MATEMATIČKI INSTITUT

KLASIČNI NAUČNI SPISI

NOVA SERIJA

Knjiga 1(16)

RUĐER BOŠKOVIĆ

O ZAKONU KONTINUITETA I NJEGOVIM POSLEDICAMA U ODNOSU NA OSNOVNE ELEMENTE MATERIJE I NJIHOVE SILE

S latinskog prevela
DARINKA NEVENIĆ-GRABOVAC

Predgovor i komentar napisao i prevod stručno redigovao
ERNEST STIPANIĆ

BEOGRAD
1975

MATEMATIČKI INSTITUT

KLASIČNI NAUČNI SPISI

NOVA SERIJA

Knjiga 1(16)

RUĐER BOŠKOVIĆ

O ZAKONU KONTINUITETA I NJEGOVIM POSLEDICAMA U ODNOSU NA OSNOVNE ELEMENTE MATERIJE I NJIHOVE SILE

S latinskog prevela
DARINKA NEVENIĆ-GRABOVAC

Predgovor i komentar napisao i prevod stručno redigovao
ERNEST STIPANIĆ

BEOGRAD
1975

KLASIČNI NAUČNI SPISI

NOVA SERIJA

Knjiga 1(16)

Izdaje: Matematički institut — Beograd, Knez-Mihailova 35

Štampa: „Naučno delo“, Beograd, Vuka Karadžića 5

DE

CONTINUITATIS LEGE ET EJUS CONSECTARIIS

PERTINENTIBUS

AD PRIMA MATERIÆ ELEMENTA EORUMQUE VIRES

DISSERTATIO

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH

SOCIETATIS JESU PUBLICO MATHESEOS PROFESSORE

IN COLLEGIO ROMANO.

ROMÆ MDCCLIV.

EX TYPOGRAPHIA GENEROSI SALOMONI

APUD VENANTIUM MONALDINI BIBLIOPOLAM IN VIA CURSUS.

PRÆSIDUM FACULTATE.

MATEMATIČKI INSTITUT

KLASIČNI NAUČNI SPISI

NOVA SERIJA

Knjiga 1(16)

RUĐER BOŠKOVIĆ

O ZAKONU KONTINUITETA I NJEGOVIM POSLEDICAMA U ODNOSU NA OSNOVNE ELEMENTE MATERIJE I NJIHOVE SILE

S latinskog prevela
DARINKA NEVENIĆ-GRABOVAC

Predgovor i komentar napisao i prevod stručno redigovao
ERNEST STIPANIĆ

BEOGRAD
1975

U r e d n i k
akademik TATOMIR P. ANĐELIĆ

Primljeno na 85. sednici Naučnog veća Matematičkog instituta od 24. marta 1975. godine.

Republička zajednica nauke SR Srbije učestvovala je u troškovima izdavanja ove publikacije.

Prema mišljenju Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije broj 413-387/74-02 od 1. aprila 1975. godine, ova publikacija je oslobođena poreza na promet.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

1. *Zakon* ili *princip kontinuiteta* (lex seu principium contiuitatis) bio je Boškoviću fundamentalno ishodište i stalni putokaz u njegovoj izgradnji teorije sila koje vladaju u prirodi i u vezi sa tim teorije o sastavu materije. Zato je rasprava *O zakonu kontinuiteta i njegovim posledicama u odnosu na osnovne elemente materije i njihove sile* (De continuitatis lege et ejus consectariis pertinentibus ad prima materiae elementa eorumque vires, Romae, 1754) u najužoj vezi sa Boškovićevom teorijom prirodne filozofije i jedna je, pored ostalih (*O živim silama*, Rim, 1745; *O svetlosti*, prvi i drugi deo, Rim, 1748; *O deljivosti materije i počelima tela*, napisana 1748, objavljena u Luki 1757; *O zakonu sila što postoje u prirodi*, Rim, 1755), od osnovnih rasprava iz kojih je proizašlo glavno Boškovićevo delo *Teorija prirodne filozofije svedena na jedan jedini zakon sila što postoje u prirodi* (Philosophiae naturalis theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentium, Viennae, 1758). Zato odmah u drugom paragrafu ističe da je u raspravi „čitava analiza brižljivo pripremljena da bi nas od najjednostavnijih principa prirode nužnim i spontanim spletom zaključaka dovela do same teorije“. To dovoljno govori od kakvog je ona značaja za Boškovićev naučni i filozofski opus i zašto Matematički institut u Beogradu objavljuje njen prevod na naš jezik sa komentarom.

2. Bošković je od Leibniza i njegovih pristalica preuzeo načelo *Ništa se u prirodi ne dešava skokom* (Nihil in natura per saltum fieri), kojim je pregnantno izražena suština Leibnizova principa kontinuiteta. „Glavna osnova čitave naše analize je u onom čuvenom principu koji filozofi već ponegde nazivaju principom kontinuiteta, a koji je još 1687. godine izneo Leibniz“, veli Bošković (Videti u komentaru 2. belešku). On je prihvatio taj princip, formulišući ga na svoj način kao princip po kome *nijedan kvantitet ne prelazi sa jedne svoje vrednosti na drugu, a da ne prođe kroz sve međuvrednosti* i dalje ga je razradio induktivnom analizom pojava u prirodi i apstraktnim matematičkim razmišljanjima. Postavio je sebi za cilj: da čitaoca rasprave, o kojoj je ovde reč, potanko upozna sa tim principom; da oprezno i razložno opovrgne sve kritike protiv tog principa; da jasno istakne njegovu ulogu u prirodi i njegove zadatke u nauci, posebno u matematici, i da ga najzad prikaže kao ishodište svoje opšte teorije prirodne filozofije.

3. Tokom XVII i XVIII stoleća mnogo se raspravljalo o *Zakonu kontinuiteta* i njegovim primenama u razmatranjima prirodnih pojava, naročito

onih kojima se bavi mehanika. Tako, na primer, pristalice Descartesovih mehaničkih shvatanja tvrdili su da se promena kretanja tela može ostvariti samo neposrednim udarom (impetus), dok su pristalice Newtonove prirodne filozofije tvrdili da se to dešava delovanjem sila na daljinu (actio in distans). *Zakonom kontinuiteta* služili su se, kao glavnim oruđem, Leibniz i njegove pristalice u opovrgavanju mehaničkih shvatanja Descartesa i njegovih pristalica, naročito kada je bilo u pitanju shvatanje da se u slučaju sudara dva tela promena njihovog kretanja vrši skokom. Sve je to našlo određenog odjeka u Boškovićevim razmišljanjima o *Zakonu kontinuiteta*, njegovom mestu i njegovoj ulozi u izgradnji sistema prirodne filozofije, što nedvosmisleno pokazuju ova i napred spomenute rasprave. Pri tome je u svojim shvatanjima *Zakona kontinuiteta* i njegove primene bio *stvaralački originalan*, bez obzira što su u tom pogledu očigledno uticali na njega Aristotel, Leibniz i Newton.

Pošto se Bošković snažno inspirisao Newtonovom filozofijom prirode, Aristotelovim i Leibnizovim shvatanjima kontinuiteta i pošto je stalno bio opsednut idejom da izgradi *svoj* sistem prirodne filozofije, svoj *„novi svet"*, *Zakon kontinuiteta* postao je vrlo rano predmet njegovih razmišljanja i glavno ishodište njegove teorije prirodne filozofije. To se, na primer, odmah očitovalo 1745. godine u njegovoj raspravi *O živim silama*, u vezi sa problemom sudara tela; zatim 1748. u raspravi *O svetlosti*, gde podvlači „da cela teorija beskonačno malih veličina zavisi samo o isključenju skoka", drugim rečima da se može izgraditi samo na pojmu neprekidnosti; ili u pismu bratu Baru, 16 marta 1748, kada mu piše o svom „novom svetu", pa, između ostalog, veli da je „započeo s jednim sholijem zakona kontinuiteta" i u pismu bratu Božu u Dubrovniku, 23 aprila 1748, u kome mu piše o svojoj teoriji sastava materije, pa veli da će „pokazati pozitivno da se ne proteže neprekidno, nego da je tvore nedeljive tačke rasute u prostoru koji je beskonačno deljiv." On se tako i dalje, na raznim mestima i u raznim situacijama, u svojim raspravama, dotiče pitanja kontinuiteta, da bi ga iscrpno i sistematski tretirao u ovoj raspravi, zatim u svom glavnom delu i u geometrijskim okvirima u trećem tomu svojih *Elemenata sveukupne matematike*, u posebnom odeljku koji nosi naslov *Rasprava o transformaciji geometrijskih mesta.*

4. Boškovićeva shvatanja kontinuiteta (i ne samo njegova, nego i Leibnizova, kao i drugih) bila su kritikovana, pa je Bošković u ovoj raspravi, a i u drugim, nastojao da u prilog *Zakona kontinuiteta* pruži obilje argumenata, kako bi te kritike opovrgao i pokazao njegovu plodotvornost u objašnjenjima prirodnih pojava i raznih svojstava tela, shodno svojoj opštoj teoriji prirodne filozofije.

Boškovićevim razmatranjima *Zakona kontinuiteta* podloga je, s jedne strane, u vrlo obimnoj indukciji, u nekoj vrsti dokaza à posteriori da taj zakon postoji u prirodi, u činjenici da ga nijedno iskustvo, kako tvrdi Bošković, ne opovrgava, a mnoga nas na njega navode, ukoliko smo u stanju da to čulima otkrijemo, i, s druge strane, u apstraktnim matematičkim rasuđivanjima, u nekoj vrsti dokaza à priori, pomoću kojih ga on racionalno obrazlaže odnosno utvrđuje.

Bošković odbacuje *Princip dovoljnog razloga* (Principium sive lex rationis sufficientis) u dokazivanju *Zakona kontinuiteta,* kojim su se poslužili Leibniz i njegove pristalice, i ističe dva druga razloga da bi ga dokazao (opravdao), naime: jedan koji se zasniva na *metafizičkim principima,* a drugi na *indukciji.*

Prvi razlog podvlači nemogućnost skoka u prirodi, tj. njegov „trenutni prelaz sa jedne veličine u drugu, preskočivši sve međuveličine", pošto „bilo koji kvantitet, prema zakonima prirode, može u pojedinim momentima imati samo jednu veličinu", odnosno on je *jednoznačna* funkcija vremena. Nemogućnost skoka kvantiteta u prirodi predočava Bošković analizom grafika neprekidne (jednoznačne) funkcije i analizom putanje pokretne tačke, za koju uvek pretpostavlja da je opisana „neprekidnim povlačenjem bez ikakvog prekida", a „Sva snaga dokaza" — po Boškoviću — „uvek leži u isključenju trenutka najbližeg trenutku, tačke najbliže tački, linije koja ima drugu najbližu liniju, i zato i u isključenju granice najbliže granici bilo kojeg niza koji traje u neprekidnom vremenu, ili niza predočenog neprekidnom linijom", tj. u *nemogućnosti* dodirivanja dve granice. U vezi sa tim slede Boškovićeva razmatranja mnogih matematičkih pojmova i stavova iz okvira geometrije i analize, koja su od interesa kada je reč o razvitku tih pojmova i stavova.

Na indukciji Bošković zasniva svoj drugi razlog kojim dokazuje (opravdava) *Zakon kontinuiteta.* Najpre je vrlo koncizno i jasno, poput modernih metodologa i logičara, izložio ulogu i zadatak indukcije kao istraživačke metode u prirodnim naukama, pa je u tom smislu naveo mnogobrojne primere koji potvrđuju odnosno opravdavaju *Zakon kontinuiteta.*

Istakao je neprekidnost, ostvarenu u promenama geometrijskih kvantiteta, koja se tako čuva „da bi se geometrija, gde je potrebno, obratila radije tajnama beskonačnosti, nego što bi dopustila određeni skok" i ona se održava „čak i u određenim algebarskim formulama koje izražavaju prosta geometrijska mesta" — kaže dalje Bošković — „u kojima nigde ne postoji skok gde se radi o konačnim kvantitetima, a ne postoji čak nigde ni u beskonačnim, da se ne bi mogao izbeći preko nekakvih tajni beskonačnosti." Istakao je zatim kontinuitet ostvaren u kretanjima planeta i kometa, u smenjivanju dana i noći, u izlasku i zalasku Sunca, u kretanju bačenog tela i u drugim kretanjima koja „zadržavaju kontinuitet, jer ga zadržavaju i same sile koje ga stvaraju" (na primer, u slučajevima sile teže, elastične i magnetne sile), pa „otuda kod prirodnih kretanja ... menjanje pravca biva uvek postepeno." I u oblicima koje priroda stvara kod raznih tela Bošković nalazi da je sačuvan kontinuitet (na primer, u krivinama rečnih korita, lišća i grana na drveću i kod kamenja), pa zaključuje: „Bio bi beskrajan posao nabrajati pojedine stvari u kojima se zapaža kontinuitet u prirodi. Bolje je, svakako, tražiti da se iznese slučaj gde kontinuitet u prirodi nije sačuvan, a takav se uopšte neće moći naći."

Takvim razlozima je Bošković, pošto je odbacio *Princip dovoljnog razloga* kao argument u prilog *Zakona kontinuiteta*, branio od kritike i napada svoja shvatanja kontinuiteta, da bi u 130. paragrafu ove rasprave, na osnovu *Principa dovoljnog razloga*, dopustio i mogućnost diskontinuiteta, kada je oštroumno zaključio: „Dodajemo samo jedno: između ostalih mnogih stvari, u kojima traženje dovoljnog razloga gubi snagu, je baš i ovo isključenje skoka iz prirode. Jer šta zabranjuje da postoje izvesni razlozi zbog kojih bi skok određene veličine mogao biti mnogo korisniji od svih drugih, kao što su ljudima koji se penju na gornje spratove od svega najviše korisne stepenice neke određene visine?“

5. Tako branjen i obrazložen *Zakon kontinuiteta* Boškoviću je prvenstveno služio, kako smo to već istakli, da izgradi svoju teoriju sila u prirodi i teoriju sastava materije, koje je, takoreći skicirao u paragrafima 158—171 ove rasprave, a četiri godine docnije vrlo iscrpno izložio u svom glavnom delu.

Analizirajući pojavu sudara tela (imajući pri tom u vidu mikrosvet), Bošković na osnovu *Zakona kontinuiteta*, prema kome ne može biti trenutne (skokovite) promene brzine, zaključuje da nužno mora postojati *repulzivna* sila kao uzrok koji će postepeno izmeniti brzine tela, tako da iščeszne razlika među brzinama, pre no što dođe do dodira, a to zahteva da intenzitet repulzivne sile raste, u matematičkom smislu, preko svake granice, ukoliko se međusobno rastojanje tela neprestano umanjuje (time se isključuje dodir tela). Tako je Bošković uveo *repulzivnu* silu, pa, isključivši Newtonovu „actio in distans“ i Descartesov „impulsus“ (... sine actione in distans et sine ullo impulsus...) zaključio da ona „postoji ili u samoj prirodi materije koja traži uzmicanje pod uslovom onog određenog rastojanja od druge materije (prirodno-naučno — materijalističko tumačenje! — naša prim.) ili po slobodnom zakonu božjem koji je to uzmicanje utvrdio na tom rastojanju (teološko-metafizičko tumačenje! — naša prim.).“

Bošković nadalje ističe da se na sličan način može „objasniti *atraktivna* sila na većim rastojanjima koja zavisi od samih rastojanja“, ali se ona mora očitovati i u vrlo malim međusobnim rastojanjima čestica materije, jer kad bi sila bila stalno *repulzivna*, čestice tela bi se sve više udaljavale i telo bi se raspršilo, što je protivno *koheziji* kao svojstvu tela. I to je prvi osnovni Boškovićev zaključak o ponašanju čestica na vrlo malim rastojanjima koji proizilazi iz *Zakona kontinuiteta*.

Na granici oblasti repulzivnih i atraktivnih sila moraju postojati, po Boškoviću, tačke — limesi cohaesionis i limesi non-cohaesionis — koje te oblasti rastavljaju i u kojima sila nije ni repulzivna ni atraktivna, nego je jednaka nuli. Ti limesi su posledica *neprekidnog* prelaza repulzivne sile u atraktivnu i obrnuto. Na osnovu njih i raznolikosti intenziteta repulzivnih i atraktivnih sila Bošković objašnjava sve opšte osobine, kao i veliki broj posebnih osobina tela. Tako konstruisan *Zakon sila*, kome je podloga u *Zakonu kontinuiteta*, Boškovića vodi ka zaključku da je materija sastavljena od nedeljivih i neprotežnih tačaka — neke vrsti središta sila — i da fizičko telo nije *kontinuum*, već *diskretum*. Ovome treba još dodati da u 159. paragrafu ove rasprave Bošković vrlo precizno i jasno geometrijski predočava svoj *Zakon sila* jednom krivom u Descartesovom koordinatnom sistemu, poznatom u nauci kao *Boškovićeva kriva*.

Svoja originalna shvatanja prostornih i vremenskih odnosa Bošković je potanko razvio u svom sistemu prirodne filozofije, ali je u 171. i 172. paragrafu ove rasprave prvi put takoreći pomenuo svoju teoriju prostornih odnosa. Tu se dotiče pojma „mesta" stvarnih tačaka i postojanja tih „mesta" u vezi sa pojmom „rastcjanja" tačaka, toliko važnim za njegov *Zakon sila*, odnosno dotiče se pojma „načina postojanja stvarnih tačaka" koji su za njega „stvarna i stalna mesta tačaka koje stvaraju, tamo gde postoje, stvarni odnos rastojanja između sebe i samih tačaka materije na koje se odnose."

Bošković je, možemo reći, koristeći *Zakon kontinuiteta* kao univerzalni zakon prirode i kao opšti metodološki princip, u ovoj raspravi (§ § 158—171) skicirao svoj sistem prirodne filozofije, tragajući dosledno za posledicama tog zakona i izvlačeći ih, kao racionalne istine, strogo deduktivno i komparirajući ih sa činjenicama iskustva i opaženim pojavama, da bi ih kao takve ugradio u svoj opšti sistem prirodne filozofije, odnosno u svoju teoriju sila i sastava materije. Tu je *Zakon nontinuiteta* došao do punog izražaja kao zakon opšte povezanosti pojava u prirodi i zakon razvitka, što čini *dijalektičku* suštinu Boškovićeve teorije. Sve ovo treba imati u vidu kada se ocenjuje značaj i mesto rasprave *O zakonu kontinuiteta i njegovim posledicama u odnosu na osnovne elemente materije i njihove sile* u razvitku ne samo Boškovićeve prirodne filozofije, nego u razvitku prirodne filozofije uopšte kao teorije o materiji.

6. Osvrnimo se najzad na *matematički* značaj ove rasprave. U čemu se on sastoji i kako ga treba ceniti sa stanovišta razvitka matematike?

U traganjima za argumentima koji treba da opravdaju *Zakon kontinuiteta*, da ga racionalno odbrane, Bošković se vrlo često obraća matematici, koristeći njene pojmove i stavove. U takvim situacijama on ispoljava odlike oštroumnog i vidovitog matematičara, koji ume da oseti dubinu problema sa kojim se suočio i da nasluti matematičku ideju koja tek treba da nastane, da se razvije, konkretno ostvari i afirmiše.

Kao mislilac, koji se u izgradnji svog sistema prirodne filozofije rukovodio *Zakonom kontinuiteta*, Bošković se u ovoj raspravi doticao, iako posredno, izvesnih problema koji zalaze u oblast *osnova* matematike. Tretirao ih je ne kao matematičar koji se bavi konkretnim problemima osnova matematike, već kao mislilac koga je sopstvena teorija prirodne filozofije dovela u oblast problema osnova matematike. Otuda vrednost i značaj njegovih pogleda na te probleme treba *prvenstveno* tražiti u *idejnim anticipacijama* i *nagoveštajima* koje oni sadrže kada se posmatraju u *tokovima* istorijske i naučne evolucije pogleda na te probleme uopšte.

Među takve probleme spadaju problemi *beskonačnog* i *neprekidnog*.

Boškovićevi pogledi na beskonačno bitno se ne razlikuju od Aristotelovih pogleda, po kojima beskonačno egzistira samo „u mogućnosti", kao potencijalno beskonačno, bez sopstvenog aktueliteta, kao nešto nedovršeno, ostvarljivo samo u smislu nastajanja, tako da je uvek nešto drugo. Boškovićevo shvatanje veličine je u osnovi finitističko; po njemu je nemoguće beskonačno malo i beskonačno veliko, stvarno postojeće i u sebi određeno. Njihovu egzistenciju vidi samo u njihovim mogućnostima da bivaju uvek nešto drugo; prvo kao veličina koja se može bez ograničenja smanjivati i drugo kao veličina koja može bez ograničenja rasti. Podloga tih Boškovićevih razmatranja je u stvari *Princip potencijalne ostvarljivosti*, koji je tek moderna *konstruktivna* matematika *eksplicitno* istakla kao jedan od svojih temeljnih principa. U tom smislu Bošković se u ovoj raspravi doticao problema bes-beskonačnog, implicite ili eksplicite, na mnogim mestima, na što smo u svojem komentaru ukazali.

Zbog *Zakona kontinuiteta*, Bošković je još neposrednije bio zainteresovan problemom *neprekidnog*. On je u ovoj raspravi izrazio svoje poglede na *linearni kontinuum*, ali ne kao matematičar, što treba podvući, koji prisstupa istraživanju linearnog kontinuuma kao matematičkog problema, sa svim praktičnim posledicama rezultata istraživanja, poput, na primer, Dedekinda i Cantora, već kao filozof prirode i graditelj opšte teorije materije, pa zbog toga vrednost i značaj njegovih pogleda na linearni kontinuum leži u *idejnim anticipacijama* i *nagoveštajima* kada se oni posmatraju sa stanovišta istorijske i naučne evolucije problema linearnog kontinuuma.

Inspirisan Aristotelovom idejom međe neprekidnog, on je argumentovanom razradom te ideje *anticipirao* Dedekindov aksiom kontinuiteta linije i Dedekindov rastav (presek) prave na dva dela, shvativši pravu kao *zatvorenu* liniju, čija je beskonačno daleka tačka zajednička međa polupravih sa zajedničkim početkom u bilo kojoj konačnoj tački prave. (Videti u komentaru beleške: 43, 49 i 105).

Naime, uporedi li se način na koji je Bošković uočio matematičku situaciju u vezi sa neprekidnošću linije sa načinom na koji je istu situaciju uočio Dedekind, onda je očigledna *analogija* između Boškovićevog i Dedekindovog izlaza iz te situacije: a) Dedekindova prva klasa K_1 tačaka prave u aksiomu kontinuiteta je *analogon* Boškovićevom neprekidnom koje prethodi (continuum praecedens) C_p, a Dedekindova druga klasa K_2 tačaka prave je *analogon* Boškovićevom neprekidnom koje sledi (continuum sequens) C_s; b) Dedekindov zahtev „*kojim pravu zamišljamo neprekidnom*", da postoji jedna *jedina* tačka D koja proizvodi podelu prave na klase tačaka K_1 i K_2 je *analogon* Boškovićevom zahtevu da postoji jedna *jedina* međa B neprekidnog koji prethodi C_p i neprekidnog koji sledi C_s, jer to, po Boškoviću, leži u samoj *prirodi neprekidnog*, odnosno u prirodi neprekidnosti linije.

Bošković je, dakle, *anticipirao* Dedekindov aksiom kontinuiteta prave; njegova *međa* $B = (C_p/C_s)$ i Dedekindova *postulirana tačka* u aksiomu kontinuiteta $D = (K_1/K_2)$ su *analogoni*.

Položaj i ulogu proizvoljne tačke E na pravoj AB Bošković je dao, može se reći, u jednoj *dijalektičkoj metafori* („da dve susedne linije uvek međusobno vezuje i spaja, ili rastavlja i odvaja, i oba posla obavlja u isti mah"), pa ako je, po Boškoviću, L_a (linea ante se) poluprava koju tačka E mora imati „pre sebe" i L_p (linea post se) poluprava koju tačka E mora imati „posle sebe", onda je Dedekindova tačka $p = (P_1/P_2)$ *analogon* Boškovićevoj tački $E = (L_a/L_p)$.

Bez tačke E poluprave AE i BE su *rastavljene*, sa njom su one *svezane*. Ona je tako njihova *zajednička međa*, koja ih rastavlja i svezuje.

U izloženoj interpretaciji, Boškovićeva *dijalektička metafora* o ulozi i položaju proizvoljne tačke prave (odnosno linije) deluje kao *anticipacija* Dedekindovog rastava $p = (P_1/P_2)$ prave na dve klase tačaka P_1 i P_2. U tom smislu ona geometrijski *anticipira* Dedekindov presek.

U Boškovića je *beskonačno daleka tačka* prave *zajednička međa* polupravih, čiji je zajednički početak u bilo kojoj *konačnoj tački* prave, ali isto tako i svaka *konačna tačka* prave je *zajednička međa* polupravih, čiji je zajednički početak u *beskonačno dalekoj tački*.

Boškovićeva prava, dakle, *nije euklidska*, već je kao „neka beskrajna kružnica koja se vraća u sebe stalnim i beskrajnim zavijanjem", kaže Bošković. Ona je zatvorena linija $HA \infty BH$. Koristeći, dobro poznate, pojmove moderne teorije skupova, može se za Boškovićevu pravu pisati: $Fr.\ HA = Fr.\ HB = \{H, \infty\}$ ili $C\,\{H, \infty\} = \text{ext}\ HA \cup \text{ext}\ HB = \text{int}\ HB \cup \text{int}\ HA$.

Ne spada li Boškovićeva prava $HA \infty BH$ među vesnike razvitka novog, neeuklidskog modela geometrije, kakav je, na primer, eliptička geometrija? (Videti u komentaru 49. belešku).

U razmatranjima beskonačnih grana, odnosno beskonačnih krakova, parabole i hiperbole, kao i drugih krivih i u razmatranjima transformacije jednog konusnog preseka u drugi, Bošković će, rukovođen *Zakonom kontinuiteta*, i u tim slučajevima beskonačno dalekoj tački dodeliti analognu ulogu kao i u slučaju prave (Videti u komentaru beleške: 52—68).

U Boškovićevom tretiranju beskonačno daleke tačke kao međe geometrijskog linearnog kontinuuma ocrtavaju se metodološki i idejni *nagoveštaji* poznatog Ponceletovog *principa kontinuiteta*.

On je, naime, *beskonačno dalekoj tački* pripisao *ulogu međe*, analognu bilo kojoj *konačnoj tački* prave. Na taj je način jednu određenu osobinu konačne tačke prave, matematički razložno, *preneo* na beskonačno daleku tačku i tako ovu, u stvari, tretirao kao „običnu" konačnu tačku. Preko šezdest godina kasnije, Poncelet, tvorac projektivne geometrije, postupio je slično Boškoviću kada je došao u situaciju da *beskonačno daleku* tačku interpretira, na bazi svog principa permanencije odnosno principa kontinuiteta, kao *presek* međusobno paralelnih pravih i da joj tako pripiše *ulogu preseka*, analognu bilo kojoj „običnoj" *konačnoj tački*. Stoga se u Boškovićevoj zamisli i njenoj realizaciji da i beskonačno daleku tačku tretira kao među geometrijskog linearnog kontinuuma ocrtavaju *metodološki i idejni nagoveštaji* onog opšteg stava koji će tek Poncelet jasno formulisati u vidu *Principa permanencije* odnosno *Principa kontinuiteta*.

Boškovićevi pogledi na geometrijski linearni kontinuum sadrže neke, iako daleke, *nagoveštaje* ideje *zatvorenosti* i *svezanosti* linearnog kontinuuma koja će biti jasno i matematički precizno formulisana tek u skupovnoj analitičkoj definiciji kontinuuma, kao zatvorenog i svezanog skupa. On je, nadalje, intuitivno osetio, iako je dosta implicite izrazio, one skrovite karakteristike kontinuuma koje će tek moderna matematička analiza preko teorije skupova fiksirati topološkim pojmovima, kao što su: okolina tačke, otvorena i zatvorena oblast, unutrašnja i granična tačka oblasti (Videti u komentaru 25. i 43. belešku).

Bošković je *eksplicite* iskazao misao da je skup realnih brojeva kontinuum, više od sto godina pre nego što je ta misao bila formulisana u obliku preciznog matematičkog stava u modernoj teoriji realnog broja Cantora i Dedekinda (Videti u komentaru 120. belešku).

Boškovićev način razmatranja infinitezimalnih situacija u aporiji *Ahilej i kornjača* deluje kao jedan od vesnika, iako možda skroman, one stroge epsilontike koja će se afirmisati u razvojnim tokovima matematičke analize XIX stoleća, a čiji je praizvor u matematici antike, na kojoj se sam Bošković dobrim delom vaspitao i obrazovao kao matematičar (Videti u komentaru beleške: 33—40).

Ako se ima u vidu razvitak matematike posle Boškovića (višedimenzionalna geometrija, matematički prostori, infinitezimalna analiza funkcije više promenljivih), može se kazati da on nekim svojim razmatranjima, intuicijom vidovitog geometričara i analiste, nazire široke mogućnosti algebarske finitne, geometrijske i infinitezimalne analize, uprkos njihove ograničenosti u njegovo doba (Videti u komentaru 91. belešku).

S obzirom na stanje razvitka matematičke analize njegova doba, on je matematički zrelo i anticipativno gledao, iako skoro uvek u geometrijskim okvirima, na mnoge pojmove i stavove matematičke analize, kao što su: funkcija i njen grafik, inverzna funkcija (definicija i egzistencija), granična vrednost i neprekidnost funkcije, prekidi funkcije, tok funkcije (rašćenje i opadanje, ekstremne tačke, prevojne tačke), singularne tačke (povratna prve i druge vrste, dvostruka), kontigentni ugao, tangenta, glatka kriva, pojam konvergentnog reda, problem trisekcije ugla, nesamerljive veličine, krivina, evolventa i evoluta, Bolzano-Cauchyevi stavovi o neprekidnim funkcijama, stav o određenom integralu kao neprekidnoj funkciji granice integrala (Videti u komentaru beleške: 12, 35, 45—47, 71, 78—84, 90—104, 115—121, 124).

Posebno treba istaći da je, sa stanovišta *Zakona kontinuiteta*, metamorfoza konusnih preseka, odnosno transformacija jednog konusnog preseka u drugi, predmet Boškovićevog dubokog interesovanja i originalnih suptilnih razmatranja u ovoj raspravi. Tako je, možda, najzanimljivija u tom pogledu Boškovićeva opservacija da je u transformacijama konusnog preseka, kada presečna ravan menja nagib prema osi konusa, „jedino parabola nedeljiva međa kojom se u trenutku vremena vrši prelaz od neprekidnog niza elipsa u neprekidni niz hiperbola." (Videti u komentaru beleške: 52—68).

Možemo zaključiti da ova rasprava sadrži zrele i anticipativne misli, podstaknute problemima prirodne filozofije, o mnogim matematičkim pojmovima i stavovima koje će tek matematika XIX i našeg stoleća jasno i precizno formulisati, naročito ako su u pitanju pojmovi i stavovi iz infinitezimalne analize. Kao takva, ona je od značaja za proučavanje razvitka matematike, pogotovu kada se taj razvitak posmatra s obzirom na razvitak prirodne filozofije koji je tekao pod snažnim uticajem razvitka matematike i njenih primena u izučavanju pojava prirode, i obratno, razvitak matematike pod uticajem razvitka prirodne filozofije.

Istoričar i filozof fizike i matematike u njoj će naći inspiracije za svoj istraživački rad, naročito ako je u pitanju XVIII stoleće, toliko značajno za razvitak spomenutih nauka, i na osnovu njih, prirodne filozofije.

7. Prevodilac i stručni redaktor prevoda nastojali su da što manje odstupaju od Boškovićevog načina izlaganja i od njegovog izražavanja, tako da bi prevod ostao veran originalu. Nadamo se da će priloženi komentar u znatnoj meri pomoći čitaocu da bolje shvati Boškovićeve misli i da lakše prati njegov način izlaganja.

Boškovićeve slike, kao ilustracije teksta, izrađene su potpuno verno originalu i raspoređene su onim redom kako se pojavljuju u tekstu, a ne na kraju rasprave, kako je to bilo u originalu.

Ernest Stipanić

PREVOD

1. Već smo 1745. godine, u raspravi *O živim silama* koja je na ovom mestu javno iznesena i odbranjena, a zatim, kad je i po drugi put štampana u drugom tomu *Komentara Bolonjske akademije*, izložili svoju teoriju o nekim silama koje su svojstvene svim tačkama materije i po kojima kako sastav same materije tako i sve njene opšte osobine i osobine svakog od pojedinačnih svojstava tela potiču same od sebe, pa se mogu nužno izvoditi neki određeni zaključci. Istu teoriju smo 1748. godine izložili mnogo opširnije u drugom delu rasprave *O svetlosti*, takođe iznetoj ovde pomoću geometrijskih ogleda, kako bi pomoću njih postali poznati mnogi drugi principi, naročito principi čvrstine i principi fermentacije.[1]

2. Dalje, tu teoriju nismo izmislili po svojoj volji, kao kakvu hipotezu, kao što to izgleda nekima od one vrste ljudi koji, pregledavši obično samo jedan deo nečega, sude o čitavoj stvari, već smo pokušali da je potvrdimo pozitivnim dokazima, i to takvim da može biti sasvim jasno da to nismo obelodanili, kao što se često dešava u glavi ljudi sa unapred stvorenim mišljenjem, što smo dokaze prikupili sa svih strana da bi se teza dokazala kako bilo na sintetički način, već je čitava ova analiza brižljivo pripremljena da bi nas od najjednostavnijiih principa prirode nužnim i spontanim spletom zaključaka dovela do same te teorije. Možemo otvoreno priznati da nam je u ovoj stvari sve i preko očekivanja pošlo za rukom, i da nas do same teorije, čije smo zaista vrlo bogate plodove već i tada shvatili i shvatamo ih svakodnevno, nije privukla ljubav prema samim plodovima, jer su nam oni tada bili potpuno nepoznati, već prirodna naklonost i snaga dokazivanja.

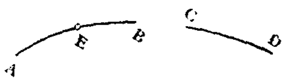
3. Glavna osnova čitave naše analize je u onom čuvenom principu koji filozofi već ponegde nazivaju principom kontinuiteta, a koji je još 1687. godine izneo Lajbnic, mada se još nije poslužio tim terminom i upotrebio ga protiv Dekartovih zakona i izneo u časopisu *Nouvelles de la Rep(ublique) de lettres* koji je pokrenuo Bejl; zatim su ga i mnogi drugi Lajbnicovi učenici objašnjavali, a vrlo učena gospođa de Šatle (de Chatelet) sabrala je njihove dokaze u knjizi *Učenja o fizici.* Zatim smo od svega onoga što se odnosi bilo na objašnjavanje samog principa ili na njegovo potvrđivanje ili na njegovo dokazivanje jedva nešto malo nastavili, mada takvih stvari ima zaista mnogo i mada su sve one same po sebi vrlo vredne da se o njima zna, i to ne samo u potvrdu toga principa već i radi izvođenja mnogih drugih istina, što je vrlo korisno i potrebno da bi se stalo na put mnogobrojnim zabludama. Od toga smo ponešto iznosili ili u privatnim pismima ili isto tako u javnim predavanjima, kad god se za to ukazala prilika, a mnogo od onoga što se odnosi na kontinuitet geometrijskih mesta raspravljali smo u spisima *O konusnim presecima*, u opširnijoj raspravi na kraju teksta koju smo izdali baš iste godine.[2]

4. Prihvatamo se da ovaj dokaz obradimo u ovoj svečanoj raspravi malo sređenije i nadamo se da će, kad smo već objasnili sve one teškoće koje su protiv samog principa, a koje su najčuveniji pisci i vrlo učeni ljudi još ranije iznosili, i iznose ih svakodnevno, sama naša teorija, koja već osetno počinje da prodire u javnost, od jednih napadana, a od drugih iznošena i branjena u javnim akademijama, dobiti ovom novom odbranom svoje glavne osnove nešto više autoriteta i snage.

5. A kako ima ljudi koji napadaju sam Princip kontinuiteta i smatraju da on sadrži u sebi protivrečnosti i da nužno uključuje ono što najviše teži da isključi, kao što ćemo videti malo kasnije kod Mopertija, najvećeg matematičara i filozofa našeg veka, najpre ćemo izneti originalno objašnjenje toga principa, i to tako da se, kad to objašnjenje pravilno shvatimo, u samom principu neće moći da pronađe ništa što se ne bi slagalo ili sa samim sobom ili s pravilnim rasuđivanjem, a odatle će proizići mogućnost njegova postojanja; kada to već jednom utvrdimo, poći ćemo dalje i pokušaćemo da dokažemo njegovo postojanje u prirodi.[3]

6. Da bi pojam samoga Principa kontinuiteta postao jasniji, pozabavićemo se na prvom mestu prirodom neprekidnog kvantiteta i objasnićemo ga pomoću geometrije, a zatim ćemo preći na objašnjavanje samoga Principa kontinuiteta. Priroda neprekidnog kvantiteta je prema svedočanstvu samoga Aristotela, koga Lajbnic hvali u pomenutoj belešci br. 3, u tome što njegovi delovi koji se nastavljaju neposredno jedni na druge imaju zajedničku među. Ovde sam Aristotel tvrdi da su brojevi bez kontinuiteta, ali priznaje da kontinuitet postoji u liniji, površi, telu i u prostoru koji naziva mestom, i u vremenu. Pogledaj mesto *u Kategorijama, glava VI o kvantitetu,* iz pariskog izdanja godine 1619. „*Prekidno je, na primer, broj ... Neprekidno je, na primer, linija, površ, telo, a osim toga mesto i vreme. Jer ne postoji zajednička međa delova broja koja bi spajala te delove... A i linija je neprekidna, jer se može uzeti zajednička međa kojom se njeni delovi spajaju, tj. tačka. Može se uzeti i linija kao zajednička međa površi, jer se delovi ravni spajaju ma kojom zajedničkom međom. Isto tako možeš i na telu uzeti zajedničku među: liniju ili površ kojima su delovi tela povezani. Takvo je i vreme, i mesto. Jer sadašnje se vreme vezuje s prošlim i s budućim. S druge strane, mesto postoji u neprekidnom, jer delovi tela zauzimaju neko mesto a vezani su nekom zajedničkom međom. Dakle, i delovi mesta koja zauzimaju pojedini delovi tela spojeni su nekom zajedničkom međom.*“ To kaže Aristotel, a mi ćemo to obraditi malo opširnije i brižljivije.[4]

7. Na sl. 1. nacrtajmo liniju *ABCD*, i neka ona bude prekinuta u *B*, *C*. Tamo se prekida kontinuitet, jer je *B*, kraj prethodnog dela *AB*, udaljen od *C*, početka dela *CD* koji neposredno sledi iza *AB*. Naprotiv, linija *AEB* je neprekidna, jer je ista tačka *E* zajednička granica dela *AE* i dela *EB*.



Sl. 1

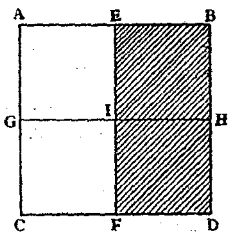
8. U svakom neprekidnom kvantitetu treba da se razlikuje ono što je međa, ili granica, od onog čija je međa. Ono prvo mora da bude nedeljivo, iz razloga što je međa, a ovo drugo mora da bude beskrajno deljivo. Međa linije je tačka, međa površi je linija, a površ je međa čvrstog tela. Linija je po dužini beskrajno deljiva, a tačka je nedeljiva. Površ je deljiva i po dužini i po širini, a linija kojom se ona omeđuje, — nedeljiva je po širini, mada je deljiva po dužini prema kojoj se pruža sa samom površi, što se dešava i u odnosu na površ čvrstog tela koja ga omeđuje i koja je bez ikakve debljine.[5]

9. Zatim, jasno proizilazi iz samog pojma međe, ili granice, da je međa ili granica iz istog razloga nedeljiva iz kojega je granica. Jer kad bi bila deljiva, i imala delove, ne bi u celini pripadala granici već bi unutrašnji deo pripadao onome čiji bi spoljašnji deo bio granica. A kako se ovo odvajanje odnosi baš na spoljašnji deo, očigledno proizilazi da je ono što je granica nedeljivo, i stoga tačka mora biti potpuno nedeljiva, a linija nedeljiva po širini, površ po debljini ili dubini.

10. Iz same prirode međe proizilazi i to, da međa ne može dodirivati među. Jer uvek treba smatrati da kontinuum leži između onih delova kojem su međe oni sami. I ne može jedan biti kraj prethodnog a drugi početak narednog, jer po prirodi kontinuuma (br. 6) njihova međa mora biti zajednička. A to sad biva još očiglednije iz nedeljivosti same međe. Jer je ono što je nedeljivo ili međusobno udaljeno ili, ako mu nestane rastojanje, stapa se u jedno. A ono što je uopšte bez protežnosti ili se uopšte ne dodiruje ili se dodiruje u potpunosti. U prvom slučaju je udaljeno jedno od drugog; a prodire i stapa se u jedno — u drugom slučaju. Mora sam sebe da muči onaj koji veruje da jedna tačka dodiruje drugu, a da je ipak smeštena izvan nje i da ne prodire kroz nju. On će zamisliti neke protežne loptice koje će se s jedne strane dodirivati, a s druge će se jedna od druge odvajati, pri čemu će dopuštati postojanje delova iste tačke, a uništiti predstavu o nedeljivosti i neprotežnosti. To je upravo najstariji dokaz kojim se uvek odbacivalo Zenonovo mišljenje da postoji protežni kontinuum sastavljen od sasvim neprotežnih tačaka čije pogodno rešenje nije dosad još niko mogao da nađe, a niko ga neće zaista ni kasnije naći, jer ono ima snagu najapsolutnijeg dokazivanja i očiglednosti.[6]

11. Ali mnoge od ovih stvari izgledaju veoma nejasne onima koji nisu dublje ušli u poreklo svojih ideja, niti znaju, da od onih koje su prihvatili čulima, razmišljanjem stvaraju druge koje odgovaraju pravom razumu i pravoj prirodi stvari. Ne samo nedeljive stvari i stvari bez protežnosti već i beskrajno deljive veličine izmiču našim čulima, a čula nas sasvim obmanjuju, kad se dođe do nekih granica smanjene veličine. Otuda smo od ranog detinjstva, kako čulom vida tako i čulom pipanja, stekli bezbrojne percepcije o deljivim i protežnim kvantitetima na koje smo se postepeno tako navikli da, kad god želimo da u svojoj svesti stvorimo predstavu o kakvoj tački, mi stvorimo odmah predstavu o nekoj loptici koja se prostire u dužinu, u širinu i dubinu, a koju dodajemo drugoj i posmatramo vrlo dugačak niz sve samih loptica. Neka sad percepciji čula pristupi razmišljanje. Neka se uzme da svako konačno protezanje mora imati svoj kraj i da ono što ima delove ne može predstavljati kraj svojim unutrašnjim delovima, pa će smesta biti jasno da kraj zaista postoji i da je on bez delova i protežnosti, i da se ne može neprotežno s neprotežnim dodirivati međusobno, jer se oni istovremeno stapaju.[7]

12. A da bismo popustili i samoj slabosti imaginacije, pokazaćemo na koji način će i oni koji prihvataju opšte mišljenje o neprekidnoj protežnosti materije (jer mi samu materiju, kao što će kasnije biti jasno, sastavljamo od tačaka koje su sasvim nedeljive i neprotežne i koje su međusobno uvek sasvim odvojene nekim praznim prostorom) biti primorani da priznaju, da su tačke sasvim nedeljive i neprotežne, da su linije lišene širine i debljine a površi debljine; tada ćemo primeniti onu sliku kojom smo se nekada poslužili u prvoj svesci naših *Elemenata,* kad nismo doista imali dovoljno znanja iz geometrije, kad još nismo bili ušli u ovu našu teoriju, da bismo pokazali kako su površi, linije, tačke u samom stvarnom neprekidnom protezanju nešto što nije stvorio naš razum, nego što stvarno u njima samim postoji i što se neodvojivo odnosi na samo neprekidno protezanje.[8]



Sl. 2

13. Neka slika *ABCD* (sl. 2.) bude neprekidna i vešto doterana, i neka se zamisli da je jedna njena polovina *EFDB* crne boje, a druga polovina *AEFC* bele boje. Samim će se očima zaista nametnuti granica *EF* između belog i crnog dela, o kojoj će se sasvim pouzdano tvrditi da ima toliku dužinu koliko iznosi dužina slike, ali da je sasvim bez širine. Čim, naime, malo skreneš s ove ili s one strane granice bićeš ili u beloj ili u crnoj boji. Eto predstave o liniji koja ima dužinu a koja je bez širine. Ako se sad zamisli deblja i prozračna slika, kao od kristala, i ako preko čitave njene debljine jedna polovina bude crne a druga bele boje, samom oku posmatrača pokazaće se granica između belog i crnog pojasa koja se pruža u dužinu i u širinu koliko iznosi dužina i debljina slike, ali je bez debljine.

Ako se zamisle četiri dela *AEIG, GIFC, FIHD, HIEB* obojena u četiri boje, dobiće se po dve linije *GH* i *EF* koje će se tako seći u jednoj tački *I*, da ta tačka neće uopšte imati nikakvu protežnost, nikakvih delova. Zato će se dobiti i predstava o tački.

14. Znamo, naravno, da različite boje traže različit sastav delića i da ne može postojati neprekidna slika baš te boje a ne neke druge. Stoga smo rekli da se *zamisli* ovakva slika obojena onim bojama. To pojmu granice i oformljenju njene nedeljivosti ništa ne smeta i lako će se sa slike, čije se boje vide, preneti oštrina duha i na jednostavan presek te slike. Presecimo, dakle, takvu neprekidnu sliku poprečno duž *EF*; pa onda neka se delovi presekom odvojeni ponovo približavaju jedan drugom dogod se ne dodirnu. Očima se, doduše, neće ukazati granica između desnog i levog dela, a ona će ipak postojati i negde će nastati prelaz sa jednog na drugi deo. Ova granica će se povući celom debljinom, dužinom i širinom slike, i pokazaće površ koja razdvaja dva čvrsta tela. Krajnji presek na samoj površi imaće za dužinu *EF*, a drugi deo površi će se odvojiti od prvog i stvoriće liniju. Međutim, novi presek *GH*, gde se bude sreo s prvim u *I*, daće tačku nedeljivu i neprotežnu.

15. Dosta lako će se već ovde shvatiti da neposredno ne može prianjati površ na površ po debljini, linija na liniju po širini, tačka na tačku po dužini, već se moraju stopiti u jednu, ili biti odvojene. Pošto je načinjen ovaj presek duž *EF*, sasvim je jasno da ne može nastati neki novi presek koji se sa onim prvim ili ne bi stapao u jedan, ili između sebe i prvog preseka ne bi zahvatio neki delić slike. Ako se delovi slike dodiruju, potpuno je jasno da novi presek ne može biti neposredno susedan ranijem bez ikavih delova slike između njih. I tako iz toga jasno proizilazi, da taj presek postaje zajednička granica oba dela slike i sasvim je nedeljiv u onom smislu u kome je i granica.

16. Iz ovoga sledi, po opštem mišljenju o neprekidnoj protežnosti materije, da površ, linija, tačka nisu nešto izmišljeno našim razumom, već da zaista moraju postojati u samoj toj stvarnoj protežnosti materije, čija će protežnost posedovati izvesna svojstva: biće to međe neodvojive od onoga čije su osobine, naime, da površ ne može sama po sebi postojati kao što, naravno, ne može biti ni neko jedro bez debljine, ni linija kao kakav prutić bez dužine i širine, ni tačka kao kakvo zrnce lišeno svake protežnosti. Tako će površ biti stvarna granica čvrstog tela koje postoji samo po sebi, linija stvarna granica površi i tačka stvarna granica linije. Otuda će i prva Euklidova definicija i sva dokazivanja geometričara imati svoju snagu u onom mišljenju o zajedničkoj stvarnoj i neprekidnoj protežnosti.[9]

17. A mi koji nipošto ne prihvatamo neprekidnu protežnost materije, priznajemo da postoje realne tačke nedeljive same po sebi bez ikakve linije, bez ikakve površi ili bez stvarnog čvrstog tela; otuda ne prihvatamo ni mišljenje da u materiji postoje ikakve površi, linije ili čvrsto telo; ali ipak dopuštamo da neprekidna linija nastaje kretanjem; pokazaće se, međutim, kasnije da kretanje mora biti neprekidno. Sasvim prihvatamo neprekidnu protežnost po dužini, širini i dubini u prostoru u kojem se nalaze i kreću naše tačke, pa je sasvim jasno da je on trodimenzionalan po samom kretanju upravljenom ma u kojem pravcu. A šta mislimo o samom prostoru i u čemu, prema našem mišljenju, leži njegova neprekidnost, iznećemo kasnije. A pošto smo tako jednom prihvatili da je prostor trodimenzionalan, jasno proizilazi da u njemu samom isto tako moraju postojati površi bez debljine, linije bez širine i tačke bez ikakve dimenzije. Kad smo to prihvatili ostaju i dalje na snazi svi geometrijski dokazi za sve ono što se odnosi na samu neprekidnu protežnost prostora.[10]

18. Kako smo ovde izložili ono što se odnosi na nedeljivost međa ili granica, treba preći na beskonačnu deljivost onoga što je obuhvaćeno samim granicama. Pre svega, to što je obuhvaćeno dvema nedeljivim međama mora imati mogućnost da se deli i mora imati delova. Jer da je ono nedeljivo i da je bez delova, ne bi se moglo dodirivati ma s kojom granicom (br. 10.) već bi trebalo da se sa njom stapa i potpuno podudara. Dakle, podudarale bi se tako međusobno same dve granice i ne bi između sebe bile odvojene, nego bi se stopile u jednu jedinu. Međutim, kada se izvrši deoba, između nove granice i između obe pređašnje granice, mora se ponovo naći nešto deljivo i, kad se isti dokaz ponavlja, deoba će moći da se produži u beskonačnost. Tako će ma koja linija koja leži između dve tačke moći da se deli u beskonačnost već samim tim što se jednom mogla podeliti u dva dela. Pošto se izvrši takvo deljenje na dva omeđena dela zajedničkom tačkom, ti delovi će se i po drugi put jednom novom tačkom, a zatim opet nekom drugom, omeđivati od prethodnih, pa će i dalje morati da budu deljivi. Ovo deljenje će se neprestano ponavljati bez ikakva kraja.[11]

19. Na ovaj način se vrši beskonačna deljivost protežnog kontinuuma po samoj prirodi neprekidne protežnosti i nedeljivosti međa. To se u geometriji dokazuje zaista bezbrojnim argumentima, pa uopšte nema mesta nikakvoj sumnji. To nam jasno iznosi pred oči odnos nesamerljivih kvantiteta koji nije podložan nikakvim brojevima, zatim kontigentni uglovi koje neprekidno seku lukovi većih krugova, najzad asimptotski kraci krivih koji vode u beskonačnost. Tu je onda i onaj problem koji se rešava uopšte u samim *Elementima:* da se data duž podeli na određeni broj delova, da se od date duži odseče određeni deo, da se za ma koje dve date duži pronađe treća neprekidno proporcionalna. Prva dva od ovih problema dokazuju deljivost u beskonačnost ma koje linije, a da li treći pokazuje da se ma koja veličina isto tako može smanjiti preko bilo kojih određenih granica, kao što se može i povećati preko bilo koje granice? Jer, ako od dve date veličine druga ostaje stalna, a prva se može ma koliko uvećavati, onda će se treća neprekidno proporcionalno smanjivati koliko bude potrebno.[12]

20. Doduše, samo rešenje ovog problema otvara izvor izvesne predrasude u našem nastojanju da bi se shvatili deljivost u beskonačnost i smanjivanje veličina preko bilo kojih granica. Jer mi smo od samog detinjstva navikli da posmatramo takve veličine ne baš velike, prema veličini našeg tela. Videli smo da se u veličinama ne sadrži tako veliki broj delova koji se mogu osetiti našim čulima. Lako smo se uverili da se neprekidnim deljenjem mora brzo doći do veličina koje naša čula ne zapažaju. A ono što izmiče našim čulima, obično smatramo da ne postoji. To je glavni izvor opštih predrasuda, nikada dovoljno omeđen ni zatvoren; pa čak i ako ispravimo izvesnim razmišljanjem shvatanja koja smo stekli čulima, silazimo većinom jedva ispod same granice čula i tu sustajemo kao smeteni. Malo ljudi oštrije pameti i smelijeg duha uzdiže sebe više i, pošto odbaci sve predrasude, pridaje važnost jedino razumu i jedino prirodi stvari. Biće korisno, međutim, da se izvesna nemoć uma osnaži nekim slikama koje, kao što teleskop obično približava očima vrlo udaljena tela zvezda, isto tako i one samom umu, ukazuju na najskrivenije i najtananije istine i posmatramo ih kao da su tu prisutne, izvučene iz kakve dubine.[13]

21. Da bi se najpre otklonila teškoća, koju doživljujemo pri zamišljanju tolikog mnoštva delova ma u kakvom malom kvantitetu, predstavimo sebi nekog čoveka tako ogromne veličine koji bi nas nadmašio toliko puta, koliko puta čitav Zemljin glob nadmašuje taj sićušni kvantitet. Taj čovek će imati istu teškoću pri zamišljanju mnogobrojnih delova cele Zemlje kao i mi prilikom zamišljanja tog malog kvantiteta. Veliko i malo su u relativnom odnosu i moguće je da se vrsta većih ljudi po istom zakonu beskonačno uvećava preko naše veličine, ili da se smanjuje ispod nje; i ono što bi jednima prema osetima čula bilo potpuno nedeljivo, drugima bi, naprotiv, izgledalo da obuhvata ogromnu protežnost i veliki broj delova.[14]

22. A da bismo prilagodili običnom shvatanju pozitivni dokaz o deljivosti u beskonačnost, neka se zamisle dva lenjira proizvoljne debljine koji, po opštem shvatanju materije, imaju neprekidnu protežnost, ali da su bar u jednom delu sasvim pravi i dovoljno dugi, otprilike 100 palaca svaki. To će u tom smislu biti sasvim moguće, jer ako se pravost pokvari kakvom pukotinom, ona će moći da se popuni dodavanjem, a ono što je suvišno moći će da se oduzme. Iz prirode pravosti sasvim jasno proizlaze dva ovakva stava. 1. *Ako se ta dva lenjira dodiruju pri kraju a na vrhu razilaze, razilaze se i u sredini.* Jer, sasvim je jasno, ako se u potpunosti poklapaju u dužini od 50 palaca, onda jedan deo od drugoga ne može da se odvoji, osim ako jedan od njih ili oba ne odstupe od pravosti. 2. *U istom slučaju međusobno su odvojeni manje u sredini nego pri vrhu.* Jer, ako se u dužini od 50 palaca uzajamno ne približe jedan drugom, jasno je, svakako, da se neće približiti ni u dužini od ostalih 50 palaca i mi nikada nismo našli nekoga koji ne bi priznao da su mu te istine potpuno jasne, kad su mu samo jednom bile izložene.[15]

23. Kad smo to ustanovili, neka se prvog dana zamisle lenjiri postavljeni tako da se dodiruju na jednom kraju, a da se na drugom kraju (pri vrhu) odvajaju, ma kojim razmakom, otprilike od jednog prsta. Oni će po prvom stavu biti odvojeni i u sredini, a po drugom manje u sredini nego pri vrhu. Drugog dana će bog moći da ih postavi tako da se odvajaju pri vrhu onoliko koliko su se prvog dana odvajali u sredini. Toga dana će se oduzeti jedan deo od onoga prsta. Zato što su se dan pre toga manje razdvajali u sredini nego pri vrhu, drugog dana se razdvajaju manje pri vrhu nego prvog dana. A pošto se tog drugog dana razdvajaju pri vrhu, isto tako će se odvajati i u sredini, i to u sredini manje nego pri vrhu. Zato će trećeg dana moći da se postave tako da se odvajaju pri vrhu onoliko koliko su se drugog dana odvajali u sredini, pa se istim dokazom potvrđuje, da je tog trećeg dana oduzet drugi delić od onog prsta. Zatim će to isto moći da se obavlja četvrtog dana i svih narednih dana bez ikakva kraja. Jer neće biti nijednog dana u kome ne bismo mogli izvršiti tu istu operaciju. A kad bi se reklo da će, najzad, doći neki dan u kome se ne bi moglo ići napred, moraće se priznati da je još prethodnog dana to isto bilo urađeno i da su tog istog prethodnog dana lenjiri bili pri vrhu otvoreni. Iz istog razloga su bili otvoreni i u sredini, pa će stoga sutradan moći da se postave tako da budu otvoreni pri vrhu. Kad smo ih tako postavili, onda sutradan moraju biti odvojeni i u sredini. Svakog dana, dakle, moći će da se oduzimaju sve noviji delovi od onog istog prsta i to bez ikakva kraja, i zato će taj prst, ili ma kakav razmak za koji uvek važi isti dokaz, moći uvek da se deli sve dalje do beskonačnosti.[16]

24. Ovaj se dokaz zasniva u potpunosti na geometrijskom principu: *da dve prave nemaju zajednički odsečak* (zajedničku sečicu), a isto tako i na geometrijskoj teoremi: da su *u sličnim trouglovima homologne strane proporcionalne.* Jer dva lenjira s dva razmaka čine dva slična jednakokraka trougla, i stoga razmak u sredini, koji će uvek postojati na osnovu toga principa, mora da bude polovina razmaka pri vrhu. A za one koji, ili nisu navikli na geometrijska dokazivanja ili smatraju da im se ne može verovati, ima neko značenje onaj veliki razmak od pedeset palaca po kojem se pravi lenjiri ne mogu poklopiti, ako se u potpunosti ne podudare, i to zbog toga što je rastojanje u sredini manje od rastojanja pri vrhu, uzevši ga u beskonačnom smislu, a ne vodeći pri tom računa ni o kakvim trouglovima i proporcijama. Sva je snaga dokaza u tome što kad uzmeš ma kakav razmak možeš naći razmak i manji od njega; a kad je to jednom dokazano, onda je neminovno da to teče u beskonačnost, kao što se ranije dogodilo s bisekcijom. Jasno je, međutim, da onaj koji želi da umanji snagu ovog dokaza, mora sam potpuno da negira, pobrka i izopači postojanje ravnih lenjira, pa čak i samu predstavu o pravosti koja nam je potpuno jasna, a svi vide kako su jadni ovi izgovori.[17]

25. Prema našem shvatanju nekontinuirane protežnosti materije, taj dokaz može imati istu snagu u slučaju ako se zamisle tri tačke postavljene pravo u liniji, od kojih neka srednja bude udaljena od gornje i donje za 100 palaca. Zatim neka se ponovo zamisli da je pri vrhu na rastojanju od 100 palaca od najniže, a na rastojanju od jednog prsta od najviše tačke, smeštena četvrta tačka; zatim neka se u sredini između ove četvrte i one najniže, smesti peta tačka. Tada će se između nje i one druge srednje, od prve tri, nalaziti po samoj prirodi pravosti neki razmak, manji od razmaka između one četvrte i najviše tačke. Odatle će po tom istom postupku nastati deljivost u beskonačnost. A ona je i po samoj prirodi kontinuirane protežnosti i po bezbrojnim geometrijskim dokazima, i po onom dokazu koji je gore iznet i običnom shvatanju više prilagođen, toliko očigledna i jasna da pametan čovek uopšte ne može da sumnja.[18]

26. Pre nego što nastavimo, treba ovde svakako da zabeležimo da svi dokazi te vrste pokazuju beskonačnu deljivost razmaka ili neprekidnog protežnog prostora, a ne materije. Jer ima nekih ljudi koji naročito smatraju da se nedeljiv i sasvim jednostavan delić materije prostire u dužinu, širinu i dubinu, ili da se prostire kroz deljivi prostor, da na taj način on zauzima onaj prostor koji bi mogli zauzeti deset ili sto takvih jednostavnih delića, samo manje protegnutih. To su neki peripatetičari nazvali virtualnom protežnošću i deljivošću; šta više, neki od njih su smatrali da taj isti delić zauzima čas više prostora čas manje, i te deliće su nazvali naduvene tačke (puncta inflata). Tu vrstu protežnosti oni su objašnjavali primerom razumne duše koju su smatrali jednostavnom i potpuno nedeljivom. Mislili su da se ona prostire kroz čitavo telo, ili kroz određeni deo tela koji je takođe deljiv, po primeru božanske neizmernosti koja je uvek prisutna u svim tačkama prostora, ma kako one bile udaljene među sobom. Ovo mišljenje nećemo nikad moći da prihvatimo, jer je potpuno suprotno analogiji prirode i indukciji izvedenoj iz onoga što vidimo. A vidimo da se zaista celokupna materija nalazi u različitim delovima prostora i, koliko posmatranjem možemo da obuhvatimo, jasno je da je odvojena i da se deli jedna od druge. Ali se zasad može, prema tome mišljenju, koje se nije moglo očigledno dokazati kao pogrešno nikakvim metafizičkim i geometrijskim ogledima, svaka vrsta figura i delenja zamisliti do jednog nedeljivog delića, bez ikakvih njegovih realnih delova na koje se može podeliti.[19]

27. Zatim, prema našem shvatanju materije, koja se sastoji iz tačaka potpuno nedeljivih i neprotežnih i koje su međusobno uvek odvojene nekim intervalom, može se od hiljadu tačaka sastojati neka masa koja bi se mogla seći samo u hiljadu delova, tako da bi svaki od njih sadržavao nešto materije; a ako se bude povećao broj delova, seći će se i prazni intervali, pa će ti ostali delovi morati da budu sasvim bez materije, a njhove će tačke biti ili između hiljade delića prostora obuhvaćenog onom masom ili na granicama delića koji se dodiruju.[20]

28. Dokazavši nedeljivost granica i deljivost onoga što se tim granicama omeđuje, treba da izvedemo nešto što će poslužiti za valjano razumevanje prirode ma koje neprekidnosti i samog zakona kontinuiteta. Tako bi se izbegle vrlo mnoge greške u koje ne upada samo neuk narod već često i vrlo učeni ljudi, i čak pisci prvog reda, zavedeni predrasudama koje su im tako uvrežene u duši da se uvlače neočekivano i krišom upleću u dokazivanje. Govorićemo o tačkama i liniji, i sve što se o njima kaže treba da se primeni na sve ostale međe, na omeđene neprekidne kvantitete, kao na linije i površ, na površi i na telo.[21]

29. Pre svega, iz ovoga što je pokazano, jasno izlazi da tačke nisu delovi linije već međe, tako da linija nije sastavljena od tačaka već od linijica i da se rastavlja na linijice. Jer, ako deljenje nastavimo u beskonačnost, uvek su delovi ma koje linije omeđeni dvema krajnjim tačkama druge pojedinačne linije. Linija se crta povlačenjem ili neprekidnim vučenjem tačke, a ne dodavanjem i ponavljanjem te pridodate tačke.[22]

30. Zatim se isto tako jasno prosuđuje da ne postoji nikakav najmanji deo ma kakva datog intervala, jer je deo svake linije isto tako linija, a svaka linija je isto tako deljiva u beskonačnost. Stoga sam naziv deo u neprekidnoj protežnosti nužno sadrži u sebi spoj više delova. Zato ne postoji nijedan deo koji bi, u tom smislu, bio sav prvi ili poslednji u datom intervalu, a da u sebi ne bi sadržavao nešto što bi u početku imao kao drugo pre sebe, i na kraju nešto drugo posle sebe. Sam naziv deo nepouzdan je i neodređen. Ako bi se odredio broj jednakih delova određenog intervala, odredila bi se veličina pojedinih delova. Ako se odredi veličina, odrediće se broj, i u oba slučaja jedna (veličina) će biti prva a jedna druga, jedna poslednja a jedna pretposlednja. Ali naziv dela ni po veličini ni po određenom broju ne označava nešto neodređeno; i ne može se na pitanje koliko delova ima u datom intervalu odgovoriti određeno, osim ako se ne odredi njihova veličina; a kad je ona određena, određen je i njihov broj; može se, međutim, dati neki neodređen odgovor da je broj delova konačan u beskonačnosti. Dakako, ako se odredi ma kakva veličina (dela), onda je broj delova konačan; ali pošto se ona može smanjiti u beskonačnost i sam broj delova može takođe da se poveća u beskonačnost, tako da nema broja sukcesijama (povećavanja) i da je broj delova u ma kojoj sukcesiji uvek konačan. Taj odgovor, prema običnom mišljenju o neprekidnoj protežnosti materije, sadrži jednu veliku teškoću. Prema našem mišljenju, po kome, interval ili prostor, kao što ćemo dole videti, ne sadrži ništa realno što činom postoji, a deljivost nije ništa drugo nego, da tako kažemo, *uvrstljivost* (*interseribilitas*) *realnih tačaka*, taj odgovor uopšte ne pričinjava nikakve teškoće.[23]

31. Najzad, što naročito treba istaći, ma u kakvu određenom intervalu uvek postoji prva i poslednja tačka, ali nema druge ni pretposlednje. I, kako između dve tačke (br. 10.) uvek treba da se nalazi linija, a sama linija (br. 18.) je isto tako deljiva, sasvim je jasno da ne postoji nijedna tačka toliko bliska nekoj drugoj tački, a da neke druge ne bi bile još bliže; stoga nema nijedne druge, nijedne pretposlednje. Ako neko pita nešto o samim tačkama, koliko ih ima u datom intervalu, prema običnom mišljenju o neprekidnoj protežnosti materije, treba reći da one prevazilaze svaki broj ili da su beskrajne po broju. Jer pre nego što se delovi odvoje stvarnim deljenjem, oni su sami potpuno odvojeni jedan od drugoga i jedan deo nije neki drugi pa, prema tome, imaju svaki svoju među koja tamo postoji. Stoga stvarno ima na nekoj liniji onoliko tačaka koliko može biti deljenja; a pošto se broj deljenja, koja se mogu izvršiti, može smatrati većim ma od kojeg konačnog broja, to će broj stvarno postojećih tačaka biti veći ma od kojeg konačnog broja i zato je beskonačan. Prema našem mišljenju, po kojem je broj tačaka u prostoru jedina mogućnost za umetanje realnih tačaka, odgovor će biti isti kao i kod delova, tj. da je njihov broj konačan u beskonačnosti. Broj tačaka koje stvarno postoje biće, naravno, u sebi određen i konačan, ali se on i sam može uvek povećavati bez ikakve granice; međutim, sve to ne može postojati u isti mah; ono što se može posmatrati odvojeno, može odvojeno i postojati; a da ne bi ta božanska svemoć bila iscrpena, o tome ćemo ponovo govoriti kasnije.[24]

32. Iz prethodnog izlazi i to, da se nijednoj liniji ne može oduzeti samo poslednja, ili samo prva tačka, već se beskrajan broj tačaka može ili odjednom oduzeti uklanjanjem dela linijice, ili treba da se ostavi čak i ona poslednja. Jer kad se oduzme poslednja, ili prva tačka, linija bi još uvek ostala omeđena i prema tome bi imala među, a samim tim i poslednju, ili prvu tačku, koja bi, isto tako, pre oduzimanja te poslednje, odnosno prve tačke, bila pretposlednja ili druga, što je, kao što smo videli, nemoguće. To isto će se dobiti ma u kojem drugom neprekidnom nizu kvantiteta, kao i u svemu gore. Naime, samo poslednja ili prva međa neće moći da nedostaje, jer postoje sve ostale: kao poslednja linija konačne površi, površ konačnog tela, itd., što će se pri utvrđivanju zakona kontinuiteta predočiti ponovo kasnije.[25]

33. Među sve što je neprekidno treba ubrojati i vreme, kao što smo videli i kod samog Aristotela. Jer vreme teče neprekidno, delovi vremena dolaze stalno jedni za drugima bez ikakva međuprekida. Zato će i u samom vremenu morati da se razlikuje, kao kod linije, neprekidno vreme, recimo čas, od međe ili granice koja razdvaja dva neprekidna vremena, što ćemo nazvati trenutkom. Ono prvo će odgovarati liniji, a ovo drugo tački. Trenutak će biti nedeljiv, kao tačka; neprekidno vreme će biti deljivo u beskonačnost, kao linija. U neprekidnom vremenu, kao i u liniji, neće biti ma kako malenog delića od koga ne bi mogao biti manji, a nijedan vremenski interval neće biti tako veliki da neki drugi ne bi mogao biti veći. Kod nekog određenog merenja neprekidnog vremena neće biti nijednog delića koji bi bio sav prvi ili poslednji. Uvek će se nalaziti, ma u kojem konačnom intervalu vremena, prvi i poslednji trenutak, a neće biti drugog niti pretposlednjeg, već će se između ma koja dva trenutka ma koliko bliska, što treba naročito upamtiti, nalaziti neprekidno vreme u kojem će ostali trenuci biti bliži ma kojem od krajnjih, kao što smo rekli o tačkama na liniji. Kao što linija nastaje neprekidnim povlačenjem tačke, a ne ni ponavljanjem ni umnožavanjem tačke, tako i vreme nastaje neprekidnim trajanjem stvari koje postoje u pojedinim trenucima i koje traju u neprekidnom vremenu.[26]

34. U svemu ovom prostor i vreme potpuno odgovaraju jedno drugom i nema nikakve druge razlike među njima sem što prostor ima i linije s jednom dimenzijom, površi s dve i tela s tri dimenzije. Stoga se linije mogu menjati i dužinom i položajem, odnosno pravcem, a vreme pak ima samo jednu jedinu dimenziju i menja se jedino trajanjem, nikakvom razlikom u pravcima, što je analogno jedino pravoj liniji.[27]

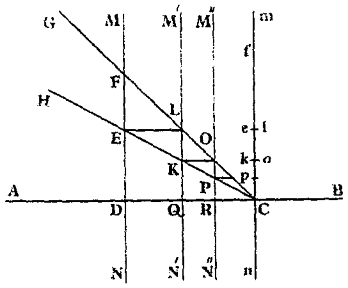
35. Iz odnosa neprekidnih kvantiteta linije i vremena, proizilazi neprekidno kretanje i brzina koja se može posmatrati, kako u aktualnom kretanju, tako i u određenosti koju ima pokretno telo prema kretanju. Prvu od njih smo u raspravi *O živim silama* nazvali dosta podesnim skolastičkim nazivom *brzina u drugom dejstvu* (velocitas in actu secundo), a drugu *brzina u prvom dejstvu* (velocitas in actu primo). Neprekidno kretanje je ono u kome pokretna tačka neprekidno menja mesto, tako da pojedinim trenucima vremena, odgovaraju uvek pojedine sve druge i druge tačke prostora. Ako bi pokretna tačka spajala istu tačku prostora s nekim konačnim brojem trenutaka, koji su međusobno rastavljeni nekim intervalima, dobili bismo vraćanje pokretne tačke na istu tačku prostora; ako bi se spojila ista tačka s neprekidnim nizom svih trenutaka sadržanih u nekom konačnom neprekidnom vremenu, nastalo bi mirovanje. Naprotiv, ako se spoji isti trenutak vremena sa konačnim brojem tačaka prostora odvojenih među sobom nekim konačnim intervalom, dobiće se ono što se naziva replikacija (replicatio); ako se isti trenutak vremena spoji s neprekidnim nizom tačaka prostora sadržanih ma u kojem konačnom neprekidnom intervalu, dobiće se ono što smo rekli (br. 26.) da se naziva virtualna protežnost. Ova virtualna protežnost tačke materije odgovara mirovanju, a replikacija odgovara vraćanju iste tačke materije na istu tačku prostora. A ako se uzme u obzir više tačaka materije, dobiće se tri druga slučaja: ako se, naime, spoje isti trenutak vremena sa raznim tačkama prostora, tu se nalazi koegzistencija razdvojenih tačaka; ako se spoje ista tačka prostora s raznim trenucima vremena, tada nastaje uzastopno primicanje tačaka materije istome mestu; ako se spoje ista tačka prostora sa istim trenutkom vremena, u toj situaciji je kompenetracija. Ovih sedam slučajeva daju nam sve kombinacije koje proizilaze iz spajanja vremena i prostora, a kasnije ćemo pokazati, kad budemo izveli sopstvenu teoriju po zakonu kontinuiteta, da su svi oni mogući kroz božansku svemoć, a da je jedna jedina koegzistencija razdvojenih tačaka moguća po prirodi stvari.[28]

36. Kao što pojedinim trenucima vremena za svaku pokretnu tačku odgovaraju pojedine tačke linije, tako pojedinim delovima neprekidnog vremena odgovaraju pojedini delovi linije, i obratno, za ono se kretanje kaže da je ravnomerno ili jednoliko, kad jednakim delovima vremena odgogaraju jednaki delovi prostora, a da je neravnomerno ili nejednoliko, kad su ti delovi nejednaki. Međutim, brzina u drugom dejstvu je onaj odnos prostora prema vremenu u ravnomernom kretanju koji proizilazi iz posmatranja prostora direktno, a vremena recipročno; jasno je da ta brzina postaje utoliko veća ukoliko veći prostor odgovara istom vremenu, ili manje vreme istom prostoru, i stoga je njena mera prostor podeljen vremenom. Ta mera se smatra tačnom samo u ravnomernom kretanju u kojem ista brzina traje neprekidno, kao što će se samo u tom kretanju smatrati tačnom ideja brzine u drugom dejstvu. Brzina, međutim, u prvom dejstvu je određenost za ovu samu brzinu u drugom dejstvu, ili za prelaženje izvesnog prostora za određeno sledeće neprekidno vreme, sem ako nešto ne bi smetalo. Jedino ta brzina odgovara pojedinim trenucima vremena, ne brzina u drugom dejstvu, jer se trenutno ne dešava nikakvo kretanje koje bi sa sobom vuklo neprekidno vreme. Zato tu stvar treba da upoznaju oni koji se bave mehanikom, kad brzinu, koja odgovara pojedinim momentima, množe vremenom da bi čak i za nejednoliko kretanje imali meru prostora (pređenog puta).[29]

37. Da je linija sastavljena od tačaka, a neprekidno vreme od trenutka koji bi sledili neposredno jedni za drugima, sva neprekidna kretanja bi morala biti podjednako brza; svakako bi onda pojedinim trenucima odgovarale pojedine tačke. Različita brzina ne bi mogla postojati, sem ako bi se jedna ista tačka prostora nekom drugom pokretnom tačkom spajala s više trenutaka što su tvrdili oni koji su razliku brzina objašnjavali morulama, ili ako bi se ista tačka trenutka spojila s više tačaka prostora, što su tvrdili poneki od onih koji su se borili za virtualnu protežnost tačaka. Kad se jednom shvati priroda kontinuiteta, nema nikakve teškoće da se shvati razlika brzina, a ono što se iznosi tome na suprot — čisti su sofizmi koji se lako razrešavaju, ako se samo pomisli da svakom ma kako malom deliću vremena ma u kojem kretanju odgovara njegov delić prostora i deliću prostora njegov delić vremena i da ne postoji nijedan delić vremena ili delić prostora najmanji od svih, nijedan drugi i pretposlednji trenutak ili nijedna druga i pretposlednja tačka.[30]

38. Naravno, u neprekidnom bržem kretanju, istom vremenu odgovara veći prostor, ili istom prostoru kraće vreme. Ako bi se posmatralo uvek isto vreme kod oba pokretna tela, i ako bi se to vreme podelilo u bilo koliko ma kako malenih delića, i ako bi se prvo pokretno telo kretalo desetostruko brže nego drugo, dobio bi se za svaki ma kako mali delić neprekidnog vremena, kod prvog pokretnog tela, desetostruko veći prostor nego kod drugog. Ako bi se posmatrao uvek zajednički prostor, i ako bi se on podelio ma u koliko i u ma kako sitne deliće, pripašće svakom i ma kako malom deliću neprekidnog prostora, kod prvog pokretnog tela, desetostruko kraće vreme nego kod drugog. U tome nema ničeg absurdnog. Ma koliko bio mali delić prostora koji, za određeno malo vreme, pređe prvo pokretno telo, uvek postoje delići prostora manji od njega, i sve manji u beskonačnost, a jedan od njih, upravo onaj koji je desetostruko manji, prelazi drugo pokretno telo za taj isti delić vremena. Ma koliko bio mali delić vremena u kome drugo pokretno telo prelazi određeni delić prostora, uvek se dobijaju delići vremena koji su manji od njega i manji u beskonačnost, pa jedan od njih, odnosno onaj koji je desetostruko manji, prelazi prvo pokretno telo. Pošto ne postoji delić prostora od koga ne bi mogao biti neki manji, a kamo li neki koji bi bio sav prvi, ne postoji nijedan delić vremena od koga ne bi postojao drugi manji ni neki koji bi bio sav prvi, a pošto ne postoji nijedna druga tačka intervala i nijedan drugi trenutak vremena — svaka teškoća sasvim iščezava. I jedno i drugo pokretno telo imaju početak kao i kraj kretanja u nekoj određenoj tački prostora i trenutku vremena, a u trenucima ne postoji deo kretanja odnosno deo neprekidnog kvantiteta, već postoji nedeljiva granica. Kretanje iziskuje i neprekidan prostor i neprekidno vreme koji su deljivi u beskonačnost i odvode deljivost samog kretanja u beskonačnost. Broj delova i prostora i vremena i kretanja zavisi od veličine pojedinih delova, a ako se to ne odredi, i sam broj ostaje neodređen — kao i odnos delova prema delovima. Kad se uspostavi zakon deljenja, odmah se uspostavlja odnos među delovima. Jednom istom delu neprekidnog vremena može odgovarati beskonačno veći ili manji deo neprekidnog prostora; otuda sledi da se i brzina može beskonačno povećavati ili smanjivati bez ikakve morule ili virtualne protežnosti, naime — bez vezivanja istog trenutka vremena s više tačaka prostora, ili iste tačke prostora s više trenutaka vremena.[31]

39. Dalje će se sve ovo moći, na neki način, očigledno da posmatra geometrijski u neprekidnom odnosu linija. Kroz koju god tačku D na sl. 3. prave AB neka se njome zahvate sa iste strane dva odsečka DE, DF ma



Sl. 3

u kome datom odnosu, u desetostrukom, kao u gore navedenom slučaju (tj. 1:10), i neka se povuku, isto tako, ma iz koje tačke C na samoj pravoj AB dve prave CG, CH kroz tačke F, E.

40. Neka nam *DC* obeležava neko vreme, *DF* put koji je prešlo prvo pokretno telo, *DE* put koji je prešlo drugo pokretno telo. Ma koliko se smanjivalo vreme *CD*, odnos između puteva opisanih za isto vreme, biće onaj isti odnos *DF* prema *DE*, ili kao 10 prema 1; nijedan delić vremena *CD* neće biti tako sićušan, nijedan trenutak *D* toliko blizak trenutku *C*, da zajedno i drugo pokretno telo ne bi već postojali neki neprekidni putevi koji bi bili u tom istom odnosu. Ako se pita, za koje vreme će prvo pokretno telo brže preći put jednak putu *DE*, koji je prešlo drugo pokretno telo za vreme *CD*, biće dovoljno povući pravu iz *E* paralelnu sa *AB*, dok ne dodirne pravu *CG* u *L*, zatim pravu *LQ* paralelnu sa *MN* koja dodiruje *CA*. *CH* u *Q*, *K*; *CQ* će pak biti ono traženo vreme, u kome će prvo pokretno telo preći (put) *QL* jednak (putu) *ED*. A u onom kraćem vremenu, samo drugo pokretno telo preći će kretanjem još manji put, očevidno *QK*. Ne postoji nijedna (duž) *FD* tako mala, da joj ne bi odgovarala neka desetostruka manja *ED*, nijedna duž *CD* tako mala, da joj ne bi odgovarala (duž) *CQ* koja će biti isto tako desetostruko manja nego ona sama, pošto se *CQ* odnosi prema *CD* kao *QL* ili *DE* prema *DF*, ili kao 1 prema 10. Stalni odnos puteva *DE*, *DF* pokazuje stalni odnos kretanja koja odgovaraju istom vremenu; isto tako stalni odnos *CQ*, *CD* pokazuje stalni odnos vremena koja odgovaraju istom putu. Ma kolikom i ma kako malom putu koji je opisalo prvo pokretno telo, odgovara desetostruko manji put koji je opisalo drugo pokretno telo (za isto vreme); ma kome i ma koliko malom vremenu koje je utrošilo prvo pokretno telo, odgovara drugo desetostruko manje vreme (od onog) koje je utrošilo drugo pokretno telo (za isti pređeni put). Ma gde bila tačka *D*, samo ako se ne poklapa sa *C*, odgovaraće joj dve duži *DE*, *DF* od kojih će prva biti desetostruko manja od druge, a između same tačke *D* i tačke *C*, biće tačka *Q* koja ima desetostruko manje rastojanje od same *C*, kroz koju bi mogla da prođe druga prava *M' N'*, na kojoj bi se isto tako dobili njeni odsečci *QK*, *QL* u odnosu jedan prema deset.[32]

41. I pomoću iste slike lako se već razrešava glavna teškoća koju su stari iznosili protiv neprekidnog kretanja, a koja potiče od kretanja Ahileja i kornjače, u kojem je Ahilej deset puta brži od kornjače. Taj dokaz je najsrećnije izveo naš opat Gregorije iz reda sv. Vincenta, pronašavši zbir geometrijske progresije. Izložićemo najpre najpoznatiju teškoću, pa ćemo je rešiti samom prirodom neprekidnog kvantiteta, najzad ćemo prizvati u pomoć geometriju i očigledno ćemo izneti isto rešenje; od svega što se odnosi na suštinu stvari, iako je vrlo poznato, smatrali smo da ne smemo ništa propustiti, kako bismo imali sve što se traži za razumevanje prirode kontinuiteta i otklanjanje sumnje u njegovu nemogućnost.[33]

42. Stari ovako zaključuju. Neka na početku kretanja Ahilej bude udaljen od kornjače hiljadu koraka. Dok on pređe hiljadu koraka, kornjača će preći 100; dok on pređe tih 100, kornjača će preći drugih 10; dok on pređe tih 10, kornjača će načiniti jedan korak; dok on pređe taj jedan, kornjača će načiniti deseti deo koraka i tako dalje u beskonačnost. Nikada, dakle, i nigde Ahilej neće moći da stigne kornjaču, što je apsurdno, s druge strane. Jer ako bi Ahilej za neko dato vreme prešao hiljadu koraka, i ako bi kornjača prešla za isto vreme deseti deo od hiljade, on će joj prići za devet desetina od hiljade; i tako bi morao vremenski istovetno da jednako prilazi kornjači, jer se oboje kreću jednoliko; ako to bude kao devet prema jedan na isti način će se odnositi to vreme prema onom drugom vremenu, u kome treba da nestane celokupno njihovo rastojanje; i tako će se ona hiljada koraka koju Ahilej pređe za to vreme, odnositi kao 9 prema 1 prema prostoru koji će, osim toga, Ahilej morati da pređe da bi stigao kornjaču. Pogrešno je, dakle, misliti da se oni *nikad* i *nigde* ne mogu sresti, jer ako se tome vremenu doda njegov deveti deo i toj hiljadi njen deveti deo, doći će se do onog trenutka i tačke u kojima mora nastati sustizanje. Uostalom, sva je veličina ove teškoće u neodređenom značenju onog izraza *nigde*, ili *nikad*.[34]

43. Jer, pre svega, iz ove deljivosti konačnog intervala u beskonačnost, jasno izlazi da se ma koji niz sve manjih i manjih kvantiteta može nastaviti u beskonačnost, i da ceo taj zbir kvantiteta ne pređe neki određeni i konačni kvantitet. Pošto se palac može podeliti napola, zatim njegova polovina napola i tako dalje u beskonačnost; jasno je da se može dovadati polovina palca, zatim polovina polovine ostatka, i ponovo polovina drugog ostatka i tako dalje u beskonačnost; a kad se sve to sabere, nikad se neće preći veličina palca, jer se smatra da uvek preostaju njegovi delovi i kad se ponovo doda samo polovina.[35]

44. Odatle jasno sledi da čitav niz koraka 1000, 100, 10, 1, 1/10, 1/100, 1/1000 i tako dalje, i njemu odgovarajući niz vremena koji su Ahilej i kornjača utrošili, može da se nastavlja u beskonačnost, a da ipak ceo zbir njegovih kvantiteta ne pređe neki konačan prostor odnosno konačno vreme. A onda, ako bi ono *nikad* i *nigde* označavalo ma koji trenutak, odnosno ma koju tačku obuhvaćenu tom određenom merom prostora odnosno vremena, biće sasvim istinito da Ahilej neće stići *nikad* i *nigde* do kornjače. Ali će biti sasvim pogrešna pretpostavka, ako bi ono (nikad i nigde) označavalo ma koji neodređeni trenutak, ili ma koju tačku uzetu u svemu vremenu ili prostoru, što ono potpuno označava u svakodnevnoj upotrebi. Jer Ahilej će stići kornjaču u poslednjem trenutku onog vremena i u poslednjoj tački onog prostora kojom se tako završava ovaj niz produžen u beskonačnost, da bi se njome potpuno iscrpeo.[36]

45. Na taj način nije teško definisati konačnu meru vremena ili prostora. Ako bi ma koji prethodni član imao isti odnos prema narednom, isti odnos će imati i zbir svih prethodnih članova prema zbiru svih narednih, pa će i razlika između prvog i drugog člana biti prema prvom kao razlika između zbira svih prethodnih i zbira svih narednih, prema zbiru svih prethodnih, ili prema celom nizu. Uostalom, zbir svih prethodnih članova sadrži sve članove niza, jer bi ma u kojem konačnom broju članova u prethodnima nedostajao samo poslednji član koji se, ako se niz nastavlja u beskonačnost, smanjuje u beskonačnost i iščezava, ako se ceo niz posmatra istovremeno; zbir svih narednih, sadrži sve sem prvog člana, i tako je razlika prvog zbira od drugog upravo prvi član. Dobija se, dakle, ona vrlo poznata teorema *da se razlika prvog člana od drugog odnosi prema prvom, kao prvi prema onoj konačnoj meri u kojoj se sadrži ceo niz, tako da ga iscrpljuje.* U našem slučaju biće kao 9 prema 10, dakle — jedna hiljada koraka ili vreme koje je Ahilej utrošio da bi prešao jednu hiljadu koraka prema onoj meri prostora ili vremena, u čijoj će se poslednjoj tački ili trenutku sastati Ahile j sa kornjačom, naravno kad bude proteklo vreme za koje Ahilej načini hiljadu koraka, a osim toga i deveti deo toga vremena, jer će sam Ahilej načiniti jednu hiljadu i deveti deo hiljade, a kornjača samo deveti deo hiljade, prema čemu je ona hiljada s devetim delom desetostruka, te će stići zajedno; to je, međutim, onaj isti gornji rezultat dobijen u suprotnom dokazu br. 42.[37]

46. Ako bi se htelo da se ovo isto rešenje prikaže očigledno, dovoljno bi bilo na slici 3. isto tako povući iz tačke *K* duž *KO* paralelnu sa *AB*, dok se ona ne sastane s pravom *CG* u tački *O*, zatim kroz *O* pravu *M"N"* paralelnu sa samom *MN*, i pošto se opet iz *P* povuče paralelna sa samom *AB*, onda se shvata ta konstrukcija koja se nastavlja u beskonačnost; a pošto se povuče prava *mn* kroz *C*, opet paralelna s pravom *MN*, ona tada prima njene odsečke *Cf, Cl, Co* itd., *Ce, Ck, Cp* itd., jednake odsečcima *DF, QL, RO* itd., *DE, QK, RP* itd., gde se jasno vidi da se tačke *l, o* itd., treba da poklapaju s tačkama *e, k* itd.[38]

47. Neka sad prava *AB* izražava vreme čija će tačka *D* biti onaj trenutak vremena u kome počinje kretanje, i neka *FE* bude dužina od jedne hiljade, a odnos *FD* prema *ED* isti kao pre — 10 prema 1, i neka se prava *MN* shvati kao da neprekidnim kretanjem dospeva do tačke *C* tako, da bi po njoj mogla ići dva pokretljiva tela, od kojih neka jedno bude uvek u njenom preseku s pravom *CG*, drugo u njenom preseku s pravom *CH*, pa će ta dva pokretljiva tela predstavljati baš ono kretanje Ahileja i kornjače. Jer nam je jasno, pre svega, da ono prvo pokretljivo telo mora da prođe za vreme *DC*, na pravoj *MN* ceo prostor *FD*, ili *fC* na pravoj *mn*, a drugo pokretljivo telo prostor *ED* na onoj pravoj, a *eC* na ovoj, i tako će njihove brzine biti kao 10 prema 1, a njihovo rastojanje u početku kretanja će biti *FE* ili *fe* od jedne hiljade, kao što se i pretpostavlja kod Ahileja i kornjače. Zatim je jasno, da se ta pokretljiva tela tako sastaju u trenutku *C* na premeštenoj pravoj *MN* kod *mn* za neko proteklo vreme *DC* pošto je prvo pokretljivo telo prešlo određeni prostor *FD* ili *fC*, a drugo pokretljivo telo *ED* ili *ed.*

48. Zatim, da bi se to vreme ti prostori definisali, i da bi se očigledno izneo čitav niz članova koji opadaju u beskonačnost u desetostrukom odnosu, biće pre svega *CD* prema *CQ*, kao *DF* prema *QL* ili prema *DE*, naravno — kao 10 prema 1. Zato će i razlika prethodnih *DQ* biti prema drugom prethodnom, kao razlika narednih *EF* prema drugom narednom *ED*, svakako kao 9 prema 1. To je, dakle, prostor *ED* koji je prešla kornjača, i Ahilej preko svoje prve hiljade koraka, naime, deveti deo prve hiljade; a sve vreme *CQ* koje su oboje utrošili posle onoga vremena u kome je Ahilej prešao jednu hiljadu, deveti je deo onoga vremena u kome je pređena sama hiljada. Ako bi se, sem toga posmatrala dva niza duži *DQ*, *RQ* itd., i *FE*, *LK*, *OP* itd., ili *fe*, *lk*, *op* itd., našlo bi se da su one stalno u odnosu *FD* prema *DE* i da, prema tome, u sadašnjem slučaju opadaju u desetostrukom odnosu. Jer je *CD* prema *CQ*, kao *DF* prema *QL* ili *DE* (dakako, po veoma poznatoj geometrijskoj lemi, po kojoj se paralelne prave *FD*, *LQ* presečene sa *CH* koja polazi iz preseka pravih *FL* i *DQ*, seku u istom odnosu u *E*, *K*) kao *LQ* prema *KQ*, odnosno *RO*, zato i kao *CQ* prema *CR*. Stoga su u stalnom odnosu 10 prema 1, kako duži *CD*, *CQ*, *CR* itd., tako i *DF*, *QL*, *RO* itd., koje su im proporcionalne; tako će biti u tom istom stalnom odnosu i razlike onih *DQ*, *QR* itd., i razlike ovih *FE*, *LK*, *OP* itd.

49. Dalje je jasno da se ova konstrukcija može nastaviti u beskonačnost s ove strane tačke *C*, i da se nikad i nigde sama tačka *C* ne može mimoići, pa tako ceo niz delića vremena i prostora koji se nastavlja u beskonačnost, nipošto ne može preći konačno vreme *DC*, i konačni prostor *FD*. Tako se lako dokazuje i to, da se sama vremena i prostori *CD* i *FD* iscrpljuju ovim nizovima, ako bi se svi shvatili istovremeno, kao celina, što bi se lako dokazalo samom prirodom opadajućih progresija; u *Elementima* se obično dokazuje da se njihovi članovi toliko smanjuju u beskonačnost da mogu sići ispod bilo koje veličine, ma kako ona bila proizvoljno određena. Zato će ako se zamisli ma koji i ma kako mali delić vremena *CD*, ili prostora *Cf*, najzad ispod njega sići članovi progresije *CD*, *CQ*, *CR* itd. i *Ce*, *Cf*, *Ck* itd., a zatim neće biti nijednog ma kako malog dela njihovih mera koji bi netaknutim ostavljale ove progresije: *DQ*, *QR* itd. i *FE*, *LK*, *OP* itd., ili *fe*, *ek*, *kp* itd., koje ih zbog toga iscrpljuju, ako se sve istovremeno posmatraju.[39]

50. Evo, dakle, rezultata čitave stvari. Za ono vreme u kojem je Ahilej u tački *F*, ili *f*, kornjača je u tački *E*, ili *e*. Za neprekidno vreme *DE*, Ahilej prelazi hiljadu (koraka) *FE*, ili *fe*, kornjača deseti deo hiljade *LK*, ili *ek*. U poslednjem trenutku ovog vremena, Ahilej je u tački *L*, ili *l*, ili *e*, a kornjača u *K*, ili *k*. U drugom vremenu, koje je desetostruko manje od prvog, Ahilej prelazi prostor *LK*, ili *lk*, ili *ek*, kornjača prostor *OP*, ili *op*, ili *kp*. U poslednjem trenutku toga delića vremena, Ahilej je u tački *O*, ili *o*, ili *k*, kornjača u *P*, ili *p* i tako dalje kroz niz delića vremena koji opadaju uvek u desetostrukom odnosu; u poslednjem trenutku ma koga od ovih delića vremena, Ahilej je u onoj tački prostora u kojoj je bila kornjača u prvom trenutku onog delića vremena, a za delić najbližeg narednog vremena, Ahilej pređe onaj delić prostora koji kornjača pređe za delić vremena najbliži prethodnom. I jedan i drugi niz delića prostora i delića vremena može se nastavljati u beskonačnost i uvek će deliću prostora, koji je Ahilej prešao za izvesno vreme, odgovarati delić prostora koji je za isti delić vremena prešla kornjača, — desetostruko manji od Ahilejeva prostora, što će povlačiti za sobom neki novi sledeći delić vremena za prvi kasniji Ahilejev i njen desetostruko manji prostor.

51. Neće postojati kraj članova posmatranih na ovaj način, ako bi se pod tim imenom kraj, podrazumevao poslednji član u posmatranju koje nastaje ovim redom; kraj će ipak postojati, ako se pod imenom kraj bude podrazumevalo vreme ili prostor koji, doduše iscrpljuje sav niz posmatran istovremeno, ali ga ne prelazi. Naime, sav niz delića vremena ove vrste sadržavaće se u konačnom vremenu *CD*, koje će on iscrpljivati, ako bi se sav posmatrao istovremeno; sav niz delića prostora sadržavaće se u konačnom prostoru *DF*, ili *Cf* koji će iscrpljivati, ako bi se sav posmatrao istovremeno. Ahilej ni u jednom trenutku, uzetom u konačnom vremenu *CD*, ni u jednoj tački uzetoj u konačnom prostoru *FD*, ili *fC*, neće stići kornjaču; a pošto će ona doći u trenutku i tački *C*, zaista će se desiti da se oni neće sastati nikad i nigde, ako bi se ono ***nikad*** i ***nigde***, shvatilo kao svi trenuci i sve tačke uzeti, u nekom ograničenom vremenu *CD* odnosno u ograničenom prostoru *DF*, *Cf*, a ne bi se pak shvatilo neodređeno, kao ma koja ili ma gde uzeta tačka odnosno trenutak, da bi uključili sam taj trenutak odnosno tačku *C*.[40]

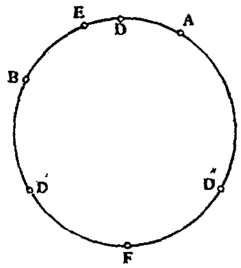
52. Na ovaj način, pošto smo kako valja upoznali prirodu kontinuiteta, nestaje svaka na izgled tako velika teškoća. Neka se ima uvek pred očima da se ono, što odgovara *ma kome trenutku vremena, nalazi u nekoj tački prostora*, a da ono što odgovara *ma kojem neprekidnom vremenu, prelazi neki neprekidni prostor*. odnosno liniju; da ne postoji pak ni jedan trenutak, koji bi neposredno sledio drugi trenutak, ili tačka koja bi neposredno sledila drugu tačku, nego da se između ma koja dva trenutka, odnosno ma koje dve tačke nalazi uvek neko neprekidno vreme, odnosno neprekidna linija u kojima bi se našlo koliko god bi se htelo trenutaka odnosno tačaka koji bi bili manje udaljeni ma od kojih krajnjih, nego što su udaljeni između sebe samih; zatim, da ne postoji nijedan delić vremena odnosno delić prostora tako mali, da se ne bi mogli naći drugi manji od njega, a isto tako da ne postoji nijedan delić vremena, odnosno delić prostora u tom smislu prvi, da u njemu samom ne bi bilo delova od kojih bi jedni bili pre drugih. Ako se o svemu tome valjano razmišlja i uvek ima pred očima sve što je u vezi s kontinuitetom, teškoće će nestati, a samo to će niže biti glavni ključ kojim ćemo u zakonu kontinuiteta otkrivati i rešavati teškoće koje je izneo Mopertij protiv Bernulia.[41]

53. Međutim, za bolje shvatanje same prirode kontinuiteta, i za ono što nameravamo da govorimo o zakonu kontinuiteta, vrlo mnogo će koristiti, da se malo pažljivije posmatra nastajanje neprekidnog kvantiteta jedne vrste, tj. linije, a to posmatranje povlači za sobom čitavu višu geometriju; u glavnim crtama, međutim, preći ćemo neke stvari koje će biti od veće koristi. Pre svega, u geometriji postoji beskonačno mnogo vrsta neprekidnih linija koje se nazivaju geometrijskim mestima, a svaka od njih ima svoju vrlo jednostavnu prirodu, iako nama izgleda da je vrlo složena i zapletena; takvu prirodu imaju i neke opšte osobine (tih linija) svuda zajedničke koje proističu iz nje, pa ne postoji čak ni jedan mali luk koji tim svojstvima ne bi odgovarao.[42]

54. Ma kod koje od ovih neprekidnih linija, postojaće uvek nastavljanje istog toka ove vrste, tako da se luk nigde ne prekida, nigde ne prestaje i ni u jednoj tački se ne završava. To je sasvim očigledno prema najširem nabrajanju svih krivih čiju prirodu geometričari poznaju; to zaista nužno proizilazi iz same prirode kontinuiteta, i uopšte se lako izvodi. Jer ma koja tačka mora biti međa između dva dela linije koji se neposredno nastavljaju, kao što je u vremenu ma koji trenutak međa između prethodnog i sledećeg vremena. Linija prostora se u tome razlikuje od stvarne linije materije (ako uopšte postoji stvarna linija materije, po našoj teoriji ne postoji nijedna), što je na stvarnoj liniji ma koja međutačka zajednička granica između jednog i drugog dela linije, a prva i poslednja tačka je, s jedne strane, međa stvarne linije, i praznog prostora ili ničega, s druge strane; na liniji prostora zaista nigde nema tačke u kojoj bi se sama linija prekidala i koja ne bi imala liniju pre sebe i liniju posle sebe. To, naravno, iziskuje sama priroda geometrijske tačke, da dve susedne linije uvek međusobno vezuje i spaja, ili rastavlja i odvaja, i oba posla obavlja u isti mah, kao što, dalje, ma koji trenutak u vremenu, ima neko vreme pre sebe i posle sebe i uvek neko prethodno od narednog koje neposredno nastupa, rastavlja i odvaja.[43]

55. Odatle je lako shvatiti, zašto se svaka linija, koja se neprekidno nastavlja, ili savija u krug, vraća u sebe samu, ili se nekim beskrajnim krakom vraća preko ma kojih granica u beskonačnosti, nigde tako prekinuta, da se dalje ne bi mogla nastaviti. Štaviše, i to se nužno dešava da, ako bilo koji njen krak ma sa koje strane ide u beskonačnost, uvek i neki drugi ide u beskonačnost, sa iste ili druge strane, isto tako bez ikakvog kraja i nigde se ne prekida. Sasvim je čudno svojstvo linija, kako onih koje se vraćaju u krug, tako i onih koje odlaze bilo kojim krakom u beskonačnost; ovde se zaista otvara neizmerno polje kroz koje bi se moglo juriti i tumarati, a ne u jednoj raspravici, tako sputanoj uskim granicama, iznositi materiju koja se nikad dovoljno ne bi mogla preći ni u ogromnom broju velikih knjiga. Ali tu želju treba svakako obuzdati i obraditi samo ono što je krajnja svrha.[44]

56. Sve linije naročito one koje se vraćaju u krug, nemaju nigde početka i nigde svršetka, već se beskrajno mnogo puta kao neke zavojnice vraćaju u sebe same. Sasvim dobro je poznato geometričarima, da se to dešava u kružnici koja je od svih linija najjednostavnija i najjasnija za našu ljudsku svest, a to je i jedini razlog što kružni luk po Euklidovoj geometriji uopšte ne dopušta trisekciju. Tako smo i mi nedavno izložili stvari u našim *Elementima konusnih preseka*, u trećoj knjizi od br. 278; ako pretpostavimo da treba preseći na tri jednaka dela neki luk kružnice *AB*, na sl. 4, na prvi pogled se čini da je taj predviđeni luk jedini za trisekciju; međutim, njih ima beskonačno mnogo. Pošto se kružnica doista kao nekim beskrajnim zavojcima vraća u sebe samu i okreće (zatvara), tačka A ili B za jednička jebeskrajnom broju zavojaka, a beskrajno mnogo lukova počinju od A i svršavaju se u B, kako oni AEB koji idu u jednom smeru, tako i AFB (u drugom smeru) koji svi po prirodi imaju iste osobine, da sve njihove tačke doista imaju isto rastojanje od centra, a imaju i ista opšta svojstva, na primer, da njihovim jednakim delovima odgovaraju njima jednake korespondentne tetive. To su oni lukovi s prvim smerom AEB, $AEBFAEB$, $AEBFAEBFAEB$ i tako dalje, a s drugim smerom AFB, $AFBEAFB$, $AFBEAFBEAFB$ i tako dalje. Neka prvi luk AEB bude od 60 stepeni, AFB će biti od 300; između A i B sadržavaće se svi lukovi koji se iskazuju brojen stepeni sastavljenih od 60 ili 300 i stalnim dodavanjem broja 360, to znači lukovi od 60, 420, 780, 1140 stepeni itd. i od 300, 660, 1020, 1380 stepeni itd.[45]



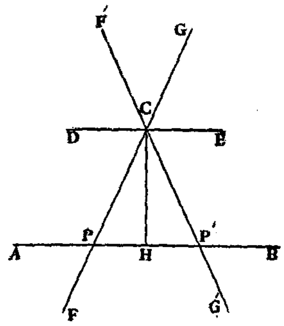
Sl. 4

57. A zbog prirode i zbog osobina koje su zajedničke svim kružnim lukovima, ne može se uopšte desiti, ako se uzme ma koje geometrijsko mesto, ili ma koja geometrijska konstrukcija na osnovu prirode i osobina luka koji počinje u A a završava se u B — da se pronađe treći deo jednog od tih lukova, kako bi se samom konstrukcijom u isti mah pronašao i treći deo svih ostalih lukova kojih ima, kao što rekosmo, beskrajno mnogo. Otuda se vidi da taj problem, iako je izgledalo da ima jedno jedino rešenje, zahteva beskrajan broj rešenja. Ali se lako dešava i to, da se sva ova rešenja, beskrajno po broju, svedu samo na tri, ili na pronalaženje samo tri tačke. Jer ako je AD od 20 stepeni treći deo luka AEB od 60 stepeni, i dodavši mu DD' od 120 stepeni kao treći deo čitavog obima od 360 stepeni, biće AD' od 140^0 treći deo luka $AEBFAEB$ od 420^0 koji je sastavljen od AEB i jednog obima; a ako se ponovo doda luk D' D'' od 120 stepeni koji je treći deo čitavog obima, dobiće se luk ADB $D'FD''$ od 260 stepeni kao treći deo luka $AEBFAEBFAEB$ od 780 stepeni koji je sastavljen od AEB i dva obima; i pošto je $D''D$ treći deo kružnice, biće luk $AEBFAD'$ sastavljen od luka AD i jednog obima koji je treći deo luka što počinje u A, a završava se u B posle tri cela obilaženja, a luk $AEDFAEBD$ podjednako će biti treći deo luka koji počinje u A i završava se u B posle četiri obilaženja; i tako dalje u beskonačnost, jer, dodajući celom luku, na kojem treba da se izvrši trisekcija, čitave nove obime, trećem delu bi pridošle nove trećine samog obima, pa jasno izlazi, da svi lukovi koji počinju u A i posle ma koliko broja celih obilaženja koji se završavaju u B, seku redom AEB u nekoj od one tri tačke D, D', D''; kao što će biti obratno, ako je AD treći deo luka AED, i DD'' celog obima, AD'' će biti treći deo luka AFB, i dalje po istom dokazu biće AFD' treći deo onoga luka koji samom *AFB* dodaje celo obilaženje luka sastavljenog od *AFB*, *AFBED* i dva obima; i tako dalje na isti način, svi lukovi koji polaze iz *A* i preko *F* završavaju se u *B*, posle ma kolikog broja zavoja, ako treba da se seku na tri dela, uvek će se dobijati otsečak trećeg dela u jednoj od onih istih tačaka *D''D'D*. Stoga se sva tri rešenja, beskrajna po broju, svode na pronalaženje samo ove tri tačke.[46]

58. Dalje se za to traži geometrijsko mesto koje bi tu istu kružnicu seklo baš u te tri tačke, ili dva geometrijska mesta koja bi se međusobno mogla seći u tri tačke; pošto to dve prave linije međusobno, ili prava s kružnicom, ne mogu načiniti (jer kod onih (pravih) može biti samo jedan presek, a kod ovih (prave i kružnice) dva), to mogu načiniti dva konusna preseka, ili konusni presek, ili čak ma koja viša kriva s kružnicom; trisekcija kružnog luka uopšte se ne bi mogla izvesti po Euklidovoj geometriji koja koristi samo prave linije i kružnicu, a mogla bi se izvesti konusnim presecima, ili ma kojim višim krivim linijama; ali ako bi se rešenje tražilo preko algebarske analize, uvek će se nužno dobiti jednačina trećeg stepena koja ima sva tri realna rešenja i koja samim svojim rešenjima daje sve one tri tačke; ako bi se u dovoljnoj meri razmotrila priroda kontinuiteta i kružnice koja nigde ne počinje i nigde se ne završava beskrajnim zavijanjem u sebe samu, bilo bi sasvim jasno, da se mnogi ljudi ne bi tako dugo uzalud mučili u traženju rešenja toga problema, da bi ga rešili pomoću nepodesnih metoda.[47]

59. I tako se, ono što smo rekli o kružnici, nalazi svuda kod svih krivih koje se u sebe same ma na koji način kružno vraćaju, a tih krivih ima beskrajno mnogo vrsta, pa ih nije moguće sve u potpunosti objasniti. Isto tako je beskrajan broj vrsta linija koje sa bilo koliko krakova odlaze u beskonačnost bez ikakva ograničenja. Prava linija je od svih najjednostavnija za našu ljudsku svest, i pošto se ona s obe strane proteže u beskonačnost po svojoj prirodi, i nigde se ne završi tako, da se ne bi mogla nastaviti, ima, reklo bi se, neka dva beskrajna kraka. Po dva kraka ima isto tako parabola; hiperbola ih ima četiri, kao što je geometričarima dobro poznato, i na njihovom posmatranju ćemo se malo zadržati da bi nam priroda kontinuiteta postala poznata; mnogo više stvari koje ovamo spadaju obradili smo u opširnijoj raspravi dodatoj pomenutim našim *Elementima o konusnim presecima*, gde smo, raspravljajući o transformaciji geometrijskih mesta, veoma pažljivo govorili i o mnogim stvarima koje se tiču prirode geometrijskog kontinuiteta.[48]

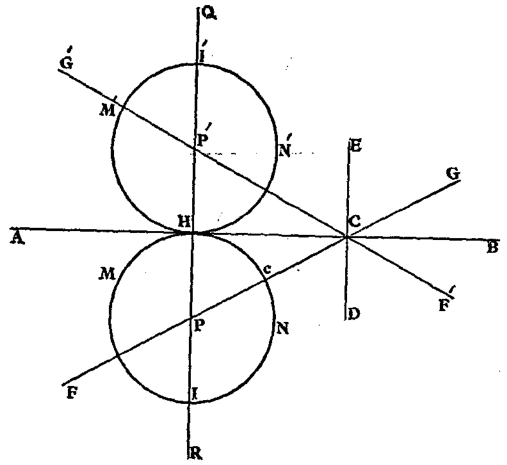
60. Neka, pre svega, na sl. 5, bude neka prava *AB* koja je zamišljena kao da je s obe strane produžena koliko može da se produži. Ako baš na njoj uzmemo ma koju tačku *H*, a izvan nje tačku *C*, neka sad kroz ovu prođe neka prava *GF*, isto tako produžena koliko može da se produži, i ako se ona ne poklapa sa pravom *DCE* koja je paralelna sa *AB*, seći će je negde u *P*. Zamislimo da se ta prava *GF* najpre poklapa sa *CH*, a zatim da se stalno okreće oko *C* prema *A*. Tačka *P* biće prvo u *H*, onda će preći neprekidnim kretanjem preko čitave prave *HA* tako, da ne postoji nijedna njena tačka ma koliko udaljena od *H*, do koje ne bi doprla pre nego što se poklopi s pravom *ED* koja je paralelna sa samom *BA*. U trenutku vremena u kome će se s njom poklopiti prava *GF*, nigde neće biti onog preseka *P*, već će se sakriti potopljen i nestao kao u kakvom beskonačnom moru i ponoru. A ma u kome od sledećih trenutaka, pri prelaženju *GF* u *G'F'*, pojaviće se presek *P'* iz beskonačnosti sa strane *B*, tako da neće biti nijedne tačke na njegovom beskrajnom kraku *HB*, kroz koju on ne bi prošao, a pošto bude prošao ceo krak, opet će dospeti do *H*. Čudno je videti ovde neko spajanje beskonačne prave koja se na neki način vraća u sebe samu kroz beskonačnost tako, da



Sl. 5

se dva njena kraka *HB* i *HA* nekako i spajaju i vezuju na onom beskrajnom rastojanju sa suprotnih strana, i da očevidno sama beskonačnost postaje kao neka zajednička tačka koja spaja ona dva kraka sa strane *HB* i *HA*, kao što ih spaja i vezuje tačka *H* i zajednička je međa za *BH* i *AH*. Ako zamislimo da je neprekidno kretanje preseka *P*, spojeno s neprekidnim kretanjem prave *GF*, pošto stavimo ∞ kao znak beskonačnosti, pokazaće se da ono nastaje samo preko *HA* ∞ *BH*, i to tako, da ma u kojem trenutku vremena onaj presek bude u nekoj tački, recimo svoje beskrajne kružnice, kojom bi sa kraka *HA* prešao na krak *HB* kroz zajedničku među ∞, i neprekidnim kretanjem linije, koja se obrće (oko tačke *C*), u pojedinim njenim obrtanjima dvaput načinio ceo takav obilazak, a sama prava (*AB*), produžena sa obe strane u beskonačnost, svela bi se na neku beskrajnu kružnicu koja se vraća u sebe stalnim i beskrajnim zavijanjem.[49]

61. Ovu ekvipolenciju (jednaku vrednost) prave s nekom beskonačnom kružnicom možemo videti i na sl. 6. Ako bi se na samoj *AB* uzela tačka *C* i kroz nju prava *GF* koja bi se stalno obrtala, a sekla uvek negde u *P* pravu *QHR* koja je normalna na *AB*, i ako bi se u centru *P* s poluprečnikom *PH* zamišljala uvek kružnica *HMIN*, i ako bi se posmatrale sve promene koje će se desiti na luku *MHN* u tom neprekidnom kretanju, lako će se uvideti da se, pošto se prava *GF* približi položaju prave *ECD* koja je paralelna sa samom *QR*, tačka *P* udaljuje od *H*, da se kružnica povećava i da se luk *MHN* neprekidno približava pravoj *AHB* koju bi prekrio u neprekidnom kretanju i otišao na suprotnu stranu u *M'HN'*, dok bi, pošto je sama *GF* prešla položaj *ED*, tačka *P*, savladavši beskonačnost ∞, otišla na stranu *Q*. U tome se prelaženju jasno vidi, da onaj luk prelazi kroz pravu u samom pristajanju prave *GF* uz *ED* i u prolazu tačke *P* kroz beskonačnost ∞; jer svim ostalim trenucima vremena odgovaraju uvek druga stanja istog obima, s ove ili s one

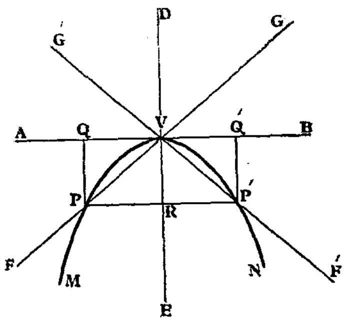


Sl. 6

strane prave *AHB*, a ta stanja, sav taj prostor koji se nalazi ma s koje strane, tako izbrišu i kao očiste u svom neprekidnom kretanju, da ne ostane nijedna tačka istog prostora do koje u nekom položaju tačke *P* koja postoji ovde ili onde na pravama *HQ*, *HR*, ne bi mogao dospeti onaj luk kružnice. Zato za onaj jedini trenutak u kome se prava *GF* poklapa sa *ED* i tačka *P* poklapa s beskonačnim ∞, još preostaje ono jedino stanje periferije *MHN* koja se poklapa s beskrajnom pravom *AHB*, pa stoga i sam luk mora dospeti u to stanje u onom trenutku, u kome centar *P* same kružnice i kraj prečnika *I* više ne postoje, jer je sama kružnica postala beskrajna, celokupna krivina je nestala, a mesto beskrajne periferije zauzela prava.[50]

62. Ako se sada shvati kao da prava *CP* prilazi periferiji kruga u *c*, a kao što su neprekidni lukovi kružnice *HMINH* koji počinju u *H* i završavaju se u *c*, dva luka *Hc* i *HMIc* u suprotnim smerovima, štaviše, prema sl. br. 56. beskonačni u oba smera, tako su i na beskrajnoj pravoj *HA* ∞ *BH* dva odsečka, jedan u jednom, drugi u drugom smeru, koji su kao nekakvi lukovi s početkom u *H* i završetkom u *C*; naime *HC* i *HA* ∞ *BC*, čak i beskrajna, što znači *HCB* ∞ *AHC*, *HCB* ∞ *AHCB* ∞ *AHC* itd., a *HA* ∞ ∞ *BCHA* ∞ *BCHA* ∞ *BCHA* ∞ *BCHA* ∞ *BC* itd., pa je prosto neverovatno, kakvu korist ima to posmatranje u ovoj istoj našoj raspravi pri izlaganju izvesne sličnosti koju imaju elipsa i hiperbola međusobno, gde bi izgledalo da sama sličnost sve najviše remeti.[51]

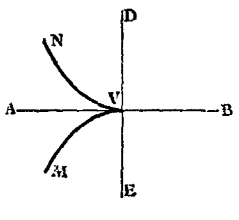
63. Nije manje elegantno i tajanstveno u isti mah, izvesno nastavljanje kako paraboličnih tako i hiperboličnih lukova i njihova povezanost na tom beskrajnom rastojanju. Neka *DVE* (sl. 7.) bude osa, *AVB* tangenta parabole *MVN* koja će se zamisliti da je produžena koliko je moguće. U svim *Elementima o konusnim presecima* dokazuje se da se kraci *VM*, *VN* i međusobno



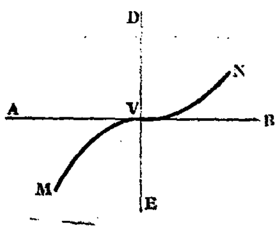
Sl. 7

i od ose i od tangente udaljuju u beskonačnost. Jer, neka se kroz bilo koju tačku *Q* tangente, ili tačku R ose, ma kako udaljenu od *V*, povuče prava normalna na tangentu odnosno na osu ona prva mora negde da priđe jednom, a ova druga i jednom i drugom kraku, ovde i onde. A kad se povuče ma koja prava *FG* kroz *V*, sa ove ili one strane ose koja se ne sastaje ponovo ni s jednim krakom, dokazuje se da se ona mora ponovo sastati s jednim krakom ma gde u *P*, osim ako to nije sama tangenta na kojoj se stapaju tačke *P*, *V*. Neka se, dakle, zamisli prava *GVP* koja se obrće neprekidnim kretanjem, i neka se strogo utvrdi neprekidno kretanje tačke *P*. Pošto se ona odvoji od položaja tangente *BA*, odvojiće se tačka *P* od *V* i preći će čitav krak *VM*, na kome će se uvek naći na nekom mestu, pa ma kako prava *FG* bila malo udaljena od ose *ED*, i ne postoji ni jedna tačka samoga kraka *VM*, ma koliko bila udaljena od *V*, kojoj jednom ne bi prišla. U onom jedinom trenutku u kome će se ta prava poklopiti sa osom, tačka *P* zatrpana beskrajnošću neće biti nigde, već će se, prelaskom *FG* u *F'G'* na suprotnu stranu, baš ta tačka vratiti iz beskonačnosti preko svih tačaka *P'* beskrajnog kraka *NP'V*, dok se prelaskom *F'G'* u *BA* ne vrati u *V*. Neprekidnim kretanjem ove prave oko *V*, neprekidno kretanje tačke *P* tećiće isto tako po čitavoj paraboli, tako da bi je, u pojedinim celim obrtajima te prave, dvaput prešla celu prelazeći sa jednog kraka na drugi, u trenutku vremena kad prava prilazi tangenti kroz tačku *V*, gde je jasno da su oni (kraci parabole) spojeni sa zajedničkom međom V, i isto tako kroz beskonačnost u trenutku vremena kad sama prava pristaje uz osu; ovde se stoga ova dva kraka nekako spajaju na onim suprotnim beskrajnim rastojanjima od ose, kao što bi se leva strana, što smo videli na pravoj liniji, na neki način spojila s desnom; a tačka P, odlazeći u beskonačnost preko prave RP sa suprotne strane P', vratila bi se iz beskonačnosti, dok bi se parabola nekako na tom beskonačnom rastojanju kao vratila u sebe samu, spojivši se u beskonačnosti sa zajedničkom međom."[52]

64. I baš kod konusne parabole na istom delu ose *VE*, krak *VM* je otišao u beskonačnost, a krak *NV* se vraća iz beskonačnosti. Ako bi se posmatrale uopšteno ove krive, čija je ordinata *PR* ma u kojem direktnom odnosu prema ma kojoj celoj ili razlomljenoj potenciji apscise *VR*, a te krive smo, sa onima u kojima je ordinata ma u kojem recipročnom odnosu iste apscise, temeljno objasnili u pomenutoj raspravi i pošto smo odredili smer i geometrijsku neprekidnost njihovih lukova, pojavile su se parabole višeg reda, u kojima se krak *VN* vraća sa suprotne strane ili, kao što je na sl. 8, u uglu *AVD* koji leži uz bok tangente, u kojem slučaju se vrh nalazi u *V*, a njega smo ovde nazvali vrhom prve vrste i kao što ga geometričari oupšteno nazivaju povratnom tačkom, ili, kao na sl. 9, u susednom uglu *DVB*, u kojem se slučaju u *V* dobija prevojna tačka, i cela porodica viših parabola se svodi na ta tri slučaja, što smo na istom mestu pokazali.[53]



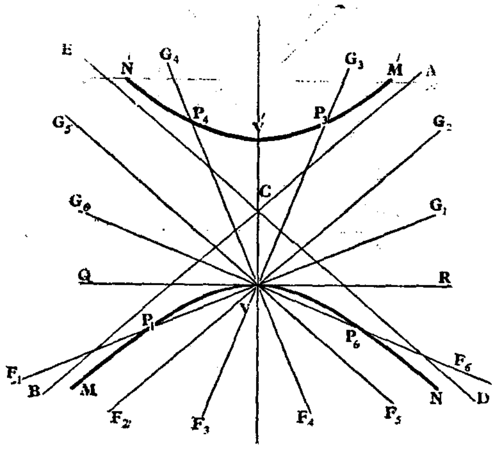
Sl. 8



Sl. 9

65. I, zaista, sve parabole, kod kojih je ordinata u nekom direktnom odnosu prema apscisi, imaju samo po dva beskrajna kraka. A pojedine hiperbole, kod kojih je odnos ove vrste recipročan, imaju po četiri kraka od kojih su dva kraka za jednu, a dva za drugu granu, pa jedna od njih s obzirom na drugu izgleda sasvim odvojena; no ipak se ove dve grane spajaju na beskonačnom rastojanju pojedinačno pomoću četiri kraka između sebe, tako, da stvaraju neku jedinstvenu neprekidnu liniju koja se obično spaja u samoj beskonačnosti sa suprotnih strana, tako da bi tačka neprekidnim kretanjem mogla da pređe preko njih, odlazeći u beskonačnost jednim krakom i vraćajući se iz beskonačnosti drugim; međutim, između tih krakova i onih kod parabole pojavljuje se razlika, jer ovi stalno odlaze u beskonačnost i od ose i ma od koje druge prave, a pojedini kraci hiperbole imaju neku pravu kojoj prilaze neograničeno, da bi se s njom sjedinili u nekoj tački ma koliko udaljenoj, pa se zbog toga ta prava zove asimptota. Taj problem ćemo moći da razmatramo kod obične konusne hiperbole.[51]

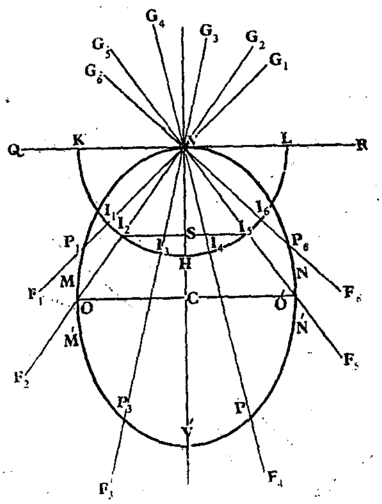
66. Slika 10. prikazuje dve grane hiperbole, MVN, $M'V'N'$, koje se sastoje od četiri beskonačna asimptotska kraka VM, VN, $V'N'$, $V'M'$, a njihove asimptote neka budu dve beskrajne prave ACB, DCE. Ako se na jednoj grani proizvoljno uzme tačka V, i ako kroz nju prođe tangenta QVR, tada će ma koja druga prava GVP, uvek seći hiperbolu u jenoj jedinoj tački P, izuzev dve prave F_2G_2, i F_5G_5 koje su paralelne s dve asimptote, što se obično dokazuje u *Opštim elementima konusnih preseka*, ili se iz njih prilično lako izvodi. Stoga će, ako zamislimo da se sama prava koja je izišla iz položaja tangente QR obrće neprekidnim kretanjem oko V prema F_1G_1, i ako se duh oštro usredsredi na neprekidno kretanje tačke P_1, biti jasno da sama tačka P_1 prelazi čitav beskrajni krak VM, dok F_5G_5 odlazeći u F_2G_2 postaje



Sl. 10

paralelna sa asimptomom BA, a u tome trenutku vremena sama tačka P koja se krije u beskonačnosti već neće postojati nigde; a nastavljenim kretanjem kroz F_3G_3, vratiće se iz beskonačnosti kroz P_3 i opisaće čitav krak $M'V'$ suprotne grane, pa će preko kraka $V'N'$ u P^4 neprekidnim kretanjem prave F_4G_4 otići u beskonačnost na stranu N', dok ona prava F_5G_5 ne postane paralelna sa asimptotom DE; u tom trenutku vremena će se ista tačka P po drugi put sakriti u beskonačnost, a u ma kojem trenutku sledećeg vremena, pošto prava pređe u F_6G_6, vratiće se iz beskonačnosti u P_6 preko beskrajnog kraka NV, i kad se sama prava poklopi s tangentom QR posle završene polovine obrtanja, vratiće se u V, odakle je i pošla, pošto je prešla put preko čitave hiperbole.[53]

67. Iz ovoga je jasno da neprekidnim kretanjem i jedna i druga grana hiperbole sačinjavaju jednu neprekidnu geometrijsku krivu $VMM'V'N'NV$ koja dvaput odlazi u beskonačnost, dvaput se nekako vraća iz beskonačnosti sa suprotne strane onim beskrajnim kracima u samoj beskonačnosti, ako i sa suprotnih strana, dvaput spojenim nekom zajedničkom međom, kao što se na konačnom rastojanju spajaju u V i u V' u jednoj zajedničkoj tački. Ovde opet možemo posmatrati vanredno finu sličnost hiperbole s parabolom i elipsom, koju smo malo drukčije tretirali u toliko puta pomenutoj raspravi pridodatoj trećoj knjizi naših *Elemenata.* Neka bude na sl. 11. elipsa $OVO'V'$ u kojoj su tačke VV' dva temena poprečne ose, ili prečnika koji je konjun-



Sl. 11

govan sa drugom osom OO', tj. sa konjungovanim prečnikom sa njom (poprečnom osom), i neka QVR bude tangenta same elipse, neka FVG bude ma koja druga prava, tako da F_2G_2 i F_5G_5 prolaze jedna kroz O, druga kroz O', a ostale četiri neka seku pojedinačno svaki od četiri luka VO, OV', $V'O'$,

$O'V$, u P_1, P_3, P_4, i P_6. Ako bi se pak ona prava FVG, udaljivši se iz položaja tangente QVR, obrtala u neprekidnom kretanju oko V, i ako se stave s ove i s one strane od O dva znaka M, M', i od O' dva znaka N, N', tačka P će isto tako u neprekidnom kretanju preći celu elipsu sasvim po istom redu kojim je prelazila čitavu hiperbolu. Dve grane hiperbole MVN, N' $'V'M'$ odgovaraju dvema poluelipsama MVN, $N'V'M'$, a četvorim lukovima VM, $M'V'$, $V'N'$, NV ove (elipse), odgovaraju četiri kraka VM, $M'V'$, $V'N'$, NV one (hiperbole). Oni se lukovi (elipse) spajaju u dvama tačkama V, V', a isto tako i u dvema drugim tačkama O, O', a ovi se kraci (hiperbole) isto tako spajaju u dvama tačkama V i V' i u dvema beskonačnim tačkama ∞, ∞' od kojih je prva u A i B, druga u E i D, u kojima se kriju ona spajanja na taj način beskonačno udaljena. Postoji jedan neprekinuti krug kojim se elipsa vraća u sebe samu $VMOM'V'N'O'NV$, i jedan neprekinuti geometrijski krug kojim se hiperbola vraća u sebe samu kroz VM ∞ ∞ $M'V'N'$ ∞' NV, ali se nijedan ne prekida, nijedan nema međe koja ne bi bila zajednička dvema linijama koje leže s ove ili s one strane od nje.[56]

68. I ovde se već može posmatrati neprekidan prelazak elipse u hiperbolu preko parabole i njihovo neko zaista čudesno spajanje, u kome je i onaj trenutni prelazak preko beskrajnog otvora parabole sa jedne na suprotnu stranu, koji smo posmatrali u br. 63. preko spajanja prave koja na obe strane ide u beskonačnost, pa se u samoj beskonačnosti nekako vraća u samu sebe, i nama se ponovo javlja u drugom vidu kao otvor celokupne beskonačnosti koji je ekvivalentan jednoj tački; ali, to se ipak tiče onih tajni beskonačnosti koje se svode na prave apsurde i koje će nam omogućiti da uklonimo kako beskonačno velike tako i beskonačno male apsolutne kvantitete koji su u sebi samima određeni i stvarno postojeći, što se izvanredno slaže s našom teorijom nedeljivih tačaka.[57]

69. Iz najopštijih *Elemenata o konusnim presecima* sasvim je poznato, da presek konusa paralelan s bazom daje kružnicu koja, kada se menja nagib preseka, prelazi u elipsu. A sama se elipsa neprekidnim kretanjem ravni preseka tako izdužuje da, presekom koji je paralelan ravni što prolazi kroz vrh konusa i dodiruje ga, postaje parabola; tada neprekidnim kretanjem ravni preseka, taj presek postaje hiperbola čiji se oblik neprekidno menja, i kad ta ista ravan prođe kroz vrh, hiperbola se pretvara u pravu, pa je pri tim transformacijama jedino parabola nedeljiva međa kojom se u trenutku vremena vrši prelaz od neprekidnog niza elipsa u neprekidni niz hiperbola. I ovu i mnoge druge slične transformacije krivih linija jedne u drugu, u kružnicu, u prave, kao i neprekidne promene, do kojih dolazi u njihovim pojedinim tačkama i linijama, obradili smo opširno i pažljivo u onoj istoj raspravi, i ko je bude razumeo steći će ne baš sasvim malo znanje o geometrijskom kontinuitetu. Ovde ćemo samo označiti ono što se odnosi na posmatranje spajanja na beskonačnom rastojanju i na vraćanje ma kojeg konusnog preseka u sebe samoga, što ćemo posmatrati u samom prelazu, za poseban slučaj parabole, kao i udaljavanje tačaka u beskonačnost.[58]

70. Dok se, naime, u neprekidnom kretanju elipsa, na slici 11, približava paraboli, cela poluelipsa $OM'V'N'O'$ povlači se preko bilo kojih granica u beskonačnost, a i same tačke O, O' međusobno se beskonačno udaljuju, dok konjungovana osa elipse beskonačno raste. U onom trenutku vremena, u kome je elipsa postala parabola, tačke O, O' sa celim lukom $M'V'N'$ već nigde ne postoje, nego iščezavaju kao da su zaklonjeni samom beskonačnošću. Ostaje pak sa strane V luk MVN s dva kraka, produžen u beskonačnost, koji se nigde ne prekida i postojan je, pa se na onom beskrajnom rastojanju tačaka O, O', koje nestaju u beskonačnosti, na neki način još i nastavlja, što je bila ranija ideja u slučaju i prave i parabole koje se vraćaju u sebe sa suprotnih rastojanja. Ali, pošto se nastavi to kretanje ravni preseka, presek postaje hiperbola, na slici 10, vraćanjem iz beskrajnosti sa suprotnih strana onog luka $N'V'M'$, koji se ma u kojoj elipsi, na sl. 11, spaja s lukom MVN u onim određenim tačkama O, O'; kod parabole nigde nije bio zaklonjen u beskonačnosti, a kod hiperbole se nekako s njim spaja u dvema beskrajnim tačkama, s jednom u B i A, s drugom u D i E.[59]

71. I odavde proizilaze mnoge činjenice koje doprinose da se sasvim jasno shvati priroda konusnih preseka i geometrijski kontinuitet, među kojima i to da, konačnoj osi elipse VCV', gde je tačka C satvljena u centar, ne odgovara konačna osa hiperbole VCV', već osa $V \infty V'$ koja je sa suprotne strane prošla kroz beskonačnost, a ne odgovara ni konačnom centru C elipse konačni centar C hiperbole, već nekom drugom koji se gubi u beskonačnosti, i obratno. Pošto, na isti način kao u br. 60. postoji sa obe strane od V do V' na pravoj liniji, posmatranoj u obliku beskrajne kružnice, konačni segment VCV', i drugi segment $V \infty V'$ koji je prošao sa suprotne strane kroz beskonačnost, i onda je onaj prvi presečen na dva dela u C, a drugi u samoj beskrajnoj tački ∞, pa i jedna i druga kriva imaju po dva centra, jedan u C, a drugi u ∞ iz kojih se od jednog do drugog pružaju svi prečnici; centru C elipse, kome sama elipsa okreće izdubljenost dvema poluelipsama OVO' i $OV'O'$, ne odgovara posmatračima sam centar C hiperbole, jer ona njemu ne okreće izdubljenost već ispupčenost, nego odgovara centar skriven u beskonačnosti ∞ kome ona (hiperbola) takođe okreće izdubljenost; otuda i proizilazi, da konjungovana osa hiperbole ni na koji način ne odgovara konjungovanoj osi elipse, kao i mnoge druge stvari čijom se pomoći srećno veoma mnogo objašnjava u onoj istoj našoj raspravi i ukazuje u svemu tome na ono što se odnosi na konačne veličine, kao i da se preko ovih beskonačnih prelaza, savršenom geometrijskom sličnošću usaglašava sve ono što bi izgledalo da se njoj najviše protivi; pokazuje se isto tako zašto je zbir kvadrata dve ose i dva ma koja konjungovana prečnika elipse uvek jednak stalnoj veličini, a da kvadrati ma kojih veličina, ma kako one prelazile, promenivši smer, iz pozitivnih u negativne, moraju biti pozitivni; osim toga, kod hiperbole ne zbir, već razlika istih kvadrata mora biti stalna. Ove stvari smo tamo jasnije obradili i bez obzira što su dosta obimne, da bi se mogle stisnuti u ove veoma tesne granice koje su nam na ovom mestu date; mnogi traže osobine samih konusnih preseka koje smo dokazali, u *Ele-*

mentima istih, kao i mnoge stvari koje se odnose na prirodu pozitivnih i negativnih veličina, koje ovde još nismo ni dotakli, a jedva ćemo ih se dotaći i malo niže.[60]

72. Međutim, pošto nam je takvo spajanje neprekidnih linija u beskonačnosti pokazalo neke tajne koje, izgleda, prevazilaze shvatanje ljudskog uma, ali, čini nam se, ne sadrže nikakve kontradikcije, biće korisno da se rasmotre neke više tajne koje nam se baš ovde nameću, a izgleda da odlaže u pravu apsurdnost; opširnije smo razmotrili mnoge stvari ove vrste u onoj istoj ranijoj raspravi i one su nas tek tada uverile u to: da ne postoji stvarno nijedna linija koja bi mogla biti protegnuta u beskonačnost, već da je sama beskonačnost neograničena mogućnost za udaljavanje jedne stvarne tačke od druge preko bilo kojih granica, ma kako proizvoljno određenih; ali makoliko da je rastojanje, moralo bi da bude konačno, a svako drugo konačno moglo bi da bude veće tako, da nijedno od svih mogućih ne bi moglo biti poslednje i najveće; i na taj način nijedno od svih mogućih nije prvo i najmanje, ali o toj stvari ćemo govoriti malo kasnije. Ovde ćemo raspravljati baš o takvim tajnama, onako kako nam se budu same nametale.[61]

73. Dok elipsa nastaje neprekidnim kretanjem i zatim prelazi u parabolu, neka se misao oštro usredsredi, slika 11, na neprekidno kretanje luka $OV'O'$ i pravih VF_2, VF_5. Ovaj luk će tako odlaziti u beskonačnost, da će se i same tačke O i O', kao što smo napomenuli, udaljavati međusobno i od centra C u beskonačnost. U slučaju parabole one nigde neće postojati, jer će beskonačnošću biti potopljene i zaklonjene, dok će otvor same parabole rasti u beskonačnost; i prave VF_2 i VF_5, mada se uvek uzajamno seku i prolaze kroz tačke O, O', koje se od ose V V' udaljuju u beskonačnost stalno će se približavati jedna drugoj i, pošto ugao F_2VF_5 opada preko bilo kojih granica, da bi se u slučaju parabole sastale međusobno i sa samom osom VV', a da bi ugao F_2VF_5 potpuno iščezao. Neka se naime zamisli, sa centrom V i sa ma kojim konačnim poluprečnikom, polukružnica koja dopire do tangente QR u K, L, seče osu VV' u H, a sve prave VF u I, i neka se povuče I_2I_5 koja seče samu VV' u S.[62]

74. Kako se kod elipse parametar odnosi prema spregnutoj osi kao što se ova odnosi prema transverzalnoj osi i kako parametar ostaje ograničen, jer teži prema parametru parabole, a spregnuta osa zadržava se unutar parabole i raste u beskonačnost, i pošto otvor (parabole) raste u beskonačnost, beskonačno će opadati odnos parametra prema spregnutoj osi, a zatim i odnos ove prema transverzalnoj osi, pa prema tome, kako smo uzeli polovine, opadaće i odnos OC prema CHV, i mnogo više odnos CO prema OV, ili I_2S prema I_2V; tako i sinus ugla I_2VH ili F_2VV' beskonačno opada pošto su postali sasvim beskonačni VV' i OO', sam sinus će potpuno nestati, i ugao F_2VV', a tako i njegov dvostruki ugao F_2VF_5, moraju da nestanu sasvim. Treba, dakle, da se tačke I_2, I_5 sa svima međutačkama spoje u H,

pošto nestane ceo međuluk, i da se preko svakog konačnog razmaka, ma kako on bio veliki, prave VF_2, VF_5 stope jedna s drugom i sa osom.[63]

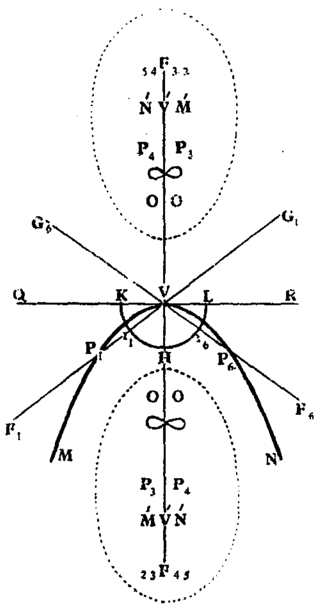
75. Iz ovog stapanja njihovih tačaka i nestajanja ugla F_2VF_5 odmah je jasno, kako se može desiti, kao na sl. 7, da tačka P neprekidnim kretanjem pređe preko ose sa kraka VM na krak NV. Jer na sl. 11. od tačke P_1 do tačke P_6 prelazilo se kod elipse neprekidnim kretanjem, približavajući se pravoj VF_2 i svima međupravama u uglu F_2VF_5, kao i samoj pravoj VF_5. Ako bi luk KHL obeležavao vreme, za neprekidno vreme KI_2 bio bi pređen ceo luk VMO, jer je u trenutku vremena I_2 tačka P prišla pravoj VF_2, pa je onda za neprekidno vreme I_2HI_5 pređen ceo luk $OM'V'N'O'$, a u drugom trenutku vremena I_5 tačka P je prišla tački O', i najzad se za neprekidno vreme I_5L, preko luka $O'NV$, tačka P vratila u V. Pošto su se već spojile tačke I_2, I_5, nestalo je čitavo ono međuvreme; u trenutku vremena načinjen je prelaz.[64]

76. Pošto se nastavi kretanje ravni preseka i pošto se presek pretvori u hiperbolu, tačke O,O' na slici 11, ostaju na sl. 10, na beskonačnom rastojanju, ali ipak tako da je to isto na beskonačnom rastojanju sa strane F_2 kao i sa strane B, i sa strane G_2 kao i sa strane A, a isto tako i na beskonačnom rastojanju sa strane F_5 kao i sa strane D, i sa strane G_5 kao i sa strane E, gde ono, osim toga, nekako spaja beskonačni krak VM s krakom $M'V'$, i onaj beskrajni krak VN s krakom V,N'; pošto se zbog toga promenio položaj grana, desni luk otišao je na levi krak, a levi na desni.[65]

77. Šta se pak dogodilo u slučaju parabole, pokazaće slika 12. Tačke I_2, I_3, I_4, I_5 spojile su se ovde sa H; utopljene u beskonačnosti, skrivaju se sve tačke O, O', P_3, P_4, N',V', M'; na osu odlaze F_2, F_3, F_4 i F_5 i pošto se, kako elipsa tako i hiperbola mogu izmetnuti u ovu parabolu, prema tome kako je upravljeno kretanje ravni preseka prema onoj ili ovoj strani, potrebno je da one podjednako iščezavaju u beskonačnost, kako sa strane H tako i sa strane V, i one bi se na neki način tamo spojile i sačuvale kontinuitet.[66]

78. I ovde već izrastaju tajne u tolikoj meri, da prelaze u apsurdnost Jer, pošto se spajaju prave VF_2 i VF_5, na slici 11, moraju se spajati i tačke O i O' na sl. 12, tako da onaj razmak odnosno onaj otvor, koji uopšte ne može postojati kad se prave podudaraju, sasvim nestaje, mada u isto vreme raste u beskonačnost; isto se to mora dogoditi i beskrajnim tačkama P_3, P_4 u okolini M' i N'. Prave VF_2 i VF_5 moraju se potpuno podudarati pa ma koliko i ma kako veliko da je konačno rastojanje, a ipak, na beskrajnom rastojanju od V, moraju biti beskonačno udaljene između sebe, kao da čitavo konačno rastojanje, shvaćeno kao neograničeno, ne odlazi u beskonačnost i kao da, prethodno neizmerno podudaranje, spojeno s neizmernim kasnijim rastojanjem, ne protivreči pravosti.[67]

79. Te teškoće se ne mogu izbeći, ako kažemo da luk I_2HI_5 na sl. 11, kad elipsa prelazi u parabolu, nikako ne iščezava sasvim, već postaje beskrajno mali, a da je prema tome tada beskrajno mali i ugao F_2VF_5 u kome bi mogao postojati konačni razmak na beskrajnom rastojanju prvog reda, a da bi na beskrajnom rastojanju viših redova, morao postojati čak beskonačan razmak. Mi sno naime, naročito u onoj toliko puta pomenutoj raspravi, jasno pokazali da ona granica, koja bi posle apsolutne beskonačnosti i konačnosti bila treća, mora biti sasvim ništa, ne nešto; ali mada se to naziva



Sl. 12

beskonačno malim, ipak je nešto i ima delova. Zatim, ako bi oko tačke H bio neki infinitezimalni luk opisan pravama F_2V, F_5V, mada se kaže za njega da je beskonačno mali i da je neprimetan, ipak bi na samom sebi imao neke tačke, kroz koje bi prolazile neke prave, u sebi određene i povučene iz temena V; pa, iako ih mi ne možemo obeležiti, one bi imale neku razdaljinu od ose, ali ipak ne bi potpuno upale među beskonačne krakove parabole. U konusnim presecima, međutim, pomoću konačne geometrije najtačnije se pokazuje, da ma koja prava, ma kako malo magnuta prema osi, može ponovo naići negde na krak parabole, makar se on od ose beskonačno udaljavao i da zato ne postoji uopšte nijedna prava koja bi se skrivala u njenom otvoru.[68]

80. U raspravi *O prirodi i upotrebi beskonačno velikih i beskonačno malih veličina* koju smo izdali pre nekoliko godina, dokazali smo da uopšte ne postoje infinitezimalni kvantiteti određeni u sebi samima, da ih mi nikako ne možemo obeležiti, i to u dokazu koji je tako očigledan da ne možemo nikad shvatiti kako bismo prihvatili takve beskrajno male kvantitete, razvijajući na sasvim drugi način divne infinitezimalne metode pomoću onoga što se neodređeno saznalo apstrahujući misao o veličini; da o tome raspravljamo opširnije, ovde nije mesto, pa ćemo to vrlo brižljivo izneti u četvrtoj svesci *Elemenata*. Taj naš dokaz ovde ćemo samo dodirnuti, da bismo dokazali nemogućnost beskrajnih u sebi određenih kvantiteta koja će nam kasnije biti od koristi. A dokaz je ovakav.[69]

81. Ako može postojati neki kvantitet, na primer linijica koja bi bila beskrajno mala, mada je mi ne možemo označiti (opaziti), a koja bi bila određena u sebi samoj, ona bi se sadržavala beskrajno mnogo puta ma u kojem konačnom kvantitetu kao u snopu; taj bi snop sadržavao beskrajni broj linijica te vrste, a tako bi se sadržavale, da svaka od njih sama po sebi može postojati i da nikako ne zavisi od drugih, pošto je u sebi određena i od pojedinih drugih odvojena, iako nije stvarno odeljena. Stoga, ako počnemo s leve strane, jedna će biti, iako je mi ne možemo opaziti, prema desnoj strani prva, druga, treća itd., i isto tako, ako počnemo s desne strane prema levoj, jedna će biti druga, treća itd. One pak prve, koje leže s leve strane ostaviće posle sebe prema desnoj strani beskrajan broj ovih delova, jer ostavljaju gotovo ceo snop; a one koje su bile prve s desne strane, ostaviće prema samoj desnoj strani konačno mnogo delova, jer prva neće ostaviti ništa, druga će ostaviti samo jedan, treća dva, itd. Tako neće biti nijednog delića u čitavom tom snopu, koji ne bi bio zaista jedan od onih, da prema desnoj strani ostavlja beskrajan njihov broj, ili broj koji nije beskrajan, i nijedan od njih neće tako zavisiti od drugog da se jedan ne bi mogao uništiti, ako drugi ostane, jer svaki u sebi ima svoju određenost i stvarno je odeljen od bilo kojega, kao što sno kazali, iako još stvarno nerazdvojen.

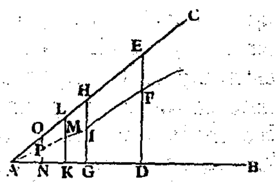
82. Tu, dakle, postoje dve vrste delića, iako ih mi ne možemo obeležiti (opaziti), od kojih prva sadrži sve pojedine deliće koji ostavljaju prema desnoj strani beskrajan broj delova, a druga sve pojedine koji ostavljaju nebeskrajan broj delova. To je svakako jasno i iz onoga što se nijedan od njih ne bi mogao lišiti jedne i druge od ove dve osobine, nijedan od njih da ima jednu i drugu u isti mah, a sasvim bi mogli postojati, jedni koji imaju prvu, a drugi drugu osobinu. Zatim, svi oni koji čine drugu vrstu moraju biti beskrajni po broju, jer inače poslednji od onih koji su u prvoj vrsti i koji ostavlja one sve pojedine što sačinjavaju drugu vrstu ne bi ostavio beskrajan broj, prema tome ne bi ni pripadao prvoj vrsti, već drugoj. Međutim, broj svih onih koji su u drugoj vrsti, osim prvog, ne sme biti beskrajan. Ako bi i on bio beskrajan, onaj prvi delić koji sve ove ostavlia, ostavio bi neograničen broj i, prema tome, ne bi pripao drugoj već prvoj vrsti. Stoga bi od beskrajnog do nebeskrajnog broja preko jedinice nastao prelaz, što

je apsurdno. Čitava snaga dokaza leži u tome što bi od beskrajnog do nebeskrajnog samo negde u jednom deliću nužno postojao prelaz, a taj dokaz će imati veću snagu ako shvatimo da bog uništava i one sve i pojedine koji pripadaju prvoj vrsti, od kojih se ma koji, od onih ma kojih koji sačinjavaju drugu vrstu sasvim odeljuje u samom sebi, iako ga mi ne razlikujemo niti ga uopšte možemo označiti (opaziti).[70]

83. Ima ljudi koji navode, da bi dokazali da infinitezimalni kvantiteti postoje i nezavisno od našeg načina shvatanja, da je to dodirni ugao koji stvara kružni luk u samom dodiru s pravom, ili s tangentom luka drugoga kruga, za koji kažu da je infinitezimalni s obzirom na pravolinijski ugao. Moglo bi se po Taketijevoj teoriji odgovoriti, da ugao nije kvantitet, jer mu je suština u nagibu, već modus kvantiteta. Doduše, i s pravolinijskim uglom postupamo kao sa modusom kvantiteta, ako uzmemo luk kružnice zahvaćen njegovim kracima, koji je pravi kvantitet, za njegovu meru, što može biti kod pravolinijskog i krivolinijskih uglova jednakih i sličnih krivih, kad kraci od ma kako velikih ili malih kružnica odsecaju isti broj stepeni ili minuta, ali ne od onih čiji su kraci različite prirode, kada se zajedno s poluprečnikom kružnice menja i razmera zahvaćenog luka prema celoj periferiji, tako da se menja i sama mera i odnos koji potpuno zavisi od same mere. Sama ta razlika nam je dovoljana, da bismo makar (pravolinijski) ugao nazvali kvantitetom i da bismo smatrali da je ugao mešovitih linija različit po vrsti od pravolinijskog. Zatim, između onih koji se po vrsti razlikuju, ne postoji nikakav odnos jednog prema drugom i zato nije ni beskonačno mali ni beskonačno veliki.[71]

84. Neki prizivaju upomoć nesamerljive kvantitete i kažu da je ono čime je jedna linija nesamerljiva s drugom, u stvari nešto infinitezimalno, što pokušavaju da dokažu na ovaj način. Neka je to nešto konačno, i neka se onaj drugi kvantitet preseče na toliko jednakih delića da jedan od njih bude manji od onog konačnog kvantiteta, što se uvek može lako dokazati da se dešava. A onda kad se taj delić prenosi stalno na onaj prvi nesamerljiv kvantitet, doći će se do ostatka koji je manji od njega i prema tome, manji od onog konačnog kvantiteta, po kojem je, kako je bilo rečeno, onaj prvi nesamerljiv sa drugim. A u tome dokazu, ako bi se kako treba posmatrala priroda kontinuiteta, pogreška je jasna, jer se nešto neodređeno uzima kao određeno. Jer kad kažemo nesamerljiv isključujemo zajedničku meru. Mera, međutim, ako se ne odredi njen kvantitet, nije nešto određeno već neograničeno i neodređeno, kao što smo gore rekli o delu, pošto se mera i neki deo svodi na to isto. Ako se postavi pitanje čime je prva linija nesamerljiva s drugom, odgovorićemo (pitanjem): u odnosu na koju meru? Ako se odredi mera, odrediće se kvantitet prema kojem je u odnosu na tu meru (prva linija) nesamerljiva (sa drugom), a onaj ostatak, svakako konačan, biće manji od same te mere. Ako se smanji mera, onaj ostatak se jednom smanjuje, jednom povećava, jer prema njoj može imati ma kakav odnos; a ako se ona smanjuje do beskonačnosti, onda se i taj ostatak smanjuje u beskonačnost, jer on mora biti uvek manji od nje. Ali pošto ni jedna mera nije poslednja i najmanja od svih, onda nije u sebi određen ni jedan deo, preko koga bi, s obzirom ma na koju meru, onaj prvi kvantitet bio nesamerljiv s drugim kvantitetom.[72]

85. Da bi se stvar iznela jasnije i očigledno pomoću geometrije, neka bude na sl. 13. veći kvantitet *AB* nesamerljiv s manjim *AD*. Pošto je ovaj prenesen na *AB* koliko puta se može, neka se ostatak podigne normalno kao duž *DF*; zatim, pošto je prenesena njegova polovina *AG*, trećina *AK*, četvrtina *AN*, itd., neka se podjednako podignu pojedini ostaci kao duži *GI*, *KM*, *NP* itd., i neka se produže sve takve normale do tačaka *E*, *H*, *L*, *O* prave *AC* koja je povučena u polupravom uglu *BAC*, i neka se opiše neka neprekidna kriva kroz sve tačke *F*, *I*, *M*, *P*. Jasno je da se sve normale *DE*, *GH*, *KL*, *NO* itd. izjednačuju s delovima ili merama *AD*, *AG*, *AK*, *AN* zbog polupravog ugla sa temenom u *A*, i drugog pravog ugla s temenom, u *D*, odnosno *G*, *K*, *N*; a pošto su ostaci *DF*, *GI*, *KM*, *NP* manji od njih cela kriva nalaziće se u uglu *BAC*. Dalje je jasno da se može smanjiti u beskonačnost neki deo *AN*, pa prema tome i duž *NO* tako, da *NP* uvek bude manja. Ali nijedna *NP* neće biti najmanja od svih, kao što nijedana neće biti najmanja *AN*; prema tome, neće biti nijedna preko koje bi tačno bio nesamerljiv (kvatitet), već bi ma kojoj meri odgovarao njegov ostatak kojim bi u odnosu na tu meru bio nesamerljiv, određen i beskonačan, kao što je naziv mere ili nekog dela neodređen, osim ako se ne odredi veličina ili broj delova; a ako se oni odrede, pojavljuje se ono što je određeno i konačno.



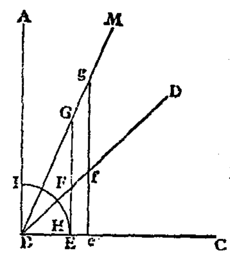
Sl. 13

86. Poznato je, dakle, da ne postoje infinitezimalni kvantiteti određeni u sebi samima, i da, prema tome, oni zavise jedino od našeg neodređenog načina shvatanja. Stoga je besmislen onaj izgovor kojim se izbegavaju apsurdi proistekli iz elipse koja raste u beskonačnost i iz krakova parabole koji su stvarno produženi u beskonačnost. Uzmimo kao istinito, da infinitezimalni kvantiteti ove vrste nisu nemogući i uz to, da je sasvim jasan apsurd koji proizilazi iz beskrajne protežnosti parabole, što smo izneli u onoj, već toliko puta navođenoj raspravi, a što ćemo preneti i ovamo da bismo utvrdili stvar.

87. Neka se zamisli na sl. 7. sa centrom u *V* neka kružnica apsolutno beskrajna, i neka se uzme tangenta *AB* kao produžena u beskonačnost sa obe strane, koja će, prema tome, biti prečnik same kružnice i zbog toga će biti veća od četvrtine same njene periferije. A pošto, ma iz koje tačke tangente *Q* ili *Q'*, normalne prave povučene na nju samu dopiru do same parabole u P ili P', onda je jasno da se otvor same parabole MN izjednačuje sa celom beskrajnom tangentom AB, pa, prema tome, treba da bude veći od četvrtine one beskonačne periferije. S druge strane, ma kako bio mali ugao EVF i EVF' prave VF, VF' uvek seku perimetar u P i P', pa, prema tome, izlaze izvan samog otvora; sam otvor mora da zahvati iz one beskonačne periferije deo koji bi prema celoj periferiji bio u razmeri manjoj ma od koje određene razmere. Taj otvor će, dakle, biti veći od četvrtine beskrajne periferije i beskrajno puta manji od nje, što je potpuno očigledno apsurd.[73]

88. Odgovor će se dobiti, jer je uglu FVE beskonačno smanjenom, istovremeno smanjen njegov tangens tj. razmera RP prema RV, ili razmera VQ prema VR, i razmera cele dvostruke duži QQ' prema VR, pošto tačke P, P' odlaze u beskonačnost, pa je beskrajno puta veća beskrajna osa VE od tangente AB. Ali ako bismo zamislili izolovane prave AB i DE produžene u beskonačnost, svakome je jasno da se isto tako, bilo koja od njih može produžiti i da obe budu jednake. Šta biva, dakle, kada se pojavi parabola MVN, mora li osa VE da bude beskrajno puta veća od tangente VA? Šta pojava ove parabole doprinosi menjanju pravih? A šta bi bilo kad bi se pojavila druga nova parabola čija bi osa bila VA, a tangenta VE? Onda bi osa VA koja je bila beskonačno puta manja, sad obrnuto postala beskonačno puta veća. To očigledno nije više nikakva tajna, nego apsurd.[74]

89. I vrlo mnoge druge apsurdnosti pojavljuju nam se u beskonačnosti, a neke od njih smo izneli u onoj raspravi. Ovde ćemo dodati jednu koja se izvodi vrlo jednostavnim dokazom, a njega smo izneli i u jednoj drugoj raspravi: *O prirodi i upotrebi beskonačno velikih i beskonačno malih veličina*, koju smo ranije pomenuli. A to je ovako. Neka bude na sl. 14. ma koji ugao ABC, neka ga napola seče prava BD, i neka se ma iz koje tačke E kraka BC, povuče duž EF paralelna sa BA koja sustiče BD u F, i neka se produži dvostruko više tj. za FG; neka se onda kroz B i G povuče BM, i neka se zamisli druga duž efg paralelna sa samom EFG. Jasno je da će cela beskrajna površina CBD bili jednaka beskrajnoj površini ABD s kojom bi se podudarala, ako bi se pretpostavilo da su im uglovi jednaki. Jasno je, isto tako, da se trouglovi FBG, FBE, fBg i fBe, odnose kao osnovice, pa su, dakle, oni dvostruki prema ovima, a površina $FGgf$ dvostruka prema površini $EFfe$. Ali ako se zamisle neke druge i druge paralele ove vrste u beskonačnosti, ma koja površina zahvaćena njima a zatvorena uglom MBD, bila bi dvostruka prema površini koja njoj odgovara, a zatvorena je uglom DBC. Pošto su sve površine zatvorene tim uglovima, a površina je skup svih onih malih površina, to bi neograničena površina



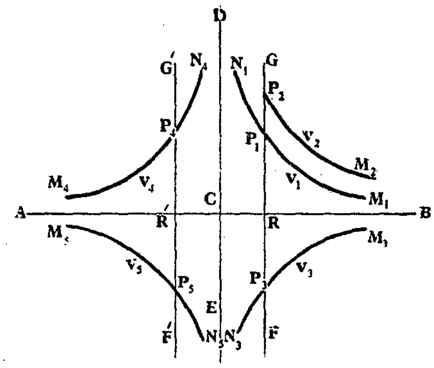
Sl. 14

obuhvaćena uglom *DBM* bila dvostruka prema površini obuhvaćenoj uglom *DBC*, pa prema tome i prema površini zatvorenoj uglom *ABD*, ili bi bila dvostruki deo celine, što je apsurdno.[75]

90. Sam apsurd sav proizilazi iz pretpostavke onog apsolutnog beskonačnog. Jer, ako sa centrom u *B* nastane kružnica koja seče prave *BA*, *BD*, *BC* u *I*, *H*, *E*, dobiće se konačna veličina *BE*, i ništa neće biti apsurdno. Sektor *EBH* biće jednak sektoru *HBI*, a trougao *GBF* biće dvostruko veći od trougla *FBE*. Ali ni ovaj trougao neće biti deo toga sektora, niti će mu biti jednak. A kad tačka *E* bude pomerena u beskonačnost, tako da više nigde ne postoji, i kada se zamisli celokupna dužina koja može postojati na beskrajnoj pravoj *BE*, onda više nema nikakvih granica beskrajnosti. S druge strane, cela beskrajna površina, koliko se može zahvatiti uglom *MBD*, sastavljena je od svih malih površina *GFfg*, a površina kolika se može zahvatiti uglom *EBD*, sastavljena je od svih malih površina *FEef*, koja je opet jednaka celokupnoj površini *ABD*, a deo same površine *ABD* je *MBD*, u čemu se sadrži onaj apsurd.

91. Odatle je za nas protežnost koja stvarno postoji beskrajno mala i beskrajno velika, a koja je u sebi određena — potpuno nemoguća, i štogod u bilo koje vreme postoji, konačno je ali tako, da se može povećavati i smanjivati u beskonačnost bez ikakve granice, pa odatle i proizilazi menogućnost beskonačne protežnosti, o čemu smo brižljivo raspravljali u onoj svesci koju smo dodali *Elementima o konusnim presecima* na osnovu nekih metafizičkih principa povezanih sa geometrijom. Rastojanje između bilo kojih dveju tačaka uvek je konačno, ali uvek mogu postajati i druga manja rastojanja, i u toj mogućnosti smanjivanja, ili povećavanja rastojanja do beskonačnosti, smatramo da se nalazi pojam beskrajno malog ili beskrajno velikog rastojanja. Međutim, u geometriji koja razmatra stvarno beskrajan prostor, posmatraju se linije kao stvarno produžene u beskonačnost, i iz toga produženja kao posledica dolaze sve one veze u samoj beskrajnosti i tajanstvenosti koje smo počeli da pratimo; to dovodi do boljeg razumevanja prirode neprekidne protežnosti gde se radi o konačnim kvantitetima. I posle ove digresije o beskonačno malim i beskonačno velikim veličinama, što neće biti bez koristi za ovu stvar o kojoj govorimo, kao što će kasnije biti jasno, nastavićemo da raspravljamo o prirodi beskrajnih krakova i o spajanju u beskonačnosti što je moguće brže.[76]

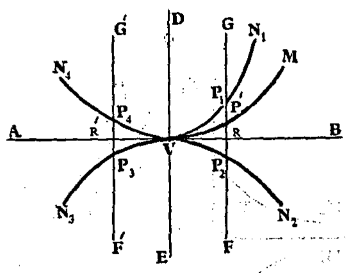
92. Pre svega, ma koliko puta parabolični ili hiperbolični krak odlazio u beskonačnost, on se uvek, kao što smo rekli, ponovo vraća iz beskonačnosti. Kod hiperbole se, međutim, sasvim tačno uočava da krak koji odlazi u beskrajnost ima neku asimptotu, a istu asimptotu će imati i krak koji se vraća iz beskrajnosti, samo ako se može vratiti sa iste ili suprotne strane iste beskrajne prave. Ako na sl. 15. luk *VM* odlazi u beskrajnost kroz M_1 sa strane *B*, može se vratiti kako sa iste strane *B*, s ove strane same asimptote *ACB*, kao što može preko M_2V_2, i iznad nje same, kao i preko M_3V_3, a tako isto i iz suprotne strane A s ove strane asimptote, kao što se može vratiti i preko M_4V_4, i iznad nje kao i preko M_5V_5. Sva tri poslednja slučaja postoje kod viših hiperbola kod kojih je neki stepen ordinate u recipročnom odnosu sa bilo kojim stepenom apscise, kao što smo videli i kod paraboličnih krakova u br. 64, da su ti stepeni parni ili neparni, i kao što smo dokazali u onoj raspravi dodatoj *Elementima*, gde smo takođe odredili neke krive prvog slučaja.[77]



Sl. 15

93. To se naročito visoko ceni po onome, što se kod svih geometrijskih krivih nigde ništa ne menja skokovito, već sve promene nastaju neprekidnim kretanjem. To isto se podjednako događa i sa svim ostalim bilo kojim osobinama geometrijskih krivih, kao i sa tangentama (tim imenom nazvana je prava povučena kroz tačku krive tako da je njenom luku najbliža od svih koje se odatle mogu povući, da se nijedna druga prava u obadva ugla ne bi mogla povući kroz istu tačku, ili da se među njih umetne), kad se, naravno, ma gde povuče tangenta kroz tačku koja spaja dva luka koji se neprekidno nastavljaju, pa postaje zajednička tangenta oba dela kojim se neprekidnim kretanjem završavaju sve ostale tangente u tačkama koje pripadaju ovim lukovima i koje se neprekidnim kretanjem završavaju u onoj tački; a pošto geometričari posmatraju asimptote kao neke prave koje dodiruju one krake na beskonačnom rastojanju na kome se oni spajaju, moraju imati tamo zajedničku tangentu, pa prema tome i zajedničku asimptotu.[78]

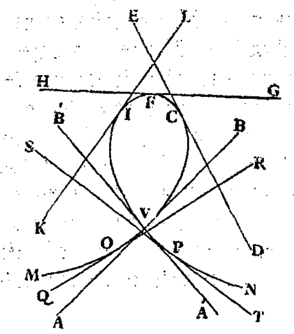
94. Dalje, svuda se taj zakon o zajedničkim tangentama razmatra na svim krivim, bilo gde da se na njima uzme bilo koja tačka; iz toga zakona, koji se vrlo jasno ističe u čitavoj geometriji, uzimaju se četiri slučaja, od kojih dva pokazuju dve vrste šiljaka ili povratnih tačaka; jedan pokazuje prevojnu tačku, a jedan, koji se vrlo često javlja, pokazuje nastavljanje krivine na istu stranu. Na sl. 16. neka prava AB dodiruje luk MV, i neka DVE na njoj bude normalna. Sam luk koji se stiče u V, može se ili vratiti iz V u uglu BVD, putem VN_1, ili u uglu BVE koji leži pored njega sa iste strane tangente kao i B, tj. putem VN_2, ili da produži uglom suprotnog temena AVE putem VN_3, ili da isto tako produži preostalim uglom AVD putem VN_4. Ovaj četvrti slučaj MVN_4 zajednički je svim krivima, i uopšte svim



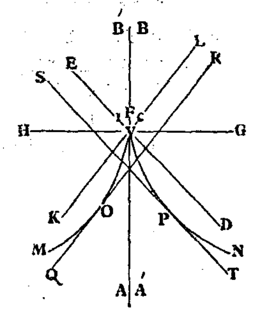
Sl. 16

tačkama neprekidnih lukova osim izvesnim određenim tačkama nekih krivih koje sadržavaju neki od prva tri slučaja i podudara se sa slučajem na sl. 7. Treći slučaj MVN_3 povlači za sobom prevojnu tačku, pošto je krivina najpre okrenuta prema tački D, zatim prema tački E, i podudara se sa slučajem na slici 9. Drugi slučaj MVN_2, kad tangenta leži u dodiru dva vezana luka, ima šiljak (povratnu tačku) koji smo nazvali šiljkom (povratnom tačkom) prve vrste i podudara se sa slučajem na sl. 8, a krivinu, kao treći slučaj, okreće na suprotnu stranu. Ova tri slučaja postoje kod onih parabola čije su ordinate u nekom odnosu sa apscisom, kao što smo skrenuli pažnju u br. 64. Prvi slučaj MVN_1 tada sadrži šiljak (povratnu tačku) druge vrste obrazovan od lukova koji leže sa iste strane tangente, a primer krive ove vrste dali smo u istoj onoj raspravi. U drugom i trećem od ovih slučajeva, sama tangenta i seče luk u istoj tački u kojoj ga i dodiruje, kao što je jasno da ga ne seče u prvom i četvrtom slučaju.[79]

95. Neki misle da se povređuje zakon kontinuiteta u prvom i drugom slučaju šiljaka (povratnih tačka), zbog onog vraćanja, dok se u drugom i trećem povređuje zakon kontinuiteta zbog krivine koja se iznenada obrnula na suprotnu stranu. Međutim, videćemo da se ni u jednom ni u drugom slučaju ne narušava kontinuitet, kad budemo objasnili malo kasnije sam zakon. Ovde se mora paziti samo na to da se ne bi pomešala dvostruka tačka, u kojoj kriva seče samu sebe, sa povratnom tačkom i šiljkom, što biva svuda na onim krivima koje petlju imaju. Takva je kriva na slici 17. $MOVCFIVPN$ koja sebe preseca u V i načini petlju vrativši se u sebe samu, a petlja ove vrste, sem kod drugih bezbrojnih viših krivih, pojavljuje se i u poznatoj konhoidi. U *V* se vidi da postoji neki šiljak *MVN*; ali se drukčije događa ako se luk *MV* ne produžava u *V* sa lukom *VN*, već ako ga seče, pošto je otišao dalje preko *V* nutem *VC*, i zatim se još jednom vratio u *V* putem *IV*. U tom susretu *V* tangente *AVB* i *A'VB'* naginju se uzajamno jedna prema drugoj i zahvataju ugao. I koliio god puta se zbog promenjenih uslova krive, sama kriva menja tako, da nestaje petlja *VCFIV*, što se dešava i kod konhoide, uvek se nastavljaju dva kraka *MV* i *VN* i nastaje šiljak *MVN* na sl. 18, u kojem slučaju se uvek one dve tangente spajaju u jedu, i nikad se ne dešava u čitavoj geometriji, da dva susedna luka spojena zajedničkom međom imaju u njoj dve tangente koje bi gradile neki ugao.[80]



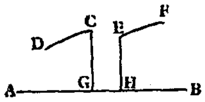
Sl. 17



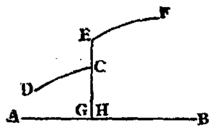
Sl. 18

96. Preostaje još mnogo da se kaže o krivim linijama koje imaju bilo koji konačni ili šta više beskonačni broj grana sa kracima produženim u beskonačnost; među njima je naročito čudna i vrlo vredna spomena obična logistika koja, iako izgleda da ima jednu jedinu granu, hiperboličnim krakom s jedne strane, a paraboličnim s druge, mada se kraci ne vraćaju čak ni na beskonačnom rastojanju, niti se spajaju, u stvari ima beskonačan broj krakova s obe strane ose koji se odnose na isto geometrijsko mesto sa zajedničkom asimptotom beskonačnih krakova; vrlo je mnogo spiranlih krivih čija po dva ili bilo koliko lukova idu u beskonačnost, dok se ostali stalno okreću oko date tačke, a da se u nju ne vraćaju, ili se u beskonačnosti približavaju datim kružnicama ili datim ovalama, stalnim kružnim kretanjem, a da ih ipak nigde ne seku; upravo od krivih te vrste je čudna i korisna logaritamska spirala za koju takođe, iako izgleda da ima jedan spiralni luk koji od date tačke odavde ide u beskonačnost, a otuda se vraća, možemo dokazati da ima beskonačan broj lukova i da iz nje nastaju vrlo mnoge druge dosta čudne spirale; ima još mnogo da se kaže o ostalim vrstama krivih, među kojima je najveći broj onih čiji lukovi se vraćaju u krug ili koji odlaze u beskonačnost, od kojih jedni nemaju nikakve veze sa drugima, iako se odnose na isto geometrijsko mesto i to tako, da tačka ne može nikako preći s jednog luka na drugi, a one (krive) se ipak, dok se transformišu pod izmenjenim uslovima, nekako seku i menjaju svoje lukove na taj način, što se od dva luka, koji su se pre odnosili na razne grane ili kružnice, stvara neki novi neprekidni luk, za što imamo veoma mnogo primera, a najlepši su oni kod konhoida koje imaju kružnicu za osu; vrste tih konhoida su mnogobrojne, a promene dosta čudne. Sve ovo i ostalo mnogobrojno što preostaje, što u granice ove male rasprave ne može da stane, objasnićemo sasvim opširno u četvrtoj knjizi naših *Elemenata* koju smo posvetili beskonačno malom i beskonačno velikom u geometriji i osobinama krivih linija.[81]

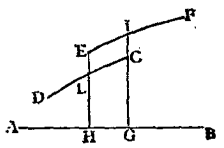
97. Kod svih ovih vrsta krivih svuda je sačuvano u potpunosti, da se kriva nigde ne zaustavlja u jednoj tački, i da se tu takoreći prekida, nego uvek bilo koja tačka kojoj se neka ma koja kriva približi, pa neka se ta tačka krije takođe u beskonačnom, ovde i onde spaja dva luka čija je ona zajednička međa. I to se može utvrditi za sve krive, bilo po samoj prirodi međe, kao što smo pokazali u br. 54, bilo da se potvrdi najobimnijim navođenjem svih krivih koje su geometričarima poznate. A za onu krivu, kojom ćemo se najviše koristiti kasnije prilikom dokazivanja zakona kontinuiteta, dokaz se izvodi s geometrijskom strogošću. Propozicija je ovakva. *Ni jedno geometrijsko mesto koje je preneto na neku osu preko ordinata, a koje su bilo kako nagnute pod istim uglom, ne može se nigde prekinuti, nigde ne postoji niti nemoguća ordinata koja odgovara bilo kojoj tački ose, niti više ordinata koje isto tako odgovaraju istoj tački.*[82]



Sl. 19



Sl. 20



Sl. 21

98. Ovo se lako dokazuje. Neka je na sl. 19. 20. i 21. jedan deo onoga mesta DC, a drugi deo EF, a samo mesto prekinuto u C, E. Neka se povuku ordinate CG, EH na osu AB. Tačka H ili pada posle G, kao na sl. 19, ili se poklapa sa njom kao na sl. 20, ili dolazi ispred nje, kao što je na sl. 21.

U prvom slučaju, za sve tačke koje se nalaze između tačaka *G* i *H*, koje prema br. 10 ne mogu da budu dodirne (jedna do druge), nego moraju da omeđuju neku linijicu koja sadrži bezbroj tačaka, ne bi postojala nijedna nemoguća ordinata; u drugom slučaju imali bismo dve ordinate *GC*, *GE* za istu tačku *G* ili *H*; u trećem slučaju imali bismo dve ordinate za svaku tačku *G*, *H* i za beskrajno mnogo međutačaka, što sve govori protiv hipoteze. Takvo geometrijsko mesto ne može se, dakle, nigde prekinuti. A to je trebalo dokazati.[83]

99. Sva snaga dokaza leži u tome što se dve tačke ne mogu dodirivati: jer, ako bi se to moglo desiti, u prvom slučaju tačka *H* bi mogla ležati neposredno posle tačke *G*, a ordinata posle ordinate, i samo tim načinom bi se osujetila snaga dokaza. Spomenuli smo nemoguću ordinatu, a sada uključimo i slučaj u kome nema nijedne ordinate. Jer kad bi neko u prvom slučaju rekao, da se može prekinuti geometrijsko mesto složeno od tri linije *DC*, *GH*, *EF*, mi bismo posmatrali samo dve linije *DC*, *GH*, i prvi slučaj sveo bi se na drugi; trebalo bi, naravno, da dobijemo u *G* ujedno i ordinatu *GC* i ordinatu nula, poslednju, dakako, od onih što pripadaju luku *DC*, i prvu od onih koje pripadaju duži *GH*.[84]

100. Pošto smo ovo izneli, vratimo se najzad objašnjavanju samog zakona kontinuiteta. Lajbnic ga je bez ovog naziva izložio na latinskom u pomenutoj raspravi i ovako ga formulisao: *kad se razlika dva slučaja može umanjiti ispod bilo kojeg datog kvantiteta u onom što je dato ili u onom što je postavljeno, treba da se uzmogne pronaći u traženom sam umanjen kvantitet koji je dat ispod bilo koje veličine, ili u onome što proizilazi iz toga. I onda ovako: kad se slučajevi* (*ili ono što je dato*) *neprekidno približavaju međusobno, i završavaju se najzad jedan u drugome, to isto mora da bude sa posledicama ili sa onim što se ostvari ili sa onim što se zahteva*, pa onda ono opštije: *Utvrđenom redu u onome što je dato* (*poznato*) *odgovara utvrđeni red u onome što se traži* (*nepoznato*).[85]

101. Ove načine izlaganja, naročito prva dva, pripremio je Lajbnic podstaknut Dekartovim zakonima, koje je napadao primenjivanjem toga istoga principa. Dekart je u prvom zakonu utvrdio: ako se dva jednaka tela sudare, moraju i jedno i drugo da se vrate natrag brzinom suprotnom i jednakom onoj koju su imala ranije, a u drugom zakonu: ako su tela nejednaka, onda veće telo mora da nastavi put svojom ranijom brzinom, a manje da se vrati brzinom suprotnom i jednakom onoj koju je imalo ranije. Veličine dvaju tela su ono što Lajbnic naziva *dato* ili *postavljeno* a brzine posle sudara: *traženo, rezultujuće, ono što sledi, ono što se ostvaruje, ono što se zahteva*. Dva slučaja datog jesu jednakost i nejednakost tela. Njihova razlika može se smanjivati u beskonačnost, tako da najzad od nejednakosti dođe do jednakosti. Neka se brzina jednog od dva tela, koje je ranije bilo veće, a ta brzina kod njega postoji posle sudara, smatra kao nešto što se traži ili što rezultuje. Sama brzina ma kako bila umanjena nejednakošću, ostaće uvek nepovređena (ista) na osnovu drugog Dekartovog zakona. A kad ona nestane (nejednakost) i kad se promeni u jednakost, onda se i sama brzina nekakvim skokom odmah cela gasi, na osnovu prvog Dekartovog zakona, i mesto nje se javlja suprotna. To se protivi Lajbnicovom zakonu po kome, ako se silom menja postepeno ono što je dato, mora se menjati postepeno i ono što se traži, zahteva, što rezultuje.[86]

102. Bez obzira, međutim, na ono što je dato i na ono što se traži, sam princip se može uopšteno ovako iskazati. Kadgod su dva promenljiva, kvantiteta, koji, dakako, mogu da menjaju veličinu, među sobom povezani, onda se određenom veličinom jednog može odrediti veličina drugog; neka se zamisle dve veličine prvog i dve veličine drugog kvantiteta koje odgovaraju ovim dvema i, ako prvi kvantitet stalnim menjanjem pređe od prve veličine do druge, prolazeći kroz sve međuveličine, to će se desiti i sa drugim kvantitetom. Prva veličina je ona koju Lajbnic naziva *datom* ili postavljenom, druga koju zove *traženom, rezultujućom, onom što sledi, onom što se ostvaruje, onom što se zahteva.* A prolaz kroz sve međuveličine, najbolje od svih izražava *ona stupnjevitost, onaj kontinuitet, ono smanjenje razlike* ispod bilo kojih datih granica.[87]

103. To isto potpuno je shvatio Žan Bernuli u svom delu *Rasprava o kretanju* koja se nalazi u trećoj svesci njegovih dela, gde ovako stoji formulisano na latinskom jeziku: *Smatram da je nepromenljiv i od početka stvaranja sveta stalno određen onaj red koji možemo nazvati zakonom kontinuiteta i štogod po njegovoj sili postoji, to postoji preko beskrajno malih stupnjeva...Priroda ne pravi skokove: ništa ne može iz jedne krajnosti preći u drugu, a da ne prođe kroz sve međustupnjeve.* Ne može se, naime, desiti, kao što ćemo malo kasnije objasniti i dokazati, da postoji prolaz preko svih međustupnjeva, a da se, isto tako, ne izvrši prelaz kroz sva međustanja ili međuveličine. Mada je sama reč stupanj i mnogim drugima, pa i samom Mopertiju, kao što mi mislimo, dala priliku za neku pometnju kojom su se služili prilikom napadanja samog zakona kontinuiteta, kao da bi bilo potpuno nemoguće uopšte isključiti skok, koji se, kad se kaže da se prolaskom kroz međustupnjeve isključuje, baš time nužno uključuje.[88]

104. Sam Mopertij u prvom od svojih malih dela zajedno štampanih u Drezdenu godine 1732, koje nosi naslov *Essay de Cosmologie*, strana 20, pošto je na prethodnoj strani izložio mišljenje onih, a i samoga Bernulija, koji tvrde da u prirodi nema čvrstih tela zbog zakona kontinuiteta i to svoje izlaganje naznačio na početku strane 20, kao što se vidi iz dopisane zabeleške, dodaje ono što smo na latinskom jeziku ovako izrazili: *Priznajem da ne osećam snagu toga dokaza. Ne znam ni to da li je dovoljno poznat razlog kojim se kretanje stvara ili prestaje, tako da bi bilo slobodno tvrditi, da je tu povređen zakon kontinuiteta. Ja zaista ne znam ni to u čemu je taj zakon. Kad bi se pretpostavilo da se brzina uvećava ili smanjuje postepeno, zar ne bismo uvek imali prelaz od jednog stupnja na drugi? A prelaz, najneprimetniji od svih, zar ne kvari kontinuitet isto toliko koliko bi ga pokvarilo iznenadno* *rušenje Vasione*? Ovaj učeni čovek upozorava na dve stvari: prvo, da je nama nepoznat način na koji nastaje brzina i da li je tu povređen kontinuitet; drugo, da zakon sam uključuje u sebi kontradikciju, jer zadržava skok samim stupnjevima preko kojih bi trebalo da bude isključen; a taj skok bi škodio kontinuitetu za svaki stupanj, pa ma kako bio mali, onoliko koliko bi škodio skok u tolikoj stvari kolika je celokupna Vasiona. Dalje, dok na ovom mestu odgovaramo na njegov napad, i dok pokušavamo da ga potpuno obesnažimo i to, kako nam izgleda, sa očiglednim uspehom, ne samo da ne želimo da ma šta okrnjimo od slave toga tako učenog čoveka, čijoj se snazi intelekta i vrlo velikim zaslugama celokupni naučni svet divi i prihvata ih cela Evropa, a mi ih naročito poštujemo, pa nas je naročito toliko poštovanje, koje on uživa i kod drugih i kod nas, nateralo da pripremimo odgovor i da ga objavimo baš u ovoj raspravi jer smo se plašili, da ne bi sam ugled tako velikog čoveka naškodio našoj tek nastaloj teoriji, a koja već postaje poznata.[89]

105. Što se tiče načina na koji postaje brzina, pokazaćemo malo kasnije da ona nastaje i nestaje uvek prema zakonu kontinuiteta; a sada ćemo objasniti nešto o skoku u samom kontinuitetu i njegovom narušavanju pretpostavkom o stupnjevitosti, što bi sam kontinuitet učinilo neshvatljivim, nemogućim i besmislenim, pomoću stvari koju smo malo ranije tumačili, a Lajbnicovu, Bernulijevu i našu definiciju izložićemo vraćajući se na ono što se odnosi na suštinu stvari.

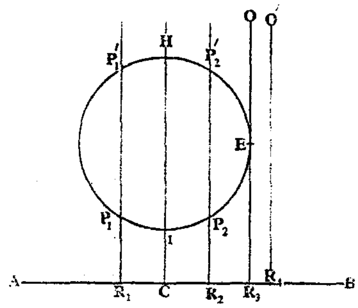
106. U prvom redu dva promenljiva kvantiteta mogu biti u međusobnoj zavisnosti i tako među sobom povezana da se, ako se menja jedan može izmeniti i stvarno se menja i drugi, što je poznato iz bezbroj primera i što se saznalo iz svakodnevne upotrebe. Tako od mere ili težine stvari koje kupujemo zavisi cena; kad se težina poveća, povećava se i cena, a kad se prva smanjuje, smanjuje se i druga. Suprotno pak ovome, procenjujemo brzinu trkača u zavisnosti od vremena koje protekne u prelaženju datog razmaka, smatrajući je utoliko većom, ukoliko je vreme kraće. Međutim, i jedan i drugi promenljivi kvantitet može biti jednostavan ili, jedan može biti složen od više njih, koji među sobom nisu povezani nikakvom vezom, od čijih bi svih određenosti zavisio. Tako u gornjem slučaju od same mere ili težine zavisi cena iste stvari, a brzina jedino od vremena. I uopšte, brzina bilo kojeg pokretnog tela koje za razna vremena prelazi razne puteve, zavisi od puta i vremena, i direktno je proporcionalna putu, a obrnuto proporcionalna vremenu. Kvantitet kretanja uopšte zavisi od mase, brzine i vremena, ili od težine, gustine, brzine i vremena, i ako se jedno od njih menja, menjaju se i ostali kvantiteti, tako da jedan (kvantitet) može zavisiti od bilo kog broja kvantiteta, i da se, ako se oni menjaju, menja i on sam.[90]

107. Dalje, ako se ono od čega jedan kvantitet zavisi, menja neprekidno i od jedne veličine prelazi na drugu prolazeći kroz sve međuveličine, onda će i sam kvantitet prolaziti kroz sve međukvantitete. To se mnogo lakše i shvata. kad se međusobno povežu samo dva kvantiteta, od kojih je i jedan i drugi jednostavan, ili neka se zamisli kao jednostavan. Njihova povezanost u tom slučaju može se uvek izraziti linijama, uzimajući osu po volji i predstavljajući jedan kvantitet pomoću apscisa, računajući ih od date tačke, a drugi pomoću ordinata koje su nagnute (prema osi) pod datim uglom, čiji vrh, njihovim stalnim pomeranjem po osi, opiše neprekidnu liniju koja će prikazivati takvu povezanost. Jer kad se jedan kvantitet poveže sa dva promenljiva, kao što je opisani put izražen brzinom i vremenom, ta povezanost zahteva neprekidnu površ; o mestima (geometrijskim) u vezi sa površi koja spaja tri promenljiva kvantiteta, već odavno je, kao dečak, veoma učeni Klero, izdao vrlo studioznu i elegantnu raspravicu. Ako se kvantitet povezuje sa više njih, onda sva ta povezanost prevazilazi moć geometrije, koja raspolaže samo sa tri dimenzije. Na te povezanosti sa bilo kojim brojem promenljivih kvantiteta proširuje se algebra, koja je u tome važnija od geometrije, mada je geometrija, naprotiv, istaknutija od algebre, jer daje veoma velik broj povezanosti, u kojima izvestan odnos međusobno imaju ne samo kvantiteti nego i njihova smanjenja i povećanja; to se zbiva kod transcedentnih krivih do kojih ne dostiže finitna algebra, već je za to potreban infinitezimalni račun, a može biti da se takve povezanosti izražavaju linijama i površima, za čije izražavanje nije dovoljna finitna algebra koja posmatra konačne kvantitete i njihove konačne potencije, a nije za to dovoljan ni infinitezimalni račun koji razmatra njihove infinitezimalne razlike bilo kojeg reda, i njihove bilo koje potencije, nego se traži neka druga vrsta izražavanja o kojoj nemamo nikakve predstave. Obuhvatiti sve ovo bio bi beskrajan posao, a gradiva bi bilo da se ispune ogromne knjige; u svima njima bi se kontinuitet uvek potpuno sačuvao; međutim, nailaze i mnogi nepravilni slučajevi pogodni za razmatranje samog zakona kontinuiteta i za pažljivo uočavanje veza koje treba da u njemu budu sačuvane, i preko kojih on treba da se objasni.[91]

108. Reći ćemo, dakle, nekoliko reči, što će biti dovoljno za ovu našu stvar, koje se odnose na povezanost dvaju kvantiteta koja se, kao što smo rekli, predstavlja pomoću linija, jer se sve što je načinjeno od ma koliko promenljivih kvantiteta, od kojih će jedan (od njih) zavisiti (od ostalih), može spojiti s vremenom, posmatrajući dok se menjaju određena stanja svih tih kvantiteta, izražena za bilo koji trenutak pomoću neke neprekidne linije, na primer, osom i podizanjem ordinate iz tačke koja odgovara tom istom trenutku, i koja (ordinata) izražava veličinu kvantiteta povezanog sa njima; time se uključuje i ona povezanost koja jedino postoji u prirodi za promenljive kvantitete u kojima u pojedinim trenucima pojedini kvantiteti mogu imati samo po jednu veličinu, a povezanost je izražena linijom koju opisuje vrh tih ordinata. Doduše i sam Mopertijev prigovor obazire se na vreme i na stalno promenljiv kvantitet i pokušava da uvede trenutni skok, kao neophodan, dok se kvantitet menja stupnjevito preko svih međuveličina.[92]

109. Kad se zatim povezanost dvaju kvantiteta, od kojih prvi neka izrazi apscisa, a drugi ordinata, izražava linijom, može se desiti, da pojedinim veličinama prvog kvantiteta odgovara samo jedna jedina veličina drugog kvantiteta, ili da im odgovara bilo koji konačni ili čak beskonačni broj njegovih veličina, i to tako da bilo kojoj veličini prvog kvantiteta odgovara jedna jedina veličina drugog kvantiteta, pa da ipak neka ista veličina drugog kvantiteta odgovara ma kojem konačnom ili čak beskonačnom broju veličina prvog kvantiteta, ili da, naprotiv, bilo kojoj veličini drugog odgovara jedna jedina veličina prvog, pa da ipak bilo kojoj veličini prvog kvantiteta odgovara ma koji konačni ili beskonačni broj veličina drugog kvantiteta, ili, najzad da bilo kome konačnom ili beskonačnom broju veličina prvog kvantiteta isto tako odgovara bilo koji konačni ili beskonačni broj veličina drugog kvantiteta. Prilično lako bi bilo pojedine stvari objasniti primerima, čak i iznošenjem najpoznatijih vrsta krivih. Sva stvar ipak zavisi od toga, što neke vrste krivih može prava linija, koja ima određen položaj prema osi, ili je paralelna sa ordinatama, da seče samo u jednoj tački, a neke druge u dve, ili u tri, ili u bilo kom konačnom pa čak i beskonačnom broju (tačaka), kao što se to jasno vidi kod zavojnica koje odlaze u beskonačnost; tu se jedna (prava) može sastati u jednoj ili u bilo koliko tačaka, dok druga isto tako u bilo koliko tačaka; a tamo gde se kriva zameni pravom, samu (krivu) seče bilo koja druga prava, ili paralelna sa ordinatama, ili sa osom samo u jednoj tački. Ali i ovo istraživanje takođe nema kraja, pa smo primorani da se zaustavimo samo kod nekih najjednostavnijih slučajeva.[93]

110. Naročito se u takvoj geometrijskoj povezanosti kvantiteta može desiti, da dok jedan neprestano raste, drugi neprestano raste ili opada, ili da, dok prvi neprestano opada, drugi neprestano raste ili opada, ili da, dok



Sl. 22

prvi ili raste ili opada, drugi sa rašćenja prelazi na opadanje, u kom slučaju se postiže izvesni maksimum, ili obratno, od opadanja prelazi na rašćenje i u tom slučaju se dobija minimum. Primeri takve vrste mogu se lako uočiti čak i kod same kružnice u odnosu na osu koja se nalazi izvan nje. Ako na sl. 22, produžen prečnik kružnice HI seče pravu AB u tački C pod pravim uglom, i ako prava iz R_1, normalna na samu AB, isto tako seče kružnicu u P_1 i P'_1, dok apscisa AR_1 raste, ili AR_2 opada, duž R_1P_1 postaje nimimalna, a $R_1P'_1$ maksimalna, čim R_1 dođe u C, što se dešava kod kružnice i uopšte kod krivih, kad se u I i H bez prekida nadovezuje krivina luka koji se nastavlja; ponekad se to dešava i kad se vraća luk koji u I ili u H obrazuje šiljak; međutim, nemamo vremena da bismo sve to izneli i objasnili.[94]

111. Može se, međutim, desiti da, ako se promeni jedna, opada druga duž kroz sve ma kako male veličine i da nestane, ili da se poveća kroz sve ma kako bile velike veličine i da postane apsolutno beskonačna. Ako se prava FG na sl. 16, neprekidno kreće prema ED, onda će duži VR ili BR sa bilo kojom RP, obrazovati vezu MV ili bilo koju NV, a pošto R dođe do V, nestaće drugi kvantitet RP, i to ili nestankom prve duži VR, ili još očuvanjem, BR, a ako, naprotiv, VR raste u beskonačnost, onda isto tako raste u beskonačnost i svaka RP. Na sl. 15, gde isto tako, kad R odlazi u C, svaka RP postaje beskonačna i to podjednako bilo da prva nestaje, kao GR, ili da ostaje konačna, kao BR, gde, naprotiv, CR postaje beskonačna, kad RP opada u beskonačnost i smatra se kao da nestaje.[95]

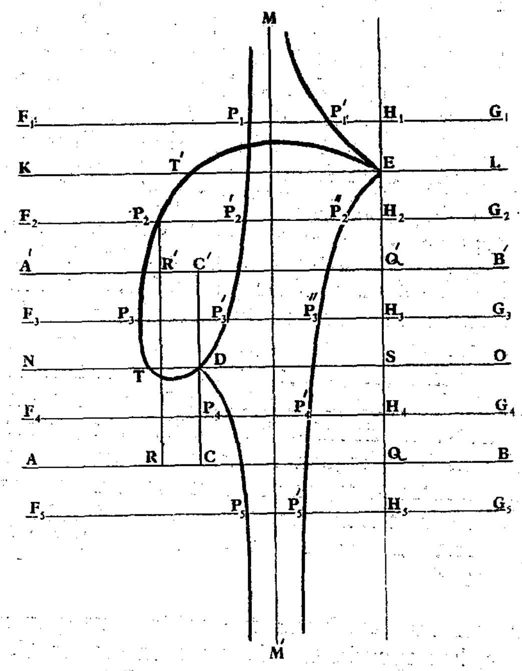
112. Zatim, kad veličina jednog kvantiteta teži nuli ili beskrajnosti, može se desiti, da veličina onog drugog, neprekidnim menjanjem izmeni smer, u kojem slučaju se kaže da postaje negativna, ili da se istim smerom (pozitivna) vraća iz nule, i isto tako se može desiti, kad je otišla u beskonačnost, da postane ili negativna, pošto je prethodna promenila smer, ili, ako zadrži smer, da i ona ostane pozitivna. Na sl. 16, ako se povezanost izrazi sa MVN_3, prelaženjem R u R' preko V, apscisa BV, koja je ostala konačna, nastavlja da raste, a AV da opada, dok RP koja je nestala, menja smer u $R'P_3$; ako se pak povezanost izrazi sa MVN_4, onda se menja smer i VR prelazi u negativnu VR', a RP' u pozitivnu $R'P_4$. Na sl. 15, kad R odlazi u R' preko C, BR nastavlja da raste do BR', AR da opada do AR', CR menja smer u CR' posle nestajanja i prolaska kroz nulu; a ako se povezanost izrazi pomoću $M_1N_1N_4M_4$, onda RP_1 zadržava posle približavanja u beskonačnost isti smer $R'P_4$; a ako se ta povezanost izrazi sa $M_1N_1N_5M_5$, onda RP_1 posle odlaska u beskonačnost menja smer u $R'P_5$, sem ako u tom slučaju samoj RP_1 možda ne odgovara negativna $R'P_5$, kao što obično uzimaju geometričari i uvek analitičari, kao tamo analognu RP_1, nego druga pozitivna koja je, prema br. 62, provedena kroz beskonačnost, dakle, $R'G' \infty F'P_5$, a o tome i o svim tim približavanjima nuli i beskonačnosti i prelaska od pozitivnog na negativno, mnogo opširnije smo raspravljali u toliko puta pomenutoj našoj raspravi koja je dodata *Konusnim elementima.* Treba, međutim, samo jedno pomenuti na ovom mestu: kad od pozitivne prelazi u negativnu, veličina mada počinje, posle opadanja na pozitivnoj strani, ponovo da raste na negativnoj strani, nastavlja se u stvari opadanje u geometrijskom i analitičkom smislu, jer se negativan kvantitet smatra utoliko manjim, ukoliko, ako se posmatra kao pozitivan, postaje veći. A opet negativan kvantitet, kao što je nužno, neprekidno ponavljanim oduzimanjem izgleda kao da se nekako povećava baš zbog toga što opada i nastavlja da se smanjuje ispod nule.[96]

113. Ponekad, dok se jedan kvantitet neprekidno menja, drugi se na nekom mestu prekida i prelazi u nemoguću veličinu. Tako je na sl. 22, kad R_2 prelazi u R_3, gde R_3O dodiruje luk u E, i prešavši ga odlazi u R_4O' prava R_4O' se nigde ne sastaje s kružnicom, a ordinata koja odgovar. apscisi AR_4 ili BR_4 postaje nemoguća i u tom slučaju se ona obično naziva imaginarnim kvantitetom. Ali taj se slučaj u geometriji nigde ne može dogoditi, osim ako nisu postojale dve ordinate i ako obe odjednom nisu postale nemoguće. To se primetilo i dokazalo već i u algebri: naime, da može postojati samo paran broj imaginarnih korena jednačine. U geometriji se, pak, to jasno dokazuje iz same prirode neprekidnih linija koje nigde nisu prekinute. Jer, ma koja ordinata R_2P_2 preneta na R_3E, ne može preći u imaginarnu, osim ako istovremeno obe R_2P_2 i $R_2P'_2$ ne pređu u imaginarne. Pošto se, dakle, luk P_2E ne može prekinuti u E, prema br. 55, mora da se nastavi i ne može se produžiti s one strane R_3E, da bi se dobila imaginarnost; ako se poslednje R_4O' ne sastaju s krivcm, treba, posle približavanja do E, da nastave ili da se vrate preko nekog drugog luka EP_2, koji leži s ove strane R_3, sa kojim će se takođe nužno sresti prava R_2P_2, negde u P'_2, pre nego što stigne u R_3E; obe tačke P_2 i P'_2 moraće se sastati u E, i zatim obe ordinate istovremeno postaće imaginarne; to isto će se desiti ako E ostane skrivena u beskonačnosti, jer se luk mora vratiti baš iz same beskonačnosti. Ako se na sl. 16. izrazi povezanost preko krive MVN_1 ili MVN_2 neprekidnim kretanjem tačke R preko V u VR', onda obe RP', RP_1 ili RP', RP_2 prelaze u imaginarne samim svojim približavanjem nuli; ako se pak na sl. 15. povezanost izrazi sa $N_1M_1M_2V_2$, ili preko $N_1M_1M_3N_3$, onda postaju imaginarne istovremeno obe ordinate RP_1, RP_2 ili RP_1, RP_3 u samom svom približavanju beskonačnosti, koje su na sl. 22. prešle u imaginarne samim približavanjem konačnom kvantitetu R_3E.[97]

114. A o onome, što smo u onoj istoj raspravi rekli o ovom, takoreći, nestajanju kvantiteta koji odlazi u imaginarnost, govorićemo kasnije ponovo. Ovde ćemo samo skrenuti pažnju, da se to ne može uopšte dogoditi tamo gde pojedinim apscisama odgovaraju samo pojedine ordinate, kao što je to slučaj kod prave linije, kod hiperbole i svih parabola kod kojih je neka neparna potencija ordinate, direktno ili recipročno (zavisna od apscise), odnosno bilo koja neparna potencija apscise (zavisna od ordinate), i kod bezbroj drugih vrsta krivih, koje se definišu pomoću nekih jednačina, u kojima je ordinata stepenovana bilo kojim neparnim stepenom, pa ma kako god bila povezana sa ma kojim stepenima apscise. Na onu vrstu krivih, koje ne mogu imati više ordinata što odgovaraju istoj apscisi, skrenuli smo pažnju, da ovaj prelaz iz realnog u imaginarno stanje ne može postojati, jer gde god se promenljivi kvantiteti odnose na vreme, nastaje onaj slučaj u kojem pojedinim trenucima vremena, odgovaraju pojedine veličine kvantiteta, a ne istovremeno dve, i, razume se, pojedinim apscisama pojedine ordinate, a ne više njih.[98]

115. Pošto smo sve ovo nešto opširnije izložili, izložićemo sada šta su to međukvantiteti preko kojih veličina treba da pređe. Vrlo mnogi slučajevi su nastali iz toga, što dve ekstremne veličine mogu biti ili istog ili suprotnog smera (znaka); u oba slučaja može se u geometriji iz prve veličine doći u drugu, ili bez odlaženja ili sa odlaženjem u beskonačnost, a samo odlaženje može biti na koju bilo stranu; i dešava se da bude na bilo kojoj strani, a može nastati ili sa povratkom sa iste strane beskonačnosti, ili sa prelaskom na suprotnu stranu. Dalje, to se može desiti, kako u pravcu koji imaju ordinate, tako i u pravcu koji imaju apscise, i u bilo kom drugom pravcu, i to kako putem krakova parabole, tako i putem krakova hiperbole, ili putem spirala, ili vijuga, ili krivudanja. Postoji vrlo mnogo vrsta tih slučajeva kod kojih je različit prolaz kroz međuveličine između dve ekstremne veličine.[99]

116. Najjednostavniji slučaj je onaj u kome nema odlaska u beskonačnost, a taj se nalazi u prirodi u kojoj ništa ne može biti (aktualno) beskonačno. Ostali slučajevi tiču se samo geometrijskog razmišljanja. I u ovom slučaju, ako su obe ekstremne veličine istoga smera (znaka), onda su međuveličine sve one koje imaju isti smer (znak) i koje su manje od veće ekstremne veličine, a veće od manje ekstremne veličine; ako pak ekstremne veličine imaju suprotne smerove (znake), onda su međuveličine sve one koje su manje od jedne (od ekstremnih) u njenom smeru, u kojem slučaju mora postojati i prolaz kroz nulu; ostali slučajevi se odnose jedni na jednu a drugi na drugu od međuveličina, preko kojih je potrebno da se pređe u neprestanom kretanju. tanju. Neka na sl. 23. budu dve ordinate istog smera *CD*, *QE* koje odgovaraju apscisama *AC*, *AQ*, ili suprotnog smera *C'D*, *Q'E* koje odgovaraju apscisama *A'C'*, *A'Q'*. Neprekidna linija koja održava vezu između kvantiteta izraženih tim apscisama i ordinatama, treba od tačke *D* da ide u tačku *E* i to, ili bez odlaska u beskonačnost nekim putem bilo kog oblika *DTT'E*, ili sa odlaskom u beskonačnost. Ako taj odlazak u beskonačnost bude u istom smeru koji imaju ordinate, i to putem asimptotskih krakova, ili možda putem *DME*, ili putem *DM* ∞ *M'E*, ili putem *DM'E*, ili putem *DM'* ∞ *ME*, da izostavimo druge slučajeve ostalih smerova i ostalih krakova. Kroz tačke *D* i *E* neka se povuku prave *NO*, *KL*, paralelno sa osom *AB* ili *A'B'*, od kojih neka prva seče ordinatu *QE* u *S*. Onda neka se na samoj *EQ* produženoj s obe strane u beskonačnost, uzme koja bilo tačka *H*, bilo izvan obe prave *KL*, *NO* sa strane *E* u H_1, bilo između *KL* i *A'B'* u H_2, ili između *A'B'* i *NO* u H_3, ili opet izvan one dve ali između *NO* i *AB* u H_4, ili opet ispod *AB* u H_5, i neka kroz bilo koju tačku *H* prolazi prava paralelna sa samom osom i onim dvema pravama. Potpuno je jasno za slučaj u kome linija *DTT'E* odlazi u beskonačnost, da, makar kakva kruženja ili krivudanja pravila, mora negde bar jednom da preseče bilo koju pravu uključenu između one dve prave *KL*, *NO*, na primer bilo koju pravu F_2G_2 u P_2 ili F_3G_3 u P_3. Kad iz same tačke *P*, kao i iz P_2, povučemo pravu *PR* normalno na osu, onda će apscisi *AR* odgovarati ordinata RP_2 ili QH_2. Dalje, ako je *AB* osa, a dve ordinate su istoga smera, tada je jasno da se negde mora dobiti ordinata jednaka bilo kojoj QH_2 ili QH_3, koja će, doduše, biti manja od veće onih dveju ekstremnih, naime od *QE*, i veća od manje *CD*, ili *QS*. Ako osa *A'B'* leži između dve prave *NO*, *KL*, a one imaju kao ekstremne ordinate *Q'E*, *C'D* ili *Q'S*, sa suprotnim smerovima, onda će sve $Q'H_2$ morati biti manje od *Q'E*, i sve $Q'H_3$ isto tako manje od *Q'S*, ili *C'D*, a pošto tačka *H* odlazi u *Q'*, jasno je da ordinata mora da nestane i da neprekidnim kretanjem preko nule pređe iz pozitivne u negativnu.[100]

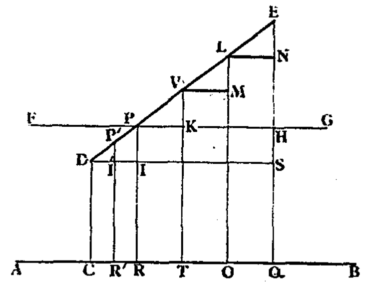


Sl. 23

117. Ako neprekidna linija, koja povezanost čini vidljivom, teče preko $DM' \infty ME$, što bi se desilo kod konusne hiperbole, mogle bi, pa čak i treba, da ostanu netaknute sve prave F_2G_2, F_3G_3 uključene između dve prave *KL*, *NO* i zato ona ne seče ni jednu od međupravih koje su zamišljene u prethodnom smislu, nego nužno mora seći sve one prave koje leže s obe strane tih granica, kao što su F_1G_1, F_4G_4, F_5G_5; i tako će biti sa svim ostalim pravama bilo koga pravca koje nisu bile obuhvaćene prethodnim slučajem. A u ostalim, bilo ovim ili drugim slučajevima, koji ovde nisu izneti, odlazak i povratak iz beskonačnosti videće se jasno iz posmatranja same slike, koje bi bile te međuprave za pojedine slučajeve preko kojih treba da se pređe.

118. Ako izostavimo one slučajeve koji uključuju beskonačnost, te prema tome ne mogu pripadati prirodi, jasno je u prvom slučaju da se sama apscisa *AR* može u početku i udaljavati od apscise *AH*, kao što pokazuje slika i približavati joj se, što bi se desilo ako se linija, koja povezanost čini vidljivom, ne bi udaljila od prave *QE*, i bilo da se sama udalji ili približi, ordinata *RP* može u početku da se udalji od ordinate *QE*, ili da joj se približi, dok se ona linija može ili približiti osi ili od nje udaljiti, i na kraju isti slučajevi mogu postojati s obzirom i na osu *A'B'* i na apscisu *A'R'*, i na ordinatu $R'T_2$, ali je u svim takvim slučajevima jasno, ako se sačuva kontinuitet linije koja povezanost čini vidljivom, da ne može tokom te čitave linije postojati bilo koja od onih međuordinata u smislu koji smo izložili, niti se može desiti, da se, kad ta linija izlazi iz *D* ili se završava u *E*, tačka *H* ne udaljava od tačke *S* preko svih rastojanja SH_3, pa ma kako ona bila neznatna, ili da se tačka H_2 ne približi tački *E* preko rastojanja H_2E ma kako ona bila mala. Stoga je jasno da ordinata, dok se približava bilo kojoj od dve date *QE* i *CD*, pošto se izvrši kretanje iz *D* ka *E*, ili iz *E* ka *D*, mora im se približiti preko bilo kojih veličina pa ma kako im bile bliske, a to uopšteno znači: ma kojim, ma kako međusobno bliskim, ili dalekim kvantitetima čija se povezanost izražava neprekidnom linijom, u čemu leži zakon kontinuiteta kojeg ćemo još jasnije protumačiti primerom kvantiteta što se odnose na vreme koje neprestanim tokom teče, ne vraćajući se nikad unatrag i koje za isti trenutak ne dopušta dve veličine istog kvantiteta. I da bismo najzad rešili teškoću Mopertijevu i pokazali na koji se način svaki skok isključuje iz zakona kontinuiteta, pa ma kako bio mali, osmotrićemo najprostiji slučaj u kome se neprestanim porastom uzlazi od jednog pozitivnog kvantiteta na drugi pozitivni, veći kvantitet, ili neprekidnim opadanjem silazi na manji kvantitet.[101]

119. Neka na slici 24. budu dve veličine istog kvantiteta *CD*, *QE* i obe istoga smera, korespondentne dvama momentima *C*, *Q*, koje taj kvantitet treba da pređe u neprekidnom vremenu *CQ*, od prve manje ka drugoj većoj veličini, ne narušivši zakon kontinuiteta. U to vreme moraju postojati sve veličine veće nego *CD*, odnosno nego *QS*, i manje nego *QE*, tako da se ne dobije samo u svakom datom momentu *R* veličine *RP* koja mu od govara, već da se bilo kojom datom veličinom, kao *QH*, koja je u tom smislu međuveličina između *QS* i *QE*, dobije momenat koji joj odgovara. Taj momenat, međutim, naći će se bar jedan, kad data linija *DE*, bilo prava ili kriva, treba da učini vidljivim zakon te rastuće veličine. Jer, kad povučemo beskrajno kroz *H* pravu *FG* paralelnu sa *AB*, ona nužno mora da preseče onu liniju *DE* bar jedanput negde u *P* kao što pokazuje slika. Ali mogla bi da je preseče i u više tačaka, kad bi se, dakako, ta linija savijala ovamo i onamo oko prave *FG*, što se neće moći dogoditi ako kvantitet, kao što smo pretpostavili, neprestano raste. Ako povučemo paralelnu *PR* sa *DC*, ili *EQ*, dobićemo moment *R*, kome će ta veličina odgovarati.[102]



Sl. 24

120. Kad ovo uopšte dobijemo, imaćemo prelaz preko svih međuveličina i porast preko svih beskrajno malih stupnjeva bez ikakvog makar kako malog skoka. To će se lako uvideti, ako se pravilno shvati šta je to dolazeći stupanj (dodatni) i kako on nastaje. Pojedinim momentima vremena *R*, *T*, *O* odgovaraju pojedine veličine, kao *RP*, *TV*, *OL*. Makar kako se izabrala dva određena trenutka, uvek će postojati dve veličine koje im odgovaraju i koje će se između sebe razlikovati, kao što se i oni momenti među sobom razlikuju. Razlika momenata određeno uzetih, biće uvek određena i konačna, a isto tako i razlika onih veličina koje im odgovaraju. Ta razlika (veličina) i stupanj kojim se za neprekidno vreme prilazi veličini, postoje zbog intervala koji se javlja između ta dva momenta. Ako se prave povučene iz *D*, *P*, *V*, *L*, paralelno sa *AB*, preseku s pravama *RP*, *TV*, *OL*, *QE* u *I*, *K*, *M*, *N*, onda će stupnjevi kojima se prilazi veličini *CD* za vreme *CR*, *RT*, *TO*, *OQ*, biti *IP*, *KV*, *ML*, *NE*. Ako su ta vremena određena i stoga konačna, biće i ti stupnjevi određeni i konačni. A pošto delići vremena mogu beskonačno opadati, ako se pretpostavi da bivaju sve manji i manji, onda će i one razalike, odnosno stupnjevi, postajati sve manji i manji, a ako bi se ta mala vrememena smatrala beskrajnim, kao da beskonačno opadaju ispod bilo kojih granica, ukoliko je za nas moguće da budu beskrajno ili neodređeno mala, onda će i one razlike i oni stupnjevi neodređeno opadati ispod bilo kojih granica i biće u tom smislu beskrajno ili neodređeno mali, te će najzad i nestati.

121. A evo u čemu se sastoji isključenje skoka. Onaj stupanj, ma koji i ma kako mali, u kome je sačuvan kontinuitet, neće se odjednom u nekome trenutku ceo približiti, nego prilazi za neko određeno neprekidno vreme tako, da njegovi sve manji i manji delovi postepeno odgovaraju sve manjim i manjim delovima vremena, i neće postojati nijedan ma koliko mali deo onoga stupnja koji ne bi prišao za neko isto tako malo vreme. Sam taj deo može se nazvati stupnjem, i ako se prelaz vrši preko svih, beskrajno malih stupnjeva, tj. koji se mogu uzeti bilo kako beskrajno mali, jasno je da sigurno postoji prelaz i preko svih međuveličina bilo koje veličine, od nule do bilo koje konačne veličine. I Bernulijeva definicija će odgovarati našoj. Ono što smo rekli za promene u pozitivnom smislu (priraštaje), to će se lako preneti i na promene u negativnom smislu (opadanja) u kojima postoji zakon kontinuiteta, ako se stupnjevi opadanja ne budu vršili trenutno, nego u neprekidnim malim vremenima tako, da bilo koji delovi opadanja, ma kako mali, imaju svoje delove vremena, isto tako male.[103]

122. Skok bi nastao kad bi sva razlika, ma kako mala, između dve veličine, nastala, ne u neprekidnom vremenu, već trenutno. Jer ako bi za čitavo vreme *CR* uvek postojala jednaka veličina *CD*, ili *RI*, onda bi u momentu *R* odjednom nastao ceo stupanj *IP*, a za celo vreme *RT* postojala bi veličina *RP*, odnosno *TK*; u trenutku *T* nastao bi ceo stupanj *KV*, itd. U tom slučaju zakon promene ne bi prikazala neprekidna linija *DPVLE*, nego neka skala *DIPKVLMNE*, šta više, prikazale bi ga jedino prekinute prave *DI*, *PK*, *VM*, *LN*; tada bismo dobili skok koji bi narušio kontinuitet jednako kao da je ceo svet propao u jednom trenutku. Jer veliko i malo upoređeno jedno s drugim, nisu apsolutne stvari prema onome što smo rekli u br. 21, a ako bi stvar bila takva, onda bi Mopertijev prigovor imao snagu dokaza. Ali onaj priraštaj *IP* ne nastaje ceo u momentu *R*, već deo *I' P'* samoga *IP*, ma kako mali, nastaje u delu *CR'* vremena *CR*, isto tako malog, i zbog toga ne postoji nigde nikakav skok koji za sobom povlači trenutan prelaz sa jedne veličine na drugu, koja bi se od one veličine razlikovala nekom po sebi određenom razlikom, pa ma kako malom.[104]

123. Stoga je jasno da je i ovaj Mopertijev prigovor očigledno rešen na osnovu istih principa izvedenih iz prirode kontinuiteta, a na osnovu kojih je ranije rešen i onaj problem o kretanju Ahileja i kornjače. Kao što je bez sumnje na osnovu toga rešena i ona teškoća o neprekidnom kretanju, da nijedan trenutak ili tačka ne dodiruje drugi (trenutak, odnosno tačku) već između dva bilo koja momenta ili dve tačke koji se ne dodiruju stoji neko neprekidno vreme ili linijica, koji se mogu deliti u beskonačnost, ili smanjiti priližavanjem jednog momenta drugome, odnosno jedne tačke drugoj. I tako se ova teškoća rešava time što pojedinim momentima odgovaraju pojedine veličine i što nijedna veličina ne bi mogla biti tako bliska drugoj, da se između njih ne bi pojavila razlika koja ne bi odgoarala onom vremenu, i koja se ne bi mogla beskonačno smanjivati, pošto između njih leže druge bezgranično bliže međuveličine koje odgovaraju međumomentima, a postoji i jedna prva i jedna poslednja veličina od koje i prema kojoj se neprekidnim kretanjem vrši prelaz, tako da nema druge ni pretposlednje. U čitavom pak neprekidnom nizu veličina, uvek, kao i u svakom kontinuitetu, jedna jedina zajednička međa spaja ono što prethodi sa onim što sledi; otuda je, ako nismo na pogrešnom putu, očigledno da zakon kontinuiteta ne sadrži u sebi nikakvu kontradikciju i ne uvodi nikakav skok, već naprotiv, i sam pokušava da isključi svaki skok preko međustupnjeva.[105]

124. Pošto smo na ovaj način objasnili i utvrdili samu prirodu kontinuiteta i zakon kontinuiteta, i pošto smo odstranili svaku sumnju u njihovu nemogućnost, treba već da pređeno na samo dokazivanje, da oni postoje u prirodi što treba da se uradi mnogo kraće, jer smo ovu raspravu već produžili iznad predodređenih granica, propustivši pritom zaista teška srca vrlo mnoge stvari koje bi itekako zaslužile da se spomenu, a druge, preko kojih se nipošto ne može preći, jedva smo naznačili.

125. Lajbnicove pristalice, pokušavaju da dokažu zakon kontinuiteta u prirodi na osnovu principa koji nazivaju *Princip dovoljnog razloga,* što, naravno, ne bi bio nikakav dovoljan razlog zašto bi se ako se jednom dopusti skok, morao desiti određeno veliki skok, ni veći ni manji. *Trebalo bi,* kaže Bernuli u raspravi navedenoj u br. 103, da se prvo stanje razori, *da priroda ne bi znala za koje bi drugo stanje trebalo da bude određena*; skoro na isti način to tretiraju i ostale Lajbnicove pristalice. Nama se taj dokaz, dakako, ne dopada i smatramo da je taj princip, kao što ga je prihvatio Lajbnic i glavne njegove pristalice, potpuno pogrešan, pa čak i opasan, a osim toga, kao što smo nekad tvrdili u *Raspravi o plimi i oseci,* smatramo *da nikada ne može biti ni od kakve koristi pri utvrđivanju bilo čega i bilo na koji način, a još mnogo manje za dokazivanje.*[106]

126. Ovde jedva ima mesta da započnemo neko duže raspravljanje protiv samog tog principa. Ipak ćemo izneti ono što nas primorava da tako mislimo. Pre svega, ako slobodna, ili ljudska ili božja volja uopšte treba da ima razloga, zašto onda smatramo da je učinjeno po slobodnoj volji nešto što radije hoćemo nego što nećemo, ili obratno. Jer se, ako ostavimo po strani prevagu onih razloga koji nam se nameću i čije celokupno saznanje uopšte ne zavisi od našeg rasuđivanja, ne može dogoditi da se naša volja ne bi povela za onim što bi imalo prevagu. Kod boga, je međutim, pre svega potrebno otkloniti slobodu i uvesti apsolutnu nužnost za pojedine stvari koje postoje, i nemogućnost za one koje ne postoje. Nije se, naime, nikako moglo dogoditi, da bog ne bi video sve razloge koji su mogli postojati u onom nedeljivom redu stvaranja; nije se moglo dogoditi da nisu postojali razlozi koji su postojali; nije se moglo dogoditi da razlozi koji su više vredeli, ne bi imali prevagu, jer oni ne mogu menjati svoju prirodu. Nije se moglo dogoditi, da bog ne bi išao za onim što ima veću vrednost. Dakle, i iz samog principa kontradicije, koji je u božjoj prirodi obdarenoj mudrošću i određenošću da izabere ono što je najbolje, i iz prirode razloga koje je mogao videti, zaključuje se da se nije moglo dogoditi, da ne nastane ovaj jedini red koji je zbog toga uopšte i bio nužan, a smešna je, zaista, mogućnost da se ono što nije moglo postojati, ako nije bilo stvoreno, nije moglo stvoriti, da neki dovoljan razlog ne bi pokrenuo boga da stvara; niti je pak sam ikakav dovoljan razlog mogao postojati, sem onih koje je bog imao pred očima kad je stvarao svet.

127. Priznavanju slobode božje volje pridolazi i to, da, kad se radi o mogućim stvarima, ne može postojati ništa tako izvrsno stvoreno od čega ne bi bilo moguće nešto izvrsnije, kao što se dešava i kod rastojanja i kod drugih sličnih stvari, već uvek može postojati neko savršenstvo veće od ma kojeg konačnog savršenstva. Nijedno stvoreno savršenstvo ne može biti apsolutno beskonačno, kao što smo gore pokazali za kvantitet. Stoga je bog, kad je rešio da nešto stvori, nužno morao nešto da stvori, čime je druge savršenije stvari ostavio nestvorenim i nije ga mogao pokretati ni izbor za najboljim, da stvori ono što je stvorio. Prema tome je svako, pa bilo koliko veliko prirodno savršenstvo onoga što je stvorio (stvorenja), tako malo, čak tako ništavno prema božanskoj neizmernosti, da je vršenje njegove slobode bezbroj puta od veće vrednosti, nego ma šta, ma kako izvrsno stvoreno, i s obzirom na njega, sve treba smatrati jednakim. Treba, dakle, da postoji razlog zašto da nešto pre postoji nego da ne postoji, ali ćemo uvek imati neki fizički razlog kod stvorenih stvari, naime neki uzrok, dok moralni razlog neće uvek postojati i moći ćemo se držati one izreke: *mesto razloga postoji volja.*

128. To smo rekli o pogrešnom principu onako kako ga prihvata Lajbnic i kao što ga primenjuju Lajbnicove pristalice, koje su se njme najviše služili u onome što se odnosi i što zavisi od ljudskog ili božanskog izbora. Niko ne poriče da za sve činjenice treba da postoje uzroci, da svi zaključci treba da imaju svoje premise pomoću kojih postaju jasne činjenice koje treba da istražuješ i kad ih sagledaš, dobiješ rezultat, složiš se sa zaključkom, i kad ih jednom priznaš, nužno bi mogao da uneseš i druge stvari koje odatle slede. Primena negativnog principa Lajbnicovih pristalica nije u tome, nego je čitava njegova moć, koju oni svakodnevno iznose, u tome da zbog nedostatka razloga nikako nije moguće zaključiti da stvar postoji. Zatim, kakvu snagu može imati nedostatak razloga za *određivanje* ili *dokazivanje* nečega, ako mi u stvari ne znamo da ne postoji nikakav razlog? A kad bi slobodna odluka tvorca mogla biti razlog, zašto onda nešto može pre da postoji, negoli da ne postoji? Nama uopšte ne mogu biti poznati svi razlozi, pošto nam slobodna tvorčeva odluka nije poznata drukčije, osim kao kakav pokušaj dokazivanja navođenjem onoga što se stalno dešava, u šta spada i neki stalan zakon za koji smatramo da ga je on doneo; a svi vide do koje mere je ovo navođenje nepotpuno i do koje mere je to rešenje daleko od svakog jasnog dokaza.

129. A ako i pređemo preko toga, zar Lajbnic sam ne izjavljuje, da se mnoga zla, kao ono sramno Tarkvinijevo delo, nalaze i u najsavršenijem svetu, jer svi mogući svetovi imaju u sebi neko zlo, i da se ono mora podnositi u najboljem svetu pored toliko drugih potrebnih dobrih stvari? Kad u nekom istraživanju budemo pronašli, ako se to može desiti, šta je u posmatranom svetu najbolje, šta je najpoštenije i šta je najmanje štetno, hoće li nam odatle biti jasno, da to nije onaj deo sveta koji je, mada nesavršeniji, odabran za zadovoljstvo drugih, kao što je dopuštenje Tarkvinijevog zločina? Kad bi to bilo tako, šta bi se ikad moglo još iz dovoljno poznatog razloga navesti za pojedine slučajeve, jer odatle ne proizilazi ništa određeno, kad je jednom sagledana veća savršenost i prihvaćena neophodno za najboljim svetom, i to pri toliko neznatnim našim saznanjem.[107]

130. A šta onda kad su u pitanju neophodni uzroci stvari? Mada uvek, pošto si saznao za naučni uzrok, možeš sigurno izvesti i posledicu, kakvoj bi se opasnoj zabludi izložio, ako bi smelo zaključivao o nedostatku posledice na osnovu nedostataka uzroka, čiji tako mali broj poznaješ? Svakog dana Lajbnicove pristalice nameću primer Arhimeda koji je bez postojanja dovoljnog razloga izveo ravnotežu na osnovu jednakih težina, a prećutkuje se njegova greška koja je nastala baš iz istog principa, jer je iz istog nepostojanja dovoljnog razloga, na osnovu kojeg je utvrdio ravnotežu, zaključio da je zemlja sfernog oblika, a mi znamo da se ona razlikuje od sfernog oblika. Sve je to samo zbog kasnije otkrivenih razloga za koje je Arhimed mislio da ne postoje, jer ih nije video. Međutim, ta Arhimedova ravnoteža nije potekla iz negativnog principa, nego iz dokaza koji se lako svodi na utvrđeni oblik i utvrđenu silu, što bi smo lako dokazali da imamo vremena. Dodajemo samo jedno: između ostalih mnogih stvari, u kojima traženje dovoljnog razloga gubi snagu, je baš i ovo isključenje skoka iz prirode. Jer šta zabranjuje da postoje izvesni razlozi zbog kojih bi skok određene veličine mogao biti mnogo korisniji od svih drugih, kao što su ljudima koji se penju na gornje spratove od svega najviše korisne stepenice neke određene visine?[108]

131. Ako, dakle, napustimo taj razlog, iznećemo dva, i to jedan na osnovu metafizičkih principa, a drugi na osnovu indukcije koja naročito u fizici mora da ima najveću primenu, jer je neizbežno da bar prve uzroke ili uvek, ili skoro uvek, ne poznajemo mi koji istražujemo prirodu jedino pomoću naših čula, a ta pomoć je dosta slaba. Prvi razlog je ovakav. Za kvantitete, koji se mogu menjati i koji traju u neprekidnom vremenu, ni u jednom trenutku ne može postojati više veličina, a skok, ili trenutni prelaz sa jedne veličine u drugu, preskočivši sve međuveličine, uopšte ne nože da postoji. Ako se dokaže ovaj stav, dokazaće se da skok u prirodi ne može postojati. Jer, bilo koji kvantitet, prema zakonima prirode, može u pojedinim momentima imati samo jednu veličinu. Tako telo, iako može da menja gustinu i brzinu (a tu podrazumevamo uvek samo onu rezultujuću brzinu koja određuje kakvo treba da bude i samo kretanje), u pojedinim momentima, međutim, može da ima samo po jednu gustinu i brzinu. Telo bi moglo imati i dve gustine, kad bi se tako repliciralo, da bi njegove tačke imale jedno rastojanje između sebe u jednom delu prostora, a drugo u drugom delu. Moglo bi imati i dve brzine u onom trenutku kad bi moglo da u datom vremenu pređe i veći i manji prostor i da se tako odvija u svim sledećim trenucima, — što se protivi zakonima prirode i što bi mogla izvršiti samo svemoć božja.[109]

132. Taj se stav, po našem mišljenju, jasno dokazuje iz onoga što smo ranije izložili. Kad bi, naime, u jednom trenutku postojao skok, onda bi, u tom istom trenutku, kvantitet morao imati dve veličine, tj. poslednju iz neprekidnog niza koji pripada prethodnom vremenu, i prvu iz onog niza koji pripada sledećem vremenu. Kao što je naime, taj trenutak poslednji od prethodnog vremena i prvi od sledećeg, tako i veličina, koju imamo u datom trenutku, mora da bude i poslednja granica niza koji odgovara prethodnom vremenu, i prva granica niza koji odgovara sledećem vremenu. Jer, neprekidni prethodni niz mora imati svoju poslednju granicu, a niz koji sledi mora imati prvu granicu koja mu se sama ne može oduzeti, kao što se ni sama poslednja tačka uopšte ne može oduzeti liniji, ni sama poslednja linija površi. Ako celom vremenu *CR* na sl. 24, odgovara jednaka veličina *RI*, i celom vremenu *RT* jednaka veličina *RP*, u trenutku *R* obe veličine moraju postojati, jer se ne može desiti, da površi *RIDC* nedostaje samo poslednja linija *RI*, odnosno pravougaoniku *RPKT* samo prva linija *RP*. To sasvim jasno proizilazi iz onoga što smo rekli u br. 97 o geometrijskom mestu, koje ne može imati više ordinata koje bi odgovarale samo jednoj apscisi i koje uopšte mora da sačuva kontinuitet. Ako se linije *DC*, *EF* na sl. 19, prekinu, moraju ostaviti otvor u *GH*, u kome ne samo što nema nikakve ordinate, nego je ona i nemoguća, ili da u *H* postoje dve ordinate, kao na sl. 20, ili da na čitavom delu *HG* postoje dve ordinate, kao na sl. 21; ne postoji nijedan slučaj sem ova tri, pošto se, kao što smo skrenuli pažnju u br. 99, i onaj slučaj svodi na drugi kod koga bi se reklo da posle *G* ordinata nestaje, jer se *EF* poklapa sa osom *GB* a u tom slučaju bi smo u trenutku *G* imali veličinu *GC* i veličinu nula kao što je npr. rastojanje *GC*, i rastojanje nula, jer se jedna tačka replicira postojeći i na rastojanju *GC* i u istoj tački prostora sa drugom tačkom.[110]

133. Istim dokazom isključuje se skok i u lokalnom kretanju. Od bilo koje tačke ka bilo kojoj drugoj tački prostora, može ići bilo koja pokretna tačka raznim putevima, na pr. savijenim i iskrivljenim. Ali linija, kojom ona bude pošla, moraće se uvek opisati neprekidnim povlačenjem bez ikakvog prekida. Zašto to? Zato, jer, ako bi se negde prekinula, kao na sl. 1, i ako bi put *ABCD* bio prekinut u *BC*, onda bi momenat, u kome bi tačka počela da opisuje *CD*, bio isti kao i moment u kojem bi prestala da opisuje *AB*, ili bi njemu samom prethodio ili bi za njim sledio. U oba od ovih poslednjih slučajeva između ta dva trenutka, nužno treba da leži neprekidno vreme u kome postoji beskonačno mnogo momenata. Dalje bi u prvom od tri izneta slučaja tačka bila u istom trenutku i u *B* i u *C*, i tako bi se replicirala; u drugom slučaju bi kroz neprekidno vreme bila na dve linije, i stoga bi se replicirala u beskrajno mnogo momenata; u trećem slučaju uopšte ne bi nigde ni postojala u neprekidnom vremenu. Sva snaga dokaza uvek leži u isključenju trenutka najbližeg trenutku, tačke najbliže tački, linije koja ima drugu najbližu liniju, i zato i u isključnju granice najbliže granice bilo kojeg niza koji traje u neprekidnom vremenu, ili niza predočenog neprekidnom linijom.[111]

134. Ovim dokazom smo već pripremili put indukciji, na koju su nas izazvali Lajbnic i njegove pristalice, i koja može biti dosta obimna, jer se ovo isključenje skoka u lokalnom kretanju odnosi i na indukciju. Ali, najpre ćemo nešto reći o samoj indukciji. Indukcija ima najveću snagu naročito tamo gde se ispituju opšti prirodni zakoni i jedva da postoji neki drugi put za njihovo ispitivanje. Već su stari filozofi pomoću indukcije uvek pripisivali svim telima protežnost, mogućnost uobličavanja, pokretljivost, neprobojnost; ovim osobinama mnogi od novijih filozofa s istim razlogom dodaju još i inerciju i opštu težu. Indukcja mora, da bi imala snagu dokaza, obuhvatiti sve pojedine slučajeve koji uopšte mogu postojati. Ona ne može imati značaja pri utvrđivanju zakona prirode. Međutim, ima značaja neka šira indukcija koja, da bi se mogla upotrebiti, treba da bude takva, da se, pre svega, u svim onim slučajevima koji se precizno ispituju mora opaziti, da li se taj zakon potvrđuje i da li se on u svim tim slučajevima otkriva, a da ti slučajevi ne budu malobrojni; u ostalim slučajevima pak — da bude takva da se mora opaziti — ako nešto izgleda prividno suprotno, pošto se stvar pažljivije ispita, da bi se sve moglo dovesti u sklad sa tim zakonom, mada se baš ne može neposredno utvrditi da li se na taj način potpuno dovodi u sklad. Ako postoje ti uslovi, onda treba smatrati da je indukcija pogodna za utvrđivanje zakona. Tako, pošto vidimo da toliko brojna tela koja imamo pred sobom, pružaju otpor drugim telima da ne bi došla na njihova mesta i da se uklanjaju ako ne mogu da im se odupru, pre nego da zajedno ostanu na istom mestu, dopuštamo postojanje neprobojnosti tela i ne smeta nam što gledamo da se neka tela upijaju u druga veoma čvrsta, napr. ulje u mermer, svetlost u staklo i drago kamenje. Vidimo, naime, da se ova pojava lako dovodi u sklad sa samom neprobojnošću, kad kažemo, da ta tela prolaze kroz otvorene pore tela.[112]

135. Sem toga, sve apsolutne osobine, naime, one koje se ne primećuju našim čulima, obično se otkrivaju na masama tela koje opažamo i njih treba da prenesemo na ma koje i ma kako male deliće, sem ako tome ne smeta neki pozitivan razlog i ako nisu takve vrste da zavise od odnosa prema celini, ili mnoštvu, koji je odnos suprotan od odnosa prema delu. Iz toga proizilazi, pre svega, da su velike i male stvari relativne, a mi nazivamo malim i neprimetnim ono što je neznatno s obzirom na našu veličinu i naša čula. Gde se, dakle, radi o apsolutnim, a ne relativnim osobinama, sve zajedničko što vidimo u njima, što je sadržano u granicama koje mi možemo da opazimo, to treba da smatramo zajedničkim i van tih granica, jer su te granice, s obzirom na stvari kakve su po sebi, slučajne, i zato, ako bi postojala kakva povreda analogije (indukcije), mogla bi pasti veoma lako među granice koje opažamo, a koje su utoliko labavije, ukoliko su niže, pa, prema tome, bliske nuli. Pošto se nije dogodila nikakva povreda, znači da je i nema. Ta indicija nije očigledna, ali se tiče principa istraživanja, i, ako se ono vrši na osnovu nekih razboritih pravila, obično ima uspeha. Kako ta indicija može da prevari, može se desiti da se načini greška, ali će protiv same greške postojati pretpostavka, kao što se to kaže u pravu, — dok se pozitivnim razlogom ne dokaže suprotno. Ovde je trebalo dodati: *ako pozitivan razlog ne smeta*. Tako bi protiv ovih pravila grešio onaj koji bi tvrdio, da kod velikih tela ne može doći do probojnosti, da se ne mogu presaviti i da ne mogu biti lišena inercije, a zatim, da su njihovi mali delovi probojni, odnosno da se mogu presaviti, odnosno da su bez inercije. A ako je osobina relativna, s obzirom na naša čula, zbog toga što postoji u većim masama, ne smemo zaključiti da ona postoji i u manjim delićima, kao što je biti primetan, biti obojen, što je osobina velikih a ne malih masa; pošto je ova razlika u veličini slučajna, s obzirom na materiju, nije slučajna s obzirom na pojam *primetno* ili *obojeno*. Tako isto, ako neka osobina tako zavisi od odnosa agregata, ili celine, tako da se ne može od nje dvojiti, ona se ne sme iz istog razloga, dakako, od celine odnosno od agregata preneti na delove. Osobina celine je da ima delove, pa celina bez delova ne može postojati. U prirodi onoga što ima oblik ili protežnost, jest da ima nešto što se razlikuje od drugog, i stoga da ima delove; odatle se te osobine, ma da se nalaze u bilo kojem agregatu delića materije, ili u kojoj bilo masi, koja se može opaziti, ne smeju preneti snagom indukcije na bilo koje deliće.

136. Pošto smo ovako izložili snagu principa indukcije, kojim kao gotovo jedinim možemo istraživati prirodu sa nadom na uspeh, i od koga jedinog zavise sve nauke koje se oslanjaju na posmatranje, medicina, anatomija, optika, astronomija, i mnogo druge, krenućemo dalje, da dokažemo samu indukciju u zakonu kontinuiteta. Moglo bi se nabrojiti vrlo mnogo sasvim očiglednih primera, ali ćemo dotaći samo nekoliko njih, dodajući ono što će pokazati u mnogi većoj meri samu snagu indukcije; da se nigde u promenama različitih kvantiteta ne može ništa otkriti, iako svakodnevno imamo pred očima tako brojne vrste promenljivih kvantiteta, što sve zakon kontinuiteta ili ne bi prikazalo samo po sebi bez ičije pomoći i očigledno, ili se sa samim zakonom kontinuiteta, kad ga pažljivije razmotrimo, ne bi najbolje moglo složiti.

137. Pre svega, najobimnija je indukcija prostora i vremena u kojima se stalno ide dalje neprekidnim kretanjem, i bez ikakvog skoka, pa zatim indukcija onoga što se nalazi u prostoru: svih linija i površi u geometriji, koje, ako i sačuvaju istu prirodu, tako neprekidno menjaju sve svoje osobine, što je geometričarima vrlo dobro poznato, da sa jedne veličine potpuno prelaze na drugu preko svih međuveličina. Od jedne ordinate prelazi se na drugu, od jedne veličine površi, ili luka na drugu, od jednog pravca na drugi, čak i od krivine koja postoji u bilo kojoj tački, ka krivini koja postoji u drugoj tački prelazi se uvek preko svih međuveličina; te krivine zavise od poluprečnika oskulatornih kružnica, sa kojima su, smatra se, obrnuto proporcionalne i od bilo koje osobine prelazi se uvek na drugu tako, da se dešavaju neprekidne promene preko svih međuveličina; a ako se prelaz vrši od pozitivnih ka negativnim, uvek se prelazi ili preko nule, ili preko beskonačnog To isto se u transformacijama geometrijskih mesta, nastalih od promene bilo kakvog uslova, uvek vrlo savesno posmatra tako, da bi se geometrija, gde je potrebno, obratila radije tajnama beskonačnosti, nego što bi donustila određeni skok; to smo videli u ovoj raspravi na mnogobrojnim primerima; mnogo ih više ima, međutim, u onoj raspravi u trećoj svesci, a još više toga smo sačuvali za četvrtu svesku naših *Elemenata.* To se zaista vrlo savesno održava u opštoj geometriji svuda, pa čak i u neodređenim algebarskim formulama koje izražavaju prosta geometrijska mesta, u kojima nigde ne postoji skok gde se radi o konačnim kvantitetima, a ne postoji čak nigde ni u beskonačnim, da se ne bi mogao izbeći preko nekakvih tajni beskonačnosti. Takav kontinuitet ne postoji samo u imaginarnim linijama, koje se nalaze u prostoru, nego čak i u onim realnim kretanjima tela koja zavise od prostora i vremena. U svemu tome se može videti najpre, da se nikad, kao što smo rekli u br. 133, od jedne tačke prostora ne dolazi do druge, sem prelazom preko neprekidne linije, mada takvih neprekidnih linija može biti vrlo mnogo i međusobno vrlo različitih. Otuda proizilazi i to, da se i na rastojanjima, koja isto tako treba da se menjaju, sačuva kontinuitet, a da se prelaz sa jednog na drugo rastojanje nikad ne izvrši bez prelaska preko međurastojanja; i otuda: da se nikava gustina, koja zavisi od rastojanja tačaka, ne može nikad menjati skokom, otuda, isto tako i to: da nijedno drvo ili koja druga stvar te vrste, koja raste udaljavanjem vrha od tla, ne može nikad preći iz jedne visine u drugu bez prelaska preko međuvisina. [113]

138. Kontinuitet se čuva, šta više, u samom kretanju i u onome što izvrše sva kretanja po neprekidnim linijama koje se nigde ne prekidaju. Očevici smo vrlo mnogih takvih kretanja. Sve planete i komete kreću se po neprekidnim linijama i sva se vraćanja vrše postepeno, kretanje je uvek neznatno na zastojima, ali ipak uvek postoji: otuda dan postepeno nastaje svitanjem, a nestaje večernjim sumrakom; Sunce u svoj svojoj veličini ne izlazi na horizont skokom, već neprekidnim kretanjem, a tako isto i zalazi. Teški predmeti bačeni koso isto se tako kreću po neprekidnim linijama, odnosno parabolama, ako odstranimo otpor vazduha, ili, ako taj otpor uzmemo u obzir, onda po krivim linijama koje se više približavaju hiperbolama. Ona se zaista uvek bacaju s izvesnom malom kosinom, jer tačno vertikalan pokret, koji bi se slučajno desio, bio bi beskrajno puta beskrajno neverovatan, makar bio između beskrajno puta beskrajno neznatnih i neosetnih nagiba; pod pretpostavkom da se Zemlja kreće, takav pokret bi se vrlo mnogo razlikovao od paraboličnog i u slučaju da telo bude tačno vertikalno bačeno, kretaće se po neprekidnoj liniji; kad bi Zemlja sasvimm mirovala i kad nikakva snaga vetrova ne bi ometala njegovo kretanje, dobilo bi se pravolinijsko penjanje, odnosno padanje. Šta više, sva ostala kretanja koja zavise od težine (od sile teže), od sile elastičnosti i od sile magnetizma, isto tako zadržavaju kontinuitet, jer ga zadržavaju i same sile koje ga stvaraju. Pošto, naime, sila težine opada obrnuto kvadratu rastojanja, a rastojanja se ne mogu menjati skokom, to se ona menja preko svih međuveličina. Isto tako, vidimo, da magnetska sila kontinuirano zavisi od rastojanja, elastična sila od savijanja, kao kod ploča, ili od rastojanja, kao kod delića sabijenog vazduha. U njima i u svim silama te vrste i u kretanjima koja stvaraju, uvek postoji kontinuitet, kako u linijama koje se opisuju, tako i u brzinama koje se, isto tako, menjaju preko svih međuveličina; to se može videti kod klatna, kod dizanja teških tela i u hiljadu drugih takvih slučajeva u kojima promene brzina nastaju postepeno, a vraćanje natrag ostvaruje se samo postepenim smanjivanjem brzine. Sve ove stvari vrlo brižljivo čuvaju kontinuitet. Otuda kod prirodnih kretanja nema nikakvih uglova, već menjanje pravca biva uvek postepeno, a pravi uglovi ne postoje ni kod samih tela kod kojih, iako se vidi blaga oštrina ili šiljak, pomoću mikroskopa se obično vidi krivina koju uvek imaju rečna korita, lišće na drveću, i grane i bilo koje kamenje, osim ako se negde, slučajno, ne pojave stalni šiljci, ili šiljci prve vrste koje, izgleda, priroda čuva kod trnja, ili šiljci druge vrste koje priroda održava u kandžama i u kljunu ptica. Malo kasnije ćemo videti da se u njima sačuvao kontinuitet, jer se ipak u samom šiljku održala jedna tangenta. Bio bi beskrajan posao nabrajati pojedine stvari u kojima se zapaža kontinuitet u prirodi. Bolje je, skvakako, tražiti da se iznese slučaj gde kontinuitet u prirodi nije sačuvan, a takav se neće uopšte moći izneti.[114]

139. U onome što se odnosi na geometriju, obično iznose samo one šiljke, koje smo maločas spomenuli, ili povratne tačke, kao da se kontinuitet u njima narušava, jer kriva, pošto je dospela do određene tačke, okreće svoj tok nazad. Lajbnicove pristalice imaju običaj da odgovaraju kako tu nije izvršen nikakav skok, jer šiljak nastaje iz petlje koja je sačuvala kontinuitet, i tvrde da treba posmatrati vrh samog šiljka, ne kao kakvu nedeljivu tačku, nego kao neku beskrajno malu petlju koja ima beskonačnu krivinu i koja se svim pravcima vraća u sebe samu. Na sl. 17, petlja se proteže uvek na isti način neprekidnim pravcem preko *MOVCFIVPN*. U svim njenim međutačkama i tangenta neprekidno teče preko *QOR*, *AVB*, *DCE*, *GFH*, *LIK*, *B'VA'*, *SPT*. Kad nestane petlje, sl. 17 prelazi u sl. 18 i imamo šiljak *MVN*, u kome, kažu, tačka *V* nije matematička tačka, već neka beskrajno mala petlja koja još ima one iste tangente.

140. Ali to mi ni na koji način ne možemo dokazati. Jer, ona tačka na šiljku je jedna nedeljiva tačka, a i luk *MOF* spaja se sa lukom *FPN* u jednoj jedinoj tački, što je lako dokazati pomoću konačne geometrije. Šiljak, doduše, može nastati iz petlje, pošto se izmeni uslov geometrijskog mesta, kao kod konhoide, kod koje, ako bi rastojanje pola od ose — gde s ove i s one strane treba da se uzme duž, jednaka onoj datoj, sa strane samog pola, ili sa suprotne strane, da bi njen vrh neprekidnim kretanjem opisao onu krivu, — bilo manje nego sama data duž, onda se dobija petlja s ove strane ose; ako je rastojanje jednako, dobija se šiljak, a ako je veće, dobijaju se dva suprotna zavoja; pa ipak, ona kriva koja ima petlju, ima i svoju naročitu prirodu, koja se razlikuje od prirode ostalih, i svoje osobine koje je konačna geometrija tačno utvrdila: napr. parabola, koja je na sredini između elipsa i hiperbola, dobila je svoj oblik i svoje osobine, pošto je izgubila najveći deo onih osobina koje pripadaju elipsi i hiperboli, jer su one otišle u beskonačnost ili nestale. Među takve osobine spada i ona, da petlja potpuno iščezava i posle nje ne dolazi nikakva ni beskrajno mala petlja, već nedeljiva tačka. I tako smatramo da kontinuitet nije uopšte narušen. Jer kad bi se šiljak posmatrao odvojeno, nezavisno od petlje, od koje je postao na sl. 18, tangenta u vrhu *V* biće jedina *AB*, i pošto tačka neprekidnim kretanjem ide preko same krive putem *OVP*, tangenta *QOR* će neprekidnim menjanjem pravca doći u položaj *AVB* a tada, ako je šiljak prvoga reda, kao što pokazuje slika, sama tangenta će isto tako, neprekidnom promenom pravca preći sa položaja *AVB* na položaj *TPS*; a ako bi šiljak bio druge vrste, onda bi se taj pravac vratio natrag od tangente povučene kroz šiljak. Uvek će se ipak prelaziti od jednog pravca tangente ka drugom preko svih međupravaca.[115]

141. Nema smetnje što je pravac kretanja tačke koji je ranije u *OV* bio okrenut prema *B* zatim u *VP* počeo da se okreće ka suprotnoj strani. Zato ne postoji uopšte nijedan pravi šiljak u kojem tangenta ne bi bila zajednička i sa lukom koji prilazi šiljku i sa lukom koji se odande vraća, kao što se, naravno, strana *B*, kojoj je ranije bio okrenut, menja u suprotnu stranu *A* na istoj pravoj; te strane smo videli u br. 60, nekako povezane između sebe, kao nekom zajedničkom međom u samoj beskonačnosti. Otuda, dakako, i u mehanici, ništa ne narušava kontinuitet padanja teških predmeta po onoj istoj pravoj kojom su se i popela, a padanje bi ga sasvim narušilo, kad bi teški predmeti padali po nekoj drugoj pravoj; to isto se dešava i kod oscilacija u slučaju bilo kojih krivih. Smer (pravca) se može neposredno menjati u diametralno suprotan, kada beskonačnost ∞ koja leži s jedne strane, što će se uzeti u obzir sa beskonačnošću ∞ koja se nalazi na suprotnoj strani, što se dalje uzima u obzir i stvara na neki način jednu jedinu tačku u kojoj se beskrajni krak prave spaja sa drugim suprotnim krakom. Ako bi se pravac na svaki način morao promeniti, onda će se to desiti u mehanici i ovde u geometriji uvek preko neke neprekidne krive, a ne povratkom posle izvršenog skoka od jednog pravca ka drugima bez međupravaca.[116]

142. To isto se dešava i na sl. 6. sa krivinom luka *MHN* koja se menja neprekidnim kretanjem, dok tačka *P* prolazi neprekidnom pravom koja se nekako vraća u sebe preko *HR* ∞ *QH*, jer taj primer još jasnije objašnjava stvar koju smo pomenuli. Ta krivina je uvek okrenuta svom centru *P*, koji se neprekidnim obrtanjem prave *FG* kreće isto tako neprekidno s tom pravom; samo se *P*, posle savladane beskonačnosti na strani *HR*, vraća preko *QH* i prelazi na suprotnu stranu; u samom pak slučaju prave *AC* s obe strane jednako je okrenuta beskonačnosti ∞ kako prema *R* tako i prema *Q*. Tako kad *P* pređe preko *H*, pošto je kružnica nestala, odlazi na suprotnu stranu i smer strane, kojoj je okrenut otvor uvek prelazi preko iste prave na suprotnu stranu. Stoga tamo gde krive imaju suprotne krivine, promena se ne dešava, ako poluprečnik kružnice krivine nije ili iščezao, ili beskonačno porastao; ni njen centar skokom neće nigde promeniti mesto, niti stranu, osim ako ne pređe preko same tačke krive ili beskonačnosti, što se u geometriji može objasniti na hiljadu primera. Zato u tački šiljka *V* na sl. 18, postoji tangenta sa oba smera *AVB*, *B'VA'*. Štaviše, svuda se mogu podjednako posmatrati oba smera čas sa suprotnim stranama koje se poklapaju, čas sa tokom linije kojoj je u samoj tački *O*, samoj posebi podjednak kako smer *OQ*, tako i smer *OR*. Nikakav skok se u svemu tome ne primećuje, nikakav prelaz sa veličine na veličinu bez međuveličina.[117]

143. Međutim, nema nikakvog skoka tamo gde se zamišlja promena petlje sl. 17, u šiljak sl. 18. Dok se na sl. 17, petlja smanjuje neograničeno, dve tangente *AVB*, *A'VB'* podjednako neograničeno prilaze jedna drugoj i potpuno se poklapaju, dok petlja nestaje. Luk *MV*, koji je petljom bio povezan sa lukom *VN*, povezuje se neposeredno u jednoj tački, i nastavlja se. Prave *KL*, *HG*, *ED* težile su da nijedna ne prolazi kroz *V* u uglu *MVN*, nego da svaka od njih ostavi na istoj strani ma koji luk *VM*, *VN*. Time se ističu i na sl. 18. zadržavajući isti pravac. Tamo su ipak dodirivale neki luk, ovde ne dodiruju nijedan, jer je nestao luk koji bi trebalo da dodiruju. Isto se dešava i tamo gde se kružnica pretvara u tačku, dok poluprečnik nestaje. Prave koje su bile tangente ostaju i sad baš prolaze kroz istu tačku; ali one nisu tangente nijednog luka, jer je taj luk prestao da postoji.[118]

144. Kad bi se posmatrala kriva koja je nastala evolucijom petlje koja prelazi u šiljak, izgledalo bi da je narušen kontinuitet, ali se on ipak i tada potpuno očuva. Kad bi se petlja na sl. 17, odmotala počev od *P*, za određivanje tačaka nastale krive, treba da se na tangentama *VA*, *IK*, *FH*, *CE*, *VB*, *OR* uzmu segmenti jednaki lukovima *VP*, *IVP*, *FIVP*, *CFIVP*, *VCFIVP*, *OVCFIVP*. Kad petlja nestane i pređe u šiljak, na sl. 18, segmenti na tangentama *VA*, *IK*, *FH*, *CE*, *VB*, koji su se među sobom razlikovali lukovima petlje, izjednačavaju se i mesto neprekidne krive dolazi kriva koja je nastala odmotavanjem luka *VP* počev u *P* na sl. 18; polukružnica i kriva koja je nastala odmotavanjem luka *FV* sa dodatom duži jednake luku *VP*, svakako su po prirodi različite od kružnice i ne zadržavaju kontinuitet. Ako se uzme luk *VO* jednak *VP* i zamisli kriva nastala odmotavavanjem koje počinje u *O* preko *OVCFIVP* i ako se u pojedinim nastalim krivama zamisle tri luka: zahvaćeni tačkom *P* i tangentom *VA'*, tangentom *VA'* i tangentom *VB*; tangentom *VB* i tangentom *OR*, tačkom *O* i tangentom *VA*; tangentom *VA* i tangentom *VB'*, tangentom *VB'* i tangentom *PS*; u trenutku kad se stvara šiljak i sastaju tangente *VA*, *VA'* i tangente *VB*, *VB'*, prva dva, srednja dva i poslednja dva luka nastavljaju se međusobno, i ona prva dva obrazuju neprekidnu krivu koja nastaje kada se nit odmotava od *VP* na sl. 18, i namotava na *VP*, kao što se obično dešava kod cikloide koja na taj način stvara sebe samu; druga dva luka obrazuju potpunu kružnicu, treća dva neprekidnu krivu koja nastaje suprotnim odmotavanjem (evolucijom) i namotavanjem (advolucijom) lukova *VP*, *VO*, nastalih dodavanjem u *V* duži jednake samim tim lukovima. Pre ove transformacije lukovi dveju neprekidnih krivih prilaze neprekidnim lukovima triju krivih u kojima se one završavaju u sebi preko bilo kojih granica; a da se krivina ne bi menjala skokom, ona kružnica ostaje oskulatorna kružnica obeju novih krivih; na taj način se sve ovo lako dokazuje. U svim slučajevima ove vrste kada se produži transformacija, dok se menjaju lukovi geometrijskih mesta i spajaju jedni s drugima, od kojih su bili razdvojeni, oni ili obrazuju drugo jedinstveno geometrijsko mesto, prenoseći kontinuitet sa jednih na one druge koji su se ranije spajali s drugima, ili se pretvaraju u dva geometrijska mesta koja su međusobno sasvim razdvojena, i pošto nikakvom zajednicom kontinuiteta nisu vezani, neka se, šta više, i odvajaju, ali tako, da se u onom momentu, kada nastaje razdvajanje sjedinjuju i spajaju neprekidne linije s drugima, a isto tako i tačke, u kojima nastaju novi spojevi, tangente povučene kroz njih, poluprečnici oskulatornih kružnica i sve drugo tome slično neka se međusobno približava preko bilo kojih granica, dok se potpuno ne spoji.[119]

145. Svuda se takvim slučajevima javlja neverovatna težnja geometrije da sačuva kontinuitet pozivajući pritom u pomoć, gde je potrebno, i neke tajne; objašnjenje tih tajni daćemo ponovo u četvrtoj svesci *Elemenata*, ali da bi se ta stvar mogla čestito raspraviti, ne bi bile dovoljne ni čitave knjige. Rekli smo, međutim, da je očiglednost težnja geometrije. Jer figure koje mi sebi stvaramo od delova jednostavnih mesta, ne zadržavaju kontinuitet. I geometrija ne priznaje delove tako određene; otuda se dešava, da se opšte osobine koje odgovaraju tim mnogostranim figurama, uvek mogu preneti i na mnogostrane druge figure, kod kojih jedan presek između dva geometrijska mesta zamenjuje neki drugi i gde strana teži od jednog ka drugom, ili smerom iz konačnog dela, ili suprotnim, pošto je pređena brskonačnost, ako se beskonačni kraci sastaju. Ali i ovde bi se ponovo pojavilo veoma plodno polje rada koje se nikad ne bi u dovoljnoj meri moglo obraditi i iscrpsti.[120]

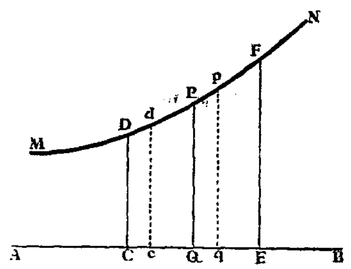
146. Nešto slično se dešava tamo, gde mi samoj geometriji ulivamo snagu i idemo protiv njene prirode narušivši i prekinuvši neprekidnost koju ona sama traži; u tom slučaju propadaju prekinuti geometrijski kvantiteti, jer je povređena njihova priroda. Tako na sl. 22, gde prava normalna na *AB* neprekidnim kretanjem ide kroz R_2, R_3, R_4, ordinate $R_2 P_2$, $R_3 P_3$ prenete na konačnu veličinu R_3E propadaju i odlaze u imaginarne, iako se protivi geometriji koja traži napredovanje tačke P_2 po luku *IE* prema *EH*, i tačke P'_2 po *HE* prema *EI* i uzalud poziva natrag normalnu pravu, da osciluje od jedne tangente ka drugoj čijim je napredovanjem dovedena do bezizlaznog položaja i nekako uništava prekinuti kvantitet. Stoga se prelaz iz realnog stanja u imaginarno dešava uvek odjednom preko dva kvantiteta (jer stvarno su dva (kvantiteta) R_2P_2 i $R_2P'_2$, od kojih bi jedan sledio drugi u napredovanju tačaka PP'), kako bi bili takvi da se mogu uzajamno slediti čuvajući kontinuitet. To što smo pak zabeležili u onoj raspravi u trećoj svesci kao propadanje, uvek se dešava tako, da međudsobno približavanje onih dvaju kvantiteta biva pre spajanja, bilo što se odgovarajuća brzina povećava u beskonačnost, ili se smanjuje, kao što smrt nastupa zbog groznice kod ljudi u punoj snazi, a opet, i zbog neke iscrpenosti u starosti.[121]

147. Neki pronalaze skok i u uglu koji obrazuje prečnik sa periferijom, jer oštri ugao koji je manji od njega, prelazi u veći pravi uago, ali ipak nikad ne biva jednak sa njim. Ta teškoća nestaje na osnovu onoga što smo rekli u br. 83, pošto se uglovi mešovitih linija po vrsti razlikuju od pravolinijskih, a kontinuitet mora postojati između onoga što se po vrsti ne razlikuje. I u mehanici postoje neki skokovi potekli iz pretpostavki koje bi mogle sadržavati skok, ali ih mi svakako smatramo nemogućim. Neki takav skok što se dešava sa tačkom koja se nalazi izvan sferne površi koju sve tačke površi privlače obrnuto proporcionalno sa kvadratom rastojanja, ili je privlači neki centar i, pošto je najpre bačena koso, a zatim pada slobodno, jer je iščezla sila bacanja, to smo zabeležili protiv Ojlera u raspravi o kretanju tela povučenog ka centru po zakonu sila; drugi sličan skok dešava se, kako je Ojler označio u mehanici, kad opadanjem sile obrnuto proporcionalno kubu rastojanja, tačka opisuje logaritamsku spiralu, u kom slučaju bi ta tačka, posle konačnog vremena, morala stići u centar, a zatim ili je nigde nema, kao što on misli, ili je zajedno sa beskrajnim tačkama, kako nama izgleda da se može zaključiti iz prirode same spirale. Postoji, isto tako, mnogo drugih besmislenih vrsta skokova, gde sile rastu u beskonačnost, kad se rastojanja smanjuju i mogu da budu atraktivne, što u prirodi nipošto ne priznajemo, kao što smo već naznačili mi koji želimo da sile budu repulsivne na najmanjim rastojanjima i da u prirodi nikad ništa ne postaje beskonačno. Da bi se sve to moglo objasniti, jedva bi bilo dovoljne čitave knjige. U svim tim slučajevima, međutim, gdegod se radi o konačnim kvantitetima, geometrija, mehanika i sve nauke nam svuda predočavaju zakon kontinpiteta.[122]

148. Ima, doduše, još nekih stvari koje, šta više, u konačnim veličinama, izgleda, traže skok i remete indukciju što se sve svodi na dve vrste. Prvoj vrsti pripadaju oni slučajevi kod kojih preko skokova zamišljamo neke veličine, a međuveličine izostavljamo ne zato što one ne postoje, već što se u običnoj upotrebi ne nazivaju istim imenom, ili što nas se manje tiču. Drugoj vrsti pripadaju slučajevi u kojima se promena dešava u vlro kratkom vremenu, što ne možemo ili jedva možemo da osetimo čulima.

149. Na prvu vrstu svode se samo diskretni kvantiteti, odnosno brojevi. Brojevima zovemo agregate jedinica, ostale brojeve svet skoro nikako i ne uočava, a nismo dali ni ime drugim brojevima sem onima koji nastaju stalnim dodavanjem jedinice. Oni slede nekakvim skokom, jer tu izostavljamo međukvantitete, odnosno sve neizražljive brojere i razlomke koji ispunjavaju ceo prazan prostor između svaka dva najbliža broja, jer ne postoji nikakvo, ma kako malo u sebi određeno rastojanje između tog istog razlomka ili neizražljivog broja i bilo kojeg celog broja, od koga ne bi postojalo manje rastojanje od nekog drugog razlomka ili neizražljivog broja. Ako se zamisle svi brojevi koji bi mogli postojati, bilo da nastaju putem nepravih razlomaka, bilo putem korenskih izraza, ili putem drugih transcendentno iracionalnih znakova, postojaće i kod njih kontinuirani niz; sve što se upravo u geometriji dešava, biva po nama već poznatim linijama, a u konačnoj ili infinitezimalnoj algebri biva preko simbola i znakova.[123]

150. Ovamo spada i ono u čemu kvantitet, podvrgnut razmatranju, ima početak i kraj. Uzmimo dve veličine čiji su počeci i krajevi udaljeni između sebe nekim rastojanjem, pošto su izostavljene međuveličine. U toj vrsti se lakše prevarimo, ako je kraj prve zajednički sa početkom sledeće veličine. Neka je na sl. 25. bilo koja kriva *MN* sa osom *AB*. Kad uzmemo dva dela ose *CQ*, *QE* i podignemo ordinate *CD*, *QP*, *EF* onda izgleda da površina *PQEF* neposredno sledi iza površine *DCQP*, od koje se ipak raz-



Sl. 25

likuje nekom konačnom razlikom koju bismo našli kada bismo od *QP*, *EF* odsekli duži jednake dužima *CD*, *QP*, i primenili luk *DP* na njihove vrhove. Ta veličina se, dakle, menja skokom. Teškoća se, međutim, lako rešava, ako primetimo da mora postojati neprekidan niz između onih veličina čiji počeci i završeci nastaju neprekidnim kretanjem a ne između onih čiji su počeci kao i završeci na nekom međusobnom određenom rastojanju. Ako to prihvatimo, primamo dve granice neprekidnog niza ispuštajući međugranice, a one se lako nalaze, kad po nekom određenom zakonu podelimo rastojanje između dva početka i dva završetka. Ako u izloženom slučaju zamislimo, da duž cq neprekidnim kretanjem sa svojim ordinatama *cd*, *qp* napreduje sa položaja *CQ* prema položaju *QE*, onda će površina *dcqp* iz veličine *DCQP* preći u veličinu *PQEF*, preko svih međuveličina bez ikakvog skoka; to isto bi se desilo, kad bi trebalo da ista duž *cq* dođe do neke veličine čiji bi početak bio koliko mu drago udaljen od kraja prve *QP*, a sama bi se ona u međuvremenu bilo kako neprekidno menjala, dok *cd* stigne na početk one kasnije, a *qp* na njen kraj. Ako je data kriva *MN* i ako su date dve krajnje površine koje se između sebe uvek razlikuju 1. nekom određenom razlikom i 2. ako je data veličina bilo koje međupovršine, uvek će geometričari moći da nađu onu *cq* koja bi pribavila površinu te veličine (međupovršinu).[124]

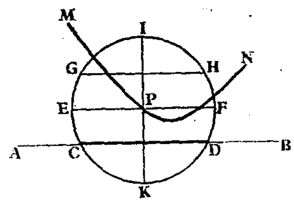
151. Iznećemo takva dva primera iz fizike. Dan koji se računa od Sunčeva zalaska do Sunčeva zalaska ili od podneva do podneva, nije uvek iste dužine, nego je drukčiji u pojedinim godišnjim vremenima, mada je nejednakost prva manja od potonje, i zato se časovnici koji su zajednički astronomima skoro u čitavoj Evropi i bilo koji Sunčani časovnici, ne mogu potpuno složiti sa italijanskim časovnicima, ako imaju jednako kretanje. Zamislimo dva uzastopna dana od kojih se jedan od drugog razlikuje za deset sekundi. Vidi se kako nastaje skok: prelazi se, naime, od prvog na drugi, bez prelaženja preko posrednika. Odgovor na tu teškoću je jasan na osnovu onoga što je rečeno. Početak drugog dana od početka prvog i kraj drugog od kraja prvog dana razlikuju se određenim razmakom. Međurazmaci se dobijaju ako se intervali podele u nekom odnosu, tako da počeci neprekidno idu napred, a isto tako i krajevi. To bi se desilo, kad bi se posmatrali svi dani koji se odnose na mesta istog uporednika prema Zapadu, dok se ne dođe do našeg mesta, pošto se pređe cela Zemlja. Sva pojedina mesta imaju svoje dane koji obrazuju neprekidni niz što počinje u našem prvom danu, a završava se u drugom. U ovim međudanima naći ćemo sve međuveličine bez ikakvog skoka, a one se, isto tako, nazivaju danima. Nema potrebe, ipak, da posmatrano one dane koji se nas ne tiču. Jer, postoje i druge međugranice koje se nas tiču, ali koje dosada nisu uzete u razmatratranje. Kada se oba dana podele na časove i minute, vremenski intervali od bilo kojeg časa prvog dana do bilo kojeg časa drugog dana, obrazuju takođe neprekidni niz intervala: od prvog časa prvog dana, do prvog časa drugog dana, od prve četvrtine prvog časa drugog dana itd. Ovi intervali teku neprekidnim menjanjem od prvog dana ka drugom. U svako dnevnoj upotrebi oni se obično ne nazivaju danima, ali se ipak ponekad tako zovu; moglo bi se, naime, reći da je neko upotrebio celih deset dana, ako je upotrebio vreme od šestog časa prvog dana do šestog časa jedanaestog dana.[125]

152. Drugi primer, sasvim sličan ovome, može se uzeti kod oscilacija klatna. Druga oscilacija razlikuje se od prve ponekad i za više palaca. Ako se prva i druga oscilacija budu presekle na bilo koji isti broj delova, i ako se uzmu lukovi zahvaćeni između sličnih preseka, oni će sačinjavati neprekidan niz veličina čiji će počeci i krajevi neprekidnim kretanjem prelaziti od početka i kraja prve, na početak i na kraj druge oscilacije. U oba ova i u drugim slučajevima takve vrste, stvar stoji isto kao i sa onom površinom *dcpq* na sl. 25.[126]

153. Kvantiteti druge vrste su oni u kojima se za ma kako kratko i neosetno vreme dešavaju ogromne promene. Takva je eksplozija ratnog oružja koja izgleda da nastaje u trenutku, samo dok si prineo vatru. A ipak je sigurno, da treba da se zapale delići jedan za drugim, da se raširi vazduh, što zahteva lokalni pokret i neprekidno vreme takođe, da bi se zrno iz mirnog stanja ubrzalo kroz sve stupnjeve brzina. Slično tome izgleda i prenošenje svetlosti, koje kao da se dešava u trenutku, kad sa svetlećeg tela dopre do naših očiju; pojava Jupiterovih satelita i godišnje aberacije zvezda nekretnica pokazuju da se širenje vrši sukcesivno u vremenu u kome, naravno, svetlost Sunca prelazi do nas skoro sto hiljada milja za jednu osminu sata. Isto tako, kad elastična ploča snabdevena ogromnom snagom i nešto stisnuta ima susednu loptu gde može da oslobodi svoju energiju, izgleda da za trenutak daje lopti određenu i ogromnu brzinu; pa ipak je u tom slučaju sasvim sigurno, da će se ta lopta, po shvatanju svih ljudi koji se bave mehanikom, za vrlo kratko vreme, doduše, ali ipak za neko vreme, postepeno ubrzati. Ima još bezbroj takvih primera od kojih ćemo odabrati dva koja se obično svode na suprotno, a koja se ipak najbolje slažu sa zakonom kontinuiteta, odnosno čak ga i potvrđuju.[127]

154. Prvi od tih primera neka bude refleksija i refrackija svetlosti, za koju kažu da se dešava u jednoj jedinoj tački u dodiru zraka s novom površi, gde se kod refleksije najpre celokupna brzina normalna na površ smesta gasi, a zatim se menja skokom, pošto je nastala jednaka i suprotna (brzina). Ova infleksija se, međutim, ne dešava skokom u tački, nego nekim neprekidnim krivljenjem; to je jasno iz međusobnog delovanja svetlosti i tela, a poznato je i iz difrakcije koju je otkrio naš opat Grimaldi, zbog koje se dešava da zrak na izvesnom rastojanju od same površi počinje da se krivi, jer se tim delovanjem izmeni normalna brzina preko svih međustupnjeva. Poznato je da se svetlost ne reflektuje samo zbog udara o površ, nego iz mnogih drugih razloga koje je naveo Njutn u svom delu *Optika*, a i zbog toga što svaka površ, na pr. staklo, koje nam izgleda kao savršeno glatka površ, ima neravnine i nabore koje je načinila sama ona prašina kojom se staklo glača; te neravnine, koje su s obzirom na deliće svetlosti ogromne, smetale bi refleksiji koja bi nastala od udara i rasipala svetlost na bilo koju stranu. One (neravnine), međutim, uopšte ne smetaju refleksiji izazvanoj od repulzivne sile koja je nastala na izvesnom rastojanju.[128]

155. Neka je *P* delić svetlosti na sl. 26, *IEKF* sfera na kojoj se širi osetljivo delovanje tela na svetlost, *AB* površ koja razdvaja dve sredine; dok cela lopta u prvoj sredini ide pravo napred, zrak se sa svih strana podjednako privlači ili odbija. Kad lopta počne da ulazi u novu sredinu, u kojoj je njen segment *CKD*, počinje nejednako delovanje. Ako *GH* kao i *CD* imaju jednako rastojanje od centra, jednaki segmenti *GEPFH*, *CEPFD* iste sredine, jednako će delovati na delić *P*, a nejednako će delovati segmenti različitih sredina *GIH*, *CKD*. S ove strane će postojati neka sila priláženja prema ravni *AB* ili udaljavanja od nje, a tom silom će se iskriviti putanja kad se bude zbog repulzivne sile našla paralelno sa površi *AB*, pa će se okrenuti natrag i opisati luk sasvim sličan prethodnom koji se završava sa strane *N*, pravom sličnom onoj kojom je ona došla sa strane *M*. Ako bi površ *CD* bila nejednaka i rapava i ako bi nejednakosti bile sasvim neznatne u odnosu na čitavu loptu i njen segment *CKD*, neće nastati nikakva osetna promena na putanji *MPN*, jer sila zavisi od svih delića koji se nalaze unutra u segmentu *CKD*, a ne samo od prve površi. Ali će nastati vrlo veliki metež i rasipanje svetlosti tamo gde su neravnine veće. Ovde se dešava ono isto što i na Zemlji koja je neravna zbog brda i dolina. Teški predmeti slobodno bačeni opisuju parabole, ako se isključi otpor vazduha; te parabole neće pretrpeti nikakvu osetljivu promenu zbog rapavosti, zato što težina zavisi od celokupne Zemljine mase u odnosu na koju se planine ne osećaju, a ne od same površi. Kad bi se pak odjednom gomila lopti sručila na Zemlju i kad bi bila otsutna svaka teža, a površ same Zemlje elastična, onda bi se sve te lopte odbile i rasturile u najrazličitijim pravcima koje određuju ravni na koje bi naišle pojedine lopte.[129]



Sl. 26

156. Drugi primer uzmimo sa vodom koja ističe iz nekog suda. Kažu da ona, ako se otvor nalazi na izvesnom rastojanju ispod nivoa vode, odmah ističe onom brzinom koju bi dobila padajući sa tog rastojanja kao s visine, i stoga pokušavaju da dokažu da se celokupna ta brzina stvara za trenutak. U ovom slučaju vrlo mnogi, veoma ugledni mehaničari rečito tvrde, da se, po njihovom mišljenju, ta brzina stiče postepeno a ne sva za trenutak, a kad se to prihvati, nestaje svaka teškoća. Ta teškoća, međutim, nema nikakve snage pri dokazivanju skoka i narušavanja kontinuiteta, a nama je sasvim jasno i to dokazujemo na dva načina. Prvo, očigledno je da voda ne može isticati brzinom većom od one kojom se odstranjuje prepreka kojom je otvor bio zatvoren. Uklanjanje te prepreke zavisi od brzine koju joj daje sama ruka što je pokreće; ta brzina, videćemo malo kasnije, prolazi kroz sve stupnjeve; i onaj koji bi tvrdio da se to uklanjanje vrši, pošto se u pomeranju prepreke za trenutak stvorila konačna brzina, vraća se sasvim na početak i ne iznosi nikakvu posebnu teškoću zbog brzine vode, koja ne može da nadmaši brzinu pomeranja prepreke.[130]

157. Reći ćeš: šta ako bog trenutno uništi samu prepreku i oslobodi otvor? Najpre ćemo odgovoriti, da mi stvaramo indukciju iz onoga što se dešava u prirodi, a ne iz onoga što bi se moglo desiti da je bog narušio zakone prirode. Zatim, smatramo da u tom slučaju jasno stoji, da se brzina postiže za veoma kratko vreme, ali ipak za neko vreme, preko svih stupnjeva baš tako kao što bi se desilo sa ogromnom loptom koju je odbacila elastična ploča. Jer sila, kojom voda pritiskuje, jednaka je celokupnoj težini stuba koji bi imao istu bazu i visinu sa kojom stoji u ravnoteži u sudu jednake širine, kao što je to lako dokazati kod ostalih oblika sudova. Mislimo da taj pritisak stvaraju međusobno delići vode u nekom prostoru, doduše, neprimetnom, ali ipak takvom da se odbojna sila izjednačuje sa onom težinom za koju se, kad se pronađe sila proporcionalna visini gornjeg sloja vode, pronađe i proporcionalna sila. Toj se sili odupire odbojna sila bočnog zida suda. Kad se zid suda za trenutak otvori, ta sila ubrza prve deliće sve dok se ne odvoje od sledećih u celom prostoru u kojem deluje odbojna sila. Dalje se, zbog toga, postiže brzina koja se ostvaruje kao kvadratni koren visine, jer tamo gde sile u nekom stalnom odnosu u jednakim prostorima međusobno deluju, dobijaju se brzine koje su subduplikati sila samo zbog toga što sile za jednake deliće vremena postižu brzine koje su proporcionalne njima samima i vremenu, a delići vremena, čim se većom silom postigne veća brzina, u pojedinim malim razmacima postaju kraći; otuda se dešava da se brzina povećava manje nego sila. Ta ekonomičnost pretpostavlja vreme i sve međustupnjeve veličina. Stoga se, iz samog tog učinka, stiče veoma značajna pretpostavka za sledeće nastajanje te vrste. Sasvim jasno nam je bar to, da se ni na koji način ne može dokazati da se stvar sigurno ne dešava baš ovako, a sama indukcija, kad ne bismo imali ništa drugo, primorala bi nas da ovaj fenomen protumačimo na ovakav način, prema onom što smo rekli u br. 134.[131]

158. Pošto smo izneli i dokazali zakon kontinuiteta, i oslobodili se prigovora koji se obično iznose protiv njega, ili se mogu izneti, preostaje, da prilikom rešavanja drugog prigovora koji obično nastaje iz sudara tela, iznesemo postanak naše Teorije i da je dokažemo na osnovu samog zakona kontinuiteta. Na samom početku ove rasprave bili smo rešili da opširnije raspravljamo o toj Teoriji, ali pošto je već sama rasprava odviše narasla, prinuđeni smo da taj dokaz ostavimo za jednu drugu, ili za više drugih rasprava; mnoge stvari, koje se odnose na nju, dali smo u raspravi *O živim silama*, a mnogo više na početku drugog dela rasprave *O svetlosti*. Mnoge od tih problema je vrlo marljivo i temeljno obradio opat Karol Benvenuto, veoma učen čovek našega reda — kome je dobro poznato naše mišljenje o toj stvari — i ovih dana objavljuje u javnoj raspravi koja će se kroz kratko vreme izneti u Rimskom seminaru i najbolje objasniti sve što se odnosi na samu Teoriju sila i njenu upotrebu — teoriju koja je najšire otvorena za celokupnu fiziku. Stoga ćemo ovde samo dodirnuti glavne delove Teorije i dokazati ih baš po ovom zakonu kontinuiteta. Kad jednom prihvatino taj zakon, izgleda nam da će se Teorija tako očigledno izvesti, da se više ništa, sem kleveta, ne može iznositi radi pobijanja njenog izvođenja.[132]

159. Ovo su glavna poglavlja naše teorije. Prvo, da tela nikad ne dolaze u neposredni dodir, nego imaju neku težnju da se odvajaju jedno od drugog na najmanjim rastojanjima, što nazivamo odbojnom (repulzivnom) silom; ta sila se na rastojanjima smanjenim u beskonačnost povećava iznad bilo kojih granica, tako da je jednaka bilo kojoj brzini, ma kako velikoj, koja slabi; a kad se rastojanja povećavaju sila se smanjuje, dok potpuno ne nestane i tada prelazi u težnju približavanja ili privlačnu (atraktivnu) silu koja se najpre povećava a zatim opada; ponovo zatim opet prelazi u odbojnu silu i to više puta na malim rastojanjima, dok najzad na većim rastojanjima ne pređe u silu obrnuto proporcionalnu kvadratu rastojanja, prema stalnom zakonu ordinata neke neprekidne i jednostavne krive koja u samom početku apscisa, koje se odnose na rastojanja, ima asimptotu paralelnu sa samim ordinatama, a zatim u mnogo tačaka seče osu savijena ovde i onde, i nazjad sa strane ose, suprotne prvom asimptotskom kraku, ima drugi asimptotski krak, jer je asimptota sama osa, a po obliku kraka približava se najviše obliku kraka hiperbole, koja ima ordinate obrnuto proporcionalne kvadratima rastojanja. Otuda razabiramo da se materija sastoji od sasvim nedeljivih tačaka koje su između sebe udaljene nekim konačnim rastojanjem, a čvrstinu i koheziju tumačimo po rastojanju granice između odbijanja na manjem rastojanju i privlačenja na većem rastojanju; iz toga razloga nipošto ne priznajemo čvrstinu i protežnost koja bi matematički bila neprekidna.[133]

160. Ovo je glavno u našoj teoriji: evo njene dedukcije iz zakona kontinuiteta. Zamislimo dva (pokretna) tela jedno za drugim: prvo od njih neka ima šest stepena brzine, a drugo dvanaest. Kad ovo drugo telo dostigne prvo, trebalo bi, ako bi ova tela bila sasvim čvrsta, u istom trenutku, u kome se desi dodir, da se skokovito promeni brzina ili jednog ili, još pre, oba tela. To je sasvim jasno, ako tela ne mogu prodreti jedno u drugo, kao što stvarno ne mogu, na osnovu br. 134, jer bi se drugo telo kretalo preko prvog i došlo na njegovo mesto, ako bi produžilo da se kreće većom brzinom za bilo koje kratko vreme. To svi zaista priznaju ali se teškoće javljaju dvostruko. Neki dopuštaju i mogućnost da su tela *čvrsta*; tako je i Njutn dopustio da to budu bar prvi elementi bilo koje materije; on je hteo da ona budu savršeno čvrsta, kako bi njihovi delovi mogli neprekidnim dodirom da se spoje privlačenjem. Ovi naučnici misle da iz prirode ne treba isključiti skok, među njima naročito Mek Lorin — ne nalazi ništa apsurdno u samom skoku. Cela ova rasprava, međutim, oduzima snagu njihova mišljenja. Drugi, kao što su pre svega sve pristalice Lajbnicove, izbacuju iz prirode svaku vrstu čvrstih tela i zato su, kažu oni, sva tela meka ili elastična, da bi postepeno, naravno, delovi jedni u druge prodirali i dok se oblik menja, razlika u brzini se postepeno gubi prema zakonu kontinuiteta.[134]

161. Ovaj odgovor, doduše, uklanja skok iz celokupne mase tela, a ne iz prednjih površi koje se dodiruju i na kojima se ispoljava sila neprobojnosti. Od takvog odgovora bi nas odvratilo u prvom redu to što bi, ako ne priznajemo u samim elastičnim telima nikakve ma koliko male deliće, koji bi bili sasvim čvrsti, trebalo priznati stvarno delenje materije u beskonačnost bez ikakve granice, tako da tu ne bi bile nikakve poslednje pregrade koje bi bile lišene praznine i oblika potrebnih za elastičnost; dovoljno je jasno kako bi to povlačilo za sobom mnoge tajne beskonačnosti, pa čak i besmislenosti, na osnovu svega što smo ranije rekli o beskonačnosti. Ali, ako to ostavimo po strani, svako telo ma koliko imalo delića podeljenih u beskonačnost, svakako ima i granične površi, koje se, ako dođe do dodira, odmah dodiruju. Takve površi su realne nedeljive granice tela prema br. 16, a za površi se ne može reći da mogu imati neku čvrstu beskrajno tanku koru, jer ne postoje ni beskrajno mali kvantiteti određeni u sebi samima, što smo dokazali u br. 80; a ako bi i postojali, njihovi unutrašnji delovi se ne bi mogli uopšte odnositi na krajnju granicu, pa prema tome ni na površi. Stezanje tela koje menja oblik nije ništa drugo nego međusobno približavanje krajnjih površi što smo dovoljno jasno pokazali u raspravi *O živim silama* dodavši i shemu, da bi smo prikazali način stezanja koji se sastoji u tome što je postojeća brzina površi, koja prethodi, manja nego brzina površi koja sledi, pa tako dolazi do njihovog približavanja.[135]

162. Dalje bi one površi, kod kojih bi došlo do dodira, morale skokom da menjaju brzinu. Jer ako, bi se prednja površ drugog tela za neko deljivo vreme izjednačila sa zadnjom površi prvog tela, kasnije nego što bude iščezla njihovo čitavo rastojanje, nastupiće neki trenutak u kome će druga imati 11 stepeni brzine, a prva još uvek manje od 11, recimo 7, i tako bi za sve to vreme površ drugog tela imala veću brzinu, nego površ prvog, pa bi stoga prešla i više prostora, što bi dovelo do kompenetracije nekih delića tela.[136]

163. Jasno je, dakle, da se skok ne može izbeći u samim površima bez neprobojnosti, ako se sa takvom razlikom u brzini dolazi do dodira i zato moraju, pre nego što dođe do dodira, da se malo po malo preko stupnjeva sasvim izmene te brzine tela: jedna usporavanjem, a druga ubrzavanjem. Stoga treba da postoji uzrok, pa makar kakav on bio, koji dovodi do usporavanja i do ubrzavanja i, pošto on menja stanje tela s obzirom na kretanje i mirovanje, moraćemo ga nazvati silom; a pošto teži da jedno telo odvoji od drugog, moraćemo ga nazvati repulzivnom silom; pod tim imenom treba da se shvati težnja koju će imati bilo koji delić materije, kad treba da se udalji od bilo kog delića, dok je primoran da mu se približi i to pre dodira. Ta težnja, međutim, bez delovanja na rastojanju i bez ikakvog podstreka, moći će da postoji ili u samoj prirodi materije koja traži takvo uzmicanje pod uslovom onog određenog rastojanja od druge materije, ili po slobodnom zakonu božjem koji je to uzmicanje utvrdio na tom rastojanju. Na oba ova načina podjednako dobro može da se objasni atraktivna sila na većim rastojanjima koja zavisi od samih rastojanja bez ikakvog delovanja na rastojanje i bez ikakvog podstreka. Ideja o takvoj određenosti je vrlo distinktna i veoma jasna. Mi se pak čudimo što se neki ljudi teško odlučuju da priznaju takvu određenost koja kao uslov uzima određeno rastojanje, kad svi oni dopuštaju sličnu određenost upravo u menjanju stanja tamo gde nema nikakvog rastojanja, a ona je nastala i iz neprobojnosti za koju misle da deluje u neposrednom dodiru. Zar je lakše shvatiti, ako ostavimo na stranu sve predrasude, određenost koja potiče ili od prirode materije ili od slobodne božje volje, uzimajući radije kao uslov rastojanje nula, nego bilo koje drugo određeno rastojanje?[137]

164. Zatim se ta repulzivna sila mora na beskrajno smanjenim rastojanjima povećavati u beskonačnost tako, da bude u stanju da uništi bilo koju veliku brzinu. Kad bi u jednom slučaju, kao u ovom iznetom, nestala razlika brzina pri samom dodiru, gde bi, u nekom drugom slučaju, drugo telo imalo veću brzinu, moralo bi doći do dodira pre nego što bi nestala celokupna razlika brzina; jer vidimo da sve sile za kraće vreme proizvode manju brzinu ili je uništavaju, a većoj razlici brzina odgovaralo bi kraće vreme sve do dodira. Zato da (u potonjem slučaju) ne bi pri samom dodiru postojala razlika brzina, a ni skok, treba ranije da isčezne svaka razlika pre nego što dođe do neposrednog dodira, kao što se, naravno, ta razlika potpuno gubi preko repulzivne sile koja je ranije delovala u prilaženju. Pošto se isto obrazloženje odnosi i na bilo koju i ma kako veliku razliku brzina, jasno je da repulzivna sila mora biti takva, da tela nikad ne dolaze u neposredni dodir i da bude jednaka brzini koja treba da isčezne ma kako velika bila, i to tako da, kad su rastojanja smanjena u beskonačnost, poraste iznad svih granica u beskonačnost i da poraste tako, da joj proporcionalna prava (duž) povučena na pravu (duž) koja označava rastojanja, opiše beskonačnu površinu (jer se u mehanici svakako dokazuje da je tom površinom proporcionalan kvadrat brzine koja nastaje ili koja nestaje); za beskonačnost te površine se traži, da sila ne opada manje nego u običnom odnosu sa rastojanjem. Tom odnosu, naime, odgovara konusna hiperbola koja među asimptotama ima beskonačnu površinu, a u čitavoj porodici hiperbola sve one sa ordinatama koje manje rastu, imaju konačnu površinu; one sa ordinatama koje više rastu, imaju isto tako beskonačnu površinu, beskonačno puta veću.[138]

165. Odavde proizlazi, da se materija sastoji od sasvim nedeljivih i neprotežnih tačaka koje su između sebe uvek rastavljene nekim intervalom. Jer takva repulzivna sila, pošto se ne prenosi na naša čula, niti zavisi od prirode sastavnih delova i celine, mora se prema br. 135. pripisati svim delićima materije. Otuda proizlazi, da se nijedan deo materije ne sastoji iz drugih delića materije koji se dodiruju, jer bi se oni svakako morali, zbog repulzivne sile povećane u beskonačnost, smesta međusobno odvojiti. I zato treba, da svi prvi (osnovni) delići materije budu jednostavni, prosti, pa prema tome nedeljivi i na međusobnom rastojanju, a pošto ne mogu da imaju onu virtualnu protežnost, prema broju 26., to će tačke biti sasvim nedeljive i bez protežnosti.[139]

166. Pošto na većim rastojanjima postoji određenost (težnja) da se tela međusobno približavaju, što je poznato prema opštoj gravitaciji, koju je otkrio Njutn, a koja se prostire u beskonačnost, obrnuto proporcionalno kvadratu rastojanja i iz same kohezije tela, jer prednjem privučenom delu sledi, naravno, zadnji deo; jasno je da repulzivna sila raste u beskonačnost, kad se rastojanja smanjuju u beskonačnost i opada, ako se ona povećaju; opada pak svuda tako, da nestaje, pa zatim promenivši smer, kao što smo često viđali da se dešava sa ordinatama krivih u br. 112. prelazi u atraktivnu silu, gde će morati da postoji neka granica između repulzije i atrakcije; ako se na (određenom) rastojanju od te granice postave dve tačke materije, one će mirovati, jer ih ne privlači i ne odbija nikakva sila; ako se to rastojanje bilo kako smanji, pošto već deluje repulzivna sila, tačke će pokušati da se odvoje jedna od druge; ako se rastojanje poveća, a isto tako već deluje atraktivna sila, tačke će pokušati da priđu jedna drugoj. Zbog toga će se desiti, da na tom određenom rastojanju (tačke) pokušavaju da zadrže to rastojanje; pošto su se jedna prema drugoj pokrenule, zadnja nastoji da ide napred, a pošto je prva povučena prema suprotnoj strani, nastoji da je sledi; ipak se one protive da se privuku jedna drugoj ili da se udalje jedna od druge; u tim pojavama sastoji se celokupan pojam kohezije i čvrstine koji možemo primiti preko čula; zato granice te vrste nazivamo *granicama kohezije*.[140]

167. Dalje, sliku takve granice koja se može primetiti, odnosno prelaze od repulzivne sile na manjim rastojanjima, na atraktivnu silu na većim rastojanjima, imamo u elastičnim makazama kojima zimi hvatamo užareni ugalj: ako se njihovi vrhovi približe više nego što treba, oni su spremni da se uzajamno vrate; a, ako se udalje jedan od drugog više nego što treba, onda teže da se približe. Treba, međutim, priznati i granice druge vrste, u kojima se dešava prelaz od atrakcije ka repulziji na povećanim rastojanjima kao što vidimo da čestice vode prianjaju jedna uz drugu zbog toga što se nalaze na prvoj granici, odlaze zatim u paru, čiji delići najvećom silom nastoje da se udalje jedan od drugog, a kod njih upravo zbog repulzije na najmanjim rastojanjima dolazi atrakcija na malo većim i, još jednom, na drugim većim rastojanjima dolazi repulzija, i opet na najvećim, u kojima deluje međusobni uticaj, dolazi atrakcija. Šta više, poznato je da ima vrlo mnogo takvih prelaza i granica, jer mnoga tela posle ponovljene kompresije ostaju u odgovarajućem stanju mirovanja postigavši, dakako, nove tešnje granice kohezije. Ova druga pak vrsta granica razlikuje se veoma mnogo od one prve, kad obe tačke miruju na utvrđenom rastojanju od granice, ali, kada se ono makar koliko malo izmeni, primorane su da više odstupe od njega, jer, bez sumnje, kad se smanji rastojanje, nastaje atraktivna sila koja ga još više smanjuje, pa onda deluje repulzija koja će ga još više povećati.[141]

168. Dalje je i sam Njutn dopustio ovakva smenjivanja i prelaze sila pred kraj dela Optička pitanja, mada je on uz to želeo poslednju atrakciju ili dodir, na najmanjim rastojanjima, a ne repulziju. Same pak prelaze on objašnjava primerom pozitivnih i negativnih kvantiteta u algebri, jer smatra da u mehanici repulzivna sila treba da počinje kad atraktivna prestaje, kao u algebri: gde pozitivni kvantiteti prestaju, moraju počinjati negativni. Tu, međutim, treba primetiti ono što smo pokazali u našoj *Algebri* u drugoj svesci *Elemenata*, a što proizilazi iz onoga što smo rekli u br. 112: nije istina samim tim što neki pozitivni kvantitet prestaje da postoji, da mora preći u negativan, i obratno. Jer, ponekad se kvantitet, kad dođe do nule, vraća i natrag i ne prelazi preko nje. Postoji i opšte pravilo u onom što smo izneli u našoj *Algebri*, iz kojeg se može saznati, da li sam kvantitet mora da prođe kroz nulu i da li odande treba da se vrati: Preći će, svakako, ako dođe do nule i ako njegova veličina opada u odnosu koji je tačno onakav, ili njemu beskrajno blizak, koji ima neka neparna potencija rastojanja od same nule; vratiće se, ako njegova veličina opada u odnosu koji ima neka parna potencija. Jer, ako se rastojanje od nule menja odlazeći s one strane same nule, menjaju se i same njegove neparne potencije iz pozitivnih u negativne, odnosno obratno, a parne ostaju. Zato se to mora desiti i sa algebarskom formulom, odnosno sa bilo kojim kvantitetom koji ima taj odnos, što se vrlo savesno čuva u geometriji, naime, da kriva linija, preneta na osu, mora da je seče i da pređe preko nje, ako se menja smer ordinata, ili da je, ako je zadržan smer, dodirne i da se vrati, kao što će tada same ordinate biti tačno tako ili beskrajno blizu, kao kod bilo koje ili neparne ili parne potencije rastojanja od one tačke u kojoj dospevaju do nule i nestaju. [142]

169. Odatle sledi, da sila, koja je ovako prošla kroz nulu i već se pretvorila u atraktivnu, pa ponovo u repulzivnu silu, nije neka mnogostruka sila kojoj je potrebno više uzroka, kao kad bi bila samo atraktivna. Njen zakon će biti veoma jednostavan, bilo da je ona uvek negativna, bilo da iz pozitivne prelazi u negativnu i, ako je takva, sama će njena priroda zahtevati prelaze da negde blizu mesta u kojima iščezava, više sledi tok neparne nego parne potencije. To se može izraziti i vrlo jednostavnom algebarskom formulom čija bi promenljiva vrednost rasla u beskonačnost i bila negativna, ako se smanji vrednost koja se odnosi na rastojanje; kad se ona poveća, prelazi iz negativne u pozitivnu vrednost i opet, iz pozitivne u negativnu, dok najzad ne izraste dovoljno i bude uvek pozitivna, i dok se ne približi kolikogod može odnosu obrnuto proporcionalnom kvadratu rastojanja. Stoga će se to moći izraziti i pomoću jednostavne algebarske krive koja u početku ordinata ima asimptotu paralelnu sa ordinatama, što sa te strane rastu u beskonačnost a sa suprotne opadaju, dok sama kriva seče osu i ponovo je preseca bilo koliko puta i u bilo kojim tačkama uzetim po volji; ona se završava, međutim, beskrajnim krakom koji za asimptotu ima samu osu i koji se prostire sa jedne i sa druge njene strane približavajući se koliko mu drago obliku hiperboličkog kraka, čije su ordinate obrnuto pronorcionalne kvadratu rastojanja. To je onaj oblik krive kojom mi izražavamo našu teoriju sila. I kao što takva kriva može biti vrlo prosta sama po sebi i imati kontinuiranu i stalnu prirodu, tako i zakon sila neće biti složen, već jedan jedini i zavisiće ili od same pirode tačaka materije, ili od slobodne volje božanskoga tvorca.[143]

170. Čudnovato je, zaista, kako taj zakon, iako je jedan jedini, vodi objašnjenju svih opštih i pojedinačnih osobina tela. Ona prva asimptotska grana objašnjava neprobojnost, a poslednja — gravitaciju; međugranice objašnjavaju razne vrste kohezija i razliku između elastičnih, mekih, čvrstih i tečnih tela i druge slične pojave; oni mnogobrojni zavojci objašnjavaju fermentaciju, zapaljivost, isparavanje, emisiju svetlosti i sve što se odašilje iz stalne, celovite mase i druge bezbrojne pojave te vrste koje se izvanredno izvode. Tu se lako shvata, zašto postoji tolika sličnost svih tela u onome što se odnosi na neprobojnost aktivnu na najmanjim rastojanjma, i na gravitaciju aktivnu na većim rastojanjima, a opet je tolika razlika u ostalim stvarima od kojih zavise hemijske operacije, ishrana i sva druga vanredna i različita dela pirode. Ali o tome smo dovoljno govorili u onoj našoj raspravi *O svetlosti*, a mnogo vše o tome iznosi ovih dana, kao što čujemo, opat Karol Benvenuti.[144]

171. Dodaćemo ovde samo još ono što se odnosi na pojam prostora, koji po našem shvatanju matematički isključuje iz tela stvarnu neprekidnu protežnost. Mi priznajemo, osim stvarnih tačaka materije, i stvarne načine njihova postojanja, zbog kojih one treba da budu tamo gde su, što svakako moraju priznati oni koji mesto stavljaju u red koegzistentnih stvari ili priznaju stvaran prostor, da ne bi ono što postoji, kolikogod puta postojalo, imalo isti red ili bilo na istom delu prostora. Oni sami načini za nas su stvarna i stalna mesta tačaka koje stvaraju, tamo gde postoje, stvarni odnos rastojanja između sebe i samih tačaka materije na koje se odnose. Mogućnost njihova postojanja, koju smo shvatili kao nešto neodređeno, za nas je, doduše, imaginaran, neprekidan i beskonačan prostor, jer, kad ne postoji nijedna moguća tačka mesta tako bliska drugoj, da ne bi neka druga mogla biti bliža ili udaljenija među mogućim (tačkama) neodređenim i saznatim, ne postoji nikakav prekid, nikakva granica koja je uvek prisutna kod postojećih tačaka.[145]

172. Dalje, pošto ovi stvarni načini postojanja uvode u slučaju kompenetracije stvaran odnos rastojanja, koji bi se našao za neke od ovih različitih načina postojanja, oni obrazuju stvarnu ne kontinuiranu, već diskretnu protežnost u čemu nema ničeg besmislenog; jer ono što je neprekidno protežno, ne može biti sačinjeno od neprotežnog, a niti diskretno u iznetom smislu, po čemu je sasvim očigledno, da će pojave protežnosti koje smo ranije nagovestili, biti iste onakve kakve ih mi čulima saznajemo.

173. Neki se boje, da u našoj Teoriji ne postoji nikakva razlika između naših tačaka i duhova koji će, ako im se pripišu iste sile, formirati protežnu masu u našem smislu. Ali, mi ipak imamo dve svakako poznate razlike između materije i duhova. Smatra se da je materija lišena snage saznavanja, ali da ima neprobojnost i protežnost; duhovi se odlikuju snagom saznanja, a lišeni su neprobojnosti i protežnosti. Oni su lišeni ovih osobina, jer su lišeni i samih sila. Kad bi i imali iste sile, razlikovali bi se ipak od tačaka materije sposobnošću saznanja, ali bi imali neprobojnost i formirali protežnu masu, a da li bi se, u tom slučaju, te osobine još uvek mogle nazivati duhovnim supstancijama, bio bi spor samo oko imena.

174. Ostalo bi još mnogo drugih stvari, ali nećemo nipošto da odbacimo ono, na što smo se obavezali u broju 35; po našem mišljenju u prirodi ne može postojati ni mirovanje tačaka, ni vraćanje na isto mesto, ni pri bližavanje mestu na kome je bila ili postoji neka druga tačka, ili spajanje jedne tačke prostora sa neprekidnim nizom trenutaka vremena, ili spajanje sa momentima među sobom odvojenim za istu ili za dve tačke materije. Prvo je jasno iz toga što se silama, koje se odnose na neizmerna rastojanja, za pokret bilo koje tačke moraju menjati sile svih tačaka, tako da budu u neprestanom kretanju; obe stvari se lako dokazuju time, što je beskonačan broj tačaka prostora na bilo kojoj pravoj i broj linija u bilo kojoj ravni i broj ravni u celokupnom prostoru; konačan je pak broj tačaka materije, broj momenata iste vrste i broj tačaka na bilo kojoj pravoj; beskrajna je neverovatnost trećeg reda za svaki trenutak za određeno približavanje, bilo koje tačke materije, bilo kojoj tački mesta na kojem se ona nekad nalazila, ili na kojem je bila neka tačka materije, ili se tada nalazi; beskrajna je pak neverovatnost drugoga reda za sve trenutke koji su neodređeno uzeti. Iz ovoga je jasno u čemu je bila potreba za dokazom u onom broju. Ali, već treba spustiti jedra i zaustaviti se.[146]

NAUČNI I ISTORIJSKI KOMENTAR

1) Bošković je u raspravi *O živim silama* (De viribus vivis ... Romae, 1745) izneo svoje poglede na problem „žive sile“ koji je Leibniz uveo u mehaniku 1686. godine, a povodom kojega su se razvile naučne prepirke u XVII i u prvoj polovini XVIII stoleća. U toj raspravi Bošković je prvi put objavio osnove svoje teorije atraktivno-repulzivnih sila. Ista rasprava je preštampana 1747. godine u publikaciji Bolonjske akademije (De Bononiensi scientiarum et artium Instituto atque Academia Commentarii, T. II, par. III). O ovome videti: Željko Marković, *Ruđe Bošković*, T. 1, JAZU, Zagreb, 1968, str. 177—187; Pierre Costabel, *Le De Viribus vivis de R. Boscović ou de la vertu des querelles de mots*, Archives internationales d'Histoire des Sciences, No 54—55, Paris, 1961, str. 3—12.

Raspravu *O svetlosti* Bošković je objavio u dva dela (Dissertationis De lumine pars prima... Romae, 1748 i Dissertationis De lumine pars secunda... Romae, 1748). U prvom delu izneo je neke glavne osobine svetlosti, a naročito one koje su u vezi sa njenim prostiranjem; u drugom delu izlaže „mehaničke uzroke“ osobina svetlosti na osnovu svoje teorije sila, već skicirane u raspravi *O živim silama*, koju dalje razvija u ovoj raspravi i sa gledišta te teorije raspravlja probleme refleksije, refrakcije, difrakcije i interferencije svetlosti. O ovoj raspravi videti: Željko Marković, ibidem str. 225—235.

Obe pomenute Boškovićeve rasprave su od osnovnog značaja kada je reč o genezi njegove teorije prirodne filozofije koja je dobila definitivan oblik u njegovom glavnom delu *Teorija prirodne filozofije svedena na jedan jedini zakon sila što postoje u prirodi*, objavljenom prvi put u Beču 1758. godine (Philosophiae naturalis theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentium... Viennae, 1758). U Zagrebu je izišlo dvojezično izdanje, na latinskom s prevodom na naš jezik (Ruđer Bošković, *Teorija prirodne filozofije*, Sveučilišna naklada Liber. Zagreb 1974. Priredio i pogovor napisao Vladimir Filipović. S latinskog preveo Jakov Stipišić. Stručnu redakciju prevoda izvršio Žarko Dadić).

U Boškovićevoj teoriji materije, odnosno u njegovoj teoriji sila od bitnog su značaja prelaz od repulzivne na atraktivnu silu — *limes cohaesionis* — i prelaz od atraktivne na repulzivnu silu — *limes non-cohaesionis*. Pomoću ovih limesa Bošković tumači pojavu *kohezije* i *čvrstine* tela, kao i pojavu *fermentacije* kada je čestica materije prisiljena da oscilira između određenih međa usled dejstva repulzivne i atraktivne sile. Otuda je jasno zašto ovde spominje „principe čvrstine i principe fermentacije".

Videti: Željko Marković ibidem str. 425—428.

Za Boškovićevu teoriju prirodne filozofije videti takođe: Kosta T. Stojanović, *Atomistika. Jedan deo iz filozofije Ruđera Boškovića upoređen sa sličnim gledištima filozofskim naročito sa modernim pogledima na prirodu materije*, Niš 1891; *Radovi Ruđera Boškovića na polju pesničkom, filosofskom i egzaktnim naukama*, Beograd 1903; Dr Svetomir Ristić, *Osnovi Boškovićeve dinamičke atomistike*, Beograd 1912; *Der Satz vom Grunde und die Gründung der punktuellen dynamischen Atomistik*, Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie und Sociologie, 1914; Dušan Nedeljković, *La philosophie naturelle et relativiste de R. J. Boscovich*, Paris, 1922.

2) Leibniz (1646—1716) je formulisao i objavio svoj *Princip (zakon) kontinuiteta* 1687. godine: „Wenn in der Reihe der gegebenen Grőssen zwei Fälle sich stetig einandeı nähern, so dass schliesslich der eine in den anderen übergeht, so muss notwendig in der entsprechenden Reihe der abgeleiteten oder abhängigen Grössen, die gesucht werden dasselbe eintreten" („Ako se u nizu datih veličina dva slučaja (dve pojave) neprekidno jedan (jedna) drugome (drugoj) približavaju, tako da najzad jedan (jedna) u drugi (u drugu) prelazi, onda se nužno mora isto desiti i u odgovarajućem nizu izvedenih ili zavisnih veličina koje se traže"). Pri tome je istakao da taj princip zavisi od opštijeg principa: „Einer geregelten Ordnung im Gegebenen entspricht eine geregelte Ordung im Gesuchten" („Datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata" — „Utvrđenom redu u onome što je dato (poznato) odgovara utvrđeni red u onom što se traži (što je nenoznato)").

U jednom svom pismu Pierre Varignonu (1654—1722), piscu dela *Eclaircissements sur l'Analyse des infiniment petits* i jednom od prvih istaknutijih pristalica Leibniz-Newtonove infinitezimalne analize, Leibniz na francuskom jeziku raspravlja o *Principu kontinuiteta* i veli: „Selon moi tout est lié dans l'Univers, en vertu de raisons de Métaphysique de manière que *le présent est toujours gros de l'avenir, et qu'aucun état donné n'est explicable naturellement, qu'au moyen de celui, dont il a été précédé immédiatement.* Si on le nie, le monde aura des *hiatus*, qui renversent le grand Principe de la Raison suffisante, et qui obligeront de recourir aux miracles, ou, au pur hazard dans l'explication des Phénomènes" („Smatram da je u Vasioni sve povezano usled metafizičkih razloga tako, da sadašnjost uvek krije u sebi budućnost, i svako dato stanje može se na prirodan način objasniti pomoću stanja koje mu je neposredno prethodilo. Ako se to porekne svet će imati prekide (praznine, provalije) koji (koje) ruše veliki Princip dovoljnog razloga i koji (koje) primoravaju da se u tumačenju fenomena obraćamo čudima ili slučaju"). I dalje: „Or puisque la loi de la Continuité exige, que, *quand les determinations essentielles d'un Être se rapprochent de celles d'un autre, qu'aussi en conséquence toutes les propriétés du premier doivent s'approcher graduellement de celles du dernier* il est nécessaire, que tous les ordres des Êtres naturels ne forment qu'une seule chaîne..." („Dakle, pošto Zakon kontinuiteta zahteva, da se, kad se bitna određenja jednog Bića približuju određenjima drugog, sledstveno tome sve osobine prvog Bića moraju se postepeno približiti osobinama drugog, pa je neophodno da sve vrste prirodnih Bića obrazuju jedan jedini lanac..."). O Leibnizovom *Principu kontinuiteta* videti: G. W. Leibniz, Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie, *Über das Kontinuitätsprinzip*, Bd I, str. 84—93 i Bd II, str. 74—78, 556—559, Leipzig, 1903.

Princip kontinuiteta, kao metodološki princip, duboko je uticao na razvitak naučnih istraživanja prirode. Shvaćen kao princip sveopšte povezanosti pojava u prirodi i kao princip razvitka bio je krupan korak na putu *dijalektičkog* shvatanja prirode. On je snažno uticao na Leibnizovu matematiku i mehaniku (na primer: teorija beskonačno malih veličina, rešenje problema tangente, tretiranje kretanja tela pri sudaru) i treba posebno naglasiti da je on u neposrednoj vezi sa Leibnizovom teorijom harmonije koja isključuje skokove i nepremostive suprotnosti. Bošković je prihvatio načelo *Nihil in Natura per saltum fieri* (Ništa se u prirodi ne dešava skokom), kojim je pregnantno izražena suština *Principa kontinuiteta.* U opovrgavanju nekih mehaničkih shvatanja Descartesa i njegovih pristalica, naročito shvatanja da se u slučaju sudara dva tela promena njihovog kretanja vrši skokom, Leibniz i njegove pristalice upotrebili su kao glavno oruđe *Princip kontinuiteta.* Videti: Željko Marković, ibidem, str. 177—187, 271—276, 413—455; Ludovico Geymonat *Storia del pensiero filosofico e scientifico,* Vol. 2, Milano, 1970, str. 590—622.

Pierre Bayle (1647—1706), francuski mislilac i autor niza filozofskih rasprava, pokrenuo je 1684. godine mesečni časopis *Nouvelles de la Republique des lettres*, u kojem je Leinbiz sarađivao. U njemu je prvi put pomenuo svoj *Zakon kontinuiteta.* Najpoznatije mu je delo *Dictionaire historique et critique*, povodom kojeg je Leibniz napisao polemičku raspravu *Erwiderung auf die Betrachtungen über das System der prästabilierten Harmonie in der zweiten Auflage des Bayleschen „Dictionaire historique et critique"*. Videti: G. W. Leibniz, ibidem, Bd. II, str. 382—409; Ludovico Geymonat, ibidem, Vol. 3, str. 31—40.

Châtelet Gabrielle Emilie (1706—1749), markiza i prijateljica Voltairea, u svom vremenu poznata kao fizičarka, imala je fizički kabinet u Cireyu, a u saradnji sa matematičarem Clairautom, Boškovićevim dobrim poznanikom i prijateljem, prevela je na francuski jezik Newtonovo glavno delo *Principia mathematica philosophiae naturalis.* Za taj prevod predgovor je napisao Voltaire. Bila je pristalica Leibnizovih mehaničkih shvatanja. U svom delu *Institutions physiques*, koje je predstavljalo neku vrstu udžbenika fizike, sabrala je mišljenja Leibnizovih pristalica o *Zakonu kontinuiteta* i njegovoj primeni u opovrgavanju Descartsovih zakona o sudaru tela.

U trećem tomu svojih *Elemenata sveukupne matematike*, Bošković je metodom sintetičke geometrije izložlo *Elemente konusnih preseka*, odnosno svoju teoriju konusnih preseka, polazeći od poznatog stava Pappusa (antičkog geometričara iz trećeg stoleća nove ere) da je konusni presek geometrijsko mesto tačaka u ravni koje imaju osobinu da im rastojanje od date tačke u ravni (žiže) prema odstojanju iste tačke od date prave (direktrise) stoji u stalnoj razmeri *(Elementorum Universae Matheseos...* Tomus I, II, III. Romae 1754). Na kraju ovog toma nalazi se *Rasprava o transformaciji geometrijskih mesta (Tomus III. Continens sectionum Conicarum Elementa nova quadam methodo concinata et Dissertationem de transformatione Locorum Geometricorum ubi de continuitatis lege, ac de quibusdam Infiniti Mysteriis)*, u kojoj se posebno govori o zakonu kontinuiteta u geometriji i o nekim „misterijama" beskonačnog. Na ovu raspravu Bošković se često poziva u svojim tumačenjima zakona kontinuiteta i u tom pogledu je vrlo značajna, posebno kada su ta tumačenja vezana za pojam beskonačnog u geometriji. Boškovićeva teorija konusnih preseka zapažena je i istaknuta svojom originalnošću i svojom metodom. Videti: Željko Marković, ibidem, T. 1, str. 281—288; Juraj Majcen, *Matematički rad Boškovićev II. dio, Sectionum conicarum Elementa (Boškovićeva teorija krivulja 2 reda)*, Rad knj. 225 Zagreb, 1921.

3) Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698—1759), francuski matematičar, fizičar i filozof, član Francuske i predsednik Pruske akademije nauka, mislilac vrlo širokog naučnog i filozofskog interesovanja, autor niza značajnih dela iz mehanike, geodezije, fizike i biologije, prvi je među francuskim naučnicima pristupio kritičkom upoređivanju Descartesovog i Newtonovog naučno-filozofskog sistema *(Discours sur la figure des astres avec une exposition des Systèmes de Descartes et de Newton*, 1732). Bio je na čelu naučne ekspedicije koja je 1736. godine u Laponiji premeravala dužinu meridijanskog stepena. U toj ekspediciji učestvovao je i Alexis Clairaut (1713—1765), astronom i matematičar, sa kojim će se Bošković kasnije, kada se bude našao u Parizu, upoznati i sprijateljiti. Svoja opažanja u vezi sa pomenutim merenjima Maupertuis je objavio u delu *La Figure de la Terre déterminée par les observations au cercle polaire* (1738), koje je Bošković vrlo pažljivo proučio, jer se, kao što je dobro poznato, i sam bavio problemima merenja meridijanskih stepena i određivanja pravog oblika Zemlje. Bošković i Maupertuis nisu se slagali u pogledu nekih zaključaka koji su se mogli izvesti iz meridijanskih stepena, kada je bilo u pitanju određivanje pravog oblika Zemlje na osnovu tih merenja. Inspirisan poznatim Fermatovim (1601—1665) principom minimuma i polazeći od Descartesovih i Leibnizovih kritika tog principa, Maupertuis je formulisao i razradio princip minimalnog dejstva: „Kada se u prirodi dešava neka promena, onda je količina dejstva (m.v.s) te promene najmanja moguća" *(Accord de différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles*, 1744; *Des lois du mouvement et du repos*, 1747). Na osnovu tog principa tumačio je mnoge zakone mehanike, između ostalih, i zakon sudara tela. Princip najmanjeg dejstva izazvao je vrlo živu naučno-filozofsku polemiku u kojoj su učestvovali istaknuti naučnici i filozofi kao Euler (1707—1783), Voltaire (1694—1778) i Samuel Koenig (1712—1757). Maupertuis je postavio jednu od prvih teorija

transformacije vrsta, svodeći je na slučajne varijacije organskih molekula. U svom delu *Essay de Cosmologie* (1732) izneo je primedbe protiv *Zakona kontinuiteta*. O Maupertuisu videti: Ludovico Geymonat, ibidem, Vol. III str. 209—210, 222—224, 281—283; Željko Marković, ibidem, T. I, str. 85, 87, 103, 120, 271, 342, 346, 351, 421.

4) Aristotel ističe da se priroda neprekidnog kvantiteta sastoji u tome što njegovi delovi koji se naposredno nastavljaju jedan na drugi imaju zajedničku *među*. Po njemu su tipični primeri kontinuiranog kvantiteta linija, površ, telo, prostor i vreme, a tipični primer diskretnog (prekidnog) kvantiteta je skup brojeva, pri čemu se misli na skup prirodnih brojeva, saglasno antičkom pojmu broja koji je obuhvatio samo prirodan broj (kao mnoštvo jedinica). Videti: Dr Željko Marković, *Matematika u Platona i Aristotela*, Rad, knj. 261 (81), JAZU, Zagreb, 1938, str. 116—130; Aristotel, *Organon*, Kategorije, Glava šesta (Kvantitet), sa starogrčkog prevela Dr Ksenija Atanasijević, Kultura, Beograd, 1965, str. 15—19.

5) Ovde i dalje, u analognim situacijama, za *terminus* na srpskohrvatskom jeziku uzeli smo reč *međa*, a za *limes* reč *granica*, iako se pojmovno ne razlikuju, jer Bošković kaže: „In quavis continua quantitate distingui debet id, quod est terminus, seu limes, ab eo cujus est terminus." („U svakom neprekidnom kvantitetu treba da se razlikuje ono što je međa, ili granica, od onog čija je međa").

6) Ovde treba istaći da se Bošković u svojim shvatanjima kontinuiranog kvantiteta inspirisao Aristotelom, kada tvrdi da kontinuirani kvantitet leži između onih delova kome su ti delovi *međe* ili *granice* i da ne može jedan biti kraj prethodnog, a drugi početak narednog kontinuiranog kvantiteta *„jer po pirodi kontinuuma njihova međa mora biti zajednička"* (na primer: proizvoljna tačka M prave p je *zajednička međa* polupravih p_1 i p_2 na koje je, tačkom M, prava p podeljena). To je upravo ranije, u šestom paragrafu ove rasprave, na koji se ovde poziva, on podvukao kao Aristotelov stav o prirodi kontinuiranog kvantiteta.

Očigledno je da Bošković pripisuje Zenonu Elejskom, istaknutom predstavniku poznate filozofske škole Elejaca (Ksenofon, Parmenid, Zenon, Meliso — koja je u grčkoj filozofiji došla do punog izražaja u toku petog stoleća pre nove ere sa svojim učenjem o jednom jedinom i nepromenljivom biću i sa svojim antipluralističkim shvatanjima), mišljenje po kome postoji *protežni kontinuum sastavljen od neprotežnih i nedeljivih tačaka*, podvlačeći istovremeno da je neprotežnost i nedeljivost tačke „najstariji dokaz" kojim se odbacuje takvo Zenonovo mišljenje. Međutim, imajući u vidu ovaj Boškovićev stav, potrebno je primetiti da u naučnoj i filozofskoj literaturi postoje kontroverzna stanovišta kada je reč o Zenonovim pogledima na kontinuirani kvantitet (linija, površ, telo, prostor, vreme). Niz istaknutih autora (na primer: Tannery, Enriques, Zeuthen, Hasse-Scholz, Mandolfo) u svojim analizama

Zenonovih pogleda na kontinuirani kvantitet dolazi do zaključka (eksplicitno ili implicitno) da je Zenon svojim poznatim aporijama (Dihotomija i Ahilej i kornjača) imao za cilj da pokaže *nespojivost kretanja sa Pitagorejskom monadološkom koncepcijom prostora* (prostor kao suma protežnih i nedeljivih tačaka — monada) i da dovede do absurda shvatanja po kojima je telo suma tačaka, vreme suma trenutaka i kretanje suma prostih prelaza sa tačke na tačku. Isti autori izvode dalje zaključke u pogledu uticaja takvih Zenonovih pogleda na formiranje infinitezimalnih metoda i pojmova u antičkoj matematici (naročito ako je reč o metodi ekshaustije). No, postoje i drugi istaknuti autori (na primer: S. Luria, B. L. van Waerden) koji u svojim analizama Zenonovih pogleda na kontinuirani kvantitet dolaze do drukčijih zaključaka (koji stoje u vezi sa Demokritovim atomizmom), pa čak i sasvim suprotnih od zaključaka gore pomenutih autora. Videti: H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Kopenhagen, 1896; F. Enriques, *La relatività del movimento nell'antica Grecia*, Periodico di matematiche Vol. 1, No 2, Bologna, 1921, str. 77—94; *La polemica eleatica per il concetto razionale della geometria*, Periodico di mathematiche Vol. 3,No 2, Bologna, 1923; *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna* V, X, Bologna, 1930—1932; *L'évolution des idées géometriques dans la pensée grecque*, Paris, 1927; P. Tannery, *Pour l'histoire de la science hell'ne*, Zenon d'Elée, Paris, 1930, str. 225—270; S. Luria, *Die Infinitesimaltheorie der antiken Atomisten*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik Bd. 2, Heft 2, 1932, str. 106—180; Helmut Hasse und Heinrich Scholz, *Die Grundlagenkrisis der Griechischen Mathematik*, Charlottenburg 2, 1928; R. Mandolfo, *L'infinito nel pensiero dei Greci*, Firenza, 1934; B. L. van der Waerden, *Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik*, Mathematische Annalen Bd. 117, Heft 2, Berlin, 1940, str. 141—161; L. Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, 1929, str. 153—156; G. Frontera, *Étude sur les arguments de Zénon d'Elée contre le mouvement*, Paris, 1891; B. Petronijević, *Istorijske i kritičke primedbe na prva dva Zenonova dokaza protiv kretanja*, SAN, Glas CLXXIV, Beograd, 1941; Dušan Nedeljković, *Ruđer Bošković u svome vremenu i danas*, Zenon Jelejski, Ruđer Bošković i dijalektika, Kultura, Beograd, 1961, str. 22—31; Ludovico Geymonat, ibidem, Vol. 1, str. 51—63.

7) Primetićemo da se ovde Bošković, na primeru pojma tačke odnosno nedeljivog i neprotežnog, a zatim na pojmu beskonačne deljivosti protežnog, dotiče gnoseološkog problema odnosa čulne percepcije i racionalnog poimanja, koji je od fundamentalnog značaja kada je u pitanju geneza pojmova u matematici putem apstrakcije.

8) Reč je o prvom tomu Boškovićevih *Elemenata sveukupne matematike* (videti našu treću belešku), u kojem izlaže osnove Euklidove planimetrije i stereometrije i osnove trigonometrije (ravne i sferne), a dotiče se i beskonačnog (beskonačne deljivosti, upotrebe beskonačno malih veličina i Cavalierijeve metode „nedeljivih“).

9) Prva Euklidova definicija: „Tačka je ono što nema delova" odnosno „Tačka je ono što nema protezanja". Videti: *Euklidovi Elementi*, Prva knjiga, SAN, Beograd, 1949, preveo i komentar dodao Anton Bilimović, str. 3, 48—50.

10) Da bi se jasnije shvatila ova Boškovićeva razmišljanja, podvući ćemo sledeće, što je u neposrednoj vezi sa njegovom teorijom prirodne filozofije.

Jedan od osnovnih zaključaka do kojih je Bošković došao u svojoj teoriji prirodne filozofije jeste da fizičko telo nije *kontinuum* nego *diskretum*, odnosno da fizičko protezanje nije *kontinuirano* nego *diskontinuirano*. Po toj teoriji materija se ne proteže neprekidno i sastavljana je od *nedeljivih* tačaka koje „postoje same po sebi" i ne obrazuju liniju, površ ili telo u geometrijskom smislu. Zato Bošković ne prihvata „mišljenje da u materiji postoji ikakva površ, linija ili čvrsto telo". On razlikuje *geometrijski* (imaginaran) prostor, koji je matematički neprekidan i beskonačno deljiv, od *fizičkog* (realnog) prostora koji je diskretan i nije „nešto što postoji bez tela i kretanja." Usvajanjem geometrijskog prostora ostaju na snazi, po Boškoviću, „svi geometrijski dokazi za sve ono što se odnosi na samu neprekidnu protežnost prostora."

11) Ako su, na primer, M i N dve tačke prave linije shvaćene kao *međe*, Bošković je ranije (paragraf 10) utvrdio da je među njima moguća samo jedna od relacija: $M = N$, $M \neq N$. Druga relacija implicira egzistenciju segmenta MN, za koji Bošković utvrđuje da se može *beskonačno* deliti samim tim što bi se *jednom* mogao podeliti na dva dela. Iz istog razloga svaki se dobijeni deo segmenta MN novom deonom tačkom deli na dva i tom postupku nema kraja. Ovim je Bošković na primeru linije, takoreći, eksplicitno postulirao *beskonačnu deljivost* protežnog kontinuuma. Videti: E. Stipanić, *O linearnom kontinuumu Ruđera Boškovića*, Matematički vesnik 4 (19), Sv. 3, Beograd, 1967, str. 277—292; *Kontinuitet linije kod Boškovića i Dedekinda*, Filozofija br. 3—4, Beograd 1961, str. 25—34; *Continuité de la ligne chez Bošković et Dedekind*, Actes du Symposium International R. J. Bošković 1961, Beograd, Zagreb, Ljubljana, 1962, str. 115—124; *Quelques vues mathématiques de Bošković sur le continu linéaire*, Atti del symposium internazionale celebrativo del 250 anniversario della nascità di R. G. Boscovich e del 200 anniversario della fondazione dell'osservatorio di Brera, Milano, 1963, str. 291—297.

12) Po Boškoviću geometrija pruža bezbrojne dokaze za beskonačnu deljivost protežnog kontinuuma. On to predočava nizom primera: razmerom nesamerljivih veličina, „koja nije podložna nikakvim brojevima" (čime je hteo podvući da je neizrazljiva u vidu razmere dva cela broja, drugim rečima da je iracionalan broj), kontigentnim uglom, asimptotama krivih, podelom date duži na određeni broj delova, odsecanjem određenog dela od date duži i trećom proporcionalom dveju zadatih veličina. Ovim primerima

Bošković svakako želi da ilustruje postojanje u geometriji određenih postupaka (kao algoritama) kojima se obezbeđuje *potencijalna ostvarljivost* beskonačnog delenja neprekidnog kvantiteta.

Ako su dve neprekidne veličine a i b nesamerljive, onda važi, kao što je dobro poznato, rekurentni obrazac (Euklidov algoritam)

$$r_{k-1} = r_k q_{k+1} + r_{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots; \quad r_0 = b, r_{-1} = a; \quad a > b),$$

gde su q_{k+1} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ celobrojni količnici i

$$r_{-1} > r_0 > r_1 > \ldots > r_{k-1} > r_k > \ldots; \qquad \lim_{k \to \infty} r_k = 0; \qquad a = \sum_{k=0}^{\infty} r_{2k} q_{2k+1}$$

Ovim je definisan jedan postupak beskonačnog delenja veličine $r_{k-1} = a$. Prema tome, kada se ma kojoj neprekidnoj veličini a korespondira jedna veličina $b < a$ sa kojom nije samerljiva, onda se veličina a može beskonačno deliti po Euklidovom algoritmu (na primer, ako je a dijagonala kvadrata, a b njegova stranica).

U vezi sa tangentom kružnice u neposrednoj je vezi pojam kontingentnog ili dodirnog ugla, odnosno oblast ravni između normale na prečnik kružnice na njegovom kraju i same kružnice (sl. 1). U ovom slučaju neka to bude oblast između ose x i kružnice OM_oO. Sistem sve većih kružnica $OM_0O, OM_1O, \ldots, OM_kO, \ldots$ definisan je u Descartesovoj ravni jednačinama

$$x^2 + y^2 - 2R_k y = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

gde su C_k (O, R_k) središta tih kružnica. Lako je videti da važi

$$(R_0 < R_1 < R_2 < \ldots < R_{k-1} < R_k < \ldots) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y_0 > y_1 > y_2 > \ldots > y_{k-1} > y_k > \ldots),$$

gde je

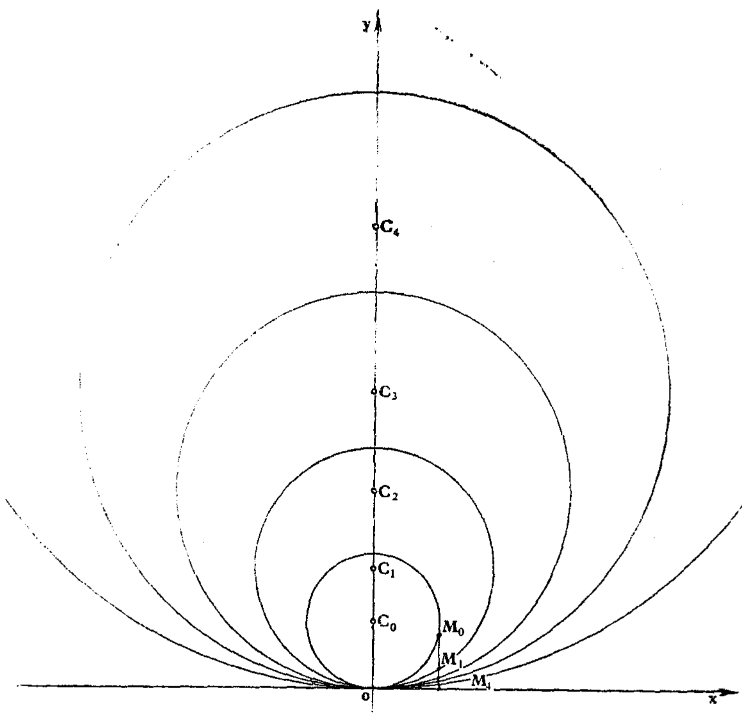
$$y_k = R_k - \sqrt{R_k^2 - x_0^2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots; |x_0| \leqslant R_o).$$

Ovim se analitički jasno potvrđuje da „kontigentni ugao neprekidno seku lukovi većih kružnica“, kako to Bošković formuliše. Tako je u stvari definisan jedan postupak beskonačnog delenja pomenute oblasti ravni.

Primetićemo da je pojam kontigentnog ugla bio predmet obimnih diskusija u XVI i XVII stoleću i da on ne zadovoljava dobro poznati Eudoks-Arhimedov postulat, pa se ne može smatrati veličinom. Videti: *Euklidovi Elementi*, Treća knjiga, SAN, Beograd, 1953, preveo i komentar dodao Anton Bilimović, str. 22—23, 46.

Da bi se shvatio smisao Boškovićevog pozivanja na asimptote krivih u vezi sa beskonačnom deljivošću neprekidnog kvantiteta, potrebno je potsetiti se na pojam *beskonačne grane* i na pojam *asimptote* krive.

Zamislimo krivu C kao grafik u Descartesovoj ravni xoy funkcije $y = f(x)$ i na toj krivoj tačku $M\ [x, f(x)]$. Kaže se da kriva C ima *beskonačnu granu*, ako bar jedna od koordinata tačke M teži beskonačnosti kada se tačka M neprekidno kreće po krivoj C (kada tačka M svojim kretanjem generiše krivu C). Određenim skupom međusobno paralelnih pravih definisan je pravac p (kao klasa ekvivalencije s obzirom na relaciju paralelnosti).



Sl. 1

Beskonačna grana krive C posmatra se u odnosu na ove prave. Neka je P ma koja od tih pravih i neka je N ortogonalna projekcija tačke M na pravu P. Ako dužina $m(MN)$ ima graničnu vrednost d, tj. ako je $\lim m\,(MN) = d$, kad se M beskonačno udaljuje, onda postoji prava a, među paralelnim pravama koje definišu pravac p, takva da rastojanje tačke M od prave a teži nuli, tj. $\lim\,(MN_a) = 0$, kada se M beskonačno udaljuje. Kaže se tada da je prava a *asimptota* krive C za odgovarajuću beskonačnu granu. Uopšte, kaže se da su krive C_1 i C_2 *asimptote* jedna prema drugoj, ako dužina $m\,(M_1 M_2)$ teži nuli, tj. $\lim m\,(M_1 M_2) = 0$, kada se tačke M_1 i M_2 beskonačno udaljuju (generišući svojim kretanjem krivu C_1 odnosno krivu C_2), gde je istovremeno M_1 presek krive C_1 i M_2 presek krive C_2 sa pravama fiksnog pravca p_0 (na primer, pravca ose y).

Jasno je da se od $m\ (MN_a)$ odnosno $m\ (M_1\ M_2)$ može uvek obrazovati beskonačni niz *monotono opadajućih* dužina sa graničnom vredošću nula, pa je tako definisan jedan postupak kojim se obezbeđuje *potencijalna ostvarljivost* beskonačne deobe izvesne početne duži MN_a odnosno $M_1\ M_2$, kao neprekidnog kvantiteta.

Dobro poznata geometrijska konstrukcija n-tog dela date duži (podela date duži na n jednakih delova), gde je n proizvoljan prirodan broj, očigledno se može smatrati kao jedan od postupaka kojima se *potencijalno* ostvaruje beskonačna deoba date duži. Podloga je ovom postupku u stavu koji se odnosi na odsecanje određenog dela od date duži. Taj stav je poseban slučaj stava koji tretira kako se data nepodeljena duž deli slično datoj podeljenoj duži. Videti: *Euklidovi Elementi*, Šesta knjiga, SAN, Beograd, 1955, preveo i komentar dodao Anton Bilimović, str. 19—20.

Ako je x prva i a druga data duž, onda je treća proporcionala y, za dve date duži, definisana proporcijom

$$x : a = a : y,$$

tj.

$$y = \frac{a^2}{x},$$

pa je tako sasvim jasno da će se „treća neprekidno proporcionalna (continue proportionalis) smanjivati koliko bude potrebno", ako se druga ne menja, a prva se proizvoljno uvećava, kako zamišlja Bošković. Kada se ovome da geometrijska interpretacija, vidi se da je reč o svojevrsnom postupku beskonačnog delenja duži. Videti: *Euklidovi Elementi*, ibidem, str. 20.

13) I ovde se, kao i ranije (vidi našu belešku 7), Bošković dotiče problema spoznaje kada je u pitanju odnos čulne percepcije i racionalnog poimanja, a u neposrednoj vezi sa beskonačnom deljivosti neprekidnog kvantiteta. Potrebna je „oštrija pamet i smeliji duh" da bi se čovek uzdigao i odbacio predrasude, držeći se jedino razuma i prirode stvari, ističe Bošković.

14) Bošković insistira na relativnosti pojmova „veliko" i „malo" (Magnum et parvum respectiva sunt) da bismo lakše ušli u pojmovne tajne beskonačne deljivosti neprekidnog kvantiteta, na čemu je već insistirala antička misao, na primer, Anaksagora: „U malome nema najmanjeg, već ima uvek manjeg, jer se biće ne može uništiti delenjem. Isto tako, u velikom ima uvek većeg i ono je u mnoštvu jednako malom i zato je svaka stvar istovremeno velika i mala." Videti: Paul Tannery, ibidem, Anaxagore de Glazomêne, str. 312 (15).

15) Palac je mala mera za dužinu i širinu koja odgovara širini ili ređe dužini odnosno debljini ručnog palca (Videti: Milan Vlajinac, *Rečnik naših starih mera — u toku vekova*, SANU, Posebna izdanja, knj. CDLXXII, Odelenje društvenih nauka, knj. 74, sv. IV, Beograd, 1974, str. 688—693). Bošković je ovde kao meru za dužinu upotrebio palac, svakako, po njegovoj širini.

16) Prst je jedinica mere za odmeravanje omanjih dužina, dubina i visina, pri čemu se najčešće misli na njegovu širinu kao jedinicu mere, a ima ponekad i značenje palca kao jedinice mere (Videti: Milan Vlajinac, ibid, str. 763—767).

17) Da bi dokaz beskonačne deljivosti neprekidnog kvantiteta učinio bližim *običnom* shvatanju (Verum ut et positivum argumentum divisibilitatis in infinitum communi captui accomodemus...), Bošković se na opisani način, u dvadesetdrugom i dvadesettrećem paragrafu, poslužio sa dva lenjira. Pri tome je sasvim tačno podvukao da se čitavo rasuđivanje matematički zasniva na stavovima: dve različite prave ne mogu imati zajednički odsečak (kao što, na primer, dve različite krive mogu imati zajedničku sečicu); u sličnim trouglovima homologne stranice su proporcionalne.

Ako se lenjiri predstave dužima AB i AC, gde je A „kraj" kojim se lenjri „dodiruju", a $BC = d$ „ma koji razmak" kojim se „pri vrhu odvajaju", onda se beskonačno delenje razmaka BC, kako ga Bošković zamišlja, odvija očigledno prema obrascu

$$\frac{d_k - d_{k-1}}{d - d_{k-1}} = \frac{1}{2} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots;\ d_0 = 0),$$

odnosno

$$d - d_k = \frac{d}{2^k} = r_k,$$

pa je

$$\lim_{k \to \infty} r_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} r_k = d$$

Uopšte, ako se delenje duži d definiše obrascem

$$\frac{d_k - d_{k-1}}{d - d_{k-1}} = \lambda(k) \qquad (k\ 1, 2, 3, \ldots;\ d_0 = 0),$$

odnosno

$$r_k = d - d_k = d \prod_{i=1}^{k} [1 - \lambda(i)],$$

gde se funkcija $\lambda\ (k)$ može nazvati *koeficijentom delenja* duži d, onda na osnovu poznatih stavova iz teorije beskonačnih proivoda važi:

Da bi $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$, *potrebno je i dovoljno da* $\sum\limits_{i=1}^{k} ln|1 - \lambda(i)| \to -\infty$ *kad* $k \to \infty$. *Pri tom je* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r_k = d$.

Bošković, dakle, sasvim pravilno, iako uopšteno, primećuje da je sva snaga beskonačne deljivosti „u tome što kad uzmeš ma kakav razmak" — ovde $BC = d$ — „možeš naći razmak i manji od njega" — ovde r_k — „a kad je to jednom dokazano, onda je neminovno da to teče u beskonačnost, kao što se to ranije dogodilo bisekcijom" — gde je očigledno $\lambda(i) = 1/2$.

Primetićemo najzad da su neprekidni kvantiteti sa kojima Bošković operiše arhimedovske veličine, pa njegova navedena konstatacija sledi iz Eudoks-Arhimedovog postulata.

18) Neka su A, B i C tri kolinearne tačke („...si concipiantur collocata tria puncta in directum...") i neka je B tačka na sredini duži AC. Ako je P neka tačka duži AC, između tačaka A i C, i Q tačka na sredini duži PC, tada je

$$BQ = AQ - AB = AP + PQ - AB,$$

odnosno

$$BQ = AP + \frac{1}{2} PC - AB = \frac{1}{2} AP,$$

tj. $BQ < AP$, a to, u stvari, Bošković i tvrdi, pa na osnovu toga zaključuje „odatle će po istom postupku nastati deljivost u beskonačnost", jer po njemu, kao što smo podvukli u prethodnoj belešci, sva snaga dokaza deljivosti u beskonačnost leži „u tome što kad uzmeš ma kakav razmak možeš naći razmak i manji od njega."

Bošković je ovde u istom značenju upotrebio palac i prst kao mere dužine.

19) Peripatetičari — starogrčki filozofi koji su prošli kroz Aristotelovu školu; naziv im potiče od grčke reči περιπατοι što znači hodnik, jer je Aristotel svoje učenje izlagao šetajući se hodnicima liceja u Atini. Tim imenom

nazivani su i filozofi renesanse koji su se u svojim učenjima inspirisali Aristotelovom naukom i filozofijom, ne odstupajući bitno od Aristotelovog duha, kao i srednjevekovni mislioci koji su se striktno držali Aristotela.

Poznato je Aristotelovo delo *Duša* (περνψυχῆς) u kome se govori o vegetativnoj, senzitivnoj i racionalnoj ili razumnoj duši. Tim delom inspirisali su se mnogi peripatetičari u tretiranju problema racionalne i perceptivne aktivnosti.

20) Bošković ovde formuliše i objašnjava svoje osnovno shvatanje o materiji koje proizilazi iz njegova stava: „Ja ne usvajam potpuno kontinuiranu protegu materije, već je gradim tačkama potpuno nedeljivim i neprotežnim, koje su međusobno razdvojene izvesnim intervalima i povezane međusobno izvesnim silama koje su čas atraktivne, a čas repulzivne zaviseći od njihovih međusobnih odstojanja." Videti: Ruđer Bošković, *O prostoru, vremenu i relativnosti*, Predgovor, izbor tekstova i prevod Dr Dušana Nedeljkovića, Kultura, Beograd, 1956, str. 33.

21) Pošto je obrazložio „nedeljivost granica i deljivost onoga što se tim granicama omeđuje", Bošković podvlači da treba izvesti „nešto što će poslužiti za valjano razumevanje prirode ma kakve neprekidnosti i samog zakona kontinuiteta", pa upozorava da će govoriti „o tačkama i linijama" i da sve što bude o njima kazao „treba da se primeni na sve ostale međe, na omeđene neprekidne kvantitete", na primer, na površi i tela. Kao da je matematički predosećao onu duboku sličnost između kontinuuma različitih dimenzija koju će tek precizno otkriti moderna teorija skupova!

22) Ovaj B škovićev pogled na liniju proizlazi iz njegova pogleda na beskonačno, koji se bitno ne razlikuje od Aristotelovih pogleda, po kojima beskonačno egzistira samo „u mogućnosti", kao potencijalno beskonačno, bez sopstvenog aktueliteta, kao nešto nedovršeno, ostvarljivo samo u smilu nastajanja, tako da je uvek nešto drugo; po njemu je nemoguće beskonačno malo i beskonačno veliko, stvarno postojeće i u sebi određeno. Otuda, dakle, „linija nije sastavljena od tačaka već od linijica" i „rastavlja se na linijice", a „uvek su delovi ma kakve linije omeđeni dvema krajnjim tačkama druge pojedinačne linije", iako se delenje linije može nastaviti u beskonačnost.

23) Ovde je sasvim očigledno da se Boškovićeva razmišljanja o delovima intervala zasnivaju na beskonačnoj deljivosti intervala i na njegovom stavu prema beskonačnom, koji smo podvukli u prethodnoj belešci, pa otuda i njegov oštrouman, dijalektički, zaključak da je broj delova jednog intervala „konačan u beskonačnosti", tj. konačan u smislu činom izvršene podele i beskonačan u smislu potencijalno ostvarljive podele. Drugim rečima, broj delova intervala je konačan, ali može biti po volji velik.

Bošković upozorava da „taj odgovor prema običnom mišljenju o neprekidnoj protežnosti materije sadrži jednu veliku teškoću", ali istovremeno ističe da prema njegovom mišljenju „nema uopšte nikakve teškoće." Očigledno misli na svoja shvatanja o sastavu materije, po kojima materiju obrazuju nedeljive i neprotežne tačke odeljene, zbog odbojnih sila, uvek konačnim, ma i vrlo malim, međusobnim rastojanjima. Time takav skup tačaka, ističe Ž. Marković, dobiva iskustveno *svojstvo protezanja*. Između tih tačaka mogu se uvrstiti nove tačke, tako da umesto beskonačne deljivosti Bošković uvodi pojam beskonačne „uvrstljivosti "(interseribilitas) i „sastavljivosti" (componibilitas) materije. Uvek je konačan broj tačaka koje se uvrštavaju, ali se uvek može uvrstiti proizvoljno veliki broj. Videti: Željko Marković, *Ruđe Bošković*, T. 1, str. 429—434.

24) Pošto „ma u kakvom određenom intervalu uvek postoji prva i poslednja tačka, ali nema druge i pretposlednje", očigledno je reč o *zatvorenom* intervalu, u smislu kako ga tretira moderna matematička analiza. U Boškovićevom dokazu da u tom intervalu „nema druge i pretposlednje tačke" istaknuta je, takoreći, istovetna argumentacija koju moderna matematička analiza koristi u obrazloženju da je, na primer, skup realnih brojeva, odnosno skup tačaka prave, *„svuda gust skup"*. Na pitanje koliko ima tačaka na liniji, Boškovićev odgovor je, matematički i po logici argumenata, istovetan kao i u slučaju delova linije (videti prethodnu belešku).

25) Iskazano pojmom moderne matematičke analize, može se reći, da se Bošković ovde dotakao *zatvorene oblasti* (linije — kao jednodimenzionalnog, površi — kao dvodimenzionalnog i tela — kao trodimenziopnalnog kontinuuma), kada je, u stvari, podvukao da se od te oblasti ne može oduzeti skup njenih graničnih tačaka, a da tako dobivenoj oblasti pripada novi skup graničnih tačaka, tj. da ostane i dalje zatvorena. Razlog je tome, po Boškoviću, u slučaju linije (odnosno intervala), što na liniji ne postoji druga ni pretposlednja tačka (odnosno u intervalu — videti prethodnu belešku) i primećuje da će se to isto „dobiti ma u kojem drugom neprekidnom nizu kvantiteta", što primenjeno, u Boškovićevom smislu, na površ i telo znači da ne postoji druga ni pretposlednja linija u slučaju konačne površi, kao ni druga ni pretposlednja površ u slučaju konačnog tela. Bošković je, dakle, intuitivno osetio, iako je to dosta implicite izrazio, one skrovite karakteristike kontinuuma koje će tek moderna matematička analiza preko teorije skupova fiksirati topološkim pojmovima, kao što su: otvorena i zatvorena oblast unutrašnja i granična tačka oblasti i okolina tačke. Videti: E. Stipanić, *O, linearnom kontinuumu Ruđera Boškovića*, Matematički Vesnik 4 (19), Sv. 3, Beograd, 1967, str. 277—292.

26) Dovoljno je jasno izložena i istaknuta sličnost vremena i linije kao neprekidnih kvantiteta.

27) U vezi sa razmatranjima iz prethodnog paragrafa istaknuta je uzajamna korespondentnost prostora i vremena kao neprekidnih kvantiteta;

sve je to od posebnog značaja jer ulazi u osnove Boškovićevih pogleda na prostor, vreme i kretanje.

28) Razmišljajući o osnovama mehanike, Bošković u svojoj raspravi *O živim silama* (1745) razlikuje dve vrste brzina. Jedna je *aktualna* (velocitas in actu secundo); ona nije momentalna i ima smisla samo u neprekidnom intervalu vremena, kao odnos pređenog puta i proteklog vremena. Druga je *potencijalna* (velocitas in actu primo); ona je „određenje (determinatio) što ga telo ima za aktualnu brzinu, odnosno određenje da telo pređe zadani put u zadanu vremenu, osim ako nešto ne bi smetalo." Po Boškoviću tu brzinu, zbog inercije, zadržava telo pri jednolikom kretanju, a može da postoji „i u jednom momentu vremena i mera joj je ona aktualna brzina koja joj pripada." On „delatnu silu" (vis activa), kao „delovanje potencije" (potentia — uzrok promene kretanja) vezuje sa „momentanom akcijom", kojom „potentia" prelazi u čin i proizvodi aktualnu brzinu. Iako je Bošković svoja razmišljanja o osnovama mehanike razvijao na bazi naučne filozofije, on se nije potpuno oslobodio metode i skolastičkih kategorija na kojima se vaspitao u mladosti, što se ispoljilo i ovde kada je u pitanju njegovo tretiranje aktualne i potencijalne brzine, primećuje P. Costabel, istaknuti poznavalac mehanike XVIII stoljeća i Boškovićeve filozofije prirode, ocenivši istovremeno vrlo visoko Boškovićeva razmišljanja o osnovama mehanike. Videti: Pierre Costabel, *Le De Viribus vivis de R. Boscović ou de la vertu des querelles de mots*, Archives internationales d'Histoire des Sciences, No 54—55, Paris, 1961, str. 6; Željko Marković, *Ruđe Bošković*, T. 1, str. 177—187; T. P. Angelitch, *Über die Grundlagen der Boscovich'schen Mechanik*, Actes du Symposium international R. J. Bošković 1958, Académie serbe des sciences, Académie Yougoslave des sciences et des arts, Académie slovène des sciences et des arts, Beograd, Zagreb, Ljubljana, 1959.

Ako jednačina $\vec{r} = \vec{s}\,(t)$ treba da definiše trajektoriju pokretne tačke — $\vec{r}$ označava vektor položaja tačke i t vreme — onda se Boškovićeva razmatranja o kretanju jedne tačke mogu pojmovima savremene matematike očigledno ovako rezimirati:

1. *neprekidnom* kretanju (Motus continuus est is ...) odgovara neprekidna *injektivna* funkcija $\vec{s}$, tj.

$$\forall t_1 \in T, \forall t_2 \in T \quad [\vec{s}(t_1) = \vec{s}\,(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2],$$

gde je T interval vremena;

2. *vraćanju* pokretne tačke na istu tačku prostora (... regressus puncti mobilis ad idem punctum spatii) odgovara neprekidna funkcija $\vec{s}$, čija je *recipročna* relacija *nefunkcionalna* oblika

$$\exists t_i \in T, i = 1, 2, 3, \ldots, n \quad [\vec{s}\,(t_i) = \vec{s}_0,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n];$$

3. *mirovanju* (... habebitur quies) odgovara neprekidna fumkcija $\vec{s}$, čija je *recipročna* relacija *nefunkcionalna* oblika

$$\forall t \in T \qquad [\vec{s}(t) = \vec{r}_o],$$

4. *replikaciji* (... habebitur illa, quae dicitur replicatio) odgovara *nefunkcionalna* relacija oblika

$$\exists t_o \in T \qquad [\vec{s}(t_o) = \vec{r}_i, \quad \vec{r}_i \neq \vec{r}_j \ (i, j = 1, 2, 3, \ldots, n; i \neq j)];$$

5. *virtualnoj protežnosti* (... habebitur illa, quam diximus virtualem extensionem appellari) odgovara *nefunkcionalna* relacija oblika

$$\exists t_0 \in T \qquad [\vec{s}(t_o) = \vec{r}(x, y, z); (x, y, z) \in D],$$

gde je D oblast, a x, y i z su Descartesove koordinate.

Ako se uzme više tačaka materije M_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$ i ako svaka od jednačina $\vec{r}_i = \vec{s}_i\,(t)$ treba da definiše trajektoriju odgovarajuće pokretne tače M_i, onda se Boškovićeva razmatranja o kretanju više tačaka mogu, analogno slučaju jedne tačke, ovako rezimirati:

1. *koegzistenciji razdvojenih tačaka* (... in quo sita est disjunctorum coexistentia) odgovaraju neprekidne funkcije $\vec{s}_i$ tako da

$$\forall \xi \in T \quad [\vec{s}_i(\xi) = \vec{r}_{\xi i}, \quad \vec{r}_{\xi i} \neq \vec{r}_{\xi j}; \quad (i, j = 1, 2, 3, \ldots, k; i \neq j)];$$

2. *uzastopnom primicanju tačaka materije istom mestu* (... quod fieret in successivo appulsu punctorum materiae ad eundem locum) odgovaraju neprekidne funkcije $\vec{s}_i$ tako da

$$\forall t_n \in T, n = 1, 2, 3, \ldots, p \qquad [\vec{s}_i(t_n) = \vec{r}_o; (i = 1, 2, 3, \ldots, k; n = 1, 2, 3, \ldots, p)];$$

3. *kompenetraciji tačaka materije* (... in quo sita est compenetratio) odgovaraju neprekidne funkcije $\vec{s}_i$ tako da

$$\exists \xi \in T \qquad [\vec{s}_i(\xi) = \vec{r}_o; \ i = 1, 2, 3, \ldots k].$$

Slučajevi od 2. do 5., kada je u pitanju jedna tačka, i sva tri slučaja, kada su u pitanju više tačaka „daju nam sve kombinacije koje proizilaze iz spajanja vremena i prostora“ tvrdi Bošković i ističe da je jedino „koegzistencija razdvojenih tačaka moguća po prirodi stvari“ (dok su sve kombinacije „moguće kroz božansku svemoć“), što odgovara njegovoj teoriji materije, izvedenoj na osnovu zakona kontinuiteta, na šta će se posebno osvrnuti u poslednjem paragrafu ove rasprave.

29) U vezi s onim što smo kazali u prethodnoj belešci, ovde možemo još sledeće dodati. Jasno se vidi da se brzina u drugom dejstvu (celeritas in actu secundo) odnosi na jednoliko kretanje i da je jednaka količniku iz pređenog puta i proteklog vremena ($v = s/t$), a da je brzina u prvom dejstvu (celeritas in actu primo) trenutna i da se kao takva odnosi na nejednoliko kretanje. Zato Bošković za nju kaže da jedino ona „odgovara pojedinim trenucima vremena, ne brzina u drugom dejstvu, jer se trenutno ne dešava nikakvo kretanje koje bi sa sobom vuklo neprekidno vreme" i da to treba da znaju „oni koji se bave mehanikom, kad brzinu, koja odgovara pojedinim momentima množe vremenom da bi čak i za nejednoliko kretanje imali meru prostora (pređenog puta)."

30) Ako bi se linija shvatila kao niz sukcesivnih tačaka (tj. neke vrsti minimalnih elementarnih duži ili linijica) i vreme kao niz sukcesivnih trenutaka (tj. neke vrsti minimalnih intervala vremena) — protivno, dakle, beskonačnoj deljivosti protežnog kontinuuma — onda bi sva neprekidna kretanja (saglasno Boškovićevom poimanju neprekidnog kretanja — beleška 26) bila podjednako brza (mera brzine bila bi količnik iz najmanje elementarne duži i najmanjeg elementarnog intervala vremena). Međutim, ističe Bošković, kada se shvati priroda kontinuiteta, zasnovana na beskonačnoj deljivosti, odnosno „da svakom ma kako malom deliću vremena ma u kojem kretanju odgovara njegov delić prostora i deliću prostora njegov delić vremena, i da ne postoji nijedan delić vremena ili delić prostora najmanji od svih, nijedan drugi i pretposlednji trenutak ili nijedna druga i pretposlednja tačka "(Videti: beleške 22, 23, 24, i 25.) onda „nema nikakve teškoće da se shvati razlika brzina", zaključuje Bošković.

Ovde, kao i na drugim mestima, Boškovićev „tempusculum" odgovarao bi, u Leibnizovom smislu, diferencijalu vremena, a njegov „spatiolum" diferencijalu puta.

Morula, ae, f. — kratko zadržavanje ili kratko zaostajanje (na francuskom: court délai), što je saglasno smislu Boškovićeva tvrđenja da „Različita brzina ne bi mogla postojati, sem ako bi se jedna ista tačka prostora nekom drugom pokretnom tačkom spajala s više trenutaka što su tvrdili oni koji su razliku brzina objašnjavali morulama..."

Morula je diminutiv od *mora*, ae, f. — rok, odlaganje, zadržavanje, zaostajanje, zatezanje, zakašnjenje (na francuskom: délai, retard, retardement) Videti o ovome: Félix Gaffiot, *Dictionnaire illustré Latin-Français*, Hachet, Paris, 1974, str. 994 i 996.

Inače, *morula* postoji kao biološki pojam i znači jedan od razvojnih stadija embrija mnogoćelijskih životinja.

31) Iako se iz prve rečenice razabire da je, u stvari, reč o ubrzanom kretanju (u krajnjem slučaju o promenljivom kretanju uopšte), primerice se posmatraju dva jednolika kretanja nejednakih brzina (drugo pokretno telo

ima deseterostruko veću brzinu od prvog pokretnog tela). Ta okolnost nije od bitnog značaja za Boškovićeva tvrđenja koja je u ovom paragrafu jasno obrazložio, a u prethodnom samo nabacio, a naime, da se razlika brzina može pojmiti bez teškoća na osnovu beskonačne deljivosti prostora i vremena, pa prema tome i beskonačne deljivosti kretanja.

32) Ovde smo latinsku reč „spatium", radi veće jasnoće, preveli na srpskohrvatski sa „pređeni put", jer se radi zaista o pređenom putu pokretnog tela, iako smo na drugim mestima, u prethodnim paragrafima, gde ima isti smisao, preveli je sa reči „prostor".

U ovom paragrafu Bošković je geometrijski ilustrovao svoja razmatranja iz 38. paragrafa, učinivši ih na taj način jasnijim i očiglednijim.

Ako je $s = v_1 t$ zakon puta prvog pokretnog tela, a $s = v_2 t$ drugog pokretnog tela, gde su v_1 i v_2 odgovarajuće brzine i t vreme, onda se Boškovićeva geometrijska ilustracija može vrlo pregledno prikazati u Descartesovom koordinatnom sistemu *sot* pomoću pravih definisanih navedenim jednačinama. Iz tih jednačina lako slede Boškovićevi zaključci koji se tiču odnosa pređenih puteva pokretnih tela za ma koje zadano isto vreme i odnosa vremena za ma koji isti pređeni put.

33) Reč je o poznatoj Zenonovoj aporiji *Ahilej i kornjača.* Videti: Branislav Petronijević, *Istorijske i kritičke primedbe na prva dva Zenonova dokaza protiv kretanja,* SAN, Glas CLXXIV, Beograd, 1941; G. Fontera, *Étude sur les arguments de Zénon d'Elée contre le mouvement,* Paris, 1891; Ernest Stipanić, *O jednom matematičkom aspektu Zenonove aporije Ahil,* Matematički Vesnik Vol. VII, 3—4, 1955, Beograd.

Grégoire de Saint-Vincent (1584—1667), isusovac, francuski matematičar, zaslužan za razvitak infinitezimalnog računa, poznat po svom delu *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (1647) U problemu kvadrature hiperbole koristio je aritmetičku i geometrijsku progresiju. Posebno je pisao o geometrijskoj progresiji. Leibniz i Huyghens (1629—1695) su cenili njegova dela, a Bošković ih je naveo u spisku knjiga potrebnih za studij matematike na univerzitetu u Paviji, kada je preuzeo katedru matematike na tom univrzitetu. Poznat je i po tome, što je u Rimskom kolegijumu, (Collegium Romanum), u svoje vreme, u prisustvu Galileja (1564—1642), protivno mišljenjima tadašnjih filozofa peripatetičara i zvaničnog učenja crkve, održao predavanje o kretanju planete Venere oko Sunca i o tome obavestio Huyghensa.

U svome tumačenju aporije *Ahilej i kornjača,* što se jasno vidi iz narednih paragrafa, Bošković koristi konvergentnu geometrijsku progresiju, služeći se beskonačnom deljivosti neprekidnog kvantiteta, kao karakteristikom njegove prirode.

34) Ako za određeno vreme t Ahilej pređe početno rastojanje između sebe i kornjače, koje iznosi 1000 koraka, za to isto vreme kornjača odmakne

100 koraka. To znači da se Ahilej približio kornjači za 900 koraka. Ostalo je još 100 koraka pa da nestane rastojanja između njih. Pošto se oboje kreću jednoliko, način daljeg prilaženja Ahileja kornjači biće analogan, tj. uvek će se dužina za koju se Ahilej približio kornjači prema dužini za koju kornjača odmakne odnositi kao 9 prema 1, pa će se tako odnositi i odgovarajuća vremena.

Da bi Ahilej sustigao kornjaču, mora pored pređene hiljade koraka, očevidno, da pređe i sledeći broj koraka

$$100+10+1+1/10+1/10^2+\ldots+1/10^n+\ldots=\frac{1}{9}\,1000,$$

To znači da će se ona hiljada koraka, koju Ahilej pređe za vreme t, odnositi prema dužini puta koji će Ahilej morati preći da bi stigao kornjaču, kao što se odnosi 9 prema 1. Pošto se oboje kreću jednoliko, to će se i odgovarajuća vremena odnositi kao 9 prema 1. Pogrešno je, dakle, ističe Bošković, misliti da se Ahilej i kornjača ne mogu *nikad* i *nigde* sresti, jer ako se vremenu t doda njegov deveti deo i hiljadi koraka njen deveti deo, dobiće se trenutak i tačka u kojima „mora nastati sustizanje", zaključuje Bošković.

Bošković smatra da je takvim tumačenjem aporije *Ahilej i kornjača* otklonio onu osnovnu teškoću „koju su stari iznosili protiv neprekidnog kretanja" i misli da je „sva veličina ove teškoće u neodređenom značenju onog izraza *nigde* ili *nikad*", pa u narednim paragrafima nastoji da precizira smisao tih izraza.

35) Reč je o beskonačnom konvergentnom redu oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a,$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ delovi intervala $[o, a]$ dobijeni na osnovu određenog postupka beskonačnog delenja intervala. Naveden je primer kada je $a_n = a/2^n$.

36) U vezi sa napred tretiranom aporijom *Ahilej i kornjača*, jasne su dve beskonačne konvergentne geometrijske progresije:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1000\cdot 10^{1-n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} t\cdot 10^{1-n}$$

Suma prve progresije je „mera“ prostora koji je prešao Ahilej i jednaka je desnoj međi intervala $\left[0, \frac{10}{9} \cdot 1000\right)$, a suma druge progresije je „mera“ odgovarajućeg proteklog remena i jednaka je desnoj međi intervala $\left[0, \frac{10}{9} t\right)$ Izraženo pojmovima savremene matematike, biva jasno Boškovićevo tvrđenje da Ahilej „neće stići *nikad* i *nigde* do kornjače“, ako „nikad“ označava neki trenutak $\xi \in \left[0, \frac{10}{9} t\right)$, a „nigde“ neku tačku $x \in \left[0, \frac{10}{9} \cdot 1000\right)$, i da će „biti sasvim pogrešna pretpostavka, ako bi ono (nikad i nigde) označavalo ma koji neodređeni trenutak, ili ma koju tačku uzetu u svemu vremenu ili prostoru“, jer će Ahielj stići kornjaču u „poslednjem trenutku $\xi = \frac{10}{9} t$ i u „posledjoj tački prostora“ $x = \frac{10}{9} \cdot 1000$.

I ovde, kao i u nekim ranijim paragrafima, izbijaju na videlo u Boškovićevim rasuđivanjima skrivena pitanja u vezi sa otvorenim i zatvorenim intervalima.

37) Reč je o geometrijskoj progresiji

$$a_1.\ a_1 q,\ a_1 q^2, \ldots, a_1 q^n, \ldots \qquad |q| < 1,$$

gde je zbir *svih prethodnih* članova

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q},$$

a zbir *svih narednih*

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1 q}{1-q}$$

Razlika između zbira svih prethodnih i zbira svih narednih članova biće

$$s - \sigma = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q}{1-q} = a_1$$

I dalje

$$\frac{a_1 - a_1 q}{a_1} = \frac{s-\sigma}{s} = 1-q$$

što izražava *teoremu* koju Bošković formuliše i podvlači u ovom paragrafu.

Bošković sve ovo primenjuje na slučaj aporije *Ahilej i kornjača*, gde je $q = 1/10$, $a_1 = 1000$, $s = \frac{10}{9} \cdot 1000$ odnosno $\frac{10}{9} t$ i $\sigma = \frac{1}{9} \cdot 1000$ odnosno $\frac{1}{9} t$. I tako, u nešto modificiranom obliku, potvrđuje svoja razmatranja iz 42. paragrafa. Primetićemo samo da u Boškovićevom tekstu, odmah posle formulisane teoreme, za slučaj aporije *Ahilej i kornjača*, treba da stoji „ut 9 ad 10", umesto „ut 9 ad 1", što smo u prevodu na srpskohrvatskom ispravili.

38) U ovom i u sledećim paragrafima, 47, 48, 49, 50 i 51, Bošković nam lako razumljivim geometrijskim interpretacijama čini očiglednim i jasnijim situacije u vezi sa aporijom *Ahilej i kornjača*, koje je razmatrao u ranijim paragrafima.

Uz ove Boškovićeve geometrijske interpretacije kažimo sledeće.

Ako uzmemo Descartesov koordinatni sistem *sot*, gde je *t* vreme, a *s* prostor koji prelazi Ahilej odnosno kornjača i tačke $C(T, 0)$, $D(0, 0)$, $E\left(0, \frac{1}{9} \cdot 1000\right)$ i $F\left(0, \frac{10}{9} \cdot 1000\right)$, onda jedačina

$$s = -\frac{10}{9T} 1000\ t + \frac{10}{9} \cdot 1000$$

definiše zakon puta Ahileja, a jednačina

$$s = -\frac{1}{9T} \cdot 1000\ t + \frac{1}{9} \cdot 1000$$

zakon puta kornjače. Prva jednačina predstavlja pravu *CG*, a druga pravu *CH*. Tako se na osnovu navedenih jednačina mogu lako i pregledno predočiti sva Boškovićeva razmatraja aporije *Ahilej i kornjača*.

Za Boškovićeva razmatranja aporije *Ahilej i kornjača*, smatramo da će biti od interesa naše matematičko tretiranje ove aporije (Ernest Stipanić, *O jednom matematičkom aspektu Zenonove aporije Ahil*, Matematički Vesnik VII, 3—4, Beograd, 1955, 179—183), pa ćemo ga ovde kratko izložiti.

Neka je $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ jedan niz uzastopnih položaja Ahileja i $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ korespondentni niz uzastopnih položaja kornjače.

U naučnoj i filozofskoj literaturi matematičko tretiranje aporije *Ahilej i kornjača* se zasniva, eksplicitno ili implicitno, na pretpostavci

$$(1) \qquad K_{i-1} K_i = q \cdot A_{i-1} A_i \qquad (A_i \equiv K_{i-1},\ 0 < q < 1,\ i \in N),$$

gde je N skup prirodnih brojeva. Takvim načinom tretiranja praktično se, dakle, pretpostavlja da se matematički smisao te aporije direktno i jedino iscrpljuje beskonačnim nizom $A_n K_n$:

$$(2) \qquad A_0 K_0, A_0 K_0 q, A_0 K_0 q^2, \ldots, A_0 K_0 q^n, \ldots$$

odnosno beskonačnim redom $\sum_{n=0}^{\infty} A_n K_n$:

$$(3) \quad A_0 K_0 + A_0 K_0 q + A_0 K_0 q^2 + \ldots + A_0 K_0 q^n + \ldots = A_0 K_0 \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Tako i Bošković matematički tretira navedenu aporiju.

Mi ćemo matematičko tretiranje aporije uopštiti na način kako sledi, iako je u osnovi za njeno logičko i filozofsko tretiranje dovoljan niz (2) odnosno red (3), uzimajući obzir Petronijevićevu hipotetičku rekonstrukciju originalne formulacije aporije (čiji se kratki izvod nalazi u Aristotelovoj Fizici) i koja bi, prema toj rekonstrukciji, na srpskohrvatskom jeziku, trebalo da glasi:

„Ako postoji kretanje, ni najsporiji ne može nikada biti dostignut ni od najbržeg. Jer onaj koji goni mora nužnim načinom, pre nego što dostigne (onog koji bega), najpre doći na mesto odakle je pošao onaj koji bega. A ako se pretpostavi, da se razdaljina između njih može smanjivati u beskonačnost, ne samo da Ahil nikada ne može stići Hektora, nego (ne može stići) ni kornjaču."

Pođimo zato od pretpostavke

$$(4) \qquad K_{i-1} K_i < A_{i-1} A_i < A_{i-1} K_{i-1} + K_{i-1} K_i \qquad (i \in N)$$

koja je očigledno opštija od pretpostavke (1) i nalazi svoju opravdanost u navedenoj Petronijevićevoj rekonstrukciji formulacije aporije.

Stavimo li sad

$$\frac{A_{i-1} A_i}{A_{i-1} K_{i-1}} = a(i), \qquad \frac{K_{i-1} K_i}{A_{i-1} K_{i-1}} = k(i) \qquad (i \in N)$$

tada uslov (4) postaje

$$0 < a(i) - k(i) < 1$$

ili

$$0 < q(i) < 1, \tag{5}$$

gde je $q(i) = a(i) - k(i)$. Kako je

$$\frac{A_{i-1} A_i - K_{i-1} K_i}{A_{i-1} K_{i-1}} = q(i) \qquad (i \in N)$$

i

$$1 - \frac{A_{i-1} A_i - K_{i-1} K_i}{A_{i-1} K_{i-1}} = 1 - q(i),$$

odnosno

$$\frac{A_i K_i}{A_{i-1} K_{i-1}} = 1 - q(i),$$

to dobijamo beskonačni niz

$$A_n K_n = A_0 K_0 \prod_{i=1}^{n} [1 - q(i)] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, \ldots), \tag{6}$$

odnosno beskonačni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n K_n = A_0 K_0 \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{n} [1 - q(i)] \qquad (q(o) = 0) \tag{7}$$

Iz pretpostavke (1) sledi $A_n K_n \to 0$ kad $n \to \infty$. Sad se postavlja pitanje šta biva sa $A_n K_n$ kad $n \to \infty$, ako je niz oblika (6)? S obzirom na uslov (5) i poznati stav u teoriji beskonačnih proizvoda, odgovor na postavljeno pitaje potpuno je sadržan u stavu:

Da bi $A_n K_n \to 0$, kad $n \to \infty$, *potrebno je i dovoljno da red* $\sum_{i=1}^{\infty} q(i)$ *divergira.*

Dakle, da bi red (7) konvergirao potrebno je da red $\sum_{i=1}^{\infty} q(i)$ divergira.

Kako za svako $n > 1$, zbog uslova (5), važi nejednakost

$$\prod_{i=1}^{n+1} [1-q(i)] < \prod_{i=1}^{n} [1-q(i)],$$

to se primenom Olivierovog stava na red (7) neposredno dobija:

Da bi red (7) konvergirao potrebno je ne samo da $\prod_{i=1}^{n} [1-q(i)] \to 0$ *već i da* $n \prod_{i=i}^{n} [1-q(i)] \to 0$ *kad* $n \to \infty$.

Najzad primenom poznatog količničkog Cauchyevog kriterijuma konvergencije na red (7) neposredno se dobija:

Ako je

$$0 < \underline{\lim}_{n\to\infty} q(n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} q(n) \leqslant 1$$

onda red (7) *sigurno konvergira. Međutim, ako je*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} q(n) = 0$$

pitanje konvergencije reda (7) *ostaje otvoreno.*

S obzirom na značenje funkcije $q(i)$, koje smo joj dali u matematičkom tretiranju aporije *Ahilej i kornjača,* jasno se vidi kako se Cauchyevom količničkom kriterijuu konvergencije, u teoriji beskonačnih redova, može dati tumačenje koje je u neposrednoj vezi sa aporijom.

Ako je $a(i) = 1/2$ i $k(i) = 0$, tj. $q(i) = 1/2$ za svako $i \in N$, onda to praktično predstavlja slučaj aporije *Dihotomija*, a ako je $a(i) = 1$ i $k(i) = q$, tj. $q(i) = q$, onda se posmatrano, generalisano, tretiranje aporije *Ahilej i kornjača* svodi na, u literaturi, već poznato matematičko tretiranje iste aporije, kakvo je i Boškovićevo.

Niz autora, narcčito cnih koji su se posebno bavili razvitkom matematike u antičkoj Grčkoj, među kojima u prvom redu pominjemo P. Tannerya, H. Zeuthena i F. Enriquesa, istakli su i zastupali mišljenje, eksplicitno ili implicitno, da je u aporijama *Dihotomija* i *Ahilej i kornjača* anticipiran osnovni stav na kome je izgrađena metoda ekshaustije, kao infinitezimalna metoda u matematici antičke epohe. Zato ovde možemo podvući da takvom mišljenju daje potpuniju logičku i matematičku opravdanost generalisano matematičko tretiranje aporije *Ahilej i kornjača*, koje smo izložili, no što daje uobičajeno tretiranje zasnovano na pretpostavci (4).

39) Ovde misli na svoje delo *Elementi sveukupne matematike* u kojem tretira i primenjuje geometrijske progresije.

40) „Kraja“ nema članovima niza

$$t \cdot 10^{1-n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

odnosno niza

$$1000 \cdot 10^{1-n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

ali postoji „kraj“, tvrdi Bošković, ako se on shvati kao vreme kojim se „iscrpljuje“ prvi niz, uzet sav istovremeno (odjednom), odnosno ako se shvati kao prostor kojim se „iscrpljuje“ drugi niz, uzet također sav istovremeno. Boškovićev „kraj“, ovako shvaćen, nije ništa drugo, nego suma $1/9 \cdot t$ beskonačnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} t \cdot 10^{1-n}$ odnosno suma $\frac{10}{9} \cdot 1000$ beskonačnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} 1000 \cdot 10^{1-n}$, što se sasvim jasno vidi iz daljeg Boškovićevog tumačenja.

Ne postavlja li Bošković, tako shvaćenim „krajem“, iako implicitno, pitanje „sume“ beskonačnog reda uopšte, odnosno pitanje njegove konvergencije, na koje će precizno odgovoriti tek matematička analiza Cauchya, Gaussa i drugih krupnih matematičara XIX stoljeća?

Nije li Bošković, uporni protivnik aktualno beskonačnog, upao ovde u zamku baš *takvog* beskonačnog, kada „kraj“ shvata kao veličinu kojom se „iscrpljuje“ beskonačni niz „sav posmatran istovremeno“ (...si nomine finis intelligatur tempus, vel spatium, quod tota series simul considerata exhaurit quidem). Jer šta treba da znači „*sav posmatran istovremeno*“, ako ne da se uzmu obzir svi članovi niza, kojih je beskonačno mnogo?

Ne deluje li Boškovićev način razmatranja infinitezimalnih situacija u aporiji *Ahilej i kornjača* kao jedan od vesnika, iako možda skroman, one stroge epsilontike koja će se afirmisati u razvojnim tokovima matematičke analize XIX stoljeća, a čiji je praizvor u matematici antike, na kojoj se sam Bošković dobrim delom vaspitao i obrazovao kao matematičar?

41) Podvući ćemo da su Boškovićevi zaključci formulisani i posebno istaknuti u ovom paragrafu, na osnovu prethodnih njegovih razmatranja, od bitnog značaja za njegova shvatanja zakona kontinuiteta i za primene tog zakona u njegovoj teoriji filozofije prirode.

Jean Bernoulli (1667—1748), vrlo istaknuti matematičar svoga vremena, autor brojnih rasprava iz teorijske i primenjene matematike. Njegova celokupna dela izišla su u četiri toma u Ženevi 1742. godine pod naslovom *Johannis Bernoulli opera omnia*. Vrlo aktivno je učestvovao u rešavanju mnogih konkretnih i principijelnih pitanja matematičkih i drugih nauka, kao i filozofije prirode. Bošković ga često pominje u nizu svojih rasprava u kojima se bavi sličnim ili istovetnim problemima primenjene i teorijske matematike sa kojima se bavio i Bernoulli. Dao je jednu formulaciju zakona kontinuiteta u svojoj raspravi *Discursus de motu* (Opera omnia III), protiv koje je Maupertuis pisao u svojoj raspravi *Essay de Cosmologie* koju smo već ranije pomenuli (videti belešku 3). Na ovo se Bošković posebno osvrće u 103. i 104. paragrafu ove rasprave.

42) Očigledno je da je reč o takvim linijama koje će, na primer, u sistemu Descartesovih koordinata biti definisane jednačinama

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

gde je t parametar (najčešće vreme). Uz to će funkcije $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ zadovoljavati određene uslove (na primer: uslov integrabilnosti, neprekidnosti, diferencijabilnosti i druge) za svako $t \in [a, b]$.

43) Videti beleške 10, 24, i 25. Osim toga, neka od Boškovićevih razmišljanja u ovom paragrafu interpretiraćemo na Euklidovoj pravoj.

Ako na pravoj AB, između tačaka A i B, uočimo ma koju tačku E, ona je u Boškovićevom smislu zajednička međa polupravih AE i BE „koje se neposredno nastavljaju", odnosno ona mora imati polupravu „pre sebe" (linea ante se) i polupravu „posle sebe" (linea post se) i ne može biti tačka u kojoj bi se prava prekidala jer ona dve susedne poluprave (lineae contiguae) „uvek međusobno vezuje i spaja, ili rastavlja i odvaja, i oba posla obavlja u isti mah". Ovim je Bošković položaj i ulogu tačke E, možemo reći, okarakterisao jednom *dijalektičkom metaforom.*

Šta bi se moglo zaključiti u pogledu matematičke sadržine pomenute metafore?

Pošto, kako tvrdi Bošković (videti beleške 24 i 25), ne postoji po redu „druga" niti „pretposlednja" tačka, niti „postoji nijedna tačka koja je toliko bliska nekoj drugoj tački da neke druge ne bi bile još bliže i stoga nema nijedne druge i nijedne pretposlednje", to je time, u smislu, dobro poznatog, Dedekindovog rastava prave proizvoljnom tačkom, implicirana odredba položaja ačke E, a naime: ako je ona završna tačka prve poluprave, druga poluprava nema početnu tačku, i obratno, ako je ona početna tačka druge poluprave, prva poluprava nema završnu tačku. Uzimajući u obzir Dedekindov rastav $p = (P_1/P_2)$ prave proizvoljnom tačkom p, na Boškovićevu liniju koju tačka E mora imati *„pre sebe“* može se gledati kao na zamenu Dedekindove klase P_1 tačaka prave koje su sve levo od tačke E, a na liniju koju tačka E mora imati *„posle sebe“* kao na zamenu Dedekindove klase P_2 tačaka prave koje su sve desno od tačke E.

Ako je, dakle, L_a (linea ante se) poluprava koju tačka E mora imati *„pre sebe“* i L_p (linea post se) poluprava koju tačka E mora imati *„posle sebe“*, onda je Dedekindova tačka

$$p = (P_1/P_2)$$

analogno Boškovićevoj tački

$$E = (L_a/L_p)$$

Bez tačke E poluprave AE i BE su *rastavljene*, sa njom su one *svezane*. Ona je tako njihova *zajednička međa*, koja ih rastavlja i svezuje.

Evidentno je, dakle, da u izloženoj interpretaciji, Boškovićeva *dijalektička metafora* o ulozi i položaju proizvoljne tačke prave (odnosno linije) deluje kao *anticipacija* Dedekindovog rastava $p = (P_1/P_2)$ prave na dve klase tačaka P_1 i P_2. Nije li ona zato *geometrijska anticipacija* Dedekindovog preseka?

Sem toga, mogli bismo kazati, da Boškovićeva zamisao da linearni kontinuum, odnosno svaki njegov ograničeni deo, ima *prvu* i *poslednju* tačku, da je, dakle, *zatvoreni* interval, i da neposredno susedne delove *rastavlja* i *svezuje* njihova zajednička međa, odosno tačka, deluje kao daleka *anticipacija* moderne skupovne ideje formulisane u Cantorovoj analitičkoj definiciji kontinuuma, kao zatvorenog i svezanog skupa. Videti: E. Stipanić, *O linearnom kontinuumu Ruđera Boškovića*, ibid, str. 284—286

44) Ako se imaju na umu lokalne i globalne osobine linija, kako ih danas proučava matematička analiza, a ne samo njihovo mnoštvo, onda zaista tačno primećuje Bošković da se „neizmerno polje linija“ ne može obuhvatiti jednom „raspravicom“, jer se njegova materija „nikad dovoljno ne bi mogla preći ni u ogromnom broju velikih knjiga“, pa će zato on tu želju „obuzdati i obraditi samo ono što je krajnja svrha“, što mu je, dakle, neophodno za njegov zakon kontinuiteta.

45) *Elementi konusnih preseka* je treći tom Boškovićevih *Elemenata sveukupne matematike* (videti belešku 2).

Jasno je da su izrazom

$$\alpha + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

dati svi kružni lukovi o kojima govori Bošković, gde je sa α označen najmanji luk u direktnom smeru sa početkom u tački A i svršetkom u tački B.

Smatrajući da se kružnica vraća u sebe samu beskonačno mnogo puta kao neka spirala, Bošković, primetićemo, nejasno tvrdi da je to „jedini razlog što kružni luk po Euklidovoj geometriji uopšte ne dopušta trisekciju“, drugim rečima u tome vidi razlog nemogućnosti podele kružnog luka (odnosno datog ugla) na tri jednaka dela.

46) Izrazom

$$\frac{\alpha}{3} + \frac{2}{3}k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

su obuhvaćene trećine svih kružnih lukova o kojima je reč, a odgovarajuće tačke preseka, kojima se određuju te trećine, su stvarne tačke D, D' i D''.

47) Ovde je reč o poznatom problemu trisekcije kružnog luka odnosno datog ugla. Taj problem zahteva da se dati kružni luk, odnosno dati ugao, podeli na tri jednaka dela upotrebom samo lenjira i šestara (geometrijskom konstrukcijom). Postavila ga je još antička matematika, a svodi se na rešavanje kubne jednačine oblika (što i sam Bošković kaže)

$$x^3 + px + q = 0,$$

čija se rešenja mogu *geometrijski* konstruisati tada i samo tada kada jednačina ima racionalni koren. Međutim, za proizvoljno dati kružni luk, odnosno ugao, ta jednačina nema racionalni koren, pa se njena rešenja ne mogu *geometrijski* konstruisati. Naime, ako je α luk (odnosno ugao) koji treba podeliti na tri jednaka dela i $\sin \alpha = a$, tada se lako dolazi do jednačine

$$4x^3 - 3x + a = 0,$$

gde je $\sin \alpha = x$, koja za proizvoljno $|a| < 1$, tj. za proizvoljan kružni luk α (ugao), nema racionalan koren, pa se njeni koreni ne mogu *geometrijski* konstruisati, što očigledno znači da se *geometrijskom* konstrukcijom ne može izvesti podela kružnog luka (ugla) α na tri jednaka dela.

Bošković govori o mogućnosti da se tačke D, D', D'' odrede grafički presecima kružnice sa nekim geometrijskim mestom (tj. sa nekom krivom), ili sa dva geometrijska mesta koja bi se sekla u tri tačke, ali istovremeno podvlači da se to ne može postići sa dve prave, ili sa pravom i kružnicom (jer, primećuje on, u prvom slučaju može biti samo jedan presek, a u drugom dva), dok se to može postići sa dva konusna preseka, ili konusnim presekom i kružnicom, ili s nekom višom krivom i kružnicom, pa sasvim tačno, u smislu mogućnosti *geometrijske* konstrukcije, zaključuje: „trisekcija kružnog luka uopšte se ne bi mogla izvesti po Euklidovoj geometriji koja koristi samo prave linije i kružnicu, a mogla bi se izvesti konusnim presecima, ili ma kojim višim krivim linijama". Na primer, ako se u poslednjoj kubnoj jednačini stavi $y = 4x^2 - 3$, onda se dobija $xy + a = 0$, što znači da se koreni te kubne jednačine (odnosno tačke D, D' i D'') određuju presecima parabole i hiperbole u Descartesovom koordinatnom sistemu, tj. presečnim tačkama dva konusna preseka. Slično se može pokazati i za druga grafička rešenja, kada se uzmu u obzir kombinacije drugih geometrijskih mesta o kojima govori Bošković. „Ali ako bi se rešenje tražilo preko algebarske analize" — nastavlja Bošković — „uvek će se nužno dobiti jednačina trećeg stepena koja ima sva tri realna rešenja i koja samim svojim rešenjima daje sve one tri tačke", kao što smo napred već istakli. I Bošković zaključuje „da se mnogi ljudi ne bi tako dugo *uzalud* mučili u traženju rešenja tog problema, da bi ga rešili pomoću *nepodesnih* metoda", kada bi, razmotrivši „prirodu kontinuiteta i kružnice", zašli u bit problema.

S obzirom da je taj klasični problem definitivno rešen metodama moderne matematike, jasno je koliko je *matematički zrelo*, u svom vremenu, i ne samo u njemu, Bošković gledao na taj problem, koji je uz ostala dva klasična problema (udvostručenje kocke i kvadratura kruga) značajno doprineo razvitku matematike. Tek je P. L. Vantzel (1814—1848), matematičar sa Politehničke škole u Parizu, 1837. godine egzaktno, na osnovu proučavanja jednačine trećeg stepena, dokazao nemogućnost trisekcije ugla pomoću lenjira i šestara.

48) Bošković pominje beskrajne krake krivih, što znači da je reč o *beskonačnim granama* krivih (videti belešku 12).

Lako je predočiti Boškovićeve „beskrajne krake" prave, parabole i hiperbole, ako se one posmatraju, na primer, preko svojih, dobro poznatih, jednačina u Descartesovim koordinatama

$$y = mx + n; \quad y^2 = 2px; \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

kada $|x| \to \infty$.

Ovde Bošković pominje svoju *Raspravu o transformaciji geometrijskih mesta*, vrlo značajnu za njegovo tumačenje zakona kontinuiteta (videti belešku 2).

49) Očigledno je da se u Boškovićevim razmišljanjima o neprekidnosti prave, i linije uopšte, pojavljuje *beskonačno daleka tačka* u oznaci ∞ na način koji je matematički razložan i metaforičan. On transponuje u beskonačnost primenu svog pojma međe, da bi beskonačno daleku tačku prave pojmio kao zajedničku među polupravih HA i HB, koje imaju zajednički početak u H. U tom smislu ističe: „Čudno je videti ovde neko spajanje beskonačne prave koja se na neki način vraća u sebe samu kroz beskonačnost tako, da se dva njena kraka HB i HA nekako i spajaju i vezuju na onom beskrajnom rastojanju sa suprotnih strana, *i da očevidno sama beskonačnost postaje kao*

neka zajednička tačka koja spaja ona dva kraka sa strane HB i HA, kao što ih spaja i vezuje tačka H i zajednička je međa za BH i AH."

Bošković, dakle, *beskonačno daleku tačku* prave shvata kao *zajedničku među* polupravih *HA* i *HB*, čiji je zajednički početak u bilo kojoj *konačnoj tački H* prave, ali isto tako i svaka *konačna tačka H* prave, po njemu, je *zajednička međa* polupravih, čiji je zajednički početak u *beskonačno dalekoj tački* ∞. Boškovićeva prava *nije euklidska*, već je kao „neka beskrajna kružnica koja se vraća u sebe stalnim i beskrajnim zavijanjem", kaže Bošković. Ona je zatvorena linija $HA \infty BH$. Koristeći, dobro poznate, pojmove moderne teorije skupova, može se, očigledno, za Boškovićevu pravu pisati: $Fr.HA = Fr.\ HB = \{H, \infty\}$ ili $C\{H,\infty\} = extHA \cup extHB = intHB \cup intHA$.

Primetimo i ovo. Bošković je *beskonačno dalekoj tački* pripisao *ulogu međe*, analognu bilo kojoj *konačnoj tački* prave. On je na taj način jednu određenu osobinu konačne tačke prave, matematički razložno, *preneo* na beskonačno daleku tačku i tako ovu, u stvari, tretirao kao „običnu" konačnu tačku. Preko šesdeset godina kasnije, J. Poncelet (1788—1867), tvorac projektivne geometrije, postupio je slično Boškoviću, kada je došao u situaciju da *beskonačno daleku tačku* interpretira, na bazi svog principa permanencije odnosno principa kontinuiteta, kao *presek* međusobno paralelnih pravih i da joj tako pripiše *ulogu preseka*, analognu bilo kojoj „običnoj" *konačnoj tački*. Stoga se u Boškovićevoj zamisli i njenoj realizaciji da i beskonačno daleku tačku tretira kao među geometrijskog linearnog kontinuuma ocrtavaju *metodološki i idejni nagoveštaji* onog opšteg stava koji će tek Poncelet jasno formulisati u vidu *principa permanencije* odnosno *principa kontinuiteta* (Traité des propriétés projectives des figures, 1820). Videti: E. Stipanić, *O linearnom kontinuumu Ruđera Boškovića*, ibid. str. 288.

U mnogim svojim raspravama Bošković razmišlja o pravoj; ona je po njemu zamršenija, na primer, od kružnice, jer implicira pojam beskonačnosti; podvrgava kritičkoj analizi „predrasude našeg ljudskog uma" o tobožnjoj većoj jednostavnosti prave nego drugih krivih. Videti o ovome: Željko Marković, *Ruđe Bošković*, T. 1., str. 137—138.

50) U vezi sa razmatranjima u prethodnom paragrafu, Bošković nastavlja razmatranja o pravoj sa stanovišta njene „ekvipolencije" sa beskonačnom kružnicom, čija je *krivina* nula, kao što je i *krivina* prave nula u svakoj njenoj tački. Razmatranja su, kao što se vidi, tako živo i očigledno geometrijski izložena, da je suvišan svaki komentar.

No, ipak dodajmo ovo. Ako uzmemo QR za osu y, AB za osu x i $C(a, 0)$, onda je $x^2 + (y + r)^2 = r^2$ jednačina kružnice $HMIN$ i $y = r\left(\frac{x}{a} - 1\right)$ jednačina prave CF u Descartesovim koordinatama, gde je r poluprečnik kružnice. Neka je $c(x_c, y_c)$, gde je

$$x_c = \frac{ar}{\sqrt{a^2+r^2}}, \qquad y_c = r\left(\frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}} - 1\right),$$

što se lako dobija iz prethodnih jednačina. Neka je Θ centralni ugao koji odgovara luku Hc, tj. $\widehat{Hc} = r\Theta$. Lako je pokazati da važi

$$\lim_{r\to\infty} x_c = a\,; \quad \lim_{r\to\infty} y_c = 0 \quad \lim_{r\to\infty} \widehat{Hc} = \lim_{r\to\infty} r.\, arctg \frac{a}{r} = a = HC$$

Očigledno je ovo jedna analitička potvrda Boškovićevog kvalitativnog geometrijskog razmatranja „ekvipolencije" prave sa beskonačnom kružnicom.

51) Bošković uočava i ističe analogiju između kružnice $HMINH$ i svoje prave $HA \infty BH$. Kao što pomenuta kružnica ima lukove Hc i $HMIc$ u suprotnim smerovima, tako isto Boškovićeva prava $HA \infty BH$ (kao neka beskonačna kružnica!) ima „dva odsečka, jedan u jednom, drugi u drugom smeru koji su kao nekakvi lukovi s početkom u H i završetkom u C; naime, HC i $HA \infty BC$." I dalje, kao što postoji beskonačno mnogo kružnih lukova $\widehat{Hc} - 2rn\pi$, $\widehat{HMIc} + 2rn\pi$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sa suprotnim smerovima tako postoji i beskonačno mnogo beskrajnih odsečaka (kao nekih lukova!) prave $HA \infty BH$, dva po dva u suprotnim smerovima, a naime: $HCB \infty AHC$ i $HA \infty BCHA \infty BC$; $HCB \infty AHCB \infty AHC$ i $HA \infty BCHA \infty BCHA \infty \infty BC$ itd... Ovim Boškovićeva prava dobiva još više smisao linije zatvorene poput kružnice.

Nije li Boškovićeva prava $HA \infty BH$ vesnik razvitka novog, neeuklidskog, modela geometrije, kakav je, na primer, eliptička geometrija?

52) Jasna je analogija koju je Bošković ovde istakao, a koja postoji, s jedne strane, između beskonačno daleke tačke prave i, s druge strane, beskonačno daleke tačke parabole, kao zajedničke međe u beskonačnosti njenih beskonačnih krakova VM i VN.

Ako za osu y uzmemo pravu AB i za osu x pravu DE, onda je $y^2 = 2px$ jednačina parabole MVN u Descartesovim koordinatama, a $y = mx$ jednačina prave FG. Tada su

$$x = \frac{2p}{m^2}, \qquad y = \pm\frac{2p}{m} \qquad (m = \mathrm{tg}\alpha)$$

koordinate tačaka P i P' i kad $m \to 0$, onda $x \to +\infty$, $y \to +\infty$ odnosno $y \to -\infty$, pa je otuda sasvim jasna Boškovićeva konstatacija: „Pošto se ona (prava GVP) odvoji od položaja tangente BA, odvojiće se tačka P od V i preći će čitav krak VM, na kome će se uvek naći na nekom mestu, pa ma kako prava FG bila malo udaljena od ose ED, i ne postoji ni jedna tačka samoga kraka VM, ma koliko bila udaljena od V, kojoj jednom ne bi prišla."

53) Ovde je očevidno reč o krivama (višim parabolama kako ih Bošković naziva) koje su u Descartesovim koordinatama definisane jednačinom $y = ax^n$ odnosno jednačinom $y = ax^{p/q}$, gde su n, p i q prirodni brojevi (s obzirom na slike na koje se Bošković poziva) i a neki realan parametar. Krive prolaze kroz koordinatni početak i on je stacionarna (tačka ekstrema ili prevojna) odnosno povratna tačka, što zavisi od eksponenata n i p/q.

Rasprava koju Bošković pominje je njegova rasprava o transformaciji geometrijskih mesta.

54) Bošković misli, s jedne strane, na parabole

$$y = ax^n \qquad (n > 1, n \in N)$$

koje „imaju samo po dva beskrajna kraka" i koji „stalno odlaze u beskonačnost i od ose i ma od koje druge prave" (tj. nemaju asimptota) i, s druge strane, na krive

$$y = ax^{-n} \qquad (n \in N)$$

(zove ih hiperbolama) koje „imaju po četiri kraka od kojih su dva kraka za jednu, a dva kraka za drugu granu, pa jedna od njih s obzirom na drugu izgleda sasvim odvojena", ali pojedini kraci ovih krivih, nastavlja Bošković, „imaju neku pravu kojoj prilaze neograničeno, da bi se s njom sjedinili u-ma kojoj tački ma koliko udaljenoj, pa se zbog toga prava zove asimptota", što se sve lako potvrđuje elementarnom analizom navedenih jednačina.

I ovde, u duhu svog zakona kontinuiteta, Bošković beskonačno dalekoj tački dodeljuje ulogu zajedničke međe beskonačnih grana (kao i u slučaju prave i parabole) koje se „spajaju na beskonačnom rastojanju pojedinačno pomoću četiri kraka između sebe tako, da stvaraju neku jedinstvenu neprekidnu liniju koja se obično spaja u samoj beskonačnosti sa suprotnih strana". Sve se ovo lako čini očiglednim, na poznati način, elementarnom analizom jednačine $y = ax^{-n}$ i skiciranjem odgovarajućih krivih u Descartesovom koordinatnom sistemu.

Za slučaj $n = 1$, poslednja jednačina predstavlja *konusnu* hiperbolu (presek ravni i kružnog konusa), koju Bošković pominje u ovom paragrafu i u nizu drugih paragrafa.

55) Ova vrlo živa i jasno geometrijski izložena Boškovićeva razmatranja o neprekidnom obrtanju prave GVP oko tačke V i odgovarajuća razmatranja, u duhu zakona kontinuiteta, pređenog puta tačke P preko čitave konusne hiperbole $MVNM'$ V' N', mogu se precizno analitički interpretirati u Descartesovom koordinatnom sistemu.

Ako se prava VV' uzme za osu x i prava normalna na nju u tački C ($CV = CV' = a$) za osu y, onda je $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ jednačina hiperbole

MVNM' V' N' (gde b ima dobro poznato značenje) i $y = m(x - a)$ jednačina prave *GVP*, pa su

$$x = a\frac{a^2m^2 + b^2}{a^2m^2 - b^2}, \qquad y = ma\frac{2b^2}{a^2m^2 - b^2} \qquad (m - \mathrm{tg}\alpha)$$

koordinate tačke P, koje se lako dobijaju na osnovu navedenih jednačina.

Ako se, saglasno Boškovićevim razmatranjima, analizira tok koordinata x i y tačke P u zavisnosti od parametra $m \in (-\infty, +\infty)$ odnosno ugla $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right]$, dobija se precizna analitička interpretacija pređenog puta tačke P po čitavoj hiperboli, kako ga je Bošković, u duhu svog zakona kontinuiteta, kvalitativno geometrijski opisao.

56) I ovde, u vezi sa elipsom, suočeni smo sa vanredno živim Boškovićevim geometrijskim razmatranjima koja nam suptilno, u duhu zakona kontinuiteta, kvalitativno predočavaju izvesnu analogiju između elipse i hiperbole.

Služeći se ponovo Descartesovim koordinatama, mogu se ta razmatranja precizno analitički interpretirati. Naime, ako se prava VV' uzme za osu x ($VC = V'C = a$; $OC = O'C = b$), a tangenta QR za osu y, onda je $y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$ jednačina elipse *VOV' O' V* u Descartesovim koordinatama, a $y = mx$ jednačina prave *FVG*, koja se neprekidno obrće oko tačke V, pa su

$$x = \frac{2b^2a}{a^2m^2 + b^2}, \qquad y = m\frac{2b^2a}{a^2m^2 + b^2} \qquad (m = \mathrm{tg}\alpha)$$

koordinate tačke P, koje se lako dobijaju na osnovu navedenih jednačina Kad $|m| \to \frac{b}{a}$, onda $x \to a$ i $y \to b$ odnosno $y \to -b$, tj. tačka P teži tački O ili tački O', a to odgovara situacijama kod hiperbole kad prava *GVP* teži asimptoti *AB* odnosno *ED* (videti Boškovićevu sliku 10), tj. kada tačka P teži beskonačno dalekoj tački ∞ odnosno ∞'. Drugim rečima, tačkama elipse O i O' odgovaraju beskonačno daleke tačke hiperbole ∞ i ∞', pa u duhu svog zakona kontinuiteta Bošković zaključuje: „Postoji jedan neprekinuti krug kojim se elipsa vraća u sebe samu *VMOM'V'N'O'NV*, i jedan neprekinuti geometrijski krug kojim se hiperbola vraća u sebe samu kroz *VM* ∞ *M'V'N'*∞'*NV*, ali se nijedan ne prekida, nijedan nema međe koja ne bi bila zajednička dvema linijama koje leže s ove ili s one strane od nje."

Primetimo još ovo. Dok prava GVP učini jedan pun obrt oko tačke V, odnosno dok ugao α prođe intervalom $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi\right]$, tačka P dva puta pređe čitavu hiperbolu (videti belešku 55); prvi put kad ugao prođe intervalom $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, a drugi put kad prođe imtervalom $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi\right]$. Analogno važi za parabolu (videti belešku 52) i elipsu.

57) Bošković misli na posmatranje elipse, parabole i hiperbole kao preseka pravog rotacionog konusa i ravni. To dovodi u vezu sa svojim razmatranjima u 63. paragrafu (videti belešku 52).

Ovde ponovo podvlači svoj stav protiv egzistencije aktualnog beskonačnog (jer pretpostavka o njoj, po Boškoviću, dovodi do absurda), što je u saglasnosti sa njegovom teorijom materije.

58) Reč je o vrlo dobro poznatom tretiranju kružnice, elipse, parabole i hiperbole, kao linija koje se dobijaju presekom rotacionog konusa sa ravni, kad ona menja ugao koji gradi sa osom konusa.

Naime, svaka linija drugog reda je ravan presek rotacionog konusa sa ekscentricitetom $e=\frac{\cos\alpha}{\cos\Theta}$, gde je α ugao presečene ravni sa osom konusa, a Θ polu-ugao u temenu konusa. Imamo: kružnicu, ako je $\alpha=\frac{\pi}{2}$ $(e=0)$ elipsu, ako je $\alpha > \Theta$ $(e < 1)$; parabolu, ako je $\alpha = \Theta$ $(e = 1)$ i hiperbolu, ako je $\alpha < \Theta$ $(e > 1)$.

Sa stanovišta zakona kontinuiteta, najzanimljivija je Boškovićeva opservacija da je u transformacijama konusnog preseka, kad presečna ravan menja nagib prema osi konusa, „jedino je parabola nedeljiva međa kojom se u trenutku vremena vrši prelaz od neprekidnog niza elipsa u neprekidni niz hiperbola.“ To je matematički sasvim jasno kada se uzmu u obzir moguće vrednosti ekscentriciteta e, kako je napred urađeno, ili ako se konusni preseci posmatraju u Descartesovim koordinatama preko, dobro poznate, temene jednačine $y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2$ u zavisnosti od parametra (ekscentriciteta) e.

59) Bošković posmatra transformaciju elipse u parabolu i ove u hiperbolu koja nastaje kada presečna ravan menja, na dobro poznati način, svoj položaj prema osi konusa.

Šta biva sa lukom elipse M' V' N', koji je u tačkama O i O' spojen sa lukom MVN, pri toj transformaciji, kao da sebe pita Bošković? Rukovođen *Zakonom kontinuiteta* odgovara da je za slučaj parabole taj luk nestao u beskonačnosti („povlači se preko bilo kojih granica u beskonačnost, a i same tačke O, O' međusobno se beskonačno udaljuju, dok konjuagovana osa elipse beskonačno raste“), a da se luk MVN „sa dva kraka, produžen u beskonačnost" nigde ne prekida, jer te krake spaja beskonačno daleka tačka ∞ kao njihova zajednička međa (videti belešku 52), dok se u slučaju hiperbole luk *M' V' N'* „vraćanjem iz beskrajnosti sa suprotnih strana... nekako s lukom *MVN* spaja u dvema beskrajnim tačkama, s jednom u *B* i *A*, s drugom u *D* i *E*" (videti belešku 56).

60) Ovde je najzanimljivija Boškovićeva konstatacija, izvedena u duhu *Zakona kontinuiteta* (poziva se na ono što je već utvrdio o pravoj kao beskonačnoj kružnici — videti beleške 49, 50 i 51), da elipsa i hiperbola imaju po dva centra, jedan konačan u tački *C* i drugi u beskonačno dalekoj tački ∞, „iz kojih se od jednog do drugog pružaju svi prečnici" elipse i hiperbole; zatim, da centru *C* elipse, kome sama elipsa okreće izdubljenost, ne odgovara centar *C* hiperbole, jer da njemu hiperbola ne okreće svoju izdubljenost, već ispupčenost — nego da odgovara centar hiperbole skriven u beskonačnosti ∞, kome hiperbola također okreće izdubljenost, i da otuda proizilazi da i ose elipse i hiperbole nisu jedna drugoj korespondentne.

I mnoge druge stvari u vezi sa konusnim presecima objašnjene su pomoću zakona kontinuiteta „u onoj istoj našoj raspravi" *(O transformaciji geometrijskih mesta)*, ističe Bošković, tako da se „savršenom geometrijskom sličnošću usaglašava sve ono što bi izgledalo da se njoj najviše protivi." Tako pominje: poznatu Apolonijevu teoremu za elipsu $(a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2)$ i za hiperbolu $(a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2)$, gde su a i b poluose, a a_1 i b_1 konjungovani poludijametri; zatim, da kvadrati ma kojih veličina, ma kako se te veličine menjale iz pozitivnih u negativne i obratno, moraju biti pozitivni.

61) Bošković ističe da je „spajanje neprekidnih linija u beskonačnosti (reč je o spajanju „beskonačnih krakova" prave, parabole i hiperbole) pokazalo neke tajne koje, izgleda, prevazilaze shvatanje ljudskog uma, ali, čini nam se, ne sadrže nikakve kontradikcije", nasuprot nekim „višim tajnama" koje „izgleda odlaze u pravu absurdnost."

Na šta se odnose te „više tajne"? Iz daljeg izlaganja vidi se da je reč o aktualnoj i potencijalnoj beskonačnosti. Ona prva je za Boškovića nemoguća i pretpostavka da ona postoji dovodi do absurda, što će Bošković kasnije na primerima pokazati. Zato je kategoričan u tvrđenju „da ne postoji stvarno (actu existentem) nijedna linija koja bi mogla biti protegnuta u beskonačnost." A šta je po Boškoviću beskonačnost? Odgovor sledi, u duhu njegove opšte teorije materije, ništa drugo nego „neograničena mogućnost za udaljavanje jedne stvarne tačke od druge preko bilo kojih granica, ma kako proizvoljno određenih" i „ma koliko da je to rastojanje, moralo bi da bude konačno, a svako drugo konačno moglo bi da bude veće tako, da nijedno od svih mogućih ne bi moglo biti poslednje i najveće; i na taj način nijedno od svih mogućih nije prvo i najmanje". Dakle, vrlo jasan u negaciji aktualne i afirmaciji potencijalne beskonačnosti (videti u vezi s ovim i beleške 23 i 24).

Podvući ćemo da je ovde Bošković vrlo koncizno izrazio jednu fundamentalnu misao na kojoj se zasniva njegova teorija filozofije prirode.

62) Videti beleške 52 i 59.

63) Latus rectum principale je polovina tetive koja je normalna na osu elipse u njenoj žiži i obično se označava sa p (analogan je parametar hiperbole i parabole) — *parametar* elipse.

Bošković navodi:

$p : b = b : a$; ako $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \to 1$, $(a \to \infty,\ b \to \infty)$, onda $b^2/a^2 \to 0$,

$b^2/a \to p_o, \dfrac{p}{b} = \dfrac{b}{a} \to 0$ i $\sin \sphericalangle I_2 VH = \sin F_2 VV' = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \to 0$, gde su a i b poluose elipse i p_o parametar parabole. „Spregnuta" osa je ovde b, a „transverzalna" osa je a.

64) U vezi sa stapanjem pravih VF_2 i VF_5 međusobno i s osom elipse VCV' (iz prethodnog paragrafa), ovde je pomoću kružnog luka KHL (sl. 11) slikovito geometrijski predočen prelaz tačke P sa beskonačnog kraka VM parabole (sl. 7) na beskonačni krak VN.

65) Prateći promenu položaja presečne ravni prema osi rotacionog konusa i odgovarajuću transformaciju elipse u parabolu, a ove u hiperbolu, Bošković geometrijski slikovito predočava spajanje beskonačnih krakova hiperbole (sl. 10).

66) Uzimajući u obzir „kako je upravljeno kretanje ravni preseka (konusa)", prema ovoj ili onoj strani — od elipse ka paraboli, ili od hiperbole ka paraboli (što se može očigledno pratiti na samom konusu) — Bošković geometrijski predočava slučaj parabole, naglašavajući da „na osu odlaze (tačke) F_2, F_3, F_4 i F_5" i „da podjednako iščezavaju u beskonačnosti kako sa strane H, tako i sa strane V", te da su se na neki način u beskonačnosti sjedinile i sačuvale kontinuitet.

67) Za Boškovića je „tajna beskonačnosti" koja prelazi u „absurd", da razmak između pravih VF_2 i VF_5 „sasvim nestaje, mada u isto vreme raste u beskonačnost", a moraju se „potpuno podudarati pa ma koliko da je konačno rastojanje, a ipak, na beskrajnom rastojanju od V, moraju biti beskonačno udaljene između sebe."

Primetićemo samo da taj „absurd" matematički postaje razumljiv, kada se ima u vidu da $\sin \sphericalangle (F_2VF_5) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \to 0$, kad $e \to 1$ odnosno $a \to \infty$ i $b + \infty$.

68) Bošković isključuje mogućnost postojanja beskonačno malog luka $I_2\ HI_5$ odnosno beskonačno malog ugla, kao aktualne beskonačnosti, kojom bi se otklonila teškoća koju je istakao u prethodnom paragrafu, pa izlaz iz

ove teškoće nalazi, u stvari u potencijalnoj beskonačnosti, a naime u činjenicama koje se mogu, na osnovu jednačina

$$y^2 = 2px, \; y = mx$$

očigledno ovako izraziti

$$m = \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{2p}{x}} \underset{x \to \infty}{\to} 0$$

i

$$x = \frac{2p}{m^2} \to \infty, \quad y = \frac{2p}{m} \to \infty \quad \underset{m \to 0.}{}$$

Primetićemo najzad još ovo. Sva razmatranja koja je Bošković na dugo, u duhu zakona kontinuiteta, živo i geometrijski zanimljivo, izložio u vezi sa transformacijom konusnih preseka, mogu se lako analitički precizno interpretirati pomoću jednačina

$$y = mx, \quad y = 2\frac{b^2}{a}x + (e^2 - 1)x^2 \qquad \left(e = \frac{\cos \alpha}{\cos \Theta}\right)$$

69) Reč je o raspravi *O prirodi i upotrebi beskonačno velikih i beskonačno malih veličina* (De Natura et usu Infinitorum et Infinite parvorum... Romae, 1741), u kojoj je Bošković izložio svoja shvatanja o infinitezimalnim veličinama u duhu potrebne matematičke jasnoće i strogosti. Tako sasvim ispravno definiše beskonačno male veličine kao one promenljive veličine, koje postaju manje od ma koje ma kako male „u sebi određene veličine", a beskonačno velike veličine kao promenljive veličine koje mogu premašiti ma kako veliku unapred datu veličinu; konačnu veličinu definiše kao onu koja je „u sebi određena" ili koja se menja „u određenim granicama." Po Boškoviću nijedna konstantna veličina, ma kako mala ili ma kako velika, nije beskonačno mala odnosno beskonačno velika, pa zato kategorički izjavljuje: „stoga beskonačno male veličine i beskonačno velike dopuštamo samo kao neodređene. One stvarno ne postoje, nego samo u našem pojmu."

Bošković je nameravao da celu teoriju o infinitezimalnim veličinama izloži u četvrtom tomu svojih *Elemenata celokupne matematike*, ali to nije uspeo da uradi. Videti: Željko Marković, *Ruđe Bošković*, T. 1, str. 95—98.

70) U paragrafima 81 i 82 Bošković obrazlaže nemogućnost postojanja aktualno beskonačno malog kvantiteta koji bi se sadržavao beskonačno mnogo puta u *konačnom* kvantitetu. Za primer uzima duž i na njoj jasno ilustruje svoja razmišljanja. Dolazi do zaključka da hipoteza o postojanju aktualno beskonačno malog kvantiteta dovodi do absurda, a naime, da bi prelaz „od

beskrajnog do nebeskrajnog broja", odnosno „od nebeskrajnog do beskrajnog broja", mogao nastati „preko jedinice". Njemu je sasvim jasno da je to absurd sa stanovišta zdravog ljudskog razuma, pa zato metaforično pominje boga, čija bi, valjada, svemoć mogla taj prelaz ostvariti.

Primetićemo da ovaj Boškovićev paradoks „aktualno beskonačno male veličine" implicira slične logičke i matematičke situacije, odnosno teškoće (protivrečnost pretpostavke o egzistenciji aktualno beskonačno male, primena zakona isključenja trećeg, definicija prve i druge klase linijica, poslednja linijica prve i prva linijica druge klase), koje se susreću kod poznatih paradoksa u teoriji skupova (na primer, kod Russellovog paradoksa skupa svih skupova), pa je sa tog stanovišta posebno zanimljiv.

71) Bošković ovde kritički razmatra mišljenja onih kojima je *kontigentni* ugao primer aktualno beskonačno male veličine (videti belešku 12). Navodi mišljenje Tacqueta, po kome „ugao nije kvantitet, jer postoji u nagibu, već modus kvantiteta". Smatra da su veličine samo uglovi čiji su kraci prave (jer njihova je mera odnos odgovarajućeg kružnog luka i poluprečnika kružnice), dok je „ugao mešovitih linija", kojem je, dakle, bar jedan od krakova kriva linija, „različit po vrsti od pravolinijskog", kod njega se „zajedno s poluprečnikom kružnice menja i razmera zahvaćenog luka prema celoj periferiji, tako da se menja i sama mera", matematički razložno ističe Bošković. Između uglova mešovitih linija i pravolinijskih „ne postoji nikakav odnos jedan prema drugome" (drugim rečima ne mogu se upoređivati kao veličine), nastavlja Bošković i zaključuje da zato ugao mešovitih linija „nije ni beskonačno mali ni beskonačno veliki."

Izraz „modus", kojim se ovde Bošković, prema Tacquetu, poslužio, imao je u njegovo vreme i pre njega višestruko filozofsko značenje i on ga koristi u raznim prilikama. Tako u svojoj teoriji filozofije prirode postulira „dve realne vrste modusa postojanja": lokalni modus koji se odnosi na prostor i temporalni koji se odnosi na vreme. Ovde bi „modus" morao imati smisao neke „mere" nagiba, odnosno „načina" na koji nagib postoji. Videti: Željko Marković, *Ruđe Bošković*, T. 1., str. 150—51 i 160—61.

A. Tacquet (1612—1660), isusovac, profesor matematike u Luvenu i Antverpenu, autor nekoliko matematičkih dela (Elementa Geometriae planae ac solidae, 1654; Arithmeticae theoria et praxis 1655) koja su se u njegovo vreme i dugo posle njega upotrebljavala kao udžbenici matematike. Za njegov udžbenik *Trigonometria plana* (1745) Bošković je napisao poglavlje o sfernoj trigonometriji; u drugoj knjizi istog udžbenika nalazi se Boškovićev dodatak *O cikloidi i logistici*. Ovaj se udžbenik nalazi u spisku matematičke literature koju je Bošković namenio slušaocima svojih predavanja iz matematike na univerzitetu u Paviji.

O kontingentnom uglu i problemima beskonačnog u vezi sa njim vođene su mnoge diskusije među matematičarima XVI i XVII stoleća. U tim diskusijama učestvovali su, na primer: Clavius (1537—1612), Peletier (1517—1582), Cardan (1501—1576), Galileo Galilei (1564—1642), Wallis

(1616—1703), Leibniz (1646—1716) i mnogi drugi. Shvatanja ispoljena u tim diskusijama bliska su, s jedne strane, shvatanjima po kojima bi kontingentni ugao bio primer „nedeljivog" u smislu matematičkog atomizma Cavalieria (1598—1647) i, s druge strane, shvatanjima po kojima je kontingentni ugao potencijalna beskonačno mala veličina. Zato je, poznati komentator i prevodilac na ruski jezik Euklidovih *Elemenata*, D. D. Morduhaj Boltovski (1876—1952) sasvim tačno i duhovito primetio u svojim komentarima treće knjige *Elemenata* da je „kontingentni ugao *otac nedeljivog* XVII stoleća i *ded potencijalno beskonačno malog* XIX stoleća."

Podvucimo sledeće. Ako se uzme u obzir četvrta definicija u petoj knjizi Euklidovih *Elemenata* („Kaže se da su dve veličine u razmeri jedna prema drugoj ako neki multiplum ma koje od njih može biti veći od druge"), onda Boškovićevo tretiranje „ugla mešovitih linja" (a prema tome i kontingentnog ugla) s obzirom na pravolinijski ugao je matematički razložno.

72) Ako je prvi kvantitet a, drugi kvantitet b, gde je $a < b$, konačan kvantitet („to nešto konačno") d i p-ti delić drugog kvantiteta c, tj. $b = p.\,c$, tada je $a = q.\,c + c^*$, gde su p i q prirodni brojevi i $c^* < c < d$. Jasno je da se ostatak c^* može jednom smanjiti, a jednom povećati, ako se delić c smanji odnosno poveća, pa i onda kada se d smanji. Međutim ako se d beskonačno smanjuje, onda se nužno i ostatak c^* beskonačno smanjuje, pa je na osnovu toga jasan Boškovićev zaključak da ne postoji kvantitet d u sebi određen preko koga bi „onaj prvi kvantitet bio nesamerljiv s drugim kvantitetom."

Videti također belešku 12.

73) Ako je VE osa x i AB osa y, tada je $x^2 + y^2 = R^2$ jednačina kružnice sa centrom u V i proizvoljnim poluprečnikom R, a $y^2 = 2px$ jednačina parabole MN.

Neka se M_1 i N_1 presečne tačke parabole MN i kružnice, onda je

$$(*) \qquad M_1 N_1 = 2\sqrt{2p\left(\sqrt{p^2+R^2}-p\right)},$$

što se lako dobija na osnovu prethodnih jednačina, a zatim

$$\lim_{R\to\infty} \frac{M_1 N_1}{2R\pi} = \frac{\sqrt{2p}}{\pi} \lim_{R\to\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+R^2}-p}}{R} = 0$$

Otvor parabole MN „izjednačuje se celom beskrajnom tangentom AB", a ova je, pošto se pretpostavi da postoji beskonačno velika kružnica sa centrom u V, jednaka prečniku kružnice, tj. aktualno beskonačno velikoj veličini, pa je otvor parabole MN, kada se uzme u obzir obrazac $2R\pi$, veći od četvrtine beskonačne periferije kružnice, što je očigledno u protivrečnosti sa relacijom (*) i tako postaje shvatljiv Boškovićev zaključak: „Taj otvor će dakle" biti veći od četvrtine beskrajne periferije i beskrajno puta manji od nje, što je potpuno očigledno apsurd."

74) Boškovićev „apsurd" matematiči je jasan, ako se uoči da iz jednačina $y^2 = ax$, $y = mx$ sledi $m = \sqrt{\frac{a}{x}} \to 0$, kada $x \to \infty$, dok iz jednačina $x^2 = ay$, $y = mx$ sledi $m = \frac{x}{a} \to \infty$, kada $x \to \infty$.

75) Za raspravu *O prirodi i upotrebi beskonačno velikih i beskonačno malih veličina* videti belešku 69.

Iz pretpostavke da postoji beskonačna površina dobio se apsurdan rezultat da je deo dva puta veći od celine, pa to, po Boškoviću, dokazuje nemogućnost postojanja beskonačne površine kao „aktualno beskonačno velikog".

76) Bošković je ovde vrlo jasno i koncizno formulisao svoj stav prema potencijalnoj i aktualnoj beskonačnosti.

77) Videti beleške 53, 54 i 55.

78) Ako Boškovićevu „geometrijsku krivu", kod koje se „nigde ništa ne menja skokovito, već sve promene nastaju neprekidnim kretanjem", definišemo u Descartesovom koordinatnom sistemu jednačinama

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \qquad t \in [\alpha, b]$$

onda su x (t), y (t), z (t) funkcije *neprekidne* po argumentu t. Očigledno je da Bošković zamišlja da se i tangenta krive *neprekidno* menja, pa su i izvodi $\dot{y}(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{z}(t)$ funkcije *neprekidne* po argumentu t. Upotrebimo li pojam moderne matematičke analize, kazaćemo da je Boškovićeva „geometrijska kriva" *glatka* kriva.

Istaći ćemo da je Boškovićev pojam tangente geometrijski egzaktan. On je sasvim u duhu moderne geometrijske interpretacije prvog izvoda, kada se uzme u obzir da se kroz zadanu tačku krive može povući beskonačno mnoštvo pravih („tim imenom nazvana je prava povučena kroz tačku krive tako da je njenom luku najbliža od svih koji se odatle mogu povući").

Bošković se dotakao vrlo suptilnih pojmova: asimptote i tangente u beskonačno dalekoj tački. Treba primetiti da ti pojmovi, kao što je dobro poznato iz diferencijalne geometrije, nisu u opštem slučaju ekvivalentni (kod algebarskih krivih linija, na primer, asimptota i tangenta u beskonačno dalekoj tački su iste prave; to je slučaj kod hiperbole).

79) Boškovićeva razmatranja u ovom paragrafu, koristeći metode moderne diferencijalne geometrije, mogu se ovako iskazati.

Tačka V krive je *obična* tačka, ako se kriva u okolini te tačke može definisati jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(t)$, gde je vektor položaja $\vec{r}(t)$ neprekidno diferencijabilna funkcija po argumentu t i u tački V je izvod $\vec{r}'(t) \neq 0$. U protivnom slučaju tačka V je *singularna*. Neka je $\vec{r}^{(p)}(t)$ prvi od nule različit izvod u tački V i $\vec{r}^{(q)}(t)$ prvi od izvoda nekolinearan vektor u tački V s vektorom $\vec{r}^{(p)}(t)$. Razlikuju se tada slučajevi: 1. ako je p neparno, a q parno, onda kriva u okolini tačke V ima isti oblik kao i u okolini *obične* tačke (Boškovićev četvrti slučaj); 2. ako su p i q neparni, onda je tačka V *prevojna* tačka (Boškovićev treći slučaj); 3. ako je p parno a q neparno, onda je V *povratna tačka prve vrste* (Boškovićev drugi slučaj); 4. ako su p i q parni, onda je V *povratna tačka druge vrste* (Boškovićev prvi slučaj).

Za parabole koje Bošković pominje u ovom paragrafu videti belešku 53.

80) Bošković se ovde, kao i u prethodnom paragrafu, dotiče singularnih tačaka ravanske krive, pa zbog toga podvucimo sledeće.

Neka je ravanska kriva K definisana jednačinom $F(x, y) = 0$ u Descartesovim koordinatama. *Singularne* tačke krive K mogu biti samo one u kojima je $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ i $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$. Singularna tačka je drugog reda, ako je bar jedan od drugih parcijalnih izvoda funkcije $F(x, y)$ u njoj različit od nule. Koeficijent pravca tangente y' krive K u toj tački određuje se iz jednačine

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}y' + \frac{\partial_2 F}{\partial y^2}y'^2 = 0.$$

Ako je u njoj ispunjen uslov $\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0$, onda je to tačka *samopresecanja*, kao što je tačka V (sl. 17); ako je $\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$, onda je to *izolovana* tačka; ako je $\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, onda je to *povratna* tačka prve odnosno druge vrste ili tačka *samododirivanja*.

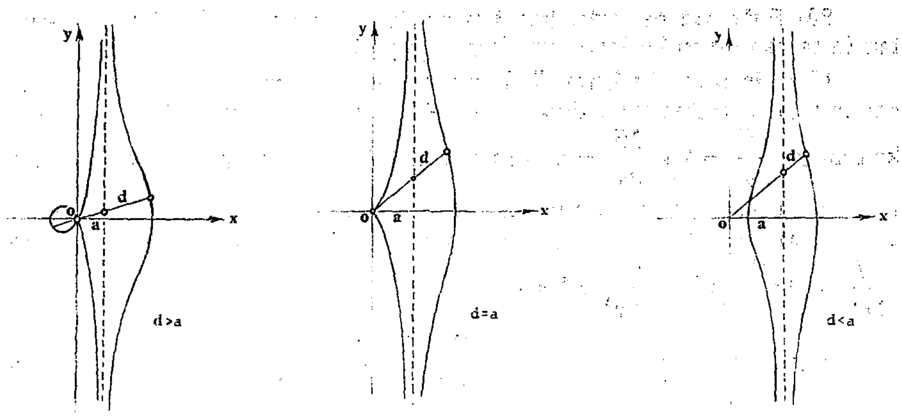
Ako su u singularnoj tački krive K svi parcijalni izvodi funkcije $F(x, y)$ zaključno do reda n-1 jednaki nuli, a bar jedan od parcijalnih izvoda reda n različit od nule, onda je to *singularna tačka reda n* krive K.

Bošković kao primer za svoja razmatranja uzima *konhoidu*, pa je potrebno nešto reći o ovoj krivoj.

Konhoida neke ravanske krive C je ravanska kiva koja se dobija umanjivanjem ili uvećavanjem radijus vektora svake tačke krive C za jednu istu dužinu d. Ako je $\rho = f(\varphi)$ jednačina krive C u polarnim koordinatama, onda je jednačina njene *konhoide* $\rho = f(\varphi) \pm d$. Obično se pod konhoidom podrazumeva konhoida prave i ona se zove *Nikomedova konhoida*, prema antičkom geometru Nikomedu (250—150), koju je koristio u rešavanju problema trisekcije ugla.

Ako je a rastojanje pola O od dane prave, onda je jednačina Nikomedove konhoide $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} \pm d$ ili u Descartesovim koordinatama $(x - a)^2 (x^2 + y^2) - d^2x^2 = 0$ sa početkom u O.

Nikomedova konhoida je, kao što se vidi iz njene jednačine u Descartesovim koordinatama, algebarska kriva četvrtog reda. Sastoji se iz dve beskonačne grane. U zavisnosti od odnosa dužina a i d jedna njena grana menja svoj oblik, tako da pol može biti *tačka samopresecanja* ($d > a$, sl. 2), *povratna tačka* ($d = a$, sl. 3) i *izolovana tačka* ($d < a$, sl. 4). Obe grane Nikomedove konhoide se asimptotski približavaju datoj pravoj koja se nalazi na rastojanju a od pola O.



Sl. 2 Sl. 3 Sl. 4

Ako $d \to a$, onda se tačka samopresecanja (dvostruka tačka) transformiše u povratnu tačku prve vrste („zbog promenjenih uslova krive, sama se kriva menja tako, da nestaje petlja $VCFIV$, što se dešava i kod konhoide, uvek se nastavljaju dva kraka MV i VN i nastaje šiljak MVN na sl. 18, u kom slučaju se uvek one dve tangente spajaju u jednu" — kaže Bošković).

No, ovde ipak treba primetiti da Boškovićeva konstatacija „i nikad se ne dešava u čitavoj geometriji da dva susedna luka spojena zajedničkom međom imaju u njoj dve tangente koje bi gradile neki ugao" vredi za *glatke krive*.

81) *Logistika* je dobro poznata eksponencijalna kriva, čija je jednačina, $y = a^x$, $(a > 0)$ u Descartesovim koordinatama. U zavisnosti od osnove a ona ima „beskonačan broj krakova s obe strane ose koji se odnose na isto geometrijsko mesto sa zajedničkom asimptotom beskonačnih krakova", što se jasno uvida elementarnom analizom date jednačine i crtanjem grafika funkcije a^x. Bošković je napisao raspravu o logistici. Videti: Željko Marković, *Ruđer Bošković*, T. 7, str. 189.

Bošković pominje *spirale*, pa je potrebno nešto reći o njima.

Ravanska *spirala* je ravanska kriva koja beskonačno puta okružuje neku fiksnu tačku O, tako da joj se svakim obilaskom oko nje približava ili udaljuje od nje. Ako je O pol u sistemu polarnih koordinata, onda je $\rho = f(\varphi)$ jednačina spirale, pri čemu je $f(\rho + 2\pi) > f(\varphi)$ ili $f(\varphi + 2\pi) < f(\varphi)$ za svako φ.

Poznate su, na primer: Arhimedova spirala $(\rho = a\varphi)$; Logaritamska spirala $(\rho = ae^{k\varphi})$; parabolička spirala $(\rho = a\varphi^2)$; hiperbolička spirala $\left(\rho = \frac{a}{\varphi}\right)$ i mnoge druge. Osobine mnogih spirala koriste se u rešavanju raznih praktičkih zadataka.

Kad Bošković kaže da se lukovi spirala „stalno okreću oko date tačke, a da se u nju ne vraćaju, ili se u beskonačnosti približavaju datim kružnicama ili datim ovalima, stalnim kružnim kretanjem, a da ih ipak nigde ne seku", onda je tu očigledno reč o *asimptotskoj tački* odnosno *asimptotskoj kružnici* ili *asimptotskoj ovali* odgovarajuće spirale.

Na primer, ako je $\rho = f(\varphi)$ jednačina spirale i $\lim\limits_{|\varphi| \to \infty} \rho = \lim\limits_{|\varphi| \to \infty} f(\varphi) = c$ onda je $\rho = c$ jednačina njene *asimptotske kružnice*; ako je $c = 0$, imamo *asimptotsku tačku* (na primer, u slučaju logaritamske spirale).

Spirala može biti i prostorna linija. Ona beskonačno puta kružno obilazi neku datu osu. Na primer, cilindrična zavojnica, čije su jednačine u parametarskom obliku: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $z = kt$.

Ovde je reč o konhoidi kružnice (videti definiciju konhoide u belešci 80). To je dobro poznata kriva koja se zove *Paskalov puž* ($\rho = 2a \cos \varphi + d$), a njen poseban slučaj je *kardioida* ($d = 2a$).

Četvrtu knjigu svojih *Elemenata celokupne matematike*, kao što smo to već istakli u belešci 69, Bošković nije uspeo da napiše.

82) Boškovićevo „Geometrijsko mesto koje je preneto na neku osu preko ordinata", u smislu moderne matematičke analize, je očigledno grafik u Descartesovim koordinatama funkcije jednog realnog argumenta sa realnim vrednostima koja je definisana i neprekidna u nekom intervalu. Termin *nemoguća ordinata* (ordinata impossibilis) u Boškovića treba da označi nepostojanje realne vrednosti funkcije (na primer, slučaj kada je vrednost funkcije imaginaran broj) za izvesnu vrednost njenog argumenta.

83) Bošković ovde pokazuje da se njegovo „geometrijsko mesto" ne može nigde prekinuti, polazeći očigledno od suprotne pretpostavke. Pri tome je u „prvom slučaju" u termin *nemoguća ordinata* (ordinata impossibilis) uključio nepostojanje ordinate, što je eksplicitno naglasio tek u idućem paragrafu (Diximus autem ordinatam impossibilem, ut includeremus etiam casum, quo ordinata sit nulla).

84) Na osnovu nemogućnosti dodira dve tačke, Bošković tvrdi da se pomenuto geometrijsko mesto ne može nigde prekinuti. Jer, ako bi ta mogućnost postojala, onda „u prvom slučaju tačka *H* bi mogla ležati neposredno posle tačke *G*, a ordinata posle ordinate, i samo tim načinom bi se osujetila snaga dokaza", naime, u tački *G* bismo imali ordinatu *CG*, a u tački *H* ordinatu nula.

Ako bi se uzelo da se pomenuto geometrijsko mesto sastoji iz tri linije *DC*, *GH* i *EF* (komponovano definisanje funkcije!), onda bi se prvi slučaj sveo na drugi, jer bi tački *G* odgovarale dve ordinate, a naime ordinata *CG* i ordinata nula, kaže Bošković. Međutim, tada bismo, u smislu pojmova moderne matematičke analize, imali situaciju *leve granične vrednosti funkcije* (ordinata *CG*) i *desne granične vrednosti funkcije* (ordinata nula) u tački *G*, tj. tačka *G* bi bila *tačka prekida sa konačnim skokom*.

Možemo, dakle, konstatovati, da je Bošković, u nastojanju da pomoću geometrijskih krivih što egzaktnije i jasnije ilustruje svoj pojam neprekidnosti, odnosno zakon kontinuiteta, čulom oštroumnog matematičara osetio niz suptilnih problema matematičke analize koji će dobiti svoja precizna rešenja mnogo kasnije, u periodu njene aritmetizacije.

85) Videti belešku 2.

86) Videti takođe belešku 2.

Zanimljivo je ovde navesti sledeće. U *Histoire générale des sciences* (Tome II, La science moderne, Paris, 1958, str. 253) povodom Descartesovih zakona kretanja, između ostalog, piše: „La troisième loi entend préciser les modalités de communication du mouvement entre deux corps qui viennent à se rencontrer. Elle s'accompagne de sept règles sur le choc des corps, qui sont toutes inexactes, sauf la première relative au choc mutuel de deux corps égaux, animés de vitesses égales" (Treći zakon nastoji da precizira modalitete veza kretanja između dva tela koja će se susresti. Njemu se pridružuju sedam pravila o sudaru dva tela, koja su sva netačna, izuzev prvog koji se odnosi na uzajamni sudar dva jednaka tela, animirana jednakim brzinama).

87) Reč je ovde o Boškovićevoj formulaciji zakona (principa) kontinuiteta.

88) Videti belešku 41.

Ovde je reč o formulaciji zakona kontinuiteta koju je dao J. Bernoulli.

89) Videti belešku 3.

Uz puno obzira prema Maupertiusu, koga je neobično cenio, Bošković želi da opovrgne Maupertiusove prigovore protiv zakona kontinuiteta, jer se plašio da Maupertiusov ugled naučnika i mislioca, koji je tada uživao u Evropi, ne naškodi njegovoj teoriji sila koje vladaju u prirodi, a kojoj je osnova sam zakon kontinuiteta.

90) Tretirajući zavisnost jednog kvantiteta od drugog ili od više njih koji nisu međusobno zavisni, Bošković se implicite dotiče funkcije jednog ili više realnih argumenata sa realnim vrednostima.

91) Reč je o *funkcionalnom* izražavanju međusobne zavisnosti kvantiteta u vidu: funkcije jednog realnog argumenta sa realnim vrednostima, odnosno u vidu geometrijske linije kao grafika te funkcije u Descartesovim koordinatama, ako je reč o međusobnoj zavisnosti dva kvantiteta; funkcije dva realna argumenta sa realnim vrednostima, odnosno u vidu geometrijske površi kao grafika te funkcije u Descartesovom koordinatnom sistemu trodimenzionalnog prostora, ako je reč o međusobnoj zavisnosti tri kvantiteta; funkcije više od dva realna argumenta sa realnim vrednostima, kada međusobna povezanost kvantiteta „prevazilazi moć geometrije koja raspolaže samo sa tri dimenzije", tj. kada nije moguća geometrijska interpretacija analogna onoj u prethodna dva slučaja.

Ako se ima u vidu razvitak matematike posle Boškovića (višedimenzionalna geometrija, matematički prostori, infinitezimalna analiza funkcije više promenljivih), može se kazati da on svojim razmatranjima nazire, intuicijom vidovitog geometričara i analiste, široke mogućnosti algebarske finitne, geometrijske i infinitezimalne analize, uprkos njihove tadašnje ograničenosti („to se zbiva kod transcendentnih krivih do kojih ne dostiže finitna algebra, već je za to potreban infinitezimalni račun, a može biti da se takve povezanosti izražavaju linijama i površima, za čije izražavanje nije dovoljna finitna algebra koja posmatra konačne kvantitete i njihove konačne potencije, a nije za to dovoljan ni infinitezimalni račun koji razmatra njihove infinitezimalne razlike bilo kojeg reda i njihove bilo koje potencije, nego se traži neka druga vrsta izražavanja o kojoj nemamo nikakve predstave").

Videti o Clairautu u belešci 3. On se bavio diferencijalnom geometrijom i njenim primenama. Tu je postigao značajne rezultate. Već je u trinaestoj godini objavio matematičku raspravu (Miscellanea Berolinensia, T. IV), a zatim u osamnaestoj godini života raspravu *Recherches sur les courbes à double courbure* (1731).

92) Reč je o međuzavisnosti više kvantiteta, odnosno o *funkcionalnoj* zavisnosti $U = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gde su kvantiteti $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ funkcije vremena t, tako da je kvanitet U *složena* i *neprekidna* funkcija vremena, tj. $U = F[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] = \Phi(t)$, pa se ona izražava neprekidnom linijom u Descartesovom koordinatnom sistemu UOt i „time

se uključuje i ona povezanost koja jedino postoji u prirodi za promenljve kvantitete u kojoj u pojedinim trenucima pojedini kvantiteti mogu imati samo po jednu veličinu, a povezanost je izražena linijom koju opisuje vrh tih ordinata". Primetićemo da iz ovoga sledi da promenljiv kvantitet *u prirodi*, po Boškoviću, može u jednom trenutku vremena imati samo *jednu jedinu* vrednost.

93) Reč je očigledno o geometrijskoj interpretaciji međuzavisnosti $U = F(x)$ dva kvantiteta U i x u Descartesovom koordinatnom sistemu UOx, sa svim vrlo dobro poznatim situacijama, kada je u pitanju *jednoznačnost* i *višeznačnost* funkcije $U = F(x)$, kao i njoj *inverzna* funkcija.

94) Data je, u stvari u Descartesovom koordinatnom sistemu, dosta uprošćena geometrijska interpretacija toka funkcionalne međuzavisnosti $U = F(x)$ dva kvantiteta U i x (rašćenje, opadanje, ekstremne vrednosti).

95) Na dosta uprošćen način posmatrana je geometrijska konvergencija ka nuli, odnosno divergencija ka beskonačnosti, jednog kvantiteta U kada se menja drugi kvantitet x, ako su oni u funkcionalnoj zavisnosti $U = F(x)$.

96) Ako je $U = F(x)$ funkcionalna međuzavisnost dva kvantiteta U i x, posmatraju se u jednostavnoj geometrijskoj interpretaciji slučajevi $U \to \infty$ i $U \to 0$ u zavisnosti od promene kvantiteta x, pri čemu se naročita pažnja obraća na slučaj prelaska vrednosti kvantiteta U sa pozitivne na negativnu (i obratno).

Uz ovo, videti još i belešku 51.

97) Razmatra se slučaj funkcionalne zavisnosti $U = F(x)$ dva kvantiteta U i x kada vrednost kvantiteta U postaje „nemoguća", odnosno „imaginarna" za određenu vrednost kvantiteta x. Ilustruje se taj slučaj jednostavnim geometrijskim primerima. Nastoji se očigledno, u duhu *Zakona kontinuiteta*, pokazati da svaka neprekidna kriva ili se u zatvorenom obliku vraća u sebe, ili se sa jednim ili više beskonačnih krakova proteže u beskonačnost i vraća iz beskonačnosti sa iste ili suprotne strane i *nigde* nema *skoka* odnosno *prekida* (kako je Bošković to zamislio i istakao u 55. paragrafu ove rasprave), pa i u slučaju kada vrednost kvantiteta postaje „nemoguća", odnosno kada odgovarajuća ordinata, u geometrijskoj interpretaciji funkcije $U = F(x)$, postaje „nemoguća".

U pogledu algebarskih krivih i algebarskih jednačina, zanimljiva je Boškovićeva primedba „da se taj slučaj u geometriji nigde ne može dogoditi, osim ako nisu postojale dve ordinate i ako obe odjedom nisu postale nemoguće" i da se to „primetilo i dokazalo već i u algebri: naime, da može postojati samo paran broj imaginarnih korena jednačine."

98) Boškovićevi primeri linija koje ilustruju vezu dva kvantiteta prema kojoj „pojedinim apscisama odgovaraju samo pojedine ordinate" (gde se „ne može uopšte dogoditi nestajanje kvantiteta koji odlazi u imaginarnost") su očigledno linije čije su jednačine u Descartesovim koordinatama $y^{2k}+1 = R(x)$, gde je $k = 0, 1, 2, \ldots$ i $R(x)$ racionalna funkcija od x.

Uz ovo, videti dalje belešku 92.

99) Ako je $U = U(x)$ funkcionalna međuzavisnost dva kvantiteta U i x i $U(a)$, $U(b)$ dve ekstremne vrednosti kvantiteta $U(x)$, gde je $a < b$, Bošković ističe raznovrsnost mogućnosti prelaza kvantiteta $U(x)$ sa vrednosti $U(a)$ na vrednost $U(b)$, kada x prolazi intervalom $[a, b]$, kao i odgovarajući grafički prikaz tog prelaza u Descartesovom koordinatnom sistemu, posebno ako je u pitanju beskonačna vrednost kvantiteta $U(x)$, odnosno beskonačni interval kojim prolazi kvantitet x.

100) Važno je primetiti da po Boškoviću za pojave u prirodi ne može biti prelaza kvantieta U sa $U(a)$ na $U(b)$ kroz beskonačnost, jer u prirodi „ništa ne može biti aktualno beskonačno", pa je zato najjednostavniji slučaj prelaza „onaj u kome nema odlaska u beskonačnost", dok se „ostali slučajevi tiču samo geometrijskog razmišljanja" (tj. slučajevi „odlaska u beskonačnost" su fiktivni, a ne stvarni).

Iako je Boškovićeva definicija međuveličina kvantiteta $U(x), x \in [a, b]$ između njegovih ekstremnih vrednosti $U(a)$ i $U(b)$, u izvesnom smislu, dosta zamršena, ona se može očigledno ovako iskazati: svaka veličina $U(\xi)$, $\xi \in (a, b)$ kvantiteta U je *međuveličina* njegovih ekstremnih vrednosti $U(a)$ i $U(b)$, ako zadovoljava uslov $\min [U(a), U(b)] < U(\xi) < \max [U(a), U(b)]$. U vezi sa ovim zanimljiva su u ovom paragrafu dalja Boškovićeva razmatranja toka krive u Descartesovom koordinatnom sistemu sa stanovišta dve dobro poznate teoreme o neprekidnim funkcijama, naime: 1. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna u zatvorenom intervalu $[\alpha, \beta]$ i ako je $f(\alpha) . f(\beta) < 0$, onda u intervalu $[\alpha, \beta]$ postoji bar jedan broj ξ tako da je $f(\xi) = 0$; 2. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna u zatvorenom intervalu $[\alpha, \beta]$ i ako je $f(\alpha) < f(\beta)$, odnosno $f(\alpha) > f(\beta)$, onda vrednost funkcije $f(x)$ ne može preći sa vrednosti $f(\alpha)$ na vrednost $f(\beta)$, dok x prolazi kroz sve vrednosti između α i β, a da ne prođe kroz sve vrednosti između $f(\alpha)$ i $f(\beta)$.

Obe navedene teoreme poznate su u matematičkoj analizi kao Bolzano-Cauchyeve teoreme, po Bernhardu Bolzanu (1781—1848), istaknutom češkom misliocu i matematičaru koji je za prvu teoremu dao analitički dokaz (dokaz druge teoreme zasniva se na prvoj teoremi) i po Augustinu Cauchyu (1789—1857), velikom francuskom matematičaru, osnivaču moderne matematičke analize, koji je, posle Bozanoa, dao čisto aritmetičke dokaze tih teorema i istakao njihov značaj u teoriji neprekidnih funkcija.

Dokaz prve teoreme Bolzano je izložio u svom delu *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten die ein entgegengesetztes Resultat gewähren wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* (Prag, 1817). Ovo delo zauzima značajno mesto u razvitku matematičke nalize po novim idejama i metodama, kada je u pitanju proces aritmetizacije analize i njenog oslobađanja od oslanjanja na „geometrijsku očevidnost" u definisanju pojmova i dokazivanju teorema.

Bolzano u navedenom delu podvrgava kritičkoj analizi dokaze pomenute prve teoreme koji su se zasnivali na geometrijskom tumačenju, da neprekidna linija čije su ordinate najpre pozitivne, a zatim negativne (ili obratno), mora preseći apscisnu osu bar u jednoj tački koja leži između tih ordinata (pozitivnih i negativnih). Tako su teoremu dokazivali matematičari Abraham Kästner (1719—1800), Alexis Clairaut (1713—1768), Sylvestre Lacroix (1765—1843) i drugi, a kao što se vidi tako ju je dokazivao i Bošković, koga Bolzano ne pominje, jer mu verovatno nisu bila poznata Boškovićeva razmatranja u vezi sa navedenim teoremama, pošto bi svakako, uz navedene matematičare (koje je kritikovao), pomenuo i njega u svojoj kritičkoj analizi, kao što ga na drugom mestu pominje u „vezi sa paradoksima" beskonačnog.

101) U paragrafima 117 i 118 Bošković nastavlja sa grafičkim predočavanjem toka linije koja „čini vidljivom povezanost" kvantiteta U i x i prolaz kvantiteta U kroz sve međuveličine, dok x prolazi intervalom $[a, b]$, sa krajnjim ciljem da pokaže da zakon kontinuiteta isključuje bilo kakvi skok i da tako opovrgne Maupertiusov prigovor (Videti, uz ovo, još beleške 3, 89 i 92).

102) Boškovićeva razmatranja u ovom paragrafu zanimljiva su sa gledišta pojma *inverzne* funkcije i uslova njene *egzistencije*. Naime, on grafički u Descartesovom kordinatnom sistemu posmatra kvantitet U u funkcionalnoj zavisnosti od vremena t, tj. $U = F(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, pa se zaključak njegovih razmatranja, geometrijski obrazložen, može iskazati na sledeći način: *funkcija* $U = F(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ — *neprekidna i rastuća* — *ima inverznu funkciju* $t = F^{-1}(U)$, $U \in [CD, QE]$. To je od značaja kada se uzme u ozbir stanje razvitka teorije funkcija realnog argumenta sa realnim vrednostima u vremenu kada se pojavila ova Boškovićeva rasprava.

103) Boškovićeva razmatranja funkcionalne zavisnosti $U = F(t), t \in [\alpha, \beta]$ u paragrafima 120 i 121 od interesa su sa stanovišta razvitka pojma *neprekidne* funkcije, jer se ona očigledno na savremen način, sa neznatnim dopunama, mogu ovako izraziti: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $|\Delta t| < \delta \Rightarrow |\Delta U| < \varepsilon$. Ovim je jasna vrednost tih Boškovićevih razmatranja u svetlosti razvitka pojma *neprekidne* funkcije.

104) Očigledno je da su Boškovićeva razmatranja u ovom paragrafu od interesa sa stanovišta pojma *prekidne* funkcije $U = F(t)$ u tački $t = t_0$, kada je reč o *prekidu sa konačnim skokom*, jer se ona, sa neznatnim dopunama, mogu na savremen način iskazati ovako:

$$\lim_{t \to t-0} U(t) = M \neq U(t_0) = \lim_{t \to t+0} U(t),$$

gde je t_0 bilo koja od apscisa *AR*, *AT*, *AQ* i *M* jedna od korespondentnih ordinata *CD*, *RP*, *TV*, *OL*.

O relativnosti pojmova „veliko i malo", na kojoj insistira Bošković, videti belešku 14.

105) U pogledu aporije *Ahilej i kornjača*, videti beleške 32—38, a sem toga, za ovaj paragraf, videti beleške 21—27 i 30.

Bošković ovde veli: „U čitavom pak neprekidnom nizu veličina, kao i u svakom neprekidnom (kvantitetu), jedna iedina zajednička međa spaja ono što prethodi sa onim što sledi..." (... unicus terminus communis ea, quae praecedunt, cum iis, quae consequuntur conjungat...), a ranije (paragrafi 8 i 9): „U svakom neprekidnom kvantitetu treba da se razlikuje onošto je međa ili granica od onoga čija je međa. Ono prvo mora da bude nedeljivo, iz razloga što je međa, a ovo drugo mora da bude beskrajno deljivo. Međa linije je tačka, međa površi je linija, a površ je međa čvrstog tela... i stoga tačka mora biti potpuno nedeljiva, a linija nedeljiva po širini, površ po debljini ili dubini." I zatim na drugom mestu (paragraf 10): „Iz same prirode međe proizilazi i to da međa ne može dodirivati među. Jer uvek treba smatrati da kontinuum leži između onih (delova) kome su međe oni sami. I ne može jedan biti kraj prethodnog a drugi početak narednog, jer po prirodi kontinuuma (br. 6) njihova međa mora biti zajednička. A to sad biva još očiglednije iz nedeljivosti same međe. Jer je ono što je nedeljivo ili međusobno udaljeno ili, ako mu izčezne rastojanje, stapa se u jedno. A ono što je uopšte bez protežnosti ili se uopšte ne dodiruje ili se dodiruje u potpunosti. U prvom slučaju je udaljeno jedno od drugog; a prodire i stapa se u jedno — u drugom slučaju".

Rezimirajmo ova Boškovićeva razmišljanja o neprekidnom kvantitetu i uporedimo ih sa poznatim Dedekindovim razmišljanjima koja se odnose na aksiom neprekidnosti prave (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872)

Po Boškoviću je svaki neprekidni kvantitet omeđen; ima međe (donju i gornju među — terminus seu limes). Bošković postulira *nedeljivost* međe i *beskonačnu deljivost* kvantiteta. Između međa uvek leži neprekidno, pa ne može međa dodirivati među; *one nisu elementa contigua*. I dalje: međe, budući da su nedeljive, one su ili međusobno odvojene ili se spajaju u jedno. Tako shvaćena međa je *zajednička* za neprekidno koje prethodi i neprekidno koje sledi, odnosno za *continuum praecedens* C_p i *continuum sequens* C_s. Ne može jedna međa biti kraj (finis) za continuum C_p, a druga početak (principium) za continuum C_s, *„jer po prirodi neprekidnog njihova međa mora biti zajednička"*, tvrdi Bošković, i da u svakom neprekidnom kvantitetu *„jedna jedina međa spaja ono što prethodi sa onim što sledi."*

Linija je, po Boškoviću, primer *neprekidnog* kvantiteta, a *tačka* je njena *međa*. Zamisli li se na liniji continuum praecedens C_p i continuum sequens C_s, onda se mora *postulirati* jedna *jedina* tačka kao njihova *zajednička međa*, jer bi se, izlazi prema Boškoviću, drukčija solucija protivila *prirodi neprekidnosti*. Ta zajednička međa, prema Boškoviću, je, dakle, *conditio sine qua non* neprekidnosti.

Uporedimo li način na koji je Bošković uočio matematičku situaciju u vezi sa neprekidnošću linije i način na koji je istu situaciju uočio Dedekind, onda je očigledna *analogija* između Boškovićevog i Dedekindovog izlaza iz te situacije, a naime: a) Dedekindova prva klasa K_1 tačaka prave u aksiomu neprekidnosti je *analogon* Boškovićevom neprekidnom koje predhodi (continuum praecedens) C_p, a Dedekindova druga klasa K_2 tačaka prave je *analogon* Boškovićevom neprekidnom koje sledi (continuum sequens) C_s; b) Dedekindov zahtev, *„kojim pravu zamišljamo neprekidnom"*, da postoji jedna *jedina tačka* D koja proizvodi podelu prave na klase tačka K_1 i K_2 je *analogon* Boškovićevom zahtevu da postoji jedna *jedina* međa B neprekidnog koji predhodi C_p i neprekidnog koji sledi C_s, jer to, po Boškoviću, leži u samoj *prirodi neprekidnog*, odnosno u prirodi neprekidnosti linije.

Bošković je, dakle, *anticipirao* Dedekindov aksiom neprekidnosti prave; njegova međa $B = (C_p/C_s)$ i Dedekindova *postulirana tačka* u aksiomu neprekidnosti $D = (K_1/K_2)$ su *analogoni*.

Videti: E. Stipanić, *O linearnom kontinuumu Rudera Boškovića*, Matematički vesnik 4 (19), Sv. 3, 1967 str. 281—282.

106) *Princip dovoljnog razloga* (principium sive lex rationis sufficientis) Leibniz je formulisao u svom delu *La Monadologie*, istakavši da „Naša umovanja počivaju na dva *velika principa*, na *principu protivurečnosti*... . I *principu dovoljnog razloga*, po kojem smatramo da se nijedna činjenica ne bi mogla naći istinitom ili postojećom, niti bi se mogao naći ijedan istinit iskaz a da u njima ne bude dovoljnog razloga zašto je to tako a ne drukčije. Iako ti razlozi najčešće nam ne mogu nikako biti poznati" (Videti: Lajbnic, *Monadologija*, predgovor, prevod i istorijski komentari Dr Dušana Nedeljkovića, Kultura, Beograd, 1957, str. 53 i 109—111).

Leibniz je u logiku i filozofiju uopšte eksplicitno uveo *princip dovoljnog razloga*, priznavši ga za jednog od osnovnih zakona u teoriji spoznaje, pored dobro poznatih osnovnih zakona logike. Ideje izražene u *principu dovoljnog razloga* bile su sadržane, i pre Leibniza, u raznim logičkim teorijama koje su ih, vrlo često, tretirale ne samo u logičkom, nego i u ontološkom smislu. Leibniz ga je uveo radi iznalaženja „empirijskih istina", za koje, po njemu, nisu dovoljni principi formalne logike, kao što su dovoljni za iznalaženje „istina uma", i primenio ga je u dokazivanju *Zakona kontinuiteta*.

Leibnizovu argumentaciju, kao i njegovih pristalica, u dokazivaju *Zakona kontinuiteta*, zasnovanu na *principu dovoljnog razloga*, Bošković je odlučno pobijao, naglasivši još ranije u svojoj *Raspravi o plimi i oseci* (Dissertatio de maris aestu, Romae, 1747) da ona „nikada ne može biti ni od kakve koristi pri utvrđivanju bilo čega i bilo na koji način, a još mnogo manje za dokazivanje".

107) Tarkvinije Oholi se smatra kao poslednji rimski kralj. Predanje ga slika kao tiranina koji se surovo obračunavao sa svojim podanicima i time izazvao opšte nezadovoljstvo. Njegov sin je obeščastio ženu svog ro-

đaka Tarkvinija Kolatina — Lukreciju. Ova je to ispričala svom mužu i počinila samoubistvo. Nedela Tarkvinijevaca i smrt Lukrecije izazvali su ustanak koji se završio progonstvom Tarkvinijevaca i padom kraljevske vlasti u Rimu. (O ovome videti: N. M. A. Maškin, *Istorija starog Rima,* Beograd, 1951, str. 76).

108) U paragrafima 126—130 Bošković nastoji da opovrgne Leibnizovo dokazivanje i njegovih pristalica zasnovano na *principu dovoljnog razloga,* iznoseći potanko svoje razloge delimično teološke prirode (na primer, u vezi sa slobodnom voljom i bogom kao beskonačno savršenim stvaraocem — u odnosu na to videti: Lajbnic, *Monadologija,* str. 53—63 i odgovarajuće Nedeljkovićeve komentare). Pri tom Bošković ne gubi iz vida ontološku stranu *principa dovoljnog razloga* („Treba, dakle, da postoji razlog, zašto da nešto pre postoji nego da ne postoji, ali ćemo uvek imati neki fizički razlog kod stvorenih stvari, naime neki uzrok, dok moralni razlog neće uvek postojati, i moći ćemo se držati one izreke: *mesto razloga postoji volja*" — paragraf 127),da bi u paragrafu 130 zaključio: „Dodajemo samo jedno: između ostalih mnogih stvari, u kojima traženje dovoljnog razloga gubi snagu, je baš i ovo isključenje skoka iz prirode. Jer šta zabranjuje da postoje izvesni razlozi zbog kojih bi skok određene veličine mogao biti mnogo korisniji od svih drugih, kao što su ljudima koji se penju na gornje spratove od svega najviše korisne stepenice neke određene visine?"

Podvrgavajući kritici *princip dovoljnog razloga* u vezi sa *principom uzročnosti* pojava i stvari u prirodi (paragraf 130), Bošković kaže da „Lajbnicove pristalice nameću primer Arhimeda koji je bez dovoljnog razloga izveo ravnotežu na osnovu jednakih težina... Međutim, ta Arhimedova ravnoteža nije potekla iz negativnog principa, nego iz dokaza koji se lako svodi na utvrđeni oblik i na utvrđenu silu". Uz ovo treba primetiti da je sam Leibniz istakao da on nije ex novo izmislio *princip dovoljnog razloga,* nego da ga je implicitnog našao već u Arhimedovom dokazu da vaga mora ostati u ravnoteži ako se na oba njena tasa stave jednaki tereti, jer (po Arhimedu) ne postoji razlog zbog kojeg bi prevagnula na jednu ili drugu stranu. (O ovome videti: Ludovico Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico,* Vol. 2, Milano, 1970, str. 604—605).

Zanimljivo je pomenuti da Bošković kritikuje i Eulera zbog toga što je primenio „princip dovoljnog razloga" u jednom dokazu koji se odnosi na jedan problem kretanja, iako za njega kaže da je „doista vrhunski geometričar našega stoljeća i analista, čiji um u matematičkim naukama neće moći nikada dosta ni hvaliti ni diviti mu se".

Videti: Željko Marković, *Ruđe Bošković,* T. 1, str. 136—137.

109) Odbacivši *princip dovoljnog razloga,* Bošković veli da će izneti druga dva: jedan koji se zasniva na *metafizičkim principima,* a drugi na *indukciji.*

Prvi razlog podvlači nemogućnost skoka kvantiteta u prirodi, tj. njegov „trenutni prelaz sa jedne veličine u drugu, preskočivši sve međuveličine", pošto „bilo koji kvantitet, prema zakonima prirode, može u pojedinim momentima imati jednu veličinu", odnosno on je *jednoznačna* funkcija vremena, što je Bošković već ranije isticao (videti beleške 92 i 101). Sve ovo ilustruje primerima gustine i brzine pokretnog tela; posebno je apostrofiran slučaj *replikacije* gustine i brzine (Videti o replikaciji u belešci 28).

110) Nemogućnost skoka kvantiteta u prirodi izlazi za Boškovića iz analize grafika neprekidne (jednoznačne) funkcije, kojom se bavio u paragrafima 97 i 99. Videti beleške 82 i 84.

111) Analizom putanje pokretne tačke u lokalnom kretanju, za koju uvek pretpostavlja da je opisana „*neprekidnim povlačenjem bez ikakvog prekida*", Bošković dokazuje nemogućnost skoka kvantiteta u prirodi (slučaj *replikacije* kretanja tačke, koju Bošković isključuje iz prirode — videti belešku 28 — i slučaj kada za neprekidno vreme tačka ne bi nigde postojala), a „Sva snaga dokaza uvek leži u isključenju trenutka najbližeg trenutku, tačke najbliže tački, linije koja ima drugu najbližu liniju, i zato i u isključenju granice najbliže granici bilo kojeg niza koji traje u neprekidnom vremenu, ili niza predočenog neprekidnom linijom", tj. u *nemogućnosti* dodirivanja dve granice, što je Bošković već ranije utvrdio (za ovo videti beleške 5, 6, 24, 25, 26 i 84).

112) U ovom paragrafu, kao i u 135. i 136., pred nama je, kratko rečeno: koncizno, primerima ilustrovano, i vrlo jasno izlaganje uloge i zadatka *indukcije*, kao istraživačke metode, u prirodnim naukama, u čemu je, što treba posebno istaći, svojim stavovima Bošković vrlo blizak modernim metodolozima i logičarima.

Na indukciji Bošković zasniva svoj drugi razlog kojim dokazuje zakon kontinuiteta, čime se dalje bavi u narednim paragrafima.

Za pitanja Boškovićeve indukcije videti: Dušan Nedeljković, *La philopsophie naturelle et relativiste de R. J. Boscovich*, Paris, 1922, str. 121—132; *Ruđer Bošković o indukciji*, Glas CCLV„ knj. 11, Odeljenja društvenih nauka SAN, Beograd 1962, str. 65—81; *Boscovich sur l'induction*, Atti del Symposium Internazionale Celebrativo del 250 anniversario della nascità di R. G. Boscovich (6—8 ottobre 1962), Milano, 1963, str. 251—270.

113) Istaknuta je neprekidnost, ostvarena u promenama geometrijskih kvantiteta, koja se tako čuva „da bi se geometrija, gde je potrebno, obratila radije tajnama beskonačnosti nego što bi dopustila određeni skok" i ona se održava „čak i u neodređenim algebarskim formulama koje izražavaju prosta geometrijska mesta, u kojima nigde ne postoji skok gde se radi o konačnim kvantitetima, a ne postoji čak nigde ni u beskonačnim, da se ne bi mogao izbeći preko nekakvih tajni beskonačnosti". O svemu ovome Bošković je, u raznim situacijama, ranije raspravljao (videti beleške 48—68).

114) Istaknuta je neprekidnost ostvarena u kretanjima planeta i kometa, u smenjivanju dana i noći, u izlasku i zalasku Sunca, u kretanju bačenog tela i u drugim kretanjima koja „zadržavaju kontinuitet, jer ga zadržavaju i same sile koje ga stvaraju" (na primer, u slučajevima sile teže, elastične i magnetne sile), pa „otuda kod prirodnih kretanja... menjanje pravca biva uvek postepeno". I u oblicima koje priroda stvara kod raznih tela Bošković nalazi da je sačuvana neprekidnost (na primer, u krivinama rečnih korita, lišća i grana na drveću i kod kameja), pa zaključuje: „Bio bi beskrajan posao nabrajati stvari u kojima se zapaža kontinuitet u prirodi. Bolje je, svakako, tražiti da se iznese slučaj gde kontinuitet u prirodi nije sačuvan, a takav se neće uopšte moći izneti".

115) U ovom i prethodnom paragrafu Bošković, kao što se vidi, različito od Leibnizovih pristalica, tumači zašto se u povratnim tačkama krivih ne narušava neprekidnost kada je reč o menjanju pravca toka krive, koje je izraženo promenom položaja tangente krive. Videti još i belešku 77, naročito u vezi s konhoidom.

116) Ovde se na konkretnim primerima ističe uloga beskonačno daleke tačke prave, kao zajedničke međe njena dva suprotna beskonačna kraka, u očuvanju kontinuiteta.

Videti za ovo još i belešku 49.

117) Istaknuto je kako se ostvaruje neprekidnost u promenama krivine krivih, a posebno slučaj prelaza sa negativne na pozitivnu krivinu, ili obratno, tj. slučaj *prevojne* tačke, koji se prelaz „ne dešava, ako poluprečnik kružnice krivine nije ili iščezao, ili u beskonačnost porastao", što znači kada je krivina ili beskonačna ili nula. A ni centar krivine „skokom neće nigde promeniti mesto" — kaže Bošković — „niti stranu, osim ako ne pređe preko same tačke krive ili beskonačnosti, što se u geometriji može objasniti na hiljadu primera".

Videti za ovo još i beleške 50 i 51.

118) Posmatra se kontinuirani prelaz dvostruke tačke u povratnu i ističe se očuvanje kontinuiteta u promenama položaja tangenata u dvostrukoj tački i u povezanosti odgovarajućih lukova krive koja se ostvaruje petljom i neposredno povratnom tačkom, kao i u promenama položaja tangenata petlje uopšte.

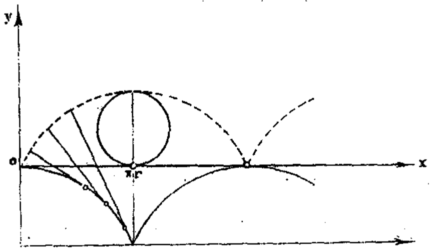
Vdeti za ovo još i belešku 80.

119) Bošković potanko analizira kako se održava kontinuitet kod *evolvente* petlje kad dvostruka tačka prelazi u *povratnu*, iako izgleda „da je narušen kontinuitet, ali se on ipak i tada potpuno očuva" ističe Bošković, Da bi e shvatio tok Boškovićevih razmišljanja, potrebno je podsetiti se na sledeće.

Neka je C data kriva. Geometrijsko mesto centara krivine krive C, ili obvojnica njenih normala, je kriva E koja se zove *evoluta* krive C. U odnosu na evolutu E kriva C zove se *evolventa*. Ona je *ortogonalna trajektorija* tangenata evolute, tj. *tangente evolute su normale evolvente.*

Za uzajamni odnos evolute i evolvente od osnovnog značaja je sledeći stav: ako se poluprečnik krivine R evolvente monotono menja, onda je njegov priraštaj pri promeni centra krivine iz početne u krajnju tačku ma kojeg luka evolute dužine L, jednak dužini L luka, odnosno ako se za pozitivan smer na evoluti uzme onaj u kome poluprečnik krivine evolvente raste, onda je $dR = dL$, tj. *diferencijal luka evolute jednak je diferencijalu poluprečnika krivine evolvente.*

Jasno je, dakle, da je petlja na sl. 17 *evoluta* i da Bošković posmatra potanko geometrijski kako se menja *evolventa petlje*, kada dvostruka tačka V prelazi u povratnu tačku V na sl. 18. Očigledno je da pri tome koristi navedeni stav o uzajamnom odnosu poluprečnika krivine evolvente i luka evolute („... za određivanje tačaka nastale krive treba da se na tangentama VA', IK, FH, CE, VB, OR uzmu segmenti jednaki lukovima VP, IVP, $FIVP$, $CFIVP$, $VCFIVP$, $OVCFIVP$"), kao i praktičnu konstrukciju evolvente koja sledi iz njene definicije i navedenog stava, naime: *ako se oko evolute obvije konac, pa se odmotava, držeći ga zategnutog, njegov kraj će opisati evolventu.* U vezi s ovim, a da bi bio jasniji u svom izlaganju, Bošković ističe primer *cikloide* („... kao što se obično dešava kod cikloide koja na taj način stvara sebe samu").



Sl. 5

Naime, cikloidu (sl. 5 — puna linija), kao što je poznato, definišu jednačine: $x = r(t + \sin t)$, $y = r(\cos t - 1)$. Njena evoluta je ponovo cikloida (sl. 5 — isprekidana linija) koju definišu jednačine: $X = r(\tau - \sin\tau)$, $Y = r(1 - \cos\tau)$. Poslednje jednačine dobijaju se iz prethodnih primenom transformacija $x = X - r\pi$, $y = Y - 2r$, $t = \tau - \pi$, što pokazuje da je evoluta cikloide također cikloida, kongruentna sa datom cikloidom, ali u odnosu na nju translatorno pomerena na niže za $2r$ i u levo za $r\pi$. Prema tome i *evolventa* cikloide je također cikloida, kongruentna sa datom cikloidom. Na ovaj način je jasno zašto se Bošković poslužio cikloidom kao primerom, istakavši da ona „stvara sebe samu".

U vezi sa uzajamnim odnosom evolute i evolvente, pomenimo još i sledeće, što bi moglo doprineti boljem razumevanju Boškovićevih razmatranja u ovom paragrafu. Naime: tački ekstremuma poluprečnika krivine evolvente (temenu evolvente) odgovara, uopšte uzev, povratna tačka evolute; tački evolvente u kojoj je njena krivina jednaka nuli odgovara beskonačno daleka tačka evolute i saglasno njoj beskonačna grana evolute, kojoj je asimptota normala evolvente u tački krivine nula.

120) Misli se, verovatno, na krivu, kao geometrijsko mesto tačaka, koja je sastavljena od više krivih (odnosno od lukova više raznih krivih), tj. od više geometrijskih mesta ili njihovih delova (što odgovara, na primer, komponovanom definisanju funkcije realnog argumenta sa realnim vrednostima) i na razne slučajeve takve krive, u kojima se „javlja neverovatna težnja geometrije da sačuva kontinuitet, pozivajući pritom u pomoć, gde je potrebno, i neke tajne".

121) Reč je, očigledno, o slučaju kada funkcija realnog argumenta sa realnim vrednostima gubi svoju vrednost, jer postaje imaginarna, pa se i u tom slučaju „javlja neverovatna težnja geometrije da sačuva kontinuitet", što se posebno, posmatrajući sve u Descartesovim koordinatama, ogleda u Boškovićevoj interpretaciji toka funkcija $y(x)$ pomoću kružnice čija jednačina $x^2 + (y - a)^2 = R^2$ definiše te funkcije.

122) Za kontingentni ugao, o kome je ovde reč, videti belešku 71, datu uz 83. paragraf.

Ovde je reč o Boškovićevoj raspravi u kojoj tretira kretanja po konusnim presecima pod uticajem centralne sile prema Newtonovom zakonu *(De motu corporis attracti in centrum immobile viribus decrescentibus in ratione distantiarum reciproca duplicata in spatiis non resistentibus...*, Romae, 1743) i u kojoj u nekim Eulerovim razmatranjima, zasnovanim na analizi određenih analitičkih relacija, otkriva „pogrešku krive argumentacije", kada je Euler smatrao da se „više treba pouzdavati u račune nego u naš sud", što predstavlja ono „slepo vodstvo formula" koje Bošković prigovara Euleru.

O ovome, kao i o slučaju kada sila opada obrnuto proporcionalno kubu rastojanja, videti: Željko Marković, *Ruđe Bošković*, T. 1, str. 168—172.

U duhu svoje teorije o atraktivno-repulsivnim silama, koju je potpuno razvio u svom glavnom delu i kojoj je jedna od osnova zakon kontinuiteta, Bošković ističe: „Postoji, isto tako, mnogo drugih besmislenih vrsta skokova, gde sile rastu u beskonačnost, kad se rastojanja smanjuju i mogu da budu atraktivne, što u prirodi nipošto ne priznajemo, kao što smo već naznačili mi koji želimo da sile budu rapulsivne na najmanjim rastojanjima i da u prirodi nikad ništa ne postaje beskonačno".

123) U okviru svog zakona neprekidnosti, Bošković se dotakao i aritmetičkog linearnog kontinuuma, odnosno skupa realnih brojeva.

Dobro je poznato kako je tekla istorijska i naučna evolucija realnog broja i kako je problem merenja neprekidnog kvantiteta (dužina, površina, zapremina) bitno doprineo da se praktično afirmirao skup realnih brojeva mnogo pre no što je našao svoju punu afirmaciju u matematički i logički celovitoj teoriji realnog broja.

Iako se u Boškovićevo doba realan broj u matematici praktično već bio afirmirao, a prećutno bila usvojena biunivoka korespondencija između geometrijskog linearnog kontinuuma tačaka i skupa realnih brojeva, kao osnova na kome se izgrađivala analitička geometrija i sa njom infinitezimalna analiza, ipak i u to doba situacija je bila takva da se nije uvek sa potpunom sigurnošću gledalo na iracionalne i negativne brojeve, kao što se gledalo na prirodne ili na pozitivne racionalne brojeve, i nije do tada još bio *eksplicite* iskazan stav da je skup realnih brojeva neprekidan, da je kontinuum.

Bošković je apostrofirao ovu situaciju, konstatujući da neke veličine zamišljamo preko skokova pošto izostavimo međuveličine, ali koje ne izostavljamo zato što one ne postoje, već zato što ih ne nazivamo istim imenom kao i veličine koje zamišljamo preko skokova, odnosno zato što nas one interesuju manje od veličina zamišljenih preko skokova. Na ove diskretne veličine, veli Bošković, svode se brojevi kada ih zamišljamo kao agregate jedinica, što znači, dakle, kada uočavamo samo skup prirodnih brojeva (antički pojam broja svodio se na prirodan broj!), odnosno celih brojeva, dok ostale brojeve — kritički podvlači Bošković — skoro nikako i ne posmatramo niti imena dajemo, „sem onima koji nastaju iz stalnog dodavanja jedinice".

U vezi sa ovim, kao što se vidi, Bošković tvrdi: da je *čitav* prostor između ma koja dva najbliža prirodna (odnosno cela) broja *ispunjen* racionalnim (numeri fracti) i iracionalnim (numeri surdi) brojevima; da ne postoji nikakvo, *ma kako malo*, rastojanje između racionalnih odnosno iracionalnih i prirodnog (odnosno celog) broja, od kojeg ne bi postojalo još manje rastojanje izeđu prirodnog (odnosno celog) i nekog drugog racionalnog odnosno iracionalnog broja; da svi brojevi koji se mogu zamisliti da postoje (ovde to znači svi racionalni i iracionalni, tj. svi realni) obrazuju *neprekidan* skup; da sve što se u geometriji izvodi linijama, u algebri i infinitezimalnoj analizi se izvodi korespondentnim simbolima i znacima (ovde bi to značilo operacijama sa realnim brojevima koji se izražavaju „bilo putem korenskih izraza, ili putem drugih transcendentno-iracionalnih znakova").

Dakle, ako su n i $n+1$ dva ma koja sukcesivna prirodna (odnosno cela) broja, za Boškovića nema sumnje da je linearni prostor između njih *potpuno* (tj. neprekidno) *ispunjen* racionalnim i iracionalnim brojevima (... nimirum omnes numeros surdos et fractos qui hiatum inter binos numeros quoscumque proximos suplent omnem...) i da tako svi realni brojevi obrazuju *skup bez praznina*, tj. *neprekidn skup* (... series in iis etiam continuati habebitur...). Iako se može primetiti da se Boškovićeva vizija neprekidnosti skupa realnih brojeva podudara sa vizijom svuda gustog skupa (... neque enim ulla est distantia utcumque parva in se determinata ejusdem numeri fracti, vel surdi a quovis numero integro, qua minor in aliquo alio fracto, vel surdo non habeatur...), ipak, i pored toga, ostaje kao činjenica od značaja, u istorijskoj i naučnoj evoluciji pojma aritmetičkog kontinuuma, da je Bošković *eksplicite* iskazao stav prema kome je skup realnih brojeva kontinuum, više od sto godina pre nego što su ga matematički, na poznati način, obrazložili Dedekind i Cantor.

Videti: Ernest Stipanić, *Continuité de la ligne chez Bošković et Dedekind*, Actes du symposium international R. J. Bošković 1961, Beograd, Zagreb, Ljubljana, 1962, str. 115—124; *Quelques vues mathématiques de Bošković sur le continu lineaire*, Atti del Convegno internazionale celebrativo del 250 anniversario della nascità di R. G. Boscovich.., Milano, 1963, str. 291—297; *Sur le continu linéaire de R. Bošković*, Atti del VII Congresso dell 'Unione Matematica Italiana, Roma, 1963, str. 404—405; *O linearnom kontinuumu Ruđera Boškovića*, Matematički vesnik, 4 (19), Sv. 3, Beograd, 1967, str. 277—292; *Le continu linéaire de R. J. Bošković (Boscovich)*, XIII Congrès international d'histoire des sciences, Communications, Section No 5,Histoire des mathématiques et de la mécanique, Moskva, 1971, str. 27.

Pomenimo još i ovo. U Boškovićevo doba i ranije sa *numerus surdus* (neizrazljiv broj) označavao se *iracionalan broj*, što, u osnovi, odgovara modernom pojmu iracionalnog broja, kao realnog, koji se ne može izraziti u obliku p/q, gde su p i q ($\neq 0$) celi brojevi, dok se sa *numerus fractus* označavao *racionalan (razlomljen) broj*. Bošković upotrebljava oba termina.

124) Pojmovima matematičke analize i njihovim geometrijskim interpretacijama, Boškovićeva razmatranja u ovom paragrafu mogla bi se ovako rezimirati.

Neka je $f(x)$ funkcija integrabilna u Cauchy-Riemannovom smislu u intervalu $[a, b]$, gde je $a = AC$ i $b = AB$, a $y = f(x)$ jednačina krive MN u Descartesovom koordinatnom sistemu sa početkom u A i sa osama koje su očigledne. Tada je funkcija

$$S(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)\,dx, \qquad \xi = AC \in (a, b),$$

kao što je dobro poznato, neprekidna po argumentu ξ, pa je zato tačno da će „površina $dcpq$ iz veličine $DCQP$ preći u veličinu $PQEF$ preko svih međuveličina bez ikakvog skoka" i da će „geometričari moći da nađu onu cq koja bi pribavila površinu te veličine (međupovršinu)".

Bošković je, dakle, na osnovu zakona kontinuiteta, u geometrijskoj formi, iako dosta implicite, tretirao značajnu teoremu iz integralnog računa, naime: *Ako je funkcija $f(x)$ intergrabilna u intervalu* $[a, b]$ *onda je određeni* *integral* $I(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ *neprekidna funkcija gornje granice u tom intervalu.*

Analogna je situacija ako se Ac uzme za donju, a Aq za gornju promenljivu granicu integrala (pa time uzme u obzir direktno površina *cdpq*), jer je određeni integral neprekidna funkcija i svoje donje granice.

125) Vreme koje protekne „od Sunčeva zalaska do Sunčeva zalaska ili od podneva do podneva" (vreme između dve uzastopne kulminacije Sunca) zove se *pravi sunčani dan.* Pravi sunčani dani nisu međusobno jednaki, zbog toga što se Sunce ne kreće jednoliko na svom godišnjem putu.

Srednji sunčani dan je vreme koje protekne između dve uzastone kulminacije „srednjeg Sunca" čije bi godišnje kretanje bilo jednoliko. Prema srednjem sunčanom danu računa se naše građansko vreme.

Isto onako kao što je tretirao, sa stanovišta zakona kontinuiteta, navedenu površinu u prethodnom paragrafu, Bošković u ovom paragrafu, zbog potpuno analogne situacije, tretira *pravi sunčani dan* kao veličinu, polazeći od datog mesta na datom Zemljinom uporedniku i krećući se prema zapadu po celom uporedniku do polaznog mesta. Ovim je dao treći primer slučaja „kod kojih preko skokova zamišljamo neke veličine, a međuveličine izostavljamo, ne zato što one ne postoje, već što se u običnoj upotrebi ne nazivaju istim imenom, ili što nas se manje tiču".

126) Boškovićeva razmatranja u ovom pragrafu odgovaraju kretanju matematičkog (odnosno fizičkog) klatna. Za to kretanje, kao što je dobro poznato iz fizike, važi diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\Theta = 0$$

Njenom integracijom, uz date početne uslove, dobija se Θ kao neprekidna funkcija vremena t, gde je Θ ugao kojim se, na poznati način, određuje položaj matematičkog klatna u zaisnosti od vremena. Funkcijom $\Theta(t)$ se određuje zakon oscilovanja klatna, pa se na osnovu nje lako shvata da i kod oscilacija klatna „stvar stoji isto kao i sa onom površinom *dcpq* na sl. 25", kako ističe Bošković.

127) Na snovu posmatranja *pomračenja Jupiterovih satelita,* danski astronom i mateatičar O. Römer (1644—1710), radeći u Pariskoj opservatoriji, prvi je 1676. godine približno odredio brzinu prostiranja svetlosti. Našao je da ona iznosi 298000 km/sec.

Proučavajući *aberaciju* zvezda nekretnica (prividnu promenu mesta zvezda nekretnica zbog godišnjeg kretanja Zemlje oko Sunca), čuveni engleski astronom, diektor opservatorije u Greenichu, koga je Newtom smatrao najboljim astronomom svoga vremena i koji je Boškovića, 1760. godine, predložio za člana Kraljevskog društva u Londonu, J. Bradley (1692—1762) potvrdio je 1728. godine Römerov rezultat o brzini prostiranja svetlosti.

Kasnije, tokom XIX i XX stoleća ustanovljene su razne metode i konstruisani su razni aparati za merenje brzine prostiranja svetlosti. Poslednja metoda je radarska i koja se primenjuje od 1947. godine. Brzina prostiranja svetlosti, dobijena pomoću ove metode, iznosi 299792 km ± 3 km/sec. Ta vrednost je danas usvojena.

Rastojanje Sunca od Zemlje iznosi 149600000 km. Svetlost pređe to rastojanje približno za 8 minuta i 18 sekundi.

128) F. Grimaldi (1618—1663) je italijanski fizičar, astronom i matematičar. Otkrio je pojavu difrakcije svetlosti, a svoja istraživanja o svetlosnim pojavama objavio je u posebnom delu *Physico-Mathesis de lumine coloribus et iride, aliisque annexis, libri duo* (Bologna, 1663).

Ovde je reč o Newtonovom delu koje je izišlo u Londonu na engleskom jeziku *Optiks* (1704), a zatim na latinskom *Optice* (1706). U njemu je Newton izložio svoja obimna istraživanja iz optike.

Pozivajući se na pojavu difrakcije i na Newtonovo tumačenje refleksije svetlosti, Bošković, u duhu svoje opšte teorije („One — neravnine — međutim, uopšte ne smetaju refleksiji izazvanoj od repulzivne sile koja je nastala na izvesnom rastojanju"), objašnjava da se brzina prostiranja svetlosnog zraka koji normalno pada na površ, od koje se reflektuje, kontinuirano menja.

129) U vezi sa pojavom refleksije i difrakcije svetlosti, Bošković je, u skladu sa svojom opštom teorijom prikazao delovanje repulzivne sile na tok putanje svetlosne čestice.

130) Reč je o *Toricellievom zakonu*. Naime, brzina v isticanja vode kroz bočni otvor suda na odstojanju h od slobodne površi vode je ista kao kada bi voda slobodno padala sa visine h, tj. $v = \sqrt{2gh}$. U stvrai brzina mlaza vode je nešto manja zbog trenja na zidovima i viskoznosti.

131) Očigledno je da Bošković, u ovom paragrafu, svoja razmatranja zasniva na *prvom osnovnom zakonu hidrostatike* („Jer sila, kojom voda pritiskuje jednaka je celokupnoj težini stuba koji bi imao istu visinu sa kojom stoji u ravnoteži u sudu jednake širine i jednaka joj je, kao što je to lako dokazati kod ostalih oblika sudova" — shodno zakonu spojenih sudova, kao posledica prvog osnovnog zakona hidrostatike), prema kome važi da je $p_A - p_B = h\rho g$, gde su A i B dve tačke unutar tečnosti u ravnoteži gustine ρ, p_A i p_B odgovarajući pritisci, h razlika nivoa A i B i g gravitaciona konstanta, kao i na *Toricellievom zakonu* („Dalje se, zbog toga, postiže brzina koja se ostvaruje kao kvadratni koren visine...", tj. $v = \sqrt{2gh}$). Osim toga, ta razmatranja teku shodno Boškovićevom originalnom prilazu kretanjima

„nastalim od sila koje deluju neprekidno, kao što su pritisak teških tela, delovanje gravitacije, elastične sile i druge slične".

U ovom slučaju reč je o kretanju nastalom usled pritiska tečnosti. Boškovićevo bliže tumačenje zašto se brzina u tom kretanju ostvaruje „kao kvadratni koren visine" („..., jer tamo gde sile u nekom stalnom odnosu u jednakim prostorima međusobno deluju, dobijaju se brzine koje su subduplikati sila...") biva jasnije, ako stvar, metodom infinitezimalne analize, ovako predočimo. Neka je t vreme i s put pređen za to vreme, brzina kretanja $v = \frac{ds}{dt}$, ubrzanje $a = \frac{dv}{dt}$ – po Boškoviću „vis acceleratrix" ili prosto „vis" — tada je $a\,ds = av\,dt = vdv$ ili $ads = \frac{1}{2}\,d\,(v^2)$, odnosno $v^2 = 2as$, tj. dobija se brzina kao „subduplikat sile".

Pomenućemo da Boškovićeva razmatranja u ovom paragrafu stoje, dobrim delom, u vezi sa njegovim razmišljanjima o osnovama mehanike koja je izložio u svojoj raspravi *O živim silama*. Videti o ovome: Željko Marković, *Ruđe Bošković* T. 1, str. 177—187.

Videti još belešku, datu uz paragraf 134.

132) U vezi sa Boškovićevom *Teorijom* videti belešku 1.

U paragrafima 158—171 Bošković vrlo koncizno izlaže svoju *Teoriju prirodne filozofije* koju će četiri godine docnije vrlo iscrpno izložiti u svom glavnom delu.

Carlo Benvenuti, istaknuti isusovac na Rimskom Kolegijumu i Boškovićev prijatelj, u svojim predavanjima, kao nastavnik Kolegijuma, izlagao je i zastupao ideje Newtonove i Boškovićeve prirodne filozofije. Kada je Bošković bio zauzet drugim poslovima često ga je zamenjivao na predavanjima. Pod Benvenutijevim rukovodstvom izrađena je u Rimskom Kolegijumu, 1754. godine, disertacija *Synopsis physicae generalis* (Pregled opšte fizike) u kojoj su izložene opširno ideje Newtonove prirodne filozofije i Boškovićeva *Teorija*. Zbog naprednog stava u pitanjima prirodne filozofije, koji je proizilazio iz prihvatanja ideja Newtona i Boškovića, Benvenuti je došao u sukob sa konservativnom sredinom Rimskog Kolegijuma, pa su ga starešine isusovačkog reda htele premestiti iz Rima, ali je Bošković uspeo da to spreči svojim ugledom istaknutog naučnika, koji je tada uživao u Vatikanu.

Videti o ovome: Željko Marković, *Ruđe Bošković*, T. 1, str. 290—292.

133) U vezi sa Boškovićevom *Teorijom* videti: Željko Marković, ibid, Philosophiae Naturalis Theoria, str. 404—471.

Reč je o krivoj koja predočava Boškovićev zakon sila, poznatoj u nauci pod imenom *Boškovićeva kriva*. Videti: Željko Marković, ibid. str. 292—297; T. P. Angelitch, *Über das Kraftgesetz von Boschovich*, Actes du Symposium international R. J. Bošković 1961, Conseil des Académies RFPY, Académie serbe des sciences et des arts, Académie yougoslave des sciences et des arts, Académie slovène des sciences et des arts, Association des universités RFPY, Union des sociétés des mathématimaticiens, physiciens et astronomes RFPY, Association yougoslave pour la philosophie, Beograd, Zagreb, Ljubljana, 1962.

Za uvid u vrednost i značaj Boškovićeve *Teorije* za današnje teorije o materiji i njihove filozofske implikacije videti: *Actes du symposium international R. J. Bošković* 1958, Beograd, Zagreb, Ljubljana, 1959; *Actes du symposium international R. J. Bošković* 1961, Beograd, Zagreb, Ljubljana, 1962; *Atti del Convegno internazionale celebrativo del* 250 *anniversario della nascità di R. G. Boscovich e del* 200 *anniversario della fondazione dell 'Osservatorio di Brera,* Milano, 1963.

134) U vezi sa *Zakonom kontinuiteta,* Bošković započinje vrlo zanimljivu analizu *sudara* dva pokretna tela, koju nastavlja u narednim paragrafima. Pri tome naglašava teškoće koje se „javljaju dvostruko". Jer „neki dopuštaju i mogućnost da su tela čvrsta" i „misle da iz prirode treba isključiti skok", a „Drugi, kao što su pre svega sve pristalice Lajbnicove, izbacuju iz prirode svaku vrstu čvrstih tela i zato su, kažu oni, sva tela meka ili elastična da bi postepeno, naravno, delovi prodirali (jedni u druge), i dok se oblik menja, razlika u brzini se postepeno gubi prema zakonu kontinuiteta".

Mac-Laurin (1698—1746), istaknuti engleski matematičar i jedan od najeminentnijih Newtonovih učenika, napisao je više matematičkih rasprava i jedno delo o Newtonovoj prirodnoj filozofiji.

135) Bošković kritički analizira citirano mišljenje Leibnizovih pristalica i opovrgava ga nemogućnošću beskonačne deljivosti materije i nepostojanjem aktualno beskonačno male veličine.

136) Daljom analizom Bošković pokazuje da gledište Leibnizovih pristalica, o kome je reč, implicira „kompenetraciju nekih delića tela", za koju je ranije utrdio da je nemoguća, pa, dakle, i time opovrgava navedeno gledište.

Bošković ovde govori o „stepenu" brzine, ali nije jasan o kakvom je „stepenu" reč kao jedinici mere brzine.

137) Bošković dolazi do zaključka da se, pre no što dođe do dodira dva tela, moraju postepeno izmeniti brzine tela i to „jedna usporavanjem, a druga ubrzavanjem" i da „Stoga treba da postoji uzrok, pa makar kakav on bio, koji dovodi do usporavanja i do ubrzavanja, i, pošto on menja stanje tela s obzirom na kretanje i mirovanje, moraćemo ga nazvati silom; a pošto teži da jedno telo odvoji od drugog, moraćemo ga nazvati repulzivnom silom; pod tim imenom treba da se shvati težnja koju će imati bilo koji delić materije kada treba da se udalji od bilo kojeg delića, dok je primoran da mu

se približi i to pre dodira". Tako je Bošković u sklop svoje teorije sila uveo *repulzivnu silu*, pa, isključivši Newtonovu „actio in distans" i Descartesov „impulsus" (... sine actione in distans et sine ullo impulsu...), zaključio da ona „postoji ili u samoj prirodi materije koja traži uzmicanje pod uslovom onog određenog rastojanja od druge materije (prirodno-naučno-materijalističko tumačenje! — naša. prim.) ili po slobodnom zakonu božjem koji je to uzmicanje utvrdio na tom rastojanju (teološko — metafizičko tumačenje! — naša prim.)".

Shodno svojoj teoriji sila, Bošković, kao što se vidi iz teksta, ističe dalje da se na isti način može „objasniti atraktivna sila na većim rastojanjima koja zavisi od samih rastojanja".

Ideja o *određenosti* rastojanja na kome se javlja *repulzivna* odnosno *atraktivna* sila po Boškoviću je „vrlo dinstinktna i veoma jasna". Zato mu izgleda čudno „što se neki ljudi teško odlučuju da priznaju takvu određenost koja kao uslov uzima određeno rastojanje". Ovim je (što se vidi iz daljeg teksta) apostrofirao one koji uz pretpostavku čvrstih tela ne isključuju skok u prirodi i one koji misle kao Leibnizove pristalice, da bi, ostavši na ipak prividnoj dilemi između prirodno-naučnog i teološkog tumačenja, postavio kritički oštroumno pitanje: „Zar je lakše shvatiti, ako ostavimo na stranu sve predrasude, određenost koja potiče ili od prirode materije ili od slobodne božje volje, uzimajući radije kao uslov rastojanje nula, nego bilo koje drugo određeno rastojanje?"

138) Saglasno svojoj *Teoriji* Bošković obrazlaže ulogu repulzivne sile. Ako je F sila i s rastojanje o kojima Bošković ovde govori i ako je

$$Fds = k\,a\,ds = k\frac{dv}{dt}ds = k\frac{ds}{dt}dv = k\,v\,dv,$$

gde je k koeficijent proporcionalnosti, onda je $\int_0^s F ds = \frac{k}{2}v^2$, pa je tako jasna Boškovićeva primedba „jer se u mehanici svakako dokazuje da je sa tom površinom proporcionalan kvadrat brzine koja nastaje ili koja nestaje". budući da se sve posmatra u koordinatnom sistemu $s\ o\ F$.

Pod „porodicom hiperbola" očigledno podrazumeva krive koje se mogu definisati u Descartesovim koordinatama jednačinom $y = \frac{a}{x^\alpha}$, gde su a i α realni i pozitivni parametri. Tada je $S(\alpha) = \int_1^\infty \frac{a}{x^\alpha}dx = \frac{a}{\alpha - 1}$ za $\alpha > 1$, što znači da „u čitavoj porodici hiperbola sve one sa ordinatama koje manje rastu (nego ordinate *konusne hiperbole*) imaju konačnu površinu", dok

$$S(\alpha, t) = \int_1^t \frac{a}{x^\alpha} dx \to \infty, \; t \to \infty \text{ za } \alpha \leqq 1,$$ što znači da „one sa ordinatama koje više rastu, imaju isto tako beskonačnu površinu beskonačno puta veću"

139) Videti: Željko Marković, *Ruđe Bošković*, T. 1, Sastav tvari, str. 429—434 i beleške 112 i 19.

140) Za Boškovićevo shvatanje pojmova kohezije i čvrstine tela, kao i pojma granice kohezije, videti: Željko Marković, ibid, str. 424—429.

Videti također belešku 96, datu uz paragraf 112.

141) Reč je o granicama kohezije (limites cohaesionis) i granicama ne-kohezije (limites non-cohaesions). Za ovo videti: Željko Marković, ibid.

142) Bošković pominje Newtonova *Optička pitanja*. Reč je o trećoj knjizi znamenitog Newtonovog dela *Optice sive de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus et Coloribus Lucis,* libri tres (London, 1719) koja sadrži mnoštvo *Pitanja* (Queries), koja se tiču Newtonovih pogleda na sastav materije i u vezi sa tim na atraktivne i repulzivne sile. Ta *Pitanja* su od posebnog značaja za celokupnu Newtonovu filozofiju prirode, kojom se Bošković inspirisao i kome su spomenuta *Pitanja* bila dobrim delom ishodište za vlastitu filozofiju prirode.

O ovome videti: Željko Marković, ibid, str. 410—413.

U objašnjenju analogije između prelaza atraktivnih sila u repulzivne i obratno, i prelaza pozitivnih kvantiteta u negativne i obratno, očigledno je da se Bošković služi parabolama čije su jednačine u Descartesovim koordinatama: $y = x^{2k}$ i $y = x^{2k+1}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, posmatrajući ih u okolini tačke $x = 0$.

Videti još: beleške 96 i 100.

143) Ovde je reč o *Boškovićevoj krivoj*, kojom se grafički predočava njegov zakon sila.

O ovome videti: Željko Marković, *O dvjestagodišnjici Boškovićeve Philosophiae naturalis Theoria*, Predavanja održana u Jugoslavenskoj akademiji, svezak 19, JAZU, Zagreb, 1959, str. 24—32; *Ruđe Bošković*, T. 1, str. 292—297 i 424—426.

144) O tome kako Boškovićev zakon sila „vodi objašnjenju svih opštih i pojedinačnih osobina tela" videti: Željko Marković, *Ruđe Bošković*, T. 1, Fizičke posljedice zakona sila, Sastav stvari, Primjena teorije u mehanici, Primjena teorije u fizici, str. 426—454.

U vezi sa raspravom *O svetlosti* videti belešku 1, a u vezi sa Carlom Benvenutijem belešku 132.

145) U ovom i narednom paragrafu Bošković prvi put izlaže svoju teoriju prostornih odnosa. Dotiče se pojma „mesta" stvarnih tačaka i postojanja tih „mesta" u vezi sa pojmom „rastojanja" tačaka, toliko važnim za njegov zakon sila, odnosno dotiče se pojma „načina postojanja stvarnih tačaka" koji su za njega „stvarna i stalna mesta tačaka koje stvaraju, tamo gde postoje, stvarni odnos rastojanja između sebe i samih tačaka materije na koje se odnose".

Svoja originalna shvatanja prostornih i vremenskih odnosa Bošković je potanko razvio u svom sistemu prirodne filozofije.

O ovome videti: Željko Marković, *Ruđe Bošković*, T. 1, Prostor, vrijeme i gibanje u Boškovića, str. 148—165.

146) Videti: belešku 28, datu uz paragraf 35.

Primetićemo da su ovde, sa stanovništva teorije verovatnoće, zanimljivi Boškovićevi probabilni zaključci, koji se mogu u stvari, svesti na takozvanu, danas dobro poznatu, „geometrijsku verovatnoću" (koja je na izvestan način inplicirana u Boškovićevoj argumentaciji).

Naime, neka je Φ prostor u kome se nalaze Boškovićeve tačke materije $M_i \in \Phi$, $(i=1,2,3,\ldots,n)$, gde je $m(\Phi)=V$, a $M_i^* \in \Phi$, $(i=1,2,3,\ldots n)$ tačke u kojima su se nalazile tačke materije. Neka je dalje: D_k slučajni događaj da se tačka materije M_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ „vrati" u bilo koju tačku M_i^* $(i=1,2,3,\ldots,n)$, ili da se „približi" njoj; $D_i^{*(k)}$ slučajni događaj da se tačka M_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ „vrati" u tačku M_i^*, $(i=1,2,3,\ldots,n)$, ili da se „približi" njoj.

Očigledno je tada $D_k = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i^{*(k)}$ $(k=1,2,3,\ldots,n)$ i

$$P(D_k) = P\left\{\bigcup_{i=1}^{n} D_i^{*(k)}\right\} = \sum_{i=1}^{n} P(D_i^{*(k)}) \qquad (k=1,2,3,\ldots,n)$$

Kako je

$$P(D_i^{*(k)}) = \frac{m(\{M_i^*\})}{m(\emptyset)} = \frac{0}{V} = 0 \qquad (k=1,2,3,\ldots,n),$$

to je $P(D_k)=0$, $(k=1,2,3,\ldots,n)$, pa je zaista „beskrajna neverovatnost (tj. verovatnoća nula-naša prim.) trećeg reda za svaki trenutak...". A „beskrajna je neverovatnost drugog reda za sve trenutke koji su neodređeno uzeti", jer su tada ti trenuci svojim brojem, po Boškoviću, „beskonačnosti one vrste kojom su beskonačne moguće tačke koje leže na beskonačnoj pravoj". (O ovome videti još: R. Bošković, *Teorija prirodne filozofije*, O prostoru i vremenu, & 15, str. 269—270, Zagreb, 1974).

DE CONTINUITATIS LEGE
ET EJUS CONSECTARIIS PERTINENTIBUS AD PRIMA
MATERIAE ELEMENTA EORUMQUE VIRES

Dissertatio

auctore P. Rogerio Josepho Boscovich Societatis Jesu publico Matheseos professore in Collegio Ramano

RÉSUMÉ

1. La *loi* ou le *principe de la continuité* (lex seu principium continuitatis) était pour Bošković (Boscovich) point de départ fondamental et poteau indicateur permanent dans son édification de la théorie des forces qui régissent la nature et, sous ce rapport, de la théorie sur la structure de la matière. C'est pourquoi le traité *De continuitatis lege et ejus consectariis pertinentibus ad prima materiae elementa eorumque vires*, Romae, 1754, est en rapport le plus étroit avec sa théorie de la philosophie de la nature et, entre autres (*De viribus vivis*, Romae, 1745; *De lumine*, pars prima et pars secunda, Romae, 1748; *De materiae divisibilitate et principiis corporum*, conscripta jam ab anno 1748, Lucca, 1757; *De lege virium in natura existentium*, Romae, 1755) une des dissertations de base desquelles a résulté l'oeuvre principale de Bošković *Philosophiae naturalis theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, Viennae, 1758. Pour cette raison, il met en relief, immédiatement dans le second paragraphe, que dans la dissertation „l'analyse entière a été soigneusement préparée pour nous amener, à partir des principes de la nature les plus simples, par une chaîne, nécessaire et spontanée, de conclusions à la théorie elle-même.“ Ceci parle à suffisance de quelle importance elle est pour l'oeuvre scientifique et philosophique de Bošković et pourquoi l'Institut mathématique de Belgrade en publie la traduction avec commentaires en langue serbo-croate.

2. De Leibniz et de ses adhérents Bošković a adopté le principe *Nihil in natura per saltum fieri* qui exprime, de façon concise et chargée de sens, l'essence du principe de la continuité de Leibniz. „La base principale de notre analyse entière réside dans ce fameux principe que les philosophes nomment déjà par endroits le principe de la continuité et qui fut proposé par Leibniz en 1687 déjà“, dit Bošković. Il a embrassé ce principe, en le formulant à sa propre façon comme principe selon lequel *aucune quantité ne passe pas d'une de ses valeurs à une autre sans avoir passée par toutes les valeurs intermédiaires* et l'a élaboré davantage par l'analyse inductive des phénomènes dans la nature et par les réflexions mathématiques abstraites. Il s'est proposé d'apprendre au lecteur de la dissertation en question à connaître tous les détails de ce principe; de réfuter, prudemment et raisonnablement, toutes les critiques contre ce principe; de mettre nettement en relief son rôle dans la nature et ses tâches dans la science, particulièrement dans les mathématiques et, finalement, de le présenter comme point de départ de sa théorie de la philosophie de la nature.

3. Au cours du XVII^e et du XVIII^e siècle on a discuté beaucoup sur *La loi de la continuité* et sur les applications de celle-ci à l'observation des phénomènes naturels notamment de ceux dont traite la mécanique. Ainsi, par exemple, les adhérents des conceptions mécaniques de Descartes affirmaient que le mouvement d'un corps ne peut être modifié que par un choc direct (impetus), tandis que les adeptes de la philosophie de la nature de Newton soutenaient que cela se produit par l'action des forces à distance (actio in distans). *La loi de la continuité* a été utilisée, comme instrument principale, par Leibniz et ses adhérents, dans la réfutation des conceptions mécaniques de Descartes et de ses adeptes, particulièrement lorsqu'il s'agissait de la conception qu'en cas du choc de deux corps le changement de leur mouvement se produisait par saut. Tout cela a eu des répercussions déterminées dans les réflexions de Bošković sur *La loi de la continuité*, la place et le rôle de celle-ci dans l'édification du système de la philosophie de la nature, ce qui est démontré sans équivoque par cette dissertation et les dissertations susmentionnées. En outre, dans ses conceptions sur *La loi de la continuité* et sur son application, il était *créativement original*, nonobstant le fait qu'il a subi, sous ce rapport, évidemment l'influence d'Aristote, de Leibniz et de Newton.

Comme Bošković s'était puissamment inspiré par la philosophie de la nature de Newton et par les conceptions d'Aristote et de Leibniz sur la continuité et qu'il était constamment obsédé par l'idée d'édifier *son propre* système de la philosophie de la nature, son „monde nouveau", *La loi de la continuité* est devenue très tôt l'objet de ses réflexions et le principal point de départ de sa théorie de la philosophie de la nature. Ceci, par exemple, se manifesta immédiatement en 1745 dans son traité *De viribus vivis*, en rapport avec le problème du choc des corps; ensuite en 1748 dans la dissertation *De lumine*, où il souligne „que l'entière théorie des grandeurs infiniment petites dépend uniquement de l'exclusion du saut", en d'autres termes qu'on peut l'édifier uniquement sur la notion de la continuité; ou bien dans une lettre du 16 mars 1748, adressée au frère Baro, lorsqu'il lui écrit de son „*monde nouveau*" et, entre autres choses, dit qu'il a „commencé une scolie sur la loi de la continuité" et dans une lettre du 23 avril 1748, adressée au frère Božo à Dubrovnik, où „il lui écrit de sa théorie de la structure de la matière et dit qu'il „démontrera positivement qu'elle ne s'étend pas continûment, mais qu'elle est formée de points indivisibles, dispersés dans l'espace qui est infiniment divisible". Il continue, en différents endroits et en différentes situations, d'effleurer, de cette même façon, la question de la continuté pour la traiter, de façon circonstanciée et systématique, dans cette dissertation, ensuite dans son oeuvre principale aussi dans les cadres géométriques, dans le troisième tome de ses *Elementorum Universae Matheseos* (1758), dans une section spéciale, intutilée *Dissertatio de transformatione locorum Geometricorum.*

4. Les conceptions de Bošković de la continuité (et non seulement les siennes, mais aussi celles de Leibniz et des autres) ont été critiquées et,

par conséquent, dans cette dissertation, et en d'autres également, Bošković s'évertuait à fournir une abondance d'arguments en faveur de *La loi de la continuité* afin de réfuter ces critiques et de démontrer le caractère fructueux de cette loi pour l'explication des phénomènes naturels et des différentes propriétés des corps, conformément à sa théorie générale de la philosophie de la nature.

Les considérations de Bošković sur *La loi de la continuité* sont basées, d'un côté, sur une très ample induction, sur une espèce de démonstrations à posteriori que cette loi existe dans la nature, sur le fait que nulle expérience, comme l'affirme Bošković, ne la contredit et il y en a beaucoup qui nous induisent à y croire, dans la mesure où nous sommes en état de la découvrir par nos sens et, de l'autre, sur les raisonnements mathématiques abstraits, sur une espèce de démonstrations à priori, au moyen desquelles il la motive ou bien établit de façon rationnelle.

Bošković rejette le *Principe de raison suffisante* (Principium sive lex rationis sufficientis) dans la démonstration de la *Loi de la continuité* qu'avaient utilisé Leibniz et ses adhérents et met en évidence deux autres raisons pour la démontrer (justifier). Ce sont: l'une basée sur *les principes métaphysiques* et l autre sur *l'induction*.

La première raison souligne l'impossibilité du saut dans la nature, c. à d. son „passage momentané d'une grandeur dans une autre, en omettant toutes les grandeurs intermédiaires", puisque „une quantité quelconque, d'après les lois de la nature, ne peut avoir, aux moments particuliers, qu'une seule grandeur", c. à d. qu'elle est une fonction *uniforme* du temps. L'impossibilité du saut de la quantité dans la nature résulte pour Bošković de l'analyse du graphique de la fonction continue et de l'analyse de la trajectoire du point mobile, pour laquelle il suppose toujours qu'elle est décrite „par le traçage continu sans aucune interruption" et „Toute la force de l'argument" — selon Bošković — „réside toujours dans l'exclusion du moment le plus proche du moment, du point le plus proche du point, de la ligne qui a l'autre ligne la plus proche et, pour cette raison, aussi dans l'exclusion de la limite la plus proche de la limite d'une suite quelconque qui dure dans un temps continu ou d'une suite représentée par une ligne continue", c. à d. dans *l'impossibilité* du contact de deux limites. Sous ce rapport suivent les considérations de Bošković sur nombre de notions mathématiques et de théorèmes du cadre de la géométrie et de l'analyse qui présentent de l'intérêt lorsqu'il s'agit du développement de ces notions et de ces théorèmes.

C'est sur l'induction que Bošković fonde sa seconde raison au moyen de laquelle il démontre (justifie) *La loi de la continuité*. Il a, tout d'abord, de manière très concise et très claire, à la façon des méthodologues et logiciens modernes, exposé le rôle et la tâche de l'induction en tant que méthode de recherche dans les sciences naturelles et il a cité, en ce sens, de nombreux exemples qui confirment resp. justifient *La loi de la continuité*.

Il a mis en relief la continuité, réalisée dans les changements des quantités géométriques, que l'on garde de telle façon „que la géométrie, là où il est nécessaire, s'adresserait aux secrets de l'infini plutôt que de permettre un saut déterminé" et elle se maintient „même dans certaines formules algébriques qui expriment des lieux géométriques simples" — dit Bošković ensuite — „dans lesquels il n'existe nulle part un saut où il s'agit de quantités finies et il n'existe nulle part même parmi les infinies, pour qu'il ne pût pas être évité par certains secrets de l'infini". Il a mis ensuite en évidence la continuité qui s'accomplit dans les mouvements des planètes et des comètes, dans l'alternance des jours et des nuits, dans le lever et le coucher du Soleil, dans le mouvement que suit un corps projeté et dans les autres mouvements qui „maintiennent la continuité, car elle est maintenue par les forces mêmes qui la créent" et „pour cette raison, chez les mouvements naturels... le changement de direction se fait toujours graduellement". Bošković constate que la continuité a été gardée même dans les formes que la nature crée chez différents corps et il conclut: „Ce serait un travail infini d'énumérer les choses particulières dans lesquelles on observe la continuité dans la nature. Il vaut de toute façon, mieux tâcher de citer un cas où la continuité dans la nature n'a pas été conservée et un cas pareil ne pourra pas être trouvé du tout".

C'est par de raisons pareilles que Bošković, après avoir rejeté le *Principe de raison suffisante*, défendait contre critiques et attaques ses propres conceptions de la continuité pour admettre, dans le paragraphe 130 de la présente dissertation, se basant sur le *Principe de raison suffisante*, aussi la possibilité de la discontinuité, lorsqu'il a conclu perspicacement: „Nous n'ajoutons qu'une chose: parmi nombre d'autres choses dans lesquelles la recherche de la raison suffisante perd sa force, se trouve précisément aussi cette exclusion du saut de la nature. Car qu'est-ce qui défend l'existence de certaines raisons pour lesquleles le saut d'une grandeur déterminée pourrait être beaucoup plus utile que tous les autres, de même qu'aux gens qui montent aux étages supérieurs le plus utile de tout serait l'escalier d'une hauteur déterminée?"

5. Ainsi défendue et motivée, *La loi de la continuité* servait à Bošković en premier lieu, comme nous l'avons déjà mis en évidence, pour construire sa propre théorie des forces dans la nature et la théorie de la structure de la matière qu'il avait, pour ainsi dire, esquissées dans les paragraphes 158—171 de cette dissertation pout les exposer d'une façon très circonstaciée, quatre ans plus tard, dans son oeuvre principale.

Analysant le phénomène du choc des corps (ayant en vue le micromonde), Bošković conlut, se basant sur *La loi de la continuité*, selon laquelle il ne peut y avoir de changement momentané (par saut) de vitesse, qu'il doit nécessairement exister une force *répulsive* comme cause qui modifiera graduellement les vitesses des corps de sorte que la différence entre les vitesses disparaît avant que le contact ne se produise et ceci exige que l'intensité de la force répulsive augmente, au sens mathématique, au-delà de toute limite si la distance entre les corps dininue constamment (par là s'exclut le contact des corps). De cette façon Bošković a introduit la force *répulsive* et, ayant exclu „actio in distans" de Newton et „impulsus" de Descartes (... sine actione in distans et sine ullo impulsu...), il a conclu qu'elle „existait soit dans la nature de la matière elle-même qui exige le repli sous la condition de cette distance déterminée de l'autre matière, soit selon la loi divine libre qui a établi ce repli à cette distance".

Bošković met ensuite en relief le fait que, de façon analogue, on peut „expliquer la force *attractive* à plus grandes distances qui dépend des distances elles-mêmes", mais elle peut se manifester également à de très petites distances réciproques des particules de la matière, car si la force était perpétuellement *répulsive*, les particules du corps s'éloigneraient de plus en plus et le corps se dissiperait, ce qui est contraire à la *cohésion* comme propriété du corps. Et c'est la première conclusion fondamentale de Bošković sur le comportement des particules à de très petites distances qui résulte de *La loi de la continuité*.

A la frontière entre les domaines des forces répulsives et des forces attractives il doit exister, selon Bošković, des points — *limes cohaesionis* (limites de cohésion) et *limes non-cohaesionis* (limites de non-cohésion) — qui séparent ces domaines et auxquels la force n'est ni répulsive ni attractive, mais égale à zéro. Ces limites sont la conséquence de la *continuité* du passage de la force répulsive en force attractive et inversement. Se basant sur ces limites et sur la diversité de l'intensité des forces répulsives et des forces attractives, Bošković explique toutes les propriétés générales du corps ainsi qu'un grand nombre de propriétés particulières du corps. Construite de cette façon, *La loi des forces* qui se fonde sur *La loi de la continuité*, mène Bošković vers la conclusion que la matière se compose de points indivisibles et sans dimensions — une espèce de centre des forces — et que le corps physique n'est pas un *continuum*, mais *discretum*. A cela il faut ajouter qu'au paragraphe 159 de la présente dissertation Bošković représente géométriquement, de façon très précise et très claire, sa *Loi des forces* par une courbe dans le système de coordonnées de Descartes, connue dans la science comme *courbe de Bošković*.

Bošković a développé en détail ses conceptions originales des rapports de l'espace et du temps dans son système de la philosophie de la nature, mais c'est aux paragraphes 171 et 172 de cette dissertation qu'il a mentionnée, pour ainsi dire, pour la première fois sa théorie des relations spatiales. C'est là qu'on effleure la notion de la „place" des points réels et l'existence de ces „places" en rapport avec la notion de la „distance" des points, si importante pour sa *Loi des forces*, c'est-à-dire on effleure la notion de la „manière d'existence des points réels" qui sont pour lui „des places réelles et permanentes des points qui créent, là où elles existent, un rapport réel de distance entre elles-mêmes et les points mêmes de la matière auxquels elles se rapportent".

Utilisant *La loi de la continuité* comme loi universelle de la nature et comme principe méthodologique général, Bošković a, nous pouvons le dire, aux paragraphes 158—171 de la présente dissertation, ébauché son système de la philosophie de la nature, cherchant à découvrir, avec un esprit de suite, les conséquences de cette loi et les extrayant, de façon strictement déductive, et les comparant avec les faits de l'expérience et les phénomènes observés, pour les insérer, en tant que telles, dans son système général de la philosophie de la nature, resp. dans sa théorie des forces et de la structure de la matière. C'est là que *La loi de la continuité* s'est exprimée pleinement comme loi de la connexion générale des phénomènes dans la nature et loi de l'évolution, ce qui constitue l'essence *dialectique* de la théorie de Bošković. Il faut prendre tout cela en considération lorsqu'on apprécie l'importance et la place de la dissertation *De continuitatis lege et ejus consectariis pertinentibus ad prima materiae elementa eorumque vires* dans l'évolution non seulement de la philosophie de la nature, mais aussi de la philosophie de la nature en général comme théorie sur la matière.

6. Jetons, enfin, un coup d'oeil sur l'importance *mathématique* de la présente dissertation. En quoi consiste-t-elle et comment faut-il l'évaluer du point de vue de l'évolution des mathématiques?

A la recherche des arguments qui doivent justifier *La loi de la continuité*, la défendre rationnellement, Bošković a très souvent recours aux mathématiques, utilisant leurs notions et théorèmes. Dans de situations pareilles, il manifeste les caractéristiques d'un mathématicien perspicase et lucide, capable de percevoir la profondeur des problèmes avec lesquels il fut confronté et de pressentir l'idée mathématique qui doit seulement prendre forme, se développer, s'accomplir et s'afirmer concrètement.

En tant que penseur qui se réglait, dans la construction de son système de la philosophie de la nature, sur *La loi de la continuité*, Bošković a effleuré dans la présente dissertation, quoique de façon indirecte, certains problèmes qui rentrent dans le domaine des *fondements* des mathématiques. Il ne les traitait en mathématicien qui s'occupe des problèmes concrets des fondements des mathématiques, mais plutôt en penseur que sa propre théorie de la philosophie de la nature avait amené dans le domaine des problèmes des fondements des mathématiques. Pour cette raison, la valeur et l'importance de ses vues sur ces problèmes doivent être cherchées *en premier lieu* dans *les anticipations d'idées* et les prévisions qu'ils renferment, lorsqu'on les observe dans *les cours* de l'évolution historique et scientitique des vues sur ces problèmes en général.

A la catégorie de ces problèmes appartiennent les problèmes de l'*infini* et du *continu*.

Les vues de Bošković sur l'infini ne diffèrent pas essentiellement de celles d'Aristote, selon lesquelles l'infini n'existe qu' „en puissance", comme infini potentiel, sans sa propre actualité, comme quelque chose d'inachevé, réalisable uniquement au sens de formation, de sorte qu'il est toujours quelque chose d'autre. La conception de la grandeur de Bošković est au fond finitiste; selon lui, infiniment petit et infiniment grand, réellement existant et déterminé en soi, sont impossibles. Il ne voit leur existence que dans leurs possibilités de devenir toujours quelque chose d'autre; premièrement comme grandeur qui peut diminuer sans limitation et, deuxièmement, comme grandeur qui peut augmenter sans limitation. La base de ces considérations chez Bošković est en effet le *Principe de la réalisabilité potentielle* que seulement les mathématiques *constructives* modernes ont explicitement mis en relief comme un de leurs principes fondamentaux. En ce sens, Bošković a effleuré, dans la présente étude, le problème de l'infini, implicitement ou explicitement, en nombre d'endroits que nous avons indiqués dans nos commentaires.

A cause de *La loi de la continuité*, Bošković s'intéressait encore plus directement au problème du *continu*. Il a exprimé dans cette étude ses vues sur le *continu linéaire*, mais non pas en mathématicien, ce qu'il faut souligner, qui aborde la recherche du continu linéaire comme problème mathématique, avec toutes les conséquences pratiques des résultats des recherches, comme, par exemple, Dedekind et Cantor, mais en philosophe de la nature et en constructeur de la théorie générale de la matière et pour cette raison la valeur et l'importance de ses vues sur le continu linéaire réside dans *les anticipations d'idées* et les prévisions lorsqu'on les considère du point de vue de l'évolution historique et scientifique du problème du continu linéaire.

Inspiré par l'idée d'Aristote sur la limite du continu, il a *anticipé*, par l'élaboration argumentée de cette idée, l'axiome de la continuité de la ligne de Dedekind et la coupure de la ligne en deux parties de Dedekind, ayant conçu la droite comme une ligne *fermée* dont le point infini est la limite commune entre les demi-droites à l'origine commune en n'importe quel point fini de la droite.

Si l'on compare la manière de laquelle Bošković avait envisagé la situation mathématique en rapport avec la continuité de la ligne et la manière de laquelle cette même situation fut envisagée par Dedekind, il est alors évidente *l'analogie* entre l'issue de cette situation de Bošković et celle de Dedekind: a) la première classe K_1 de points de la droite dans l'axiome de continuité de Dedekind est *analogue* au continu qui précede (continuum praecedens) C_p de Bošković et la deuxième classe K_2 de points de la droite de Dedekind est *analogue* au continu qui suit (continuum sequens) C_s de Bošković; b) la demande de Dedekind *„par laquelle nous nous figurons la droite comme continue“*, qu'il existe un point *unique* D qui produit la partition de la droite en classes K_1 et K_2 est *analogue* à la demande de Bošković qu'il existe une limite *unique* B du continu qui précéde C_p et du continu qui suit C_s, car c'est, selon Bošković, dans *la nature du continu* elle-même, resp. dans la nature de la continuité de la ligne.

Bošković a, donc, *anticipé* l'axiome de la continuité de la droite de Dedekind; sa limite $B = (C_p/C_s)$ est *analogue au point postulé* $D = (K_1/K_2)$ dans l'axiome de la continuité.

Bošković a donné la situation et le rôle du point arbitraire E sur la droite AB, on peut le dire, dans une *métaphore dialectique* („qu'il relie et unit toujours l'une à l'autre, deux lignes voisines, ou bien les divise et sépare, faisant l'un et l'autre office à la fois“) et si, selon Bošković, L_a (linea ante se) la demi-droite que le point E doit avoir „avant lui“ et L_p (linea post se) la demi-droite que le point E doit avoir „derrière lui", le point $P = (p_1/p_2)$ est alors *analogue* au point $E = (L_a/L_p)$ de Bošković.

Sans le point E, les demi-droites L_a et L_p sont *séparées,* avec lui elles sont *connexes* Il est par conséquent leur *limite commune* qui les sépare et les connecte.

Dans l'interprétation exposée, la *métaphore dialectique* de Bošković sur le rôle et la situation du point arbitraire de la droite (resp. de la ligne) apparaît comme *anticipation* de la coupure $P = (p_1/p_2)$ de la droite en deux classes de points p_1 et p_2 de Dedekind. En ce sens, il anticipe géométriquement la coupure de Dedekind.

Chez Bošković *le point infini* de la droite est la *limite commune* des demi-droites, dont l'origine commune est dans n'importe quel *point fini* de la droite, mais également tout *point fini* de la droite est la *limite commune* des demi-droites, dont l'origine commune est dans *le point infini.*

La droite de Bošković, donc, *n'est pas euclidienne,* mais plutôt „comme une circonférence infinie qui rentre en elle-même par des sinuosités constantes et infinies", dit Bošković. Elle est une ligne fermée $HA \infty BH$. Utilisant les notions bien connues de la théorie des ensembles moderne, on peut écrire pour la droite de Bošković: Fr. HA = Fr. $HB = \{H, \infty\}$ ou $C\{H, \infty\}$ = ext $HA \cup$ ext HB = int $HB \cup$ int HA.

La droite de Bošković $HA \infty BH$ n'appartient-elle pas parmi les messagers du nouveau modèle non-euclidien de géométrie, comme l'est, par exemple, la géométrie elliptique.

Dans les considérations des branches infinies de la parabole et de l'hyperbole et des autres courbes et dans les considérations de la transformation d'une section conique en une autre, Bošković attribuera, se réglant sur *La loi de la continuité,* même dans ces cas-ci au point infini un rôle analogue comme dans le cas de la ligne droite.

Dans le traitement du point infini comme limite du continu linéaire géométrique de Bošković se dessinent les prévisions méthodologiques et d'idées du *principe de la continuité,* bein connu, de *Poncelet.*

C'est qu'il a attribué au *point infini le rôle de la limite* analoguement à n'importe quel *point fini* de la droite. De cette façon, il a *transféré* une propriété déterminée du point fini de la droite, de façon mathématiquement fondée, sur le point infini et de cette façon a traité en effet celui-ci comme un point fini „commun". Plus de soixante ans plus tard Poncelet, auteur de la géométrie projective, a procédé semblablement à Bošković, lorsqu'il se trouvait en situation d'interpréter *le point infini* sur la base de son principe de la permanence, resp. du principe de la continuité, comme *intersection* des droites réciproquement parallèles et de lui attribuer ainsi *le rôle de l'intersection* analogue à n'importe quel *point fini* „commun". Pour cette raison dans la conception de Bošković et dans sa réalisation de traiter le point infini comme limite du continu linéaire géométrique se dessinent *les prévisions méthodologiques et d'idées* de ce principe général que seulement Poncelet formulera clairement sous forme du *Principe de la permanence* resp. du *Principe de la continuité.*

Les vues de Bošković sur le continu linéaire géométrique contiennent des *prévisions* quoique lointaines, de l'idée que le continu linéaire est un ensemble *fermé* et *connexe* ce qui ne sera nettement et mathématiquement précisément formulé que dans la définition analytique d'ensembles du continu. Il a, ensuite, pressenti intuitivement, bien qu'il les ait assez implicitement exprimées, ces caractéristiques dissimulées du continu que seulement l'analyse mathématique moderne fixera, par la théorie des ensembles, au moyen des notions topologiques comme: voisinage du point, domaine ouvert et domaine fermé, point intérieur et point de la frontière du domaine.

Bošković a *explicitement* exprimé l'idée que l'ensemble de nombres réels est un continu plus de cent ans avant que cette idée ne fût formulée en forme du théorème mathématique précis dans la théorie moderne du nombre réel de Cantor et de Dedekind.

La manière de Bošković de considérer les situations infinitésimales dans l'aporie *Achille et la tortue* agit comme un des messagers bien que, peut-être, modeste, de cette rigueur qui s'affirmera dans les cours évolutifs de l'analyse mathématique du XIX^e^ siècle et dont la source primitive se trouve dans les mathématiques de l'antiquité sur la base de laquelle Bošcović lui-même fut pour une bonne part éduqué et formé comme mathématicien.

Si l'on considère l'évolution des mathématiques après Bošković (géométrie à plusieurs dimensions, espaces mathématiques, analyse infinitésimale de la fonction à plusieurs variables) on peut affirmer qu'il a entrevu, dans certaines de ces considérations, par l'intuition d'un géomètre et analyste lucide, de vastes possibilités de l'analyse algébrique finie, géométrique et infinitésimale, malgré leur caractère limité à son époque.

Vu l'état du développement de l'analyse mathématique de son époque, il regardait, avec maturité et anticipation du point de vue mathématique, quoique presque toujours dans les cadres géométriques, nombreuses notions et nombreux théorèmes de l'analyse mathématique.

Il faut particulièrement faire ressortir que du point de vue de *La loi de la continuité* la métamorphose des sections coniques, resp. la transformation d'une section conique en une autre, fait l'objet du profond intérêt et des considérations subtiles originales de Bošković dans la présente dissertation. La plus intéressante, probablement, sous ce rapport est l'observation de Bošković que, dans les transformations de la section conique, lorsque le plan d'intersection change d'inclinaison par rapport à l'axe conique, „la parabole seule est la borne indivisible par laquelle s'effectue à un moment du temps la transition d'une suite continue d'ellipses en une suite continue d'hyperboles".

Nous pouvons conclure que cette dissertation renferme des idées mures et anticipatives, stimulées par les problèmes de la philosophie de la nature, sur nombre de notions et théorèmes mathématiques que seulement les mathématiques du XIX^e^ siècle formulerons clairement et précisément, surtout s'il s'agit des notions et des théorèmes du domaine de l'analyse infinitésimale. En tant que telle, cette dissertation est d'une certaine importance pour l'étude de l'évolution des mathématiques, surtout lorsqu'on considère cette évolution par rapport à l'évolution de la philosophie de la nature qui avait lieu sous l'influence puissante du développement des mathématiques et de leurs applications à l'étude de phénomènes naturels et inversement, le développement des mathématiques sous l'influence du développement de la philosophie de la nature.

L'historien et philosophe des mathématiques et de la physique y trouvera de l'inspiration pour son travail de recherche, surtout s'il s'agit du XVIII^e^ siècle, aussi important pour le développement des sciences susmentionnées et, sur la base de celles-ci, de la philosophie de la nature.

KLASIČNI NAUČNI SPISI

Knj. 1.	— **Euklidovi elementi**	— B. 1949. 8°, str. 66
Knj. 2.	— **Euklidovi elementi**	— B. 1950. 8°, str. 29
Knj. 3.	— **Euklidovi elementi**	— B. 1953. 8°, str. 48
Knj. 4.	— **Euklidovi elementi**	— B. 1953. 8°, str. 31
Knj. 5.	— **Euklidovi elementi**	— B. 1953. 8°, str. 58
Knj. 6.	— **Euklidovi elementi**	— B. 1955. 8°, str. 56
Knj. 7.	— **Euklidovi elementi**	— B. 1955. 8°, str. 58
Knj. 8.	— **Euklidovi elementi**	— B. 1955. 8°, str. 44
Knj. 9.	— **Euklidovi elementi**	— B. 1956. 8°, str. 48
Knj. 10.	— **Euklidovi elementi**	— B. 1956. 8°, str. 19
Knj. 11.	— **Euklidovi elementi**	— B. 1957. 8°, str. 64
Knj. 12.	— **Euklidovi elementi**	— B. 1957. 8°, str. 58
Knj. 13.	— **Euklidovi elementi**	— B. 1957. 8°, str. 80

Preveo i komentar dodao ANTON BILIMOVIĆ
Svih 13 knjiga povezano je u jednu knjigu.
Pogovor napisao ANTON BILIMOVIĆ.

Knj. 14. — **D. Hilbert,** Osnove geometrije. — B. 1957. 8°, str. 232
Preveo sa osmog nemačkog izdanja Ž. GARAŠANIN

Knj. 15. — **Lobačevski,** Geometrijska ispitivanja iz teorije paralelnih linija. — B. 1951. 8°, str. 81
Preveo i napomene dodao BRANISLAV PETRONIJEVIĆ
(drugo prošireno izdanje).

Ruđer Bošković

**O ZAKONU KONTINUITETA
I NJEGOVIM POSLEDICAMA U ODNOSU NA OSNOVNE ELEMENTE
MATERIJE I NJIHOVE SILE**

S latinskog prevela . . . . *Darinka Nevenić-Grabovac*

Predgovor i komentar napisao i prevod
stručno redigovao . . . . *Ernest Stipanić*

Korekture i revizije izvršio . . . . *Ernest Stipanić*

Tehnički urednik . . . . *Milan Čavčić*

Tiraž — primeraka *500*