УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Срђан Д. Стефановић

РЕЛАЦИЈА ЈАКЕ BJ ОРТОГОНАЛНОСТИ НА C^*-АЛГЕБРАМА, И ОЦЕНЕ ДУЖИНЕ ЊЕНОГ ГРАФА

докторска дисертација

Београд, 2025.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Srđan D. Stefanović

STRONG BJ ORTHOGONALITY RELATION ON C^*-ALGEBRAS, AND ESTIMATION OF DIAMETER OF ITS GRAPH

doctoral dissertation

Belgrade, 2025.

Ментор:

проф. др Драгољуб Кечкић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Биљана Вујошевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Златко Лазовић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Бојан Кузма, редовни професор
Универзитет Приморска у Копру

Датум одбране:

баки Бранки, мами Весни и сӯрузи Тамари

Наслов дисертације: Релација јаке BJ ортогоналности на C^*-алгебрама, и оцене дужине њеног графа

Резиме: Предмет дисертације је испитивање релације јаке BJ ортогоналности на C^*-алгебрама. За два елемента a и b неке C^*-алгебре A кажемо да је a јако BJ ортогоналан на b, ако за све $c \in A$ важи $\|a+bc\| \geqslant \|a\|$ и пишемо $a \perp^S b$. Ако је и $b \perp^S a$, кажемо да су a и b узајамно јако BJ ортогонални и пишемо $a \perp\!\!\!\perp^S b$. Овој релацији придружујемо неусмерени граф $\Gamma(A)$ (који зовемо ортограф) где су чворови ненула елементи C^*-алгебре A, при чему идентификујемо елемент и његов скаларни умножак, док између два чвора a и b постоји ивица ако је $a \perp\!\!\!\perp^S b$.

У раду ћемо показати да за произвољну C^*-алгебру A, различиту од три једноставне, и свака два неизолована чвора a и b ортографа, можемо наћи $c_1, c_2, c_3 \in \Gamma(A)$ тако да је

$$a \perp\!\!\!\perp^S c_1 \perp\!\!\!\perp^S c_2 \perp\!\!\!\perp^S c_3 \perp\!\!\!\perp^S b.$$

Такође, описаћемо изоловане чворове ортографа за произвољну C^*-алгебру A. Коначно, у случају коначно димензионалних C^*-алгебри, наћи ћемо дијаметар $\Gamma(A)$, тј. одредити колико нам је најмање елемената потребно да повежемо произвољна два чвора.

Кључне речи: C^*-алгебре, BJ ортогоналност, ортограф, дијаметар

Научна област: Математика

Ужа научна област: Функционална анализа, Операторске алгебре

УДК број: 517.982.22(043.3)

Dissertation title: Strong BJ orthogonality relation on C^*-algebras, and estimation of diameter of its graph

Abstract: The subject of the dissertation is the investigation of the relation of strong BJ orthogonality in C^*-algebras. For two elements a and b of C^*-algebra A, we say that a is strong BJ orthogonal to b, if for all $c \in A$ holds $\|a+bc\| \geqslant \|a\|$ and we write $a \perp^S b$. If it is also true that $b \perp^S a$, then we say that a and b are mutual strong BJ orthogonal and write $a \perp\!\!\!\perp^S b$. To this relation, we associate an undirected graph $\Gamma(A)$ (which we call an orthograf), where the vertices are the nonzero elements of the C^*-algebra A, with the identification of an element and its scalar multiple; while there is an edge between two vertices a and b if $a \perp\!\!\!\perp^S b$.

We will show that for any C^*-algebra A, different from three simple C^*-algebras, and for any two non-isolated vertices a and b in the orthograph, we can find vertices $c_1, c_2, c_3 \in \Gamma(A)$ such that

$$a \perp\!\!\!\perp^S c_1 \perp\!\!\!\perp^S c_2 \perp\!\!\!\perp^S c_3 \perp\!\!\!\perp^S b.$$

We will also describe the isolated vertices of the graph $\Gamma(A)$ for any C^*-algebra A. Finally, in the case of finite-dimensional C-algebras, we will determine the diameter of $\Gamma(A)$, i.e., the minimum number of elements required to connect any two vertices.

Keywords: C^*-algebras, BJ orthogonality, orthograf, diameter

Research area: Mathematics

Research sub-area: Functional analysis, Operator algebras

UDC number: 517.982.22(043.3)

Захвалница

Свом ментору, проф. др Драгољубу Кечкићу, захваљујем што ме је увео у свет операторских алгебри. Његове идеје, приступ решавању проблема и невероватна интуиција су значајно утицали на мој математички стил, како у науци, тако и у настави. Захвалност му дугујем и за све дискусије које смо водили и савете које ми је давао. Била је част учити од таквог интелектуалца.

Желео бих да се захвалим и члановима комисије, др Биљани Вујошевић и др Златку Лазовићу, који су веома пажљиво прочитали дисертацију и значајно је унапредили својим коментарима. Такође, користим прилику да им се као њихов асистент на многим предметима, захвалим на одличној сарадњи.

Проф. др Бојану Кузми, са ким сам радио током студијске размене у Словенији, неизмерно хвала на гостопримству и веома преданом раду. Захваљујем му и што ми је значајно проширио област истраживања, а посебно што се наша сарадња даље развија.

Захвалност дугујем и свом учитељу Милораду Миловановићу, наставнику Миољубу Исаиловићу, гимназијском професору Горану Ђурићу и многобројним професорима Математичког факултета, који су ми развијали љубав према математици и тиме обликовали мој професионални пут, што је утицало на избор мог позива.

Коначно, највећу захвалност дугујем својој породици и кумовима који су ми били непрестана подршка свих ових година.

Свој докторат посвећујем баки Бранки, мами Весни и супрузи Тамари које су моја инспирација, мотивација и снага.

У Београду, марта 2025. *Срђан Стефановић*

Садржај

Увод

Теорија операторских алгебри има своје корене у првој половини 20. века, када су крајем треће деценије објављени пионирски фон Нојманови радови ([60]). Деценију касније, Гељфанд и Најмарк уводе концепт C^*-алгебри ([32]). Оне су и дан данас веома истраживани објекти, а о значају операторских алгебри најбоље говори чињеница да су у овој области додељене две Филдсове медаље: Алан Кон (1982) и Вон Џонс (1990).

У слично време је покренуто питање ортогоналности у нормираним просторима (где немамо скаларани производ) у радовима Бирхофа и Џејмса ([19],[35],[34],[33]), како је и настала такозвана BJ ортогоналност. Уколико је у питању простор са скаларним производом, онда су дефиниције еквивалентне. Сама област је поново постала врло актуелна крајем 20. и почетком 21. века ([17], [43]).

Тридесетак година касније су уведени Хилбертови C^*-модули ([61]) - природно уопштење C^*-алгебри где за „скаларе” не узимамо комплексне бројеве, већ елементе C^*-алгебри. И ова област се веома развила у својих преко педесет година постојања.

Коначно, пре нешто више од десет година, почело је изучавање BJ ортогоналности на Хилбертовим C^*-модулима и C^*-алгебрама ([13],[18]), из које је на природан начинн дефинисана јака BJ ортогоналност ([14]). Посебно, нека својства су почела да се истражују путем графа придруженог овој релацији ([9]).

Излагање у дисертацији биће приказно на следећи начин.

У првој глави биће изложена теорија C^*-алгебри ([59],[62],[26]), фон Нојманових алгебри ([66],[73]), односно Хилбертових C^*-модула ([54],[85]) неопходна за праћење и разумевање осталих резултата у раду. Одлучили смо се да приказ буде детаљнији. Разлога су два: многе технике које су ту приказане су значајне и у даљим истраживањима, а идеја је и да се будућим истраживачима са наших простора олакша изучавање.

У другој глави су приказане особине релације (јаке) BJ ортогоналности, од оних пионирских до сопствених резултата из рада [45].

У трећој глави дефинисан је ортограф придружен релацији узајамне јаке BJ ортогоналности (видети [9]). Посебно, разматран је дијаметар ортографа у неким специјалним, а врло важним случајевима C^*-алгебри: на класи ограничених оператора на Хилбертовом простору $B(H)$, тј. у случају коначно димензионалног Хилбертовог простора H на простору матрица $M_n(\mathbb{C})$; на класи комутативних C^*-алгебри са и без јединице, које су изоморфне са простором $C(K)$ непрекидних функција на компактном Хаусдорфовом простору K, односно са простором $C_0(\Omega)$ непрекидних функција на локално компактном Хаусдорфовом простору Ω које нестају у бесконачности.

У четвртој глави приказани су оригинални резултати из заједничког рада са ментором [45]. У том раду су, између осталог, дати одговори на отворена питања из рада [9]:

(1) Шта су изоловане тачке ортографа код произвољне C^*-алгебре?

(2) У којим C^*-алгебрама можемо повезати било која два неизолована чвора у складу са релацијом узајамне јаке BJ ортогоналности?

(3) У C^*-алгебрама где можемо повезати произвољна два неизолована чвора, колико је најмање потребно елемената да бисмо повезали било која два чвора, тј. колики је дијаметар компоненте повезаности ортографа код произвољне C^*-алгебре?

Заправо, одговори су јако лепи: изоловане тачке су тзв. десно апроксимативно инвертибилни елементи; једина C^*-алгебра која нема једну компоненту повезаности је $M_2(\mathbb{C})$; свака два неизолована чвора можемо повезати у највише 4 корака.

У петој глави су приказани резултати из самосталног рада кандидата (видети [70]). У њему је одређен дијаметар коначно димензионалних C^*-алгебри, још једне значајне класе C^*-алгебри. Изузимајући „мале” C^*-алгебре ($\mathbb{C}, \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ и $M_2(\mathbb{C})$) дијаметар је 3 или 4, при чему је 4 у само два случаја $\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})$ и $M_3(\mathbb{C})$. Поред тога, дате су оцене растојања између чворова у C^*-алгебрама које су могу представити као директне суме.

Коначно, у шестој глави су дати правци даљег истраживања. Читава област је доживела значајан развој у претходним годинама. Поред питања која природно проистичу из нашег истраживања, попут карактеризације свих C^*-алгебри чији је дијаметар ортографа 4, налажења дијаметра у још неким важним класама, ту су и многа друга. Главни проблеми су: налажење облика пресликавања која чувају (јаку) BJ ортогоналност ([21],[31],[10]), налажење левих и десних симетричних тачака ([48],[82],[7]), као и класификација C^*-алгебри помоћу ове релације и претходно наведених пресликавања ([77],[51]).

Глава 1

C^*-алгебре, фон Нојманове алгебре и Хилбертови C^*-модули

1.1 C^*-алгебре

Да бисмо дошли до самих C^*-алгебри, подсетимо се најпре дефиниције нормираних, односно Банахових простора који су, што структурно што историјски њени претходници.

Дефиниција 1.1.1. *Нека је* X *векторски простор над пољем скалара* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. *Њега зовемо нормираним уколико постоји функција (коју зовемо норма)* $\| \cdot \| : X \times X \to \mathbb{R}$ *која задовољава следећа својства:*

(1) $\|x\| \geqslant 0$ *за све* $x \in X$ *и* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *за све* $\lambda \in \mathbb{F}$;

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *за све* $x, y \in X$.

Убудуће ћемо у целом раду сматрати да је поље скалара $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Потом долазимо до Банахових простора, који су дефинисани око 1920. године, а представљају основни објекат истраживања функционалне анализе.

Дефиниција 1.1.2. *Векторски простор* X *називамо Банаховим уколико је нормиран и комплетан у метрици индукованој нормом.*

Наредни објекат у хијерархији су Банахове алгебре, који настају када Банахов простор опскрбимо операцијом множења са одговарајућим својствима.

Дефиниција 1.1.3. *Алгебра A је векторски простор са билинеарном асоцијативном операцијом множења $\cdot : A \times A \to A$ која задовољава $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$ за све $x, y \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Ако постоји елемент 1 (кога зовемо јединица) такав да је $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ за све $x \in A$, алгебру A зовемо униталном, иначе она је неунитална.*

Дефиниција 1.1.4. *Банахова алгебра A је алгебра таква да је A Банахов простор и да је норма субмултипликативна, тј. да важи*

$$\|a \cdot b\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\| \text{ за све } a, b \in A.$$

Симбол $\cdot$ ћемо у даљем тексту изостављати.

Тренутну структуру обогаћујемо још једном операцијом.

Дефиниција 1.1.5. *A је Банахова алгебра са инволуцијом уколико поред до сада дефинисаних својстава везаних за Банахову алгебру, поседује и пресликавање $^* : A \to A$ (које зовемо инволуција) за које важи:*

(1) $(a^*)^* = a$ *за све* $a \in A$;

(2) $(ab)^* = b^* a^*$ *за све* $a, b \in A$;

(3) * *је конјуговано линеарно пресликавање, тј.* $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*$ *за све* $\lambda, \mu \in F$ *и све* $a, b \in A$.

Остало је да додамо последњи, најважнији услов који називамо C^*-услов.

Дефиниција 1.1.6. *A називамо C^*-алгебром уколико је она Банахова алгебра са инволуцијом при чему додатно важи $\|a^* a\| = \|a\|^2$ за све $a \in A$.*

Претходну дефиницију дали су 1943. године Израел Гељфанд и Марк Најмарк у раду [32]. Заправо, они су имали додатну аксиому да је $x^* x$ позитиван за сваки x што ће се испоставити као сувишан услов. Назив C^*-алгебра дао је Сегал у раду [30], при чему је C потекло од чињенице да их је видео као некомутативну варијанту $C(T)$ (алгебре непрекидних функција на једнодимензионалном торусу), док је * од значаја инволуције. Друга верзија је да C потиже од closed, јер ћемо ускоро видети да су оне управо затворене *-подалгебре од $B(H)$, тј. алгебре ограничених оператора на Хилбертовом простору.

Пређимо сада на конкретне примере, а и покажимо по чему је толико C^*-услов моћан да бисмо их разматрали уместо Банахових *-алгебри.

Пример 1.1.7. *Најједноставнији пример C^*-алгебре је скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$. За $z \in \mathbb{C}$ елемент $z^* = \overline{z}$ (конјугован комплексан број), а норма је модуо комплексног броја. Тада се C^*-услов своди на познати идентитет $|z|^2 = |\overline{z}z|$.*

Пример 1.1.8. *Алгебра $B(H)$ свих ограничених оператора на Хилбертовом простору H је једна C^*-алгебра. Наравно, за $T \in B(H)$, оператор T^* је адјунговани оператор (јединствени оператор такав да је $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ за све $x, y \in H$), док је норма класична операторска норма, тј. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| \leqslant 1\}$.*

Пример 1.1.9. *Ако је димензија Хилбертовог простора једнака $n \in \mathbb{N}$, тада је $B(H) = M_n(\mathbb{C})$, тј. у питању је простор свих матрица $n \times n$. Видећемо касније да су баш оне градивни блокови свих коначно димензионалних. Додатно, они за $n \geqslant 2$ представљају основне примере некомутативних простора. Наравно, за $n = 1$ добијамо алгебру $\mathbb{C}$ коју смо већ описали.*

Пример 1.1.10. *Свака затворена $*$-подалгебра $B(H)$ је C^*-алгебра. Посебно, алгебра компактних оператора на Хилбертовом простору (у ознаци $K(H)$) је један такав пример. Приметимо да када је H бесконачно димензионалан, тада је она неунитална.*

Пример 1.1.11. *Нека је K компактан Хаусдорфов простор. Тада је*

$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{C} \mid f \text{ је непрекидна}\}$$

унитална C^*-алгебра при чему је $f^*(x) = \overline{f(x)}$ за произвољно $f \in C(K)$ и $x \in K$, а норма је супремум норма, тј. $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in K\}$. Наравно, јединица у овој алгебри је функција $1(x) = 1 = \mathrm{const}$ за све $x \in K$. Компактност скупа K нам гарантује да је норма ограничена, док у C^*-услову важи једнакост $|f(x)\overline{f(x)}| = |f(x)|^2$.

Пример 1.1.12. *Ако X није компактан, може се десити да је норма неке функције $f : X \to \mathbb{C}$ неограничена. Ипак, у случају да је X локално компактан, можемо поново конструисати њему придружену C^*-алгебру. Наиме, за функцију $f : X \to \mathbb{C}$ кажемо да нестаје у бесконачности ако за све $\varepsilon > 0$ постоји компактан скуп $K \subseteq X$ такав да за све $t \notin K$ важи $|f(t)| < \varepsilon$. Сада нека је*

$$C_0(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ је непрекидна и нестаје у бесконачности}\}.$$

Тада је $C_0(X)$ неунитална C^*-алгебра уколико је множење дефинисано тачка по тачка, а * и норма као у претходном примеру (приметимо да је норма коначна због услова да f нестаје у бесконачности). Наравно, неунитална је јер јединична функција не нестаје у бесконачности.

Наредна два примера су Банахове *-алгебре које нису C^*-алгебре.

Пример 1.1.13. *Простор низова $l^1(\mathbb{Z})$, тј. низова индексираних целим бројевима са нормом*

$$\|x\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < +\infty,$$

конволуцијом као производом

$$(xy)_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j y_{n-j}$$

и инволуцијом $(x^*)_n = \overline{x_{-n}}$ је Банахова *-алгебра која није C^*-алгебра. Наиме, важи $\|x^*\| = \|x\|$ за све $x \in l^1(\mathbb{Z})$, али не задовољава C^*-услов. Ако нпр. узмемо да је $x \in l^1(\mathbb{Z})$ где је $x_0 = 1, x_1 = x_2 = -1$ и $x_n = 0$ за све остале $n \in \mathbb{Z}$. Тада је $\|x^*x\| = 5$, док је са друге стране $\|x\|^2 = 9$.

Пример 1.1.14. *Нека је $\mathbb{D}$ отворен јединични диск у $\mathbb{C}$. Диск алгебра је дефинисана са*

$$A(\mathbb{D}) = \{f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \mid f \text{ је непрекидна на } \overline{\mathbb{D}} \text{ и холоморфна на } \mathbb{D}\},$$

где су сабирање и множење дефинисани тачка по тачка, инволуција са $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ и на њему дефинисана супремум норма је Банахова *-алгебра која није C^*-алгебра.

Често ћемо користити терминологију везану за елементе C^*-алгебре дату у следећој дефиницији.

Дефиниција 1.1.15. *Нека је* A C^**-алгебра и* $a, p, u \in A$.

1. *(1) Ако је* $a^* = a$, *тада за* a *кажемо да је самоадјунгован;*
2. *(2) Ако је* $a^*a = aa^*$, *тада за* a *кажемо да је нормалан;*
3. *(3) Ако је* $p = p^2 = p^*$, *тада за* p *кажемо да је пројекција;*
4. *(4) Ако је* A *унитална (и са 1 означимо неутрал за множење), тада за елемент* u *за који важи* $uu^* = 1 = u^*u$ *кажемо да је унитаран;*
5. *(5) Ако је* A *унитална, тада за елемент* u *за који важи* $u^*u = 1$ *кажемо да је изометрија;*
6. *(6) За елемент* u *за који је* u^*u *пројекција, кажемо да је парцијална изометрија.*

1.1.1 Унитизација C^*-алгебре

Код неуниталних C^*-алгебри, постоји једноставан начин проширивања до униталних. Наиме, за C^*-алгебру A дефинишемо $\widetilde{A} := A \oplus \mathbb{C}$. Затим, множење на $\widetilde{A}$ дефинишемо са

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu),$$

а инволуцију $^* : \widetilde{A} \to \widetilde{A}$ са $(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$. На крају, норму на $\widetilde{A}$ дефинишемо као

$$\|(a, \lambda)\|_{\widetilde{A}} := \sup\{\|ab + \lambda b\|_A \mid b \in A, \|b\| \leqslant 1\}.$$

Тада је $\widetilde{A}$ унитална C^*-алгебра (са јединицом $(0, 1)$) коју зовемо унитизација. Штавише, посматрајући *-хомоморфизам $a \mapsto (a, 0)$, можемо идентификовати A као идеал од $\widetilde{A}$.

Докажимо да наведена норма задовољава тражени услов. Важи

$$\begin{aligned}
\|(a, \lambda)\|^2 &= \sup_{\|b\| \leqslant 1} \|ab + \lambda b\|^2 \\
&= \sup_{\|b\| \leqslant 1} \|(ab + \lambda b)^*(ab + \lambda b)\| \\
&= \sup_{\|b\| \leqslant 1} \|b^*(a^*ab + \lambda a^*b + \overline{\lambda}ab + |\lambda|^2 b)\| \\
&\leqslant \sup_{\|b\| \leqslant 1} \|a^*ab + \lambda a^*b + \overline{\lambda}ab + |\lambda|^2 b\| \\
&= \|(a, \lambda)^*(a, \lambda)\| \leqslant \|(a, \lambda)^*\| \|(a, \lambda)\|,
\end{aligned}$$

па је $\|(a,\lambda)\| \leqslant \|(a,\lambda)^*\|$. Симетрично, добијамо да је $\|(a,\lambda)^*\| = \|(a,\lambda)\|$. Заједно са претходном неједнакошћу добијамо

$$\|(a,\lambda)\|^2 \leqslant \|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\| \leqslant \|(a,\lambda)\|^2,$$

па важи C^*-услов.

Уколико је A већ унитална, унитизацију $\widetilde{A}$ дефинишемо баш као A.

1.1.2 Спектар елемента

У линеарној алгебри смо се упознали са сопственим вредностима матрица, док се на бесконачно димензионалном простору теорија мора проширити. Спектар ће нам помоћи да дефинишемо непрекидни функционални рачун који ће имати врло велику улогу. Спектар елемента можемо дефинисати и у Банаховој (неуниталној) алгебри. Овде дајемо дефиницију за неуниталне C^*-алгебре. Приметимо да се у случају матричних алгебри (које су унталне) ова дефиниција потпуно поклапа са поменутим сопственим вредностима.

Дефиниција 1.1.16. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и $a \in A$. Спектар елемента a дефинишемо као*

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \cdot 1_{\widetilde{A}} - a \text{ није инвертибилан}\},$$

при чему $1_{\widetilde{A}}$ означава јединицу у унитизацији.

Дефиниција 1.1.17. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и $a \in A$. Резолвентни скуп елемента $a \in A$, у ознаци $\rho(a)$, дефинишемо као $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$.*

У наредних пар теорема, претпоставићемо да је A Банахова унитална алгебра - наравно део се може проширити и на неуниталне нама потребне C^*-алгебре.

Лема 1.1.18. *Нека је A унитална Банахова алгебра. Тада важи:*

(1) Ако је $x \in A$ такав да је $\|1-x\| < 1$, тада је x инвертибилан и $x^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-x)^n$.

(2) Ако је $x \in A$ инвертибилан и $y \in A$ такав да је $\|x-y\| < \dfrac{1}{\|x^{-1}\|}$, тада је елемент y такође инвертибилан.

(3) *Дефинишемо простор* $\mathrm{GL}(A) = \{x \in A \mid x$ *је инвертибилан*$\}$. *Тада је он отворен и пресликавање* $\mathrm{GL}(A) \ni x \mapsto x^{-1}$ *је непрекидно.*

Доказ. (1) Ради лакшег записа, дефинишимо $z := 1 - x$. Тада је по претпоставци $\|z\| < 1$, па је $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ апсолутно конвергентан ред из мултипликативности норме, тј. из неједнакости $\|z^n\| \leq \|z\|^n$. Тада је ред $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ конвергентан. Даље, важи следеће:

$$x\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{N\to\infty}(1-z)\sum_{n=0}^{N} z^n = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} z^n - \sum_{n=1}^{N+1} z^n\right)$$
$$= \lim_{N\to\infty}(1 - z^{N+1}) = 1,$$

чиме смо доказали да је $x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$.

(2) Приметимо најпре следеће:

$$\left\|1 - yx^{-1}\right\| = \left\|(x-y)x^{-1}\right\| \leq \|x-y\| \left\|x^{-1}\right\| < 1.$$

Одатле је из (1) елемент yx^{-1} инвертибилан, па је такав и y.

(3) Нека је $x \in \mathrm{GL}(A)$ и $y \in A$ такав да је $\|x - y\| < \varepsilon < \left\|x^{-1}\right\|^{-1}$. Из (2), закључујемо да $y \in \mathrm{GL}(A)$ па је $B(x,\varepsilon) \subseteq \mathrm{GL}(A)$. Одатле добијамо да је $\mathrm{GL}(A)$ отворен.

Остаје да докажемо непрекидност. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ такав да $x_n \to x$, при чему $x_n, x \in \mathrm{GL}(A), n \in \mathbb{N}$. Тада је $\|x_n - x\| < \left\|x^{-1}\right\|^{-1}\frac{\varepsilon}{2}$ за све довољно велике природне бројеве n и $0 < \varepsilon < 1$. Одатле је

$$\left\|1 - x_n x^{-1}\right\| = \left\|(x - x_n)\, x^{-1}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < 1,$$

па је према (1) елемент $x_n x^{-1}$ инвертибилан при чему је

$$xx_n^{-1} = \left(x_n x^{-1}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - x_n x^{-1}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - x_n x^{-1}\right)^k.$$

Како је $\varepsilon^k \leq \varepsilon$, добијамо да је:

$$\left\|x_n^{-1} - x^{-1}\right\| = \left\|x^{-1}\left(xx_n^{-1} - 1\right)\right\| \leq \left\|x^{-1}\right\|\sum_{k=1}^{\infty}\left\|1 - x_n x^{-1}\right\|^k$$
$$\leq \left\|x^{-1}\right\|\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon\frac{1}{2^k} = \varepsilon\left\|x^{-1}\right\|,$$

што показује да x_n^{-1} конвергира x^{-1}, па је наведено пресликавање непрекидно.

$\square$

Као директну последицу претходног, добијамо да је спектар елемента увек компактан скуп.

Став 1.1.19. *Нека је A унитална Банахова алгебра и $x \in A$. Тада је скуп $\sigma(x)$ компактан и $\sigma(x) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|x\|\}$.*

Доказ. Најпре, приметимо да је резолвентни скуп $\rho(x)$ отворен, јер се може записати као инверзна слика отвореног скупа непрекидном функцијом. Наиме, $\rho(x) = f_x^{-1}(\mathrm{GL}(A))$, где је $f_x : \mathbb{C} \to A$ дефинисана са $f_x(\lambda) = \lambda \cdot 1 - x$ непрекидна, док је скуп $\mathrm{GL}(A)$ отворен по претходној леми. Самим тим, скуп $\sigma(x)$ је затворен као његов комплемент.

Даље, ако је $|\lambda| > \|x\| \neq 0$, онда је $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\| < 1$. Одатле, како је елемент $\lambda \cdot 1 - x = \lambda\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)$, то је он инвертибилан по Леми 1.1.18(1), што показује да $\lambda \notin \sigma(x)$. Тиме смо показали да је $\sigma(x) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|x\|\}$. Као затворен подскуп компактног скупа, $\sigma(x)$ је компактан, чиме је доказ завршен. $\square$

Наредна теорема је тзв. Фундаментална теорема Банахових алгебри - њом показујемо да је спектар елемента непразан.

Теорема 1.1.20 (Гељфандова)**.** *Ако је A унитална Банахова алгебра, $A \neq 0$ и $x \in A$. Тада је $\sigma(x) \neq \emptyset$.*

Доказ. Нека је $x \in A$ произвољан. За комплексан број $\lambda \in \rho(x)$, дефинишимо функцију $R_\lambda : A \to A$ (коју ћемо звати резолвента) са $R_\lambda(x) := (\lambda - x)^{-1}$.

Приметимо најпре да је за све $\lambda, \mu \in \rho(x)$

$$\begin{aligned}
R_\lambda(x) - R_\mu(x) &= R_\lambda(x)(\mu - x)R_\mu(x) - (\lambda - x)R_\lambda(x)R_\mu(x) \\
&= ((\mu - x)^{-1}(\lambda - x))^{-1}R_\mu(x) - (\lambda - x)R_\lambda(x)R_\mu(x) \\
&= ((\lambda - x)(\mu - x)^{-1})^{-1}R_\mu(x) - (\lambda - x)R_\lambda(x)R_\mu(x) \\
&= (\mu - x)(\lambda - x)^{-1}R_\mu(x) - (\lambda - x)R_\lambda(x)R_\mu(x) \\
&= (\mu - x)R_\lambda(x)R_\mu(x) - (\lambda - x)R_\lambda(x)R_\mu(x) \\
&= (\mu - \lambda)R_\lambda(x)R_\mu(x),
\end{aligned}$$

где смо користили да је $(\lambda - x)R_\lambda(x) = 1$ и битније да је $(\mu - x)^{-1}(\lambda - x) = (\lambda - x)(\mu - x)^{-1}$. Приметимо да комутативност не важи у општем случају, али овде важи јер је $(\mu - x)(\lambda - x) = (\lambda - x)(\mu - x)$.

Претпоставимо супротно да је $\sigma(x) = \emptyset$. Тада $0 \notin \sigma(x)$, тј. $0 - x$ је инвертибилан елемент, па је и x инвертибилан. По Хан-Банаховој теореми, постоји линеаран функционал $f : A \to \mathbb{C}$ такав да је $f\left(x^{-1}\right) \neq 0$. Дефинишимо функцију $g : \rho(x) \to \mathbb{C}$ са $g(\lambda) := f\left(R_\lambda(x)\right)$. Тада је по Леми 1.1.18 функција $\lambda \mapsto R_\lambda(x)$ непрекидна, а по претходном пасусу важи да је

$$\frac{g(\lambda) - g(\mu)}{\lambda - \mu} = f\left(\frac{R_\lambda(x) - R_\mu(x)}{\lambda - \mu}\right) = -f\left(R_\lambda(x)R_\mu(x)\right) \to -f\left(R_\lambda^2(x)\right),$$

када $\mu \to \lambda$, па је g холоморфна функција. Додатно, приметимо да је $g(0) = f\left(R_0(x)\right) = -f\left(x^{-1}\right) \neq 0$.

Дефинишимо сада $z := 1 - \lambda^{-1}x$. Тада је $\|1 - z\| = |\lambda|^{-1}\|x\| < 1$ за довољно велико $|\lambda|$. Тада је z инвертибилан по Леми 1.1.18, при чему је $z^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n$. Одатле је

$$\left\|\left(1 - \lambda^{-1}x\right)^{-1}\right\| = \left\|z^{-1}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|1 - z\|^n = (1 - \|1 - z\|)^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{\|x\|}{|\lambda|}}.$$

Из претходног следи да је

$$\begin{aligned}\|R_\lambda(x)\| = \left\|(\lambda - x)^{-1}\right\| &= |\lambda|^{-1}\left\|\left(1 - \lambda^{-1}x\right)^{-1}\right\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|\left(1 - \frac{\|x\|}{|\lambda|}\right)} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|} \to 0 \text{ када } |\lambda| \to \infty.\end{aligned}$$

Одавде је g ограничена, цела функција, па је константна по Лиувиловој теореми. Из чињенице да $g(\lambda) \to 0$ када $|\lambda| \to \infty$, добијамо да је $g = 0$, што је у контрадикцији са већ доказаном чињеницом да је $g(0) \neq 0$. Тиме је доказ завршен. ☐

Наредна теорема је једноставна последица претходног.

Теорема 1.1.21 (Гељфанд-Мазурова)**.** *Нека је A унитална Банахова алгебра. Ако је сваки елемент $a \in A$ такав да је $a \neq 0$ инвертибилан, онда је $A = \mathbb{C}1$.*

Доказ. Нека је $a \in A$ произвољан. Тада $\sigma(a) \neq \emptyset$ по претходној теореми, па постоји $\lambda \in \mathbb{C}$ такво да је $\lambda 1 - a$ неинвертибилан. По претпоставци, онда је $\lambda 1 - a = 0$, тј. $a = \lambda 1$ одакле следи тврђење. ☐

Дефинишимо сада спектрални радијус, који је у чврстој спрези са нормом.

Дефиниција 1.1.22. *Нека је* A *унитална Банахова алгебра и нека је* $x \in A$. *Спектрални радијус елемента* x *дефинишемо као*

$$r(x) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Напомена 1.1.23. *Из Става 1.1.19, јасно је да је* $r(x) \leq \|x\|$. *Такође, по истом ставу, како је спектар компактан, то је супремум заправо максимум.*

Пример 1.1.24. *Спектрални радијус се може поклапати са нормом, али и не мора, што показују наредна два примера:*

(1) *Код* C^**-алгебре* $C(X)$ *где је* X *компактан, за све* $f \in C(X)$ *важи да је* $r(f) = \|f\|_\infty$. *Наиме, како је* f *непрекидна, то она достиже максимум и мимумум на* X. *Дакле, постоји* $x \in X$ *такав да је* $|f(x)| = \|f\|_\infty$. *Тада је* $f(x) = e^{i\alpha}\|f\|_\infty$ *за неко* $\alpha \in [0, 2\pi)$, *па елемент* $e^{i\alpha}\|f\|_\infty - f$ *није инвертибилан, одакле по дефиницији закључујемо да* $e^{i\alpha}\|f\|_\infty \in \sigma(f)$. *Самим тим је* $r(f) \geqslant \|f\|_\infty$, *а већ знамо да обрнута неједнакост важи.*

(2) *У другом примеру посматрајмо матрицу* $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. *Тада је матрица* $\lambda - x = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *инвертибилна за све* $\lambda \neq 0$. *Тада се спектар елемента* x *састоји од једне тачке, тј.* $\sigma(x) = \{0\}$, *па је* $r(x) = 0$ *док је наравно* $\|x\| > 0$.

Поставља се питање када се норма и спектрални радијус поклапају. Одговор нам даје Бјорлингова теорема која представља везу између алгебре (радијуса, тј. инвертибилности) и топологије (тј. норме). Доказ ћемо на овом месту изоставити (изводи се елементарним методама комплексне и функционалне анализе). Значајније ће нам бити њене последице - да се за нормалан елемент спектрални радијус и норма поклапају, а посебно да на *-алгебри постоји јединствена норма која је чини C^*-алгебром. Детаљан доказ се може видети у [72], Теорема 1.2.11.

Теорема 1.1.25 (Бјорлингова)**.** *Нека је* A *унитална Банахова алгебра и* $x \in A$ *произвољан. Тада важи:*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Последица 1.1.26. *Нека је A унитална C^*-алгебра и нека је елемент $x \in A$ нормалан. Тада је $r(x) = \|x\|$.*

Доказ. Из C^*-услова и чињенице да је елемент x нормалан, добијамо следећи низ једнакости:

$$\left\|x^2\right\|^2 = \left\|\left(x^2\right)^* x^2\right\| = \|x^*x^*xx\| = \|x^*xx^*x\| = \left\|(x^*x)^*\left(x^*x\right)\right\| = \|x^*x\|^2 = \|x\|^4.$$

Дакле, $\|x\|^2 = \left\|x^2\right\|$. Индуктивно показујемо да за $n \in \mathbb{N}$ важи $\left\|x^{2^n}\right\| = \|x\|^{2^n}$, па је

$$r(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[2^n]{\left\|x^{2^n}\right\|} = \|x\|.$$

□

Последица овога је да на C^*-алгебри постоји јединствена норма.

Последица 1.1.27. *Нека је A унитална *-алгебра и $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ су две норме на A такве да су $(A, \|\cdot\|_1)$ и $(A, \|\cdot\|_2)$ C^*-алгебре. Тада је $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$.*

Доказ. Нека $x \in A$. Тада је $\|x\|_i^2 = \left\|x^*x\right\|_i = r\left(x^*x\right)$ за $i \in 1, 2$ по претходној последици, тј. норма на C^*-алгебри је јединствена. □

1.1.3 Хомоморфизми Банахових и C^*-алгебри; Идеали

Дефинишимо сада морфизме између Банахових, односно C^*-алгебри.

Дефиниција 1.1.28. *Нека су A и B две Банахове алгебре.*

(а) *Пресликавање $\varphi : A \to B$ је хомоморфизам алгебри ако је φ линеарно и мултипликативно, тј. ако је $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ за све $x, y \in A$.*

(б) *Нека су додатно A и B Банахове *-алгебре. Тада је φ *-хомоморфизам ако је $\varphi : A \to B$ хомоморфизам из (а) који је додатно инволутиван, тј. ако је $\varphi\left(x^*\right) = \varphi(x)^*$ за све $x \in A$.*

(в) *Кажемо да је хомоморфизам φ изометрија ако је $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ за све $x \in A$.*

(г) *Ако су A и B униталне алгебре, тада кажемо да је хомоморфизам $\varphi : A \to B$ униталан ако је $\varphi(1_A) = 1_B$.*

Наредна лема показује како се *-хомоморфизми проширују до униталних на унитизацији.

Лема 1.1.29. *Нека су A и B произвољне C^*-алгебре и $\varphi : A \to B$ *-хомоморфизам. Тада је пресликавање $\widetilde{\varphi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$ дефинисано са*

$$a + \lambda 1_{\widetilde{A}} \mapsto \varphi(a) + \lambda 1_{\widetilde{B}}$$

јединствена екстензија пресликавања φ до униталног *-хомоморфизма.

Доказ. Линеарност и инволутивност су очигледни. Доказаћемо још да је у питању хомоморфизам (мада је и то директно). Наиме, за произвољне $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ и $a, b \in A$ важи

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(a+\lambda)\widetilde{\varphi}(b+\mu) &= (\varphi(a)+\lambda)(\varphi(b)+\mu)\\ &= \varphi(a)\varphi(b) + \mu\varphi(a) + \lambda\varphi(b) + \lambda\mu\\ &= \widetilde{\varphi}(ab + \mu a + \lambda b + \lambda\mu)\\ &= \widetilde{\varphi}((a+\lambda)(b+\mu)).\end{aligned}$$

Што се тиче јединствености, ако је $\psi : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$ унитална екстензија *-хомоморфизма φ, тада за произвољан $a + \lambda \in \widetilde{A}$ важи (из линеарности и униталности)

$$\psi(a+\lambda) = \psi(a) + \psi(\lambda 1_{\widetilde{A}}) = \varphi(a) + \lambda 1_{\widetilde{B}} = \widetilde{\varphi}(a+\lambda),$$

тј. $\psi = \widetilde{\varphi}$. □

Интересантно је да су код C^*-алгебри *-хоморфизми аутоматски непрекидни што следи из следеће леме.

Лема 1.1.30. *Нека су A и B произвољне C^*-алгебре и нека је $\varphi : A \to B$ *-хомоморфизам.*

(а) *Ако су A и B униталне C^*-алгебре и φ унитални *-хомоморфизам, тада је $\sigma_B(\varphi(x))$ подскуп скупа $\sigma_A(x)$ за све $x \in A$.*

(б) *$\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$ за све $x \in A$. Посебно, пресливање φ је непрекидно.*

Доказ. (а) Нека $\lambda \in \sigma_B(\varphi(x))$. Тада елемент $\lambda - \varphi(x) = \varphi(\lambda - x) \in B$ није инвертибилан. Онда ни $\lambda - x \in A$ не може бити инвертибилан јер φ пресликава инвертибилне елементе у инвертибилне елементе.

(б) Претпоставимо најпре да су A и B униталне C^*-алгебре, а φ унитални *-хомоморфизам. Тада је из (а) $r(\varphi(x)) \leq r(x)$ за све $x \in A$. Затим је из чињенице да је $r(x^*x) = \|x^*x\|$

$$\|\varphi(x)\|^2 = \|\varphi\left(x^*x\right)\| = r\left(\varphi\left(x^*x\right)\right) \leq r\left(x^*x\right) = \|x^*x\| = \|x\|^2,$$

одакле закључујемо да је $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$.

У општем случају, из (а) знамо да је $\|\widetilde{\varphi}(x)\|_{\widetilde{B}} \leq \|x\|_{\widetilde{A}}$ за све $x \in \widetilde{A}$. Онда за $x \in A \subseteq \widetilde{A}$ важи $\|\varphi(x)\|_B = \|\widetilde{\varphi}(x)\|_{\widetilde{B}} \leq \|x\|_{\widetilde{A}} = \|x\|_A$, јер смо само елементе утопили у унитизацију.

Овим смо показали да је $\|\varphi\| \leqslant 1$, тј. да је контракција, па је сваки *-хомоморфизам непрекидан.

□

Пређимо сада на дефиницију идеала.

Дефиниција 1.1.31. *Нека је A алгебра. Подалгебра $I \subseteq A$ се назива десни (леви) идеал ако за све $a \in A$ и $b \in I$ важи $ab \in I$ (тј. $ba \in I$). I ћемо звати алгебарским идеалом ако је он и десни и леви идеал. Тада је A/I такође алгебра (операције сабирања и множења су очигледне).*

Количник A/I је унитална алгебра тачно када је I модуларни идеал, тј. када постоји елемент $u \in A$ такав да $a - ua, a - au \in I$ за све $a \in A$.

Када је A додатно Банахова алгебра, под идеалом посматрамо сваки алгебарски идеал који је затворен у норми. Количничку норму на A/I дефинишемо са

$$\|a + I\| = \inf_{b \in I} \|a + b\|, \ a \in A,$$

и уз њу A/I постаје Банахова алгебра.

Што се тиче идеала у C^*-алгебрама, они су описани у следећој теореми (видети Теорему 3.1.3 из [59]).

Теорема 1.1.32. *Ако је I затворен идеал у C^*-алгебри A, тада је I самоадјунгован (па је C^*-подалгебра од A). Ако је $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ апроксимативна јединица у I (видети поглавље 1.1.8 Апроксимативна јединица), тада за све $a \in A$ важи*

$$\|a + I\| = \lim_{\lambda} \|a - e_\lambda a\| = \lim_{\lambda} \|a - a e_\lambda\|.$$

Следеће тврђење је Теорема 3.1.4 из [59].

Теорема 1.1.33. *Ако је I затворен идеал у C^*-алгебри A, тада је A/I једна C^*-алгебра, при чему је на њој дефинисана количничка норма.*

Један стандардан идеал је језгро *-хомоморфизма.

Став 1.1.34. *Нека су A и B две C^*-алгебре и $\varphi : A \to B$ *-хомоморфизам. Тада је*

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$$

је идеал у A.

Доказ. Доказ следи директно на основу Леме 1.1.30(а). □

Међу идеалима се истичу *тривијални* ($I = 0$, тј. $I = A$). *Максимални* идеал је идеал различит од A који није садржан ни у једном другом идеалу различитом од A.

Дефиниција 1.1.35. *C^*-алгебру A називамо простом уколико она нема ниједан нетривијалан идеал.*

1.1.4 Спектар Банахових и C^*-алгебри

Посматрајмо сада посебан облик хомоморфизама, оних код којих је кодомен скуп комплексних бројева. Њих можемо дефинисати у произвољној Банаховој алгебри.

Дефиниција 1.1.36. *Нека је A Банахова алгебра. За хомоморфизам $\varphi : A \to \mathbb{C}$ такав да је $\varphi \neq 0$ кажемо да је карактер. Скуп свих карактера зваћемо спектар алгебре A и означавати са $\widehat{A}$.*

Треба разликовати појмове спектар елемента и спектар алгебре. Но, није случајно одабрано ово име, а ускоро ћемо и приказати везу између њих (једна од њих је у наредној леми, део под (в)). Основна својства карактера дата су у следећој леми.

Лема 1.1.37. *Нека је A унитална Банахова алгебра и $\varphi \in \widehat{A}$. Тада важи:*

(а) φ је унитaлан.

(б) Ако је $x \in A$ инвертибилан елемент, тада је $\varphi(x) \neq 0$.

(в) $\varphi(x) \in \sigma(x)$ за све $x \in A$.

(г) *φ је непрекидна контракција, тј. $\|\varphi\| \leq 1$.*

(д) *Ако је A C^*-алгебра и $x \in A$ самоадјунгован елемент, тада $\varphi(x) \in \mathbb{R}$.*

(ђ) *Ако је A опет и C^*-алгебра, тада је φ *-хомоморфизам норме 1, тј. $\|\varphi\| = 1$.*

Доказ. (а) Нека је $x \in A$ такав да је $\varphi(x) \neq 0$. Наравно, такав елемент постоји из претпоставке да је $\varphi \neq 0$. Тада је $\varphi(x) = \varphi(x1) = \varphi(x)\varphi(1)$, одакле закључујемо да је $\varphi(1) = 1$.

(б) Како је $1 = \varphi(1) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1})$, па је $\varphi(x) \neq 0$.

(в) Приметимо да је из (а) $\varphi(\varphi(x)1 - x) = 0$, па директно из (б) следи да $\varphi(x)1 - x$ није инвертибилан, одакле следи да $\varphi(x) \in \sigma(x)$.

(г) Како је сваки члан спектра неког елемента $x \in A$ по модулу не већи од $\|x\|$, а из (в) елемент $\varphi(x)$ јесте члан спектра, то је $|\varphi(x)| \leq \|x\|$, одакле закључујемо да је φ контракција и посебно непрекидна.

(д) Нека је $x = x^*$ и $\varphi(x) = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Тада је из (а) $\varphi(x) + i\lambda = \varphi(x + i\lambda)$, па је из (г) $|\varphi(x) + i\lambda| \leq \|x + i\lambda\|$ за све $\lambda \in \mathbb{R}$. Према томе је $\alpha^2 + (\lambda + \beta)^2 = |\varphi(x) + i\lambda|^2 \leq \|x + i\lambda\|^2 = \|(x + i\lambda)^*(x + i\lambda)\| = \left\|x^2 + \lambda^2\right\| \leq \|x\|^2 + \lambda^2$, одакле следи $\alpha^2 + 2\lambda\beta + \beta^2 \leq \|x\|^2$ за све $\lambda \in \mathbb{R}$. Но како је норма ограничена, коначно добијамо $\beta = 0$ и да $\varphi(x) \in \mathbb{R}$.

(ђ) Знамо из (г) да је норма не већа од 1, па како је $\varphi(1) = 1$ и $\|1\| = 1$, добијамо да је $\|\varphi\| = 1$. Остаје да докажемо да је φ *-хомоморфизам. Нека је $x \in A$ и нека су $\varphi(x) = \alpha + i\beta$ и $\varphi(x^*) = \gamma + i\delta$. Приметимо да су елементи $x_1 := x + x^* \in A$ и $x_2 := i(x - x^*) \in A$ самоадјунговани. Користећи (д), добијамо да је

$$(\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta) = \varphi(x_1) \in \mathbb{R} \text{ и } i(\alpha - \gamma) + (\delta - \beta) = \varphi(x_2) \in \mathbb{R},$$

одакле закључујемо да је $\beta = -\delta$ и $\alpha = \gamma$, па је $\varphi(x)^* = \alpha - i\beta = \varphi(x^*)$, што је и требало показати.

□

Напомена 1.1.38. *Приметимо да смо у делу (д) претходне леме показали да карактери чувају особину самоадјунгованости. Наиме, у $\mathbb{C}$ су управо реални* *бројеви самоадјунговани. Коначно, из (ђ) видимо да карактери на C^*-алгебри чувају инволуцију и имају норму 1.*

Следећи став описује тополошка својства спектра $\widehat{A}$ (Теорема 1.3.5 из [59], уз ознаку $\widehat{A} = \Omega(A)$).

Став 1.1.39. *Нека је A унитална Банахова алгебра. Ако на спектру $\widehat{A}$ дефинишемо тачка по тачка топологију, онда он постаје компактан Хаусдорфов простор.*

1.1.4.1 Спектар комутативних, униталних Банахових алгебри

Наредни став показује кореспонденцију између $\widehat{A}$ и скупа максималних идеала у A.

Став 1.1.40. *Нека је A комутативна, унитална Банахова алгебра. Тада постоји бијекција између спектра $\widehat{A}$ и максималних идеала у A (у ознаци Δ) дата са*

$$\widehat{A} \to \Delta, \quad \varphi \mapsto \operatorname{Ker} \varphi.$$

Доказ. Најпре покажимо да сваки максималан идеал у A, нпр. $I \in \Delta$, можемо записати као језгро неког карактера. Приметимо да је сваки ненула елемент у A/I инвертибилан. Наиме, нека је $\pi : A \to A/I$ количничко пресликавање и $a \in A$ такав да је $\pi(a) \neq 0$. Доказаћемо да је $\pi(a)$ инвертибилан. Дефинишимо скуп

$$J_a := \{ba + x \mid b \in A, x \in I\} \subseteq A.$$

Тада је J_a двострани идеал у A јер за $(ba + x), (b'a + x') \in J_a$ и $c \in A$ важи $(ba + x) + (b'a + x') = (b + b')\, a + (x + x') \in J_a$, као и $c(ba + x) = (cb)a + cx \in J_a$ и $(ba + x)c = (cb)a + xc \in J_a$ (због чињенице да је A комутативна). Штавише, ако ставимо да је $b = 0$, добијамо да је $I \subset J_a$. Даље, ако ставимо $b = 1$ и $x = 0$, добијамо да је $I \neq J_a$, јер је $\pi(a) \neq 0$, па $a \notin I$. Из претпоставке о максималности идеала I, закључујемо да је $J_a = A$, па постоје $b \in A$ и $x \in I$такви да је $1 = ba + x$. Одатле је $\pi(b)\pi(a) = \pi(ba + x) = \pi(1) = 1$, па је $\pi(a)$ лево инвертибилан, а по комутативности је и десно инвертибилан. Тиме смо показали да је $\pi(a)$ инвертибилан за све $a \in A$. Како је A/I Банахова алгебра, по Гељфанд-Мазуровој теореми је A/I изоморфно са $\mathbb{C}$, па је квоцијентно пресликавање π карактер чије је језгро управо I.

Приметимо даље да је $\operatorname{Ker}\varphi \lhd A$ максималан идеал за све карактере $\varphi \in \widehat{A}$. Језгро је увек идеал, јер за $x \in \operatorname{Ker}\varphi$ и $a \in A$ важи да је $\varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a) = 0$, па $xa \in \operatorname{Ker}\varphi$. Даље, како је $\varphi(1) = 1$, то је $\operatorname{Ker}\varphi \neq A$. Нађимо максималан идеал $I \lhd A$ такав да је $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq I$. Тада је по претходном пасусу $I = \operatorname{Ker}\psi$ за неки карактер ψ. Одатле је $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$. Но онда је $\varphi(a)1 - a \in \operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$ за све $a \in A$, па је $0 = \psi(\varphi(a)1 - a) = \varphi(a) - \psi(a)$. Стога је $\varphi = \psi$, па је $\operatorname{Ker}\varphi = I$ максималан идеал.

Коначно, да бисмо показали бијективност, остало је да покажемо инјективност. Претпоставимо да за $\varphi, \psi \in \widehat{A}$ важи $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\psi)$. Тада, по већ описаном рачуну од горе, $\varphi(a)1 - a \in \operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\psi)$ за све $a \in A$, одакле је $\varphi = \psi$, што је и био циљ. □

Сада као последицу можемо извести већ најављену везу између спектра алгебре и спектра елемента.

Последица 1.1.41. *Нека је A комутативна, унитална Банахова алгебра и елемент $x \in A$. Тада је*

$$\sigma(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in \widehat{A}\}.$$

Доказ. По Леми 1.1.37 (в), $\varphi(x) \in \sigma(x)$ за све $\varphi \in \widehat{A}$. У другом смеру, узмимо произвољан $\lambda \in \sigma(x)$. Тада је $I_\lambda := \{b(\lambda - x) \mid b \in A\} \lhd A$ двострани идеал у A и $1 \notin I_\lambda$ (јер $(\lambda - x)$ није инвертибилан). Самим тим, он је садржан у неком максималном идеалу који је опет језгро неког карактера по претходном ставу. Дакле, $I_\lambda \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$ за неки $\varphi \in \widehat{A}$. Одатле је $\varphi(\lambda - x) = 0$, па је $\lambda = \varphi(x)$, што је и требало доказати. □

1.1.4.2 Спектар комутативних C^*-алгебри

Наредна лема даје везу између спектра C^*-алгебре и спектра њене унитизације.

Лема 1.1.42. *Нека је A комутативна C^*-алгебра. Тада су $\widehat{A}$ и $\widehat{\widetilde{A}} \backslash \{\widetilde{0}\}$ хомеоморфни, при чему $\widetilde{0} : \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ дефинишемо као $\lambda + a \mapsto \lambda$.*

Доказ. Конструишимо пресликавање $\Psi : \widehat{\widetilde{A}} \backslash \{\widetilde{0}\} \to \widehat{A}$ са $\psi \mapsto \psi_{|A}$. Најпре, A је максималан идеал у $\widetilde{A}$. Даље, како је $\psi \in \widehat{\widetilde{A}}$ хомоморфизам, то је и његова рестрикција $\psi_{|A} : A \to \mathbb{C}$ такође хомоморфизам. Ако је $\psi_{|A} = 0$, онда је $A \subseteq \operatorname{Ker}\psi$. Штавише, $\operatorname{Ker}\psi \neq \widetilde{A}$ по дефиницији $\widehat{\widetilde{A}}$. Како је A максималан идеал, то је $A = \operatorname{Ker}\psi$, па је $\psi = \widetilde{0}$ јер имамо бијекцију између спектра и максималних идеала. Самим тим, из $\psi \in \widehat{\widetilde{A}}\backslash\{\widetilde{0}\}$ следи да је $\psi_{|A} \neq 0$ па $\psi_{|A} \in \widehat{A}$.

Са друге стране, нека је $\varphi \in \widehat{A}$ и дефинишемо стандардно $\widetilde{\varphi}(a+\lambda) := \varphi(a) + \lambda$ за $a \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Ово дефинише пресликавање $\Phi : \widehat{A} \to \widehat{\widetilde{A}}\backslash\{\widetilde{0}\}$ које је инверзно пресликавању Ψ. Може се показати да су Φ и Ψ непрекидна пресликавања, те она индукују хомеоморфизам између $\widehat{A}$ и $\widehat{\widetilde{A}}\backslash\{\widetilde{0}\}$. □

Став 1.1.43. *Нека је A комутативна C^*-алгебра. Тада је $\widehat{A}$ локално компактан. Ако је A додатно унитална, онда је $\widehat{A}$ компактан.*

Доказ. По Ставу 1.1.39, $\widehat{\widetilde{A}}$ је компактан. Одатле је $\widehat{A}$ локално компактан по Леми 1.1.42. Унитални случај следи из Става 1.1.39. □

Сада наведимо тврђење за $C(X)$ - комутативну униталну C^*-алгебру (Теорема 2.1.15 из [59] или Теорема 2.3.2 из [72]).

Став 1.1.44. *Нека је X компактан Хаусдорфов простор. Тада је $\widehat{C(X)}$ хомеоморфан са X, при чему је хомеоморфизам дат са $\Psi : X \to \widehat{C(X)}, t \mapsto \mathrm{ev}_t$, где је $\mathrm{ev}_t : C(X) \to \mathbb{C}$ израчунавање (евалуација) у тачки, тј. $\mathrm{ev}_t(f) = f(t)$ за $f \in C(X)$.*

Напомена 1.1.45. *Дакле, спектар зна све о комутативним C^*-алгебрама. Нажалост, он не види некомутативност - може се показати да је $\widehat{M_n(\mathbb{C})} = \emptyset$.*

1.1.5 Гељфандова трансформација

Сада можемо дефинисати веома важну трансформацију за Банахове и C^*-алгебре. Најпре почнимо са комутативним, униталним Банаховим алгебрама.

Дефиниција 1.1.46. *Нека је A комутативна, унитална Банахова алгебра. Гељфандову трансформацију $\chi : A \to C(\widehat{A})$ дефинишемо са $\chi(x) = \widehat{x}$, при чему је $\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ за произвољан $\varphi \in \widehat{A}$.*

Подсетимо се сада дефиниције мреже, коју ћемо често користи у даљем раду.

Дефиниција 1.1.47. *Нека је X тополошки простор. Фамилију $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X$ зовемо мрежом ако постоји релација $\leqslant$ која је парцијални поредак на Λ и Λ је усмерен скуп, тј. за све $\lambda, \mu \in \Lambda$ постоји $\nu \in \Lambda$ тако да је $\lambda \leqslant \nu$ и $\mu \leqslant \nu$.*

Мрежа $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ конвергира ка $x \in X$ ако за сваку околину U тачке x постоји $\lambda_0 \in \Lambda$ тако да $x_\lambda \in U$ за све $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Напомена 1.1.48. *Пример мреже на који смо навикли је $\Lambda = \mathbb{N}$ са стандардном релацијом поретка. Тада су мреже заправо низови.*

Лема 1.1.49. *Гељфандова трансформација је непрекидан, унитални хомоморфизам алгебри и важи $\|\widehat{x}\|_\infty \leq \|x\|$.*

Доказ. Докажимо најпре добру дефинисаност. Узмимо $\varphi_\lambda \to \varphi$ на $\widehat{A}$. Но, како је на $\widehat{A}$ топологија индукована конвергенцијом тачка по тачка, то је $\varphi_\lambda(x) \to \varphi(x)$, тј. $\widehat{x}(\varphi_\lambda) \to \widehat{x}(\varphi)$, чиме смо доказали да $\widehat{x} \in C(\widehat{A})$. Како су карактери линеарна и мултипликативна пресликавања, то је $\widehat{\lambda x + \mu y} = \lambda\widehat{x} + \mu\widehat{y}$ и $\widehat{xy} = \widehat{x}\widehat{y}$ за $x, y \in A$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, па је у питању хомоморфизам алгебри. Коначно, по Леми 1.1.37 добијамо да је пресликавање унитално, док по истој важи да је $|\widehat{x}(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|x\|$, одакле коначно закључујемо да је $\|\widehat{x}\|_\infty \leq \|x\|$. □

Лема 1.1.50. *Нека је A комутативна, унитална Банахова алгебра. Тада је $\widehat{x}(\widehat{A}) = \sigma(x)$ и $\|\widehat{x}\|_\infty = r(x)$.*

Доказ. Знамо да је $\widehat{x}(\widehat{A}) = \sigma(x)$ (Последица 1.1.41). Одатле је $r(x) = \sup\{|\widehat{x}(\varphi)| \mid \varphi \in \widehat{A}\} = \|\widehat{x}\|_\infty$. □

За сам доказ наредне теореме биће нам потребна и чувена Стоун-Вајерштрасова теорема из 1948. године ([71]).

Теорема 1.1.51. *(Стоун-Вајерштрасова). Нека је X компактан Хаусдорфов простор и $A \subseteq C(X)$ затворена, унитална *-подалгебра која раздваја тачке. Тада је $A = C(X)$.*

У случају када је A комутативна, унитална C^*-алгебра, Гељфандова трансформација има још нека јача својства. То нас доводи до чувене Гељфанд-Најмаркове теореме.

Теорема 1.1.52. *(Гељфанд-Најмаркова теорема) Гељфандова трансформација је изометрички *-изоморфизам за комутативне, униталне C^*-алгебре. Дакле, C^*-алгебра A је комутативна ако и само ако постоји* *компактан скуп X такава да је $A \cong C(X)$. Скуп X је заправо $\widehat{A}$. Коначно, у неуниталном случају, $A \cong C_0(X)$ за локално компактан скуп X.*

Доказ. Нека је A комутативна, за почетак унитална C^*-алгебра. По Леми 1.1.49 $\chi : A \to C(\widehat{A})$ је унитални хомоморфизам алгебри, док по Леми 1.1.37 знамо да је $\varphi \in \widehat{A}$ један *-хомоморфизам. Одатле важи да је

$$\widehat{x^*}(\varphi) = \varphi\left(x^*\right) = \varphi(x)^* = (\widehat{x}(\varphi))^*,$$

чиме смо показали да Гељфандова трансформација поштује и *. Коначно, у питању је изометрија, јер је из комутативности сваки елемент $x \in A$ нормалан (па је $r(x) = \|x\|$), а по Леми 1.1.50 је $\|\widehat{x}\|_\infty = r(x) = \|x\|$.

Остало је да покажемо да је пресликавање „на”. Како је χ изометрички *-хомоморфизам, лако се показује да је $\chi(A)$ затворена *-подалгебра алгебре $C(\widehat{A})$ (подсетимо се да је $\widehat{A}$ компактан, Хаусдорфов простор). Означимо $B = \chi(A)$. Довољно је да докажемо да B раздваја тачке и применимо Стоун-Вајерштрасову теорему. Узмимо произвољне $\varphi, \psi \in \widehat{A}$, такве да је $\varphi \neq \psi$. Тада постоји $x \in A$, такво да је $\varphi(x) \neq \psi(x)$. Узмимо онда $\widehat{x} = \chi(x) \in B$. Тада је $\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x) \neq \psi(x) = \widehat{x}(\psi)$, чиме смо показали да B раздваја тачке, па је по Стоун-Вајерштрасовој теореми $B = C(\widehat{A})$.

Остало је да решимо неунитални случај. Но тада знамо да постоји изоморфизам $\widetilde{\chi} : \widetilde{A} \to C\left(\widehat{\widetilde{A}}\right)$ по претходном. Тада за све $x \in A \subseteq \widetilde{A}$ важи $\widehat{x}(\widetilde{0}) = \widetilde{0}(x) = 0$, где је $\widetilde{0}$ нула функција. То значи да је A изоморфан са

$$\{f : \widehat{\widetilde{A}} \to \mathbb{C} \mid f \text{ непрекидна и } f(\widetilde{0}) = 0\} \subseteq C(\widehat{\widetilde{A}}).$$

Но, претходно је изоморфно са $C_0(\widehat{A})$, што је и био циљ. □

1.1.6 Непрекидни функционални рачун

Сада ћемо извести функционални рачун, што ће бити један од главних алата у наставку. Уједно, долажење до овог места је и био разлог зашто смо (наравно, поред њене самосталне важности и чињенице да смо описали комутативне C^*-алгебре) показивали Гељфанд-Најмаркову теорему. Шта можемо очекивати код некомутативних C^*-алгебри?

За ту сврху биће нам потребна дефиниција одређених појмова као и једно тврђење.

Дефиниција 1.1.53. *Ако је A унитална C^*-алгебра и $x \in A$, тада са $C^*(x,1)$ означавамо најмању C^*-подалгебру која садржи x и 1.*

Једноставно се види да је

$$C^*(x,1) = \overline{\{p(x,x^*) \mid p \text{ је некомутативни полином по променљивим } x \text{ и } x^*\}}.$$

Када је x нормалан елемент, ситуација је још једноставнија. Наиме, важи следећи став (за доказ видети Теорему 1.4.2 из [26]).

Став 1.1.54. *Нека је A унитална C^*-алгебра и $x \in A$ нормалан елемент. Тада:*

(а) $C^*(x,1)$ је комутативна.

(б) Нека $y \in C^*(x,1)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Ако је $\lambda - y$ инвертибилан у A, тада његов инверз припада $C^*(x,1)$. Одатле је $\sigma_A(y) = \sigma_{C^*(x,1)}(y)$.

(в) Пресликавање $\widehat{x} : \widehat{C^*(x,1)} \to \sigma(x)$ дефинисано са $\varphi \mapsto \varphi(x)$ је хомеоморфизам тополошких простора. Ако A нема јединицу онда је $\widehat{C^*(x)}$ хомеоморфно са $\sigma(x) \setminus \{0\}$.

Дакле $C^*(x,1)$ је комутативна ако је x нормалан. Стога, можемо применити Гељфанд-Најмаркову теорему бар локално, тј. на подалгебри.

Теорема 1.1.55. *(Непрекидни функционални рачун)*

Нека је A унитална C^*-алгебра и $x \in A$ нормалан. Тада постоји изометрички *-изоморфизам $\Phi : C(\sigma(x)) \to C^*(x,1) \subseteq A$ такав да је $\Phi(\mathrm{id}) = x$ и $\Phi(1) = 1$, где id означава функцију $\mathrm{id}(x) = x$, док је 1 функција $1(x) = 1$. Писаћемо $f(x) := \Phi(f)$.

Доказ. По претходној леми, део (в), $C(\sigma(x))$ је изоморфно са $C\left(\widehat{C^*(x,1)}\right)$ путем пресликавања $f \mapsto f \circ \widehat{x}$. По Гељфанд-Најмарковој теореми и претходној леми, $C\left(\widehat{C^*(x,1)}\right)$ је изоморфан са $C^*(x,1)$ путем пресликавања $\widehat{x} \mapsto x$. □

Напомена 1.1.56. *Дакле, овде смо видели да можемо применити непрекидне функције на нормалне елементе C^*-алгебри. Одатле и назив непрекидни функционални рачун. Истакнимо да ће за касније дефинисане фон Нојманове алгебре постојати Борелов (мерљиви) функционални рачун (додуше, за њим нећемо имати потребе па га самим тим и нећемо наводити).*

Став 1.1.57. *Нека је A произвољна C^*-алгебра, елемент $x \in A$ нормалан и $f, g \in C(\sigma(x))$. Тада:*

- *(а) $(f+g)(x) = f(x)+g(x), (fg)(x) = f(x)g(x), \bar{f}(x) = f(x)^*$. Самим тим, ако је f реалновредносна, онда је $f(x)$ самоадјунгован;*
- *(б) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$;*
- *(в) За произвољно $h \in C(f(\sigma(x))$ важи $(h \circ f)(x) = h(f(x))$;*
- *(г) Ако је $x \in A$ самоадјунгован, онда је $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$ и постоји декомпозиција $x = x_+ - x_-$ тако да је $x_+x_- = x_-x_+ = 0$ и $\sigma(x_+), \sigma(x_-) \subseteq [0, \infty)$, при чему су норме $\|x_+\|, \|x_-\| \leq \|x\|$;*
- *(д) Ако су A и B додатно униталне и $\varphi : A \to B$ унитални *-хомоморфизам, онда је $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$.*

Доказ. Доказаћемо само делове (г) и (д). Што се тиче (г), приметимо да је $\Phi(\overline{\mathrm{id}}) = \Phi(\mathrm{id})^* = x^* = x = \Phi(\mathrm{id})$, одакле је $\overline{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$, а одатле преласком на C^*-алгебру видимо да $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$. Даље, дефинишимо функције

$$h_+(t) = \begin{cases} t, & t \geqslant 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad h_-(t) = \begin{cases} -t, & t \leqslant 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тада су функције h_+ и h_- непрекидне на $\sigma(x)$ па можемо дефинисати $x_+ = h_+(x)$ и $x_- = h_-(x)$ по функционалном рачуну. Даље је $\mathrm{id} = h_+ - h_-$ па сада помоћу Φ уз коришћење (а) и (б) добијамо тражено. Део под (д) директно важи за полиноме. По Вајерштрасовој теореми, нађимо низ полинома p_n који апроксимира f. Коначно, $p_n(x) = \Phi(p_n) \to \Phi(f) = f(x)$ па је преостало само да применимо φ на идентитет који знамо да важи за p_n. □

1.1.7 Позитивни елементи и поредак

Позитивни елементи ће нам представљати важан фактор у истраживању. Њихова својства су веома интересантна - и само име не долази случајно, а већина њих потиче из функционалног рачуна.

Дефиниција 1.1.58. *Нека је дата C^*-алгебра A. За елемент $a \in A$ кажемо да је позитиван (у ознаци $a \geqslant 0$) ако је самоадјунгован ($a \in A_{sa}$) и $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$. Скуп свих позитивних елемената ћемо означавати са A_+.*

Подсетимо се да је за све $a = a^*$, $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ из Става 1.1.57. У Ставу 1.1.57 смо такође показали да сваки самоадјунгован елемент има декомпозицију облика $a = a_+ - a_-$, где су a_+ и a_- позитивни. Дакле, ако је a позитиван, онда је $a = a_+$.

Наредна теорема повезује позитивност и норму, а само је последица функционалног рачуна.

Лема 1.1.59. *Нека је A унитална C^*-алгебра и $a \in A$ самоадјунгован елемент. Нека је $\lambda \geqslant \|a\|$. Тада је $a \geqslant 0$ ако и само ако $\|\lambda 1 - a\| \leqslant \lambda$.*

Доказ. Нека је $a = a^*$ и $\lambda \geqslant \|a\|$. Из Става 1.1.19 знамо да је $\sigma(a) \subseteq [-\lambda, \lambda]$. Посматрајмо сада $C(\sigma(a))$ и његове елементе id и 1 ($\mathrm{id}(x) = x$, тј. $1(x) = 1$ за све $x \in C(\sigma(a))$). Тада је $\|\lambda 1 - \mathrm{id}\|_\infty = \sup\{|\lambda - \mu| \mid \mu \in \sigma(a)\} = \sup\{\lambda - \mu \mid \mu \in \sigma(a)\}$, јер $\lambda - \mu \geqslant 0$. Но, применом функционалног рачуна је $\|\lambda 1 - \mathrm{id}\|_\infty = \|\lambda 1 - a\|$, тј. $\|\lambda 1 - a\| \leqslant \lambda$ ако и само ако је $\lambda - \mu \leqslant \lambda$ за све $\mu \in \sigma(a)$, а то је еквивалентно са $\sigma(a) \in [0, \lambda]$, тј. $a \geqslant 0$.

□

Једноставна последица претходног тврђења је да је збир два позитивна елемента такође позитиван (Лема 2.2.3 из [59]).

Последица 1.1.60. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и $a, b \in A$ позитивни. Тада је $a + b \geqslant 0$.*

Даље ћемо помоћу функционалног рачуна показати да сваки позитиван елемент има јединствен квадратни корен. Наиме, важи следећи став:

Став 1.1.61. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и $a \in A$ позитиван елемент. Тада постоји јединствен позитиван елемент $b \in A$ такав да је $b^2 = a$. Такав b ћемо убудуће означавати са $\sqrt{a}$.*

Доказ. Докажимо прво постојање. Функција $\sqrt{x}$ је непрекидна на $[0, \infty)$, па је дозвољено и довољно да дефинишемо $b = \sqrt{a}$, а онда је $b = b^*$, $\sigma(b) = \sqrt{\sigma(x)} \subseteq [0, \infty)$ и $b^2 = a$ све по Ставу 1.1.57.

Јединственост таквог елемента такође следи из примене функционалног рачуна. □

Може се показати да су спектри елемената ab и ba исти до на скалар 0 (Став 2.1 из [73]).

Лема 1.1.62. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и $a, b \in A$. Тада важи:*

$$\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}.$$

Дефиниција 1.1.63. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и нека $a \in A$. Реални део (у ознаци $\mathrm{Re}(a)$) и имагинарни део (у ознаци $\mathrm{Im}\,(a)$) елемента a се дефинишу као:*

$$\mathrm{Re}(a) = \frac{a + a^*}{2} \quad , \quad \mathrm{Im}\,(a) = \frac{a - a^*}{2i}.$$

Одавде постоји декомпозиција $a = \mathrm{Re}(a) + i\mathrm{Im}\,(a)$.

Напомена 1.1.64. *Приметимо да су $\mathrm{Re}(a)$ и $\mathrm{Im}\,(a)$ самоадјунговани.*

Наредна лема је очекивана: знак минус окреће поредак, но биће корисна у кључној карактеризицији позитивних елемената.

Лема 1.1.65. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и $a \in A$. Ако је $-a^*a \geqslant 0$, онда је $a = 0$.*

Доказ. Можемо претпоставити да је A унитална, иначе посматрамо елемент $a \in \widetilde{A}$. Запишимо $a = a_1 + ia_2$ као у претходно описаној докомпозицији. Тада је $a^* = a_1 - ia_2$ па је

$$a^*a + aa^* = \left(a_1^2 + ia_1a_2 - ia_2a_1 + a_2^2\right) + \left(a_1^2 + ia_2a_1 - ia_1a_2 + a_2^2\right) = 2a_1^2 + 2a_2^2.$$

По Ставу 1.1.57 елемент a^2 је позитиван, а по Последици 1.1.60 закључујемо да је a^*a+aa^* позитиван елемент, тј. да је $\sigma(a^*a+aa^*) \subseteq [0, +\infty)$. Са друге стране, по претпоставци је $\sigma(a^*a) \subseteq (-\infty, 0]$, а по Леми 1.1.62 је онда и $\sigma(aa^*) \subseteq (-\infty, 0]$. Опет по Последици 1.1.60 је $\sigma(a^*a+aa^*) \subseteq (-\infty, 0]$, па је по претходно доказаном $\sigma\left(a^*a + aa^*\right) = \{0\}$, одакле је на основу особине спектра елемента $a^*a + aa^* = 0$. Но, онда је $a_1^2 = -a_2^2$, па су $\sigma(a_1) = \sigma(a_2) = 0$, тј. $a_1 = a_2 = 0$, а одатле је коначно $a = 0$. □

Сада смо у прилици да покажемо основну карактеризацију позитивних елемената - сваки је облика x^*x за неко $x \in A$.

Теорема 1.1.66. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и $a \in A$. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(1) $a \geqslant 0$.

(2) Постоји самоадјунгован елемент $b \in A$ такав да је $b^2 = a$.

(3) Постоји елемент $c \in A$ такав да је $c^*c = a$.

Доказ. На основу Става 1.1.61 закључујемо да (1) повлачи (2) - само дефинишемо $b = \sqrt{a}$.

Ако означимо $c = b$, из чињенице да је b самоадјунгован, добијамо да (2) повлачи (3).

Коначно, претпоставимо да је $a = c^*c$. Распишимо a као $a = a_+ - a_-$, при чему знамо да су $a_+, a_- \geqslant 0$ и $a_+a_- = a_-a_+ = 0$ по Ставу 1.1.57. Циљ је да докажемо да је $a_- = 0$. Тада је

$$-(ca_-)^*(ca_-) = -a_-c^*ca_- = -a_-aa_- = -a_-(a_+ - a_-)a_- = (a_-)^3 \geqslant 0,$$

по функционалном рачуну јер је $a_- \geqslant 0$. Но, онда је по Леми 1.1.65 елемент $ca_- = 0$, али такође из претходног низа и $(a_-)^3 = 0$, па је опет по функционалном рачуну $a_- = 0$, тј. $a = a_+$ и он је позитиван. ☐

Напомена 1.1.67. *Приметимо да је A_+ позитиван конус, тј. да ако је $\lambda \geqslant 0$ скалар и $a, b \in A_+$ тада $\lambda a, a + b \in A_+$. Такође, $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$.*

Сада можемо увести поредак на C^*-алгебри.

Дефиниција 1.1.68. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и $a, b \in A$ самоадјунговани елементи. Тада можемо увести релацију $a \leqslant b$, ако је $b - a \geqslant 0$.*

Релација $\leqslant$ је релација парцијалног поретка.

Наредни став показује неке својства која чувају поредак.

Став 1.1.69. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и $a, b \in A$ самоадјунговани елементи.*

(а) Ако је $a \leqslant b$, тада је $c^*ac \leqslant c^*bc$ за све $c \in A$.

(б) Ако је $a \geqslant 0$, онда је $\|a\| = \inf\{\lambda \geqslant 0 \mid \lambda 1 \geqslant a\}$. Посебно, ако је A унитална, $a \leqslant \|a\|1$.

(в) Ако је $0 \leqslant a \leqslant b$, онда је $\|a\| \leqslant \|b\|$.

(г) Ако је A унитална, $0 \leqslant a \leqslant b$ и елементи a и b инвертибилни, онда је $0 \leqslant b^{-1} \leqslant a^{-1}$.

Доказ. (а) Знамо да је $b-a=x^*x$ за неко $x \in A$, па је $c^*bc-c^*ac=c^*(b-a)c=c^*x^*xc=(xc)^*(xc)\geqslant 0$, по Теореми 1.1.66.

(б) Следи директно из Леме 1.1.59.

(в) Из (б) је $0\leqslant a\leqslant b\leqslant \|b\|1$, па је $\|b\|1\geqslant a$, а како је $\|a\|$ инфимум таквих, то је $\|a\|\leqslant\|b\|$.

(г) Може се једноставно показати да ако је $x\geqslant 0$, онда је и $x^{-1}\geqslant 0$, па постоји $\sqrt{x^{-1}}$. Из (а) је $\sqrt{b^{-1}}a\sqrt{b^{-1}}\leqslant\sqrt{b^{-1}}b\sqrt{b^{-1}}=1$, па је из (в)

$$\|\sqrt{a}\sqrt{b^{-1}}\|^2=\|(\sqrt{a}\sqrt{b^{-1}})^*(\sqrt{a}\sqrt{b^{-1}})\|=\|\sqrt{b^{-1}}a\sqrt{b^{-1}}\|\leqslant 1,$$

тј. $\|\sqrt{a}\sqrt{b^{-1}}\|\leqslant 1$. Тада је $\|\sqrt{a}b^{-1}\sqrt{a}\|\leqslant 1$, а како је тај елемент и позитиван, то је $\sqrt{a}b^{-1}\sqrt{a}\leqslant 1$. Тада је

$$b^{-1}=\sqrt{a^{-1}}(\sqrt{a}b^{-1}\sqrt{a})\sqrt{a^{-1}}\leqslant\sqrt{a^{-1}}1\sqrt{a^{-1}}=a^{-1},$$

што је и требало доказати.

□

Напомена 1.1.70. *Може се показати (за доказ видети Теорему 3.1.12 [72]) и да ако је* $0\leqslant a\leqslant b$ *и* $\alpha\in[0,1]$, *онда је* $0\leqslant a^\alpha\leqslant b^\alpha$. *Посебно, тада важи и* $0\leqslant\sqrt{a}\leqslant\sqrt{b}$.

Напомена 1.1.71. *Из* $0\leqslant a\leqslant b$ *не следи да је* $a^2\leqslant b^2$. *Можемо узети* $A=M_2(\mathbb{C})$ *и елементе* $a=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$ *и* $b=\begin{bmatrix}3&0\\0&6\end{bmatrix}$.

Штавише, ако за неко $\alpha>1$ *и све* $a,b\in A$ *важи да* $0\leqslant a\leqslant b$ *повлачи* $a^\alpha\leqslant b^\alpha$, *може се показати да је* A *нужно комутативна (видети Став 1.3.9 из [62]).*

1.1.8 Апроксимативна јединица

Видели смо како да неуниталној C^*-алгебри додамо јединицу, но то некад може покварити особине које посматрамо. Са друге стране, испоставиће се да свака C^*-алгебра има такозвану апроксимативну јединицу. Овај објекат ће бити од изузетне важности за наше даље истраживање. Осврнимо се на два основна примера неуниталних C^*-алгебри: $C_0(\mathbb{R})$ и $K(H)$.

Пример 1.1.72. *Посматрајмо простор $C_0(\mathbb{R})$. Тада ако уочимо функцију e_n која је 1 на $[-n, n]$, 0 на $(-\infty, -n-1] \cup [n+1, +\infty)$, а линеарна на остатку, онда је $e_n \in C_0(\mathbb{R})$ и $e_n f \to f$, кад $n \to \infty$, у норми за све $f \in C_0(\mathbb{R})$. Тако да је низ e_n замена за јединицу.*

Пример 1.1.73. *Слично, код $K(H)$, алгебре компактних оператора на Хилбертовом простору H са ортонормираном базом $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (која није унитална) уочимо низ p_n пројекција на потпростор разапет са првих n базних вектора. Тада $p_n \in K(H)$ и p_n не конвергира у $K(H)$, али за све $x \in K(H)$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} p_n x = \lim\limits_{n\to\infty} x p_n = x$, при чему је једнакост у норми.*

Сада можемо дефинисати апроксимативну јединицу.

Дефиниција 1.1.74. *Нека је A произвољна C^*-алгебра. Тада се мрежа $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ назива апроксимативном јединицом за A ако важе следећи услови:*

(1) $e_\lambda \geqslant 0$ за све $\lambda \in \Lambda$;

(2) $\|e_\lambda\| \leqslant 1$ за све $\lambda \in \Lambda$;

(3) ако је $\lambda \leqslant \mu$, онда је $e_\lambda \leqslant e_\mu$;

(4) за све $a \in A$ је $\lim\limits_\lambda e_\lambda a = a = \lim\limits_\lambda a e_\lambda$.

Пре кључне теореме, докажимо најпре следећу лему, где ћемо видети да је A^1_+ усмерен скуп, а управо ће нам то бити апроксимативна јединица.

Лема 1.1.75. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и нека је $A^1_+ = \{a \in A \mid a \geqslant 0, \|a\| < 1\}$. Тада за произвољне $a, b \in A^1_+$ постоји $c \in A^1_+$ такав да је $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$.*

Доказ. Ово је директна примена функционалног рачуна. Посматраћемо две функције $f(t) = t(1-t)^{-1}$ за $t \in [0, 1)$ и $g(t) = t(1+t)^{-1} = 1-(1+t)^{-1}$, за $t \geqslant 0$. Обе су добро дефинисане при чему је $g(f(t)) = t$ за све $t \in [0, 1)$. Узмимо $a, b \in A^1_+$. Нека је $y = f(a) + f(b)$ и $c = g(y)$. Како је $f(0) = g(0) = 0$ (A може бити и неунитална (заправо нас само тај случај интересује), а тада морамо пазити да 0 упадне у спектар), то по функционалном рачуну $y, c \in A$, показаћемо да $c \in A^1_+$. Додатно, $g \geqslant 0$ и $\|g\|_{\sigma(y)} < 1$, па $c \in A^1_+$. Доказаћемо да $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$. Нека је $x = f(a)$. Тада је очигледно $x \leqslant y$ (y је збир два позитивна). Елементи $1_{\widetilde{A}} + x$ и $1_{\widetilde{A}} + y$ су инвертибилни у $\widetilde{A}$ и важи $1_{\widetilde{A}} + x \leqslant 1_{\widetilde{A}} + y$, па је по Ставу

1.1.69 $(1_{\widetilde{A}}+y)^{-1} \leqslant (1_{\widetilde{A}}+x)^{-1}$, а одатле $1_{\widetilde{A}}-(1_{\widetilde{A}}+x)^{-1} \leqslant 1_{\widetilde{A}}-(1_{\widetilde{A}}+y)^{-1}$. Но, онда је

$$a = g(f(a)) = 1_{\widetilde{A}} - (1_{\widetilde{A}}+x)^{-1} \leqslant 1_{\widetilde{A}} - (1_{\widetilde{A}}+y)^{-1} = g(y) = c,$$

а аналогно се показује и да је $b \leqslant c$. □

Теорема 1.1.76. *Свака C^*-алгебра A има апроксимативну јединицу.*

Доказ. Сада када знамо из претходне леме да је $\Lambda = A^1_+$ мрежа, за коју хоћемо да покажемо да је апроксимативна јединица, потребно је још да докажемо да је за све $x \in A$

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \|x - \lambda x\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|x - x\lambda\| = 0, \text{ за све } x \in A.$$

За $0 \leqslant a \leqslant b \in \Lambda$ и $x \in A$, из C^*-идентитета и оцена норме елемената из Λ имамо

$$\|x - bx\|^2 = \|x^*(1_{\widetilde{A}} - b)^2 x\| \leqslant \|x^*(1_{\widetilde{A}} - b)x\| \leqslant \|x^*(1_{\widetilde{A}} - a)x\|$$

и аналогно $\|x - xb\|^2 \leqslant \|x(1_{\widetilde{A}} - a)x^*\|$.

Из претходне леме знамо да ако је $x \geqslant 0$, онда је $g(x) \in \Lambda$, где је $g(t)$ идентично дефинисано као тамо. Нека је $a_n = g(nx) \in \Lambda$. Даље, дефинишимо $h_n(t) = t^2(1 - g(nt) = t^2(1+nt)^{-1} \leqslant \dfrac{t}{n}$. Онда је

$$\|x(1_{\widetilde{A}} - a_n)x\| = \|h_n(x)\| \leqslant \frac{\|x\|}{n}.$$

Самим тим, уз то да је Λ мрежа и уз претходно доказано да за $0 \leqslant a \leqslant b \in \Lambda$ и $\|x - bx\|^2 \leqslant \|x^*(1_{\widetilde{A}} - a)x\|$ добијамо

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \|x - \lambda x\|^2 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{a_n \leqslant \lambda \in \Lambda} \|x - \lambda x\|^2 \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x^*(1_{\widetilde{A}} - a)x\| = 0,$$

а наравно аналогно добијамо и да је $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} \|x - x\lambda\| = 0$ за све $x \geqslant 0$.

Преостало је да докажемо за произвољно $x \in A$. Но, довољно је искористити C^*-услов и већ показано за позитивне. Наиме (имајмо на уму да је $\lambda \geqslant 0$ и $1 - \lambda \geqslant 0$),

$$\|x - \lambda x\|^2 = \|(1-\lambda)x^*x(1-\lambda)\| \leqslant \|(1-\lambda)x^*x\| = \|x^*x - \lambda x^*x\|,$$

одакле, како је x^*x позитиван по претходном, коначно добијамо $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} \|x - \lambda x\| = 0$ за све $x \in A$, док друга једнакост аналогно важи. □

Напомена 1.1.77. *Ако је A сепарабилна, онда она поседује пребројиву апроксимативну јединицу, као у описаним примерима.*

1.1.9 Позитивни линеарни функционали

Дефиниција 1.1.78. *За линеарни функционал φ на C^*-алгебри A кажемо да је позитиван ако је $\varphi(a) \geqslant 0$ за сваки елемент $a \in A_+$. Додатно, уколико је $\|\varphi\| = 1$, функционал φ је стање. Ако је додатно $\varphi(ab) = \varphi(ba)$, за све $a, b \in A$, онда се φ назива траговито стање. Коначно, стање φ је верно ако из $\varphi(a^*a) = 0$ следи да је $a = 0$.*

Простор свих стања на C^*-алгебри A означаваћемо са $S(A)$.

Даћемо три основна примера.

Пример 1.1.79. *Нека је $A = C(X)$ комутативна C^*-алгебра. Тада је сваки карактер траговито стање, али није свако траговито стање те форме. Приметимо да ако је μ Борелова вероватносна мера на X, тада је пресликавање $\tau : A \to \mathbb{C}$ дато са*

$$\tau(f) = \int\limits_X f \, d\mu$$

траговито стање.

Пример 1.1.80. *Нека је $A = M_n(\mathbb{C})$ и $a \in A$ матрица $n \times n$. Тада је са*

$$\mathrm{tr}_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

дато једно верно траговито стање.

Пример 1.1.81. *Нека је H Хилбертов простор. За јединични вектор $\xi \in H$ дефинишимо функционал ω_ξ на $B(H)$ са $\omega_\xi(a) = \langle a\xi, \xi \rangle$. Тада је ω_ξ стање, али није траговито осим ако је $H = \mathbb{C}$. Ово стање зваћемо векторским стањем.*

Став 1.1.82. *(Коши-Шварцова неједнакост) Нека је φ позитиван линеаран функционал на C^*-алгебри A. Тада је $|\varphi(b^*a)|^2 \leqslant \varphi(b^*b)\varphi(a^*a)$ за све $a, b \in A$.*

Доказ. Ако је $\varphi(b^*a) = 0$, онда је тврђење тривијално. Даље, нека је $\varphi(b^*a) \neq 0$. Како је φ позитиван, то за све $\lambda \in \mathbb{C}$ важи да је $\varphi((\lambda b + a)^*(\lambda b + a)) \geqslant 0$. Нека је $\lambda = t\dfrac{|\varphi(b^*a)|}{\varphi(a^*b)}$, где је t реалан број. После сређивања добијамо

$$t^2\varphi(b^*b) + 2t|\varphi(b^*a)| + \varphi(a^*a) \geqslant 0.$$

Ако је $\varphi(b^*b) = 0$, онда је $\varphi(a^*a) \geqslant -2t|\varphi(b^*a)|$ за сваки реалан t, што је могуће само ако је $|\varphi(b^*a)| = 0$, што смо претпоставили да није. Ако је $\varphi(b^*b) \neq 0$, ставимо $t = -\dfrac{|\varphi(b^*a)|}{\varphi(b^*b)}$ и добијамо

$$\frac{|\varphi(b^*a)|^2}{\varphi(b^*b)} - 2\frac{|\varphi(b^*a)|^2}{\varphi(b^*b)} + \varphi(a^*a) \geqslant 0,$$

одакле множењем са $\varphi(b^*b)$ добијамо тражену неједнакост. □

Наредни став описује норму позитивног линеарног функционала преко апроксимативне јединице.

Став 1.1.83. *Нека је* A *произвољна* C^**-алгебра и* $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *њена апроксимативна јединица. Ако је* φ *позитиван линеаран функционал на* A*, тада је он ограничен и важи*

$$\|\varphi\| = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda).$$

Посебно, уколико је A *унитална, онда је* $\|\varphi\| = \varphi(1)$.

Доказ. Нека је $\overline{A_1} = \{a \in A \mid \|a\| \leqslant 1\}$ затворена јединична лопта у A и $\overline{A_1}_+ = \overline{A_1} \cap A_+$. Нека је $s = \sup\{\varphi(a) \mid a \in \overline{A_1}_+\}$.

Претпоставимо да је $s = +\infty$. Тада постоји низ $a_n \in \overline{A_1}_+$ такав да је $\varphi(a_n) \geqslant n$ за све $n \in \mathbb{N}$. Нека је $a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n^2}$. Тада је a позитиван јер је A_+ затворен за суме и лимесе. Такође, како је φ позитиван, он чува поредак па је

$$\varphi(a) \geqslant \varphi\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(a_n)}{n^2} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n},$$

што није могуће јер последњи израз тежи ка $+\infty$. Одатле је $s < +\infty$. По већ приказаном разлагању на реалан и имагинарни, односно позитивни и негативни део, знамо да је сваки $a \in \overline{A_1}$ облика $a = a_1 - a_2 + i(a_3 - a_4)$ за неке $a_i \in \overline{A_1}_+$, па на основу претходном закључујемо да је φ ограничен и да је $\|\varphi\| \leqslant 4s$.

Даље, $\lim\limits_\lambda \varphi(e_\lambda)$ постоји (и $\lim\limits_\lambda \varphi(e_\lambda) \leqslant \|\varphi\|$), јер $\lambda \leqslant \mu$ повлачи $e_\lambda \leqslant e_\mu$, а како φ чува поредак, то је $\varphi(e_\lambda) \leqslant \varphi(e_\mu)$. Остаје да докажемо супротну неједнакост. Но, за произвољан $a \in \overline{A_1}$, по Коши-Шварцовој неједнакости важи

$$|\varphi(a)|^2 = \lim_\lambda |\varphi(e_\lambda a)|^2 \leqslant \limsup_\lambda \varphi(e_\lambda^2)\varphi(a^*a),$$

при чему пишемо $\limsup\limits_\lambda$ у случају да лимес не постоји. Ипак, знамо да је $e_\lambda^2 \leqslant e_\lambda$, па је $\varphi(e_\lambda^2) \leqslant \varphi(e_\lambda)$, као и да је $|\varphi(a^*a)| \leqslant \|\varphi\|$, одакле закључујемо да је

$$|\varphi(a)|^2 \leqslant \lim_\lambda \varphi(e_\lambda)\|\varphi\|.$$

Проласком са sup по свим $a \in \overline{A_1}$, добијамо и тражену супротну неједнакост $\|\varphi\| \leqslant \lim\limits_\lambda \varphi(e_\lambda)$, чиме је доказ завршен. □

Као последица претходног става и Коши-Шварцове неједнакости може се показати следећа последица.

Последица 1.1.84. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и φ позитиван линеаран функционал на A. Тада је φ самоадјунгован, тј. $\varphi(a) = \overline{\varphi(a^*)}$, а важи и $|\varphi(a)|^2 \leqslant \|\varphi\|^2\varphi(a^*a)$ за све $a \in A$.*

Такође, може се показати и следећи став, који је на неки начин супротан смер од претходног, а чији је доказ потпуно технички (видети Став 4.1.7 из [72]) и изостављамо га.

Став 1.1.85. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и φ произвољан ограничен линеаран функционал на A такав да је $\|\varphi\| = \lim\limits_\lambda \varphi(e_\lambda)$ за неку апроксимативну јединицу $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Тада је φ позитиван.*

Последица 1.1.86. *Линеаран функционал φ норме 1 на униталној C^*-алгебри A је стање ако и само ако је $\varphi(1) = 1$.*

Следећи став је некомутативна верзија Хан-Банахове теореме.

Став 1.1.87. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и $a \in A$ нормалан, ненула елемент. Тада постоји стање $\varphi \in S(A)$ такво да $|\varphi(a)| = \|a\|$. Посебно, за произвољан $a \in A$ постоји $\varphi \in S(A)$ такав да је $\varphi(a^*a) = \|a\|^2$.*

Доказ. За нормалан елемент a по Ставу 1.1.54 знамо да је $B = C^*(a, 1) \subseteq \widetilde{A}$ комутативна C^*-алгебра и да је $B \cong C(\sigma(a))$, па конструишемо $h \in \widehat{B}$ такав да је $|h(a)| = \|\widehat{a}\|_\infty = \|a\|$. По Хан-Банаховој теореми, можемо проширити h до функционала τ на $\widetilde{A}$ норме један. Како је $\|\tau\| = 1 = \tau(1)$, по претходној последици је τ стање. Нека је φ рестрикција стања τ на A. Тада је φ и даље позитиван и линеаран, а $\|\varphi\| \leqslant 1$. Но, $|\varphi(a)| = \|a\|$, па је $\|\varphi\| = 1$, тј. $\varphi \in S(A)$.

Коначно, како је a^*a позитиван елемент, а φ позитиван функционал, то по C^* услову и претходном постоји $\varphi \in S(A)$ такав да је

$$\varphi(a^*a) = |\varphi(a^*a)| = \|a^*a\| = \|a\|^2,$$

чиме је доказ завршен. □

1.1.10 Репрезентације

Дефиниција 1.1.88. **-репрезентација, или краће репрезентација C^*-алгебре A је пар (H, π), при чему је H Хилбертов простор и $\pi : A \to B(H)$ *-хомоморфизам. Често ћемо изостављати простор и подразумевати да је репрезентација само пресликавање.*

Биће нам потребне следеће чињенице везане за репрезентације.

Дефиниција 1.1.89. *(1) Ако је π инјективна, кажемо да је (H, π) верна.*

(2) Ако постоји циклични вектор $\xi \in H$, тј. вектор такав да је $\overline{\pi(A)\xi} = H$, репрезентацију (H, π) зовемо цикличном.

(3) За две репрезентације $\pi : A \to B(H_i)$, $i = 1, 2$ кажемо да су унитарно еквивалентне, ако постоји унитаран $U : H_1 \to H_2$ такав да је $\pi_2(x) = U\pi_1(x)U^*$ за све $x \in A$.

(4) Репрезентација (H, π) је неразложива (или иредуцибилна) ако није унитарно еквивалентна збиру две нетривијалне репрезентације. Ово је еквивалентно чињеници да су једини инваријантни потпростори у H тривијалан $\{0\}$ и H.

(5) За Хилбертове просторе H_i, $i \in I$, дефинишемо Хилбертов простор $\bigoplus_{i \in I} H_i$ као скуп свих фамилија $(x_i)_{i \in I}$, где $x_i \in H_i$ за $i \in I$ и важи $\sum_{i \in I} \|x_i\|^2_{H_i} < +\infty$. Скаларни производ је дат са $\langle (x_i), (y_i) \rangle = \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle_{H_i}$. Коначно, за репрезентације $\pi_i : A \to B(H_i)$, репрезентацију

$$\bigoplus_{i \in I} \pi_i : A \to B\left(\bigoplus_{i \in I} H_i\right)$$

дефинишемо са

$$\left(\left(\bigoplus_{i \in I} \pi_i\right)(a)\right)((x_i)_{i \in I}) = ((\pi_i(a))(x_i))_{i \in I}, \quad \text{за } (x_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} H_i, a \in A.$$

За даље излагање биће нам од користи један затворени леви идеал у A - наиме, за C^*-алгебру A и позитиван линеаран функционал φ на A дефинишемо $N_\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a^*a) = 0\}$.

Следећа лема следи након рутинске провере особина скаларног производа.

Лема 1.1.90. *Пресликавање* $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varphi : A/N_\varphi \times A/N_\varphi \to \mathbb{C}$ *дефинисано са*

$$\langle a + N_\varphi, b + N_\varphi\rangle_\varphi = \varphi(b^*a)$$

је скаларни производ на A/N_φ.

Следећа конструкција је показана у раду Гељфанда и Најмарка, но значајно ју је унапредио и Сегал. По њиховим почетним словима добила је своје традиционално име.

Теорема 1.1.91. *(ГНС конструкција) Нека је* A *произвољна* C^**-алгебра и* $\varphi : A \to \mathbb{C}$ *стање на* A*. Тада постоји Хилбертов простор* H_φ*, репрезентација* $\pi_\varphi : A \to B(H_\varphi)$ *и цикличан вектор* $x_\varphi \in H_\varphi$ *такав да је* $\varphi(a) = \langle\pi_\varphi(a)x_\varphi, x_\varphi\rangle$ *за све* $a \in A$.

Доказ. За Хилбертов простор H_φ ћемо узети комплетирање простора A/N_φ у односу на норму индуковану скаларним производом $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varphi$. За репрезентацију ћемо узети $\pi_\varphi : A \to B(H_\varphi)$ лево множење на A/N_φ дефинисано са $\pi_\varphi(a)(b + N_\varphi) = ab + N_\varphi$ и продужимо до оператора на H_φ. Докажимо ограниченост оператора $\pi_\varphi(a)$. Нека је $b + N_\varphi \in A/N_\varphi$ елемент норме не веће од један, тј.

$$\langle b + N_\varphi, b + N_\varphi\rangle_\varphi = \varphi(b^*b) \leqslant 1.$$

Тада је

$$\|\pi_\varphi(a)(b + N_\varphi)\|^2 = \langle ab + N_\varphi, ab + N_\varphi\rangle = \varphi(b^*a^*ab).$$

На основу Става 1.1.69, добијамо да је $b^*a^*ab \leqslant b^*\|a\|^2b$, па из позитивности оператора φ добијамо $\varphi(b^*a^*ab) \leqslant \|a\|^2\varphi(b^*b) \leqslant \|a\|^2$, чиме смо доказали ограниченост $\pi_\varphi(a)$. Пресликавање $a \to \pi_\varphi(a)$ је линеарно и мултипликативно. Такође, оно чува *, јер за све $b, c \in A$ важи

$$\begin{aligned}\langle\pi_\varphi(a)(b + N_\varphi), c + N_\varphi\rangle_\varphi &= \langle ab + N_\varphi, c + N_\varphi\rangle_\varphi \\ &= \varphi(c^*ab) = \varphi((a^*c)^*b) = \langle b + N_\varphi, \pi_\varphi(a^*)(c + N_\varphi)\rangle_\varphi,\end{aligned}$$

па је $\pi_\varphi(a)^* = \pi_\varphi(a^*)$.

Нађимо сада циклични вектор. Нека је $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ апроксимативна јединица. Доказаћемо да је $x_\varphi = \lim\limits_\lambda (e_\lambda + N_\varphi) \in H_\varphi$ тражени вектор. Најпре, приметимо да је $(e_\lambda + N_\varphi)_{\lambda\in\Lambda}$ Кошијева мрежа у A/N_φ, па је x_φ добро дефинисан. Наиме, ако је $\lambda \leqslant \mu$ тада је $e_\lambda \leqslant e_\mu$ и додатно $0 \leqslant e_\mu - e_\lambda \leqslant e_\mu \leqslant 1$. Тада је по функционалном рачуну $(e_\mu - e_\lambda)^2 \leqslant e_\mu - e_\lambda$, па како φ чува поредак

$$\|(e_\mu + N_\varphi) - (e_\lambda + N_\varphi)\|^2 = \|(e_\mu - e_\lambda) + N_\varphi\|^2 = \varphi((e_\mu - e_\lambda)^2) \leqslant \varphi(e_\mu - e_\lambda),$$

одакле из Става 1.1.83 закључујемо тражено. Сада за произвољно $a \in A$ важи $\pi_\varphi(a)(e_\lambda + N_\varphi) = ae_\lambda + N_\varphi$, а како последњи конвергира ка $a + N_\varphi$, то је $\pi_\varphi(a)x_\varphi = a + N_\varphi$ за све $a \in A$. Одатле је $A/N_\varphi \subseteq \pi_\varphi(A)x_\varphi$, тј. x_φ је цикличан вектор.

Коначно, за све $a \in A$ важи

$$\langle \pi_\varphi(a)x_\varphi, x_\varphi\rangle_\varphi = \lim_\lambda \langle \pi_\varphi(a)(e_\lambda + N_\varphi), e_\lambda + N_\varphi\rangle_\varphi = \lim_\lambda \varphi(e_\lambda a e_\lambda) = \varphi(a),$$

што је и био циљ. □

Напомена 1.1.92. *Може се показати да је претходна репрезентација јединствена до на унитарну еквиваленцију.*

Напомена 1.1.93. *Приметимо да је норма цикличног вектора једнака један. Наиме, можемо претпоставити да је A унитална, јер φ можемо јединствено продужити на $\widetilde{A}$. Тада је*

$$\|x_\varphi\|^2 = \langle x_\varphi, x_\varphi\rangle_\varphi = \langle \pi_\varphi(1)x_\varphi, x_\varphi\rangle_\varphi = \varphi(1) = 1.$$

Коначно, на крају овог дела, доказаћемо другу Гељфанд-Најмаркову теорему.

Теорема 1.1.94. *(Друга Гељфанд-Најмаркова теорема) Свака C^*-алгебра A поседује верну репрезентацију $\pi : A \to B(H)$ на неком Хилбертовом простору H. Дакле, A је изоморфна C^*-подалгебри C^*-алгебре $B(H)$.*

Доказ. Узмимо произвољан елемент $a \neq 0$. Тада је a^*a нормалан, па по Ставу 1.1.87 постоји стање $\varphi : A \to \mathbb{C}$ такво да је $\varphi(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2 \neq 0$. По ГНС конструкцији, налазимо Хилбертов простор H_φ и репрезентацију $\pi_\varphi : A \to B(H_\varphi)$ са цикличним вектором $x_\varphi \in H_\varphi$ тако да је

$$\|\pi_\varphi(a)x_\varphi\|^2 = \langle \pi_\varphi(a^*a)x_\varphi, x_\varphi\rangle = \varphi(a^*a) \neq 0.$$

Самим тим је $\pi_\varphi(a) \neq 0$.

Сада прођемо по свим стањима и декомпонујемо простор $H = \bigoplus_{\varphi \in S(A)} H_\varphi$, односно дефинишемо репрезентацију $\pi = \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi$. На основу претходног, закључујемо да је $\pi(a) \neq 0$ ако је $a \neq 0$, па је π верна. Самим тим, како је пресликавање инјективно, то је $A \cong \pi(A) \subseteq B(H)$. $\square$

Дефиниција 1.1.95. *Нека је A произвољна C^*-алгебра. Тада*

$$\left(\bigoplus_{\varphi \in S(A)} H_\varphi, \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi \right)$$

зовемо универзалном репрезентацијом.

Напомена 1.1.96. *Хилбертов простор H може бити поприлично гломазан и са те стране ова теорема може бити неупотребљива. Са друге стране, помоћу ње дајемо дефиницију конкретне C^*-алгебре (у односу на ону апстрактну са почетка главе). Такође, њом дајемо посебан значај C^*-алгебри $B(H)$.*

1.1.11 Чиста стања

Најпре ћемо увести крајње тачке, које су нам неопходне за дефиницију, односно карактеризацију чистих стања.

Дефиниција 1.1.97. *Нека је дат векторски простор V и конвексан скуп $S \subseteq V$. Тачка $z \in S$ назива се крајња ако из $z = (1-\lambda)x + \lambda y$, за неке $x, y \in S$ и $\lambda \in (0,1)$, следи $z = x = y$.*

Пример 1.1.98. *Ако је векторски простор $V = \mathbb{R}^2$ и конвексни скупови $S_1 = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$ и $S_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, онда су крајње тачке у првом случају $\{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$, док је у другом то цела кружница $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.*

Конкретно, за S ћемо узети скуп стања као подскуп јединичне лопте у A^*. Наиме, важи следеће.

Лема 1.1.99. *Нека је A произвољна C^*-алгебра. Тада је скуп свих стања $S(A)$ конвексан подскуп јединичне лопте у A^*.*

Доказ. Узмимо произвољна стања $f_1, f_2 \in S(A)$. Тада је са $g = (1-\lambda)f_1 + \lambda f_2$ за $\lambda \in [0,1]$ очигледно дефинисан позитиван линеаран функционал норме не веће од 1. Узмимо произвољну апроксимативну јединицу $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ у A. Тада је по Ставу 1.1.83 $\lim\limits_\lambda f_i(e_\lambda) = 1$ за $i \in 1,2$, па је

$$\lim_\lambda g(e_\lambda) = (1-\lambda)\lim_\lambda f_1(e_\lambda) + \lambda \lim_\lambda f_2(e_\lambda) = 1.$$

Одатле је $\|g\| = 1$, чиме смо показали да је g стање, тј. да је $S(A)$ конвексан скуп. □

Дефиниција 1.1.100. *Нека је A произвољна C^*-алгебра. Крајње тачке скупа $S(A)$ називаћемо чистим стањима. Простор свих чистих стања на A означаваћемо са $PS(A)$.*

Колико има крајњих тачака у простору функционала на Банаховом простору? Следећа теорема класичне анализе говори да је скуп крајњих тачака непразан, штавише да их има довољно да генеришу цео скуп.

Теорема 1.1.101. *(Крејн-Милманова теорема) Нека је X Банахов простор. Тада сваки непразан слабо*-компактан, конвексан скуп $C \subseteq X^*$ има крајњу тачку. Додатно, C је затворење конвексног омотача скупа својих крајњих тачака.*

Сада можемо показати појачану верзију Става 1.1.87, тј. да постоји чисто стање, а не само стање као што је тамо показано. Ова теорема је једна од кључних које ћемо примењивати.

Теорема 1.1.102. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и $a \in A$ нормалан ненула елемент. Тада постоји чисто стање $\varphi \in PS(A)$ такво да је $|\varphi(a)| = \|a\|$.*

Доказ. Посматрајмо скуп $S = \{f \in S(A) \mid |f(a)| = \|a\|\}$. Тада је он непразан по Ставу 1.1.87. Такође, он је слабо*-затворен у јединичној лопти скупа A^*, која је по Банах-Алаоглуовој теореми слабо*-компактна, па је и S слабо*-компактан. Коначно, S је конвексан по 1.1.99, па по Крејн-Милмановој теореми постоји крајња тачка скупа S, назовимо је са ψ. Доказаћемо да је ψ чисто стање.

Представимо $\psi = (1-\lambda)\psi_1 + \lambda\psi_2$ за неке $\psi_1, \psi_2 \in S(A)$ и $\lambda \in (0,1)$. Тада су ψ_1 и ψ_2 норме 1, па свакако важи $|\psi_i(a)| \leqslant \|a\|$ за $i = 1,2$, па добијамо

$$\|a\| = |\psi(a)| = |(1-\lambda)\psi_1(a) + \lambda\psi_2(a)| \leqslant (1-\lambda)\|a\| + \lambda\|a\| = \|a\|,$$

одакле закључујемо да је $|\psi_i(a)| = \|a\|$ за $i = 1, 2$, тј. да $\psi_1, \psi_2 \in S$, а како је ψ крајња тачка скупа S, то је $\psi = \psi_1 = \psi_2$, тј. $\psi \in PS(A)$. □

На крају поменимо још једну карактеризацију чистих стања. За детаље погледати Став 3.6.5 из [26].

Став 1.1.103. *За свако стање φ на C^*-алгебри A, следећа тврђења су еквивалентна:*

(1) φ је чисто;

(2) Ако је $\psi \leqslant \varphi$ позитиван функционал, тада је ψ скаларни умножак φ;

(3) ГНС репрезентација π_φ је иредуцибилна;

(4) Важи $\ker\varphi = N_\varphi + N_\varphi^*$.

1.1.12 Коначно димензионалне C^*-алгебри

У овом потпоглављу циљ нам је да опишемо све коначно димензионалне (у векторском смислу) C^*-алгебре.

Најпре, за две C^*-алгебре A и B дефинишемо *директан збир* $A \oplus B$ као C^*-алгебру свих уређених парова $(a, b) \in A \times B$ на коме је норма дата са

$$\|(a, b)\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}.$$

Лема 1.1.104. *Свака коначно димензионална C^*-алгебра A је унитална.*

Доказ. Нека је $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ апроксимативна јединица за A. Како је A коначно димензионална, то је скуп $K = \{x \in A \mid \|x\| \leqslant 1\}$ компактан, па постоји конвергентна подмрежа мреже $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Тражени лимес је јединица C^*-алгебре A. □

Лема 1.1.105. *Нека је A коначно димензионална C^*-алгебра. За сваки идеал $I \lhd A$ постоји централна пројекција $p \in A$ (дакле, $ap = pa$ за све $a \in A$) таква да је $I = Ap$.*

Доказ. Како је A, коначно димензионална, то је I затворен идеал, па је I коначно димензионална C^*-алгебра. По Леми 1.1.104, постоји јединица $p \in I$, тј. p је пројекција и $pb = bp = b$ за све $b \in A$. Одавде је $I \subseteq Ap$. Са друге стране, из чињенице да је I идеал у A, следи $Ap \subseteq I$.

Коначно, докажимо да је p централна пројекција у A. Узмимо произвољан $a \in A$. Тада $ap \in I$ јер је I идеал у A. Како је p јединица у I, то је $ap = pap$. Коначно, одатле је

$$pa = (a^* p)^* = (pa^* p)^* = pap = ap,$$

што је и требало доказати. □

Лема 1.1.106. *Нека је A коначно димензионална C^*-алгебра. Тада постоји природан број $k \in \mathbb{N}$, као и централне пројекције $p_1, \ldots, p_k \in A$ такве да је $p_i p_j = 0$ за $i \neq j$, при чему је $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ и $A = \sum_{i=1}^{k} Ap_i$, где су све Ap_i просте.*

Доказ. Нека је $Z(A)$ центар C^*-алгебре A, тј.

$$Z(A) = \{a \in A \mid ab = ba \text{ за све } b \in A\}.$$

Како је $Z(A)$ комутативна C^*-алгебра (а и коначно димензионална), то постоји коначан скуп $X = \{1, \ldots, k\}, k \in \mathbb{N}$ такав да је $Z(A) \cong C(X)$. Тада су $p'_i = \chi_{\{i\}} \in C(X)$ пројекције такве да је $p'_i p'_j = 0$ за све $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{k} p'_i = 1_{C(X)}$. Помоћу изоморфизма, можемо наћи централне пројекције $p_1, \ldots, p_k \in Z(A)$ за које је $p_i p_j = 0$ за све $i \neq j$. Такође, како $1 \in Z(A)$, то је $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ и $A = \sum_{i=1}^{k} Ap_i$.

Даље, приметимо да из минималности p_i важи

$$\mathbb{C}p_i \subseteq Z(Ap_i) \subseteq Z(A)p_i = \mathbb{C}p_i,$$

тј. $Z(Ap_i) = \mathbb{C}p_i$. Узмимо сада произвољан идеал I у Ap_i. По Леми 1.1.105, знамо да је $I = Ap_i p$, за некиу централну пројекцију $p \in Ap_i$. Но, како је центар тривијалан, једина ненула пројекција је p_i, па је $I = Ap_i$ одакле је Ap_i проста. □

Лема 1.1.107. *Нека је A проста коначно димензионална C^*-алгебра. Тада постоји $n \in \mathbb{N}$ такав да је $A \cong M_n(\mathbb{C})$.*

Доказ. Нека је $a \in A$ произвољан ненула елемент. Тада је $AaA = \left\{\sum_i x_i a y_i \mid x_i, y_i \in A\right\}$ идеал у A. Како је A проста, а $a \in AaA$, то је $AaA = A$. Одатле је за произвољне ненула $a, b \in A$, $aAb \neq \{0\}$. Нека је B максимална комутативна самоадјунгована подалгебра C^*-алгебре A. Како је B коначно димензионална, њен спектар Γ је коначан. Означимо $\Gamma = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Нека је даље, слично претходној леми, $e_i = \chi_{\{y_i\}}$ за све $1 \leqslant i \leqslant n$. Тада су пројекције e_i међусобно ортогоналне и важи $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i = 1$, па је B изоморфна са $\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n$. Тада сваки елемент из $e_iAe_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ комутира са произвољним $e_j, 1 \leqslant j \leqslant n$, а e_j генеришу читав B, то је e_iAe_i комутативна. Но, B је максимална па је e_iAe_i садржана у B. Претпоставимо да је је $\dim(e_iAe_i) > 1$, тада постоје ортогоналне пројекције $p_1, p_2 \in e_iAe_i$. Додатно, оба су ортогонална на све e_j, $2 \leqslant j \leqslant n$. Тада је C^*-алгебра генерисана са $p_1, p_2, e_2, \dots, e_n$ комутативна и веће димензије од B, што противречи максималности. Дакле, $\dim(e_iAe_i) = 1$. Из приказаног разлагања B и чињенице да $e_i \in e_iAe_i$, закључујемо да је $e_iAe_i = \mathbb{C}e_i$ за све $1 \leqslant i \leqslant n$. По уводном делу, знамо да је $e_iAe_j \neq \{0\}$. Узмимо ненула елемент $x = e_iae_j$. Тада је из $e_iAe_i = \mathbb{C}e_i$ и чињенице да су x^*x и xx^* позитивни

$$x^*x = e_jx^*xe_j = \lambda e_j \text{ и } xx^* = e_ixx^*e_i = \mu e_j,$$

за неке $\lambda, \mu > 0$. Но, из C^* услова

$$\lambda = \|x^*x\| = \|x\|^2 = \|xx^*\| = \mu,$$

па је $x^*x = \lambda e_j$ и $xx^* = \lambda e_i$. Дефинишимо $u = \lambda^{-\frac{1}{2}}x$. Тада је $u^*u = e_j$ и $uu^* = e_i$. На основу овога, формирамо елементе $u_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$ са $u_i^*u_i = e_1$ и $u_iu_i^* = e_i$. Коначно, нека је $u_{i,j} = u_iu_j^*, 1 \leqslant i, j \leqslant n$. Одатле је, једноставним рачуном

$$u_{i,j}^* = u_{j,i}, \ \sum_{i=1}^{n} u_{i,i} = 1 \text{ и } u_{i,j}u_{k,l} = \delta_{j,k}u_{i,l}.$$

Узмимо произвољно $x \in e_iAe_j$, тј. $x = e_iae_j$. Тада је

$$\begin{aligned} xu_{j,i} = e_iae_ju_ju_i^* = e_iau_ju_j^*u_ju_i^* = e_iau_{j,i} = e_iau_{j,i}u_{i,i} \\ = e_iau_{j,i}u_iu_i^* = e_iau_{j,i}e_i \in e_iAe_i. \end{aligned}$$

Одатле је $xu_{j,i} = \lambda e_i$ за неко $\lambda \in \mathbb{C}$. Сада је

$$x = xe_j = xu_{j,i}u_{i,j} = \lambda e_iu_{i,j} = \lambda u_{i,i}u_{i,j} = \lambda u_{i,j}.$$

За свако $x \in A$, дефинишемо $\lambda_{i,j}(x) \in \mathbb{C}$ са $e_ixe_j = \lambda_{i,j}(x)u_{i,j}$. Самим тим је

$$x = \sum_{i,j=1}^{n} e_ixe_j = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{i,j}(x)u_{i,j}.$$

На овај начин направили смо *-изоморфизам

$$x \in A \mapsto (\lambda_{i,j}(x)) \in M_n(\mathbb{C})$$

између A и $M_n(\mathbb{C})$, где је $n^2 = \dim A$. □

Коначно, долазимо до описа структуре произвољне коначно димензионалне C^*-алгебре који је дат у наредној теореми.

Теорема 1.1.108. *(Артин-Ведербурнова теорема) Нека је A коначно димензионална C^*-алгебра. Тада постоје $k \in \mathbb{N}$ и $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ такви да је*

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C}).$$

Доказ. Следи директно из Лема 1.1.104, 1.1.105, 1.1.106 и 1.1.107. □

Поред структуре директног збира, постоје и многе друге помоћу којих можемо правити нове C^*-алгебра. То су директни лимеси, тензорски производи, директни производи... На тај начин добијамо нове, опет врло значајне класе C^*-алгебри као што су нпр. AF и UHF алгебре. Више информација се може пронаћи у [26] у оквиру друге главе.

Теорија C^*-алгебри је описана у многим радовима, књигама и уџбеницима. Овде смо хтели да прикажемо онај део који је неопходан за њихово разумевање, а посебно за даље праћење материје. Препоручена литература која је овде коришћена састоји се од класичних књига [62] и [59], као и две новије књиге [26] и [72]. Ту су и књиге [23],[24], као и енциклопедија [20] и књиге по томовима [39], [40], [37], [38]. Треба напоменути и прегледни чланак [36] поводом 50 година постојања C^*-алгебри. Поред ових, ту су и књиге које се већим делом односе на теорију фон Нојманових алгебри (која следи у наредној секцији) као што је [66] и књига по томовима [73], [74], [75].

1.2 Фон Нојманове алгебре

1.2.1 Јака и слаба операторска топологија

Да бисмо изучавали фон Нојманове алгебре, биће нам потребне следеће две топологије на $B(H)$, где је H Хилбертов простор.

Дефиниција 1.2.1. *Нека је* $(x_\alpha) \subset B(H)$ *мрежа ограничених оператора и нека* $x \in B(H)$. *Кажемо да* (x_α) *конвергира јако ка* x *ако је*

$$\lim_\alpha \|(x_\alpha - x)\xi\| = 0, \text{ за све } \xi \in H.$$

Топологија индукована овом конвергенцијом назива се јака операторска топологија (у ознаци SOT).

Приметимо да ако H посматрамо као метрички простор са метриком индукованом из норме, јаку конвергенцију можемо видети као тачка по тачка.

Дефиниција 1.2.2. *Нека је* $(x_\alpha) \subset B(H)$ *мрежа ограничених оператора и нека* $x \in B(H)$. *Кажемо да* (x_α) *конвергира слабо ка* x *ако је*

$$\lim_\alpha \langle (x_\alpha - x)\xi, \eta\rangle = 0, \text{ за све } \xi, \eta \in H.$$

Топологија индукована овом конвергенцијом назива се слаба операторска топологија (у ознаци WOT).

Лако се може показати да јака конвергенција повлачи слабу, док обрнуто не мора бити тачно.

1.2.2 Теорема о бикомутанту

Дефиниција 1.2.3. *Нека је* H *Хилбертов простор и* $X \subseteq B(H)$. *Комутант скупа* X, *у ознаци* X' *је скуп дефинисан са*

$$X' = \{y \in B(H) \mid xy = yx, \text{ за све } x \in X\}.$$

Бикомутант скупа X *је скуп* $X'' = (X')'$.

Пример 1.2.4. *Нека је* H *Хилбертов простор и* $1 \in B(H)$ *јединица. Тада је* $(\mathbb{C}1)' = B(H)$. *Наиме, за произвољан* $z \in \mathbb{C}$ *и* $A \in B(H)$ *је* $(z1)A = A(z1)$, *одакле следи наведено.*

Пример 1.2.5. *Може се показати и обратно, да је* $B(H)' = \mathbb{C}1$.

Пример 1.2.6. *У специјалном случају када је* H *коначно димензионалан, тј. када је* $B(H) = M_n(\mathbb{C})$, *покажимо претходно, тј. да је* $M_n(\mathbb{C})' = \mathbb{C}1$. *Нека је* $E_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$ *матрица код које су сви елементи једнаки 0, осим на месту* (i,j) *где се налази 1. Тада је за произвољну матрицу* $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$E_{ii}AE_{jj} = A_{ij}E_{ij},$$

па ако $A \in M_n(\mathbb{C})'$, *онда је*

$$A_{ij}E_{ij} = E_{ii}AE_{jj} = E_{ii}E_{jj}A = \delta_{ij}E_{ij}A,$$

где је δ_{ij} *Кронекеров симбол. Одавде закључујемо да ако је* $i \neq j$, *онда је* $A_{ij} = 0$, *тј. матрица* A *је дијагонална. Са друге стране је*

$$\begin{aligned} A_{ii}E_{ii} = E_{ii}AE_{ii} = E_{ij}E_{ji}AE_{ii} = E_{ij}AE_{ji} \\ = E_{ij}E_{jj}AE_{jj}E_{ji} = A_{jj}E_{ij}E_{jj}E_{ji} = A_{jj}E_{ii}, \end{aligned}$$

што значи да се све вредности на дијагонали поклапају, па је $A = z1$ *за неко* $z \in \mathbb{C}$.

Идеја из овог примера се може искористити на операторе ранга један како би се показао резултат из претходног примера.

Пример 1.2.7. *Нека је* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ σ*-коначан простор са мером и посматрајмо* $M = L^\infty(X,\mu) \subset B(L^2(X,\mu))$ *где* $f \in L^\infty(X,\mu)$ *делује као множење тачка по тачка. Може се показати да је* $L^\infty(X,\mu)' = L^\infty(X,\mu)$. *Но, ми ћемо овде то урадити на специјалном случају када је* $X = \mathbb{N}$ *и мера бројачка, тј. на простору низова* $l^\infty(\mathbb{N}) \subset B(l^2(\mathbb{N}))$ *- на том примеру ће се јасно видети и претходно описано дејство.*

За $n \in \mathbb{N}$, *нека је* $e_n \in l^2(\mathbb{N})$ *дефинисана са* $e_n(k) = \delta_{nk}$. *Наравно,* $e_n \in l^\infty(\mathbb{N})$ *и на произвољан* $f \in l^2(\mathbb{N})$ *делује као*

$$(e_n f)(k) = e_n(k)f(k) = \delta_{nk}f(n) = (f(n)e_n)(k),$$

тј. $e_n f = f(n)e_n$. *Узмимо произвољан* $A \in l^\infty(\mathbb{N})'$ *и* $f \in l^2(\mathbb{N})$. *Тада је*

$$(A(f))(n) = e_n(n)(A(f))(n) = (e_n A(f))(n) = (A(e_n f))(n) = f(n)(A(e_n))(n).$$

Јасно је да ако означимо $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *као* $g(n) = (A(e_n))(n)$, *онда имамо* $A(f) = gf$, *па је једино остало да докажемо да* $g \in l^\infty(\mathbb{N})$. *Но, то следи из следећег низа неједнакости*

$$|g(n)| = |(A(e_n))(n)| \leqslant \|A(e_n)\|_2 \leqslant \|A\|\|e_n\|_2 \leqslant \|A\| < \infty.$$

Бикомутант је дефинисан потпуно алгебарски, но видећемо ускоро да из саме дефиниције следе тополошка својства. Претходно биће нам потребна наредна дефиниција и лема.

Дефиниција 1.2.8. *Нека је $K \subseteq H$ потпростор Хилбертовог простора H и $x \in B(H)$ произвољан. Кажемо да је K инваријантан за x уколико је $xK \subseteq K$. Даље, кажемо да је K редукујући за x уколико је он инваријантан и за x и за x^*. Коначно, ако је $M \subseteq B(H)$ произвољна *-подалгебра, кажемо да је K редукујући за M уколико је K редукујући за сваки $x \in M$, тј. уколико је $MK \subseteq K$.*

Лема 1.2.9. *Нека је $M \subseteq B(H)$ произвољна *-подалгебра. Нека је $K \subseteq H$ затворен потпростор и нека је p пројекција из H у K. Тада је K редукујући за M ако и само ако је $p \in M'$.*

Доказ. Нека је K редукујући за M и $x \in M$, $y \in K$. Тада по претпоставци $xy \in K$, па је

$$xpy = xy = pxy.$$

Ако је $z \in K^\perp$ произвољан, онда је $\langle xz, y\rangle = \langle z, x^*y\rangle = 0$, јер и $x^*y \in K$. Самим тим $xz \in K^\perp$, па је $xpz = 0 = pxz$. Овим смо доказали да је $xpa = pxa$ за све $a \in H$, па је самим тим $xp = px$, одакле закључујемо да $p \in M'$.

Са друге стране, претпоставимо да $p \in M'$. Нека $x \in M$ и $y \in K$. Узмимо произвољан $z \in K^\perp$. Тада је $pz = 0$. Одатле важи, уз претходно доказано

$$0 = \langle xy, pz\rangle = \langle pxy, z\rangle = \langle xpy, z\rangle = \langle xy, z\rangle,$$

па $xy \in (K^\perp)^\perp = K$. Тиме смо показали да је $MK \subseteq K$, тј. да је K редукујући за M. □

Сада смо у могућности да докажемо чувену фон Нојманову теорему из 1929. године.

Теорема 1.2.10. *(Теорема о бикомутанту) Нека је $M \subseteq B(H)$ унитална *-алгебра. Тада је*

$$\overline{M}^{SOT} = \overline{M}^{WOT} = M'',$$

при чему су прва два скупа затворења у јакој, односно слабој операторској топологији.

Доказ. Из чињенице да јака конвергенција повлачи слабу, добијамо да је $\overline{M}^{SOT} \subseteq \overline{M}^{WOT}$.

Сада узмимо $x \in \overline{M}^{WOT}$ и докажимо да $x \in M''$. Нека је $(x_\alpha) \subset M$ мрежа која слабо конвергира ка x. Узмимо сада произвољне $y \in M'$ и $\xi, \eta \in H$. Тада је

$$\langle xy\xi, \eta\rangle = \lim_\alpha \langle x_\alpha y\xi, \eta\rangle = \lim_\alpha \langle yx_\alpha \xi, \eta\rangle = \langle yx\xi, \eta\rangle,$$

одакле је $xy = yx$, тј. $x \in M''$.

Коначно, докажимо да ако $x \in M''$, онда $x \in \overline{M}^{SOT}$. Довољно је доказати да за све $n \in \mathbb{N}$ и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in H$ и произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $x_0 \in M$ такав да је $\|(x - x_0)\xi_j\| < \varepsilon$, за $1 \leqslant j \leqslant n$ (то су базни скупови SOT-топологије). Означимо $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in H^{\oplus n}$ и нека је S затворење потпростора

$$\{(x_0\xi_1, \ldots, x_0\xi_n) \mid x_0 \in M\} = \{(x_0 \otimes I_n)\xi \mid x_0 \in M\}.$$

Онда је очигледно скуп S редукујући за $M \otimes I_n$, где је I_n јединична матрица $n \times n$ (на даље ћемо користити тензорски запис како бисмо скратили запис, а не писали читаве матрице). Дефинишемо p као пројекцију са $H^{\oplus n}$ на S. По Леми 1.2.9 добијамо да $p \in (M \otimes I_n)'$. Но, једноставним рачуном можемо закључити да је $(M \otimes I_n)' = M' \otimes M_n(\mathbb{C})$. Слично, приметимо да $x \otimes I_n \in (M' \otimes M_n(\mathbb{C}))'$ (подсетимо се да $x \in M''$) одакле је $p(x \otimes I_n) = (x \otimes I_n)p$. Како $1 \in M$, то је $\xi = (1 \otimes I_n)\xi \in S$. Самим тим је $p(x \otimes I_n)\xi = (x \otimes I_n)p\xi = (x \otimes I_n)\xi$, па $x \otimes I_n \in S$. По дефиницији простора S, постоји $x_0 \in M$ тако да је

$$\|((x \otimes I_n - (x_0 \otimes I_n))\xi\| < \varepsilon,$$

тј.

$$\|((x - x_0)\xi_1, \ldots, (x - x_0)\xi_n)\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \|(x - x_0)\xi_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

одакле коначно закључујемо да је $\|(x - x_0)\xi_j\| < \varepsilon$ за све $1 \leqslant j \leqslant n$ што је и требало доказати. □

Напомена 1.2.11. *Поред ове две топологије, постоје још две топологије, σ-јака (или ултра јака) и σ-слаба (или ултра слаба) и такође ће њихова затворења бити једнака и једнака затворењима из претходне теореме.*

1.2.3 Фон Нојманове алгебре и основни примери

Дефиниција 1.2.12. *За униталну *-подалгебру $M \subseteq B(H)$ кажемо да је фон Нојманова ако је $M = M''$ (односно $M = \overline{M}^{SOT}$, тј. $M = \overline{M}^{WOT}$).*

Пример 1.2.13. *На основу доказа, односно констатација из Примера 1.2.4-1.2.7, закључујемо да су фон Нојманове алгебре: $B(H), \mathbb{C}, M_n(\mathbb{C}), L^\infty(X, \mu)$.*

Приметимо да ако је M фон Нојманова алгебра, онда је то и M', а и $M \cap M'$. Ова последња има велики значај.

Дефиниција 1.2.14. *За фон Нојманову алгебру $M \subseteq B(H)$, центар алгебре, у ознаци $\mathcal{Z}(M)$, се дефинише као $M \cap M'$. Два екстремна случаја су од посебног значаја: ако је $\mathcal{Z}(M) = \mathbb{C}1$ онда је M фактор, док ако је $\mathcal{Z}(M) = M$, онда M зовемо Абеловом.*

Пример 1.2.15. *Дакле, $B(H)$ је фактор, а $L^\infty(X, \mu)$ је Абелова. Интересантно је да је свака Абелова изоморфна са $L^\infty(X, \mu)$ за одговарајући мерљив простор $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.*

На крају истакнимо да су фон Нојманове алгебре настале пре C^*-алгебри (13 година раније). Свака фон Нојманова јесте C^*-алгебра док обратно не мора бити тачно (нпр. $C[0,1]$ није фон Нојманова, иако је унитална; наравно ниједна неунитална није фон Нојманова). Коначно, уведене су како би се теоријски засновала квантна механика.

1.2.4 Еквиваленција пројекција

Пројекције у фон Нојмановим алгебрама имају велики значај, по чему се оне и разликују од произвољних C^*-алгебри. Наиме, C^*-алгебра $C(0,1)$ нема нетривијалних пројекција, док их фон Нојманове имају прегршт. У овом делу користићемо следеће ознаке: $\mathcal{P}(M)$ ће нам означавати скуп свих пројекција на фон Нојмановој алгебри $M \subseteq B(H)$. За подскуп $S \subseteq H$, са $[S]$ ћемо означавати пројекцију на затворен омотач скупа S. Такође, за пројекције $(p_i)_{i \in I} \subset B(H)$ ћемо дефинисати инфимум, односно супремум са

$$\bigwedge_{i \in I} p_i = \left[\bigcap_{i \in I} p_i H\right] \quad \text{и} \quad \bigvee_{i \in I} p_i = \left[\bigcup_{i \in I} p_i H\right].$$

Лема 1.2.16. *Нека је $M \subseteq B(H)$ фон Нојманова алгебра. Приметимо да за пројекције $(p_i)_{i\in I}$ из M важе следећа својства:*

(1) $\bigwedge_{i\in I} p_i = 1 - \bigvee_{i\in I}(1-p_i)$;

(2) $\bigvee_{i\in I} p_i = 1 - \bigwedge_{i\in I}(1-p_i)$;

(3) За произвољан $j \in I$ *важи* $\bigwedge_{i\in I} p_i \leqslant p_j \leqslant \bigvee_{i\in I} p_i$;

(4) $\bigwedge_{i\in I} p_i$ *и* $\bigvee_{i\in I} p_i$ *се налазе у* M.

Доказ. Доказаћемо само (4), остало су једноставни закључци и калкулације. Но, и за (4) је довољно приметити да су $\overline{\operatorname{span}}\left(\bigcap_{i\in I} p_iH\right)$ и $\overline{\operatorname{span}}\left(\bigcup_{i\in I} p_iH\right)$ редукујући за M', па по Леми 1.2.9 закључујемо да $\bigwedge_{i\in I} p_i$ и $\bigvee_{i\in I} p_i$ припадају $M'' = M$. □

Да бисмо дефинисали еквиваленцију пројекција, од кључног значаја биће нам парцијалне изометрије. Подсетимо се да је елемент u неке C^*-алгебре парцијална изометрија ако је u^*u пројекција. Биће нам потребно следеће тврђење:

Лема 1.2.17. *Нека је $u \in A$ елемент C^*-алгебре. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(1) u је парцијална изометрија;

(2) $u = uu^*u$;

(3) $u^* = u^*uu^*$;

(4) u^* је парцијална изометрија.

Доказ. Претпоставимо да важи (1) и докажимо (2). Нека је $z = uu^*u - u$. Тада је

$$\begin{aligned} z^*z = (u^*uu^* - u^*)(uu^*u - u) &= u^*uu^*uu^*u - u^*uu^*u - u^*uu^*u + u^*u \\ &= p^3 - p^2 - p^2 + p = 0, \end{aligned}$$

где смо искористили да је $u^*u = p$ за неку пројекцију p. Сада из C^*-идентитета важи да је $z = 0$, што је и требало доказати.

Из (2) добијамо (3) конјуговањем.

Из (3) множењем са u слева добијамо да је $uu^* = (uu^*)(uu^*)$, па је (uu^*) идемпотент, а наравно $(uu^*)^* = uu^*$, одакле закључујемо да је uu^* пројекција, тј. да је u^* парцијална изометрија тј. да важи (4).

Коначно, ако важи (4), добијамо (3) као што је из (1) важило (2), уз замену u са u^*. Ако помножимо једнакост $u^* = u^*uu^*$ са десне стране са u добијамо (1). □

Напомена 1.2.18. *Парцијалну изометрију $U \in B(H)$ можемо дефинисати као оператор који је изометрија на једном делу простора H, конкретно, U је парцијална изометрија ако је $\|Ux\| = \|U\|$ за сваки $x \in \mathrm{Ker}(U)^\perp$. Штавише, у складу са претходном лемом, онда је слика оператора U затворена, па UU^* је пројекција на $\mathrm{Im}\, U$, док је U^*U пројекција на $\mathrm{Ker}(U)^\perp = \mathrm{Im}\,(U^*)$.*

Дефиниција 1.2.19. *За $p, q \in \mathcal{P}(M)$, кажемо да је пројекција p субеквивалентна са q (у ознаци $p \preceq q$) ако постоји парцијална изометрија $v \in M$ таква да је $v^*v = p$ и $vv^* \leqslant q$. Даље, кажемо да је пројекција p еквивалентна (или Мареј фон Нојман еквивалентна) са q (у ознаци $p \sim q$) ако постоји парцијална изометрија $v \in M$ таква да је $v^*v = p$ и $vv^* = q$. Ако је $p \preceq q$, али $p \not\sim q$, пишемо $p \prec q$.*

Напомена 1.2.20. *Ако су $p, q \in \mathcal{P}(M)$ такве да је $p \leqslant q$, онда је $p \preceq q$. Довољно је узети $v = p$.*

Став 1.2.21. *Нека је $M \subseteq B(H)$ фон Нојманова алгебра. Тада је $\preceq$ рефлексивна и транзитивна на $\mathcal{P}(M)$, док је $\sim$ релација еквиваленције.*

Доказ. Што се тиче рефлексивности, у случају обе релације, онда је постигнута помоћу $v = p$, јер је пројекција парцијална изометрија. Да је релација $\sim$ симетрична следи из чињенице да ако је v парцијална изометрија, онда је то и v^*. Докажимо транзитивност релације $\preceq$, а слично се показује и транзитивност релације $\sim$. Нека су $p, q, r \in \mathcal{P}(M)$ такве да је $p \preceq q$ и $q \preceq r$. Тада постоје парцијалне изометрије $u, v \in M$ такве да је $u^*u = p, uu^* \leqslant q, v^*v = q$ и $vv^* \leqslant r$. Тада је по својству парцијалних изометрија из Леме 1.2.17

$$qu = quu^*u = q(uu^*)u = uu^*u = u,$$

па је

$$(vu)^*(vu) = u^*(v^*v)u = u^*qu = u^*u = p,$$

а такође је и

$$(vu)(vu)^* = v(uu^*)v^* \leqslant vqv^* = v(v^*v)v^* = (vv^*v)v^* = vv^* \leqslant r.$$

Овим смо показали да је $p \preceq r$. □

Наредну теорему дајемо без доказа (тврђење и више него очекивано), при чему је она само другачији запис Кантор-Бернштајнове теореме о кардиналним бројевима.

Став 1.2.22. *Нека је* $M \subseteq B(H)$ *фон Нојманова алгебра. Ако је* $p \preceq q$ *и* $q \preceq p$ *за* $p, q \in \mathcal{P}(M)$*, онда је* $p \sim q$.

Посебно значајна особина фон Нојманових алгебри јесте да сваки елемент има поларну декомпозицију, што нпр. није својство сваке C^*-алгебре.

Теорема 1.2.23. *(Поларна декомпозиција)*

Нека је $x \in B(H)$ *произвољан и* $|x| = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$. *Тада постоји парцијална изометрија* v *таква да је* $x = v|x|$ *и* $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} x$. *Додатно, та декомпозиција је јединствена у следећем погледу: ако је* $x = uy$ *за неко* $y \geqslant 0$*, при чему је и парцијална изометрија таква да је* $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} y$*, онда је* $u = v$ *и* $y = |x|$. *Коначно, парцијална изометрија* v *припада најмањој фон Нојмановој алгебри која садржи* x*, у ознаци* $W^*(x)$. *Дакле, ако* $x \in M \subseteq B(H)$*, где је* M *нека фон Нојманова алгебра, онда* $v \in M$.

Доказ. Нека је $v_0 : \operatorname{Im}(|x|) \to \operatorname{Im}(x)$ оператор дефинисан са $v_0(|x|\xi) = x\xi$, за произвољан $\xi \in H$. Како су норме елемената $|x|\xi$ и $x\xi$ једнаке, v_0 је добро дефинисан и може се проширити до изометрије на затворење наведених простора коју означимо са v. На $\overline{\operatorname{Im}(|x|)}^{\perp} = \operatorname{Ker}|x| = \operatorname{Ker} x$ дефинишемо га као 0. Самим тим, v је парцијална изометрија и $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} x$. Наравно, по дефиницији је $v|x| = x$, тако да је први део доказан.

Што се тиче јединствености, нека је $x = uy$ за u и y као у поставци. Тада је $(\operatorname{Ker} u)^{\perp} = (\operatorname{Ker} y)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} y}$, па како је u^*u пројекција на $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$, то је $u^*uy = y$. Одатле и на основу јединствености квадратног корена добијамо да је

$$|x|^2 = x^*x = yu^*uy = y^2,$$

тј. $|x| = y$. Везано за остатак, приметимо да је

$$(u - v)|x|\xi = uy\xi - v|x|\xi = x\xi - x\xi = 0,$$

па како је по претпоставци $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} y = \operatorname{Ker} |x|$, добијамо да је $u = v$.

Последње, доказаћемо да за свако $z \in W^*(x)'$ важи $zv = vz$, па $v \in W^*(x)'' = W^*(x)$. Наиме, за произвољан $\xi \in H$ важи

$$zv|x|\xi = zx\xi = xz\xi = v|x|z\xi = vz|x|\xi,$$

па је $zv = vz$ на $\overline{\operatorname{Im} |x|}$. Са друге стране, за све $\xi \in \overline{\operatorname{Im} |x|}^{\perp} = \operatorname{Ker} |x|$ је $|x|z\xi = z|x|\xi = 0$, јер z комутира и са $|x| \in W^*(x)$. Коначно, из $\operatorname{Ker} |x| = \operatorname{Ker} v$ добијамо да је $zv\xi = 0 = vz\xi$, одакле следи тражено. □

Наредна последица може бити корисна, и показује како добијамо поларну декомпозицију конјугованог елемента. Доказ је једноставан и овде га изостављамо.

Став 1.2.24. *Нека је $x \in B(H)$ такав да је његова поларна декомпозиција $x = v|x|$. Тада важи $|x^*| = v|x|v^*$ и $x^* = v^*|x^*|$.*

Сада можемо наставити ка доказу формуле Капланског који ће нам бити од великог значаја у доказивању нових, тј. оригиналних резултата.

Лема 1.2.25. *Нека је $M \subseteq B(H)$ фон Нојманова алгебра и елемент $x \in M$. Тада $[xH], [x^*H] \in M$ и $[xH] \sim [x^*H]$.*

Доказ. Да пројекције $[xH], [x^*H] \in M$ следи из Леме 1.2.9 јер су $\overline{xH}$ и $\overline{x^*H}$ очигледно редукујући за M', па оне припадају $M'' = M$. Нека је $x = v|x|$ поларна декомпозиција елемента x. Тада $v \in M$ и $v^*v = [x^*H]$ и $vv^* = [xH]$, одакле по дефиницији следи њихова еквиваленција. □

Став 1.2.26. *(Формула Капланског) Нека је $M \subseteq B(H)$ фон Нојманова алгебра и $p, q \in \mathcal{P}(M)$. Тада је:*

$$(p \vee q - p) \sim (q - p \wedge q).$$

Доказ. Дефинишимо елемент $x = (1 - p)q$. Тада је $\operatorname{Ker} x = \operatorname{Ker} q \oplus (pH \cap qH)$. Тиме је

$$[x^*H] = 1 - ((1 - q) + p \wedge q) = q - p \wedge q.$$

Са друге стране је $x^* = q(1-p)$, па аналогно добијамо да је

$$[xH] = (1-p) - ((1-q) \wedge (1-p)) = 1 - p - (1 - p \vee q) = p \vee q - p.$$

Сада је директно по Леми 1.2.25 $(p \vee q - p) \sim (q - p \wedge q)$. □

Пређимо сада на дефинисање тзв. минималних пројекција. Оне ће нам бити изузетно важан појам у последње две главе. За почетак, дефинисаћемо ћошак фон Нојманове алгебре.

Дефиниција 1.2.27. *Нека је $M \subseteq B(H)$ фон Нојманова алгебра и $p \in B(H)$ пројекција. Тада се скуп $pMp = \{pxp \mid x \in M\}$ зове ћошак фон Нојманове алгебре M.*

Напомена 1.2.28. *Назив долази од идентификације $H \cong pH \oplus (1-p)H$ где се pxp идентификује са*

$$\begin{bmatrix} pxp & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B(pH \oplus (1-p)H),$$

где pxp видимо као оператор на pH. У случају када је M читава $B(H)$, важи да је $pB(H)p \cong B(pH)$.

У случају када је p пројекција у M, важи следећа важна теорема.

Теорема 1.2.29. *Нека је $M \subseteq B(H)$ фон Нојманова алгебра и $p \in \mathcal{P}(M)$. Тада су pMp и $M'p$ фон Нојманове алгебре на $B(pH)$ и једна другој су комутанти.*

Сада можемо прећи на дефиницију минималне пројекције.

Дефиниција 1.2.30. *Нека је $M \subseteq B(H)$ фон Нојманова алгебра. Кажемо да је пројекција $p \in \mathcal{P}(M)$ минимална у M ако је $p \neq 0$ и $pMp = \mathbb{C}p$. Пројекцију p зовемо Абеловом ако је pMp Абелова фон Нојманова алгебра.*

Пример 1.2.31. *(1) Ако је $M = B(H)$, онда је из $pB(H)p \cong B(pH)$, пројекција p минимална ако и само ако је p ранга 1.*

(2) Нека је (X, μ) σ-коначан мерљив простор. Тада $f \in \mathcal{P}(L^\infty(X, \mu))$ ако и само ако $f = \chi_E$ за неки мерљив скуп $E \subseteq X$. Ако је f минимална пројекција, онда је $L^\infty(E, \mu|_E) = \mathbb{C}\chi_E$, а то је могуће ако и само ако за сваки мерљив скуп $F \subseteq E$ важи $\mu(F) \in \{0, \mu(E)\}$, тј. ако је E атом мере μ.

Минималне пројекцију су управо некомутативни верзије атома, тј. њихов назив није нимало случајан.

Став 1.2.32. *Нека је* $M \subseteq B(H)$ *фон Којманова алгебра. Пројекција* $p \in \mathcal{P}(M)$ *је минимална ако и само ако за произвољну пројекцију* $q \in \mathcal{P}(M)$ *такву да је* $q \leqslant p$ *важи да је* $q = 0$ *или* $q = p$.

Доказ. Ако је p минимална, тј. $pMp = \mathbb{C}p$ и $q \leqslant p$, тада из $q = pqp \in \mathbb{C}p$, а како је p пројекција, то је $q = 0$ или $q = p$.

Са друге стране, ако су $q = 0$ и $q = p$ једине пројекције такве да је $q \leqslant p$, онда су p и 0 једине пројекције у pMp. Може се показати да је фон Нојманова алгебра заправо C^*-алгебра генерисана својим пројекцијама, па је $pMp = \mathbb{C}p$ и p је минимална. ☐

За формулације у последњој глави, биће нам потребна и дефиниција фон Нојманових алгебри типа I. Поменимо да постоје и фон Нојманове алгебре типа II и типа III, као и неке њихове поткласе, као и да су то веома истраживани објекти - за њих је, између осталог, додељена Филдсова медаља.

Дефиниција 1.2.33. *За фон Нојманову алгебру* $M \subseteq B(H)$ *кажемо да је типа I ако свака ненула пројекција има ненула Абелову потпројекцију. Она је типа* I_n *ако 1 можемо представити као суму* n *еквивалентних ненула Абелових пројекција.*

Важи следећа карактеризација.

Теорема 1.2.34. *Фактор* $M \subseteq B(H)$ *типа I је* **-изоморфан са* $B(K)$ *за неки Хилбертов простор* K.

1.3 Хилбертови C^*-модули

На Хилбертовом простору дефинишемо скаларни производ над одређеним пољем скалара и његова вредност је број. Потпуно природно, постоји начин да скаларе заменимо са елементима C^*-алгебри и на тај начин добијемо модуле. Први их је разматрао Каплански 1953. године у раду [41], док се као пионирски рад у пуном смислу често узима рад Пашкеа из 1973. године ([61]).

Десни Хилбертов C^*-модул V над C^*-алгебром A (или десни Хилбертов A модул) је векторски простор који је десни A-модул снадбевен A-вредносним скаларним производом $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to A$ који задовољава:

(1) $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle$ за $x, y, z \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

(2) $\langle x, ya\rangle = \langle x, y\rangle a$ за све $x, y \in V, a \in A$,

(3) $\langle x, y\rangle^* = \langle y, x\rangle$ за све $x, y \in V$,

(4) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ за све $x \in V$; ако је $\langle x, x\rangle = 0$ онда је $x = 0$,

и V је комплетан у односу на норму дефинисану са $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$, $x \in V$.

1.3.1 Основни примери

Пример 1.3.1. *Очигледно, сваки Хилбертов простор је Хилбертов* $\mathbb{C}$*-модул (дакле модул над* C^**-алгебром комплексних бројева).*

Пример 1.3.2. *Такође, свака* C^**-алгебра* A *може се видети као Хилбертов* C^**-модул над собом са скаларним производом* $\langle a, b\rangle := a^*b$*, док је одговарајућа норма заправо норма на* A *због* C^**-услова.*

Пример 1.3.3. *Нека је* A *произвољна* C^**-алгебра. На скупу*

$$A^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in A \text{ за све } 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

дефинишемо десно множење са

$$x \cdot a = (x_1 a, x_2 a, \ldots, x_n a),$$

а скаларни производ са

$$\langle x, y\rangle = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \cdots + x_n^* y_n.$$

Овај модул називамо слободан коначно генерисан модул.

Пример 1.3.4. *Нека су* H *и* K *Хилбертови простори. Тада су ограничени оператори (у ознаци* $B(H, K)$*), као и компактни оператори (у ознаци* $K(H, K)$*) из* H *у* K *Хилбертови* C^**-модули над, редом,* $B(H)$*, односно* $K(H)$*. Десно множење на* $B(H, K)$ *дефинишемо са*

$$B(H, K) \times B(H) \ni (S, T) \mapsto ST \in B(H, K),$$

док је скаларни производ дефинисан са

$$\langle S, T\rangle = S^*T, \;\; S, T \in B(H, K).$$

Дефиниције за $K(H,K)$ су аналогне.

Видећемо касније да се сваки Хилбертов C^*-модул може утопити у $B(H,K)$ за одговарајуће H и K, што је нека аналогија са другом Гељфанд-Најмарковом теоремом.

Пример 1.3.5. *Неке је A C^*-алгебра. Формирамо скуп*

$$l^2(A) = \{x = (x_1, x_2, \dots) \mid x_k \in A, \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^* x_k \text{ конвергира у норми алгебре } A\}.$$

На $l^2(A)$ дефинишемо десно множење и скаларани производ са

$$x \cdot a = (x_1 a, x_2 a, \dots, x_n a, \dots) \text{ и } \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^* y_k.$$

Овај модул назива се стандардни Хилбертов модул над A. Често се поред ознаке $l^2(A)$ користи и ознака $\mathcal{H}_A$.

Пример 1.3.6. *На сличан начин као у претходном примеру, за Хилбертове C^*-модуле $V_i, i \in I$ дефинишемо скуп*

$$V = \{(x_i) \in \prod_{i\in I} V_i \mid \sum_{i\in I} x_i^* x_i \text{ конвергира у норми алгебре } A\},$$

као и десно множење и скаларни производ.

Овај модул обележавамо са $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ и називамо директна сума модула $M_i, i \in I$.

Значајна ће нам бити једна врста C^*-модула.

Дефиниција 1.3.7. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и V Хилбертов A-модул. Са $\langle V, V\rangle$ означимо $\operatorname{span}\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in V\}$. Тада је затворење скупа $\langle V, V\rangle$ један двострани идеал у A. Хилбертов A-модул V је пун ако је $\overline{\langle V, V\rangle} = A$.*

1.3.2 Важне неједнакости у Хилбертовим C^*-модулима

У Хилбертовим C^*-модулима важи следећи облик Коши-Шварцове неједнакости.

Теорема 1.3.8. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и V Хилбертов A-модул. Тада за елементе $x, y \in V$ и $a \in A$ важе неједнакости:*

(а) $\|x \cdot a\| \leqslant \|x\|\|a\|$*;*

(б) (Коши-Шварцова неједнакост) $\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle \leqslant \|y\|^2\langle x, x\rangle$.

Доказ. (а) Приметимо да за све $a \in A$ важи $\langle xa, xa\rangle = a^*\langle x, x\rangle a$, па из Става 1.1.69 важи

$$\|xa\|^2 = \|\langle xa, xa\rangle\| \leqslant \|x\|^2\|a^*a\| = \|x\|^2\|a\|^2,$$

одакле следи тражена неједнакост.

(б) За произвољно $a \in A$ важи

$$0 \leqslant \langle x - ya, x - ya\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle a - a^*\langle y, x\rangle + a^*\langle y, y\rangle a,$$

па ако је $a = \|\langle y, y\rangle\|^{-1}\langle y, x\rangle$ (можемо претпоставити да је $y \neq 0$, иначе су обе стране неједнакости једнаке 0), онда је

$$2\|\langle y, y\rangle\|^{-1}\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + \|\langle y, y\rangle\|^{-2}\langle x, y\rangle\langle y, y\rangle\langle y, x\rangle.$$

Но, користећи поново Став 1.1.69, процењујемо други сабирак на десној страни и добијамо да је

$$\begin{aligned}\|\langle y, y\rangle\|^{-2}\langle x, y\rangle\langle y, y\rangle\langle y, x\rangle &\leqslant \|\langle y, y\rangle\|^{-2}\|\langle y, y\rangle\|\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle \\ &= \|\langle y, y\rangle\|^{-1}\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle,\end{aligned}$$

одакле следи тражена неједнакост.

□

Последица 1.3.9. *Из дела (б) претходне теореме следи*

$$|\langle y, x\rangle| \leqslant \|y\|\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}},$$

као и

$$\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Коначно, истакнимо да слично као у Ставу 1.1.82, можемо показати следећу варијанту Коши-Шварцове неједнакости за позитивне линеарне функционале.

Став 1.3.10. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и V Хилбертов A-модул. Ако је φ позитиван линеаран функционал на A и елементи $x, y \in V$, тада важи неједнакост*

$$|\varphi(\langle x, y\rangle)|^2 \leq \varphi(\langle x, x\rangle)\varphi(\langle y, y\rangle).$$

1.3.3 „Компактни” оператори

Нека је A произвољна C^*-алгебра и V Хилбертов A-модул над њом. За $x, y \in V$ дефинишемо пресликавање $\theta_{x,y} : V \to V$ са

$$\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle.$$

Из Последице 1.3.9 закључујемо да је оператор $\theta_{x,y}$ ограничен. Наиме,

$$\|\theta_{x,y}(z)\| = \|x\langle y, z\rangle\| \leqslant \|x\|\|\langle y, z\rangle\| \leqslant \|x\|\|y\|\|z\|,$$

тј. $\|\theta_{x,y}\| \leqslant \|x\|\|y\|$. Даље, адјунгован оператор му је $\theta_{y,x}$, јер је

$$\langle\theta_{x,y}(z), u\rangle = \langle x\langle y, z\rangle, u\rangle = \langle y, z\rangle^*\langle x, u\rangle = \langle z, y\rangle\langle x, u\rangle = \langle z, y\langle x, u\rangle\rangle = \langle z, \theta_{y,x}(u)\rangle.$$

C^*-алгебру која настаје као затворење A-линеарног омотача оператора облика $\theta_{x,y}$ означаваћемо са $K(V)$, а њене елементе зваћемо „компактним” операторима. Назив потиче од чињенице да је оператор $\theta_{x,y}$ A-ранга један - слика му је садржана у подмодулу zA. Тада су линеарне комбинације управо оператори A-коначног ранга. Ипак, напоменимо да они нису компактни оператори у правом смислу.

Приметимо да сваки десни Хилбертов A-модул V можемо посматрати као леви Хилбертов $K(V)$-модул са скаларним производом $[x, y] = \theta_{x,y}$. Тада је $\|[x, x]\| = \|\theta_{x,x}\| = \|x\|^2$.

Дефиниција 1.3.11. *Нека је A произвољна C^*-алгебра. Повезујућа алгебра (у ознаци $L(V)$) Хилбертовог A-модула V је C^*-алгебра свих „компактних” оператора на Хилбертовом A-модулу $A \oplus V$.*

Повезујућа алгебра $L(V)$ се може представити у облику

$$L(V) = \left\{ \begin{bmatrix} T_a & l_y \\ r_x & T \end{bmatrix} \mid a \in A,\ x, y \in V,\ T \in K(V) \right\},$$

где су пресликавања $r_x : A \to V$, $l_y : X \to A$ и $T_a : A \to A$ дата са $r_x(a) = xa$, $l_y(z) = \langle y, z\rangle$ и $T_a(b) = ab$.

Наредно тврђење је реформулација Теореме 3.4. из рада [22]. Сличан приступ, који посматра структуре блиске повезујућим алгебрама, може се видети у раду [68].

Теорема 1.3.12. *Нека је V Хилбертов C^*-модул над C^*-алгебром A. Тада се V може изометрички утопити у $B(H,K)$ за неке Хилбертове просторе H и K. Штавише, H је Хилбертов простор такав да постоји верна репрезентација $\pi : A \to B(H)$, док изометричко утапање $L : V \to B(H,K)$ задовољава*

$$\langle L(x)h_1, L(y)h_2\rangle = \langle h_1, \pi(\langle x,y\rangle)h_2\rangle \text{ за све } x,y \in V \text{ и } h_1,h_2 \in H.$$

Претходно наведена излагања везана за Хилбертове C^*-модуле преузета су из књига [54],[85] и [57]. Овде смо навели само она која ће нам бити потребна, док се у претходно поменутим књигама налази и знатно више материјала везаних за Хилбертове C^*-модуле.

Глава 2

Релација (јаке) Бирхоф-Џејмсове ортогоналности

2.1 Релација Бирхоф-Џејмсове ортогоналности

Прича о Бирхоф-Џејмсовој ортогоналности датира од пре скоро 90 година. Подсетимо да у то време није ни постојала терминологија C^*-алгебри, али јесте фон Нојманових које Бирхоф и помиње у изворном раду. Наиме, идеја је потпуно природна и уопштава појам ортогоналности у просторима где немамо скаларни производ. Герет Бирхоф на почетку свог пионирског рада [19] из 1935. године наводи следеће: Природно је да за вектор pq, који полази из неке тачке p линеарног метричког простора, кажемо да је нормалан на други вектор pr ако и само ако не постоји тачка са праве pr која је ближа q него што је то тачка p.

Ову идеју у контексту функционалне анализе, конкретније нормираних простора, значајно је истражио Роберт Џ. Џејмс у периоду 1945-1947. године у радовима [33], [34] и [35]. По њима двојици формално дефинисана ортогоналност и носи име, а ми ћемо је звати краће BJ ортогоналност. Дакле, општа дефиниција је у нормираном простору, при чему ћемо ми све време за поље скалара подразумевати $\mathbb{C}$.

Дефиниција 2.1.1. *Нека је X нормиран векторски простор. За векторе*

$x, y \in X$ кажемо да су BJ ортогонални (у ознаци $x \perp y$) ако важи

$$\|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|,$$

за све $\lambda \in \mathbb{C}$.

Наравно, ова дефиниција има своју већ описану геометријску интерпретацију.

Напомена 2.1.2. *Заправо, у свом првом раду је Џејмс истраживао до тада познате видове ортогоналности, а у преостала два се бавио овом која јесте предмет нашег истраживања. Наведимо и те друге врсте ортогоналности у нормираним просторима: Робертсова (видети рад [63]), једнакокрака и Питагорина ортогоналност (разматране у раду [33]).*

У свом раду [35] даје карактеризацију преко функционала која ће нам бити значајна и заправо место које ћемо покушати да уопштавамо на сваком следећем конкретном или структурно богатијем простору.

Став 2.1.3. *Нека је X нормиран простор и нека су $x, y \in X$ ненула вектори. Тада је $x \perp y$ ако и само ако постоји линеаран функционал f норме 1 такав да је $f(x) = \|x\|$ и $f(y) = 0$.*

Доказ. Ако тражени функционал постоји, онда, како је он норме 1, то је

$$\|x + \lambda y\| \geqslant |f(x + \lambda y)| = |f(x)| = \|x\|,$$

тј. $x \perp y$.

Са друге стране, ако је $x \perp y$, дефинишемо функционал $f : \mathrm{span}\{x, y\} \to \mathbb{C}$ са $f(x) = \|x\|$ и $f(y) = 0$ и проширимо по линеарности. Он је онда норме 1, а по Хан-Банаховој теореми можемо га проширити до функционала на X (без повећавања норме) који задовољава тражена својства. ☐

2.1.1 Бирхоф-Џејмсова ортогоналност на $B(H)$

Поставља се питање како можемо описати BJ ортогоналност на конкретним C^*-алгебрама. Као прва, намеће се $B(H)$. На овом пољу, постоји више резултата и из различитих углова који доводе до тражене карактеризације. Неки од њих су добијени из другачијих потреба, а после су искоришћени у описивању ортогоналности. Први резултат преписујемо Стампфлију, који је истражујући деривације, у раду [69], описао растојање произвољног оператора до скаларног умношка идентитета помоћу максималног нумеричког опсега. Наредни резултат је Теорема 2 из поменутог рада.

Теорема 2.1.4. *Нека је дат оператор $A \in B(H)$. Максимални нумерички опсег дефинишемо са*

$$W_0(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \text{ низ } (x_n) \in H, \|x_n\| = 1, \\ \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n\rangle = \lambda, \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|A\|\}.$$

Тада је $W_0(A)$ затворен конвексан подскуп скупа $\mathbb{C}$ и

$$0 \in W_0(A) \Leftrightarrow d(A, \mathbb{C}I) = \|A\|.$$

Затим, Магајна у раду [56] у истраживању растојања од коначно димензионалних потпростора операторских алгебри, уопштава претходни резултат уводећи појам максималног нумеричког опсега у односу на оператор $A \in B(H)$.

Дефиниција 2.1.5. *Нека су дати оператори $A, B \in B(H)$. Тада максимални нумерички радијус оператора B^*A у односу на A дефинишемо као*

$$W_A(B^*A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \text{ низ } (x_n) \in H, \|x_n\| = 1, \\ \lim_{n\to\infty} \langle B^*Ax_n, x_n\rangle = \lambda, \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|A\|\}.$$

Напомена 2.1.6. *Ако је $B = I$, онда је $W_0(A) = W_A(I^*A)$.*

Коначно, карактеризација ортогоналности на $B(H)$ се често приписује Батији и Шемрлу (погледати Теорему 1.1. и Коментар 3.1. из рада [17]). Доказ ћемо преузети из прегледног чланка [6], где су претходна тврђења уобличена.

Теорема 2.1.7. *Нека $A, B \in B(H)$. Тада $A \perp B$ ако и само ако $0 \in W_A(B^*A)$. Другим речима:*

(а) Ако је $\dim H = \infty$, тада је $A \perp B$ ако и само ако постоји низ јединичних вектора $(x_n) \in H$ такав да важи $\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|A\|$ и $\lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, Bx_n\rangle = 0$.

(б) Ако је $\dim H < \infty$, тада је $A \perp B$ ако и само ако постоји јединични вектор $x \in H$ такав да је $\|Ax\| = \|A\|$ и $\langle Ax, Bx\rangle = 0$.

Доказ. Као у раду [69], може се показати да је $W_A(B^*A)$ непразан, затворен и конвексан подскуп скупа $\mathbb{C}$. Кроз цео доказ претпостављаћемо да је $\|B\| = 1$ (сваки ненула можемо скалирати, а тврђење је тривијално за 0).

Претпоставимо да је $0 \in W_A(B^*A)$. Тада по дефиницији постоји низ јединичних вектора $(x_n) \in H$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|A\|$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \langle Ax_n, Bx_n\rangle = 0$. Онда је

$$\begin{aligned}\|A+\lambda B\|^2 &\geqslant \|(A+\lambda B)x_n\|^2\\ &= \|Ax_n\|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{\lambda}\langle B^*Ax_n, x_n\rangle\right) + |\lambda|^2\|Bx_n\|^2\\ &\geqslant \|Ax_n\|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{\lambda}\langle B^*Ax_n, x_n\rangle\right) \to \|A\|^2,\end{aligned}$$

одакле кореновањем добијамо да је $A \perp B$.

У другом смеру, претпоставимо супротно, нека $0 \notin W_A(B^*A)$. Можемо претпоставити да је $\mathrm{Re}(W_A(B^*A)) \geqslant \varepsilon$ за неко $\varepsilon > 0$. Наиме, ако није тако, заменимо B са $e^{i\varphi}B$ за одговарајуће φ и искористимо поменуте особине $W_A(B^*A)$. Дефинишимо сада скуп

$$S = \left\{x \in H \mid \|x\| = 1, \mathrm{Re}\langle B^*Ax, x\rangle \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

и означимо $\nu = \sup\{\|Ax\| \mid x \in S\}$. Како је $\mathrm{Re}(W_A(B^*A)) \geqslant \varepsilon$, то из дефиниције максималног нумеричког радијуса добијамо да је $\nu < \|A\|$. Дефинишимо сада $\mu = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\|A\| - \nu}{2}\right\} > 0$ и докажимо да је $\|A - \mu B\| < \|A\|$, чиме постижемо контрадикцију јер $A \not\perp B$.

Узмимо произвољан јединични вектор $x \in H$. Ако $x \in S$, тада је

$$\|(A-\mu B)x\| \leqslant \|Ax\| + \mu\|Bx\| \leqslant \nu + \mu \leqslant \|A\| - \mu,$$

из односа μ и ν. Докажимо да ако $x \notin S$ важи слична процена. Разложимо $Ax = (a+ib)Bx + y$ за неке $a, b \in \mathbb{R}$ и $y \in H$ такво да је $\langle Bx, y\rangle = 0$. Тада је $0 < \mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \mathrm{Re}\langle B^*Ax, x\rangle = a\|Bx\|^2 \leqslant a$ имајући у виду да је x јединични вектор ван S. Одатле је

$$\begin{aligned}\|(A-\mu B)x\|^2 &= \|(a+ib-\mu)Bx + y\|^2 = ((a-\mu)^2 + b^2)\|Bx\|^2 + \|y\|^2\\ &= [(a^2+b^2)\|Bx\|^2 + \|y\|^2] + \mu(\mu - 2a)\|Bx\|^2\\ &= \|Ax\|^2 + \mu(\mu-2a)\|Bx\|^2\\ &< \|Ax\|^2 + \mu(\mu - 2\mu)\|Bx\|^2 \leqslant \|A\|^2 - \mu^2,\end{aligned}$$

где смо искористили да је $\mu < a$. Овим смо доказали да је $\|A - \mu B\| < \|A\|$, тј. да је $A \not\perp B$, што је и био циљ.

На овај начин смо доказали део (а) у потпуности, док код (б) треба доказати да уместо низа вектора, можемо пронаћи један вектор за који важи $\|Ax\| = \|A\|$ и $\langle Ax, Bx\rangle = 0$. $\square$

2.1.2 Бирхоф-Џејмсова ортогоналност и Гатоов извод

Веза између BJ ортогоналност и Гатоовог извода приказана је већ у пионирским радовима Џејмса. Пре него пређемо на њу, дефинишимо следећи појам.

Дефиниција 2.1.8. *Нека је X нормиран простор. Вектор $x \in X$ је глатка тачка сфере $S(0, \|x\|)$ ако постоји јединствен функционал ослонца, тј. функционал $F_x \in X^*$ такав да је $\|F_x\| = 1$ и $F_x(x) = \|x\|$.*

Напомена 2.1.9. *Приметимо да је функционал ослонца већ поменут у оквиру Става 2.1.3.*

Наредно тврђење је доказано у раду [1], у оквиру Теореме 2.1.

Теорема 2.1.10. *Нека је X Банахов простор и $x, y \in X$. Ако постоји Гатоов извод норме у тачки x, тј. ако постоји лимес $\lim\limits_{\mathbb{R}\ni t\to 0+} \dfrac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$, онда је он заправо једнак $\mathrm{Re}F_x(y)$, где је F_x функционал из претходне дефиниције. Додатно, $x \perp y$ ако и само ако је $F_x(y) = 0$.*

У раду [42], Кечкић уводи концепт φ-Гатоовог извода како би заменио класичан Гатоов извод у тачкама које нису глатке.

Дефиниција 2.1.11. *Нека је X произвољан Банахов простор, $x, y \in X$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. φ-Гатоов извод норме у тачки x, у правцу y дефинишемо као*

$$D_{\varphi,x}(y) = \lim_{t\to 0+} \frac{\|x + te^{i\varphi}y\| - \|x\|}{t}.$$

Кључно је да $D_{\varphi,x}(y)$ увек постоји на основу наредног става.

Став 2.1.12. *Нека је X произвољан Банахов простор, $x, y \in X$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Функција $\alpha_{x,y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са $\alpha_{x,y}(t) = \|x + te^{i\varphi}y\|$ је конвексна. Самим тим, $D_{\varphi,x}(y)$ увек постоји.*

Доказ. Узмимо произвољан $\lambda \in [0,1]$ и $s, t \in \mathbb{R}$. Тада је

$$\begin{aligned}\alpha_{x,y}(\lambda t + (1-\lambda)s) &= \|x + (\lambda t + (1-\lambda)s)e^{i\varphi}y\| \\ &= \|\lambda(x + te^{i\varphi}y) + (1-\lambda)(x + se^{i\varphi}y)\| \\ &\leqslant \lambda\alpha_{x,y}(t) + (1-\lambda)\alpha_{x,y}(s),\end{aligned}$$

па је $\alpha_{x,y}$ конвексна функција. Како је $D_{\varphi,x}(y)$ десни извод функције $\alpha_{x,y}$ у координатном почетку, то он увек постоји јер је $\alpha_{x,y}$ конвексна. □

Наредно тврђење даје карактеризацију BJ ортогоналности преко φ-Гатоовог извода, а у питању је Теорема 1.4. из рада [42], при чему је доказ модификован у [43].

Теорема 2.1.13. *Нека је X Банахов простор, $x, y \in X$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Тада је $x \perp y$ ако и само ако је $\inf_{\varphi} D_{\varphi,x}(y) \geqslant 0$,*

Доказ. Из чињенице да је $x \perp y$, стављањем $\lambda = te^{i\varphi}, t > 0$, добијамо да је $\|x + te^{i\varphi}y\| \geqslant \|x\|$, па применом лимеса, а затим инфумума, добијамо да је $\inf_{\varphi} D_{\varphi,x}(y) \geqslant 0$.

Са друге стране, ако је $D_{\varphi,x}(y) \geqslant 0$ за све $\varphi \in [0, 2\pi)$, тада из конвексности функције $\alpha_{x,y}$ важи $\alpha_{x,y}(t) - \alpha_{x,y}(0) \geqslant (t-0)D_{\varphi,x}(y)$. Одатле за све $t > 0$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$ важи $\|x + te^{i\varphi}y\| \geqslant \|x\|$, а како то тривијално важи и за $t = 0$, закључујемо да је $\|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|$ за све $\lambda \in \mathbb{C}$, тј. $x \perp y$ што је требало доказати. □

Ове резултате користићемо посебно у наредном делу. Напоменимо да је помоћу ових резултата могуће остварити и карактеризације у многим другим просторима, попут Теореме 2.1.7 која је добијена као Последица 3.1. у раду [43].

Поменимо и да је у раду [67] дато уопштење Гатоовог извода на произвољну C^*-алгебру. Наиме, у Теореми 1.2. је показано следеће:

Теорема 2.1.14. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и $a, b \in A$ ненула елементи. Тада је*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\|a + tb\| - \|a\|}{t} = \frac{1}{\|a\|} \max\left\{\operatorname{Re}\varphi(a^*b) \mid \varphi \in S(A),\ \varphi(a^*a) = \|a\|^2\right\}.$$

2.1.3 Бирхоф-Џејмсова ортогоналност на $C(K)$

Након C^*-алгебре $B(H)$, ограничених оператора на Хилбертовом простору H, разматраћемо C^*-алгебру $C(K)$, за компактан, Хаусдорфов простор K. По првој Гељфанд-Најмарковој теореми знамо да је свака комутативна C^*-алгебра таква. Резултате на овом пољу дао је Кечкић у раду [44]. Наредно тврђење је Теорема 2.1. из поменутог рада.

Теорема 2.1.15. *Нека је K компактан Хаусдорфов простор, $f, g \in C(K)$ и $E_f = \{t \in K \mid |f(t)| = \|f\|\}$. Тада је*

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\|f + tg\| - \|f\|}{t} = \max_{x \in E_f} \operatorname{Re}\left(e^{-i \arg f(x)} g(x)\right).$$

Помоћу ње доказујемо наредну теорему која ће нам и касније бити од великог значаја, а она је Последица 2.1. из рада [44].

Теорема 2.1.16. *Нека је K компактан Хаусдорфов простор, $f, g \in C(K)$ и $E_f = \{t \in K \mid |f(t)| = \|f\|\}$. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(1) $f \perp g$.

(2) Скуп $F = \left\{\overline{f(t)} g(t) \mid t \in E_f\right\}$ није садржан у отвореној полуравни (у $\mathbb{C}$) са границом која садржи координатни почетак.

(3) Постоји вероватносна мера μ чији је носач садржан у E_f таква да је

$$\int_K \overline{f(x)} g(x)\, d\mu(x) = 0.$$

Посебно, ако $|f|$ достиже норму у само једној тачки, нпр. x_0, тада је $f \perp g$ ако и само ако је $g(x_0) = 0$.

Доказ. На основу Теорема 2.1.15 и 2.1.13, (1) је еквивалентно са

$$\inf_{\varphi \in [0, 2\pi)} \max_{x \in E_f} \operatorname{Re}\left(e^{i\varphi} e^{-i \arg f(x)} g(x)\right) \geqslant 0.$$

Но, то је еквивалентно са условом да скуп $\{e^{-i \arg f(x)} g(x) \mid x \in E_f\}$ садржи бар једну вредност чији је реални део ненегативан, при свим ротацијама око 0. Како за $x \in E_f$ важи да је $|f(x)| = \|f\|$, то је

$$\|f\| \cdot \operatorname{Re}\left(e^{-i \arg f(x)} g(x)\right) = \operatorname{Re}\left(\overline{f(x)} g(x)\right),$$

то je (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Услов (2) je еквивалентан чињеници да затворени конвексни омотач скупа F садржи координатни почетак. Конвексни омотач скупа F састоји се од тачака облика $\int\limits_K \overline{f(x)}g(x)\,d\lambda(x)$, где je λ вероватносна мера чији je носач коначан подскуп скупа E_f. Дакле, $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_K \overline{f(x)}g(x)\,d\lambda_n(x)$, за низ мера λ_n. По Банах-Алаоглуовој теореми, јединична сфера у $C(K)^* \cong M(K)$ je слабо*-компактна, па постоји вероватносна мера $\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{n_k}$ за коју важе тражена својства, одакле следи да важи део (3).

Претпоставимо сада да важи (3). Тада за све $\lambda \in \mathbb{C}$, из $\mu(E_f) = \mu(K) = 1$ и чињенице да je $|f(x)| = \|f\|$ за $x \in E_f$, важи да je

$$\begin{aligned}\|f+\lambda g\|^2 &\geqslant \int\limits_{E_f} |f+\lambda g|^2(x)d\mu(x)\\ &= \|f\|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\int\limits_{E_f} \overline{f(x)}\lambda g(x)\,d\mu(x)\right) + |\lambda|^2 \int\limits_{E_f} |g(x)|^2\,d\mu(x)\\ &= \|f\|^2 + |\lambda|^2 \int\limits_{E_f} |g(x)|^2\,d\mu(x) \geqslant \|f\|^2,\end{aligned}$$

па je $f \perp g$, чиме je тврђење доказано. □

2.1.4 Бирхоф-Џејмсова ортогоналност на C^*-алгебрама и Хилбертовим C^*-модулима

Релација BJ ортогоналности се природно са нормираних простора проширује на C^*-алгебре и Хилбертове C^*-модуле. У овом делу приказаћемо карактеризације ове релације преко стања на C^*-алгебри.

Теорема 2.1.17. *Следећа тврђења су еквивалентна у C^*-алгебри A:*

(i) $a \perp b$;

(ii) Постоји стање $\varphi : A \to \mathbb{C}$ такво да je

$$\varphi(a^*a) = \|a\|^2 \text{ и } \varphi(a^*b) = 0.$$

Доказ. Ако постоји наведено стање φ, тада за све $\lambda \in \mathbb{C}$ важо

$$\|a\|^2 = |\varphi(a^*(a+\lambda b))| \leqslant \|a^*(a+\lambda b)\| \leqslant \|a\|\|a+\lambda b\|,$$

одакле закључујемо да је $a \perp b$.

Са друге стране, претпоставимо да је $a \perp b$. По другој Гељфанд-Најмарковој теореми, постоји утапање $\pi : A \to B(H)$ за одговарајући Хилбертов простор H. Онда је $\pi(a) \perp \pi(b)$, па по Теореми 2.1.7 постоји низ јединичних вектора $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такав да је

$$\lim_{n\to\infty} \|\pi(a)x_n\| = \|\pi(a)\| \text{ и } \lim_{n\to\infty} \langle \pi(a)x_n, \pi(b)x_n \rangle = 0.$$

Уочимо затим низ стања $\varphi_n : A \to \mathbb{C}$ дат са

$$\varphi_n(a) = \langle x_n, \pi(a)x_n \rangle \text{ за све } a \in A.$$

Тада је

$$\varphi_n(a^*a) = \|\pi(a)x_n\|^2 \text{ и } \varphi_n(a^*b) = 0.$$

Како је скуп свих стања на A слабо*-компактан подскуп скупа A^*, то $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има конвергентан подниз који конвергира ка неком стању φ у слабој*-топологији. Тада за φ из претходних закључака важи

$$\varphi(a^*a) = \|a\|^2 \text{ и } \varphi(a^*b) = 0,$$

што је и био циљ. □

Карактеризација BJ ортогоналности елемената Хилбертовог C^*-модула преко стања одговарајуће C^*-алгебре дата је у радовима [13] и [18]. Овде ћемо изложити приступ из другог наведеног рада. Претходно, биће нам потребна верзија Теореме 3.1.8, преведена на модул $B(H,K)$ што је Теорема 3.1 из рада [18].

Теорема 2.1.18. *Нека су H и K два Хилбертова простора и нека $A, B \in B(H,K)$. Тада је $A \perp B$ ако и само ако постоји низ јединичних вектора $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у H такав да је*

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|A\| \text{ и } \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, Bx_n \rangle = 0$$

Теорема 2.1.19. *Нека је V Хилбертов A-модул и нека су дати елементи $x, y \in V$. Тада $x \perp y$ ако и само ако постоји стање φ на A такво да је $\varphi(\langle x,x \rangle) = \|x\|^2$ и $\varphi(\langle x,y \rangle) = 0$.*

Доказ. Ако постоји тражено стање, из $\|\varphi\| \leqslant 1$ и услова, за све $\lambda \in \mathbb{C}$ важи

$$\begin{aligned}\|x + \lambda y\|^2 &= \|\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle\| \\ &\geqslant |\varphi(\langle x, x\rangle) + \lambda\varphi(\langle x, y\rangle) + \overline{\lambda}\varphi(\langle y, x\rangle) + |\lambda|^2\varphi(\langle y, y\rangle)| \\ &= \|x\|^2 + |\lambda|^2\varphi(\langle y, y\rangle) \geqslant \|x\|^2,\end{aligned}$$

па је $x \perp y$.

Са друге стране, ако је $x \perp y$, нека је $L : V \to B(H, K)$ изометричко улагање V у $B(H, K)$ дато у Теореми 1.3.12. Тада је

$$\|L(x) + \lambda L(y)\| \geqslant \|L(x)\|, \text{ за све } \lambda \in \mathbb{C}.$$

По Теореми 2.1.18, постоји низ јединичних вектора $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у H такав да је $\|L(x)x_n\| \to \|L(x)\|$ и $\langle L(x)x_n, L(y)x_n\rangle \to 0$ када $n \to \infty$. Дефинишимо пресликавања $\varphi_n : A \to \mathbb{C}$ са

$$\varphi_n(a) = \langle x_n, \pi(a)x_n\rangle,$$

где је $\pi : A \to B(H)$ верна репрезентација из Теореме 1.3.12. Тада су φ_n стања на C^*-алгебри A. Такође, приметимо да је

$$\varphi_n(\langle x, x\rangle) = \langle L(x)x_n, L(x)x_n\rangle \to \|L(x)\|^2 \text{ и } \varphi_n(\langle x, y\rangle) = \langle L(x)x_n, L(y)x_n\rangle \to 0,$$

кад $n \to \infty$. Како је скуп свих стања на A слабо*-компактан подскуп скупа A^*, то $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има конвергентан подниз који конвергира ка неком стању φ у слабој*-топологији. Тада за φ из претходних закључака важи

$$\varphi(\langle x, x\rangle) = \|x\|^2 \text{ и } \varphi(\langle x, y\rangle) = 0,$$

што је и био циљ. □

2.1.5 Својства Бирхоф-Џејмсове ортогоналности

У овом потпоглављу навешћемо још нека важна својства која поседује релација BJ ортогоналности.

Биће нам потребне следеће дефиниције.

Дефиниција 2.1.20. *Нека је X реалан или комплексан нормиран простор. Тада је X стриктно конвексан ако из $\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$ и $y \neq 0$ следи да постоји t такво да је $x = ty$.*

Дефиниција 2.1.21. *Нека је X реалан или комплексан нормиран простор. Кажемо да релација BJ ортогоналности има својство леве јединствености ако за све $x, y \in X$, $x \neq 0$, постоји највише један скалар α такав да је $(\alpha x + y) \perp x$. Слично, релација BJ ортогоналности има својство десне јединствености ако за све $x, y \in X$, $x \neq 0$, постоји највише један скалар α такав да је $x \perp (\alpha x + y)$.*

У наредном тврђењу обједињене су Теорема 1 и 2 из [34].

Теорема 2.1.22. *Нека је X реалан или комплексан нормиран простор.*

(а) Ако је $\dim X \geqslant 3$, тада је релација BJ ортогоналности у X симетрична ако и само ако је X простор са скаларним производом.

(б) Ако је $\dim X = 2$, тада је релација BJ ортогоналности у X лево адитивна ако и само ако је норма на X стриктно конвексна.

(в) Ако је $\dim X \geqslant 3$, тада је релација BJ ортогоналности у X лево адитивна ако и само ако је X простор са скаларним производом.

У тврђењу које следи, дате су Теореме 4.2 и 4.3 из [35].

Теорема 2.1.23. *Нека је X реалан или комплексан нормиран простор.*

(а) BJ ортогоналност на X има својство леве јединствености ако и само ако је норма на X стриктно конвексна.

(б) BJ ортогоналност на X има својство десне јединствености ако и само ако је норма на X глатка.

Наредно тврђење је Теорема 3.1. из рада [13] која приказује када су BJ ортогоналност и ортогоналност која потиче из скаларног производа на Хилбертовом C^*-модулу еквивалентне.

Теорема 2.1.24. *Нека је $V \neq \{0\}$ пун Хилбертов A-модул. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(а) за све $x, y \in V$ важи $(x \perp y) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$;

(б) C^*-алгебра A је изоморфна са $\mathbb{C}$.

2.2 Релација јаке Бирхоф-Џејмсове ортогоналности

Сада ћемо дефинисати нов тип ортогоналности на Хилбертовим C^*-модулима, која је уведен у [14]. Резултати које ћемо приказати у овом потпоглављу биће управо из тог рада.

Дефиниција 2.2.1. *Нека је A C^*-алгебра. Елемент x Хилбертовог A-модула V је јако BJ ортогоналан на елемент $y \in V$, у ознаци $x \perp^S y$, ако је*

$$\|x + ya\| \geqslant \|x\|, \text{ за све } a \in \mathcal{A}.$$

Став 2.2.2. *За све $x, y \in V$ важи*

$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp^S y \Rightarrow x \perp y.$$

Доказ. Ако важи $\langle x, y \rangle = 0$, тада за све $a \in A$ имамо да је

$$\|x + ya\|^2 = \|\langle x + ya, x + ya \rangle\| = \|\langle x, x \rangle + \langle ya, ya \rangle\| \geqslant \|\langle x, x \rangle\| = \|x\|^2,$$

тј. $x \perp^S y$. Даље, ако је $x \perp^S y$, онда за све $\lambda \in \mathbb{C}$ важи $\|x\| \leq \|x + \lambda y e_i\|$, $i \in I$, где је $(e_i)_{i \in I}$ апроксимативна јединица за A. Како је $\lim\limits_{i \in I} \|ye_i - y\| = 0$, добијамо да је $x \perp y$. □

Ниједна од претходних импликација не важи у другом смеру што показују следећи примери.

Пример 2.2.3. *Нека је $A = M_2(\mathbb{C})$, посматран као Хилбертов C^*-модул над собом.*

(1) *Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Тада је $I \perp A$ јер је*

$$\|I + \lambda A\| = \left\| \begin{bmatrix} 1+\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right\| = \max\{|1+\lambda|, |1-\lambda|\} \geqslant \|I\|$$

за све $\lambda \in \mathbb{C}$. Али $I \not\perp^S A$ јер уколико ставимо $B = -A$ добијамо $\|I + AB\| = 0 < \|I\|$.

(2) Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *За произвољан* $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ *важи*

$$\|I + AB\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 + b_1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| \geqslant 1 = \|I\|$$

Дакле $I \perp^S A$, *али* $\langle I, A \rangle = A \neq 0$.

У наредној теореми показаћемо карактеризацију јаке BJ ортогоналности. Најпре приметимо да је $x \perp^S y$ еквивалентно са $\|x\| \leq \|x + \lambda ya\|$ за све $a \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, тј.

$$x \perp^S y \Leftrightarrow (x \perp ya \text{ за све } a \in \mathcal{A}) \tag{2.2}$$

По Теореми 2.1.19 је $x \perp^S y$ ако и само ако за све $a \in A$ постоји стање φ_a на A такво да је $\varphi_a(\langle x, x \rangle) = \|x\|^2$ и $\varphi_a(\langle x, y \rangle a) = 0$. Следећа теорема показује да се ова еквиваленција може постићи једним јединим стањем φ.

Теорема 2.2.4. *Нека је* V *Хилбертов* A*-модул, и* $x, y \in V$. *Следећи услови су међусобно еквивалентни:*

(1) $x \perp^S y$;

(2) $x \perp y\langle y, x \rangle$;

(3) постоји стање φ *на* A *такво да је* $\varphi(\langle x, x \rangle) = \|x\|^2$ *и* $\varphi(\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle) = 0$;

(4) постоји стање φ *на* A *такво да је* $\varphi(\langle x, x \rangle) = \|x\|^2$ *и* $\varphi(\langle x, y \rangle a) = 0$ *за све* $a \in A$.

Доказ. Из карактеризације 2.2 следи да (1) $\Rightarrow$ (2), док из Теореме 2.1.19 имамо да (2) $\Leftrightarrow$ (3). Да бисмо показали да (3) $\Rightarrow$ (4), довољно је да приметимо да за све $a \in A$, по Коши-Шварцовој неједнакости, важи

$$|\varphi(\langle x, y \rangle a)|^2 \leq \varphi(\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle) \varphi(a^* a)$$

Коначно, импликација (4) $\Rightarrow$ (1) следи из карактеризације 2.2 и Теореме 2.1.19. □

Даље, бавићемо се својствима релације $\perp^S$. Показаћемо да се као у случају класичне BJ ортогоналности (Теорема 2.9 (a) из рада [13]), за елементе x и y Хилбертовог A-модула V, релација $x \perp^S y$ може описати помоћу ортогоналности одговарајућих елемената C^*-алгебре A.

Став 2.2.5. *Нека је V Хилбертов A-модул и нека $x, y \in V$. Тада важи:*

(а) $x \perp^S y \Leftrightarrow \langle x, x\rangle \perp^S \langle x, y\rangle$.

(б) Ако је A унитална и $x \perp^S y$, тада $\langle x, y\rangle$ нема десни инверз у A.

(в) $x \perp^S y \Leftrightarrow \big(x \perp^S ya$ *за све* $a \in A\big) \Leftrightarrow (x \perp ya$ *за све* $a \in A)$.

Доказ. (а) Ако је $x \perp^S y$, тада постоји стање φ такво да је $\varphi(\langle x, x\rangle) = \|x\|^2$ и $\varphi(\langle x, y\rangle a) = 0$ за све $a \in A$. Тада за све $a \in A$ важи

$$\|\langle x, x\rangle\| = \|x\|^2 = |\varphi(\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle a)| \leq \|\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle a\|,$$

па је $\langle x, x\rangle \perp^S \langle x, y\rangle$.

Обратно, ако је $\langle x, x\rangle \perp^S \langle x, y\rangle$ тада $\|\langle x, x\rangle\| \leq \|\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle a\|$ за све $a \in A$, тј. $\|x\|^2 \leq \|\langle x, x + ya\rangle\| \leq \|x\|\|x + ya\|$ за све $a \in A$, па је $x \perp^S y$.

(б) Нека је 1 јединица у A. Ако је $x \perp^S y$, тада постоји стање φ такво да је $\varphi(\langle x, x\rangle) = \|x\|^2$ и $\varphi(\langle x, y\rangle a) = 0$ за све $a \in A$. Нека $\langle x, y\rangle$ има десни инверз $b \in A$. Тада за $a = b$ важи $\varphi(1) = \varphi(\langle x, y\rangle b) = 0$, што је немогуће.

(в) Користећи апроксимативну јединицу за A, лако показујемо прву еквиваленцију, док смо већ констатовали да је $x \perp^S y \Leftrightarrow x \perp ya, \forall a \in A$.

□

Обрат дела (б) из претходног става не важи: за контрапример можемо узети произвољан елемент $x \neq 0$ такав да $\langle x, x\rangle$ није инвертибилан.

Покажимо још да релација $\perp^S$ дефинисана на униталној C^*-алгебри није адитивна и није симетрична, као и да је јединица јако BJ ортогонална на све самоадјунговане елементе.

Напомена 2.2.6. *Нека је A унитална C^*-алгебра и схватимо је као Хилбертов C^*-модул над собом.*

(а) Ако је $a \in A$ такав да aa^* није инвертибилан, тада $0 \in \sigma(aa^*)$. Тада постоји стање φ на A такво да је $\varphi(aa^*) = 0$. По Теореми 2.2.4(3) можемо закључити да је $1 \perp^S a$. Ако је $a \in A$ неинвертибилан, тада је бар један од елемената aa^* и a^*a неинвертибилан. Одатле, $1 \perp^S a$ или $1 \perp^S a^*$ за сваки неинвертибилан $a \in A$. Посебно, $1 \perp^S a$ за сваки самоадјунгован неинвертибилан $a \in A$.

(б) *Релација* $\perp^S$ *није адитивна. Наиме, нека је ненула елемент* $a \in A$ *неинвертибилан и позитиван. Тада је* $\|a\|1 - a \in A$ *такође ненула неинвертибилан позитиван елемент, па из (а) имамо да је* $1 \perp^S a$ *и* $1 \perp^S (\|a\|1 - a)$, *док* $1 \not\perp^S (a + (\|a\|1 - a))$ *- довољно је узети* $c = -\frac{1}{\|a\|}1$ *и онда је* $\|1 + \|a\|c\| = 0 < 1$.

Релација $\perp^S$ *није ни симетрична. Наиме, по Теореми 2.2.4,* $a \perp^S 1 \Leftrightarrow a \perp 1\langle 1, a\rangle \Leftrightarrow a \perp a \Leftrightarrow a = 0$ *док је, по (а),* $1 \perp^S a$ *за све неинвертибилне самоадјунговане елементе* $a \in A$.

Комбинујући Теорему 2.1.7 и Теорему 2.2.4 закључујемо следеће:

Теорема 2.2.7. *За све* $A, B \in B(H)$ *важи:*

(1) *Ако је* $\dim H < \infty$, *онда је* $A \perp^S B$ *ако и само ако постоји јединични вектор* $x \in H$ *такав да је* $\|Ax\| = \|A\|$ *и* $B^*Ax = 0$.

(2) *Ако је* $\dim H = \infty$, *онда је* $A \perp^S B$ *ако и само ако постоји низ јединичних вектора* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ *такав да је* $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|A\|$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} B^*Ax_n = 0$.

Посебно, за ненула позитиван оператор $A \in B(H)$ *следећа тврђења важе:*

(п1) *Ако је* $\dim H < \infty$, *онда је* $A \perp^S B$ *ако и само ако постоји јединични вектор* $x \in H$ *такав да је* $Ax = \|A\|x$ *и* $B^*x = 0$.

(п2) *Ако је* $\dim H = \infty$, *онда је* $A \perp^S B$ *ако и само ако постоји низ јединичних вектора* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ *такав да је* $\lim\limits_{n\to\infty} (Ax_n - \|A\|x_n) = 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} B^*x_n = 0$.

Доказ. По Теореми 2.2.4, $A \perp^S B \Leftrightarrow A \perp B\langle B, A\rangle$, тј. $A \perp BB^*A$

Нека је $\dim H < \infty$. По Теореми 2.1.7, $A \perp BB^*A$ ако и само ако постоји јединични вектор $x \in H$ такав да је $\|Ax\| = \|A\|$ и $\langle Ax, BB^*Ax\rangle = 0$. Како је $\|B^*Ax\|^2 = \langle Ax, BB^*Ax\rangle$, тврђење под (1) је доказано. Користећи теорему 2.1.7(б), слично показујемо део под (2).

Претпоставимо да је A ненула и позитиван оператор. Користићемо Лему 2.1 из рада [83] која каже да када год је (x_n) низ јединичних вектора у H такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|A\|$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} (Ax_n - \|A\|x_n) = 0$. Посебно, ако је x јединични вектор у H такав да је $\|Ax\| = \|A\|$, онда је $Ax = \|A\|x$.

У случају да је $\dim H < \infty$, показали смо да је $A \perp^S B$ ако и само ако је $\|Ax\| = \|A\|$ и $B^*Ax = 0$ за неки јединични вектор $x \in H$. Како је $A \geqslant 0$, то је $\|Ax\| = \|A\| \Leftrightarrow Ax = \|A\|x$. Дакле, $B^*Ax = 0 \Leftrightarrow B^*x = 0$ јер $A \neq 0$.

Ако је $\dim H = \infty$ онда је $A \perp^S B$ ако и само ако постоји низ јединичних вектора $(x_n) \subset H$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|A\|$ и $\lim\limits_{n\to\infty} B^*Ax_n = 0$. Први услов је еквивалентан са $\lim\limits_{n\to\infty} (Ax_n - \|A\|x_n) = 0$. Са друге стране, ако је $\lim\limits_{n\to\infty} B^*Ax_n = 0$ онда је

$$\lim_{n\to\infty} B^*x_n = -\|A\|^{-1}B^*\left(\lim_{n\to\infty}(Ax_n - \|A\|x_n)\right) = 0$$

и ако је $\lim\limits_{n\to\infty} B^*x_n = 0$ онда је

$$\lim_{n\to\infty} B^*Ax_n = B^*\left(\lim_{n\to\infty}(Ax_n - \|A\|x_n)\right) = 0$$

па су и други услови међусобно еквивалентни. □

Тада по Ставу 2.2.5(а), $A \perp^S B$ ако и само ако је $A^*A \perp^S A^*B$. Како су $A^*A, A^*B \in B(H)$ и A^*A је позитиван, можемо применити Теорему 2.2.7 из које следи наредно тврђење.

Последица 2.2.8. *Нека $A, B \in B(H, K)$.*

(а) Ако је $\dim H < \infty$, онда је $A \perp^S B$ ако и само ако постоји јединични вектор $x \in H$ такав да је $A^*Ax = \|A\|^2 x$ и $B^*Ax = 0$.

(б) Ако је $\dim H = \infty$, онда је $A \perp^S B$ ако и само ако постоји низ јединичних вектора $(x_n) \subset H$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} \left(A^*Ax_n - \|A\|^2 x_n\right) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} B^*Ax_n = 0$.

У случају Хилбертовох C^*-модула над C^*-алгебром $K(H)$ компактних оператора, Теорема 2.1.19 и Теорема 2.2.4 могу се формулисати на следећи начин. Подсетимо се да оператор $p : H \to H$ на сепарабилном Хилбертовом простору H називамо *траговитим* ако је *траг* (у ознаци tr)

$$\mathrm{tr}(|p|) = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle |p|e_k, e_k\rangle,$$

коначан, при чему је $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ортонормирана база за H. Скуп свих траговитих оператора на Хилбертовом простору H означаваћемо са $T(H)$. Ако $p \in T(H)$, тада се норма дефинише као $\|p\|_1 = \mathrm{tr}(|p|)$.

Став 2.2.9. *Нека је V Хилбертов $K(H)$-модул и $x, y \in V$.*

(а) $x \perp y$ *ако и само ако постоји постоји позитиван оператор* $p \in T(H)$ *трага 1, такав да је* $\mathrm{tr}(p\langle x, x\rangle) = \|x\|^2$ *и* $\mathrm{tr}(p\langle x, y\rangle) = 0$*.*

(б) $x \perp^S y$ *ако и само ако постоји позитиван оператор* $p \in T(H)$ *трага 1, такав да је* $\mathrm{tr}(p\langle x, x\rangle) = \|x\|^2$ *и* $p\langle x, y\rangle = 0$*.*

Доказ. (а) Ово следи на основу Теореме 2.1.19 и чињенице да је свако стање φ на $K(H)$ облика $a \mapsto \mathrm{tr}(pa)$ за неки позитиван оператор $p \in T(H)$ трага 1.

(б) Ако $x \perp^S y$ тада по Теореми 2.2.4, постоји стање $\varphi : K(H) \to \mathbb{C}$ такво да је $\varphi(\langle x, x\rangle) = \|x\|^2$ и $\varphi(\langle x, y\rangle a) = 0$ за све $a \in K(H)$. Нека је $p \in T(H)$ позитиван оператор трага 1 такав да је $\varphi(a) = \mathrm{tr}(pa), a \in K(H)$. Тада је $\mathrm{tr}(p\langle x, x\rangle) = \|x\|^2$ и $\mathrm{tr}(p\langle x, y\rangle a) = 0$ за све $a \in K(H)$. За $a = \langle y, x\rangle p$ добијамо да је $\mathrm{tr}(p\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle p) = 0$. Како је $p\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle p$ је позитиван оператор трага нула, он мора бити 0, па је $p\langle x, y\rangle = 0$.

Обратно, нека постоји позитиван оператор $p \in T(H)$ трага 1, такав да је $p\langle x, y\rangle = 0$ и $\mathrm{tr}(p\langle x, x\rangle) = \|x\|^2$. Како је p позитиван оператор трага 1, можемо дефинисати стање φ на $K(H)$ са $\varphi(a) = \mathrm{tr}(pa), a \in K(H)$. Тада је $\varphi(\langle x, x\rangle) = \mathrm{tr}(p\langle x, x\rangle) = \|x\|^2$ и $\varphi(\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle) = \mathrm{tr}(p\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle) = 0$. По Теореми 2.2.4 можемо закључити да је $x \perp^S y$.

□

На крају овог дела, наводимо кључни резултат из рада [8] (Теорема 2.6.) који описује када је јака BJ ортогоналност на Хилбертовом C^*-модулу симетрична релација:

Теорема 2.2.10. *Нека је* A *произвољна* C^**-алгебра и* V *пун Хилбертов* A*-модул. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(а) $\perp$ *је симетрична релација;*

(б) $\perp^S$ *је симетрична релација;*

(в) $\perp^S$ *се поклапа са ортогоналношћу индукованом скаларним производом;*

(г) A *или* $K(V)$ *су изоморфне са* $\mathbb{C}$*.*

2.3 Редукција релације јаке Бирхоф-Џејмсове ортогоналности на позитивне елементе и независност од амбијента

Најпре ћемо посматрати релацију јаке BJ ортогоналности на C^*-алгебри A као Хилбертовом C^*-модулом над собом. Дакле, за елементе a и b C^*-алгебре A рећи ћемо да су јако BJ ортогонални ($a \perp^S b$) ако и само ако је $\|a+bc\| \geqslant \|a\|$ за све $c \in A$.

Наредне две леме су део оригиналних резултата из рада [45]. У њима ћемо показати да релација јаке BJ ортогоналност (на C^*-алгебрама) између a и b зависи само од минималне подалгебре која садржи a и b, као и да зависи само од апсолутних вредности $|a^*| = (aa^*)^{1/2}$ и $|b^*| = (bb^*)^{1/2}$.

Лема 2.3.1. *Нека су $A \subseteq B$ две C^*-алгебре и нека $a, b \in A$. Тада је $a \perp^S b$ у A ако и само ако је $a \perp^S b$ у B.*

Доказ. По Теореми 2.2.4, у произвољном Хилбертовом C^*-модулу важи да је $a \perp^S b$ ако и само ако је $a \perp b \langle b, a\rangle$. У случају када је Хилбертов C^*-модул заправо C^*-алгебра над собом, скаларни производ је дат са $\langle b, a\rangle = b^*a$. Дакле

$$a \perp^S b \quad \text{ако и само ако је} \quad a \perp bb^*a. \tag{2.3}$$

Одавде следи закључак, јер стандардна BJ ортогоналност зависи само од линеарног омотача елемената a и bb^*a. □

Напомена 2.3.2. *Другим речима, јака BJ ортогоналност је унутрашње својство a и b и не зависи од амбијенталне алгебре.*

Сада докажимо и да можемо прећи искључиво на позитивне елементе.

Лема 2.3.3. *Важи да је $a \perp^S b$ ако и само ако је $|a^*| \perp^S |b^*|$.*

Доказ. Наиме, како је $|b^*||b^*|^* = (bb^*)^{1/2}(bb^*)^{1/2} = bb^*$ из 2.3 добијамо да је $a \perp^S b$ ако и само ако је $a \perp^S |b^*|$.

Посматрајмо елементе a и $b \in A$ и овојницу A'' која је фон Нојманова алгебра. Постоји парцијална изометрија $v \in A''$ таква да је $a = |a^*|v$ и $|a^*| = av^*$. Претпоставимо да је $|a^*| \perp^S b$. Тада за све $c \in A \subseteq A''$ имамо да је

$$\|a\| = \||a^*|v\| \leq \||a^*|\| \leq \||a^*| + bcv^*\| = \|(a + bc)v^*\| \leq \|a + bc\|,$$

одакле можемо закључити да је $a \perp^S b$. Слично, у другом смеру, ако је $a \perp^S b$ и $c \in A$ произвољно, тада је

$$\||a^*|\| = \|av^*\| \leq \|a\| \leq \|a + bcv\| = \|(|a^*| + bc)v\| \leq \||a^*| + bc\|,$$

одакле закључујемо да је $|a^*| \perp^S b$. Одатле је $a \perp^S b$ еквивалентно са $a \perp^S |b^*|$, што је еквивалентно са $|a^*| \perp^S |b^*|$, чиме је тврђење доказано. □

У раду [7] је показано да јака BJ ортогоналност не зависи од Хилбертовог C^*-модула, тј. уопштен је резултат из Леме 2.3.1. Следећа лема представља Став 3.1. из поменутог рада.

Лема 2.3.4. *Нека је B C^*-подалгебра C^*-алгебре A, V Хилбертов A-модул и U Хилбертов B-подмодул модула V. За елементе $x, y \in U$ важи да је $x \perp^S y$ у U ако и само ако је $x \perp^S y$ у V.*

Доказ. Идеја је слична као у Леми 2.3.1. Довољно је приметити да су оба $x \perp^S y$ у U, односно $x \perp^S y$ у V, еквивалентни са $x \perp y\langle y, x\rangle$. □

Глава 3

Ортограф придружен релацији јаке BJ ортогоналности

Својства неке бинарне релације можемо проучавати помоћу њој придруженог графа. На овај начин је проучавана ортогоналност на асоцијативним прстенима у радовима [16] и [29], док је релација BJ ортогоналности на C^*-алгебрама разматрана у раду [9] одакле ће и највећи број резултата у овој глави бити приказан.

Нека је A произвољна C^*-алгебра схваћена као десни Хилбертов модул над собом. Подсетимо се да релација јаке BJ ортогоналности није симетрична релација. Како ће нам жеља бити да посматрамо неусмерен граф, увешћемо такозвану јаку узајамно BJ ортогоналност.

Дефиниција 3.0.1. *За елементе $a, b \in A$ кажемо да су јако узајамно BJ ортогонални (и пишемо $a \perp\!\!\!\perp^S b$), ако је $a \perp^S b$ и $b \perp^S a$.*

Посматраћемо граф, кога ћемо звати ортограф, придружен релацији $\perp\!\!\!\perp^S$. Прецизније, $\Gamma(A)$ је граф чији су чворови

$$V(\Gamma(A)) = \{[a] = \mathbb{C}a \mid a \in A \backslash \{0\}\}$$

при чему су чворови $[a], [b] \in V(\Gamma(A))$ повезани ако је $a \perp\!\!\!\perp^S b$. На даље, чворове ћемо идентификовати са њиховим представницима, па ћемо писати a уместо $[a]$.

Подсетимо се основних дефиниција из теорије графова. Граф је повезан ако постоји пут између произвољна два чвора графа. Компонента повезаности графа је максималан, у односу на инклузију, повезан подграф. Растојање између два различита чвора графа је дужина најкраћег пута између њих. Ако не постоји пут између нека два чвора, њихово растојање је ∞. Дијаметар графа $\Gamma(A)$ (у ознаци $\operatorname{diam}(\Gamma(A))$) је максимум свих растојања између чворова у графу. Слично се дефинише растојање компоненте повезаности графа. Кажемо да је чвор графа изолован ако не постоји пут између њега и било ког другог чвора у графу. Када говоримо о дијаметру графа, заправо ћемо увек говорити о дијаметру компоненте повезаности, тј. из разматрања ћемо најпре избацити изоловане тачке.

У овом делу наћи ћемо тачан дијаметар три типа C^*-алгебри: $B(H), C(K)$ и $C_0(\Omega)$ као примера неуниталне C^*-алгебре.

Лема 3.0.2. *Ако је b десно инвертибилан елемент у униталној C^*-алгебри A, онда $a \perp\!\!\!\perp^S b$ повлачи да је $a = 0$. Посебно, десно инвертибилни елементи у униталној C^*-алгебри су изоловане тачке графа $\Gamma(A)$.*

Доказ. Нека је $a \in A$ такав да је $a \perp\!\!\!\perp^S b$. Ставимо $c = -b_r^{-1}a$, где је b_r^{-1} десни инверз елемента b. Добијамо $\|a\| \leq \left\|a - bb_r^{-1}a\right\| = 0$, одакле закључујемо $a = 0$. □

3.1 Дијаметар C^*-алгебре $B(H)$

3.1.1 H је коначно димензионалан Хилбертов простор

Више пута ћемо користити карактеризацију BJ ортогоналности из Теореме 2.2.7.

У даљем тексту, слику, односно језгро оператора $A \in B(H)$ означаваћемо са $\operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Ker} A$, редом. Затворење линеарног омотача подскупа V Хилбертовог простора H означаваћемо са $\overline{\operatorname{span} V}$.

Како је на коначно димензионалном простору оператор $A \in B(H)$ инвертибилан ако и само ако је десно инвертибилан, преостаје да размотримо дужину пута између неинвертибилних елемената у $B(H)$. Приметимо и да неинвертибилан елеменент никада није изолован чвор. Наиме, ако је A неинвертибилан, онда постоји ненула $x \perp \operatorname{Im} A$, па за ортогоналну пројекцију P на $\operatorname{span}\{x\}$ имамо да важи $P^*A = 0$, што нам даје $P \perp\!\!\!\perp^S A$.

Почећемо са случајем када је H дводимензионалан. Наредна лема је само последица Теореме 2.2.7, јер уколико је A оператор ранга 1 (а то су једини неинвертибилни у овом случају) и $A \perp\!\!\!\perp^S B$, онда је $A^*B = 0$.

Лема 3.1.1. *Нека је* H *Хилбертов простор,* $\dim H = 2$ *и нека су* $A, B \in B(H)$ *ненула неинвертибилни оператори. Тада је:*

$$A \perp\!\!\!\perp^S B \Leftrightarrow A^*B = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} A \perp \operatorname{Im} B.$$

Став 3.1.2. *Нека је* H *Хилбертов простор,* $\dim H = 2$ *и нека су* $A, B \in B(H)$ *ненула неинвертибилни оператори. Даље, нека постоје* $n \in \mathbb{N}$ *и ненула оператори* $C_1, \dots, C_n$ *у* $B(H)$ *тако да је* $A \perp\!\!\!\perp^S C_1 \perp\!\!\!\perp^S \cdots \perp\!\!\!\perp^S C_n \perp\!\!\!\perp^S B$*. Тада је* $A^*B = 0$ *или је* $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$*.*

Доказ. По Леми 3.0.2, сви C_i морају бити неинвертибилни.

Претпоставимо да постоји $C_1 \in B(H)$ такав да је $A \perp\!\!\!\perp^S C_1 \perp\!\!\!\perp^S B$. Тада је по претходној леми $\operatorname{Im} A \perp \operatorname{Im} C_1$ и $\operatorname{Im} C_1 \perp \operatorname{Im} B$, па је $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$. Исти закључак следи за произвољан пут парне дужине.

Сада претпоставимо да постоје $C_1, C_2 \in B(H)$ такви да је $A \perp\!\!\!\perp^S C_1 \perp\!\!\!\perp^S C_2 \perp\!\!\!\perp^S B$. Као и у претходном пасусу, $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} C_2 \perp \operatorname{Im} B$ па је $A^*B = 0$. Поново, исти закључак следи за произвољан пут непарне дужине, чиме је доказ завршен. □

Сада можемо описати компоненте повезаности у случају $\dim H = 2$ и одредити њихове дијаметре.

Став 3.1.3. *Нека је* H *Хилбертов простор и* $\dim H = 2$*. Компоненте повезаности ортографа* $\Gamma(B(H))$ *су или изоловане тачке или скупови облика*

$$\mathcal{S}_x = \left\{ A \in B(H) : \operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{x\} \text{ или } \operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{x\}^{\perp} \right\},$$

где је $x \in H$ *ненула вектор. Дијаметар сваког* $\mathcal{S}_x$ *је 2.*

Доказ. Нека $A, B \in \mathcal{S}_x$ за неки ненула $x \in H$. Тада је или $\operatorname{Im} A \perp \operatorname{Im} B$ или $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$. У првом случају је $A \perp\!\!\!\perp^S B$. У другом, узмимо произвољну ортогоналну пројекцију P ранга један на $(\operatorname{Im} A)^{\perp}$. Тада $P \in \mathcal{S}_x$ и важи $A \perp\!\!\!\perp^S P \perp\!\!\!\perp^S B$. Дакле, $\mathcal{S}_x$ је повезан и његов дијаметар је 2.

Показаћемо да су све компоненте повезаности са више од једног елемента баш овог облика. Нека је $\mathcal{S}'$ једна таква компонента повезаности и нека је ненула елемент A у њој. Како A није изолована тачка, то A мора бити неинвертибилан. Дакле, постоји ненула $x \in H$ тако да је $\operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{x\}$. Покажимо да је $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_x$. Ако $B \in \mathcal{S}'$ онда је по претходном ставу $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$ или $\operatorname{Im} A \perp \operatorname{Im} B$, одакле следи да је $B \in \mathcal{S}_x$, па закључујемо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}_x$. У другом смеру, претпоставимо да $B \in \mathcal{S}_x$. Тада је B повезан са A по првом делу доказа, одакле $B \in \mathcal{S}'$, па је тиме показана и супротна инклузија. $\square$

У случају када је $\dim H \geqslant 3$, ситуација је другачија. Следећи став показује да тада можемо спојити било која два неизолована чвора у највише 4 потеза.

Став 3.1.4. *Нека је H Хилбертов простор такав да је $3 \leq \dim H < \infty$. Даље, нека су $A, B \in B(H)$ ненула неинвертибилни оператори. Тада постоје ненула оператори $C_1, C_2, C_3 \in B(H)$ такви да је $A \perp\!\!\!\perp^S C_1 \perp\!\!\!\perp^S C_2 \perp\!\!\!\perp^S C_3 \perp\!\!\!\perp^S B$.*

Доказ. Како су A и B неинвертибилни, то постоје ненула вектори $v_A \in \operatorname{Ker} A^*$ и $v_B \in \operatorname{Ker} B^*$. Узмимо ненула вектор $v \in \operatorname{span}\{v_A, v_B\}^\perp$. Нека су сада $C_1, C_2, C_3 \in B(H)$ ортогоналне пројекције на $\operatorname{span}\{v_A\}$, $\operatorname{span}\{v\}$, односно $\operatorname{span}\{v_B\}$, редом. Тада је $A^*C_1 = C_1^*C_2 = C_2^*C_3 = C_3^*B = 0$ па важи тврђење. $\square$

Сада ћемо, са друге стране, показати да када је $\dim H \geqslant 3$, постоје неинвертибилни $A, B \in B(H)$ које не можемо повезати путем дужине 2.

Пример 3.1.5. *Нека је H (коначан или бесконачан) Хилбертов простор такав да је $\dim H \geqslant 3$ и $e_1, e_2 \in H$ међусобно ортогонални јединични вектори. Нека је $A \in B(H)$ ортогонална пројекција на $\operatorname{span}\{e_1\}$. Даље, нека је $B \in B(H)$ дефинисан са $Be_1 = Be_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ и $Bx = \frac{1}{2}x$ за $x \in \operatorname{span}\{e_1, e_2\}^\perp$. Тада се A и B не могу повезати путем дужине 2.*

Доказ. Докажимо најпре да A и B нису јако узајамно ортогонални. Приметимо да су A и B самоадјунговани и неинвертибилни, као и да је $\operatorname{Ker} A^* = \operatorname{span}\{e_1\}^\perp$ и $\operatorname{Ker} B^* = \operatorname{span}\{e_1 - e_2\}$. Како је $A^*B \neq 0$, из Става 2.3 из рада [15] закључујемо да $A \not\perp\!\!\!\perp^S B$.

Претпоставимо сада да постоји $C \in B(H)$ такав да је $A \perp\!\!\!\perp^S C \perp\!\!\!\perp^S B$. Опет по Ставу 2.3 из рада [15], из $A \perp\!\!\!\perp^S C$ следи да је $C^*A = 0$, па је $\operatorname{Im} C \perp \operatorname{span}\{e_1\}$. По Теореми 2.2.7, како је $C \perp\!\!\!\perp^S B$, постоји низ јединичних вектора $x_n \in H$ таквих да је $\lim_{n\to\infty} \|Cx_n\| = \|C\|$ и $\lim_{n\to\infty} B^*Cx_n = 0$. Како је $Cx_n \perp e_1$ за све $n \in \mathbb{N}$, имамо да је $Cx_n = \lambda_n e_2 + y_n$ за неке $\lambda_n \in \mathbb{C}$ и $y_n \in \operatorname{span}\{e_1, e_2\}^\perp$. Из $\lim_{n\to\infty} B^*Cx_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\lambda_n (e_1 + e_2) + \frac{1}{2}y_n\right) = 0$ добијамо да је $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Онда је $\lim_{n\to\infty} Cx_n = 0$, па је $\|C\| = 0$, тј. $C = 0$. Тиме смо доказали тврђење. $\square$

Наредни став показује да када је $\dim H \geqslant 4$, тада се пут из Става 3.1.4 може скратити за 1.

Став 3.1.6. *Нека је H Хилбертов простор такав да је $4 \leq \dim H < \infty$. Нека су $A, B \in B(H)$ ненула неинвертибилни оператори. Онда постоје ненула оператори $C_1, C_2 \in B(H)$ такви да важи $A \perp\!\!\perp^S C_1 \perp\!\!\perp^S C_2 \perp\!\!\perp^S B$.*

Доказ. Нека су $x, y \in H$ јединични вектори такви да је $\|Ax\| = \|A\|$ и $\|By\| = \|B\|$. Како су A и B неинвертибилни, постоје јединични вектори $v_A \in \operatorname{Ker} A^*$ и $v_B \in \operatorname{Ker} B^*$. Ако је скаларни производ $\langle v_A, v_B \rangle = 0$, дефинишимо $v = v_A$ и $w = v_B$.

Са друге стране, ако је $\langle v_A, v_B \rangle \neq 0$, узмимо јединични вектор $v \in \operatorname{span}\{Ax, v_B\}^\perp$, а потом и јединични вектор $w \in \operatorname{span}\{By, v_A, v\}^\perp$. Дефинишимо $C_1, C_2 \in B(H)$ са

$$\begin{aligned} C_1 v_A &= v_A, \quad C_1 v = v, \quad C_1|_{\operatorname{span}\{v_A, v\}^\perp} = 0, \\ C_2 v_B &= v_B, \quad C_2 w = w, \quad C_2|_{\operatorname{span}\{v_B, w\}^\perp} = 0. \end{aligned}$$

Приметимо да је $\|C_1 v_A\| = \|C_1 v\| = \|C_1\|$ и $\|C_2 w\| = \|C_2 v_B\| = \|C_2\|$. Како је $Ax \perp \operatorname{Im} C_1$, важи $C_1^* Ax = 0$. Такође важи $A^* C_1 v_A = 0$. Даље је по Теореми 2.2.7, $A \perp\!\!\perp^S C_1$. Из чињенице да је $w \perp \operatorname{Im} C_1$ следи $C_1^* C_2 w = C_1^* w = 0$, док из $v \perp \operatorname{Im} C_2$ закључујемо да је $C_2^* C_1 v = C_2^* v = 0$. Овим смо доказали да је $C_1 \perp\!\!\perp^S C_2$. Даље, како је $By \perp \operatorname{Im} C_2$, имамо да је $C_2^* By = 0$. Такође важи $B^* C_2 v_B = B^* v_B = 0$, па је $C_2 \perp\!\!\perp^S B$, чиме је доказ завршен. □

Одавде закључујемо да је дијаметар у случају $\dim H \geqslant 4$ једнак 3. Дакле, остало је да нађемо дијаметар у случају када је $\dim H = 3$. Наредни пример показује да је он једнак 4.

Пример 3.1.7. *Нека је H Хилбертов простор такав да је $\dim H = 3$. Нека је $\{e_1, e_2, e_3\}$ ортонормирана база за H и операторе A и $B \in B(H)$ дефинишемо на следећи начин:*

$$\begin{aligned} Ae_1 &= Ae_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2), \quad Ae_3 = \frac{1}{2}e_3, \\ Be_1 &= \frac{1}{2}e_1, \quad Be_2 = Be_3 = \frac{1}{2}(e_2 + e_3). \end{aligned}$$

Тада је дужина пута између A и B једнака 4.

Доказ. Доказаћемо редом следеће:

(i) $A \not\perp\!\!\!\perp^S B$;

(ii) Ако је $A \perp\!\!\!\perp^S C \perp\!\!\!\perp^S B$, тада је $C = 0$;

(iii) Ако је $A \perp\!\!\!\perp^S C_1 \perp\!\!\!\perp^S C_2 \perp\!\!\!\perp^S B$, тада је $C_1 = 0$ или је $C_2 = 0$.

Најпре, приметимо да за A и B важе наредне особине: $A^* = A, B^* = B, \|A\| = \|B\| = 1$, $\operatorname{Ker} A^* = \operatorname{span}\{e_1 - e_2\}$, $\operatorname{Ker} B^* = \operatorname{span}\{e_2 - e_3\}$. Такође је $A(e_1 + e_2) = e_1 + e_2$ и $B(e_2 + e_3) = e_2 + e_3$. После кратког рачуна можемо добити да је $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$ ако и само ако $x \in \operatorname{span}\{e_1 + e_2\}$, док $\|By\| = \|B\|\|y\|$ ако и само ако $y \in \operatorname{span}\{e_2 + e_3\}$.

(i) Прво, претпоставимо да је $A \perp\!\!\!\perp^S B$. Тада постоји јединични вектор $x \in H$ такав да је $\|Ax\| = \|A\|$ и $B^*Ax = 0$. Тада $x \in \operatorname{span}\{e_1 + e_2\}$, па је $x = Ax \in \operatorname{Ker} B^* = \operatorname{span}\{e_2 - e_3\}$. Контрадикција. Дакле, $A \not\perp\!\!\!\perp^S B$.

(ii) Претпоставимо даље да постоји $C \in B(H)$ такав да је $A \perp\!\!\!\perp^S C \perp\!\!\!\perp^S B$. Како је $C \perp^S A$, постоји јединични вектор $u \in H$ такав да је $A^*Cu = 0$ и $\|Cu\| = \|C\|$. Дакле, $Cu \in \operatorname{Ker} A^*$, па је $Cu = \lambda(e_1 - e_2)$ за неки скалар $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, одакле $e_1 - e_2 \in \operatorname{Im} C$. Даље, како је $B \perp\!\!\!\perp^S C$ и $\|By\| = \|B\|\|y\|$ ако и само ако $y \in \operatorname{span}\{e_2 + e_3\}$, имамо да је $C^*B(e_2 + e_3) = 0$, тј. $C^*(e_2 + e_3) = 0$. Закључујемо да $e_2 + e_3 \in \operatorname{Ker} C^*$ одакле следи да је $\langle e_2 + e_3, e_1 - e_2 \rangle = 0$, јер $e_1 - e_2 \in \operatorname{Im} C$. Но ово није тачно, па добијамо контрадикцију.

(iii) На крају, претпоставимо да постоје ненула $C_1, C_2 \in B(H)$ такви да

$$A \perp\!\!\!\perp^S C_1 \perp\!\!\!\perp^S C_2 \perp\!\!\!\perp^S B.$$

Како је $A \perp\!\!\!\perp^S C_1$ и $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$ ако и само ако $x \in \operatorname{span}\{e_1 + e_2\}$, добијамо да је $C_1^*A(e_1 + e_2) = 0$, одакле следи $C_1^*(e_1 + e_2) = 0$, тј. $e_1 + e_2 \in \operatorname{Ker} C_1^*$. Како је $C_1 \perp\!\!\!\perp^S A$, постоји јединични вектор $u_1 \in H$ такав да је $\|C_1u_1\| = \|C_1\|$ и $A^*C_1u_1 = 0$. Дакле, $C_1u_1 \in \operatorname{Ker} A^*$, па је $C_1u_1 = \lambda(e_1 - e_2)$ за неки скалар $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, одакле закључујемо да $e_1 - e_2 \in \operatorname{Im} C_1$. Како је $C_1 \perp\!\!\!\perp^S A$, постоје јединични вектори $u_2, u_3 \in H$ такви да је $\|C_1u_2\| = \|C_1\|, \|C_2u_3\| = \|C_2\|, C_2^*C_1u_2 = 0$ и $C_1^*C_2u_3 = 0$. Онда $C_1u_2 \in \operatorname{Ker} C_2^*$ и $C_2u_3 \in \operatorname{Ker} C_1^*$. Како је $B \perp\!\!\!\perp^S C_2$ и $\|By\| = \|B\|\|y\|$ важи ако и само ако $y \in \operatorname{span}\{e_2 + e_3\}$, имамо да је $C_2^*B(e_2 + e_3) = 0$ одакле следи да је $C_2^*(e_2 + e_3) = 0$, т.ј. $e_2 + e_3 \in \operatorname{Ker} C_2^*$. Коначно, како

$C_2 \perp\!\!\!\perp^S B$, постоји јединични вектор $u_4 \in H$ такав да је $\|C_2 u_4\| = \|C_2\|$ и $B^* C_2 u_4 = 0$. Дакле, $C_2 u_4 \in \operatorname{Ker} B^*$, па је $C_2 u_4 = \mu\,(e_2 - e_3)$ за неки скалар $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Одатле закључујемо да $e_2 - e_3 \in \operatorname{Im} C_2$. Све заједно, добили смо да важи:

$$\begin{aligned} e_1 + e_2, C_2 u_3 &\in \operatorname{Ker} C_1^*, \quad & e_1 - e_2, C_1 u_2 &\in \operatorname{Im} C_1, \\ e_2 + e_3, C_1 u_2 &\in \operatorname{Ker} C_2^*, \quad & e_2 - e_3, C_2 u_3 &\in \operatorname{Im} C_2. \end{aligned}$$

Ако важи да је $\dim \operatorname{Ker} C_1^* = 1$, онда је $C_2 u_3 = v\,(e_1 + e_2)$ за неки скалар $v \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Но, ово не може важити јер $e_2 + e_3 \in \operatorname{Ker} C_2^*$, па је $\langle C_2 u_3, e_2 + e_3 \rangle = 0$, што није тачно.

Закључујемо да је онда $\dim \operatorname{Ker} C_1^* \geqslant 2$. Како је $C_1 \neq 0$ и $\dim H = 3$, добијамо да је $\dim \operatorname{Ker} C_1^* = 2$ и $\dim \operatorname{Im} C_1 = 1$. Онда је $C_1 u_2 = \kappa\,(e_1 - e_2)$ за неки скалар $\kappa \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Но, то је у контрадикцији са $\langle C_1 u_2 \mid e_2 - e_3 \rangle = 0$, јер $e_2 - e_3 \in \operatorname{Im} C_2$ и $C_1 u_2 \in \operatorname{Ker} C_2^*$.

Овим смо доказали да је дужина пута између A и B једнака 4. □

На крају, сумирајмо добијене резултате у једној теореми.

Теорема 3.1.8. *Нека је $\mathcal{S}$ скуп свих ненула неинвертибилних оператора на коначно димензионалном Хилбертовом простору H.*

(1) $A \in B(H)$ је изолован чвор ортографа $\Gamma(B(H))$ ако и само ако је A инвертибилан.

(2) Ако је $\dim H = 2$, тада $\mathcal{S}$ није повезан. Компоненте повезаности ортографа $\Gamma(B(H))$ су или изоловани чворови или скупови облика

$$\mathcal{S}_x = \left\{A \in B(H) : \operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{x\} \text{ или } \operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{x\}^{\perp}\right\}$$

где је $x \in H$ ненула вектор. Дијаметар скупа $\mathcal{S}_x$ износи 2.

(3) Ако је $\dim H = 3$, тада је $\mathcal{S}$ компонента повезаности чији је дијаметар 4.

(4) Ако је $\dim H \geqslant 4$, тада је $\mathcal{S}$ компонента повезаности чији је дијаметар 3.

3.1.2 H је бесконачно димензионалан Хилбертов простор

Када је H бесконачно димензионалан Хилбертов простор, ситуација је технички сложенија, при чему из Примера 3.1.5 знамо да је дијаметар већи од 2, па остаје још да покажемо да произвољна два неизолована чвора можемо спојити путем дужине 3. Овде ћемо изоставити доказ (који се може наћи у [9]) и навести само кључни резултат - наиме, коначно димензионални и комутативни случај биће нам кључни за даље истраживање.

Теорема 3.1.9. *Нека је H бесконачно димензионалан Хилбертов простор и*

$$\mathcal{S} = \{T \in B(H) \mid T \text{ није десно инвертибилан, } T \neq 0\}.$$

Тада важе следећа тврђења:

(1) Оператор $A \in B(H)$ је изолован чвор ортографа $\Gamma(B(H))$ ако и само ако је A десно инвертибилан.

(2) Скуп $\mathcal{S}$ је компонента повезаности ортографа $\Gamma(B(H))$ чији је дијаметар једнак 3.

3.2 Дијаметар комутативне униталне C^*-алгебре

Знамо да је по Гељфанд-Најмарковој теореми свака комутативна, унитална C^*-алгебра изоморфна са $C(K)$, где је K компактан Хаусдорфов простор и норма функције $f \in C(K)$ дефинисана са $\|f\| = \max\{|f(t)| \mid t \in K\}$.

Користећи Теорему 2.1.16, можемо добити карактеризацију јаке BJ ортогоналности у $C(K)$.

Став 3.2.1. *Нека је K компактан Хаусдорфов простор, $f, g \in C(K)$ и $f \neq 0$. Тада је $f \perp^S g$ ако и само ако постоји $t_0 \in K$ такав да $|f(t_0)| = \|f\|$ и $g(t_0) = 0$.*

Доказ. По Теореми 2.2.4, знамо да је $f \perp^S g$ ако и само ако је $f \perp g\bar{g}f$. (Овде посматрамо C^*-алгебру $C(K)$ као Хилбертов C^*-модул над собом са скаларним производом датим са $\langle a, b\rangle = a^* b$.) По Теорему 2.1.16, $f \perp g\bar{g}f$ ако и само ако скуп

$$\left\{\overline{f(t)}(g\bar{g}f)(t) \mid t \in E_f\right\} = \left\{|f(t)|^2|g(t)|^2 \mid t \in E_f\right\} = \left\{\|f\|^2|g(t)|^2 \mid t \in E_f\right\}$$

није садржан у отвореној полуравни у $\mathbb{C}$ са границом која садржи координатни почетак. Очигледно, ово важи ако и само ако постоји $t_0 \in E_f$ такво да је $g(t_0) = 0$. $\square$

Ако је $|K| \geqslant 3$, дијаметар ортографа $\Gamma(C(K))$ може бити 2 или 3. Да бисмо то доказали, биће нам потребна следећа техничка лема.

Лема 3.2.2. *Нека је K компактан Хаусдорфов простор и $t_0 \in K$. Тада постоји $f \in C(K)$ чија је једина нула t_0 ако и само ако t_0 има пребројиву локалну базу у K.*

Доказ. Нека $t_0 \in K$ има пребројиву локалну базу $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у K. Тада су скупови $K\backslash U_n, n \in \mathbb{N}$, затворени и дисјунктни са скупом $A = \{t_0\}$. По Урисоновој леми, конструишемо низ непрекидних функција $f_n : K \to [0, 1]$ које се анулирају у t_0 и једнаке су 1 на $K\backslash U_n$. Дефинишимо $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n$. Приметимо да ред конвергира униформно по Вајерштрасовом критеријуму, па је f непрекидна и $f(t_0) = 0$. Ако је $t \neq t_0$, тада по Хаусдорфовом својству, постоји нека околина тачке t_0 којој t не припада. Како је $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ локална база, то заправо постоји n такво да $t \notin U_n$. Тада $t \in K\backslash U_n$, па је $f(t) > 0$. Дакле, f је непрекидна функција на K која има само једну нулу.

Обратно, претпоставимо да постоји функција $f \in C(K)$ са само једном нулом $t_0 \in K$. Без губљења општости, претпоставимо да је $f \geqslant 0$, иначе посматрамо функцију $|f|$. За $n \in \mathbb{N}$ означимо скуп $U_n = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right)\right)$. Тада су сви U_n отворени скупови у K који садрже t_0. Нека је U произвољна отворена околина тачке t_0. Тада је $K\backslash U$ затворен подскуп компактног, па самим тим и компактан. Тада f достиже минимум α на $K\backslash U$. Како је $f(t) > 0$ за $t \in K\backslash U$, мора важити да је $\alpha > 0$. Нека је $m \in \mathbb{N}$ такав да је $\frac{1}{m} < \alpha$. Ако $t \in U_m$, онда је $f(t) < \frac{1}{m} < \alpha$, па $t \notin K\backslash U$, тј. $t \in U$. Закључујемо да је $U_m \subseteq U$. Овим смо показали да је $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ пребројива локална база тачке t_0. $\square$

Следећа лема нам даје доњу оцену за дијаметар ортографа $\Gamma(C(K))$ када постоји нека тачка у K са пребројивом локалном базом.

Лема 3.2.3. *Нека је K компактан Хаусдорфов простор такав да је $|K| \geqslant 3$. Претпоставимо да постоји тачка у K са пребројивом локалном базом. Тада постоје ненула непрекидне функције $f, g \in C(K)$, при чему обе имају бар једну нулу, такве да је $f \not\perp^S g$ и да је једина функција $h \in C(K)$ која задовољава $f \perp^S h \perp^S g$ нула функција.*

Доказ. Претпоставимо да тачка $t_1 \in K$ има пребројиву локалну базу. По Леми 3.2.2 постоји $f \in C(K)$ таква да је t_1 њена једина нула. Мењајући f са $\overline{f}f$ можемо претпоставити да је $f \geqslant 0$. Нека f достиже норму у тачки t''.

Додатно, можемо претпоставити да постоји тачка $t' \in K, t' \neq t_1$, таква да је $f\left(t'\right) < \|f\|$. Наиме, ако је $f(t) = \|f\|$ за све $t \in K \backslash \left\{t_1\right\}$, онда узмимо $t' \in K \backslash \left\{t_1, t''\right\}$ (која постоји јер је $|K| \geqslant 3$) и конструишимо непрекидну функцију $\alpha : K \rightarrow [0,1]$ за коју је $\alpha\left(t_1\right) = \alpha\left(t'\right) = 0$ и $\alpha\left(t''\right) = 1$. Затим, функцију f заменимо са $f + \alpha$. Сада имамо да је $0 < f\left(t'\right) < \|f\|$, као и да је t_1 је једина нула функције f, а да с друге стане f достиже норму у тачки t''.

Даље, можемо претпоставити да је $f\left(t'\right) > \dfrac{1}{2}\|f\|$. Ако то није тачно, можемо конструисати непрекидну функцију $\beta : K \rightarrow [0,1]$ такву да је $\beta\left(t_1\right) = 0$ и $\beta\left(t'\right) = \beta\left(t''\right) = 1$ и потом заменити f са $f + \|f\|\beta$.

Дефинишимо g са

$$g(t) = f\left(t'\right) - f(t).$$

Тада је $g \in C(K)$ ненула непрекидна функција, $g\left(t'\right) = 0$, и t_1 је јединствена тачка у којој g достиже норму (јер је $\|g\| = f\left(t'\right)$). Приметимо да важи $f \not\perp^S g$, јер је $g(t) = 0$ ако и само ако је $f(t) = f\left(t'\right)$ и онда $|f(t)| = \left|f\left(t'\right)\right| \neq \|f\|$. Дакле $f \not\perp^S g$.

Претпоставимо даље да је $h \in C(K)$ таква да важи $f \perp^S h \perp^S g$. Из $h \perp^S f$ следи да је $\left|h\left(t_1\right)\right| = \|h\|$, јер је t_1 једина нула функције f. Са друге стране, из чињенице да је $g \perp^S h$ следи да је $h\left(t_1\right) = 0$, сада због тога што је t_1 једина тачка у K у којој функција g достиже норму. Све заједно, добијамо да је $h = 0$, чиме смо показали да је у овом случају дијаметар бар 3. □

Сада можемо доказати централну теорему ове секције.

Теорема 3.2.4. *Нека је K компактан Хаусдорфов простор такав да је $|K| \geqslant 3$. Нека је даље*

$$\mathcal{S}_K = \{f \in C(K) \mid f(t) = 0 \text{ за неко } t \in K\} \backslash \{0\}.$$

Тада важи:

(1) *Изоловани чворови ортографа* $\Gamma(C(K))$ *су инвертибилни елементи у* $C(K)$*, тј. ненула елементи скупа* $C(K) \backslash \mathcal{S}_K$.

(2) *Скуп* $\mathcal{S}_K$ *је компонента повезаности ортографа* $\Gamma(C(K))$*. Њен дијаметар је 3 ако бар једна тачка скупа* K *има пребројиву локалну базу, док је иначе дијаметар једнак 2.*

Напомена 3.2.5. *Пример компактног Хаусдорфовог простора код кога ниједна тачка нема пребројиву локалну базу је* I^I*, прецизније, скуп свих функција из* $I = [0,1]$ *у* I*, на коме је задата топологија производа.*

Доказ. (1) Претпоставимо да функција $f \in \mathcal{S}_K$ и нека су тачке $t_1, t_2 \in K$ такве да $f(t_1) = 0$ и $|f(t_2)| = \|f\|$. Тада постоји функција $h \in C(K)$ таква да је $|h(t_1)| = \|h\| \neq 0$ и $h(t_2) = 0$, но онда у складу са Ставом 3.2.1 важи да је $f \perp\!\!\!\perp^S h$, па f није изолован чвор ортографа $\Gamma(C(K))$.

Што се тиче другог смера, довољно је применити Лему 3.0.2.

(2) Докажимо најпре да је дијаметар ортографа $\Gamma(\mathcal{S}_K)$ бар 2. Изаберимо ненегативну ненула функцију $f \in S_K$ такву да за неке тачке $t_1, t', t'' \in K$ важи да је

$$f(t_1) = 0, \quad f(t'') = \|f\|, \quad 0 < f(t') < \|f\|.$$

Оваква функција постоји по конструкцији сличној претходној леми. Онда f^2 и f нису иста класа неког чвора ортографа, а по Ставу 3.2.1 важи да $f \not\perp\!\!\!\perp^S f^2$.

Сада докажимо и да је дијаметар мањи од 3. Узмимо произвољне две функције $f, g \in \mathcal{S}_K$ такве да је $f \not\perp\!\!\!\perp^S g$. Претпоставимо додатно да се K састоји од бар четири тачке и нека су $t_1, s_1, t_2, s_2 \in K$ такве да је

$$f(t_1) = 0, \quad g(s_1) = 0, \quad |f(t_2)| = \|f\|, \quad |g(s_2)| = \|g\|. \tag{3.1}$$

Ако су све четири тачке t_1, t_2, s_1, s_2 међусобно различите, тада одаберемо $h \in C(K)$ такву да је

$$|h(t_1)| = |h(s_1)| = \|h\|, \quad h(t_2) = h(s_2) = 0 \tag{3.2}$$

па је $f \perp\!\!\!\perp^S h \perp\!\!\!\perp^S g$.

Даље, посматрајмо случајеве када су неке међу тачкама t_1, t_2, s_1, s_2 исте. Наравно, $t_1 \neq t_2$ и $s_1 \neq s_2$, па преостају случајеви:

(i) Ако је $t_1 = s_1$ или $t_2 = s_2$ тада $t_2 \neq s_1$ и $s_2 \neq t_1$, па функција h као у (3.2) је и даље добро дефинисана ненула функција за коју је $f \perp\!\!\!\perp^S h \perp\!\!\!\perp^S g$.

(ii) Ако је $t_1 = s_2$ и $t_2 = s_1$, тада је $f \perp\!\!\!\perp^S g$ што је у контрадикцији са претпоставком.

(iii) У последњем случају је $t_1 = s_2$ и $t_2 \neq s_1$ (случај $t_1 \neq s_2$ и $t_2 = s_1$ разматра се аналогно). Приметимо да су тада тачке t_1, t_2, s_1 међусобно различите. Постоје два подслучаја:

(iii.1) У првом, претпоставимо да f има две различите нуле: t_1 и t_1'. Тада је наравно $t_1' \neq t_2$. Можемо без губљења општости претпоставити да је $t_1' \neq s_1$, иначе применимо (i) при чему t_1' заменимо са t_1. Тада су t_1', t_1, t_2, s_1 четири међусобно различите тачке. Нека је $h \in C(K)$ ненула функција таква да је

$$h\,(t_1) = h\,(t_2) = 0, \quad h\,(t_1') = h\,(s_1) = \|h\|.$$

Тада је $f \perp\!\!\!\perp^S h \perp\!\!\!\perp^S g$.

(iii.2) Претпоставимо да је t_1 једина ненула функција f. Конструишемо ненула функције $h_1, h_2 \in C(K)$ такве да је

$$h_1\,(t_1) = \|h_1\|\,, \quad h_1\,(t_2) = h_1\,(s_1) = 0$$
$$h_2\,(t_1) = 0, \quad h_2\,(t_2) = h_2\,(s_1) = \|h_2\|\,.$$

Тада је $f \perp\!\!\!\perp^S h_1 \perp\!\!\!\perp^S h_2 \perp\!\!\!\perp^S g$. Овим смо завршили и последњи случај.

Вратимо се сада на тврђење. По Леми 3.2.2, ако ниједна тачка скупа K нема пребројиву локалну базу, онда свака неинвертибилна функција на K има бар две нуле, па за све $f, g \in \mathcal{S}_K$ постоји ненула функција $h \in \mathcal{S}_K$ таква да је $f \perp\!\!\!\perp^S h \perp\!\!\!\perp^S g$. Дакле, у овом случају је дијаметар 2.

Насупрот претходном случају, ако нека тачка K има пребројиву локалну базу, онда постоји неинвертибилна функција са само једном нулом. Из претходног разматрања, као и из Леме 3.2.3 закључујемо да је у овом случају дијаметар $\Gamma\,(\mathcal{S}_K)$ једнак 3.

На крају, остало нам је да проверимо случај $|K| = 3$ (заправо, ради се о $\mathbb{C}^3$ са супремум нормом). Као горе, нађимо тачке $t_1, s_1, t_2, s_2 \in K$ са својством као у (3.1). Како је $|K| = 3$, неке међу тачкама t_1, t_2, s_1, s_2 су исте и дискусија се завршава као у неком од претходних случајева. Наравно, постоји уређена тројка са само једном нула координатом у $\mathbb{C}^3$, па је дијаметар у овом случају једнак 3. $\square$

Остаје да прокоментаришемо случај када K има две тачке.

Напомена 3.2.6. *Ако је* $|K| = 2$ *тада се* $C(K)$ *поклапа са* $\mathbb{C}^2$ *на коме је дефинисана максимум норма. Скуп* $\mathcal{S}_K$ *дефинишемо као у Теореми 3.2.4. Тада је он заправо једнак* $\mathcal{S}_K = \{\lambda(0,1), \mu(1,0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C} \backslash \{0\}\}$ *и очигледно је* $(0,1) \perp\!\!\!\perp^S (1,0)$.

3.3 Дијаметар комутативне неуниталне C^*-алгебре

Сада ћемо посматрати дијаметар неуниталне комутативне C^*-алгебре. За сваку такву C^*-алгебру A постоје некомпактан, али локално компактан Хаусдорфов простор Ω такав да је A изоморфан са $C_0(\Omega)$, тј. са C^*-алгебром непрекидних комплексних функција на Ω које нестају у бесконачности. Нека је даље $K = \Omega \cup \{s_0\}$ Александровљева компактификација скупа Ω. Тада можемо идентификовати $C_0(\Omega)$ са C^*-подалгебром $\{f \in C(K) \mid f(s_0) = 0\}$ униталне C^*-алгебре $C(K)$.

Најпре ћемо проширити резултате из Става 3.2.1 на неунитални случај.

Став 3.3.1. *Нека је* $K = \Omega \cup \{s_0\}$ *Александровљева компактификација некомпактног локално компактног Хаусдорфовог простора* Ω *и нека* $f, g \in C_0(\Omega), f \neq 0$. *Тада је* $f \perp^S g$ *ако и само ако постоји* $t_0 \in \Omega$ *тако да је* $|f(t_0)| = \|f\|$ *и* $g(t_0) = 0$.

Доказ. Нека су $f, g \in C_0(\Omega)$ такве да је $f \perp^S g$ у $C_0(\Omega)$. Прецизније

$$\|f + gh\| \geqslant \|f\|, \quad \text{за све } h \in C_0(\Omega). \tag{3.3}$$

Са друге стране, ако f и g посматрамо као елементе $C(K)$, тада релација $f \perp^S g$ у $C(K)$ значи

$$\|f + gh\| \geqslant \|f\|, \quad \text{за све } h \in C(K). \tag{3.4}$$

Наравно, из (3.4) следи (3.3). Заправо, они су еквивалентни. Наиме, по Теореми 2.2.4, за два елемента a и b произвољне C^*-алгебре A важи да је

$a \perp^S b$ (у A) ако и само ако је $a \perp bb^*a$, тј. ако је $\|a + \lambda bb^*a\| \geqslant \|a\|$ за све $\lambda \in \mathbb{C}$. Како је норма на $C(K)$ проширење норме на $C_0(\Omega)$, оба (3.3) и (3.4) су еквивалентна са $f \perp g\bar{g}f$, који не зависи од амбијенталне C^*-алгебре (једино је важно да су f и g у $C_0(\Omega) \subseteq C(K)$). Наравно, овде можемо искористити и Лему 2.3.1.

Дакле, ако су $f, g \in C_0(\Omega)$ ненула функције такве да је $f \perp^S g$ (у $C_0(\Omega)$ па самим тим и у $C(K)$), тада по Ставу 3.2.1 постоји тачка $t_0 \in K$ таква да је $|f(t_0)| = \|f\|$ и $g(t_0) = 0$. Како је $f \neq 0$, мора важити да је $t_0 \neq s_0$, па $t_0 \in \Omega$, чиме је доказан један смер. Други смер тривијално важи. □

Следећа лема се базира на Леми 3.2.2.

Лема 3.3.2. *Нека је $K = \Omega \cup \{s_0\}$ Александровљева компактификација некомпактног, локално компактног Хаусдорфовог простора Ω. Тада постоји функција $f \in C_0(\Omega)$ која поред s_0, има тачно једну нулу $t_0 \in \Omega$ ако и само ако тачке s_0 и t_0 обе имају пребројиву локалну базу у K.*

Доказ. Нека s_0 и $t_0 \in K$ имају пребројиве локалне базе у K. По Леми 3.2.2, постоје функције $f_0, g_0 \in C(K)$ такве да је s_0 једина нула функције f_0, док је t_0 једина нула функције g_0. Онда функција $f = f_0 g_0$ припада простору $C_0(\Omega)$ и њене једине нуле су управо s_0 и t_0.

Обратно, претпоставимо да постоји функција $f \in C_0(\Omega)$ са само две нуле, s_0 и t_0. Без губљења општости, можемо претпоставити да је функција ненегатива, тј. да $f : K \to [0, \infty)$. По Урисоновој леми, конструишемо функцију $g : K \to [0, 1]$ такву да је $g(s_0) = 0$ и $g(t_0) = 1$. Тада $s_0 \in K$ је једина нула функција $h = f + g \in C(K)$, па по Леми 3.2.2 закључујемо да тачка s_0 има пребројиву локалну базу у K. На сличан начин закључујемо да и t_0 има пребројиву локалну базу у K, чиме је доказ завршен. □

Опет, слично као у униталном случају (видети Лему 3.2.3), функције у $C_0(\Omega)$ са тачно једном нулом у Ω даће нам примере код којих је дужина пута између њих једнака 3.

Лема 3.3.3. *Нека је $K = \Omega \cup \{s_0\}$ Александровљева компактификација некомпактног локално компактног Хаусдорфовог простора Ω. Претпоставимо да постоји тачка $t_1 \in \Omega$ таква да s_0 и t_1 имају пребројиве локалне базе у K. Тада постоје ненула функције $f, g \in C_0(\Omega)$, при чему обе* *имају нулу у* Ω, *такве да је* $f \not\perp^S g$ *и додатно, ако за* $h \in C_0(\Omega)$ *важи да је* $f \perp^S h \perp^S g$ *онда је* $h = 0$.

Доказ. По Леми 3.3.2 постоји функција $f \in C_0(\Omega)$ за коју су t_1 и s_0 једине нуле. Без губљења општости можемо претпоставити да је f ненегативна, иначе уместо f посматрамо функцију $\bar{f}f$. Као у доказу Леме 3.2.3, можемо претпоставити да постоји тачка $t' \neq s_0, t_1$ таква да је $f\left(t'\right) \neq \|f\|$.

Нека је $g_1 \in C(K)$ ненегативна функција таква да је t_1 јединствена тачка у којој она достиже максимум. Наравно, таква функција g_1 постоји. Наиме, како t_1 има пребројиву локалну базу, постоји функција $\alpha \in C(K)$ таква да је t_1 њена једина нула. Онда можемо узети $g_1(t) = \|\alpha\| - |\alpha(t)|$. Можемо претпоставити да је $g_1\left(t'\right) = g_1\left(s_0\right)$. Наиме, ако је $g_1\left(t'\right) \neq g_1\left(s_0\right)$, без губљења општости, ако је $g_1\left(t'\right) > g_1\left(s_0\right)$, можемо конструисати непрекидну функцију $\beta : K \to [0,1]$ такву да је $\beta\left(s_0\right) = \beta\left(t_1\right) = 1$ и $\beta\left(t'\right) = 0$. Затим, заменимо g_1 са $g_1 + \left(g_1\left(t'\right) - g_1\left(s_0\right)\right)\beta$.

Сада ћемо помоћу функције g_1 конструисати функцију $g \in C_0(\Omega)$ која такође достиже максимум у тачки t_1, има нулу у Ω и важи $g \not\perp^S f$.

Скуп

$$K_1 = \{t \in K : f(t) = \|f\|\} \cup \{t_1\}$$

је затворен и тачке $t', s_0 \notin K_1$. Нека је $\gamma : K \to [0,1]$ непрекидна функција таква да је $\gamma\left(s_0\right) = \gamma\left(t'\right) = 0$ и $\gamma(t) = 1$ за $t \in K_1$. Дефинишимо функцију g са

$$g(t) = g_1(t) - g_1\left(s_0\right) + \left(2\left\|g_1\right\| + g_1\left(s_0\right)\right)\gamma(t).$$

Тада важе следеће чињенице:

(1) $g\left(s_0\right) = g\left(t'\right) = 0$, па $g \in C_0(\Omega)$ и има нулу у скупу Ω.

(2) Ако функција f достиже норму у тачки t, онда $t \in K_1 \backslash \{t_1\}$ па је $g(t) = g_1(t) + 2\left\|g_1\right\| \neq 0$. Овим смо доказали да $f \not\perp^S g$.

(3) Даље је $g\left(t_1\right) = 3\left\|g_1\right\|$. Такође важи следећи низ неједнакости

$$-\left\|g_1\right\| < -g_1\left(s_0\right) \leq g(t) \leq g_1(t) + 2\left\|g_1\right\|\gamma(t) \leq 3\left\|g_1\right\| \quad \forall t \in K,$$

чиме смо показали да је $\|g\| = 3\left\|g_1\right\|$. Сада знамо да g достиже максимум у тачки t_1, но покажимо да је t_1 заправо једина са овим својством. Претпоставимо да је $|g(t)| = 3\left\|g_1\right\|$ за неку тачку $t \in K$. Знамо да је $g(t) \geqslant -g_1\left(s_0\right)$, па самим тим није могуће да је $g(t) = -3\left\|g_1\right\|$. Како је

g реално-вредносна функција, остаје нам случај када је $g(t) = 3\|g_1\|$. Приметимо да је

$$(\|g_1\| - g_1(t)) + (2\|g_1\| + g_1(s_0))(1 - \gamma(t)) = 0.$$

Како су оба сабирка на левој страни ненегативна, оба морају бити једнака 0, па је $g_1(t) = \|g_1\|$ и $\gamma(t) = 1$. Но једино t које ово испуњава је t_1. Тиме смо доказали да је t_1 једина тачка у којој функција g достиже максимум.

Коначно, нека је $h \in C_0(\Omega)$ таква да је $f \perp\!\!\!\perp^S h \perp\!\!\!\perp^S g$. По Ставу 3.3.1, из $h \perp\!\!\!\perp^S f$ закључујемо да је $|h(t_1)| = \|h\|$, јер је t_1 једина нула функције f у скупу Ω. Са друге стране, из $g \perp\!\!\!\perp^S h$ следи да је $h(t_1) = 0$, јер је t_1 једина тачка у скупу Ω у којој функција g достиже норму. Тиме смо доказали да је $h = 0$, чиме је доказ завршен. □

Сада можемо у потпуности описати дијаметар ортографа $\Gamma(C_0(\Omega))$.

Теорема 3.3.4. *Нека је Ω некомпактан, али локално компактан Хаусдорфов простор и $K = \Omega \cup \{s_0\}$ Александровљева компактификација простора Ω. Даље, нека је*

$$\mathcal{S}_\Omega = \{f \in C_0(\Omega) : f(t) = 0 \text{ за неку тачку } t \in \Omega\} \setminus \{0\}.$$

Тада важи следеће:

(1) Изоловани чворови ортографа $\Gamma(C_0(\Omega))$ постоје ако и само ако тачка s_0 има пребројиву локалну базу у K. У том случају скуп изолованих тачака је једнак скупу $C_0(\Omega)\setminus\mathcal{S}_\Omega$.

(2) Скуп $\mathcal{S}_\Omega$ је компонента повезаности ортографа $\Gamma(C_0(\Omega))$. Њен дијаметар је 3 ако постоји тачка $t_1 \in \Omega$ таква да она и s_0 имају пребројиву локалну базу у K. Иначе, њен дијаметар је 2.

Доказ. (1) Претпоставимо да $s_0 \in K$ има пребројиву локалну базу у K. По Леми 3.2.2, постоји функција $f \in C(K)$ таква да јој је s_0 једина нула, тј. $f \in C_0(\Omega)$ и f нема нула у простору Ω. Тада по Ставу 3.3.1, не постоји ненула функција $g \in C_0(\Omega)$ таква да је $g \perp^S f$. Самим тим, све такве функције f су изоловани чворови ортографа $\Gamma(C_0(\Omega))$.

Са друге стране, претпоставимо да тачка $s_0 \in K$ нема пребројиву локалну базу у простору K. Тада произвољна функција $f \in C_0(\Omega)$ има још неку нулу, означимо је са $t_1 \in \Omega$. Нека је тачка $t_2 \in K$ таква да је $|f(t_2)| = \|f\|$. Конструишимо ненула функцију $g \in C(K)$ такву да је $g(s_0) = g(t_2) = 0$ и $|g(t_1)| = \|g\|$. Тада $g \in C_0(\Omega)$ и $f \perp\!\!\!\perp^S g$, па функција f није изолован чвор ортографа $\Gamma(C_0(\Omega))$.

(2) Доказ је потпуно аналоган доказу Теореме 3.2.4. Једина разлика је што овде функције морају бити из скупа $C_0(\Omega)$, тј. s_0 мора бити њихова нула. Како се све тачке које се помињу приликом конструкције ових функција, тј. тачке $t_1, t_2, s_1, s_2, t', t''$, разликују од s_0, додатни услов не утиче на претходне. Коначно, користећи Леме 3.3.2 и 3.3.3 налазимо дијаметар ортографа $\Gamma(\mathcal{S}_\Omega)$.

□

Глава 4

Ортограф јаке BJ ортогоналности произвољне C^*-алгебре

У овој глави биће приказани оригинални резултати из рада [45], у ком су дати одговори на многа отворена питања постављена у раду [9].

4.1 Изоловани чворови

У овом потпоглављу описаћемо изоловане чворова ортографа $\Gamma(A)$ и у случају униталне, као и неуниталне C^*-алгебре A.

Сходно том циљу, потребна нам је дефиниција апроксимативно инвертибилног елемента која је уведена у раду [25] на следећи начин:

Дефиниција 4.1.1. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и елемент $a \in A$. Кажемо да је a апроксимативно десно инвертибилан ако постоји мрежа $\{a_i\}_{i\in I}$ тако да је aa_i апроксимативна јединица за A.*

Приметимо да се ова дефиниција подудара са дефиницијом десно инвертибилног елемента уколико C^*-алгебра има јединицу, тј. важи следеће:

Став 4.1.2. *Нека је A унитална C^*-алгебра и елемент $a \in A$. Тада је a десно инвертибилан ако и само ако је a апроксимативно десно инвертибилан.*

Доказ. Доказ је дат у Ставу 2.7 у раду [25] и параграфу који следи након њега. □

Став 4.1.3. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и нека $a \in A$. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(i) a је апроксимативно десно инвертибилан;

(ii) a не припада ниједном десном модуларном идеалу;

(iii) за свако чисто стање ρ важи да је $\rho(aa^*) > 0$.

Доказ. Ово је Теорема 3.6 из рада [25].

Заправо, у наведеном раду је теорема исказана само за неуниталне некомутативне C^*-алгебре, а доказана за неуниталне C^*-алгебре (својство некомутативности нигде није коришћено). Но, она је тачна и у униталном случају. Докажимо то.

Тврђења (ii) и (iii) су еквивалентна по Теореми 5.3.5 из [59].

Претпоставимо да (i) није тачно. Тада по Ставу 4.1.2 a није десно инвертибилан, па $a \in aA \subsetneqq A$. Самим тим је $Aa^* = (aA)^*$ прави леви идеал у A па је по Теореми 5.3.3 из [59] садржан у неком максималном модуларном левом идеалу, означимо га са J. Тада $a \in aA \subseteq J^*$, па не важи (ii).

На крају, претпоставимо да не важи (ii), тј. да $a \in J$ за неки максималан модуларни десни идеал J. Тада $aA \subseteq JA \subseteq J \subsetneqq A$. Одатле a није десно инвертибилан, па не важи (i), чиме смо доказали да су и прве две тврдње еквивалентне. □

За даље излагање биће нам потребна следећа техничка лема.

Лема 4.1.4. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и нека $a, b \in A$. Ако постоји стање ρ тако да је $\rho(aa^*) = \|a\|^2$ и $\rho(bb^*) = 0$, онда је $a \perp^S b$.*

Доказ. За произвољно $d \in A$ по Коши-Шварцовој неједнакости важи $|\rho(bd)|^2 \leq \rho(bb^*)\rho(d^*d) = 0$, па је $\rho(bd) = 0$. Претпоставимо да је $\|a\| = 1$ (иначе поделимо a са $\|a\|$). Тада је

$$\|a + bc\|^2 = \|(a + bc)(a + bc)^*\| \geq |\rho(aa^* + ac^*b^* + bca^* + bcc^*b^*)|.$$

Но, $\rho(bca^*) = \rho(bcc^*b^*) = 0$, као и $\rho(ac^*b^*) = \overline{\rho(bca^*)} = 0$, док је $\rho(aa^*) = 1$. Дакле

$$\|a + bc\|^2 \geq 1 = \|a\|^2,$$

па је $a \perp^S b$. □

У следећем ставу ћемо доказати да су десно инвертибилни елементи једини изоловани чворови у униталној C^*-алгебри.

Став 4.1.5. *Нека је A унитална C^*-алгебра и нека је $0 \neq a \in A$ елемент који није десно инвертибилан. Тада a није изолован чвор ортографа.*

Доказ. Нека је a елемент који није десно инвертибилан. Без губљења општости, нека је $\|a\| = 1$. Тада, по Ставу 4.1.2, a није апроксимативно десно инвертибилан. Даље, по Ставу 4.1.3, постоји чисто стање ρ тако да је $\rho(aa^*) = 0$.

Са друге стране, постоји стање τ тако да је $\tau(aa^*) = 1$. Посматрајмо елемент $b = \sqrt{1 - aa^*}$. Он је добро дефинисан и позитиван, јер је $aa^* \leqslant 1$ и A има јединицу. Приметимо да је $b \neq 0$ јер би иначе важило $aa^* = 1$ па би a био десно инвертибилан. Даље је

$$\tau(bb^*) = \tau(1 - aa^*) = 0,$$

док је

$$\rho(bb^*) = \rho(1 - aa^*) = 1.$$

Сада користећи резултат Леме 4.1.4, важи да је $a \perp^S b$ уколико посматрамо стање τ, док је $b \perp^S a$ уколико посматрамо стање ρ. Дакле $b \perp\!\!\!\perp^S a$, па a није изолован чвор ортографа. □

Наредна два Става 4.1.6 и 4.1.7 дају нам целовит одговор о изолованим чворима у случају неуниталних C^*-алгебри.

Став 4.1.6. *Нека је A произвољна C^*-алгебра и нека је $b \in A$ апроксимативно десно инвертибилан елемент. Тада је b изолован чвор ортографа.*

Доказ. Претпоставимо супротно, да постоји $a \in A$ такав да је $b \perp\!\!\!\perp^S a$. Тада је $a \perp^S b$ па за свако $c \in A$ важи

$$\|a + bc\| \geq \|a\|.$$

Изаберимо $c = -b_i a$, где је b_i апроксимативни десни инверз, тј. bb_i је апроксимативна јединица. Тада је

$$\|a\| \leq \|a - bb_i a\| \to 0,$$

па је $a = 0$. Контрадикција. □

Докажимо сада и супротан смер.

Став 4.1.7. *Нека елеменш* $a \in A$ *није айроксимашивно десно инвершибилан. Тада* a *није изолован чвор ор*шо*графа.*

Доказ. Претпоставимо да је $\|a\| = 1$. Ако a није апроксимативно десно инвертибилан, тада по Ставу 4.1.3 постоји чисто стање ρ тако да је $\rho(aa^*) = 0$. Такође, постоји друго стање, означимо га са τ, такво да је $\tau(aa^*) = 1$. Како је ρ чисто стање, то постоји $b' \in A, b' \geq 0$, $\|b'\| = 1$ на коме ρ достиже норму, тј. $\rho(b') = 1$. (Постојање оваквог b' је директна последица Кадисонове теореме о транзитивности, тј. Теореме 3.13.2 из [62], као и Теореме 3.13.14 из исте књиге.)

Посматрајмо сада елемент $b = ((1-aa^*)b'(1-aa^*))^{1/2}$. Очигледно је b добро дефинисан и $b \geqslant 0$. Иако A можда нема јединицу, $b \in A$. Наиме, A је идеал у унитизацији $\widetilde{A}$, па $(1_{\widetilde{A}} - x)y \in A$ за произвољне x, $y \in A$. Стога, писаћемо 1 мислећи на $1_{\widetilde{A}}$.

Даље је

$$\rho(b^2) = \rho((1-aa^*)b'(1-aa^*)) = \rho(b' - aa^*b' - b'aa^* + aa^*b'aa^*).$$

Како је $\rho(aa^*) = 0$, то је $\rho(aa^*b') = \rho(b'aa^*) = \rho(aa^*b'aa^*) = 0$, одакле закључујемо да је $\rho(b^2) = \rho(b') = 1$. Као последицу, добијамо да је $\|b\| = 1$, а самим тим и $b \neq 0$. Штавише $\tau(1 - aa^*) = 0$, одакле следи $\tau(b^2) = 0$.

Одатле, применом Леме 4.1.4, можемо закључити да је $a \perp^S b$ (преко стања τ), као и да је $b \perp^S a$ (преко стања ρ). Дакле, a није изолован чвор ортографа. □

На крају овог потпоглавља, у два примера неуниталних C^*-алгебри опишимо како изгледају изоловане тачке ортографа.

Пример 4.1.8. *Нека је* $A = C_0(0,1)$*. Тада је* $f \in A$ *изолован чвор ор*шо*графа* $\Gamma(C_0(0,1))$ *ако и само ако* $f(t) \neq 0$ *за све* $t \in (0,1)$*. Наиме, чиста стања на* A *су облика* $f \mapsto f(t)$, $t \in (0,1)$*. По Ставовима 4.1.6 и 4.1.7* f *је изолован чвор ако и само ако је* f *айроксимашивно десно инвершибилан. Пошом, йо Ставу 4.1.3 йрешходно је еквиваленшно са чињеницом да је* $\rho(f\bar{f}) > 0$ *за сва чисша сшања* ρ*, шј.* $f(t) \neq 0$ *за све* $t \in (0,1)$*. Погледаши и Теорему 3.3.4.*

Пример 4.1.9. *Нека је* $A = K(H)$ *алгебра свих комйакшних ойерашора на неком Хилбершовом йросшору* H*. Тада је* $T \in A$ *изолован чвор ор*шо*графа* $\Gamma(K(H))$ *ако и само ако* T *има гусшу слику. Наиме, сва чисша сшања на*

$K(H)$ су дата са $T \mapsto \langle Tx, x\rangle$. Као у претходном примеру, T је изолован чвор ортографа ако и само ако је $\langle TT^* x, x\rangle > 0$ што је еквивалентно са чињеницом да је T^* инјективан, тј. да T има густу слику.

4.2 Некомутативна топологија

У овом потпоглављу ћемо изложити резултате из четири Акеманова рада ([2], [3], [4] и [5]) у периоду 1968-1971. године.

Нека је A C^*-алгебра и нека π представља њену универзалну репрезентацију на неком Хилбертовом простору H. Познато је да се бикомутант $\pi(A)$, у ознаци $\pi(A)''$, скраћено A'', може идентификовати са другим дуалом A^{**}. Самим тим, A^{**} можемо посматрати као фон Нојманову алгебру. Други дуал, односно бикомутант универзалне репрезентације зовемо овојница. Убудуће, означаваћемо га са A''.

Иако A не мора да има пројекција, као на пример у случају када је $A = C_0(0,1)$, њена овојница, будући да је фон Нојманова алгебра, поседује много пројекција. Међу њима, разликоваћемо оне које су отворене, односно оне које су затворене.

Дефиниција 4.2.1. *Нека је $p \in A''$ пројекција.*

а) Кажемо да је p отворена ако је супремум неке растуће мреже a_α позитивних елемената из A;

б) Кажемо да је p затворена ако је $1-p$ отворена;

в) Кажемо да је p компактна, ако је затворена и ако постоји елемент $a \in A, a \geqslant 0$ такав да је $ap = p$. (Наравно, ово има смисла у неуниталној C^*-алгебри A, јер у случају униталне можемо узети $a = 1_A$.)

Напомена 4.2.2. *Приметимо аналогију са непрекидним функцијама. Наиме, E је отворен скуп ако и само ако је χ_E супремум позитивних непрекидних функција, E је компактан ако и само ако постоји непрекидна функција f са компактним носачем таква да је $\chi_E \leqslant f$.*

Напомена 4.2.3. *Приметимо такође да је спектрална пројекција неког позитивног елемента $a \in A$ отворена (односно затворена) ако одговара отвореном (односно затвореном) интервалу. Посебно, а то ћемо често користити, пројекција на језгро од a (која одговара скупу $\{0\}$) је затворена.*

Предстојећа теорема представља некомутативну верзију Урисонове леме и биће веома применљива у даљем истраживању.

Теорема 4.2.4. *Нека су* $p,\ q \in A''$ *пројекције такве да је* p *компактна,* q *затворена и* $pq = 0$*. Тада постоји елемент* $a \in A$ *такав да је* $0 \leq a \leq 1$*,* $ap = p$ *и* $aq = 0$*.*

Доказ. Ово је доказано у Леми III.1 у раду [5]. □

Поред ове главне теореме, биће нам потребно и пар техничких резултата.

Лема 4.2.5. *Нека су* p *и* $q \in A''$ *затворене пројекције. Ако је* $\|p(q - p \wedge q)\| < 1$ *тада је и* $p \vee q$ *затворена.*

Доказ. Ово је Теорема II.7 из рада [3]. □

Подсетимо се да пројекцију p у фон Нојмановој алгебри A зовемо *минималном* ако је $pAp = \mathbb{C}p$, што је, у овом случају, еквивалентно са чињеницом да из $q \leq p$ следи $q = 0$ или $q = p$. Овојница A'' има много минималних пројекција. Притом, свака минимална пројекција је затворена (видети Став II.4 из рада [3] и Последицу 2 из рада [2]).

У наредној леми ћемо показати да постоји бијекција између минималних пројекција на A'' и чистих стања на A. Наиме, важи следећа лема.

Лема 4.2.6. *Постоји бијективна кореспонденција између чистих стања на* A *и минималних пројекција у* A'' *тако да минималној пројекцији* $p \in A''$ *одговора чисто стање* φ *тако да је*

$$pap = \varphi(a)p, \ \text{за све } a \in A. \tag{4.1}$$

Доказ. Нека је φ чисто стање на A. Продужимо га јединствено до нормалног стања на A''. Како је A'' увек унитална, кроз цео доказ, 1 ће бити ознака за јединицу у A''.

По Теореми 3.13.6 из [62], постоји минимална пројекција p таква да је $\varphi(1-p) = 0$. Даље је $\varphi(a(1-p)) = \varphi((1-p)a) = 0$ за све $a \in A$. Како је p минимална, то је $pap = \lambda p$ за неко $\lambda \in \mathbb{C}$. Онда је $\varphi(a) = \varphi(pap) = \varphi(\lambda p) = \lambda$ па важи релација (4.1).

Са друге стране, нека је $p \in A''$ минимална пројекција. Тада је $pap = \lambda p$ за неко $\lambda \in \mathbb{C}$. Дефинишимо $\varphi(a) := \lambda$, тј. важи (4.1). Лако се проверава да је φ линеарно, позитивно и да му је норма један, па је стање. Такође,

$\varphi(1-p) = 0$. Ако постоји позитиван линеаран функционал $\psi \leq \varphi$, тада је такође $\psi(1-p) = 0$, па је $\psi(a) = \psi(pap) = \psi(\varphi(a)p) = \varphi(a)\psi(p)$, одакле следи $\psi = c\varphi$. (Овде поистовећујемо φ и ψ са њиховим нормалним екстензијама на A''.) Тиме смо доказали и да је φ чисто. □

Напомена 4.2.7. *Доказ претходне леме се може пратити и кроз [62], конкретно делови 3.6.11, 3.10.7, 3.11.10 и 3.13.6.*

Лема 4.2.8. *Нека је A дата C^*-алгебра и A'' њена овојница. Нека је даље $p \in A''$ минимална пројекција. Тада је p компактна.*

Доказ. Свака минимална пројекција $p \in A''$ је као што смо поменули затворена. Такође, по Леми 4.2.6 постоји јединствено чисто стање φ_p на A тако да је $\varphi_p(p) = 1$ и $pap = \varphi_p(a)p$ за све $a \in A$. По Кадисоновој теореми о транзитивности, постоји позитиван елемент $a \in A$ такав да је $\|a\| = 1$ и $\varphi_p(a) = 1$. Дакле, $pap = p$. Из C^*-идентитета добијамо

$$\|(1-a)^{\frac{1}{2}}p\|^2 = \|p(1-a)p\| = \|p - pap\| = 0,$$

одакле закључујемо $(1-a)^{\frac{1}{2}}p = 0$, па је $(1-a)p = 0$. Тиме смо показали да је $ap = p$, што по дефиницији значи да је p компактан. □

Лема 4.2.9. *Нека је a позитиван елемент C^*-алгебре A $(a \neq 0)$. Тада постоји минимална пројекција $p \in A''$ таква да је*

$$ap = \|a\|p \qquad и \qquad p \leq a/\|a\|.$$

Доказ. Нека је $\|a\| = 1$, иначе поделимо a са $\|a\|$. Постоји чисто стање φ које достиже норму на a. Нека је $p \in A''$ минимална пројекција која одговара φ, тј. $\varphi(p) = 1$, $pbp = \varphi(b)p$ за све $b \in A$. Тада, као у претходном доказу, можемо закључити да важи $ap = p$, а како је a позитиван, то конјуговањем добијамо и $pa = p$, а знамо и да је $pap = p$. Одатле је

$$0 \leqslant (1_{A''} - p)a(1_{A''} - p) = a - ap - pa + pap = a - p,$$

тј. $p \leq a$, што је и требало доказати. □

Лема 4.2.10. *Нека су p и $q \in A''$ минималне пројекције. Тада је $p \vee q$ затворена. Штавише, ако је r таква пројекција да важи $pr = qr = 0$, тада је такође и $(p \vee q)r = 0$.*

Доказ. Ако је $p = q$ тврђење је тривијално.

Приметимо да је $p \wedge q = 0$, јер ако није тако, $p \wedge q$ би била нетривијална пројекција мања од минималне.

Још једном, можемо идентификовати чиста стања на A са њиховим нормалним екстензијама на A''.

Нека је φ_p јединствено чисто стање придружено минималној пројекцији p, тј. нека важи $\varphi_p(p) = 1$ и $pap = \varphi_p(a)p$, за све $a \in A$. Доказаћемо да је $\varphi_p(q) < 1$. Претпоставимо супротно, да је $\varphi_p(q) = 1$. Тада је $pqp = p$, тј. $0 = p(1-q)p = ((1-q)p)^*(1-q)p$ одакле на основу C^*-идентитета закључујемо да је $(1-q)p = 0$. Дакле, важи $qp = p$ тј. $q \geqslant p$ што је на основу минималности q, немогуће, осим ако је $q = p$.

Дакле, $\varphi_p(q) < 1$ па је

$$\|qp\|^2 = \|pqp\| = \|\varphi_p(q)p\| < 1.$$

Одатле је $\|p(q - p \wedge q)\| = \|pq\| < 1$, па је $p \vee q$ затворена на основу Леме 4.2.5.

За други део, приметимо да је $pr = 0$ еквивалентно са $p \leq 1 - r$, као и да је $qr = 0$ еквивалентно са $q \leq 1 - r$. Следи да је $\sup\{p, q\} = p \vee q \leq 1 - r$, тј. $(p \vee q)r = 0$, што је и требало доказати. ☐

4.3 Дијаметар ортографа

У овој секцији даћемо оцену дијаметра ортографа $\Gamma(A)$, где је A произвољна C^*-алгебра.

Одговор на ово питање је дат у раду [9] за различите примере C^*-алгебри, конкретно, за матричне алгебре $M_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$, алгебру $B(H)$ ограничених оператора на бесконачно димензионалном Хилбертовом простору H као и на комутативним C^*-алгебрама $C(K)$, где је K компактан Хаусдорфов простор.

Резултати из рада [9] су следећи:

1) Алгебра $M_2(\mathbb{C})$ је специфична. Све нетривијалне компоненте повезаности састоје се од два елемента; још прецизније, од линеарних оператора ранга 1 чије су слике ортогоналне. Дијаметар сваке ове компоненте повезаности је 1.

2) У свим осталим разматраним случајевима, имамо само једну нетривијалну компоненту повезаности, са коначним дијаметром; заправо он је не већи од 4. У случају $M_3(\mathbb{C})$ дијаметар је 4, док је дијаметар у случају $M_n(\mathbb{C})$,

$n \geqslant 4$, као и у $B(H)$ једнак 3. Дијаметар $C(K)$ је 3, ако постоји бар једна тачка у K са пребројивом локалном базом, док је он 2 у осталим случајевима.

Резултат главне Теореме 4.3.6 искључује три мале алгебре, $\mathbb{C} \cong M_1(\mathbb{C})$, $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \cong M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C})$ и $M_2(\mathbb{C})$, све три су униталне. Њихов ортограф можемо једноставно описати у наредном ставу.

Став 4.3.1. *Алгебра* $M_1(\mathbb{C})$ *нема нетривијалних неинвертибилних елемената, док је пројективни простор једна тачка. Дакле, ортограф* $\Gamma(M_1)$ *има један чвор и нема ивица.*

Алгебра $M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C})$ *има, до на множење скаларом, два нетривијална неинвертибилна елемента,* $(1, 0)$ *и* $(0, 1)$*. Они су међусобно* BJ *ортогонални. Дакле, ортограф* $\Gamma(M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C}))$*, осим изолованих тачака, има два чвора и једну ивицу која их повезује.*

У алгебри $M_2(\mathbb{C})$ *сви неинвертибилни елементи припадају некој компоненти повезаности која има тачно два члана.*

Доказ. Прва и друга тврдња су очигледне и заправо описане у самој формулацији, док је трећа описана у Ставу 3.1.3. $\square$

Лема 4.3.2. *Нека су* $p, q \in A''$ *две различите минималне пројекције. Тада је и* $q' = p \vee q - p$ *минимална.*

Доказ. Као у Леми 4.2.10, $p \wedge q = 0$. По познатој формули Капланског, знамо да је $q' = p \vee q - p \sim q - p \wedge q = q$. Дакле, постоји парцијална изометрија v таква да је $q = v^*v$ и $q' = vv^*$. Даље, како је $v = vv^*v$, добијамо да је $q' = vv^*vv^* = vqv^*$, па је

$$q'A''q' = vqv^*A''vqv^* \subseteq vqA''qv^* = v(\mathbb{C}q)v^* = \mathbb{C}q'.$$

Дакле, q' је минимална по дефиницији. $\square$

Став 4.3.3. *Нека је* A C^**-алгебра која није изоморфна ни са једном од алгебри* $M_1(\mathbb{C})$*,* $M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C})$ *и* $M_2(\mathbb{C})$*, и нека су* p*,* $q \in A''$ *две минималне пројекције. Тада постоји још једна минимална пројекција* $r \in A''$ *таква да је* $pr = qr = 0$*.*

Доказ. Означимо $s = p \vee q$. По Леми 4.2.10, s је затворена.

Најпре, претпоставимо да је $s \neq 1 = 1_{A''}$. Тада је $1 - s$ нетривијална отворена пројекција. Стога постоји мрежа позитивних елемената у A чији је супремум $1 - s$. Посебно, постоји нетривијалан позитиван елемент $a \in A$

такав да је $a \leq 1 - s$. По Леми 4.2.9, постоји минимална $r \leq a \leq 1 - s$. Дакле $sr = 0$.

Остаје да докажемо да ако је $s = 1$, тада A мора бити изоморфна некој од три горе поменуте алгебре. Дакле, претпоставимо да је $s = 1$. Тада је $sAs = A$. По Леми 4.3.2, $s = p + q'$, при чему је $pq' = 0$ и p и q' су минимални. За сваки елемент $a \in A$ важи

$$a = pap + q'ap + paq' + q'aq'. \tag{4.2}$$

Доказаћемо да је сваки од ова четири сабирка скаларни умножак фиксираног елемента. Нека су φ_p и $\varphi_{q'}$ одговарајућа придружена чиста стања. Тада је $pap = \varphi_p(a)p$ и $q'aq' = \varphi_{q'}(a)q'$. Остаје да срачунамо $q'ap$ и paq'. У A'' имамо поларну декомпозицију $q'ap = v|q'ap|$ при чему је v парцијална изометрија. Приметимо да је $|q'ap|^2 = paq'ap \in pA''p \cong \mathbb{C}p$, па $|q'ap| \in \mathbb{C}p$. Тада је $|q'ap| = \lambda p$ за неко $\lambda \in \mathbb{C}$, па је одатле $q'ap = \lambda vp$. Означимо vp са w. Лако се проверава да је $w^*w = p$ и $ww^* = q'$. Доказаћемо да је w јединствен до на скалар модула 1. Претпоставимо да постоји неки други елемент u такав да је $u^*u = p$ и $uu^* = q'$. Посматрајмо u^*w. Како је $wp = up = p$, имамо да је $u^*w \in pA''p$ па је $u^*w = \lambda p$ за неки скалар $\lambda \in \mathbb{C}$ модула 1. Дакле, било које две парцијалне изометрије које повезују p и q су скаларни умножци једна друге. Дакле, $q'ap = \lambda vp = \lambda w$ је скаларни умножак фиксираног елемента у односу на a.

Дакле, декомпозиција (4.2) нас доводи до мономорфизма из A у $M_2(\mathbb{C})$. Он је изоморфизам, ако су сва четири сабирка нетривијална за неко $a \in A$. У том случају, $A \cong M_2(\mathbb{C})$. Ако је ипак $q'ap = paq' = 0$ за све $a \in A$, тада је A изоморфна скупу свих дијагоналних 2×2 матрица, тј. алгебри $M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C})$. Коначно, ако не постоје две различите минималне пројекције у A, тада је $A \cong M_1(\mathbb{C})$. □

Лема 4.3.4. *Нека су $a, b \in A$ позитивни елементи норме 1. Ако постоји пројекција p (не нужно минимална) таква да је $pa = p$ и $pb = 0$, тада је $a \perp^S b$. Ако додатно постоји и пројекција q таква да је $qa = 0$ и $qb = q$, онда је $a \perp\!\!\!\perp^S b$.*

Доказ. За свако $c \in A$ важи

$$\|a + bc\| \geqslant \|p(a + bc)\| = \|pa\| = \|p\| = 1 = \|a\|.$$

Други део следи директно из првог. □

Напомена 4.3.5. *Претходна лема важи и за* $p \in A$*, као и за* $p \in A''$ *по Леми 2.3.1.*

Теорема 4.3.6. *Нека је* A *произвољна* C^**-алгебра која није изоморфна са* $M_1(\mathbb{C})$*,* $M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C})$*, односно* $M_2(\mathbb{C})$*. Тада сви елементи који нису апроксимативно десно инвертибилни чине једну компоненту повезаности ортографа. Додатно, дијаметар те компоненте није већи од* 4*.*

Доказ. Нека су a и $b \in A$ елементи који нису апроксимативно десно инвертибилни. Без губљења општости, можемо претпоставити да су $a, b \geqslant 0$ (Лема 2.3.3), као и да је $\|a\| = \|b\| = 1$. По Ставу 4.1.3, постоје чиста стања φ_a и φ_b која анулирају a^2 и b^2, редом. Означимо њихове носеће пројекције са q_a и q_b.

Такође, нека су p'_a и p'_b спектралне пројекције елемената a и b које одговарају затвореном скупу $\{1\}$. Сви p'_a, p'_b, q_a, q_b су затворени и штавише q_a и q_b су минималне. Такође важи да је $p'_a q_a = 0$ и $p'_b q_b = 0$.

Можемо редуковати пројекције p'_a и p'_b до мањих, такође минималних пројекција p_a и p_b које имају исто својство: $p_a a = p_a$, $p_b b = p_b$ и $p_a q_a = p_b q_b = 0$. Наиме, постоји чисто стање, назовимо га ψ које достиже норму на a, тј. $\psi(a) = 1$. Нека је p_a минимална пројекција која одговара стању ψ. Имамо да је $p_a a p_a = p_a$, одакле следи $p_a \leq a$ (погледати доказ Леме 4.2.9).

По Ставу 4.3.3, постоји друга минимална пројекција r таква да је $q_a r = q_b r = 0$. Очито је да у овојници A'' важи

$$p_a \perp\!\!\!\perp^S q_a \perp\!\!\!\perp^S r \perp\!\!\!\perp^S q_b \perp\!\!\!\perp^S p_b.$$

Но, ову релацију из A'', можемо пребацити на одговарајућу у A тако што конструишемо „глаткије” елементе.

Наиме, користећи некомутативну верзију Урисонове леме (Лема 4.2.4), конструисаћемо елементе c_1, c_2 и $c_3 \in A$. Како је q_a компактан по конструкцији и $p_a \vee r$ затворен по Леми 4.2.10, то постоји $c_1 \in A$ тако да је $c_1 q_a = q_a$ и $c_1(p_a \vee r) = 0$, односно $c_1 p_a = c_1 r = 0$. На сличан начин можемо конструисати c_2 тако да је $c_2 r = r$, $c_2 q_a = c_2 q_b = 0$ и коначно c_3 за кога је $c_3 q_b = q_b$, $c_3 r = c_3 p_b = 0$.

По Леми 4.3.4 имамо да је

$$a \perp\!\!\!\perp^S c_1 \perp\!\!\!\perp^S c_2 \perp\!\!\!\perp^S c_3 \perp\!\!\!\perp^S b,$$

чиме смо доказали да је дијаметар произвољне C^*-алгебре не већи од 4. □

Глава 5

Дијаметар ортографа јаке BJ ортогоналности коначно димензионалних C^*-алгебри

У овој глави ћемо приказати оригиналне резултате из радова [45] и [70].

5.1 Растојање између чворова у C^*-алгебрама које се могу представити као директне суме уniталних C^*-алгебри

За два стања $\rho : A \to \mathbb{C}$ и $\tau : B \to \mathbb{C}$ на C^*-алгебрама A и B дефинишимо пресликавање $\rho \oplus \tau : A \oplus B \to \mathbb{C}$ са

$$(\rho \oplus \tau)(a \oplus b) = \rho(a) + \tau(b).$$

Лако се види да ако су ρ и τ стања (на A и B, редом), онда су и $\rho \oplus 0$ и $0 \oplus \tau$ стања (на $A \oplus B$).

Наредна лема описује чиста стања на C^*-алгебри која је представљена као директна сума две C^*-алгебре.

Лема 5.1.1. *Нека су A и B произвољне C^*-алгебре и $C = A \oplus B$. Тада је*

$$PS(C) = (PS(A) \oplus 0) \cup (0 \oplus PS(B)).$$

Доказ. Најпре, докажимо да ако је ρ чисто стање на A, онда је $\rho \oplus 0$ чисто стање на C. Претпоставимо супротно, да је $\rho \oplus 0 = \lambda\varphi + (1 - \lambda)\psi$ за неки

$\lambda \in (0,1)$ и нека стања φ, ψ на C. Дефинишимо $\varphi_1 : A \to \mathbb{C}$ и $\psi_1 : A \to \mathbb{C}$ са $\varphi_1(a) = \varphi(a \oplus 0)$ односно $\psi_1(a) = \psi(a \oplus 0)$. Слично, дефинишимо $\varphi_2 : B \to \mathbb{C}$ и $\psi_2 : B \to \mathbb{C}$ са $\varphi_2(b) = \varphi(0 \oplus b)$ односно $\psi_2(b) = \psi(0 \oplus b)$. Сва ова пресликавања су позитивни функционали и важи

$$\rho = \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\psi_1 \quad \text{и} \quad 0 = \lambda\varphi_2 + (1-\lambda)\psi_2.$$

Очигледно је $\varphi_2 = \psi_2 = 0$, па је $\|\varphi_1\| = \|\psi_1\| = 1$. Дакле, φ_1 и ψ_1 су стања. Како је ρ чисто стање, важи $\varphi_1 = \psi_1 = \rho$.

Аналогно, закључујемо да је $0 \oplus \tau$ чисто стање на C ако τ чисто на B.

Претпоставимо, са друге стране, да је ρ чисто стање на C. Дефинишимо $\rho_1 : A \to \mathbb{C}$ и $\rho_2 : B \to \mathbb{C}$ са $\rho_1(a) = \rho(a \oplus 0)$ односно $\rho_2(b) = \rho(0 \oplus b)$. Претпоставимо да је

$$\|\rho_1 \oplus 0\| \neq 0 \quad \text{и} \quad \|0 \oplus \rho_2\| \neq 0. \tag{5.1}$$

Онда можемо ρ записати као

$$\rho = \|\rho_1 \oplus 0\| \left(\frac{1}{\|\rho_1 \oplus 0\|}(\rho_1 \oplus 0) \right) + \|0 \oplus \rho_2\| \left(\frac{1}{\|0 \oplus \rho_2\|}(0 \oplus \rho_2) \right).$$

Приметимо да су функционали у заградама норме 1 – дакле стања. Такође, из $1 = \|\rho\|$ и $\rho(a \oplus b) = \rho(a \oplus 0) + \rho(0 \oplus b) = \rho_1(a) + \rho_2(b)$, видимо да је $\|\rho_1 \oplus 0\| + \|0 \oplus \rho_2\| = 1$, па узимајући у обзир дефиницију чистог стања, тачно један од $\|\rho_1 \oplus 0\|$ и $\|0 \oplus \rho_2\|$ је једнак нула, што је у контрадикцији са претпоставком (5.1). Дакле, или је $\|\rho_1 \oplus 0\| = 0$ а онда и $\rho = 0 \oplus \rho_2$, или је $\|0 \oplus \rho_2\| = 0$ и последично $\rho = \rho_1 \oplus 0$. □

Приметимо сада да уколико су елементи јако узајамно BJ ортогонални по координатама, онда су јако узајамно BJ ортогонални у паровима. Наиме, важи:

Лема 5.1.2. *Ако је* $a_1 \perp\!\!\!\perp^S a_2$ *и* $b_1 \perp\!\!\!\perp^S b_2$ *онда је* $(a_1, b_1) \perp\!\!\!\perp^S (a_2, b_2)$. *Посебно је*

$$(a, 0) \perp\!\!\!\perp^S (0, b) \tag{5.2}$$

за произвољне a, $b \neq 0$.

Доказ. Узмимо произвољне $c, d \in A$. Тада је

$$\begin{aligned} \|(a_1, b_1) + (a_2, b_2)(c, d)\| &= \|(a_1 + a_2 c, b_1 + b_2 d)\| \\ &= \max\{\|a_1 + a_2 c\|, \|b_1 + b_2 d\|\} \\ &\geqslant \max\{\|a_1\|, \|b_1\|\} = \|(a_1, b_1)\|, \end{aligned}$$

јер је $\|a_1 + a_2c\| \geqslant \|a_1\|$ и $\|b_1 + b_2d\| \geqslant \|b_1\|$ за све $c, d \in A$. Тиме смо показали да је $(a_1, b_1) \perp^S (a_2, b_2)$, а други смер се показује аналогно.

Да бисмо показали (5.2), довољно је да приметимо да је $a \perp\!\!\!\perp^S 0$ за све a. (Обично, 0 се искључује из ортографа, јер је иначе све повезано. Но, ако су a, $b \neq 0$, онда су парови $(a, 0)$, $(0, b) \neq 0$.) ☐

Проблем настаје управо јер супротан смер не важи - постоје елементи који су у паровима јако узајамно BJ ортогонални али нису по координатама.

Напомена 5.1.3. *Приметимо да* $(a_1, b_1) \perp\!\!\!\perp^S (a_2, b_2)$ *не повлачи нити да је* $a_1 \perp\!\!\!\perp^S a_2$, *нити да је* $b_1 \perp\!\!\!\perp^S b_2$. *Наиме, нека су* I *и* P, *редом, идентичка матрица и пројекција ранга 1 чији је једини ненула елемент у првој врсти и првој колони и износи 1, обе из* $M_2(\mathbb{C})$. *Тада је* $(I, P) \perp\!\!\!\perp^S (P, I)$, *али* $I \perp\!\!\!\perp^S P$ *није тачно, јер* $I \perp^S P$ *али* $P \not\perp^S I$.

У следећој леми ћемо описати изоловане чворове ортографа C^*-алгебре која се може представити као директна сума C^*-алгебри.

Лема 5.1.4. *Нека су* A *и* B *произвољне (нетривијалне)* C^**-алгебре и нека је* $C = A \oplus B$. *Тада*

1. $A \oplus B$ *је унитална ако и само ако су обе* A *и* B *униталне.*

2. *Нека су* A *и* B *униталне. Елемент* (a, b) *није десно инвертибилан у* $A \oplus B$ *ако и само ако бар један од* a *и* b *није десно инвертибилан у* A, *односно* B, *редом.*

3. *Елемент* (a, b) *није десно апроксимативно инвертибилан у* $A \oplus B$ *ако и само ако бар један од* a *и* b *није апроксимативно десно инвертибилан у* A, *односно* B, *редом.*

Доказ. Својства (1) и (2) су тривијална, па дајемо само доказ особине (3).

Ако (a, b) није апроксимативно десно инвертибилан, тада по Ставу 4.1.3 постоји чисто стање ρ такво да је $\rho((a, b)(a, b)^*) = 0$. По карактеризацији чистих стања и претходне леме, постоји чисто стање ρ_1 на A, или чисто стање ρ_2 на B тако да је $(\rho_1 \oplus 0)((a, b)(a, b)^*) = 0$ или $(0 \oplus \rho_2)((a, b)(a, b)^*) = 0$. Дакле, или је $\rho_1(aa^*) = 0$ или је $\rho_2(bb^*) = 0$. Свакако, бар један од a и b није апроксимативно десно инвертибилан по Ставу 4.1.3.

За други смер, претпоставимо да без губљења општости a није апроксимативно десно инвертибилан. Тада постоји чисто стање ρ_1 на A такво да је $\rho_1(aa^*) = 0$. Но, онда је $(\rho_1 \oplus 0)((a,b)(a,b)^*) = (\rho_1 \oplus 0)((aa^*, bb^*)) = 0$. Како је $\rho_1 \oplus 0$ чисто, то елемент (a,b) није апроксимативно десно инвертибилан. $\square$

У наставку секције, претпостављаћемо да су све $A_1, \dots, A_k$ униталне C^*-алгебре. Нека тврђења можемо лако доказати и у неуниталном случају, али нам је циљ да нађемо дијаметар произвољне коначно димензионалне C^*-алгебре, а оне су директна сума униталних. У овој секцији ћемо посматрати C^*-алгебру A која је директна сума униталних C^*-алгебри, тј. C^*-алгебру $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$, где је $k \geqslant 2$.

Теорема 5.1.5. *Ако постоје два елемента $a_i \neq 0$ и $b_j \neq 0$, $i \neq j$, који нису десно инвертибилни, тада је растојање између $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ највише 3.*

Доказ. Како елементи a_i и b_j нису десно инвертибилни, то по Ставу 4.1.5 постоје $a_i' \neq 0$ и $b_j' \neq 0$ такви да $a_i \perp^S a_i'$ (у A_i) и $b_j \perp^S b_j'$ (у A_j). Тада је

$$(a_1, \dots, a_i, \dots, a_k) \perp^S (0, \dots, a_i', \dots, 0) \perp^S (0, \dots, b_j', \dots, 0) \perp^S (b_1, b_2, \dots, b_k),$$

по Леми 5.1.2 јер су сви елементи јако узајамно BJ ортогонални по координатама. $\square$

Како смо заинтересовани за ситуације када је дијаметар већи од 3, можемо претпоставити да немамо елементе који нису десно инвертибилни на различитим координатама. Тиме ћемо, у свим наредним тврђењима, сматрати да у свакој k-торки имамо тачно један елемент који није десно инвертибилан, као и да су они на истим позицијама. Битно ће нам бити и да ли се на том елементу достиже норма или не.

Прво ћемо посматрати ситуацију када се на елементу који није десно инвертибилан достиже норма.

Теорема 5.1.6. *Нека су $(a_1, a_2, \dots, a_k), (b_1, b_2, \dots, b_k) \in A$ узајамно јако BJ ортогонални и a_k је једини елемент који није десно инвертибилан у $(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Нека је $\|a_k\| > \|a_i\|$ за све $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Тада је $a_k \perp^S b_k$ (у A_k) и $\|b_k\| \geqslant \|b_i\|$ за све $1 \leqslant i \leqslant k-1$ (посебно, ако је $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ ненула k-торка, тада је $b_k \neq 0$).*

Доказ. Знамо да је

$$\max\{(\|a_1 + b_1c_1\|, \|a_2 + b_2c_2\|, \dots, \|a_k + b_kc_k\|)\} \geqslant \|a_k\|,$$

за све $(c_1, c_2, \dots, c_k) \in A$, па ако је $c_1 = c_2 = \dots = c_{k-1} = 0$, добијамо $\|a_k + b_kc_k\| \geqslant \|a_k\|$ за све $c_k \in A_k$. Тиме смо доказали да је $a_k \perp^S b_k$.

Даље, такође је

$$\max\{\|b_1 + a_1c_1\|, \|b_2 + a_2c_2\|, \dots, \|b_k + a_kc_k\|\} \geqslant \max\{\|b_1\|, \|b_2\|, \dots, \|b_k\|\}.$$

Сада узмемо да је $c_i = -a_i^{-1}b_i$ (a_i^{-1} је десни инверз елемента a_i) за све $1 \leqslant i \leqslant k-1$, добијамо

$$\|b_k + a_kc_k\| \geqslant \max\{\|b_1\|, \|b_2\|, \dots, \|b_k\|\} \geqslant \|b_k\|,$$

тј. $b_k \perp^S a_k$. Такође, ако ставимо да је $c_k = 0$, добијамо да је $\|b_k\| \geqslant \|b_i\|$ за све $1 \leqslant i \leqslant k-1$, чиме је тврђење у потпуности доказано. □

У наредној леми ћемо видети да је за ортогоналност k-торки довољна ортогоналност елемената на којима се достиже норма (они су самим тим неизоловане тачке, па нису десно инвертиблни) и који су на истој координати. Приметимо да они не морају бити једини на којима се достиже норма.

Лема 5.1.7. *Нека су* $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ *и* $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ *елементи* C^**-алгебре* A. *Нека је* $\|a_k\| \geqslant \|a_i\|$ *и* $\|b_k\| \geqslant \|b_i\|$ *за све* $1 \leqslant i \leqslant k-1$ *и* $a_k \perp\!\!\!\perp^S b_k$. *Тада је*

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \perp\!\!\!\perp^S (b_1, b_2, \dots, b_k).$$

Доказ. За све $c_k \in A_k$ је $\|a_k + b_kc_k\| \geqslant \|a_k\|$ и $\|b_k + a_kc_k\| \geqslant \|b_k\|$. Одатле је

$$\begin{aligned} &\max\{\|a_1 + b_1c_1\|, \|a_2 + b_2c_2\|, \dots, \|a_k + b_kc_k\|\} \\ &\geqslant \|a_k + b_kc_k\| \geqslant \|a_k\| = \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_k\|\}, \end{aligned}$$

за произвољан $(c_1, c_2, \dots, c_k) \in A$, па је $(a_1, a_2, \dots, a_k) \perp^S (b_1, b_2, \dots, b_k)$. Други смер се доказује аналогно. □

Сада ћемо закључити да је растојање између две k-торке највише 2 уколико у обе постоје десно инвертибилни елементи на којима се достиже норма.

Теорема 5.1.8. *Нека су* $(a_1, a_2, \dots, a_k), (b_1, b_2, \dots, b_k) \in A$ *такви да су* a_k *и* b_k *једини елементи који нису десно инвертибилни и нека постоје* $a_i (i \neq k)$ *и* $b_j (j \neq k)$ *тако да је* $\|a_i\| \geqslant \|a_k\|$ *и* $\|b_j\| \geqslant \|b_k\|$. *Тада је растојање између* $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ *и* $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ *највише 2.*

Доказ. Приметимо да је $(a_1, a_2, \dots, a_k) \perp\!\!\!\perp^S (0, 0, \dots, 1) \perp\!\!\!\perp^S (b_1, b_2, \dots, b_k)$. Довољно је да докажемо само прву BJ ортогоналност. За све $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A$ важи

$$\begin{aligned}\max\{\|a_1 + 0x_1\|, \|a_2 + 0x_2\|, \dots, \|a_k + 1x_k\|\} &\geqslant \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_{k-1}\|\} \\ &= \max\{\|a_1\|, \dots, \|a_{k-1}\|, \|a_k\|\},\end{aligned}$$

при чему је последња једнакост тачна јер је $\|a_k\| \leqslant \|a_i\|$.

Штавише, у свакој униталној C^*-алгебри је $1 \perp^S a_k$ за сваки елемент a_k који није десно инвертибилан. Наиме, постоји чисто стање ρ тако да је $\rho(a_k a_k^*) = 0$ јер a_k није десно инвертибилан. Са друге стране, како је ρ стање, то је $\rho(1 \cdot 1^*) = 1 = \|1\|^2$. Тада по Леми 4.1.4, добијамо да је $1 \perp^S a_k$. Одатле је, за све $x_k \in A_k$, $\|1 + a_k x_k\| \geqslant \|1\|$, па коначно за све $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A$ важи

$$\max\{\|0 + a_1 x_1\|, \|0 + a_2 x_2\|, \dots, \|1 + a_k x_k\|\} \geqslant \|1\| = \max\{\|0\|, \|0\|, \dots, \|1\|\},$$

чиме је доказ завршен. □

На крају, разматраћемо комбиновану ситуацију - код једне k-торке се на елементу који није десно инвертибилан достиже норма, а код друге не.

Теорема 5.1.9. *Нека су* $(a_1, a_2, \dots, a_k), (b_1, b_2, \dots, b_k) \in A$ *такви да су* a_k *и* b_k *једини елементи који нису десно инвертибилни. Даље, нека постоји* $a_i (i \neq k)$ *за који је* $\|a_i\| \geqslant \|a_k\|$, *док је* $\|b_k\| > \|b_j\|$ *за све* $j \in [1, k-1]$. *Тада је растојање између* $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ *и* $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ *највише 3.*

Доказ. Како b_k није десно инвертибилан, то постоји ненула b_k' који такође није десно инвертибилан, такав да је $b_k \perp\!\!\!\perp^S b_k'$. Али тада важи

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \perp\!\!\!\perp^S (0, 0, \dots, 1) \perp\!\!\!\perp^S (\|b_k'\|1, \|b_k'\|1, \dots, b_k') \perp\!\!\!\perp^S (b_1, b_2, \dots, b_k).$$

Прва узајамно јака BJ ортогоналност је доказана у Теореми 5.1.8, док друга узајамно јака BJ ортогоналност директно следи из доказа те теореме.

Трећа узајамно јака BJ ортогоналност је тачна на основу Леме 5.1.7, чиме је и овај доказ завршен. □

Закључујемо са следећим запажењем.

Напомена 5.1.10. *Дакле, једини случај у коме растојање може бити веће од 3 (тада је 4, јер знамо да је увек мање од 5) јесте у ситуацији када се норма код оба достиже на елементу који није десно инвертибилан.*

5.2 Дијаметар коначно димензионалних C^*-алгебри

У овом делу ћемо у целости решити питање дијаметра произвољне коначно димензионалне C^*-алгебре. Према Напомени 5.1.10, проблем настаје када треба да применимо Теорему 5.1.6. Када је $A_k = \mathbb{C}$, немамо елемената који нису десно инвертибилни, а да се на њима може достићи норма (0 је једини неинвертибилан). Такође, различити су дијаметри $M_n(\mathbb{C})$ за $n \geqslant 2$. Стога, разликоваћемо случајеве када је A_k нека од $\mathbb{C}, M_2(\mathbb{C}), M_3(\mathbb{C})$ или $M_n(\mathbb{C}), n \geqslant 4$. Подсетимо се и да у $M_n(\mathbb{C})$, као униталној C^*-алгебри, чињеница да елемент није десно инвертибилан јесте еквивалентна чињеници да је он неинвертибилан.

5.2.1 Случај $\mathbb{C}^k, k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$

5.2.1.1 Случај $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

Овде постоје само два неизолована чвора, $(0,1)$ и $(1,0)$. Они су узајамно јако ортогонални, па имамо само једну компоненту повезаности чији је дијаметар 1.

5.2.1.2 Случај $\mathbb{C}^k, k \geqslant 3$

Показаћемо да је $\operatorname{diam}(\mathbb{C}^k) = 3$ за све $k \geqslant 3$. Ако су a_k и b_k неинвертибилни (па самим тим $a_k = b_k = 0$), по Теореми 5.1.8 растојање између $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ је највише 2. Са друге стране, уколико су неинвертибилни на различитим позицијама, њихово растојање је највише 3 по Теореми 5.1.5.

Преостаје да нађемо два чвора чије је растојање 3.

Пример 5.2.1. *Растојање између* $(0, 1, 2, 1, \ldots, 1)$ *и* $(2, 0, 1, 1, \ldots, 1)$ *је 3.*

Доказ. Ако је $(0,1,2,1,\ldots,1) \perp\!\!\!\perp^S (a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k)$, тада је за све $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k \in \mathbb{C}$

$$\|(0+a_1\lambda_1, 1+a_2\lambda_2, 2+a_3\lambda_3,\ldots,1+\lambda_k a_k)\| \geqslant 2,$$

па ако је $a_3 \neq 0$, ставимо $\lambda_3 = -\dfrac{2}{a_3}$ и $\lambda_n = 0$ за $n \neq 3$ и добијамо контрадикцију. Дакле, $a_3 = 0$. Даље, за све $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k \in \mathbb{C}$ мора важити

$$\|(a_1+0\lambda_1, a_2+1\lambda_2, 0+2\lambda_3,\ldots,a_k+1\lambda_k)\| \geqslant \max\{\|a_1\|,\|a_2\|,\ldots,\|a_k\|\}.$$

Сада нека је $\lambda_n = -a_n$ за $n \neq 3$ и $\lambda_3 = 0$. Тада добијамо да је $\|a_1\| \geqslant \|a_n\|$ за све $n \in [1,k]$.

На исти начин, уколико је $(2,0,1,1,\ldots,1) \perp\!\!\!\perp^S (b_1,b_2,b_3,\ldots,b_k)$ добијамо да је $b_1 = 0$ и $\|b_2\| \geqslant \|b_n\|$ за све $n \in [1,k]$.

Дакле, није тачно да важи $(0,1,2,1,\ldots,1) \perp\!\!\!\perp^S (2,0,1,1,\ldots,1)$.

Са друге стране, уколико постоји ненула елемент $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k)$ који је узајамно јако BJ ортогоналан на оба чвора, тада је $a_1 = 0$ и његова норма је већа или једнака од свих осталих координата. Дакле, $a_n = 0$ за све $n \in [1,k]$, контрадикција.

Тада је растојање између њих веће од 2, што имплицира да је једнако 3. □

Тиме смо доказали да важи

Лема 5.2.2. $\operatorname{diam}(\mathbb{C}^2) = 1$ *и* $\operatorname{diam}(\mathbb{C}^k) = 3$ *за* $k \geqslant 3$.

Напомена 5.2.3. *Интересантно је да је дијаметар* $\mathbb{C}^3$ *(са* $\max$ *нормом) мањи уколико посматрамо стандарну* BJ *ортогоналност (која је слабија) што је показано у раду [11]. У том случају је дијаметар 4 (видети Став 5.15). Но, постоји и објашњење за то - у случају* BJ *ортогоналности је више изолованих тачака, па иако је то јача релација, број чворова у компоненти повезаности је мањи.*

У наредној теореми ћемо дати оцену дијаметра коначно димензионалне C^*-алгебре која није комутативна, тј. у том случају ћемо доказати да је дијаметар већи или једнак од 3 - самим тим, он може бити или 3 или 4.

Теорема 5.2.4. *Нека је* $A = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$, $k \geqslant 2$ *при чему је* $A \ncong \mathbb{C}^n$ *за све* $n \in \mathbb{N}$. *Тада је* $\operatorname{diam} A \geqslant 3$.

Доказ. Претпоставимо, без губљења општости, да је $M_{n_k}(\mathbb{C})$ такав да је $n_k \geqslant 2$. По Теореми 3.1.8, знамо да је дијаметар $M_{n_k}(\mathbb{C})$ већи од 2, или постоје две компоненте повезаности (у случају $M_2(\mathbb{C})$). У оба случаја, можемо одабрати два неинвертибилна, ненула елемента $a_k, b_k \in M_{n_k}(\mathbb{C})$ таква да је растојање између њих веће од 2 (код $M_2(\mathbb{C})$ узимамо два која нису из исте компоненте). Ако одаберемо све остале a_i, b_i $(i \in [1, k-1])$ да буду инвертибилни и са нормом мањом од $\|a_k\|$ и $\|b_k\|$, редом (што наравно можемо), тада по Теореми 5.1.6 одмах закључујемо да је $\operatorname{diam} A > 2$. Иначе, $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ би били узајамно јако BJ ортогонални или би постојао $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ узајамно јако BJ ортогоналан на оба. Но, ово је по теореми 5.1.6, немогуће, јер је растојање a_k и b_k веће од 2. □

У наставку ћемо се прво бавити преосталим случајевима са два сабирка, а затим прећи на случај са 3 или више суманда.

5.2.2 Случајеви са два суманда

Прво ћемо се бавити ситуацијом где су оба сабирка $M_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$, а потом случајевима где је један сабирак $\mathbb{C}$, а други $M_2(\mathbb{C})$, $M_3(\mathbb{C})$, односно $M_n(\mathbb{C}), n \geqslant 4$.

5.2.2.1 Случај $M_n(\mathbb{C}) \oplus M_k(\mathbb{C}), n, k \geqslant 2$

Показаћемо да је $\operatorname{diam}(M_n(\mathbb{C}) \oplus M_k(\mathbb{C}))$ једнак 3 независно од n и k. По Теореми 5.2.4 знамо да је дијаметар најмање 3, а по теоремама 5.1.5, 5.1.6, 5.1.8, 5.1.9, треба још да испитамо једино случај када су једини неинвертибилни елементи на истој позицији и имају норму строго већу од норме инвертибилних елемената.

Лема 5.2.5. *Нека су $(a, b), (c, d) \in M_n(\mathbb{C}) \oplus M_k(\mathbb{C})$ такви да су a и b неинвертибилне, док су c и d инвертибилне матрице. Додатно, нека важи $\|a\| > \|b\|$ и $\|c\| > \|d\|$. Тада је растојање између њих највише 3.*

Доказ. Како су a и c неинвертибилни, то постоје неинвертибилни, ненула елементи a_1 и c_1 такви да је $a \perp\!\!\!\perp^S a_1$ и $c \perp\!\!\!\perp^S c_1$. Тада важи

$$(a, b) \perp\!\!\!\perp^S (a_1, \operatorname{diag}(\|a_1\|, 0, \ldots, 0)) \perp\!\!\!\perp^S (c_1, \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, \|c_1\|)) \perp\!\!\!\perp^S (c, d),$$

где је $\operatorname{diag}(\|a_1\|, 0, \ldots, 0)$ ознака за $k \times k$ дијагоналну матрицу чији је једини ненула елемент у првој врсти и првој колони и износи $\|a_1\|$.

Прва и трећа узајамно јака BJ ортогоналност важи на основу Леме 5.1.7.

Коначно, приметимо да је $(\operatorname{diag}(\|a_1\|, 0, \ldots, 0))^* \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, \|c_1\|) = 0$, па су ови елементи ортогонални у стандардном смислу, а самим тим су и узајамно јако BJ ортогонални. Поново, по Леми 5.1.7, важи и средња узајамно јака BJ ортогоналност. □

Тиме смо доказали да важи и

Лема 5.2.6. $\operatorname{diam}(M_n(\mathbb{C}) \oplus M_k(\mathbb{C})) = 3$, *за све* $n, k \geqslant 2$.

5.2.2.2 Случај $\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})$

Доказаћемо да је $\operatorname{diam}(\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})) = 4$. Како је у свакој C^*-алгебри дијаметар највише 4, довољно је да нађемо два чвора чије је растојање тачно 4, што ћемо и урадити у следећем примеру.

Пример 5.2.7. *Растојање између* $\left(1, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ *и* $\left(1, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$ *је 4.*

Доказ. Норма обе 2×2 матрице износи 2. По Теореми 5.1.6, знамо да ова два елемента нису узајамно јако ортогонална. Штавише, ако постоји $(a, b) \in \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})$ који је узајамно јако ортогоналан на оба елемента, тада поново по Теореми 5.1.6, $b \perp\!\!\!\perp^S \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $b \perp\!\!\!\perp^S \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, као и да је $\|b\| \geqslant \|a\|$. Дакле, b је у компоненти повезаности матрица $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Али ово није могуће по Теореми 3.1.8(3), јер $\operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ и $\operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$ нису ни исти, нити међусобно ортогонални.

На крају, ако претпоставимо да постоје два ненула елемента $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})$ такви да је

$$\left(1, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \perp\!\!\!\perp^S (a, b) \perp\!\!\!\perp^S (c, d) \perp\!\!\!\perp^S \left(1, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right),$$

знамо, по Теореми 5.1.6, да је $b \perp\!\!\!\perp^S \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $d \perp\!\!\!\perp^S \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, али такође и да је $\|b\| \geqslant \|a\|$ и $\|d\| \geqslant \|c\|$, као и да су b и d неинвертибилни. Разматраћемо три случаја:

1. $a = c = 0$: Тада је $b \perp\!\!\!\perp^S d$, но ово није могуће, јер $\operatorname{Im} b$ и $\operatorname{Im} d$ нису ни једнаки ни међусобно ортогонални у стандардном смислу (приметимо и да су и различити од 0).

2. a и c су оба инвертибилни: Тада поново мора важити $b \perp\!\!\!\perp^S d$, што није могуће. Наиме, за све $(x, y) \in \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})$ важи

   $$\max\{(|a + cx|, \|b + dy\|)\} \geqslant \max\{|a|, \|b\|\} = \|b\|,$$

   па ако ставимо $x = -c^{-1}a$, добијамо $b \perp^S d$. Аналогно доказујемо и други смер јаке BJ ортогоналности.

3. a је инвертибилан и $c = 0$ (обрнута ситуација се слично разрешава): Тада је за све $(x, y) \in \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})$

   $$\max\{|0 + ax|, \|d + by\|\} \geqslant \max\{|0|, \|d\|\} = \|d\|,$$

   па ако је $x = 0$, онда важи $d \perp^S b$. Али ова релација није могућа чак ни у једном смеру. Наиме, по једноставној последици Леме 3.1.1, у $M_2(\mathbb{C})$, за неинвертибилне матрице d и b, $d \perp^S b \Leftrightarrow d^*b = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} d \perp \operatorname{Im} b$. Приметимо да су друга и трећа еквиваленција симетричне, па и прва релација мора бити симетрична, тј. јака BJ ортогоналност у једном смеру повлачи узајамно јаку BJ ортогоналност за произвољне неинвертибилне елементе из $M_2(\mathbb{C})$.

□

Дакле, важи:

Лема 5.2.8. $\operatorname{diam}(\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})) = 4$.

5.2.2.3 Случај $\mathbb{C} \oplus M_3(\mathbb{C})$

Показаћемо да је дијаметар у овом случају једнак 3. Као у претходним случајевима, преостало је да посматрамо ситуацију када су неинвертибилни елементи на истој позицији и када је њихова норма строго већа од норме инвертибилних. Ово је могуће само уколико су неинвертибилни суманди у оквиру $M_3(\mathbb{C})$.

Лема 5.2.9. *Нека су $(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}\oplus M_3(\mathbb{C})$ такви да су a и c инвертибилни (па самим тим различити од 0), док су b и d неинвертибилне матрице. Додатно, претпоставимо да је $\|a\|<\|b\|$ и $\|c\|<\|d\|$. Тада је растојање између (a,b) и (c,d) највише 3.*

Доказ. Идеја је да конструишемо матрице $e,f\in M_3(\mathbb{C})$ такве да је $b\perp\!\!\!\perp^S e$ и $d\perp\!\!\!\perp^S f$, али са додатним својством да је $e\perp^S f$ (приметимо да је узајамно јака BJ ортогоналност није могућа у општем случају јер је дијаметар $M_3(\mathbb{C})$ једнак 4). Тада ће важити

$$(a,b)\perp\!\!\!\perp^S(0,e)\perp\!\!\!\perp^S(\|f\|,f)\perp\!\!\!\perp^S(c,d).$$

Наиме, прва и трећа узајамно јака BJ ортогоналност важе на основу Леме 5.1.7, као и средња у смеру са лева на десно. Но, за све $(x,y)\in\mathbb{C}\oplus M_3(\mathbb{C})$ важи да је

$$\max\{|\|f\|+0x|,\|f+ey\|\}\geqslant\|f\|=\max\{|\|f\||,\|f\|\},$$

што доказује недостајући смер. Дакле, остало је да конструишемо e и f.

Постоје јединични вектори $x,y\in\mathbb{C}^3$ такви да је $\|bx\|=\|b\|$ и $\|dy\|=\|d\|$. Такође, како су b и d неинвертибилни, постоје јединични вектори $v_b\in\operatorname{Ker}b^*$ и $v_d\in\operatorname{Ker}d^*$. Даље, постоји јединични вектор $w\in\operatorname{span}\{bx,v_d\}^{\perp}$ (приметимо да је димензија овог простора 3). Сада дефинишимо e тако да важи $ev_b=v_b$, $ew=w$ и $e|_{\operatorname{span}\{v_b,w\}^{\perp}}=0$. Даље, дефинишимо f са $fv_d=v_d$, $f|_{\{v_d\}^{\perp}}=0$.

Приметимо да је $\langle bx,ev_b\rangle=\langle bx,v_b\rangle=\langle x,b^*v_b\rangle=\langle x,0\rangle=0$ и $\langle bx,ew\rangle=\langle bx,w\rangle=0$ јер је $bx\perp w$. Дакле, $bx\perp\operatorname{Im}e$ одакле закључујемо да је $e^*bx=0$. Како је $\|bx\|=\|b\|$, по Теореми 2.2.7 добијамо да је $b\perp^S e$. Штавише, знамо да важи да је $\|ev_b\|=\|v_b\|=1=\|e\|$ и $b^*ev_b=b^*v_b=0$, јер $v_b\in\operatorname{Ker}b^*$. Поново, по Теореми 2.2.7 добијамо да је $b\perp\!\!\!\perp^S e$. На сличан начин је $dy\perp\operatorname{Im}f$, па је $f^*dy=0$. Како је $\|dy\|=\|d\|$, то важи да је $d\perp^S f$. Такође, $\|fv_d\|=\|v_d\|=1=\|f\|$ и $d^*fv_d=d^*v_d=0$, па је $d\perp\!\!\!\perp^S f$. На крају, $\|ew\|=\|w\|=1=\|e\|$ и $f^*ew=f^*w=0$ јер је $w\perp v_d$, чиме смо показали да је $e\perp^S f$, и тиме комплетирали доказ. $\square$

Овим смо показали да је

Лема 5.2.10. $\operatorname{diam}(\mathbb{C}\oplus M_3(\mathbb{C}))=3$.

5.2.2.4 Случај $\mathbb{C}\oplus M_n(\mathbb{C}), n\geqslant 4$

По Теореми 5.2.4 дијаметар је бар 3. Са друге стране, по Теореми 5.1.6, као у претходним случајевима, једино је преостало да посматрамо ситуацију када су неинвертибилни елементи на истој позицији и када је њихова норма строго већа од инвертибилних. Ово је могуће само уколико су неинвертибилни суманди у оквиру $M_n(\mathbb{C})$. Коначно, по Теореми 3.1.8, дијаметар $M_n(\mathbb{C})$ је 3, па је дијаметар $\mathbb{C}\oplus M_n(\mathbb{C})$ највише 3 (можемо повезати матрице $n\times n$ путем дужине највише 3, а на прву позицију (тј. позицију где је $\mathbb{C}$) дописати 0).

Тиме смо коначно доказали да је

Лема 5.2.11. $\operatorname{diam}(\mathbb{C}\oplus M_n(\mathbb{C}))=3$ *за све* $n\geqslant 4$.

5.2.3 Случајеви са три или више суманда

Показаћемо да је дијаметар коначно димензионалне C^*-алгебре са бар 3 суманда једнак 3 у случају да је она некомутативна (случајеве $A=\mathbb{C}^n$ за $n\in\mathbb{N}$ смо већ размотрили). Дакле, можемо претпоставити да је неки n_i већи од 1 и да неинвертибилни елементи $a_i, b_i\in M_{n_i}$ имају строго већу норму у односу на остале (инвертибилне) елементе.

Лема 5.2.12. *Нека је* $k\geqslant 3, n_i\geqslant 2$ *и*

$$(a_1,\dots,a_i,\dots,a_k),(b_1,\dots,b_i,\dots,b_k)\in A=M_{n_1}(\mathbb{C})\oplus\dots M_{n_i}(\mathbb{C})\oplus\dots\oplus M_{n_k}(\mathbb{C}),$$

су такви да су a_i, b_i *једини неинвертибилни елементи у* k*-торкама. Додатно, нека је* $\|a_i\|>\|a_j\|, \|b_i\|>\|b_j\|$ *за све* $j\neq i$. *Тада је растојање између њих највише 3.*

Доказ. Како су a_i и b_i неинвертибилни, то постоје неинвертибилни, ненула елементи a_i' и b_i' тако да је $a_i\perp\!\!\!\perp^S a_i'$ и $b_i\perp\!\!\!\perp^S b_i'$. Доказаћемо да је

$$\begin{aligned}(a_1,\dots,a_i,\dots,a_k) &\perp\!\!\!\perp^S (\|a_i'\|1,\dots,a_i',\dots,0)\\ &\perp\!\!\!\perp^S (0,\dots,b_i',\dots,\|b_i'\|1)\perp\!\!\!\perp^S (b_1,\dots,b_i,\dots,b_k),\end{aligned}$$

при чему су сви ненаписани елементи једнаки 0.

Наиме, прва и трећа узајамно јака BJ ортогоналност важе на основу Леме 5.1.7. Преостаје да докажемо средњу. За све $(x_1,\dots,x_i,\dots,x_k)\in A$, важи да је

$$\begin{aligned}&\max\{\|\|a_i'\|1+0x_1\|,\dots,\|a_i'+b_i'x_i\|,\dots,\|0+\|b_i'\|1x_k\|\}\\ &\geqslant \|\|a_i'\|1\|=\max\{\|\|a_i'\|1\|,\dots,\|a_i'\|,\dots,\|0\|\},\end{aligned}$$

што доказује да је $(\|a_i'\|1, \dots, a_i', \dots, 0) \perp^S (0, \dots, b_i', \dots, \|b_i'\|1)$. Но, и други смер се аналогно показује. □

Дакле, важи

Лема 5.2.13. *Нека је* $A = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots M_{n_i}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}), k \geqslant 3$ *и* $A \ncong \mathbb{C}^n$ *за ӣроизвољно* $n \in \mathbb{N}$. *Тада је* $\operatorname{diam} A = 3$.

Ово поглавље завршавамо сумирајући све претходно доказане резултате, изражавајући их у једној теореми.

Теорема 5.2.14. *Нека је* $A = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}), k \geqslant 2$. *Тада је:*

(1) $\operatorname{diam}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) = 1$*;*

(2) $\operatorname{diam}(\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})) = 4$*;*

(3) $\operatorname{diam}(A) = 3$ *у свим ӣреосӣалим случајевима.*

Доказ. Доказ је садржан у Лемама 5.2.2, 5.2.6, 5.2.8, 5.2.10, 5.2.11, 5.2.13. □

Глава 6

Даљи правци истраживања

6.1 Истраживања везана за дијаметар

Природан наставак истраживања проблема тачног дијаметра јесте питање како се он понаша у односу на класичне конструкције у C^*-алгебрама. Стога, питање је колики је дијаметар AF алгебри и UHF алгебри, односно C^*-алгебри које су формиране као тензорски производ неких C^*-алгебри. На овом последњем плану, постоји резултат, додуше који не разматра само C^*-алгебре, него и шире - Банахове, који се може видети у раду [58].

Како знамо да је дијаметар ортографа произвољне C^*-алгебре не већи од 4, поставља се питање да ли постоји неко унутрашње својство алгебре које одређује колико је он тачно. Нпр. знамо да $M_3(\mathbb{C})$ и $\mathbb{C}\oplus M_2(\mathbb{C})$ имају дијаметар 4. Можемо ли описати све C^*-алгебра које имају дијаметар 4?

Последње питање је описано у раду [45]. Циљ нам је да покажемо Став 4.3.3 са другачијим условима. Питање је да ли су следећа четири услова еквивалентна?

(1) За минималне пројекције p, $q \in A''$, постоји минимална пројекција r таква да је $pr = qr = 0$, тј. важи закључак из Става 4.3.3;

(2) Произвољна два максимална модуларна лева идеала у A имају непразан пресек;

(3) Ортогонална димензија C^*-алгебре A је најмање 3. (Овде, ортогонална димензија је максимална кардиналност фамилије пројекција $\{p_i\}_{i\in I}$ за које је $p_ip_j = 0$ за $i \neq j$);

(4) За произвољна два чиста стања на A, постоји чисто стање BJ ортогонално на оба.

Напомена 6.1.1. *Такође, било би интересантно приказати претходни став путем иредуцибилних репрезентација.*

Делимични одговор је ипак већ показан.

Став 6.1.2. *Услов (2) повлачи услов (4), а еквивалентан је са (1).*

Доказ. Докажимо да (2) $\Rightarrow$ (4).

Нека су φ и ψ чиста стања на A, и N_φ односно N_ψ њихови леви идеали, дефинисани са

$$N_\varphi = \{a \in A \mid \varphi(ab) = 0, \text{ за све } b \in A\},$$

и слично за N_ψ. По (2), пресек $C = N_\varphi \cap N_\psi$ је непразан. C је идеал, па самим тим и C^*-алгебра. Узмимо $c > 0$, $c \in C$. Тада постоји чисто стање τ на C, такво да је $\tau(c) = 1$.

Довољно је да докажемо да можемо τ проширити на целу A. (претпоставимо да је A унитална). По Хан-Банаховој теореми, постоји позитивна екстензија стања τ норме један, па је то стање. Можемо показати и да је то чисто стање, по стандардном процесу описаном у поглављу о C^*-алгебрама.

Докажимо и да је (2) $\Leftrightarrow$ (1).

Из Леме 4.2.6, знамо да за минималне пројекције $p, q \in A''$, постоје чиста стања φ_p и φ_q таква да је $\varphi_p(p) = \varphi_q(q) = 1$ и $pap = \varphi_p(a)p$, односно $qaq = \varphi_q(a)q$ за све $a \in A$. Приметимо да чињеница да је $pr = qr = 0$ еквивалентна са $prp = qrq = 0$, па мора важити $\varphi_p(r) = \varphi_q(r) = 0$. Одатле $pr = qr = 0$ је еквивалентно са $r \in Ker(\varphi_p) \cap Ker(\varphi_q)$. □

6.2 Чувари

Проблем истраживања пресликавања које чувају неку особину, тзв. чувара, јесте широко распростањен и значајан. Конкретно, занимају нас пресликавања $T : X \to Y$, где су X и Y нормирани простори, таква да ако је $x \perp y$ у X, онда је $T(x) \perp T(y)$ у Y. Овде подразумевамо ортогоналност у општем смислу. Наравно, можемо наметнути и неке додатне особине овим пресликавањима попут линеарности, бијективности и слично.

Наиме, уколико се ради додатно о просторима са скаларним производом, и T је линеарно пресликавање које чува скаларни производ, онда се лако покаже да је T скаларни умножак изометрије, тј. постоји константа $\gamma \geqslant 0$ тако да је $\|Tx\| = \gamma\|x\|$ за све $x \in X$.

Први резултати везани за чуваре BJ ортогоналности дати су у раду [46], где су X и Y реални нормирани простори. Тај резултат је проширен на комплексне нормиране просторе у раду [21], док је наведени резултат на једноставнији начин доказан у раду [86], при чему је и резултат уопштен - довољно је претпостављати само адитивност уместо линеарности.

Теорема 6.2.1. *Нека су X и Y нормирани простори над пољем $\mathbb{F} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ако је $T : X \to Y$ (конјунговано) линеарно пресликавање које чува стандардну BJ ортогоналност, онда је T скаларни умножак изометрије.*

Претходни резултати су се тицали стандардне BJ ортогоналности. У раду [15] дата је класификација сурјективних линеарних чувара јаке BJ ортогоналности у оба смера на простору $B(H)$.

Теорема 6.2.2. *Нека је $\Phi : B(H) \to B(H)$ сурјективно линеарно пресликавање. Тада Φ чува јаку BJ ортогоналност у оба смера (тј. $x \perp^S y$ ако и само ако $\Phi(x) \perp^S \Phi(y)$) ако и само ако постоје унитарни оператори $U, V \in B(H)$ и скалар $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такви да је*

$$\Phi(X) = cUXV \quad \text{за све } X \in B(H).$$

Затим је у раду [10] разматрано питање чувара узајамне јаке BJ ортогоналности на $B(H)$. Очекивано, слично као код дијаметра, постоје три случаја: када је $\dim H = 2$, затим када је $3 \leqslant \dim H < +\infty$ и коначно када је $\dim H = \infty$. Почећемо са средњим случајем, што је Теорема 2.7. из поменутог рада.

Теорема 6.2.3. *Нека је $3 \leqslant \dim H < \infty$ и $\Phi : B(H) \to B(H)$ ненула линеарно пресликавање. Тада Φ чува узајамну јаку BJ ортогоналност у оба смера ((тј. $x \perp\!\!\!\perp^S y$ ако и само ако $\Phi(x) \perp\!\!\!\perp^S \Phi(y)$)) ако и само ако постоје унитарни оператори $U, V \in B(H)$ и скалар $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такви да је*

$$\Phi(X) = cUXV \quad \text{за све } X \in B(H).$$

Дакле, крајњи облик је исти као у случају јаке BJ ортогоналности (не узајамне), али се не претпоставља сурјективност.

Случај када је $\dim H = 2$ је другачији, јер подсетимо се Леме 3.1.1 која каже да је јака BJ ортогоналност за неинвертибилне (а само за такве је и могућа) еквивалентна са ортогоналношћу у смислу скаларног производа. Следеће тврђење је Теорема 2.9. из рада [10].

Теорема 6.2.4. *Нека је* $\dim H = 2$ *и* $\Phi : B(H) \to B(H)$ *ненула линеарно пресликавање. Тада* Φ *чува узајамну јаку* BJ *ортогоналност ако и само ако постоје оператори* $U, B \in B(H)$ *такви да је* U *унитаран и*

$$\Phi(X) = UXB \quad \text{за све } X \in B(H).$$

При томе је пресликавање Φ *ињективно ако и само ако је* B *инвертибилан.*

Код бесконачно димензионалног простора је ситуација мало другачија - захтеваћемо сурјективност Φ, а добићемо формулацију као у Теореми 6.2.2.

Теорема 6.2.5. *Нека је* $\dim H = \infty$ *и* $\Phi : B(H) \to B(H)$ *сурјективно линеарно пресликавање. Тада* Φ *чува узајамно јаку* BJ *ортогоналност у оба смера ако и само ако постоје унитарни оператори* $U, V \in B(H)$ *и скалар* $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *такви да је*

$$\Phi(X) = cUXV \quad \text{за све } X \in B(H).$$

Поставља се питање да ли се ова теорема може уопштити на неке друге важне класе C^*-алгебри или још шире на све C^*-алгебре.

Такође, природно питање је како изгледају нелинеарна пресликавања која чувају ((узајамно) јаку) BJ ортогоналност. На овом плану, кандидат је у раду са чланом комисије Б. Кузмом комплетно решио проблем нелинеарних чувара стандардне BJ ортогоналности на коначно димензионалним C^*-алгебрама (видети [53]).

6.3 Лево и десно симетричне тачке

Познато нам је да је (јака) BJ ортогоналност симетрична само у изузетним случајевима. Но, поставља се питање које су то тачке (лево) симетричне, тј. оне за које из једног смера ортогоналности, аутоматски следи други. Конкретно, дајемо следећу дефиницију - она ће бити општа, за произвољан нормиран простор, а обухватаће случајеве и стандардне и јаке BJ ортогоналности.

Дефиниција 6.3.1. *Нека је X нормиран простор. За елемент $x \in X$ кажемо да је лево симетрична тачка у односу на (јаку) BJ ортогоналност, ако из $x \perp y$ (односно $x \perp^S y$) следи $y \perp x$ (тј. $y \perp^S x$) за све $y \in X$.*

На сличан начин се наравно могу увести десно симетричне тачке.

Лево симетричне тачке су први пут формализоване у раду [64], а већ нешто раније истраживане у радовима [27] и [8].

Десно симетричне тачке су истраживане и много раније, као нпр. у раду [83], при чему оне нису формално тако назване. Штавише, он је помоћу њих карактерисао изометрије и коизометрије на $B(H)$ и додатно помоћу њих окарактерисао чуваре стандардне BJ ортогоналности на $B(H)$. Следећа теорема је Теорема 2.5. из рада [83].

Теорема 6.3.2. *Нека $A, B \in B(H)$. Тада $A \perp B$ повлачи $B \perp A$ ако и само ако је B скаларни умножак изометрије или коизометрије.*

Исти аутор се у каснијем раду [84] бавио r-лево симетричним, односно r-десно симетричним, које су шире класе од класичних.

Значајан напредак у изучавању лево симетричних, десно симетричних тачака као и чувара, приказан је у оквиру радова [48], [47] и [49].

У раду [48] су најпре описане лево симетричне тачке за јаку BJ ортогоналност на произвољној фон Нојмановој алгебри $\mathcal{R}$, што је Теорема 3.3.

Теорема 6.3.3. *Нека је $\mathcal{R}$ фон Нојманова алгебра и елемент $A \in \mathcal{R}$ норме један. Тада је A лево симетрична тачка за јаку BJ ортогоналност у $\mathcal{R}$ ако и само ако је $|A|$ минимална пројекција у $\mathcal{R}$.*

Наведена теорема не важи за општу C^*-алгебру. Наиме, Теорема 3.6. из истог рада описује лево симетричне тачке за (јаку) BJ ортогоналност.

Теорема 6.3.4. *Нека је K компактан Хаусдорфов простор и $f \in C(K)$. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(1) f је лево симетрична тачка за BJ ортогоналност у $C(K)$;

(2) f је лево симетрична тачка за јаку BJ ортогоналност у $C(K)$;

(3) $f = \alpha\chi_{\{t_0\}}$ *за неки скалар* $\alpha \in \mathbb{C}$ *и изоловану тачку* $t_0 \in K$*.*

Напомена 6.3.5. *Приметимо да* $K = [0, 1]$ *нема изолованих тачака па самим тим ни* $C[0, 1]$ *нема лево симетричних у односу на јаку* BJ *ортогоналност. Са друге стране, 1 (функција која је идентички једнака један) јесте минимална пројекција, па Теорема 6.3.3 не важе за опште* C^**-алгебре, већ само за фон Нојманове.*

Следи опис лево симетричних тачака за стандардну BJ ортогоналност, што је садржај Теореме 3.12.

Теорема 6.3.6. *Нека је* $\mathcal{R}$ *фон Нојманова алгебра и елемент* $A \in \mathcal{R}$ *норме један. Тада је* A *лево симетрична тачка за стандардну* BJ *ортогоналност у* $\mathcal{R}$ *ако и само ако је* $|A|$ *централна пројекција која је минимална у* A*.*

Интересантно је да је ситуација код десно симетричних тачака потпуно другачије. Наредно тврђење је Теорема 4.4. из истог рада.

Теорема 6.3.7. *Нека је* $\mathcal{R}$ *фон Нојманова алгебра и елемент* $A \in \mathcal{R}$ *различит од 0. Тада је* A *десно симетрична тачка за јаку* BJ *ортогоналност у* $\mathcal{R}$ *ако и само ако је* A *десно инвертибилан у* $\mathcal{R}$*.*

Ситуација је другачија и код комутативних C^*-алгебри, и разликује се код јаке, односно стандардне BJ ортогоналности, што је описано редом у Ставу 4.3. и Теореми 4.6.

Став 6.3.8. *Нека је* K *компактан Хаусдорфов простор и функција* $f \in C(K)$ *таква да је* $f \neq 0$*. Ако је* f *десно симетрична тачка за (јаку)* BJ *ортогоналност у* $C(K)$*, тада је* f *инвертибилна. Штавише, ако је* f *инвертибилна, онда је она десно симетрична тачка за јаку* BJ *ортогоналност.*

Теорема 6.3.9. *Нека је* K *компактан Хаусдорфов простор и функција* $f \in C(K)$ *таква да је* $\|f\|_\infty = 1$*. Тада су следећа два тврђења еквивалентна:*

(1) f *је десно симетрична тачка за стандардну* BJ *ортогоналност у* $C(K)$*;*

(2) f *је унимодуларна, тј.* $|f(t)| = 1$ *за све* $t \in K$*.*

И последње на тему десно симетричних, Теорема 4.7. решава случај стандардне BJ ортогоналности.

Теорема 6.3.10. *Нека је $\mathcal{R}$ фон Нојманова алгебра и елемент $A \in \mathcal{R}$ норме један. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(1) A је десно симетрична тачка за стандардну BJ ортогоналност у $\mathcal{R}$;

(2) A је директна сума изометрије и коизометрије;

(3) A је крајња тачка јединичне лопте у $\mathcal{R}$.

Поред свега, дат је неки вид уопштења Теореме 6.3.2, тј. карактеризације коизометрија у фон Нојмановим алгебрама на основу јаке BJ ортогоналности. Теорема 5.4. биће корисна и у изучавању чувара.

Теорема 6.3.11. *Нека је $\mathcal{R}$ фон Нојманова алгебра и елемент $A \in \mathcal{R}$ норме један. Тада је A коизометрија ако и само ако је $A \perp^S B$ за све B који нису десно инвертибилни у $\mathcal{R}$.*

На крају овог рада, у Теореми 5.7. описани су линеарни, сурјективни чувари јаке BJ ортогоналности у оба смера на фон Нојмановим алгебрама (упоредити са Теоремом 6.2.2).

Теорема 6.3.12. *Нека су $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ фон Нојманове алгебре и $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ сурјективно линеарно пресликавање. Тада φ чува јаку BJ ортогоналност у оба смера ако и само ако постоји унитаран $U \in \mathcal{S}$ и *-изоморфизам $\Phi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ такав да је*

$$\varphi(A) = \|\varphi(I)\| U \Phi(A), \quad \text{за све } A \in \mathcal{R}.$$

У раду [47] су описане лево симетричне тачке за стандардну BJ ортогоналност у преддуалу произвољне фон Нојманове алгебре, што је исказано у Теореми 3.6.

Теорема 6.3.13. *Нека је $\mathcal{R}$ фон Нојманова алгебра. Ако $\mathcal{R}_*$ нема ненула лево симетричних тачака у односу на стандардну BJ ортогоналност, онда важи неки од следећа три случаја:*

(1) $\mathcal{R} = \mathbb{C}$ и тада је сваки елемент преддуала $\mathcal{R}_* = \mathbb{C}$ лево симетрична тачка за стандардну BJ ортогоналност у $\mathcal{R}_*$.

(2) $\mathcal{R} = l^2_\infty$ и тада је ненула функционал $\rho \in \mathcal{R}_* = l^2_1$ лево симетрична тачка за стандардну BJ ортогоналност у $\mathcal{R}_*$ ако и само ако је $\|\rho\|^{-1}\rho \in \left\{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a| = |b| = \frac{1}{2}\right\}$.

(3) $\mathcal{R} = M_2(\mathbb{C})$ *и тада је ненула функционал* $\rho \in \mathcal{R}_* = (M_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ *лево симетрична тачка за стандардну* BJ *ортогоналност у* $\mathcal{R}_*$ *ако и само ако је* $\|\rho\|^{-1}\rho \in \left\{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \sigma_1 = \sigma_2 = \dfrac{1}{2}\right\}$*, где су* σ_1, σ_2 *сопствене вредности матрице* A*.*

Напомена 6.3.14. *Занимљиво је да управо исте три мале алгебре (приметимо да је* $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \cong l^2_\infty$*) и овде праве разлику, као што је то било код дијаметра ортографа* C^**-алгебре.*

Питање 6.3.15. *Отворено је питање како изгледају десно симетричне тачке у односу на стандардну* BJ *ортогоналност у преддуалу произвољне* C^**-алгебре.*

У трећем раду [49], уводи се локализација концепта лево симетричних тачака.

Дефиниција 6.3.16. *Нека је* X *Банахов простор и* $M \subseteq X$*. Тада је* $x \in M$ *једна* M*-локално лево симетрична тачка за* BJ *ортогоналност ако* $x \perp y$ *повлачи* $y \perp x$ *за све* $y \in M$*.*

Аналогно се дефинишу и M-локално лево симетричне тачке. Конкретно, разматран је случај када је $X = A$, где је A произвољна C^*-алгебра, док је $M = A_+$, тј. конус позитивних елемената.

Следећа тврђење описује A_+-локално лево симетричне тачке, а у питању је Теорема 3.2. из поменутог рада.

Теорема 6.3.17. *Нека је* A *произвољна* C^**-алгебра и елемент* $a \in A_+$ *норме један. Тада је* a *једна* A_+*-локално лево симетрична тачка за* BJ *ортогоналност ако и само ако је* a *минимална пројекција, тј. важи* $aAa = \mathbb{C}a$*.*

У случају A_+-локално десно симетричних тачака, ситуација зависи од чињенице да ли је A унитална и ако није, каква је структура апроксимативне јединице.

У случају униталних, тврђење је заправо доказано у оквиру Последице 4.2.

Теорема 6.3.18. *Нека је* A *унитална* C^**-алгебра и* $a \in A_+$ *различит од 0. Тада је* a *једна* A_+*-локално десно симетрична тачка за* BJ *ортогоналност ако и само ако је* a *инвертибилан.*

C^*-алгебру A зваћемо σ-унитални ако постоји пребројива апроксимативна јединица у A. Елемент $a \in A$ зовемо стриктно позитивним ако је $A = \overline{aAa}$. При томе, познато је да је C^*-алгебра σ-унитална ако и само ако постоји стриктно позитиван елемент. Штавише, постоји карактеризација стриктно позитивних елемената преко функционала. Наиме, a је стриктно позитиван ако је позитиван и $\varphi(a) > 0$ за све ненула позитивне функционале φ на A.

Следеће је карактеризација A_+-локално десно симетричних тачака у комутативним C^*-алгебрама (Теорема 4.4.).

Теорема 6.3.19. *Нека је A комутативна C^*-алгебра и елемент $a \in A_+$ норме један. Тада је a једна A_+-локално десно симетрична тачка у односу на BJ ортогоналност ако и само ако је a стриктно позитиван.*

У општој σ-униталној C^*-алгебри показана је само импликација у једном смеру (Став 4.3.).

Став 6.3.20. *Нека је A једна σ-унитална C^*-алгебра и a стриктно позитиван елемент у A. Тада је a једна A_+-локално десно симетрична тачка за BJ ортогоналност.*

Питање 6.3.21. *Да ли важи и обрат претходног става? Шта можемо рећи о A_+-локално десно симетричним тачкама на произвољној неуниталној C^*-алгебри?*

Коначно, дата је карактеризација адитивних, бијективних чувара на позитивним елементима. Претходно, дефинишимо Жорданове *-изоморфизме.

Дефиниција 6.3.22. *За униталне C^*-алгебре A и B, линеарно пресликавање $J : A \to B$ се назива Жорданов *-хомоморфизам ако је $J(a^2) = J(a)^2$ и $J(a^*) = J(a)$ за све $a \in A$. Ако је додатно J и бијективно пресликавање, зовемо га Жорданов *-изоморфизам.*

Детаљи о њима се могу пронаћи у [39] и [40]. Нпр. Жорданови *-изоморфизми су изометрије и важи $J(ab) = J(a)J(b)$ уколико a и b комутирају.

Теорема 6.3.23. *Нека су* A *и* B *униталне* C^**-алгебре. Претпоставимо да бијективно, адитивно, пресликавање* $\varphi : A_+ \to B_+$ *чува* BJ *ортогоналност у оба смера. Тада постоји Жорданов* **-изоморфизам* $J : A \to B$ *такав да је*

$$\varphi(a) = \|\varphi(1)\|J(a) \quad \text{за све } a \in A_+.$$

Питање 6.3.24. *Како изгледа претходна карактеризација чувара у случају произвољних или бар* σ*-униталних* C^**-алгебри?*

На крају овог дела поменимо најновије резултате везане за лево и десно симетричне тачке на Хилбертовим C^*-модулима - наравно, ту ћемо посматрати јаку BJ ортогоналност.

У раду [82], показани су резултати везани за лево и десно симетричне тачке на Хилбертовим C^*-модулима $B(H, K)$ и $K(H, K)$. Ми ћемо овде навести само оне који се односе на десно симетричне тачке, јер су касније резултати везани за лево симетричне тачке уопштени на произвољан Хилбертов C^*-модул. Наредна тврђења су Теореме 3,4 и 5 из поменутог рада.

Теорема 6.3.25. *Нека су* H *и* K *Хилбертови простори и нека* $S \in B(H, K)$, $S \neq 0$*. Претпоставимо да важи неки од следећа два услова:*

(и) H *је бесконачно димензионалан;*

(ии) $\dim H \geqslant \dim K$*.*

Тада је S *десно симетрична тачка у* $B(H, K)$ *ако и само ако је* S *десно инвертибилан.*

Теорема 6.3.26. *Нека су* H *и* K *Хилбертови простори и нека* $S \in B(H, K)$, $S \neq 0$*. Нека је* H *коначно димензионалан и* $2 \leqslant \dim H < \dim K$*. Тада је* S *десно симетрична тачка у* $B(H, K)$ *ако и само ако је* S *скаларни умножак изометрије.*

Теорема 6.3.27. *Нека су* H *и* K *Хилбертови простори и нека* $S \in B(H, K)$, $S \neq 0$*. Нека је* H *бесконачно димензионалан. Тада је* S *десно симетрична тачка у* $K(H, K)$ *ако и само ако је* $\overline{S(H)} = K$*.*

Коначно, што се тиче лево симетричних тачака, приказаћемо резултате из рада [7].

Напомена 6.3.28. *Користићемо дефиницију да је пројекција* $p \in A$ *минимална ако је* $pAp = \mathbb{C}p$. *Претходно је у [8] коришћена дефиниција да је* p *минимална ако не постоји ненула пројекција* $q \leqslant p$, *где је* $q \neq p$, *па треба пазити. Напоменимо да су ове две дефиниције у фон Нојмановим алгебрама еквивалентне, али у* C^**-алгебрама не морају бити. Наиме, овако набројане, прва повлачи другу, али обратно не мора бити тачно.*

Наредно тврђење је Став 2.6. из [7].

Став 6.3.29. *Нека је* V *Хилбертов* A*-модул и елемент* $x \in V$ *норме један. Следећа тврђења су еквивалентна:*

(1) x *је лево симетрична тачка у* V*;*

(2) $\langle x, x\rangle$ *је лево симетрична тачка у* A*;*

(3) За сваки елемент $y \in V$ *важи:* $x \perp^S y \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$*;*

(4) $\langle x, x\rangle$ *је минимална пројекција у* A.

Као последицу, добијамо опис лево симетричних тачака за јаку BJ ортогоналност у C^*-алгебрама, посматрајући C^*-алгебру као Хилбертов C^*-модул над собом. То је Последица 2.7. из поменутог рада.

Последица 6.3.30. *Нека је* A *произвољна* C^**-алгебра и елемент* $a \in A$ *норме један. Следећа тврђења су еквивалентна:*

(1) a *је лево симетрична тачка у* A*;*

(2) $|a|^2$ *је лево симетрична тачка у* A*;*

(3) За сваки елемент $b \in A$ *важи:* $a \perp^S b \Longleftrightarrow a^*b = 0$*;*

(4) a^*a *је минимална пројекција у* A.

Став 2.11. из истог рада је преформулација Става 6.3.29, уз одговарајући прелазак са скаларног производа и C^*-алгебра A на оператор θ и $\mathbb{K}(V)$.

Став 6.3.31. *Нека је* V *Хилбертов* A*-модул и елемент* $x \in V$ *норме један. Следећа тврђења су еквивалентна:*

(1) x *је лево симетрична тачка у* V*;*

(2) $\theta_{x,x}$ *је лево симетрична тачка у* $\mathbb{K}(V)$*;*

(3) За сваки елемент $y \in V$ *важи:* $x \perp^S y \iff \theta_{x,x}\theta_{y,y} = 0$*;*

(4) $\theta_{x,x}$ *је минимална пројекција у* $\mathbb{K}(V)$*.*

Питање 6.3.32. *Како изгледа карактеризација десно симетричних тачака у односу на јаку BJ ортогоналност на произвољном Хилбертовом* C^**-модулу, односно* C^**-алгебри?*

На крају наводимо још неке радове из области који би могли послужити у даљим истраживањима: [81], [77], [76], [80], [78], [79], [65], [52], [50] [28], [12], [55].

Литература

[1] T. J. Abatzoglou. Norm derivatives on spaces of operators. *Math. Ann.*, 239(2):129–135, 1979.

[2] C. A. Akemann. Sequencial convergence in the dual of a W^*-algebra. *Commun. Math. Phys.*, 7(3):222–224, 1968.

[3] C. A. Akemann. The general Stone-Weierstrass problem. *J Funct. Anal.*, 4(2):277–294, 1969.

[4] C. A. Akemann. Left ideal structure of C^*-algebras. *J Funct. Anal.*, 6(2):305–317, 1970.

[5] C. A. Akemann. A Gelfand representation theory for C^*-algebras. *Pacific J Math.*, 39(1):1–11, 1971.

[6] L. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, and S. Zhilina. Birkhoff-James orthogonality: Characterizations, preservers, and orthogonality graphs. In R. M. Aron, M. S. Moslehian, I. M. Spitkovsky, and H. J. Woerdeman, editors, *Operator and Norm Inequalities and Related Topics*, pages 255–302. Springer International Publishing, Cham, 2022.

[7] L. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, S. Zhilina, and R. Tanaka. Geometric nonlinear classification of Hilbert C^*-modules based on strong Birkhoff–James orthogonality. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.*, 118(151), 2024.

[8] L. Arambašić and R. Rajić. On symmetry of the (strong) Birkhoff-James orthogonality in Hilbert C^*-modules. *Ann. Funct. Anal.*, 7(1):17–23, 2016.

[9] L. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, and S. Zhilina. Orthograph related to mutual strong Birkhoff-James orthogonality in C^*-algebras. *Banach J Math. Ann.*, 14(4):1751–1772, 2020.

[10] L. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, and S. Zhilina. Operators preserving mutual strong Birkhoff-James orthogonality on $B(H)$. *Linear Algebra Appl.*, 624:27–43, 2021.

[11] L. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, and S. Zhilina. Symmetrized Birkhoff-James orthogonality in arbitrary normed spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 502(1):125203, 2023.

[12] L. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, and S. Zhilina. What does Birkhoff-James orthogonality know about the norm? *Publ. Math. Debrecen 102*, 1-2:197–218, 2023.

[13] L. Arambašić and R. Rajić. The Birkhoff–James orthogonality in Hilbert C^*-modules. *Linear Algebra Appl.*, 437(7):1913–1929, 2012.

[14] L. Arambašić and R. Rajić. A strong version of the Birkhoff-James orthogonality in Hilbert C^*-modules. *Ann. Funct. Anal.*, 5(1):109–120, 2014.

[15] L. Arambašić and R. Rajić. Operators preserving the strong Birkhoff–James orthogonality on $B(H)$. *Linear Algebra Appl.*, 471:394–404, 2015.

[16] B. R. Bakhadly, A. E. Guterman, and O. V. Markova. Graphs defined by orthogonality. *Journal of Mathematical Sciences*, 207:698–717, 2015.

[17] R. Bhatia and P. Šemrl. Orthogonality of matrices and some distance problems. *Linear Algebra Appl.*, 287(1–3):77–85, 1999.

[18] T. Bhattacharyya and P. Grover. Characterization of Birkhoff–James orthogonality. *J. Math. Anal. Appl.*, 407(2):350–358, 2013.

[19] G. Birkhoff. Orthogonality in linear metric spaces. *Duke Math. J.*, 1(2):169–172, 1935.

[20] B. Blackadar. *Operator algebras: Theory of C^*-Algebras and von Neumann Algebras.* Springer Berlin, Heidelberg, 2006.

[21] A. Blanco and A. Turnšek. On maps that preserve orthogonality in normed spaces. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 136(4):709–716, 2006.

[22] D. P. Blecher. A new approach to Hilbert C^*-modules. *Math. Ann.*, 307:253–290, 1997.

[23] K. R. Davidson. *C^*-Algebras by Example.* Fields Institute Monographs, American Mathematical Society, 1996.

[24] J. Dixmier. *C^*-algebras.* North-Holland publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1977.

[25] K. Esmeral, H. G. Feichtinger, O. Hutník, and E. A. Maximenko. Approximately invertible elements in non-unital normed algebras. *J. Math. Anal. Appl.*, 523(1):126986, 2023.

[26] I. Farah. *Combinatorial Set Theory of C^*-algebras.* Springer Cham, 2019.

[27] P. Ghosh, D. Sain, and K. Paul. Orthogonality of bounded linear operators. *Linear Algebra Appl.*, 500:42–51, 2016.

[28] A. Guterman, B. Kuzma, S. Singla, and Z. S. Birkhoff–James classification of norm's properties. *Adv. Oper. Theory*, 9(43), 2024.

[29] A. E. Guterman and O. V. Markova. Orthogonality graphs of matrices over skew fields. *Journal of Mathematical Sciences*, 232(6):797–804, 2018.

[30] I.E.Segal. Irreducible representations of operator algebras. *Bull. Amer. Math. Soc*, 53:73–88, 1947.

[31] D. Ilišević and A. Turnšek. Nonlinear Birkhoff-James orthogonality preservers in smooth normed spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 511(1):126045, 2022.

[32] I.M.Gelfand and M.A.Naimark. On the embedding of normed rings into the ring of operators in hilbert space. *Mat.Sb.*, 12:197–213, 1943.

[33] R. C. James. Orthogonality in normed linear spaces. *Duke Math. J.*, 12(2):291–302, 1945.

[34] R. C. James. Inner products in normed linear spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53:559–566, 1947.

[35] R. C. James. Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 61(2):265–292, 1947.

[36] R. V. Kadison. Notes on the Gelfand-Neumark theorem. *Contemporary Mathematics*, 167, 1994.

[37] R. V. Kadison and J. R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume III: Special Topics, Elementary Theory - An Exercise Approach.* American Mathematical Society, 1991.

[38] R. V. Kadison and J. R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume IV: Special Topics, Advanced Theory - An Exercise Approach.* American Mathematical Society, 1992.

[39] R. V. Kadison and J. R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume I: Elementary Theory*, volume 15. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 1997.

[40] R. V. Kadison and J. R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume II: Advanced Theory*, volume 16. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 1997.

[41] I. Kaplansky. Modules over operator algebras. *American Journal of Mathematics*, 75(4):839–853, 1953.

[42] D. J. Kečkić. Orthogonality in $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_\infty$ spaces and normal derivations. *J. Operator Theory*, 51:89–104, 2004.

[43] D. J. Kečkić. Gateaux derivative of $B(H)$ norm. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(7):2061–2067, 2005.

[44] D. J. Kečkić. Orthogonality and smooth points in $C(K)$ and $C_b(\Omega)$. *Eurasian Mathematical Journal*, 3(4):44–52, 2012.

[45] D. J. Kečkić and S. Stefanović. Isolated vertices and diameter of the BJ-orthograph in C^*-algebras. *J. Math. Anal. Appl.*, 528(1):127476, 2023.

[46] A. Koldobsky. Operators preserving orthogonality are isometries. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 123(5):835–837, 1993.

[47] N. Komuro, K.-S. Saito, and R. Tanaka. Left symmetric points for Birkhoff orthogonality in the preduals of von Neumann algebras. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 98(2):494–501, 2018.

[48] N. Komuro, K.-S. Saito, and R. Tanaka. Symmetric points for (strong) Birkhoff orthogonality in von Neumann algebras with applications to preserver problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 463(2):1109–1131, 2018.

[49] N. Komuro, K.-S. Saito, and R. Tanaka. On symmetry of Birkhoff orthogonality in the positive cones of C^*-algebras with applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 474(2):1109–1131, 2019.

[50] B. Kuzma and S. Singla. Classification of abelian finite-dimensional C^*-algebras by orthogonality. *https://arxiv.org/abs/2411.01684*, 2024.

[51] B. Kuzma and S. Singla. Birkhoff-James classification of finite-dimensional C^*-algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 153:1709–1721, 2025.

[52] B. Kuzma and S. Singla. Non-linear classification of finite-dimensional simple C^*-algebras. *Filomat*, 39(5):1465–1475, 2025.

[53] B. Kuzma and S. Stefanović. Isomorphisms of Birkhoff-James orthogonality on finite-dimensional C^*-algebra. *https://doi.org/10.48550/arXiv.2502.07913*, 2025.

[54] C. Lance. *Hilbert C^*-modules*, volume 210 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[55] A. V. Lj. Arambašić. On a relation related to strong Birkhoff-James orthogonality. *Linear and Multilinear Algebra*, 70(11):2088–2096, 2022.

[56] B. Magajna. On the distance to finite-dimensional subspaces in operator algebras. *J. London Math. Soc.*, 47(2):516–532, 1993.

[57] V. M. Manuilov and E. V. Troitsky. *Hilbert C^*-Modules.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 2005.

[58] Mohit and R. Jain. Birkhoff-James orthogonality in certain tensor products of Banach spaces. *Oper. Matrices*, 17(1):235–244, 2023.

[59] G. J. Murphy. *C^*-Algebras and Operator Theory.* Academic Press, San Diego, 1990.

[60] F. Murray and J. Neumann. On rings of operators. *Annals of Mathematics*, 37(1):116--229, 1936.

[61] W. L. Paschke. Inner product modules over B^*-algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 182:443–468, 1973.

[62] G. K. Pedersen. *C^*-algebras and their automorphism groups.* Pure and Applied Mathematics. Elsevier, Academic Press, London, San Diego, etc., 2018.

[63] B. Roberts. On the geometry of abstract vector spaces. *Tohoku Mathematic Journal*, 39:42–59, 1934.

[64] D. Sain. Birkhoff–James orthogonality of linear operators on finite dimensional Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 447(2):860–866, 2017.

[65] D. Sain and R. Tanaka. Modular Birkhoff–James orthogonality in $B(X,Y)$ and $K(X,Y)$. *Banach J Math. Ann.*, 14:1347–1362, 2020.

[66] S. Sakai. *C^*-Algebras and W^*-Algebras.* Springer Berlin, Heidelberg, 1998.

[67] S. Singla. Gateaux derivative of C^* norm. *Linear Algebra Appl.*, 629:208–218, 2021.

[68] M. Skeide. Generalised matrix C^*-algebras and representations of Hilbert modules. *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*, 100A(1):11–38, 2000.

[69] J. Stampfli. The norm of a derivation. *Pac. J. Math.*, 33:737–747, 1970.

[70] S. Stefanović. Diameter of the BJ-orthograph in finite-dimensional C^*-algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, 73(4):718–728, 2024.

[71] M. Stone. The Generalized Weierstrass Approximation Theorem. *Mathematics Magazine*, 21(4):167–184, 1948.

[72] K. R. Strung. *An Introduction to C^*-Algebras and the Classification Program.* Birkhäuser Cham, 2020.

[73] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras I.* Springer Berlin, Heidelberg, 2002.

[74] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras II.* Springer Berlin, Heidelberg, 2002.

[75] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras III.* Springer Berlin, Heidelberg, 2002.

[76] R. Tanaka. Non-linear modular Birkhoff-James orthogonality preservers between spaces of continuous functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 495(2):124744, 2021.

[77] R. Tanaka. A nonlinear characterization of type I factors based on strong Birkhoff–James orthogonality. *Ann. Funct. Anal.*, 13(29), 2022.

[78] R. Tanaka. Nonlinear equivalence of Banach spaces based on Birkhoff-James orthogonality. *J. Math. Anal. Appl.*, 505:125444, 2022.

[79] R. Tanaka. Nonlinear equivalence of Banach spaces based on Birkhoff-James orthogonality, II. *J. Math. Anal. Appl.*, 514(1):126307, 2022.

[80] R. Tanaka. On Birkhoff–James orthogonality preservers between real non-isometric Banach spaces. *Indag. Math.*, 33(8):1125–1136, 2022.

[81] R. Tanaka. A Banach space theoretical characterization of abelian C^*-algebras. *Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B*, 10:208–218, 2023.

[82] R. Tanaka and D. Sain. On symmetry of strong Birkhoff orthogonality in $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ and $K(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. *Ann. Funct. Anal.*, 11:693–704, 2020.

[83] A. Turnšek. On operators preserving James' orthogonality. *Linear Algebra Appl.*, 407:189–195, 2005.

[84] A. Turnšek. A remark on orthogonality and symmetry of operators in $B(H)$. *Linear Algebra Appl.*, 535:141–150, 2017.

[85] N. Wegge-Olsen. *K-Theory and C^*-algebras.* Oxford Univ. Press, Oxford, 1993.

[86] P. Wójcik. Mappings preserving B-orthogonality. *Indag. Math.*, 30(1):197–200, 2018.

Биографија аутора

Срђан Стефановић је рођен у Шапцу, 21.6.1994. године. Завршио је ОШ „Николај Велимировић” и Шабачку гимназију у Шапцу као ученик генерације, освојивши неколико награда на државним и међународним такмичењима из математике. Основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене, уписао је 2013. године и дипломирао 2017. године са просечном оценом 9,98. Мастер академске студије, модул Математика, на истом факултету уписао је 2017. године и дипломирао 2018. године одбранивши мастер рад „Хармонијска анализа на локално компактним Абеловим групама”, под менторством проф. др Драгољуба Кечкића, са просечном оценом 10. Награђен од стране Математичког института САНУ за најбољи мастер рад у области математике. Докторске студије на Катедри за математичку анализу Математичког факултета у Београду уписао је школске 2018/19. године. Положио је све испите на докторским студијама са оценом 10. У току школске 2023/24. је у периоду од априла до јула боравио на Универзитету Приморска у Копру у Словенији, у оквиру Erasmus+ размене студената.

Запослен је на Математичком факултету Универзитета у Београду од 2018. године (претходно је у школској 2017/2018. години радио као сарадник у настави на Електротехничком факултету у Београду), и то прву школску годину као сарадник у настави, а затим као асистент од 2019. године до данас. Држао је вежбе на курсевима Анализа 1, Анализа 2, Теорија мере и интеграције и Одабрана поглавља анализе. У току другог полугодишта 2023/2024. године био је запослен у Математичкој гимназији у Београду као спољни сарадник.

Био је члан пројекта Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије, „Топологија, геометрија и глобална анализа на многострукостима и дискретним структурама” под бројем 174034, од 2018. године. Има објављену збирку задатака Теорија мере и интеграције (коаутор др Александра Маринковић, ISBN 978-86-7589-181-9).

Има објављена два рада (оба на СЦИ листи)

1. D.J. Kečkić, S. Stefanović, Isolated vertices and diameter of the BJ-orthograph in C^*-algebras, J. Math. Anal. Appl. 528-1 (2023), 1127476. (M 21, IF 2021: 1.417)

2. S. Stefanović, Diameter of the BJ-orthograph in finite-dimensional C^*-algebras, Linear and Multilinear Algebra, 73(4), 718–728 (2025) (M 22, IF 2022: 1.1)

   као и један рад на рецензији:

3. B. Kuzma, S. Stefanović, Isomorphisms of Birkhoff-James orthogonality on finite-dimensional C^*-algebra, https://arxiv.org/abs/2502.07913, 26 страница, на рецензији

Активан је члан Друштва математичара Србије од 2017. године. Члан државне комисије за математичка такмичења ученика основних школа. Од 2022. заменик лидера екипе Србије на Јуниорској балканској математичкој олимпијади. Коаутор је збирке 1100 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 2015-2024. године (ISBN 978-86-6447-032-2).

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Срђан Стефановић

број уписа 2005/2018

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Релација јаке BJ ортогоналности на C*-алгебрама, и оцене дужине њеног графа

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 24.3.2025.

Срђан Стефановић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Срђан Стефановић

Број уписа 2005/2018

Студијски програм Математика

Наслов рада Релација јаке BJ ортогоналности на C*-алгебрама, и оцене дужине њеног графа

Ментор проф. др Драгољуб Кечкић

Потписани Срђан Стефановић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 24.3.2025.

Срђан Стефановић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Релација јаке BJ ортогоналности на C*-алгебрама, и оцене дужине њеног графа

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

[✓ 3. Ауторство – некомерцијално – без прераде]

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 24.3.2025.

Срђан Стефановић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.