МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

РАДИВОЈ КАШАНИН

1892–1989

БЕОГРАД

1991

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

РАДИВОЈ КАШАНИН

1892–1989

БЕОГРАД

1991

ı 23. седници Научног већа Математичког института од 17. јуна 1990. донета је одлука да се ова публикација објави.

*

хнички уредник Драган Трифуновић; Текст обрадио у TEX-у Мирко Јанц; Ивана Трифуновић; Тираж 300·

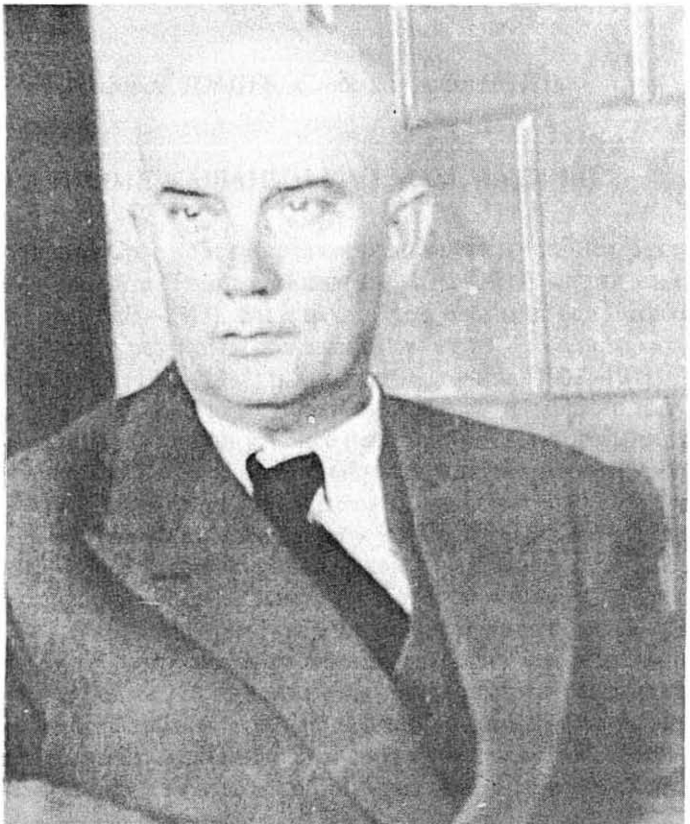
*

асификација Америчког математичког друштва (AMS Mathematics Subıssification 1985): 01 A70, 04-00, 51-03, 70-03.

мишљењу Републичког секретаријата за културу СР Србије ова ација је ослобођена пореза на промет.

„Имао сам срећу да се развијам и радим поред њих, великих ауторитета науке и морала. Да се поносим њиховим пријатељством. Не верујем да је игде постојао такав амбијент какав су створили Гавриловић, Петровић и Миланковић.”

Радивој КАШАНИН
Београд, 1974. г.



академик
др РАДИВОЈ КАШАНИН
професор универзитета
1892-1989.

Миодраг ТОМИЋ, Слободан АЉАНЧИЋ

РАДИВОЈЕ КАШАНИН КАО МАТЕМАТИЧАР*

Од математичара Срба који су предавали математику на Београдском универзитету између два рата, Радивоје Кашанин (1892–1989) једини није био ђак Михаила Петровића (1868–1943). Он је истина тезу одбранио код Петровића, али избор тезе, њен облик и резултати су Кашанинино дело. То се исто може рећи и за тезе Јована Карамате (1902–1967) и Милоша Радојчића (1903–1975). Кашанин је започео студије у Бечу, наставио у Загребу и Пешти, а завршио их у Паризу. Са сваког од тих универзитета он је понео нешто знања. Благодарећи изузетном памћењу, он је тако увећао своје велико енциклопедијско знање *Опште математике*. У Бечу код Виртингера (W. Wirtinger), он се упознао са принципима савремене Анализе. Јуриј Мајцен у Загребу указао му је на токове оновремене Геометрије. Када је после свих страдања, које му је донео први светски рат, одлучио да заврши студије, он се нашао на Сорбони у Паризу. Курсеве Гурса (E. Goursat), Пикара (E. Picard) као и Рационалну механику Апела (P. Appell) он је темељно проучио. Али његов радознали дух привукла је и Астрономија. По његовим речима, он се чак и колебао да ли да посвети више пажње и времена и Астрономији. Кашанин је стварно имао оно знање Опште математике које се сматрало основом математичких наука почетком двадесетог века. О многим проблемима он је могао да говори критички и са разумевањем, али и

---

* Радивоје Кашанин рођен је у Белом Манастиру 21. маја 1892. године (по старом календару). Прва три разреда учио је у класичној гимназији у Осијеку, а осталих пет у Српској православној великој гимназији у Новом Саду, где је матурирао јуна 1910. Студирао је Математику и Астрономију у Бечу (1910/11), Загребу (1911/13) и Будимпешти (1913/14). Као студент у Загребу био је 1912/13. асистент на Катедри Геометрије. По избијању првог светског рата 1914. године мобилисан је од стране аустро-угарских власти и упућен на фронт у Галицију, где је одмах прешао Русима и пријавио се за добровољца у српску војску. Када је у Одеси формирана Српска добровољачка дивизија, упућен је почетком 1916. у ову дивизију у којој-је, у чину резервног пешадијског потпоручника, постављен за ађутанта I пешадијског пука. У том чину и звању био је 1916. на фронту у Добруџи, 1917. у Бесарабији, 1918. на Солунском фронту. Студије математике завршио је на Сорбони у Паризу 1921. (Licence ès Sciences mathématiques). Докторирао је код Михаила Петровића (1924). На Техничком факултету у Београду постављен је за асистента 1922, за доцента 1926, за ванредног професора 1930. и за редовног професора 1939. године. Двапут је био биран за ректора Техничке велике школе (1950/51 и 1951/1952). Био је управник Математичког института у периоду 1951–1958, а затим председник његовог Савета (1958–1961). За дописног члана Српске академије наука изабран је 2. марта 1946, а за редовног члана 10. јуна 1955. године. Радивоје Кашанин преминуо је 30. октобра 1989. године у Београду.

да оцени суштину проблема. Старији учесници на седницама Математичког института, одмах по Ослобођењу, сећају се његових многобројних примедаба и коментара. Очигледно је било, да су те примедбе биле оправдане, да су питања ишла у срж проблема, да је он лако одвајао суштину рада од спољне конструкције. Нешто од тог општег и широког знања пренело се и на његов истраживачки рад на пољу математичких наука. Његови радови нису бројни, али су по областима разноврсни. Кашанин је радио у теорији Диференцијалних једначина, Функција комплексне променљиве, Анализе, Геометрије, Интерполације и апроксимације, Механике па, чак и Астрономије. У његове последње радове долази покушај математичке интерпретације космогоничне теорије Павла Савића.

Проблем, који Кашанин посматра у својим математичким радовима, је на први поглед једноставан. Тај проблем је скоро увек изворан. Он није последица неких других резултата, а најмање уопштење познатих ставова. Његов исказ је прост, али пут до његова решења није једноставан. Кашанин је полазећи од најједноставнијих елемената, дедуктивним путем тежио да проблем раствори и да објасни његову генезу. Он је у истраживачком раду био скоро самоук, боље речено није припадао некој школи, а није имао ни неког посебног узора ни у избору области ни у начину обраде. Он је пре прихватао аксиоматски приступ научном истраживању него формализам, а још мање суптилне анализе, где су резултати често неочекиване последице неких духовитих математичких досетки. Како се ти његови радови не настављају на нечија ранија истраживања, и у њима се не преузимају већ раније утврђене чињенице, у њима скоро и да нема позива на друге ауторе. Проблем се често посматра у крајње специјалном, али карактеристичном случају, и тада иде ка општем али дотле, док то основни елементи, претпостављени у почетку рада допуштају. На тај начин, рад представља једну затворену целину. Основне претпоставке су одредиле и крајњи домет рада. То се можда најбоље види и у његовим првим радовима, где се истражују аналитички облици мултиформних функција.

Та група радова садржи и његову тезу (1924), а ти радови су објављени у ГЛАСУ (CXVII (1926), 11–49, 54–64; CXX (1926), 35–66; CXXVII (1927), 69–86). У ова четири рада он уводи један нов појам — закон *мултиформности око изоловане критичке тачке*. То је функционална веза $F(x, y_0, y_1) = 0$ која постоји између две детерминације y_0 и y_1 мултиформне аналитичке функције $y(x)$ у тачки x ако се детерминација y_1 добива из детерминације y_0 једним обиласком око изоловане критичке тачке x_0 у позитивном смеру по једноставној затвореној кривој линији. Кашанин у тим радовима као два основна проблема истиче: **Прво**. Да ли за дати закон мултиформности постоји мултиформна аналитичка функција и који је њен аналитички облик? **Друго**. За дату мултиформну аналитичку функцију, дату директно или преко диференцијалне једначине, наћи закон мултиформности, а преко њега истраживати особине саме функције. Најрепрезентативнији, а и најсадржајнији од тих радова је онај из ГЛАСА (CXX-1926), 35–66): *О мултиформним интегралима Рикатијеве диференцијалне једначине*. Расмотримо ближе резултате тога рада и пут којим он долази до тих резултата. Садржина рада је у исказу:

Нека су A, B, и C аналитичке функције које су у домену D униформне и једна од њих или више заједно, имају једну сингуларну тачку x_0, тада Рикатијева диференцијална једначина

$$y' = Ay^2 + By + C, \tag{1}$$

има у D један униформан интеграл η или два η_1 и η_2 или три. У првом случају закон мултиформности општег интеграла $y(x)$ око тачке x_0 је

$$\frac{1}{y_1 - \eta} = \frac{1}{y_0 - \eta} + \beta(x), \tag{a}$$

а у другом

$$\frac{1}{y_1 - \eta} = \frac{\alpha}{y_0 - \eta} + \beta(x), \tag{b}$$

где је α константа $\neq 1$, а $\eta(x)$ и $\beta(x)$ униформне аналитичке функције у D. Ови закони мултиформности не зависе од интеграционих констаната и карактеристика су једначине (1).

С друге стране, ако је x_0 у D једина критичка тачка мултиформне аналитичке функције $y(x)$ и ако је око x_0 њен закон мултиформности дат са (b) где је $\alpha = \text{const}$, а η и β у D униформне аналитичке функције, тада свакој тачки x из D одговара једна двојна логаритамска спирала (или круг ако је $|\alpha| = 1$) на којој леже све детерминације функције $y(x)$ добивене циркулацијом око критичке тачке x_0. Према томе у y-равни за разно $x \in D$ добијамо један систем двојних логаритамских спирала. Ако су испуњене извесне особине тога система спирала, тада тим системом је потпуно одређена Рикатијева диференцијална једначина (1) чији општи интеграл је дат функцијом $y(x)$. У случају $\alpha = 1$ систем тих спирала прелази у систем кругова.

За доказ ових тврђења Кашанин полази од линеарне хомогене диференцијалне једначине другог реда

$$z'' + Pz' + Qz = 0, \tag{2}$$

на коју се (1) своди сменом $y = -A \cdot z'/z$.

Познато је које тачке могу бити критичке тачке интеграла једначине (2). То могу бити само сингуларне тачке од P и Q. Ако једна од функција P или Q (или обе заједно) имају једну сингуларну тачку (пол или есенцијални сингуларитет) онда према познатој теореми Фукса (L. Fuchs) једначина (2) има два линеарно независна партикуларна интеграла облика

$$\begin{aligned} \xi &= (x - x_0)^m \varphi(x) \\ \xi_1 &= (x - x_0)^n [\psi(x) + r\varphi(x)] \log(x - x_0), \end{aligned} \tag{3}$$

где су m, n и r константе, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ униформне функције у D. Бројеви m и n нису потпуно одређени. Може им се додати ма какав цео позитиван или негативан број у ком случају су функције φ и ψ само помножене са степеном од $(x - x_0)$ или се аналитички облик од ξ и ξ_1 не мења. Ставимо $\omega_1 = e^{2\pi im}$, $\omega_2 = e^{2\pi in}$; тада ако је $\alpha = \omega/\omega_1 \neq 1$, као што је из теорије познато, мора бити $r = 0$. Ако је $\alpha = 1$ тј. $\omega_1 = \omega_2$, r може, али не мора бити нула. На тај начин разликују се три случаја: 1° $\alpha = 1$, $r = 0$, 2° $\alpha \neq 1$, 3° $\alpha = 1$, $r \neq 0$. У првом случају из (3) користећи основну смену између y и z налази се облик општег интеграла од (1) тј. $y(x)$, и он је униформна функција у D. У другом случају, кад је $\alpha \neq 1$, према (3) и основне везе између y и z налазе се партикуларни интеграли η и η_1 од (1). Отуда следи и веза између η, η_1 и општег интеграла $y(x)$, а из те релације и једноставни однос изнеђу две узастопне циркулације y_0 и y_1 од $y(x)$:

$$\frac{y_1 - \eta_1}{y_1 - \eta} = \alpha \frac{y_0 - \eta_1}{y_0 - \eta}, \tag{m}$$

и то је закон мултиформности општег интеграла у овом случају. Он се може написати и у облику

$$\frac{1}{y_1 - \eta} = \frac{\alpha}{y_0 - \eta} + \beta(x), \tag{a}$$

где α, β и η имају напред наведене вредности. Најзад у трећем случају кад је $\alpha = 1$ и $r \neq 0$ основни проблем је да се покаже да има само један униформан партикуларни интеграл и то онај који одговара интегралу ξ из (3). Исто тако у овом случају није једноставно одредити закон мултиформности. Он се одређује, будући да се у овом случају познаје један партикуларни интеграл једначине (1), трансформацијом ове једначине у линеарну једначину и дискусијом њеног општег интеграла. Одатле излази да је закон мултиформности опет облика (a) са $\alpha = 1$ тј.

$$\frac{1}{y_1 - \eta} = \frac{1}{y_0 - \eta} + \beta(x), \tag{b}$$

где је β униформна функција у D. Овај резултат не би био потпун да Кашанин није показао да у околини тачке у бесконачности имамо исте законе мултиформности и да шта више закон мултиформности (b) претставља гранични случај закона мултиформности (a).

Да би могао да разматра инверзан проблем, тј. да из закона мултиформности нађе под извесним условима и саму функцију, он детаљно анализира тај закон, а то је образац (m) где за n-ту циркулацију он узима облик

$$\frac{y_n - \eta_1}{y_n - \eta} = \alpha^n \frac{y_0 - \eta_1}{y_0 - \eta}.$$

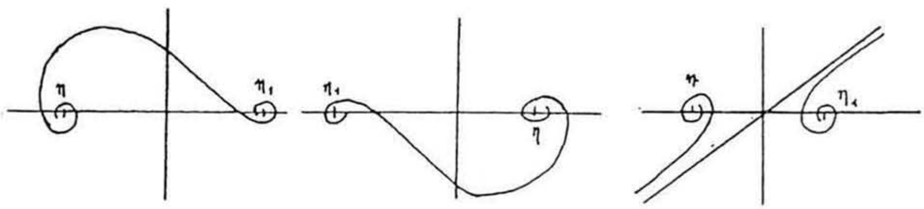
Ако се у овом изразу стави $\alpha = ae^{i\omega}$, то све вредности y_n за $n = 0, 1, \ldots$, које има функција $y(x)$ при разниам циркулацијама око x_0 леже на кривој линији чији афикси задовољавају једначине

$$\left|\frac{y-\eta_1}{y-\eta}\right| = a\left|\frac{y_0-\eta_1}{y_0-\eta}\right|, \qquad \arg\frac{y-\eta_1}{y-\eta} = n\omega + \arg\frac{y_0-\eta_1}{y_0-\eta} + 2k\pi.$$

Последње једначине се могу написати и у облику

$$(3') \qquad \left|\frac{y-\eta_1}{y-\eta}\right| = M\exp\left\{m\left(\arg\frac{y-\eta_1}{y-\eta} + 2k\pi\right)\right\},$$
$$M = \left|\frac{y_0-\eta_1}{y_0-\eta}\right|\exp\left\{-m\arg\frac{y_0-\eta_1}{y_0-\eta}\right\}, \qquad m = \frac{\log\alpha}{\omega}.$$

Користећи биполарни координатни систем Кашанин проналази параметарски облик једначина (3'). То је крива линија позната под именом двојна логаритамска спирала, која за $\alpha = 1$ прелази у круг.



За $m > 0$ та спирала је приказана на слици, где су η и η_1 асимптотске тачке те спирале. Разни случајеви претстављени на слици јављају се када је ордината у почетку већа, мања од нуле или бесконачна.

Дискусијом параметарских једначина спирале налази се још једна основна особина разних детерминација. Поред тога што се налазе на овој спирали оне се налазе и у пресецима ортогоналних кругова одређених центара који пролазе кроз тачке η и η_1. Ти кругови секу спиралу под сталним углом. Она је њихова изогонална трајекторија. Са променом тачке x у y-равни, добијамо један систем двојних логаритамских спирала. Сада су у једначинама (3') η и η_1 односно M функције од t и τ ($x = t + i\tau$). За η и η_1 налази се да су униформне аналитичке функције у D, док је $\log M$ униформна хармонијска функција која у D нема вртлога и у x_0 има извор одређене јачине.

Инверзни проблем који Кашанин посматра и решава у другом делу овога рада може се сада дефинисати на следећи начин.

Ако је x_0 у D једина критичка тачка мултиформне аналитичке функције $y(x)$ и ако је око ње закон мултиформности дат са (b) односно (m) где је $\alpha \neq 1$ а $\eta(x)$ и $\beta(x)$ у D униформне аналитичке функције, тада свакој тачки у D одговара једна двојна логаритамска спирала (или круг за $\alpha = 1$). Угао под којим спирала сече систем ортогоналних кругова кроз η и η_1 је сталан. Нека је $\log M$ у обрасцу (3′), који претставља закон мултифомности, униформна хармонијска функција без вртлога и са датим извором одређене јачине у D, тада постоји аналитилчка функција са јединим критичком тачком x_0 чије све детерминације леже на тим спиралама и она је једнозначно одређена као решење Рикатијеве једначине (1) где су A, B и C одређене униформне функције у D.

*

Рикатијевој једначини али у реалном, Кашанин се вратио неколико година касније. Двадесетих година, Петровић се доста занимао са диференцијалним једначинама које се могу интегрисати помоћу квадратура, као и са трансформацијама које своде диференцијалне једначине на одређене типове. Делом су се тим проблемом занимали Тадија Пејовић (1892–1980) и нешто касније Драгослав Митриновић. Кашанин има један рад из тог круга проблема, али општијег облика, са различитим погледом на тај проблем. У раду *О упрошћавању диференцијалних једначина првога реда помоћу њихових партикуларних интеграла* (ГЛАС, 1929), он поставља проблем: Да ли постоји смена $y = F(y_1, Y)$, где је y_1 партикуларни интеграл диференцијалне једначине првога реда

$$\text{(A)} \qquad y' = M_1 y^{m_1} + M_2 y^{m_2} + \cdots + M_k y^{m_k} \qquad (m_1 > m_2 > \cdots > m_k),$$

која десну страну ове диференцијалне једначине своди на полином нижег степена

$$Y' = N_1 Y^{n_1} + N_2 Y^{n_2} + \cdots + N_p Y^{n_p} \qquad (n_1 > n_2 > \cdots > n_k),$$

тј. где је $m_1 > n_1$ и показује да је то у општем случају могуће само код Рикатијеве једначине. Другим речима, партикуларни интеграл y_1 не може се искористити у општем случају за снижење степена диференцијалне једначине (A) као што је то случај код линеарне хомогене једначине.

*

Међу последње Кашанинове радове из Анализе долазе два његова рада из Апроксимације и Интерполације (Publications math. de l'Université de Belgrade, T. VI, VII, 1937–39; Publications de l'Inst. math. T. I, 1947). Све поменуте особине његовог научног рада које се огледају често у једноставном проблему и где се затим испитују везе између различитих познатих резултата да би се на основу тога вршила даља истраживања налазе се можда најбоље исказана у првом од наведена два рада.

Проблем интерполације функције $f(x)$ полиномом $(n-1)$-ог степена $P_{n-1}(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ који са њом има n заједничких тачака (x_i, y_i) $(x_i \neq x_j\ (i \neq j)$, $y_i = f(x_i))$ своди се на решавање система

$$\text{(4)} \qquad P_{n-1}(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Практично решавање овог система битно зависи од тога у ком облику је написан полином $P_{n-1}(x)$. Ако га, не опредељујући се, засад, за неки конкретан облик, напишемо као линеарну комбинацију n полинома $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ који су сви степена $\leq n-1$, тj.

$$P_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{n-1} A_k p_k(x), \tag{5}$$

линеарни систем (4) по n непознатих $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ имаће детерминанту

$$\begin{vmatrix} p_0(x_0) & p_1(x_0) & \ldots & p_{n-1}(x_0) \\ p_0(x_1) & p_1(x_1) & \ldots & p_{n-1}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_0(x_{n-1}) & p_1(x_{n-1}) & \ldots & p_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Означимо са $D(x)$ детерминанту која настаје из детерминанте (6) када у овој у првом реду x_0 заменимо са x. Како је $D(x)$ полином по x највише $(n-1)$-ог степена, а анулира се већ за $x = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, он се може анулирати и за $x = x_0$ само ако је идентички једнак нули. Дакле, детерминанта (6) система (4) може бити једнака нули само ако је $D(x) \equiv 0$. Развијајући детерминанту $D(x)$ по првом реду, то би значило да су полиноми $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ линеарно зависни. Према томе, ако су полиноми $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ линеарно независни (тј. ако образују базу), детерминанта (6) биће различита од нуле па ће систем (4) имати јединствено решење.

У пракси се користе различите базе:

1° **Степени**: $p_k(x) = x^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Тада полином $P_{n-1}(x)$ има врло једноставан облик, али се у систему (4) у свакој једначини јављају све непознате A_k. Овај недостатак, с практичне тачке гледишта, отклања база коју формирају.

2° **Lagrange-ови полиноми**:

$$p_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{n-1})}$$
$$\left(k = 1, 2, \ldots, n-1;\ p_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_0-x_{n-1})}\right).$$

Ови имају особину

$$p_k(x_i)\begin{cases} = 0 & \text{за } i \neq k \\ = 1 & \text{за } i = k, \end{cases}$$

на основу које се систем (4) своди на

$$p_1(x_i)A_i = y_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{4'}$$

где свака од једначина садржи само по једну непознату A_i. База Lagrange-ових полинома је, дакле, идеална у погледу решавања система (4), али су зато Lagrange-ови полиноми прилично компликованог облика. Трећа једна база некако лежи између ове две: није много компликована а њој одговарајући систем (4) је ипак погодан за решавање. Њу чине

3° **Newton-ови полиноми**:

$$p_0(x)=1, \qquad p_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k-1})} \quad (k=1,2,\ldots,n-1).$$

Ови имају особину

$$p_k(x_i)\begin{cases} =0 & \text{за } i<k \\ =1 & \text{за } i=k \end{cases} \qquad (k=0,1,\ldots,n-1),$$

па се систем (4) своди на

$$(4'') \qquad \sum_{k=0}^{i} A_k p_k(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,\ldots,n-1),$$

те прва једначина садржи само A_0, друга само A_0 и A_1, трећа само A_0, A_1 и A_2, итд., па се непознате $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ сукцесивно одређују помоћу претходно већ израчунатих.

У овом раду Кашанин се не опредељује ни за један од наведених конкретних база, већ покушава да у општем случају систем (4) замени системом истог броја једначина али таквих да у свакој једначини фигурише само једна од непознатих A_k. Општа метода састоји се у томе да једначине система (4) помножимо редом са $m_i^{(\nu)}$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ и све тако добивене једначине саберемо. Тако ћемо добити

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i^{(\nu)} \sum_{k=0}^{n-1} A_k p_k(x_i)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i^{(\nu)} y_i$$

односно

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{n-1} A_k \sum_{i=0}^{n-1} m_i^{(\nu)} p_k(x_i)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i^{(\nu)} y_i .$$

Учинимо ли то n пута за $\nu=0,1,\ldots,n-1$, (7) ће за тај скуп вредности ν представљати систем од n једначина линеарних по A_k са n^2 неодређених коефицијената $m_i^{(\nu)}$. Ове ћемо одредити тако да буде

$$(8) \qquad \sum_{\nu=0}^{n-1} m_i^{(\nu)} p_k(x_i)\begin{cases} =0 & \text{за } \nu\neq k \\ \neq 0 & \text{за } \nu=k \end{cases} \qquad (\nu,k=0,1,\ldots,n-1).$$

Из ових n система с n једначина, коефицијенти $m_i^{(\nu)}$ одређени су за свако i и ν. Уврстимо ли њихове вредности у (7) добићемо

$$(7') \qquad A_k \sum_{i=0}^{n-1} m_i^{(k)} p_k(x_i)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i^{(k)} y_i ,$$

што смо и хтели постићи.

Ради интерпретације и формулације резултата до којих је Кашанин дошао, он уводи неке допунске ознаке и појмове. Он означава са $q_\nu(x)$ полином степена $\leq n-1$ који у тачкама x_i има вредности $m_i^{(\nu)}$ за $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Тада се (8) може писати у облику

$$
(8') \qquad \sum_{i=0}^{n-1} p_k(x_i) q_\nu(x_i) \begin{cases} = 0 & \text{за } \nu \neq k \\ \neq 0 & \text{за } \nu = k. \end{cases}
$$

Уведе ли се, краткоће писања ради, ознака

$$
[p_k, q_\nu] := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} p_k(x_i) q_\nu(x_i)
$$

може се, дакле, рећи:

За сваку базу (p_k) полинома степена $\leq n-1$ постоје полиноми (q_k) степена $\leq n-1$, тако да важи

$$
(8') \qquad [p_k, q_\nu] \begin{cases} = 0 & \text{за } \nu \neq k \\ \neq 0 & \text{за } \nu = k \end{cases}.
$$

Уводећи ове, систем (4) *је, према* (7′), *еквивалентан систему*

$$
(7'') \qquad A_k [p_k, q_k] = [f, q_k] \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)
$$

који је непосредно решив по A_k.

За базу (q_k) каже се да је *коњугована* бази (p_k). За прелазак од система (4) написаног за базу (p_k), на систем облика (7′) неопходно је, дакле, одређивање базе (q_k) коњуговане бази (p_k). Тог посла ћемо се ослободити ако једноставно *претпоставимо* да је база (p_k) коњугована сама себи (*самокоњугована*), тј. да има особину

$$
(9) \qquad [p_k, p_\nu] \begin{cases} = 0 & \text{за } \nu \neq k \\ \neq 0 & \text{за } \nu = k \end{cases}.
$$

Све у свему, важи овај исказ:

За сваки скуп вредности $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ ($x_i \neq x_j$ за $i \neq j$) постоји база $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ полинома која је самокоњугована и таква да је $[p_k, p_k] = 1$. За ту, тзв. Legendre-ову базу, важи

$$
(10) \qquad A_k = [f, p_k].
$$

Уз овај став о егзистенцији Legendre-ове базе, Кашанин је дао и рекурентни образац за њено поступно израчунавање:

$$p_0(x) = 1, \qquad p_k(x) = \frac{x^k - \sum_{\nu=0}^{k-1}[p_\nu, x^k]p_\nu(x)}{\left\{[x^k, x^k] - \sum_{\nu=0}^{n-1}[p_\nu, x^k]^2\right\}^{1/2}} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Примедба. Ради поређења Legendre-ове базе са Langrange-овом и Newton-овом базом, није на одмет, уз карактеристике последње две, написати самокоњугованост Legendre-ове у експлицитном облику

$$(9') \qquad p_k(x_0)p_\nu(x_0) + p_k(x_1)p_\nu(x_1) + \cdots + p_k(x_{n-1})p_\nu(x_{n-1}) \begin{cases} = 0 & \text{за } \nu \neq k \\ \neq 0 & \text{за } \nu = k \end{cases}.$$

Ако Legendre-ову базу упоредимо са Newton-овом, видимо да је ова друга једноставнија, али је зато код ње израчунавање коефицијената A_k знатно компликованије. Ове две базе су, у извесном смислу, супротстављене једна другој: формирање Legendre-ове базе слично је одређивању коефицијената код Newton-ове (у оба случаја је реч о рекурентним обрасцима).

Уочимо сада $m+1$ $(0 \leq m \leq n-1)$ првих чланова интерполационог полинома $P_{n-1}(x)$ по бази (p_k):

$$s_m(x) := A_0p_0(x) + A_1p_1(x) + \cdots + A_mp_m(x).$$

Од интереса је једино случај $m < n-1$ јер је $s_{n-1}(x) = P_{n-1}(x)$ за свако x. $s_m(x)$ називамо m-тим одсечком полинома $P_{n-1}(x)$ по бази (p_k). Поставља се питање односа одсечка $s_m(x)$ према интерполационом полиному $P_{n-1}(x)$ а тиме и према функцији $f(x)$ која се интерполира. Тај однос битно зависи од усвојене базе:

1° За базу степена (x^k) одсечак $s_m(x)$ је полином степена m који у тачки $x = 0$, $y = P_{n-1}(0)$ има додир реда m са $P_{n-1}(x)$ (а са функцијом $f(x)$, у општем случају, не мора имати ничег заједничког).

2° За Lagrange-ову базу (p_k) одсечак $s_m(x)$ је полином степена $n-1$ који са $P_{n-1}(x)$ (а тиме и са $f(x)$) има заједничке тачке (x_i, y_i) за $i = 0, 1, \dots, m$ $(y_i = P_{n-1}(x_i) = f(x_i))$. Заиста, за $i = 0, 1, \dots, m$ је због карактеристичне особине Lagrange-ове базе и према (4′)

$$s_m(x_i) = \sum_{k=0}^{m} A_kp_k(x_i) = A_ip_i(x_i) = y_i.$$

3° За Newton-ову базу (p_k) одсечак $s_m(x)$ је полином степена m који са $P_{n-1}(x)$ (а тиме и са $f(x)$) има заједничке тачке (x_i, y_i) за $i = 0, 1, \dots, m$. Заиста, за $i = 0, 1, \dots, m$ је

$$s_m(x_i) = \sum_{k=0}^{m} A_kP_k(x_i) = \sum_{k=0}^{i} A_kp_k(x_i) = y_i,$$

користећи прво карактеристичну особину Newton-ове базе а затим (4′).

4° За Legendre-ову базу (p_k) одсечак $s_m(x)$ је полином степена m. Међутим, што се тиче односа између $s_m(x)$ и $P_{n-1}(x)$ (а преко $P_{n-1}(x)$ и са $f(x)$) ту на први поглед ништа није видљиво. У општем случају нити је $s_m(x_i) = P_{n-1}(x_i)$ за нека x_i (као код Lagrange-ове и Newton-ове базе) нити има додира између $s_m(x)$ и $P_{n-1}(x)$ (као код степене базе), сем у тривијалном случају када је $f(x)$ полином степена $\leq n-1$ и $m = n-1$, тј. када су f, P_{n-1} и s_m идентични полиноми.

Да бисмо утврдили везу која постоји између f, P_{n-1} и s_m када је у питању Legendre-ова база (p_k), означимо са $r_m(x)$ произвољан полином степена m и уредимо га по Legendre-овој бази:

$$r_m(x) = B_0 p_0(x) + B_1 p_1(x) + \cdots + B_m p_m(x).$$

Варирајући $B_0, B_1, \dots B_m$ добићемо све могуће полиноме степена $\leq m$, па међу њима и одсечак $s_m(x)$. Ако су задате тачке $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ и тачкама (x_i) одговарајућа Legendre-ова база, израз

$$\Phi := \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) - r_m(x_i)]^2$$

је функција променљивих $B_0, B_1, \dots, B_m$. Како је $\Phi \geq 0$, Φ има ненегативан минимум, тј. међу полиномима степена $\leq m$ постоји један за који Φ постиже тај минимум. Потребан услов за то је

$$\frac{\partial \Phi}{\partial B_0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial B_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial B_m} = 0. \tag{11}$$

Како је за $k = 0, 1, \dots, m$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial B_k} &= -\sum_{i=0}^{n-1} 2[f(x_i) - r_m(x_i)] \frac{\partial r_m(x_i)}{\partial B_k} = -2[f(x_i) - r_m(x_i)] p_k(x_i) \\ &= -2\left\{\sum_{i=0}^{n-1} y_i p_k(x_i) - B_0 \sum_{i=0}^{n-1} p_0(x_i) p_k(x_i) - \cdots - B_m \sum_{i=0}^{n-1} p_m(x_i) p_k(x_i)\right\},\end{aligned}$$

то је на основу карактеристичне особине (9) Legendre-ове базе

$$\frac{\partial \Phi}{\partial B_k} = -2\left\{\sum_{i=0}^{n-1} y_i p_k(x_i) - n B_k\right\}.$$

Услови (11) своде се, дакле, на

$$B_k = [y_i, p_k] \qquad (k = 0, 1, \dots, m),$$

те је, према (10), $B_k = A_k$, тј. $r_m(x) = s_m(x)$. Значи: између свих могућих полинома $r_m(x)$ степена m, одсечак $s_m(x)$ по Legendre-овој бази је тај који минимизира израз $\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) - r_m(x_i)]^2$.

Ваљаност апроксимације функције $f(x)$ одсечцима $s_m(x)$ можемо повећати, у принципу, на два начина: при *фиксираном броју интерполационих тачака*, смањивањем размака у коме оне морају лежати, све док се тај размак не сведе на једну једину тачку, или, при *фиксираном размаку*, неограниченим увећавањем броја интерполационих тачака које у њему леже. Први поступак може се спровести са Newton-овом базом и тако добити Taylor-ов образац, а други, када је у питању размак $(-1,+1)$, са Legendre-овом базом и тако добити ортогонални развитак по Legendre-овим полиномима.

*

Кашанин је студирао Математику у Паризу у време када је Рационална механика била још увек саставни део математичких студија. У раду: *Les équations générales du mouvements d'un système de points matériels aux liaisons données (Publ. de l'Inst. math. Tome II, 1948)* он посматра проблем: кад су дате спољне и унутрашње силе са везама између генералисаних координата, које се нове везе могу увести које ће омогућити кретање система материјалних тачака у сагласности са датим везама. Он издваја и карактерише такозване *идеалне везе*, које чине језгро сила веза и увек се морају узети у обзир. Дато је њихово механичко обележје. Циљ рада је да покаже које су везе саставни део принципа механике а које су условне.

Овиx неколико примера показују разноврсност и област математике, а и проблема којима се Кашанин занимао, а пре свега карактер проблема који је њега привлачио.

Може се рећи, посматрајући његов научни рад, да је он начинио неколико пропуста који су га одвукли од интезивног рада на математичкој науци. Негде почетком тридесетих година он је започео да пише уџбеник *Вишу математику*. Професори Пејовић и Карамата су причали како је он савесно, скоро опседнут, данима размишљао о свакој глави, сваком параграфу своје књиге. То је прекинуло оне нити које су га повезивале са научним истраживањем. И није забадава Харди (G. H. Hardy) говорио да уџбенике треба писати на крају своје каријере.

С друге стране, велики број области, и њихова ширина није му дозвољавала да дубље понире у неки проблем и да га месецима носи и решава. Он је ишао у ширину а не у дубину.

Најзад, у његовој природи је било и сувише индивидуалности и самосталности. Он је био врло друже љубив, али научне контакте није успостављао. И у томе се он тако разликовао од Карамате који је био у кореспонденцији са са свима математичарима из области у којој је делао. Кашанин је био усамљен. Он није волео ни конгресе ни студијска путовања. После Париза, он се скоро није ни кретао по иностранству. Научну кореспонденцију није ни одржавао.

Али он није напустио Математику. У рукописима нађеним после његове смрти, он је изгледа написао низ обимних расправа — научно-историјског карактера. Можда се у тим радовима поред рефлексија, налазе и неки погледи на научне проблеме, како то, бар по садржају тих радова изгледа.

Све у свему, Кашанин претставља једног даровитог математичара широке научне културе и то не само на пољу чисте Математике. Једног од оних математичара са почетка овога века, чије је обимно знање служило млађима за ослонац на првим корацима. Јер изнад свега његово схватање Математике било је исправно. Он је правилно ценио значај резултата, разликовао суштину проблема од његове форме, раздвајао тривијално и површно од дубоког и оригиналног. И можда је зато рано престао са радом, кад је видео да оно што жели не може да достигне. Строг критеријум према научном раду је имао пре свега према себи. Али зато је ценио и без зависти признавао вредност других, а нарочито млађих. Можемо рећи да су не само млађи математичари, већ и бројни инжењери, који су желели да се посвете теоријском раду, имали његову подршку и помоћ, и то не само кроз његов уџбеник из *Више математике* који је одиграо битну улогу у издизању нивоа, како Математике, тако и других егзактних наука на техничким факултетима. Но, треба имати на уму да се он у нашој Математици појавио онда када се једна епоха завршавала — Петровићево време — и почињало ново доба. Можда је зато његов пут и био такав. Пут ка новим обалама са свим лутањима у тражњу новог.

Miodrag TOMIĆ, Slobodan ALJANČIĆ

RADIVOJ KAŠANIN AS A MATHEMATICIAN

During his studies in Vienna, Zagreb, Budapest and Paris Radivoj Kašanin acquired a broad mathematical culture. That can be seen in his creative work through the diversity of mathematical fields in which he worked: theory of differential equations, theory of functions of complex variables, analysis, geometry, interpolation and approximation, mechanics, even astronomy — which attracted him from his early days. His last works were devoted to the mathematical interpretation of the cosmogonical theory of Pavle Savić. As a professor of the Technical university Kašanin brought back before the World war II the teaching of mathematics to a high level, what has considerably influenced the progress of the engineering specialities on the Technical university. Through his whole life he was always ready to help the young scientists.

ОБЈАВЉЕНИ РАДОВИ АКАДЕМИКА РАДИВОЈА КАШАНИНА

1. *О аналитичким облицима мултиформних функција*, Београд 1925, стр. (4)+36+(1). (Докторска дисертација примљена за докторски испит на седници Филозофског факултета Универзитета у Београду 9. маја 1924, према реферату члана испитног одбора г.г. др Михаила Петровића и др Антона Билимовића редовних професора Универзитета)

2. *О аналитичким облицима мултиформних функција* (*Sur les formes analytiques des fonctions multiformes*), Српска краљевска академија, Глас CXVII, Први разред, књ. 53, Београд 1926, стр. 11–49.

3. *О међусобном утицају критичних тачака* (*Influence mutuelle des points critiques*), Српска краљевска академија, Глас CXVII, Први разред, књ. 53, Београд 1926, стр. 51–64.

4. *О мултиформним интегралима Рикатијеве диференцијалне једначине* (*Sur les intégrales multiformes de l'équation de Riccati*), Српска краљевска академија, Глас CXX, Први разред, књ. 55, Београд 1926, стр. 35–66.

5. *О једној класи мултиформних аналитичких функција* (*Sur une classe des fonctions analytiques multiformes*), Српска краљевска академија, Глас CXXVII, Први разред, књ. 58, Београд 1927, стр. 67–86.

6. *О упрошћавању диференцијалних једначина првога реда помоћу њихових партикуларних интеграла* (*Sur la simplification des équations différentielles à l'aide des leurs intégrales particulières*), Српска краљевска академија, Глас CXXXIV, Први разред, књ. 63, Београд 1929, стр. 159–174.

7. *Sur la périodicite des oppositions d'une petite planète*, Mémoire de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, t. I, Belgrade 1932, pp. 13–22.

8. *Обвојнице кривих линија у равни* (*Sur les enveloppes des courbes planes*), Српска краљевска академија, Глас CXLVI, Први разред, књ. 72, Београд 1932, стр. 69–83.

9. *Виша математика I*, Графички завод „Славија", св. 1, Београд 1932, стр. 80.

10. *Sur un procédé de calcul direct des oppositions intermédiaires des petites planètes*, Mémoire de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, t. II, Belgrade 1933, pp. 18–38.

11. *Виша математика I, св. I*, Издавачка књижарница Геце Кона, Београд 1933, стр. 160.

12. *Виша математика I,* Београд 1934, стр. 627.

13. *Sur les positions relatives de deux astéroïdes,* Mémoire de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, t. III, Belgrade 1936, pp. 5–9.

14. *Sur les divers procédes d'interpolation,* Publications mathématiques de l'Université de Belgrade t. VI–VII, Belgrade 1938, pp. 240–266.

15. *Sur les erreurs des observations,* Mémoire de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, t. IV, Belgrade 1939, pp. 1–48.

16. *Виша математика I,* Централно удружење студената технике, Београд 1946, стр. XII+791 (2. прер. и доп. издање).

17. *Др Богдан Гавриловић (1864–1947),* Glasnik matematičko-fizički i astronomski t. 2, Zagreb 1947, str. 201–204.

18. *Le coefficient d'approximation moyenne et le coefficient de corrélation,* Publications de l'Institut mathématique, Académie Serbe des Sciences, t. I, Belgrade 1947, pp. 71–87.

19. *Увођење угла, тригонометријских функција и броја π у аритметици* (*L'introduction en arithmétique de l'angle, des fonctions trigonométriques et du nombre π*), Српска академија наука, Глас CXCI, Први разред, књ. 96, Београд 1948, стр. 149–161.

20. *Les équations générales du mouvement d'un système de points matériels aux liaisons données,* Publications de l'Institut mathématique, Académie Serbe des Sciences, t. II, Belgrad 1948, pp. 116–130.

21. *Виша математика I,* Београд 1949, стр. 847 (3. издање).

22. *Виша математика II,* књ. 1, Београд 1949, стр. 624+VIII.

23. *Виша математика II,* књ. 2, Београд 1950, стр. 679+VIII.

24. *Опште једначине кретања система материјалних тачака* (*Les équations générales du mouvement d'un système de points matériels*), Српска академија наука, Зборник радова књ. VII, Математички институт књ. 1, Београд 1951, стр. 17–57.

25. *Геометриска интерпретација Банахјевичеве схеме* (*Interprétation géométrique du schéma de Banachiewicz*), Српска академија наука, Зборник радова књ. VIII, Математички институт књ. 2, Београд 1952, стр. 93–96.

26. *Збирка решених задатака више математике I, књ. 2,* Географски институт ЈНА, Београд 1952, стр. 526.

27. *Интеграли диференцијабилних функција* (*Les intégrales des fonctions différentiables*), Српска академија наука, Зборник радова књ. XXXV, Математички институт књ. 3, Београд 1953, стр. 29–44.

28. *Апроксимација произвољног кретања материјалне тачке помоћу кретања по конусном пресеку* (*Approximation du mouvement arbitraire d'un point matériel par le mouvement sur une section conique*), Српска академија наука, Зборник радова, књ. XLII, Астрономско-нумерички институт, књ. 1, Београд 1954, стр. 13–52.


О АНАЛИТИЧКИМ ОБЛИЦИМА МУЛТИФОРМНИХ ФУНКЦИЈА

ТЕЗА

РАДИВОЈА КАШАНИНА

Д-ра МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА ред. проф. Универзитета и Д-ра АНТОНА БИЛИМОВИЋА ред. контр. проф. Универзитета.

БЕОГРАД-ЗЕМУН

1925.


Година I

МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ

ЗА

СРЕДЊУ ШКОЛУ

УРЕДНИК

Р. КАШАНИН

УРЕЂИВАЧКИ ОДБОР

В. ВАРИЋАК, Р. ЗУПАНЧИЧ, Ј. МИХАЈЛОВИЋ

Ј. КАРАМАТА

1931-1932

БЕОГРАД

Професор Радивој Кашанин полагао је докторски испит 1924. године пред комисијом професора: др Михаило Петровић и др Антон Билимовић. — Изглед насловне стране објављене дисертације.

Професор Радивој Кашанин са младим Јованом Караматом покреће 1931. године часопис *Математички лист* за ученике средњих школа.

29. *Збирка решених задатака више математике I, књ. 1*, Географски институт ЈНА, Београд 1956, стр. 588+(4).

30. *Réfraction astronomique moyenne*, Académie Serbe des Sciences, Notes et travaux de la Section d'astronomie de L'Institut mathématique, Vol. II, No. 10–20, Belgrade 1958, pp. 11–20.

31. *Збирка решених задатака више математике I, књ. 3*, Географски институт ЈНА, Београд 1959, стр. 164+(4).

32. *Земљини слојеви и њихове карактеристике* (*The Earth's layers and their characteristics*), Српска академија наука и уметности, Глас CCXLIV, Одељење природно-математичких наука, књ. 21 (н. серија), Београд 1960, стр. 73–84.

33. *The Earth's layers and their characteristics*, Académie Serbe des Sciences et des Arts, Bulletin l. XXVI (Nouvelle série), Classe des Sciences mathématique et naturelles, l. 8, Belgrade 1961, pp. 127–138.

34. *Понашање материјала под високим притисцима* (*The behaviour of the*

Др. РАДИВОЈЕ КАШАНИН
ПРОФЕСОР УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

ВИША МАТЕМАТИКА

I

ДРУГО ИЗДАЊЕ
ПРЕРАЂЕНО И ДОПУЊЕНО

ИЗДАЊЕ
ЦЕНТРАЛНОГ УДРУЖЕЊА СТУДЕНАТА ТЕХНИКЕ
БЕОГРАД — 1946

ACADÉMIE SERBE DES SCIENCES

RECUEIL DES TRAVAUX
T. VII
INSTITUT MATHEMATIQUE
№ 1

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

Уредник:
Дописни Д-р РАДИВОЈ КАШАНИН
управник Математичког института САН

Примљено на XII скупу Одељења природно математичких наука
7 XII 1950 године

ЗБОРНИК РАДОВА

Књ. VII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. I

Научна књига

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

Штампарија и књиговезница Српске академије наука, Космајска бр. 28

Уџбеник *Виша математика* професора Радивоја Кашанина највише је утицао и допринео да настава на техничким факултетима у Београду поприми строжије критеријуме и садржаје на вишем нивоу.

Основао је и десет година уређивао часопис *Зборник радова* Математичког института у Београду.

materials under high pressuress), Српска академија наука и уметности, Глас CCXLIX, Одељење природноматематичких наука, књ. 22 (н. серија), Београд 1961, стр. 279–312 (са П. Савићем).

35. *Квалитативна анализа путања пројектила теледиригованих по потегу,* Српска академија наука уметности, Гласник, књ. XII, св. 1, Београд 1961, стр. 56.

36. *The behaviour of the materials under high pressures* (*Понашање материјала под високим притисцима*), Српска академија наука и уметности (Académie Serbe des Sciences et des Arts), Посебна издања (Monographs), књ. CCCLI, Одељење природно-математичких наука, књ. 29, Београд 1962, п. VI+32, in 8° (са П.

Савићем).

37. *Земљини слојеви и њихове карактеристике*, Српска академија наука и уметности, Гласник, књ. XII, св. 2, Београд 1962, стр. 188.

38. *Понашање материјала под високим притисцима*, Српска академија наука и уметности, Гласник, књ. XIV, св. 1, Београд 1962, стр. 21 (са П. Савићем).

39. *Понашање материјала под високим притиском* (*The behaviour of the materials under high pressures*), Српска академија наука и уметности, Глас CCLIX, Одељење природно-математичких наука, књ. 25 (н. серија), Београд 1964, стр. 105–164 (са П. Савићем).

40. *The behaviour of the materials under high pressures II* (*Понашање материјала под високим притисцима II*), Српска академија наука и уметности (Académie Serbe des Sciences et des Arts), Посебна издања (Monographs), књ. CCCLX, Одељење природно-математичких наука, књ. 31, Београд 1964, п. 64 (са П. Савићем).

41. *The behaviour of the materials under high pressures III* (*Понашање материјала под високим притисцима III*), Српска академија наука и уметности (Académie Serbe des Sciences et des Arts), Посебна издања (Monographs), књ. CCCLXXVIII, Одељење природно-математичких наука, књ. 34, Београд 1964, п. 64 (са П. Савићем).

42. *Старо и ново у нумеричкој математици*, Научно-технички преглед 7 (1965), 2, стр. 75–79.

43. *Вещество под высоким давлением*, Отдельной оттиск, Проблеми геохимии, 1965, стр. 28–33 (са П. Савићем).

44. *Понашање материјала под високим притиском III. Небеска тела на температури изнад 0° К* (*The behaviour of the materials under high pressures III*), Српска академија наука и уметности, Глас CCLXII, Одељење природно-математичких наука, књ. 27 (н. серија), Београд 1965, стр. 37–94 (са П. Савићем).

45. *The behaviour of the materials under high pressures IV* (*Понашање материјала под високим притисцима IV*), Српска академија наука и уметности (Académie Serbe des Sciences et des Arts), Посебна издања (Monographs), књ. CCCXCIII, Одељење природно-математичких наука, књ. 35, Београд 1965, п. 72 (са П. Савићем).

46. *Понашање материјала под високим притицима IV* (*The behaviour of the materials under high pressures IV*), Српска академија наука и уметности, Глас CCLXV, књ. 29 (н. серија), Београд 1966, стр. 26–82 (са П. Савићем).

47. *Предговор* за књигу Д. Ђурић-Трбуховић, *У сенци Алберта Ајнштајна*, Крушевац 1969, стр. 272.

48. *Виша математика I*, Сарајево 1969, стр. XII+836 (4 издање).

49. *Расслоение макротел из-за преривыстой структур их составных частиц*, Simpozij o Mohorovičićevom diskontinuitetu, Zagreb 1972, str. 161–187 (sa P. Savićem).

50. *Путања пројектила теледиригованих по потегу,* Научно-технички преглед 16 (1974), 3, 17–29.

51. *Поведение материалов при високих давлениях,* Наукова думка, Киев 1976, стр. 264; приредио Драган Трифуновић (са П. Савићем).

Библиографију саставио
Драган Трифуновић

PUBLISHED PAPERS OF THE ACADEMICIAN RADIVOJ KAŠANIN
(compiled by D. Trifunović)

A list of published papers of professor Dr Radivoj Kašanin is presented. The compiler of this list, professor Dr Dragan Trifunović prepares a comprehensive bibliography of the papers of academician Radivoj Kašanin.

ЗАОСТАВШТИНА

Професор Радивој Кашанин стварао је све до пред крај живота. У његовој радној соби остала су у рукопису следећа дела:

1. *О бројевима и мерењу,* 1 фасцикла
2. *Микрокосмос,* 2 свежња
3. *Основе теоријске механике,* 2 свежња
4. *Удар,* 1 фасцикла
5. *Лоренцове трансформације и Ајнштајнова теорија релативитета,* 1 фасцикла

Следећи радови су у једној фасцикли:

6. *Аритметичка средина мерења*
7. *Антиномије идеала у континууму*
8. *Мерења помоћу часовника и курира*
9. *Кардинални и ординални бројеви*
10. *О математици*
11. *Хемијски састав планета и њихова атмосфера,* 1 фасцикла
12. *Понашање материјала под високим притисцима,* 2 свежња
13. *Виша математика,* 1 свежањ
14. *Теорија кривих површи,* 1 фасцикла

Ови се рукописи налазе у Архиву Српске академије наука и уметности.

Д. Т.

ПРОФЕСОР КАШАНИН О СЕБИ

Ја сам пореклом из крајње сиротиње сељачке, што је, вероватно, и био повод да и ја и мој млађи брат Милан одемо у гимназију, јер на селу не бисмо имали од чега живети. Рођен сам у Барањи, у Белом Манастиру, и одатле сам отишао у Осијек, у класичну гимназију, први из свога села откад се за село зна! Три године сам се мучио, никад нисам имао довољно средстава, али сам био одличан ђак. После трећег разреда отишао сам у Нови Сад, у Српску православну велику гимназију — тачно се тако звала. Уредио је то, због чега сам му вечито благодаран, наш сеоски учитељ Јован Славковић. Тамо ме је свесрдно прихватио директор Васа Пушибрк. Тако сам догурао до матуре 1910. године, без материјалних брига, увек с добром стипенцијом, коју сам заслуживао не по пореклу, већ по — оценама.

Ниједан професор из ове две гимназије није ми остао у рђавој успомени. Што се тиче моје струке, за коју сам се потом определио, велики утицај имао је на мене Стеван Милованов, мој новосадски професор математике. А што сам отишао баш на студије математике, постоје два разлога: прво — био сам заљубљен у астрономију. Тако сам отишао на студије, најпре у Беч, па у Загреб. У Бечу је на мене пресудан утицај извршио онда још млади професор Вилхелм Виртингер. Он ме је на својим предавањима и колоквијумима упутио у најмодернија логичка расуђивања.

Другу и трећу годину провео сам у Загребу. Два професора остала су ми у најлепшој успомени, а за свој даљи развој лично сам им захвалан, не само за оно што сам од њих научио већ и за њихов лични однос према мени, за поверење које су ми указивали. То су били професор анализе Владимир Варићак и професор геометрије Јурај Мајцен. На трећој години био сам им, у ствари, већ асистент.

Последњу годину школовања провео сам у Будимпешти, признајем: са слабим пословањем у математици. Била је то она година између балканских ратова и првог светског рата када су нас — природно — много више од струке занимале друге ствари. Баш тада сам био председник омладинског удружења у Будимпешти које се звало „Коло младих Срба“. Имао сам двадесет две године када сам био мобилисан и упућен у Галицију. Имао сам равно двадесет седам година када сам био демобилисан. За тих пет година, ни новине нисам читао, а камоли математику. Предао сам се Русима чим сам могао, и као добровољац у српској војсци био борац у Добруџи и на Солунском фронту. Било нас је у том добровољачком корпусу из свих наших крајева, свих занимања . . .

Као и из школе, тако су ми и из рата остали у најлепшој успомени моји команданти, Стојан Поповић, Владимир Ковачевић, Петар Радивојевић, Петар Мартиновић, као и, у Београду још жив, Војислав Анђелковић. Може се рећи да је тих пет година за моје студије и за мој научни рад било пет изгубљених година, али, кад би се историја поновила, опет бих исто учинио.

После рата отишао сам у Париз, на Сорбону, ту сам дипломирао из математике, механике и астрономије. Предавали су тада чувени професори Адамар, Пикар, Гурса, Лебег, Монтел, Андоаје. Имао сам тако срећу да прођем кроз две математичке школе овог времена: немачку и француску. Имале су своје особености и своје квалитете, који су ми много користили. Вратио сам се у Београд и постао асистент професора Богдана Гавриловића на Техничком факултету. На Катедри су били и Михаило Петровић Алас и Милутин Миланковић, професори и академици. У њиховом пријатељском друштву био сам од 1922. године па до смрти сваког од њих. Ту сам и докторирао и напредовао од асистента до редовног професора, шефа Катедре и ректора Техничке велике школе.

Поред високе стручне спреме и оригиналних научних радова, сва тројица су се одликовала нечим што највише ценим, што сматрам за људску вредност највишег ранга: љубав према младим генерацијама, разумевање младих људи, несебичност и искрена помоћ младим, талентованим људима у њиховом напредовању. Умели су да се радују и да уживају кад се млади људи уздижу. Имао сам срећу да се развијам и радим поред њих, великих ауторитета науке и морала. Да се поносим њиховим пријатељством. Не верујем да је игде постојао такав амбијент какав су створили Гавриловић, Петровић и Миланковић.

Наравно, моји другови и ја морали смо, током времена, да уносимо неке нове ствари да бисмо држали корак с науком у свету. Оно што посебно хоћу да истакнем јесте: никад се томе нису противили, напротив, прихватали су, помагали нам у томе, храбрили да не станемо, да идемо даље.

Три су пресудна момента била у мом формирању. Прво што је на мене утицало у смислу развијања мог начина мишљења била је мала сеоска основна школа где смо се више васпитавали у духу него у знању. У духу националном, природно, јер смо ми тада живели под аустроугарском окупацијом. Друго: завршио сам класичну гимназију. Класика је, уопште, на мене учинила велики утицај. Треће: у оно доба када сам ступао на Универзитет, књижевност и историја мога народа развијале су у мени идеје и љубав према књизи уопште. Знао сам тада напамет све наше песме и песнике, све наше писце и критичаре. То што јесам, имам да захвалим управо томе: без тога бих био само робот. Стварале су ме школе, од основне до универзитета, и уживам у томе што то знам и што могу то да признам.

Ниједна наука није непопуларнија од математике, науке о бројевима и геометријским облицима, иако се они појављују одмах, на граници несвесног и свесног, одмах на почетку човековог мишљења и размишљања. Тој чудној појави непопуларности математике главни је узрок то што је у математици дилетантизам мање могућ него у било којој другој науци или уметности. Дилетантизам је врло примамљив, али — математика се не учи из брошура. „Нема краљевског пута у геометрији", прича се да је одговорио Еуклид краљу

Птоломеју Филаделфу када је овај зажелео да на неки лак начин дође до геометријских знања.

Дилетанте треба разликовати од аматера: ови су благородни, корисни и сваке пажње и похвале достојни људи. Аматер-песник крије своје стихове и чита их понеком само пријатељу; дилетант засипа све редакције и листове својим стиховима и огорчен је што их не штампају. Аматер-сликар веша своје слике у свом стану, дилетант непрекидно прави изложбе и љут је што нису посећене и што не пишу добро о њему. Аматер-музичар свира у својој собици, дилетант приређује јавне концерте и срдит је што на њима нема публике. Аматер за своје слабости и неуспехе криви себе, дилетанту су увек криви други, пријатељи, средина, прилике, цело друштво. Дилетант не зна Конфучијеву изреку, коју стручњаци и аматери поштују: „Право је знање знати шта знаш и знати шта не знаш".

Што се у једној струци, свеједно каквој, више употребљава обичан језик којим свако говори, тим је већа могућност за дилетанте: говорећи општепознате речи, имају утисак да знају и саму суштину ствари. У таквим струкама, свако је помало и дилетант, зато су оне и популарне. Математика има свој језик и своје посебности; њих прво треба научити, а зато је потребан истрајан и смишљен рад. Но, ко то научи, тај већ није дилетант: може се бавити математиком и као науком и као средством при изучавању других наука. Ако није баш прави стручњак, он је аматер. Ако ништа друго, зна да је боље прочитати једну добру књигу него написати две рђаве. Тешко је са онима који тај језик и то писмо не науче, а уобразе да су их научили, али — ређи су него у другим струкама и брзо се уоче. Мада спорије, примете се на крају и у другим струкама, јер — „све се може измислити осим талента и све се може скрити осим незнања".

Има и стручњака који оду странпутицом. То су уски специјалисти који у једном исувише скученом подручју своје струке достижу перверзну виртуозност у разним специјалним и непотребним детаљима и чињеницама, не осећајући своју науку и своју струку као целину; не виде њену везу са осталим наукама и струкама, нити знају њихов положај и значај међу осталим манифестацијама људског духа, о којима редовно немају ни појма. Они раде као роботи: хоризонт им је врло узак, а душа пуста. Такви никад не значе ништа, они никоме не могу бити пример. Имао сам срећу што сам се у свом развоју, од сеоске школе у Белом Манастиру до београдске универзитетске катедре, сусретао с правим људима који су могли да ми помогну. Познато је да као професор нисам био благ, али сам задовољан што никад нисам чуо да је о мени неко понео рђав утисак. Трудио сам се да на своје ђаке утичем онако како су на мене утицали моји васпитачи, моји професори.

(Из књиге Драгослава Адамовића, *Разговори са савременицима*, Београд 1982, стр. 131–134 (у редакцији и са предговором академика Радована Самарџића). — Академик Радивој Кашанин саопштио је овај текст аутору књиге 1974. године).

НАД УСПОМЕНАМА

Радивој Кашанин као ученик I разреда гимназије у Осијеку (1902. г.

Број 11. Превод

Гимназиска сведоџба зрелости

Радивој Кашанин

родио се у Пелмоноштору, у Барањској, маја 21. год. 1892, православне вере, свршио средњошколски течај и то I–III. разред у осечкој краљевској, IV–VIII. разред у новосадској српској великој гимназији, владао се добро и положио испит зрелости пред потписатом испитном комисијом с овим успехом:

Из српског језика и књижевности:	врло добро
Из мађарског језика и књижевности.	врло добро
Из латинског језика и књижевности:	врло добро
Из историје	врло добро
Из математике.	врло добро
Из физике.	врло добро

Из осталих предмета гимназиског течаја добио је овај успех:

У науци вере:	врло добро
У грчком језику и књижевности	врло добро
У немачком језику и књижевности	врло добро
У философској пропедевтици:	врло добро
У земљопису.	врло добро
У природопису:	врло добро
У геометриском цртању	врло добро

Према томе како је за коначним захтевима одговорио са врло добрим успехом, проглашујемо га зрелим за науке на високој школи.

О том му издајемо ову сведоџбу, коју својом руком потписујемо и потврђујемо печатом нашом православне срп. вел. гимназије.

У Новом Саду, 17. јуна 1910.

За верност превода одговара:

Васа Пушибрк с. р.
управитељ

Испит зрелости и крај школовања у гимназији у Новом Саду, 17. јуна 1910.

Kiegészítő érettségi bizonyítvány.

Kasanin Radivoj, a ki született Pélmonostoron (Magyarország) 1892. május 21. én görög keleti vallású, miután gimnáziumi érettségi vizsgálatát az ujvidéki g. k. szerb főgimnáziumnál bevégezte, az alulírt bizottság előtt kiegészítő érettségi vizsgálatot tett következő eredménnyel:

Görög nyelv és irodalomból: jeles

Ezek szerint őt a tudomány egyetem bármely karának tanulmányaira érettnek nyilvánítjuk.

Miről neki az ujvidéki g. k. szerb főgimnázium pecsétjével és saját aláírásunkkal ellátott jelen bizonyítványt kiadjuk.

Kelt Ujvidéken 1910. évi június 17 én

Hadzsics Antal s. k. a vizsgáló bizottság elnöke | Gimnáziumi igazgató: Pusibrk Vászul s. k. | Vizsgáló tanár: Dr. Dialovič Veszel

P. H.

Превод!

Допунска сведоџба зрелости

Радивој Кашанин, рођен у Печмономостору у Мађарској, маја 21. год. 1892, православне вере, пошто је положио свој испит зрелости, положио је допунски испит зрелости с овим успехом:

Из грчког језика и књижевности: врло добро

Према томе проглашујемо га зрелим за слушање на ма којем факултету универзитета.

О чем му издајемо ову сведоџбу, која својим рукописом и печатом срп. православне гимназије потврђујемо.

У Новом Саду 17. јуна 1910.

За верност превода

Васа Пушибрк с. р. управитељ

Sremsk... 191/1910

Magyaru másolata fél által eredetiként felmutat...

На лични захтев, матурант Р. Кашанин је полагао и *грчки језик*, како би могао да студира „на ма којем факултету универзитета“.

Радивој Кашанин на почетку студија, Беч 1910. година.

No 603 - 1913.

NOS RECTOR ET DECANUS

FACULTATIS philosophicae

REG. UNIVERSITATIS FRANCISCI JOSEPHI I.

ZAGRABIENSIS

testamur hac tabula, dominum Radivoj Kašanin

natum in Pelmonostor in Hungaria

vi testimonii maturitatis gymnasii serb. Neoplantensis, ddto: 17. junii 1910. N. 11 et dimissorii c. reg. Universitatis Vindobonensis, ddto: 3. Octobri 1911.

ad philosophica studia auditorem publicum susceptum, iisdem in hac Reg. Universitate a semestri hiberno anni schol. 1911/12. usque ad finem semestris aestivi anni schol. 1912/13.

sine | ~~cum~~ | intermissione

itaque per Quattuor semestria

operam navasse, de quibus in legale quadriennium computandis suo tempore decernetur.

Mores ejus quod atinet, legibus academicis apprime conformes exhibuit.

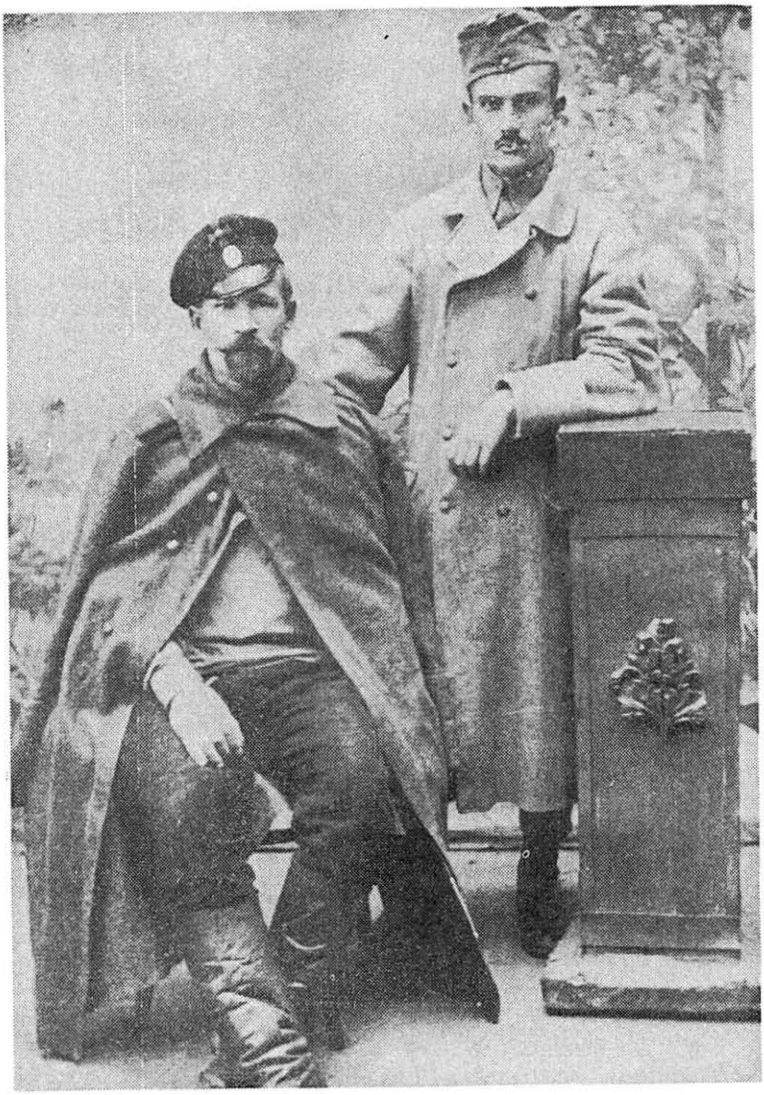
Cujus rei in fidem nomina Nostra hic subscripsimus.

Zagrabiae die 30. Julii 1913.

Reg. Universitatis h. t. Rector

philosophicae facultatis h. t. Decanus

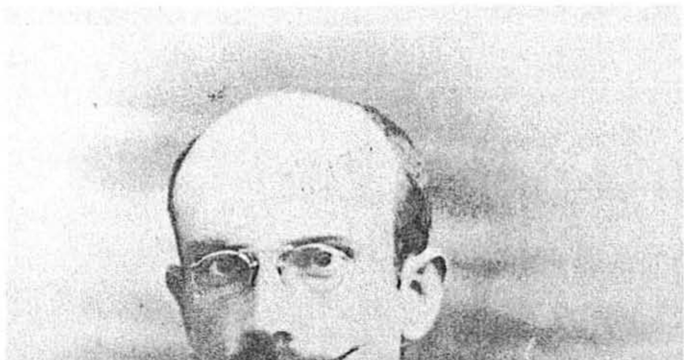
Изглед уверења о Р. Кашаниновим студијама на Свеучилишту у Загребу „Фрање Јосифа I" од 1911. до 1913. године.



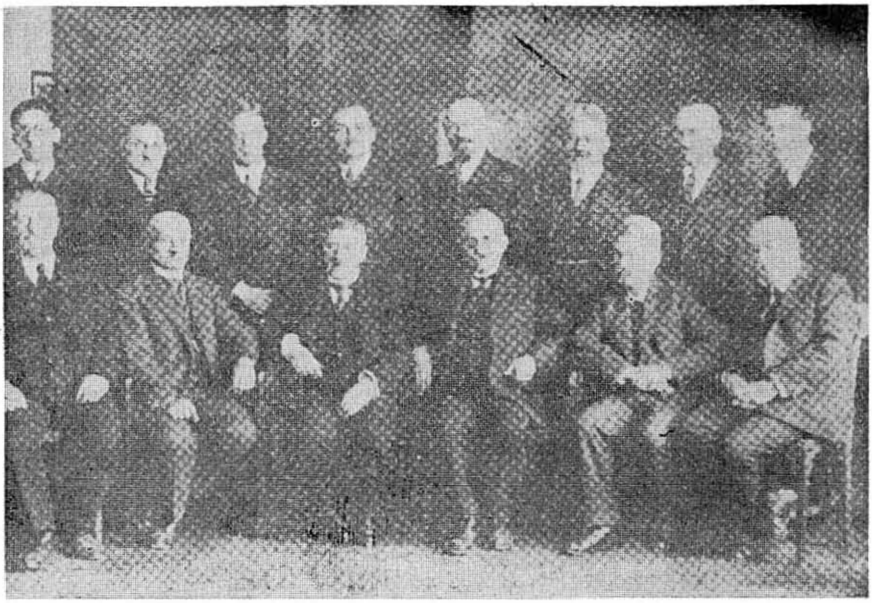
Професор Кашанин је одлично знао латински, грчки, мађарски, немачки, француски, па и енглески језик. А, знање црквенословенског језика помогло му је да на почетку рата пребегне Русима. — У друштву једног руског војника трећег позива (1915. г.).

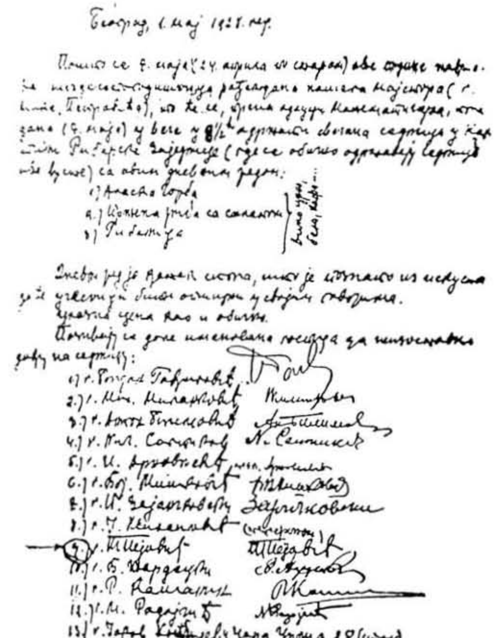
Са вереницом Катарином — својим животним сапутником (Русија, крајем 1917. г.)

Као ађутант команданта пука на Солунском фронту (1918. г.).



Рат је завршен. Смирен и достојанствен изглед ратника.





Београд, 1. мај 1928. год.

Пошто се 6. маја (24. априла по старом) ове године навршава шездесетогодишњица рођендана нашега најстарије[illegible] (г. Мике Петровића), то ће се, према одлуци [illegible], тога дана (6. маја) у вече у 8½ ч. одржати свечана седница у [illegible] Рибарске задруге (где се обично одржавају [illegible]) са овим дневним редом:

1.) Аласка чорба
2.) [illegible] са салатом
3.) [illegible]

[illegible]

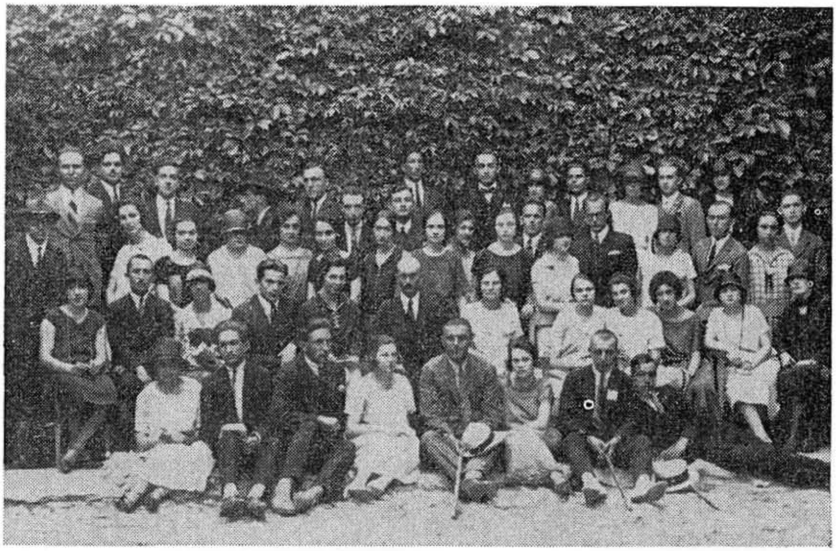
Дневни ред је врло [illegible], пошто је [illegible] из искуства да ће учесници бити [illegible] у својим говорима.

Улазна цена као и обично.

Позивају се доле именована господа за непосредан долазак на седницу:

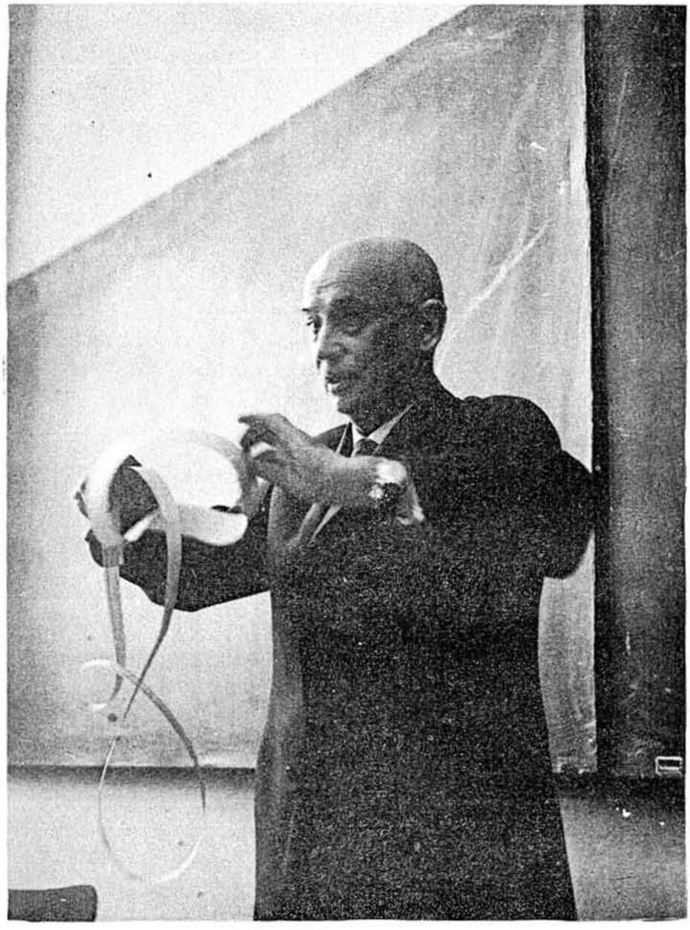
1.) г. [illegible] Гавриловић [illegible]
2.) г. Мих. Милановић [illegible]
3.) г. [illegible] [illegible]
4.) г. Ник. Салтиков Н. Салтиков
5.) г. [illegible] [illegible]
6.) г. [illegible] [illegible]
7.) г. [illegible] [illegible]
8.) г. [illegible] ([illegible])
9.) г. Т. Пејовић Т. Пејовић
10.) г. [illegible] [illegible]
11.) г. Р. Кашанин Р. Кашанин
12.) г. М. [illegible] [illegible]
13.) г. [illegible] Цара Уроша 28 ([illegible])
14.) г. [illegible]

Шездесети рођендан професора Михаила Петровића, Београд 1928. година.

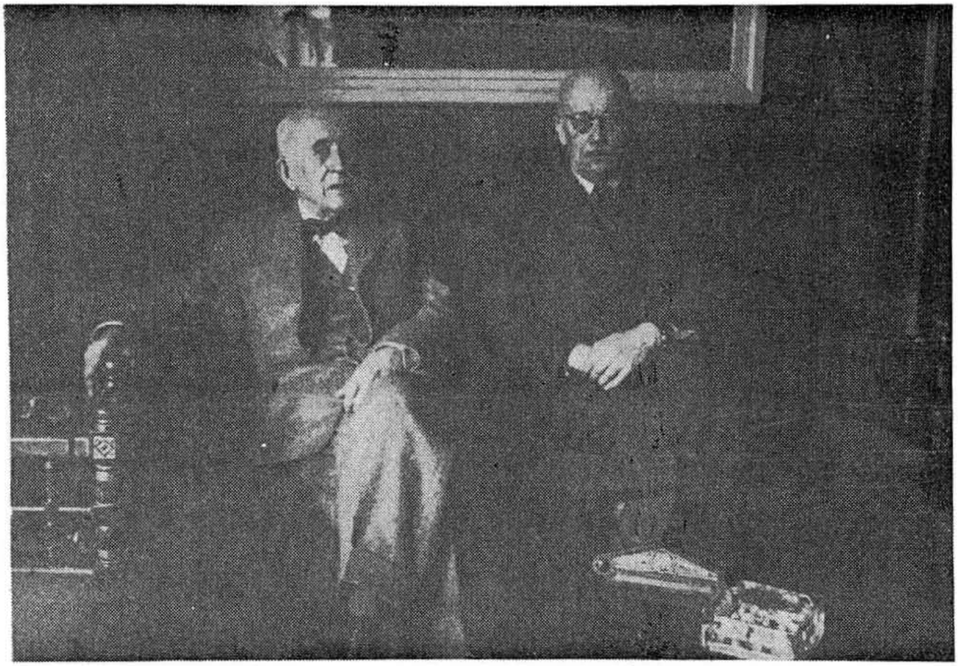


Студенте математике од Загреба дочекао је у Београду професор Радивој Кашанин (1925. г.).

Фрушка Гора, 1928. г. — Комисија за одређивање локације за астрономску опсерваторију; слева: Радивој Кашанин, Јеленко Михаиловић, Михаило Петровић, Павле Поповић, Антон Билимовић, Милутин Миланковић, Војислав В. Мишковић.



Са часа на Архитектонском факултету у Београду; демонстрација Мебијусове површи (око 1951. г.).

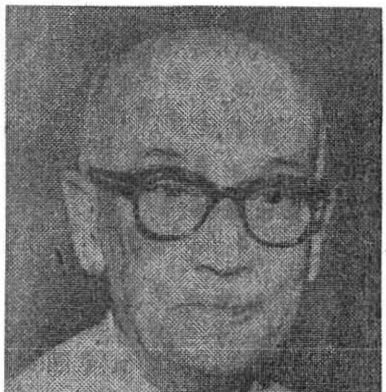


Милутин Миланковић и Радивој Кашанин у кабинету председника Српске кадемије наука; Београд 1951. године.

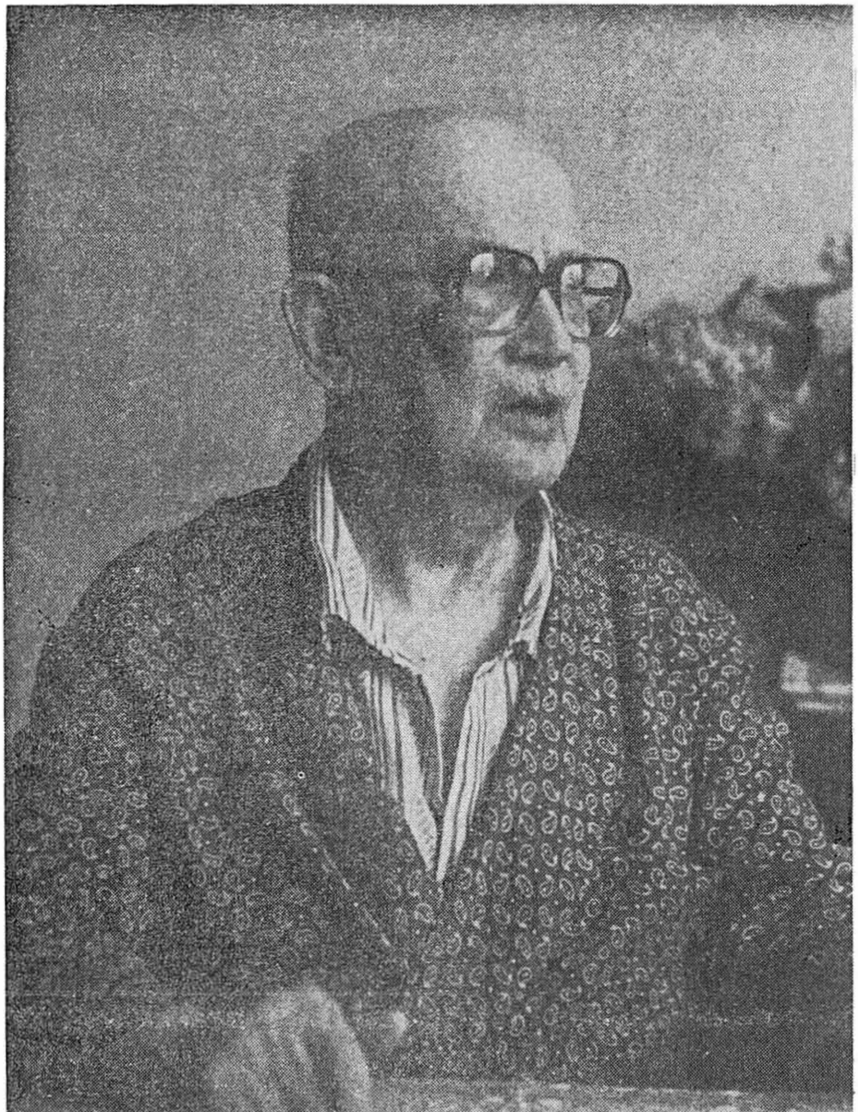
1928. година

1969. година

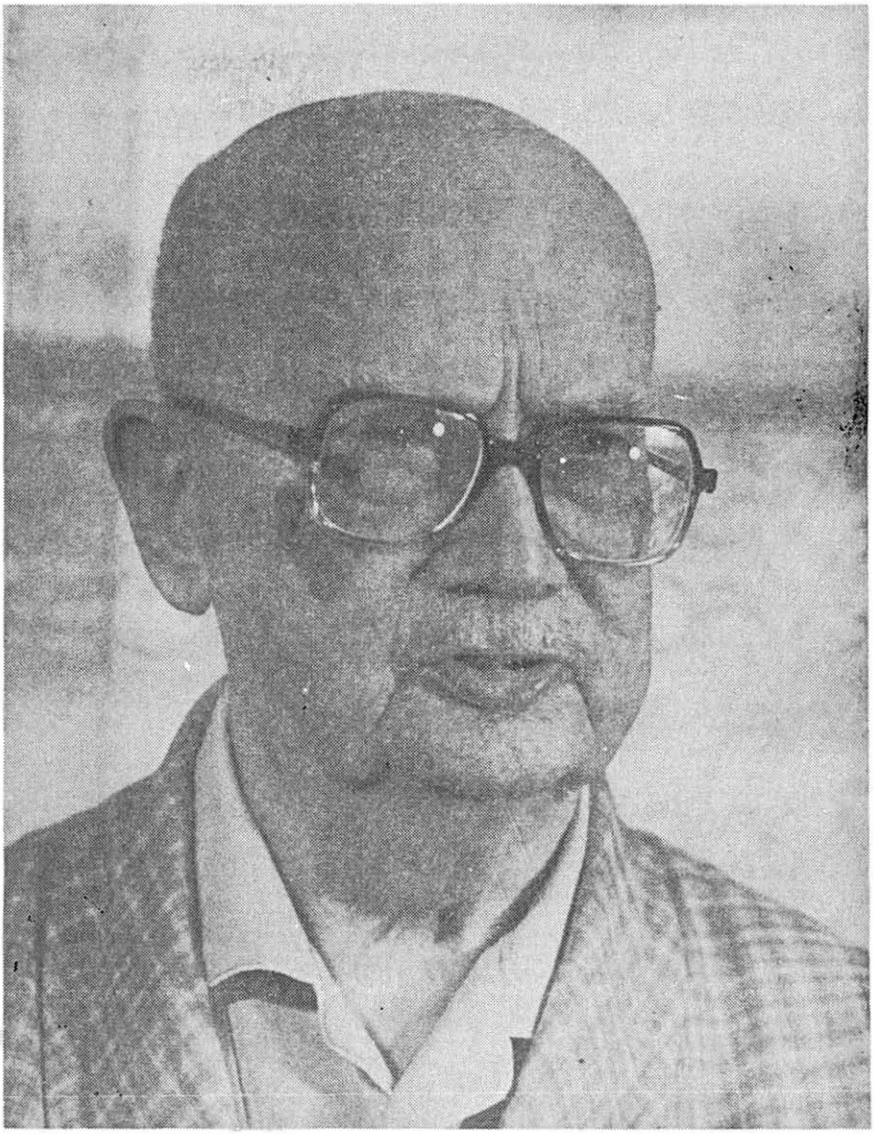
1951. година



1974. година



1980. година



1984. година

Академик Мирко Стојаковић (1915–1985) овако је видео лице Радивоја Кашанина.