro secundo casu Ellipseos, vel primo Hyperbolæ accedente R ad V quantum libuerit, etiam O ad R accedet quantumlibet, & proinde ibi *bn*, hic BN fiet aliquando major, quam OR, & tunc in Ellipsi ob H*b*, OL æquales eidem AV, & inter se, demptis inæqualibus relinquetur H*n* minor quam RL, & in Hyperbola addendo æqualibus HB, OL inæquales BN, OR, evadet HN major, quam RL. Per reliquum autem arcum omnem MV*m*, accedente adhuc magis N, vel *n*, ad V, & adhuc magis aucta BN, vel *bn*, & imminuta RO, multo magis HN superabit RL, vel H*n* superabitur ab ipsa.

508. Quare per totum illum arcum recta RM in primo casu erit major, quam semiordinata Sectionis

Conicæ, adeoque multo magis R*m*, & in secundo casu recta R*m* erit minor, quam ordinata ejusdem, ac multo magis RM, adeoque in circulis intercipientibus chordam VH majorem latere recto semper aliquis arcus MV*m* utrinque circa contactum V jacebit extra Sectionem Conicam; in circulis vero intercipientibus chordam minorem ipso latere recto, aliquis arcus utrinque circa ipsum contactum jacebit intra. Quoniam vero minores circuli toti infra maiores jacent, & proinde minorem etiam intercipiunt chordam VH, omnes ii, qui intercipiant chordam maiorem latere recto jacebunt etiam extra eum, qui intercipiet æqualem, & omnes, qui intercipient minorem, jacebunt etiam intra eundem: is circulus, qui æqualem intercipit, ita ad arcum Sectionis Conicæ accedit circa ipsum contactum, ut cujusvis alterius utcumque paullo majoris arcus aliquis utrinque circa contactum jaceat tum extra eum circulum, tum extra eum arcum Sectionis Conicę, cujusvis vero alterius utcumque paullo minoris arcus aliquis utrinque circa contactum jaceat, tum intra eum circulum, tum intra Sectionis Conicæ arcum; ac proinde nullius circuli arcus poterit duci inter arcum Sectionis Conicæ, & arcum ejus circuli, qui intercipit chordam lateri recto æqualem, qui proinde præ cæteris omnibus ipsi arcui est proximus, & idcirco jure dicitur *Osculator*.

Coroll. 3.

509. *Circulus qui Conicam Sectionem osculatur in vertice axis utriuslibet, habet pro diametro latus rectum ejus axis, ac perimetrum in eodem unico puncto contingit ita, ut qui osculatur Ellipsim in vertice axis conjugati, totus extra Ellipsim jaceat, ac sit minimus ex circumscriptis, in cæteris omnibus totus jaceat intra, ac sit maximus ex inscriptis, nec in priore casu ullus inscriptorum maximus habeatur, in posteriore ullus minimus circumscriptorum.*

510. Nam si concipiamus VH pertinere ad axem aliquem; tangens VA erit ipsi perpendicularis, adeoque ipsa VH, quæ æquatur lateri recto AV, evadit diameter

ter circuli. Chorda quoque M*m* evadet ipsi VH perpendicularis, ac proinde secabitur bifariam in R, & MN, *mn* congruent cum MR, *m*R, punctis N, *n* abeuntibus in R, quadratum vero tam RM, quam R*m* evadet æquale rectangulo sub VR, & RH. Quare si VH fuerit æqualis lateri recto in fig. 191 in Hyperbola, & in parabola in fig. 190, erit HR semper minor, quam RL, cum debeat esse minor, quam HV, sive quam VA, quæ in Parabola æquatur RL, & in Hyperbola est ipsa adhuc minor. At in Ellipsi in fig. 189 cum sit VR ad OR, ut V*u* ad AV, erit VR major, vel minor, quam RO, prout axis *u*V fuerit major vel minor suo latere recto VA. Quare ob VH æqualem VA, adeoque OL; erit contra RH minor, vel major RL, prout axis fuerit major, vel minor suo latere recto. Axis autem transversus major est suo latere recto, conjugatus minor; cum axis transversus conjugato sit major, & latus rectum utriuslibet axis sit (num. 351) continue proportionale post ipsum, & axem alterum. Igitur si V fuerit vertex axis transversi, erit HR minor semper, quam RL; si conjugati major. Quamobrem in vertice axis conjugti Ellipseos erunt RM, R*m* semper majores, quam ordinata ejusdem Ellipseos; in reliquis omnibus axium verticibus erunt minores; & prinde circulus, qui Conicam Sectionem osculatur in aliquo axis vertice, eam in eodem unico puncto contingit, & qui osculatur Ellipsim in vertice axis conjugati totus extra ipsam jacet, reliqui jacent intra omnes, ac ille est circumscriptus, hi omnes inscripti.

511. Porro quoniam in illo casu omnes circuli majores cadunt extra & curvam, & osculatorem, ac minores omnes & intra ipsum, & per aliquem arcum utrinque circa contactum etiam intra Ellipsim cadunt; ille est circumscriptorum minimus: cum vero e contrario in reliquis casibus omnes minores cadant intra & curvam, & osculatorem, omnes autem majores & extra ipsum, & per aliquem arcum utrinque circa contactum

tactum cadant extra curvam, is erit inscriptorum maximus. Porro nullus in primo casu minor osculatore in reliquis major, ita ad eum accedet, ut alii propiores haberi non possint numero infiniti, secto nimirum centrorum intervallo, ut libuerit, pro novo centro circuli intermedii, qui intermedius adhuc aliquo arcu utrinque circa contactum cadet in illo primo casu etiam intra curvam, in hisce reliquis extra. Quare nullus habebitur ibi inscriptorum maximus, hic minimus circumscriptorum.

Corell. 4.

512. *Circulus, qui Sectionem Conicam osculatur in vertice cujusvis alterius diametri, licet eandem ibi tangentem habeat, tamen ibidem eum secat ita, ut ex parte anguli obtusi chordæ illius æqualis lateri recto cum tangente, jaceat extra ipsam Sectionem Conicam, ex parte vero anguli acuti intra, ac præterea in alio puncto, quod in eo geometrice definiri potest, ipsam iterum secat.*

513. Ducatur enim in fig. 190 in Parabola chorda VF parallela tangenti HT, & patet puncto *m* assumpto, ut figura indicat, ultra eam chordam semper debere *mn* ipsi FV parallelam jacere ultra ipsam, & H*n* fore majorem, quam HV, sive in casu circuli osculatoris, quam VA, vel RL: at ipso puncto *m* abeunte in F, abibit *n* in V, ac fient H*n*, RL æquales: eodem vero puncto *m* descendente in arcum FH, etiam *n* ingredietur chordam VH, eritque H*n* minor, quam HV, adeoque minor, quam RL. Quare per totum arcum V*m*F erit R*m* major quam semiordinata Parabolæ, in F æqualis, per arcum FH minor: per totum autem arcum VMH erit HN minor quam HV, adeoque minor, quam RL, & MR minor, quam semiordinata Parabolæ. Arcus igitur VMH ex parte anguli acuti jacet intra Parabolam totus, & V*m*F in angulo obtuso extra, quam Parabolam proinde is circulus secat in V, & cum iterum arcus FH jaceat intra Parabolam, eam idem circulus secat in F.

514. At

514. At in Ellipsi in fig. 189 arcus V*m* jacebit omnino extra, saltem donec *n* cadat extra circulum, cum debeat H*n* esse major, quam HV, adeoque major, quam VA, & multo major, quam RL; at pro parte opposita si versus H capiatur TQ ad TH, ut est latus transversum V*u* ad rectum VA, & ducatur VQ occurrens circulo in F, totus arcus VMF jacebit intra, & circulus in ipso puncto F iterum Ellipsim secabit. Ducta enim ad quodvis punctum G inter T, & Q recta VG, quæ circulo occurrat in M, ac producta NM usque ad tangentem in I, erit NV ad RV, ut NI ad MI, sive (num. 204) ut HT ad GT, & erit VR ad RO, ut V*u* ad VA, sive ut TQ ad TH. Quare ex æqualitate perturbata erit VN ad RO, ut TQ ad TG, adeoque donec TG fuerit minor, quam TQ, erit & RO minor, quam VN, ac proinde ob OL, VH æquales, erit RL major NH, & semiordinata Ellipseos major, quam RM, ac punctum M intra Ellipsim. Abeunte vero G in Q, & M in F, evadent VN, RO æquales, & punctum M erit in ipsa Ellipsi; facta autem TG adhuc majore, evadet M extra Ellipsim, adeoque totus arcus VMF jacebit intra Ellipsim, quam circulus deinde iterum secabit in F.

515. Demum in Hyperbola in fig. 191 semper erit HN minor, quam HV, adeoque minor, quam VA, & multo minor, quam RL; ac proinde totus arcus VMH jacebit intra; facta autem TQ ad TH in eadem ratione lateris transversi ad latus rectum, sed ad partes oppositas, ac ducta recta QV, quæ circulo occurrat in F, tum per quodvis punctum G ipsius TQ ducta GV*m*, eodem prorsus argumento erit V*n* ad R*u*, ut I*n* ad *m*I, ut HT ad TG, & erit VR ad RO, ut V*u* ad VA, ut TQ ad TH; ac proinde *n*V ad RO, ut TQ ad TG; nimirum donec TG fuerit minor, quam TQ, quod fiet per totum arcum VF, erit RO minor, quam V*n*, & proinde RL minor, quam H*n*, nimirum semiordinata Hyperbolæ minor quam R*m*, & *m* extra ipsam Hyperbolam. Abeunte *m* in F, &

G in

G in Q, habebitur æqualitas, & punctum *m* erit in Hyperbolæ perimetro, tum per totum arcum FH, evadent TG majore, quam TQ jacebit *m* intra Hyperbolam.

Coroll. 5.

516. *Nullus arcus utcumque parvus circuli osculatoris congruit cum arcu Sectionis Conicæ, sed cum ea angulum continet quovis circulari minorem.*

517. Patet primum ex ipsa demonstratione Corollarii secundi, & tertii, cum nusquam in casu Coroll. 2. NM, *mn* fiant æquales semiordinatis Sectionis Conicæ, in casu Coroll. 3. punctum F congruat cum ejus perimetro ita remotum ab osculo V; in arcu continuo circa ipsum V sit NM semper minor *nm* semper major. Patet autem & secundum ex Coroll. 2; cum nullus circularis arcus duci possit inter arcum Sectionis Conicæ, & arcum circuli osculatoris.

Coroll. 6.

518. *Hyperbola, Parabola, & Ellipsis idem habentes latus rectum, & eandem inclinationem ordinatarum ad diametrum, cujus id est latus rectum, habent circulum osculatorem æqualem, quæcumque sit diametri magnitudo, ad quam tamen ubi arcus circuli iacet intra Conicam Sectionem, ut ex parte anguli acuti, & arcus* VM *in quavis diametro, ac in vertice axis Parabolæ, vel axis transversi Hyperbolæ, omnium maxime accedit Ellipsis; & eo magis, quo eius diameter est minor; tum Parabola, tum omnium minime Hyperbola, & eo minus, quo minor est eius diameter: Contra vero ubi arcus circuli jacet extra: ac ut, licet in angulo rectæ tangentis cum arcu circuli nulla alia recta duci possit, & is angulus sit quovis rectilineo minor, possunt tamen duci arcus circulorum maiorum, qui eo propius ad tangentem accedunt, quo diameter est maior; sic licet in angulo circuli osculatoris cum arcu Sectionis Conicæ nullus alius circulus duci possit, & is angulus sit minor quovis circulari, possunt tamen duci arcus Sectionum Conicarum*

qui

qui eo propius ad circulum osculatorem accedent, quo diametri ad eas partes tangentis, ad quas circulus jacet, maiores fuerint, vel ad oppositas minores.

519. Omnes ejusmodi Sectiones Conicas æqualem habere circulum osculatorem patet, quia superpositis diametris, omnes ii circuli congruent, omnes nimirum eandem habebunt tangentem, & ex eadem recta intercipient chordam eandem æqualem communi lateri recto. Porro in fig. 189. quo maior fuerit axis V*u*, eo, manente puncto A, erit minor recta RO quarta post V*u*, VA, VR, adeoque eo maior RL, & maior utraque ordinata. Quamobrem eo magis ejusmodi ordinata superabit RM, at eo minus superabitur ab R*m*, & eo magis distabit arcus ipsius ab arcu VM, vel minus ab arcu V*m*. In Parabola vero in fig. 190, in qua RL jam æquatur VA, ea erit major, quam in ulla Ellipsi. Demum in Hyperbola in fig. 191, adhuc RL est major, quam VA, & eo major, quo major est RO quarta post *u*V, VA, VR, adeoque eo major, quo *u*V minor. Subibit igitur ex parte VM arcus cujusvis Hyperbolæ habentis diametrum *u*V majorem inter arcum habentis minorem, & arcum VM, ac inter eos omnes, & VM subibit arcus Parabolæ, tum inter hunc quoque arcus cujusvis Ellipseos, & inter arcum Ellipseos habentis diametrum majorem, ac VM subibit arcus habentis ipsam minorem. Ex parte vero V*m* inter arcum V*m*, & arcum Ellipseos habentis minorem diametrum V*u* subibit arcus habentis majorem, tum inter hos omnes, & illum arcus Parabolæ, tum Hyperbolarum omnium eo propius, quo maiorem habuerint diametrum V*u*. Eodem vero argumento continget primum illud utrinque in axium verticibus, ubi arcus circuli jaceat intra, hoc secundum, ubi extra. Reliqua patent ex his.

Coroll. 7.

520. *In Ellipsi & Hyperbola radius circuli osculatoris est tertius continue proportionalis post perpendiculum e centro in tangentem ductum, & semidiametrum conjugatam.*

gatam, & radii circulorum osculatorum inter se sunt in ratione reciproca triplicata eiusmodi perpendiculorum, ac directa triplicata normalium ad utrumlibet axem terminatarum.

521. Si enim circulus osculetur Ellipsim in fig. 192, F.192 vel Hyperbolam in fig. 193 in P, e diametro P*p* 193 abscindet (num. 503) chordam PH æqualem lateri recto eius diametri. Sit eius circuli centrum in K; & recta KE perpendicularis ipsi chordæ eam bifariam secabit in E; ac ducto CL perpendiculo in tangentem PQ; erunt similia triangula rectangula CLP, PEK, nam eorum anguli ad C, & P erunt alterni in fig. 192, internus; ac externus, & oppositus in fig. 193. Erit igitur CL ad CP, ut PE ad PK: Sed cum PE sit dimidium latus rectum diametri P*p*; ducta diametro coniugata IC*i*, erit (num. 351) CP ad CI; ut CI ad PE. Igitur ex æqualitate perturbata erit CL ad CI; ut CI ad radium circuli osculatoris PK.

522. Hinc autem eruitur; fore radium KP æqualem quadrato semidiametri coniugatæ CI applicato ad perpendiculum CL, adeoque in ratione composita ex directa duplicata ipsius semidiametri; & reciproca simplici eius perpendiculi; nimirum cum semidiametri conjugatę sint (n. 466.) reciproce ut eiusmodi perpendicula; erit ille radius in ratione reciproca triplicata ejusdem perpendiculi; quæ (num. 459) est eadem; ac ratio directa triplicata normalis ad utrumlibet axem terminatæ.

Coroll. 8.

523. *In quavis Sectione Conica radius circuli osculatoris est quartus continue proportionalis post dimidium latus rectum principale, & normalem terminatam ad axem transversum.*

524. Est enim in Ellipsi; & Hyperbola PM ad PK ut rectangulum sub PM; & CL; sive (n. 459) quadratum semiaxis conjugati CD, ad rectangulum sub CL; & PK, sive (num. 520) quadratum semidiametri conjugatæ CI, nimirum (num. 456) ut quadratum

dratum perpendiculi CL ad quadratum semiaxis transversi CV, sive (num. 477) ut quadratum dimidii lateris recti principalis ad quadratum normalis PM. Quare si inter PM, & radium PK sumatur recta media proportionalis; ad cuius quadratum erit quadratum PM, ut ipsa PM ad PK, sive ut quadratum dimidii lateris recti principalis ad quadratum normalis, erit ipsa etiam normalis ad eam rectam, ut dimidium latus rectum principale ad normalem; & dimidium latus rectum principale normalis PM; ea recta assumpta, ac PK continue proportionales.

525. In Parabola vero, fig. 194; si tangens ducta per P occurrat tangenti ductæ per verticem V in A; recta FA est (nu. 196) perpendicularis ipsi tangenti PA, & (n. 198) media proportionalis inter FV, FP; quarum prima est (n. 198) quarta pars lateris recti principalis adeoque (n. 200) dimidia subnormalis RM; secunda vero (n. 351) quarta pars lateris recti diametri transeuntis per P, adeoque rectæ PH; & proinde dimidia PE; ac triangula FVA, PRM, PEK similia sunt ob omnia latera parallela. Quare erit PM ad PK, ut RM ad PE, sive, sumptis dimidiis, ut FV ad FP; nimirum ut quadratum FV ad quadratum FA; sive ut quadratum RM dimidii lateris recti principalis ad quadratum PM, adeoque eodem argumento PK quarta continue proportionalis post ipsum dimidium latus rectum principale, & ipsam normalem PM. F. 194

SCHOLIUM II.

526. Poterat communi & faciliori demonstratione idem Corollariorum hoc etiam pacto demonstrari. Radius circuli osculantis perimetrum in vertice axis transversi (num. 509) æquatur dimidio lateri recto principali: ibidem autem normalis PM in fig. 173, 174, 176 evanescente PR evadit æqualis subnormali, RM, sive rectæ RD, quæ abeunte R in V evadit æqualis dimidio ipsi lateri recto F. 189 190 191

VO.

VO. Cum igitur (num. 520) sint radii ipsi, ut cubi normalium, erit dimidium latus rectum principale ad radium circuli Sectionem Conicam osculantis in quovis puncto in ratione triplicata ipsius dimidii lateris recti ad normalem, ac proinde ille radius quartus continue proportionalis post ipsum dimidium latus rectum, & normalem.

Coroll. 9.

527. *Circulus, qui communem in aliquo puncto tangentem habet cum Sectionis Conicæ perimetro, & ipsi perimetro in aliquo alio puncto occurrit, abit in ipsum circulum osculatorem, ubi id punctum ita ad contactum illum accedit, ut demum in ipsum abeat, ac concursus binarum rectarum, quarum altera sit perimetro perpendicularis in extremo puncto chordæ cujuspiam, altera ipsi chordæ perpendicularis in ejus medio, vel altero extremo, abit in centrum circuli ipsam osculantis in priore illo puncto, vel in finem diametri ipsius circuli per illud idem punctum transeuntis, ubi evanescente chorda, congruunt extrema ejus puncta.*

F.189 528. Si enim in fig. 189, 190, 191 V sit contactus
190 ille, & M, vel *m* ad Conicam Sectionem pertineat,
191 erit ex natura circuli (num. 505) HN, vel H*n* tertia post VR, & RM, vel R*m*, ac ex natura Sectionis Conicæ (num. 495) RL pariter tertia post easdem. Quare semper HN, vel H*n* æqualis RL. Accedat jam M, vel *m* ad V ita, ut demum congruant: coibunt simul cum ipso puncto V etiam puncta M, *m*, N, *n*, ac punctum L abibit in A. Quare & HV fiet æqualis HN, sive RL, nimirum lateri recto VA, & proinde circulus (num. 503) evadet osculator; unde patet primum.

529. Jam vero diameter per contactum V transiens est perpendicularis tangenti, adeoque & perimetro Sectionis Conicæ, ac recta quidem ex centro ducta ad angulos rectos in chordam VM, vel V*m* debet ipsam secare bifariam, recta vero ex extremo illius diametri pun-

cto ducta ad punctum M, vel m extremum chordæ, debet continere angulum semicirculo rectum. Quare patet, concursum rectæ perpendicularis perimetro ductæ per V cum recta perpendiculari chordæ ducta per mediam ipsam chordam, vel ejus extremum M, vel m, debere abire in centrum circuli osculatoris, vel extremum punctum ejus diametri, ubi punctis M, vel m, & V coeuntibus, evanescit chorda. *Coroll.* 10.

530. *Binarum normalium per bina Sectionis Conicæ puncta ductarum concursus abit in centrum circuli osculatoris, ubi ea puncta ad se ita accedunt, ut demum congruant.*

531. Concurrant enim in fig. 195 in Parabola, 196 in Ellipsi, 197 in Hyperbola binæ normales PK, F.195
pK in K, & secant axem transversum in M, m, ac 196
assumpta VO perpendiculari axi transverso, & æquali 197
dimidio lateri recto principali, recta ex O ducta parallela axi in fig. 195, ad centrum C in fig. 196, 197 occurrat semiordinatis PR, pr productis in D, d, eritque (num. 464) subnormalis RM, rm æqualis RD, rd. Chorda Pp occurrat axi transverso in Q, & recta ex P parallela ipsi axi occurrat rectis pr, pK in H, E. Erit ubique PK ad MK, ut PE ad Mm, sive in ratione composita PE ad PH, & PH, vel Rr ad Mm.

532. Porro PE ad PH est (num. 204), ut Qm ad Qr, & Rr in fig. 195 æquatur Mm, cum æquentur RD, rd, adeoque & RM, rm, &, dempta communi Mr, ipsæ Rr, Mm. At in fig. 196 sumpta OB æquali semiaxi transverso CV versus V, & in fig. 197 ad partes oppositas, ductaque CB, quæ ipsis semiordinatis occurrat in T, t, ductisque dI, dA parallelis CV, CB usque ad rectam DP, erit Mm æqualis IA. Erit enim OB ad DT, ut OC ad DC, ut CV ad CR, adeoque & ob OB, CV æquales, erit DT æqualis CR, ac eodem argumento dt æqualis Cr, quæ etiam cum sit æqualis AT, erit Rr æqualis DA; cumque sit & RD æqualis RM,

erit RA æqualis *r*M ; est vero & *rm* æqualis *rd* , sive RI. Igitur erit M*m* æqualis IA. Inde vero cum bina quævis latera triangulorum I*d*A ; VCB sint parallela , erit *d*I ad IA ; sive R*r* ad M*m* , ut CV ad VB.

533. Coeant jam puncta P , *p* ; & secans *p*PQ abibit in tangentem ; coibunt puncta R , *r* ; & puncta
Fig. 198 M , *m* ; fig. 195 ; 196 , 197 mutabuntur in 198 ;
199 199 ; 200 ; & erit PK ad KM in Parabola in fig.
200 198 ; ut QM ad QR ; at in reliquis in ratione composita ex ipsa QM ad QR ; & ex altera semiaxis transversi CV ad VB differentiam in Ellipsi ; summam in Hyperbola ejus ; & dimidii lateris recti principalis VO.

534. Porro ob similia triangula QPM ; RPM ; QRP ; est tam MQ ad QP , quam QP ad QR ; ut MP ad PR ; adeoque QM ad QR ; ut quadratum MP ad quadratum PR. Quare erit in Parabola in fig. 198 PK ad KM , ut quadratum PM ad quadratum PR ; adeoque sumendo differentiam terminorum ad antecedentem ; erit quadratum dimidii lateris recti MR ad quadratum normalis PM ; ut ipsa normalis PM ad PK. At in Ellipsi ; & Hyperbola cum sit (num. 479) semiaxis transversus CV ad VB ibi differentiam , hic summam ipsius ; & dimidii lateris recti principalis ; ut quadratum semiordinatæ RP ad differentiam quadratorum normalis PM , & dimidii lateris recti principalis VO ; binæ illæ rationes compositæ erunt quadrati PM ad quadratum PR ; & quadrati PR ad eam quadratorum differentiam ; quæ reducuntur ad unicam quadrati PM ad suam differentiam a quadrato VO. Erit igitur KP, ad KM , ut quadratum PM ad differentiam quadratorum PM ; VO , adeoque PM differentia priorum terminorum ad primum PK ; ut quadratum VO ad quadratum PM.

535. Igitur ubique ratio normalis PM ad PK est eadem, ac quadrati OV , ad quadratum PM ; adeoque eodem argumento ; quo in superioris Corollarii demonstratione , PK quarta continue proportianalis post dimidium latus rectum principale VO , & normalem

lem PM, ac proinde æqualis radio circuli osculatoris, puncto K abeunte in ipsius circuli osculatoris centrum.

SCHOLIUM III.

536. Videbimus suo loco, ubi nimirum de curvis generaliter agemus ope infinitesimorum, generalem hanc proprietatem esse circulorum osculatorum, ut nimirum eorum arcus cum arcu curvæ angulum constituat quovis circulari minorem ita, ut licet in unico conveniant puncto, & in eo angulo infiniti aliarum curvarum arcus duci possint, adhuc tamen non possit ullus circularis arcus, & concursus ultimus rectæ secantis chordam ad angulos rectos, ac bifariam cum normali per alterum ejus extremum ducta, vel binarum normalium, incidat in ipsum centrum circulo osculatoris, ubi binis perimetri punctis coeuntibus chorda evanescit; sed interea libuit ea hic ex ipsa natura, & proprietatibus Sectionum Conicarum de ipsarum circulis osculatoribus accuratissime demonstrare per finitam Geometriam.

537. Et quidem postremum hoc Corollarium usus etiam in Physica magnos habet, ut ubi quæritur Telluris figura per graduum dimensiones. Nam gradus Terræ dicitur ejus ille arcus, per cujus extrema puncta ductæ binæ normales, ubi conveniunt, angulum continent unius gradus, illæ vero conveniunt prope centrum circuli ipsum arcum osculantis in medio, cum ea puncta parum a se invicem distent, & si ea congruant in medio, concursus normalium in id centrum abire debet. Quare præcedentis Corollarii vi assumi solet pro arcu curvæ arcus exiguus circuli osculatoris, qui ab eo parum admodum differre potest; cum arcus circuli in osculatorem desinentis debeat ad ipsum accedere ultra quoscumque limites, antequam congruant, & semper arcus aliquis curvæ concludatur inter arcum circuli osculatoris, & arcum vel majoris, vel

minoris circuli, desinentis demum in osculatorem ipsum, ubi arcus curvæ in infinitum imminutus penitus evanescit.

F.189 358. Ubi in Coroll. 4. in fig. 189 Ellipsim consideravimus, expressimus in ipsa figura casum, in quo latus rectum VH esset majus diametro V*u*, in quo casu, ut ipsa figura exhibet, sumpta TQ ad TH in ratione V*u* ad HV, punctum Q cadit inter H, & T. Si latus rectum æquaretur diametro, abiret punctum Q in H, adeoque & punctum F, in quo circulus osculator Ellipsim iterum secat, abiret in H; quod si adhuc esset minus, & excederetur ab ipsa V*u*, abiret Q citra H in tangentem TH productam, & F in arcum V*m*H, quo casu ad demonstrandum eam partem arcus VF, quæ jaceret citra H, esse intra Ellipsim, immutanda nonnihil esset demonstratio, & ei aptanda casui, quod facile fieri potuisset; sed ad id, quod propositum fuerat, id quidem non erat necessarium, cum nimirum satis esset ostendere, aliquem arcum VM jacere intra, aliquem V*m* extra & alicubi debere iterum Ellipsim secari a circulo osculatore in puncto, quod geometrice definiri posset, quæ quidem omnia ex ipsa constructione casus primi in figura expressi, pro casibus omnibus fiunt satis manifesta, ac ejus demonstratio iis omnibus, vel prorsus communis est, vel admodum facile accomodatur.

359. Porro non erit abs re considerare, quo pacto circulus aliquis Sectionis Conicæ osculator evadat. Potest eam circulus in quatuor punctis secare, ut in fig.
F.201 201 secat Ellipsim in punctis P, A, B, C. Nam
202 circulum aliquem cuilibet Sectioni Conicæ posse occur-
203 rere in quatuor punctis, admodum facile demonstra-
204 tur; ut si per bina extrema puncta unius rectæ axi
205 ordinatæ, & per unum extremum alterius ducatur circulus; is profecto transibit etiam per alterum posterioris extremum. Habebit enim centrum in ipso axe priorem ordinatam, suam chordam, secante bifariam, adeoque & posteriorem ordinatam habebit pro chorda

chorda, quam itidem secabit bifariam. Si jam centri locus mutetur ita, ut bina puncta A, P congruant; evanescente communi chorda PA, communis secans EG abit in communem tangentem, ac ipse circulus Ellipsini contingit in P, figura 201 abeunte in 202, ubi circulus, & Ellipsis se mutuo contingunt in P, & adhuc se possunt secare in binis aliis punctis C, B, centrum autem K jacebit in recta PK perpendiculari tangenti & contactus erit exterior, arcu circuli utrinque circa contactum P existente extra Ellipsim. Quod si perpetuo minuatur radius PK, intersectio illa C accedet ad P, donec in ipsum P incidat, quo casu evadet circulus osculator, in cujus osculo tria communia puncta uniuntur in unicum; quod saltem tribus æquivalet intersectionibus, vel uni contactui, & uni intersectioni. Interea vero & altera illa intersectio B ascendet, & si P fuerit vertex axis cujusdam, tum PK erit in ipso axe, & admodum facile demonstratur, fore eo casu intersectiones C, & B æque distantes a P, ut in fig. 203, nec poterit abire C in P, nisi abeat & B, osculo in axium verticibus æquivalente quatuor communibus punctis, sive quatuor intersectionibus, vel binis intersectionibus, & uni contactui, vel binis contactibus. At ubi P non est in vertice axis alicujus, ut in fig. 202, puncta C, & B non æque distabunt a P, & mutata circuli magnitudine prius alterum, ut C, eo appellet, altero B adhuc inde distante per aliquod intervallum, unde fit, ut circulus, qui Conicam Sectionem osculatur in axium verticibus, ipsi nusquam alibi occurrat, nec ibidem secet, sed vel inscriptus sit, vel circumscriptus; ut ostendi Coroll. 3, at in verticibus reliquarum diametrorum ibidem eam tangat, & secet, tum iterum secet alicubi, ut vidimus Coroll. 4. Quod si adhuc minuatur radius PK, jam illa intersectio C transibit ad partes oppositas P, ut in fig. 204: contactus fiet interior, & tamen aliquis arcus CB adhuc extra Ellipsim cadet; donec coeuntibus etiam punctis

N 3 C, B,

C, B, contingat ipsam iterum interius, ac demum totius incipiat cadere intra Ellipsim.

540. Et quidem si P, p in fig. 250 fuerit axis conjugatus, & concipiatur, facto centro alicubi in ipso axe in K, circulus radio PK primo quidem minimus, tum perpetuo crescens; is quidem primo erit totus intra Ellipsim, tum eam continget iterum in p, deinde, ut figura exprimit, eam secabit in binis punctis C, B, quę perpetuo accedent ad P, cum quo congruent, ubi ipse circulus habuerit pro diametro latus rectum ejus axis, & evaserit osculator; ac is erit primus ex iis, qui tangent Ellipsim exterius, qui quidem reliqui omnes erunt eo majores, & toti extra Ellipsim cadent.

541. At in fig. 203 si Pp fuerit axis transversus, & concipiatur circulus primo quidem maximus, tum perpetuo imminutus; primo quidem ambiet universam Ellipsim, tum continget etiam in p, deinde secabit in binis punctis C, B, quæ cum ipso P congruent, ubi is habuerit pro radio dimidium latus rectum ejus axis, & evaserit osculator, ac is erit primus ex iis, qui tangent Ellipsim interius, qui quidem erunt reliqui omnes eo minores, & toti intra Ellipsim cadent. Et idem accidet circulis tangentibus Parabolam, vel Hyperbolam in vertice axis transversi, sed in iis circulus utcumque magnus præter contactum in vertice semper habebit binas intersectiones, quæ illo imminuto accedent ad contactum P, in illum recident, nec usquam jam erunt eodem prorsus ordine, quo in superiore numero.

542. Extra axes vero ducta PK, ut in fig. 202, perpendiculari tangenti EG, & facto circulo ingenti, is totus cadet extra Ellipsim, tum imminutus illam alicubi continget circa D, deinde secabit in binis punctis C, B, ac in Parabola; utcumque sit magnus, secabit semper, & adhuc continget exterius, aliquo ejus arcu CPB jacente extra curvam, reliquo CDB intra. Imminuto vero etiam magis circulo, intersectiones illæ accedent ad contactum P, in quem ita incidet altera,

ut

ut C, ante alteram, ut ibi circulus perimetrum & tangat, & secet, altera intersectione B non congruente, ac alter ex arcubus a P ad B remanebit extra, ut prius, alter erit intra; tum radio adhuc imminuto, jam utrinque interius continget in P, transeunte, ut vidimus, C ad partes oppositas, ut in fig. 204, adhuc tamen exeunte arcu aliquo CB extra Sectionem Conicam, donec punctis C, B coeuntibus mutentur binæ intersectiones in contactum, ac deinde incipiat jacere circulus totus intra Sectionem Conicam.

543. Patet autem vel ex ejusmodi consideratione debere haberi circulum aliquem, qui ad arcum curvæ hujusmodi accedat magis, quam quivis alius ita, ut in eorum angulo nullus alius circularis arcus duci possit, ac is vel inscriptus sit, vel circumscriptus, in primo casu maximus ex inscriptis, in secundo minimus e circumscriptis ita, ut ubi habetur minimus e circumscriptis, nullus sit maximus ex inscriptis, & viceversa. Dum enim arcus, qui jacebat in contactu extra curvam, motu continuo mutatus abit in jacentem intra, omnino alicubi is transitus haberi debet, & si ob diversam curvæ naturam, nullus circuli arcus congruit cum arcu ipsius curvæ, debet alicubi ille transitus fieri ita, ut e circulis omnibus aliquis sit proximus, nec ullus propior haberi possit, qui si inscriptus sit, sive intra curvam jaceat, quivis minor multo magis jacebit intra, quivis vero major extra, aliter ille proximus non esset, sed is alius, qui eo major adhuc jaceret intra, omnino esset propior. Erit igitur ille maximus ex inscriptis: sed utcumque parum alius quispiam illum excedat, semper alius haberi poterit, qui ipsum excedat minus, medius nimirum inter utrumque, & centrum inter eorum centra habens, qui adhuc & ipse circumscriptus erit, & curvæ propior, & priore circumscripto minor, adeoque ille prior non poterat esse circumscriptorum minimns, quod idem de hoc novo pariter demonstratur, & de alio minore quovis, cum nimirum dato intervallo aliquo pro circuli

radio, nullum haberi possit intervallum, quod ad ipsum accedat ita, ut infiniti alii accedentes magis haberi non possint. Atque eadem est demonstratio pro excludendo maximo ex inscriptis, ubi is, qui est proximus, est circumscriptus.

544. Atque in his quidem attigimus tantummodo comparationem Sectionum Conicarum cum circulo. Omnia, quæ in prioribus 8 Propositionibus, & earum, ac Definitionum Corollariis, ac Scholiis demonstravimus, pertinent ad comparationem rectarum cum Sectionibus Conicis, & earum occursus, qui licet in singulis rectis bini tantummodo esse possint, adhuc tamen tantam proprietatum multitudinem prodiderunt, quarum aliæ etiam habentur quamplurimæ, quas omisimus, quod minoris sint usus, & pleræque longiore demonstrationum ambitu indigeant, ac complicatiores sint. Quod si occursus circuli, vel alterius Sectionis Conicæ, qui in singulis quaterni esse possunt, considerarentur generaliter, quam multæ, quanto sublimiores proprietates profluerent, quæ quidem maxima saltem ex parte nostræ menti imperviæ sunt; qui nimirum rectæ lineæ solius naturam satis evidenter percipimus, & veluti intuemur, ac idcirco ad ipsas rectas exigimus curvas quas contemplamur; & quarum proprietates immediate, & in se ipsis intueri non possumus? Alio mentis genere opus esset ad ejusmodi Geometriam, quæ ista omnia vel immediate videret, vel facile ex iis, quæ immediate videt, colligeret. Nos ea per quandam relationem ad rectas tantummodo contemplamur.

545. Quamobrem iis omissis, licet nonnulla longiore ambitu possemus assequi, progrediamur jam ad contemplandum Conum, ejusque Sectiones, quæ hujusmodi curvis nomen dederunt. Contemplabimur autem sectiones Cylindri, & Conoides genitas conversione Sectionum Conicarum circa se ipsas, earumque itidem sectiones, ubi videbimus Ellipsoidem non gignere nisi circulum & Ellipses, Paraboloidem addere Parabolas,

bolas ; Hyperboloidem vero etiam Hyperbolas continere. Sed in iis aliquanto minus immorabimur.

DEFINITIO III.

546. *SI recta* MNn *in fig.* 206 *utrinque indefinita semper transiens per punctum datum* V *positum extra planum dati circuli* AB *perpetuo motu percurrat ejusdem circuli peripheriam ; superficiem , quam generat, dico* Superficiem Conicam , *solidum ea inclusum ; dico* F.206 Conum, V Verticem , *circulum ipsum* Basim , *rectam* VC *transeuntem per verticem , & centrum circuli dico* Axem , *qui si fuerit perpendicularis plano basis, Conum dico* Rectum, *secus* Scalenum, *rectam autem ipsam genitricem* Latus Coni.

SCHOLIUM I.

547. SOlent plerumque appellare conum id tantum, quod inter verticem, & basim interjacet reliquum vero ad eandem appellant conum productum, ad oppositam conum oppositum. At libet potius coni nomine appellare quidquid recta linea , quæ est locus geometricus simplicissimus , & natura sua utrinque sine fine produci potest, gignit motu continuo circa locum geometricum itidem simplicissimum , nimirum circuli peripheriam . Locus geometricus integer ab eorum locorum combinatione nascitur , cujus frustum quoddam est id , quod certa quadam basi , ac vertice terminatur . Sic ergo Hyperbolarum ramos oppositos appellavi ; quos alii fere Hyperbolas oppositas nominant.

Coroll. 1.

548. *Conus rectus generatur ; si altero anguli* AVC *rectilinei latere* VC *immoto , alterum latus* VA *convertatur circa ipsum.*

549. Si enim ex quovis puncto A ducatur AC per-

pen-

pendicularis in VC, ac in illo motu generabit circulum (num. 30 solid.), qui erit basis coni habentis verticem in V, cujus axis VC erit perpendicularis basi ipsi.

Coroll. 2.

550. *Si Conus quivis secetur utcumque plano per verticem ducto, sectio efficiet in superficie coni binas rectas utrinque idefinite productas, continentes binos angulos ad verticem oppositos, quarum segmenta intercepta inter verticem & basim in cono recto æqualia erunt inter se, in cono scaleno inæqualia ita, ut omnium minimum, ac maximum jaceant in plano transeunte per axem, & perpendiculum demissum e vertice in plano basis, minimum quidem ipsi perpendiculo propius, maximum vero ab eodem remotius.*

551. Si enim sectio fiat plano transeunte per verticem V, & bina puncta peripheriæ basis AB, ubi recta genitrix deveniet ad puncta A, & B congruet cum lineis VAQ, VBN sectione genitis, cum debeant jacere in superficie coni, & transire illa per puncta V, A, hæc per V, B. Quare ipsæ linæ VAQ, VBN erunt rectæ, & continebunt angulos QVN, *q*V*n* oppositos ad verticem.

552. Ductis autem AC, BC radiis basis utique æqualibus, ipsi radii in cono recto continebunt cum axe VC angulos rectos. Adeoque triangulorum VCA, VCB habentium præterea latus VC commune, bases VA, VB æquales erunt. Reliqua patent ex num 135. solidorum.

Coroll. 3.

553. *Quævis sectio basi parallela erit circulus, cujus centrum in ipso occursu axis cum eadem sectione.*

554. Si enim sectio basi parallela occurrat axi in *c* ex utravis parte verticis, planis autem VCA, VCB in rectis *ca*, *cb*; erunt rectæ CA, *ca*, & CB, *cb* intersectiones planorum parallelorum parallelæ (num. 9. solidorum). Quare cum rectæ A*a*, C*c*, B*b* transeant per idem punctum V, erit (num. 204) *ca* ad *cb*, ut

CA

CA ad CB, nimirum in ratione æqualitatis. Manente igitur puncto A, & *a*, & utcumque mutato B, & *b*, semper *cb* erit æqualis eidem *ca*, adeoque *b* ad circulum radio *ca* descriptum.

Coroll. 4.

555. *Sectiones parallelæ utcunque inclinatæ eiusdem coni erunt semper inter se similes.*

556. Si enim AB, *ab* referant sectiones quascumque parallelas utcunque etiam inclinatas, ac manentibus rectis VA, VC, planum CVB gyret utcumque circa rectam VC; erunt semper & CA, *ca*, & CB, *cb* parallelæ inter se, ac proinde adhuc *ca* ad *cb*, ut CA ad CB, adeoque puncta B, *b* (num. 111.) ad figuras similes.

Coroll 5.

557. *In Cono Scaleno alia quoque sectio basi non parallela, quæ dicitur subcontraria, est circulus.*

558. Si enim in fig. 207. per centrum C, & verticem V ducatur (num. 74 solid.) planum AVB perpendiculare plano basis, tum ad quodvis punctum M rectæ AV fiat angulus VM*m* æqualis angulo VBA ita, ut recta M*m* faciat cum latere VA eum angulum, quem AB facit cum VB, unde ob angulum V communem, vel æqualem in triangulis AVB, MV*m*, consequetur etiam, ut eadem M*m* cum VB contineat eundem angulum, quem AB continet cum VA; tum per M*m* fiat sectio perpendicularis plano AVB (num. 74 solid.), ea sectio dicitur subcontraria basi, & eam fore circulum sic facile demonstratur. F.207

559. Per quodvis punctum R rectæ M*m* ducta sectio parallela basi occurrat plano AVB in *ab*, sectioni ductæ per M*m* in recta P*p*. Ea erit circulus (num. 553), cujus *ab* erit diameter, ac chorda P*p* intersectio binorum planorum perpendicularium eidem AVB, cum debeat ipsi perpendicularis esse, erit perpendicularis utrique *ab* & M*m*, ac a priore, utpote a circuli dimetro, secabitur bifariam in R, eritque quadratum PR æquale rectangulo *a*R*b* (Cor. 1. Prop. 13. Geom.). Porro in

trian-

triangulis aRM, bRm anguli ad verticem oppositi in R æquales sunt, & ob angulum VMR æqualem ex hypotesi angulo VBA, sive VbR, erit & aMR æqualis mbR. Quare similia erunt ea triangula, & MR ad Ra, ut Rb ad Rm, sive rectangulum MRm æquale rectangulo aRb; vel quadrato RP. Secta autem Mm bifariam in c quadratum cM æquatur rectangulo MRm, & quadrato cR simul (Coroll. 2. Prop. 13. Geom.), adeoque æquabitur binis quadratis cR, RP simul, sive ob angulum cRP rectum, quadrato cP. Erit igitur semper cP æqualis cM, adeoque punctum P ad circulum radio cM descriptum.

Coroll. 6.

560. *Pro basi assumi potest quævis sectio sive parallela primæ basi, sive subcontraria ex utravis parte a vertice* V.

561. Nam quævis ejusmodi sectio circularis est, & recta per verticem V transiens, ac ejus superficiem contradens eundem generat conum.

Coroll. 7.

562. *Quævis alia sectio coni erit Ellipsis, Parabola, vel Hyperbola, prout planum per coni verticem ductum plano sectionis parallelum cadet extra conum, vel eum continget, vel intra ipsum immergetur.*

563. Secetur enim quivis conus quovis plano non parallelo basi, & planum ipsi sectioni parallelum ductum per verticem V occurret plano basis in recta qua-
F.208 dam OS, quæ vel cadet extra basim, ut in fig. 208,
209 209, vel eam continget alicubi, ut in fig. 210, vel in-
210 tra ipsam immergetur, ut in fig. 211, ac si ducatur
211 per centrum basis C recta CT ipsi OS perpendicularis occurrens perimetro basis in punctis A, & B, cadet punctum T in fig. 208, 209 extra diametrum AB, in fig. 210 in altero ejus extremo, ut B, in fig. 211 intra diametrum, quæ nimirum segmentum rectæ OS circulo interceptum, cum ad angulos rectos secet, secabit (Coroll. 4. Prop. 5. Geom.) bifariam.

564. Du-

564. Ducto jam per ABV plano, quod plano illi OVS occurret in recta VT, superficiei coni in rectis VA, VB, plano sectionis in recta quadam *Ii* parallela (num. 9. solid.) rectæ VT ob parallelismum plani sectionis cum plano OVT, quæ idcirco rectam VA secabit alicubi in M, ac si ponatur punctum I ab M versus conum, *i* ad partes oppositas, necessario secabit in fig. 208, 209 etiam latus VB alicubi in *m* versus I, erit in fig. 210 ipsi parallela, in fig. 211 secabit versus *i* ad partes oppositas supra verticem V ipsum latus BV productum, cum ipsa VB in fig. 208, 209 declinet ab VT versus parallelam *Ii* ad partes B in fig. 210 cum priore congruat, in fig. 211 declinet versus partem oppositam. Quamobrem rectæ *Ii* segmentum M*m* totum, & solum jacebit in fig. 208, 209 intra conum, in fig. 211 extra, in fig. 210. tota MI indefinita jacebit intra, tota vero M*i* extra.

565. Assumpto in ipsa *Ii* puncto quovis R inter M, & *m* in fig. 208, 209, extra eos limites in fig. 211, ab M versus I in fig. 210 ducatur per id punctum planum parallelum plano basis, quod plano AVB occurrat in recta *ab*, plano prioris sectionis in P*p*, & patet fore ipsam sectionem hanc novam circulum (num. 553) diametro *ab*, ac ipsas *ab*, AT, ac P*p*, OS intersectiones planorum parallelorum cum eodem plano fore (n. 9 solid.) parallelas inter se, adeoque (num. 19 solid.) ut AT est per constructionem perpendicularis OS, ita erit diameter *ab* perpendicularis chordæ P*p*, quam proinde (Coroll. 4. Prop. 5. Geom.) secabit bifariam, adeoque & recta *Ii* erit diameter quædam prioris sectionis, cujus nimirum chordas per quodvis punctum R transeuntes parallelas eidem datæ rectæ OS, & inter se, secabit bifariam.

566. Ducta MD parallela AB, quæ rectæ VB occurrat in D, ac in fig. 208, 209, 211 ducta pariter *md* parallela eidem AB, quæ occurrat in *d* rectæ VA, jacente *md* in fig. 208 intra triangulum VMD, in fig. 209 extra ad partes MD, in fig. 211 extra ad partes V,

con-

concipiatur circulus rectam AV contingens in M, ac transiens per D (is duci posset; sed vitandæ confusionis gratia non ducitur); qui a recta Ii transeunte per contactum M abscindet segmentum ME ita, ut ducta DE, angulus MED æquetur (Coroll. 6. Prop. 9. Geom.) angulo, quem chorda MD continet cum ipsa tangente AMV ad partes oppositas, adeoque angulo M*a*R, qui in fig. 208 æquatur angulo AMD; in reliquis angulo VMD externo, & opposito: Cumque etiam EMD æquetur alterno MR*a*; similia erunt triangula *a*RM, EMD; ac *a*R ad RM, ut ME ad MD:

567. Est autem præterea in fig. 210, ob MR, D*b* parallelas, MD æqualis R*b*: Erit igitur ibi *a*R ad RM, ut ME ad R*b*; adeoque rectangulum *a*R*b*, sive quadratum semiordinatæ RP æquale rectangulo sub abscissa MR, & recta constanti ME, adeoque (num. 440) puncta P, *p* ad Parabolam diametro MI parametro ME descriptam:

568. At in reliquis erit præterea R*b* ad R*m*, ut MD ad M*m*. Quare conjunctis rationibus, rectangulum *a*R*b*, sive quadratum semiordinatæ RP ad rectangulum MR*m* sub binis abscissis a binis verticibus, ut rectangulum sub ME, & MD ad rectangulum sub M*m*, & MD, sive in constanti ratione ME ad M*m*; adeoque (num. 439) puncta P, *p* erunt in fig. 208, 209 ad Ellipsim, in fig. 211 ad Hyperbolam descriptam diametro M*m*, & parametro ME.

Coroll. 8.

569. *In Ellipsi, & Hyperbola diameter conjugata diametri* Mm *est media geometrice proportionalis inter* MD, md:

570. Erit enim *md* ad M*m*, ut R*a* ad RM, sive ut ME ad MD; adeoque rectangulum sub *md*, & MD æquale rectangulum *m*ME sub diametro & parametro, nimirum (num. 351.) quadrato diametri conjugatæ.

Coroll. 9.

571. *Si planum* AVB *fuerit perpendiculare plano basis,*

sis, quod in cono recto contiget semper; in cono scaleno in unica directione diametri AB; *erit* IMi *axis, & quidem in Hyperbola* Mm *semper in eo casu erit axis transversus; in Ellipsi in cono recto pariter semper transversus; in cono vero obliquo erit transversus; vel conjugatus, prout sectio jacuerit inter sectionem parallelam basi ductam per* M; *& subcontrariam, vel extra earum angulum.*

572 Si enim planum AVB fuerit perpendiculare plano basis, recta OS jacens in plano basis, & perpendicularis per constructionem intersectioni AT plani AVB cum ipsa basi; erit (n. 66. solid.) perpendicularis illi ipsi plano, adeoque & rectæ VT: Quare & ordinata P*p* erit perpendicularis diametro M*m*, adeoque M*m* (num. 210) erit axis

573. Cum vero in cono recto axis coni per C transiens sit perpendicularis plano basis, quodvis planum AVB transiens per V & C, adeoque per axem coni; erit (num. 62. solid.) perpendiculare plano basis. At in cono scaleno perpendiculum ex V demissum in planum basis cadet extra C; adeoque in ea unica directione; in qua diameter AB transiens per C dirigatur ad id punctum; planum AVB transibit per rectam perpendicularem plano basis, adeoque ipsi perpendiculare erit.

574. Porro in Hyperbola axis conjugatus ipsius perimetro nusquam occurrit (num. 212), adeoque cum ipsi occurrat M*m* in M, & *m*, erit axis transversus.

575. Pro Ellipsi vero si fig. 212 exhibeat triangulum AVB pro casu coni recti figur. 213, 214 pro casu F.212
coni scaleni; quod in illa erit (num. 550) isosceles, in 213
hac scalenum; circulus MED in primo casu continget 214
etiam latus VB in D; in secundo ipsum ibi secabit, ac iterum secabit pariter alicubi in L versus B, vel versus V, prout latus VA, in quo jacet M, fuerit majus latere VB, ut in fig. 213; vel minus, ut in fig. 214, Si enim ejus circuli centrum sit O, ductis MO, DO, angulus OMD erit æqualis angulo OMD ob latera

OM,

OM, OD æqualia, cumque & latus VM sit in fig. 212 æquale lateri VD, in fig. 213 majus, in fig. 214 minus; erit angulus VDM æqualis in fig. 212 angulo VMD, major in fig. 213, minor in fig. 214, ac proinde totus angulus VDO æqualis angulo recto VMO in fig. 212, major in fig. 213, minor in fig. 214; Quamobrem recta quoque VDB continget circulum in fig. 212, ipsum in reliquis secabit alicubi in L, jacente L ad partes anguli acuti radii OD cum recta VD, nimirum in fig. 213 a D versus B, & in fig. 214 versus V.

576. Hinc in fig. 212 ducta quavis Mm, quæ lateri VB occurrat ab V versus B, vel supra MD, ut Mm1, vel infra ut Mm2, semper ea prius occurret circulo in E1, vel E2, eritque semper axis Mm major latere recto ME, adeoque multo major (num. 351) altero axe, & proinde erit axis transversus. At in fig. 213, 214; ubi m abierit in L, fient Mm, ME æquales abeunte in L etiam E, quo casu equabuntur axis, & ejus latus rectum, adeoque bini axes, Ellipsi abeunte in circulum juxta num. 109, qui quidem casus pertinet ad sectionem subcontrariam ob angulum MLD equalem angulo LMD in fig. 213, & AMD in fig. 214 tangentis cum chorda MD referente sectionem basi parallelam. Quare quevis Mm2 jacens inter MD, ML occurret prius lateri VB, quam circulo ultra ipsum procurrenti, eritque axi Mm2 minor suo latere recto ME2, adeoque & axe altero, Quevis autem jacens extra eos limites, ut Mm1, Mm3, erit major sua ME, & proinde intra eos limites erit Mm axis conjugatus, extra eos transversus.

Coroll. 10.

577. *Ex quovis cono abscindi potest quævis data Ellipsis, ac Parabola, plurimæ itidem Hyperbolæ licet non omnes, ac ex cono recto nulla potest ex iis, in quibus latus rectum principale ad axem transversum habeat rationem majorem, quam tangens dimidii anguli* AVB *in vertice constituti ad contangentem, sive, quod eodem re-*

dit,

dit, in quibus axis conjugatus ad transversum habeat rationem majorem, quam tangens ejusdem dimidii anguli ad radium, reliquæ omnes possunt.

578. Nam primo quidem in fig. 212 secto cono utcumque per axem plano AVB, & assumpto puncto M ad arbitrium, capiatur VD æqualis VM, ducatur circulus tangens AV in M, & transiens per D, capiatur MF ad MV in ea ratione, in qua est in data Ellipsi latus rectum principale ad axem transversum, quod cum semper sit minus ipso latere transverso (n. 66, 64) erit semper MF minor, quam MV, adeoque acta ex F recta parallela VB, ea necessario occurret alicubi circulo in binis punctis E1, E2, cum ipsa VB illum tangat (num. 575). Si autem ducantur rectæ ME1*m*1, ME2*m*2, ipsæ determinabunt sectiones similes datæ Ellipsi; erit enim in iis latus transversum M*m* ad rectum ME, ut MV ad MF, nimirum ut in data Sectione Conica latus transversum ad rectum. Quare si alter ex iis axibus M*m* evaserit æqualis axi transverso datæ Ellipseos, sectio per ipsum ducta perpendicularis plano AVB exhibebit Ellipsim datam; si neuter, satis erit assumere in ipso latere AV aliam VM, quæ ad prius assumptam sit, ut est axis transversus datæ Ellipseos ad M*m*1, M*m*2 prius inventas; & sectio per novum punctum M parallela ductæ per priorem M*m*1, vel M*m*2 exhibebit quæsitam Ellipsim. Erit enim (num. 555) priori sectioni similis, ac ejus axis transversus ad M*m* prius inventam, ut nova VM ad priorem.

579. Quod si agatur ME3 parallela VB, ea determinabit Parabolam, in qua si latus rectum non obvenerit æquale lateri recto datæ Parabolæ, eodem artificio mutata VM in ea ratione, invenietur Parabola æqualis datæ.

580. Si demum acta diametro DOI, tangens per I occurrat lateri VA in H, & detur Hyperbola, in qua latus rectum principale ad axem transversum habeat rationem utcumque minorem, quam HM ad MV, su-

matur Mf ad ipsam MV ad partes oppositas V, sive versus H in ratione ejus lateris recti principalis ad axem transversum, & recta ex f parallela VB eodem pacto determinabit bina puncta E4, E5, ex quibus ductæ binæ E*m* determinabunt binas Sectiones similes Hyperbolæ datæ; in qua si illa ratio lateris recti principalis ad axem transversum fuerit eadem; ac HM ad MV, coeuntibus punctis E4, E5 in I, sectio per I, & M ducta exhibebit Hyperbolam similem; si ratio fuerit adhuc major; patet similem exhiberi non posse. Mutato igitur puncto M, ut prius; invenietur quidem Hyperbola æqualis datæ in duplici inclinatione in primo casu, unica in secundo; at in tertio inveniri nequaquam poterit.

581. Porro quoniam ob tangentes MI, HM, & VM, VD, æquales, rectæ OH, OV secant bifariam angulos IOM, MOD; angulus HOV erit æqualis binis IOH, VOD, qui cum ipso constituunt binos rectos, adeoque erit rectus, & angulus MOV, qui ob OMV rectum, est complementum anguli MVO, erit complementum MOH, adeoque ipse MOH æqualis illi MVO dimidio totius AVB. Cum igitur sint HM, MV tangentes angulorum HOM, MOV, erit illa tangens, hæc cotangens dimidii anguli AVB, & Hyperbolæ, quæ non potерunt secari ex dato cono recto, erunt eæ, in quibus latus rectum principale ad transversum habet rationem majorem, quam tangens illius dimidii anguli ad cotangentem. Quoniam vero ob similitudinem triangulorum rectangulorum HMO, OMV, est HM ad MO, ut MO ad MV, & est latus rectum principale ad axem conjugatum, ut hic ad transversum; si axis conjugatus habuerit ad transversum rationem majorem, æqualem, vel minorem respectu ejus, quam HM tangens dimidii anguli AVB ad radium MO, habebit pariter latus rectum principale ad latus transversum rationem majorem, æqualem, vel minorem respectu ejus, quam habet tangens HM ad cotangentem.

582. In

582. In cono autem ſcaleno ſi AVB in fig. 213, 214 referat ſectionem per axem, quæ ſit perpendicularis baſi, eodem prorſus argumento haberi poterit quævis Ellipſis ſemper duplici inclinatione *Mm* 1, *Mm*3, ac ſi concipiatur *hi* parallela lateri VB, quæ tangat in *i* arcum LD ſitum extra angulum AVB, & ratio axis tranſverſi ad conjugatum fuerit minor ratione *Mh* ad MV, vel ei æqualis, poterit eadem illa Ellipſis erui ex eodem cono binis directionibus ME2, hinc & inde ab *i*, vel unica, qua E abeat in *i*. Poterit ſemper Parabola directione ME4 parallela lateri VB, tum ſuccedunt omnia Hyperbolarum genera uſque ad eam, cujus latus rectum principale ad tranſverſum ſit :: MH ad MV. Quod ſi AVB non referat ſectionem baſi perpendicularem, ſed aliam quamcumque, definiri pariter poterunt limites rationis, quam habebit latus rectum cujuſpiam alterius diametri ad ſuam diametrum, ita tamen, ut cum nec angulus V, nec inclinatio trianguli AVB ad baſim variari poſſint, niſi intra certos limites, ſemper certus in quovis cono habeatur limes pro hyperbolis.

Coroll. II.

583. *Data quavis Sectione Conica inveniri poſſunt infiniti coni, ex quibus ea abſcindi poſſit; qui tamen ad Hyperbolam æquilateram abſcindendam habere debent in cono recto angulum ad verticem V rectum, vel acuto majorem.*

584. Nam quævis Ellipſis & Hyperbola abſcindi poſſunt ex quovis cono. Data autem quavis Hyperbola, ſi ſupra quamvis rectam AB in fig. 212 fiant anguli VAB, VBA inter ſe æquales, & non minores eo, cujus cotangens ad radium eſt, ut ejus Hyperbolæ axis conjugatus ad tranſverſum, tum diametro AB deſcribatur circulus in plano perpendiculari ad planum AVB & aſſumpto V pro vertice, ac eo circulo pro baſi, fiat conus; ex eo ſemper abſcindi poterit ejuſmodi Hyperbola. Cum enim bini anguli VAB, VBA ſimul cum

AVB contineant binos rectos, singuli sunt complementa dimidii anguli AVB, & eorum cotangens erit hujus dimidii tangens. Quoniam vero tangens anguli semirecti æquatur radio (num. 49. Trigon.), & anguli minoris est minor, majoris major; ut æquilatera esse possit Hyperbola, debebit dimidium anguli AVB non esse minus semirecto, adeoque is totus non esse acutus.

SCHOLIUM II.

585. Atque hoc pacto jam habentur præcipua eorum, quæ ad conorum sectiones pertinent, & notari facile potest affinitas, quam habent inter se, & cum recta; ac mutua transformatio in se invicem, & in rectas ei similis, quam persecuti sumus in Scholio 2 post Coroll. 20 defin. 2. a num. 107. Concipiatur in fig. 212 punctum M immotum, dum punctum m primo abit in V, Ellipsi eo casu in infinitum attenuata, area evanescit, ac ejus perimeter abit utrinque in rectam MV. Inclinata Sectione versus D in Mm1, habetur Ellipsis initio quidem tenuissima, & formæ admodum oblongæ existente ratione lateris recti ME1 ad transversum Mm1 admodum exigua, tum sensim pinguescit, ac ubi m 1 abit in D, æqualibus latere recto, & transverso, migrat in circulum: tum in Mm2 redit ad formam iterum oblongam, ac iterum decrescit ratio lateris recti ME2 ad transversum Mm2 per omnes gradus in immensum, donec abeunte E2 in E3, vertex m ita in infinitum recedat, ut nusquam jam sit, ac Ellipsis in Parabolam migret, nusquam in se redeuntem. Inclinato autem adhuc magis, utcunque parum, plano sectionis per E4M, jam incipit vertex m4 apparere ex parte opposita V, initio quidem in immensa distantia ita, ut nulla sit distantia in se determinata ejusmodi, quæ cuipiam determinato puncto E4 non respondeat, qua proinde majores aliæ antea

tea non extiterint reſpondentes aliis punctis E4 adhuc propioribus puncto E3: Parabola autem jam in Hyperbolam migrat binos habentem ramos utrinque in infinitum productos; in qua ratio lateris recti ME4 ad tranſverſum Mm4 initio in immenſum exigua ſenſim creſcit dilatata Hyperbolæ forma; donec abeunte E4 in I, fiat maxima illa ratio; tum iterum eadem in E5 decreſcit, & comprimuntur Hyperbolæ, ac demum evaneſcente ME5, & abeunte m5 in V, deſinit Hyperbola in rectam, ab M verſus A, & V ad partes oppoſitas in immenſum productam.

586. Idem contingit in fig. 213, & 214 in cono ſcaleno cum hoc ſolo diſcrimine, quod ubi Ellipſis primo oblonga per Mm1 perpetuo pingueſcit, ac abit in circulum in ipſo appulſu m1 in fig. 213 ad D, in fig. 214 ad L dilatatur adhuc magis, facto Mm2 jam axe conjugato, tum iterum ad formam circularem redit abeunte m in fig. 213 in L, in fig. 214 in D, ac deinde oblongatur in immenſum, dum in Parabolam deſinat, ac ad Hyperbolam tranſeat primo quidem ſe veluti expandentem; tum iterum compreſſam, donec abeat in rectam. Ac in omnibus hiſce caſibus Ellipſis, ac Hyperbola, ubi in rectas deſinunt, id præſtant axe tranſverſo finito, & latere recto evaneſcente, ac perimetro utrinque abeunte in axem, dum & axe excreſcente in immenſum, & latere recto finito, in Parabolam migrant. Poſt omnes Ellipſium, ac Hyperbolarum ſpecies adſtringentium formam ita, ut ratio lateris recti ad tranſverſum decreſcat ultra quoſcumque limites, bini ſunt velut limites quidam, recta linea, & Parabola, quæ quodammodo velut ejuſdem ſunt ultimæ ſpeciei, & ad alteram devenitur axe tranſverſo finito, & latere recto evaneſcente, ad alteram finito latere recto, & axe tranſverſo excreſcente in infinitum. Utcumque parum quædam Ellipſis, & Hyperbola a recta diſtent, & formam adſtringant, habent ſectionem aliam, Parabolæ pariter proximam, majorem qui-

dem, sed formæ prorsus ejusdem, atque ipsi omnino similem.

587. Quod si manente directione sectionis, concipiatur punctum M accedere ad V, tam Ellipsis, quam Parabola, & Hyperbola, eamdem retinent formam, juxta (num. 555), sed perpetuo decrescunt, donec abeunte M in V Ellipsis ut patet in fig. 208, 209 abeat in unicum punctum V, Parabola in fig. 210 in rectam VT, Hyperbola in fig. 211 in binas rectas VO, VS utrinque in infinitum productas juxta num. 550.

F. 208 209 210 211

588. Si manente basi, & plano sectionis, vertex V moveatur per rectam VT, ac desinat in T, Ellipsis quidem in fig. 208, 209, coeuntibus punctis M, *m* desinit in rectam perpendicularem rectæ CT consideratam ut duplicem interceptam tangentibus ex T ductis ad basim, abeunte superficie coni in omne illud spatium, quod eæ tangentes utrinque in infinitum productæ continent. Parabola in fig. 210 desinit in unicam simplicem rectam itidem perpendicularem CT indefinite productam hinc, & inde, abeunte coni superficie in totam aream basis hinc inde a tangente OS indefinite productam. Hyperbolæ in fig. 211 ramus uterque abit in eandem unicam rectam eodem modo in infinitum productam, & consideratam ut duplicem ita, ut in eam totam singuli abeant rami, abeunte pariter utraque coni superficie in planum basis indefinite productum.

589. Quod si punctum V recedat a basi in infinitum per eandem rectam ita, ut nusquam jam sit, conus quidem desinit in cylindrum, at Ellipsis formam Ellipsis retinet, Parabolæ in fig. 210, ac Hyperbolæ fig. 211 vertex V nusquam jam est, perimeter vero abit in binas rectas parallelas, quæ sunt ipsa cylindri latera. Atque eodem pacto liceret plurimas alias transformationes contemplari. Quod vero ad cylindrum attinet, jam hinc inferri potest quamvis sectionem axi parallelam efficere in ejus superficies binas rectas, quamvis parallelam basi, vel in cylindro obliquo subcontrariam

effi-

efficere circulum basi æqualem, quamvis aliam efficere Ellipsim. Sed ea, ut & pauca alia, quæ ad cylindri sectiones pertinent, libet potius per finitam Geometriam accurate demonstrare, quod utique præstari poterit fere eadem prorsus methodo, qua in cono usi sumus.

DEFINITIO IV.

590. *Si recta* Nn *in fig.* 215 *utrinque indefinita semper parallela datæ cuipiam rectæ posita extra planum dati circuli* AB *perpetuo percurrat ejusdem circuli peripheriam, superficiem, quam generat, dico* Superficiem Cylindricam, *solidum ea inclusum, dico* Cylindrum, *circulum ipsum* Basim; *rectam* VCu *per centrum basis ductam, & datæ illi rectæ parallellam dico* Axem, *qui si fuerit perpendicularis plano basis, Cylindrum dico* rectum, *secus* obliquum, *rectam vero illam mobilem dico* Cylindri Latus. F. 215

SCHOLIUM I.

591. HIC pariter Cylindrum appellavi totum locum geometricum, qui natura sua in infinitum utrinque producitur, licet plerunque Cylindri nomine designari soleat hujusmodi Cylindri segmentum tantummodo binis planis parallelis terminatum.

Coroll. 1.

592. *Cylindrus rectus generatur, si altero e binis oppositis rectanguli lateribus utrinque in infinitum producto totum rectangulum circa latus alterum immotum convertatur.*

593. Nam utrumvis e reliquis binis lateribus cum lateri immoto perpendiculare sit, describet (num. 30 solid.) circulum perpendicularem ipsi lateri immoto, quod proinde erit axis Cylindri, cujus ille circulus est basis.

Coroll. 2.

594. *Si Cylindrus quivis secetur utcumque plano per axem ducto, vel axi parallelo; sectio in ejus superficie generabit binas rectas axi parallelas utrinque in infinitum productas.*

595. Secabit enim basim in quadam recta AB, ac si sectio transeat per axem in ipso plano sectionis duci poterunt per A, & B binæ rectę Qq, Nn parallelę eidem axi, sin minus, intersectiones planorum VCA, VCB, cum ipso sectionis plano erunt binę rectę Qq, Nn transeuntes per A, & B, cum quibus debebit congruere recta mobilis, quæ superficiem generat, ubi appellit ad puncta A, B.

Coroll. 3.

596. *Quævis sectio basi parallela erit circulus basis æqualis, cujus centrum in ipso occursu axis cum eadem sectione, ac Cylindri latera binis planis parallelis intercepta erunt æqualia inter se.*

597. Si enim sectio basi parallela occurrat axi in c; plano autem VCB basis in recta CB, ei vero sectioni in recta cb, erunt CB, cb parallelæ (num. 9. solid.), adeoque CBbc parallelogrammum, cujus latera opposita equalia, & proinde cb semper æqualis eidem radio circuli CB, ac pariter & Bb semper æqualis eidem Cc.

Coroll. 4.

598. *Quævis sectio parallela basi, pro basi assumi poterit.*

599. Patet ex eo, quod sit circulus, & recta mobilis tam ipsum, quam basim perpetuo contradat.

Coroll. 5.

600. *In Cylindro obliquo alia quoque sectio basi non parallela, quæ subcontraria dicitur, est circulus.*

601. Si enim in fig. 216 per axem VC ducatur pla-
F.216 num basis plano perpendiculare, secans basim in recta AB, superficiem Cylindri in rectis Qq, Nn, angulorum qAB, nBA alter erit acutus, ut qAB, alter obtusus, ut nBA. Quare si e quovis puncto M

rect.

rectæ Qq ducta in eodem plano recta MD parallela diametro basis AB, cui & æqualis erit, angulus AMm æqualis angulo BDM, occurrente ea recta lateri Nn in m, erit & MmD æqualis ipsi MDm, cum æquetur alterno AMm, & triangulum mMD isosceles. Porro si Cylindrus secetur per Mm plano perpendiculari ipsi AMDB, ea sectio dicetur subcontraria, & erit circulus basi æqualis.

602. Nam per quodvis punctum R rectæ Mm facta sectione aPbp parallela basi, quæ sectioni priori occurrat in Pp, plano MABD in ab, erit ea (num. 596) circulus, cujus centrum in axe, adeoque diameter ipsa ab, eritque PRp intersectio binorum planorum perpendicularium eidem plano MABm perpendicularis ipsi toti, adeoque perpendicularis Mm, & ab, ac proinde chorda Pp bifariam secta a diametro ab in R, & quadratum PR æquale rectangulo aRb, nimirum, cum ob triangula MRa, mRb similia triangula DMm, adeoque isoscelia, sit & MR æqualis Ra, & mR æqualis Rb, rectangulo MRm, quibus si secta Mm bifariam in c addatur quadratum cR, erunt bina quadrata cR, RP æqualia quadrato cR, & rectangulo MRm, nempe quadratum cP, quod ob angulum ad R rectum æquatur illis, æquale quadrato CM, quod ob Mm sectam bifariam in c æquatur his, & punctum P ad circulum radio cM descriptum.

Coroll. 6.

603. *Quævis alia secto erit Ellipsis habens centrum in ipso Cylindri axe.*

604. Nam ea non erit parallela axi, quem proinde secabit alicubi in fig. 217 in c, ut pariter & omnia Cylindri latera, ac totam ejus perimetrum alicubi secabit in MPmp. Nec erit parallela basi, cujus plano proinde alicubi occurret in recta quadam OS, ad quam ducto perpendiculo CT ex centro basis, & per ipsum ac per axem ducto plano, id basim secabit alicubi in AB, superficiem Cylindri in rectis QAq, NBn, planum Sectionis in Mm, jacente Mm intra F.217

Cy-

Cylindrum. Ductis in eo plano MD, *md* parallelis AB, adeoque & ipsi, & inter se æqualibus, per quodvis punctum R rectę *Mm* fiat sectio parallela basi, quæ erit circulus (num. 596), ac plano AM*m*B occurret in recta *ab* sua diametro, plano autem MP*mp* in recta *Pp*, quæ erit perpendicularis ipsi *ab*, cum rectæ P*p*, *ab* debeant esse parallelæ rectis CT, OS intersectionibus planorum parallelorum cum iisdem planis, & CT, OS sibi invicem perpendiculares sint per constructionem.

605. Erit igitur P*p* bifariam secta in R, & quadratum PR æquale rectangulo *a*R*b*. Est autem *a*R ad MR, ut *md*, sive MD ad M*m*, & R*b* ad R*m*, ut MD ad M*m*, adeoque rectangulum *a*R*b*, sive quadratum RP ad rectangulum MR*m* in ratione constanti quadrati MD ad quadratum M*m*. Quamobrem erit MP*mp* Ellipsis, cuius diameter altera M*m*, adeoque (num. 351) ejus conjugata MD, quæ Ellipsi in circulum non abibit, nisi P*p* sit perpendicularis ipsi M*m*, quod non accidet, nisi planum AM*m*B sit perpendiculare plano *a*P*bp*, sive plano basis, & præterea M*m* sit æqualis DM, nimirum nisi sectio sit subcontraria basi. Patet autem M*m* secari bifariam ab V*u*, ut AB, adeoque centrum esse in axe.

Coroll. 7.

606. *In Cylindro recto semper* Mm *erit axis transversus; in cylindro vero obliquo si planum* AMmB *fuerit perpendiculare plano basis, erit* Mm *pariter axis, sed erit conjugatus, vel transversus, prout sectio jacuerit inter sectionem basi parallelam, & subcontrariam, vel extra eos limites.*

607. Nam quotiescumque fuerit planum AM*m*B perpendiculare plano basis, quod in Cylindro recto semper continget; erit OS perpendicularis MT, adeoque ordinatæ perpendiculares diametro M*m*, quæ proinde erit axis.

608. Porro in Cylindro recto angulus MD*m* erit semper rectus, & M*m* major, quam MD, adoque

axis

axis transversus. In Cylindro scaleno M*m* evadet minima, ubi fuerit perpendicularis latere BD, tum in recessu a perpendiculo hinc, & inde æque perpetuo crescet, donec deveniat hinc ad MD parallelam basi, inde ad sectionem subcontrariam, ac deinde perget utrinque crescere, adeoque erit minor vel major, quam MD, prout jacuerit MD, & sectionem subcontrariam, vel extra eos limites. *Coroll.* 8.

609. *E quovis Cylindro potest secari Ellipsis cujuscunque speciei, sed in Cylindro recto semper ejus axis conjugatus debebit esse æqualis diametro basis, ut etiam in Cylindro obliquo quotiescumque fuerit sectio perpendicularis plano per axem, quod perpendiculare sit plano basis, & jacuerit extra binas sectiones circulares; si vero jacuerit intra, axis transversus erit semper diametro basis æqualis.*

610. Nam si fiat in Cylindro recto quævis sectio per axem, & in obliquo sectio per axem perpendicularis basi, quæ sit MABD, in qua ducatur e quovis puncto M recta MD parallela diametro basis, tum capiatur recta, quæ ad ipsam sit, ut est axis transversus ad conjugatum in data Ellipsi, & centro M, eo intervallo necessario invenietur in recta BD ex utralibet parte puncti D, punctum *m*, ad quod ducta M*m*; tum secto Cylindro plano per M*m* perpendiculari ad MAB*m* habebitur Ellipsis, cujus axis transversus M*m* ad conjugatum MD erit, ut in data Ellipsi, adeoque erit ipsi similis.

611. In Cylindro autem scaleno, si axis conjugatus non sit ad transversum in ratione minori, quam sit ea sinus anguli MAB ad radium, poterit etiam datæ Ellipsi similis abscindi Ellipsis etiam plano ducto inter binas circulares. Nam ubi M*m* sit perpendicularis, adeoque minima, erit ad MD, ut sinus anguli MD*m* sive MAB oppositi in parallelogrammo ad radium, ac centro M intervallo rectæ cujusvis minoris quam sit MD, sed non minoris quam sit id perpendiculum, invenietur vel unica M*m* cum eo perpendiculo congruens

gruens; vel duplex hinc, & inde, quæ exhibebit axem conjugatum minorem transverso MD in ea ratione, in qua est in data Ellipsi. Verum semper in primo casu MD erit axis conjugatus, in secundo axis transversus.

SCHOLIUM II.

612. Si in Cylindro obliquo planum MABm sit obliquum ad planum basis; adhuc & axis uterque haberi poterit inæqualis diametro basis; erit enim tum Mm diameter quędam, & MD ejus conjugata, quarum utraque cum debeat esse (num. 379.) minor axe transverso, major conjugato, habebitur axis conjugatus minor ipsa MD, transversus major.

613. Quod si describatur circulus, qui rectam AM contingat in M, & transeat per D, qui quidem occurreret diametro Mm in E eodem pacto, quo in cono demonstratum est (num. 566, 568) demonstrabitur hic, fore ME latus rectum diametri Mm, ut & illud patet sectionem maxime inclinatam ad axem Cylindri esse maxime oblongam, tum crescente angulo paulatim accedere ad circuli formam, & eam assequi demum semper in Cylindro recto in unica positione perpendiculari ad axem, in obliquo vero si planum AMmB sit basi perpendiculare, eam quidem primum assequi, tum adhuc magis contrahi, & axem transversum mutare in conjugatum, recedendo a forma circulari semper magis, donec perpendicularis evadat, tum incipiat iterum ad eam formam accedere, ipsi iterum congruat ac iterum per eosdem gradus oblongetur in infinitum.

614. Posset etiam inquiri in mutationes omnes, quę accidunt, ubi planum AMDB est inclinatum ad planum basis: sed quoniam ejusmodi perquisitio nec usus habet ferme ullos & prolixior est aliquanto, eam hic omittendam duxi, ut & aliam ei similem in cono scaleno: ac potius gradum faciam ad considerandas

sphæ-

sphæroides, ac conoides, quas Conicæ sectiones generant circa axem revolutæ, earumque sectiones usui futuras sæpe, ubi illud mirum *ex Ellipsoide secari non posse nisi circulum, & Ellipsim non magis a circulari forma recedentem, quam recedat Ellipsis genitrix; e Paraboloide posse circulum, Ellipsim, & Parabolam: ex Hyperboloide circulum, Ellipsim, Parabolam, & Hyperbolam non magis a forma Parabolæ recedentem, quam ipsa recedat Hyperbola genitrix.*

DEFINITIO V.

615. *SI circa axem utrumvis convertatur Ellipsis; solidum ea conversione ortum dico* Ellipsoidem, seu Sphæroidem Oblongam, vel Oblatam, *prout gyret circa axem transversum, vel conjugatum: Si convertatur circa suum axem Parabola, dico* Paraboloidem, vel Conoidem Parabolicam, *si Hyperbola circa axem transversum, dico* Hyperboloidem, *sive* Conoidem Hyperbolicam; *axem autem illum conversionis dico* Axem *ipsius Sphæroidis, vel Conoidis, ac axis vertices* Polos.

Coroll. I.

616. *Sectio Sphæroidis, vel Conoidis cujusvis per axem æquatur prorsus figuræ genitrici, & sectio axi perpendicularis est circulus habens centrum in ipso axe.*

617. Si enim in fig. 218 sit Sphærois Elliptica, in F.218
fig. 219 Conois Parabolica, in fig. 220 Conois in Hy- 219
perbolica, & secetur plano per axem; ubi figura geni- 220
trix ad id planum deveniet, cum ea sectione congruet, adeoque ei æqualis esse debet.

618. Si autem secetur plano PBp perpendiculari ad axem, cui occurrat in R, & ducantur bina quævis plana per axem MRP, MRB, quæ ipsi sectioni occurrant in RP, RB, anguli MRP, MRB erunt recti, & proinde ubi figura genitrix ad ea plana deveniet, eadem semiordinata ipsius primum congruet cum RP, tum cum RB, adeoque semper quævis RB ei-

dem

dem RP æqualis est, & punctum B est ad circulum radio RB.

SCHOLIUM I.

619. SAtis patet per Theorema esse commune cuivis solido genito rotatione figuræ planæ cujusvis circa axem quemvis positum in eodem plano, nam demonstratio non pendet a natura Sectionum Conicarum.

620. Ex hoc primo Corollario eruam pauca quædam, quæ pertinent ad solidorum ejusmodi relationem ad se invicem, ac ad dimensionem Sphæroidum Ellipticarum summo futura usui, quæ facile perspiciuntur, & e simplici Cavalleriana methodo consequuntur: Reliqua suo loco aptius demonstrabuntur infinitesimali methodo, ac calculo integrali. Prius tamen aliud Theorema sponte fluens pro Ellipsoidibus deducam.

Coroll. 2.

621. *Circulus omnium maximus est in Sphæroide Elliptica is, qui habetur sectione per centrum ducta, ac æque distat ab utroque polo, qui etiam ejus æquator dicitur, reliqui quo magis hinc, & inde ab eo distant, & ad polum propiorem accedunt, eo minores sunt, ac bini hinc, & inde æque distantes æquales sunt.*

622. Nam omnium ejusmodi circulorum diametri sunt rectæ Pp ordinatæ axi, quæ in quavis Ellipsi eo minores sunt, quo a centro distant magis (num. 83), adeoque earum maxima est illa, quæ per centrum transit, & binæ, quæ hinc, & inde æque ab ipso centro distant æquales sunt per n. 83.

Coroll. 3.

623. *Si plures Ellipsoides, vel plures Paraboloides, vel plures Hyperboloides æqualem habentes axem inter se conferantur, earum segmenta planis æque a vertice distantibus abscissa, ac Ellipsoides totæ annumera-*

ta Ellipsoidibus etiam sphæra, erunt inter se ut earum latera recta pertinentia ad eundem axem, sive in Ellipsoidibus, ac Hyperboloidibus ut quadrata axium reliquorum; nimirum in Sphæroidibus Ellipticis, ut quadrata diametrorum æquatoris:

624. Nam quodvis planum circulare PB*p* erit, ut quadratum radii RP. Erit autem id quadratum semper in quavis Paraboloide æquale rectangulo sub abscissa MR, & latere recto (num. 351); at in Ellipsoidibus, & Hyperboloidibus ad rectangulum MR*m* (num. 351) semper ut latus rectum ad transversum, sive in Ellipsoidibus, ac Hyperboloidibus, ut quadratum axis alterius ad quadratum axis M*m*. Quare si assumantur abscissæ MR æquales, ac præterea in Ellipsoidibus, & Hyperboloidibus sint axes M*m* æquales, adeoque æquales & R*m*, & æqualia rectangula MR*m*; erunt ubique quadrata RP, ut latera recta, & in Ellipsoidibus inter se comparatis, ac Hyperboloidibus inter se, ut quadrata axium reliquorum, circa quos non fit conversio, qui axes in Sphæroidibus Ellipticis sunt diametri æquatoris: cumque ea ratio habeatur ubique, utcumque mutato puncto R, erunt in eadem constanti ratione tota solida ab ejusmodi circularibus planis genita, dum R excurrit per totum segmentum axis MR, & in Ellipsoide per totum axem M*m*.

SCHOLIUM II.

625. HOc etiam Theorema generale est solidis omnibus genitis rotatione circa eundem axem a figuris, quarum semiordinatæ RP costantem semper rationem habeant, ut patet ex ipsa demonstratione.

Coroll. 4.

626. *Sphærois Elliptica est ad sphæram eodem axe descriptam, ut quadratum axis ipsius ad quadratum diametri æquatoris, & sphæroides omnes sunt inter se in ratione composita ex simplici axis, & duplicata æquatoris.*

627.

627. Nam sphæræ eodem axe descriptæ diameter æquatoris est axis ille idem. Si autem binæ sphæroides diversos axes habeant; erit prima ad sphæram eodem axe descriptam in ratione duplicata diametri æquatoris primæ ad ejus axem, hæc sphæra ad sphæram habentem axem communem cum secunda in ratione triplicata axis primæ ad axem secundæ, hæc secunda sphæra ad secundam sphæroidem in ratione duplicata axis secundæ ad diametrum æquatoris ejusdem. Collectis rationibus elisa ratione duplicata directa, ac reciproca axis primæ ad axem secundæ, habetur ratio composita ex simplici axis primæ ad axem secundæ, & duplicata diametri æquatoris illius ad diametrum hujus.

Coroll. 5.

628. *Sphærois oblonga, ac oblata ab eadem Ellipsi genitæ sunt mediæ geometrice proportionales inter sphæram inscriptam, & circumscriptam.*

629. Nam inscripta habebit pro axe axem conjugatum Ellipseos, sive axem sphæroidis oblatæ, circumscripta axem transversum, sive axem oblongæ. Quare erit sphæra inscripta ad sphæroidem oblatam, ut quadratum transversi, & pariter sphærois oblonga ad sphæram circumscriptam, ut idem quadratum axis conjugati ad quadratum transversi. Erit igitur sphæra inscripta ad sphæroidem oblatam, ut oblonga ad circumscriptam, adeoque alternando sphæra inscripta ad oblongam, ut oblata ad circumscriptam. Porro est etiam sphærois oblonga ad oblatam in ratione composita ex simplici axis transversi ad conjugatum, & duplicata conjugati ad transversum, adeoque in ratione simplici conjugati ad transversum, in qua ratione duplicata cum sit sphæra inscripta ad sphæroidem oblatam, erit oblonga media inter inscriptam, & oblatam; adeoque sphæra inscripta, sphærois oblonga, sphærois oblata, sphæra circumscripta sunt concontinue proportionales.

Coroll. 6.

630. *Sphæra sphæroidi oblongæ æqualis habet pro diametro primam e binis mediis geometrice continue proportio-*

tionalibus inter axem conjugatum Ellipseos genitricis, & transversum, sphæroidi vero oblatæ secundam.

631. Si enim concipiantur binę medię continue proportionales inter axem conjugatum Ellipseos genitricis, sive diametrum sphæræ inscriptæ, & axem transversum, sive diametrum sphęrę circumscriptæ, quatuor sphærę, nimirum inscripta habens pro diametro illum axem conjugatum, sphæra habens pro diametro primam e binis mediis, sphæra habens pro diametro secundam, & circumscripta; erunt & ipsę continue proportionales, cum nimirum sint in ratione triplicata diametrorum proportionalium. Quare cum etiam sphæra inscripta, sphærois oblonga, sphærois oblata, & sphæra circumscripta sint continue proportionales, erit sphęrois oblonga æqualis sphæræ habenti pro diametro primam, oblata secundam ex illis binis mediis continuę proportionalibus.

SCHOLIUM III.

632. HIs demonstratis pergendum jam ad reliquas Sphæroidum, & Conoidum sectiones, quæ æque facile determinantur.

Coroll. 7.

633. *Quævis sectio sive Sphæroidis, sive Conoidis non perpendicularis axi est Sectio Conica, in Ellipsoide semper Ellipsis, in Paraboloide Ellipsis, vel Parabola, prout sectio fuerit obliqua axi, vel ei parallela; in Hyperboloide Ellipsis, Parabola, vel Hyperbola, prout sectionis planum inclinabitur ad axem in angulo majori, æquali, vel minori respectu ejus, quo asymptotus utravis ad ipsum inclinatur.*

634. Referat enim in fig. 221. HMI frustum cujusvis Sphæroidis, vel Hyperboloidis, & in fig. 222 HMI, *hmi* pertineant ad binos ramos oppositos, & plano sectionis cujusvis PB*p* obliquæ ad axem, ducatur per axem ipsum perpendiculare (num. 74 solid.) planum HMI, quod excindet Ellipsim, Parabolam, vel Hyperbolam genitrici similem (num. 616), & occurret F. 221 222

alicubi sectioni priori in recta aliqua Pp, quę nusquam erit perpendicularis axi; nam si ipsa esset axi perpendicularis, totum planum PBp esset eidem axi perpendiculare (num. 66. solid.) Ipsa autem Pp (num. 149) Ellipsi occurret semper in binis punctis P, p, Parabolæ occurret semper in binis, præter casum, quo planum sit axi parallelum, quo casu altero puncto p in infinitum recedente, ita ut nusquam jam sit, habebitur unicus occursus P. In Hyperbola demum occurret bis eidem ramo, vel semel, altera intersectione ita in infinitum abeunte, ut nusquam jam sit, vel occurret ramis oppositis, prout inclinabitur ad directricem in angulo minore, ęquali, vel majore respectu anguli æqualitatis nimirum, cum in ipso angulo ęqualitatis inclinentur asymptoti (num. 149), prout ad axem ipsi directrici perpendicularem inclinabuntur in angulo majore, quam asymptoti, vel æquali, vel minore.

635. Porro per quodvis punctum R rectæ Pp ducto plano parallelo basi, sectio erit circulus habens centrum in axe (num. 616), adeoque in ipsa $P'Rp'$ intersectione figuræ genitricis HMI, & ejus intersectio BRb cum plano prioris sectionis erit perpendicularis toti plano HMI, adeoque tam diametro circuli $P'p'$, quam rectæ Pp, & proinde secta bifariam in R, & quadratum BR æquale rectangulo $P'Rp'$. Ipsum autem rectangulum $P'Rp'$ in casibus, in quibus p non recedit in infinitum, ad rectangulum PRp habet rationem datam (num. 299), manente nimirum Pp, & directione chordarum $P'p'$; in casibus vero, in quibus p nusquam jam est, nimirum ubi PR est parallela axi in Parabola, vel asymptoto utrilibet in Hyperbola, erit rectangulum $P'Rp'$, ut recta PR. Quare semper Pp erit diameter sectionis $EPlp$, chordas omnes Bb eandem directionem habentes, eidem nimirum plano HMI perpendiculares secans bifariam, idque ita, ut in postremis hisce casibus, quorum alter ad Parabolam pertinet, alter ad Hyperbolam, sint quadrata BR, ut abscissæ PR, & proinde (num. 440)

secti@

sectio ipsa Parabola; in cæteris omnibus quadratum BR sit ad rectangulum PRp in data ratione, adeoque (num. 439.) sectio Ellipsis, vel Hyperbola, prout R jacuerit, ut in fig. 221. inter vertices P, p, quod semper accidet in Ellipsoide, in Paraboloide semper, præter casum, in quo sectio axi sit perpendicularis, in Hyperboloide semper, ubi inclinatio ad axem habebitur in angulo majori, quam ad ipsum asymptoti inclinentur; vel jacuerit ipsum R extra vertices P, p, ut in fig. 222, quod continget, ubi angulus plani sectionis cum axe fuerit minor.

SCHOLIUM IV.

636. Hic addemus dimensionem solidi parabolici, quæ admodum facile simplici Cavalleriana methodo obtinetur;

Coroll. 8.

637. *Segmentum Conoidis Parabolicæ* PVp *in fig.* 223. *abscissum per quamvis Ellipsim* Pp *æquatur dimidio cylindraceo circumscripto, cujus basis Ellipsis eadem, recta generans* PA *æqualis, & parallela rectæ* RV, *quæ ex centro Ellipseos ducitur parallela axi Parabolæ.*

638. Si enim ducatur recta V*p*, tum quævis sectio parallela, quæ cylindraceum secabit in Ellipsi M*m* æquali, & simili Ellipsi P*p*, & Conoidem Parabolicam in Ellipsi N*n* pariter simili ipsi P*p*, ac rectas V*p*, VR in aliquibus punctis I, O, eritque Ellipsis P*p*, sive M*m* ad Ellipsim N*n*, ut quadratum R*p* ad quadratum O*n*, sive (num. 351) ut VR ad VO, nimirum ut R*p*, sive O*m* ad OI. Igitur cum O*m* sit constans rectæ OI, O*m* exponent areas Ellipsium N*n*, M*m*, & solidum parabolicum genitum ab Ellipsi *n*N ad cylindraceum genitum ab Ellipsi M*m* erit, ut area descripta ab OI, nimirum triangulum RV*p*, ad aream descriptam ab M*m*, nimirum parallelogrammum RV*ap*, sive ut 1 ad 2.

Coroll. 9.

639. *Conoides abscissæ planis parallelis erunt, ut quadrata abscissarum* VR.

640. Erunt enim ut bases, & altitudines. Bases erunt ut quadrata Rp, sive ut VR, altitudines iterum ut VR; quare erunt ut quadrata ipsarum VR.

SCHOLIUM V.

641. Jam persequamur alia consectaria Corollarii septimi.

Coroll. 10.

642. *Recta* RP *erit semper axis sectionis, & in Ellipsoide quidem oblata axis conjugatus, in oblonga, & in cæteris omnibus solidis axis transversus.*

643. Patet primum ex eo, quod diameter PR est perpendicularis suis ordinatis Bb, adeoque axis. Ubi autem chorda Pp Hyperbolæ genitricis terminatur ad binos ramos oppositos, ut in fig. 222, patet ipsam fore axem transversum, cum sectionis perimetro occurrat in ipsius punctis P, p. At in fig. 221 erit in casu Ellipsoidis & Hyperboloidis quadratum axis Pp ad quadratum axis alterius, ut rectangulum PRp ad quadratum BR, sive ad rectangulum P'Rp', nimirum (num. 315) ut quadratum diametri curvæ genitricis parallelæ Pp ad quadratum diametri parallelæ chordæ P'p', sive ad quadratum axis transversi in sphæroide oblata, conjugati in oblonga, & Conoide Hyperbolica. Porro quævis diameter in Ellipsi est (num. 379) minor axe transverso, major conjugato. Quare in spheroide oblata erit axis Pp minor altero axe, in oblonga major, adeoque ibi conjugatus, hic transversus. At in Hyperbola diameter parallela chordæ Pp erit (n. 149, 212) semper diameter secundaria, quę (num. 246) major axe altero conjugato, adeoque & axis Pp major axe altero. At in Parabola rectangulum PRp ad rectangulum P'Rp, sive quadratum BR, erit (n. 361), ut latus rectum diametri habentis pro ordinata chordam Pp, ad

F. 221
F. 222

latus

latus rectum axis habentis pro ordinata chordam $P'p'$; cumque quodvis latus rectum sit (num. 359) majus latere recto principali in Parabola, erit semper rectangulum PRp majus quadrato RB, & proinde Pp axis transversus.

Coroll. II.

644. *Ex quavis Sphæroide abscindi poterit Ellipsis cujuscumque speciei, in qua ratio axium ab æqualitate non magis distet, quam in Ellipsi genitrice, & intra eas species cujusvis magnitudinis habentis axem transversum in oblata, conjugatum in oblonga non majorem axe ibi transverso, hic conjugato Ellipseos generantis: Ex quavis Paraboloide quævis Ellipsis & specie, & magnitudine data; sed Parabola soli genitrici æqualis: ex quavis Hyperboloide quævis Ellipsis & specie, & magnitudine, ac quævis Parabola, Hyperbola vero cujuscunque speciei; in qua axis transversus ad conjugatum non habeat rationem minorem, quam in genitrice, intra eas vero species quæcumque etiam magnitudine data; in qua axis conjugatus non sit minor axe conjugato genitricis.*

645. Nam pro Ellipsoide facto centro in centro F. 224
Ellipseos genitricis in C in fig. 224, quæ exhibet sphe- 225
roidem oblongam, vel 225, quę exhibet oblatam, intervallo quovis nec minore, nec majore utroque semiaxe CM, CQ inveniri poterit punctum S; & sectio per SCs habebit pro altero axe Ss, pro altero Qq, eritque Ss in priore casu axis transversus, in secundo conjugatus; ac sectiones Pp ductæ per chordas quasvis Pp parallelas Ss erunt similes inter se, cum in fig. 221, & 222 manente directione plani BPb, maneat directio rectæ Pp, & proinde (num. 299) ratio rectanguli PRp ad $P'Rp'$, sive ad quadratum BR quæ (num. 351) est ratio duplicata axium, adeoque erunt similes sectioni ductæ per Ss, & habebunt rationem axium Ss ad Qq. Sed axis Pp erit minor axe Ss (num. 83). Data igitur quavis specie Ellipseos, in qua ratio axium non magis distet ab æqualitate,

quam in Ellipsi genitrice, abscindi poterit ejus speciei Ellipsis, & intra eas species haberi non poterit Ellipsis, cujus ibi axis transversus, hic conjugatus sit major axe Qq ibi conjugato, hic transverso Ellipseos genitricis: quæ æqualem habeat, abscindetur per Ss; quæ minorem, abscindetur, si facta CV æquali semiaxi Ellipseos datæ ibi conjugato, hic transverso, ducatur VP semiordinata diametri Ss, tum Pp parallela axi ipsi Ss, quæ a diametro conjugata ipsius Ss, & parallela VP ita secabitur bifariam in R, ut sit PR æqualis VC, adeoque Pp axis novæ sectionis duplus CV, & æqualis axi dato.

F226 646. Pro Paraboloide si AB in fig. 226 sit directrix Parabole genitricis, cui axis occurrat in A, & sumatur AD ad AM, ut est quadratum axis transversi datæ Ellipseos ad quadratum conjugati, ducaturque DI perpendicularis axi, donec occurrat ipsi Parabolæ in I, quævis sectio facta per chordam Ss ordinatam diametro ductę per I exhibebit Ellipsim datæ similem. Si enim ea diameter directrici occurrat in B, erit ejus latus rectum quadruplum IB (num. 351), ad latus rectum principale quadruplum AM, nimirum in fig. 221. rectangulum PRp ad rectangulum P'Rp'; adeoque hic quadratum axis transversi Ss Ellipseos exsectæ ad quadratum axis conjugati, ut BI, sive AD ad AM, nimirum in ratione data, adeoque Ellipsis ejusmodi similis datæ. Quod si ipsa Ss suę diametro occurrat in C, & capta CV versus S æquali semiaxi transverso datę Ellipseos, sive ea sit minor quam CS, sive utcumque major, agatur VP parallela CB, donec occurrat Parabole in P tum chorda PRp parallela Ss, erit ipsa dupla PR, sive VC, nimirum æqualis axi transverso datę Ellipseos, adeoque Ellipsis sectione genita ęqualis datę.

647. At si PR in fig. 221 evadat in Paraboloide parallela axi, abeunte p in infinitum ita, ut nusquam jam sit, erit rectangulum P'Rp', sive quadratum BR æquale rectangulo sub RP, & parametro diametri cu-

jus Pp' ordinata, nempe parametro axis, vel lateri recto principali Parabolę genitricis. Quare & ejusmodi sectio, quę Parabola erit, habebit idem latus rectum principale, quod Parabola genitrix, & Ellipsis quidem quęvis poterit sectione Paraboloidis obtineri, sive detur specie tantum, sive magnitudine, sed Parabolę omnes inde exsectę erunt genitrici ęquales.

648. Pro Hyperboloide sit Hyperbolę genitricis axis transversus Mm in fig. 227, conjugatus Qq, & centro C intervallo rectę, quę ad semiaxem conjugatum CQ sit, ut axis transversus datę Ellipseos ad conjugatum, inveniatur in Hyperbola conjugata punctum S (quod semper poterit tum hinc, tum inde a Q, cum axis transversus sit major conjugato in quavis Ellipsi, & omnium semidiametrorum conjugatarum minimus sit in Hyperbola semiaxis CQ); ducta SCs, per quamvis chordam PRp ipsi parallelam, habebitur Ellipsis datę similis, cujus nimirum axis conjugatus ad transversum erit, ut Qq ad Ss, ac assumpta CV versus S ęquali semiaxi transverso datę Ellipseos; ductaque VP parallela diametro CI conjugatę ipsius SCs, tum chorda PRp parallela SCs habebitur Ellipsis æqualis datę, ut prius, cujus nimirum axis transversus ęquabitur rectę Pp. F227

649. Quod si jam quæratur ibidem Hyperbola datæ similis; satis erit centro C intervallo rectæ, quæ ad CQ sit, ut est axis transversus datæ Hyperbolæ ad conjugatum invenire in Hyperbola PM punctum I, quod solum poterit, si ea ratio non sit minor ratione Mm ad Qq; nam CM est minima omnium CI. Ducta vero quavis Pp' parallela Ri, sectio per ipsam erit similis datæ Hyperbolæ, cum debeat habere axem transversum ad conjugatum, ut est Ii ad Qq. Porro quævis Pp' est major, quam Ii (num. 83, & 357), adeoque sectionis per quamvis Pp' ductæ axis conjugatus erit major, quam Qq, ductæ autem per Ii erit æqualis, adeoque nulla Hyperbola exsecari inde poterit, cujus axis conjugatus sit minor axe conjugato Qq Hyperbolæ genitricis, cui si æqualis sit sectio per Ii, rem

absolvet, si major utcumque, capta CR in CI producta æquali semiaxi transverso dato, tum ducta Pp' parallela Ii, quæ erit dupla CR, adeoque æqualis axi dato, sectio per ipsam erit similis, & æqualis datæ Hyperbolæ.

650. Demum pro parabolis exsecandis ex Hyperboloide, abeunte in fig. 221 p ultra quoscumque limites ita, ut nusquam jam sit, erit latus rectum Parabolæ tertium post PR, & RB, sive quartum post PR, RP', Rp'. Hinc si in fig. 228. CD sit asymptotus, ad quam ducatur per focum F, recta FD parallela directrici AB, occurrens Hyperbolæ genitrici in V, u, quæ erit (num. 54) ejus latus rectum principale, tum sumatur DI in ea ad DF, ut est latus rectum principale datæ Parabolæ ad latus rectum Vu Hyperbolæ genitricis, & ducta per I recta PR asymptoto CD parallela, quæ occurrat Hyperbolæ genitrici in P, rectæ Vu in I, ea determinabit Parabolam æqualem datæ.

F. 228

651. Si enim ducatur usque ad directricem FA parallela asymptoto DC, quæ occurrat perimetro in E, ea & erit æqualis dimidio lateri recto principali FV, vel Fu, & erit secta bifariam in E. Nam ducta uB parallela eidem asymptoto, erit æqualis ipsi FA lateri opposito parallelogrammi $AFuB$, & erit æqualis Fu, cum sit ducta ad directricem in angulo æqualitatis, in quo ad ipsam inclinantur asymptoti, ac eandem ob rationem erit & FE equalis EA, adeoque erit EF ad FV, ut Fu ad totam Vu, & rectangulum sub EF, & Vu æquale rectangulo VFu. Ducta autem quavis chorda $P'Rp'$ parallela Vu, quæ occurrat rectæ PR intra Hyperbolam genitricem in R, asymptoto in H; erit rectangulum VFu ad rectangulum $P'Rp'$ (nu. 305) ut rectangulum sub EF, & FD ad rectangulum sub PR, & RH, vel sub PR, & DI, sive pro FD, ID substitutis latere recto Hyperbolæ genitricis, & latere recto principali Parabolæ datæ, erit rectangulum illud VFu ad $P'Rp'$, ut rectangulum sub FE, & Vu ad rectangulum sub PR, & latere recto principali datæ Parabolæ adeoque cum rectangulum VFu æquetur rectan-

gulo

gulo sub EF, & Vu, etiam rectangulum $P'Rp'$ æquabitur rectangulo sub PR, & latere recto principali datæ Parabolæ; adeoque est PR ad RP', ut Rp', ad latus rectum principale Parabolę datę: cumque sit etiam PR ad Rp', ut Rp' ad latus rectum principale Parabolæ provenientis ex sectione, hęc Parabola erit æqualis datæ. Cumque DI ad DF assumi possit in quavis ratione; patet quamvis datam Parabolam ex quavis Hyperboloide haberi posse.

SCHOLIUM VI.

652. Hisce Sphæroidibus, ac Conoidibus libet jam adnectere solidum genitum conversione Hyperbolæ circa axem coajugatum, in quo solido multa occurrunt notatu dignissima, & ad Geometriæ indolem cognoscendam sane aptissima, ut permutatio quędam crurum ad oppositos Hyperbolę ramos pertinentium satis elegans. Enunciabo autem unico velut hiatu quęcumque pertinent ad sex diversos casus sectionum huius solidi, tum singula pro singulis casibus demonstrabo accuratissime.

Coroll. 12.

653. Si Hyperbola convertatur circa axem conjugatum, generabit solidum, quod si secetur plano, cui occurrat planum ipsius Hyperbolæ genitricis ad angulos rectos, & considerentur sex positiones rectæ, in qua planum sectionis occurrit ei plano Hyperbolæ genitricis, ac in eorum primo recta ipsa sit perpendicularis axi rotationis, sive axi conjugato Hyperbolæ genitricis, in secundo ad ipsum inclinetur, sed in angulo maiore quam asymptoti, in tertio sit asymptis parallela; in reliquis tribus inclinetur in angulo minore, quam asymptoti, sed in quarto secet ramum utrumlibet Hyperbolæ genitricis in eo plano jacentis; in quinto alterutrum contingat, in sexto neutri occurrat, binis nimirum paral-

parallelis tangentibus interjecta, erit sectio in primo casu circulus, in secundo Ellipsis, in tertio Parabola, vel si planum transeat per alteram asymptotum, binæ rectæ parallelæ, in quarto Hyperbola pertundens illud planum Hyperbolæ genitricis perpendiculare plano sectionis, & habens in ipso plano vertices axis transversi, in quinto angulus rectilineus constans binis rectis utrinque indefinite protensis, in sexto Hyperbola illud planum Hyperbolæ genitricis non attingens, sed singulos suos ramos efformans e binis cruribus respondentibus iis, quæ pertinebant in casu quarto ad binos ramos oppositos singula ad singulos, conjunctis, & permutatis in transitu per casum quintum, ac curvitate in oppositam plagam ibidem conversa. Et intersectioni illi, cujus sex casus considerantur, in casu secundo, & quarto parallelus est axis transversus sectionis, qui nimirum æquatur chordæ Hyperbolæ genitricis, in sexto, ubi nulla ejusmodi est chorda, eidem parallelus est axis conjugatus, ac in illis ratio axis transversi ad conjugatum, in hoc conjugati ad transversum, & in casu quinto ratio radii ad tangentem anguli, quo recta sectione obveniens inclinatur ad planum illud Hyperbolæ genitricis, est eadem ac ratio diametri parallelæ illi ipsi intersectioni, cujus sex casus considerantur, ad axem transversum Hyperbolæ genitricis; adeoque sectiones omnes curvilineæ planis parallelis factæ similes erunt inter se, præter Hyperbolas casus sexti, quæ non erunt similes Hyperbolis casus quarti, sed earum conjugatis; habebunt tamen Hyperbolæ planis parallelis eductæ communem asymptotorum inclinationem tam in casu quarto, quam in sexto, quæ erit eadem, ac rectarum casus quinti. In primo vero casu haberi poterit quivis circulus, cuius diameter non sit minor axe transverso Hyperbolæ genitricis, in secundo quævis cujuscumque speciei Ellipsis, cujus axis coniugatus non sit minor axe coniugato eiusdem Hyperbolæ genitricis, in tertio quævis Parabola, in quarto quævis Hyperbola & specie, & ma-

gni-

gnitudine, cujus axis transversus ad conjugatum non habeat rationem minorem, quam axis conjugatus Hyperbolæ genitricis ad transversum, in quinto rectæ inclinatæ ad planum Hyperbolæ genitricis in quovis angulo, qui eum non superet, quo asymptoti ad axem conjugatum inclinantur, in sexto quævis Hyperbola & specie, & magnitudine, in qua axis conjugatus ad transversum non habeat rationem minorem, quam in Hyperbola genitrice, & in qua axis transversus axem transversum Hyperbolæ genitricis non superet.

654. Nam si Hyperbola HMD gyret circa axem conjugatum Qq in fig. 229, 230, 231, 232, 233, gene- F.229
rabit solidum quoddam figuræ teretis; cujus sectio quæ- 230
vis $P'Bp'$ perpendicularis ipsi axi erit circulus juxta (n. 231
619), cujus diameter erit chorda $P'p'$ Hyperbolæ geni- 232
tricis, quæ cum semper debeat esse major axe transver- 233
so Mm, omnium circulorum minimus erit is, qui habebitur secto ejusmodi solido per ipsum axem MCm; ac proinde circulus habens minorem diametrum haberi non poterit; poterit autem habens æqualem, vel utcumque majorem, ex quo patent, quæ de primo casu sunt dicta.

655. Secetur jam in fig. 229 idem solidum plano F229
PBp ejusmodi, ut planum $HDdh$ per axem transiens, 234
& ipsius sectionis plano perpendiculare occurrat sectioni ipsi in recta Pp inclinata ad axem conjugatum Qq in angulo majore, quam sit is, in quo ad ipsum inclinantur asymptoti. Occurret recta ejusmodi ramis oppositis (num. 149) in P, p, & si per quodvis ejus punctum R jacens inter P, p ducatur planum $P'Bp'$ perpendiculare plano axis, quod plano $HDdh$ occurret in recta $P'p'$, ac priori sectioni in recta RB perpendiculari ad totum planum $HDdh$, adeoque ad $P'p'$, & Pp, hæc ipsa nova sectio erit circulus habens pro diametro $P'p'$, & quadratum RB æquabitur rectangulo $P'Rp'$, quod ad rectangulum PRp erit (num. 315), ut quadratum axis transversi Mm Hyperbolæ genitricis ad quadratum diametri Ss parallelæ chordæ Pp. Erit igitur constans ra-

tio

tio quadrati RB ad rectangulum PRp, adeoque PBp Ellipsis, cujus axis transversus Pp, qui ad conjugatum erit, ut est diameter Ss ad axem transversum Mm Hyperbolæ genitricis. Ejusmodi Ellipsim exhibet fig. 234, & patet si directio rectæ Pp in fig. 229 sit constans, constantem fore diametrum Ss ipsi parallelam, utcumque mutetur distantia ejus chordæ a centro C, adeoque constantem fore rationem axium in Ellipsi, & omnes ejusmodi Ellipses planis parallelis abscissas similes fore. Si autem Ellipsis educenda & specie, & magnitudine sit data, nec in ea axis conjugatus sit minor, quam axis transversus Mm Hyperbolæ genitricis; factis, ut ibi Nn ad Pp, ita in fig. 229 CM ad CS applicandam centro C, usque ad Hyperbolam genitricem HMD, quævis sectio ducta per rectam Ss perpendicularis plano HDdh exhibebit Ellipsim datæ similem, & capta in fig. 229 CV æquali PO fig. 234, ductaque VP parallela diametro Ii conjugatæ ipsius Ss, tum ducta POp chorda pararallela Ss, patet eam fore duplam rectæ CV, & æqualem dato axi Pp figuræ 234, adeoque & Ellipsim ortam sectione per Pp fore æqualem datæ, unde patet quidquid de secundo casu est propositum.

656. Quod si jam fiat sectio PBT per rectam PR in
F.230 fig. 230, parallelam asymptoto Ss, erit (num. 328)
235 rectangulum PRp, sive quadratum BR, ut recta PR, adeoque sectio ipsa Parabola, quam exhibet fig. 235, quæ quidem si detur magnitudine, satis erit in recta per focum F ducta perpendiculari axi transverso Mm, & occurrente Hyperbolæ genitrici in V, u, asymptoto in S, assumere SL ad SF in ratione lateris recti principalis datæ Parabolæ ad axem Mm transversum Hyperbolæ genitricis, & ducere LPR parallelam asymptoto Ss. Nam si ducatur Fe usque ad perimetrum Hyperbolæ genitricis, ea juxta (num. 651) erit dimidia FV dimidii lateris recti principalis, cumque (num. 54) rectangulum MFm æquetur quadrato semiaxis conjugati CQ, cui (num. 66) æquatur etiam rectangulum sub

dimi-

dimidio latere recto FV, & semiaxe transverso MC, erit rectangulum MFm æquale rectangulo sub Fe, & toto axe transverso Mm. Est autem (num. 305) rectangulum MFm ad rectangulum P'Rp', sive quadratum RB, ut rectangulum sub Fe, & FS ad rectangulum sub RP, & LS, sive pro FS, LS positis proportionalibus axe Mm, & latere recto principali datæ Parabolæ, ut rectangulum sub Fe, & Mm ad rectangulum sub RP, & latere recto datæ Parabolæ: cumque rectangulum MFm æquetur rectangulo sub Fe, & Mm; etiam quadratum RB æquabitur rectangulo sub RP, & latere recto Parabolæ datæ, quod cum æquetur rectangulo sub RP, & latere recto Parabolæ PBT, erit hoc latus rectum æquale lateri recto datæ Parabolæ, adeoque PBT datæ Parabolæ æqualis.

657. At si per ipsam asymptotum Ss transeat sectio, efficiet duas rectas parallelas asymptoto ipsi, & ab ea distantes hinc inde per intervallum æquale semiaxi transverso CM. Nam si P'p' occurrat asymptoto in r, & rn sit occursus plani P'Bp' cum sectione per asymptotum ducta, erit quadratum rn semper æquale rectangulo $p'r$P', adeoque semper æquale (num. 251) quadrato semiaxis CM; & proinde n ad rectam Nn parallelam asymptoto distantem ab ea per intervallum CN æquale semiaxi CM; unde jam patet, quidquid etiam pro tertio casu fuerat propositum.

658. Si autem recta sectionem determinans inclinetur ad axem conjugatum in angulo adhuc minore, quam asymptoti, vel eidem ramo (num. 149) bis occurret, ut in fig. 231, in duobus punctis P, p, vel eum continget in P, ut recta R'R in fig. 232, vel inter utrumque ramum transibit binis tangentibus parallelis interjecta, & neutri ramo occurrens, ut in fig. 233. F.231 232 233.

659. Ubi occurrit bis, qui est casus quartus; per quodvis punctum R extra limites Pp ducta sectione circulari, ductaque diametro SCs parallela ipsi Pp, erit (num. 315) rectangulum P'Rp', sive quadratum RB ad F.231 236

retanrectangulum PRp, ut quadratum Mm ad quadratum Ss, adeoque punctum B ad Hyperbolam, cujus axis transversus Pp; ac is ad conjugatum, ut Ss ad Mm; quam exhibet fig. 236. Cumque ratio axis transversi ad conjugatum maneat eadem, utcumque mutata distantia chordæ Pp a centro, dummodo directio maneat; patet, omnes ejusmodi Hyperbolas fore similes inter se: Sed cum quævis diameter secundaria Ss sit (num. 246) major axe conjugato Qq; patet, in nulla ex ejusmodi Hyperbolis axem transversum ad conjugatum posse habere rationem minorem, quam habeat axis conjugatus Qq Hyperbolæ genitricis ad transversum Mm; quæ ratio si fuerit eadem, chordæ parallelæ axi conjugato Qq exhibebunt Hyperbolas similes datæ; si major, centro C intervallo rectæ, quæ ad CM habeat rationem, quam in data Hyperbola habet axis transversus ad conjugatum, inveniantur in Hyperbola conjugata Hyperbolæ genitrici puncta S, s, & chordæ Pp parallelæ diametro Ss exhibebunt Hyperbolas datæ similes. Assumpta vero CV in ipsa Ss æquali semiaxi transverso datæ Hyperbolæ, ac ducta VP semiordinata ipsius diametri Ss, & Pp parallela ipsi ordinata diametro Ii conjugatæ ipsius Ss, & ab ea secta bifariam in O, habebitur Pp dupla CV æqualis axis transverso datæ Hyperbolę, adeoque Hyperbola orta sectione erit ipsi datę Hyperbolę ęqualis; & hinc patent quęcumque ad quartum casum pertinebant.

660. Pro casu 5 in fig. 232 recta R'PR tangat Hyperbolam genitricem in P, & coibunt ibi puncta P, p,
F232 I, O: erit autem rectangulum P'Rp', sive quadratum
237 BR ad quadratum tangentis PR in illa eadem ratione quadrati Mm ad quadratum Ss. Quare utcumque mutato puncto R erit semper PR ad RB, sive ob angulum PRB rectum radius ad tangentem anguli RPB (num. 25. Trigon.) in constanti ratione Ss ad Mm, ac proinde angulus idem constans, omnia puncta B ad rectam transeuntem per P, & inclinatam ad planum HhdD in angulo, cujus tangens ad radium est, ut Mm

ad

ad *Ss*, quæ ratio non potest esse major ratione *Mm* ad *Qq*, adeoque recta IT non potest inclinari ad planum HD*dh* in angulo majore, quam sit is, in quo asymptoti inclinantur ad axem conjugatum; quę inclinantur ad illum in angulo, cujus tangens ad radium est, ut axis transversus ad conjugatum. Cum vero idem contingat hinc, & inde a contactu P, sectio ejusmodi exhibebit binas rectas TT', *tt'*, quas exhibet fig. 237, & contactus P determinans sectionem, in qua habetur data inclinatio rectę ad ipsum planum HD*dh* invenietur, invento puncto S, ut in casu precedente in Hyperbola conjugata ita, ut sit CS ad CM, ut est tangens datę inclinationis ad radium. Patent igitur etiam ea omnia, quę ad quintum casum pertinebant.

661. Demum pro casu sexto recta R'R in fig. 233, F233 eadem directione, ac prius jaceat inter vertices I, *i* 238 illius ejusdem diametri IC*i*, cui occurrat in O. Per quodcumque ejus punctum R ubicumque assumptum agatur circulus P'B*p'*; habebitur semper aliqua RB, nimirum aliqua distantia sectionis *t*NT ad plano HD*dh*, quod planum proinde ipsa non attinget. Quod si etiam per O ducatur sectio circularis LN*l*, occurrens plano sectionis prioris in ON, ducaturque per R ordinata GR*g* ad diametrum *Ss* conjugatam ipsius I*i*, a qua bifariam alicubi secabitur in X, erit ut quadratum M*m* ad quadratum I*i*, ita rectangulum P'R*p'*, sive quadratum RB ad rectangulum GR*g*, ut rectangulum LO*l*, sive quadratum ON ad rectangulum IO*i*. Cumque sit rectangulum GR*g* excessus quadrati XG supra XR, & rectangulum IO*i* excessus quadrati semidiametri CI minoris (num. 83) semiordinata XG, supra quadratum CO, vel lateris XR ipsi paralleli, erit semper rectangulum GR*g* majus rectangulo IO*i*, adeoque & quodvis quadratum BR majus quadrato ON, puncto N omnium ejus sectionis punctorum maxime accedente ad planum HD*dh*; differentia vero rectangulorum G*g*, IO*i* erit eadem, ac differentia quadratorum XG, CI ob illas XR, CO equales; adeoque, sublatis proportionali-

bus,

bus, differentia quadratorum RB, ON ad differentiam quadratorum XG, CI erit, ut quadratum M*m* ad quadratum I*i*. Est autem, ut facile colligitur ex demonstratis num. 86 translatis ad diametros, differentia quadratorum semiordinatę XG, & semidiametri primarię CI ad quadratum abscissę CX in diametro secundaria, sive ad quadratum OR sibi parallelę, & ęqualis, ut est quadratum I*i* ad quadratum S*s*. Erit igitur ex ęqualitate ordinata differentia quadratorum RB, ON ad quadratum OR, ut quadratum M*m* ad quadratum S*s*, adeoque punctum B ad Hyperbolam, cujus O centrum, semiaxis transversus ON, ac axis ipse transversus ad conjugatum, ut M*m* ad S*s*. Si enim ejusmodi Hyperbolam referat fig. 238, erit & ibi differentia quadratorum RB, ON' ad quadratum OR, ut quadratum axis transversi ad conjugatum, ac proinde captis OR ibi, & in fig. 233 ęqualibus, semiordinatę RB ęquales erunt, & superpositis punctis O', R congruent.

662, In ea autem Hyperbola jam non axis transversus jacebit in illa recta R'R, sed conjugatus, eritque transversus N*n* in fig. 238, ipsi perpendiculari, ratio axis transversi ad conjugatum erit eadem M*m* ad S*s*, quę in casu quarto erat ratio axis conjugati ad transversum; adeoque cum Hyperbolę conjugatę axes permutent, erit ratio axis transversi ad conjugatum in casu sexto eadem, ac in Hyperbolis conjugatis Hyperbolarum casus quarti, & Hyperbolę omnes casus sexti erunt similes inter se, & similes non ipsis Hyperbolis casus quarti, sed earum conjugatis; asymptotos autem in eodem angulo habebunt inclinatas ad se invicem, & ad illos axes permutatos, cum tangens anguli quo ad alteram e rectis R'R, vel N*n* inclinantur, debeat esse eadem, ac erat in casu quarto, & eadem ac in rectis casus quinti. Ramus autem novus TBN*b't'* in fig. 238, coalescet e binis cruribus BT, *b't'*, quorum alterum in fig. 236 pertinebat ad ramum TBP*bt*, alterum ad ramum *t'b'p*B'T', & pariter ramus *tbn*B'T' fig. 238, e reliquis binis cruri-

cruribus fig. 236, conjunctis nimirum verticibus P, p in casu quinto in fig. 237 in O, in quo crura ipsa in asymptotos abeunt, tum cruribus transgressis asymptotos, distracto crure TB a bt, & conjuncto cum bt', ac curvatura in oppositam partem obversa.

663. Data autem Hyperbola fig. 238, si ejus axis transversus Nn non sit ad conjugatum in ratione majore, quam in fig. 233 Mm ad Qq, inventa CS, ut in casu quinto, & quarto, quæ sit ad Mm, ut axis conjugatus datæ Hyperbolæ ad transversum, diameter SCs exhibebit directionem sectionis pro Hyperbolis datæ similibus. Quod si etiam Nn in fig. 238 non excedat Mm fig. 233, invenietur in hac punctum O, per quod transire debeat recta RR' exhibens Hyperbolam æqualem datæ. Nimirum capta CV perpendiculari ad Ii, quæ sit ad NO in fig. 238 datam, ut CI ad CM in fig. 233, centro V intervallo CI invenietur in ipsa CI punctum O quæsitum ex utralibet centri parte. Erit enim in fig. 233. quadratum CV differentia quadratorum VO, CO, sive CI, CO, æqualis rectangulo IOi, quod ad rectangulum LOl, sive quadratum ON est, ut quadratum CI ad quadratum CM, adeoque CV tam ad ON fig. 233, quam ON fig. 238, habebit rationem eandem, quam CI ad CM, ac proinde binæ ON, sive bini axes transversi sectionis, & Hyperbolæ datæ erunt inter se æquales, & æquales ipsæ Hyperbolæ. Patent igitur etiam omnia quæ ad sextum casum pertinebant.

SCHOLIUM VII.

664. Admodum utile est illas transformationes locorum Geometricorum in se invicem, & in alia affinia considerare, ut innotescat Geometriæ indoles, quæ nihil inordinatum admittit, nihil abruptum per saltum. Consideretur enim puncto P immoto in fig. 229, planum sectionis cum recta PR converti motu continuo circa ipsum. Circulo, qui habetur, recta Pp'

perpendiculari axi Q*q*, succedit, sectione inclinata, series continua omnium specierum Ellipsium; in quibus ratio axis transversi ad conjugatum perpetuo crescit, donec ea per omnes magnitudinis finitæ gradus progressa, jam Ellipsi succedat Parabola fig. 230; in qua vertex *p*, centrum, axis conjugatus nusquam jam sunt; quæ tamen nequaquam esse desinent, nisi ubi per omnes finitarum magnitudinum gradus recesserint. Adhuc magis inclinata sectione, jam ea habentur ex parte opposita, & in fig. 231, ramus nascitur Hyperbolæ oppositus, cujus axis transversus ad conjugatum rationem initio habet utcumque magnam; quæ ratio per omnes magnitudinum finitarum gradus ab infinito quodammodo redux cum ipso vertice *p*, decrescit decrescente CS, donec ipsa CS evadat æqualis CQ, ubi nimirum fit ipsa PO parallela axi conjugato Q*a*. Pergente conversione circa P, iterum cresceret ipsa ratio crescente CS ex parte opposita axis CQ, donec coeuntibus P, *p*, jam Hyperbola abiret in rectas casus quinti; sed motu ipso adhuc crescente, & puncto P immoto non permutarentur ramorum crura, verum vertex quidem *p* transiret in arcum PD, & ratio axis transversi ad conjugatum iterum cresceret in infinitum, donec facta P*p* alteri asymptoto parallela, iterum haberetur Parabola, cui Ellipsim nova series succederet ad circuli formam accedens, ac in ipsam desinens, in ipso regressu rectæ P*p* ad præcedentem positionem, post quam iterum eodem ordine eædem series evolverentur, ac semper circulus a se mutuo discerneret binas Ellipsium series, in quarum altera cresceret in altera decresceret ratio axis transversi ad conjugatum, Parabola vero Ellipses ab Hyperbolis, inter quas Hyperbolas in medio veluti cursu rectilineus etiam angulus occurreret, in quem pluribus jam vicibus Hyperbolam mutari posse vidimus, & mutabitur semper, ubi axis transversus evanescat, dum ejus ratio ad axem conjugatum expressa aliis lineis nec evanescit, nec in infinitum excrescit.

665. At

665. At si potius manente directione sectionis parallela eidem Ss, excurrat planum ipsum motu parallelo; in primo casu habetur semper circulus, congruente quidem sectione minimus; sed semper ejusdem formæ, ac pariter in secundo casu habetur Ellipsium series prorsus similium, quarum minima in fig. 229, quæ per ipsam Ss abscinditur; nec in iis quidquam notatu dignum accidit. At in casu Parabolæ in fig. 230, quo magis recta PR ab asymptoto recedit, eo augetur magis latus rectum, quo magis illa accedit, eo hoc decrescit; & in primo casu expanditur, in secundo contrahitur Parabola donec recta PR abeunte in asymptotum; & evanescente SL evanescat latus rectum: sed vertex simul in infinitum recedit ita, ut nusquam jam sit: quo casu Parabola, quæ evanescente latere recto, & vertice adhuc alicubi existente, abiret in axem suum, ut in eum abiit, ubi Coni Sectio (num. 587) per verticem transiit, ac Conum jam contigit non secuit; in hoc casu abit in binas rectas parallelas axi suo; qui in asymptotum desinit. Plano autem sectionis adhuc progresso, vertex P, qui per omnes distantiarum finitarum magnitudines ita in infinitum recesserat, ut nusquam jam esset, statim ex parte opposita d enasceretur quodammodo, & eodem ordine regrederetur ex infinito, aucto per eosdem gradus latere recto: ubi notandum maixme illud, quo pacto crus BT, quod prius versus T recedebat in infinitum ab axe, & versus B recidebat in ipsum in P paulatim ad axem ipsum ex parte T accesserit, & ad rectæ parallelæ formam, ut in transitu per asymptotum deseret demum ipsum axem ex parte B, & ei ex parte opposita conjungeretur, e priore illa in infinitum recedens.

666. In postremis autem casibus multo major se prodit rerum vicissitudo, sed constans quædam Geometriæ indoles ubique regnat. Habentur in fig. 231, 236 bini Hyperbolæ rami, qui chorda accedente ad centrum, ad se accedunt, & ad asymptotos, donec conjunctis

punctis P, p in ipsas asymptotos recidant, ut in fig. 232, 237, ac demum mira illa crurum permutatione, quam vidimus in fig. 233, 238 transiliant ad partes asymptotorum opposítas, nec curvaturam mutent, nisi in transitu per rectam; licet pariter ad rectam in casu Parabolæ arcus appellens, illam tamen nequaquam mutaverit. Notandum autem, quo pacto crurum TB, $t'b'$ puncta P, p in fig. 231. paulatim ad se accesserint, nec coierint in fig. 233. in unicum ramum, nisi posteaquam se in ipso centro O conjunxerint in fig. 232, & ibi veluti conglutinaverint arcus, quodammodo veluti relictis suis illis punctis P, p, quæ cum natura sua indivisibilia in partes dividi non potuerint, nec simul in oppositas directiones abire, relicta quoddammodo ibi sunt, ac punctis N, n, quæ pariter imminuto axe conjugato devenerant ad centrum O, in eorum locum suffectis, arcus iidem ex centro ipso cum hisce novis verticibus transgressi sunt asymptotos, & progressi. Nam puncta illa P, p delata per rectam RR' nequaquam potuerunt saltu quodam in Geometria absurdo mutare directionem, & per aliam rectam priori perpendicularem progredi sine ulla inflexione, sed per easdem vel regredi debuerunt, vel progredi, cujusmodi regressuum, & progressuum exempla plurima occurrunt in transformatione locorum geometricorum. Et quidem puncta N, n fig. 238 non esse eadem, ac P, p fig. 236: patet etiam ex eo, quod ratio axis Nn ad suum conjugatum in illa non est eadem, ac in hac ratio axis Pp ad suum conjugatum, sed rejectis in fig. 238 punctis P, p in verticibus axis conjugati in eadem recta RR', habetur ratio Nn ad Pp utrobique eadem.

667. Sed de hisce transformationum mysteriis hic satis. Agemus de iis infra ordinatius, & quidem Sectionum Conicarum proprietates admirabilem sane ejusmodi permutationum, evolutionum, mysteriorum segetem ubique offerunt, quæ animum intimius rimantem jucundissima quadam contemplatione defigunt. Illud

unum

lirium hic addemus, quod nonnulli, ubi de Conicis Sectionibus agunt, notare solent.

668. *Si recta gyret circa axem extra ejus planum situm generat solidum, cujus sectionibus Conicæ Sectiones exhibentur.*

669. Id patet in nostro casu; quia si recta SN fig. 230, connexa cum axe Qq per rectam CN, vel recta PT, fig. 232 per rectam PC gyret, erit semper in eo solido, in quo esset, si tota figura converteretur circa axem Qq, nimirum in solido genito conversione Hyperbolæ circa axem conjugatum, cujus sectiones vidimus esse Conicas Sectiones. F. 230 232

670. Datis autem binis rectis utcumque, altera pro axe, altera movenda circa ipsum, facile invenietur Hyperbola generans idem solidum. Sit prior recta Qq in fig. 230, posterior Nn. Ex quovis prioris puncto Q ducta Qa parallela datæ Nn, ad planum aQq, ex quovis ipsius Nn puncto n, ducatur nr perpendiculum in id planum, tum in eodem plano recta rS parallela aQ, quæ idcirco parallela erit etiam rectæ datæ nN, & cum ea non fuerit parallela Qq, aliter enim in eodem plano jacuissent, ipsa rS secabit alicubi in C datam Qq quantum opus est productam. Ducta CM perpendiculari ad Qq, & æquali rn, tum facto angulo MCS' æquali MCS per punctum M inter asymptotos CS, CS' describatur Hyperbola, quæ sui conversione circa Qq generabit solidum idem, quod recta Sn. Erit enim CM ejus Hyperbolæ semiaxis transversus, & recta Nn in plano Nnr perpendiculari ad planum Hyperbolæ genitricis parallela asymptoto Ss, distabit ab eo per rn æqualem semiax. transverso.

671. Possent infinitæ aliæ Hyperbolæ inveniri, quæ solidum idem generarent: nec difficile esset etiam in fig. 232, data recta PT, & assumpto in ea puncto P, ad arbitrium determinare in plano per P, & axem Qq ducto Hyperbolam HMD ejusmodi, ut ducto per IT plano perpendiculari in illius planum, in-

sectio PE Hyperbolam ejusmodi congeret in P. Sed prior illa determinatio satis ostendit solidi illius geniti a recta utcumque posita sectionem quamcumque cum conicis Sectionibus congruere.

SCHOLIUM VIII.

672. Sunt solidorum genera, quorum sectiones quæcumque exhibent pariter Sectiones Conicas easdem, quas huc usque persecuti sumus, nimirum omnia genera corporum Conoidicorum, vel Cylindraceorum, quæ oriuntur ex conversione rectæ radentis non circulum, sed aliquam e tribus Conicis Sectionibus, Ellipsim, Parabolam, Hyperbolam, & transeuntis per datum punctum, vel delatæ motu parallelo, sive corpora Conoidica, & Cylindracea, habentia pro basi non circulum, sed unam e tribus Conicis Sectionibus. Demonstratio autem est eadem fere, quæ pro cono, & Cylindro superius est adhibi-

F.206 ta. Nam in primis si in fig. 206, 215 basis AB sit

215 quævis Sectio Conica, recta vero Cc quævis transiens ibi per illud punctum V, hic parallela rectæ gyranti; eadem demonstratione numeri 553, & 596 erit ibi semper *cb*, ad CB, ut *ca* ad CA, hic *cb* æ-

F.208 qualis CB; & *ca* æqualis CA. Quare quævis sectio

209 basi parallela erit ibi similis basi (num. 111), hic et-

210 iam ipsi æqualis. Deinde in fig. 208, 209, 210, 211

211 si AB sit quævis diameter basis Ellipticæ, Parabolicæ, vel Hyperbolicæ, & OS parallela ordinatis ejusdem basis, erit semper *ab* diameter sectionis *a*P*bp* Parallelæ basi, & P*p* ejus ordinata secta bifariam in R; adeoque (num. 305) rectangulum PR*p*, sive quadratum PR, ad rectangulum *a*R*b* in ratione data. Erit autem ut in demonstratione numeri 562, rectangulum *a*R*b* in fig. 210, ut MR, in reliquis, ut rectangulum MR*m*. Igitur erit quadratum semiordinatæ PR ibi ut abscissa MR, hic ut rectangulum MR*m*, adeoque punctum P ubique ad Conicam Sectio-

ctio-

ctionem juxta num. 439, & 440. Eadem vero erit demonstratio pro Cylindracei in fig. 217, ubi quadratum PR erit, ut rectangulum *a*R*b*, sive ut rectangulum MR*m*. Quin immo ubicumque in iis solidis inter sectiones haberi poterit & circulus: eædem semper erunt verus conus, vel Cylindrus habens ipsum circulum pro basi. Sed longum esset singulos casus persequi, & jam ad transformationes quasdam locorum Geometricorum generaliorem faciemus gradum. F. 217

DE TRANSFORMATIONE LOCORUM GEOMETRICORUM;

Ubi de continuitatis lege, ac de quibusdam Infiniti mysteriis.

673. Mira quædam se prodit in omni Geometricorum Locorum transformatione Geometriç indoles, mira admodum, & nostris mentibus prorsus impervia incurrunt in oculos Infiniti Geometrici quędam velut mysteria, quç quidem in iis etiam, quç de Conicis Sectionibus a nobis demonstrata sunt, contemplari licet; quam ipsam ob causam ea hic evolvenda nobis censuimus, ut ad sublimiores curvas, & infinitesimorum methodos brevi evulgandas pronior Tyroni via sterneretur.

674. In primis quęcunque cujuscunque geometrici loci pars eandem naturam habet, quç ipsius definitione continetur, atque idcirco habet etiam proprietates prorsus easdem ex illa ipsa natura fluentes. Quamobrem quidquid de una aliqua ejus parte demonstratur fluens ex illa ipsa natura, reliquis omnibus partibus aptari debet eodem modo, nec quidquam sola illius naturę contemplatione demonstrari poterit de una aliqua parte, quin de parte alia quavis eadem pariter ratione demonstretur. Quęcumque enim eandem naturam æque participant, ea omnia debent itidem æque participare quidquid ex ejus unius naturæ consideratione deducitur. Atque id ipsum perspeximus num. 278, ubi de arcus circularis trisectione egimus, quam ibi vidimus obtineri non posse, quin simul infinitorum numero aliorum arcuum, eadem constructione trisectio obtineretur. Atque hanc ipsam ob causam, ubicumque in Geometria vel solvuntur problemata, vel demonstrantur theoremata, certum quoddam, & determinatum schema subjicitur oculis, cui investigatio,

vel

vel demonstratio applicatur: Id quidem schema unicum casum oculo subjiciat ex infinitis numero ipsi prorsus similibus, & quidquid in eo contingere vident oculi; mens ad reliquos omnes transfert, argumentatione communi pro omnibus. Sic si recta linea bifariam secanda sit; constructio aptatur certæ cuidem lineæ, ut unius pollicis, quę tamen eadem cuidem lineæ, ut unius pollicis, quæ tamen eadem cuivis alteri longitudini ęque aptatur, nec longitudinem ipsam determinatam in schemate oculis proposito mens intuetur, sed solam lineæ rectę habentis binos terminos notionem; unam cum notione circulorum ad solutionem problematis requisitorum, & rectæ per eorum intersectiones ducendę.

675. Et quidem aliquando fit, ut solutio uni casui in schemate oculis proposito applicata, sine ullo peculiari discrimine applicetur casibus omnibus, ac schema ipsum remaneat ejusdem formę. Multo tamen sępius in ipsis casibus positio diversa ita schema perturbat, ut artificio quodam sit opus, ad servandam analogiam, & retinendam solutionis, ac demonstrationis vim, quę quidem positio illud etiam pręstat, ut quandoque summa aliqua in differentiam abeat.

676. Exemplum proferemus e Geometria plana petitum. Sint in fig. 239 binę rectę parallelę indefinitę AB, DG, quas secet in C, & H, recta EF pariter indefinita. Sit autem ducenda per datum punctum P recta occurrens iisdem tribus rectis AB, DG, EF in M, O, N ita, ut summa binarum MN, ON, quę intercipiuntur inter primam, & tertiam, ac inter secundam, & tertiam ęquetur rectę datæ. Facto centro in quovis puncto K alterius e parallelis, ut AB intervallo ejusdem rectę datę inveniatur, si ea sit satis longa, in altera parallela DG punctum I, ducaturque KI, tum ex P recta ipsi KI parallela, quæ si rectæ EF occurret in N_1 inter C, & H, solvet problema; erit enim ipsarum M_1N_1, O_1N_1 summa ęqualis M_1O_1, adeoque ęqualis lateri KI, opposito in paral-

parallelogrammo M1KIO1. Ubicumque punctum P fuerit collocatum ita, ut N1 cadat inter C, & H, solutio problematis rite procedet. At si P jaceat in P2, vel P3 ita, ut N cadat extra CH, vel in N2, ad partes H, vel in N3 ad partes C, eadem constructio prima fronte videbitur fallere. Nam in utroque casu earundem rectarum MN, NO non erit summa, sed differentia MO, quę æquatur CI.

677. Verum si positionis vis consideretur, manebit etiam ibi analogia, & patebit, idem prorsus prętari in omnibus casibus, ac illam, quę videtur differentia binarum qualitatum, revera esse summam. Nam & in quantitate discreta, ut numeris, ac algebricis formulis, & in quantitate continua, ut in Geometricis lineis, sunt quędam quantitates, quę dicuntur negative, & quę si positivis addantur, eas minuunt, vel minuuntur ab iis. Si quis decem nummos habeat, & lucretur alios tres, habebit tredecim: & si potius contrahat debitum trium, habebit 7; si debitum sit 9, habebit 1: si debitum sit 10, habebit nihil, sed si debitum sit 13, jam habebit debitum quidem, sed 3, minus nimirum, quam 13. Debitum illud est quędam negativa quantitas, quæ conjuncta cum positiva illa re habita, illam minuit, vel ab illa minuitur. Eodem pacto si quis, secundo fluvio remis etiam urgentibus promoveatur, & intra fluvium progrediatur remorum ope singulis minutis per passus 10, motu autem fluvii procedat per passus 3; coniunctis motibus progredietur per 13. At si fluvius retro reflectat motum, & retrahat navim per passus 3; vel 9, vel 10, vel 13, progressu, & regressu conjunctis, habebitur progressus 7, vel 1, vel nihil, vel etiam regressns 3. Regressus ille est negativa quantitas, quę progressum positivam quantitatem minuit, vel ab eo minuitur.

678. Porro in hoc secundo casu mutatio directionis positivam quantitatem mutat in negativam, sic generaliter in Geometria directionis oppositio eandem

mu-

mutationem inducit. Pro quavis quantitate variabili plaga positivorum ad arbitrium assumi potest, qua semel assumpta, directio contraria quantitates exhibebit negativas, ac si in aliquo casu habebatur summa quędam quantitatum quarundam, & earum aliqua in casu alio directionem mutet; adhuc habebitur summa omnium, si ea quantitas in summam negativo modo computetur, eam nimirum demendo; vel si communis consideratio adhibeatur, quę nimirum positionem, & directionem non curat, sed solam magnitudinem contemplatur, differentia succedet summę.

679. Satis patet, in exposito problemate in casu secundo P2 directionem M2N2 manere eandem, quę fuerat in M1N1, at directio N2O2 est opposita directioni N1O1. In tertio vero casu P3 directio quidem N3O3, manet eadem, quę N1O1, sed M3N3 est contraria illi, quę fuerat in M1N1. Hinc nimirum summa, quę in primo casu erat ęqualis rectæ datæ, abiit in reliquis in differentiam. Quod si e casu P2, progrediamur ad P1, tum inde ad P3, differentia, quę habetur in primo ex hisce tribus, abit in summam in secundo ob directionem alterius tantum mutatam, tum summa secundi mutatur in differentiam tertii, cum iterum mutetur directio etiam alterius. Cumque comparando primum ex hisce casibus cum tertio, utriusque quantitatis directio mutetur; in utroque habetur differentia; quia nimirum si M2N2, & N2O2, in casu P2 considerentur ambæ, ut quantitates positivæ, fient in tertia negativæ ambæ, quæ idem restituunt negativo modo, sive directione contraria. Demendo O2N2, ab M2N2 relinquitur M2O2, ac demendo N3O3 ab M3N3 remanet O3M3, negative sumpta, sive M3O3, ut prius.

680. In quavis casuum diversorum contemplatione, ut in quavis combinatione locorum geometricorum, imprimis considerari debet ejusmodi positio, quæ in eorum transformatione semper easdem proprietates restituet, dummodo ubicumque quantitatis directio mutetur,

tetur, illa habeatur pro negativa, adeoque jam demátur si addebatur, vel contra addatur, si demebatur: Quæ enim addenda fuerat, dum decrescit perpetuo; semper minus addet; si evadat nulla, & evanescat, addet nihil; si in contrariam etiam mutetur, mutata directione, contrarium itidem effectum præstare debebit, nimirum minuet id, quod antea augebat.

681. Et in lineis quidem, ubi mutetur directio, ac ejus ope positiva migrent in negativa, satis erit manifestum per sese, vel rectæ lineæ sint, vel curvæ. Sic
F.240 in fig. 240, si binæ circuli chordæ se mutuo secent intra circulum in C, mensura anguli ACB est semisumma arcuum AB, DE a rectis ipsum continentibus interceptorum (Cor. 4. Pr. 9, Geom.). At si punctum C2 jaceat extra circulum; ea ipsa mensura anguli AC2B evadit differentia arcuum AB, DE2 quod nimirum directio arcus DE2 est contraria directioni DE, quæ si negativo modo sumatur: adhuc pro mensura habebitur semisumma. Immo proderit hic etiam omnes mutationum vices contemplari, easque deducere ex solo primo casu rectarum AE, BD, & positione puncti E percurrentis totam circuli peripheriam, donec eo redeat, unde digressum est. Anguli nimirum ACB mensura est semisumma arcuum AB, ED. Abeat punctum E in D, & arcus ED fiet nullus hinc mensura anguli ADB, in quem tum abibit ACB, erit dimidius arcus AB. Abeat E in E2, & mutata directione arcus DE2, contraria nimirum directioni DE; jam anguli AC2B mensura erit semidifferentia arcuum AB, E2D. Evadat E3D æqualis ipsi AB, jam semidifferentia erit nulla, quare recta AE cum BD, nullum angulum continebit: & quidem eo casu patet, ipsas parallelas esse. Crescat adhuc DE4, & jam evadet major, quam AB. Illius igitur dimidio dempto a dimidio AB, semidifferentia evadet negativa. Quare angulus habebitur AC4B, sed ad partes oppositas jacebit, ac spectabit plagas oppositas, ut figura exprimit, ejusque mensura erit adhuc illa semidifferentia.

Abeat

Abeat E5 in A, & evadet A5C5 tangens, anguli vero AC5B mensura erit semidifferentia arcuum DE5, AB, sive DA, AB, quod ita esse patet; nam eorum arcuum differentia est AE3, ob E3D æqualem AB, ac anguli quem tangens C5A, producta continet cum chorda AE3 parallela rectæ BD, qui idcirco æquatur interno, & opposito AC5B, mensura est dimidius arcus AE3. Abeat E6 inter A, & B, & anguli AC6B mensura erit semidifferentia DAE6, BA, quę ob AE6 communem, reducetur ad semidifferentiam DA, BE6. Abeat punctum E in B, & evanescente E6B, mensura anguli ABD fiet dimidium arcus solius DA. Abeat demum punctum E7 ultra B, & BE7 jam mutabit directionem, adeoque mensura anguli ABD, spectantis easdem plagas erit semisumma arcuum DA, E7B, ut patet omnino esse.

682. Et hæ quidem de lineis. At in superficiebus notandum erit illud. Si sumatur rectangulum binarum rectarum, & una ex iis positionem mutet, mutabitur, & rectangulum, ac e positivo migrabit in negativum: si vero mutet utraque, adhuc erit considerandum ejusdem generis, ac erat, cum neutra positionem mutaverat. Nam si in fig. 241 CD. CA considerentur, ut quantitates positivæ, & earum rectangulum DCAB, ut positivum, mutetur autem CA in CF; jacebit DCFE ad partes oppositas, adeoque id rectangulum respectu prioris considerandum erit, ut negativum. Quod si iterum mutetur CD in CH, jam rectangulum FCGH, mutabit directionem respectu FCDE adeoque debebit prestare effectum contrarium, nimirum, minuere, quod id augebat, augere, quod id minuebat; ac proinde negativi negativum erit, & iterum in positivum migrabit. F.241

683. Hinc in Geometria idem accidet, quod in Arithmetica, & Algebra contingit, ut nimirum ubi ducendo unam quantitatem in aliam, oritur productum quoddam, si altera e binis quantitatibus mutetur in negativam, fiat negativum, & productum; si utraque maneat,

neat, sit positivum, quod ibi exprimitur dicendo, ex multiplicatione tum binorum positivorum, tum binorum negativorum oriri positivum, ex multiplicatione positivi per negativum, vel viceversa, oriri negativum; sive signa conformia in multiplicatione exhibere positivum; difformia negativum.

684. Porro hinc illud consequitur, ut lineæ cujuscumque quadratum positivum semper maneat, licet eadem linea e positiva mutetur in negativam, positione mutata: Quadratum enim lineæ est ipsa linea in se ipsam ducta, quæ e superiore canone producit planum positivum: Inde vero deducitur, quadrati negativi latus impossibile esse, quod in Arithmetica, & Algebra appellatur quantitas imaginaria. Quadratum autem quodcumque bina semper habere potest latera alterum positivum, alterum negativum: Atque idcirco ubicumque problema aliquod ad sui solutionem requiret, ut inveniatur dati quadrati latus, semper id ipsum latus adhiberi poterit cum directione utravis, tam positivum, quam negativum.

685. Id patebit sequenti exemplo. Debeat inveniri inter binas rectas media proportionalis. Quæsitæ mediæ quadratum debet æquari dato rectangulo sub datis rectis: Quare binas omnino solutiones habere debebit id problema, & bina ejus quadrati latera inveniri debebunt constructione eadem: Atque id quidem
F.242 omnino continget. Nam si in fig. 242 binæ rectæ datæ abscindantur in AB, BD in eadem recta ita, ut earum summa constituat AD, ac ipsa AD secta bifariam in C, radio CA ducatur circulus, is rectæ EBF perpendiculari AD occurret in binis punctis G, G, eritque ex natura circuli utriuslibet BG quadratum æquale eidem rectangulo sub AB, & BD; & utraque ex iis media quæsita. Ubicumque punctum B fuerit inter A, & D, solutio rite procedet: At si id sumatur extra, vel ad partes A in B2, vel ad partes D in B3, mutata in primo casu directione AB2, in secundo DB3, jam rectangulum ABD mutabitur in negati-
vum,

vum, adeoque negativum evadet etiam illud quadratum, & idcirco ejus latus impossibile; quam ob rem id ea constructione inveniri nequaquam poterit. Et quidem rectæ E2B2F2, E3B3F3 ipsi AD perpendiculares nunquam occurrent circulo. Poterit quidem alia constructione determinari media inter AB2, & B2D, vel AB3, & B3D independenter ab illa mutatione directionis; nimirum ducendo binas tangentes B2H, vel B3H2 ad circulum ipsum, quæ erunt mediæ quæsitæ. Verum ibi iterum AB2, & B2D considerantur, ut positivæ; & si deinde P2, migret in B, & positio mutetur, jam ea constructio nos deseret; neque enim ex B tangentes ad circulum duci poterunt, quæ problema eadem constructione solvant; migrante vero B in B3, jam & AB3, & DB3 habent directiones contrarias directionibus AB2, & DB2; adeoque rectangulum earundem iterum evadit positivum, ac iterum constructio redit cum binis tangentibus. Atque idcirco si in rectis EF sumantur binę B2L, vel binæ B3L2, æquales binis tangentibus, puncta L, L2 erunt ad binos ejusdem Hyperbolæ æquilateræ ramos, quæ est Locus Geometricus diversus ab illo circulo, cum quo nequaquam continuatur in A; ubi arcuum quamvis contiguorum natura, & proprietates sunt admodum diversæ, licet arcus assumantur quam proximi. Et hanc ipsam ob causam circulus quidem ordinatas BG axi perpendicularis habet respondentes punctis B assumptis inter A, & D, nullas autem habere potest extra eos limites; contra vero Hyperbola extra eos limites habet semper, intra eos habere omnino non potest.

686. Idem autem etiam in admodum simplicibus Geometriæ theorematis notare licet. Est quarta Euclidis Propositio Libri 2, puncto B jacente inter A, & D, bina quadrata AB, BD cum binis rectangulis sub AB, BD æquari quadrato AD, septima vero, puncto B2 jacente extra A, & D, bina quadrata AB2, B2D æquari quadrato AD cum binis rectangulis sub AB2, & B2D. Hę binæ propositiones exhibent tantum-

tummodo binos casus ejusdem theorematis, & secunda sponte fluit e prima, dummodo notetur, AB2 habere directionem contrariam ei, quam habet AB, directionem vero DB2 esse eandem, ac DB. Eo enim pacto patebit, quadrata quidem manere ut prius, at illa bina rectangula mutare positionem, & fieri negativa. Quamobrem ubi ante summa ex binis quadratis AB, BD, & binis rectangulis sub AB, & BD æquabitur quadrato AD, jam illi æquabitur non summa, sed differentia, quæ habetur demendo ab illis quadratis illa bina rectangula, unde sequitur illa bina quadrata æquari quadrato AD binis illis rectangulis aucto.

687. Eodem etiam pacto tam quinta, & sexta, quam nona, & decima, & immo etiam secunda, & tertia, duodecima, & decimatertia ejusdem libri ad singula theoremata reduci possunt, habita ratione positivorum, ac negativorum in mutatione directionis, mutante valorem rectanguli, non vero quadrati. Ac in reliquis quidem mutatio illa valoris enunciationem ipsam theorematis mutat, cum in iis habeantur rectangula. At in nona, & decima, quæ continet sola quadrata, nullo in iis mutato valore: enunciatio manet eadem. Secta AD bifariam in C, si punctum B sit inter A, & D, bina quadrata AB; BD æquabuntur per nonam binis CA, & binis CB. Si autem B2 sit extra eos limites, erunt pariter per decimam bina quadrata AB2, DB2 æqualia binis CA, & binis CB2. Mutata est directio lateris AB in AB in AB2, sed valor quadrati non est mutatus.

688. In solidis pariter, si una e tribus rectis solidum continentibus mutet directionem mutatur solidum e positivo in negativum; si enim concipiatur planum a reliquis binis contentum immobile, recta vero, quę directionem mutat, sit solidi altitudo, jacebit solidum ipsum ad partem oppositam post mutationem directionis in ea altitudine; ac proinde & ejus valor mutabitur. Quod si mutentur binæ, redibit iterum ad valorem

posi-

positivum, cum iterum mutari debeat; si mutentur omnes tres, iterum valor solidi mutabitur, & generaliter ubicumque aliquod sive recta sit, sive area, sive solidum, definiatur ductu, vel proportionibus rectarum quotcunque, si earum numerus impar directionem mutet, ipsum productum mutabit valorem: si numerus earum, quę mutantur, sit par, valor manebit. Nam singularum mutatio debet valorem producti mutare, quod proinde e positivo in negativum, e negativo in positivum abibit per vices, adeoque post numerum parem eodem semper regredietur, ac alia mutatione deinde addita, in oppositum valorem migrabit.

689. Id manifestum erit, ubi datis tribus rectis quæratur quarta proportionalis post ipsas. Ducantur binæ rectæ AB, DE indefinitę in fig. 243, quæ se mutuo secent in C: sumantur CH, CF versus A æquales F. 243
prioribus binis, CI versus E æqualis tertiæ: ducatur 244
HI, tum ex F recta ipsi parallela, quę abscindet ex 245
DE rectam CG, quæsitam post CH, CF, CI. Mu- 246
tetur jam directio primæ CH in oppositam in fig. 244, manentibus directionibus CF, CI, recta FG parallela IH solvet itidem problema, sed CG jacebit ad partes oppositas directione mutata. Mutetur in figura 245, etiam CF, & jam recta FG parallela HI redibit ad positionem CG eandem, quam habuit in fig. 243. Mutetur demum in fig. 246 etiam CI, & jam CG quoque iterum mutabitur ad directionem oppositam. Quin immo si quæcumque ex illis tribus CH, CF, CI figuræ primæ mutetur in contrarium, patebit eos casus delineanti mutari semper CG. Sed quodcumque binarum mutetur quavis ex iis relicta in positione priore, patebit semper, directionem CG manere; ac si quis rationes etiam compositas adhibeat quotcumque, poterit sane mutationes quotlibuerit experiri, & semper inveniet, numerum mutationum imparem inducere mutationem, parem vero retinere valorem pristinum.

690. Porro in ejusmodi mutationibus anguli quoque

rectarum mutabuntur ita, ut mutata directione unius lateris, mutetur angulus in eum, qui ejus complementum est ad duos rectos, mutata autem directione utriusque lateris mutabitur angulus in alium sibi ad verticem oppositum, qui ipsi prorsus æqualis est; & ejus vices æque præstabit in demonstratione quacumque. Ac demonstratio, vel ipsa etiam theorematis propositi veritas admodum facile ab uno casu transferetur ad alium, si ubi alterius tantummodo lateris mutetur directio, substituatur angulo priori ejus complementum ad duos rectos, ubi utriusque, substituatur angulus ad verticem oppositus. Fiet autem aliquando in ejusmodi mutationibus, ut qui anguli in parallelis alterni erant, mutentur in externum, ac internum, & oppositum, internus in externum aliquando migret, & viceversa, ac alia ejusmodi consequentur, quæ sponte incurrent in oculos, ac singula persequi, & exemplis illustrare infinitum esset. Satis erit in illis ipsis casibus, quos expressimus in ejusmodi figuris, notare vim demonstrationis, & mutationem in angulis factam. Triangula HCI, FCG in fig. 243 similia sunt, quia habent angulum HCI, FCG communem, nempe eundem ac ACE, anguli autem CHI, CIH externi æquales sunt angulis CFG, CGF internis, & oppositis in parallelis HI, FG. Hinc est CH ad CF, ut CI ad CG in figura 244 sunt itidem similia triangula HCI, FCG; sed idcirco similia sunt, qui anguli HCI, FCG sunt ad verticem oppositi æquales, & CHI, CIH æquales alternis CFG, CGF. Mutatio lateris CH mutavit angulum ACE in ECB, & mutatio lateris CG mutavit ipsum ACE in ACD. Anguli vero CHI, CIH, qui erant externi respectu CFG, CGF internorum, & oppositorum in fig. 243, evaserunt alterni in fig. 244. At demonstrationis vis adhuc relicta est.

691. Patet itidem mutatione ipsa directionis argumentationem, quæ fit componendo, mutari debere in eam, quæ fit dividendo, quotiescunque in proportione aliqua bini tantummodo termini antecedentes, vel

bini

bini consequentes mutent directionem, manere, si mutent priores bini; vel bini postremi, vel omnes simul: mutabunt autem semper vel nullus, vel bini, vel omnes; cum si e prioribus tribus mutet primus solus, vel tres, debeat mutare quartus, si bini, quartus manere debeat; unde patet, fieri non posse, ut eorum, qui mutant, numerus sit impar. In fig. 243, cum sit CF ad CH, ut CG ad CI, erit dividendo FH ad CH, ut GI ad CI. At in fig. 244, ubi CG, & CH mutarunt directionem, fiet componendo FH ad CH, ut GI ad CI. In fig. 245, ubi mutant priores bini, & fig. 246, ubi mutant omnes, habetur iterum argumentum componendo. Ratio est manifesta, quia summa primi, & secundi, vel tertii, & quarti mutatur in differentiam, vel differentia in summam, ubi alter ex iis positionem mutat, manet vero summa, vel differentia, si vel neuter mutet, vel uterque.

692. Ex iis, quæ demonstravimus, licebit sæpe Locorum Geometricorum ductum; & varios casus, ac transformationes contemplari. Exemplum desumemus a curvis quibusdam, quę summum in universa Geometria usum habent, & quas diligentius persequemur ibi, ubi infinitesimorum elementis traditis, agemus de curvis generaliter, ac ea curvarum genera, quæ majoris sunt usus persequemur. Interea earum ductus hic definitus plurimum proderit ad quædam infiniti mysteria evolvenda, & cognoscendam intimius continuitatis geometricæ legem, ac ipsa plurimorum casuum contemplatio, & locorum generalis constructio sibi ubique respondens, ad Geometriæ ipsius indolem, miram sanè, percipiendam pariter plurimum proderit.

693. Curvę quarum naturam, & genesim hic contemplabimur, erunt eæ, in quibus ordinatæ ratio simplex, vel utcumque multiplicata est eadem, ac ratio simplex, vel utcumque multiplicata, sive reciproca, sive directa abscissæ. Si algebraicis signis uti libeat, & considerare altiores linearum potestates, quæ exprimantur indefinite per litteras m, & n, ac absciſ-

sa dicatur P, ordinata vero Q; lineæ hujusmodi sunt eæ, in quibus P^m, ut Q^n exprimentibus m, & n numeros quoscumque rationales integros, sive positivos, sive negativos, vel, quod eodem redit, in quibus sit P, ut Q^n, exprimente n numerum quemcumque rationalem integrum, vel fractum, positivum, vel negativum. Sed hic, ubi Geometriam contemplamur, geometricum etiam sermonem usurpabimus, adhibendo rationum æqualium compositionem, quem etiam multiplicatio rationum appellatur, potius quam potestates linearum, quæ ultra secundam, & tertiam; nimirum ultra quadratum, & cubum, in Geometria non assurgunt, assurgunt autem in Arithmetica consideratione ad gradum quemcumque, si quædam linea dicatur unitas, qua de re ibi aptius, ubi de Algebræ applicatione ad Geometriam dicendum erit. Porro inter ejusmodi Loca Geometrica habetur etiam recta linea tam axi inclinata, quam parallela, & tam Parabola ad axem relata, quam Hyperbola ad asymptotos pro axe assumptos, & præterea omnis quædam, quam vocant Parabolarum, ac Hyperbolarum familia.

694. Sit in fig. 247 recta indefinita MN, in qua sumantur abscissæ a quodam puncto dato V positivæ versus N, ut VR, adeoque negativæ versus M, ut VR2,
F. 247 ac deducta per V indefinita OVQ perpendiculari ad MN, ordinatæ capiantur parallelæ ipsi, & habeantur pro positivis directione VO, ut RP, adeoque pro negativis directione contraria VQ, ut R2 P2.

695. Sint autem primo ordinatæ in ratione simplici abscissarum. Sumpta VA ad arbitrium ex parte positiva, & erecta AB parallela VO ex parte itidem positiva longitudinis cujuscunque, & ducta per V, & B recta ST indefinita ita, ut S jaceat ad partes V, ac T ad partes B, patet, eam fore Locum Geometricum quesitum; ducta enim quavis RP parallela VO, semper erit ordinata PR ad abscissam VR, ut BA ad AV in eadem

dem ratione constanti adeoque illa mutabitur, ut hæc; sive erit ordinata in ratione simplici directa abscissæ. Porro in hoc casu patet, abscissæ positivæ VR debere semper respondere ordinatam positivam RP; negativæ vero VR2 negativam R2P2. Nam debet esse AB ad PR, ut VA ad VR, in qua proportione VA, & AB constantes sunt; adeoque mutata positione abscissæ VR, mutari etiam debet positio ordinatæ RP juxta num. 688. Semper autem respondebit cuivis abscissæ, sua ordinata atque ea unica, cum hic nulla occurrant quadratorum latera, quæ bina esse possunt positionum oppositarum, vel quæ quadrato negativo facto evadant impossibilia. Crescente autem in infinitum abscissa, debet crescere & ordinata; ac ea evanescente, evanescere. Et hæc quidem omnia omnino accidunt in ea ipsa recta, quæ & transit per V, & utrinque in infinitum recedit ab axe ad partes oppositas.

696. Debeat in fig. 248 esse ordinata RP in ratione duplicata directa abscissæ VR. Abscissis omnibus positivis; patet, debere respondere ordinatam positivam, & unicam, quæ invenietur, capiendo RP ad AB in ratione duplicata VR ad VA, sive ut est quadratum VR ad quadratum VA. Facta autem abscissa VR2 negativa, adhuc ordinata R2P2 debebit esse positiva. Nam in illa ratione duplicata VR2 bis ingreditur & proinde positio bis mutatur, ac quadratum abscissæ VR2 quamvis negativæ, est positivum. Porro patet, crescente in infinitum abscissa, debere crescere in infinitum, & ordinatam, ac infinities magis; unde colligitur, bina Loci Geometrici crura in infinitum abire ex parte VO versus T & S, recedendo semper & ab axe MN, & ab VO in infinitum: at abscissa in infinitum decrescente patet, etiam ordinatam infinities magis debere decrescere; unde infertur evascente abscissa, debere evanescere & ordinatam, adeoque Locum Geometricum hunc transire pariter per V. Quoniam vero ordinata infinities magis crescit, quam abscissa, ubi ambæ crescunt ultra quoscumque F. 248

 limi-

limites, infinities autem magis decrescit, ubi ambæ decrescunt, patet, si per V, & P ducatur recta VI indefinita, angulum VPR in primo casu, & PVR in secundo decrescere ultra quoscumque limites; adeoque si arcus VP concipiatur continuatus in infinitum versus T, angulus OVI alternus ipsius VPR decrescet in infinitum, accedente recta VI ad VO, ultra quoscumque limites, quod nobis infra usui erit, ubi agemus de infinito. Si vero arcus VP evanescat abeunte P in V, evanescet angulus IVN, & recta VI, quæ eo casu evadet tangens, recidet in ipsum axem MVN, qui proinde locum SVT in V continget. Patet autem ex ipsa proportione exposita, SVT debere esse Parabolam e Coni Sectione orta, cujus axis VO. Ducta enim PE perpendiculari ad eum axem, est in Parabola VE abscissa, ut quadratum EP, quæ in ea dicitur semiordinata, adeoque RP, quæ hic dicitur ordinata, est in ratione duplicata VR, quę hic dicitur abscissa. Porro in Parabola Conica patet crura VS, VT esse illius ipsius formæ, quam hic ex illa positivorum, & negativorum notione deduximus.

697. Quod si debeat esse ordinata in ratione tripli-
F.249 cata abscissæ, habebuntur, ut in fig. 249, bini arcus VT, VS infiniti, quorum alter jacebit in angulo OVN, alter in MVQ. Nam facta VR2 negativa, habetur in illa ratione triplicata numerus negativorum impar & proinde negativa est etiam ordinata. Eodem vero argumento crura in infinitum abeunt, ac arcus transit per V, ubi a recta MN contingitur, a qua cum etiam secetur, habetur ibidem mutatio directionis curvaturæ, quæ appellatur mutatio flexus. Contactus autem, & intersectio hic uniuntur, ut ubi circulus osculator Sectionem Conicam (num. 512) secat simul, & tangit in ipso osculo. Porro hic locus appellatur Parabola cubica, in qua si OVQ assumatur pro axe, cubi ordinatarum PE sunt, ut abscissæ.

698. Generaliter autem si ordinata PR sit in ratione abscissæ VR utcumque multiplicata per numerum inte-

tegrum positivum parem, ut si sit in quadruplicata, sextuplicata, decuplicata, debebit haberi ordinata quoque R2P2 positiva, & forma crurum, eadem, quæ in fig. 248; si per imparem mutabitur in negativam, & habebitur forma fig. 249.

699. Si vero ratio duplicata ordinatæ sit eadem, ac ratio directa utcumque multiplicata per numerum imparem (nam si sit eadem, ac ratio multiplicata per numerum parem, erit ratio simplex ordinatæ eadem, ac ratio abscissæ multiplicata per dimidium ejus numeri paris, & casus reducetur ad alterum e binis præcedentibus) habebuntur bina crura ejus formæ, quam exhibet fig. 250 jacentia in angulis OVN, QVN. F. 250
Nam existente VR positiva, invenietur positivus valor quadrati ordinatæ, adeoque bina ejus latera habebuntur (num. 684) RP, R*p*. Existente vero VR2 negativa, valor quadrati ordinatæ negativus fiet, & proinde ordinata ipsa impossibilis, quam ob caussam recta LR2L ordinatis parallela nusquam occurret curvæ. Quoniam autem eodem argumento decrescente RP infinities magis, quam RV, adhuc VN contingit curvam; curva ipsa in V cuspidem habet admodum acutam, in qua retro regreditur.

700. Idem generaliter contingit, quotiescunque ratio ordinatæ multiplicata per quemvis numerum parem est eadem, ac ratio abscissæ multiplicata per imparem majorem. Imparitas abscissæ, & paritas ordinatæ dabit regressum curvæ a recta OQ, & binas ordinatas cum directionibus oppositis; excessus numeri abscissæ supra numerum ordinatæ, exhibebit contactum rectæ VN, & cuspidem in V. Quod si ratio ordinatæ multiplicata per numerum imparem quemvis, sit eadem, ac ratio abscissæ per numerum majorem parem, vel imparem, redibit forma fig. 248, & 249, qui sunt omnes ejusmodi casus, nam ratio ordinatæ multiplicata per parem æqualis rationi abscissæ per parem reducitur continua bissectione ad imparem in altera e binis, adeoque ad unum e præcedentibus casibus. Et hæc quidem omnia facile generali demonstratione erui

possunt ope constructionum quarundam, quas paulo infra exhibebimus.

701. Si jam numerus per quem multiplicatur ratio abscissæ, sit minor eo, per quem multiplicatur ratio ordinatæ, habebuntur figuræ 251, 252, 253, quas exhibebunt 248, 249, 250 si permutentur abscissæ earum, & ordinatę ac illarum rectæ OQ succedat harum axis MN si enim hic sint VR, & RP, quę ibi erant VE, & EP, sive PR, & VR, habebitur hic eadem relatio ordinatarum ad abscissas, quæ ibi abscissarum ad ordinatas. In iis omnibus casibus erit OVQ tangens, & numerus major par in ordinata impar in abscissa prębebit in fig. 251; binas ordinatas oppositas ex parte abscissę positiva, & ex parte negativa impossibiles; impar in ordinata, & in abscissa & in fig. 252 ordinatas singulas, & ejusdem legis cum abscissis; impar in ordinata, par in abscissa, ordinatas semper singulas pro singulis abscissis, semper positivas, & cuspidem.

F. 251
252
253

702. Hi quidem sunt omnes casus rationis directæ: Si vero ratio fuerit reciproca, non directa: patet, si fuerit simplex, haberi in fig. 254 Hyperbolam sT, Ss inter asymptotos MN, OQ. Nam in ea (num. 227) est rectangulum sub VR, & RP semper constans, adeoque RP in ratione reciproca simplici VR. Ea vero Hyperbola binos habet ramos in binis angulis ad verticem oppositis OVN, MVQ in infinitum excurrentes, ac accedentes ad ea angulorum crura ultra quoscumque limites. Id autem etiam deducitur ex traditis negativorum regulis, & ex natura rationis reciprocæ simplicis. Nam mutata directione abscissę mutari debet etiam directio ordinatæ in cujus determinationem illa semel ingreditur. Generaliter autem si ratio ordinatæ utcumque multiplicata per numerum imparem æquetur rationi reciprocę abscissę multiplicatæ per numerum imparem, forma erit eadem, ac in fig. 254. Ordinatæ positivis abscissis positivæ, negativis negativę respondebunt singulis singulę, ac crescente in infini-

F. 254

tum

tum abscissa, decrescet ordinata, sed nunquam evanescet; decrescente ordinata, abscissa crescet in infinitum, & semper habebitur aliqua; adeoque quatuor crura erunt asymptotica, habebunt pro asymptotis omnia quatuor latera VM, VO, VN, VQ, & jacebunt in binis angulis ad verticem oppositis OVN, MVQ.

703. At si numerus ordinatæ fuerit impar, sed abscissæ par, orietur forma figuræ 255. Ordinatæ singu- F255
lis abscissis respondebunt singulæ, sed omnes positivæ erunt, adeoque bini rami asymptotici jacebunt in binis angulis OVN, OVM.

704. Si demum numerus ordinatæ fuerit par, & abscissæ impar, negativis abscissis nullæ ordinatæ respondebunt; positivis respondebunt binæ oppositæ singu-
lis, & forma erit, quæ exhibetur in fig. 256, ja- F256
centibus binis ramis asymptoticis in angulis NVO, NVQ.

705. Ut unico velut conspectu contemplari liceat omnes ejusmodi casus; sit P^m, ut Q^n; sive P, ut $Q^{\frac{n}{m}}$ exprimente P abscissam, Q ordinatam, n, & m numeros quoscumque integros positivos, vel negativos, inter se primos ita, ut fractio $\frac{n}{m}$ non possit reduci ad minorem expressionem. Si fuerit $\frac{n}{m}$ numerus positivus, pertinebit casus ad figuras a 247 ad 254, si negativus ad 3 reliquas; & in primo casu loca omnia erunt ex familia Parabolarum, in secundo ex familia Hyperbolarum. Si m fuerit numerus æqualis n, adeoque $\frac{n}{m}$ fuerit unitas; pertinebit casus ad rectam expressam in fig. 247. Si m fuerit numerus minor, quam n: pertinebit casus ad figuras 248, 249, 250, prout fuerit m impar, n par, vel m, & n impar, vel m par, n impar. Si m fuerit major, quam n, habebuntur figuræ 251, 252, 253 in iisdem tribus subdivisionibus ejus casus. Si

autem

autem $\frac{n}{m}$ fuerit negativus habebitur figura 254, 255 256 prout fuerit & m, & n impar, vel m par, n impar, vel m impar, n par. Quod si m esset nihil, adeoque ordinata in nulla ratione abscissæ; tum vero ordinata esset semper constans, adeoque pro curvis illis haberetur tantummodo recta ipsi axi parallela in quam eo casu eædem curvæ abeunt.

706. Quæ ex natura positivorum, ac negativorum hic deducta sunt, possunt omnia accuratè demonstrari, & immediatè deduci ope constructionis harum curvarum ipsarum, quæ constructio rite peracta exhibebit per sese curvarum earundem omnium ductum, & quæ semper geometricè præstari poterit per puncta ita, ut prius habeatur constructio earum, quæ exhibent ordinatæ rationem simplicem respondentem rationi abscissæ multiplicatæ per quemvis numerum gradatim ab unitate incipiendo, tum pergendo per unitatis additionem continuam. Deinde vero traduci potest constructio ad quamvis rationem multiplicatam etiam abscissæ.

707. Quoniam recta linea exprimit casum, in quo ordinata est in ratione simplici directa abscissæ, quæratur in fig. 257. linea, in qua sit ordinata in ratio-
F.257 ne duplicata directa ejusdem. Capiatur AB utcumque perpendicularis VA, producaturque indefinitè: agatur per V, & B: recta indefinita ducatur per quodvis punctum R axis MN recta parallela QO, quę occurrat alicubi rectæ VB in P; ducatur PD axi parallela occurrens rectæ BA in D: ducatur per V, & D recta, quæ rectæ illi RP occurret alicubi in E, & ibidem determinabit ordinatam loci quæsiti. Erit enim ob rectæ lineæ naturam PR, ut VR. Erit autem BA ad DA, ut BR ad ER. Quare rectangulum sub AB constanti, & ER æquale rectangulo sub DA, & PR, adeoque ER in ratione composita ipsarum DA, & PR, nimirum, cum eæ æquentur in ratione duplicata PR, sive VR, ut oportebat. Patebit autem ipsam constructionem contemplanti, a puncto P oriri RE confor-

mem

men RP, ac positivam, a puncto vero P_2 oriri R_2E_2 ipsi contrariam, sive a negativo iterum positivam, ut est R_2P_2 in fig. 248.

708. Invenienda jam sit curva, in qua ordinata sit in ratione triplicata abscissæ. Sit in fig. 258, recta F258
VB, ut prius, & curva SI_2VIBT jam constructa ejusmodi, ut RI sit in ratione duplicata VR. Ducatur ex I recta ID parallela axi, occurrens AB in D, tum per V, & D recta, quæ rectæ RP occurret in E, ac determinabit punctum E quæsitum. Erit enim BA ad DA, sive IR, ut PR, ad RE. Quare, ut prius ER, in ratione composita RI, & RP, prior est duplicata VR, posterior simplex. Quare ratio illa composita erit triplicata ipsius VR, ut oportebat. Patet autem etiam hic, punctum I_2 jacens ex parte positiva debere iterum reddere punctum E_2 ex parte negativa. Patet etiam, si RI sit in ratione triplicata VR, obventuram RE in ratione quadruplicata, sed tunc debere I_2 jacere ex parte negativa, & P_2 transire ad partem positivam, atque ita porro quævis multiplicatio rationis abscissæ habebitur per gradus, jacente semper E_2 ex parte positiva, ubi devenitur ad numerum parem, negativa, ubi ad imparem; atque ea ratione habentur omnes casus hujusmodi, in quibus ordinata sit in quavis ratione abscissæ multiplicata per quemvis numerum integrum positivum; ac simul etiam omnes casus, in quibus debeat esse submultiplicata ea ratio, sive in quibus ratio ordinatæ, utcunque multiplicata, sit eadem, ac ratio abscissæ simplex. Satis enim est mutare axem, & abscissam mutare in ordinatam, ut ex figuris 248, 249 constructis deriventur 251, 252.

709. Si ratio sit reciproca simplex in fig. 259, ducta VB, ut prius, ducatur BI parallela axi occurrens F259
rectæ RP in I, tum per V, & I recta occurrens rectæ AB in H, ac demum recta HE parallela axi occurrens RP in E, eritque E quæsitum punctum. Erit enim AB ad AH, sive RE, ut RP ad RI. Quam-

obrem

brem rectangulum sub RP, & RE æquabitur constanti rectangulo sub AB, & RI, eritque idcirco RE in ratione reciproca RP, sive VR, ut oportebat. Constructio autem ipsa ostendet E2 determinari a P2 ad partem negativam.

710. Si ratio sit reciproca duplicata; manente in F260 fig. 260 VB, sit *t*IBT curva jam descripta habens RI in ratione reciproca simplici VR, ductaque VIH, & HE, ut prius, habebitur quæsita RE. Erit enim AB ad AH, sive RE, ut RP ad RI, adeoque ob AB constantem RI in ratione composita RE. & RP; sive RE directe ut RI, & reciproce ut RP. Est autem ratio directa RI eadem, ac reciproca VR, & ratio reciproca RP eadem, ac reciproca VR. Quare erit RE in ratione reciproca duplicata VR, ut oportebat. Patet autem etiam hic, punctum I2 jacens ex parte negativa debere iterum reddere punctum E2 ex parte positiva. Patet etiam, si RI sit in ratione reciproca duplicata VR; obventuram RE in ratione reciproca triplicata, sed tunc debere I2 jacere ex parte positiva, & E2 transire ad partem negativam, atque ita porro quævis multiplicatio rationis reciprocæ habebitur per gradus, jacente semper E ex parte positiva in numero pari, negativa in impari.

711. Quod si ratio ordinatæ multiplicata per aliquem numerum rationalem *n* debeat esse eadem, ac ratio abscissæ sive directa, sive reciproca multiplicata per a-
F261 lium quemvis *m*; id facile præstari poterit ope curva-
262 rum jam constructarum. Fiat in fig. 261 axe MN cur-
263 va SVT, cujus abscissæ VH sint in ratione ordinatarum IH multiplicata per *n*, ac curva S'VT', cujus ordinatæ RP sint in ratione abscissarum VR multiplicata per *m*. His semel præparatis per quodvis punctum R agatur recta perpendicularis MN, donec occurrat curvæ VT' in P, tum PD parallela NM usque ad OQ, inde vero DH ad angulum VDH semirectum, quæ occurrat in H rectæ VN, deinde HI parallela QO, donec occurrat curvæ VT in I, ac demum

per

per I recta parallela MN, quæ occurret RP in E, & determinabit quæsitum punctum E. Nam erit ob angulum VDH semirectum, & DVH rectum, VH æqualis VD, sive RP. Erit autem VH in ratione IH, sive in ratione RE multiplicata per n, & PR in ratione VR multiplicata per m. Ergo ratio RE multiplicata per n erit eadem, ac ratio VR multiplicata per m, ut oportebat.

712. Porro si n sit numerus impar, & m par, habebitur casus figuræ 261; compositæ ex fig. 252, & 248, ac E2 jacebit ex parte positiva, figura ipsa referente casus reliquos fi. 248, vel 252: si fuerit & n, & m impar, habebitur casus fig. 262 compositæ ex 249, & 252, ac habebitur E2 ex parte negativa, figura exprimente casus reliquos ipsarum figurarum 249, & 252? si fuerit n par, & m impar; habebitur casus figuræ 263 compositæ ex 251, & 249, figura ipsa referente casus reliquos fig. 250, nullo existente E2, quod respondeat R2, & respondentibus R binis E, & e Quod si ratio ordinatæ multiplicata per n, deberet esse æqualis rationi reciprocæ abscissæ multiplicatæ per m, satis esset arcubus SVT parabolicis substituere crura hyperbolica figurarum 254, 255, 256, ita ut in figura 260, 261, 262 Ki esset in ratione reciproca abscissæ VR multiplicata per m & patet, eadem prorsus constructione obtineri intentum.

713. Atque hoc demum pacto constitui possunt omnes prorsus curvæ propositæ tam parabolici, quam hyperbolici generis, quæ quidem egregias, & utilissimas proprietates habent potissimum circa subtangentes, & arearum mensuram, quæ in omnibus accurate quadrabiles sunt, præter unicam Hyperbolam Conicam rationis simplicis reciprocæ, sed earum investigatio nec ad rem præsentem facit, & multo est expeditior ope quantitatum infinitesimarum: interea pergeremus ad considerationem transitus, qui fit e positivo in negativum.

714. Mirum sane, quam sibi ubique costans sit Geometria

metria potissimum in lege continuationis servanda; cujus vi nihil uspiam mutatur per saltum, aut totum simul exoritur, aut evanescit, sed a quacumque magnitudine ad aliam quamcumque semper itur per intermedias omnes: Nullus Loci Geometrici arcus uspiam abrumpitur, sed vel in gyrum torquetur, vel in se ipsum reflectitur, ut in fig. 250 in V, ac vel in se ipsum redit, ut in Ellipsi, vel in infinitum protenditur; ut crura hyperbolica; & parabolica, vel spiris infinitis circumagitur; aut recedendo a puncto quodam ex altera tantum parte in infinitum, & ex altera accedendo semper, quin ad ipsum pertingat unquam, & quin tamen uspiam abrumpatur; quod & illi accidit; quam spiralem logarithmicam appellant, & cujus naturam alibi persequemur, vel demum binis saltem spirarum ordinibus recedendo in infinitum, quod aliæ multæ spirales præstant. Ac ordinatæ normales, subnormales, tangentes, anguli tangentium cum axe, vel cum recta data quavis, vel cum recta utcumque per eundem Locum Geometricum definita, curvatura ipsa, directio curvæ, ac quidvis aliud sine ullo saltu mutatur semper transeundo per omnes intermedias quantitates ejusdem generis.

715. Ea lex omnino servatur etiam, ubi e positivis quantitatibus transitur ad negativas, qui nimirum transitus non fit per saltum, sed per gradus continuos. Fit autem is transitus duplici modo, nimirum vel transeundo per nihilum, vel per infinitum. Ac ubi per nihilum transitur, res sane nullam admirationem parit, cum id, quod decrescit, donec evanescat penitus, admodum rerum constitutioni, & naturæ ordini consentaneum sit, ut aliquando post interitum mutetur in oppositum; quemadmodum paullo superius num. 677 vidimus contingere in debito, vel in regressu fluvii. At transitus e positivo in negativum mysteria quædam secum trahit, quæ hic evolvenda sunt, & quæ ad Sectionum Conicarum naturam, & analogiam, ac ad universam Locorum Geometricorum indolem perspiciendam mirum in modum conducunt. Primum autem proferemus exempla, in

in quibus, e positivo in negativum fit transitus per nihilum, ac per infinitum petita etiam e vulgari Geometria, tum alia, quæ ad infinitum pertinent, addemus e Sectionibus Conicis demonstratis, ac ex illis ipsis curvis, quas hic habuimus, & ad Hyperbolas, ac Parabolas sublimiores referri diximus adjectis etiam regulis quibusdam pro Locorum Geometricorum transformationibus.

716. Sit in fig. 264 recta indefinita AB, ac centro C extra ipsam assumpto, concipiatur circulus NKOQ quovis intervallo, per cujus centrum transeat recta DE parallela ipsi AB, occurrens circulo in N ad partes A, D, in O ad partes B, E. Sit autem CH perpendicularis ad AB occurrens ipsi in H, & circulo in K versus H, ac in Q ad partes oppositas. Transeat demum per ipsum centrum C recta indefinita FG, quæ circulo occurrat in puncto L ad partes F, & M ad partes G, rectæ vero AB in P, atque ea recta concipiatur motu continuo delata in gyrum circa centrum illud C immotum ordine NKOQ. Minuetur primo HP, accedente L ad K, & evanescet: tum abeunte L in arcum KO in L', mutabit HP' directionem, adeoque post transitum per nihilum in H mutabitur e positiva in negativam, vel viceversa. Pergat FG converti, & Punctum P' perpetuo recedet ab H, aucta perpetuo HP' per omnes finitarum magnitudinum gradus in infinitum, donec L' abeat in O, quo casu intersectio P' in illo infiniti quodam velut immenso pelago quodammodo absorpta nusquam jam erit. Nam recta G'F' congruet cum DE parallela rectæ AB, adeoque cum ipsa AB nusquam concurret, licet in infinitum producatur. Verum utcumque parum inde removeatur ita, ut abeat L' in M, & M' in L; statim P', quod post discessum in infinitum delituerat eo unico momento temporis, quo L' erat in O, jam invenitur ex parte opposita in P, ac, si finitas tantummodo quantitates contemplemur, mutata est HP', in HP habentem directionem contrariam. Nimirum etiam in transitu F. 264

punct i

puncti P per infinitum abit ipsa HP' e negativa in positivam, vel viceversa.

717. Is transitus puncti P per infinitum ex una plaga in plagam oppositam videtur fieri motu prorsus continuo, tanquam si recta infinita HB, in infinita illa distantia connecteretur quodammodo cum recta infinita HA. Nullo enim tempore continuo deest locus aliquis punctis P, præter momentum illud, quo L' est in O, ac assignato quovis momento temporis, utcumque parum distante a momento illo quo L' est in O, assignari semper potest locus puncti P, qui idcirco eo solo momento temporis in infinito delitescit. In ipso vero motu continuo recta CF vertit quodammodo totum spatium conclusum parallelis CE, HB ita, ut nullum sit punctum utcumque proximum rectæ CE, utcumque remotum a recta CH, per quod aliquando non transeat, quod ipsum accidet rectæ CG respectu spatii DCHA, ubi punctum M' percurret arcum NK, motu scilicet semper continuo, & nusquam interrupto.

718. Illud unicum est discrimen inter transitum rectæ HP' per nihilum, & per infinitum, quod nimirum in primo casu in ipso transitu ipsa quidem HP jam nulla sit, punctum vero P habeatur in H; in secundo punctum P in illo immenso infiniti pelago velut demersum nusquam jam sit, ipsa autem HP' habeatur, & quidem infinita, nisi forte infinitum impossibile sit, qua de re paulo inferius. Illud interea generaliter notari potest, nihilum, & infinitum absolutum in extensione ita inter se connecti, ut quotiescumque in aliqua proportione geometrica bini termini finiti maneant, qui vel simul medii sint, vel simul extremi, si reliquorum alter evanescat, debeat alter evadere absolute infinitus, & viceversa, quod etiam hic manifestum fit, si ducatur L'Z perpendicularis ad KQ; erit enim CZ ad ZL', ut CH ad HP', ac abeunte L' in O evanescit CZ, & remanent finitæ CH, & ZL'; sed hac de re occurret iterum sermo.

719.

719. Cæterum quod punctum P motu quodam continuo transeat per infinitum; & illud ipsum, quod ex altera parte demersum fuerat in infinito, & obrutum, regrediatur ex parte opposita; videtur erui etiam ex solutione problematis, quo quæratur in figura 265, tertia CP continue proportionalis post binas CM, CO datas. Si enim centro C intervallo majoris CO describatur circulus, cui occurrat in I rectæ MI perpendicularis ad CO; ducaturque per I tangens infinita GF; occurrens rectæ AB alicubi in P; erit ex circuli natura CP tertia proportionalis quæsita; ubi interea notetur & illud, licet ejusmodi recta in binis punctis I circulo occurrat, unicam tamen CP respondere, unico puncto M, & eandem ab utroque I exhiberi idcirco, quod cum etiam ob angulum rectum CIP sit CM ad MI ut MI ad MP; ubi pro MI positiva, sumatur eadem negativa, manente directione primi termini CM; & ea mutata in binis terminis proportionis quatuor terminorum CM, MI, MI, MP; debet manere etiam directio quarti termini CP; adeoque ubi MI post transitum puncti I per O redeat ad magnitudinem eandem, licet oppositam directionem acquirat, debet redire eadem & magnitudo, & positio rectæ MP, & locus puncti P esse idem. Sed hoc ad transitum per infinitum non pertinet. F. 265

720. Pro ipso transitu per infinitum considerando; recta CO utrinque in infinitum producatur in A, & B, ac circulo iterum occurrat in N, recta vero ipsi NO perpendicularis per C ducta occurrat circulo QQ; & per utrunque Q sit tangens DE indefinite producta: Concipiatur jam punctum M motu continuo delatum ab O ad N ita, ut superato centro C, abeat in M'. Punctum I transferetur per Q in I', tangens GF per DE, in G'F', punctum vero P per infinitum recedens ex parte B regredietur ex ipso infinito ex parte A. Ipsum quidem in ipso appulsu puncti M ad C, infinito veluti obrutum, nusquam erit; tangens enim DE parallela AB nusquam ipsi AB occurret; at utcumque

parum distet M a C, erit omnino alicubi ex parte altera B, vel A. Porro in eo motu puncta M, & I semper intueri licet, quæ dum per Q, & C transeunt, transeunt illa quidem motu continuo, nec omnino mutantur, sed porro pergunt. Punctum igitur P, quod iis semper respondet, quod semper mentis acie saltem intueri possumus extra unicum infiniti casum, videtur, in illo unico infiniti casu in infinito ipso quodammodo delituisse, non interiisse, nec mutatum esse, dum in illo casu unico in infinito delituit quodammodo, sed ex plaga contraria rediisse idem, adeoque in illis plagis contrariis videntur quodammodo connecti rectæ CB, CA nexu quodam nostræ menti impervio, sed qui, nisi infinitum repugnet, omnino haberi debeat. Porro novæ CM' respondet ipsa nova CP' ex parte opposita, quia ex quatuor proportionalibus CM, CO, CO, CP, mutata directione unius CM, ac manentibus CO, debuit mutari & postremæ CP directio, ac si pro CO sumatur CN, & fiant CM', CN, CN, CP' proportionales, mutatis primis tribus, mutari debet, & quartus terminus, cum (n. 688) mutationum numerus impar, inducat mutationem in termino per præcedentes determinato par vero ipsum retineat.

721. Porro ipsa hæc mira continuatio, in translatione puncti per infinitum ad plagas prorsus contrarias, & menti nostræ impervius infiniti nexus plurimis aliis exemplis e Geometria petitis confirmatur, ubi nimirum, quæ cum puncto in infinitum recedente ita, ut nusquam jam sit, connectuntur, mutari cernimus motu continuo, & oculis ipsis subjecta, ac quodammodo velut devincta retinemus, ne in transitu per nihilum fugiant, & mutentur. Unum ex hujusmodi exemplis hic proferemus, in quo quidem omnino videbitur demonstrari immediatus ille transitus, & infiniti nexus, ac patebit, rectam lineam haberi debere pro circulo, cujus radius sit infinitus, & cujus centrum in infinita illa distantia, quodammodo velut ob-

rutum

futum delitescat, ac deinde ex parte opposita regrediatur. Ubi autem ex eo plures fructus perceperimus, progrediemur ad illustrandam ejus ope continuationis legem, & multa, quę ad cuspides, atque ad infinita curvarum crura pertinent, evolvemus. Multo autem plura in ipsis Sectionum Conicarum proprietatibus occurrent ex hoc miro, & nostræ menti prorsus impervio infiniti nexu in plagis oppositis derivata ubi etiam dum earum natura, & analogia evolvitur, mysteria quędam se prodent, quę mentem altius defixam, ac geometricis meditationibus initiatam incredibili sane voluptate perfundatur.

722. Concipiatur in ipsa fig. 264 radio PH circulus F.264 occurrens ipsi AB præterea in R. Moveatur jam, ut prius, punctum L per arcum NKOQ, & mentis acies defigatur in mutationes omnes, quę interea accident ipsi circulo, tum quod ad magnitudinem, tum quod ad directionem pertinet curvaturę. Curvatura quidem circuli & est minor, quo radius est major; eo enim magis ejusdem longitudinis arcus ad rectam accedit lineam, quo e majore abscinditur circulo, quam ob causam putei superficies, quę ex ingenti totius Telluris sphæra desumitur, sensibus apparet prorsus plana: atque idcirco circuli curvatura æstimari solet ita, ut sit in ratione reciproca simplici radiorum.

723. Dum igitur punctum L accedit ad K ultra quoscumque limites, minuitur radius HP pariter ultra limites quoscumque, & ultra quoscumque limites augetur curvatura. Apellente L' ad K, appellit P ad H, evanescit radius HP, evanescit circulus, postquam per omnes finitarum magnitudinum gradus decreverunt; curvatura autem ipsius circuli per omnes pariter finitarum magnitudinum gradus aucta infinita esse deberet in eo casu, ut in fig. 265 recta CP reciproca CM infinita evadere debuit, in ipso velut interitu rectæ CM evanescentis. Transeunte L in L', jam iterum radius HP', ac circulus per omnes itidem finitarum

tarum magnitudinum gradus crescunt, curvatur vero minuitur; at curvatura ipsa jam oppositam directionem acquisivit, & quæ cavitas prius respiciebat plagam A in infinitum extensam; jam plagam B respicit extensam pariter in infinitum ad partes contrarias. Habemus igitur jam, curvaturam in transitu quodam per infinitum directionem mutasse motu continuo, & postquam cavitas quibusdam velut hiantibus oculis plagam A aspectaverat, utut motu continuo pergens, ipsos oculos jam ad plagam B conversos habet. Verum hic quidem curvatura ipsa ad illam infiniti magnitudinem videtur accessisse ultra quoscumque limites, at eam nequaquam attigisse, nisi in ipso puncto; quod partibus, & flexu caret, quandam velut infinitam curvaturam animo confingamus.

724. Pergat jam moveri L' versus O: perget augeri circulis radius, & ipse circulus, ac per omnes magnitudinum finitarum gradus excrescent in infinitum. Interea vero curvatura circuli decrescet pariter ultra quoscumque limites, & peripheria ad rectam CH utrinque in infinitum productam in S, & T, accedet pariter ultra quoscumque limites ita, ut nullum sit punctum V ejusdem rectæ in quacumque distantia ab H assumptum, ad quod ea peripheria aliquando non accedat ultra quoscumque limites distantię quoscumq; VI' utcumque parvæ. Ubicumque enim assumatur punctum I' extra rectam ST, semper inveniri poterit locus centri P' in recta AB ejusmodi, ut peripheria per ipsum transeat. Satis erit rectam HI' ducere, tum ad I' constituere angulum HI'X æqualem angulo I'HB, & recta I'X debebit rectæ HB occurrere alicubi ob angulos I'HB, HI'X simul minores duobus rectis; ac ob eorum angulorum æqualitatem debebit ibidem triangulum constituere isoscelium: ac proinde ubi ad eum occursum devenerit P' transibit peripheria per I', & eo transgresso, peripheria ipsa adhuc ad V accedet propius. Quod quidem cum verum omnino sit de quovis puncto I utcumque proximo cuivis puncto V rectæ ST: peripheria ipsa mo-

tu continuo verret quodammodo, ac velut perradet omne spatium planum, quod a recta ST in infinitum protenditur ad partes B' ita, ut nullum sit punctum ejus infiniti spatii, ad quod aliquando peripheria non pertingat; dum L' percurrit arcum KO, nullum, ad quod iterum redeat, sed assignatio quovis puncto ejus spatii, ubicumque posito, assignari semper possit locus centri P' ipsi respondens in recta HB, & puncti L' locus in arcu KO, ac utrolibet ex his assignato, assignari pariter possint omnia superficiei puncta, per quae tum transit ipsa peripheria.

725. Abeunte L' in O, punctum P' infinito obrutum, nusquam erit, at abeunte L' in arcum OQ, & P ex parte opposita emergente ex infinito, jam circulum habebimus cum directione curvaturae opposita, jacentem penitus ad plagam a priore prorsus aversam respectu rectae ST, Radius, & circulus decrescent per omnes finitarum magnitudinum gradus, curvatura crescet, arcus autem eodem ordine verret, ac perradet omne spatium, quod ab ipsa recta ST porrigitur in infinitum ad partes A ita, ut per quodvis punctum I ejusdem spatii transeat aliquando, donec, abeunte demum L' in Q, recidat iterum P in H, ac eadem phenomenorum series exordiatur.

726. Jam vero quinam futurus est peripheriae status in ipso appulsu L ad O, in quo punctum P' ita in infinitum recessit, ut nusquam jam esset? Debuit sane congruere cum ipsa recta ST in infinitum producta. Concipiantur enim omnes infiniti status punctorum P', & L', ac omnes pariter infiniti status peripheriae circa punctum H. Cuivis ex illis respondere debet aliquis ex his. Nullus autem ipsius peripheriae status habetur extra rectam ST, cui non respondeat altera ex parte rectae ST suus status punctorum L' P', nec ullus est puncti L status in arcu KOQ extra O, cui non respondeat aliquis status puncti P in recta infinita AB, & aliquis peripheriae status hinc, vel inde a recta ST. Quare pro appulsu puncti L' ad O, cui

respondet casus ille puncti P' in immensam illam infiniti abyssum; atque voraginem velut demersi, ille unicus status peripheriæ relinquitur, nimirum congruentia cum recta ST. Quoniam peripheria circa H universam aream perradit ex parte B motu continuo, & in illo transitu L' per O abiit ad plagam oppositam; profecto debuit in ipso appulsu L' ad O transire per rectam ipsam; nec a punctis I' ad puncta I transilire potuit, nisi transeundo per puncta V.

727. Inde autem duplici via nexus ille infiniti videtur erui: primo quidem, quia recta ipsa infinita ST debet considerari tanquam circulus quidam infinitus, cujus centrum sit in infinita quadam distantia; sive ex parte B, sive ex parte A, quæ partes in ipso infinito copulentur quodammodo, & conjungantur, ut ipsa circuli peripheria ab H versus T digressa ad ipsum H ex parte S redeat quodammodo ductu continuo, nec usquam abrupto. Secundo vero, quia ut peripheria illa eadem circa H, ex parte SBT transiit motu quodam continuo ad partem SAT, nec in ipso transitu est mutata, sed se explicavit quodammodo, & sine saltu ullo in rectam abiit, ac deinde in contrariam partem se flexit, ita & illud ejus centrum P' videtur idem itidem mansisse, nec in illo transitu per infinitum commutatum esse.

728. Atque hinc quidem liceret jam ad Conicarum Sectionum analogiam quandam considerandam migrare, sed quo plenius intelligatur res ipsa, addenda quædam, quæ pertinent ad regressum puncti cujuspiam motu continuo delati a finitis quibusdam limitibus, & ab ipso infinito, quæ ad continuitatem Locorum Geometricorum intimius cognoscendam conducunt, & cum his, de quibus agimus, nexus habent arctissimos.

729. In primis ubi quæpiam quantitas perpetuo decrescit, ac demum evanescit coeuntibus binis illis limitibus, quibus terminabatur, ut, ubi de lineis agitur, binis punctis; aliquando quidem in contrariam mutatur, & in negativam abit, motum suum prosequente

quente altero ejus limite, vel utroque, si uterque limes sit mobilis, quod in exemplis contigit huc usque allatis; aliquando vero retro regreditur; & cum eadem directione iterum crescit ex parte positiva, limitibus illis ipsis, vel eorum altero, si alter immotus manet, retro cursum reflectentibus, unde advenerant. Eodem vero pacto etiam ubi quantitas excrescit in infinitum, aliquando quidem ejus limes ex infinito regreditur ex parte opposita, ut pariter in exemplis huc usque allatis contigit; aliquando vero ex eadem itidem parte infiniti redit retro, quo pacto quantitatis ipsius directio non mutatur. Rem itidem exemplis e simplici Geometria petitis illustrabimus.

730. In fig. 264. vidimus, HP mutare directionem tam ubi in appulsu L ad K, vel Q evanescit, quam ubi in appulsu ad O, vel N transit per infinitum. Id quidem semper accidet, ubicumque assumatur C intra circulum, ducta per ipsum punctum C recta DNOE; & excurrente puncto L motu continuo per circuli peripheriam. At si, ut in fig. 266, punctum C assumatur extra circulum ita, ut e binis tangentibus ex ipso ductis ad circulum ipsum altera CQ sit parallela AB, quæ producatur indefinite in DE, altera sit CK; quæ ipsam AB secet in H, ac punctum L ipsius circuli peripheriam percurrat omnem motu continuo, & recta GF per ipsum, ac per C transeat semper intersectio illa P oscillabit quodammodo inter nihilum, & infinitum, retro ex utroque limite regrediens sine directionis mutatione. Si enim in arcu circuli inter Q, K ad partes C ponatur I, ad partes vero contrarias R, & punctum L per arcum QRK excurrat versus K motu continuo, minuetur HP: eo appellente ad K, ipsa HP evanescet; eo abeunte in L' in arcum KIQ, iterum P regredietur, & HP crescet eadem directione, qua prius, ac per omnes magnitudinum finitarum gradus interjacentes inter nihilum, & infinitum, evadet demum absolute infinita, ubi L' appellit ad Q; quo abeunte in L in arcum F. 266

QRK, iterum P retro redibit ex infinito ex eadem plaga sine transitu ad directionem oppositam, ac decrescet per omnes magnitudinum earundem gradus ab infinito usque ad nihilum, & ad ipsum nihilum appellet, ut prius, in ipso appulsu L ad K.

731. Hæc autem ipsa videre est in illis Parabolarum, ac Hyperbolarum generibus, de quibus a nu. 694 egimus, ubi Parabolæ ostendent binos hosce casu per nihilum; Hyperbolæ vero in transitu per infinitum. Nam
F248 in fig. 249, ubi punctum P per arcum TVS motu con-
249 tinuo excurrat, minuitur tam abscissa VR, quam or-
250 dinata RP ultra quoscumque limites, evanescunt in ipso appulsu ad V, tum abeunte P in P2 crescit utraque ex parte opposita, directionem mutata in ipso transitu per nihilum. In fig. 248 in transitu per nihilum in V mutat quidem directionem abscissa VR abiens in VR2, sed ordinata RP non mutat, quæ nimirum retro re-
F254 greditur in R2P2. In fig. 250 e contrario, abeunte P
255 per V in p, ordinata RP mutat directionem in Rp:
256 abscissa VR retro regreditur. At in fig. 254 si recta quædam parallela QO moveatur motu continuo directione NM, excrescit ordinata RP in infinitum, per quod transit in ipso appulsu R ad V, tum abeunte R in R2; mutat directionem, & abscissa VR delata in VR2 transgressa nihilum, & ordinata RP in R2P2 transgressa infinitum, ubi punctum P a crure Pt transit motu quodam continuo ad crus sP2. quasi illa infinita crura in illa infinita distantia licet vergente ad partes oppositas, inter se quodammodo connecterentur, & continuarentur. At in fig. 255 abit quidem abscissa VR in VR2 per nihilum directione mutat, at ordinata RP directionem suam retinet in R2P2, quo casu crus Pt cum crure sP2 continuatur quodammodo in illo infinito, ex quo ex eadem plaga O regreditur. In fig. 256. arcus Pt cum arcu sp continuatur quodammodo in illa infinita distantia opposita, & abscissa quidem VR retro regreditur e nihilo, ordinata vero RP in motu puncti P per Ptsp transgresso infinito mutatur, & oppositam directionem acquirit.

quirit. Porro in hoc casu continuari arcum Pt cum sp in illis plagis oppositis, colligitur ex eo, quod si per B agatur recta infinita IH occurrens cruri Pt in P, tum convertatur, ut angulo ABH evanescente congruat cum directione BA, & fiat parallela rectæ OQ, tum pergat ulterius in I'H', punctum P, peragrato toto arcu infinito Pt, ex parte opposita regredietur per sp in p

732. In his quidem exemplis habuimus mutationem & abscissæ, & ordinatæ in fig. 249, & 254; mutationem abscissæ, & regressum ordinatæ a nihilo, vel infinito in fig. 248, & 255; regressum abscissæ, & mutationem ordinatæ in fig. 250, & 256. Nulla ex curvis ejus generis exhibet regressum utriusque tam abscissæ, quam ordinatæ, ac cuspides quidem, quæ ibi occurrunt, habent binos arcus positos hinc, & inde a communi tangente, & crura asymptotica, si regrediuntur ex eadem parte infiniti, jacent pariter hinc, & inde ab asymptoto. Sed facile est, curvas invenire harum ope, in quibus uterque arcus jaceat ad eandem tangentis partem, ac utrumque crus ad eandem partem asymptoti, regrediatur autem abscissa e nihilo, ac ordinata sive e nihilo, sive ex infinito.

733. Sit in fig. 267 cuspis D'OD ejusdem generis ac in 250, vel 253, in qua tangens OA jaceat inter binos arcus OD, OD'. Assumpta AV ad arbitrium ducatur recta MN in quovis angulo finito cum OA, quæ occurrat rectæ OA in A, captoque in eadem recta segmento AV ad arbitrium, ducatur VO indefinita, ac per quodvis ejus punctum E recta EL parallela MN, quæ occurrat curvæ D'OD in I', I, rectæ OA in F, ac in ipsa EL capiatur EP tertia post VE, EI, & EP' tertia post VE, EI' in eadem directione, in qua jacent EI, EI', nisi directio VE mutata, cogat mutare directionem ipsius EP, vel EP', & puncta P, P' erunt ad novam cuspidem TOS, cujus tangens erit ipsa illa recta VO ita, ut uterque arcus OT, OS jaceat ad eandem partem tangentis ipsius. Nam accedente E ad O ultra quoscumque F. 267

limites,

limites, decrescit etiam EF, adeoque tam EI, quam EI' ultra quoscumque limites. Quamobrem EP, & EP' decrescent ultra quoscumque limites etiam respectu ipsarum EI, EI', adeoque respectu EF, & respectu EO habentis ad EF rationem finitam; unde fit, ut recta per O, & P, vel P' ducta accedat ad OV ultra quoscumque limites, quæ idcirco punctis P, P' abeuntibus in O simul fiet tangens, & recidet in rectam VO: jacebit autem tam EP, quam EP' in directione eadem prope cuspidem, cum EI, EI' in eadem directione jaceant.

F268 734. At in fig. 268 sint bina crura asymptotica ID, I'D' hinc, & inde ab eadem asymptoto AB, ut in fig. 255, & 256 ab iisdem VO, VN. Secet ipsam AB quævis MN in A, & hanc in V secet OQ parallela ipsi asymptoto AB. Ducta vero recta EL, ut prius, fiat pariter EP, vel EP' tertia post VE, EI, vel EI', & puncta P, P' erunt ad alia bina crura T*t*, S*s*, quæ habebunt pro communi asymptoto rectam VO; sed jacebunt ad eamdem partem respectu ipsius. Crescente enim VE in infinitum, accedunt EI, EI' in infinitum ad EF æqualem datæ VA. Quamobrem EP, EP' tertiæ post VE, & EF decrescunt in infinitum, & crus utrumque accedit ad VO ultra quoscumque limites, quam idcirco habet pro asymptoto. Quoniam vero rectæ EI, EI' eandem directionem habent; habebunt eandem etiam EP, EP', & ramus uterque jacebit ad eandem partem asymptoti.

735. Porro in utraque constructione facile admodum inveniuntur puncta H, H', in quibus nova curva priorem secat. Ea determinabuntur a recta secante bifariam angulum OVN. Si enim hæc recta occurrat rectæ EL in L: patet ob angulum ELV æqualem alterno LVN, adeoque etiam angulo EVL, fore EL æqualem EV, adeoque EP, vel EP' tertiam post EL, EI, vel EI' fore minorem, æqualem, vel majorem respectu EI, prout fuerit EI respectu EL. Quare ubi L congruet cum I, vel I' in H, vel H', ibi cum iisdem congruet etiam

P, vel

P, vel P'. Sed hæc ad rem præsentem nullius sunt usus. Illud autem huc pertinet, quod in fig. 267 si habeatur pro abscissa OE; pro ordinata EP, EP' vel etiam EI; EI', excurrente P, vel I per arcum TPOP'S, vel DIOI'D', regreditur simul e nihilo tam abscissa OE, quam ordinata EP, vel EI; manente eadem directione etiam in EP', vel EI'. At in fig. 268; si ducantur ordinatæ PR, P'R' parallelæ rectæ OV; abeunte P per crus Tt in infinitum, ac redeunte per sP'S ex infinito, tam abscissa VR, retro regredietur per VR' e nihilo, quam ordinata RP per R'P' ex infinito.

736. At hujusmodi curvam, quæ bina crura asymptotica habeat ad eandem asymptoti partem, & quæ idcirco eundem illum regressum exhibere possit utriusque; nimirum tam abscissæ, quam ordinatæ, admodum facile est construere etiam in fig. 266. Satis est ibidem rectam CP producere ita; ut PO, PO' sint æquales ipsis CL, CL', & omnia puncta O; O' erunt ad curvam SO'MOT; quæ continget in M rectam CH productâ ita, ut sit HM æqualis tangenti CK; habebit vero bina crura O'S, OT in infinitum tendentia ab eadem parte rectæ HA, quæ erit asymptotus utriusque. Ductis enim CV, ON, O'N' perpendiculis in ipsam AH, erit CP ad PO, vel PO', nimirum ad CL, vel CL', ut CV ad ON, vel O'N'. Quare aucto in infinitum primo termino CP in accessu L, vel L' ad Q, & manentibus finitis CV, CL, vel CL', debebit ON, vel O'N' decrescere ultra quoscumque limites; & cum CL, CL' ambæ directionem habeant semper eandem; eandem pariter directionem habebunt semper & PO, PO', utroque puncto O jacente ad eandem partem rectæ AH. Abeuntibus autem L, & L' in K, patet O, & O' debere abire in M; unde illud consequi patet, rectam nimirum FG evadere tangentem curvæ TMS. F. 266

737. His fusius aliquanto expositis licebit jam inde eruere continuitatem quandam in ipsis Sectionibus Conicis, quæ in Hyperbola fit cum transitu per infinitum ad partes oppositas, in Parabola vero cum regressu. In

fig. 269

F.269 fig. 269 sint inter asymptotos MC*m*, NC*n* bini rami ejusdem Hyperbolæ SDT, *sdt*, ac recta quædam infinita RB transiens per ejus punctum D ipsi iterum occurrat in P, & circa ipsum D motu continuo convertatur, donec integram conversionem absolvat: jaceat autem P1 in crure DS, per quod ita excurret, ut A1B1 evadente in A2B2 parallela asymptoto M*m*, nusquam jam sit, sed crure toto peragrato in infinito illo quodammodo delitescat: abeunte A2B2 in A3B3 jam punctum P emerget in P3 ex distantia infinita opposita in crure *s*, ac motu continuato per A4B4 peragrabit P4 totum crus *t*, donec facta A5B5 parallela asymptoto N*n*, iterum nusquam sit: pergente vero recta in A6B6 regredietur ex infinito ex parte opposita per crus T, quod percurret totum, donec recidat in D, facta A7B7 tangente. Atque hoc quidem pacto, ubi recta AB dimidiam conversionem absolverit motu continuo, Punctum itidem P motu continuo percurret utcumque Hyperbolæ ramum, & Hyperbola ipsa habenda erit pro curva quadam continua, quæ quodammodo in orbem redeat etiam ipsa, & in infinitis illis oppositis distantiis quodammodo veluti conjugatur, connectaturque, crure *t* conjuncto cum T, & *s* cum S. Ductus autem ejus continuus est DP1S (*infinitum*) *s*P3P4*t* (*infinitum*) TP6D.

738. Quod si punctum D assumatur intra Hyperbolæ ramum ubicumque recta binas semper habebit intersectiones cum ejus perimetro juxta num. 284, dempto casu, quo evadat asymptotis parallela, quo casu altera ex intersectionibus in infinitum abibit, & nusquam jam erit; semper autem ex infinito redibit ex parte opposita; unde consequitur etiam illud, mutari semper rectam DP e positiva in negativam in quovis transitu puncti P ex altero ramo in alterum. Sic DP1 jacet directione DA1, sed DP3 post transitum per infinitum contrarium directionem habet DB3 quam habet etiam DP4; at iterum superato infinito P6 jacet ad partes A6. Quare si qua recta digressa a

dato

dato puncto, & terminata ad alterum ramum habeatur pro positiva; ubi ad ramum alterum terminabitur, habenda erit pro negativa. Chorda quoque quævis, quæ ad eundem ramum terminabatur, si terminetur ad utrumque, e positiva transibit in negativam.

739. Hinc autem etiam, si concipiatur Hyperbolæ ordinata Pp in fig. 11 post recessum puncti R in infinitum regressumque per R' ex parte opposita regrediens per P'p', permutabuntur puncta P, p in p', P' ita, ut existente P in latere dextro, sit P' in sinistro, & viceversa p e latere sinistro transeat in p' in latus dexterum, mutata itidem ipsius chordæ Pp directione in contrariam in P'p', eaque ipsa e positiva migrante in negativam, vel viceversa.

740. At in Parabola longe alio modo se res habet. Habetur nimirum regressus ex infinito in recta DP in fig. 270. Si enim per punctum quodvis perimetri D transeat recta A1B1, & occurrat ipsi perimetro iterum in P1, tum moveatur ita, ut accedat ad positionem parallelam axi; recedet P1 ultra quoscumque limites per crus DS, & semper alicubi existet; donec AB fiat in A2B2 parallela axi, quo casu juxta num. 149 ipsum P nusquam jam erit: at progrediente recta ipsa in A3b3, statim habebitur P3 in crure TD, quod punctum percurret totum id crus, donec in idem punctum D, ex quo fuerat digressum, recidat ubi AB evaserit tangens in A4B4. Hic igitur DP, ubi in DP1 in infinitum excreverit, retro redibit in DP3 cum directione eadem. Erit autem Parabola etiam ipsa curva quædam continua in se quodammodo rediens hoc ordine DP1S (*infinitum*) TP3D. F. 1

741. Hic autem mirus itidem videtur nexus crurum S, & T in infinita licet distantia a se invicem se conjungentium quodammodo. Recedunt illa juxta num. 77. & ab axe, & a se invicem ultra quoscumque limites: at ut in Hyperbola binorum ramorum crura continuabantur in illa infinita opposita distantia

stantia, ita hic continuantur quodammodo crura S, T in distantiis oppositis. Si nimirum D sit vertex axis DA2; & concipiatur ordinata P1P3, quæ abeunte R in infinitum, & regresso inde regrediatur cum ipso; puncta ipsa P1, P3 non regredientur, sed P1 transibit in P3, & P3 in P1 transgresso infinito, in quo & ordinata ipsa in infinitum excrescens continuatur quodammodo, & crura S, T continuantur. Hiatus vero ille inter bina crura S, T licet excrescens in infinitum considerandus erit tanquam punctum quoddam infinitæ peripheriæ infiniti circuli descripti facto centro in vertice D. Utcumque enim exiguus angulus fiat A1DA2, semper (num. 286) recta A1B1 occurret iterum alicubi in P1 cruri parabolico, & ultra ipsum excurret. Si nimirum facto centro in D, assumpto radio quovis, describatur circulus occurrens rectis A1D, A2D, A3D in H1, H2, H3, utcumque exiguus sit arcus H1H2, semper punctum A1 excurret ultra Parabolæ ramum, ut pariter utcumque exiguus sit arcus H2H3, excurret A3 ultra ipsum ramum. Quare si sumatur arcus H1H2 in quavis utcumque exigua ratione ad totam sui circuli peripheriam, in circulo, qui concipiatur descriptus radio DA superante chordam DP, adhuc minorem rationem habebit arcus interceptus cruribus ST, cum eam habere debeat arcus interceptus rectis P1A1, P3A3. Quare in circulo infinito ea ratio debebit esse prorsus nulla, ita, ut arcus interceptus ipsis cruribus nec habeat unum gradum illius circuli, nec unum minutum, nec unum secundum, & ita porro, sed haberi debeat respectu ipsius prorsus ut punctum quoddam, quod illi ideæ continuitatis crurum ST magis etiam favet, & videtur excludere saltum quemdam infinitum a crure S ad T in illo continuato motu puncti P peragrantis ramum omnem Parabolæ, qui quodammodo redeat in se ipsum.

742. Porro eadem continuatio, & nexus crurum, ac regressus curvæ in se ipsam ope infiniti habetur etiam in curvis reliquis, de quibus hic egimus, sive para-

bolici generis sint, sive hyperbolici. In primis in fig. 248, & 249, quodvis Parabolarum genus in orbem F248
redit hoc ordine, VPT (*infinitum*) SP2V, & in 249
fig. 250 VPT (*infinitum*) SpV. Id patebit, si con- 250
cipiatur recta indefinita transiens per P, & V. Si enim ea moveatur circa V, & discedens a positione MN convertatur, donec deveniat prius ad positionem QO, tum ad NM, punctum P percurret prius totum crus VT, ex quo motu continuo transibit ad crus SV, quod percurret, cruri T connexo quodammodo cum crure S in illa infinita distantia. In ramis pariter Hyperbolicis in fig. 254, 255, 256, semper habebitur conti- F254
nuatio crurum *t*, *s*, ac T, S in infinita distantia, & 255
ductus curvæ continuus habebitur per BT (*infinitum*) 256
SP2*s* (*infinitum*) *t*PB, ac in fig. 254 tam T, & S, quam *t*, & *s* conjunguntur in distantia infinita opposita, in fig. 255 T, & S conjunguntur in opposita *t*, & *s* in eadem, in fig. 256 contra T, & S in eadem *t*, & *s* in opposita.

743. Generaliter autem in figuris omnibus geometricis, sive quarum omnia puncta inveniri possunt quocumque modo ope simplicis Geometriæ, vel ope curvarum per simplicem Geometriam constructarum per puncta, si quod crus in infinitum abeat, semper habebitur crus alterum ex infinito regrediens vel ex eadem parte, vel ex contraria cum ipso in illa infinita distantia connexum quodammodo, quod omnino ad continuitatis legem ubique in Geometria servatam religiosissime est necessarium, ac ope calculi algebraici generaliter demonstrari potest, & ubi de applicatione Algebræ ad Geometriam agendum erit, omnino demonstrabitur. Quamobrem ejusmodi crura semper erunt numero paria. Idem autem, & sublimioribus curvis quibusdam contingit, quas transcendentes vocant, præter spirales quasdam, quæ ex altera parte in infinitum recedunt, ex altera circa punctum quoddam, vel orbem quendam infinitis spiris circumvolvuntur accedentes semper, quin unquam in ipsum recidant, de quibus

bus agemus alibi. Crura autem hujusmodi, vel parabolici erunt generis, vel hyperbolici. Primi generis crura nullam habent rectilineam asymptotum, ad quam accedant ultra quoscumque limites, sed ultra quoscumque limites a quavis recta data recedunt. Secundi generis crura habent rectilineam asymptotum omnia, ad quam ultra quoscumque limites accedunt. Illa semper recedunt a se invicem in infinitum; & in distantia infinita copulantur: hæc quandoque a se invicem recedunt, in infinitum quandoque vero accedunt; at in primo casu semper recedunt ad plagas prorsus oppositas ita, ut adhuc asymptotum eandem habeat semper utrumque crus, quod ubi in infinitum discesserit ex parte altera ejus asymptoti poterit regredi vel ex eadem parte, vel ex opposita, ac vel ita, ut bina crura jaceant respectu ejusdem asymptoti ad easdem plagas, vel ita, ut jaceant ad oppositas. Crus Pt recedit in infinitum ad partes O asymptoti OQ in fig.
F254 254, 255, 256, 268, regreditu, autem in prima ex par-
255 te opposita Q; & ad plagam oppositam VM, respe-
266 ctu asymptoti ipsius; in secunda ex eadem parte O;
268 sed pariter ad plagam oppositam VM, in tertia ex parte opposita Q, sed ad eandem plagam VN, in quarta ex eadem parte O, & ad plagam eandem VN.

744. Sic autem etiam in arcubus, qui ad punctum quoddam terminantur, idem accidit, ut ducta ibidem tangente, & recta ipsi tangenti inclinata utcumque; quæ nimirum recta producta cum ea ipsa tangente pariter producta continet 4 angulos; arcus curvæ ipsius continuari debeat, sed jacere possit in quovis ex illis
F248 quatuor angulis, sive regrediens, sive progrediens. Ar-
249 cus VS, qui est continuatio arcus TV jacet in fig.
250 248, & 253, in angulo OVM, jacente ad latus re-
251 spectu anguli OVN, in quo jacet TV; in fig. 249,
252 & 252 in angulo MVQ, ad verticem opposito: in
243 fig. 250, & 251 in angulo NV jacente ad latus al-
267 terum: at in fig. 267, tam arcus TO, quam OS jacent in eodem angulo VOA: Quotiescumque autem

con-

continuatio habetur in angulo ad verticem opposito, ut in secundo ex hisce quatuor casibus, habetur mutatio flexus in ipso nexu binorum arcuum, recta, quæ arcum utrumque tangit, ibidem ipsum secante, ut in fig. 249, & 252. Quotiescumque habetur continuatio in eodem angulo, ut in fig. 267, habetur cuspis secundi generis duorum arcuum, quorum alter convexitatem obvertit alterius cavitati. In reliquis binis casibus habetur vel continuatio quædam curvaturæ in eandem plagam, ut in fig. 248, & 251, vel cuspis primi generis duorum arcuum sibi obvertentium convexitates, ut in fig. 250, & 253, prout arcus continuatus jacet ad eandem tangentis partem, vel ad oppositam, in quo postremo casu cuspidis primi generis tangens curvam pariter in ipso contactu secat. Cuspis autem primi generis figuræ 250, & 253 habens tangentem insertam inter binos arcus respondet cruribus hyperbolicis figuræ 255 habentibus asymptotum mediam VO, in quam tangens desinit, ubi punctum contactus ita in infinitum recedit, ut nusquam jam sit, & cuspis fig. 267, TOS secundi generis jacens utroque arcu ad eandem tangentis partem cruribus T*t*, S*s* fig. 268 jacentibus pariter ad eandem partem asymptoti, quæ cuspis in hæc ipsa crura desinit, ut patet ex ipsa constructione, si manentibus punctis V, A punctum O ita in infinitum discedat, ut nusquam jam sit, quo casu a cuspide primi generis DOD' figuræ 267 generantur crura asymptotica DBD' figuræ 268, & a cuspide TOS illius crura T*t*, S*s* hujus.

745. Porro in his ipsis cuspidibus, & in illo flexu contrario continuitatis legem observare liceret pariter, sed connexam sæpe cum illo transitu per infinitum, vel cum consideratione rectæ, tanquam in infinitis oppositis distantiis continuatæ, & redeuntis in se ipsam, ac transitum e positivo in negativum, tam per nihilum, quam per infinitum. Curvaturam enim, ut diximus num. 722 metitur radius circuli curvam osculantis in quovis puncto, cui ea censetur reciproce proportionalis. Porro centrum circuli osculatoris semper jacet ex parte cava

in recta perpendiculari tangenti, quod idcirco in flexu contrario figuræ 352, vel in cuspide primi generis habente tangentem arcubus intermediam in figura 253 debet in V transire e plaga VN, ad plagam oppositam VM, quod fieri omnino non potest, nisi transeat, vel per ipsum punctum V, vel per infinitum, transeunte radio osculi, vel per nihilum, vel per infinitum, ac proinde curvatura, vel per infinitum, vel per nihilum. Et quidem ubi de circulorum osculatorum generali determinatione agemus, videbimus in curvis quibuscumque eam legem sanctè servari semper, ut nulla cuspis primi generis, nullus contrarius flexus habeatur, nisi in eo puncto, in quo radius osculatoris circuli vel per nihilum transit, vel per infinitum; tum vero curvatura, & radii circulus migrant e positivis in negativa, licet aliquando etiam radius osculi, & curvatura, vel ad nihilum deveniant, vel ad infinitum, sed inde regrediantur, quo casu oritur, vel arcus porro pergens, ac iter suum producens, ut TVS in fig. 248, vel cuspis secundi generis, ut TOS in fig. 267, qui quidem arcus, & quæ cuspis haberi itidem possunt radio osculatoris circuli ad certam magnitudinem deveniente, nec ad nihilum, nec ad infinitum delato.

746. Præterea si consideretur directio motus puncti P percurrentis arcum TVS, & concipiatur tangens eadem directione, facile apparebit, tam in fig. 248, 251 arcus pergentis, quam in 249, 252 arcus mutantis flexum, sine directionis mutatione continuari motum per PVP2, vel PVp, at in cuspide tam primi generis in fig. 250, 253, quam secundi in fig. 267 motum retro refracti; ac proinde tangentis directio in illis manet, in his mutatur, & in eis ipsa tanges abit e positiva in negativam. Sed mutatio ubicumque fit, fieri semper debet in aliam directionem prorsus oppositam, tanquam si plagæ M, & N in fig. 250, vel Q, O in fig. 253 infinities a se invicem distantes in illa ipsa infinita distantia connecterentur inter se, & continuarentur, quorum analoga sunt ea, quæ in hyperbolicis cruribus no-

notari possunt, ut ubi de curvis agemus generaliter, vel ope solius Geometriæ, vel ope calculi, fusius exponemus, ac demonstrabimus. Hic autem ea innuimus, ut innotescat hujus nexus, & continuationis usus in universa Geometria latissime patens.

747. Porro crura hujusmodi in infinitum protensa in singulis Geometricis Locis jam bina sunt tantummodo, jam quatuor, jam etiam plura ita, ut quivis eorum numerus par haberi possit. Bina tantum parabolica habentur in Parabola conica, & in omnibus sublimioribus Parabolis fig. 248, 249, 250, 251, 252, 253: quin immo bina quodammodo sunt etiam in recta linea hinc, & inde in infinitum protensa. Bina tantum hyperbolica habentur in fig. 266, cujus perimeter in se redit per MO'S (*infinitum*) TOM. Quatuor habentur hyperbolica in Hyperbola conica, & in Hyperbolis omnibus figurarum 254, 255, 256, & quatuor haberentur etiam in fig. 266, si punctum C esset propius rectæ AB ita, ut tangens QCE alicubi occurreret rectæ AB ad partes B; quæ quidem curva in orbem rediret sine crure infinito; si punctum C jaceret remotius, & tangens quoque CQ occurreret rectæ BA ad partes A, ut facile patebit curvas pro ejusmodi casibus construenti, & contemplanti earum originem, ac naturam. Plura autem, & quocumque numero habentur crura in aliis curvis quamplurimis, quarum constructiones occurrent, ubi generaliter agemus de curvis lineis.

F. 254
255
256
266

748. Interea antequam eas, quas hic determinavimus, curvas relinquamus; notabimus rationem quandam determinandi tangentes, quas turbant nonnihil cuspides utriusque generis, quæ possent aliquando non satis cautis imponere. Solent enim quandoque determinari tangentes curvarum hoc pacto. In fig. 266 recta CG secans arcum quendam IKR in L, & L' ita moveatur, ut demum intersectiones L, L' coeant in K: evanescente chorda LL', abibit ipsa secans in tangentem, & binæ intersectiones in contactum. Hæc methodus fallere potest aliquando; cum fieri possit, ut bi-

næ interſectiones coeant, quin habeatur contactus, & habeatur contactus, quin binæ interſectiones coeant. Primum accidet, quotieſcumque habebitur cuſpis utriuslibet generis, ſecundum quotieſcumque curva a tangente ſimul ſecatur, ut in mutationes flexus, & in cuſpide primi generis. Rectæ curvam tangentis vera notio eſt ea, ut ſit recta, quæ ad ipſum arcum omnium maximè accedit ita, ut cum eo contineat angulum quovis rectilineo minorem, ſive ita, ut nulla alia recta duci poſſit e puncto contactus in eo angulo, quem
F.267 arcus ipſe continet cum tangente. Porro ſi in fig. 267 recta EL' moveatur motu parallelo, docet abeat in eOl, vel circa punctum L, donec abeat in LOR, interſectiones I, I', vel P, P' coibunt in O, nec tamen utralibet ex iis rectis evadet tangens utriuslibet
F.252 cuſpidis. Contra vero in fig. 252, 253, recta paralle-
253 la rectę BA quamvis occurrens curvæ in unico puncto
251 P motu continuo delata abibit in tangentem OVQ, quin habeatur concurſus binarum tangentium. At extra ejuſmodi caſus, quotieſcumque nimirum, ut in fig. 251, bini arcus TV, VS continuati jacent in binis angulis, quos tangens cum alia recta per contactum ducta continet ad eandem plagam, ſemper rite procedet methodus, quod demonſtrabimus, ubi de curvis lineis agemus in genere, ut & illud, hunc caſum generaliter occurrere in curvis quibuſcumque: nam curvæ ipſæ in punctis tantummodo determinatis poſſunt habere vel flexum contrarium, vel cuſpidem primi, aut ſecundi generis, ſive continuationem arcus in aliquo e reliquis tribus angulis tangentis cum normali, non vero in omnibus punctis cujuſpiam arcus continui, utcumque parvi, quod ipſum ibidem demonſtrabitur de circulo oſculatore, qui itidem generaliter habebitur in quavis curva, nec niſi punctis quibuſdam determinati tantummodo deeſſe poterit.

749. Hic interea monendum illud, quoniam ea determinatione tangentis pro Sectionibus Conicis uſi ſumus

imus num. 151, considerando in fig. 46, & sequentibus concursum punctorum P, p in I; idcirco deinde num. 293 ostensum esse, tangentem eo pacto determinatam F. 46 accedere ita ad arcum curvæ, ut in eo angulo nulla alia duci possit. Nam conferenti conditionem, quæ habetur in utroque casu, quod rectæ ductæ a concursu tangentis cum directrice, & a contactu ad focum contineant ibi angulum rectum juxta num. 175, patebit utramque determinationem eodem recidere. Quin immo cum inde constet generaliter, eo pacto definiri posse in Sectionibus Conicis tangentem, patet simul in iis, nusquam haberi cuspidem, aut flexum contrarium.

750. Eodem autem vitio, ac in iisdem casibus laborare, patet etiam; methodum, qua tangens determinatur demonstrando arcum utrimque a quodam puncto jacere ad eandem partem cujusdam rectæ, ac deducendo inde, eam rectam esse tangentem, & illud punctum esse punctum contactus. Id accidit in fig. 267 in rectis F. 267 omnibus per O ductis, licet unica OV sit tangens cuspidis secundi generis, & unica OA cuspidis primi, 252 quin immo in hac accidit omnibus rectis præter ipsam solam tangentem OA. In ipsa vero tangente id nec accidit hic in cuspide primi generis, nec in fig. 252 in flexu contrario; cum utrobique bini arcus hinc, & inde jaceant ad partes tangentis oppositas. At eo vitio non laborat methodus, qua recta occurrens curvæ in binis punctis, convertatur circa alterum ex iis immotum donec chorda evanescente, eodem recidat & alterum. Sic si in fig. 252 per V, & P agatur recta convertaturque, donec recidat P in V; recta ipsa abibit in tangentem OQ necessario omnium rectarum proximam ita, ut in eodem angulo nulla alia recta duci possit; nam si nova recta utcumque parum declinet a prima, jam erit una ex iis, quæ habebat alteram intersectionem, & arcum binis intersectionibus interjacentem interceptum angulo tangentis cum chorda. Idem autem accideret etiam in fig. 267, in qua si per O, & I, vel P ageretur recta, ac circa punctum O converteretur, donec

abirent ea puncta in O, desineret eadem recta in tangentem OA, OV. Verum hæc ipsa in tractatu de curvis lineis in genere pluribus persequemur, & accuratius omnia demonstrabimus.

751. Interea videbimus hic aliam quandam relationem, quam habet recta linea infinita, cum infinito circulo, quæ nobis usui futura est infra, & ad plures tum analogias, tum anomalias detegendas conducet.
F.271 Sit in fig. 271 recta infinita MN, eique perpendicularis OQ, quæ ipsam secet in R. In hac sit centrum circuli P occurrentis ipsi in binis punctis I, I', jacente I' ad partes centri, & rectæ MN in binis A, C. Patet & chordam AC perpendicularem diametro secari in R bifariam ab eadem, & binos arcus AIC, AI'C itidem bifariam in I, & I'. Recedente centro P in infinitum ita, ut semper circulus transeat per eadem illa puncta A, & C, patet juxta num. 727, arcum AIC debere abire in rectam lineam, adeoque debere congruere, cum ipsa recta AC, abeunte I in R. Reliquus arcus AI', CI' partim abibit in rectas AM, CN in infinitum productas, partim ita in infinitum recedet cum ipso puncto I, ut nusquam jam sit. Quamobrem sicut in ipso circulo bini habentur arcus AC, nimirum AIC, AI'C terminati binis punctis AC, qui arcus secantur bifariam in I, & I', ita habebuntur binæ rectæ AC, nimirum ARC, AM (*infinitum*) NC, sive assumpto pro carateristica infiniti signo ∞, quo semper utemur in posterum, AM ∞ NC, quorum prima secabitur bifariam in R, secunda in ∞ ita, ut prioris dimidia sint AR, RC, posterioris A ∞,
F.89 ∞ C. Quin immo; quoniam, ut in fig. 89 vidimus num. 278, arcus F*m* sunt numero infiniti tam directione FB*m*, quam directione FA*m*, qui nimirum his arcubus integras quotcumque peripherias addant; etiam hic infiniti numero erunt arcus incipientes ab A, & desinentes in C, nimirum AIC, AICI'AIC, AICI'AICI'AIC, & contra AI'C, AI'CIAI'C, AI'CIAI'CIAI'C, & ita porro, ac infinitæ numero

rectæ

rectæ ARC, ARCN ∞ MARC, ARCN ∞ MARCN ∞ MARC, & contra AM ∞ NC, AM ∞ NCRAM ∞ NC, AM ∞ NCRAM ∞ NCRAM ∞ NC, & ita porro.

752. Jam vero omissis reliquis magis compositis, ipsa recta finita ARC, & illa per infinitum traducta AM ∞ NC eam inter se analogiam habent, quam in eo circulo arcus AIC, AI'C: ut ii nimirum arcus communes habent proprietates, si alteri positivè sumpto substituatur alter sumptus negativè, ita etiam in recta illa MN utrinque infinita segmentum ejus finitum AC negative respondeat segmento AM ∞ NC per infinitum traducto, & viceversa hoc negative sumptum illi sumpto positive.

753. Hinc autem in fig. 265, ubi imminuta CM, F265
augetur CP, donec puncto M abeunte in C, abeat P in infinitum ita, ut nusquam jam sit, ac puncto ipso M abeunte in M' ad partes oppositas, abit etiam P ad partes oppositas in P', considerari possunt binæ CP', altera directione CB, quæ directio si assumatur pro positiva, adeoque opposita CA pro negativa, eadem erit adhuc positiva, & altera directione CA jam negativa. Illa nimirum erit COB ∞ AP', hæc CNP'. Hoc modo si res consideretur post eandem CM', & CO, vel CM habebuntur quodammodo binæ tertiæ continue proportionales, altera negativa CNP', altera adhuc positiva COB ∞ AP'. Nimirum cum juxta num. 719 sit CP positiva tertia post CM positivam, & CO; ut imminuta ipsa CM ultra quoscumque limites, augetur ultra quoscumque limites CP, & illa evanescente, sive abeunte in nihilum, hæc abit in infinitum, ita facta CM' jam negativa, quæ quodammodo concipitur decrevisse infra nihilum, ipsi videtur quodammodo debere respondere ex eadem parte quantitas plusquam infinita, & cum respondeat COPB ∞ AP', videtur hæc dicenda esse quodammodo & positiva, & plusquam infinita. Sed id quidem ad mysterium quoddam infiniti pertinet, & ad analogia

quasdam conducit, at in Geometria communi ipsi CM negativæ negativa itidem illa finita CMP respondet sine ullo mysterio, & ita, ut in iis, quæ inde deducantur, perspicua ubique evidentia habeatur, ac maxime manifesta.

F. 271 754. Consideratio tamen binarum AC in figura 271
9 nimirum ARC, & AM ∞ NC, usum etiam in Se-
11 ctionibus Conicis contemplandis paullo inferius habe-
269 bit præstantissimum, ubi axi Ellipseos MCm finito in fig. 9 ostendemus prorsus, & directe analogum, non axem finitum Hyperbolæ Mm in fig. 11; sed axem MH ∞ hm traductum per infinitum. Pariter in fig. 269, ubi recta A1B1 per A2B2 abit in A3B3; concipitur DP1 per infinitum abire in DP3 negativam. Abit illa, si analogia spectetur directa, & ab infiniti mysteriis petita, in DA3 ∞ BP3 adhuc positivam, & per infinitum traductam, & proprietates prioris quecumque a directione pendent, cum hujus directione conspirant. Sed considerari solet pro ipsa illa altera DP finita, ac negativa, quæ huic contranaloga est, si hac voce uti licet, & est ejus complementum ad quendam veluti infinitum circulum, qua idea nobis infra opus erit ad ostendendum illud etiam, posse rationem reddi, cur in negativis quantitatibus subtractio additioni substituenda sit etiam, ubi obvenerint ex transitu puncti per infinitum, licet quantitati, quę habebatur ante discessum in infinitum, sit prorsus, & directe analoga non hæc quantitas negativa, sed positiva illa per infinitum traducta, quæ juxta illam superiorem ideam plusquam infinita diceretur.

755. Quoniam autem huc usque tam multa vidimus quæ pertinent ad transitum quantitatum e positivis in negativas, vel regressum inde, libet hic adnectere aliam quandam analogiam, quam habet cum hoc ipso transitu quantitatum e positivis in negativas, vel regressu transitus, qui fit e statu reali, ad statum imaginarium, qui impossibilitatem secum fert juxta num. 684. Transitus e positivo in negativum nunquam fieri potest per fal-

saltum quendam, ubi adhuc decrementum haberi possit, vel incrementum ex eadem plaga; sed gradatim, ut nimirum transitus ipse fiat vel per nihilum, vel per infinitum. In primo casu limites magnitudinis, ut ubi de lineis agitur; extrema puncta ad se invicem accedunt, & coeunt, in secundo a se invicem recedunt in infinitum. Eodem pacto realis quantitas nunquam in imaginariam abibit per saltum, sed semper gradatim, nec unquam is transitus fiet, nisi ubi ea devenerit vel ad nihilum, vel ad infinitum. Ad hosce veluti scopulos allisa aliquando retro reflectitur adhuc realis, & per eosdem gradus decrescit; aliquando contrariam directionem acquirit per ipsum nihilum; vel infinitum traducta, aliquando vero in imaginariam quoque migrat, sive impossibilem. Regressus, ac transitus exempla dedimus jam plurima; hujus migrationis in statum imaginarium exempla plurima se ubique prodent. En aliqua rei illustrandæ apta.

756. Dum in fig. 242 recta EF motu continuo delata versus E2F2 appellit ad A, bina puncta G, G ita F.243
in se invicem incurrunt, & quodammodo veluti colliduntur, ut se destruant, & motu ejus rectæ pergen- 256
te, jam nusquam sint, e reali statu in imaginarium translata, quæ migratio a migratione in infinitum plurimum differt. Migratio enim in infinitum determinationem quandam problemati addit, ut ibi Ellipseos vertex in infinitum recedens Ellipsim ipsam mutat in Parabolam, ac abducto secum in infinitum altero foco, & centro, mutat in parallelos juxta n. 202 radios illos, qui ex altero foco egressi, convergebant in Ellipsi post reflexionem ad focum alterum, ac parallelas itidem reddit diametros omnes quæ in Ellipsi convergebant ad centrum, vel ubi circuli centrum recedens in infinitum ejus peripheriam mutat in rectam lineam. At abitus in imaginarietatem secum trahit impossibilitatem absolutam problematis, quod ejus ope solvebatur ita, ut idem sit in quavis resolutione devenire ad latus quadrati negativi, ac problematis in eo casu impossibilitatem evincere, quod &

Geo-

Geometris, & Algebristis solemne est. Linea igitur GG in eo casu evadit imaginaria posteaquam per omnes finitarum magnitudinum gradus decrevit usque ad nihilum, at in fig. 256 ordinata Pp, puncto R abeunte per V in R2, evadit quidem imaginaria, sed posteaquam per omnes contra magnitudinum finitarum gradus crevit in infinitum; atque idem accideret in fig. 268. ordinatæ RpP, si punctum R continuaret cursum ultra V versus M. Abiret ordinata etiam in eo casu in infinitum, & deinde imaginaria evaderet.

757. Illud autem discriminis intercedit inter casum quo linea post discessum in infinitum abit in imaginariam, & casum, quo realis remanet, ac transilit, vel regreditur, quod in hoc secundo casu potest haberi progressus, vel regressus etiam, ubi unicum pun-
F.242 ctum abit in infinitum, ut ubi in fig. 254 ordinata
254 RP abit in contrariam R2P2, vel in fig. 255 regre-
255 ditur per R2P2, in quibus abit quidem in infinitum
256 P, sed remanet R; at in primo illo casu nunquam
267 habebitur imaginarietas ipsa, nisi utrumque rectæ ex-
268 tremum abeat in infinitum sive ad partes oppositas, ut in fig. 256, sive ad easdem, ut in fig. 268, adeoque nisi in illo ipso infinito collisio quædam habeatur, ac veluti pugna inter bina puncta sibi invicem occurrentia ibidem, & se mutuo quodammodo elidentia. Hic autem ipse velut interitus quantitatis (si hanc etiam cum vero aliarum rerum interitu analogiam quandam persequi libeat) nec habebitur sane, nisi illa ipsa puncta velocitatem, qua in se mutuo irruunt, infinities majorem habeant ibi, quam alibi, ut facile demonstratur contingere punctis G, G fig. 242, P, p fig. 268, & vero etiam P, p fig. 256, ubi puncta P, p ex parte finita a se invicem recedentia ultra quoscumque limites, ex parte infinita ad se invicem accedunt pariter ultra quoscumque limites, & sibi invicem occurrunt quodammodo, & colliduntur: vel infinities minorem, quam alibi, velocitatem habeant respectivam, quod accideret utri-

que

que in cuspidibus omnibus, quæ tamen multo pauciores sunt juxta num. 748; nam rectæ PP', & II' in fig. 267 paulo antequam evanescant, differentias habent in infinitum minores, quam alibi, ut facile demonstrari posset, & post imminutam in infinitum velocitatem respectivi motus extremorum punctorum, abeunte EL' ultra *el*, imaginariæ fiunt: ut adeo videatur etiam in Geometria hic interitus haberi posse tantummodo vel e nimio quodam quasi furore, ac effervescentia, ut teli cujusdam ictu haberi solet, ac febri, vel e languore quodam, ut habetur in senibus quandoque decrepitis ætate ipsa, & virium imbecillitate, quanquam id ipsum pariter perquam raro contingat.

758. Porro migrationis e statu reali in imaginarium per nihilum satis etiam elegans exemplum habetur in ipsis Coni Sectionibus, quas a num. 553 persecuti sumus. Assumpto in latere VA figuræ 208 quovis puncto M ad arbitrium, si concipiatur recta MI congruens initio cum MV versus positionem MA circumvoluta per punctum M, e recta linea MV, in qua planum ipsi OVS parallelum eo casu contingit conum, enascitur juxta num. 585 Ellipsis principio arctissima, quæ perpetuo pinguescit in cono recto, donec facto plano ipso parallelo basi sectio evadat circulus, puncto T abeunte in infinitum ita, ut nusquam jam sit, sed in infinito ipso delitescat. Pergente motu, oblongatur perpetuo Sectionis forma, & abit per omnes gradus finitarum rationum axis conjugati ad transversum, quas acquirit in fig. 209 iterum a circulari forma recedens, ac punctum T traductum per infinitum jam regreditur ex parte opposita, quo abeunte demum in B, abit Sectionis figura in Parabolam figuræ 210, in qua vertex ille *m* jam infinito obrutus latet, & nusquam est. Procedente ulterius T versus A, jam habetur in figura 211 duplex ramus Hyperbolæ cum vertice *m* regresso ex infinito ex parte opposita, ac Hyperbolæ ipsius forma mutatur itidem perpetuo, donec ipso

F. 208 209 210 211

so puncto T, & cum eo etiam I abeuntibus simul in A, abeant ipsi Hyperbolæ rami in binas rectas MA, Va' infinitas. Perit hic Sectionis Conicæ area; & ad nihilum devenit, posteaquam e nihilo enata fuerat ab illa recta MV fig. 208, quæ respondet huic ipsi MV fig. 211: & is interitus habetur quodam veluti incursu perimetri irruentis in se, & in axem transversum hinc, & inde ab axe ipso. Si motus plani qui eo casu contingit conum, pergat ulterius in eandem plagam; jam punctum T abibit ultra A extra conum, & puncto m subeunte rectam VB, id planum iterum secabit ipsum conum, ac iterum nascetur nova Ellipsis, & nova Sectionum Conicarum series priori prorsus simillima. Sed hæc non continuatur cum illa priore; nec Hyperbolæ illæ postremæ in primas hasce Ellipses mutantur: illæ enim desinunt in rectam MA ∞ am traductam per infinitum, hæ nascuntur a recta finita MV; quæ illi traductæ per infinitum quodammodo non analoga est, sed quodammodo velut antianaloga, nimirum ejus negativa, & ad eam relata, ut illi bini ejusdem circuli arcus binis datis punctis interjecti, & contraria directione considerati AIC, AIC in fig. 271 sibi invicem analogi sunt. Prima illa igitur series exortum habet in recta finita, interitum in recta per infinitum traducta illius ejusdem finitæ rectæ complemento ad infinitum circulum, ac illi alia succedit itidem ortum, & interitum habens ita, ut in singulis conversionibus integris, binæ ejusmodi series oriantur, & occidant, quarum quælibet ante ortum, vel post occasum in imaginario statu sit.

F. 271

759. Porro in hujusmodi transformationibus Sectionum Conicarum aliarum in alias habentur punctorum multiplices & transitus per nihilum, ac per infinitum, & regressus inde: ipsi autem appulsus ad infinitum, vel nihilum sæpe puncta retinent in statu reali, vel alicubi conspicua, vel infinito obruta, ibique velut delitescentia, quandoque etiam ad imaginarietatem

detur-

deturbant, adeoque linearum, quæ ipsis terminantur; habetur jam perseverantia in eadem directione, jam directionis mutatio, jam impossibilitas, & sæpe annihilatio, ac evanescentia, sæpe productio in infinitum, sæpe etiam circuitus quidam per infinitum, & quædam veluti plusquam infinita extensio. Hinc hæc ipsa Conicarum Sectionum transformatio aptissima est, ad declarandos, confirmandosque quosdam canones, qui per universam late Geometricam observantur, & eorum exempla ex demonstratis harum curvarum elementis depromenda. Ex ipsis autem canonibus, eorumque applicatione ad hæc ipsa Conicarum Sectionum Elementa patebit etiam, quæ hisce curvis communia sint, & communem demonstrationem suscipiant, quæ ab altera ad alteram transferri non possint, & ipsa ejus anomaliæ ratio se prodet, ac nostrum in hisce elementis adornandis consilium palam fiet. Ejusmodi vero canones ex iis, quæ huc usque vidimus pendent omnes, & sunt eorum quidam veluti fructus. Proponemus autem singulos, ac eorum rationem proferemus, exempla dabimus, & applicationem ad Conicas Sectiones. Occurrent autem identidem quædam etiam infiniti mysteria, quæ eo usque excrescent, ut infiniti extensi impossibilitatem demum suadeant, ac ad indefinitorum, sive indefinite parva sint, sive indefinite magna, theoriam, quam alio opere pertractabimus, nos deducent.

760. In primis *Analoga* dicemus puncta, quæ eodem modo determinantur in utroque ejusdem geometricæ constructionis statu, ante nimirum transformationem, & post, quæ nempe determinantur per concursum eorundem Locorum Geometricorum; rectarum cum aliis rectis, cum circulo, cum Sectionis Conicæ perimetro, cum lineis per ejusmodi concursus definitis eadem lege. Sic analoga sunt in fig. 239 tam puncta M1, F239
M2, M3, quam O1, O2, O3, & N1, N2, N3, eodem modo definita per concursum rectarum inter se: analogi sunt tam vertices M, quam *m* in fig. 9, 10,

11 axium

F.239 axium transversorum Ellipseos, Parabolæ, Hyperbo-
9 læ, qui ubique eadem lege determinantur per ratio-
10 nem constantem ex foco F assumpto, & recta dire-
11 ctrice AB. *Analogas* autem dicemus lineas binis analogis punctis terminatas, superficies terminatas lineis analogis, solida terminata analogis superficiebus. Sic in fig. 239 analogæ sunt rectæ M1O1, M2O2, M3O3, & in fig. 9, 10, 11 foci radii FM inter se, chordæ per focum ductæ VFu inter se; ac alia ejusmodi.

761. Deinde bina hujus analogiæ genera distinguimus: alterum *Primarium*, & summum, cum post transformationem manet directio quantitatis definitæ, vel mutatur numero mutationum pari; alterum *Secundarium*, cum directio quantitatis mutatur semel; vel numero mutationum impari, quæ posset etiam *Antianalogia* dici. Primario analogiæ genere analogæ sunt in fig. 239 omnes rectæ MO inter se, rectæ M1N1; & M2N2 inter se; ac N1O1, & N3O3 inter se; pariter in fig. 9, 10, 11 radii foci FM inter se, chordæ VFu ductæ per focum inter se, quæ directionem servant. Hoc itidem genere primario analogiæ analoga sunt quadrata rectarum directionem mutantium, quæ eam juxta num. 684 bis mutant. Et vero etiam primario analogiæ genere analogus est axis transversus Ellipseos finitus Mm cum axe Hyperbolæ M ∞ *m* per infinitum traducto, qua expressione exprimimus lineas, quæ a quibusdam punctis ut M, & *m* tendentes ad partes oppositas ipsis, ut hic versus H, & *h*, concipiantur conjunctæ quodammodo, & connexæ in ipso infinito, juxta ea, quæ jam toties vidimus. Secundario analogiæ genere analogæ sunt in fig. 239 rectæ N1O1, N2O2, ac M1N1, M3N3; in fig. 9, & 11 foci radii Fm inter se, axes finiti Mm inter se, & alia ejusmodi, quæ directionem habent contrariam post transformationem, ut etiam solida sub tribus lineis quibuscumque directionem mutantibus. Porro diversa axium Ellipseos, & Hyperbolæ analogia, ac permutatio axis finiti cum axe per infinitum

tradu-

traducto ita, ut axi Ellipseos finito MC*m* directe respondeat Hyperbolæ axis, non finitus MC*m*, sed M ∞′ *m* per infinitum traductus, & viceversa, patent ex eo, quod dum ratio determinans perpetuo crescit, vel coni sectio perpetuo inclinatur post parallelismum cum base, & Ellipsis accedit ad Parabolam, axis MC*m* perpetuo oblongatur, & vertex *m* post transitum per parabolam ita regreditur ex parte opposita, ut perimeter curvæ retro non redeat in orbem ab M ad *m*, sed versus eandem plagam in infinitum abeat & superato veluti infinito, eadem directione pergat regrediens ex parte opposita. Hinc nimirum per quodvis punctum R finiti axis MC*m* figuræ 9, & axis M ∞ *m* per infinitum traducti figuræ 11 ducta recta axi perpendicularis occurrit perimetro in binis punctis P, *p* juxta num. 36; contra rectæ, quæ transeunt per puncta R axis M ∞ *m* Ellipseos, & MC*m* Hyperbolæ nusquam occurrunt perimetro: usque adeo axi MC*m* illius respondet directe axis M ∞ *m* hujus, & viceversa.

762. Etiam in punctis, si ea determinentur a binis rectis tendentibus ad eandem plagam, dicemus ipsa analoga primo analogiæ genere; si ad oppositas, F. 35
secundario. Puncta P definita (num. 130) in fig. 35, 36
& 36 a rectis FQ, VG tendentibus utrobique in eandem 19
plagam sunt analoga primario analogię genere, 20
puncta *p* secundario, cum ipsum *p* in fig. 35 definiatur a rectis QF, *g*V coeuntibus ad partes FV respectu G*g*, & in fig. 36 ad partes oppositas. Pariter in fig. 19, & 20 sunt analoga secundario analogiæ genere puncta *m*, saltem si ipsum *m* in Hyperbola in fig. 20 concipiatur, ut vertex axis finiti M*m*; si enim concipiatur, ut vertex axis M ∞ *m* per infinitum traducti, poterit concipi, ut primario analogiæ genere analogum ipsi *m* figuræ 19. Centrum quoque C Ellipseos in fig. 19, cum centro C Hyperbolæ in fig. 20 erunt analoga secundario analogiæ genere, cum inveniantur in medio itinere ab M ad *m* versus partes opposi-

oppositas. At axis Hyperbolæ per infinitum traductus habebit in ipso infinito aliud centrum ∞, quæ est infiniti nota, ut & axis Ellipseos M ∞ *m* aliud centrum ∞ juxta num. 254, eritque analogum primo analogiæ genere centrum finitum Ellipseos C, quod ejus axem finitum MC*m* secat bifariam, cum centro Hyperbolæ infinito ∞, quod secat bifariam ejus axem M ∞ *m* traductum per infinitum, & centrum ∞ Ellipseos cum centro Hyperbolæ C. Ejus permutationis centrorum discrimen manifesto se prodit ipsam Ellipseos, ac Hyperbolæ formam consideranti. Ellipsis obvertit cavitatem centro C, convexitatem centro ∞ utrinque, & secatur a recta per C ducta perpendiculari axi in binas æquales, ac similes Semiellipses spectantes hiantibus veluti buccis plagas MFC, *mf*C. Hyperbola obvertit convexitatem centro C, cavitatem centro ∞ utrinque, & in binos æquales, ac similes ramos quodammodo secatur in infinito, quo rami ipsi excurrunt, qui spectant itidem hiatu cavo easdem plagas, sed expressas per MF ∞, *mf* ∞. Ipse ordo punctorum rem prodit. Nam in Ellipsi incipiendo ab M proceditur in fig. 19 sic, MFC *fme* ∞ EM; in Hyperbola vero in fig. 20 sic: MF ∞ *fme* CEM, ubi C, & ∞ sedes permutant. Hinc nimirum in Ellipsi quævis recta per C ducta occurrit perimetro bis, nulla in Hyperbola ducta in iis asymptotorum angulis, quos secat axis conjugatus. Nulla in Ellipsi contingit perimetrum per C ducta: in Hyperbola habentur pro tangentibus asymptoti, in quas tangentes desinunt juxta num. 288, ubi contactus ita in infinitum abeant, ut nusquam jam sint. Hinc Hyperbola asymptotos habet, Ellipsis non habet; adeoque tam multis, & elegantissimis sane asymptotorum proprietatibus Ellipsis caret.

763. Expositis hisce nominum definitionibus, jam ad canones ipsos faciemus gradum, in quavis geometricarum constructionum transformatione adhibendos.

764. Canon I. *Si quantitates, a quibus solutio proplema-*

blematis pendet, vel enunciatio theorematis, maneant omnes post transformationem analogæ primo analogiæ genere, nec ullus habeatur transitus per infinitum; manebit eadem solutio, enunciatio, demonstratio, nulla re, nullo verbo mutato. Quod si aliquæ ex iis per infinitum traductæ, & in ipso infinito copulatæ, ac connexæ inter se concipiantur, extante utroque extremo; in iis, quæ a sola directione pendent, manebunt itidem omnia; in iis; quæ ad magnitudinem pertinent, censeri debet earum ratio eadem, quæ oritur ex ea lege, qua determinantur, prorsus analoga illi, quam haberent, si per infinitum non transissent.

765. Prima canonis pars omnino patet ex eo, quod omnes Geometricorum Locorum partes debeant easdem proprietates habere; & cum nullus fiat transitus per infinitum, vel per nihilum, nulla mutatio fit, quæ perturbet vulgarem geometricum sermonem, quantitatibus vel infinitis, aut per infinitum traductis usque ad finitum oppositum, vel negativis, & minuentibus summam. Et id quidem prorsus congruit cum n. 674 & 675. In fig. 239, quotiescumque punctum N fuerit inter C, & H, ut N1, constructio problematis propositi num. 676 inveniendi summam MN, NO æqualem rectæ datæ, enunciatio summæ inventæ demonstratio, eadem erit ubique, nec mutabitur nisi puncto N egresso ex illis limitibus aliquæ quantitates directionem mutent. F. 239

766. Idem videre licet etiam in nostris Sectionum Conicarum Elementis. Nos ea ita adornavimus, ut in iis, quæ ad ipsam curvarum naturam contemplandam, & proprietates deducendas pertinent, reducerentur omnia ad unicum problema geometricum, cujus generalis solutio, & applicatio ad casus particulares, vel per se ipsa, vel per ea, quæ inde sponte consequerentur, proprietates omnes harum curvarum elementares exhiberet. Vidimus nimirum ea fere omnia, quæ in earum elementis circumferri solent, contineri comparationibus rectarum, quæ ipsis occurrunt,

vel earum positione considerata, vel magnitudine, a qua pendent summæ, differentiæ, rationes ad se invicem, quadrata, rectangula, eorumque relationes tam variæ. Quamobrem selegimus ejusmodi definitionem, quæ omnibus hisce curvis generaliter conveniret, expressam ratione constanti, quam habet distantia puncti cujusvis perimetri a dato puncto, ad distantiam perpendicularem a data recta: tum investigavimus solutionem hujusmodi generalis problematis: *Datis foco, directrice, & ratione determinante, invenire concursum rectæ datæ cujusvis cum Sectione Conica*: Soluto generaliter hoc problemate, satis patebat, in ipsa solutione contineri debere fundamenta omnia omnium relationum, quas rectæ ejusmodi concursibus interceptæ habere possent ad se invicem, & cum ipsa perimetro Conicarum Sectionum: dummodo ex generalibus Locorum Geometricorum transformationibus rite ipsa generalis constructio ad casus singulares applicaretur.

767. Porro illud contigit, ut in ipsa illa generali construcione quædam rectarum intersectiones, a quibus punctorum quæsitorum determinatio pendebat, vel iis rectis evadentibus parallelis, ita in infinitum abierint, ut nusquam jam essent, vel iis rectis congruentibus, haberi non possent, frustrata generali ipsa solutione; quorum primum accidit in rectis directrici parallelis, secundum in rectis per focum transeuntibus. Quamobrem pro iis substituimus bina particularia problemata, ad quorum sulutiones quo pacto illa generalis solutio nos perduxerit, in sequentium canonum applicatione, ubi nimirum ad eas ejusmodi transformationes pertinuerint, ostendemus. Atque idcirco problema generale ad propositionem tertiam rejecimus, reliquis illis, quæ ipso generali non indigerent, præmissis in præcedentibus binis propositionibus, ubi etiam, quæcumque ad Conicarum Sectionum proprietates pertinentia se ultro offerrent, deduximus. Tum ex generali problemate multo uberiores fructus percepimus

pimus alia ex aliis theoremata deducendo, ipsa etiam; ubertate sane admirabili; fœcundissima quaquaversum.

768. Jam vero in singulis hisce; vel problematum solutionibus, vel theorematum enunciationibus; vel demonstrationibus utrorumque; patebit sane illud eadem consideranti; ubicumque nihil directionem mutat, nihil abit in infinitum, nec per infinitum traducitur, vim constructionis, & enunciationem ipsam, ac verba omnia prorsus eadem esse ubique; sive considerentur diversæ partes ejusdem perimetri ejusdem Sectionis Conicæ, sive conferatur perimeter unius Sectionis Conicæ cujuscumque cum perimetris aliarum quarumcumque vel magnitudine tantum, vel & magnitudine, & specie, & forma differentium. Ejusmodi exempla ubique occurrunt. Eadem est in fig. 9, 10, 11 determinatio puncti M, secta FE in M in ratione determinante, eadem puncti V, vel *u*; capta FV, vel F*u* ad FE in ipsa ratione determinante juxta num. 35. Eadem in fig. 35, & 36 determinatio cujusvis puncti P per totum arcum VM*u* in quavis Sectione Conica, capta juxta num. 130 QG ad partes oppositas FV æquali QF; per intersectionem rectarum VG, FQ; & eadem iisdem verbis demonstratio desumpta e similibus triangulis FPV, QPG; quæ ubique demonstrantur similia ob angulos ad verticem P æquales oppositos, & angulos ad basim FV, alternos angulorum ad basim QG; adeoque æquales. Pariter theoremata communia iisdem verbis efferentur. Chorda VF*u* in iisdem figuris erit ubique latus rectum principale juxta num. 54, ac eodem ubique modo accipietur. Chorda, quam circulus osculator intercipiet e diametro per punctum osculi transeunte, erit ubique juxta num. 503 æqualis lateri recto ejusdem diametri. In omnibus ejusmodi casibus satis erit puncta homologa designare litteris iisdem ubique, & eædem prorsus demonstrationes obvenient.

769. Secunda pars hujus Canonis; quæ est de lineis

per infinitum traductis, pertinet ad infiniti mysteria quædam, quæ ad analogiam quandam retinendam hic adhibemus, licet infra eo deveniendum sit nobis, ut ipsum infinitum habeamus potius pro impossibili. Idcirco adjecimus, *si aliquæ ex iis per infinitum traductæ .... concipiantur*. Nimirum si eas hoc pacto concipimus, debemus etiam in iis generales illas rationes admittere, quæ habentur in omnibus aliis analogis, eadem nimirum lege cum eadem directione definitis per constructiones easdem, ad quas analogas Geometria humanæ mentis extenditur. Nam si infinitum extensum est possibile, id quidem humanæ mentis vires omnino excedit, quæ in eo absurda quædam demum invenit, quæ cum recta ratione nullo modo conciliari posse videantur. Adjecimus autem illud, *extante utroque extremo*, ut distingueremus quantitates hasce per infinitum traductas, ac proinde quodammodo veluti plusquam infinitas, quarum nimirum extrema sunt alicubi, & possunt perspici, ab illis, quæ simpliciter in infinitum abeunt, altero saltem extremo nusquam jam existente.

770. Illud, quod in hac secunda hujusce Canonis parte pertinet ad directionem rectæ per infinitum traductæ, manifestum est in illa insigni Conicarum Sectionum proprietate, quæ earum focis nomen dedit, quam num. 202 exposuimus. Radii ex foco F egressi in Ellipsi in fig. 66 post reflexionem in punctis P, p debent abire per rectas finitas Pp, pf convergentes ad
F.66 punctum f ex parte finita. Ii in parabola in fig. 67,
67 abeunte foco f in infinitum ita, ut nusquam jam sit,
68 evadunt paralleli inter se, quod pertinet ad unum e sequentibus Canonibus. At in Hyperbola in fig. 68 abeunt per rectas P ∞ f, p ∞ f, quæ sunt analogæ primario genere analogiæ finitis Pf, pf Ellipseos, & quodammodo velut convergunt itidem ad ipsum f ex parte infiniti. Sed quoniam in vulgari geometrico sermone non adhibetur nota infiniti, nec rectæ considerantur in infinitum traductæ, apponenda fuit littera O,

quæ

quæ vices ipsius ∞ suppleret, & convergentiæ ex parte infiniti substituenda divergentia ex parte finiti. Atque eodem pacto si in fig. 68 possent lucis radii ex f egressi superato infinito deferri ad puncta P, p, ad quæ nimirum advenirent per rectas OP, op; colligerentur in F, ut in figura 66 radii fP, fp in ipso foco F colliguntur.

771. Ex hac hujus Canonis parte debent in fig. 20 in Hyperbola distantiæ focorum F ∞ f, verticum M ∞ m, directricum E ∞ e per infinitum traductæ haberi pro continuè proportionalibus inter se, & distantiæ F ∞, M ∞, E ∞, inter se in ratione determinante, ut in ratione determinante sunt in fig. 19 continue proportionales FCf, MCm, ECe, & EC, MC, EC juxta num. 90. Videtur hoc ingens quoddam infiniti mysterium. Debet enim concipi arcus illius circuli infiniti cui respondet F ∞ f major arcu illius, cui respondet M ∞ m, & hic arcu E ∞ e in illa ratione, quam habet in ipsa fig. FM ad ME, quæ a ratione æqualitatis potest distare utcumque, ut possit esse dupla, decupla, centupla, & ita porro. Quare fieri potest, ut ille arcus primus secundi, & hic tertii haberi debeat duplus, decuplus, centuplus. At id discrimen provenire non potest ab illis EM, em, vel MF, mf adjectis, quæ potius præstarent primum arcum minorem secundo, secundum tertio. Debet igitur concipi ille circulus primus in infinito ipso extensus longe ultra secundum, secundus longe ultra tertium ita, ut illud ∞ in aliis ejusmodi circulis in alia distantia infinita sit, pro conditione, & natura rectarum, quæ per infinitum traductæ concipiantur. In fig. 19 FCf est minor, quam MCm, & MCm minor, quam ECe. Oblongata Ellipsi, dum ratio determinans continuo crescit, crescit etiam ejusmodi ratio, quæ dum Ellipsis ad Parabolam appellit, evadente ratione determinante ratione æqualitatis, evadere & ipsa debet ratio æqualitatis, ut infra videbimus. Mutata Ellipsi in Hyperbolam in fig. 20, & traductis per infinitum

punctis e, m, f, abit ratio determinans in rationem majoris inæqualitatis, quæ perpetuo crescit, dum puncta ipsa accedunt ad E, M, F ex parte opposita. Quare debent concipi & illi veluti arcus F ∞ f, M ∞ m, E ∞ e in illis immensis, & nostræ menti inperviis quibusdam infiniti ipsius veluti campis extensi per tractus diversos respondentes rationi illi, abeunte duplo, decuplo, centuplo longius illo ∞ pertinente ad Ff quam abeat illud, quod pertinet ad Mm, & hoc totidem spatiis longius, quam id, quod pertinet ad Fe. Hoc infiniti mysterium usui nobis erit infra, & ubi etiam binæ rectæ in infinitum recedunt, limite saltem altero relicto in ipso infinito, patebit infra, debere pariter concipi alteram altera longiorem in ratione quacumque. Quin etiam fieri posset, ut ad analogiam servandam infinitum infinito etiam infinities majus, sive in ratione, quam habet infinita quantitas ad finitam, finita ad nihilum, haberi debeat. Sed hæc de primo Canone satis; jam ad secundum.

772. Canon. 2. *Si aliquæ quantitates maneant analogæ solo secundario analogiæ genere, computandæ erunt in enunciationibus, & demonstrationibus negativo modo eæ, quæ directionem mutarunt numero impare mutationum, ut nimirum si e binis altera tantum mutetur eo pacto, summa abeat in differentiam, quæ pro positiva habeatur, vel pro negativa, prout ea, quæ mutavit, erat minor, vel major, & viceversa: si mutetur utraque, summæ, & differentiæ remaneant pariter summæ, & differentiæ, sed e positivis in negativas abiisse censeantur, ubi ad ulteriora vel theoremata, vel problemata adhibendæ sint. In demonstrationibus vero per proportiones institutis argumentationi per compositionem substitui debet argumentatio per divisionem, & viceversa, ubi e binis terminis rationis tam primæ, quam secundæ abierit in negativum alter tantummodo; retinendum argumentationis genus, si uterque mutet rationis utriuslibet.*

773. Quæ ad hunc pertinent Canonem consequuntur

omnia

omnia ex iis, quæ supra vidimus. Habenda esse pro negativis ea, quæ positionem mutant numero vicium impare, manere, quæ mutant numero pari, constat ex num. 688. Negativa mutare summam in differentiam, constat ex iis omnibus, quæ demonstravimus a n. 677 ad 692. Mutatio modi argumentandi patet ex eo ipso, quod summæ in differentias migrent, & viceversa, ubi alter e binis terminis mutatur in negativum. Ejus rei exemplum adductum est num. 691. Alia exempla exhiberi possunt plura etiam in Sectionum Conicarum Elementis. En aliqua.

774. In Ellipsi in fig. 19 est (num. 92) summa binarum rectarum, quæ a binis focis F, f ducuntur ad quodvis punctum perimetri P constanter æqualis axi Mm. In Hyperbola in fig. 20 æqualis est axi Mm earum differentia, quia nimirum Pf directionem mutavit, cum punctum f Ellipseos abierit in f Hyperbolæ per infinitum, unde fit, ut recta P ∞ f Hyperbolæ sit analoga primo analogiæ genere rectæ Pf Ellipseos. Cum vero Pf negativa sit major, quam PF, summa ipsarum, quæ in vulgari sermone geometrico est differentia, evadit negativa, & idcirco axis Mm ipsi differentiæ æqualis negativus est respectu axis Ellipseos. F.19 20

775. In demonstratione autem ejusdem proprietatis facta num. 93 summæ, quæ habentur pro Ellipsi, mutantur in differentias pro Hyperbola. Cum nimirum sit FP ad PD, & fP ad Pd in ratione determinante, sive juxta num. 90, ut Mm ad Ee, eruitur summam FP, fP in Ellipsi, differentiam in Hyperbola ad Dd summam ibi, hic differentiam ipsarum PD, Pd esse, ut Mm ad Ee, adeoque ut Dd, Ee æquantur, æquari illam summam, vel differentiam ipsi Mm. Theorema autem numeri 90 ibi suppositum, quod Ff, Mm, Ee sint continuo in ratione determinante, quod num. 91 demonstravimus ex natura proportionis harmonicæ, poterat demonstrari mutando differentias, quæ habentur pro Ellipsi, in summas pro Hyperbola, & viceversa hoc pacto. Est Ff in Ellipsi differentia, in Hyperbola sum-

ma ipsarum FM, fM, est Mm differentia in Ellipsi, summa in Hyperbola ipsarum ME, Me, sive me, Mi, Eadem Mm summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola ipsarum FM, fM, sive fm, fM, & Ee summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola ipsarum ME, Me. Hinc cum sit & FM ad ME, & fM ad Me in ratione determinante, colligitur & antecedentium summas, vel differentias ad consequentium summas, vel differentias, nimirum Ff ad Mm, & Mm ad Ee fore in eadem ratione. Mutatio directionis rectarum fM, Me mutationem induxit in summas, & differentias.

776. Porro ex ipsis infiniti mysteriis, nimirum e nexu illo in infinita distantia, de quo jam toties injecta est mentio, reddi potest ratio, cur etiam ubi directiones quantitatum mutantur vi transitus per infinitum, adhuc pro negativis haberi debeant, & subtrahi, licet illæ positivæ non mutentur in has negativas; sed in illas per infinitum traductas, quæ sunt harum veluti complementa ad circulum infinitum. Summa ipsarum FP, Pf in fig. 19 est constans, & æqualis axi Mm. In fig. 20. ipsi Pf est analoga primario analogiæ genere recta per infinitum traducta $P \infty f$. Quare adhuc ipsarum PF, $P \infty f$ summa pro constanti habenda erit. Quantum igitur crescit FP tantum minui debet ipsa $P \infty f$, quæ cum ea constantem summam reddit. Tantundem igitur debet crescere fP complementum ipsius $P \infty f$ ad illum infinitum circulum, qui hic habetur pro constanti; ac proinde FP, fP æque crescent, & earum differentia semper manebit constans. Abeunte P in M, ea differentia erit eadem, ac differentia fM, FM, sive fm, fM, nimirum Mm. Hoc pacto ab illa summa Ellipseos fit transitus ad hanc Hyperbolæ differentiam ex ipsis infiniti mysteriis. Sed rem ita se habere debere constat ex ipsa conformitate omnium partium Locorum Geometricorum, quæ communes proprietates habere debent, dummodo si directio contraria sit, contrario modo accipiantur, demendo, quod addebatur, & addendo, quod demebatur. Sic in fig. 89. arcus
89 illi FLm, & FAm juxta num. 277. communes proprie-

tates

tates habent, nec alter in tres partes æquales secari potest, quin secetur & alter, licet alterius negativus sit: & idcirco si ab FP trisecante primum deveniendum sit ad F*p* trisecantem secundum non gyrando per B*m*P'A*p*, quo pacto in *p* trisecatur arcus FB*m*AFB*m*AFB*m*, non arcus ipse FA*m*, sed retro regrediendo per PF*p*; mutatur directio tam arcus FP, in arcu F*p*, quam chordę in chorda.

777. Canon. 3. *Si in aliqua proportione termini aliqui post transformationem maneant analogi secundario analogiæ genere, manebit proportio: sed in proportionibus utcumque compositis nunquam mutatio habebitur, nisi numero pari, in rectangulis, vel solidis æqualibus debebit, vel in omnibus haberi mutationum numerus par, vel impar in omnibus, & terminus, qui invenitur proportionibus quibuscumque, vel quovis ductu, censendus erit negativus, vel positivus, prout mutationum numerus fuerit in iis, a quibus pendet, impar, vel par.*

778. Proportionem debere manere post mutationem directionis, qua analogia primaria in secundariam vertitur, patet ex eo, quod etiam num. 776 usi sumus, quod nimirum omnes partes eorundem Locorum Geometricorum easdem proprietates, & relationes ad se invicem habere debeant, sive assumantur ex parte positiva, sive ex parte negativa. Sic in fig. 89 nullus ex arcubus tendentibus ab F ad *m* per B trisecari potest juxta num. 776, quin simul trisecentur constructione eadem reliqui omnes, qui ab eodem puncto F tendunt ad *m* contraria directione per A.

779. Terminum, qui invenitur proportionibus quibuscumque, vel ductu quovis, fore negativum, vel positivum, prout numerus mutationum fuerit impar, vel par, demonstratum est num. 688, & confirmatum deinde tam multis exemplis e Geometria petitis. Inde autem consequitur, in proportionibus utcumque compositis nunquam mutationem haberi posse nisi numero pari. Nam si præcedentes mutationes fuerint numero impari, accedet mutatio postremi, quæ complebit numerum

merum parem, si autem mutationes præcedentes fuerint pares, manebit postremus terminus, adeoque iterum manebit numerus par. Rectangula autem, vel solida æqualia, debent habere numerum mutationum, vel simul imparem, vel simul parem, quia si alterum haberet imparem, alterum parem; alterum evaderet negativum, alterum positivum remaneret, adeoque non posset remanere æqualia. Idem autem ex priore parte eruitur etiam hoc pacto. In rectangulis æqualibus est unum latus prioris ad unum posterioris, & in solidis planum sub binis lateribus prioris ad planum sub binis posterioris, ut reliquum latus posterioris ad reliquum prioris. Hinc in ejusmodi proportione numerus mutationum erit summa mutationum utriusque rectanguli, vel solidi. Ut ea sit numerus par, debebit in utroque rectangulo, vel solido esse simul par, vel simul impar. Nam par pari, & impar impari additus parem reddit, par impari imparem. Patent igitur omnes propositi Canonis partes.

780. At hic in ipsa prima parte hujus Canonis videtur occurrere difficultas, quæ solutionem non ita facile admittat. Sex haberi possunt in proportione aliqua constante quatuor terminis binaria terminorum ipsorum. Vel enim sumi possunt bini rationis primæ, vel bini rationis secundæ, vel primus cum tertio, vel secundus cum quarto, vel bini extremi, vel bini medii, qui mutentur. In primo, ac secundo casu erit termini negativi ad negativum eadem ratio, quæ positivi ad positivum: in quo nulla est difficultas. In tertio, & quarto erit negativus ad positivum, ut negativus ad positivum, vel positivus ad negativum, ut positivus ad negativum, in quo pariter difficultas est nulla. At in postremis binis oportet sit negativus ad positivum, ut positivus ad negativum, vel positivus ad negativum, ut negativus ad positivum, quod eodem reddit permutato rationum æqualium ordine. Id vero videtur omnino pugnare cum analogia, & quidem etiam cum modo, quo negativa concipimus. Ea nimirum

rum concipiuntur in aliqua ratione minora nihilo. Si facultates considerantur, debitum, quod est negativum, pejoris conditionis hominem reddit, quam si nihil haberet. Si considerentur progressus, pejoris conditionis est ille, qui regreditur, quam ille, qui stat. Ablatis 8 a 10 relinquuntur 2, ablatis 10 relinquitur nihil, ablatis 12 relinquuntur duo minus, quam nihil. Secunda conditio est pejor prima; igitur & tertia conditio secunda est pejor. Quamobrem ratio quantitatis negativæ ad positivam esse debet multo minor, quam nihili ad positivam ipsam, ratio autem positivæ ad negativam multo major, quam positivæ ad nihilum. Non igitur æquales esse possunt.

781. Hæc quidem difficultas summam, si rite rerum analogia consideretur, vim habet. At ejus solutio pendet ex hisce infiniti mysteriis, quæ persequimur, &
ex iis potissimum, quæ num. 753 vidimus in fig. 265. F265
Ibi enim notavimus tertiam continue proportionalem post CM' consideratam ut negativam, in quam abierit positiva CM post nihilum habitum in appulsu M ad C non esse CP' finitam, sed CB ∞ AP' per infinitum traductam, & quodammodo veluti plusquam infinitam. Hinc ut finita quantitas CM ducta in finitam CP reddit rectangulum æquale quadrato CO, ita quodammodo nihilum in infinitam ductum, ubi M abit in C, & P in infinitum ita, ut nusquam jam sit, & negativa CM' in quantitatem plusquam infinitam ducta, idem producat.

782. Idcirco autem illud in Geometria ubique sanctè observabitur, ut in hisce postremis binis casibus semper, si alter e binis terminis abeat in negativum transeundo per nihilum, alter abeat transeundo per in-
finitum, dum in reliquis vel ambo transibunt per ni- F243
hilum, vel ambo per infinitum. Dum fig. 243 abit in 244
244, e quatuor terminis proportionalibus illius CH, 245
CF, CI, CG primus, & quartus abeunt in negativum. 244
Sed puncto H accedente ad C, & decrescente angulo 254

CIH

CIH in fig. 243, adeoque crescente CHI, punctum G recedit a C ita, ut congruente IH, cum IC, & facta FG parallela CE, punctum G in infinito obrutum delitescat; tum procedente H in fig. 244 redit G ex parte D ex infinito. Pariter in fig. 254, si ea referat Hyperbolam conicam, in qua rectangulum sub VR, & RP est constans, adeoque VR ad VA, ut AB ad RP, transeunte VR in negativam per nihilum, transit RP in R2P2 per infinitum, ut adeo illis CG, PR figuræ 243, & 254 non respondeat CG figuræ 244, & R2P2 figuræ 254, sed illi C ∞ G huic R2 ∞ P2. Generaliter ut rectangulum sub extremis æquetur rectangulo sub mediis, semper manentibus finitis alterius lateribus, & altero alterius latere transeunte per nihilum, alterum latus alterius transibit per infinitum, cum, ut paullo infra patebit, altero evanescente, alterum debeat evadere infinitum: adeoque quodammodo fiet plusquam infinitum ex ea parte, ex qua in infinitum recesserat. At ubi figura 243 abeat in 245, facile patebit transeunte CH per nihilum, vel per infinitum motu rectæ IH circa I, transire debere pariter GF per nihilum, vel per infinitum simili motu rectæ GF circa G, & idem accideret, si recta HI transiret motu parallelo ad partes BD per C, vel per infinitum, transeuntibus H, & I simul per C, vel per infinitum.

783. Licet autem ubi agitur de proportione, terminus quartus post quantitatem negativam CM', & binas positivas CO sit C ∞ P' per infinitum traductus in F265 fig. 265; tamen cum hæc traductio haberi non possit nisi P' redeat ex parte opposita, & alicubi in finitis quantitatibus existat; secum trahit necessario distantiam CP' finitam directionis oppositæ, & conformis directioni CM, quæ, si puræ magnitudines spectentur, vel eæ considerentur ut positivæ, libera enim est plaga positivorum, easdem habebunt relationes ad se invicem, & ad eandem CO, quam prius habebant segmenta CM, CP ejusdem Loci Geometrici eodem modo definita;

definita; adeoque adhuc erit CM' ad CO, ut CO ad CP' finitam, & proportio quidem manebit, directio autem in ejusmodi finitis quantitatibus in oppositam plagam tendentibus erit iterum eadem priori contraria. Idcirco proportio manebit etiam inter ejusmodi quatuor quantitates, quarum mediæ directionem non mutarunt, mutavit prima, & quarta quoque assumpta ex parte finita contrariam priori habet; adeoque in summis habenda erit etiam ipsa pro negativa, reductione aliqua simili ei, quam num. 776 consideravimus in complemento ejusmodi ad circulum infinitum ejus quantitatis per infinitum traductæ, quæ analoga erat primo analogiæ genere.

784. Ubi vero uterque terminus per nihilum transit, nulla difficultas esse potest, cum præcedentes termini, qui habebantur ante transformationem, migrarint in hos ipsos negativos, ac ubi mutatio fit transeundo per infinitum, facile ratio redditur rationis manentis ex illo infiniti mysterio, quod num. 776 persecuti sumus; licet mutatione facta per infinitum, non succedant prioribus terminis negativi illi finiti, sed positivi per infinitum traducti. Si in fig. 243 recta FG abiret in infinitum ex parte AE, & regrederetur ex parte contraria DB in fg; illis CF, CG non succederent Cf, Cg, sed C ∞ f, C ∞ g. At quoniam harum ratio semper ob analogiam deberet esse eadem, etiam si fg appelleret ad C; idcirco juxta n.769 etiam integri infiniti circuli CA ∞ BC, CE ∞ DC debent concipi ad se invicem in eadem ratione CH ad CI. Quare ubicumque sit fg ab integris circulis illis existentibus, ut CH, CI demendo segmenta CA ∞ Bf, CE ∞ Dg, quæ sunt in eadem ratione, relinquentur Cf, Cg in ratione pariter eadem. Quamobrem etiam considerata analogia primi generis in transformatione, eruitur adhuc quantitates secundario genere analogas, licet oriantur transitu limitis per infinitum, debere retinere proportiones, quas ante transformationem habuerant. F.243

857. Et

785. Et hæc quidem ad explicandum canonem, ac ex Locorum Geometricorum homogeneitate in omnibus suis partibus, vel ex infiniti mysteriis demonstrandum, ac vindicandum dicta abunde sunt. Ceterum canon ipse, ubi de finitis quantitatibus agitur certissimus omnino est, ac patet in omnibus tam multis exemplis, quæ adduximus a num. 677 ad num. 706: Ex eo determinavimus ductum, & formam tot curvarum parabolici, ac hyperbolici generis, quas deinde constructione geometrica accurata invenimus ejusdem formæ, quæ ex hoc canone iis applicato obvenerat: Patet autem latissime ipsius usus per universam Geometriam: Pauca quædam attingemus, quæ pertinent ad ejus usum in nostris Conicarum Sectionum elementis:

F. 1 2 786. In primis in ipsa definitione in fig. 1, & 2 tam FP ad PD, quam F*p* ad *pd* sunt in eadem ratione determinante: F*p*, & *pd* in fig. 2 sunt analogæ ipsis F*p*, *pd* figuræ 1 secundario analogiæ genere, & tamen servant proportionem eandem FP ad PD, ut F*p* ad *pd*. Deinde in ea proportione abierunt in negativos bini termini secundæ rationis in transitu a figura 1 ad 2, nimirum habetur numerus mutationum par; & uterque terminus mutat transeundo per infinitum, cum arcus rami ulterioris, & cum eo punctum *p* regrediatur ex infinito:

F. 19 20 787. In fig. 19, & 20 est (num. 90) tam F*f* ad M*m*, quam M*m* ad E*e* in ratione determinante FM ad ME: Manet utraque proportio, licet F*f*, M*m*, E*e* in fig. 20 sint analogæ secundario genere analogiæ ipsis F*f*, M*m*, E*e* fig. 19. In utraque proportione bini termini tantummodo mutant directionem; & cum ad eandem pertineant rationem, mutant ambo in transitu per infinitum:

F. 122 788. In fig. 122 in qua rectangulum PL*p* æquatur (num. 330) rectangulo VLD, abeunte VL in VL′ directione mutata, & manente L′D′, debet mutari e [positivo] in negativum etiam rectangulum P′L′*p*′. Quare de-re debet altera tantum ex ipsis P'L', L'p' directionem mutare. Mutat eam sola L'P', ac in rectangulis æqualibus P'L'p', VL'D invenitur numerus mutationum utrobique impar.

789. Hinc ex hoc ipso principio in fig. 169, & 170 facile definiri potest plaga ad quam poni debent illæ ia, Ip', quas num. 453 determinavimus in problemate, quo quæritur Sectio Conica transiens per data quinque puncta PpP'AB. Cum enim debeat esse (nu. 299) rectangulum AQB ad rectangulum AIB, ut rectangulum PQp ad P'Ip', postremum hoc P'Ip' debet habere mutationes directionis numero pari, vel impari respectu AIB, ut PQp habet respectu AQB. Quare cum innotescant reliquorum omnium laterum directiones præter directionem lateris quæsiti Ip', hæc etiam innotescet. In fig. 169 AIB respectu AQB mutat solam AQ in AI, manentibus QB, & IB. Quare & P'Ip' respectu PQp debet habere unam mutationem. Mutavit P'I respectu PQ, manebit igitur Ip' respectu Qp, ut revera manet. Simile est argumentum pro Ip' manente in fig. 170, ac eodem pacto determinatur positio ia, quæ manet respectu qp in fig. 169, mutatur in fig. 170. F 169 170

790. Canon. 4. *Angulo, cujus alterum crus tantummodo directionem mutavit, succedit is, qui ejus est complementum ad duos rectos, sive quem continet crus non mutatum cum crure mutato producto: angulo, cujus utrumque mutavit directionem: succedit is, qui ipsi ad verticem opponitur, & ut enunciatio maneat, in crure quod directionem mutavit, communis aliqua littera opponenda est in binis casibus sita ad partes oppositas ita, ut altera jaceat ad partem puncti analogi secundario analogiæ genere, altera ad partem oppositam; in demonstrationibus vero, ut & in enunciationibus cavendum semper fieri posse, ut anguli, qui congruebant, fiant ad verticem oppositi, qui erat externus in parallelis, evadat internus, & oppositus, vel alternus; atque ea a numero mutationum pendebunt, ita tamen, ut*

ut in singulis casibus admodum facile deprehendatur substitutio facienda in demonstratione, notatis illis binis successionum regulis. Generaliter autem ubi vertex anguli, qui erat intra binas parallelas, abeat extra; angulus ipse enunciatus concursu crurum cum iis parallelis hinc, & inde ad verticem oppositus, fiet communis, anguli vero crurum cum parallelis mutabuntur ex alternis in externos, ac internos, & oppositos, & viceversa si punctum abeat inter parallelas. Quod si extra fuerit, & abeat extra, sed ad partes alterius parallelæ, manebit ipse angulus, & anguli ad parallelas, qui erant externi, fient interni, & viceversa.

791. Hujus canonis ratio est manifesta; ubi enim,
F243 in fig. 243 abeunte in 244, anguli cujuspiam HCI crus
244 alterum CH directionem mutet, angulus ipse HCI,
245 qui prius in fig. 243 erat ACE, evadit jam in fig.
246 244 ECB, quem continet crus mutatum CH prioris, sive CA productum in CB, cum latere non mutato CI, vel CE. At in fig. 246 mutato & CH, & CI, angulus ICH, qui congruebat in fig. 243. cum ACE, jam congruit cum DCB ad verticem opposito. Quoniam vero punctum C jacet in fig. 243, 245, 246 extra parallelas HI, FG ad partes HI, in fig. 244 inter eas; angulus HCI est in illis idem, ac FCG, in hac ad verticem oppositus, anguli vero CHI, CIH in illis externi, & CFG, CGF interni, & oppositi, in hac alterni. At si in illis HI recederet a C ultra FG, satis patet, statim ipsos CFG, CGF ex internis evasuros externos.

792. Porro plurimum sæpe proderit litteras apponere a transformatione non pendentes, quæ adhiberi possint sine mutatione ulla, ut hic litteræ A, B, D, E plurimum prosunt ad plagas designandas, cum in fig. 243 ponitur A ad partes H, & in fig. 244 B ad partes H jam mutati, & A ad oppositas. Proderit autem id ipsum sæpe ad habendam generalem enunciationem, ut jam videbimus, in Conicarum Sectionum elementis præstitum a nobis esset cum successu. Mutationes vero

vero angulorum in oppositos ad verticem, vel externorum in alternos, vel internos vidimus ex parte n.690. videbimus jam uberius in ipsis Conicis Sectionibus.

793. Anguli mutatio tam ex alterius cruris, quam e utriusque mutatione in Conicarum Sectionum elementis occurrit plurimis vicibus, cui & demonstratio aliquando idcirco accommodanda fuit. In solutione probl: 2, num. 130, occurrit in fig. 35, & 36 determinatio puncti P per intersectionem rectarum VG, F.35
FQ, & puncti *p* per intersectionem rectarum Vg, FQ, 36
captis FV ad FE in ratione determinante, & QG, Qg æqualibus QF. In ejus autem demonstratione considerantur *similia* pro puncto P *triangula*, FPV, QPG, *&* QPD, QFE, *ac inde eruitur* FP ad PQ, *ut* FV *ad* QG, *sive* QF, *&* PQ *ad* PD, *ut* FQ *ad* FE, *unde infertur ex æqualitate ordinata* FP *ad* PD, *ut* FV, *ad* FE *in ratione determinante, ut opportebat*. Hęc demonstratio, si assumatur similitudo triangulorum, nullum habet discrimen in figuris 35, & 36, juxta num. 764, licet altera ad quamvis Sectionem Conicam pertineat, altera ad solam Hyperbolam; quia omnia remanet primo analogię genere analoga, nullo termino directionem mutante, nec in infinitum abit quidquam, nec per infinitum traducitur. Transfertur ea demonstratio ad punctum *p* iisdem prorsus verbis, & litteris ponendo solum pro punctis, P, G, D puncta *p*, *g*, *d* eorum analoga. Sunt nimirum *similia triangula* FpV, Qpg, *&* Qpd, QFE, *ac inde eruitur* Fp *ad* pQ, *ut* FV ad Qg, *sive* QF, *&* pQ *ad* pd, *ut* FQ ad FE; *unde infertur ex æqualitate ordinata* Fp *ad* pd, *ut* FV *ad* FE *in ratione determinante, ut oportebat*. Nulla autem mutatio fit in nomenclatura triangulorum, & proportionibus, sive conferatur punctum *p* cum puncto P ejusdem figuræ, sive *p* cum *p* alterius, quia punctis, & rectis succedunt puncta, & rectæ cum analogia vel primi, vel secundi generis; quamobrem rationes redeunt eędem juxta num. 772, & cum nulla argumentatio fiat componendo, vel dividendo, nullus fit transitus a summis,

ad differentias, vel viceversa, quæ textum demonstrationis verbo aliquo immutent.

794. At similitudinis triangulorum illorum demonstratio turbatur nonnihil a mutatione directionis crurum in angulis. Angulo VFP in fig. 35 succedit VFp; quem PF mutata continet, si producatur, cum FV non mutata. At directio FP, Fp communis in fig. 36, cum FV communi angulum VFP communem reddit cum angulo VFp. Contra angulus PQg idem est ac pQg in fig. 35 ob directionem Qp, QP eandem, & Qg utrobique eandem, sed contrariam illi priori QG: at in fig. 36 pQg est ad verticem oppositus ipsius PQG, ob directionem Qp, Qg utramque oppositam directioni QP, QG. Comparando angulos FPV, QPG, habetur utrobique alter alteri ad verticem oppositus, at FpV, Qpg idem sunt angulus mutatis in fig. 35 solis directionibus FP, VP, dum abeunt in Fp, Vp, & manentibus directionibus GP, QP, in Gp, Qp: at in fig. 36 mutatis contra directionibus GP, QP in gp, Qp, manentibus FP, VP in Fp, Vp, unde fit, ut alter ex angulis illis binis utrobique, dum fit transitus a P ad p, mutetur in angulum sibi ad verticem oppositum, maneat vero alter; & proinde qui fuerant ad verticem oppositi, jam congruant. Demum anguli PFV, PVF sunt utrobique alterni angulorum PQG, PGQ jacente P inter parallelas FV, GQ, at pFV, pVF, respectu pQg, pgQ sunt in fig. 35 externi, in fig. 36, interni, & oppositi cum jaceat p ibi ad partes FV hic ad partes gQ. Quoniam tamen ejusmodi mutatio angulorum ex oppositis ad verticem in congruentes & ex alternis in externos, ac internos, & oppositos, vel ex externis in internos, æqualitatem eorum non mutat, manebit demonstrationis vis, & solum enunciatio mutabitur dicendo pro puncto P angulus FPV æquatur angulo QPG ad verticem opposito, & pro p angulus FpV, est idem, ac angulus Qpg; pro angulis vero ad FV, GQ, & FV, gQ potest dici tantummodo anguli ad ejusmodi bases sunt ubique æquales ex paral-

parallelarum proprietatibus , licet , si eæ proprietates
enuncientur ; mutari debeat expressio . Prorsus vero si-
milia observari possunt in comparatione triangulorum
FEQ , PDQ , & FEQ , *pd*Q.

795. At ad evitanda incommoda directionis mutatæ
in angulorum ; & vero etiam rectarum enunciationi-
bus ; plurimum sæpe nobis profuit alias adhibere lit-
teras præter eas, quæ mutantur : Hinc illæ A, B in
fig. 1 , 2 , & tam multis post retentæ in directrice :
hinc illæ GHIT, *ghit* constanter retentæ in figuris a 9 F. 1
ad 14 , & 25, 26, 27 : Hinc in figuris post 41 pun- 9
cta illa *z*, Z, & K, ac aliis in locis. Id autem pro- 25
dest multo etiam magis aliquando ; ubi punctum ali- 41
quod ita in infinitum abit , ut nusquam jam sit. Sic
præter superiora exempla, in quibus hæc utilitas osten-
di potest, ubi figura 25 mutatur in 28 (num. 109)
& Ellipsis in circulum, puncto E illius abeunte in in- F. 25
finitum ita, ut nusquam jam sit, frustra analogia que- 28
reretur figurarum, nisi utrobique manerent litteræ G*g*,
H*h*, I*i* ab intersectionibus non pendentes , quæ post
transformationem supersunt.

796. Exempla litteræ adjectæ cum fructu enunciatio-
nis manentis habentur plura . Luculentissimum est in F. 41
usu litteræ V ; quæ in figuris a 41 ad 45 adjecta est 42
in usu litteræ V, quæ in figuris a 41 ad 45 adjecta 43
est (num. 172) rectæ HF, in prioribus ad partes F in 44
postrema ad partes H . Hac arte obtigit ubique ex pa- 45
rallelarum natura æqualitas angulorum PFH, *p*FV cum
angulis LT*t*, L*t*T æqualibus inter se ; licet ex diver-
sis parallelarum proprietatibus profluat æqualitas ipsa jux-
ta hunc ipsum canonem . Porro in figuris 41, 42, 43
tam FP inter se relatæ, quam F*p* inter se, positionem
servant, & proinde omnia eodem modo se habent; in
figura 44 mutat directionem tam EP, quam F*p*; hinc
adhuc V jacet ad partes contrarias H . At in fig. 45
mutatur F*p* , manet FP; hinc litterarum respondentium
V , & H altera respectu alterius manentis mutari de-
buit , ut jam directiones FH, FV congruerent.

797. Hujusmodi artificio auferetur etiam apparens quædam irregularitas, quæ videtur occurrere in theoremate exposito num. 176. Ibi enunciatur, binas tangentes ductas ex extremis punctis chordæ transeuntis per focum concurrere in directrice, ibique continere angulum in Ellipsi acutum, in Parabola rectum, in Hyperbola obtusum, si terminetur ad eundem ramum illa chorda, iterum vero acutum si terminetur ad bi-
F.50 nos ramos. Is angulus est in fig. 53, & 54 PH*p*.
53 Porro ubi punctum *p* e ramo citeriore figuræ 53 abit
54 in ulteriorem figuræ 54, non abit angulus ille ex obtuso in acutum saltu quodam, sed angulo PH*p* illius succedit angulus, quem in hac contineret PH cum *p*H producta ad partes H, quæ nimirum *p*H directionem mutavit. Is est adhuc obtusus, & excipiens postremum illum obtusum PH*p* figuræ 53, qui habetur puncto *p* abeunte in infinitum, & tangente H*p* in asymptotum H2K2 figuræ 50. Is per omnes continuos gradus mutatur, donec ad binos rectos accedat ultra quoscumque limites, imminuto PH*p* acuto ita, ut abeuntibus P, *p* in vertices axis transversi, & factis tangentibus parallelis, evanescat. Satis igitur fuisset in HP producta in fig. 53 ad partes *p*, in 54 ad partes H apponere litteram V, & enunciare ita: angulus PHV erit in Ellipsi acutus, in Parabola rectus, in Hyperbola semper obtusus. Sed quoniam enunciatio, & demonstratio sine ejusmodi productione rectæ evadebat simplicior, simplicitati analogiam postposuimus.

798. At ex hisce exemplis jam patet, quam apte hujusmodi artificio servetur sæpe analogia, vulgari etiam Geometriæ sermone adhibito. Nam si infiniti mysteria liberet adjicere, & rectas considerare per infinitum traductas, ac alia, quædam, quæ singula persequi longum esset, admiscere, theorematis quoque inde provenientibus in Geometriam invectis; possent semper ipsa intersectionum puncta retinere caracteres suos, dummodo aliqua notula generaliter exprimi posset di-

rectio

sectio rectæ tendentis ad punctum, & magnitudo, quæ expressio communis esset etiam punctis in infinito latentibus, & lineis per infinitum traductis. Sic in fig. 35 angulus FpV angulo Qpg erit adhuc oppositus F.35 ad verticem, ut FPV angulo QPG; si non sumatur 54 ex parte finita rectarum Fp, Vp, quæ directionem mutarunt; sed ex parte illarum F ∞ p, V ∞ p, quæ per infinitum eadem directione traductæ concipiantur & in ipsa 54 adhuc obtusus est angulus PH ∞ p, quem PH continet cum H ∞ p per infinitum traducta. Verum deest ejusmodi geometricum idioma; & infiniti mysteria, si ipsum possibile sit, nostræ mentis captum excedunt adeo, ut sæpe in iis analogia quædam considerari possit tantummodo, & usus ad ea, quæ de finitarum magnitudinum relationibus mutuis habentur, generalius, & facilius eruenda, non vero ad ipsarum infinitarum, vel plusquam infinitarum magnitudinum relationes ad se invicem evidenter perspiciendas, & pari evidentia ex iis relationibus deducendas semper demonstrationes theorematum ad finitam Geometriam pertinentium. Quædam ex iis investigationi aptiora sunt, quam demonstrationi. Certi quidam tantummodo canones eruuntur, quod hic præstamus, ex quibus rite stabilitis possint plerumque, quid post transformationem debeat in quantitatibus finitis relinqui. Ubi infinitis indefinita substituerimus alio tomo, multo sane evidentius, & multo uberius patebunt omnia, quæ huc pertinerent. Sed de iis iterum infra. Interea geometrici idiomatis defectus etiam in sequenti canone, & multo etiam magis se prodet.

799. Canon. 5. *Ubi anguli hiatus ab altera plaga ad alteram transit, quod fieri potest vel transeundo per nihilum, vel transeundo per binos rectos, si accipitur is, qui ejusmodi mutatione oritur transeundo per nihilum, habendus est pro negativo, & in summis negativo modo computandus ita, ut summæ in differentias abeant, altero tantum e binis mutato; at si eo*

abeat transeundo per binos rectos, angulo orto juxta communem Geometriæ nomenclaturam debet substitui ejus complementum ad 4 rectos, qui si appelletur angulus convexus, vel ut aliqui solent gibbus, sæpe analogia multo melius servabitur.

800. Dum recta CL in fig. 264 gyrat circa C cum F.264 recta CK efficit angulum KCL directione KLN; abeunte L in K, is evadit nullus: tum abeunte L in L', jam evadit negativus respectu KCL, hiatu KCL post transitum per nihilum abeunte in KCL' directione opposita KLO. Is crescit, & fit rectus, ubi L' abit in O: tum si L' pergat ultra moveri in M; angulus KCM est adhuc ejusdem directionis cum KCL', sed obtusus. Abeunte M in Q, jam fit KCQ recta linea, & angulus ille abit non in nihilum, sed in duos rectos KCQ, quorum mensura est dimidia circumferentia KOQ. Pergente M in M', jam angulus KCM' in vulgari geometrico sermone intelligitur is, qui hiatu cavo respicit plagam KN, qui iterum est minor duobus rectis. At is non succedit priori illi KCM, nec est analogus ipsi primario analogiæ genere, sed secundario. Priori succedit angulus, ut eum appellavimus, convexus, quem KC cum CM' continet ex parte OQ, & cujus mensura est arcus KOM' semicirculo major. Is crescit, & ille cavus decrescit, dum M' pergit in L, & appellente demum M', vel L ad K, complen-F.89 tur quatuor recti. Nimirum ut in fig. 89 bini sunt arcus FBm, FAm contraria directione complentes circulum, immo infiniti, qui integros addunt circulos directione utraque; ita bini considerari possunt anguli, quos binæ rectæ ~~in puncto~~ quovis continent directione contrarii, alter convexus, alter cavus, complectens quatuor rectos, immo infiniti directione utraque.

801. Porro ubi angulus directionem mutat transeundo per nihilum, tractari debet ut negativus. In fig. F.240 240 angulus ACB externus æquatur summæ angulorum AEB, DBE, qui sunt interni, & oppositi in tri-

an-

angulo CBE. Hinc angulus AC2B æquari debet differentiæ angulorum AE2B, DBE2 ob directionem DBE mutatam in DBE2; transitu facto in D per nihilum. Et revera est ipsi differentiæ æqualis, cum AE2B externus æquetur binis DBE2, AC2B internis, & oppositis.

802. Quod si mutatio fiat transeundo per duos rectos; angulo, qui in vulgari sermone nascitur cavus ad partem oppositam, debet substitui convexus ille, qui est ejus complementum ad quatuor rectos. Est notissimum Geometriæ theorema, in circulo angulum ad centrum esse duplum anguli eidem arcui insistentis ad circumferentiam. Non erit verum, nisi angulus ad circumferentiam sit acutus, vel nisi anguli hujusmodi convexi considerentur. In fig. 271 angulus APC est F.271
duplus anguli AIC; anguli autem AIC non habetur duplus in vulgari sermone acceptus, neque enim est APC, sed ejus complementum ad rectos quatuor, cujus mensura est arcus AIC, sive est angulus APC convexus.

803. Hujus etiam canonis usus occurrit in Sectionum Conicarum elementis. Ex num. 184 habetur, in F.57
Ellipsi in fig. 58 duplum anguli PHp binarum tangen- 58
tium æquari differentiæ binorum angulorum PFp, Pfp, 59
in Hyperbola in fig. 59 summæ eorundem PFp, Pfp. Nam ubi f abit in Parabola in infinitum ita, ut nusquam jam sit, angulus Pfp decrescens in recessu puncti f in infinitum jam sit nullus, & idcirco ibidem in fig. 57 in Parabola duplum anguli PHp æquatur soli angulo PFp. Ubi autem abit curva in Hyperbolam figuræ 59, & f redit ex parte opposita, angulus Pfp acquirit directionem oppositam, quam cum acquisierit in transitu per nihilum, evasit negativus, & differentia debuit abire in summam.

804. Ibidem autem si angulus PFp non obvertat cuspidem puncto H, sed ut in fig. 60, 61, 62 hiatum; F.60
enunciatio theorematis in vulgari Geometrico sermone 61
falsa erit. Nam non est accipiendus angulus PFp ca- 62

vus ille quem vulgo considerant, sed ejus complementum ad 4 rectos, nimirum ille, quem nos convexum appellavimus, qui constat adhuc binis PFN, pFN; quod ibidem enunciavimus, & qui id non enunciant, theorema exhibent in hoc casu falsum. Nam in Geometrico sermone vulgari semper anguli nomine intelligitur cavus ille, non convexus.

805. Hic solum postremo loco notandum est hosce binos modos mutandi directionem in angulis transeundo per nihilum, & per duos rectos, respondere binis modis, quibus linea abit e positiva in negativam transeundo per nihilum, & per infinitum. Ut autem ibi non est analoga primario analogiæ genere priori lineę linea finita habens directionem oppositam nata in transitu per infinitum, sed illa per infinitum traducta plusquam infinita; ita hic priori angulo non respondet post transitum per duos rectos angulus cavus directionis contrarię, sed ille, quem nos hic convexum diximus plusquam obtusus.

806. Canon. 6. *Quadratum lineæ tam positivæ, quam negativæ est positivum, & quodvis quadratum positivum bina habet latera alterum positivum alterum negativum. Si autem quoddam quadratum æquale fuerit rectangulo, cujus latus alterum directionem mutet; ipsum quidem quadratum censendum erit reale, sed negativum, & quadrato primi analogum secundo genere analogiæ; at ejus latus fiet imaginarium, & impossibile, deficiente ibi termino analogo lateri quadrati prioris: si directionem mutet utrumque rectanguli latus, erit reale utrumque latus quadrati positivum, & negativum, & singula ex his erunt analoga primo analogiæ genere singulis lateribus prioris quadrati.*

807. Patet hic Canon. ex iis, quę diximus a num. 682 ad 688, ubi & ejus demonstratio habetur. & af-
F.242 feruntur exempla ordinatarum BG, BG figurę 242, quę binę sunt intra circulum, nullę extra, ac B2L, B3L2, quę habentur extra utrinque in Hyperbola, non autem

intra

intra, ac alia exempla adduntur desumpta a positionibus Euclidis libri 2. Quadratum autem, ubi fit negativum, & adhuc appellatur quadratum, non erit quadratum quantitatis realis, sed productum ex recta positive considerata, & recta longitudinis ejusdem, directionis contrariæ negativè considerata; adeo ut quadratum negativum ubi ad reales quantitates referatur idem significet, ac ejusmodi productum, quod quadrato positivo, & vere quadrato respondet ita, ut recta negativa positivę; erit autem quadratum lateris imaginarii, sive impossibilis. Rectangula ejusmodi, & quadrata negativa cum positivis confundi, & pro se invicem assumi poterunt, ubi solę magnitudines considerantur; at ubi etiam positio consideratur, ac analogia ad transformationes, diligenter sunt distinguenda.

808. Consequitur autem ex ipso canone hoc veluti Corollarium. *Inter binas rectas tam simul positivas, quam simul negativas media proportionalis est duplex, altera positiva, altera negativa, quæ longitudine sunt æquales, directione contrariæ. Inter binas alteram positivam, negativam alteram media proportionalis realis non habetur, sed in impossibilem, & imaginariam utraque transit: haberi autem possunt binæ mediæ longitudine æquales, sed positione contrariæ altera positiva, altera negativa.* Patet corollarium ex eo, quod quadratum mediæ æquari debeat rectangulo sub extremis, & demonstratum est num. 685. Binæ autem illę medię habebuntur, ubi datarum altera est positiva, altera negativa, si earundem datarum utraque positive consideretur, & inveniantur binę medię, quod ibidem pręstitimus, inventis binis B2L, mediis inter AB2, B2D: Nam si hę considerentur ut positivę ambæ, erit AB2 ad utramvis B2L, ut eadem B2L ad B2D, at si altera ex iis consideretur negativo modo, ut AB2, erit AB2 ad alterum e binis BL, ut altera, BL, non illa eadem, ad B2D, mutata nimirum consideratione utriusque termini ejusdem primę rationis. Atque hoc erit dif-

feriſcrimen inter B comparatum circulo, & B2 comparatum Hyperbolæ. Erit ibi AB ad alterutram BG, ut eadem BG ad BD, hic AB2 ad alteram B2L, ut non ea, ſed altera BL pariter ad Hyperbolam terminata ad B3D. Atque hoc pacto relationes quandoque habebuntur non inelegantes inter Ellipſim, & Hyperbolam, ſolventes quædam problemata, quæ viderentur ope poſitivorum, & negativorum ad unicum problema reduci poſſe, & communem habere enunciationem, ubi nimirum planis poſitivis negativa ſuccedant, non lineæ lineis tantummodo, ut in fine eorum, quæ ad hunc Canonem pertinent, patebit.

809. Hujus Canonis, & Corollarii ſummus eſt uſus in Sectionum Conicarum elementis, & ejus ope mirum in modum ratio redditur quarundam, quæ videntur anomaliæ evertentes omnem analogiam, & relationem harum curvarum ad ſe invicem. Illud jam ſupra notavimus num. 761, ubi oſtendimus axem Hyperbolæ per infinitum traductum, non vero axem finitum reſpondere finito axi Ellipſeos, quod nimirum per quodvis punctum axis finiti Ellipſeos, & per nullum finiti, ſed per quodvis illius, qui traducitur per infinitum in Hyperbola, ductæ rectæ ipſi axi perpendiculares occurrunt perimetro. Id vero hinc ſane manifeſto pendet, & ad omnes diametros primarias Hyperbolæ traducitur. Nimirum in fig. 9. in Ellipſi eſt (num. 66)
F. 9 conſtanter axis M*m* ad chordam VF*u*, ut rectangulum MR*m* ad quadratum ſemiordinatæ RP. Jam vero ubicumque aſſumatur punctum R in Ellipſi in axe finito M*m*, ambæ MR, *m*R retinent poſitionem ſuam, adeoque habentur ordinatæ PR*p* iis reſpondentes. At ſi punctum aſſumatur extra ad partes M, vel *m*, mutatur in negativam MR, vel *m*R, manente *m*R, vel MR. Quare mutatur in negativum etiam rectangulum MR*m*. Hinc quartus terminus proportionalis poſt M*m*, V*u*, & rectangulum MR*m*, quod erat quadratum ſemiordinatæ, vertitur in negativum, & proinde ſemiordinata reſpondens puncto cuilibet axis Ellipſeos M ∞ *m*
per

per infinitum traducti est imaginaria, licet ejus quadratum reale maneat, sed negativum.

810. Comparata jam Hyperbola figuræ 11 cum Ellipsi fig. 9, si R assumatur in quovis puncto axis indefiniti MH; directionem habet MR eandem, ac prius, *m*R contrariam; & assumatur R' in axe *mh*, eam mutat MR', retinet *m*R'. Quare in utroque casu rectangulum MR*m* evadit negativum. Remanet autem V*u* positiva quantitas, M*m* negativa, directionis nimirum contrariæ. Quare mutatis primo, ac tertio termino proportionis, & manente secundo, debet manere quartus, adeoque quadratum semiordinatæ habetur positivum, & semiordinata utraque realis per totum axem M ∞ *m* traductum per infinitum. Contra vero in quovis puncto R assumpto inter M, & *m* retinetur directio utriusque MR, *m*R respectu Ellipseos; adeoque retinetur rectangulum MR*m* directionis ejusdem, retinetur VF*u*, mutatur vero M*m*. Quare mutatur etiam quadratum semiordinatæ in negativum, & proinde nullum est punctum assumptum in axe M*m* finito Hyperbolæ, in quo haberi possint ordinatæ. Ordinatæ ipsæ iis punctis respondentes sunt impossibiles, & imaginariæ; earum autem quadratum, quartum in illa proportione, in qua priores tres termini reales sunt, reale est etiam ipsum, sed negativum. F. 9 11

811. Hoc animadverso, patet jam primo, cur Ellipsis quidem finito orbe in se ipsam redeat, Hyperbola vero habeat bina crura in infinitum utrinque producta. Patet etiam unde oriatur discrimen insigne inter diametros conjugatas primariarum Hyperbolæ, sive diametros secundarias & diametros conjugatas Ellipseos. Omnes diametri hujus terminantur ad perimetrum, (num. 212): illius diametri, non omnes, sed eæ solæ, quas continent ii asymptotorum anguli, quos axis transversus secat, occurrunt perimetro ipsius; reliquæ autem ipsi nullo modo occurrunt, sed terminantur ad perimetrum binorum ramorum Hyperbolæ conjugatæ (num. 212), quæ Hyperbola conjugata est locus geometricus

a priore

a priore omnino distinctus. Nam quæcumqae diximus de ordinatis axi transverso, locum habent in ordinatis diametrorum omnium, cum in omnibus juxta num. 351 debeat esse rectangulum sub abscissis ad quadratum semiordinatæ in constanti ratione diametri primariæ, quæ in Hyperbola mutat directionem, ad rectam datam, qua parameter dicitur, & ut paullo inferius hinc demonstrabitur, eam non mutat. Quamobrem si per centrum C, utique interceptum verticibus diametri, concipiatur ordinata parallela ordinatis diametri primæ cujusvis; ea quidem imaginaria est, sed ejus quadratum est reale, & negativum. Si ea esset realis, esset utique analoga diametro conjugatæ Ellipseos, quę cum per centrum transeat, & ad perimetrum Ellipseos ipsius terminetur, ac sit parallela ordinatis suæ diametri primæ sibi conjugatæ, etiam ipsa est ordinata quædam pertinens ad ipsum centrum. Hinc eruitur illud: semidiametro parallelæ ordinatis diametri Ellipseos cujusvis terminatæ ad ejus perimetrum, adeoque ejus conjugatæ nihil respondere analogum, quod reale sit, & pertineat ad centrum finitum Hyperbolæ. Sed ejus quadrato respondere quadratum quoddam negativum, parametrum positivam, & rectangulum MC*m* positivum,

812. Porro ob hujus quadrati negativi analogiam cum quadrato positivo axis conjugati Ellipseos factum est, ut Geometræ, licet id, ipsum omnino tum non perspexerint, semidiametros appellaverint conjugatas primariarum, latera ejusmodi quadrati positivè considerati, quas cum viderent non terminari ad perimetrum, eas dixerunt semidiametros secundarias. Illæ funguntur vice earum, quæ immaginariæ sunt, & quæ vere analogæ essent, si essent reales. Hinc autem illud manifesto consequitur, semidiametros, vel diametros secundarias Hyperbolę nullam habere analogiam cum semidiametris, vel diametris conjugatis Ellipseos, sed illarum quadrata esse analoga secunda-

tio

rio analogiæ genere quadratis harum, nimirum, ubi refertur Hyperbola ad Ellipsim, quadrata semidiametrorum secundariarum illius assumenda esse, ut negativa, dum quadrata semidiametrorum coniugatarum cujusvis diametri Ellipseos considerantur, ut positiva.

813. Huc ubi iam delati sumus, prona fient, & legibus continuitatis, & uniformis Sectionum Conicarum naturæ admodum conformia plurima, quę viderentur omnem analogiam pervertere. Nimirum in iis, quæ pertinent ad diametros ipsas secundarias Hyperbolæ collatas cum diametris Ellipseos, discrepabunt omnia, ac proprietates earum diversæ erunt, & diversa ratione demonstrabuntur. Ubi autem earum quadrata occurrent, servabitur penitus analogia, dummodo quadrata diametrorum secundariarum Hyperbolæ habeantur pro negativis. Patebit autem & illud discrimen, & hęc conformis ratio, consideratis ipsis Conicarum Sectionum Elementis, in quibus, quæ maximè notatu digna huc pertinentia arbitrabimur, hìc persequentur.

814. Constructio Ellipseos, quam ex datis binis diametris dedimus num. 391, nullo modo ad Hyperbolam transferri potest: ea vero, quam pro Hyperbola dedimus num. 269 ad Ellipsim pertinere non potest: ambę elegantissimæ sunt, & simplicissimæ, sed a se invicem remotissimę, & penitus discrepantes. Axis transversus in Ellipsi est omnium diametrorum maxima (n. 379), in Hyperbola omnium primariarum minima (num. 246), & methodi, quibus ea theoremata demonstrantur a se invicem discrepant. In Ellipsi omnes diametri terminantur ad ejusdem Ellipseos perimetrum, ut diximus: in Hyperbola terminantur omnes primarię tantum, secundarię autem ad Hyperbolam conjugatam, quę alium locum geometricum constituit a priori prorsus distinctum. In quavis Ellipsi habentur (numer. 379) binę diametri conjugatę æquales, ac vel primaria major esse potest, quam sua conjugata vel minor: in Hyperbola, nisi ęquilatera sit, semper inęquales sunt,

ac

ac primaria (num. 246) vel semper major, vel minor quam sua conjugata.

815. Ipsa ratio, qua axem conjugatum, & diametros primariis conjugatas definivimus in Ellipsi, & Hyperbola discrimen hoc apertissime docet, cum admodum diversa sit, licet prima fronte conformis appareat. Neque enim eas definivimus ex ulla relatione communi ad perimetrum Ellipseos, & Hyperbolæ, quæ nimirum nulla habebatur, sed alia via ad hanc ipsam anomaliam declarandam aptissima. Nimirum pro axe conjugato in fig. 9, & 11 assumpsimus CX, C*x* medias inter MF, *m*F, & diximus utrobique illam X*x* axem conjugatum. Videtur sane hæc definitio communis esse desumpta nimirum ab eadem relatione ad rectas analogas MF, *m*F. At re diligentius considerata, contrarium erit admodum manifestum. Cum enim MF in figura 11 habeat eandem directionem, ac in fig. 9, & F*m* contrariam, patet alteram tantummodo transire in negativam. Hinc si habetur in Ellipsi duplex media proportionalis inter MF & F*m*, ea in Hyperbola haberi non potest juxta num. 808, cum nulla sit media inter quantitatem positivam, & negativam, sed binæ inveniri possint mediæ æquales quidem magnitudine, sed positione contrariæ altera positiva, altera negativa. Si igitur in Hyperbola assumuntur mediæ CX, C*x* inter MF, *m*F, jam etiam *m*F consideratur, ut positiva, adeoque ipsa sic considerata non est analoga illi *m*F Ellipseos ibidem consideratæ, ut positivæ, nec proinde illæ mediæ analogæ sunt.

816. At pro diametris conjugatis cujusvis diametri poterat quidem illud assumi pro definitione, ut essent rectæ per centrum ductæ parallelæ ordinatis illius in eo bifariam sectæ, quarum quadratum ad quadratum suæ diametri primæ esset, ut est quadratum semiordinatæ ad rectangulum sub abscissis, quæ visa fuisset communis definitio. Sed præter quam quod in eundem scopulum incidisset definitio, quadrato semidiametri secundariæ evadente negativo in Hyperbola, & ipsa semi-

midiametro, ac diametro, si analogia rite servanda esset, imaginaria; præterea ea definitio nec generalis extitisset: nam diameter quævis primaria habet in Hyperbola suam secundariam, cujus ea ipsa conjugata est, nec tamen habetur constans ea ratio quadrati semiordinatæ diametri secundariæ ad rectangulum sub abscissis a binis ejus verticibus, sed ea proprietas est ordinatarum tantummodo, & abscissarum ad diametrum primariam. Aliam igitur apparentem tantummodo analogiam consectati sumus, quæ primo aspectu summa videretur, licet re ipsa, nulla esset, cum nimirum nulla prorsus haberi posset. Nimirum in subsidium vocavimus figuram illam conclusam quatuor infinitis binarum Hyperbolarum conjugatarum ramis, quas exhibent figuræ 52, 83, 84, & ad unicam Ellipsim, ut num. 172 innuimus, relationes habet admodum elegantes. Diximus igitur num. 212 illam diametri cujusvis diametrum conjugatam, & positione, & magnitudine definitam, quæ per centrum ducta ordinatis illius parallela esset, & ad perimetrum terminaretur in Ellipsi ipsius Ellipseos, in Hyperbola figuræ ipsius a quatuor binarum Hyperbolarum conjugatarum ramis conclusæ, qua definitione satis patebat contineri axes ipsos, cum axem conjugatum terminari in Ellipsi ad perimetrum ipsius Ellipseos constaret ex n. 72, & in Hyperbola id in ipsa Hyperbolarum conjugatarum notione contineretur n. 170. F. 52 83 84

817. Porro tanta est ejus figuræ quatuor Hyperbolarum ramis conclusę habitudo ad unicam Ellipsim, ut ea vel minus perito, vel minus cauto Geometræ facile possit imponere, ac suadere ejus etiam figuræ perimetrum simplicem esse Geometricum locum, & unicę Ellipsi integrę respondentem. Nam quævis recta tam in quavis Ellipsi, quam in ejusmodi figura per centrum ducta, ipsius perimetro occurrit hinc, & inde in binis punctis tantummodo, si nimirum & asymptotorum concursus considerentur, ut in infinito delitescentes, ubi se & cum ipsis asymptotis octo illa quatuor ramo-

rum crura conjungant: quævis ex iis ita terminata in ipso centro secatur bifariam; quævis est diameter habens ordinatas, quas bifariam secet, quibus liceret annumerare etiam illas IL in fig. 83, quæ dici possent ordinatę asyptotorum alteri parallelæ ab altera bifariam sectæ, juxta num. 240; quævis habet binas tangentes perimetri figuræ ordinatis parallelas pręter asymptotorum ordinatas illas LI, quæ nullam habent nisi ipsa asymptoto considerata pro tangente, cujus contactus ita in infinitum recedit, ut nusquam jam sit: quævis diametrum sibi conjugatam habet parallelam binis tangentibus figuræ per binos suos vertices ductis. Demum tam in Ellipsi, quam in ea figura quatuor tangentes per extrema puncta diametrorum conjugatarum ductę parallelogrammum continent, cujus area constantis est magnitudinis, æqualis nimirum rectangulo sub binis axibus, juxta num. 469, ubi illud etiam ad hujusmodi analogiam accedit, quod anguli eius parallelogrammi terminantur in Ellipsi ad aliam Ellipsim similem (num. 375), & in Hyperbola ad asymptotos (num. 244), quas patet communes esse debere omnibus Hyperbolis similibus idem habentibus centrum C, & eandem directionem axium *Mm*, *Xx*, ac eandem eorundem rationem ad se invicem, & in eas debere desinere omnes Hypęrbolas, ubi axes evanescant, ut adeo illæ ipsę asymptoti considerari possint, tanquam alia quædam Hyperbola illi similis, in cuius perimetro id parallelogrammum angulos habet terminatos, ut in Ellipsi.

818. At licet tanta sit huius figuræ similitudo cum Ellipsi, discrimen admodum facile deprehenditur vel ex eo, quod eadem recta ei figurę in quatuor etiam punctis possit occurrere, ut illa *Hh* fig. 84, quę occurrit ipsi in N, P, *p*, *n*, præter quam quod nulla è mille aliis proprietatibus, quæ vel ad focos, vel ad ordinatas, vel ad latera recta, normales, tangentes, ac alia ejusmodi pertinent in Ellipsi, locum habet in ramis omnibus eius figuræ, sed ritè applicata in binis

tan-

tantummodo. Illa vero qualiscumque apparens analogia, & figurarum similitudo inde ortum duxit, quod licet ipsæ diametri secundariæ non sint in Hyperbola analogæ diametris Ellipseos, earum tamen quadrata sunt analoga secundo analogiæ genere quadratis harum, quibus si negativè sumantur, prorsus respondent. Cum ipsæ diametri vi ejus definitionis nullo modo analogæ sint, hæc ipsa analogia quadratorum demonstrari communi demonstratione non potuit desumpta ex ipsa definitione. Pendet ea a theoremate enunciato Prop. 7 num. 351, in qua habetur pro utraque curva, quadratum semiordinatæ cujusvis diametri primariæ esse ad rectangulum sub binis abscissis a binis ejus verticibus, ut est quadratum semidiametri conjugatæ ad quadratum semidiametri primariæ. Porro rationem ejus quadrati ad rectangulum sub abscissis constantem esse communi demonstratione patuit num. 352; at eam eandem esse, quæ est quadrati semidiametri primariæ, eadem pro utraque curva demonstratione evinci non potuit; sed pro Ellipsi ibidem demonstratum est ex eo, quod vertices diametri conjugatæ sunt etiam ii ad eandem Ellipsim, pro Hyperbola repetitum est a numer. 256, ubi idem longe alia demonstratione, petita videlicet ab asymptotorum natura, fuerat demonstratum.

819. Cæterum demonstrata jam ejusmodi quadratorum analogia, ex qua constat quadratum ejus, quæ dicta est diameter secundaria in Hyperbola, esse ejusdem magnitudinis, ac est quadratum negativum vere analogum quadrato positivo diametri conjugatæ Ellipseos, quæcumque in Ellipsi pertinebunt non ad ipsas diametros conjugatas, sed ad earum quadrata, erunt communia Hyperbolæ, dummodo in hac quadratum semidiametri secundariæ sumatur negativè, quod sane, si ipsa secundaria diameter esset analoga diametro Ellipseos, positive sumi deberet, cum nimirum & positivarum, & negativarum quantitatum quadrata sint positiva. Fit autem idem, ut ubi de quadratis agitur,

altero jam negativè accepto, summis jam respondeant differentiæ, quod in sequentibus exemplis manifestum erit.

820. In Ellipsi in fig. 19 quadratum distantiæ CF foci a centro æquatur (num. 64) differentiæ quadra-
F. 19 torum semiaxium CM, CX; at in Hyperbola in
20 fig. 20 summæ. Semiaxis quidem Hyperbolæ transversus ille finitus Mm est analogus semiaxi transverso Ellipseos, sed secundario analogiæ genere; adeoque respectu ipsius negativus. At positivum adhuc manet ejus quadratum. Semiaxis conjugatus illius terminatus vertice X non est analogus ullo analogiæ genere semiaxi conjugato hujus, sed illi respondet imaginaria, atque impossibilis quantitas, cujus tamen quantitatis quadratum reale æquatur semiaxis conjugati quadrato negativè sumpto; unde fit, ut ubi ipsius CX adhibetur quadratum in Ellipsi, substitui possit in Hyperbola suæ CX quadratum negativè sumptum, quod erit idem, ac rectangulo MFm Ellipseos analogum, sed negativum Hyperbolæ rectangulum MFm substituere. Ac ut quadratum CF in fig. 19 est differentia quadrati CM, & rectanguli MFm, in figura vero 20 summa eorundem, mutata nimirum directione rectanguli MFm ob mF mutatam positione, quæ duo theoremata apud Euclidem respondent propositioni 5 & 6 Libri 2, sed revera rite considerata Geometriæ indole, unicum theorema sunt; ita etiam ibi differentiæ, hic summæ quadratorum CM, CX æquatur illud idem quadratum CF.

821. Eodem prorsus pacto cum in Ellipsi summa quadratorum semidiametrorum conjugatarum, æquetur summæ quadratorum axium, in Hyperbola æquantur inter se eorundem quadratorum differentiæ; quod nimirum quadrato diametri conjugatæ Ellipseos respondet in Hyperbola quadratum quantitatis immaginariæ, sed ipsum reale, & æquale quadrato semidiametri conjugatæ Ellipseos negativè sumpto.

822. Quod parametri, seu latera recta omnium diametro-

metrorum in Ellipsi, & primariorum in Hyperbola sint prorsus analoga, & quidem primario analogiæ genere; sunt autem, ut jam videbimus, ac proinde proprietates omnes communes habeant, & communi enunciatione, constructione, demonstratione ubique gaudeant; ex hac ipsa quadrati semidiametri conjugatæ negativè sumpti consideratione omnino profluit. Latus rectum cujuspiam diametri diximus generaliter (num. 351) tertiam continue proportionalem post diametrum illam, & ejus conjugatam, & eo reduci etiam latus principale, constat ex num. 66; cum inde pateat, & in Ellipsi, & in Hyperbola ipsum esse tertium post axem transversum, & conjugatum; licet ubi ipsum definivimus n. 54, usi fuerimus ea proprietate, quam habet communem cum latere recto principali Parabolæ carentis axe conjugato, quod nimirum sit chorda axi perpendicularis per focum ducta. Rectangulum sub diametro primaria, & latere recto debet æquari quadrato diametri secundariæ. Porro ubi Ellipsis in Hyperbolam abit, quadratum diametri conjugatæ secundariæ Hyperbolæ ipsius negativè sumptum est analogum quadrato diametri conjugatæ Ellipseos. Debet igitur evadere negativum illud rectangulum; adeoque debet evadere negativum alterum tantummodo e binis ejus lateribus. Evadit autem negativa diameter primaria, quæ nimirum terminatur ad ramum oppositum. Igitur latus rectum debet adhuc remanere positivum, quod cum connectatur non cum ea quantitate imaginaria, quæ in ~~Hyperbola respondet~~ diametro conjugatæ Ellipseos, sed cum ejus quadrato reali, reale est.

823. Poterat quidem sic etiam definiri, ut esset quartum post rectangulum sub binis abscissis, quadratum semiordinatæ, ac diametrum primariam, cujus ea est ordinata, & in hac definitione, quæ eodem redit, nihil assumeretur, quod non esset homogeneum, & reale. Abeunt autem in negativos primus terminus ob alteram abscissam, ac tertius ob diametrum primariam abeuntes in negativas; ac proinde manente positivo secun-

cundo termino, sive quadrato semiordinatæ, manet etiam positivus quartus, seu latus rectum. Eo pacto ejus positiva analogia in ipsa definitione manifesta esset per sese. At quoniam ejus relationis ad ipsas diametros major est usus, & est multo simplicior determinatio tertiæ continuè proportionalis post binas rectas, quam quartæ post illa plana; idcirco hìc etiam simplicitati posthabuimus analogiam, ut supra num. 797.

824. Cæterum latera recta communibus gaudere proprietatibus in utraque curva, plurimis exemplis patet, quæ elementa ipsa perpendentibus passim occurrent.
F173 Eodem pacto latera recta principalia determinantur
180 num. 54 per chordam axi perpendicularem per focum
186 ductam: eodem pacto num. 464 definitur in fig. 173,
189 174 ex dimidio latere recto principali VO subnormalis RM æqualis RD: eodem pacto num. 475 in fig. 180, ac 181 illa PT, abscissa per perpendiculum MT ductum ex concursu normalis cum axe transverso in radium foci, æqualis dimidio lateri recto principali; eodem pacto num. 495 determinatur in fig. 186, 188 ex quovis latere recto VA quadratum semiordinatæ PR æquale rectangulo VRL: eodem pacto num. 503 in fig. 189, 191 chorda VH, quam circulus osculator abscindit ex diametro primaria ducta per punctum osculi, æqualis lateri recto ejusdem diametri. In iis omnibus & enunciatio, & constructio, & demonstratio communis est.

825. Quoniam vero ipsæ diametri conjugatæ in Ellipsi, & Hyperbola nullam analogiam habent, habent autem earum quadrata secundariam; tam in demonstrandis theorematis, quam in solvendis problematis, quæ pendent a diametris ipsis conjugatis, proderit sæpe ad earum quadrata recurrere, quorum ope communis quandoque inveniri poterit & enunciatio, & constructio, ac demonstratio. Exemplum theorematis desumi potest ab illa area parallelogrammi, quod in suo angulo continent binæ diametri conjugatæ, & circumscribitur Ellipsi, ac inscribitur figuræ Hyperbolicæ 4 ramo-

motum, quæ area constanter æquatur rectangulo sub semiaxibus. Nos aliam ejus demonstrationem dedimus pro Ellipsi num. 375, aliam pro Hyperbola num. 244, quarum illa prior ad Hyperbolam, posterior ad Ellipsim transferri nullo modo possunt, atque id idcirco, quod in iis nulla haberi debuerat analogia. Demonstrationem communem nonnulli exhibent ope tangentium, quę proprietates communes habent. Nos etiam num. 469 communem ejus demonstrationem haberi posse ostendimus petitam ex alio communi theoremate proposito num. 466, quod nimirum in fig. 171, & 172 rectangulum sub perpendiculo CL e centro in tangentem, & semidiametro conjugata CI ęquetur rectangulo sub semiaxibus. Id vero idcirco fieri potuit, quia num. 467 in ejus theorematis demonstratione inventum fuit, alternando, quadratum CL ad quadratum semiaxis transversi CV, ut quadratum semiaxis conjugati CD ad quadratum semidiametri conjugatę CI. Quadrata adhibita sunt, quæ sunt realia, licet negativa sint. Quadratum autem semiaxis conjugati CD, & semidiametri conjugatę CI in Hyperbola, si negativè accipiantur, sunt analoga iisdem quadratis positivè sumptis in Ellipsi, & ratio inter ea negativè sumpta est eadem, ac inter ea positivè sumpta, quam ob causam in lateribus ipsorum positivè consideratorum, quæ realia sunt, mansit ratio, licet in iis non habeatur analogia. Id semper accidet, ubi proportio aliqua complectetur in Ellipsi binos terminos, qui in Hyperbola maneant analogi, & binas diametros, quę in Hyperbola fiant secundarię; manebit proportio, sed in demonstratione recurrendum erit ad quadrata, & ad hunc ipsum discursum, quem hic instituimus. F 171 172

826. Problematis exemplum esse potest illud, quod num. 486 proposuimus, ubi & quadratum semidiametri conjugatę analogum secundario analogię genere, & latus rectum primario analogię genere analogum adhibuimus. Ibi datis in fig. 160, 161 binis diametris conjugatis Pp, Ii, quęrebantur axes. Poterant quęri binę recte F 160 161

rectæ ejusmodi, ut quadratorum summa, vel differentia æquaretur summæ, vel differentiæ quadratorum datarum CP, CI, & rectangulum rectangulo sub altera, ut CI, & perpendiculo ex alterius vertice demisso in ipsam, quibus definitur constans parallelogrammum; at solutio nec obvenisset communis, nec ita expedita. Sustulimus heterogeneas illas diametros conjugatas, & illis substituimus parametros, quæ datis diametris primariis, & conjugatis dantur, & cum dentur per quadrata diametrorum conjugatarum analogæ sunt in utraque curva, & quidem primario analogiæ genere, ut vidimus num. 822. Eas combinavimus cum diametris primariis itidem analogis, sed secundario genere, adeoque negativis. Idcirco applicata PS æquali dimidię parametro utrobique ex parte curvæ convexa, adeoque utrobique ad eandem plagam, nimirum in Ellipsi in fig. 160 in directum cum *p*P, in Hyperbola in fig. 161 a P versus punctum *p* mutatum, unde provenit CS summa ibi semidiametri CP, & dimidiæ parametri PS, quæ in illa positivę sunt ambę, differentia hic alterius positivæ ab altera negativa; communis profluxit & constructio, & demonstratio.

827. Quoniam autem diximus num. 808. inter binas rectas alteram positivam, alteram negativam non posse inveniri unicam mediam proportionalem, posse autem duas magnitudine quidem æquales sed directione contrarias; non erit abs re proferre exemplum, in quo binæ semidiametri secundariæ in Hyperbola assumptæ cum directionibus contrariis sint medię proportionales inter binas rectas, quæ in Ellipsi ambæ sunt positivę, & habent semidiametrum conjugatam pro media proportionali, quarum tamen altera directionem servat in Hyperbola, altera mutat, ubi ea proprietas semidiametri Ellipseos ad Hyperbolam transfertur hujus contrarię directionis beneficio, quę nimirum profluit
F.154 ex illa quadrati negativi analogia. Diximus num. 415
155 in fig. 156 semidiametrum secundariam CV in Hyper-
156 bola esse mediam proportionalem inter abscissam a cen-

tro

pro CR, & distantiam CQ concursus tangentis PQ cum eadem diametro, Monuimus autem ipsas CR, CQ, quæ in figura 153, & 154, ubi num. 419 agebatur de diametris Ellipseos, vel de diametris Hyperbolę primariis, jacebant ad eandem centri partem, debere in fig. 153 jacere ad partes oppositas. Nimirum in diametris primariis in fig. 153, & 154 erat CR ad CV, ut CV ad CQ, & quadratum CV æquale rectangulo sub CR, & CQ. In fig. 156 quadratum CV negativè sumptum respondet quadrato CV fig. 153, & 154. Hinc rectangulum sub CR, & CQ debuit esse negativum in fig. 156 respectu fig. 153, & 154, adeoque cum in illis eandem utraque directionem habuerit, in hac debent habere contrarias; nec erit, si positio etiam spectetur, CR ad CV, ut CV ad CQ, sed CR ad CV, ut C*u* ad CQ. Id autem ipsum eruitur ex fine demonstrationis positę num. 416. Invenitur enim CR ad CQ, ut quadratum CR ad quadratum CV. Primus terminus; & secundus habent directionem contrariam, adeoque & tertius, ac quartus debent habere contrariam ita, ut quadratum CV respectu positivi quadrati CR pro negativo habendum sit, sive pro producto ex C*u*, & CV, quę sint verę medię inter CR, CQ, si directio spectatur. Sed cum ipsa directio ibi consideranda nobis non esset, & solę magnitudines spectarentur, quę in Geometria communi usum habent; diximus semidiametrum ipsam CV mediam inter CR, CQ ibi, ut in diametris primariis.

828. Haud multum absimile ab eo casu est illud, quod diximus num. 808. in fig. 242 si sumatur BG pro media inter AB, BD consideratas ut positivas, mutata AB in negativam AB2, fore non B2L terminatam ad Hyperbolam mediam inter AB2, B2D, sed binas illas B2 habentes directiones oppositas, alteram positivam, alteram negativam, fore medias. Simile quid habetur etiam, si major quædam relatio quęratur inter inventionem Locorum Geometricorum; ad quę terminatur vertex trianguli habentis basim datam, F. 242

cujus angulorum ad basim summa, vel differentia æquatur angulo dato, quorum Locorum nu. 266 invenimus primum esse circulum, secundum esse Hyperbolam
F272 æquilateram. Sit in fig. 272. recta data V*u*, fiat angulus *u*VI æqualis summæ, vel differentiæ: tum methodo ibidem exposita fiat circulus *p*'VP*u*, cujus V*u* chorda, IV*i* tangens, & Hyperbola æquilatera SVT ∞ *tus*, cujus diameter V*u*, tangens pariter IV*i*: ac arcus circuli VP'*u*, & Hyperbolæ VT ∞ *tu* egressi ab V ad partes I, ac desinentes in *u*, exhibebunt ille summam, hic differentiam æqualem angulo *u*VI, reliquis idem exhibentibus respectu *u*V*i*.

829. Demonstratio pro Hyperbola ibi expressa est hujusmodi. Ducta ordinata PR*p* parallela IV*i*, & rectis VP, *u*P, erit (num. 260) quadratum RP æquale rectangulo VR*u*, adeoque VR ad RP, ut RP ad R*u*; & proinde similia erunt triangula VRP, PR*u* ob angulum ad R communem, & angulus R*u*P, sive V*u*P æqualis VPR, sive alterno PVI, adeoque differentia ipsorum PV*u*, P*u*V eadem, ac PV*u*, PVI, sive datus angulus *u*VI, quæ demonstratio eadem esset in crure *ut* ∞, cum tangens per *u* debeat esse parallela tangenti IV*i*, & continere cum *u*V angulum æqualem ipsi *u*VI ad partes oppositas, nimirum alternum. Porro in circulo ductis pariter VP', *u*P', angulus P'VI chordæ cum tangente æquatur angulo V*u*P' in alterno segmento; adeoque bini P'*u*V, PV*u* æquantur soli *u*VI, ut oportebat. At si illa demonstratio Hyperbolæ ad circulum sit transferenda, ubi VR' acquisivit directionem contrariam VR, & in negativam abiit, non erit jam R'P' media inter VR', R'*u*, sed binæ R'P', R'*p*', quarum altera directionem habet alteri oppositam, erunt mediæ. Et quidem sunt a natura circuli, in quo rectangula VR'*u*' P'R'*p*' æqualia sunt, adeoque VR' ad R'P', ut R'*p*' ad R'*u*, & ob angulos ad verticem R' oppositos æquales, angulus R'P'V sive P'VI æqualis angulo R'*up*', sive ob arcus VP', V*p*' interceptos a chorda tangenti parallela æquales, æqualis angulo V*u*P', ut oportebat.

830 Por-

830. Porro hinc aliquando fieri potest, ut ad quorundam problematum resolutionem, quæ videntur unicum continere problema, respondeant Loca Geometrica diversæ prorsus naturæ, quæ diversis eorum partibus satisfaciant, singula singulis. Satis quidem est manifestum id debere contingere, ubi positivorum, & negativorum ratio non habeatur. Ubi in problemate proposito num. 676 quæritur in fig. 239 summa segmen- F239
torum MN, NO, quæ recta data EF intercipit inter se, & binas parallelas AB, DG datas e recta ducta per punctum P datum, si ea recta debeat occurrere rectæ EF in N1 inter parallelas ipsas, solutio est admodum expedita, quam ibidem dedimus, ope solius rectæ KI, & PN ipsi parallelæ. Eadem communis erit etiam, ubi punctum N cadat extra in N2, vel N3, dummodo mutata directione recta intercepta habeatur pro negativa. Nam si nulla negativorum ratio habeatur, & quæratur recta ejusmodi, in qua M2N2, & O2N2 simul sumptæ æquentur rectę datæ, problema erit altissimum, & curvas sublimiores requiret. Si enim ex puncto P2 ducta quavis P2O2N2, sumatur N2R semper æqualis, & contraria O2N2; haud difficulter demonstratur, punctum R fore ad Hyperbolam transeuntem per P2, & habentem pro asymptotis binas rectas parallelas ipsis EF, DG, quarum prima citra EF, secunda ultra P jaceat tantundem, quantum P jacet ultra EF, vel DG. Quod si ducta per P2 quavis recta P2 M2, in ea sumatur semper M2R recta æqualis datę summę; punttum R erit semper ad Concoidem axe AB, polo P2 descriptam, cum ea ipsa sit ejus curvę notio, de qua nobis alibi agendum erit. Quare ubi eæ binę curvę se secuerint in R, habebitur ex prima N2R æqualis N2 O2, adeoque M2R summa ipsarum M2N2, N2O2 quę ex secunda erit ęqualis datę.

831. At ibi statim dignoscitur mutatio problematis ex summa considerata etiam post mutatum alterum terminum in negativum. Verum prima fronte facilius quispiam habebit pro simplici problema, quo in fig. 242, da- F.242

tis

tis in recta indefinita AD binis punctis A, D, quæratur in eadem punctum B ita, ut rectangulum sub binis ejus distantiis AB, DB a punctis A, & D æquetur dato rectangulo. Ad ejus generalem solutionem requiritur figura composita ex circulo, cujus diameter AD, & Hyperbola æquilatera, cujus AD axis transversus. Si ex quovis puncto R datæ rectæ erigatur perpendicularis RS media inter latera dati rectanguli, & ducatur ex S recta ipsi datæ rectæ parallela, quæ necessario occurret binis ramis Hyperbolæ in binis punctis L, L2, & circulum vel secabit in binis G, G, vel tanget in unico, vel evitabit, extra ipsum delata, prout RS fuerit minor, æqualis, vel major circuli radio, sive dimidiæ AD, & occursus illi cum figura coalescente ex iis binis locis solvent problema. Demissis enim perpendiculis LB, GB, que erunt æqualia ipsi SR, erit (num. 685) rectangulum quodvis ABC, æquale quadrato suæ BG, sive BL, adeoque quadrato SR, & rectangulo dato. Idem autem problema proponi posset etiam hoc pacto. Invenire duas reciprocas binis datis, quarum detur summa, vel differentia. Nam data AD est summa AB, BD, & differentia AB2, B2D, vel AB3, B3D, & alterum dati rectanguli latus est ad alteram ex ipsis, ut earum altera ad ejusdem rectanguli latus alterum. Videtur problema unicum esse utrumque, cum summas in differentias mutet, mutata directione AB in AB2. Sed idcirco maxime dividitur in bina inter se diversa, cum AB2, & B2D, non possit esse mediæ inter illas ipsas, inter quas mediæ sunt AB, AD: nam in proportione unus tantum terminus directionem mutare non potest (num. 777). Quadratum quoque eidem RS æquale, & semper positivum, æquale esse non potest utrique rectangulo ABD, AB2D, nisi suppositio positivorum, adeoque unitas problematis mutetur; cum alterum ex iis rectangulis respectu alterius, manente unica suppositione, negativum esse debeat.

F272 832 Bina pariter Loca Geometrica figuræ 272 solvunt

vunt binos casus problematis, qui simul ad unicum problema pertinere viderentur, & tamen ad duos pertinent inter se diversos. Et quidem id problema erit quoddam complementum eorum, quæ in Conicarum Sectionum elementis demonstravimus de figurarum similitudine a n. 18. Sit in fig. 273 figura *fab* directe, vel *fab'* inverse similis figuræ FAB, & quæratur, an habeant aliquod punctum P, vel P', in quo bina homologa puncta coeant, sive quod sit punctum homologum commune. Ad id inveniendum producta *af*, donec occurrat in V rectæ AF productæ indefinitè in I, sumatur *fu* in eadem directione respectu *fa*, in qua est FV respectu FA, quæ ad ipsam FV sit in ratione, in qua sunt latera homologa *af*, AF, & patet puncta V*u* fore homologa. Jam ut punctum P, vel P' commune sit, oportebit, rectæ VP, PV, vel *u*P', P'V sint in illa eadem ratione, ac anguli IVP, V*u*P ad easdem plagas in similitudine directa, IVP', V*u*P' in inversa ad oppositas, æquales sint inter se. Quare summa angulorum BV*u*, P*u*V, vel differentia P'V*u*, P'*u*V debebit esse æqualis angulo IV*u* dato, qui est summa angulorum PV*u*, PVI, & differentia P'V*u*; P'VI. Si igitur construantur bini Loci Geometrici, alter, ad quem ex punctis V*u* ductæ rectæ *u*P, VP, vel *u*P', VP' sint in illa ratione data *fa* ad FA, alter, in quo summa angulorum PV*u*, P*u*V, vel differentiâ P'V*u*, P*u*V æquetur dato angulo IV*u*, occursus ejusmodi locorum solvet problema. Porro patet ex num. 28 primum locum haberi, si in recta *u*V producta datis binis punctis V, *u*, alternis proportionis armonicæ, & ratione *fa* ad FA ipsius proportionis, inveniantur reliqua duo B, D per num. 25, & diametro BD describatur circulus BPDP': secundum autem, patet ex num. 266, fore pro P arcum circuli VP*u* habentis VI pro tangente, V*u* pro chorda, & pro P' crura VT ∞ *tu* Hyperbolæ æquilateræ habentis V*u* pro diametro, & ipsam VI, pro tangente. Quare patet, quo pacto problema construendum sit.

883. Por-

833. Porro videbatur, pro directa, & inversa similitudine eadem Loca Geometrica requiri debere, at diversa obtigerunt. Requirebatur enim in altero summa, in altero differentia angulorum ad basim æqualis datæ, quæ problemata cum in fig. 272 mutent illam eandem RP mediam inter VR, RV in binas R'P', R'p' medias inter VR', R'u, mutata positione VR in contrariam VR', Loci Geometrici requisiti mutarunt naturam.

834. Ex tam expedita problematis constructione facile deduci potest, semper commune punctum inveniri debere in binis figuris, utcumque similibus, idque unicum, si inæquales sint, ac in casu equalitatis puncto D abeunte in infinitum, circulum PBP' abire in rectam, & P inveniri expeditius, P' abire in infinitum: in casu autem inversę similitudinis secto bifariam angulo VP'u per rectam indefinitam, eandem, quæ nimirum cum rectis P'V, P'u homologis æquales continebit angulos ad partes oppositas, fore communem positione homologam, in directa vero similitudine, si non congruant directione ipsæ VP, uP positione homologę, nullas alias per commune punctum ductas communes esse posse; si vero illę congruant, omnes per ipsum ductas fore positione communes, ut sunt omnes per F ductę in fig. 33, & 34, cum nimirum novę ho-
F. 33 mologę cum precedentibus eosdem in eandem plagam
34 angulos continere debeant, adeoque inter se eundem angulum, quem illæ inter se. Sed nos jam longius evagatos septimus Canon ad se se vocat.

835. Canon. 7. *Si in quatuor proportionis cujuspiam terminis binis utriuslibet rationis maneant finiti, reliquorum autem alter, abeat in nihilum, vel ita in infinitum, ut alterum saltem ejus extremum nusquam jam sit; alter abibit pariter in nihilum, vel in infinitum eodem pacto. Quod si binis extremis manentibus alter ex extremis abeat in nihilum, vel in infinitum, alter contra abibit in infinitum, vel in nihilum, & idem in mediis continget, si bini extremi maneant: ac si, quod*

eodem

eodem redit, quoddam rectangulum finito rectangulo æquale maneat, ac alterum ejus latus abeat in nihilum, vel in infinitum, alterum contra abibit in infinitum, vel in nihilum.

836. Canonis hujus partes omnes videntur admodum manifestæ. Adhuc tamen sic accuratius demonstrantur. Si bini termini rationis utriuslibet finiti sint & unus præterea rationis alterius evanescat, vel fiat infinitus, alter ipsius non potest finitus remanere; nam is, qui supponitur evasisse infinitus, vel abiisse in nihilum, adhuc esset finitus, & inveniretur ex reliquis tribus eodem pacto, quo in Geometria, datis tribus rectis, quarta proportionalis invenitur. Porro cum eorum ratio debeat esse finita, non potest alter ex iis binis terminis abire in nihilum, altero abeunte in infinitum, ratio enim infiniti ad nihilum non finita esset, sed infinities infinita. Quod si binis extremis manentibus finitis, alter ex mediis evanescat, vel in infinitum abeat, alter ex ipsis eadem ratione finitus remanere non potest, quod eodem argumento evincitur. Non possunt autem simul abire in nihilum, vel in infinitum, ne eorum productum, quod æquari debet finito producto extremorum, fiat nihilum, vel infinitum. Eadem autem est demonstratio, si maneant medii, & alter ex extremis abeat in nihilum, vel in infinitum.

837. Porro ubi alter ex terminis extremis, vel mediis proportionis ita in infinitum absolute recessit, ut nusquam jam sit, verum nihilum illi respondere debet, non quantitas quæpiam, quæ dicatur infinitesima ordinis cujuscumque. Id quidem multo evidentius constabit, ubi manifesto demonstraverimus, quantitates infinitessimas, quæ in se ipsis tales sint, nullas revera esse, sed a nostro cogitandi modo pendere tantummodo, ut nimirum indefinitè, non absolute infinitè parvæ sint. At hìc etiam, si nomine infiniti absoluti intelligatur id, cujus saltem alter limes, ut in recta alterum punctum, ita in infinitum recessit, ut nusquam sit; verum ei nihilum respondere mille exemplis e Geometria petitis facile

evinci

evinci potest. In fig.254 ubi est VR ad VA, ut AB ad RP:
F.254 Utcumque parva sit VR respondet semper alicui RP
264 habenti aliquem terminum P, nec P ita recedit in in-
275 finitum, ut nusquam jam sit, nisi ubi R recidat in V, facta RP absolute infinita, & VR penitus evanescente: nam accurata demonstratione ostensum est (num. 149); asymptotum solam in Hyperbola e rectis omnibus ipsi parallelis nusquam perimetro occurrere. Sic etiam in fig. 264 vidimus (num. 718) e quatuor CZ, CH, ZL, HP proportionalibus solum coeuntibus omnino punctis C, Z, adeoque evanescente prorsus CZ; abire in infinitum HP ita, ut P nusquam jam sit. Itidem in fig. 265 cum sit CM ad CO, ut CO ad CP; vidimus num. 720, CP non excrescere in infinitum ita, ut nusquam jam sit, nisi CM penitus evanescente, abeat I in Q.

838. Hujus theorematis frequentissimus est usus per universam Geometriam, & in ipsis Conicarum Sectionum transformationibus easdem rite contemplanti sæpissimè occurret. Prima ejus pars in quovis etiam angulo re-
F.12 ctilineo est manifesta. In fig. 12, cum sit ER ad RQ,
9 ut EF ad FV, non potest evanescere RQ, vel abire
28 in infinitum, nisi pariter etiam ER evanescat, vel abeat in infinitum. Secundæ partis exemplum esse potest recessus directricis in infinitum ita, ut nusquam jam sit, ubi Ellipsis in circulum abit juxta numer. 109. Nam est in fig. 9 (num. 90) CF ad CM, ut CM ad CE. Ubi autem Ellipsis abit in circulum, debet focus F abire in centrum, ut in fig. 28, evanescente prorsus CF. Quare debet CE evadere prorsus infinita ita, ut nusquam jam sit. In ipsa autem fig. 9 cum rectangulum sub CF, & CE æquetur quadrato CM, abeunte CF in nihilum, abit simul CE in infinitum, quæ erat pars tertia. Pariter in Hyperbola ad asymptotos relata rectangulum sub quavis abscissa, & ordinata æquatur (num. 227) rectangulo sub aliis quibusvis. Hinc ordinata tum solum abit in infinitum ita, ut ejus vertex nusquam jam sit, cum recidit in ipsam asymptotum

cum

cum ea congruens, adeoque cum abscissa penitus evanescit.

839. Canon. 8. *Si binæ rectæ, quæ ad quoddam punctum convergebant, parallelæ fiant; illud punctum ita in infinitum recedit, ut nusquam jam sit, angulus vero, quem ad partes in ipso finito remanentes continebant, evanescit; ac is, quem altera continebat cum altera producta, censeri debet, ut in duas rectas desinens. Si vero e contrario concursus ita in infinitum recedat, ut nusquam jam sit, vel angulus ex altera parte evanescat, ex altera abeat in duos rectos; illæ ipsæ rectæ evadunt parallelæ.*

840. Hic etiam canon est admodum manifestus, & eo jam sæpe usi sumus. Hoc autem pacto facile demonstrari potest ex præcedenti. In fig. 240 ex puncto E3 ducatur recta E3I parallela AB, quæ rectæ AE2 occurrat in I. Erunt similia triangula E3AI, BC2A ob parallelas, eritque E3I ad E3A ut AB ad BC2. Abeat jam recta AE2 in AE3 parallelam BH: evanescet E3I, adeoque BC2 fiet infinita, nec concursus C2 usquam jam erit. Angulus autem AC2B semper æqualis E3AC2 alterno evanescet, cum ille evanescat; ac proinde si ponatur H in BD producta ultra C2, angulus AC2H accedet ultra quoscumque limites, ad duos rectos, & censeri debet in eas desinens, dum AC2B decrescit ultra quoscumque limites, & evanescit. E contrario si concursus C2 ita recessit in infinitum, ut nusquam sit, & angulus alter est nullus, adeoque alter desinit in duos rectos; binæ rectæ debent esse parallelæ. Si enim non essent, alicubi concurrerent, & angulos constituerent binos, ac simul duobus rectis æquales. F240

841. Cæterum hinc etiam patet, binis rectis evadentibus parallelis, concursum abire in infinitum ita, ut nusquam jam sit. Quod ipsæ utcumque in infinitum productæ nusquam concurrant. Angulum autem parallelarum nullum esse ex parte finita, patet juxta num. 681 ibidem ex eo, quod anguli AC2B mensura est semidifferentia arcuum AB, E2D, quæ abeunte E2

in

in E3, evanescit penitus, adeoque & angulus parallelarum evadit omnino nullus.

842. Hujus canonis in transformationibus locorum geometricorum usus est frequentissimus. Secunda ejus parte usi sumus num. 797 ad ostendendam analogiam, & continuitatem theorematis, quo determinatur angulus, quem binæ tangentes ductæ per extrema puncta chordæ transeuntis per centrum, & coeuntes in directrice ibidem continent. Invenimus enim ipsum in Hyperbola, si rite accipiatur, ex parte altera evanescere, ex altera desinere in duos rectos, ubi chorda est ipse axis transversus, & tangentes fiunt parallelæ. Multo tamen frequentius occurrit pars prima, quæ pertinet ad recessum puncti in infinitum, quo sæpissime usi sumus. Ejus ope invenimus num. 41 alterum axis verticem in Parabola ita in infinitum recedere, ut nusquam jam sit,
F. 9 ex eo nimirum quod *t*T. *i*I, quę in fig. 9 in Ellipsi
10 concurrebant in puncto *l* determinante punctum *m*, evaserint in fig. 10 parallelæ inter se, puncto *l* nusquam jam existente. Ejus ope inventum est num. 154, rectas parallelas axi Parabolæ, & num. 156 rectas parallelas alterutri asymptoto Hyperbolæ semel occurrere perimetro, altera intersectione ita in infinitum recedente, ut nusquam jam sit.

843. Porro ejus itidem ope admodum expedite transferuntur ad Parabolam multæ e proprietatibus Ellipseos. In Ellipsi omnes diametri convergunt ad centrum (num. 206), centrum in Parabola recedit in infinitum, cum recedat vertex *m*; quare diametri omnes in Parabola debent evadere parallelæ axi: & sunt juxta num. 206. Radii, qui ex altero foco Ellipseos incurrunt in ejus perimetrum, convergunt post reflexionem ad focum alterum (num. 202): focus alter in Parabola recedit in infinitum cum centro, & vertice altero: hinc si is focus concipiatur esse primo ille, ad quem radii convergebant, tum ille a quo prodibant, habebimus ibidem illa bina theoremata: radii, qui in Parabola exeunt e foco, abeunt post reflexionem paralleli

rallelì axi : radii, qui adveniunt paralleli axi, convergunt post reflexionem ad focum. In Ellipsi in fig. 173 existente VO dimidio latere recto principali re- F 173
cta OC ad centrum ducta determinat (num. 464) RD æqualem subnormali axis RM : in Parabola abit centrum C in infinitum: evadit ergo OD parallala VR, ut exhibet fig. 176; & proinde fit RD æqualis ipsi VO, & subnormalis æqualis dimidio lateri recto principali : ita autem se res habet ibidem. In fig. 186 existente VA æquali lateri recto, recta A*u* ducta ad alterum verticem *u* determinat RL, cujus rectangulum cum VR æquatur quadrato semiordinatæ RP : abit in Parabola F 186
punctum *u* in infinitum: igitur AL evadit parallela VR, 187
ut exhibet fig. 187, & proinde RL æquatur lateri recto VA, & quadratum semiordinatæ RP æquatur rectangulo sub abscissa VR, & latere recto : ita autem se rem habere constat ex n. 495.

844. Hic recessus in infinitum mutat constructiones omnes, ubi punctum, ad quod aliqua ducenda erat, abit in infinitum. At constructio nova semper inde deduci potest, in quam in eo casu migrat illa prior. Duo autem sunt casus. Vel enim rectæ inde ducendæ dabatur aliquod aliud punctum, quod remanet, vel dabatur sola directio, ut nimirum debuerit duci ex illo concursu recta cuipiam datæ parallela. In primo casu res erit expeditissima. Satis erit ex illo puncto, quod remanet, ducere rectam parallelam illi, in qua erat punctum, quod abiit in infinitum. In secundo aliquo artificio erit opus, quo ante constructionis transformationem determinetur aliquod ejus rectæ punctum, quod remaneat, vel distantia ab ea recta, cui parallela sit; & res iterum eodem redibit.

845. En exemplum pro primo casu: data in fig. 71 quavis chorda P*p* in Ellipsi, ad inveniendam diametrum, cujus ea sit ordinata, satis est (n. 209) ducere in fig. 71 F. 71
ex foco F rectam FA ipsi perpendicularem, quæ alicubi 72
occurrat directrici in I. Inde si per centrum C ducatur recta, ea problemati faciet satis, & ipsam illam

chordam bifariam secabit in R. In Parabola in fig. 72 centrum C abiit in infinitum ita, ut nusquam jam sit; sed remanet I. Quare satis erit ex I ducere rectam, axi parallelam, quod ibidem est præstitum.

846. Secundi casus exemplum desumemus ex problemate tertio generali, quod num. 140 proposuimus, cujus solutio ad omnes diversos casus applicata totum hunc nostrorum elementorum ordinem nobis exhibuit, juxta ea, quæ diximus num. 766, & 767. Generalis nimirum ipsa solutio fallebat in binis casibus, rectarum videlicet parallelarum directrici, & transeuntium per focum, quod nos coegit bina ipsi problemata particularia substituere, quæ in prima, & secunda propositione præmisimus.

847. Propositionis tertiæ problema illud generale erat hujusmodi. *Datis foco, directrice, & ratione determinante, invenire concursum rectæ datæ cum Sectione Conica*. Constructio problematis erat hujusmodi. Sit

F. 41 in fig. 41. AB directrix, focus F, recta data HK, quæ directrici occurrat in H. Assumpto quovis puncto L, & ducta LG perpendiculari ad directricem, capiatur LS ad LG in ratione determinante data. Centro L, intervallo LS fiat circulus. Ducatur recta LO parallela datæ KH occurrens directrici in O: tum per O recta zOZ parallela FH, quæ si alicubi occurrat circulo in T, t, ducantur LT, Lt, & illis parallelæ ex F rectæ, quarum occursus P, p cum recta data HK erunt quæsita puncta.

848. Jam vero si recta data sit parallela directrici; punctum H abit in infinitum. Hinc recta quidem FH, cujus punctum F adhuc remanet, adhuc habetur ducendo ex F rectam parallelam directrici. Sed evadit simul etiam LO parallela directrici, adeoque punctum O abit in infinitum. Debet igitur etiam OZ evadere parallela directrici. At ejus nullum jam aliud punctum habemus, unde ea duci possit. Binas habebat determinationes, alteram quod ducenda esset ex puncto O, alteram, quod deberet esse parallela HF. Utraque de-

termi-

terminatio abiit in unicum parallelismum cum directrice. Eam igitur jam ducere non possumus; nec ejus ope definire illa puncta T, t, & radios LT, Lt, quibus ducantur parallelæ FP, Fp. En primum in primo casu incommodum.

849. Quod si recta HK transeat per focum F, evanescet angulus FHK; adeoque & LOZ. Transibit igitur OZ per L, & LT, Lt abibunt in ipsam OZ, ac FP, Fp iis parallelæ in ipsam HK; quam non secabunt, adeoque occursus illos cum Sectionis Conicæ perimetro; quos per suas intersectiones debebant determinare, indefinitos relinquent: En incommodum secundi casus.

850. Ut primo incommodo medeamur, sit fig. 274 F. 274 eadem, ac 41. Quæratur LI perpendicularis OZ, sive 275 hujus distantia ab L. Ducatur ipsa, & FR perpendicularis HF, occurrens HK in R; tum RE perpendicularis directrici. Facile constabit, fore similia triangula FRH, ILO; & REH, LGO ob latera omnia parallela, singula singulis. Quare erit FR ad RH, ut IL ad LO; & RH ad RE, ut LO ad LG; adeoque ex æqualitate ordinata FR ad RE, ut IL ad LG. Porro ubi H abit in infinitum, & fiunt FH, KH parallelæ, evadit ipsa FR perpendicularis etiam rectæ datæ KR, quæ proinde datur etiam tum; dato F: datur itidem RE, & LG. Ergo datur etiam LI distantia rectæ OZ a centro L; qua data, duci poterit recta ipsa Zz; & problematis solutio huc redibit. In fig. 275 sit recta data KR parallela directrici. Ducatur FR ipsi perpendicularis, quæ producatur usque ad directricem in E. Facto circulo, ut prius, capiatur LI ad LG, ut est FR ad RE, versus partem utramlibet in ipsa GL, ac per I ducta Zz pararella directrici, ad ejus concursus T, t cum circulo, si qui sunt, ducantur radii LT, Lt, tum ex F rectæ FP, Fp ipsis parallelæ; quæ solvent problema. Erit enim FP ad FR, ut LT ad LI, & FR ad RE, sive PD, ut IL ad LG; adeoque FP ad PD, ut LT, vel LS ad LG in ratione determinante. Patet au-

gem LI' æqualem LI exhibituram rectas LT , LT' ac Lt, Lt' in directum, adeoque solutionem eandem.

851. At hic jam constat, circulum, qui constructionem nobis suggessit, necessarium non esse. Satis erit centro F intervallo rectæ, quæ ad PD, vel RE sit in ratione determinante, invenire puncta. Id Pp ipsum
F. 9 est præstitum in fig. 9. Centro F intervallo rectæ, quę ad RE esset in ratione determinante, quæsita sunt puncta Pp: ut autem ea intervalla semper præsto essent, capta est FV, & Fu ad FB in ea ratione, & ductæ per E, & V, ac u rectę iI, gG, quæ exhibent RQ, & RO ad RF in ratione eadem, adeoque quæsitis intervallis opportunas.

852. Et hoc idem pacto remedium adhibitum constructioni problematis generalis nos perduxit ad hujus primi problematis constructionem adeo simplicem, & elegantem, & vero etiam fecundam, quæ Sectionum Conicarum naturam & varias formas, ac proprietates tam multas statim exhibuit. Poterant & alia parari remedia. Sed libuit illam inire viam, quæ se prima obtulit, & quæ docet, quid agendum sit, ubi determinatio rectæ nos deserit ob punctum ejus aliquod in infinitum recedens, & binas determinationes, ut hic, in unicam coalescentes. Jam ad Canonem 9, quo secundi problematis patebit constructio.

853. Canon. 9. *Si binæ rectæ ex eodem puncto digressæ superponantur, earum angulo evanescent; binæ aliæ; quæ iis parallelæ erant singulæ singulis, evadent inter se parallelæ, vel pariter superponentur. Quod si in binis triangulis similibus vertex utriusque abeat in basim, lateribus basi supperpositis; binæ distantiæ puncti in quod abit vertex, quod punctum succedit intersectioni laterum, a binis extremis ipsius basis tam ad se invicem, quam ad ipsam basim, erunt utrobique in eadem ratione.*

854. Hujus etiam Canonis ratio est manifesta. Nam evanescente angulo binarum rectarum, evanescit angulus earum, quę ipsis sunt parallele. Quare eę evadunt

evadunt parallelę juxta Canonem 8 vel si forte distantia earum sit nulla, superponuntur. In triangulis vero illis cum latera sint semper ad se invicem, & ad basim in eadem ratione, utcumque parum vertices distent a basibus ipsis; oportet omnino etiam, ubi jam in ipsas recidunt, ratio sit utrobique eadem, ne scilicet altera in ipso verticum appulsu mutetur per saltum. F.41

855. Ubi constructio illa generalis fig. 41, applicatur in fig. 48 in Parabola rectis parallelis axi, cum ibi (num. 154) congruant puncta GOtS, recta Lt superponitur rectę LO, evanescente illius angulo OLt. Erant autem in fig. 41 rectæ HK, Fp parallelę ipsis LO, Lt. Quare hę jam parallelę evadunt inter se, nisi forte HK transeat & ipsa per F, ut $H2K2$. Inde autem consequitur illud punctum p, quod pertineret ad $H1K1$, $H3K3$, abire in infinitum ita, ut nusquam jam sit juxta n. 154, parallelis nusquam concurrentibus; ac ex eodem prorsus fonte profluit recessus in infinitum alterius intersectionis in rectis alteri asymptoto parallelis in Hyperbola juxta n. 156. 48

856. Quod si in ipsa fig. 41 transeat HK per F, rectę OL, OZ, tL, LT superponuntur; ac pariter superponuntur HF, HK, Fp, PF, & constructionem generalem frustrantur, ut diximus n. 849. At ex hoc Canone tum etiam in ipsa HK jam transeunte per punctum F, quod abit in bases triangulorum FPH, FpH, erunt fumenda puncta P, p ita, ut sit FP ad PH, & Fp ad pH, ut LT, vel Lt nimirum LS ad LO.

857. Porro id ipsum prestitissimus in fig. 35, & 36, in quibus recta data est FQ, gerente Q vices illius H. Quęsita sunt puncta P, p ita, ut essent FP ad PQ, & Fp ad pQ, ut est in fig. 41 LS ad LO. Commodum autem accidit, ut in fig. 35, & 36 illa ipsa FV jam inventa in primo problemate esset ad FQ, ut in fig. 41 LS ad LO; est enim ibi FV ad FE, ut hic LS ad LG, & ibi FE ad FQ, ut hic LG ad LO. Quare satis fuit invenire puncta P, p ita, ut esset LP ad PQ, & Lp ad pQ in ratione FV ad FQ. Id autem statim patuit admo- F.35 36 41

dum facile præstari, si sumptis hic in directrice QS, Qg æqualibus QF, ducerentur rectæ per G, & V, ac per g & V, quæ juxta num. 130 solverunt problema. Atque hoc pacto ope hujus Canonis ex illa generali constructione problematis constructio profluxit.

858. Canon. 10. *Si circuli radius in infinitum abeat ita, ut altero extremo manente, centrum nusquam jam sit peripheria circuli abibit in rectam lineam, & recta linea viceversa habenda erit pro peripheria circuli infiniti.*

859. Hic Canon abunde demonstratus, est a num.
F.271 722. Eruitur autem etiam ex Canone 8, (num. 839). Si enim in fig. 271 centrum P ita in infinitum rececedat, ut nusquam jam sit, maneant autem quævis tria peripheriæ puncta A, I, C, tres radii AP, IP, CP evadent paralleli, & anguli API, APC prorsus evanescent. Bini igitur reliqui anguli tam ad basim AI, quam ad AC, evadent binis rectis æquales; adeoque cum ob isoscelismum triangulorum API, APC, sint æquales singuli singulis, fient singuli singulis rectis æquales. Quare anguli API, APC æquales fient inter se, & recta AI superponetur rectę AC, abeunte puncto I in AC, & jacentibus punctis A, I, C in directum Cumque id in omnibus reliquis peripheriæ punctis locum habere debeat; patet omnem peripheriam, quę manet in spatiis finitis, in unicam abire rectam perpendicularem cuilibet e rectis, per quas centrum crescit in infinitum.

F.23 860. Hujus Canonis usus non semel occurrit in no-
24 stris Conicarum Sectionum Elementis. In figura 23 ostensum est (num. 100) in Ellipsi distantiam PF cujusvis puncti P ejus perimetri a foco F æquari distantiæ perpendiculari PD a peripheria circuli descripti centro facto in altero foco *f*, & intervallo axis transversi. Focus *f* in Parabola abit in infinitum. Quare is circulus abit in rectam perpendicularem rectæ FE, nimirum in ipsam rectilineam Parabole directricem. Et quidem hanc hujus circuli tam in Ellipsi, quam in Hyperbo-

perbola analogiam cum directrice Parabolæ notavimus etiam num. 102. Circulus ille in Ellipsi cavus versus F, ad quam plagam ibi jacet ejus centrum *f*, abit in rectam, ubi *f* in Parabola in infinitum recedit, idem vero, regresso *f* in Hyperbola in fig. 24 ex parte opposita, convexitatem obvertit foco F.

861. Eodem pacto etiam cum demonstratum sit nu. 194 pro Ellipsi in fig. 63, & pro Hyperbola in fig. 64 rectam CA ductam e centro C ad concursum A normalis FA cum tangente æquari semiaxi transverso CM; patet, in iis concursum ipsum A normalis cum tangente jacere in perimetro circuli descripti diametro M*m* F. 63
qui concursus A in Parabola in fig. 65 (num. 194) 64
incidit in rectam MA normalem axi AF. Res eodem 65
recidit. Circulus ille in Ellipsi in fig. 63 obverteret cavitatem foco F, abeunte *m* in infinitum in Parabola, abiret in fig. 65 in rectam ipsi FV perpendicularem, & regresso *m* ex parte opposita ex infinito in fig. 64 in Hyperbola, jam ipsi F convexitatem obverteret.

862. Canon. II. *Si binæ rectæ altero saltem utriusque limite ita in infinitum abeunte, ut nusquam jam sit, infinitæ evadant; debent in ipso infinito censeri, ut assecutæ illam rationem, ad quam ultra quoscumque limites accesserunt, dum in infinitum excrescerent: & si binæ aliæ rectæ fuerint semper in earum ratione, ac illis excrescentibus in infinitum, remaneant finitæ; habebunt accurratè eam rationem ipsam, ad quam illæ ultra quoscumque limites accesserant. Ratio autem, ad quam accedent binæ quantitates, dum in infinitum excrescunt, & quam asseeutæ censeri debent, ubi jam infinitæ sint, potest esse ratio æqualitatis, vel inæqualitatis finita, vel excrescens, aut decrescens ultra quoscumque limites; erit tamen semper ratio æqualitatis, ubi differentia ipsarum finita maneat, vel nulla, & differentia semper manebit finita, vel nulla; si binæ rectæ terminatæ ad idem punctum ab aliis binis punctis abierint in infinitum, manentibus his binis punctis, & abeunte in infinitum illo communi ita, ut nusquam jam sit.*

Z 4 863. Pri-

863. Prima theorematis pars demonstratur a continuitatis lege, quam cum alibi ubique tam sanctè Geometria servet, servare debet etiam ibi, ubi quantitates in infinitum excresunt, quæ ibi etiam, ubi & oculos nostros, & mentem fugiunt, debent, si possibiles sunt, in eo statu habere id, ad quod accesserant ultra quoscumque limites, nec per saltum illo unico momento temporis aliam rationem habere diversam ab ea, a qua temporis precedentis intervallo quam minimo, distabant quam minimum. Finitæ autem illæ, quę in earum ratione erant, & remanent adhuc finitæ, adeoque omnino aliqnam rationem habent, debent habere illam, ad quam accesserant ultra quoscumque limites.

864. Porro ejusmodi ratio potest esse æqualitatis, cum possint æquales perpetuo esse dum abeunt in infinitum. Immo etiam ad rationem equalitatis accedet, licet earum differentia finita maneat, ut videbi-
F.243 mus paulo infra. Possunt autem habere rationem fini-
260 tam quoque. Sic si in fig. 243 manentibus punctis F, H evadant HI, FG parallelę ipsi CE; puncta I, & G ita in infinitum recedent, ut nusquam jam sint, & rectę CI, CG, ac HI, FG habebunt semper in recessu eorum punctorum rationem finitam quamcumque, quam nimirum habebunt rectę CH, CF finitę. Ac si interea ipsa quoque puncta F, H moveantur utcumque, sed rectis HI, FG delatis ad parallelismum, maneant alicubi; rectę illæ CI, CG censeri deberent assecutę rationem eandem, in qua relinquuntur CH, CI; & si quę quantitates sint semper, ut ipsę CI, CG, & ipsis abeuntibus in infinitum, finitę remaneant: debebunt habere tum rationem illam, quam habent CH, CF. Potest autem ea ratio etiam in infinitum excrescere. Sic in fig. 260, decrescente VR ultra quoscumque limites, crescit ultra quoscumque limites tam RI, quam RE, & abeunte R in V, jam ita in infinitum abeunt, ut I, & E nusquam sint; & tamen RE ad RI erit semper, ut AH ad RI, ut AV ad RV, quę ratio crescit ultra quoscumque limites, dum manente VA, minuitur VR ultra quos-

cum-

cumque limites, ac demum evanescit. Est id quidem ingens quoddam infiniti mysterium; ut licet jam limes I ita in infinitum per omnes magnitudinum gradus excreverit, ut nusquam jam sit; adhuc tamen ultra ipsum habeatur spatium infinities magis protensum quodammodo, quo RE extendatur infinities magis, & quo se punctum E abdiderit. At in infinitum absolutum admittitur; id quidem ad servandam analogiam omnino admitti debet, & est simile illi mysterio, quod supra num. 769. notavimus.

865. Rationem autem æqualitatis censeri debere; ubi binæ quantitates in infinitum abierint, differentia manente finita, est adhuc mysterium; cum æqualia esse non possint, quæ differentiam habeant; adhuc tamen ad analogiam retinendam est necessarium, & sic evincitur: Ejusmodi quantitates non possunt habere ullam rationem inæqualitatis utcumque parum disjunctam a ratione æqualitatis. Exprimant enim bini termini finiti, utcumque parum inæquales rationem illorum, & erit, dividendo, horum differentia ad minorem, ut illarum differentia illa finita, ad minorem ex iis, quæ ponuntur infinitæ. Hæc igitur ex illis ita penderet, ut limitem alicubi deberet habere omnino. Vis demonstrationis patebit in exemplo sequenti: Ex natura tangentis IP in fig. 265 est in circulo etiam, ut in F.265
quavis Ellipsi juxta num. 411, NP ad PO, ut NM ad MO. Capiatur CM' æqualis CM, & ipsarum NM, MO differentia erit M'M ipsarum vero NP, PO differentia erit NO. Jam vero ipsæ NP, PO non possunt ita in infinitum abire, ut nusquam jam sit earum limes P, nisi parallelæ evadant, & punctum I recidat in Q. Etiam in illo casu ipsarum NP, PO differentia finita est, nimirum æqualis finitæ illi NO. At ipsarum NM, MO differentia illa M'M penitus evanescit, & fit verum nihilum, coeuntibus penitus in C ipsis M'M. Illarum ratio evadit accurata æqualitatis ratio. Quare etiam binæ illæ NP, PM licet differant per NO, censeri debent ad æqualita-

tis

tatis rationem delatæ, nec, quæ iis proportionales sunt, possunt in eo casu non habere rationis æqualitatem accuratam.

866. Plerumque quantitatibus infinitis ajunt respondere quantitates infinitesimas, quæ inassignabiles sint, sint tamen aliquæ, & relationes ad se invicem habeant. Quod a nobis assignari possint, vel non possint, id a nostro cognoscendi, & determinandi modo pendet, & aliud mentis finitæ genus ad aliam magnitudinum relationem cognoscendam, assignandamque deveniet, aliud ad aliam, quæ minoris, vel majoris inæqualitatis rationem secum ferat, usque ad quosdam limites a vi mentis ipsius pendentes. Idcirco nos ad evitandas æquivocationes utimur, ubi opus est, vocibus, quæ ab ipsa assignatione non pendent. Ubi de infinitesimis agemus, statuemus illud, ac demonstrabimus, lineas, superficies, solida, quæ in se determinata sint, quæ nimirum suos alicubi limites habeant; finita esse, & finitam inter se rationem habere. Hic autem ita eas voces adhibemus, ut infinitum dicamus id, cujus saltem aliquis limes nusquam jam sit. Non quærimus an ipse a nobis assignari possit, an non. Utcumque remotum sit punctum P, dummodo alicubi sit; punctum I non erit in Q, nec M, M' in C, & ipsum quidem P, sive assignari possit a nobis illa ejus distantia ab O, & N, sive non possit, ita erit alicubi, ut ultra ipsum alia habeantur, sive ut possit ulterius excurrere, crescente ipsa illa distantia; ac eodem pacto puncta I, M, M' ita erunt alicubi, ut illud cum Q, hæc cum C non congruant, sed distantiam ab iis habeant quandam in se determinatam, sive ea a nobis assignari possit, sive non possit, quæ distantia itidem adhuc decrescere poterit. Atque ea erit ipsarum distantiarum I a Q, & M, M' a C relatio ad distantiam puncti P alicubi existentis a punctis O & N, ut illa quidem augeri semper possit, hæc minui, nec ulla illarum sit maxima, harum minima; illarum autem omnium limes quidam sit infinitum absolutum, in quo

P nus-

P nusquam jam sit, harum nihilum, in quo I a Q, & M, M' a C distantiam habeant omnino nullam, sed cum ipsis accuratè congruant. Punctum autem P nusquam tum esse, qua phrasi semper usi sumus, est manifestum ex eo, quod duæ rectæ parallelę, quæ utcumque producantur, nunquam ad se invicem accedunt ne minimo quidem, utcumque exiguo in se determinato intervallo nusquam revera concurrunt; licet in finitarum magnitudinum relationibus expiscandis haberi possint pro concurrentibus in ipso infinito nostrę menti impervio, nisi forte non impervium tantummodo ipsum sit, sed pro absurdo, haberi debeat, ut mox videbimus,

867. Cęterum si rectæ NP, PO exprimant quantitates quascumque, quæ in absolutum infinitum abeunt, relicta NO finita differentia, rectę vero NM, MO sint quantitates finitæ earum rationem exprimentes, & ipsæ NM, MO non evaserint accuratè æquales, erit aliqua ipsarum differentia MM' in se determinata. Hinc erit aliqua distantia MC in se determinata, aliqua MI ipsi respondens, & non congruens cum CQ, adeoque aliqua tangens GF non congruens cum DE, & aliquod punctum P in aliqua in se determinata distantia ab O, & N. Quare si illæ NP, & PO ad rationem æqualitatis non fuerint delatæ utcumque parum ab ea distent, non erunt absolutè infinitę ita, ut limes P nusquam jam sit.

868. Ad hoc mysterium utcumque evolvendum, oportet quantitatem finitam quamcumque respectu absolutè infinitæ habere prorsus pro nulla, quanquam ea quidem cum absoluto nihilo confundi non possit. Sic & (n.741) hiatum Parabolæ licet infinitum, coacti sumus considerare, ut punctum, ut verum nihilum respectu absolutè infinitę peripherię, circuli retinentis centrum in vertice ipsius Parabolę.

869. Postrema canonis pars sic demonstratur. Vel bina puncta quę remanent sunt, ut N, & O in eadem recta AB, in qua punctum P in infinitum recessit, &

patet

& patet ipsarum NP, PO differentiam fore illam NO finitam. Vel in diversis rectis ea puncta sunt in fig. F.266 266 puncta H, C rectarum CP, HP, quæ evadunt absolutè infinitæ, ubi punctum P ita in infinitum recessit, ut nusquam jam sit; & in hoc secundo casu, ante quam punctum P illa infiniti nobis impervia velut voragine absorbeatur; si radio PC fiat circuli arcus CR occurrens rectæ PH in R; ipsarum PC, PR differentia erit HR. Ubi autem punctum P in infinitum recesserit, arcus CR debebit congruere cum perpendiculo CV per canonem 10. Quare differentia fiet HV, quę quidem vel nulla erit, si nimirum CH sit perpendicularis HP, puncto H congruente cum V, vel finita erit, extantibus adhuc punctis H, & V.

870. Hujus canonis usus frequens occurrit, secundæ F. 6 partis potissimum. Num. 25 cum datis in fig. 6. binis 265 punctis alternis A, C proportionis harmonicæ, & data ejus ratione; quæreremus reliqua duo B, D, invenimus, si ratio data foret æqualitatis, B quidem abire in mediam rectam AC in R, D vero ita infinitum recedere ut nusquam jam esset. Res eodem rediit, atque hic in fig. 265, & rectæ RD, CD ad æqualitatis rationem delatæ ita in illam infiniti barathrum merserunt punctum D, ut nusquam jam esset, & ipsæ quidem absolutè infinitæ evaderent, differentia autem ipsarum jam esset nulla.

871. In applicatione theorematum Ellipseos, vel Hyperbolæ ad Parabolam summus ejus usus haberi potest. Quoniam rectæ F*m*, *m*E in fig. 9. debent acquirere F.9 rationem æqualitatis, ubi ea in Parabolam migrat, ver- 10 tex *m* axis transversi in ipsa Parabola in fig. 10. nusquam jam est, & ipsę evadunt absolutè infinitæ. Hinc vero ad Parabolam transfertur theorema pertinens ad Ellipsim, & Hyperbolam propositum num. 74, quod nimirum quadrata semiordinatarum RP in fig. 9. & 11 ad axem transversum sint, ut rectangula MR*p* sub abscissis a binis verticibus. Dum eæ mutantur in Parabolam figuræ 10, abit *m* in infinitum ita, ut

nus-

nusquam jam sit. Quare si binæ assumantur semiordinatæ, binarum mR, quæ ad eas pertinent, & evadunt absolutè infinitæ, ratio evadit ratio æqualitatis, cum differentia ipsarum sit illa finita distantia binorum punctorum R. Quare illa rectangula erunt, ut solæ abscissæ MR a vertice M, qui in Parabola manet. Id autem ita se habere constat; id enim ipsum eodem numero pariter proposuimus: atque eo modo ex Ellipsi, & Hyperbola ad Parabolam transfertur eadem proprietas generalius pro diametris omnibus proposita numer. 357, cum abeunte in infinitum centro in Parabola; simul cum ipso cujusvis diametri alter vertex in infinitum abeat, nec usquam jam sit.

872. Ejusdem canonis ope illa etiam Parabolæ proprietas, quam num. 200 demonstravimus in fig. 65, quod nimirum foci radius FP æquetur tam distantiæ FI ejusdem foci a normali, quam distantiæ FQ ejusdem a tangente computatis in axe, derivari potest ex proprietate Ellipseos proposita num. 189 in fig. 63, quod normalis secet Ff in ratione laterum FP, fP, & quod concurrentibus normali, & tangente axi transverso in I, & T, constituant proportionem harmonicam, quatuor puncta f, I, F, T. Nam ex prima alternando erit FP ad FI, ut fP ad fI, quæ ratio cum abeunte in Parabola puncto f in infinitum, & remanentibus FP, FI, evadat ratio æqualitatis, erit in ea etiam FP æqualis FI. Ex secunda vero est FT ad FI, ut fT ad fI; quæ ratio pariter abeunte f in infinitum, & manentibus T, I, evadit ratio æqualitatis; unde fit, ut in fig. 65 rectæ FP, FI, FT æquari debeant inter se. F.63 65

873. Et his quidem casibus facile fuit canonem hunc applicare; at artificio aliquo opus erit nonnunquam, ut ipsum applicari possit, ut ubi plures quam duæ quantitates infinite fiunt ob unius puncti tantummodo recessum in infinitum. In Ellipsi (num. 419) sunt continue proportionales in fig. 153 tres rectæ CR, CV, CQ, F.153 155

sive

sive abscissa a centro ; semidiameter & subtangens a centro computata. Abeunte centro C in infinitum, ubi ea in Parabolam mutatur; debet ea proprietas aliam parere aptatam ipsi Parabolæ. Ea sic facile inveniri poterit. Cum sit eadem ratio CR ad CV, & CV ad CQ; erit pariter eadem ratio differentiæ antecedentium RV ad differentiam consequentium VQ. Erit igitur VR ad VQ, ut CR ad CV: Porro abeunte centro C in infinitum, ac manentibus R, & V, ea ratio evadit ratio æqualitatis; evadunt igitur æquales etiam VR, VQ in parabola; nimirum distantia VR verticis V in fig. 155 a normali æqualis distantiæ VQ a tangente computata in axe; sive subtangens dupla abscissæ; quod num. 405 de ipsa parabola demonstravimus demonstratione peculiari.

874. Majus aliquod artificium requiritur plerumque, ubi non commune aliquod punctum binarum rectarum abit in infinitum, sed bina, singularum singula, vel ad demonstrandum, differentiam manere finitam, ex qua profluat ratio æqualitatis, vel si differentia quoque ita in infinitum excrescat; ut earum ratio & finita censenda sit, & adhuc ratio inæqualitatis, ad inveniendam rationem ipsam, & substituendas quantitates finitas, quæ eam rationem exprimant. Adhuc tamen non deerunt plures methodi exercitato Geometræ ad id præstandum. Bina pro binis hisce casibus exempla alterum pro altero exhibebit simul ipsum theorema illud generale, quod n. 299. proposuimus pro rectis omnibus Sectioni Conicæ bis occurrentibus, quod hoc ipso artificio transtulimus ad rectas axi parallelas in Parabola, & utrilibet asymptoto in Hyperbola, ac ejus ope invenimus theorema alterum ipsi substitutum pro hisce casibus particularibus num. 305 & peculiari demonstratione repetitum deinde ex finita Geometria.

F.91 875. Theorema generale huc reducitur. Si in fig. 91 rectæ quotcumque PLp ductæ per quoddam punctum L occurrant Sectioni Conicæ bis in punctis P, p; rectangula sub earum segmentis LP, Lp interceptis inter id

puripunctum, & illos occursus erunt ad se invicem in ratione, quæ data Conica Sectione; & ipsarum rectarum inclinationibus, erit semper constans, utcumque mutato puncto L. Abeat jam altera intersectio, ut p, in infinitum, quod accidit solum rectis axi parallelis in Parabola; vel alteri asymptoto in Hyperbola: rectangulum PLp evadit infinitum. Sed si rectæ Lp in eo casu substituatur recta, quæ mutato puncto L, mutetur in eadem ratione; in qua mutatur ipsa Lp; jam etiam rectanguli sub LP; & sub hac recta ratio ad reliqua rectangula manebit constans; nec immutata a mutatione puncti L.

876. Porro omnes rectæ Lp infinitæ in Parabola habendæ erunt pro æqualibus, & in Hyperbola pro proportionalibus rectis; quæ in quovis angulo ducantur ex ipsis punctis L ad illam asymptotum; cui Lp evasit parallela; Nam si in fig. 276 ducantur per bina puncta L, L' binæ Pp; $P'p'$ parallelæ axi transverso, tum L'A, P'D, $p'd$ perpendiculares ipsi Pp; patet, differentiam binarum $L'p'$; Lp fore æqualem summæ, vel differentiæ ipsarum LA; pd, cumque ambas Pp, $P'p'$ debeat secare idem axis conjugatus bifariam; patet, ipsam pd, æquari PD. Cum igitur mutata Ellipsi in Parabolam, & abeuntibus punctis p, p' in infinitum, maneant finite AL PD; manebit finita illarum differentia; & proinde ratio erit æqualitatis. At in fig. 277 si binæ chordæ Pp, $P'p'$ inter se parallelæ occurrant binis asymptotis in binis punctis H, h, & H', h', ducantur autem, ex binis quibusvis earum punctis L, L' binæ rectæ LI, L'I' in quovis angulo ad asymptotum Ch, erunt Lh; $L'h'$, ut LI; L'I' ob triangulorum similitudinem. Abeuntibus autem punctis p, p' in infinitum; cum ph, $p'h'$ semper (num. 221) æquentur finitis PH, P'H', erunt Lp ad Lh; & $L'p'$ ad $L'h'$ in ratione æqualitatis ob differentiam finitam. Igitur & Lp; $L'p'$ erunt, ut LI, L'I'. Hinc in iis casibus pro ea constanti ratione rectangulo sub binis distantiis Lp, $L'p'$ a binis occursibus p, p' substitui poterit distantia ab unico occursu in recta qua-

F. 276 277

vis

vis constanti in Parabola, vel illi ipsi asymptoto inclinata in Hyperbola in angulo constanti quovis ex illo ipso puncto dato. Atque id ipsum præstituimus illo num. 305, & rite factum per finitam Geometriam demonstravimus.

877. Liceret hìc addere jam Canonem 12 huic similem pro rectis, quę in infinitum decrescunt ita, ut demum evanescant, quæ pariter, dum ita decrescunt ad rationem aliquam accedunt ultra quoscumque limites, quam finitæ quantitates acquirunt eo momento temporis, quo illæ evanescunt, quæ ratio pariter esse potest vel utcumque inæqualitatis finitæ, vel etiam aucta, vel imminuta in infinitum, cui canoni tota innititur methodus, quam Nevvtonus appellavit primam nascentium, vel ultimam evanescentium, & ex qua methodus illa, quam idem appellat *fluxionum*, ortum duxit. Quod si quantitates dum in infinitum decrescunt, infinitesimæ dicantur, & harum infinitesimarum certi ordines, & gradus designentur, ac ad certos canones redigatur eorundem usus, illa omnis ubertima sane differentialis habetur methodus, quæ calculo potissimum adjuta tantos fecit tam brevi in omni & pura, & mixta Mathesi universa progressus, qui quidem gradus si etiam in quantitatibus in infinitum excrescentibus pariter considerentur, habetur quidquid ad methodum infinitorum pertinet in Geometria.

878. At ea omnia nos alteri tomo edendo, cum primum per tempus licuerit, reservamus; in promptu enim est omnis materia: at e solidioribus principiis conabimur stabilire omnia. Nam nec illud nobis satisfacit, quod Nevvtonus de evanescentibus quantitatibus habet, eas ad quandam rationem devenire, neque antequam evanuerint, neque post, sed tum, cum evanescunt; tum enim, cum evanescunt, jam nihil sunt, neque ullum est ultimum esse quod acquirant, sed vel sunt aliquid adhuc, quo minus erunt deinde, vel nihil omnino sunt. Multo autem minus illud arridet, quod alii usurpant, qui infinitesimas quantitates contemplantur, ut

ut aliquid, quod in se determinatum sit, & rationem ad finitas habeat minorem quacumque data. Cum enim datam dicunt, si intelligant, quæ reapse data sit; fieri sane poterit, ut nec data sit ratio 1 ad 1000, & tunc ratio 1 ad 2000 minor erit, quacumque data; si vero intelligant etiam dabilem, quod vere intelligunt ii, qui ejusmodi quantitates inassignabiles vocant; difficultatem ii quidem nequaquam eludunt. Si enim ita assignabilem, & dabilem dicunt, ut a nobis distinctè percipi possit ipsa earum magnitudo per relationem ad mensuras, quas intuemur; & id a mentis ipsius pendebit vi ut supra diximus numer. 866, ita, ut quod respectu alterius mentis dari, vel assignari non possit, possit ab altera. Cumque mentis cujuspiam vis fines habeat omnino certos; id, quod uni assignabile erit, atque finitum, alteri erit inassignabile, & infinitesimum, ac duplum infinitesimi respectu ejusdem mentis erit finitum. Si vero mentis ipsius vim, & perceptionem distinctam nequaquam respiciunt; cur eæ quantitates, quibus in universa Geometria, & Analysi perpetuo utimur, quarum ope tam longas demonstrationes pertexímus, quarum ordines, & gradus, ac relationes ad se invicem tam multas persequimur, assignari non possint? Cum ratio cujusdam quantitatis ad finitam quandam dicatur minor quacumque dabili, cum ejus ipsius quantitatis dimidium ad eam ipsam quantitatem finitam, duplo adhuc minorem rationem habeat? Illud unum est reliquum, ut ubi ratio *minor quacumque data* dicitur; significetur id, quod nomen *datum* in Geometria plerumque exprimit, nimirum *determinatum*, & infinitesimæ quantitates in se ipsis determinatæ, qua voce ad tollendas æquivocationes utimur, nullæ sint: sed infinitesimæ dicantur eæ, quas nos indefinitè concipimus, quarum nimirum magnitudinem non definimus, sed ita parvam accipimus, ut ad nostrum libitum imminui possit, sine ullo fine a nobis determinato, quo nimirum liceat demonstrationem deinde reducere, si opus sit, ad absurdum. Ea acceptione infinitesimorum habita & rite confirmata, solidissimæ totius methodi demonstrationes obveniunt, quas non simul cum earum usu in curvarum generalibus proprietatibus per simplicem etiam Geometriam eruendis, ac curvarum utiliorum elementis inde repetitis eodem illo tomo persequemur.

879. Eodem autem pacto & quantitates, quæ in infinitum

excrescunt, accipi indefinitè possunt, ac demonstrationes, quæ quæ inde profluunt pro ipsis curvarum transformationibus; sunt sanè multo & solidiores, & ipsi nostræ menti magis perviæ; quam eæ, quas ex infiniti absoluti mysteriis hic adhibuimus. Mysteria enim ipsa infiniti absoluti extensi ejusmodi sunt, ut nos ea studiosissimè persequentes demum deduxerint ad censendum potius impossibile prorsus, & repugnans infinitum absolutum in quantitate; quam tantummodo finitæ nostræ menti impervium. Canones, quos hic præscripsimus ad eruendas finitarum quantitatum, quæ post transformationem residuæ sunt, relationes mutuas, habemus pro certissimis in iis omnibus, quæ pertinent ad ipsas quantitates finitas residuas; & bina ipsorum Canonum genuina fundamenta censemus esse illa, quæ suis locis protulimus. Ubi nimirum punctum aliquod traducitur per infinitum, & plusquam infinitæ quantitati substituitur negativum ejus complementum ad integrum infinitum circulum juxta n. 776, fundamentum est ipsa homogeneitas Locorum Geometricorum simplicium; quorum partes omnes easdem habent relationes ad se invicem, ut ibidem monuimus: ubi vero punctum nusquam jam est; sed infinito concipitur demersum, atque obrutum, habetur continuitatis lex, quæ cogit quantitates finitas post ipsam transformationem remanentes eam habere rationem; ad quam accesserant ultra quoscumque limites ipsæ, quæ remanent; & ad quam accedere debuissent illæ etiam, quæ in infinitum excrescentes concipiuntur, nisi alicubi necessario obrumperentur, ante quam absolutè infinitæ evaderent. Censemus autem abrumpi alicubi debere omnino ita, ut nunquam assequi possint omnem illam extensionem quæ possibilis est. Quidquid existit, id omne fines habere certos, arbitramur, ultra quos alii, sed omnes itidem certi, & definiti limites habeantur, ut dierum futuræ æternitatis numerus a præsenti die ad quemcumque determinatum, qui, extiturus est aliquando, finitus est; sed alius haberi potest, & omnino habebitur ipso major. Eodem prorsus pacto nobis persuasum est, rerum quarumcumque existentium numerum; ut hominum, necessario semper finitum fore; atque id ita; ut eo major alter haberi semper possit, qui & ipse finitus sit, nec unquam simul possit existere totum id, quod, si seorsum spectetur, potest existere. Neque enim fieri potest, ut summa Divini Conditoris

toris Omnipotentia vires exhauriat suas, & condat quæcumque condere possit, quin alia supersint sine fine, quæ itidem condat, si velit, quod nos quidem appellare suemus *finitum in infinitum*, & ibi uberius explicabimus, ubi hanc infinitorum theoriam fusius persequemur. Eodem nimirum pacto, & rectam lineam, & curvilinei cruris cujuscumque tractum, censemus, non posse simul existere cum ea omni longitudine, quam successive habere potest, quę nimirum quotiescumque extiterit, finita erit, & alias se longiores purè adhuc possibiles post se relinquet ita, ut nulla sit ultima earum, quæ existere possunt, & maxima, quemadmodum nulla itidem longitudo est minima, sed quacumque determinata longitudine utcumque parva, quæ non sit absolutum nihilum, aliæ adhuc minores, & a nihilo minus distantes haberi possunt.

880. Interea colligemus hic illa mysteria, quæ nobis demum visa sunt migrare in vera absurda, quæ quidem sunt pleraque. Mittimus illum nostræ menti impervium sane transitum puncti per infinitum ad partes oppositas, & nexum rectæ utrinque in infinitum productæ in partibus oppositis, qui quidem omnem excedit captum humanæ mentis; esset enim, quo is evitari posset, concipiendo punctum, quod ex opposita parte regreditur, non esse idem, ac id, quod recesserat, sed aliud, & solum post integram rectæ conversionem punctum idem, per dimidiam infiniti circuli circumferentiam evagatum, redire; licet id ipsum omnem Locorum Geometricorum analogiam perverteret, ut facile ostendi posset. Mittimus rationem æqualitatis in quantitatibus inæqualibus, quæ nimirum differant quantitate finita; cum reponi possit, pro nihilo habendam esse quantitatem finitam respectu infinitarum; quamquam aliud omnino est haberi debere pro nihilo, aliud revera nihil esse; quod ad veram æqualitatem requiritur. Mittimus illa infinita spatia extensa longe ultra alia infinita, quæ concipienda diximus n.771, quo nimirum infiniti illi circuli excurrant alii longe ultra alios, quorum ope negativæ quantitates ortę ex transitu per infinitum retineant rationem quandam finitam inæqualitatis cujusvis; cum ea non aliter demonstrentur, quam ex sola analogia: quanquam in tanta exemplorum accuratissime demonstratorum multitudine ipsa etiam analogia ingentem habere vim debet.

881. Hisce omnibus omissis, quæ possent vel non admitti; vel pro mysteriis quibusdam haberi nobis imperviis, quid illud, quod finita, & accurata evidentissima Geometria demonstratione evincitur, ut n.864 inuimus, in fig. 260 rectam RE debere infinities majorem esse, quam RI, ubi in infinitum excrescunt? Concipiatur recta VO ita in infinitum extensa, ut ejus vertex nusquam jam sit, nimirum ut omnem eam, si fieri potest, extensionem habeat, quam habere potest, & quæ utique a curvarum sibi adjacentium descriptione non pendet. Concipiatur jam ipsi adjacens sola curva TE*t*. Nullum sane erit segmentum finitum ipsius rectæ VO, quod aliquando ordinata RI non superet in motu continuo puncti R versus V. Igitur si curva TB*t* extenditur, quantum extendi potest, nihil ex recta illa ultra ipsam procurrit, & appellente R ad V, ordinata ipsa RI puncto jam I demerso in illis infiniti latebris, atque obruto, illi VO pariter infinitæ æquabitur. Quo igitur procurret ultra RE, ut ipsa RI infinities sit major? An secunda curva accedente, ipsa illa recta VO, quæ ab iis, ut diximus, non pendebat, protenditur, ut novam ordinatam RE sibi jam congruentem excipiat? An non nostræ tantummodo mentis a fine abstrahentis figmentum est & rectæ illius, & curvæ continuatio sine fine? Nam eæ, si utcumque finitæ alicubi sunt, nihil absurdi involvunt. Sane utcumque magnæ ordinatæ finitæ RI alia RE in quavis ratione major respondere potest; congruenti cum tota VO *absolute* infinita non potest.

F. 260

882. Quid in illo hiatu Parabolæ, in fig. 270? Licebit sane ibi deprehendere absurdum potius gravissimum, quam impervium nostræ menti mysterium. Nam ex eo, quod recta DA excurrat semper ultra ipsam Parabolam, nisi congruat cum ipso axe DA2, eruimus n.741 spatium cruribus S, T infinitis interceptum minorem quavis finita ratione rationem habere ad arcum circuli circumquaque infiniti. At id ipsum spatium admodum facile demonstrabitur majus, quam ipsius infinitę peripherię subquadruplum. Certissimum enim est in Geometria ex Archimedis inventis, diametrum ad peripheriam habere rationem majorem, quam 1 ad 4, cum habeat sane majorem etiam, quam 7 ad 22. At hiatus ille facile demonstratur æqualis ipsius circuli infiniti diametro. Ubicumque enim assumatur punctum G in tangente B4A4 in infinitum producta ita, ut omnem eam ha-

F. 270

bea-

beat extensionem, si id fieri possit, quam habere potest, ducaturque recta ipsi axi DA2 parallela; semper Parabolæ perimetro occurret in aliquo puncto P. Quare hiatus ille idem tantundem extenditur, quantum ipsa circuli infiniti diameter, cui proinde æqualis erit. Est igitur eadem ratio & major, & infinities minor, quam 1 ad 4, quod est absurdum. Mysterium erit, si dicatur, axem DA2 infinities magis protendi, quam tangentem DB4, DA4. Et quidem id omnino dicendum erit; nam DG3 ad G3P3, sive DR, est, ut radius ad tangentem anguli G3DP3, qui cum abeunte H3 in H2, quo casu puncta G, & R ita in infinitum abeunt, ut nusquam jam sint, abeat in rectum, ea ratio tum evadit quantitatis finitæ ad infinitam; unde erui deberet, axem Parabolæ infinitum infinities longiorem esse, quam infinitam tangentem. At an idcirco recta DA2 infinities magis protendi potest, quam DA4, quod parabola ipsis accessit, cujus illa est tangens, hæc vero axis? Quid si aliam describeremus Parabolam axe DA4, tangente DA2? Num idcirco illa, quæ infinities minor erat, infinities major evaderet?

883. Maximam hoc quidem argumentum apud nos vim habet, & ei simillimam alia quamplurima, quæ proferri possent, ut quoddam aliud, quod jam ab anno 1741 protulimus in dissertatione *de Natura, & usu infinitorum, & infinite parvorum*, ubi ostendimus, admisso infinito absoluto in extensione, partem obvenire æqualem, immo etiam majorem toto. Accedit autem & illud, quod, ut n. 837 vidimus, infinito absoluto post ipsum, & finitam aliquam quantitatem pro tertia continue proportionali respondet nihilum absolutum, non quæpiam quantitas, quæ infinitesima dici debeat, & partes, atque extensionem aliquam habere possit, quod quidem mille geometricis argumentis evinci potest. Sic in fig. 260 sic geometrica constructione investigaremus tertiam post RI, & RA, vel post RE, & RA, abeunte R in V, & factis RI, RE absolutè infinitis, facile sane inveniretur, utramque abire in verum, & absolutum nihilum. F. 260
Porro facile & illud patet, tertias illas post RI, vel RE, & eandem RA forè reciprocè, ut ipsas RI, RE. Quamobrem abeuntibus in infinitum absolutum binis rectis, si eæ finitam aliquam rationem haberent ad se invicem, vel ut hic etiam in infinitum vel auctam, vel imminutam; eandem esse inter ipsa nihila ratio-

tionem oporteret, & in ipsa extensione aliquod nihil deberet esse magis nihil, immo & infinities magis nihil, quam aliud nihil, quod quidem, quam pugnet cum nitidissima illa nihili idea, quę menti humanæ cuilibet se pręsens sistit, nemo non videt.

884. Sunt quidem, qui in infinito, ajunt, neque æqualitatis, neque totius, & partis nomen admitti posse. At id quidem erit, non difficultatem, sed usum sermonis tollere, ne redarguaris, ut si quis omnium idiomatum usum adimeret. Debent sane illa vocabula admitti etiam ibi, cum idea, quæ nobis clarissima iis respondet nominibus ab infiniti ratione non pendeat. Quocumq; utaris nomine, ultra illam rectam, quę extenditur, quantum extendi potest sine ullo limite, nihil esse potest, quo eadem recta, adjecta ipsi ad latus altera potius curva, quam altera & cum altera potius conditione, quam cum altera, excrescat jam, & producatur. Si bina quæcumque sint ejusmodi, ut in altero sit, quidquid habetur in altero, & præterea aliquid, quod in eo non habetur; hoc sane, sive finitum sit, sive infinitum, habebit id, quod concipimus, cum dicimus, majorem esse, & cum dicimus, esse totum respectu suarum partium, quarum altera erit id, quod commune est, altera id, quod ipsi accedit. Majus autem adhuc semper erit totum sua parte, & pars ipsi toto ęqualis esse non poterit, multo vero minus poterit esse major. Idem quodpiam eidem in hoc sensu ipso, sive finitum sit, sive infinitum, & æquale simul, & majus, & minus esse non poterit. At esset, ac extensiones absolutè infinitæ, ut & series absolutè infinitæ, si eas inter se diversa ratione comparaveris, eædem sane iisdem & majores simul erunt, & æquales, & minores, quod argumentis evincitur. Illud igitur dicendum potius, quantitatem nullam existere posse, quæ finita non sit, quam ejusdem appellationes infinito non convenire; & quæcumque contradictionem involvunt, absurda dicenda sunt, quæ impossibilem existentiam evincant, non mysteria tantummodo, quæ finitæ mentis captum transcendant.

885. Ac nobis quidem considerantibus, unde fiat, ut impossibilis sit quantitas infinita, occurrit illud, quod infinitum summam simplicitatem, & unitatem requirat, quæ a summa infiniti perfectione nequaquam sejungi possit, quantitas autem partibus omnino constare debeat, & compositionem exposcat. Si linea in infinitum ex utraque parte excurrat; invenimus in illa

infi-

infinita distantia eam quodammodo copulari, atque conjungi, & in orbem redire debere, ut & infinita Hyperbolæ, ac parabolæ crura a se invicem per infinitum tractum divulsa, ibidem quodammodo conjungi, tanquam si illa infinita distantia jam esset nulla. Ille infinitus hiatus Parabolæ in fig. 270 licet æqualis infinitæ tangenti, debet esse quoddam veluti punctum juxta n.741, quo motus continuus puncti P nequaquam interrumpatur. Æquivalere debet unico illi puncto, in quod centrum Ellipseos, quod erat unicum punctum, abiisse, censendum est. Omnes nimirum diametri in Ellipsi ad centrum convergunt, & in eo conjunguntur. Eædem in Parabola terminari debent ad infinitum cruribus illis infinitis conclusum, quod illi unico puncto æquivalet. Dum punctum H est extra H2, utravis e parte sit, punctum P est in altero ramo, punctum A1, A3 ultra ipsum excurrit: & unico momento, seu puncto temporis, quo H est in H2, utrumque ad partes A2 debet esse in omni eo infinito spatio, in quo, ut diximus, terminari debent omnes illæ diametri, quę ibidem secum invicem, & cum axe, & cum ipsa recta gyrante simul singulæ coire deberent quodammodo, ut etiam parallelarum quarumcumque concursus in infinito quodammodo delitescit. En igitur infinitum spatium conclusum cruribus infinitis, quod licet æquale sit rectæ toti utrinque in infinitum extensæ; tamen unius puncti prorsus indivisibilis naturam affectat, quod cum illa infinita distantia, quę debeat quodammodo evadere nulla tum, cum infinitum attingitur, mirum in modum consentit. Nec in eo tantummodo spatio, quod respectu infinitæ peripheriæ deberet esse, ut punctum quoddam, ejusmodi unitatem, simplicitatem, indivisibilitatem infiniti natura requirit, sed etiam in universa ipsa infinita peripheria, & per eam in universa infinitæ veluti sphæræ superficie, quæ a dato quovis puncto quaquaversum extenditur in infinitum. Nam ubi Ellipsis per parabolam in Hyperbolam migrat, concursus ille semidiametrorum omnium, quæ ex parte cava concurrebant in unico centro, diffunditur quodammodo per totos illos circuli quaquaversum infiniti arcus, qui intercipiuntur iis asymptotorum angulis, quos axis transversus secat, qui ad totam infinitam peripheriam sunt, ut ii anguli ad quatuor rectos. Quęvis enim recta in Hyperbola a finito ejus centro egressa in iisdem angulis jacens incurrit in perimetrum hinc, & inde, ultra quam protenditur

F. 270

ditur ex parte cava in infinitum, atque illud invenit infinitum centrum Hyperbolę analogum finito Ellipseos centro, & illum axem conjugatum offendit,qui pariter finito axi Ellipseos conjugato respondens Hyperbolā dividit in binos infinitos ramos versus se cavos,& suis singulos focis preditos,ut axis conjugatus Ellipseos finitus ipsā dividit in duas ejusmodi finitas semiellipses. Succedunt igitur ii arcus infiniti unico centro indivisibili Ellipseos,& ejus naturam affectant.Si jam bini accedant Hyperbolæ conjugatę rami,ipsi reliquum omne,quod in reliquis asymptotorum angulis superest,in unicum pariter punctum nitentur cōtrahere,ut jam debeat quodammodo infinita omnis peripheria circuli circa Hyperbolæ centrum circumquaq; infiniti, affectare unici indivisibilis puncti naturam.Atq;id ipsum pertinebit ad omnem superficiem sphæræ pariter infinitæ,si Hyperbolæ planum circa axem conjugatum gyrando integram conversionem absolvat,& illa infinita peripheria puncto quodammodo æquivalens,infinitę ipsius sphęrę superficiem producat,quę tota eo ipso, quod infinita sit,puncti naturam,simplicitatem,indivisibilitatem requirat; cumq; eam habere omnino non possit, sed in immensum augere debeat, ex ipsa quantitatis natura sibi inhęrente, compositionem,atq; divisibilitatem, & partes;dum duo ita contraria inter se conjungere, & copulare veluti studet, contradictionem involvat,necesse est, & impossibilis omnino sit.

886. Atque hoc demum pacto licebit etiam e geometricis hisce meditationibus mentem attollere,ac Divinæ Immensitatis simplicitatem summam admirari,quæ ab omni partium compositione alienissima,cum summa Naturę simplicitate,atq;unitate summi infiniti naturam conjungit, & perfectiones omnes miro,atque inexplicabili nexu conjunctas complectitur. Infinitam venerabimur majestatem perculsi, atque attoniti, ac hęrebimus admirabundi infinitam illam animo pervolventes mentis infinitæ vim,qua & hasce ipsas harum curvarum proprietates tam multas, tam varias,tam miras, quas nos tam longa ratiocinatione,ac deductione tam molesta persequitur, una cum aliis infinitis infinities magis arduis,atq; mirificis,& pulcherrimis,atque elegantissimis sublimiorum curvarum proprietatibus, unico intuitu,ac simplicissima cognitione perspicit, & penitus comprehendit.

F I N I S.