СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ЗБОРНИК РАДОВА

Књ. XLIII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. 4

БЕОГРАД
1955

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ЗБОРНИК РАДОВА

Књ. XLIII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. 4

Уредник:
Дописник Д-р РАДИВОЈЕ КАШАНИН
управник Математичког института САН

Примљено на X скупу 28 децембра 1954 и II скупу 15 марта 1955
Одељења природно-математичких наука САН

Научна књига

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ – БЕОГРАД
1955

ACADÉMIE SERBE DES SCIENCES

RECUEIL DE TRAVAUX

T. XLIII

L' INSTITUT MATHÉMATIQUE

№ 4

Rédacteur:

RADIVOJE KAŠANIN
Membre correspondent de l'Académie
Directeur de l'Institut Mathématique

Présenté à la X Séance du 28 décembre 1954 et à la II Séance du 15 mars 1955 de la Section des Sciences Mathématiques et Naturelles de l'Académie Serbe des Sciences

BEOGRAD
1955

САДРЖАЈ:

4 марта 1954 преминуо је у Београду у својој 79 години

академик

Д-р БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ

професор Универзитета у Београду

У њему Математички институт Српске академије наука губи и искреног пријатеља и вредног сарадника, који је, поред своје обимне и плодне научне делатности у областима филозофије, палеонтологије и биологије, са одушевљењем и успехом радио и у разним областима математичких дисциплина.

Слава му!

Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

Н. САЛТИКОВ

АНРИ ПОЕНКАРЕ
(1854—1912)

(Предавање одржано у Математичком институту Српске академије наука 23 јуна 1953)

Захваљујући се на иницијативи Управног одбора Математичког института САН и Друштва математичара и физичара НРС преузео сам задатак, који није нимало лак, наиме да у једном предавању прикажем научне радове Поенкареа.

Његова истраживања обухватају обиман број питања, и у исто време постављају многе нове проблеме из области математичких и филозофских наука.

Сутрадан, после Поенкареове смрти, Емил Борел је писао: „L'inteligence humaine est en deuil; Henri Poincaré n'est plus. Son Oeuvre de géant subsiste..."

Француска је дала свету велики број генијалних математичара. Међу њима су чувени Декарт, Лагранж и Коши, који се налазе на највишем месту читаве плејаде чувених твораца модерне математике.

Исто тако, захваљујући својим проналасцима, Поенкаре заузима изузетан положај у историји развитка математичке културе човечанства.

* * *

Наведимо, укратко, биографске податке о Поенкареу.

Рођен је пре 100 година у Нансију 29 априла 1854 године. а умро у Паризу 17 јула 1912 године.

Он је веома лако, без икаквог напора, савладао основна знања у породици и у школи; успео је да се истакне и на школским конкурсима, и као ученик „École Polytechnique", коју је изабрао место „École Normale Supérieure", где је такође био примљен.

Поенкаре је био веома питоме нарави од раног детињства, па све за читавог свог живота, како према својим колегама тако и према другим научницима. Али он је био непоколебљив у питањима за које је имао одређено мишљење из оправданих разлога. Тада је он био одлучан.

Усвајајући моментано сва знања, он је тачно памтио садржину свих књига које би прочитао; на питања школских другова одмах би исцрпно одговорио, чиме је увек изазивао њихово дивљење. Исте особине је испољавао и у научном друштву, кад би га запитали о његовом мишљењу.

Увек удубљен у своје мисли, Поенкаре је већ као дечак показивао знаке расејаности. Кад му је било 7—8 година, прича се као забавни случај, да је у шетњи улицом дуж неког потока са својом мајком и сестром остао на једној страни, док су његови прешли преко мостића на супротну страну потока. Чим је то Поенкаре приметио директно се упутио на другу страну газећи воду до појаса.

По завршетку Политехничке школе, а затим Рударске школе, Поенкаре је ступио на дужност рударског инжењера. Али у исто време, 1875, кад је прешао у Рударску школу, он се одлучио да студира и математику. Идуће године већ је положио испит — licence ès Sciences mathématiques, а 1878 поднео је тезу за степен доктора математичких наука. Неколико месеци доцније, 1 децембра 1879 године, Поенкаре је отпочео своју професорску каријеру предавањем курса Анализе на Универзитету у Саеп-у. После две године он је преузео иста предавања на Сорбони, а после четири године њему је поверено предавање курса Физичке и Експерименталне механике. Године 1886 Поенкаре преузима катедру Математичке физике са Теоријом вероватноће. Најзад, 1896 године, прешао је на катедру Математичке астрономије.

Дарбу сведочи да се брзо напредовање Поенкареа у академској каријери објашњава вредношћу његових научних проналазака. Наше математичко одељење Академије наука, вели Дарбу, састоји се од пет секција, наиме: Геометрија, Механика, Астрономија, Физика, Географија и Навигација. Поенкаре је имао сва права да буде заступљен у свакој од четири прве секције. Међутим, његова истраживања о плими и осеци мора дали су му квалификације да буде члан и пете секције.“

Поенкаре је био први пут предложен за члана Академије 1881, када је имао 27 година, а после тога његова кандидација је поновљена у 1884, 1885 и 1886 години и, најзад, он је био изабран за члана Академије 1887 године кад је имао 32 године старости.

Други велики успех доживео је Поенкаре 1889 године, кад му је била додељена награда шведског краља, *Оскара II*.

Од тога момента популарност Поенкареа достигла је врхунце славе. За десет наредних година он добија пет златних медаља, четири премије, десет почасних доктората, и академских звања.

Поенкаре је објавио 30 томова засебних дела и скоро 500 мемоара из различитих области математичких наука.

Mittag-Leffler је штампао биографију Поенкареа, као његов Curriculum vitae, а који сачињава само списак његових одликовања, награда, постављења и почасних наименовања, и који заузима укупно 4 стране *in* – 16⁰.

* * *

Пређимо сад на преглед поменутих радова у појединим областима математичких наука, које је он обрађивао.

Приказујући суштину својих радова у области математичке анализе Поенкаре вели: „Чим су били утврђени основи инфинитезималног рачуна, пред математичарима су искрсла три проблема: решење алгебарских једначина, интеграљење алгебарских диференцијала и интеграљење диференцијалних једначина. Историја напретка ових трију проблема је била слична. После дугих и узалудних покушаја за њихово свођење на простије проблеме математичари су се одлучили, да их проучавају непосредно, и за то су били награђени успехом.

Дуго времена узалудно се надало да се алгебарске једначине могу решити помоћу корена. Кад су од овог покушаја одустали, почели су проучавати алгебарске функције, које су сад добро познате као и корени. Исто тако интеграли алгебарских диференцијала, које су желели свести на логаритамске и тригонометриске функције, сад се изражавају помоћу нових трансцендентних функција.

Број диференцијалних једначина решљивих помоћу квадратура веома је ограничен. Зато се морало приступити непосредном проучавању особина интеграла, при чему се ограничавало њихово испитивање само у околини дате тачке, а не за све вредности промењљивих величина. Одмах су се појавили проблеми обичних и сингуларних тачака првог и вишег реда. Ова испитивања почео је Коши“...

Први рад Поенкареа од 1878 године усавршавао је резултате Puiseux-a, Briot и Bouquet-a, који су наставили Кошијеву теорију функција комплексне промењљиве величине за случај сингуларне тачке првог реда· У својој докторској тези Поенкаре проширује своја испитивања на парцијалне једначине.

У првом реду проучавају се вишезначне функције у околини дате тачке и доказује се следећа лема: Уочимо једначину $F(z, x_1, \ldots, x_n) = 0$ која одређује имплицитну функцију z од n независно промењљивих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, у околини вредности нуле свих $n+1$ посматраних величина. Ако је функција F холоморфна у односу на њих и њени парцијални изводи по z се анулирају, од првог до $m-1$ реда, у почетној тачки, та функција z задовољава алгебарску једначину m-ог реда, чији су коефицијенти холоморфне функције независно промењљивих величина. Овај се резултат генералише такође, даље, и на више функција које се одређују оноликим бројем једначина, колико има функција.

Даље аутор констатује две врсте сингуларних тачака, које долазе у обзир. Једне припадају партикуларним интегралима, који задовољавају алгебарске једначине са холоморфним коефицијентима. Међутим друге сингуларне тачке су есенцијалне и зависе од самих једначнна са парцијалним изводима. Поенкаре проучава услове, када посматране једначине имају или немају холоморфних интеграла.

У току својих испитивања Поенкаре уводи два појма о лакунарним функцијама „fonctions à espaces lacunaires", и о алгеброидним функцијама.

Почев од 1880 године Поенкаре обрађује теорију диференцијалних једначина са другачијег гледишта реалних променљивих величина. Он испитује интеграле диференцијалних једначина првог реда које изражавају извод непознате функције у облику количника два полинома. Њихове интегралне криве изражавају се помоћу затворених кривих линија или кривих у облику спирала. Ове криве могу да имају четири врсте сингуларних тачака:

1° Грла (cols), кроз које пролазе само две криве;

2° Чворове (noeuds), где се секу безбројне интегралне криве;

3° Жиже (foyers), око којих се обавијају интегралне криве линије, приближавајући им се као спирале;

4° Средишта (centres), као изузетне тачке, око којих се окупљају интегралне криве линије, при чему се узајамно умотавају.

Успостаља се веза између бројева дотичних сингуларних тачака.

Најзад, ова истраживања проширују се на диференцијалне једначине првог реда општег облика, на једначине другог и вишег реда и стављају се у везу са проблемом стабилности њихових решења.

Прелазећи затим на испитивање диференцијалних једначина са сингуларним тачкама вишег реда Поенкаре проучава линеарне једначине, којим се већ бавио Фукс, и поставља проблем налажења њихових интеграла у облику нових трансцендентних функција, које се одређују помоћу конвергентних редова не само у околини једне тачке, него и у читавој равни. Да би успео да реши овај проблем Поенкаре се најпре ограничава на посматрање периодичних решења линеарних једначина са рационалним и алгебарским коефицијентима.

Аутор се руководи аналогијом са елиптичним функцијама и редовима елиптичних функција и Абелових функција које служе за изналажење интеграла алгебарских диференцијала.

Елиптичне су функције униформне, а у исто време периодичне, те према томе задржавају своју вредност када се независно променљива величина повећава за известан број периода. Према томе, Поенкаре тежи њиховој генерализацији. Он зато тражи униформне функције независно променљиве величине, које задржавају своју вредност при њеној трансформацији. Међутим, дотичне трансформацији не смеју бити произвољне, него морају да сачињавају групу, која мора да буде и прекидна; иначе, једнозначна функција би постала стална величина.

Проблем се своди, дакле, на изналажење прекидних група трансформација. То исто се дешава и код елиптичних функција са њиховим паралелограмима периода. Сада, посматрајући сложеније прекидне групе трансформација за дефиницију компликованих трансцентентних функција, поставља се питање замене паралелограма елиптичних функција са сложенијим полигонима у вези са специјалним типом прекидних група, које се уводе.

Слично са проблемом инверзије елиптичних функција, Поенкаре за генерализацију појма о инверзији узима линеарну диференцијалну једначину другог реда, сматра сада независно променљиву величину као инверзну функцију не интеграла (као што је случај код елиптичних функција) него количника z двају интеграла посматране једначине. На овакав начин дефинисана функција бива у извесним случајевима униформна и неће се мењати за бескрајан број линеарних трансформација, које мењају z у њен хомографски облик. У ту сврху наведени криволиниски полигони ограничавају се луковима кругова. Аутор, најпре, претпоставља да су коефицијенти трансформације реални, при чему се показује да наведене трансформације не мењају извесни круг који се зове основни. Тада су лукови кругова, који служе као стране Поенкареових полигона, ортогонални на основни круг.

Писац наводи да је он могао да реши проблем за одређивање посматране мреже само служећи се не-еуклидовом геометријом. „Ову геометрију не треба сматрати, вели Поенкаре, као игру маште, која интересује само једног филозофа и да је без икакве вредности за математичаре. Напротив, теореме геометрије Лобачевског су исто тако истините као и Еуклидове геометрије, по себи се разуме, под условом да ове теореме буду правилно тумачене". На овај начин Поенкаре је створио групе прекидних трансформација које је назвао *Фуксовим*, а одговарајуће униформне функције, такође је назвао *Фуксовим*. Он је исто тако пронашао и конвергентне редове, који изражавају Фуксове функције у облику количника двеју трансцендентних коначних и униформних функција. Оне су добиле назив *тетафуксових* функција.

Ако коефицијенти линеарних трансформација нису реални, него ма какви, дотичне трансформације сачињавају исте прекидне групе, које је Поенкаре назвао *Клајновим*. За доказ егзистенције ових група он је искористио исто не-еуклидову геометрију само не у равни, него у тродимензионом простору. На пређашњи начин оне су послужиле за проналазак функција новог типа названих *Клајновим* функцијама, аналогно Фуксовим функцијама.

Међутим, за решење проблема интеграљења посматраних линеарних једначина, било је још потребно генералисати поступак теорије елиптичних функција за инверзију функција друге и треће врсте, помоћу функција $\zeta(x)$. У ту сврху Поенкаре је увео нове функције, које је назвао *Дзетафуксовим* функцијама.

На овај начин Поенкаре је успео да изрази интеграле линеарних једначина, са алгебарским коефицијентима, помоћу својих нових трансцендентних функција.

Међутим, у извесним посебним случајевима интеграљење посматраних линеарних једначина може се извршити и помоћу простијих функција алгебарских, елиптичних или Абелових. Поенкаре је показао и главне особине група одговарајућих једначина.

Интересантно је подвући да је Поенкаре испитивао такође и проблем интеграљења диференцијалних једначина, које нису линеарне. Фукс је проучавао неопходне и довољне услове егзистенције коначног броја сингуларних тачака ових једначина. Међутим Поенкаре је показао, да се одговарајуће једначине своде на већ познате облике интеграбилних једначина.

Поменутим истраживањима Поенкаре је посветио већи број значајних радова, који су га истакли у прве редове научника.

Интересантно је овим поводом навести мишљења других математичара о изложеним проналасцима Поенкареа. Тако, Вито Волтера изјављује: „Више пута се питало, да ли Фуксове функције имају ма какве примене? На та питање могло би се рећи: па шта то значи да нека теорија има примене? Да ли се вредност неке теорије састоји у томе што се она може применити у механици или физици? Грци су подигли теорију конусних пресека на највећу висину усавршавања. Међутим да ли је ова теорија заузела почасни положај у геометрији тек онда, кади се свет уверио, да ове криве служе као путање планета? Да ли теорија конусних пресеке не претставља дивно уметничко дело, чија вредност не стоји у вези ни са каквом њиховом практичном применом."

Наводимо сада и друго сведочанство, које је изнео C. Jordan поводом кандидовања Поенкареа за члана Академије, где вели: „Његов рад заслужује више од обичних похвала и потсећа нас на оно што је писао Јакоби о Абелу, да је он решио проблем, који нико пре њега, није смео ни да замисли. Морамо заиста признати да ми сад присуствујемо једној револуцији у Математици, која се може свакако упоредити са оном, пре пола века, при стварању теорије елиптичних функција".

* * *

Поред наведених резултата дугујемо Поенкареу више открића у области теорије функција, алгебре и теорије бројева. Он се бави проблемом униформисања алгебарских функција; уводи посматрање Римановиx површина са бесконачним бројем листића. Са теориског гледишта испитивање вишезначних функција се своди на проучавање униформних функција.

Поенкаре проширује Кошијеву теорију функција. У ту сврху он даје, најпре, прецизну дефиницију двоструког интеграла аналитичке функције двеју комплексних промењивих величина у дводимерном континууму и проучава услове под којима при трансформацији континуума интеграљења, двоструки интеграл задржава своју вредност. Проучавају се резидиуми двоструких интеграла. Најзад, проучавају се услови, под којима униформна функција од две независне промењиве величине може да се изрази као количник две целе функције. У ту сврху писац са великим искуством искоришћава четири диференцијалне једначине, које задовољавају реални делови аналитичких функција.

У области Аритметике Поенкаре је испитивао геометриску теорију облика и увео је појам њихових аритметичких инваријаната. Ове инваријанте служе за одређивање најмањих вредности квадратних бинарних облика и за проучавање услова еквивалентности облика.

У вези са аритметичким испитивањима Поенкареа стоје и његови алгебарски радови о линеарним трансформацијама и њиховим применама. Проширујући ова испитивања на изналажење непрекидних група и одговарајућих хомогених облика лако се добијају потпуни системи линеарних парцијалних једначина, а такође изналазе се извесни комплексни бројеви.

Ове резултате је аутор искористио за одређивање извесног броја позитивних корена полинома. Исто тако Поенкаре се бавио и Декартовим правилом знакова.

Најзад, Поенкаре је створио прецизну методу за генерализацију детерминаната и линеарних једначина, чији се број бескрајно повећава. Овакав плоблем се поставља при изналажењу количника два тригонометриска реда, а такође и при интеграљењу обичне линеарне диференцијалне једначине, чији су коефицијенти изражени помоћу тригонометриских редова, па се траже њихова решења у облику других тригонометриских редова.

Дотични проблеми појављују се и у Небеској механици. Аритметичка и алгебарска истраживања, вели Дарбу, дали су повод да Поенкаре буде предложен први пут 1881 голине за члана Академије наука, кад му је било 27 година.

* * *

Напоменуо сам горе да је шведски краљ Оскар II, поводом своје шездесетогодишњице, објавио награду за најбоља истраживања из области Математичке анализе· Одбор од три најпознатија математичара, Ермита, Вајерштраса и Митаг-Лефлера, био је овлашћен да објави темате и да досуди награде. Поенкаре је поднео са девизом „Nunquam praescriptos transibunt sidera fines“ рад: „О проблему трију тела и једначинама динамике“. У реферату поводом овог рада Вајерштрас је написао, у име одбора, мада рад и не решава у потпуности постављени проблем, ипак он заслужује пуну награду, јер је он такве вредности да ће његово објављивање отворити нову еру у историји Небеске механике. Поенкаре је примио награду, а његов рад објављен. Али се десио неочекивани догађај, који претставља занимљиву страницу у историји математике. Показало се да су погрешили и Поенкаре у своме раду, и Вајерштрас у својој оцени. Број часописа *Acta mathematica*, где је рад објављен, и његови сепарати одмах су били повучени, осим неколико примерака који су се већ нашли у неким антикварницама и продавали су се као неке библиографске реткости. Поенкаре је понудио да врати добијену награду, али краљ је то одбио одговарајући да је Поенкаре свакако заслужан научник.

Сви Поенкареови биографи сведоче да је он састављао своје мемоаре на веома брзи начин, и чим би нашао доказ траженог става, није се бринуо да потанко прегледа своју редакцију „...Il y a dans ses mémoires, rapidement écrits, пише *Picard*, d'assez nombreuses erreurs de détail mais sans importance, sauf de rares exceptions, sur les résultats essentiels. Poincaré était de ces rares savants pour qui n'est pas faite la devise-pauca, sed matura...“

Ствар на томе није остала. Поенкаре је израдио нови рад, где је доказао ставове, који су били супротни онима из првог рада; и наредни број *Acta mathematica* изашао је са поправљеним резултатима.

Ново дело је било заиста изванредно. У овој редакцији Поенкареова истраживања оправдала су мишљење Вајерштраса, да су остварила нову еру у области Небеске механике.

Најпре, је Поенкаре утврдио да за проблем трију тела не постоје други аналитички интеграли, поред познатих десет интеграла, наиме: интеграла живих сила, интеграла површина и интеграла кретања тежишта; за доказ овог резултата требало је искористили теорију периодичних решења и карактеристичних експонената.

Решења диференцијалних једначина проблема Небеске механике претстављају се у облику бескрајних редова и зато одређују приближна решења у извесним границама. У овим решењима фигурише време не само у аргументима тригонометриских функција, него и ван њих. Ова је чињеница довољна да би се показало да дотична решења важе само у ограниченом размаку времена.

Зато је настала тежња за решењима, која би била изграђена само помоћу тригонометриских функција. Проучавајући решења *Gylden*-а, где улазе елиптичке функције, и *Lindstedt*-а са тригонометриским функцијама, Поенкаре долази до закључка да посматрани редови, ако су апсолутно конвергентни за извесне вредности времена, остају увек апсолутно конвергентни; и да иста функција не може да буде претстављена помоћу два различита апсолутно конвергентна реда.

Продужујући ова посматрања Поенкаре примећује да се обично мисли да функција, претстављена тригонометриским апсолутно конвергентним редом, не може бескрајно да расте. Међутим, то може да буде, ако конвергенција није униформна.

На основу изложених расуђивања, Поенкаре долази до закључка да се једини начин за проучавање проблема стабилности Сунчевог система мора заснивати на истим принципима, које је он искористио за проучавање кривих линија одређених помоћу диференцијалних једначина.

Истраживања о периодичким решењима проблема трију тела претставља велику заслугу Поенкареа. Од Лагранжа су била позната два случаја периодичких решења, кад три тела заузимају темена равностраног троугла или се налазе на једној правој. Најзад, Hill је пронашао још један случај, који се може применити на Сунце, Земљу и Месец. Поред периодичких решења, Поенкаре проучава асимптотска и двоструко асимптотска решења према периодичким решењима.

Овим проблемима Поенкаре се потанко бавио и у две прве свеске свог дела: „Nouvelles méthodes de la Mécanique Celeste", t. t. I—II.

Истим питањима били су посвећени радови и другог чувеног математичара, академика А. М. Љапунова. О његовим делима имао сам прилику, пре извесног времена, да поднесем реферат у нашем Институту. Његово дело „Об устойчивости движения", т. ј. о стабилности кретања, објављено 1892 године, било је штампано и на француском језику, као и друга његова испитивања, делом преведена а делом објављена на француском језику.

Поменута Поенкареова дела „Nouvelles méthodes" била су објављена, када је Поенкаре заузимао још Катедру Математичке физике. Али после смрти Tisserand-а факултет је умолио Поенкареа да прими Катедру Математичке астрономије, јер је факултет налазио да нема бољег кандидата за Катедру од њега.

У својој предратној библиотеци имао сам литографисану примерак кратког курса Поенкареових предавања Астрономије на Политехничкој школи у Паризу. Она претстављају ремекдело које мора да послужи као узор за сваког предавача ма ког математичког предмета.

Трећа свеска дела „Nouvelles méthodes de la Mécanique Celeste" изашла је 1899 године и садржи два нова појма, о интегралним инваријантама и о једначинама са варијацијама, које претстављају линеарне диференцијалне једначине за одређивање решења проблема, бескрајно блиских датом решењу. Поред поменутог дела Поенкаре је објавио три свеске својих предавања на Сорбони из Небеске механике, чије су две прве свеске допуњавале претходна издања, а трећа свеска била је посвећена теорији плиме и осеке мора.

Поенкаре је много радио и на другом проблему, нарочито о форми небеских тела, који се састоји у истраживању форми релативне равнотеже течности, која се окреће око осе и чији се елементи привлаче по Њутновом закону. Маклорен и Јакоби су пронашли форме равнотеже посматране течности у облику елипсоида обртања, а исто и троосног елипсоида и то у зависности од граница у којим се налази величина угаоне брзине ω обртања течности. Посматрајући један било који из мноштва поменутих елипсоида, који одговара једној одређеној вредности угаоне брзине ω, Поенкаре је, 1885 године поставио следећи проблем. Ако се ω дода мали прираштај η, да ли угаоној брзини $\omega + \eta$ одговарају форме равнотеже, различите од елипсоида, које, мењајући се непрекидно са прираштајем η, теже за $\eta = 0$ полазном елипсоиду. Поенкаре је пронашао бескрајно много нових форми равнотеже, али се при томе ограничио на посматрање само прве апроксимације. Добијене форме равнотеже биле су лабилне, осим једне чувене форме „пириформе", тј. у облику крушке, која одговара најмањој од вредности угаоне брзине ω за стабилне форме Јакобијевог елипсоида. За ову пириформну фигуру било је сумње да она мора да буде стабилна. За дотичне форме се нарочито интересовао George Darvin, при стварању своје космогониске теорије. Он је сматрао да су крушкасте форме равнотеже течности стабилне, и мислио је да при хлађењу оне издвајају нове пратиоце. Тако се можда Месец одвојио од Земље. Тим поводом је Picard у свом чланку, објављеном после Поенкареове смрти у „Annales de l'École Normale Supérieure", 3[e] Serie, t. XXX, p. 463, писао да не би требало заборављати, у применама на космогонију, да се изложена истраживања односе на хомогену материју, те да се тако може далеко отићи од реалног стања ствари. У истом чланку Picard каже:..„Il semble bien, d'aprês les dernières recherches de M. Liapounoff qui a étudié de son coté, avec une grande rigueur les problèmes precéndents par d'autres méthodes, que la figure piriforme est instable".

Најзад, засебна Поенкареова књига „Hypothèses cosmogoniques" претставља његова предавања. У њима се проучавају, са космогониског гледишта, различите хипотезе о формирању Сунчевог система, почев од хипотезе Канта и Лапласа све до модернијих теорија које обухватају читаву васиону.

* * *

Поенкаре је посветио много пажње проучавању проблема Метематичке астрономије и Математичке физике. Нико до њега није улазио дубље у суштину физичких појава и њихових особина у исто време када је обрађивао и математичку страну посматраног проблема. Проучавајући га са критичког гледишта Поенкаре је тежио да разјасни тешкоће и противречности, које би при томе искрсле. Његова предавања, када је заузимао Катедру математичке физике, обухватала су разноврсне физичке теорије светлости, електрицитета, еластичности, хидродинамике, топлоте, термодинамике, капиларности. Наведена грађа изложена је у 20 штампаних свезака његових предавања на Сорбони и у засебним мемоарима, у којима су расправљана различита математичка питања.

Нарочито наводимо Поенкареве радове о интеграљењу диференцијалних једначина Математичке физике. Порекло ове дисциплине је француско. D'Alembert је проинтегралио прву парцијалну једначину жице која трепери, Коши је дао опште методе за решавање линеарних парцијалних једначина Математичке физике, а Fourier је створио аналитичку теорију топлоте. Чувена предавања Римана су пренела дотичну дисциплину ван Француске. Но и даље су у Француској генерације славних математичара: Laplace, Poisson, Lamé, Mathieu, Picard, Brussinesque, J. Hadamard и многи други разрађивали и проучавали теорије диференцијалних једначина Математичке физике. Пре 60 година је издавачко предузеће Gauthier-Villars позивало на претплату 4 свеске, Picard-овог Traité d'Analyse. Тада се очекивало, са пуно наде, да ће четврта свеска како се наглашавало дати синтезу читаве поменуте обимне грађе. Али до тога није дошло и после три прве свеске четврта није изишла. Picard је само објавио делимично неколико одломака својих предавања из дотичне области знања. Међутим, нова богатства су се нагомилавала, нарочито захваљујући проналасцима Поенкаревих нових решења већ раније постављених проблема, нових теорија и нових метода истраживања деференцијалних једначина Математичке физике.

Напомињемо у ту сврху његов значајан рад „Sur les équations de la Physique mathématique", где је потанко решен проблем вибрације мембране, такозвану методу „du balayage" за решавање парцијалних једначина са извесним граничним условима. Најзад, увођење интегралних једначина Фредхолма омогућило му је да потпуно реши проблем плиме и осеке мора, који није био решен од када га је поставио Laplace. Истина је да практично искоришћавање датог решења изазива велике тешкоће у вези са компликованошћу конфигурације морске обале и са морском дубином дуж ове обале.

* * *

Прелазимо сада на нову широку грану Поенкареових истраживања из области Филозофије природе и популаризације ових знања.

„Филозофија је објављена, вели Галилеј, у тој великој књизи која се увек налази пред нашим очима (желим да кажем васиони) али је њу немогуће схватити, ако се претходно не научи језик и не познају слова, којим је ова књига написана. Она је написана математичким језиком, а слова су троуглови, кругови и друге геометриске фигуре, без којих је немогуће човеку схватити иједну реч..."

У претходном излагању наведене су идеје и резултати, које је Поенкаре дао да би допринео познавању тог математичког језика који је потребан за проучавање природе.

Шта више, он је учествовао на продубљивању основних појмова о броју, простору, времену, с тим да се објасни њихов постанак и природа.

Суштина Поенкареове филозофије је изложена у његове четири књиге, наиме: Science et Hypothèse (1902), La Valeur de la Science (1905), Science et méthode (1908), Dernières pensées (1913).

Ове књиге, које увек излазе у новим издањима и у преводима на страним језицима, створили су велику популарност Поенкареу и служе за ширење математичких знања.

Напоменимо да је не-еуклидова геометрија највише пружила материјала за расправљање о принципима геометрије. Поенкаре им је посветио више расправа и дискусија. „За њега, пише Дарбу, аксиоме не претстављају ништа друго, него „договор" (convention), ја бих волео пре да кажем дефиниције, више или мање потпуне, идеалних елемената што наша машта изграђује на основу огледа." Навео сам нарочито дотичне речи Дарбуа, који је изврстан геометар. Ове Дарбуове речи изазивају многа размишљања. Поенкаре, који није припадао некој специјалној филозофској школи, волео је да критикује и расправља филозофске проблеме. Неки су сматрали Поенкареа као припадника школе номиналиста. Али је он то увек негирао. Например, поводом тврђења Le Roy-a: „Научник ствара факат", Поенкаре каже да научник не ствара факат, него ствара језик, којим објашњава чињенице. Не би требало улазити овде у филозофске дискусије, које изискују дугачка и прецизна објашњења становишта припадника различитих филозофских гледишта. Зато би требало препоручити проучавање радова, који су били изазвани Поенкареовим горе поменутим издањима. Например, наведимо књигу Louis Rougier-a „La philosophie géométrique de Henri Poincaré", објављену 1920 године.

Као што су основи геометрије тако исто су и основни закони механике били предмет потанке дискусије Поенкареа, на филозофском конгресу 1900 године у Паризу. Тежње је била да се Њутнове дефиниције што више ослободе од трагова схоластичких утицаја, које оне носе. Са друге стране, Поенкаре је био у центру дискусије нових идеја у механици, створених истраживањима Ајнштајна, Лоренца и Планка. Интересантно је у том погледу напоменути Поенкареова два предавања „О новој механици" на Универзитету у Гетингену и на Лилском конгресу 1909 године за унапређење наука (Association francaise pour l'Avancement des Sciences). Ово друго предавање завршава се речима: „Међутим, мислим да ће ова класична механика, ако би и била потцењена, ипак бити исто тако потребна као и досада и да онај који је не би темељито познавао, не би могао схватити нову механику".

У свим својим радовима Поенкаре тражи истину. Увод у Поенкареову књигу „La valeur de la Science" претставља праву химну истини. Читав свој живот он је посветио проучавању математике, суделујући на њеном напретку у свим својим издањима и предавањима, која је он одржавао.

У његовии радовимв се налази велики број резултата и идеја, који ће пружати још дуго времена грађу за проучавања и за испитивања.

HENRI POINCARÉ
(1854—1912)

par

N. SALTYKOW

Conférence faite à la séance commémorative du centenaire de naissance d'Henri Poincaré, organisée par l'Institut Mathématique de l'Académie des Sciences serbe.

Après avoir retracé la vie de l'illustre mathématicien, le conférencier a passé en revue la vaste activité de Poincaré dans les domaines les plus variés des Mathématiques théoriques et appliquées, et de la philosophie.

Dans tous ses travaux Poincaré avait toujours recherché la vérité. La préface de son livre „La valeur de la Science" est un vrai hymne passionné à la vérité que Poincaré avait servi toute sa vie.

Il se trouve dans ses Oeuvres tant de nouvelles ideés et de nouveaux résultats que l'on admirera et étudiera pendant des longues années encore.

Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

С. АЉАНЧИЋ, Р. БОЈАНИЋ и М. ТОМИЋ

ДВА СТАВА О АСИМПТОТСКОМ ПОНАШАЊУ ТРИГОНОМЕТРИСКИХ РЕДОВА

Асимптотско понашање тригонометриског реда $\Sigma a_\nu \sin \nu x$ за $x \to +0$, када су коефицијенти a_ν облика $a_\nu = \nu^{-\alpha} L(\nu)$, $0 \leqslant \alpha < 2$, где је $L(t)$ споро променљива функција.

1. Асимптотско понашање тригонометриског реда

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu x$$

кад $x \to +0$, у случају када су коефицијенти a_ν монотони и задовољавају услов

$$a_n \sim n^{-\alpha}, \quad n \to \infty, \quad 0 < \alpha < 1,$$

испитивао је Hardy [1, 2]. Између осталог он је показао да је

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2\,\Gamma(\alpha) \sin \alpha\pi/2}\, x^{\alpha-1}, \quad x \to +0.$$

Heywood [3] је показао да ова асимптотска релација важи за $0 < \alpha < 2$.

Овде ћемо дати два става који проширују класу тригонометриских редова за које важе сличне асимптотске ралације. Та проширења добијају се увођењем класе споро променљивих функција.

За функцију $L(t)$ кажемо да је споро променљива ако је дефинисана за $t \geqslant 0$, позитивна и

$$\frac{L(\lambda t)}{L(t)} \to 1, \quad t \to \infty,$$

за свако утврђено $\lambda > 0$ [4].

СТАВ 1. *Нека је* $0 < \alpha < 2$ *и нека је* $L(t)$ *производ две монотоне споро променљиве функције. Тада тригонометриски ред*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} L(\nu)\, \nu^{-\alpha} \sin \nu x$$

конвергира за $0 < x < 2\pi$ *и*

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2\,\Gamma(\alpha)\sin\alpha\pi/2}\,x^{\alpha-1}L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +0.$$

СТАВ 2. *Нека је* $L(t)$ *конвексна споро променљива функција која* $\to 0$ *кад* $t \to \infty$. *Тада је*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} L(\nu)\sin\nu x \sim \frac{1}{x}L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +0.$$

Из става 2, например, следи за $L(t) = \log t$

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\log\nu} \sim \frac{1}{x\log(1/x)}, \quad x \to +0,$$

док код Zygmund-а [5, стр. 116] постоји само

$$\frac{A}{x\log(1/x)} < \sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\log\nu} < \frac{B}{x\log(1/x)}, \quad x \to +0, \quad 0 < A < B.$$

Аналогни резултати за ред

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\cos\nu x$$

следе из чињенице де је за $x \neq 0$

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\cos\nu x = \frac{1}{2\sin x}\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_{\nu-1} - a_{\nu+1})\sin\nu x.$$

2. Најважније особине споро променљивих функција које ће нам бити потребне за доказ наведених ставова су следеће:

(i) *Ако је* $0 < a \leqslant \lambda \leqslant b < \infty$, *тада*

$$\frac{L(\lambda t)}{L(t)} \to 1, \quad t \to \infty,$$

униформно по λ.

(ii) *Ако је* $L^*(t) \sim L(t)$, $t \to \infty$, *тада је и* $L^*(t)$ *споро променљива функција.*

(iii) *Ако је* $\gamma > 0$, *тада*

$$t^{\gamma}L(t) \to \infty, \quad t^{-\gamma}L(t) \to 0, \quad t \to \infty.$$

(iv) *Нека је* $\alpha > 0$ *и*

$$L^{(1)}(t) = t^{-\alpha}\max_{0 \leqslant x \leqslant t}\{x^{\alpha}L(x)\}, \quad L^{(2)}(t) = t^{\alpha}\max_{t \leqslant x < \infty}\{x^{-\alpha}L(x)\}.$$

Тада је $L^{(k)}(t) \sim L(t)$, $t \to \infty$ $(k = 1, 2)$, *и према* (ii), $L^{(k)}(t)$, $k = 1, 2$, *су такође споро променљиве функције. Функција* $t^{\alpha} L^{(1)}(t)$ *очевидно монотоно расте, док* $t^{-\alpha} L^{(2)}(t)$ *монотоно опада.*

(v) *Ако је* $L(n)$ *производ две споро променљиве функције и* $\eta > 0$ *тада је*

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} |\nu^{-\eta} L(\nu) - (\nu + 1)^{-\eta} L(\nu + 1)| \leqslant M(\eta)\, n^{-\eta} L(n). \tag{1}$$

Све особине споро променљивих функција које смо навели познате су (в. [4]), осим последње, и због тога ћемо овде дати њен доказ.

Нека је $L(n) = a_n b_n$ и нека $a_n \uparrow$, а $b_n \downarrow$. Ставимо $L_n = L(n)$. Тада је

$$\sum_{\nu=n}^{m} |\nu^{-\eta} L_\nu - (\nu + 1)^{-\eta} L_{\nu+1}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=n}^{m} L_\nu \{\nu^{-\eta} - (\nu + 1)^{-\eta}\} + \sum_{\nu=n}^{m} (\nu + 1)^{-\eta} |L_\nu - L_{\nu+1}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=n}^{m} L_\nu \{\nu^{-\eta} - (\nu + 1)^{-\eta}\} + \sum_{\nu=n}^{m} (\nu + 1)^{-\eta} b_\nu \{a_{\nu+1} - a_\nu\} +$$

$$+ \sum_{\nu=n}^{m} (\nu + 1)^{-\eta} a_{\nu+1} \{b_\nu - b_{\nu+1}\} = S_1 + S_2 + S_3 .$$

Оценићемо сваку од ових сума посебно. Најпре је

$$S_1 = \sum_{\nu=n}^{m} \nu^{-\eta/2} L_\nu\, \nu^{-\eta/2} \left\{1 - \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{-\eta}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{Max}_{n \leqslant \nu < \infty} \{\nu^{-\eta/2} L_\nu\} \int_{n-1}^{\infty} t^{-\eta/2} \left\{1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-\eta}\right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant M(\eta)\, n^{-\eta/2} L_n^{(2)} (n - 1)^{-\eta/2},$$

где је $L_n^{(2)} \sim L_n$, $n \to \infty$. Према томе је

$$S_1 \leqslant M(\eta)\, n^{-\eta} L_n . ^{*)} \tag{2}$$

---

*) Константе M које се јављају у разним неједначинама не морају бити увек исте.

Како $b_n \downarrow$, то је даље

$$S_2 \leqslant b_n \sum_{\nu=n}^{m} (\nu+1)^{-\eta} (a_{\nu+1} - a_\nu) =$$

$$\leqslant b_n \sum_{\nu=n}^{m} \{\nu^{-\eta} - (\nu+1)^{-\eta}\} a_\nu + b_n \{m^{-\eta} a_m - n^{-\eta} a_n\} \leqslant$$

$$\leqslant b_n \sum_{\nu=n}^{m} \{\nu^{-\eta} - (\nu+1)^{-\eta}\} a_\nu + m^{-\eta} a_m b_n,$$

па је према (2)

$$S_2 \leqslant M(\eta)\, n^{-\eta} L_n + m^{-\eta} a_m b_n. \tag{3}$$

Најзад је

$$S_3 \leqslant \sum_{\nu=n}^{m} (\nu+1)^{-\eta} a_{\nu+1} \{b_\nu - b_{\nu+1}\} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{Max}_{n \leqslant \nu < \infty} \{\nu^{-\eta} a_\nu\} \sum_{\nu=n}^{\infty} \{b_\nu - b_{\nu+1}\} =$$

$$\leqslant n^{-\eta} a_n^{(2)} b_n,$$

где је $a_n^{(2)} \sim a_n$, $n \to \infty$, па је

$$S_3 \leqslant M(\eta)\, n^{-\eta} L_n. \tag{4}$$

На основу процена (2), (3) и (4) добијамо да је

$$\sum_{\nu=n}^{m} |\nu^{-\eta} L_\nu - (\nu+1)^{-\eta} L_{\nu+1}| \leqslant M(\eta)\, n^{-\eta} L_n + m^{-\eta} a_m b_n.$$

Одавде коначно следи неједначина (1) кад пустимо да $m \to \infty$.

3. Доказ става 1. (i) На основу особине (v) споро променљивих функција, конвергенција тригонометриског реда којим је дефинисана функција $f(x)$ следи из

$$\tag{5} \begin{aligned} &\left| \sum_{\nu=n+1}^{m} L(\nu)\, \nu^{-\alpha} \sin \nu x \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\sin x/2} \Big\{ \sum_{\nu=n+1}^{m} |\nu^{-\alpha} L(\nu) - (\nu+1)^{-\alpha} L(\nu+1)| + \\ &\qquad + (n+1)^{-\alpha} L(n+1) + (m+1)^{-\alpha} L(m+1) \Big\} \leqslant \\ &\leqslant \frac{M}{\sin x/2} \{(n+1)^{-\alpha} L(n+1) + (m+1)^{-\alpha} L(m+1)\}, \end{aligned}$$

јер на основу особине (iii) споро променљивих функција, десна страна неједначине (5) тежи нули када n и $m \to \infty$ независно један од другог.

(ii) за доказ става 1 потребна нам је следећа Hardy-ева [2] процена

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-\alpha} \sin \nu x = \frac{\pi}{2\,\Gamma(\alpha) \sin \alpha\pi/2}\, x^{\alpha-1} + o\,(x^{\alpha-1}), \quad x \to 0, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Нека је $q = [1/x]$. Како је $L\,(q) \sim L\,(1/x)$, $x \to 0$, и како је

$$\frac{x^{1-\alpha}}{L\,(q)} \sum_{\nu=1}^{\infty} L\,(\nu)\,\nu^{-\alpha} \sin \nu x - \frac{\pi}{2\,\Gamma(\alpha) \sin \alpha\pi/2} =$$

$$= x^{1-\alpha} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{L\,(\nu)}{L\,(q)} - 1 \right\} \nu^{-\alpha} \sin \nu x + o\,(1) =$$

$$= S\,(x, \alpha) + o\,(1), \quad x \to 0,$$

то је довољно показати да

$$S\,(x, \alpha) \to 0, \quad x \to 0, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Нека је $0 < \delta < 1 < \Delta < \infty$. Ставимо $p = [\delta/x]$ и $r = [\Delta/x]$. Тада је

$$S\,(x, \alpha) = x^{1-\alpha} \left(\sum_{\nu=1}^{p} + \sum_{\nu=p+1}^{r} + \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \right) \left\{ \frac{L\,(\nu)}{L\,(q)} - 1 \right\} \nu^{-\alpha} \sin \nu x,$$

па је

$$|S\,(x, \alpha)| \leqslant \frac{x^{1-\alpha}}{L\,(q)} \left| \sum_{\nu=1}^{p} L\,(\nu)\,\nu^{-\alpha} \sin \nu x \right| + x^{1-\alpha} \left| \sum_{\nu=1}^{p} \nu^{-\alpha} \sin \nu x \right| +$$

$$+ x^{1-\alpha} \left| \sum_{\nu=p+1}^{r} \left\{ \frac{L\,(\nu)}{L\,(q)} - 1 \right\} \nu^{-\alpha} \sin \nu x \right| +$$

$$+ \frac{x^{1-\alpha}}{L\,(q)} \left| \sum_{\nu=r+1}^{\infty} L\,(\nu)\,\nu^{-\alpha} \sin \nu x \right| + x^{1-\alpha} \left| \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \nu^{-\alpha} \sin \nu x \right| =$$

$$\leqslant \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5\,. \tag{6}$$

Проценићемо сваку од сума Σ_i посебно.

Нека је $\alpha < \beta < 2$. Водећи рачуна о томе да је $\sin x \leqslant x$, $x \geqslant 0$ и о особини (iv) споро променљивих функција, налазимо

$$\Sigma_1 \leqslant \frac{x^{2-\alpha}}{L(q)} \sum_{\nu=1}^{p} \nu^{1-\alpha} L(\nu) =$$

$$\leqslant \frac{x^{2-\alpha}}{L(q)} \sum_{\nu=1}^{p} \nu^{\beta-\alpha} L(\nu) \cdot \nu^{1-\beta} \leqslant$$

(7) $$\leqslant \frac{x^{2-\alpha}}{L(q)} \operatorname*{Max}_{1 \leqslant \nu \leqslant p} \{\nu^{\beta-\alpha} L(\nu)\} \cdot \sum_{\nu=1}^{p} \nu^{1-\beta} \leqslant$$

$$\leqslant M \frac{x^{2-\alpha}}{L(q)} p^{\beta-\alpha} L^{(1)}(p)\, p^{2-\beta} \leqslant$$

$$\leqslant M (p\,x)^{2-\alpha} \frac{L(p)}{L(q)}.$$

За Σ_2 лако добијамо процену

(8) $$\Sigma_2 \leqslant x^{2-\alpha} \sum_{\nu=1}^{p} \nu^{1-\alpha} < M (p\,x)^{2-\alpha}.$$

Даље је

$$\Sigma_3 \leqslant x^{1-\alpha} \operatorname*{Max}_{p+1 \leqslant \nu \leqslant r} \left| \frac{L(\nu)}{L(q)} - 1 \right| \cdot \sum_{\nu=p+1}^{r} \nu^{-\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant x^{1-\alpha} \operatorname*{Max}_{p+1 \leqslant \nu \leqslant r} \left| \frac{L(\nu)}{L(q)} - 1 \right| \cdot \int_{p}^{r} t^{-\alpha}\, dt,$$

па је

(9) $$\Sigma_3 \leqslant \begin{cases} \dfrac{(r\,x)^{1-\alpha} - (p\,x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \cdot \operatorname*{Max}_{p+1 \leqslant \nu \leqslant r} \left| \dfrac{L(\nu)}{L(q)} - 1 \right|, & \alpha \neq 1, \\[2ex] \log \dfrac{r}{p} \cdot \operatorname*{Max}_{p+1 \leqslant \nu \leqslant r} \left| \dfrac{L(\nu)}{L(q)} - 1 \right|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Када у (5) пустимо да $m \to \infty$, добићемо неједначину

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} L(\nu)\, \nu^{-\alpha} \sin \nu\, x \right| \leqslant \frac{M}{\sin x/2} (n+1)^{-\alpha} L(n+1)$$

па је према томе

(10) $$\Sigma_4 \leqslant M \frac{x}{\sin x/2} (r\,x)^{-\alpha} \frac{L(r+1)}{L(q)}.$$

Најзад, парцијалним сабирањем добијамо

$$(11)\qquad \begin{aligned}\Sigma_5 &\leqslant \frac{x^{1-\alpha}}{\sin x/2}\left\{\sum_{\nu=r+1}^{\infty}|\nu^{-\alpha}-(\nu+1)^{-\alpha}|+(r+1)^{-\alpha}\right\}<\\ &< 2\,\frac{x^{1-\alpha}}{\sin x/2}(r\,x)^{-\alpha}.\end{aligned}$$

Користећи процене (7—11) неједначина (6) постаје

$$\begin{aligned}|S(x,\alpha)| \leqslant M\Big\{&(p\,x)^{2-\alpha}\frac{L(p)}{L(q)}+(p\,x)^{2-\alpha}+\\ &+\frac{x}{\sin x/2}(r\,x)^{-\alpha}\frac{L(r+1)}{L(q)}+\frac{x}{\sin x/2}(r\,x)^{-\alpha}\Big\}+\\ &+\begin{cases}\dfrac{(r\,x)^{1-\alpha}-(p\,x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\cdot\displaystyle\operatorname*{Max}_{p+1\leqslant\nu\leqslant r}\left|\frac{L(\nu)}{L(q)}-1\right|, & \alpha\neq 1,\\[2ex] \log\dfrac{r}{p}\cdot\displaystyle\operatorname*{Max}_{p+1\leqslant\nu\leqslant r}\left|\frac{L(\nu)}{L(q)}-1\right|, & \alpha=1.\end{cases}\end{aligned}$$

Ако овде пустимо да $x\to 0$ и водимо рачуна о значењу величина p, q, r добићемо

$$(12)\qquad \limsup_{x=0}|S(x,\alpha)|\leqslant M\{\delta^{2-\alpha}+\Delta^{-\alpha}\},$$

јер, према особини (i) споро променљивих функција

$$\operatorname*{Max}_{p+1\leqslant\nu\leqslant r}\left|\frac{L(\nu)}{L(q)}-1\right|\to 0\quad\text{када}\quad x\to 0.$$

Како величине δ и Δ подлежу једино ограничењу да је $0<\delta<1$ и $1<\Delta<\infty$, то када у (12) пустимо да $\delta\to 0$ и $\Delta\to\infty$, добијамо коначно

$$\limsup_{x=0}|S(x,\alpha)|\leqslant 0,\quad 0<\alpha<2,$$

тј.

$$S(x,\alpha)\to 0,\quad x\to 0,\quad 0<\alpha<2.$$

Тиме је став 1 доказан.

4. Доказ става 2. Нека је $0 < \delta < 1$ и $p = [\delta/x]$, $q = [\pi/2\,x]$. Тада је

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} L(\nu) \sin \nu x =$$

$$= \left(\sum_{\nu=1}^{p-1} + \sum_{\nu=p}^{q} + \sum_{\nu=q+1}^{\infty}\right) L(\nu) \sin \nu x = \tag{13}$$

$$= S_1(x) + S_2(x) + S_3(x).$$

Нека је даље $0 < \eta < 1$. Прво је

$$S_1(x) = \sum_{\nu=1}^{p-1} L(\nu) \sin \nu x \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant \nu \leqslant p} \{\nu^{\eta} L(\nu)\} \sum_{\nu=1}^{p} \nu^{-\eta} \leqslant$$

$$\leqslant p^{\eta} L^{(1)}(p) \int_0^p t^{-\eta}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\eta} p\, L^{(1)}(p).$$

Како је $L^{(1)}(p) \sim L(1/x)$, $x \to 0$, то је

$$S_1(x) \leqslant \delta M(\eta) \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

тј.

$$S_1(x) = o\left\{\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \to 0, \tag{14}$$

јер δ можемо изабрати произвољно мало.

Следећа сума $S_2(x)$ даје уствари асимптотско понашање функције $f(x)$ кад $x \to 0$. Да би смо то доказали приметимо најпре да је

$$S_2(x) - \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left\{L(q) - \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right. + \frac{1}{x} L(q) \left\{x \sum_{\nu=p}^{q} \sin \nu x - 1\right\} +$$

$$+ \sum_{\nu=p}^{q} \{L(\nu) - L(q)\} \sin \nu x. \tag{15}$$

Како је

$$x \sum_{\nu=p}^{q} \sin \nu x - 1 = \left\{\cos(p - {}^1/_2)\, x - \cos(q - {}^1/_2)\, x - \frac{2}{x} \sin \frac{x}{2}\right\} \Big/ \frac{2}{x} \sin \frac{x}{2}$$

и

$$\left|\sum_{\nu=p}^{q}\{L(\nu)-L(q)\}\sin\nu x\right| \leqslant \{L(p)-L(q)\}(q-p+1) =$$

$$\leqslant \frac{1}{x} L(q)\left\{\frac{L(p)}{L(q)}-1\right\}(q-p+1)x \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\left\{\frac{L(p)}{L(q)}-1\right\}\left(\frac{\pi}{2}-\delta+2x\right),$$

то је према (15)

$$\left|\frac{S_2(x)}{1/x\, L(1/x)}-1\right| \leqslant 1-\frac{L(q)}{L(1/x)}+$$

$$+\frac{\left|\frac{2}{x}\sin\frac{x}{2}-\cos\left(p-\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(q-\frac{1}{2}\right)x\right|}{\frac{2}{x}\sin\frac{x}{2}}$$

$$+\left(\frac{\pi}{2}-\delta+2x\right)\left\{\frac{L(p)}{L(q)}-1\right\},$$

па је с обзиром на особину (i) споро променљивих функција

$$\limsup_{x=0}\left|\frac{S_2(x)}{1/x\, L(1/x)}-1\right| \leqslant 1-\cos\delta.$$

То значи да је

$$S_2(x)=\frac{1}{x}L\left(\frac{1}{x}\right)+o\left\{\frac{1}{x}L\left(\frac{1}{x}\right)\right\},\quad x\to 0, \tag{16}$$

јер у претходној неједначини δ можемо изабрати произвољно мало.

Код процене последње суме долази до изражаја претпоставка о конвексности функције $L(n)$. Најпре је

$$\begin{aligned} S_3(x) &= \sum_{\nu=q+1}^{\infty} L(\nu)\sin\nu x = \\ &= \cos qx\sum_{\nu=1}^{\infty} L(q+\nu)\sin\nu x+\sin qx\sum_{\nu=1}^{\infty} L(q+\nu)\cos\nu x. \end{aligned} \tag{17}$$

Парцијалним сабирањем добијамо

$$S_3^*(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} L(q+\nu)\sin\nu x=$$

$$=\frac{1}{\sin x/2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\{L(q+\nu)-L(q+\nu+1)\}\sin(\nu+1)\frac{x}{2}\sin\nu\frac{x}{2}.$$

Одавде следи

$$| S_3^{*}(x)| \leqslant \frac{1}{\sin x/2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \{L(q+\nu) - L(q+\nu+1)\} =$$

(18)
$$\leqslant \frac{1}{\sin x/2} L(q+1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2} L\left(\frac{1}{x}\right);$$

јер је $\sin x \geqslant 2x/\pi$ за $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

Два узастопна делимична сабирања дају

$$S_3^{**}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} L(q+\nu) \cos \nu x =$$

$$= \frac{1}{4\sin^2 x/2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \{L(q+\nu) - 2L(q+\nu+1) + L(q+\nu+2)\} \sin^2(\nu+{}^1/_2)\, x.$$

Због конвексности функције $L(n)$ је

$$| S_3^{**}(x)| \leqslant \frac{1}{4\sin^2 x/2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \{L(q+\nu) - 2L(q+\nu+1) + L(q+\nu+2)\} =$$

$$\leqslant \frac{L(q) - L(q+1)}{4\sin^2 x/2}.$$

За монотоно опадајући споро промењљив низ је за довољно велико p

$$0 \leqslant L(q) - L(2q) \leqslant \varepsilon L(q).$$

Како је

$$L(q) - L(2q) = \{L(q) - L(q+1)\} +$$
$$+ \{L(q+1) - L(q+2)\} + \ldots + \{L(2q-1) - L(2q)\},$$

и како је за свако $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ због конвексности функције $L(n)$

$$L(q+\nu) - L(q+\nu+1) \geqslant L(q) - L(q+1),$$

то је

$$q\{L(q) - L(q+1)\} \leqslant L(q) - L(2q) \leqslant \varepsilon L(q);$$

па је за довољно мало x

$$| S_3^{**}(x)| \leqslant \varepsilon \frac{1}{4\sin^2 x/2} \frac{1}{q} L(q) \leqslant \varepsilon \frac{\pi^2}{4qx} \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)$$

тј.

(19) $$S_3^{**}(x) = o\left\{\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \to 0.$$

Из (17), (18) и (19) добијамо да је

(20) $$S_3(x) = \cos q\,x\, S_3^*(x) + \sin q\,x\, S_3^{**}(x) = o\left\{\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \to 0$$

јер је $\cos q\,x = o(1)$, $x \to 0$.

Коначно из (13), (14), (16) и (20) следи

$$f(x) = \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) + o\left\{\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \to 0,$$

а тиме је став 2 доказан.

(Саопштено на седници Мат. инст. 13-II-1953)

НАВОДИ

[1] G. H. Hardy — A theorem concerning trigonometrical series. *Journal London Math. Soc.*, **3** (1928), 12—13.

[2] ———— Some theorems concerning trigonometrical series of a special type. *Proc. London Math. Soc.*, **32** (1931), 441—8.

[3] P. Heywood — Note on a theorem of Hardy on trigonometrical series. *Journal London Math. Soc.*, **29** (1954), 373—8.

[4] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière. *Bull. de Soc. Math. de France*, **61** (1933), 55—62.

[5] A. Zygmund — Trigonometrical Series, Warszawa 1935.

DEUX THÉORÈMES RELATIFS AU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

par

S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić

Soit $L(t)$ une fonction à croissance lente [4], c.-à.-d. une fonction définie pour $t \geqslant 0$, positive, et telle qu'on ait

$$\frac{L(\lambda t)}{L(t)} \to 1, \quad t \to \infty,$$

pour chaque $\lambda > 0$ fixe.

Dans la présente note sont démontrés les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Soit $0 < \alpha < 2$ et $L(t)$ le produit de deux fonctions monotones à croissance lente. Alors la série trigonométrique*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} L(\nu)\, \nu^{-\alpha} \sin \nu x$$

converge pour $0 < x < 2\pi$ et on a

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2\,\Gamma(\alpha) \sin \alpha\pi/2}\, x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +0.$$

THÉORÈME 2. *$L(t)$ étant une fonction à croissance lente, convexe, qui tend vers zéro avec $t \to \infty$, alors on a*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} L(\nu) \sin \nu x \sim \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +0.$$

Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 195
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

ВОЈИСЛАВ МАРИЋ

О АСИМПТОТСКОМ ПОНАШАЊУ ИНТЕГРАЛА ЈЕДНЕ КЛАСЕ НЕЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ДРУГОГ РЕДА

У овом се раду испитује асимптотско понашање интеграла једне класе диференцијалних једначина, која генералише Thomas-Fermi-ев диференцијални задатак теориске физике.

1. Диференцијални задатак

$$\text{(I)} \qquad y''(x) = f(x)\, y^{\lambda}(x); \quad y(0) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = 0, \quad \text{са} \quad \lambda > 1,$$

који генералише познати Thomas-Fermi-ев диференцијални задатак теориске физике, био је предмет испитивања више аутора који су доказали, за поједине класе функција $f(x)$, егзистенцију интеграла $y = y(x)$ који задовољава услове задатка и дали, било нумерички поступак за приближно израчунавање горњег интеграла, било његов асимптотски образац.

Најопштије резултате ове врсте добио је Авакумовић [1, 2]. Он је не само доказао [2] да једначина (I) има свега један интеграл који задовољава услове диференцијалног задатка (I), ако функција $f(x)$ задовољава услове

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1-\theta}}\right), \quad x \to \infty; \quad f(x) > \frac{1}{x^{1-\theta}}, \quad x \to \infty \quad \text{са} \quad \theta < 1;$$

већ је и испитао [1] асимптотско понашање тог интеграла под претпоставком да је $f(x) \sim \rho(x), x \to \infty$, при чему је $\rho(x) = \rho(x;\alpha)$ функција која задовољава услов

$$\text{(II)} \qquad \frac{\rho(xt)}{\rho(x)} \to t^{\alpha}, \quad x \to \infty,$$

за свако $t > 0$; осим тога показао је да је под претпоставком $\alpha > -2$,

$$y(x) \sim \left\{\frac{(1+\lambda+\nu)(2+\nu)}{(1-\lambda)^2}\right\}^{\frac{1}{\lambda-1}} \{x^2 \rho(x)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

Као што је познато [3], функција $\rho(x)$ има канонички облик

$$\rho(x) = x^{\alpha} L(x),$$

где је $L(x)$ споро променљива функција, тј. функција која задовољава услов

$$\text{(IIa)} \qquad \frac{L(xt)}{L(x)} \to 1, \quad x \to \infty \quad \text{за свако} \quad t > 0,$$

и има канонички облик

$$\text{(III)} \qquad L(x) = c(x)\, e^{\int\limits_{\alpha}^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}, \quad c(x) \to c, \quad \varepsilon(t) \to 0, \quad x \to \infty.$$

Овде ћу показати да се метод који је Авакумовић употребио може применити на испитивање асимптотског понашања интеграла једне општије класе диференцијалних једначина.

Да бисмо ову класу диференцијалних једначина лакше дефинасали, увешћемо неке скраћенице.

Тако, $L_n(x) = L_n(x; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ обележава функције једне специјалне класе споро променљивих функција. Ове функције имају облик

$$\text{(IIIa)} \qquad L_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \log_{\nu}^{\xi_{\nu}} x,$$

где су ξ_{ν} произвољни бројеви укључивши и нулу, а $\log_k x$ k-та итерација логаритма. Приметимо да функција $L_{n-1}(x)$, која ће нам касније бити потребна, има, према горњој дефиницији, облик

$$L_{n-1}(x) = \prod_{\nu=1}^{n-1} \log_{\nu}^{\xi_{\nu}} x.$$

Са $\rho_k(x)$ обележићемо функцију $\rho(e^{x^{1/k}}) = \rho(e^{x^{1/k}}; \alpha)$ са $\alpha > 0$. У овом раду испитаћемо асимптотско понашање интеграла $y = y(x)$ диференцијалног задатка

$$\text{(IV)} \qquad y''(x) = \rho_{\varkappa}(x)\, y^{\lambda}(x)\, L_n\!\left(\frac{1}{y(x)}\right), \qquad \lim_{x \to \infty} y(x) = 0,$$

са $\lambda > 1$, $\varkappa > 1$ и $\alpha > 0$.

Напоменимо одмах да, на основи напред споменуте теореме о егзистенцији интеграла задатка (I), услов $\alpha > 0$ осигурава решење задатка (IV).

СТАВ 1. *Ако је* $y = y(x)$ *неко решење диференцијалне једначине*

$$(*) \qquad y''(x) = \rho_\varkappa(x)\, y^\lambda(x)\, L_n\left(\frac{1}{y(x)}\right)$$

са $\lambda > 1$, $\alpha > 0$, $\varkappa > 1$, *које задовољава услов*

$$(**) \qquad y(x) \to 0, \quad x \to \infty,$$

тада је

$$(***) \quad y(x) = \left\{\frac{\xi_1\, \varkappa\, (\lambda - 1)^{2-\xi_1}}{\alpha^{2-\xi_1}}\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} \left\{x^{\frac{2\varkappa - 2 + \xi_1}{\varkappa}}\, \rho_\varkappa(x)\, L_{n-1}(x)\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

Потребно је овде посебно истаћи да само функција, $(\log x)^{\xi_1}$ утиче на брзину којом интеграл $y(x)$ тежи нули као степен, док све остале функције $(\log_\nu x)^{\xi_\nu}$, $(\nu = 2, 3, \ldots, n)$ утичу само као различити чланови логаритамске скале. Та чињеница показује да је вероватно много теже одговорити на питање како се асимптотски понаша интеграл $y = y(x)$ задатка (*) где уместо функције $L_n(x)$ стоји ма каква L-функција.

Прво приметимо да једначина (*) сменом

$$y(x) = p(x)\, z\{\varphi(x)\},$$

где је $\varphi(x)$ решење Bernoulli-јеве једначине

$$(1) \qquad p(x)\, \varphi''(x) + 2\, p'(x)\, \varphi'(x) + \alpha\, p(x)\, \varphi'^2(x) = 0, \quad \alpha > 0,$$

прелази у једначину

$$(2) \qquad z_{\varphi\varphi} - \alpha\, z_\varphi = \chi \left\{\Omega\, \frac{\rho_n(pz)}{z\, \rho_n(p)} - 1\right\}$$

где је

$$\rho_n(x) = x^\lambda L_n\left(\frac{1}{x}\right), \quad \chi = \frac{p'' z}{p\, \varphi'^2}, \quad \Omega = \frac{\rho_\varkappa(x)\, \rho_n(y)}{p''}.$$

При томе смо $\varphi(x)$ одредили тако да је $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1/\alpha$: ове почетне вредности изабрали смо због лакше процене израза $p(x)\, e^{\alpha\varphi(x)}$, што ће нам бити потребно у леми 2.

Сада се проблем свео на испитивање асимптотског понашања интеграла једначине (2), за што нам је, међутим, потребно да повољно изаберемо функцију $p(x)$.

Доказ става 1 следи непосредно из ових помоћних ставова:

ЛЕМА 1. 1° *Нека је* $\alpha > 0$ *и нека су* $\Omega(x)$, $\chi(x)$, $\varphi(x$ *и* $p(x)$ *позитивне функције за* $x \geqslant 0$ *које задовољавају услове*

(i) $\Omega \to 1$, $x \to \infty$; (ii) $\chi > c_1\, z(\varphi)$, $x \to \infty$; (iii) $p(x) \to 0$. $x \to \infty$

2^0 *Ако је* $z(\varphi)$ *оно решење диференцијалне једначине*

$$z_{\varphi\varphi} - \alpha z_{\varphi} = \chi \left\{ \Omega \frac{\rho(pz)}{z\rho(p)} - 1 \right\} \tag{3}$$

које задовољава услове

(iv) $z(\varphi) > 0$ за све $x \geqslant 0$; (v) $\underset{\varphi \to \infty}{z(\varphi) = o(e^{\alpha\varphi})}$

онда

$$z(\varphi) \to 1, \quad \varphi \to \infty.$$

Ова лема, као што се види, упоређујући једначине (2) и (3), има нешто општији облик него што је то потребно за сам доказ става 1.

ЛЕМА 2. *Нека је* $p(x)$ *нейрекидна конвексна функција која опада и задовољава услове*

$$p(x) \to 0, \quad x \to \infty, \tag{4}$$

$$\frac{p^2(x)}{x} \int_a^x \frac{dt}{p^2(t)} > \frac{c_2}{x^{1/k}}, \quad x > x_0, \tag{5}$$

$$\frac{p''(x)}{p(x)} > c_3 x^{\frac{1}{k} - 2}, \tag{6}$$

$$p''(x) \sim \rho_{\varkappa}(x) \rho_n(y), \quad x \to \infty, \tag{7}$$

тада су услови (i), (ii) *и* (v) *леме* 1. *задовољени.*

ЛЕМА 3. 1^0 *Функција*

$$p(x) = \left\{ \frac{\xi_1 \varkappa^{2\lambda - 1} (\lambda - 1)^{2\lambda - \xi_1}}{\alpha^{2\lambda - \xi_1}} \right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} \int_x^{\infty} dt \int_t^{\infty} \left\{ \tau^{\frac{2\varkappa\lambda - 2\lambda + \xi_1}{\varkappa}} \rho_{\varkappa}(x) L_{n-1}(x) \right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} dx \tag{8}$$

са $\lambda > 1$ *задовољава услове* (4), (5), (6) *и* (7) *леме* 2.

2^0

$$p(x) \sim \left\{ \frac{\xi_1 \varkappa (\lambda - 1)^{2 - \xi_1}}{\alpha^{2 - \xi_1}} \right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} \left\{ x^{\frac{2\varkappa - 2 + \xi_1}{\varkappa}} \rho_{\varkappa}(x) L_{n-1}(x) \right\}^{\frac{1}{1-\lambda}}, \quad x \to \infty \tag{9}$$

Заиста, како према леми 3, функција $p(x)$ задовољава услове (4), (5), (6) и (7), то су, према леми 2, и услови (i) — (v) леме 1 задовољени, која са тако изабраном функцијом $p(x)$, даје

$$z(\varphi) \to 1, \quad \varphi \to \infty. \tag{10}$$

Како смо ставили

$$y(x) = p(x)\, z\{\varphi(x)\},$$

то је, због (10),

$$y(x) \sim p(x), \quad x \to \infty,$$

што је према (9), еквивалентно са тврдњом става.

Преостало је још да се докажу леме 1—3 што ћемо учинити у следећа три одељка.

2.1. Доказ леме 1. Метод који се овде користи познат је од раније [1] и само је унеколико модифициран.

Означимо са φ^* горњу границу нула (уколико их нема, за φ^* се може узети ма који коначан број) једначине

$$\Omega \frac{\rho(pz)}{z\rho(p)} - 1 = 0, \tag{11}$$

Тада је или $\varphi^* < \infty$ или $\varphi^* = \infty$.

1. Нека је прво $\varphi^* < \infty$. Тада је или

a) $$\Omega \frac{\rho(pz)}{z\rho(p)} - 1 > 0 \quad \text{за све } \varphi > \varphi^*,$$

или

b) $$\Omega \frac{\rho(pz)}{z\rho(p)} - 1 < 0 \quad \text{за све } \varphi > \varphi^*.$$

У случају неједначине a) из (3), (ii) и (iv) следи

$$z_{\varphi\varphi} - \alpha z_{\varphi} > 0 \quad \text{за све } \varphi > \varphi^*$$

или, ако двапут интегришемо,

$$z > c_4 + c_5 e^{\alpha\varphi}, \quad \text{за све } \varphi > \varphi^*,$$

што је у контрадикцији са (v); значи да у случају $\varphi^* < \infty$ неједначина a) не може постојати.

Ако, у случају неједначине b) функцију $\rho(x)$ напишемо у каноничком облику, следи да је

(12) $$z^{\lambda-1} e^{\int\limits_{p}^{pz} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt} < \frac{c(p)}{c(pz)\,\Omega}.$$

Како је $-\delta < \varepsilon(t) < \delta$ чим је $\varphi > \varphi_0$, где је φ_0 неки довољно велики број, то због (i) из (12) добивамо

$$z^{\lambda-1+\delta} \leqslant 1+\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \text{за све } \varphi > \varphi_0,$$

односно

(13) $$\limsup z(\varphi) \leqslant 1, \quad \varphi \to \infty,$$

Како из (2), због b) следи

(14) $$z_{\varphi\varphi} - \alpha z_{\varphi} < 0 \quad \text{за све} \quad \varphi > \varphi_0,$$

то функција $z(\varphi)$ или стално расте или стално опада почев од неког $\varphi^{**} > \varphi^{*}$. Јер, уколико би постојало неко $\bar{\varphi} > \varphi^{*}$ такво да је $z_{\varphi}(\bar{\varphi}) = 0$, та би екстремна вредност због (14) била једина и то максимум. Постојало би, према томе, неко $\varphi^{**} > \varphi^{*}$ тако да би $z(\varphi)$ стално опадало за све $\varphi > \varphi^{**}$. Из те чињенице, из (iv) и из (13) добивамо да је

(15) $$\lim_{\varphi \to \infty} z(\varphi) = \tau,$$

где је

$$0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

Сада ћемо показати да је $\tau = 1$.

Из (14) и (15), према једном Tauber-ову ставу који потиче од Landau-a, следи да

(16) $$z_{\varphi}(\varphi) \to 0, \quad \varphi \to \infty.$$

Претпоставимо прво да је $\tau = 0$. Тада је $z(\varphi)$ функција која опада, тј. $z_{\varphi} < 0$ за све $\varphi > \varphi^{**}$. У том случају је, према (14), $z_{\varphi\varphi} < 0$, па је $z(\varphi)$ конкавна функција почев од неког φ; то је, међутим, немогуће, због (15).

Претпоставимо затим да је

(17) $$0 < \tau < 1.$$

Ако $\rho(p)$ напишемо у каноничком облику, тада из (3) због (15) и због $-\delta < \varepsilon(t) < \delta$, $\varphi > \varphi_0$ добивамо да је

(18) $$z_{\varphi\varphi} > \chi \left\{ z^{\lambda-1+\delta} \frac{c(pz)}{c(p)} \Omega - 1 \right\}.$$

Како је, међутим, због (i), (ii) и (17)

$$\limsup \chi \left\{ z^{\lambda-1+\delta} \frac{c(pz)}{c(p)} \Omega - 1 \right\} < -\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

то из (18) следи

$$\limsup_{\varphi \to \infty} z_{\varphi\varphi} < -\varepsilon.$$

Ако горњи израз двапут интегришемо, добићемо

$$z(\varphi) < -\frac{\varepsilon'}{2}\varphi^2 + c_6\varphi + c_7, \quad \varepsilon' > \varepsilon, \; \varphi > \varphi_0,$$

односно

$$\limsup_{\varphi \to \infty} z(\varphi) = -\infty,$$

што је у контрадикцији са (15). Следи према томе да је $\tau = 1$.

2. Нека је најзад $\varphi^* = \infty$ и нека су φ_n, φ_{n+1} две узастопне нуле једначине (11). Тада је

$$\text{(19)} \qquad \frac{\rho(z_n p_n)}{z_n \rho(p_n)} - 1 = 0,$$

тј.

$$\text{(20)} \qquad z_n^{\lambda-1} = \phi_n e^{-\int_{p_n}^{p_n z_n} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt},$$

где смо ставили

$$z\{\varphi_n(x)\} = z_n, \quad p(x_n) = p_n, \quad \frac{c(p_n)}{c(p_n z_n)\Omega_n} = \phi_n.$$

После логаритмовања (20) постаје

$$(\lambda - 1)\log z_n = -\int_{p_n}^{p_n z_n} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt + \log \phi_n,$$

односно, с обзиром на једначину $-\delta < -\varepsilon(t) < \delta$ која важи за све $t > p_n$ чим је p_n тј. n довољно велико, рецимо веће од n_0,

$$\log \phi_n - \delta \log z_n < (\lambda - 1)\log z_n < \delta \log z_n + \log \phi_n, \quad n > n_0.$$

Како $\phi_n \to 1$, то, чим буде $\delta < \lambda < 1$, горње неједначине могу важити само ако је

$$\text{(21)} \qquad z_n \leqslant 1 + \varepsilon, \quad n > n_0,$$

с друге стране је

$$\Omega \frac{c(p_n z_n)}{c(p)} e^{\int_{p_n}^{p_n z_n} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt} - 1 < \frac{c(p_n z_n)}{c(p_n)} \Omega z_n^{\lambda+\delta-1} - 1.$$

Како је лева страна ове неједначине (јер је то у ствари друкчије написана лева страна једначине (19) једнака нули, то је

$$z_n^{\lambda+\delta-1} \geqslant \phi_n \geqslant 1-\varepsilon, \quad n > n_0,$$

што заједно са (21) даје

$$z_n \to 1, \quad n \to \infty.$$

Претпоставимо сада да z стално расте или опада у размаку $\{\varphi_n, \varphi_{n+1}\}$. Тада је

$$1-\varepsilon \leqslant z_n \leqslant z \leqslant z_{n+1} \leqslant 1+\varepsilon, \quad n > n_0,$$

или

$$1-\varepsilon \leqslant z_{n+1} \leqslant z \leqslant z_n \leqslant 1+\varepsilon, \quad n > n_0,$$

одакле непосредно следи да

$$z(\varphi) \to 1, \quad \varphi \to \infty,$$

ако φ стално расте или опада у размаку $\{\varphi_n, \varphi_{n+1}\}$.

Ако, напротив, у размаку $\{\varphi_n, \varphi_{n+1}\}$ постоји неко $\overline{\varphi}$ такво да је $\overline{z}_\varphi(\varphi) = 0$, та екстремна вредност је минимум ако је

c) $$\Omega \frac{\rho(pz)}{z\rho(p)} - 1 > 0, \quad \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1},$$

односно максимум ако је

d) $$\Omega \frac{\rho(pz)}{z\rho(p)} - 1 < 0, \quad \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}.$$

Претпоставимо да је минимум; тада из c) следи

$$z^{\lambda-1} e^{\int_p^{pz} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt} > \phi \quad \text{за све} \quad \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}, \quad n > n_0,$$

односно

(22) $$z^{\lambda-1+\delta} \geqslant 1-\varepsilon, \quad n > n_0.$$

Поред тога је

(23) $$z \leqslant \operatorname{Min}\{z_n, z_{n+1}\} \leqslant 1+\varepsilon, \quad \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}, \quad n > n_0.$$

Из (22) и (27) следи да

$$z(\varphi) \to 1, \quad \varphi \to \infty$$

Сличним резоновањем добива се за случај d)

$$z^{\lambda-1+\delta} \leqslant 1+\varepsilon, \quad n > n_0$$

и

$$z \geqslant \operatorname{Max}\{z_n, z_{n+1}\} \geqslant 1-\varepsilon, \quad \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}, \quad n > n_0,$$

што заједно даје

$$z(\varphi) \to 1, \quad \varphi \to \infty,$$

чиме је лема 1 доказана.

2.2. Доказ леме 2. 1. На првом месту услов (i) следи непосредно из (7).

2. Како је

$$\chi = \frac{p''(x)\, z\{\varphi(x)\}}{p(x)} \left\{\frac{1}{\alpha} + \alpha \int_0^x \frac{dt}{p^2(x)}\right\}^2,$$

односно

$$\chi > \alpha^2 z\{\varphi(x)\} \frac{p''(x)}{p(x)} x^2 \left\{\frac{p^2(x)}{x} \int_a^x \frac{dt}{p^2(x)}\right\}^2,$$

то је због (5) и (6) услов (ii) задовољен.

3. Из (**) следи да и

(23) $$p(x)\, z\{\varphi(x)\} \to 0.$$

Како је с друге стране решење Bernoulli-јеве једначине (1) дато изразом

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha} \log P(x),$$

где је

$$P(x) = 1 + \int_0^x \frac{dt}{p^2(x)},$$

то имамо

$$p(x)\, e^{\alpha\varphi(x)} = p(x)\left(1 + \int_0^x \frac{dt}{p^2(t)}\right)$$

$$> \frac{x}{p(x)} \frac{p^2(x)}{x} \int_0^x \frac{dt}{p^2(x)}, \quad x > x_0,$$

односно, с обзиром на (5),

$$p(x)\,e^{\alpha\varphi(x)} > c_2\,\frac{x}{p(x)\,x^{1/\varkappa}}, \quad x > x_0,$$

што заједно са (24) даје услов (v), чиме је лема 2 доказана.

2.3. Доказ леме 3. Краткоће ради, у обрасцима (8) и (9) ставимо

$$(25)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\xi_1\varkappa(\lambda-1)^{2-\xi_1}}{\alpha^{2-\xi_1}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} = A, & \left(\dfrac{\xi_1\varkappa^{2\lambda-1}(\lambda-1)^{2\lambda-\xi_1}}{\alpha^{2\lambda-\xi_1}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} = A_1, \\[2ex] \dfrac{2\varkappa-2+\xi_1}{\varkappa(1-\lambda)} = \theta, & \dfrac{2\varkappa\lambda-2\lambda+\xi_1}{\varkappa(1-\lambda)} = \theta_1. \end{cases}$$

1. Покажимо прво да је (10) тачно.

Ако у ту сврху извршимо у интегралу

$$J(t) = \int_t^\infty \{\rho_\varkappa(\tau)\,L_{n-1}(\tau)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\,\tau^{\theta_1}\,d\tau$$

смену

$$\tau = \log^\varkappa u, \quad d\tau = \frac{\varkappa}{u}\log^{\varkappa-1}u\,du,$$

он постаје

$$J(t) = \varkappa\int_{e^{t^{1/\varkappa}}}^\infty \{u^\alpha L(u)\,L_{n-1}(\log^\varkappa u)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\,u^{-1}(\log u)^{\varkappa\theta_1+\varkappa-1}\,du.$$

Ставимо даље

$$u = e^{t^{1/\varkappa}}\,v, \quad du = e^{t^{1/\varkappa}}\,dv;$$

тако добивамо

$$J(t) = \varkappa\{\rho_\varkappa(t)\,L_{n-1}(t)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\,t^{\theta_1+\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\int_1^\infty v^{\frac{\alpha}{1-\lambda}-1}\,\psi(v;t)\,dv,$$

где је

$$\Psi(v;t)=\frac{L(e^{t^{1/\varkappa}}v)\,L_{n-1}(\log^{\varkappa} e^{t^{1/\varkappa}}v)\,(\log e^{t^{1/\varkappa}}v)^{\varkappa\theta_1+\varkappa-1}}{L(e^{t^{1/\varkappa}})\,L_{n-1}(\log^{\varkappa} e^{t^{1/\varkappa}})\,(\log e^{t^{1/\varkappa}})^{\varkappa\theta_1+\varkappa-1}},$$

одакле, на основи особине (II) функције $L(x)$ (види [3]), следи

$$J(t)\sim\frac{\varkappa(\lambda-1)}{\alpha}\,\{\rho_{\varkappa}(t)\,L_{n-1}(t)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\,t^{\theta_1+\frac{\varkappa-1}{\varkappa}},\quad t\to\infty.$$

Ако сада овај поступак поновимо на интегралу

$$p(x)\sim A_1\,\frac{\varkappa(\lambda-1)}{\alpha}\int_x^{\infty}\{\rho_{\varkappa}(t)\,L_{n-1}(t)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\,t^{\theta_1+\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\,dt,\quad x\to\infty,$$

добивамо релацију (9), што је требало и показати.

2. Покажимо затим да функција $p(x)$ задовољава услов (5).

С обзиром на (9), услов (5) можемо писати у облику

$$u_1(x)\equiv A\,x^{2\theta-1}\,\{\rho_{\varkappa}(x)\,L_{n-1}(x)\}^{\frac{2}{1-\lambda}}\int_a^x(\rho_{\varkappa}(t)\,L_{n-1}(t)^{\frac{2}{\lambda-1}}\,t^{-2\theta}\,dt>\frac{c^2}{x^{1/\varkappa}}.$$

Ако у интегралу на левој страни горње неједначине извршимо смене као и мало пре, добићемо

$$u_1(x)\sim\frac{A}{x^{1/\varkappa}}>\frac{c^2}{x^{1/\varkappa}},\quad x\to\infty.$$

3. Услов (6) можемо због (9) и због

$$p''(x)=A_1\,x^{\theta_1}\,\{\rho_{\varkappa}(x)\,L_{n-1}(x)\}^{\frac{1}{1-\lambda}},$$

што непосредно следи из (8), писати овако

$$u_2(x)\equiv\frac{A_1\,\{\rho_{\varkappa}(x)\,L_{n-1}(x)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\,x^{\theta_1+2}}{A\,\{\rho_{\varkappa}(x)\,L_{n-1}(x)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\,x^{\theta}}>c_3\,x^{2/\varkappa}.$$

Како из леве стране горње неједначине следи одмах да је

$$u_2(x)\sim\frac{A_1}{A}\,x^{2/\varkappa}<c_3\,x^{2/\varkappa},$$

то је услов (6) испуњен.

4. Услов (7), према обрасцу (9) и уведеним ознакама (25) и с обзиром да је

$$L_n\left(\frac{1}{\rho}\right) \sim \frac{\xi_1}{\varkappa}\left(\frac{\alpha}{\lambda-1}\right)^{\xi_1} x^{\xi_1/\varkappa} \prod_{\nu=1}^{n-1} \log_\nu^{\xi_\nu} x,$$

можемо писати у облику

$$A_1\, x^{\theta_1} \rho_\varkappa^{\frac{1}{1-\lambda}}(x)\left(\prod_{\nu=1}^{n-1} \log_\nu^{\xi_\nu} x\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \sim$$

$$\sim \frac{A^\lambda \alpha}{1-\lambda}\, x^{\lambda\theta+\frac{\xi_1}{\varkappa}} \rho_\varkappa^{1+\frac{\lambda}{1-\lambda}}(x)\left(\prod_{\nu=1}^{n-1} \log_\nu^{\xi_\nu} x\right)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}+1}.$$

Како је, очевидно,

$$1+\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{1}{1-\lambda},$$

$$\lambda\theta+\frac{\xi_1}{\varkappa}=\theta_1,$$

$$A^\lambda\left(\frac{\alpha}{\lambda-1}\right)^{\xi_1}\frac{\xi_1}{\varkappa}=A_1,$$

то је услов (7) задовољен.

5. Како, због $\alpha > 0$

$$A\left\{x^{\frac{2\varkappa-2+\xi_1}{\varkappa}} \rho_\varkappa(x)\, L_{n-1}(x)\right\} \to \infty, \quad x \to \infty,$$

то је, с обзиром на $\lambda > 1$, и услов (4), односно (iii), задовољен, па је лема доказана.

(Саопштено на седници Мат. инст. 14-X-1953)

ЛИТЕРАТУРА

[1] V. G. Avakumović. — Sur l'Équation Differentielle de Thomas-Fermi. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe de Sci.* **1** (1947), стр. 101—113.

[2] В. Г. Авакумовић. — О диференцијалним једначинама Thomas-Fermi-ева типа. Егзистенција интеграла. *Глас САН*, **CXCI** (1948), стр. 163—185.

[3] J. Karamata. — Sur un Mode de Croissance Régulière. *Bull. de la Soc. Math. de France*, **LXI** (1953), стр. 55—62.

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF INTEGRALS OF A CLASS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

by
V. Marić

The differential equation

(1) $$y''(x) = \rho_\varkappa(x)\, y^\lambda L_n\{1/y\}, \quad \lambda > 1, \quad \alpha > 0, \quad \varkappa > 1,$$

where $\rho_\varkappa(x) = \rho(e^{x^{1/\varkappa}})$, and $\rho(x)$, $L_n(x)$ are defined by (II) and (IIIa), has a unique solution $y = y(x)$ satisfying the conditions

(2) $$y(0) = 1, \qquad \lim_{x \to \infty} y(x) = 0.$$

(This follows at once from [2], Theor. II and III.)

We proved that, under stated conditions

(3) $$y(x) \sim \left\{\frac{\xi_1 \varkappa (\lambda - 1)^{2-\xi_1}}{\alpha^{2-\xi_1}}\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} \left\{x^{\frac{2\varkappa - 2 + \xi_1}{\varkappa}} \rho_\varkappa(x) L_{n-1}(x)\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}}, \quad x \to \infty.$$

Putting

(4) $$y(x) = p(x)\, z\{\varphi(x)\},$$

(1) becomes

$$z_{\varphi\varphi} - \alpha z_\varphi = \chi\left[\Omega \frac{\rho_n(pz)}{z\, \rho_n(p)} - 1\right],$$

where

$$\chi = \frac{p'' z}{p\, \varphi'^2}, \quad \Omega = \frac{\rho_\varkappa(x)\, \rho_n(x)}{p''(x)}, \quad \rho_n(x) = x^\lambda L_n(1/x)$$

and $\varphi(x)$ is the solution of Bernoulli's differential equation

(5) $$p\,\varphi'' + 2p'\varphi' + \alpha p\,\varphi'^2 = 0, \quad \alpha > 0,$$

with $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1/\alpha$.

Choosing conveniently $p(x)$, i. e. putting

$$p(x) = \left\{\frac{\xi_1 \varkappa (\lambda - 1)^{2\lambda - \xi_1}}{\alpha^{2\lambda - \xi_1}}\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} \int_x^\infty dt \int_x^\infty \left\{\tau^{\frac{2\varkappa\lambda - 2\lambda - \xi_1}{\varkappa}} \rho_\varkappa(\tau) L_{n-1}(\tau)\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} d\tau,$$

we proved that

$$z\{\varphi(x)\} \to 1, \tag{6}$$

when x and so, according to (5), $\varphi(x)$ tends to infinity. The method is similar to that first used by Avakumović (see [1]).

From (2) and (4) we have

$$y(x) \sim p(x). \tag{7}$$

Now, it is not difficult to prove, using the well-known properties of L-functions (see [3]), that

$$p(x) \sim \left\{ \frac{\xi_1 \varkappa (\lambda - 1)^{2-\xi_1}}{\alpha^{2-\xi_1}} \right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} \left\{ \rho_\varkappa(x) L_{n-1}(x) \, x^{\frac{2\varkappa-2+\xi_1}{\varkappa}} \right\}^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

and so, according to (7), (3) is estabilished.

Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

СТАНИМИР ФЕМПЛ

О ЈЕДНОМ УОПШТЕЊУ LEGENDRE-ОВЕ РЕЛАЦИЈЕ

У овом се раду изводи једна трансформациона једначина која у себи кондензује два позната обрасца за трансформацију потпуних нормалних елиптичких интеграла III врсте и даје геометриску примену тога.

1. Означимо са F и E потпуне нормалне елиптичне интеграле I и II врсте са модулом k, са $F(k',\psi)$ и $E(k',\psi)$ нормалне елиптичне интеграле I и II врсте са комплементарним модулом

$$k'=\sqrt{1-k^2}$$

и са амплитудом ψ. Legendre je показао [1, t. I, стр. 133] да je

$$\begin{aligned}\sin\psi\cos\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\psi\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}&=\\ =\frac{\pi}{2}-[FE(k',\psi)+EF(k',\psi)-FF(k',\psi)]&\end{aligned}\tag{1}$$

и

$$\begin{aligned}k'^2\sin\psi\cos\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta}{1-(1-k'^2\sin^2\psi)\sin^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}&=\\ =\frac{\pi}{2}-[FE(k',\psi)+EF(k',\psi)-FF(k',\psi)].&\end{aligned}\tag{2}$$

Ако се први разломци подинтегралних функција напишу у облику

$$\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\psi\cos^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\psi\cos^2\psi}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\psi\sin^2\theta}-\frac{1}{\cos^2\psi}$$

и

$$\frac{\sin^2\theta}{1-(1-k'^2\sin^2\psi)\sin^2\theta}=\frac{1}{-1+k'^2\sin^2\psi}\left[1-\frac{1}{1+(-1+k'^2\sin^2\psi)\sin^2\theta}\right],$$

једначине (1) и (2) дају обрасце помоћу којих се потпуни нормални елиптични интеграл III врсте

$$\Pi_0(n) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + n\sin^2\theta)\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}$$

може изразити комбинацијама нормалних елиптичних интеграла I и I врсте. Из прве, наиме, једначине следи

$$\Pi_0(\operatorname{ctg}^2\psi) = \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}\left[\frac{\pi}{2} + F\operatorname{tg}\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi} - \mathrm{L}(k,\psi)\right], \quad (3)$$

док из друге следи

$$\Pi_0(-1 + k'^2\sin^2\psi) = \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}{k'^2\sin\psi\cos\psi}\left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{L}(k,\psi)\right] + F, \quad (4)$$

где је обележено

$$\mathrm{L}(k,\psi) = FE(k',\psi) + EF(k',\psi) - FF(k',\psi). \quad (5)$$

Кад величина ψ непрекидно расте од 0 до $\pi/2$, параметар $n = \operatorname{ctg}^2\psi$ у интегралу Π_0 једначине (3) непрекидно опада од $+\infty$ до 0, док за случај (4) параметар $n = -1 + k'^2\sin^2\psi$ непрекидно расте од -1 до $-k^2$. За $\psi = \pi/2$, интеграли $F(k',\psi)$ и $E(k',\psi)$ постају потпуни интеграли са комплементарним модулом. Ако их обележимо са F' и E', добива се за $\psi = \pi/2$ позната Legendre-ова релација [1]

$$FE' + EF' - FF' = \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

која, уосталом, следи и из (1) или (2) за ту вредност ψ. Стога се релација (5) може сматрати као једно уопштење Legendre-ове релације па је

$$\mathrm{L}\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

Као што се видело, обрасци за изражавање интеграла III врсте помоћу оних I и II врсте важе за позитивне параметре и за оне који се налазе између -1 и $-k^2$. Напоменимо још да изрази (5) не долазе у обзир кад је параметар n интеграла Π_0 мањи од -1 јер, у таквом случају, за $\theta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{-n}}$ подинтегрална функција има дисконтинуитет, а како се та вредност налази у интегралним границама, интеграл Π_0 је у таквом случају дивергентан. Што се тиче случаја $-k^2 < n < 0$, за такве параметре постоји формула [2, § 49 и § 50]

$$\Pi_0(-k^2 \sin^2\psi) = F + \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}[FE(k,\psi) - EF(k,\psi)]$$

и у том случају израз $\mathrm{L}(k,\psi)$ не би био реалан, тј. не би довео до интеграла III врсте за чији је параметар $-k^2 < n < 0$.

Показало се да није оправдано дати једној извесној форми елиптичких интеграла III врсте неку нарочиту предност, а с тим у вези и једно нарочито функционално обележје, јер постоје још многе друге равноправне форме. При истраживањима веза између θ-функција и елиптичких интеграла III врсте, редукције на Legendre-ов нормални тип изискивала су многа рачунања, често и врло компликована. И, на основу Jacobi-ева става [2, § 49] да се Legendre-ов нормални тип елиптичног интеграла III врсте, а који садржи три аргумента, своди на функције у којима се појављују само два аргумента, ови интеграли би изгубили своју актуелност. Но, у великом броју случајева, нарочито у геометриским применама и када се ради о једноставнијим трансформацијама, узимање Legendre-вог типа за норму има своје оправдање, тим пре што се Legendre-ова метода одликује својим нарочито елементарним карактером. С друге стране, баш ове Legendre-ове методе инспирисале су Abel-а за његова класична открића. Стога и надаље могу бити актуелна испитивања Legendre-овог нормалног типа.

Чињеница да потпуни интеграли III врсте, и они са позитивним параметром као и они чији се параметар налази између -1 и $-k^2$ воде на исти израз $\mathrm{L}(k,\psi)$, указује да би и испитивање таквог израза било од интереса.

У овом раду, у т. 2 поставићу једну једноставну трансформациону једначину за изразе облика $\mathrm{L}(k,\psi)$, која у себи кондензује два позната обрасца за трансформацију потпуних нормалних елиптичких интеграла III врсте. У т. 3 показаћу да обрасци (3) и (4) добивају једноставнији облик кад се употреби трансформисан израз L, и даћу једну геометриску примену у том смислу. У т. 4 испитаћу израз L и поставићу доњу и горњу границу за такав израз. У т. 5 указаћу на геометриско значење уопштене Legendre--ове релације. На крају, у т. 6 даћу неколико специјалних вредности за израз L.

2. Из адиционих теорема за нормалне елиптичне интеграле I и II врсте [3, стр. 330—345]

$$F(k,\varphi) + F(k,\psi) = F(k,\sigma),$$

$$E(k,\varphi) + E(k,\psi) = E(k,\sigma) + k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma,$$

при чему је

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma},$$

за $\sigma = \pi/2$ и за комплементаран модул k' следи

$$F(k',\varphi) + F(k',\psi) = F', \tag{8}$$

$$E(k',\varphi) + E(k',\psi) = E' + k'^2\sin\varphi\sin\psi, \tag{9}$$

при чему је

$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{k}.$$

Множењем једначине (8) са E, једначине (9) са F и сабирањем, добија се

$$[FE(k',\varphi) + EF(k',\varphi)] + [FE(k',\psi) + EF(k',\psi)] =$$
$$= (FE' + EF') + Fk'^2\sin\varphi\sin\psi.$$

Како на основу једначине (5) израз у првој загради има вредност $\mathrm{L}(k,\varphi) + FF(k',\varphi)$, израз у другој загради има вредност $\mathrm{L}(k,\psi) + FF(k',\psi)$; како на основу Legendre-ове релације (6) израз у загради на десној страни има вредност $\pi/2 + FF'$, то следи

$$\mathrm{L}(k,\varphi) + \mathrm{L}(k,\psi) + F[F(k',\varphi) + F(k',\psi)] =$$
$$= \frac{\pi}{2} + FF' + Fk'^2\sin\varphi\sin\psi,$$

а због једначине (8),

$$\mathrm{L}(k,\varphi) + \mathrm{L}(k,\psi) = \frac{\pi}{2} + Fk'^2\sin\varphi\sin\psi, \tag{10}$$

при чему је

$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{k}. \tag{11}$$

Једначина (10) даје могућност да се израз $\mathrm{L}(k,\psi)$ трансформише у други израз $\mathrm{L}(k,\varphi)$, при чему су величине φ и ψ везане једначином (11).

Помоћу горње једначине могу се добити два позната обрасца из теорије елиптичних интеграла.

Ставимо у једначини (3)

$$\operatorname{ctg}^2\psi = n.$$

Ова ће постати

$$\Pi_0(n) = \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\left[\frac{\pi}{2} + F\sqrt{\frac{n+k^2}{n(n+1)}} - \mathrm{L}(k,\psi)\right],$$

при чему је

$$\psi = \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{n}\,,$$

а одавде следи

$$\mathrm{L}(k, \psi) = \frac{\pi}{2} + F\sqrt{\frac{n+k^2}{n(n+1)}} - \sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\,\Pi_0(n). \qquad (12)$$

Ако овде уведемо величину φ на основи једначине (11), биће

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{k^2}{n} > 0\,,$$

па ће зато и за нови параметар $N = k^2/n$ важити једначина (12), тј. биће

$$\mathrm{L}(k, \varphi) = \frac{\pi}{2} + F\sqrt{\frac{N+k^2}{N(N+1)}} - \sqrt{\frac{(N+1)(N+k^2)}{N}}\,\Pi_0(N),$$

при чему је $\varphi = \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{N}$; дакле,

$$\mathrm{L}(k, \varphi) = \frac{\pi}{2} + F\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} - \sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\,\Pi_0\left(\frac{k^2}{n}\right), \qquad (13)$$

при чему је $\varphi = \operatorname{arc\,ctg} k/\sqrt{n}$. Сабирањем једначина (12) и (13), а на основу једначине (10), добива се

$$\Pi_0(n) + \Pi_0\left(\frac{k^2}{n}\right) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}} + F. \qquad (14)$$

Ово је позната формула за збир два потпуна нормална елиптична интеграла III врсте истог модула, а са различитим параметрима [4]. Ова формула изведена је уз претпоставку да су параметри n и k^2/n позитивни. Но она важи и за случај кад се параметри налазе између -1 и $-k^2$; јер када се у једначини (4) стави $-1 + k'^2 \sin^2 \psi = n$ и примени исти поступак као изложени, опет резултује једначина (14). Но ово је и разумљиво, јер и једначина (3) и једначина (4) воде на исти израз $\mathrm{L}(k, \psi)$.

Узмимо опет

$$n = \operatorname{ctg}^2 \psi\,.$$

Тада важи једначина (12). Узимајући за величину φ вредност на основи једначине (11), види се да ће се величина

$$-1 + k'^2 \sin^2 \varphi = -\frac{k^2(n+1)}{n+k^2}$$

налазити између -1 и $-k^2$. Стога за величину φ важи једначина (4) у којој, сада, стоји φ место ψ, у којој је нови параметар

$$N = -\frac{k^2(n+1)}{n+k^2}$$

и која се, сада, због $N = -1 + k'^2 \sin^2 \varphi$ своди на облик

$$\mathrm{L}(k, \varphi) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{(N+1)(N+k^2)}{N}}\,[\Pi_0(N) - F],$$

тј.

$$\mathrm{L}(k, \varphi) = \frac{\pi}{2} - k'^2 \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}} \left\{\Pi_0\left[-\frac{k^2(n+1)}{n+k^2}\right] - F\right\},$$

при чему је

$$\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{n}{n+k^2}}.$$

Сабирањем овог израза $\mathrm{L}(k, \varphi)$ са једначином (12) и водећи рачуна о једначини (10), добива се после краћег рачуна

$$\begin{aligned}\Pi_0(n) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}} &+ \\ + \frac{F}{n+1} - \frac{n k'^2}{(n+1)(n+k^2)}\,\Pi_0&\left[-\frac{k^2(n+1)}{n+k^2}\right].\end{aligned} \tag{15}$$

Ово је позната формула на основи које се потпуни нормални елиптични интеграл III врсте са позитивним параметром може изразити таквим интегралом, но у коме параметар има вредност која се налази између -1 и $-k^2$. Ова формула се обично даје у облику

$$\begin{aligned}\Pi_0(k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\alpha}} &+ \\ + \frac{F}{1+k^2\operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{k'^2\sin^2\alpha}{1+k^2\operatorname{tg}^2\alpha}\,\Pi_0&[-(\cos^2\alpha + k^2\sin^2\alpha)],\end{aligned}$$

на основи смене $n = k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ [4].

3. Ако се на једначину (4) примени образац (10), тј. ако се место израза у средњој загради те једначине стави вредност $\mathrm{L}(k, \varphi) - F k'^2 \sin\varphi \sin\psi$, то на основи везе (11) следи једначина

$$\Pi_0(-1 + k'^2 \sin^2 \psi) = \frac{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}{k'^2 \sin\varphi \cos\varphi}\,\mathrm{L}(k, \varphi), \tag{16}$$

при чему је

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{k \operatorname{tg} \psi},$$

и која је једноставнија од једначине (4).

Примењујући исти поступак на једначину (3), добива се

$$\Pi_0 (\operatorname{ctg}^2 \psi) = \cos^2 \varphi \cdot F + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} \mathrm{L}(k, \varphi). \tag{17}$$

И овде је

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{k} \operatorname{ctg} \psi .$$

Једначина (17) такође је подеснија од једначине (3), јер даје могућност да се израз $\mathrm{L}(k, \varphi)$ ограничи, што ћу касније показати.

У обрасцу за омотач косе кружне купе [5]

$$M = 2 r \sqrt{s_1 s_2}\left(E - F \sin^2 \frac{\delta}{2}\right) + 2 r^2 [E_1 F - (F - E) F_1]$$

је r полупречник основе купе, s_1 и s_2 већа и мања изводница карактеристичног пресека, а δ угао тога пресека наспрам пречника. Ако се још углови наспрам страна s_1 и s_2 означе са β и γ, модул потпуних елиптичних интеграла је

$$k = \sin \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Амплитуда непотпуних интеграла E_1 и F_1 је

$$\psi = \arcsin \frac{2 r}{s_1 + s_2},$$

и њихов модул је

$$k' = \cos \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Из горњег обрасца за омотач види се да израз у средњој загради претставља величину $\mathrm{L}(k, \psi)$. Ако се, сада, уведе трансформисан израз $\mathrm{L}(k, \varphi)$ на основу једначине (10), због једначине (11) биће

$$\sin \varphi = \frac{\cos \psi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \psi}}.$$

Водећи рачуна о релацијама између страна и углова карактеристичног троугла

$$\frac{s_1+s_2}{2r}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}=\frac{k'}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

$$\frac{s_1}{2r}\cdot\frac{s_2}{2r}=\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\delta},$$

израз $k'^2\sin\varphi\sin\psi$ у једначини (10) добива, после краћег рачуна, облик

$$\frac{k'^2\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}=\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\cdot\sqrt{k'^2-\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\cdot\sqrt{\sin\beta\sin\gamma}=\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\cdot\sqrt{\frac{s_1}{2r}\cdot\frac{s_2}{2r}\sin^2\delta}=\frac{\sqrt{s_1s_2}}{r}\sin^2\frac{\delta}{2}.$$

Ако се вредност унесе у једначину (10), а тако добивени израз за $\mathrm{L}(k,\psi)$ из те једначине у израз за омотач купе, добива се једноставнији израз за омотач

$$M=r^2\pi+2r\sqrt{s_1s_2}\,E-2r^2\,\mathrm{L}(k,\varphi),$$

при чему је

$$\varphi=\arccos\frac{s_1-s_2}{s_1+s_2},$$

што се лако увиђа после краћег рачуна.

4. Стављајући у једначини (17) $n=\operatorname{ctg}^2\psi$, из ове следи

$$\Pi_0(n)=\frac{k^2}{n+k^2}\cdot F+\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\,\mathrm{L}(k,\varphi),\tag{18}$$

одакле је

$$\mathrm{L}(k,\varphi)=\sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\left[\Pi_0(n)-\frac{k^2}{n+k^2}\cdot F\right],\tag{19}$$

а при чему је

$$\operatorname{ctg}\psi=k\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{n},$$

тј.

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{n}}{k}.\tag{20}$$

Ако се, сада, интеграли Π_0 и F скупе, добива се

$$\mathrm{L}(k,\varphi)=\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}}\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}{1+n\sin^2\theta}\,d\theta \tag{21}$$

или

$$\mathrm{L}(k,\varphi)=\sin\varphi\,\sqrt{1+k^2\,\mathrm{tg}^2\varphi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}{1+k^2\,\mathrm{tg}^2\varphi\sin^2\theta}\,d\theta. \tag{22}$$

Из једначине (22) се види да је $\mathrm{L}(k,\varphi)$ позитивна величина. Сам интеграл сматран као функција од φ је позитиван и монотоно расте, јер подинтегрална функција остаје позитивна. То исто је случај и са изразом испред интеграла. Услед тога и израз $\mathrm{L}(k,\varphi)$ монотоно расте. Ако тај израз, уз стално k, обележимо са $\mathrm{L}(\varphi)$, услед $\mathrm{L}(\varphi)=FE(k',\varphi)+EF(k',\varphi)-FF(k',\varphi)$,

$$\mathrm{L}'(\varphi)=\frac{E-F\,k'^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

$$\mathrm{L}''(\varphi)=\frac{k'^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)^{3/2}}(E+F\,k'^2\sin^2\varphi-2F)=$$

$$=-\frac{k'^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)^{3/2}}\int_0^{\pi/2}\frac{1+k^2\sin^2\theta-k'^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta,$$

види се да је $\mathrm{L}''(\varphi)<0$, па је функција $\mathrm{L}(\varphi)$ конвексна. Њена најмања вредност у размаку $(0,\pi/2)$ је $\mathrm{L}(k,0)=0$, а највећа вредност, на основу једначине (7), је $\pi/2$.

Од интереса је неједначина

$$\mathrm{L}\left(k,\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\frac{\pi}{4},$$

која излази на основи Jensen-ове неједначине за конвексне функције [6]

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqslant\frac{f(a)+f(b)}{2},$$

а доња граница је постигнута за $k=1$, јер је

$$\mathrm{L}(1,\varphi)=F(1)E(0,\varphi)+E(1)F(0,\varphi)-F(1)F(0,\varphi)=E(1)F(0,\varphi)=\varphi.$$

Ако се израз $\mathrm{L}(k,\varphi)$ посматра као функција од k, на основи познатих образаца [7, стр. 226—227]

$$\frac{\partial F}{\partial k}=-\frac{F}{k}+\frac{E}{kk'^2},\qquad \frac{\partial E}{\partial k}=\frac{E-F}{k},$$

$$\frac{\partial F(k',\varphi)}{\partial k}=\frac{kF(k',\varphi)}{k'^2}-\frac{E(k',\varphi)}{kk'^2}+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{k\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

$$\frac{\partial E(k',\varphi)}{\partial k}=\frac{k\,[F(k',\varphi)-E(k',\varphi)]}{k'^2},$$

добива се, према (5),

$$\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial k}=\frac{(E-F)\sin\varphi\cos\varphi}{k\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}=-\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

или

$$\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial k}=-\,y(k)\,J(k),$$

где је $y(k)$ коефицијент уз интеграл $J(k)$. Тај коефицијент је позитиван и лако се можемо уверити да он монотоно расте. Како је сам интеграл позитиван и монотоно расте, то је

$$\frac{\partial^2\mathrm{L}}{\partial k^2}=-\left(J\frac{\partial y}{\partial k}+y\frac{\partial J}{\partial k}\right)<0,$$

па је функција $\mathrm{L}(k)$ конвексна и монотоно опада од $\mathrm{L}(0,\varphi)$ до $\mathrm{L}(1,\varphi)$, тј. од $^1/_2\,\pi\sin\varphi$ до φ, јер је

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(0,\varphi)&=F(0)\,E(1,\varphi)+E(0)\,F(1,\varphi)-F(0)\,F(1,\varphi)\\&=F(0)\,E(1,\varphi)={}^1/_2\,\pi\sin\varphi.\end{aligned}$$

За функцију $\mathrm{L}(k,\varphi)$ лако се изналазе границе ако се употреби облик (21), и то на следећи начин. Услед

$$\sqrt{1-k^2}\leqslant\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\leqslant 1,$$

множењем ове двоструке неједначине са $\dfrac{d\theta}{1+n\sin^2\theta}$, после интегралења у границама 0 и $\pi/2$ добива се

$$\frac{k'\pi}{2\sqrt{n+1}}\leqslant\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}{1+n\sin^2\theta}\,d\theta\leqslant\frac{\pi}{2\sqrt{n+1}},$$

а после множења са $\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{n+k^2}}$,

$$\frac{\pi}{2}k'\sqrt{\frac{n}{n+k^2}} \leqslant \mathrm{L}(k,\varphi) \leqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{n+k^2}}$$

или, због (20),

$$\frac{\pi}{2}k'\sin\varphi \leqslant \mathrm{L}(k,\varphi) \leqslant \frac{\pi}{2}\sin\varphi. \tag{23}$$

До истих се резултата, разумљиво, долази ако се пође од једначине (16). Исто тако, лако се увиђа да трансформисани израз $\mathrm{L}(k,\varphi)$ даје једноставније границе од израза $\mathrm{L}(k,\psi)$, јер је облик интеграла за овај други случај компликованији, а то је, онда, случај и са границама за тај израз.

5. Познато је да усправна елиптична купа са основним осовинама a и b и и са висином H има омотач [8, стр. 305—306]

$$M = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{H^2}{a^2}\cos^2\psi + \frac{H^2}{b^2}\sin^2\psi + 1}\;d\psi,$$

при чему величина ψ претставља ексцентричну аномалију елипсе. Ако се отвор омотачеве мреже обележи са Ω, а ма која изводница купе са ρ, тада мора бити

$$dM = {}^1\!/_2\,\rho^2\,d\Omega,$$

а из ове једначине, услед симетрије купе, следи

$$\frac{1}{4}\Omega = ab\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\rho^2}\sqrt{\frac{H^2}{a^2}\cos^2\psi + \frac{H^2}{b^2}\sin^2\psi + 1}\;d\psi =$$

$$= ab\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\rho^2}\sqrt{\left(1+\frac{H^2}{b^2}\right) - \left(\frac{H^2}{b^2} - \frac{H^2}{a^2}\right)\cos^2\psi}\;d\psi,$$

тј.

$$\frac{1}{4}\Omega = a\sqrt{H^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\rho^2}\sqrt{1 - \frac{H^2\varepsilon^2}{H^2+b^2}\cos^2\psi}\;d\psi,$$

I4

где $\varepsilon = e/a$ претставља нумерички ексцентрицитет елипсе. Обележимо ли са r полупречник основе који одговара изводници ρ, биће

$$\rho^2 = H^2 + r^2 = H^2 + (a^2 \cos^2\psi + b^2 \sin^2\psi) = (b^2 + H^2)\left(1 + \frac{e^2}{b^2+H^2}\cos^2\psi\right),$$

а уношењем ове вредности за ρ добива се

$$\frac{1}{4}\,\Omega = \frac{a}{\sqrt{H^2+b^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - \dfrac{H^2\varepsilon^2}{H^2+b^2}\cos^2\psi}}{1 + \dfrac{e^2}{H^2+b^2}\cos^2\psi}\, d\psi.$$

Због $\varepsilon \leqslant 1$, коефицијент уз $\cos^2\psi$ у бројиоцу мањи је од јединице. Обележимо га са k^2. Коефицијент уз $\cos^2\psi$ у имениоцу обележимо са n. Тада је

$$\frac{a}{\sqrt{H^2+b^2}} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}}.$$

Ако се још изврши смена $\psi = \pi/2 - \theta$, отвор омотача ће бити

$$\Omega = 4\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}{1+n\sin^2\theta}\, d\theta,$$

тј., према једначини (21),

$$\Omega = 4\,\mathrm{L}(k, \varphi),$$

где је, због једначине (20),

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{H}.$$

Ако са α обележимо угао осовинског пресека који пролази кроз велику осовину елипсе и који лежи наспрам те осовине, биће

$$\frac{a}{H} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

па је зато

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}. \tag{24}$$

Из горњег излагања јасно се види геометриско значење израза $\mathrm{L}(k, \varphi)$. Тај израз претставља четвртину отвора омотачеве мреже усправне елиптичне купе. При томе, величина φ има значење (24), а величина k може се још изразити и у облику

$$k = \frac{H\varepsilon}{\sqrt{H^2+b^2}} = \frac{\varepsilon\cos\alpha/2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\alpha/2}}. \tag{25}$$

Истакнимо још геометриско значење неједначине (23). Тога ради, означимо са β угао осовинског пресека који пролази кроз малу осовину елипсе и који лежи наспрам те мале осовине. Тада ће, према једначини (25), бити

$$k = \varepsilon \cos \beta/2\,, \quad k' = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \beta/2}$$

и

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{\sqrt{H^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 \beta/2}} = \frac{\sin \beta/2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \beta/2}}\,,$$

па је

$$k' \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta}{2}\,.$$

Услед тога, из неједначине (23) следи

$$2\pi \sin \frac{\beta}{2} \leqslant \Omega \leqslant 2\pi \sin \frac{\alpha}{2}\,,$$

па нам ова неједначина изражава да се отвор омотачеве мреже усправне елиптичне купе налази између отвора двеју кружних купа чији су пречници основâ мала и велика осовина елипсе.

За случај кружне купе ($\beta = \alpha$), због $\varepsilon = 0$ следи $k' = 1$, па се у том случју границе поклапају и добива тачна вредност за Ω:

$$\Omega = 2\pi \sin \frac{\alpha}{2}\,,$$

што, уосталом, следи и из израза за $\Omega\,(k = 0)$, а што се и могло очекивати.

6. Из обрасца (14) следи за $n = k$:

$$\Pi_0(k) = \frac{\pi}{4(1+k)} + \frac{1}{2} F\,,$$

а на основу једначине (18) следи

$$\Pi_0(k) = \frac{k}{1+k} F + \frac{1}{k+1} \mathrm{L}\,(k, \varphi)\,,$$

при чему је

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{n}}{k} = \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{k}\,.$$

Стога је

$$\mathrm{L}\,(k, \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{k}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1-k}{2} F\,.$$

Као што се види, овде се функција L изражава само потпуним интегралом I врсте. Но постоји читав низ вредности за φ на основи којих је могуће такво изражавање. У једном свом ранијем раду [9] указао сам на једну методу добивања везе између параметра и модула потпуног нормалног елиптичног интеграла III врсте, чијом применом се такав интеграл изражава помоћу потпуног нормалног елиптичног интеграла I врсте. Замењујући такве вредности у једначине (16) или (19), из њих следе поменуте вредности за $\mathrm{L}(k, \varphi)$.

Примера ради, ако је φ корен једначине

$$k'^2 \sin^4 \varphi - 2 k'^2 \sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi - 1 = 0, \tag{26}$$

показао сам да ова једначина даје само једну реалну вредност за φ и да је

$$\Pi_0 (k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi) = \frac{\pi}{6 k'} \sqrt{2 \sin \varphi - 1} - \frac{F}{3} (\sin^2 \varphi - \sin \varphi - 2).$$

Како је, на основи једначине (19),

$$\mathrm{L}(k, \varphi) = \frac{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi \cos \varphi} (\Pi_0 - F \cos^2 \varphi),$$

то је

$$\mathrm{L}(k, \varphi) = \frac{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi \cos \varphi} \left[\frac{\pi}{6 k'} \sqrt{2 \sin \varphi - 1} + \frac{F}{3} (2 \sin^2 \varphi + \sin \varphi - 1) \right].$$

Ако се извуче пред заграду $\sqrt{2 \sin \varphi - 1}$, а на основи (26) је

$$2 \sin \varphi - 1 = 2 k'^2 \sin^3 \varphi - k'^2 \sin^4 \varphi,$$

биће

$$\frac{\sqrt{(1 - k'^2 \sin^2 \varphi)(2 \sin \varphi - 1)}}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{k' \sqrt{(1 - k'^2 \sin^2 \varphi)(2 \sin \varphi - \sin^2 \varphi)}}{\cos \varphi} =$$

$$= \frac{k' \sqrt{(k'^2 \sin^4 \varphi - 2 k'^2 \sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi) - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} = k',$$

па је

$$\mathrm{L}(k, \varphi) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} F k' (1 + \sin \varphi) \sqrt{2 \sin \varphi - 1}.$$

Напоменимо само да је [9]

$$\sin \varphi = {}^1/_2 (1 - \sqrt{1 + A} + \sqrt{2 - A + 2 \sqrt{1 - A + A^2}}),$$

где је

$$A = \sqrt[3]{\frac{4 k'^2}{k^4}}.$$

Разумљиво је да би се и овде добио исти резултат да се пошло од једначине (16).

Лако се добива још једна вредност за L у наведеном смислу, ако се употребе једначине (10) и (11). Из (11), наиме, следи

$$\psi = \operatorname{arc\,ctg}(k \operatorname{tg} \varphi), \tag{27}$$

па је

$$\mathrm{L}(k, \psi) = \frac{\pi}{2} + F k'^2 \sin\varphi \sin\psi - \mathrm{L}(k, \varphi) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{F k'^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}} - \mathrm{L}(k, \varphi).$$

Водећи рачуна о једначини (26), други члан десне стране може се писати у облику

$$\frac{F k'^2 \sin\varphi \cos\varphi \sqrt{2 \sin\varphi - \sin^2\varphi}}{\sqrt{(k'^2 \sin^4\varphi - 2 k'^2 \sin^3\varphi + 2 \sin\varphi) - \sin^2\varphi}} = F k'^2 \sin\varphi \sqrt{2 \sin\varphi - \sin^2\varphi} =$$

$$= F k' \sqrt{2 k'^2 \sin^3\varphi - k'^2 \sin^4\varphi} = F k' \sqrt{2 \sin\varphi - 1},$$

па ако се за $\mathrm{L}(k, \psi)$ стави малопре добивена вредност, биће

$$\mathrm{L}(k, \psi) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} F k' (2 - \sin\varphi) \sqrt{2 \sin\varphi - 1},$$

при чему важе једначине (26) и (27).

(Саопштено на седници Мат. инст. 18-XI-1953)

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. M. Legendre — Traité des fonctions elliptiques et intégrales Eulériennes. Paris 1825.

[2] K. G. Jacobi — Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Königsberg 1829.

[3] O. Schlömilch — Vorlesungen über einzelne Theile der Höheren Analysis. Braunschweig 1879.

[4] W. Laska — Sammlung von Formeln der reinen u. angewandten Mathematik. Braunschweig 1888—94.

[5] S. Fempl — Komplanacija kose kružne kupe. *Glasnik matematičko-fizički i astronomski* **4** (1949), str. 127—134.

[6] J. L. W. V. Jensen — Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les moyennes. *Acta mat.* **30** (1905), str. 175—193.

[7] A. Enneper — Elliptische Functionen. У преради F. Müller-a. Halle a. S. 1890.

[8] E. Czuber: — Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung. Bd. II. Leipzig—Berlin 1919.

[9] С. Фемпл — О неким редукцијама потпуног нормалног елиптичног интеграла III врсте. *Зборник радова Математичког института САН* **3** (1953), стр. 129—146.

GÉNÉRALISATION D'UNE RELATION DE LEGENDRE

par

Stanimir Fempl

L'auteur étudie l'expression

$$L(k, \psi) = F E(k', \psi) + E F(k', \psi) - F F(k', \psi),$$

où F et E sont les intégrales elliptiques normales complètes de I et II espèces au module k et $F(k', \psi)$, $E(k', \psi)$ les intégrales elliptiques normales au module complémentaire $k' = \sqrt{1-k^2}$ et amplitude ψ.

Cette expression représente une généralisation de la relation de Legendre

$$F E' + E F' - F F' = \frac{\pi}{2},$$

ou F' et E' sont les intégrales elliptiques normales complètes au module complémentaire.

L' auteur établit une équation de transformation (équations (10) et (11)) renfermant les deux formules connues de transformation des intégrales elliptiques normales complètes de III espèce (formules (14) et (15)). Puis il montre que les formules, à l'aide desquelles les intégrales elliptiques normales complètes de III espèce aux paramètres $n > 0$ ou $-1 < n < -k^2$, s'expriment par des combinaisons des intégrales elliptiques normales de I et II espèces, se simplifient si l'on applique l'équation précédente (formules (16) et (17)) et donne en même temps les limites de l'expression L.

De l'interprétation géométrique de l'expression L il ressort que $4L$ représente l'angle au sommet de la surface développée d'un cône elliptique droit. A la fin, l'auteur donne quelques valeurs spéciales de L.

Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

В. ПОПОВИЋ

О ЈЕДНОМ СТАВУ Н. ОБРЕШКОВА

Ако постоји $f^{(n-1)}(x)$ за свако x, тада из $f^{(n-1)}(x) \to \delta_1 (x \to +\infty)$ и из $f^{(n-1)}(x) \to \delta_2 (x \to -\infty)$ следи $f(x)/x^{n-1} \to \delta_1/(n-1)!$ $(x \to +\infty)$ и $f(x)/x^{n-1} \to \delta_2/(n-1)!$ $(x \to -\infty)$. Одавде следи један познати став Н. Обрешкова.

1. У овоме раду извешћемо просту везу између n пута диференцијабилне функције и граничних вредности њених извода. Затим ћемо показати да из те везе, егзистенције n-тог извода једне функције и одређеног понашање те функције у бесконачном, произлази да та функција може бити само полином одређеног степена.

У ту сврху навешћу, пре свега, један став Н. Обрешкова [1]. Тај став, чак и у нешто општијем облику, следи из једног става који сам извео из врло корисне, али и мало употребљаване теореме Штолца, која гласи:

Ако је функција $\Phi(x)$ реална и

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty ,$$

онда је

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\Phi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{\Phi'(x)}$$

под услов да граница на десној страни постоји.[1])

Овај став је општији од Лопиталовог утолико што не води рачуна о понашању функције $F(x)$. Уз то овај став не захтева непрекидност извода $F'(x)$ и $\Phi'(x)$.

Значај Штолцове теореме истакнут је нарочито у познатом Пероновом раду [2].

2. Поменути став Н. Обрешкова гласи:

Нека је $f(x)$ реална функција таква да је

$$f^{(n)}(x) \geqslant 0 \quad \text{за} \quad -\infty < x < +\infty . \qquad (1)$$

1) Штолцов став важи такође и тада кад је граница на десној страни у овом изразу ∞.

Претпоставимо да постоји низ y_λ, *неограничен са обе стране, тако да је*

$$\lim_{\lambda\to-\infty} y_\lambda = -\infty, \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} y_\lambda = +\infty$$

и цео број $m < n$ *такав да је*

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \frac{f(y_\lambda)}{y_\lambda^m} = 0. \tag{2}$$

Тада је функција $f(x)$ *полином степена* $\leqslant m-1$.

Ми ћемо доказати следећи став:

СТАВ 1. *Ако је* $f(x)$ *реална функција, и ако за свако* x *постоји* $f^{(n-1)}(x)$, *и ако постоје границе*

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(n-1)}(x) = \delta_1, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f^{(n-1)}(x) = \delta_2, \tag{4}$$

где δ_1 *и* δ_2 *не морају бити коначни, онда је*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{n-1}} = \frac{\delta_1}{(n-1)!}, \tag{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^{n-1}} = \frac{\delta_2}{(n-1)!}. \tag{6}$$

Из овог става следи непосредно наведени став Н. Обрешкова ако још узмемо у обзир услове (1) и (2); јер ако (5) и (6) напишемо сада у облику

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{(n-1)-m}} \cdot \frac{f(x)}{x^m} = \frac{\delta_1}{(n-1)!}, \tag{5a}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{(n-1)-m}} \cdot \frac{f(x)}{x^m} = \frac{\delta_2}{(n-1)!}, \tag{6a}$$

онда за $m \leqslant n-1$ из услова (2) следи, узимајући за $x = y_\lambda\ (\lambda\to\pm\infty)$, да је $\delta_1 = \delta_2 = 0$. С обзиром на (1), функција $f^{(n-1)}(x)$ монотоно расте за све x, и то, према (3) и (4), између граница δ_1 и δ_2.

Стога, из $\delta_1 = \delta_2 = 0$, тј. кад се границе поклопе, следи да је

$$f^{(n-1)}(x) = 0 \quad \text{за све } x,$$

одакле закључујемо да је функција $f(x)$ полином степена $\leqslant n-2$, тј. $\leqslant m-1$.

3. Доказ става 1. Из услова (3), по Штолцовој теореми следи да је

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f^{(n-1)}(x)\,dx}{\int_0^x 1\cdot dx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{(n-1)}(x)}{1}=\delta_1, \tag{7}$$

јер написани интеграли имају $f^{(n-1)}(x)$ и 1 као изводе по горњој граници x. Кад те интеграле израчунамо, из (7) добивамо да је:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{(n-2)}(x)-f^{(n-2)}(0)}{x}=\delta_1. \tag{8}$$

На исти начин, по Штолцовој теореми, из (8) следи

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x [f^{(n-2)}(x)-f^{(n-2)}(0)]\,dx}{\int_0^x x\,dx}=\delta_1,$$

тј.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{(n-3)}(x)-xf^{(n-2)}(0)-f^{(n-3)}(0)}{\frac{x^2}{2!}}=\delta_1.$$

Кад овај поступак применимо укупно $(n-1)$ пут добивамо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\left\{\frac{x^{(n-2)}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(0)+\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}f^{(n-3)}(0)+\ldots+xf'(0)+f(0)\right\}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}=\delta_1, \tag{9}$$

а одавде, како је израз у великој загради у (9) полином степена $(n-2)$, добивамо:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n-1}}=\frac{\delta_1}{(n-1)!}. \tag{10}$$

На аналоган начин, из услова (4) добивамо да је:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^{n-1}}=\frac{\delta_2}{(n-1)!}. \tag{11}$$

3.1. Из овог нашег става следи да став Н. Обрешкова можемо дати у нешта општијем облику:

Из услова (1) користимо само чињеницу да је функција $f^{(n-1)}(x)$ монотона; стога тај услов можемо заменити нешто општијим условом да је функција $f^{(n)}(x)$ монотона за $-\infty<x<+\infty$, што према ставовима повлачи егзистенцију n-тог извода $f^{(n)}(x)$ скоро свугде.

Број m не мора бити увек цео број.

У услову (2) десна страна може бити и константна различита од 0, тј. да је

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^m}=C.$$

Из једначина (5а) и (6а) следи да је функција $f(x)$:

α) полином степена $n-1$ за $C\neq 0$ и притом $m=n-1$;

β) полином степена $<n-1$ ако је или $C=0$ или $m<n-1$.

Уместо низа $\{y_\lambda\}_{-\infty}^{+\infty}$ можемо узете низ $\{y_\lambda\}_0^\infty$, али онда претпоставци $f^{(n)}(x)\geqslant 0$ морамо додати на пр.

$$f^{(n+1)}(x)\geqslant 0.$$

Тада функција $f^{(n-1)}(x)$ не само да је монотона, већ и конкавна, а ово је немогуће због услова

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(y_\lambda)}{y_\lambda^m}=0,$$

из којег следи, према претходном ставу, да је функција $f^{(n-1)}(x)$ конвексна.

Дакле:

$$f^{(n-1)}(x)\equiv 0 \quad \text{за све } x.$$

(Саопштено на седници Мат. инст. 31-III-1954)

ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Obrechkoff — Sur quelques propriétés des dérivées des fonctions d'une variable réelle. *Acta Sci. Math. Szeged* **XII** (B) (1950), стр. 231.

[2] O. Perron — Über einen Grenzwertsatz. *Math. Zeit.* **17** (1923), стр. 149.

SUR UN THÉORÈME DE N. OBRECHKOFF

par

V. Popović

Dans [1] N. Obrechkoff a donné le théorème suivant:

de (1) et de l'existence d'une suite à deux côtés $\{y_\lambda\}_{-\infty}^{+\infty}$, avec

$$\lim_{\lambda\to+\infty} y_\lambda = -\infty\,, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} y_\lambda = +\infty$$

et telle qu'on ait (2), avec un entier $m < n$, résulte que $f(x)$ est un polynome de degré $\leqslant m-1$.

On montre dans cet article que ce théorème est une conséquance de la proposition suivante:

de (3) et (4) résulte (5) et (6).

On obtient cette proposition aisément du théorème bien connu de l'Hospital-Stolz. De plus, on en déduit qu'on peut remplacer, dans la théorème de Obrechkoff, m par un nombre quelconque ($< n$), ou, par exemple, la condition (2) par la condition:

$$\{y_\lambda\}_0^\infty, \quad y_\lambda \to \infty, \quad \lambda \to \infty,$$

mais avec l'hypothèse supplémentaire

$$f^{(n+1)}(x) \geqslant 0\,.$$

Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

АНТОН БИЛИМОВИЋ

О ДЕВИЈАЦИОНОМ ЦЕНТРУ

У случају кретања чврстог тела око непомичне тачке, писац уводи појам вектора положаја девијационог центра оптерећеног девијационим оптерећењем; помоћу њега успоставља врло једноставну везу између тренутне угаоне брзине и главног момента количине кретања.

Садржај овог чланка се односи на неке појмове који стоје у вези са механиком чврстог тела. При томе је за третирање тих појмова довољно ако се зауставимо на специјалном случају кретања чврстог тела, наиме на обртању тог тела око непомичне тачке. У кинематици и динамици таквог кретања основну улогу играју два вектора: 1. тренутна угаона брзина обртања тела око непомичне тачке и 2. главни момент количина кретања у односу на исту тачку. Први вектор означимо са $\vec{\omega}$, други са $\vec{G}$.

Ако за осе чврсто везане са телом узмемо главне осе инерције за непомичну тачку O и координате вектора $\vec{\omega}$ означимо са p, q, r, координате вектора $\vec{G}$ имају вредности Ap, Bq, Cr, где су A, B, C главни моменти инерције. Према томе у изабраном систему координатних оса између координата вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{G}$ постоји врло једноставна веза. У општем случају произвољних оса вектор $\vec{G}$ је производ тензора инерције тела за тачку O и угаоне брзине $\vec{\omega}$.

Наведена једноставно изражена веза између координата вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{G}$ ипак не даје јасне геометриске повезаности та два вектора. Циљ ових редова је поставити непосредну геометриску везу између вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{G}$.

Ако са $\vec{r}_i$ означимо вектор положаја масе m_i тачке тела у односу на тачку O, а са $\vec{v}_i$ брзину те тачке, онда можемо написати

$$\vec{G} = \sum [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i],$$

где је збир проширен на све материјалне тачке тела. Заграде означавају векторски производ.

Како у нашем случају за чврсто тело имамо

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i],$$

добивамо ову вредност момента:

$$\vec{G} = \sum m_i\, [\vec{r}_i\, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]].$$

Раставимо сад вектор $\vec{r}_i$ у две компоненте: у правцу угаоне брзине $\vec{\omega}$ и у правцу нормалном на ту брзину. Прву компоненту означимо са $\vec{h}_i$, а другу са $\vec{d}_i$, тј. ставимо

$$\vec{r}_i = \vec{h}_i + \vec{d}_i .$$

Узимајући у обзир да је $[\vec{\omega}, \vec{h}_i] = 0$, $(\vec{\omega}, \vec{d}_i) = 0$, односно $(\vec{h}_i, \vec{d}_i) = 0$, где мале заграде означавају скаларни производ, можемо овако рачунати:

$$\vec{G} = \sum m_i\, [\vec{h}_i + \vec{d}_i, [\vec{\omega}, \vec{h}_i + \vec{d}_i]] =$$

$$= \sum m_i\, [\vec{h}_i + \vec{d}_i, [\vec{\omega}, \vec{d}_i]] =$$

$$= \vec{\omega} \sum m_i d_i^2 - \sum m_i (\vec{\omega}, \vec{h}_i)\, \vec{d}_i .$$

Како је $\sum m_i d_i^2$ момент инерције J_ω тела у односу на осу вектора ω и $(\vec{\omega}, \vec{h}_i) = \omega h_i$, где смо са h_i означили алгебарску вредност растојања тачке m_i од равни π која пролази кроз тачку O и стоји управно на правац $\vec{\omega}$, претходни рачун доводи до резултата

$$\vec{G} = J_\omega \vec{\omega} - \omega \sum m_i h_i \vec{d}_i . \tag{1}$$

Први члан написане разлике, који ћемо звати *инерциони део момента*, једнак је производу момента инерције тела око осе обртања и угаоне брзине као вектора. Други члан те разлике зваћемо *девијациони део момента*. Тај члан има вредност производа интензитета угаоне брзине ω и израза

$$\sum m_i h_i \vec{d}_i .$$

У том збиру вектор $\vec{d}_i$ можемо сматрати као вектор положаја у погледу на тачку O пројекције тачке тела са масом m_i

на раније наведену раван π, управну на $\vec{\omega}$. Сваки од ових вектора је оптерећен у збиру скаларом $m_i h_i$. Слично случају увођења центра маса можемо и овде збир претставити овако:

$$\sum m_i h_i \vec{d_i} = m h \vec{d_D}, \tag{2}$$

где смо ставили

$$m = \sum m_i, \quad m h = \sum m_i h_i.$$

Тачку D са вектором положаја $\vec{d_D}$ дефинисаним једначином (2) зваћемо *девијациони центар тела за дати правац* $\vec{\omega}$. Скалар mh је његово *девијационо оптерећење*. Према томе је вектор

$$m h \vec{d} = \vec{S_D}$$

вектор положаја девијационог центра оптерећен девијационим оптерећењем. Тај вектор има димензију производа масе и квадрата дужине. Тачка D се налази у равни π, а исто тако и крај вектора $\vec{S_D}$.

На тај начин моменту $\vec{G}$ можемо дати овај облик

$$\vec{G} = J_\omega \vec{\omega} - \vec{S_D}\,\omega, \tag{3}$$

при чему је

$$(\vec{S_D}, \vec{\omega}) = 0.$$

Приметимо да скаларни производ $\vec{G}$ и $\vec{\omega}$ даје

$$(\vec{G}, \vec{\omega}) = J_\omega\, \omega^2 = 2\,T,$$

где је T жива сила чврстог тела.

Није тешко израчунати координате вектора $\vec{S_D}$ у односу на главне осе тела за тачку O. Ако те координате означимо са x, y, z, имамо из (3), рецимо, за x:

$$x\,\omega = J_\omega\, p - A p,$$

одакле за x и слично за друге координате имамо

$$\begin{aligned} x &= (\quad * \quad - c v^2 + b w^2)\, u, \\ y &= (\ \ c u^2 \quad * \quad - a w^2)\, v, \\ z &= (- b u^2 + a v^2 \quad * \ )\, w, \end{aligned} \tag{4}$$

где су $u = p/\omega$, $v = q/\omega$, $w = r/\omega$ косинуси правца вектора $\vec{\omega}$.

Према томе је

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1 \tag{5}$$

и

$$a = B - C, \quad b = C - A, \quad c = A - B,$$

и на тај начин

(6) $$a + b + c = 0.$$

Према једначинама (4), сваком правцу (u, v, w) одговара једна тачка, крај вектора $\vec{S}_D$. Са променом тог правца ова тачка описује површину. Једначине (4) су параметарске једначине те површине са везом (5) између параметара u, v, w. Константе a, b, c задовољавају услов (6). Нисам проучавао у детаљима ту површину у општем случају. Да је у некој мери карактеришемо, узмимо на тој површини криву чије тачке одговарају правцу $\vec{\omega}$, који лежи у равни O_{yz}. За такве правце $u = 0$ и једначине (4) дају

$$x = 0, \quad y = -aw^2 v, \quad z = av^2 w;$$

према томе, наша крива у равни O_{yz} има једначину

$$(y^2 + z^2)^3 = a^2 y^2 z^2$$

из које у поларним координатама следује једначина

$$\rho = \frac{a}{2} \sin 2\varphi,$$

а она не претставља ништа друго већ познати четворолисник.

Било аналитички помоћу једначина (4), било геометриски помоћу тачке одговарајуће површине, можемо за сваки правац вектора $\vec{\omega}$ према обрасцу (3) конструисати, прво, инерциони, а затим и девијациони део момента $\vec{G}$. На тај начин образац (3) заиста утврђује врло једноставну геометриску везу између вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{G}$.

(Саопштено на седници Мат. инст. 16-VI-1954)

SUR LE CENTRE DE DÉVIATION

par

A. Bilimović

Entre les coordonnées du vecteur de la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ et du moment des quantités de mouvement $\vec{G}$ d'un corps solide on a une relation analytique simple. L'auteur établit une relation géométrique directe entre ces vecteurs, à savoir

$$\vec{G} = J_\omega \vec{\omega} - \omega \sum m_i h_i \vec{d}_i = J_\omega \vec{\omega} - \vec{S}_D \omega.$$

Au second membre de cette relation figurent les parties inertiale et déviationnelle du moment. La partie déviationnelle s'interprète en introduisant un point spécial, le centre de déviation pour une direction déterminée et avec une charge déviationnelle déterminée. Puis, l'auteur étudie les changements de positions du centre de déviation relatifs aux changements de directions du vecteur $\vec{\omega}$.

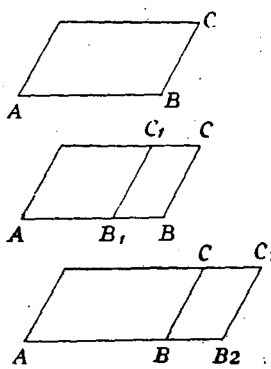
Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

АНТОН БИЛИМОВИЋ

О НЕКИМ СТАВОВИМА ШЕСТЕ КЊИГЕ ЕУКЛИДОВИХ ЕЛЕМЕНАТА

Писац анализира са историског гледишта теорему 27 и задатке 28, 29 и 30 из књиге шесте Еуклидових елемената.

Пета и шеста књига Еуклидових елемената посвећене су теорији пропорционалних дужи и површина. У петој књизи углавном је постављена општа теорија размера и пропорција и наведене су неке примене те теорије; теорија сличности и они геометриски ставови који се оснивају на тој теорији чине садржај шесте књиге. Шеста књига садржи пет дефиниција, двадесет три теореме и десет конструктивних задатака. Већина тих теорема и задатака је ушла у стандардну елементарну геометрију, а и сад улази и у најкраће уџбенике. Али има и таквих теорема које не улазе у обичан школски материјал. Има таквих теорема чији материјал не садржи битних нових елемената; ове теореме се лако могу укључити у вежбе из одговарајућег уобичајеног материјала. У ову категорију спадају, на пример, теореме о паралелограмима на дијагонали паралелограма. Али у шестој књизи постоји једна теорема и два конструктивна задатка, који не улазе у обичан курс, и још један уобичајен конструктивни задатак, који Еуклид решава на основу претходног неуобичајеног задатка. Пошто је тај неуобичајен материјал нарочито интересантан са историског гледишта у овим редовима вршим анализу неких особина тог материјала.



Сл. 1

Претходно ћемо навести неколико појмова, које Еуклид искоришћава у том материјалу, а који су сад испали из материјала школске геометрије.

Нека је дата дуж AB (сл. 1). У Еуклидовом тексту се каже да је неки паралелограм конструисан *на* дужи AB, и то без обзира на то да ли је страна паралелограма која лежи на правој дужи AB једнака, мања или већа од те дужи. Према томе су паралелограми AC, AC_1 и AC_2 *на* дужи AB.

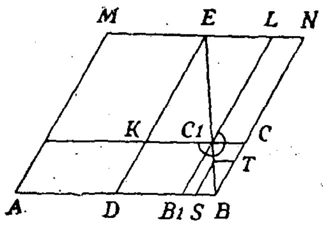
Ако је основица AB_1 паралелограма AC_1 мања од AB, паралелограм BC_1 на B_1B је ἐλλεῖπον (мањак) паралелограма AC_1 конструисаног на AB са страном AB_1. Другим речима, паралелограм BC_1 недостаје паралелограму AC_1 до паралелограма AC, паралелограм BC_1 служи као допуна паралелограму AC_1 до AC.

Ако је основица AB_2 паралелограма AC_2 већа од AB, паралелограм BC_2 је ὑπερβάλλον (сувишак) паралелограма AC_1 конструисаног на AB са страном AB_2.

Од та два назива постали су и називи елипсе и хиперболе.

Сад ћемо навести теорему која нас интересује:

ТЕОРЕМА 27. Од свих паралелограма тако конструисаних на датој дужи да им недостају паралелограми слични и у сличном положају са паралелограмом конструисаним на другој половини дужи онај је највећи који је конструисан на првој половини и сличан паралелограму који му недостаје.



Сл. 2

Нека је AB дата дуж (сл. 2), тачка D је средина AB и BE је паралелограм на DB. Треба доказати да је паралелограм AC_1 коме недостаје паралелограм BC_1, сличан и у сличном положају са паралелограмом BE, мањи од паралелограма AE који је сличан паралелограму BE.

Заиста, како је

$$\square AC_1 = \square AK + \square DC_1,$$

$$\square AE = \square AK + \square KM,$$

а

$$\square DC_1 = \square CL$$

и

$$\square CL < \square KM,$$

можемо закључити да је

$$\square AC_1 < \square DM.$$

Сем тога је очигледно да је паралелограм AE сличан паралелограму BE.

Овај став Еуклидове шесте књиге је једини став, који се односи на проблем екстремума једне промењљиве величине. Али без обзира на то што у овом ставу очевидно фигурише једна промењљива величина у вези са померањем тачке C_1 по дужи BE, ни у Еуклидовом формулисању ове теореме ни у доказу нема ни трага о појму промењљивости, што нам сад изгледа невероватно, а још мање о функционалној вези између промењљивих. Ова теорема јасно наглашује нарочиту особину Еуклидове геометрије као геометрије смрзнутих облика и константних величина.

Приметимо да се Еуклидов доказ ове теореме оснива на једнакости површине паралелограма AC_1 са површином гномона $C_1KDBNLC_1$ кратко означеног на слици помоћу кружног лука. Са функционалног гледишта је јасно да је површина гномона највећа кад се тачка C_1 поклопи са тачком E.

У вези са наведеном теоремом стоје ови задаци.

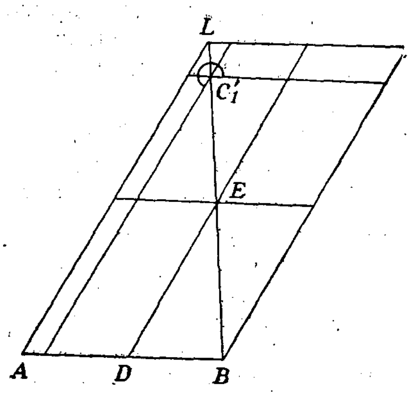
Задатак 28. На датој дужи конструисати такав паралелограм, једнак датој праволиниској слици, да паралелограм који му недостаје буде сличан датом паралелограму; при томе је неопходно да дата праволиниска слика (којој треба конструисати једнаки паралелограм) не буде већа од паралелограма конструисаног на половини дате дужи и сличног паралелограму који му недостаје.

Према томе, на дужи AB (сл. 2) треба конструисати паралелограм AC_1, једнак датој праволиниској слици, рецимо, P, тако да паралелограм BC_1 који недостаје паралелограму AC_1 буде сличан датом паралелограму, рецимо, Q.

Еуклидов поступак при решавању овог задатка углавном је овај.

На DB, као на страни, конструише се паралелограм BE сличан датом паралелограму $Q = ST$. Тиме се одређује и површина R паралелограма BE. Како је на слици означени гномон једнак паралелограму AC_1, чија је површина једнака површини P дате праволиниске слике, позната је и разлика тих површина $R - P$: међутим је та површина једнака површини паралелограма C_1E. Према томе је за одређивање положаја тачке C_1 потребно конструисати код тачке E паралелограм EC_1 једнак датој површини $R - P$ и сличан датом паралелограму Q, а то је решено у задатку 25 исте шесте књиге. Тако се одређује тачка C_1 и тражени паралелограм AC_1.

Како Еуклид не искоришћава промењљиве величине и функционалне везе, одмах се показује резултат тога. Чак и у овом врло једноставном задатку Еуклид је показао да кад се не узме у обзир област промењљивости третираних величина лако се долази до грубог пропуста у решењу проблема. Заиста, ако је површина P дате праволиниске слике мања од површине R парараналелограма AE, онда при кретању тачке C_1 од B у правцу тачке E површина паралелограма AC_1 прво расте од нуле до R и према томе пролази кроз тражену вредност $P < R$. Имамо тачку C_1 на дужи BE, која одговара првом решењу проблему. Ако сад тачка C_1 продужи своје кретање у правцу продужења дијагонале BE,



Сл. 3

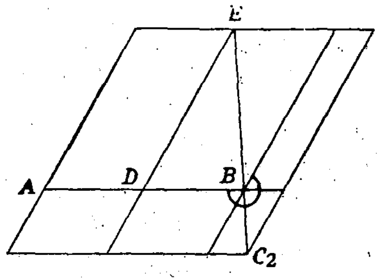
површина одговарајућег паралелограма почне да опада и на том продужењу постоји тачка C'_1 (сл. 3) за коју поново паралелограм

AC'_1 има дату вредност $P < R$. Ова тачка C'_1 одговара другом решењу истог проблема. Конструкција те тачке се врши из услова да је површина паралелограма EC'_1 позната. Заиста, та површина је једнака разлици $R - P$ површине EL и површине означеног гномона која је једнака датој површини P.

Наредни Еуклидов задатак је аналоган претходном задатку и одговара случају кад је дата површина P већа од R. Задатак гласи.

Задатак 29. На датој дужи конструисати паралелограм са сувишком сличним датом паралелограму, а једнак датој праволиниској слици.

При решавању овог задатка улогу паралелограма EC_1 односно EC'_1 претходног задатка игра паралелограм EC_2 (сл. 4). Површина тог паралелограма једнака је збиру површине R паралелограма BE и површине означеног гномона; а површина тог гномона је једнака датој површини P. Конструкција паралелограма EC_2 код тачке E се врши на исти начин као и у претходном задатку. Паралелограм BC_2 игра улогу сувишка за паралелограм конструисан са страном AB.



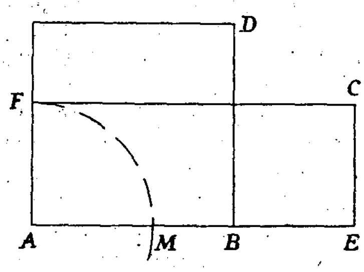
Сл. 4

Друго решење тог задатка се своди, како се то лако утврђује аналитички, на конструкцију истог сувишка BC_2 са леве стране од тачке A.

Природно је поставити питање: зашто је Еуклиду била потребна наведена теорема и ова два задатка, који се сами по себи могу сматрати као другостепени.

Непосредни одговор на ово питање, с једне стране, даје наредни задатак.

Задатак 30. Дату ограничену праву (дуж) поделити у крајњој и средњој размери (тј. непрекидно).



Сл. 5

Еуклид решава овај задатак овако. На основу претходног задатка на датој дужи $AB = a$ конструише се правоугаоник AC (сл. 5) једнак квадрату AD са сувишком BC исто тако у облику квадрата.

Ако страну квадрата сувишка означимо са x, тада из једнакости површина BC и FD имамо

$$x^2 = a(a - x),$$

одакле следује

$$a : x = x : (a - x)$$

и према томе тачка M (са $AM = AF = x$) дели дуж непрекидно.

Са друге стране, треба обратити пажњу на то да и наведена теорема и три конструктивна задатка стоје у вези са функционалним везама, које се изражавају квадратном једначином. Конструктивни задаци служе у суштини као графичка метода за решавање квадратне једначине. Не располажући апаратом једначина Еуклид је ипак разумео природу постављених задатака и, као и његови претходници, оценио, можда и недовољно свесно, те задатке као важан математички апарат и издвојио их на крају своје планиметрије која се завршава у шестој књизи Елемената.

(Саопштено на седници Мат. инст. 24-XI-1954)

SUR QUELQUES PROPOSITIONS DU SIXIÈME LIVRE D'ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

par

Anton Bilimović

Dans la présente note l'auteur analyse, d'abord, le Théorème 27 du sixième livre d'Éléments d'Euclide qui est ainsi énoncé:

De tous les parallélogrammes, construits sur une partie de droite donnée et amoindris des parallélogrammes semblables et semblablement situés sur l'autre partie du segment, le plus grand est celui qui est construit sur la première et semblable au parallélogramme dont il est amoindri.

Puis, il analyse les problèmes de construction se rattachant au théorème précédent.

Dans le théorème cité Euclide cherche à résoudre un problème des extrema, mais comme le montre l'analyse, n'y parvient pas complètement, ne disposant pas de l'appareil mathématique approprié. L'importance de ces problèmes est à chercher dans leur lien avec les méthodes géometriques qu'Euclide applique pour résoudre certaines équations du second degré.

Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

М. ТОМИЋ

ПРИМЕДБА О НУЛАМА ЈЕДНЕ КЛАСЕ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦИЈА

Показано је у три става, да уз извесне услове о половима и коефицијентима, мероморфна функција (1) нема комплексних нула.

1. У овом раду даћемо три става која се односе на распоред нула оне класе мероморфних функција $f(z)$ која допушта развијање (на основу познатог Mittag-Leffler-овог става) облика

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{A_n}{z-a_n}+\lambda_n\right), \tag{1}$$

и где бројеви A_n, λ_n и a_n задовољавају низ услова. Ставови о којима је реч тврде, да под извесним условима о A_n, λ_n и a_n, *мероморфна функција* (1) *или нема уопште комплексних нула, или нема комплексних нула са позитивним реалним делом.* За доказ сличних ставова у литератури користе се различити помоћни ставови. Тако, например, код доказа прве групе ставова, на низ рационалних функција

$$f_k(z)=\sum_{n=-k}^{k}\left(\frac{A_n}{z-a_n}+\lambda_n\right)$$

примењује се класичан Hurwitz-ов став [1]: ако у области G z-равни низ рационалних функција

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_k(z), \ldots$$

има за униформну границу функцију $f(z)$, тада су нуле од $f(z)$ тачке нагомилавања нула низа функција $f_k(z)$.

Циљ овога рада је да да једноставан геометриски доказ неких ставова о распореду нула мероморфних функција облика (1), *не користећи никакве помоћне ставове.* На тај начин добива се и прост доказ за низ познатих резултата, који су садржани у овим ставовима. Докази се оснивају на елементарним својствима трансформације $1/z$.

2. СТАВ 1. *Нека је*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{A_n}{z-a_n}+\lambda_n\right), \tag{1}$$

где су A_n, a_n *и* λ_n *реални бројеви такви да је*

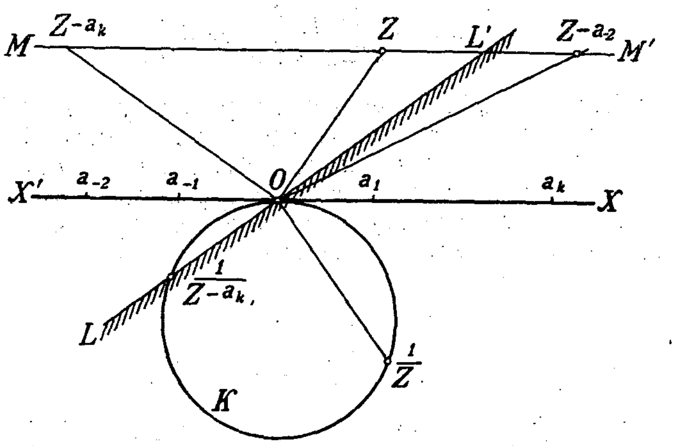
(i) $\ldots a_{-2}\leqslant a_{-1}\leqslant a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots$

(ii) $A_i>0,\quad i=k-1,\ k-2,\ k-3,\ldots$
$A_l<0,\quad l=k,\ k+1,\ k+2,\ldots$

(iii) $\lambda_n\geqslant 0,\quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ldots$

Тада (1) *нема комплексних нула.*[1]

Доказ. Доказаћемо да је $f(z)\neq 0$ за свако z за које је $\arg z\neq 0 \pmod{\pi}$. Нека је z макакав комплексан број у горњој полуравни ($0<\arg z<\pi$). Због (i) бројеви $(z-a_n)$ ($n=0, \pm 1, \pm 2,\ldots$) налазе се на правој MM' паралелној са реалном осом на отстојању $\Im z$ (сл. 1), а уређени су по индексима бројева a_ν.



Сл. 1

Комплексни бројеви $1/(z-a_n)$ добивају се једном инверзијом из $(z-a_n)$ и затим једним огледањем на реалној оси тако добивених тачака. Како се тачке $(z-a_n)$ налазе на правој MM', то се ова права трансформацијом $1/z$ пресликава у круг K. Комплексни бројеви $1/(z-a_n)$ су тачке периферије круга K. Ти бројеви

[1]) У [2] (II, стр. 41, задатак 26) доказан је сличан став за мероморфну функцију $\sum_{k=1}^{n} A_k/(z-a_k)$. Доказ тамо наведен не може се применити у случају бесконачно много полова који се овде третира.

помножени са $A_i > 0$ ($i = k-1, k-2, k-3, \ldots$) остају на зрацима који полазе из O, тј. леже у углу xOL, али ни један не лежи на OL за свако коначно a_i[2]). Бројеви $1/(z-a_l)$ помножени са $A_l < 0$ ($l = k, k+1, k+2, \ldots$) падају сви у угао xOL' (и сем $1/(z-a_k)$) ни један други не лежи на OL'. Према томе, сви комплексни бројеви $A_i/(z-a_i)$ налазе се десно, тј. с једне стране праве LL'. Због (iii) $[A_n/(z-a_n)+\lambda_n]$ лежи такође у полуравни десно од LL', и зато њихов збир никад не може бити нула, ако је макар и једно $A_n \neq 0$ и a_n коначно. Из симетрије следи исти закључак, ако је z у доњој полуравни ($\pi < \arc z < 2\pi$).

2.1. ПРИМЕНА. *Функција*

$$\operatorname{cotg} z - \frac{1}{cz}, \quad c \geqslant 1$$

нема комплексних нула [1].

У овом случају $f(z)$ из става 1, на основу познатог развитка функција $\operatorname{cotg} z$ узима облик

$$\cdots + \frac{1}{z+2\pi} + \frac{1}{z+\pi} + \frac{1-1/c}{z} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z-2\pi} + \cdots,$$

па су очевидно сви услови става 1 испуњени.

Специјално, *једначина*,

$$\operatorname{tg} z - z = 0$$

има само реалне корене [2] (II, стр. 69).

2.2. ПРИМЕДБА. Претходна расматрања могу се проширити и на инверзију у простору, где место праве MM' долази раван паралелна са xOy — равни. Она се инверзијом пресликава у куглу, која пролази кроз почетак. Огледањем на равни xOy, добивамо понова куглу која додирује раван xOy у координатном почетку. Добива се тако аналогон става 1 за мероморфну функцију кватерниона.

3. СТАВ 2. *Мероморфна функција*

$$\cdots + \frac{A_2}{z+a_2} + \frac{A_1}{z+a_1} - \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-a_1} + \frac{A_2}{z-a_2} + \cdots, \tag{2}$$

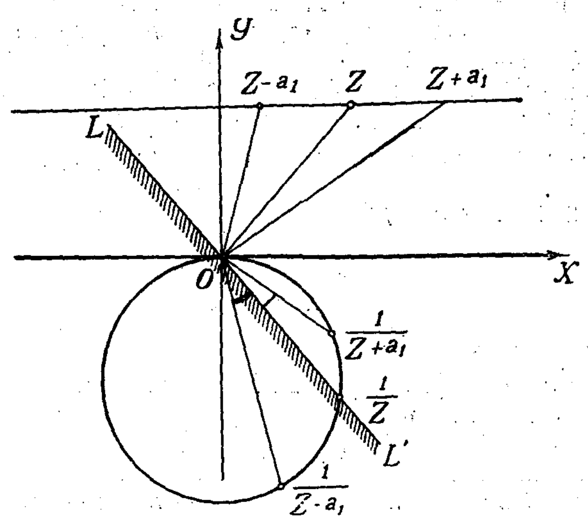
где је $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$, A_i *позитивни и такви да је* $A_0 > A_i$, $i = 1, 2, \ldots$, *нема комплексних нула изузев чисто имагинарних.*

---

[2]) Права OL је одређена тако да на њој лежи $1/(z-a_k)$, са оним индексом k, за који је $A_l < 0$, $l = k$, $k+1$, $k+2, \ldots$

Доказ. Узећемо да је z у квадранту xOy (сл. 2). Остала три случаја следе из симетрије

Како је $A_i < A_0$ и угао $(1/(z+a_1), O, 1/z)$ мањи од угла $(1/z, O, 1/(z-a_1))$, то из простих планиметриских особина следи



Сл. 2

да вектор $A_1\ [1/(z-a_1)+1/(z+a_1)]$ не може да дође до праве OL', на којој лежи вектор A_0/z. Исто следи и за све остале збирове $A_2\ [1/(z-a_2)+1/(z+a_2)]\ldots$; другим речима збир

$$2z \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{A_n}{z^2-a_n^2}$$

(где $'$ означава да у збиру нема члана са индексом $n=0$), лежи лево од LL' (сл. 2). Вектор $-A_0/z$ лежи на OL; отуда следи да (2) никад није нула докле год се z налази у квадранту xOy (и не лежи на Ox ни на Oy).

3.1. ПРИМЕНА. Посматраћемо целу парну функцију $F(z)$ која задовољава услове

(3) $$F(0) > |F(k\pi)|,$$

и

(4) $$F[2(m+1)\pi] < 0, \quad F(2m\pi) > 0,$$

и која допушта развитак

(5) $$\frac{F(z)}{\sin z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n F(n\pi)}{z-n\pi}, \text{ [2] (I, стр. 117).}$$

Применом става 2 следи да $F(z)$ може да има само реалне или чисто имагинарне нуле.

Специјално, *ако $f(t)$ има први и други извод $f(t)>0$, $f'(t)<0$, $f''(t)\leqslant 0$, $0\leqslant t\leqslant 1$, тада цела парна функција*

$$F(z)=\int_0^1 f(t)\cos zt\,dt \tag{6}$$

има само реалне нуле [2] (II, стр. 69).

Овде је

$$F[(2m-1)\pi]>0, \quad F(2m\pi)<0,$$

и затим је

$$\frac{F(z)}{\sin z}=\cdots-\frac{F(-\pi)}{z+\pi}+\frac{F(0)}{z}+\frac{F(\pi)}{z-\pi}-\frac{F(2\pi)}{z-2\pi}-\cdots.$$

Очевидно у овом случају је

$$A_0=F(0)>F(k\pi)=A_k,$$

одакле следи према ставу 2, да нуле могу бити само реалне или чисто имагинарне. Међутим из (6) следи да ни ово последње није могуће ([2] II, стр. 259).

4. СТАВ 3. *Мероморфна функција облика*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{A_n}{z-a_n}+\lambda_n\right), \tag{1}$$

где је $A_n\geqslant 0$ и $\lambda_n\geqslant 0$, и где се сви полови a_n налазе на једној правој која није паралелна са реалном осом нема нула у полуравни десно од ове праве.

Доказ. Нека се, например, сви полови a_n налазе на правој AA' (сл. 3) и нека је z у десној полуравни ове праве.

Тада се тачке $(z-a_k)$ налазе на правој BB'. Инверзијом на јединичном кругу E, права BB' прелази у круг K, који има за тангенту у почетку праву TT_1, паралелну са правом AA' на којој су полови. Огледањем на реалној оси, круг K прелази у K', а права TT_1 у $T'T'_1$. Ова последња права је тангента на круг K' у O. Одатле следи тврђење, будући да је $\lambda_n>0$, тако да се сваки члан у збиру (1) налази десно од $T'T'_1$.

4.1. ПРИМЕНА. У [3] H. Goldenberg је показао да корени трансцендентне једначине

$$\coth z=\frac{c}{z}-b, \quad c<1, \quad b>0 \tag{7}$$

немају позитиван реални део.

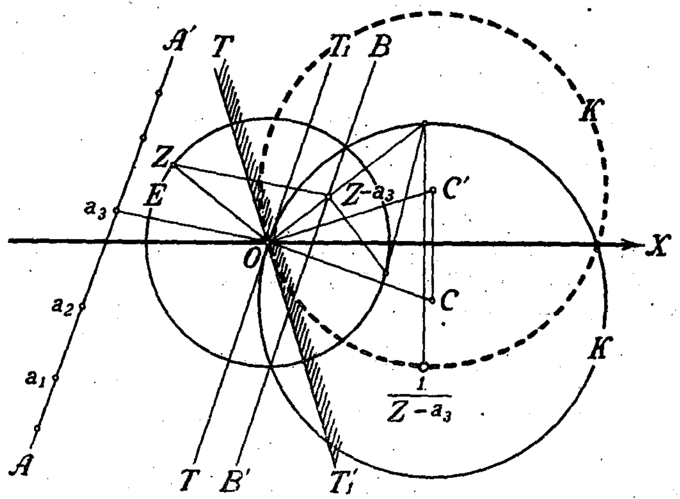
Водећи рачуна о

$$\coth z = \frac{1}{z} + 2z\left(\frac{1}{\pi^2+z^2} + \frac{1}{4\pi^2+z^2} + \cdots\right),$$

следи да се (7) може написати у облику

$$\cdots \frac{1}{z-2\pi i} + \frac{1}{z-\pi i} + \frac{1-c}{z} + \frac{1}{z-\pi i} + \frac{1}{z+2\pi i} + \cdots + b = 0,$$

па се види да се сви полови налазе на имагинарној оси. У овом случају је даље $A_n > 0$ и $\lambda_n = b > 0$, па се може применити став 3. Права $T'T'_1$ прелази у имагинарну осу, а K' је сада круг који



Сл. 3

додирује имагинарну осу у почетку и чији је центар на реалној оси. Одатле следи одмах тврђење (сл. 4), ако се води рачуна о чињеницама $b > 0$, $1 - c > 0$, тако да су сви комплексни бројеви у последњем збиру десно од имагинарне осе.

4.2. Претходни став 3, односно његова примена наведена у **4.1.** може се употребити и у низу проблема, где се траже услови да трансцендентна једначина облика

$$e^z = \frac{az+b}{cz+d},$$

нема комплексних нула са позитивним реалним делом. Тако, например, стављајући у

$$\frac{e^z+1}{e^z-1} = \coth\frac{z}{2} = \frac{pz+q}{rz+s}, \tag{8}$$

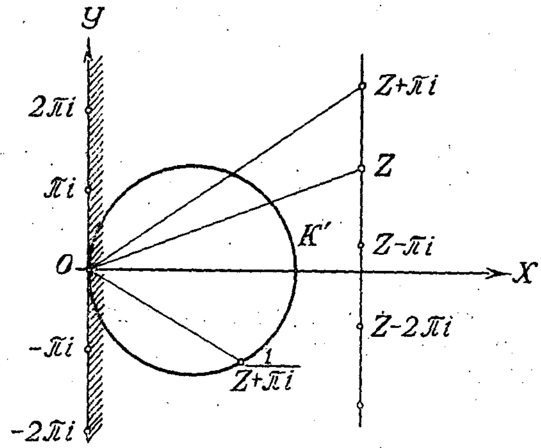
$$p = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{1}{2} \quad s = -\frac{1}{2}(a_1+a_2), \quad q = \frac{1}{2}(a_1-a_2),$$

добива се

$$\tau(z) \equiv z\,e^z - a_1\,e^z - a_2 = 0. \tag{9}$$

(9) се може, због (8), написати као

$$\coth\frac{z}{2} + \frac{z-(a_1-a_2)}{z-(a_1+a_2)} = 0. \tag{8'}$$



Сл. 4

Како је према претходном примеру (4. 1, сл. 4)

$$\Re\left\{\coth\frac{z}{2}\right\} > 0 \quad \text{за} \quad \Re\left\{\frac{z}{2}\right\} > 0,$$

то једначина (8′) сигурно нема нула са позитивним реалним делом ако је још

$$\Re\left\{\frac{z-(a_1-a_2)}{z-(a_1+a_2)}\right\} \geqslant 0,$$

тј. ако је

$$[x - \Re(a_1)]^2 + [y - \Re(a_2)]^2 - \Re^2(a_2) - \Im^2(a_2) \geqslant 0.$$

Ово је очевидно испуњено за свако $\Re(z) > 0$, ако је

$$\Re(a_1) < 0$$

и

$$|a_2|^2 < \Re^2(a_1), \tag{10}$$

а ово је један познати резултат [4], добивен на други начин, употребом јачих аналитичких средстава.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. A. Hurwitz — Über die Wurzeln einiger transzendenten Gleichungen. *Mitteilungen der math. Gesell. in Hamburg* **2** (1890) 25—31 — Math. Werke, Basel 1932, str. 299.

[2] G. Pólya und G. Szegö — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis Bd. I, II. Berlin 1925.

[3] H. Goldenberg: — Complex roots of a transcendental equation. *Math. Gazette.* **38** (1954), str. 161.

[4] S. Sherman — On the roots of a transcendental equation. *Journal. London Math. Soc.* 27 (3) (1952), str. 364.

REMARQUE SUR LES ZÉROS D'UNE CLASSE DES FONCTIONS MÉROMORPHES

par

M. Tomić

Le but de cette note est de donner, en s'appuyant sur des propriétés élémentaires de la transformation réciproque $1/z$ et n'utilisant aucun autre moyen analytique (tel que le théorème classique de Hurwitz [1], p. 25—31, etc) une démonstration géométrique des propositions suivantes.

THÉORÈME 1. *La fonction méromorphe* (1), *où* A_n, a_n *et* λ_n *satisfont aux conditions* (i) – (iii), *n'a pas de zéros complexes.*

Application. La fonction $\operatorname{cotg} z - 1/cz$ $(c>1)$ n'a pas de zéro complexes [1].

THÉORÈME 2. *La fonction méromorphe* (2), *où* a_i *et* A_i *satisfont aux conditions* $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$; $0 < A_i < A_0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, *n'a pas de zéros complexes, à l'exception des zéros pures imaginaires.*

Application. [2] T. II, p. 69, problème № 173 e. t. c.

THÉORÈME 3. *La fonction méromorphe* (1), *avec* $A_n \geqslant 0$ *et* $\lambda_n \geqslant 0$, *et dont tous les poles* a_n *se trouvent sur une droîte* AA', *qui n'est pas parallèle à l'axe réel n'a pas de zéros dans le demi-plan à droite de* AA' (fig. 3).

Application. a) L'équation (7) ([3] p. 161) n'a pas de zéros avec la partie réelle positive. b) On a la même conclusion pour l'équation (9) si les conditions (10) sont remplies ([4] p. 364.)

Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

Б. СТАНКОВИЋ

О ЈЕДНОЈ КЛАСИ СИНГУЛАРНИХ ИНТЕГРАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

— ТЕЗА —

УВОД

1. Теорија интегралних једначина претставља релативно младу грану Математичке анализе. Истина, сматра се да је прву интегралну једначину решио још Abel 1826 године, али њихово систематско испитивање започело је тек радовима V. Volterra 1896 године и Fredholm-а 1900 године. Иако су ова два математичара радила на различитим класама једначина, које су по њима добиле и име, идеје су им у суштини исте. Почев од 1904 године Hilbert је у низу радова, заједно са својим ученицима, од којих су свакако најзначајнији E. Schmidt и H. Weyl, разрадио теорију интегралих једначина са симетричним језгрима. Ова имена су свакако најзначајнија у класичној теорији интегралних једначина. Даљи корак био је увођење Lebesgue-ова интеграла који омогућава да се у оквиру једне одређене класе функција поједноставе докази и реше још извесна питања која су остала отворена.

Оне интегралне једначине које се не покоравају условима класичне теорије називају се сингуларне. Треба напоменути да се у литератури, понекад, под сингуларном интегралном једначином подразумева једна много ужа класа интегралних једначина, наиме, код које се интеграл јавља као Cauchy-ева главна вредност. На тим једначинама данас највише раде совјетски математичари. Према томе, да би било јасно, сингуларност има напред наведени смисао, а интеграли су у смислу Riemann-а.

Теориска разрада интегралних трансформација која је истовремено дала и теориску основу симболичком рачуну, омогућила је да се ове трансформације употребе за решавање најразноврснијих проблема математичке анализе, па и за решавање интегралних једначина. У пракси највише употребљавана, у различитим видовима, је свакако Laplace-ова и Fourier-ова трансформација. Оне омогућују не само да се добију сама решења, већ се може дискутовати и проблем јединствености и егзистенције.

Нас ће овде интересовати Laplace-ова трансформација. Низ појединачних случајева различитих интегралних једначина решавано је помоћу Laplace-ове трансформације, било чисто формално, симболичким рачуном, било да је вршена квалитативна интеграција. Али постоје и читаве класе интегралних једначина које се могу решавати Laplace-овом трансформацијом. Најпознатији облик такве интегралне једначине је свакако онај када се у њој јавља композиција облика

$$\int_0^x K(x-\tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\tau)\, f(\tau)\, d\tau .$$

Таква интегрална једначина може се свести на обичну алгебарску. Методу за решавање ове последње једначине разрадио је Doetsch [5, c] употпуњујући резултате Bochner-а [4].

Исто тако је у литератури позната Wiener-Hopf-ова [20] метода за решавање хомогене интегралне једначине

$$f(x) = \lambda \int_0^{\infty} K(x-\tau)\, f(\tau)\, d\tau ,$$

која претпоставља да $K(x)$ тежи нули експоненцијалном брзином, када се x увећава по апсолутној вредности.

Најзад M. Parodi је у низу радова које је објединио касније у једну монографију [15], користећи се симболичким рачуном, сводио извесне интегралне једначине на функционалне и на тај начин неке и решио. Истина, симболички рачун не води рачуна о прецизности, тј. не даје услове под којима све то важи, али свакако ти његови радови претстављају допринос теорији интегралних једначина. Забележимо још да Э. Я. Риекстыньш [17] напомиње сличне резултате А. М. Эфрос-а [6]; до ове књиге нисам могао да дођем.

М. Parodi је покушао да уведе и извесну систематичност, наиме, да укаже на класе интегралних једначина које се могу на овај начин интегралити. Он посматра интегралну једначину

$$f(x) + \lambda \int_0^\infty K(x, t)\, f(t)\, dt = g(x), \tag{У, 1}$$

где $k(x, t)$ има особине да је

$$\int_0^\infty e^{-sx} K(x, t)\, dx = \rho(s)\, e^{-t\psi(s)}. \tag{У, 2}$$

Ова се једначина, под извесним допунским условима, Laplace-овом трансформацијом своди на функционалну

$$\varphi(s) + \lambda \rho(s) \varphi[\psi(s)] = \gamma(s), \tag{У, 3}$$

где су $\varphi(s)$ и $\gamma(s)$ Laplace-ове трансформације функције $f(x)$ односно $g(x)$. Али М. Parodi решава, углавном, оне случајеве када је $\psi[\psi(s)] = s$, тј. када итерација функције $\psi(s)$ даје аргуменат s и даље проширује на случајеве када k-та итерација функције $\psi(s)$ даје аргуменат s.

Он је такође покушао да да и аналитички израз за језгро $K(x, t)$ које задовољава интегралну једначину (У, 2). Ти његови резултати могли би се уобличити у следећи став:

СТАВ А. *Нека су задовољени следећи услови:*

1. $a(x)$ и $b(x)$ *су* L-*функције* *)

2. *Ред*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} t^i\, a(x) * \overline{b(x)}^i,$$

где је

$$a(x) * b(x) = \int_0^x a(x - \tau)\, b(\tau)\, d\tau,$$

$$a(x) * \overline{b(x)}^i = a(x) * \underbrace{b(x) * b(x) \dots * b(x)}_{i \text{ пута}},$$

конвергира и може се трансформисати Laplace-овом трансформацијом члан по члан.

*) Види дефиницију L-функције G. Doetsch-a [5a].

3. $\rho(s)$ *и* $\psi(s)$ *везане су са* $a(x)$ *и* $b(x)$ *релацијама*

$$\rho(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, a(t)\, dt;$$

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, b(t)\, dt.$$

Тада је

$$K(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\, t^i\, a(x) * \overline{b(x)}^i \qquad (У, 4)$$

решење, и то једино, интегралне једначине (У, 2).

Услов 3. овог става прави велико ограничење, пошто захтева да $\rho(s)$ и $\psi(s)$ буду l-функције*), тако да и неке једначине које сам расправља нису обухваћене овим ставом.

Према томе, ту постоје два проблема. Први, како изгледа језгро интегралне једначине (У, 1) која допушта ову методу. Тај проблем је интересантан како са становишта теорије интегралних једначина тако и са становишта Laplace-ове трансформације. Други проблем, решити такву интегралну једначину.

У овом раду решавана су оба питања углавном за једну одређену класу интегралних једначина.

2. Прва глава овог рада односи се на први проблем, наиме, у њој се расправља један специјалан случај једначина (У, 2), када су $\rho(s)$ и $\psi(s)$ степени од s, тј. једначина

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, K(x, t)\, dt = s^{\mu}\, e^{-ts^{\nu}} \qquad (У, 5)$$

Показано је за које μ и ν ова једначина има решење у класи L-функција, решења су дата помоћу Wright-овог уопштења Bessel-ових функција и најзад из самог облика једначине (У, 5) следи и услов јединствености тог решења. Осим тога испитиване су, колико је потребно за даљи рад, и извесне особине решења једначине (У, 5), а која се односе на понашање у нули и за велике вредности аргумента, о нулама тих функција и неки одређени интеграли у којима фигуришу та решења. Нађене особине претстављају извесно проширење резултата H. Pollard-a, J. Mikusinskog и L. Wlodarskog.

*) Види дефиницију l-функције G. Doetsch-а [5a].

У другој глави дефинисана је извесна интегрална трансформација чије је језгро функција која задовољава интегралну једначину (У, 5) $o < \nu < 1$. Затим су дати ставови који се односе на конвергенцију, Laplace-ову трансформацију овако дефинисане интегралне трансформације као и ставови Abel-ове и Tauber-ове природе.

Користећи се методом M. Parodi-a, да се интегрална једначина сведе Laplace-овом трансформацијом на функционалну једначину, као и резултатима прве и друге главе, у трећој глави решава се једна класа хомогених интегралних једначина која не спада у оне које решавао M. Parodi, наиме код којих се итерацијом не може добити агрументат s.

За ову класу интегралних једначина показано је да је спектар сопствених вредности континуиран, дати су услови егзистенције и јединствености решења, када ова припадају одређеној класи функција. Најзад, дата су и сама решења. Осим тога, у овој глави дато је и опште решење једног специјалног случаја Schröder-ове функционалне једначине, наиме једначине

$$\varphi(s) = \lambda \varphi(s^n),$$

на коју се своди посматрана хомогена интегрална једначина.

У четвртој глави дате су примене добивених резултата: прво, решен је један проблем из провођења топлоте, дате су неке интегралне везе за Wright-ове функције и најзад дата је и допуна за таблицу Laplace-ове трансформације.

На крају, у петој глави, изнесене су функције које претстављају Wright-ову генерализацију Bessel-ових функција као и основни резултати о функцијама које се правилно понашају. Ова глава треба да омогући лакше читање претходних.

I. РЕШЕЊЕ ИНТЕГРАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

$$\int_0^\infty e^{-sx} K_{\mu,\nu}(x,t)\, dx = s^{\mu} e^{-ts^{\nu}} \tag{1,1}$$

1.1. У уводу смо видели да се као први проблем поставља: решити интегралну једначину (У,2). Напоменули смо да је тај проблем захватио и M. Parodi, али да је то он радио чисто симболичким рачуном, да су претпоставке сувише јаке и најзад да је аналитички израз за решење непогодан у том смислу што се из њега тешко види веза са елементарним или већ познатим функцијама.

У овој глави расправљаћемо интегралну једначину (1,1) која претставља специјалан случај једначине (У, 2), наиме када су $\rho(s)$ и $\psi(s)$ степени од s и доказаћемо следећи став:

СТАВ 1.I. *Интегрална једначина (1,1) има решења у класи L-функција само за* $0 < \nu < 1$, *а* μ *макакво или* $\nu \leqslant 0$, $\mu < 0$. *Једино решење за те вредности* ν *и* μ *је:*

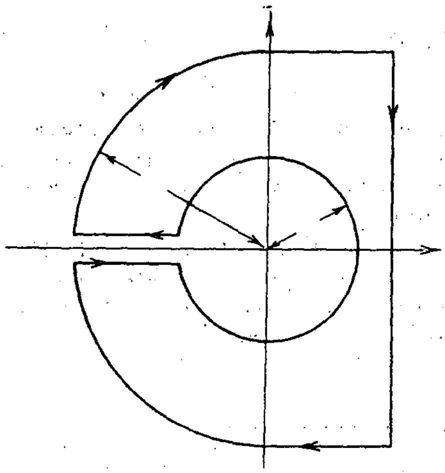
$$K_{\mu,\nu}(x,t) = x^{-\mu-1}\,\Phi(-\mu, -\nu; -tx^{-\nu}),$$

где је $\Phi(\beta, \rho; z)$ *Wright-ова генерализација Bessel-ове функције.*

Решења интегралне једначине (1,1) везана су, како се види, са Wright-овом генерализацијом Bessel-ових функција. Због тога смо у посебној глави (пета глава) изнели резултате о овим функцијама, па ћемо се у даљем раду на њих позивати.

Напоменимо да ћемо у даљем раду под s^ν сматрати само главну врдност.

Доказ става 1,I. Познато је, на основу понашања l-функције за велике вредности s, да мора бити $\nu < 1$. Из истог разлога када је $\nu \leqslant 0$, мора да је и $\mu < 0$. Према томе, интегрална једначина (1,1) може имати решење у класи L-функција само за $-\infty < \nu < 1$.



Цртеж 1

Да би дошли и до самог решења једначине (1,1), пођимо од интеграла

$$\int_C s^\mu \exp(xs - s^\nu)\, ds = 0, \qquad (1,2)$$

где је C контура са цртежа 1. Параметри μ и ν који улазе у овај интегаал могу узимати следеће вредности:

1. $0 < \nu < 1$, а μ макакво,
2. $\nu < 0$ и $\mu < 0$.

Интеграл (1,2) једнак је нули, пошто је подинтегрална функција регуларна у области коју затвара контура. Сем тога, подинтегрална функција на горњој и доњој четвртини круга тежи нули када $R \to \infty$, тј.

$$\lim_{R\to\infty} R^\mu e^{\mu\theta i} e^{xRe^{\theta i} - R^\nu e^{\nu\theta i}} \to 0,$$

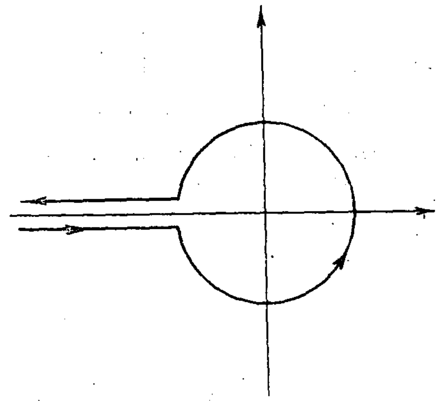
а исто тако је и

$$\lim_{R\to\infty} (\xi \pm Ri)^\mu e^{x(\xi \pm Ri) - (\xi \pm Ri)^\nu} \to 0, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant x_0,$$

све под претпоставком да ν и μ узимају вредности под 1. или 2.

На основу познатог става ([5,a] страна 224) и интеграли дуж одговарајућих контура једнаки су нули, па је

$$\int_{C'} s^{\mu} e^{xs-s^{\nu}} ds = \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} s^{\mu} e^{xs-s^{\nu}} ds, \quad (1,3)$$



Цртеж 2

где је C' дато на цртежу 2. Како је $s^{\mu} e^{-s^{\nu}}$ за посматране ν и μ l-функција, то нађена релација (1,3) даје инверзију Laplace-овог интеграла из једначине (1,1) за $t=1$, па је

$$K_{\mu,\nu}(x,1) = \int_{C'} s_{\mu} e^{xs-s^{\nu}} ds .$$

Извршимо у овом интегралу смену $xs=u$, $ds=du/x$ и добићемо

$$K_{\mu,\nu}(x,1) = x^{-\mu-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} u^{\mu} \exp\left(u - \frac{u^{\nu}}{t^{\nu}}\right) du =$$

$$= x^{-\mu-1} \Phi(-\mu, -\nu; -x^{-\nu}),$$

где $\Phi(\beta, \rho; z)$ претставља Wright-ову генерализацију Bessel-ове функције (види (5,2) и (5,5)).

Да би добили $K_{\mu,\nu}(x,t)$, користићемо се познатом везом за Laplace-ов интеграл, наиме: *ако је*

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \varphi(s),$$

тада је

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t/a)\, dt = a\varphi(as).$$

У нашем случају добивамо да је

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} x^{-\mu-1} \Phi(-\mu, -\nu; -t/x^{\nu})\, dx = s^{\mu} e^{-ts^{\nu}},$$

па је
$$K_{\mu,\nu}(x,t) = x^{-\mu-1}\,\Phi\,(-\mu, -\nu; -tx^{-\nu}).$$

Јединственост нађеног решења следи из јединствености инверзије Laplace-овог интеграла.

Тиме је доказан став 1,I.

Примедба 1. Напоменимо да се решење једначине (1,1) када је $\nu < 0$, $\mu < 0$ може добити на основу става А. Наиме, у том случају $\rho(s)$ и $\psi(s)$ су l-функције

$$\rho(s) = s^{\mu} = \int_0^{\infty} e^{-sx}\,\frac{x^{-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)}\,dx, \quad \mu < 0,$$

$$\psi(s) = s^{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-sx}\,\frac{x^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)}\,dx, \quad \nu < 0,$$

па је $a(x) = \dfrac{x^{-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)}$, а $b(x) = \dfrac{x^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)}$ и $a(x) * \overline{b(x)}^{\,i} = \dfrac{x^{-\mu-\nu i-1}}{\Gamma(-\mu-\nu i)}$.
Решење је тада дато редом:

$$K_{\mu,\nu}(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\Gamma(i+1)}\,t^i\,\frac{x^{-\mu-1}\,x^{-\nu i}}{\Gamma(-\mu-\nu i)}$$

$$= x^{-\mu-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-tx^{-\nu})^i}{\Gamma(i+1)\,\Gamma(-\mu-\nu i)}$$

$$= x^{-\mu-1}\,\Phi\,(-\mu, -\nu; -tx^{-\nu});$$

(види (5,1)).

Када је $\nu > 0$ резултати M. Parodi-а не могу се искористити јер тада $\psi(s) = s^{\nu}$ није l-функција.

Овај став А, који обухвата резултате M. Parodi-а, може се нешто уопштити.

СТАВ Б. *Нека су задовољени следећи услови:*

1. *Дат је низ функција* $f_i(t)$ *и то такав да је*

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f_i(t)\,dt = \rho(s)\,\psi^i(s)\,e^{-h\psi(s)}. \tag{1,4}$$

2. *Ред*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\,(t-h)^i\,f_i(x),$$

где је h константа $\geqslant 0$, конвергира и нека се може трансформисати Laplace-овом трансформацијом члан по члан.

Тада је

$$K(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i\,!} (t-h)^i f_i(x) \tag{1,5}$$

решење, и то једино, интегралне једначине (У, 2).

Доказ.

$$\int_0^{\infty} K(x,t)\, e^{-sx}\, dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i\,!} (t-h)^i \int_0^{\infty} e^{-sx} f_i(x)\, dx$$

$$= \rho(s)\, e^{-h\psi(s)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i\,!} (t-h)^i\, \psi^i(s)$$

$$= \rho(s)\, e^{-h\psi(s)}\, e^{-(t-h)\psi(s)} = \rho(s)\, e^{-t\psi(s)}.$$

Ако функција $\psi(s)$ и $\rho(s)$ задовољавају услове из става А, тада је $h=0$ и $f_0(x) = a(x)$, $f_i(x) = a(x) * \overline{b(x)}^i$.

Показаћемо да овај став обухвата и примере који не задовољавају услове става А, а које сам M. Parodi користи.

Први пример, $K(x,t) = e^{-t} I_0(2\sqrt{xt})$ (види [15] страна 59) задовољава једначину (У,2), тј.

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\, e^{-t} I_0(2\sqrt{xt})\, dx = \frac{1}{s} e^{-t\frac{s-1}{s}};$$

$\psi(s) = \dfrac{s-1}{s}$ није l-функција, па не задовољава услов 3. става А. Међутим, према познатој вези између Bessel-ових функција и Laguerre-ових полинома $L_i(x)$ ([12] страна 109) имамо:

$$e^{-t} I_0(2\sqrt{xt}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i\,!} L_i(x). \tag{1,6}$$

Ред на десној страни је облика (1,5) за $h=0$ и $f_i(x) = L_i(x)$. Како је

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} L_i(x)\, dx = \frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^i,$$

то $f_i(x) = L_i(x)$ задовољава релацију облика (1,4).

Развијмо сада још функцију $1/s\, e^{-t\frac{s-1}{s}}$ у ред по степенима од t

$$\frac{1}{s}\, e^{-t\frac{s-1}{s}} = \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-t)^i}{i!}\left(\frac{s-1}{s}\right)^i$$

и видимо да се у реду (1,6) може извршити Laplace-ова трансформација члан по члан.

Други пример је функција $K(x,t) = 1/\sqrt{x}\; e^{-t^2/4x}$ која такође задовољава једначину (У,2)

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} e^{-\frac{t^2}{4x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{-t\sqrt{s}},$$

а $\psi(s) = \sqrt{s}$ није l-функција. Међутим, може се показати на основу познате везе

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\frac{t^2}{4x}} = \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{8x}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-t)^i}{i!} D_i\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)(2x)^{-\frac{i+1}{2}} \tag{1,7}$$

да ово језгро задовољава услове става Б.

Овде смо са $D_\nu(z)$ обележили Weber-Hermite-ову функцију која је решење диференцијалне једначине

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (\nu + {}^1/_2 - {}^1/_4\, z^2)\, u = 0.$$

Примедба 2. Случај $\nu > 0$ који се не може уклопити у став А или Б може се, користећи се релацијом (1,3), добити директно из формуле за инверзију Laplace-ове трансформације

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} e^{ts} s^{\mu} e^{-s^{\nu}}\, ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)}\, e^{ts} s^{\nu k+\mu}\, ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{C'} \frac{(-)^k}{\Gamma(k+1)}\, e^{ts} s^{\nu k+\mu}\, ds \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)}\, \frac{t^{-(\nu k+\mu+1)}}{\Gamma(-\nu k-\mu)} \\
&= t^{-\mu-1}\, \Phi(-\mu, -\nu; -1/t^{\nu}).
\end{aligned}$$

1.2. *СПЕЦИЈАЛНИ СЛУЧАЈЕВИ ЈЕДНАЧИНЕ* (1,1).

Неки специјални случајеви једначине (1,1) већ су познати у литератури и имају велику примену. Ми ћемо као први специјалан случај посматрати када је $\mu > -1$, $0 < \nu < 1$.

Показаћемо да се може, у овом специјалном случају, решење интегралне једначине (1,1) написати у облику Laplace-овог интеграла. Тиме истовремено показујемо да се одговарајућа Wright-ова функција може написати у том облику.

Поћићемо од већ познатог интеграла

$$\int_C s^{\mu} \exp(ts - s^{\nu})\, ds = 0, \quad t > 0, \quad \mu > -1,$$

где је C контура са цртежа 1. Када пустимо да $R \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$, добићемо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} s^{\mu} \exp(ts - s^{\nu})\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} x^{\mu} \exp(-\mu\pi - tx - x^{\nu} e^{-\nu\pi i})\, dx$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} x^{\mu} \exp(\mu\pi i - tx - x^{\nu} e^{\nu\pi i})\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-tx} x^{\mu} e^{-x^{\nu}\cos\nu\pi} \sin(x^{\nu}\sin\nu\pi - \mu\pi)\, dx,$$

одакле следи да је

$$K_{\mu,\nu}(x,1) \equiv K_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ux} u^{\mu} e^{-u^{\nu}\cos\nu\pi} \sin(u^{\nu}\sin\nu\pi - \mu\pi)\, du,$$

$$0 < \nu < 1, \quad \mu > -1. \tag{1,8}$$

Међутим још специјалнији случај када је $\mu = 0$ је највише испитиван и има велики значај за примену симболичког рачуна на парцијалне једначине. И нас ће у овом раду тај случај највише интересовати те ћемо се нешто више задржати на особинама оне непрекидне функције која припада класи L-функција и која задовољава интегралну једначину (1,1) за $0 < \nu < 1$ и $\mu = 0$.

H. Pollard [16] је показао да функција $K_{0,\nu}(x,1)$ има аналитички израз у облику интеграла

$$K_{0,\nu}(x,1) \equiv K_{\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xu} e^{-u^{\nu}\cos\nu\pi} \sin(u^{\nu}\sin\nu\pi)\, du, \tag{1,9}$$

или у облику реда

$$K_{\nu}(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \sin\pi\alpha k \, \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{x^{\alpha k + 1}} \tag{1,10}$$

до кога je Humbert [9] дошао чисто формалним рачуном. Ако упоредимо релације (1,8) и (1,9) видимо да резултат H. Pollard-a следи из (1,8) за $\mu=0$. Осим тога, H. Pollard показује да функција $K_\nu(x)$ има следеће особине:

a. да je скоро свуда позитивна,

b. $\int\limits_0^\infty K_\nu(x)\,dx < \infty$.

L. Wlodarski [21], на основу једне теореме L. Post-a, показује да je непрекидно решење $K_\nu(x) \geqslant 0$, $x > 0$.

J. Mikušinski [13], поред неких већ наведених резултата, показује да je за λ реално и позитивно $K_\nu^{(n)}(0)=0, n=1, 2...$ као и $K_\nu(0)=0$.

Функције $K_\nu(x)$ за извесне вредности ν своде се на познате функције; тако je за $\nu={}^1/_2$

$$K_{1/2}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-xu}\sin u^{1/2}\,du=\frac{1}{2\sqrt{\pi x^3}}\,e^{-\frac{1}{4x}},$$

a за $\nu={}^2/_3$

$$K_{2/3}(x)=\frac{-1}{2\,(3\pi)^{1/2}\,x}\,e^{-\frac{2}{27x^2}}\,W_{-1/2,-1/6}\left(-\frac{4}{27x}\right),$$

где je $W_{\mu,\nu}(x)$ Whittaker-ова функција која задовољава диференцијалну једначину

$$\frac{d^2W}{dx^2}+(-{}^1/_4+\mu/x+\nu^2/(4x^2))\,W=0.$$

Поред ових познатих особина показаћемо још неке које ћемо користити у даљем раду:

1. $\quad K_\nu(x)\sim\sin\nu\pi\,\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}},\quad x\to\infty.$

Ова особина следи из релације (1,8) на основу става Abel-ове природе за Laplace-ову трансформацију. Наиме, подинтегрална функција у релацији (1,8) понаша се као $u^\nu\sin\nu\pi$ када $u\to 0$, па отуда следи особина 1.

2. Понашање $K_\nu(x)$ за $x\to 0$.

Видели смо у ставу 1,I да je

$$K_{\theta,\nu}(x,1)\equiv K_\nu(x)=1/x\,\Phi(0,-\nu;-x^{-\nu})$$

$$=y^{1/2}e^{-y}\left\{\sum_{m=0}^{M}A_m y^{-m}+O(y^{-M})\right\},$$

где је $y = (1 - \nu)[\nu^\nu (x^{-\nu})]^{1/(1-\nu)}$, а $\Phi(\beta, \rho; z)$в ећ поменута Wright-ова генерализација Bessel-ових функција (види 5. глава).

Овим смо добили прецизнији резултат од Микушинског који смо навели на почетку овог дела.

3. $K_\nu(x) > 0$ за $\infty > x > 0$.

Као што смо видели, L. Wlodarski је показао да је $K_\nu(x) \geqslant 0$ $x > 0$. Да би побољшали ову релацију, користићемо се ставом L. Post-а који гласи:

Ако је функција $\overset{*}{f}(x)$ непрекидна за $x > 0$ и интеграл

$$\overset{*}{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \overset{*}{f}(t)\, dt$$

конвергира за $R\{s\} > x_0$, тада је

$$\overset{*}{f}(t) = \lim_{k \to \infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \overset{*}{F}{}^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right).$$

Обележимо са $L_\nu(s) \equiv e^{-s^\nu}$, па је

$$\int_0^\infty e^{-sx} K_\nu(x)\, dx = L_\nu(s).$$

Одмах се види да је

$$(-1)\, L'_\nu(s) = \nu\, s^{\nu-1} L_\nu(s).$$

Исто тако лако се види да је и $(-1)^k L_\nu^{(k)}(x)$, $k = 0, 1 \ldots$ монотоно опадајућа функција и већа од нуле за $x > 0$. Та особина следи директно из интеграла

$$(-1)^k L_\nu^{(k)}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} x^\mu K_\nu(x)\, dx,$$

када се узме у обзир да је $K_\nu(x) \geqslant 0$, $x \geqslant 0$.

Формираћемо сада помоћну функцију

$$\Phi_\nu(t) = e^{-t} \int_0^t \frac{K_\nu(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\, d\tau$$

за коју сигурно знамо да је већа од нуле, $t>0$, јер је према Wlodarskom $K_\nu(x) \geqslant 0$, $x>0$. Ова функција има Laplace-ову трансформацију

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\Phi_\nu(t)\,dt = \Gamma(1-\nu)(s+1)^{\nu-1}L_\nu(s+1).$$

Користећи се особином (1,11) добићемо, према Post-овој теореми, за функцију $\Phi_\nu(t)$:

$$\Phi_\nu(t) = \frac{\Gamma(1-\nu)}{\nu}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}(-1)^{k+1}L_\nu^{(k+1)}\left(\frac{k}{t}+1\right).$$

Сада је лако показати особину 3. функције $K_\nu(x)$, наиме, $K_\nu(x)>0$, $\infty>x>0$. Треба само применити Post-ову теорему на функцију $x K_\nu(x)$ и добивени резултат упоредити са одговарајућим за функцију $\Phi_\nu(t)$, тј.

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\nu}t\,K_\nu(t) &= \frac{\Gamma(1-\nu)}{\nu}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}(-1)^{k+1}L_\nu^{(k+1)}\left(\frac{k}{t}\right)\\ &\geqslant \frac{\Gamma(1-\nu)}{\nu}\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}L_\nu^{(k+1)}\left(\frac{k}{t}+1\right)\\ &\geqslant \Phi_\nu(t)>0,\quad \infty>t>0.\end{aligned}$$

Одакле следи тражена особина.

У основи даљих расматрања лежи функција $x K_\nu(x)$ коју ћемо обележити са $F_\nu(x)$, тј. $x K_\nu(x) = F_\nu(x)$. Она, према досадашњем излагању, има следеће особине:

1. $$\frac{1}{\nu}\int_0^\infty e^{-st}F_\nu(t)\,dt = s^{\nu-1}e^{-s^\nu},$$

односно

$$\int_0^\infty e^{-st}F_\nu(t/x^{1/\nu})\frac{dt}{\nu x} = s^{\nu-1}e^{-xs^\nu},$$

2. $$F_\nu(x) \sim \frac{1}{\pi}\sin\nu\pi\frac{\Gamma(\nu+1)}{x^\nu},\quad x\to\infty,$$

3. $$F_\nu(x) = a^{1/2}x^{-\frac{\nu}{2(1-\nu)}}e^{-a x^{-\frac{\nu}{1-\nu}}}\left\{\sum_{m=0}^{M-1}A_m a^{-m}x^{\frac{\nu}{1-\nu}} + O\left(a^{-M}x^{\frac{M\nu}{1-\nu}}\right)\right\},$$

$$a = (1-\nu)^{\frac{\nu}{1-\nu}}$$

4. $F_\nu(x) > 0; \quad 0 < x < \infty.$

Најзад показаћемо да је и

5. $$\int_0^\infty F_\nu\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^{1-\nu\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)} \equiv C_{\alpha,\nu}, \quad \alpha > -1.$$

Доказ особине 5. — На основу предњих особина види се да овај интеграл конвергира. Уведимо параметар x помоћу смене $t = \tau/x$, па ћемо добити:

$$\int_0^\infty F_\nu(x/\tau)\,\tau^{\nu\alpha-1}\,d\tau = C_{\alpha,\nu}\,x^{\nu\alpha}.$$

Извршимо формално нешто модифицирану Laplace-ову трансформацију леве и десне стране ове релације користећи се особином 1. функције $F_\nu(t)$

$$C_{\alpha,\nu}\frac{\Gamma(\alpha\nu+2)}{s^{\alpha\nu+2}} = \int_0^\infty e^{-sx}\,x\,dx\int_0^\infty F_\nu\left(\frac{x}{t}\right)t^{\nu\alpha-1}\,dt$$

$$= \int_0^\infty t^{\nu\alpha-1}\,dt\int_0^\infty e^{-sx}\,x\,F_\nu\left(\frac{x}{t}\right)dx$$

$$= \nu s^{\nu-2}\int_0^\infty t^{\nu(\alpha+1)-1}(1-\nu+\nu s^\nu t^\nu)e^{-s^\nu t^\nu}\,dt.$$

Ако још извршимо смену $s^{\nu-1}t^\nu = u$, добићемо

$$C_{\alpha,\nu}\frac{\Gamma(\alpha\nu+2)}{s^{\alpha\nu+2}} = s^{\alpha(1-\nu)-1}\int_0^\infty e^{-su}\left[\nu s u^{\alpha+1}+(1-\nu)u^\alpha\right]du$$

$$= s^{\alpha(1-\nu)-1}\left(\nu s\,\frac{\Gamma(\alpha+2)}{s^{\alpha+2}} + (1-\nu)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right)$$

$$= \frac{(\alpha\nu+1)\,\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha\nu+2}},$$

одакле следи да је

$$C_{\alpha,\nu} \equiv \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\nu\alpha+1)}.$$

Остало нам је да покажемо исправност извршене размене реда интеграљења. Зато ћемо показати, прво да је функција $e^{-sx}\, x F_\nu(x/t)\ t^{\nu\alpha-1}$, $R\{s\} > 0$, апсолутно интеграбилна у размаку $0 \leqslant t \leqslant \infty$, а за свако $x \geqslant 0$.

Из особина функције $F_\nu(t)$ следи да је

$$\left(\frac{x}{t}\right)^\nu F_\nu\left(\frac{x}{t}\right) < A, \quad \frac{x}{t} \geqslant 0;$$

према томе је

$$e^{-sx}\, x F_\nu\left(\frac{x}{t}\right) t^{\nu\alpha-1} \leqslant A\, e^{-sx}\, x^{1-\nu}\, t^{\nu(\alpha+1)-1},$$

одакле следи тврђење о апсолутној интеграбилности.

Исто тако лако је показати да је и

$$t^{\nu\alpha-1} \int_0^\omega e^{-sx}\, x F_\nu\left(\frac{x}{t}\right) dx, \quad R\{s\} > 0$$

апсолутно интеграбилна функција у размаку $0 \leqslant t \leqslant \infty$, за свако $\omega > 0$, наиме,

$$t^{\nu\alpha-1} \int_0^\omega e^{-sx}\, x F_\nu\left(\frac{x}{t}\right) dx < t^{\nu\alpha-1} \int_0^\infty e^{-sx}\, x F_\nu\left(\frac{x}{t}\right) dx$$

$$< \nu\, e^{-s^\nu t^\nu}\, s^{\nu-2}\, t^{\nu(\alpha+1)-1} (1 - \nu + \nu s^\nu t^\nu),$$

одакле следи апсолутна интеграбилност по t у наведеном интервалу независно од ω.

Сада је лако показати исправност размене реда интеграљења, наиме,

$$\int_0^\omega e^{-sx}\, x\, dx \int_0^\infty F_\nu\left(\frac{x}{t}\right) t^{\nu\alpha-1}\, dt = \int_0^\infty t^{\nu\alpha-1}\, dt \int_0^\omega e^{-sx}\, x F_\nu\left(\frac{x}{t}\right) dx.$$

Ова размена дозвољена је јер смо показали да је $e^{-sx}\, x F_\nu(x/t)\, t^{\nu\alpha-1}$ апсолутно интеграбилна у датом интервалу, а за свако $x \geqslant 0$.

Даље је

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega e^{-sx}\, x\, dx \int_0^\infty F_\nu\left(\frac{x}{t}\right) t^{\nu\alpha-1} dt = \int_0^\infty t^{\nu\alpha-1}\, dt \int_0^\infty e^{-sx}\, x F_\nu\left(\frac{x}{t}\right) dx.$$

Овде смо смели унети знак за лимес по g интеграл, јер је $t^{\nu\alpha-1}\int_0^\omega x F_\nu(x/t)\,dx$ такође апсолутно интеграбилна функција за свако $\omega > 0$.

II. ТРАНСФОРМАЦИЈА $P_\nu(\sigma, f)$

2.1. *ДЕФИНИЦИЈА ТРАНСФОРМАЦИЈЕ* $P_\nu(\sigma, f)$

Трансформацију $P_\nu(\sigma, f)$ функције $f(x)$ дефинисаћемо на следећи начин:

$$P_\nu(\sigma, f) = \int_0^\infty F_\nu(\sigma/x^{1/\nu})\, f(x)\, \frac{dx}{\nu x},$$

где за $x^{1/\nu}$ узимамо главну вредност, а о функцији $f(x)$ претпостављамо:

a. $f(x)$ је дефинисано за свако $0 \leqslant x < \infty$ сем можда у изолованим тачкама које не могу у коначном имати тачку нагомилавања.

b. $f(x)$ је интеграбилна функција у сваком коначном размаку, сем можда у коначно много тачака у којима несвојствен интеграл апсолутно конвергира.

Језгро ове трансформације је нормирано, тј.

$$\int_0^\infty F_\nu(\sigma/x^{1/\nu})\, \frac{dx}{\nu x} = 1\,.$$

Да би то видели треба само увести смену $x^{1/\nu} = \sigma z$ и горња релација се своди на

$$\int_0^\infty F_\nu(1/z)\, \frac{dz}{z} = 1$$

која је исправна на основу особине 5. функције $F_\nu(z)$ (в. 1 глава).

Упоредићемо ову трансформацију са већ познатим сличним трансформацијама. Видели смо да је

$$F_\nu(t) = \Phi\,(0, -\nu; -1/t^\nu), \quad 0 < \nu < 1\,.$$

Према томе, у основи $P_\nu(\sigma, f)$ трансформације лежи Wright-ова генерализација Bessel-ових функција. Већ су R. P. A g a r w a l [2] и G u p t a [8] користили Wright-ову генерализацију за језгро, извесне интегралне трансформације. Agarwal уопштава Hankel-ову трансформацију узимајући за језгро уместо Bessel-ове функције Wright-ову функцију $\Phi(\mu, \nu; z)$, али за $\nu > 0$. Његова трансформација тада има облик

$$g(p) = (^1/_2)^{\mu} \int_0^{\infty} (pt)^{\mu+1/2}\, \Phi\left(1 + \mu, \nu; -\frac{p^2 t^2}{4}\right) f(t)\, dt.$$

За $\nu = 1$ она се своди на Hankel-ову. И H. C. Gupta*) ради са сличном трансформацијом.

Пошто је наш случај различит, то се $P_\nu(\sigma, f)$ трансформација може схватити као нека врста генерализације Gauss-ове трансформације, јер је

$$P_{1/2}(\sigma, f) = \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\sigma}} f(x)\, dx.$$

2.2. *СТАВОВИ О $P_\nu(\sigma, f)$ ТРАНСФОРМАЦИЈИ*

СТАВ 2,1. *Ако трансформација $P_\nu(\sigma, f)$ конвергира за неко $\sigma = \sigma_0$, онда она конвергира за свако $0 < \sigma < \sigma_0$. Ако је још $f(x) \equiv 0$ за $0 \leqslant x < \eta$, тада је*

$$P_\nu(\sigma, f) = O\left(e^{-c\left(\frac{\eta}{\sigma^\nu}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}}\right), \quad c < (1 - \sigma)\, \sigma^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}.$$

Пре него што пређемо на доказ овог става, доказаћемо следећи помоћни став:

ПОМОЋНИ СТАВ. *За функцију*

$$D_\nu(x) \equiv F_\nu(\sigma/x^{1/\nu})\, F_\nu^{-1}(\sigma_0/x^{1/\nu})\, \frac{1}{\nu^2 x^2}$$

када је $\sigma \neq 0$, важе следеће релације:

$$|D_\nu(x)| \leqslant A\, e^{-b\left(\frac{x}{\sigma^\nu}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}\left[1-(\sigma/\sigma_0)^{\frac{1}{1-\nu}}\right]}, \quad x \to \infty \tag{2,1}$$

и

$$|D'_\nu(x)| \leqslant B\, e^{-b\left(\frac{x}{\sigma^\nu}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}\left[1-(\sigma/\sigma_0)^{\frac{1}{1-\nu}}\right]}, \tag{2,2}$$

где је $b < (1 - \nu)\, \nu^{\frac{\nu}{1-\nu}}$.

---

*) Рад H. C. Gupta-е познајем само из реферата у *Math. Rew.* V. **10** (1949), p. 374.

Доказ помоћног става. Како је

$$\frac{1}{\nu x} F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) = \frac{1}{\nu x} \Phi(0, -\nu; -x/\sigma^\nu)$$

$$= \frac{1}{\sigma^\nu} \Phi(-\nu+1, -\nu; -x/\sigma^\nu),$$

то је

$$D_\nu(x) = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^\nu \frac{\Phi(-\nu+1, -\nu; -x/\sigma^\nu)}{\Phi(-\nu+1, -\nu; -x/\sigma^\nu)}.$$

На основу теореме за Wright-ове функције, наведене у 5. глави, следи релација (2,1).

Ако сада искористимо и другу релацију (5,3) за Wright-ове функције, добићемо за $D'_\nu(x)$

$$D'_\nu(x) = \frac{(\sigma_0/\sigma)^\nu}{\Phi^2(-\nu+1, -x/\sigma_0^\nu)} \left\{ \left(-\frac{1}{\sigma^\nu}\right) \Phi\left(-2\nu+1, -\frac{x}{\sigma^\nu}\right) \Phi\left(-\nu+1, -\frac{x}{\sigma_0^\nu}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma_0^\nu} \Phi\left(-\nu+1, -\frac{x}{\sigma^\nu}\right) \Phi\left(-2\nu+1, -\frac{x}{\sigma_0^\nu}\right) \right\},$$

где смо, краткоће ради, функцију $\Phi(\mu, -\nu; z)$ бележили са $\Phi(\mu; z)$.

На основу исте теореме као и за $D_\nu(x)$ добивамо да је исправна и релација (2,2), па је тиме и помоћни став доказан.

Доказ става 2,I. Доказаћемо да се за свако унапред дато $\varepsilon > 0$ може наћи такво ω_1 и ω_2, $\omega_1 < \omega_2$, да је

$$|J| = \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) f(x) \frac{dx}{\nu x} \right| < \varepsilon$$

за свако $0 < \sigma < \sigma_0$.

Обележимо зато са $\psi(\sigma_0, x)$:

$$\psi(\sigma_0, x) \equiv \int_0^x F_\nu(\sigma_0/t^{1/\nu}) f(t) \frac{dt}{\nu t}.$$

Ова функција остаје ограничена када $x \to \infty$, јер $P_\nu(\sigma_0, f)$ конвергира.

Користећи се парцијалном интеграцијом и доказаним помоћним ставом, добићемо:

$$|J| = \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) F_\nu^{-1}(\sigma_0/x^{1/\nu}) \frac{1}{\nu^2 x^2} F_\nu(\sigma_0/x^{1/\nu}) f(x) \frac{dx}{\nu x} \right|$$

$$\leqslant \left| \psi(\sigma_0, x) D_\nu(x) \Big|_{\omega_1}^{\omega_2} + \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} \psi(\sigma_0, x) D'_\nu(x)\, dx \right| \right.$$

$$\leqslant c\, e^{-b\left(\frac{\omega_1}{\sigma^\nu}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}\left[1-(\sigma/\sigma_0)^{\frac{1}{1-\nu}}\right]} < \varepsilon$$

за подесно изабрано ω_1 и $\omega_2 > \omega_1$, а за $0 < \sigma < \sigma_0$.

Тиме смо доказали први и други део става 2,I.

СТАВ 2,II. *Ако Laplace-ова трансформација функције $f(x)$ конвергира за неко $s = s_0 > 0$, онда $P_\nu(\sigma, f)$ трансформација конвергира униформно за свако $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0 < \infty$.*

Доказ. Претпоставимо да је

$$\psi_1(s_0, \infty) \equiv \int_0^\infty e^{-s_0 x} f(x)\, dx < M_1;$$

треба доказати да је и

$$\int_0^\infty F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) f(x) \frac{dx}{\nu x} < N$$

за $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0$.

Изаберимо ω_1 тако да је за $x \geqslant \omega_1$, $\dfrac{b}{\sigma^{\nu/(1-\nu)}} x^{\frac{1}{1-\nu}} > s_1 x$, $s_1 > s_0$; тада је

$$|J_\nu(\sigma)| = \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) e^{s_0 x} e^{-s_0 x} f(x) \frac{dx}{\nu x} \right|$$

$$\leqslant F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) \frac{1}{\nu x} e^{s_0 x} \left| \psi_1(s_0, x) \right|_{\omega_1}^{\omega_2}$$

$$+ N \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\nu x} F_\nu(\sigma/x^{1/\nu})\, e^{s_0 x} \right] \right| dx.$$

Како је за $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0 < \infty$

$$\frac{1}{\nu x} F_\nu (\sigma/x^{1/\nu}) < c\, e^{-b(x^{1/\nu}/\sigma)^{\frac{\nu}{1-\nu}}} < c\, e^{-s_1 x}$$

и

$$\left| \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\nu x} F_\nu (\sigma/x^{1/\nu})\, e^{s_0 x} \right] \right| \leqslant \left| \frac{1}{\sigma^{2\nu}} \Phi(-2\nu+1, -\nu; -x/\sigma^\nu)\, e^{s_0 x} \right|$$

$$+ \left| s_0\, e^{s_0 x} \frac{1}{s^\nu} \Phi(-\nu+1, -\nu; -x/\sigma^\nu) \right|$$

$$\leqslant c\, e^{s_0 x} e^{-b(x^{1/\nu}/\sigma)^{\frac{\nu}{1-\nu}}}$$

$$\leqslant c\, e^{-s_1 (1 - s_0/s_1)},$$

то се $|J_\nu(\sigma)|$ може, за подесно изабрано ω_1, учинити произвољно мало за свако $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0 < \infty$.

СТАВ 2,III. *Нека је $f(t)$ L-функција и нека је*

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \varphi(s);$$

тада је

$$\int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^\infty F_\nu (t/\tau^{1/\nu}) f(\tau) \frac{d\tau}{\nu \tau} = s^{\nu-1} \varphi(s^\nu)$$

Доказ. Треба доказати да је

$$\int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^\infty F_\nu (t/\tau^{1/\nu}) f(\tau) \frac{d\tau}{\nu\tau} = \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-st} F_\nu (t/\tau^{1/\nu}) \frac{dt}{\nu\tau},$$

одакле, на основу особине 1. функције $F_\nu(t)$ (види 1. глава), следи релација коју тврди став 2,III.

Очигледно је да интеграл

$$J(0, \infty) \equiv \int_0^\infty e^{-st} F_\nu (t/\tau^{1/\nu}) \frac{dt}{\nu\tau}$$

униформно конвергира у сваком коначном размаку $0 < \tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2 < \infty$ што се види када се, стављајући $t\tau^{1/\nu}$ на место t у горњи интеграл, он напише као Laplace-ова трансформација функције $F_\nu(t)$.

Сада ћемо показати да је

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-st} F_\nu(t/\tau^{1/\nu}) \frac{dt}{\tau\nu} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_\nu(t/\tau^{1/\nu}) f(\tau) \frac{d\tau}{\nu\tau}.$$

На основу става G. Fubini-a ова је релација тачна кад год је $f(\tau)$ ограничено у размаку $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$. Како $f(\tau)$ може имати само коначан број тачака у којима она није коначна, али је апсолутно интеграбилна, то је очигледно да ова релација важи уопште.

Остаје још да покажемо да је

$$\lim_{\tau_1 \to 0,\, \tau_2 \to \infty} \int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_\nu(t/\tau^{1/\nu}) f(\tau) \frac{d\tau}{\nu\tau} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_0^\infty F_\nu(t/\tau^{1/\nu}) f(\tau) \frac{d\tau}{\nu\tau}.$$

За то је довољно да покажемо да је

$$\lim_{\tau_1 \to 0} I_1 = \lim_{\tau_1 \to 0} \int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_0^{\tau_1} F_\nu(t/\tau^{1/\nu}) f(\tau) \frac{d\tau}{\nu\tau} = 0$$

и

$$\lim_{\tau_2 \to \infty} I_2 = \lim_{\tau_2 \to \infty} \int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_{\tau_2}^\infty F_\nu(t/\tau^{1/\nu}) f(\tau) \frac{d\tau}{\nu\tau} = 0.$$

Покажимо, прво, да се $|I_1(\tau_1') - I_1(\tau_1'')|$ може учинити произвољно мало за подесно изабрано τ_1' и τ_1'', $\tau_1' > \tau_1''$.

$$|I_1(\tau_1') - I_1(\tau_1'')| = \left| \int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_{\tau_1''}^{\tau_1'} F_\nu(t/\tau^{1/\nu}) f(\tau) \frac{d\tau}{\nu\tau} \right|$$

$$= \left| s^{\nu-1} \int_{\tau_1''}^{\tau_1'} e^{-s^\nu \tau} f(\tau)\, d\tau \right|$$

$$\leqslant s^{\nu-1} e^{-s^\nu \tau_1''} \int_{\tau_1''}^{\tau_1'} |f(\tau)|\, d\tau.$$

Видимо да се за свако унапред дато $\varepsilon > 0$ може наћи $\tau_1' > \tau_1'' > 0$ да је $|I_1(\tau_1') - I_1(\tau_1'')| < \varepsilon$, па према томе је и $\lim I_1(\tau_1) = 0$, $\tau_1 \to 0$;

На исти начин може се показати и за I_2

$$|I_2(\tau_2') - I_2(\tau_2'')| = \left| \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt \int_{\tau_2''}^{\tau_2'} F_\nu (t/\tau^{1/\nu}) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau \nu} \right|$$

$$= \left| s^{\nu-1} \int_{\tau_2''}^{\tau_2'} e^{-\tau s^\nu} f(\tau)\, d\tau \right| < \varepsilon$$

на основу основног става о Laplace-овим интегралима, одакле следи да је $\lim I_2(\tau_2) = 0$, $\tau_2 \to \infty$. Time смо доказали став 2,III.

СТАВ 2,IV. *Нека трансформација*

$$P_\nu(\sigma, f) = \int_0^{\infty} F_\nu (\sigma/x^{1/\nu}) f(x) \frac{dx}{\nu x}$$

конвергира за $\sigma = \sigma_0$ *и нека* $\dfrac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}$, $\alpha > -1$, *осцилира између коначних граница када* $x \to 0$; *тада је*

$$\liminf_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})} \leqslant \liminf_{\sigma \to 0} \frac{P_\nu(\sigma, f)}{C_{\alpha,\nu}\, \sigma^{\nu\alpha} L(\sigma)} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{\sigma \to 0} \frac{P_\nu(\sigma, f)}{C_{\alpha,\nu}\, \sigma^{\nu\alpha} L(\sigma)} \leqslant \limsup_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}.$$

Доказаћемо, прво, следеће помоћне ставове:

ПОМОЋНИ СТАВ I. *Нека је* $L(z)$ *спорипроменљива функција,* $\alpha > -1$, *тада је*

$$\int_0^{\infty} F_\nu (\sigma/x^{1/\nu})\, x^\alpha L(x^{1/\nu}) \frac{dx}{\nu x} \sim C_{\alpha,\nu}\, \sigma^{\nu\alpha} L(\sigma), \quad \sigma \to 0,$$

где је

$$C_{\alpha,\nu} = \int_0^{\infty} F_\nu \left(\frac{1}{z}\right) z^{\nu\alpha - 1}\, dz = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)}.$$

Доказ помоћног става I. Нека је $a > 0$ и $0 < \gamma < \alpha + 1$; тада је

$$J(\sigma) = \frac{1}{\nu\,\sigma^{\nu\alpha}\,L(\sigma)} \int_0^\infty F_\nu(\sigma/x^{1/\nu})\, x^\alpha L(x^{1/\nu}) \frac{dx}{\nu x}$$

$$= \frac{1}{L(\sigma)} \int_0^\infty F_\nu(1/z)\, z^{\nu\alpha-1} L(z\sigma)\, dz$$

$$= \frac{1}{\sigma^\gamma L(\sigma)} \int_0^a F_\nu(1/z)\, z^{\nu\alpha-1-\gamma} (z\sigma)^\gamma L(z\sigma)\, dz +$$

$$+ \frac{1}{\sigma^{-\gamma} L(\sigma)} \int_a^\infty F_\nu(1/z)\, z^{\nu\alpha-1+\gamma} (\sigma z)^{-\gamma} L(z\sigma)\, dz.$$

На основу особине С. 1. функција које се правилно понашају (види 5. глава)

$$J(\sigma) \leqslant \frac{P_1(a\sigma)}{\sigma^\gamma L(\sigma)} \int_0^a F_\nu(1/z)\, z^{\nu\alpha-1-\gamma}\, dz +$$

$$+ \frac{P_2(a\sigma)}{\sigma^{-\gamma} L(\sigma)} \int_0^\infty F_\nu(1/z)\, z^{\nu\alpha-1+\gamma}\, dz,$$

па је

$$\limsup_{\sigma\to 0} J(\sigma) \leqslant a^\gamma \int_0^a F_\nu(1/z)\, z^{\nu\alpha-1-\gamma} + a^{-\gamma} \int_a^\infty F_\nu(1/z) z^{\nu\alpha-1+\gamma}\, dz.$$

Како ово важи за произвољно мало γ, то се може пустити да $\gamma \to 0$, па је

$$\limsup_{\sigma=0} J(\sigma) \leqslant \int_0^\infty F_\nu(1/z)\, z^{\nu\alpha-1}\, dz = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)}.$$

Сличним поступком из особине С. 2. (5. глава) следи

$$\liminf_{\sigma=0} J(\sigma) \geqslant \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)}$$

и тиме је доказан помоћни став I.

ПОМОЋНИ СТАВ II. *Нека* $P_\nu(\sigma_0, \varepsilon(t)\, t^\alpha L(t^{1/\nu}))$ *конвергира и нека* $\varepsilon(x) \to 0$ *када* $x \to 0$, *тада је*

$$\int_0^\infty F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})\, \varepsilon(t)\, t^\alpha\, L(t^{1/\nu}) \frac{dt}{\nu t} = o(\sigma^\nu L(\sigma)).$$

Доказ помоћног става II. Изаберимо $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ тако да буде

$$|\varepsilon(t)| < \frac{\varepsilon\, \Gamma(\nu\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \eta$$

Ако поред тога користимо још други део става 2,I, добићемо:

$$\left| \int_0^\infty F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})\, \varepsilon(t)\, t^\alpha\, L(t^{1/\nu}) \frac{dt}{\nu t} \right| \leqslant \int_0^\eta F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})\, |\varepsilon(t)|\, t^\alpha L(t) \frac{dt}{\nu t} +$$

$$+ \left| \int_\eta^\infty F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})\, \varepsilon(t)\, t^\alpha L(t^{1/\nu}) \frac{dt}{\nu t} \right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon\, \Gamma(\nu\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})\, t^\alpha\, L(t^{1/\nu}) \frac{dt}{\nu t} +$$

$$+ o(\sigma^{\nu\alpha} L(\sigma))$$

$$\leqslant \varepsilon\, \sigma^{\nu\alpha} L(\sigma) + o(\sigma^{\nu\alpha} L(\sigma)).$$

Тиме је и помоћни став II доказан.

Доказ става 2,IV. На основу претпоставке о функцији $f(x)$ можемо ставити:

$$f(x) \leqslant \bar{a}\, x^\alpha\, L(x^{1/\nu}) + \varepsilon(x)\, x^\alpha\, L(x^{1/\nu}),$$

где $\varepsilon(x) \to 0$ када $x \to 0$, а $\bar{a}$ је limes sup $\dfrac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}$ када $x \to 0$. Тада важи релација

$$P_\nu(\sigma, f) \leqslant \bar{a} \int_0^\infty F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})\, t^\alpha\, L(t^{1/\nu}) \frac{dt}{\nu t} +$$

$$+ \int_0^\infty F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})\, \varepsilon(t)\, t^\alpha L(t^{1/\nu}) \frac{dt}{\nu t},$$

или на основу помоћних ставова I и II

$$\limsup_{\sigma\to 0} \frac{P_\nu(\sigma, f)}{C_{\alpha,\nu}\,\sigma^{\nu\alpha}\, L(\sigma)} \leqslant \limsup_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}.$$

На исти начин се доказује да је и

$$\liminf_{\sigma\to 0} \frac{P(\sigma, f)}{C_{\alpha,\nu}\,\sigma^{\nu\alpha}\, L(\sigma)} \geqslant \liminf_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}.$$

За овај став важи дуалан који се у принципу исто доказује. Тај став гласи:

СТАВ 2,IV*. *Ако* $\frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}$, $\alpha > -1$ *осцилира између коначних граница када* $x\to\infty$, *тада је*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})} \leqslant \liminf_{\sigma\to\infty} \frac{P_\nu(\sigma, f)}{C_{\alpha,\nu}\,\sigma^{\nu\alpha}\, L(\sigma)} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{\sigma\to\infty} \frac{P_\nu(\sigma, f)}{C_{\alpha,\nu}\,\sigma^{\nu\alpha}\, L(\sigma)} \leqslant \limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}.$$

Из ова два става могу се извести низ других који претстављају њихове специјалне случајеве. Пошто ћемо се у даљем раду позивати на њих, то ћемо их посебно и формулисати.

СТАВ 2,V. *Нека* $P_\nu(\sigma_0, f)$ *конвергира и* $f(x)$ *осцилира између коначних граница када* $x\to 0\,(x\to\infty)$; *тада је*

$$\liminf_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}} f(x) \leqslant \liminf_{\substack{\sigma\to 0\\(\sigma\to\infty)}} P_\nu(\sigma, f) \leqslant \limsup_{\substack{\sigma\to 0\\(\sigma\to\infty)}} P_\nu(\sigma, f) \leqslant \limsup_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}} f(x).$$

СТАВ 2,VI. *Ако* $P_\nu(\sigma_0, f)$ *конвергира и*

$$f(x) \sim x^\alpha L(x^{1/\nu}), \quad x\to 0\,(x\to\infty),$$

тада је и

$$P_\nu(\sigma, f) \sim C_{\alpha,\nu}\,\sigma^{\nu\alpha} L(\sigma), \quad \sigma\to 0\,(\sigma\to\infty).$$

СТАВ 2,VII. *Нека* $P_\nu(\sigma_0, f)$ *конвергира и*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}} f(x) = A;$$

тада је и

$$\lim_{\substack{\sigma\to 0\\(\sigma\to\infty)}} P_\nu(\sigma, f) = A.$$

Најзад, користећи се општим ставом Tauber-ове природе N. Wiener-а, доказаћемо за нашу трансформацију $P_\nu(\sigma, f)$ инверзан став претходним ставовима. Тај став N. Wiener-а ([5, a] страна 521) гласи:

Нека $K_1(t)$ припада класи $L^1(0, \infty)$ и нека има особину да је

$$\int_0^\infty K_1(t)\, t^{iy}\, dt \neq 0, \quad -\infty < y < \infty .$$

Ако је за неку I-функцију $\mathfrak{F}(t)$ која је ограничена у $(0, \infty)$

$$\lim_{s \to 0} s \int_0^\infty K_1(st)\, \mathfrak{F}(t)\, dt = A \int_0^\infty K_1(t)\, dt,$$

то је за свако друго језгро $K_2(t)$ које припада $L^1(0, \infty)$ такође

$$\lim_{s \to 0} s \int_0^\infty K_2(ts)\, \mathfrak{F}(t)\, dt = A \int_0^\infty K_2(t)\, dt .$$

Став који ћемо ми доказати гласи:

СТАВ 2,VIII. *Нека је $\mathfrak{F}(t) = \dfrac{t^{\alpha\nu} f(1/t^\nu)}{L(1/t)}$ ограничена функција у интервалу $(0, \infty)$; тада из чињенице*

$$P_\nu(\sigma, f) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)}\, \sigma^{\nu\alpha} L(\sigma), \quad \sigma \to 0$$

следи

$$\frac{1}{t} \int_0^t \frac{\tau^{\alpha\nu}}{L(1/\tau)} f(1/\tau^\nu)\, d\tau \sim 1, \quad t \to \infty .$$

Ако је још $\mathfrak{F}(t)$ монотоно растућа за $t > 0$, следи да је

$$\lim_{t \to \infty} \mathfrak{F}(t) = 1,$$

односно

$$f(t) \sim t^\alpha L(t^{1/\nu}), \quad t \to 0 .$$

Доказаћемо претходно следећи помоћни став:

ПОМОЋНИ СТАВ. *Нека је $\mathfrak{F}(t)$ ограничена функција у $(0, \infty)$; тада из*

$$\int_0^\infty F_\nu(1/\tau)\, \tau^{\alpha\nu} \frac{L(\sigma\tau)}{L(\sigma)}\, \mathfrak{F}(\sigma\tau) \frac{d\tau}{\tau} \sim A, \quad \sigma \to 0,$$

следи

$$\int_0^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau} \sim A, \quad \sigma\to 0.$$

Доказ помоћног става.

$$\int_0^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\frac{L(\sigma\tau)}{L(\sigma)}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= \int_0^\eta + \int_T^\infty + \int_\eta^T F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\frac{L(\sigma\tau)}{L(\sigma)}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau}$$

$$= [1+\varepsilon(\sigma,\eta,T)]\int_0^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau}$$

$$+ \int_0^\eta + \int_T^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\nu\alpha}\,\frac{L(\sigma\tau)}{L(\sigma)}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau}$$

$$-[1+\varepsilon(\sigma,\eta,T)]\left(\int_0^\eta + \int_T^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right),$$

где $\varepsilon(\sigma,\mu,T)\to 0$, $\sigma\to 0$ за свако $0<\eta<T$.

Треба сада још само показати да се интеграли

$$J_1 = \int_0^\eta F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\frac{L(\sigma\tau)}{L(\sigma)}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau},$$

$$J_2 = \int_T^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\frac{L(\sigma\tau)}{L(\sigma)}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau},$$

$$J_3 = \int_0^\eta F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau},$$

$$J_3 = \int_T^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau}$$

по апсолутној вредности могу учинити мањи од унапред датог $\varepsilon>0$ за погодно изабрано η и T када $\sigma\to 0$.

Прво ћемо показати за J_3 и J_4

$$|J_3| \leqslant M \int_0^{\eta} \frac{d\tau}{\tau^{1-(\alpha+1)\nu}}$$

$$\leqslant \frac{M}{\nu(\alpha+1)} \eta^{(\alpha+1)\nu} < \varepsilon/4,$$

$$|J_4| \leqslant M \int_T^{\infty} e^{-c\tau^{\frac{\nu}{1-\nu}}}$$

$$\leqslant \frac{M}{c} e^{-c T^{\frac{\nu}{1-\nu}}} < \varepsilon/4,$$

Користећи се особинама функције које се правилно понашају (5 глава) може се лако показати и за J_1 и J_2.

$$|J_1| \leqslant M \int_0^{\eta} F_\nu(1/\tau)\, \tau^{\alpha\nu-\gamma} \frac{(\sigma\tau)^\gamma L(\sigma\tau)}{\sigma^\gamma L(\sigma)} \frac{d\tau}{\tau}, \quad 0 < \gamma < \nu(\alpha+1)$$

$$\leqslant \frac{M P_1(\eta\sigma)}{\sigma^\gamma L(\sigma)} \int_0^{\eta} F_\nu(1/\tau)\, \tau^{\alpha\nu-\gamma} \frac{d\tau}{\tau},$$

па је

$$\lim_{\sigma\to 0} |J_1| \leqslant M \frac{\eta^{\nu(\alpha+1)}}{\nu(\alpha+1)-\gamma} < \varepsilon/4.$$

Исто тако је

$$|J_2| \leqslant M \int_T^{\infty} F_\nu(1/\tau)\, \tau^{\alpha\nu+\gamma} \frac{(\sigma\tau)^{-\gamma} L(\sigma\tau)}{\sigma^{-\gamma} L(\sigma)} \frac{d\tau}{\tau}$$

$$\leqslant \frac{M P_2(\sigma T)}{\sigma^{-\gamma} L(\sigma)} \int_T^{\infty} F_\nu(1/\tau)\, \tau^{\alpha\nu+\gamma} \frac{d\tau}{\tau},$$

па је

$$\lim_{\sigma\to 0} |J_2| \leqslant \frac{M}{T^\gamma} e^{-c T^{\frac{\nu}{1-\nu}}} < \varepsilon/4.$$

Према томе је

$$\left|\int_0^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\frac{L(\sigma\tau)}{L(\sigma)}\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau}-\int_0^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right|<$$

$$<\varepsilon+\left|\varepsilon(\sigma,\eta,T)\int_0^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right|$$

и тиме је доказан помоћни став.

Доказ става 2, VIII. По претпоставци је

$$\frac{1}{\sigma^{\nu\alpha}L(\sigma)}\int_0^\infty F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})\,f(t)\frac{dt}{\nu t}\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)},\quad \sigma\to 0.$$

Извршимо ли у овом интегралу трансформацију $t^{1/\nu}=1/\tau$, добићемо

$$\frac{\sigma}{\sigma^{\nu\alpha}L(\sigma)}\int_0^\infty F_\nu(\sigma\tau)\frac{1}{\sigma\tau}f\left(\frac{1}{t^\nu}\right)dt\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)},\quad \sigma\to 0.$$

што се може написати

$$\frac{1}{L(\sigma)}\int_0^\infty F_\nu(\sigma\tau)\frac{1}{(\sigma t)^{\alpha\nu}}t^{\nu\alpha}f(t^{-\nu})\frac{dt}{t}\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)},\quad \sigma\to 0.$$

Овај се интеграл сменом $\sigma t=\tau^{-1}$ своди на интеграл из помоћног става за $\mathfrak{F}(t)=\dfrac{t^{\alpha\nu}}{L(1/t)}f(t^{-\nu})$. Према доказаном помоћном ставу следи да и

$$\sigma\int_0^\infty F_\nu(\sigma t)\frac{1}{(\sigma t)^{\nu\alpha+1}}\frac{t^{\nu\alpha}}{L(1/t)}f(t^{-\nu})\,dt\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)},\quad \sigma\to 0.$$

Применимо наведени Wiener-ов став на последњу релацију. У овом случају је $K_1(t)=F_\nu(t)\,1/t^{\nu\alpha+1}$, па је

$$\int_0^\infty F_\nu(t)\,t^{iy-1-\nu\alpha}\,dt=\frac{\Gamma(1-(iy-\nu\alpha)/\nu)}{\Gamma(1+\nu\alpha-iy)}\neq 0,\quad -\infty<y<\infty.$$

Ако још изаберемо $K_2(st)$ такво да је

$$K_2(st)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant 1/s,\\ 0, & t>1/s,\end{cases}$$

то из Wiener-овог става следи тврђење става 2, VIII.

III. РЕШЕЊЕ ХОМОГЕНЕ ИНТЕГРАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

$$f(x) = \lambda \int_0^\infty F_\nu (x/t^{1/\nu}) f(t) \frac{dt}{\nu t} \tag{3,1}$$

3.1. *РЕШЕЊЕ ЈЕДНОГ СПЕЦИЈАЛНОГ СЛУЧАЈА SCHRÖDER-ОВЕ ФУНКЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ*

Видели смо да је основна идеја коју користи M. Parodi: свести интегралну једначину на функционалну и, уколико знамо решење ове једначине, инверзијом Laplace-овог интеграла доћи до решења дате интегралне једначине. Пошто ћемо се и ми служити истом идејом, то је потребно да претходно добијемо решење извесне функционалне једначине.

Општи облик Schröder-ове функционалне једначине је:

$$\varphi [\alpha (x)] = \lambda \varphi (x) \tag{3,2}$$

из које се лако прелази на Abel-ову функционалну једначину

$$\psi [\alpha (x)] = \psi (x) + C, \tag{3,3}$$

само ако се стави да је

$$\ln \varphi (x) = \psi (x), \quad \ln \lambda = C.$$

Abel је приметио да, ако познајемо једно партикуларно решење $\psi_1 (x)$ једначине (3,3), тада је опште решење: $\psi_1 (x) + \omega (x)$, где је $\omega (x)$ функција која је инваријантна у односу на $\alpha (x)$, тј.

$$\omega [\alpha (x)] = \omega (x).$$

Као специјалан случај посматрао је једначину

$$\psi (x^n) = \psi (x) + 1$$

и показао да је њено партикуларне решење

$$\psi_1 (x) = \frac{\ln \ln x}{\ln n}.$$

Класичан резултат о могућности решења Schröder-ове функционалне једначине (3,2) даје став G. Königs-a. Међутим решење је дато у облику једног лимеса и у том облику није подесно за наш рад.

Напоменимо још само рад P. Appell-a [3] у коме се као пример решава један специјалан случај који нас овде интересује. Он посматра функционалну једначину

$$F [\alpha (x)] = F (x)$$

као уопштење једначине која дефинише периодичне функције. Решење ове једначине даје у облику реда

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[\alpha^n(x)],$$

где је $\alpha^n(x)$ n-та итерација функције $\alpha(x)$, а $f(x)$ тако изабрана рационална функција да горњи ред има област конвергенције. За специјалан случај $\alpha(x) = x^2$ добива решење облика

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{2^n+1}(1 - x^{2^n})^2,$$

где ред конвергира за $|x| < 1$,

Нас ће у овом раду интересовати онај специјалан случај једначине (3,2) када је $\alpha(x) = x^n$, тј. једначина

$$\varphi(x^n) = \lambda\,\varphi(x). \tag{3,4}$$

Свешћемо прво ову једначину на облик (?,3) који је посматрао Abel. Уведимо зато нову функцију $\ln\varphi(x) = C\,\psi(x)$, $C = \ln\lambda \neq 0$, и добићемо

$$\psi(x^n) = \psi(x) + 1.$$

Према Abel-у је једно партикуларно решење ове једначине

$$\psi_1(x) = \frac{\ln\ln x}{\ln n}.$$

Нека је сада $\omega(x)$ произвољна периодична функција периоде 1, тј. задовољава релацију

$$\omega(x+1) = \omega(x),$$

онда је функција $\omega\left(\frac{\ln\ln x}{\ln n}\right)$ инваријанта у односу на x^n, наиме

$$\omega\left(\frac{\ln\ln x^n}{\ln n}\right) = \omega\left(\frac{\ln\ln x}{\ln n}\right),$$

па је, према томе, опште решење једначине (3,3) за $\alpha(x) = x^n$

$$\psi(x) = C\,\frac{\ln\ln x}{\ln n} + C\,\omega\left(\frac{\ln\ln x}{\ln n}\right),$$

а опште решење једначине (3,4) за $\lambda \neq 1$ је

$$\varphi(x) = \lambda^{\frac{\ln\ln x}{\ln n}}\,\omega\left(\frac{\ln\ln x}{\ln n}\right). \tag{3,5}$$

Ако је $\lambda = 1$ опште решење једначине (3,4) је

$$\varphi(x) = \omega\left(\frac{\ln \ln x}{\ln n}\right).$$

3.2. *ЕГЗИСТЕНЦИЈА И ЈЕДИНСТВЕНОСТ РЕШЕЊА ЈЕДНАЧИНЕ* (3,1).

Користећи се доказаним ставовима о трансформацији $P_\nu(\sigma, f)$ из 2. главе као и општим решењем функционалне једначине (3,4), расправљаћемо проблем сопствених функција и сопствених вредности једначине (3,1).

Прво ћемо доказати следећи став:

СТАВ 3,1. *Једначина* (3,1) *може имати решење* $f(x)$ *такво да:*

1. $\dfrac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}$, $\alpha > -1$, *осцилира између коначних истозначних граница,*

2. $e^{-sx} f(x)$ *интеграбилно за* $s = s_0$ *у интервалу* $(0, \infty)$, *само ако је* $\alpha = 0$, $\lambda = (1/\nu)^\mu$.

Доказ. Пођимо од једначине (3,1) написане помоћу ознаке за трансформацију $P_\nu(\sigma, f)$

$$f(x) = \lambda P_\nu(x, f)$$

или

$$\frac{x^{\alpha(1-\nu)} L(x^{1/\nu})}{L(x)} \cdot \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})} = \lambda C_{\alpha,\nu} \frac{P_\nu(x, f)}{C_{\alpha,\nu} x^{\nu\alpha} L(x)}.$$

Ако сада искористимо став 2,IV или став 2,IV*, добићемо:

$$\liminf_{\substack{x \to 0 \\ (x \to \infty)}} \frac{x^{\alpha(1-\nu)} L(x^{1/\nu})}{L(x)} \underline{a} \geqslant \lambda C_{\alpha,\nu} \underline{a}$$

и

$$\limsup_{\substack{x \to 0 \\ (x \to \infty)}} \frac{x^{\alpha(1-\nu)} L(x^{1/\nu})}{L(x)} \bar{a} \leqslant \lambda C_{\alpha,\nu} \bar{a},$$

где је

$$\underline{a} = \liminf_{\substack{x \to 0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}; \quad \bar{a} = \limsup_{\substack{x \to 0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}.$$

Ове две релације могуће су само ако је $\alpha = 0$, па следи да је

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (x \to \infty)}} \frac{L(x^{1/\nu})}{L(x)} = \lambda.$$

Ако се сада стави $x = e^{-y}$ и $R_1(y) = L(e^{-y})$ онда је

$$\lim_{y\to\infty} \frac{R_1(y/v)}{R_1(y)} = \lambda.$$

На основу особине А. функција које се правилно понашају (5. глава) закључујемо да је $R_1(y) = y^{\mu} L^*(y)$, па према томе је

$$L(x) = |\ln x|^{\mu} L^*(|\ln x|),$$

а $\lambda = (1/v)^{\mu}$. На исти начин, ако извршимо смену $x = e^y$, добићемо за $0 < x_0 \ll x$

$$L(x) = (\ln x)^{\mu} L^{**}(\ln x).$$

СТАВ 3,II. *Нека је*

1. $\omega_1(x)$ *периодична функција периода* 1, *тј.* $\omega_1(x+1) = \omega_1(x)$;
2. $f(x)$ *таква функција која задовољава релацију*

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx = 1/s\, (\ln s)^{\mu}\, \omega_1\left(\frac{\ln \ln s}{\ln v}\right).$$

Тада је $f(x)$ *решење интегралне једначине* (3,1) *за* $\lambda = (1/v)^{\mu}$.

СТАВ 3,III. *Једино решење* $f(x)$ *једначине* (3,1) *које има особине да је*

1. $f(x) \sim x^{\alpha} L(x^{1/v})$, $x \to 0$ $(x \to \infty)$, $\alpha > -1$,

2. $e^{-sx} f(x)$ *интеграбилно за* $s = s_0$ *у интервалу* $(0, \infty)$, *је* $f(x) \supset 1/s\, (\ln s)^{\mu}$.

Доказ ставова 3,II и 3,III. Извршимо Laplace-ову трансформацију леве и десне стране једначине (3,1):

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dx \int_0^{\infty} F_v(x/t^{1/v})\, f(t)\, \frac{dt}{vt}.$$

На основу става 2,III добијамо

$$\varphi(s) = \lambda\, s^{v-1} \varphi(s^v),$$

где је

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Обележимо са $K(s) \equiv s\,\varphi(s)$ па се добивена функционална једначина своди на већ расправљени случај Schröder-ове функционалне једначине

$$K(s) = \lambda K(s^{\nu}).$$

Видели смо да је опште решење ове функционалне једначине

$$K(s) = \lambda^{\frac{\ln \ln s}{\ln 1/\nu}}\, \omega\left(\frac{\ln \ln s}{\ln \nu}\right),$$

па према томе је и

$$\varphi(s) = 1/s\,(\ln s)^{\frac{\ln \lambda}{\ln 1/\nu}}\, \omega\left(\frac{\ln \ln s}{\ln \nu}\right).$$

Када је $\lambda = 1$, $\varphi(s)$ се своди на

$$\varphi(s) = \frac{1}{s}\, \omega\left(\frac{\ln \ln s}{\ln \nu}\right).$$

Тиме је став 3,II доказан.

Ако још захтевамо да се $\varphi(s)$ правилно понаша када $s \to 0$ или $s \to \infty$, следи, на основу особине функције $\omega(t)$, да је то могуће само ако је $\omega(t) \equiv c$, па према томе следи тврђење става 3,III.

Интересантно је приметити, прво, да је спектар сопствених вредности континуиран. Друго, да скуп функција коме припадају сопствене функције једначине (3,1) остаје непромењен са променом ν. Промена настаје само у томе што ће сада једна сопствена функција да одговара другој сопственој вредности.

3.3. *НАЛАЖЕЊЕ РЕШЕЊА ИНТЕГРАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ* (3,1) *КОЈА СЕ ПРАВИЛНО ПОНАШАЈУ.*

Покажимо како се може наћи функција $f(x) \supset \frac{(\ln s)^{\mu}}{s}$, тј. функција која је одређена једначином

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = 1/s\,(\ln s)^{\mu}.$$

3.3.1. $\mu = k$ цео број > 0.

Да би у овом случају нашли L-функцију $f(x)$ која одговара l-функцији $\varphi(s) = \frac{(\ln s)^{\mu}}{s}$, пођимо од интеграла

$$s^{-x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{x-1}\, dt;$$

k-ти извод леве и десне стране ове релације за $x = 1$ даје

$$(-1)^k \frac{(\ln s)^k}{s} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[\frac{1}{\Gamma(x)}\right]_{x=1}^{(i)} \int_0^\infty e^{-st} (\ln t)^k \, dt,$$

тако да је тражена функција $f(t)$

$$f_k(t) = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \gamma_i (\ln t)^{k-i},$$

где смо ставили

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \frac{x^i}{i!}.$$

3.3.2. $\mu \leqslant 0$.

Ставимо $\mu = -\varkappa$, $\varkappa \geqslant 0$ и користимо следећу везу за Laplace-ову трансформацију

$$\int_0^\infty \frac{t^x r(x)}{\Gamma(x+1)} dx \supset 1/s \, g(\ln s),$$

где $r(t) \supset g(s)$. У нашем случају је $g(s) = s^{-\varkappa}$, па је $r(t) = \dfrac{t^{\varkappa-1}}{\Gamma(\varkappa)}$ а одатле следи да је

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\varkappa)} \int_0^\infty \frac{t^x x^{\varkappa-1}}{\Gamma(x+1)} dx \supset \frac{1}{s} (\ln s)^{-\varkappa}$$

3.3.3. $\mu > 0$.

У случају 3.3.1. $\mu = k$ цео број > 0 имали смо

$$\frac{(\ln s)^k}{s} \subset (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{1} \gamma_i (\ln t)^{k-i} = f_k(t),$$

а у случају 3.3.2. $\mu = -\varkappa < 0$

$$\frac{1}{s (\ln s)^{\varkappa}} \subset \frac{1}{\Gamma(\varkappa)} \int_0^\infty \frac{t^x x^{\varkappa-1}}{\Gamma(x+1)} dx = \varphi_\varkappa(t).$$

Нека је сада $\mu > 0$. Ставимо $k = [\mu - 0] + 1$, $k - \varkappa = \mu > 0$ и образујмо композицију од $f_k(t)$ и $\varphi_\varkappa(t)$, тј.

$$f_k(t) * \varphi_\varkappa(t) = \int_0^t \varphi_\varkappa(t-\tau) f_k(\tau) = \frac{(\ln s)^k}{s} \, \frac{1}{s (\ln s)^{\varkappa}}$$

одакле следи

$$\frac{1}{s}\,\frac{(\ln s)^{\mu}}{s} \subset f_k(t) * \varphi_{\varkappa}(t).$$

Према томе је тражена функција

$$f(t) \supset \frac{1}{s}(\ln s)^{\mu}, \quad \mu > 0$$

дата изразом

$$f(t) = \frac{d}{dt}\{\varphi_{\varkappa}(t) * f_k(t)\}.$$

3.4. *РЕШЕЊА КОЈА СЕ НЕ ПОНАШАЈУ ПРАВИЛНО У БЛИЗИНИ* $t=0$ *ИЛИ* $t=\infty$

J. Карамата дао ми је, у вези мог недавно објављеног рада [18], такав пример који претставља решење интегралне једначине (3,1) за $\nu = {}^1/_2$, а не понаша са правилно за $t=0$ или $t=\infty$. Међутим то се може уопштити. Наиме, треба само поћи од релације C. (страна 120)

$$\frac{x^u}{\Gamma(1+u)} = \lambda \int_0^{\infty} F_\nu(x/t^{1/\nu})\, \frac{t^{u/\nu}}{\Gamma(1+u/\nu)}\, \frac{dt}{\nu t},$$

па је помножити са $u^{\mu-1}\,\omega\left(\frac{\ln u}{\ln \nu}\right)$ и интегралити по u у границама од 0 до ∞ и добићемо да је

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{x^u}{\Gamma(1+u)}\, u^{\mu-1}\,\omega\left(\frac{\ln u}{\ln \nu}\right) du$$

решење интегралне једначине (3,1) за $\lambda = (1/\nu)^{\mu}$.

Ако пак претходну релацију (3,6) диференцирамо довољан број пута по u, а затим помножимо са истом функцијом $u^{\mu-1}\,\omega\left(\frac{\ln u}{\ln \nu}\right)$ и интегришемо као у претходномо случају, добићемо решење једначине (3,1) за произвољно $\lambda > 0$.

IV. ПРИМЕНА ДОБИВЕНИХ РЕЗУЛТАТА

4.1. *ЈЕДАН ПРОБЛЕМ ИЗ ФИЗИКЕ*

У раду који је недавно штампан [18], посматрао сам специјалан случај интегралне једначине (3,1). Тада језгро има облик

$$\frac{2}{t} F_{1/2}(x/t^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\, e^{-\frac{t^2}{4x}},$$

па се интегрална једначина (3,1) своди на:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi x}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/4x} f(t)\, dt \tag{4,1}$$

која има следеће значење:

Распоред топлоте у линеарном проводнику дат је једначином

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

Нека је проводник неограничен са оба краја и нека задовољава почетне услове:

$$\theta(x,0) = \begin{cases} f(x), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Решење парцијалне једначине провођења топлоте са датим почетним условом је

$$\theta(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}} f(u)\, du. \tag{4,2}$$

Нека је поред почетног услова дат и гранични

$$\theta(0,t) = \frac{\lambda}{2} f(t),$$

где је λ произвољан параметар. Питање је која функција $f(x)$ може, на основу релације (4.2), да задовољи ове услове. Налажење функције $f(x)$ своди се на решење интегралне једначине (4,1).

Ову једначину M. Parodi решавао је симболичким рачуном. Он је показао да су за $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$ решења интегралне једначине (4,1) $f(x) \equiv 1$ односно $f(x) = \ln x + C$ где је C Euler-ова константа.

Ако искористимо резултате из претходних глава добијамо знатно више но што је добио M. Parodi. Тако се став 3.III у овом случају, када је $\nu = 1/2$, своди на следећи:

СТАВ 4.I. *Једино решење интегралне једначине* (4,1) *за* $\lambda = 2^{\mu}$ *које има особине:*

1. $f(x) \sim x^{\beta} L(x^2)$, $\beta > -1$, $x \to 0$ $(x \to \infty)$;

2. $e^{-sx} f(x)$ *интеграбилно у размаку* $(0, \infty)$ *за неко* $s = s_0$ *је* $f(x) \supset \frac{(\ln s)^{\mu}}{s}$.

На исти начин могу се пренети и сви остали ставови.

Како се скуп функција коме припадају сопствене функције интегралне једначине (3,1) не мења са ν, то и сама решења дата за једначину (3,1) остају и за интегралну једначину (4,1).

4.2. *ДОПУНА ТАБЛИЦА ЗА LAPLACE-ОВУ ТРАНСФОРМАЦИЈУ И НЕКЕ ИНТЕГРАЛНЕ ВЕЗЕ ЗА WRIGHT-ОВЕ ФУНКЦИЈЕ.*

Резултати претходних глава могу се користити да би добили извесне нове везе за Laplace-ову трансформацију и њима допунили таблице ове тако много коришћене трансформације.

Из досадашњег рада можемо начинити следећу таблицу

	L-функција	одговарајућа l-функција
1	$\int_0^\infty F_\nu(x/t^{1/\nu})\, f(t)\, \frac{dt}{\nu t}$ $f(t)$	$s^{\nu-1}\,\varphi(s^\nu)$ $\varphi(s)$
2	$t^{\mu-1}\,\Phi(\mu, \nu; -xt^\nu)$ $\nu>0,\ \mu>0$	$s^{-\mu}\, e^{-x/s^\nu}$
3	$t^{\mu-1}\,\Phi(\mu, -\nu; -x/t^\nu)$ $0<\nu<1$	$s^{-\mu}\, e^{-xs^\nu}$
4	$\frac{1}{\pi}\, t^{\mu}\, e^{-t^\nu \cos\nu\pi} \sin[t^\nu \sin\nu\pi - \mu\pi]$ $0<\nu<1,\ \mu>-1$	$s^{-\mu-1}\,\Phi(-\mu, -\nu; -1/s^\nu)$
5	$t^{\beta/2-1}\,\Phi(\beta, -\rho; -1/t^{\rho/2})$ $0<\rho<1$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^\beta}\, s^{-\beta/2}\, \Phi\left(\frac{\beta+1}{2}, -{}^1/_2\rho; -2^\rho s^{\rho/2}\right)$
6	$t^{\beta/2-1}\,\Phi(\beta, \rho; -t^{\rho/2})$ $\beta>0, \rho>0$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^\beta}\, s^{-\beta/2}\, \Phi\left(\frac{\beta+1}{2}, {}^1/_2\rho; -\frac{1}{2^\rho s^{\rho/2}}\right)$
7	$\frac{1}{\pi}\, t^{-\mu}\, e^{-\frac{1}{t^\nu}\cos\nu\pi} \sin\left(\mu\pi - \frac{\sin\nu\pi}{t^\nu}\right)$ $0<\nu<{}^1/_2$	$s^{\mu-1}\,\Phi(\mu, \nu; -s^\nu)$

Везе 1—4 следе из досадашњег рада. Треба још указати на важност прве везе за примену Laplace-ове трансформације; нарочито може корисно да послужи при тражењу L-функције

када је позната l-функција. Исто тако она нам омогућава да дођемо лако до неких интегралних веза за Wright-ове функције као што су:

a. $$\int_0^\infty \Phi(0, \nu; -t/\sigma^\nu)\, \Phi(\beta, \rho; -t^\rho)\, t^{\beta-1} \frac{dt}{\nu t} =$$
$$= \sigma^{\nu(\beta-1)}\, \Phi[\nu(\beta-1)+1, \rho\nu; -\sigma^{\nu\rho}],$$
$$\beta>0,\ \rho>0,\ 0<\nu<1;$$

специјалан случај ове релације је

$$\int_0^\infty \Phi(0, -\nu; -t/\sigma^\nu)\, t^{\frac{\beta-1}{2}} J_{\beta-1}(2\sqrt{t})\, dt =$$
$$= \sigma^{\nu(\beta-1)}\, \Phi[\nu(\beta-1)+1,\ \nu; -\sigma^\nu];$$

b. $$\int_0^\infty \Phi(0, -\nu; -t/\sigma^\nu)\, \Phi(\beta, -\rho; -1/t^\rho)\, t^{\beta-1} \frac{dt}{\nu t} =$$
$$= \sigma^{\nu(\beta-1)}\, \Phi[\nu(\beta-1)+1, -\rho\nu; -1/\sigma^{\nu\rho}];$$
$$0<\nu<1,\ 0<\rho<1$$

c. $$\int_0^\infty \Phi(0, -\nu; -t/\sigma^\nu)\, t^\rho \frac{dt}{\nu t} = \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\nu\rho+1)}\, \sigma^{\nu\rho}.$$
$$0<\nu<1,\ \rho>-1$$

На основу последњих релација a. и c., а узимајући у обзир да је $F_{1/2}(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-1/(4t)}$ добили смо везе под 5 и 6. Исправност последње везе из таблица може се показати на следећи начин:

Пођимо од већ познате релације

$$t^{\mu-1}\, \Phi(\mu, \nu; -t^\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{tz} z^{-\mu} e^{-1/z^\nu}\, dz,$$

где је C' дато на цртежу 2. Раставимо овај интеграл на три следећа

$$\int_{C'} e^{tz} z^{-\mu} e^{-1/z^\nu}\, dz = \int_{-\infty}^{0} e^{tx-1/x^\nu} \frac{dx}{x^\mu} +$$
$$+ \varepsilon i \int_{-\pi}^{\pi} e^{t\varepsilon e^{\theta i} - \varepsilon^{-\nu} e^{-\nu\theta i}} \frac{d\theta}{\varepsilon^\mu e^{\mu\theta i}} + \int_0^{-\infty} e^{xt} e^{-1/x^\nu e^{-2\nu\pi i}} e^{-2\mu\pi i} \frac{dx}{x^\mu}.$$

Пустимо $\varepsilon \to 0$ и добићемо

$$\int_{C'} e^{tz} e^{-1/z^{\nu}} \frac{dz}{z^{\mu}} = \int_{-\infty}^{0} e^{tx-1/x^{\nu}} \frac{dx}{x^{\mu}} + \int_{0}^{-\infty} e^{tx-1/x^{\nu} e^{-2\nu\pi i}} e^{-2\mu\pi i} \frac{dx}{x^{\mu}}.$$

Извршимо смену $x = -\xi$ у горњим интегралима, па ћемо добити:

$$t^{\mu-1} \Phi(\mu, \nu; -t^{\nu}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{tz} z^{-\mu} e^{-1/z^{\nu}} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{\infty} e^{-t\xi - \xi^{-\nu} e^{\nu\pi i}} \frac{d\xi}{\xi^{\mu} e^{-\mu\pi i}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{\infty} e^{-t\xi - \xi^{-\nu} e^{-\nu\pi i}} \frac{d\xi}{\xi^{\mu} e^{\mu\pi i}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{\infty} e^{-t\xi} \frac{1}{\xi^{\mu}} e^{-\xi^{-\nu}\cos\nu\pi} \left\{ e^{-\left(\frac{\sin\nu\pi}{\xi^{\nu}} - \mu\pi\right) i} - e^{\left(\frac{\sin\nu\pi}{\xi^{\nu}} - \mu\pi\right) i} \right\} d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-t\xi} \frac{1}{\xi^{\mu}} e^{-\xi^{-\nu}\cos\nu\pi} \sin\left(\mu\pi - \frac{\sin\nu\pi}{\xi^{\nu}}\right) d\xi.$$

Тиме смо показали тачност и ове последње релације.

V. ОСНОВНЕ ОСОБИНЕ WRIGHT-ОВИХ ФУНКЦИЈА И ФУНКЦИЈА КОЈЕ СЕ ПРАВИЛНО ПОНАШАЈУ

5.1. *WRIGHT-ОВА ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА BESSEL-ОВИХ ФУНКЦИЈА И ЊИХОВЕ ОСОБИНЕ*

E. Wright [21, a] посматра следећу целу функцију

$$\Phi(\beta, \rho; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(i+1)\,\Gamma(\rho i + \beta)}; \tag{5,1}$$

ρ је реалан и позитиван број, β број реалан или комплексан. Када је $\rho = 1$ тада је

$$J_{\beta-1}(t) = (1/2\, t)^{\beta-1} \Phi(\beta, 1; -{}^{1}/_{4}\, t^2),$$

где је $J_{\beta}(t)$ Bessel-ова функција.

Ову класу функција Wright је искористио када је тражио асимптотски развитак коефицијената степеног реда функције

$$(1-x)^{-\beta} \exp\left\{\frac{\alpha}{(1-x)^{\rho}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n.$$

где су α и β макакви комплексни бројеви $\alpha \neq 0$.

Функција $\Phi(\beta,\rho;z)$ може се изразити и помоћу интеграла. Нека је u-раван пресечена по правој $\arg u = \pi$ и нека је $|\arg u| \leqslant \pi$ у пресеченој равни, тада је

$$\Phi(\beta,\rho;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} u^{-\beta}\exp\left(u + \frac{z}{u^{\rho}}\right)du. \qquad (5,2)$$

где је C' контура која полази од $-\infty$ обилази почетак у позитивном смеру и враћа се до $-\infty$ обавијајући пресек (цртеж 2.).

Даље Wright показује у којој се мери извесне особине Bessel-ове функције преносе на функције $\Phi(\beta,\rho;z)$. Тако је

$$\rho z \Phi(\beta+\rho,\rho;z) = \Phi(\beta-1,\rho;z) + (1-\beta)\Phi(\beta,\rho;z),$$

$$\frac{d}{dz}\Phi(\beta,\rho;z) = \Phi(\beta+\rho,\rho;z) \qquad (5,3)$$

или

$$\rho z\frac{d}{dz}\Phi(\beta,\rho;z) = \Phi(\beta-1,\rho;z) + (1-\beta)\Phi(\beta,\rho;z).$$

Када је $\rho = p/q$, p и q цели бројеви, функција $\Phi(\beta,\rho;z)$ задовољава диференцијалну једначину реда $p+q$:

$$z^{\frac{\beta-1}{\rho}}\Phi(\beta,\rho;z) = \left(\rho z^{1-1/\rho}\frac{d}{dz}\right)^{p} z^{\frac{\beta+p-1}{\rho}}\left(\frac{d}{dz}\right)^{q}\Phi(\beta,\rho;z) \qquad (5,4)$$

која претставља уопштење Bessel-ове диференцијалне једначине када је $\rho > 0$.

За ову функцију Wright показује следећу теорему:

Ако је $\arg(-z) = \xi$, $|\xi| \leqslant \pi$,

тада је

$$\Phi(\beta,\rho;z) = H(z_1) + H(z_2),$$

где смо са $H(z)$, z_1, и z_2 *обележили*

$$H(z) = z^{1/2-\beta}e^{(1+1/\rho)z}\left\{\sum_{m=0}^{M}\frac{(-1)^m}{z^m}a_m + O\left(\frac{1}{|z|^{M+1}}\right)\right\},$$

$$z_1 = (\rho|z|)^{\frac{1}{\rho+1}}e^{\frac{\xi+\pi}{\rho+1}i}; \quad z_2 = (\rho|z|)^{\frac{1}{\rho+1}}e^{\frac{\xi-\pi}{\rho+1}i}.$$

Коефицијенти a_m *су дате функције од* β *и* ρ.

У једном каснијем раду Wright [21, c] проширује ову класу функција на случај када је $-1 < \rho < 0$. И тада је

$$\Phi(\beta,-\sigma;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\beta-n\sigma)}, \quad \rho = -\sigma, \quad 0 < \sigma < 1. \qquad (5,5)$$

и

$$\Phi(\beta, -\sigma; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} u^{-\beta} \exp(u + z u^{\sigma})\, du, \qquad (5,6)$$

где је C' контура већ дата цртежом 2. Према томе интеграл (5,2) важи за свако $\rho > -1$.

И за овај случај Wright даје теорему о асимптотском понашању функције $\Phi(\beta, -\sigma; z)$, $0 < \sigma < 1$.

Ако је $|\arg(-z)| \leqslant \min\{{}^3/_2\pi(1-\sigma), \pi\} - \varepsilon$, *тада је*

$$\Phi(\beta, -\sigma; z) = I(y),$$

где смо са $I(y)$ *и* y *обележили*

$$I(y) = y^{1/2-\beta} e^{-y} \left\{ \sum_{m=0}^{M} A_m y^{-m} + O(y^{-M}) \right\},$$

$$y = (1-\sigma)[\sigma^{\sigma}(-z)]^{1/(1-\sigma)},$$

а A_i *су дате константе које зависе од* β *и* σ.

У случају $\rho = p/q$, p и q цели позитивни бројеви Wright је, као што смо видели, показао да функција $\Phi(\beta, \rho; z)$ задовољава диференцијалну једначину реда $p+q$, наиме једначину (5,4). Показаћемо да се и када је $\rho = -p/q$ и $p < q$, p и q цели позитивни бројеви, може лако наћи диференцијална једначина коју та функција задовољава, а која је реда q.

За доказ послужићемо се са три релације (5,3) које уопштавају особине Bessel-ових функција, а које важе и за $\rho = -\sigma$, $0 < \sigma < 1$. Искористићемо прву и другу од њих

$$\Phi(\beta - p, -\sigma; z) = \Phi(\beta - q\sigma, -\sigma; z) = \left(\frac{d}{dz}\right)^q \Phi(\beta, -\sigma; z).$$

Из треће, пак, добивамо

$$z^{\frac{1-\beta+p}{\sigma}} \Phi(\beta - p, -\sigma; z) = \left(-\sigma z^{1+\frac{1}{\sigma}} \frac{d}{dz}\right)^p z^{\frac{1-\beta}{\sigma}} \Phi(\beta, -\sigma; z).$$

Према томе је

$$z^{\frac{1-\beta+p}{\sigma}} \Phi(\beta - p, -\sigma; z) = \left(-\sigma z^{1+\frac{1}{\sigma}} \frac{d}{dz}\right)^p z^{\frac{1-\beta}{\sigma}} \Phi(\beta, -\sigma; z). \qquad (5,7)$$

На тај начин добили смо диференцијалну једначину реда q која претставља уопштење Bessel-ове диференцијалне једначине за $-1 < \rho < 0$.

5.2. *О ФУНКЦИЈАМА КОЈЕ СЕ ПРАВИЛНО ПОНАШАЈУ.*

Пошто су дефиниције потпуно аналогне за $t=\infty$ и $t=0$, то ћемо их дати само за $t=\infty$.

За функцију $q(t)$ казаћемо да се правилно понаша за $t=\infty$ ако она задовољава релацију

$$q(t) \sim t^{\alpha} L(t),$$

кад $t \to \infty$, где је $L(t)$ позитивна и непрекидна функција за свако $t \geqslant 0$, а која припада класи споропроменљивих функција, тј. задовољава релацију

$$\frac{L(ut)}{L(t)} \to 1, \quad t \to \infty$$

за свако $u > 0$ (види [10]).

Наведимо овде само оне особине овако дефинисане класе функција $q(t)=t^{\alpha} L(t)$ које ћемо користити у даљем раду.

A. $$\frac{q(tu)}{q(t)} \to u^{\alpha}, \quad u>0, \quad t \to \infty,$$

B. $$q(t) \to \infty, \quad \alpha > 0, \quad t \to \infty,$$
$$q(t) \to 0, \quad \alpha < 0, \quad t \to \infty.$$

C. Обележимо са $P_1(x)$, $P_2(x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ следеће функције

$$1 \left\{ \begin{aligned} P_1(x) &= \max_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^{\gamma} L(t)\}, \\ P_2(x) &= \max_{t \geqslant x} \{t^{-\gamma} L(t)\}; \end{aligned} \right.$$

$$2 \left\{ \begin{aligned} p_1(x) &= \min_{t \geqslant x} \{t^{\gamma} L(t)\}, \\ p_2(x) &= \min_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^{-\gamma} L(t)\}; \end{aligned} \right.$$

тада је:

$$P_1(x) \sim x^{\gamma} L(x), \quad x \to \infty$$
$$P_2(x) \sim x^{-\gamma} L(x), \quad x \to \infty$$
$$p_1(x) \sim x^{\gamma} L(x), \quad x \to \infty$$
$$p_2(x) \sim x^{-\gamma} L(x), \quad x \to \infty$$

Према томе су $P_i(x)$ и $p_i(x)$, $i=1,2$ функције које се такође правилно понашају за $x \to \infty$, а при томе су обе функције монотоне.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Abel — Oeuvres, 2.

[2] R. P. Agarwal — a. Somes properties generalized Hankel transform. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **43**, (1951), pp. 153—167.

b. Sur une généralisation de la transformation de Hankel. *Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, **64** (1950), pp. 164—168.

[3] P. Appell — Formation d'une fonction $F(x)$ possédant la proprieté. *Comptes Rendus* **88** (1879), pp. 807—810.

[4] S. Bochner — Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. *Sitz. Preussische Akad. Wiss., Ph. Math. Klasse*, (1930), s. 403—411.

[5] G. Doetsch — a. Handbuch der — Laplace Transformation, B. I. — 1950.

b. Theorie und Anwendung der Laplace — Transformation, 1937.

c. Zerlegung einer Funktion in Gaussche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes. *Math Zeitschrift* **41** (1936) pp. 283—318.

[6] Эфрос А. М., Данилеъский А. М. — Операционное исчисление и контурные интегралы. Гос. научно-техн. Украины 1937.

[7] Fredholm — Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. Stockh. Öfh. **57** (1900), pp. 39—46.

[8] H. C. Gupta — On operational calculus. *Proc. Nat. Inst. Sc. India*, **14** (1948), p. 131.

[9] P. Humbert — Nouvelles correspondances symboliques. *Bull. Sc. Math.* **LXIX** (1945), p. 121—129.

[10] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière des fonctions. *Mathematica* (Cluj) IV (1930) pp. 38—53.

Sur un mode de croissance régulière, théorèmes fondamentaux. *Bull. Soc Math. France* **61** (1933).

[11] K. Knopp — Zwei Abelsche Sätze. *Publ. l'Inst. Math, Beograd de l'Acad. Serbe des Sci.* **IV** (1952), p. 89—94.

[12] Magnus and Oberhettinger — Formel und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 1948.

[13] J. G. Mikušinski — Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire. *Studia Math.* **12** (1951) pp. 208—224.

[14] Paley and Wiener — Fourier transforms in the complex domain, 1934.

[15] M. Parodi — Équations intégrales et transformation de Laplace, 1950.

[16] H. Pollard — The representation of e^{-x^λ} as a Laplace integrale. *Bull. Am. Math. Soc.* **5** (1946).

[17] Э. Я. Риекстынш — Некоторые новые формулы для преобразования Лапласа. *Пр. мат. и мех.*, **XVII** (1953), p. 761,

[18] Б. Станковић — Решење једне хомогене интегралне једначине. *Зборник Мат. инст.* **3** (1953), стр. 95—106.

[19] V. Volterra — Sulla inversione degli integrali definiti. *Rend. Ac. Lincei*, (5), **5**$_1$ (1896) pp. 177—185.

[20] N. Wiener und E. Hopf — Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. *Sitz. Ak. Berlin* (1931), s. 696—706.

[21] L. Wlodarski — Une remarque sur une classe des fonctions exponentielles du calcul operatoire. *Studia Math.* **13** (1952), pp. 118—189.

[22] E. M. Wright. — a. On the coefficients of power series having exponential singularities. *J. Lond. Math. Soc.* **8** (1953), pp. 71—79.

b. The asymptotic expansion of the generalized Bessel function. *Proc. Lond. Math Soc.* **38** (1934), pp. 258—270.

c. The generalized Bessel function of order greater than one. *Quart. J. Math. Oxford series* **2** (1940), p.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS INTÉGRALES SINGULIÈRES

par

Bogoljub Stanković

Les transformations intégrales, en particulier celles de Laplace et de Fourier, se sont avérées particulièrement appropriées à la solution de certaines classes d'équations intégrales. C'est ce que montrent les travaux de Bochner [4], de G. Doetsch [5c], de Wiener et Hopf [20] et, en ces derniers temps, de M. Parodi [15].

M. Parodi considère l'équation intégrale

$$f(x) + \lambda \int_0^\infty K(x, t) f(t)\, dt = g(x), \tag{1}$$

où $K(x, t)$ est caractérisé par

$$\int_0^\infty e^{-sx} K(x, t)\, dx = \rho(s)\, e^{-t\psi(s)}, \tag{2}$$

se réduisant, sous certaines conditions supplémentaires, à l'aide de la transformation de Laplace, à l'équation fonctionnelle

$$\varphi(s) + \lambda \rho(s)\, \varphi[\psi(s)] = \gamma(s), \tag{3}$$

où $\varphi(s)$ et $\gamma(s)$ sont les transformations de Laplace de fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

L'idée de M. Parodi donne lieu à deux problèmes. Le premier est la forme du noyau satisfaisant à l'équation (2). Le second est la solution de cette équation. La présente note traite les deux problèmes pour une certaine classe d'équations intégrales.

Au premier chapitre on considère d'abord un cas spécial de l'équation (2), à savoir celui lorsque $\rho(s)$ et $\psi(s)$ sont de puissances de s, c'est-à-dire l'équation

$$\int_0^\infty e^{-sx} K(x, t)\, dx = s^{\mu} e^{-t s^{\nu}}, \tag{4}$$

et l'on démontre la proposition suivante:

Proposition 1.I. L'équation intégrale (1) n'a de solutions dans la classe de fonctions L[1] que pour $0 < \nu < 1$ et μ quelconque, ou pour $\nu \leqslant 0$, $\mu < 0$. L'unique solution pour ces valeurs de ν et μ est

$$K_{\mu, \nu}(x, t) = x^{-\mu-1}\, \Phi(-\mu, -\nu; -t x^{-\nu}),$$

où $\Phi(\beta, \rho; z)$ est la généralisation de Wright des fonctions de Bessel [22].

Pour certaines valeurs spéciales de ν et μ l'équation (4) appartien à une classe d'équations traitées par M. Parodi, à savoir, la classe des équations (2) où $\rho(s)$ et $\psi(s)$ étant supposées des fonctions l.[1] Or, le fait que $\rho(s)$ et $\psi(s)$ doivent être des fonctions l est une restriction sensible, à ce point que les exemples données par Parodi lui même ne satisfont pas à ces conditions. La proposition B, que j'ai démontrée ici, s'étend aussi à ces exemples.

Dans la seconde partie du premier chapitre on fait connaître certaines propriétés de la fonction $K_{\mu, \nu}(x, t)$, solution de l'équation (4), pour des valeurs spéciales de μ et ν, ce qui complète certains resultats de H. Pollard [16], de J. Mikušinski [13] et de L. Wlodarski [21]. Ainsi on a établi les relations suivantes

$$K_{\mu, \nu}(x, 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-xu}\, u^{\mu}\, e^{-u^{\nu} \cos \nu\pi} \sin (u^{\nu} \sin \nu\pi - \mu\pi)\, du,$$

$$0 < \nu < 1, \quad \mu > -1,$$

$$K_{0, \nu}(x, 1) \sim \sin \nu\pi \frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}}, \quad x \to \infty,$$

$$K_{0, \nu}(x, 1) = y^{1/2} e^{-y} \left\{ \sum_{m=0}^{M} A_m y^{-m} + O(y^{-M}) \right\},$$

où

$$y = (1-\nu)\,[\nu^{\nu}(x^{-\nu})]^{\frac{1}{1-\nu}}$$

Et, enfin

$$K_{0, \nu}(x, 1) > 0, \quad \infty > x > 0.$$

[1] V. la definition de fonstion L et l G. Doetsch [5a].

Au second chapitre on a défini et traité la transformation intégrale suivante

$$P_\nu(\sigma, f) = \int_0^\infty F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) f(x) \frac{dx}{\nu x},$$

où $F_\nu(x) = x K_{0,\nu}(x, 1)$.

Pour cette transformation on a démontré les propositions de convergence suivantes:

Proposition 2, I. La transformation $P_\nu(\sigma, f)$ étant convergente pour un $\sigma = \sigma_0$, elle est convergente pour tout $0 < \sigma < \sigma_0$. Si, en outre, $f(x) = 0$ pour $0 \leqslant x < \eta$, alors

$$P_\nu(\sigma, f) = O\left\{e^{-c\left(\frac{\eta}{\sigma^\nu}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}}\right\}, \quad c < (1-\sigma)\sigma^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}.$$

Proposition 2, III. $f(t)$ étant une fonction L[1] et

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \varphi(s),$$

alors

$$\int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^\infty F_\nu(t/\tau^{1/\nu}) f(\tau) \frac{d\tau}{\nu\tau} = s^{\nu-1} \varphi(s^\nu).$$

Puis on a démontré la proposition de nature abélienne suivante

Proposition 2, IV. La transformation $P_\nu(\sigma, f)$ étant convergente pour $\sigma = \sigma_0$ et $\frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}$, $\alpha > -1$, oscillant entre des limites finies lorsque $x \to 0$, alors

$$\liminf_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})} \leqslant \liminf_{\sigma\to 0} \frac{P_\nu(\sigma, f)}{C_{\alpha,\nu}\sigma^{\nu\alpha} L(s)} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{\sigma\to 0} \frac{P_\nu(,\sigma f)}{C_{\alpha,\nu}\sigma^{\nu\alpha} L(\sigma)} \leqslant \limsup_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}.$$

Et, enfin, la proposition de nature tauberienne suivante:

Proposition 2, VIII. $F(t) = \frac{t^{\alpha\nu} f(t^{-\nu})}{L(1/t)}$ étant une fonction bornée dans l'intervalle $(0, \infty)$, alors, de

$$P_\nu(\sigma, f) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)} \sigma^{\nu\alpha} L(\sigma), \quad \sigma \to 0,$$

résulte

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\frac{\tau^{\alpha\nu}}{L(1/\tau)}f(1/\tau^{\nu})\,d\tau\sim 1,\quad t\to\infty.$$

Si, en outre, $F(t)$ est à croissance monotone pour $t>0$, il s'ensuit

$$\lim_{t\to\infty}F(t)=1,$$

ou que

$$f(t)\sim t^{\alpha}L(t^{1/\nu}),\quad t\to 0.$$

En partant des résultats obtenus aux deux premiers chapitres, le troisième chapitre est consacré à la solution de l'équation intégrale homogène

$$f(x)=\lambda\int_{0}^{\infty}F_{\nu}(x/t^{1/\nu})\,f(t)\frac{dt}{\nu t}. \tag{5}$$

Et on a démontré les propositions suivantes:

Proposition 3, I. L'équation (5) ne peut avoir pour solution $f(x)$ telle que

1) $\dfrac{f(x)}{x^{\alpha}L(x^{1/\nu})}$, $\alpha>-1$ oscille entre des limites finies de même signe;

2) $e^{-sx}\,f(x)$ intégrable pour $s=s_{c}$ dans l'intervalle $(0,\infty)$ que si $\alpha=0$, $\lambda=(1/\nu)^{\mu}$.

Proposition 3, II. Soient

1) $\omega_1(x)$ une fonction périodique, de periode 1, c'est-à-dire $\omega_1(x+1)=\omega_1(x)$;

2) $f(x)$ une fonction telle que

$$\int_{0}^{\infty}e^{-sx}f(x)\,dx=\frac{1}{s}(\ln s)^{\mu}\,\omega_1\left(\frac{\ln\ln s}{\ln\nu}\right),$$

alors $f(x)$ est une solution de l'équation intégrale (5) pour $\lambda=(1/\nu)^{\mu}$.

Proposition 3, III. L'unique solution $f(x)$ de l'équation (5) telle que

1) $f(x)\sim x^{\alpha}L(x^{1/\nu})$, $x\to 0\,(x\to\infty)$, $\alpha>-1$,

2) $e^{-sx}\,f(x)$ soit intégrable pour $s=s_0$ dans l'intervalle $(0,\infty)$, est $f(x)\supset\dfrac{1}{s}(\ln s)^{\mu}$.

Dans ce chapitre on donne également la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) = \lambda\,\varphi(x^n).$$

Enfin on a donné aussi les solutions mêmes $f(t)$ d'équation (5) qui se comportent régulièrement.

Par un contre-exemple on a fait voir que, lorsque la solution ne se comporte pas régulièrement au voisinage de zéro ou de l'infini, on a alors un nombre illimité de solutions.

Au sixième chapitre on a appliqué les résultats obtenus a un problème de physique et on a donné certaines relations nouvelles pour la transformation de Laplace et les fonctions de Wright.

Зборник радова С. А. Н. XLIII — Математички институт С. А. Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

БОГДАН БАЈШАНСКИ

О НУЛАМА ИЗВОДА РАЦИОНАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ

Одређивање области у којима се налазе нуле извода једне класе рационалних функција.

У геометрији полинома класичан је Gauss-Lucas-ов став, који тврди да се нуле извода једног полинома налазе у најмањем конвексном полигону описаном око нула тог полинома. У овоме раду даје се следеће уопштење тога става за једну класу рационалних функција.

СТАВ. *Ако најмањи конвексан полигон описан око нула једне рационалне функције не задире у најмањи конвексан полигон описан око полова исте функције, тада се све нуле извода те функције налазе у двема областима, од којих се свака добива као полусенка контуре једног од поменутих полигона кад је контура другог извор светлости.*

Доказ. Нека су z_i $(i=1,2,\ldots,j)$ нуле и p_i $(i=1,2,\ldots k)$ полови рационалне функције $f(z)$. Тада је

$$f(z)=\frac{\prod_{i=1}^{j}(z-z_i)^{m_i}}{\prod_{i=1}^{k}(z-p_i)^{n_i}}.$$

Узимајући логаритамски извод функције $f(z)$, одређивање области нула функције $f'(z)$ своди се на одређивање области нула функције

$$g(z)=\sum_{i=1}^{j}\frac{A_i}{z-a_i}+\sum_{i=j+1}^{n}\frac{A_i}{a_i-z}, \tag{1}$$

где су A_i позитивни бројеви.

Претпоставићемо да су област нула и област полова функције $f(z)$ раздвојене, односно да најмањи конвексан полигон P описан око тачака a_i $(i=1,2,\ldots j)$ не задире у аналоган полигон Q око тачака a_i $(i=j+1, j+2,\ldots n)$.

Нека је z нула функције $g(z)$. Ставимо

$$\xi_i = \begin{cases} \dfrac{1}{z - a_i}, & 1 \leqslant i \leqslant j \\ \dfrac{1}{a_i - z}, & j + 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Тада из (1) следи да је

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \xi_i = 0,$$

па је 0 у унутрашњости најмањег конвексног полигона описаног око тачака ξ_i. Стога ће она бити и у унутрашњости најмањег конвексног полигона описаног око тачака $1/\xi_i$. Зато постоје позитивни бројеви B_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, такви да је

$$\sum_{i=1}^{n} B_i \frac{1}{\xi_i} = 0,$$

тј.

$$\sum_{i=1}^{j} B_i (z - a_i) - \sum_{i=j+1}^{n} B_i (z - a_i) = 0,$$

одакле следи

$$z\left(\sum_{i=1}^{j} B_i - \sum_{i=j+1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{j} B_i a_i - \sum_{i=j+1}^{n} B_i a_i.$$

Не може бити

$$\sum_{i=1}^{j} B_i - \sum_{i=j+1}^{n} B_i = 0,$$

јер би тада на основу последње везе следило

$$\sum_{i=1}^{j} B_i a_i - \sum_{i=j+1}^{n} B_i a_i = 0,$$

одакле би се добило

$$\frac{\sum_{i=1}^{j} B_i a_i}{\sum_{i=1}^{j} B_i} = \frac{\sum_{i=j+1}^{n} B_i a_i}{\sum_{i=j+1}^{n} B_i}$$

а то би, због позитивности B_i, значило да постоји тачка која је истовремено унутрашња тачка и полигона P и полигона Q. Међутим, то противречи претпоставци да ти полигони не задиру један у други.

Стога се може написати

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{j} B_i a_i - \sum_{i=j+1}^{n} B_i a_i}{\sum_{i=1}^{j} B_i - \sum_{i=j+1}^{n} B_i},$$

тј.

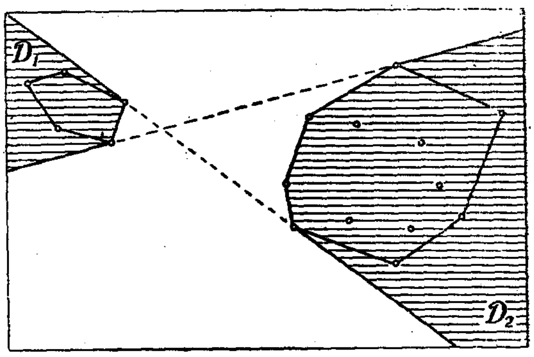
$$z = \frac{p z_1 - q z_2}{p - q},$$

где је

$$p = \sum_{i=1}^{j} B_i, \quad q = \sum_{i=j+1}^{n} B_i$$

$$z_1 = \frac{\sum_{i=1}^{j} B_i a_i}{\sum_{i=1}^{j} B_i}, \quad z_2 = \frac{\sum_{i=j+1}^{n} B_i a_i}{\sum_{i=j+1}^{n} B_i}.$$

Како су z_1 и z_2 унутрашње тачке полигона P и Q, то се свака нула функције $g(z)$ налази на правој која спаја неке две



Сл. 1

унутрашње тачке полигона P и Q, али ван дужи која спаја те две тачке. Дакле све нуле $g(z)$ су у двема областима, од којих је свака полусенка контуре једног полигона кад је контура другог извор светлости (области D_1 и D_2, шрафиране на цртежу). Тиме је став доказан.

Последица. Ако се сви полови функције $g(z)$, дефинисане у (1), налазе на правој p, и ако најмањи интервал који садржи тачке a_i $(i = 1, 2, \dots j)$ не задире у најмањи интервал који садржи тачке a_i $(i = j+1,\ j+2, \ldots, n)$, тада се и све нуле функције $g(z)$ налазе на правој p. Специјално, када је права p реална оса, тада су све нуле функције $g(z)$ реалне.

Напомена. Не постоји став сличне природе кад полигони P и Q имају заједничку унутрашњу тачку. Тада се, наиме, може лако показати, резонујући као у доказу, само обрнутим путем, да се бројеви A_i могу одредити тако да добивена функција $g(z)$ има нулу у произвољној, унапред датој тачки z-равни.

(Саопштено на седници Мат. инст. 2-II-1955)

SUR LES ZÉROS DE LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

par

Bogdan Bajšanski

Dans cette note est démontré le théorème suivant:

Si les plus petits polygones convexes circonscrits autour des zéros ainsi que des pôles d'une fonction rationnelle n'empiètent pas l'un sur l'autre, alors tous les zéros de la dérivée de cette fonction se trouvent dans deux régions, chacune desquelles étant la pénombre d'un polygone lorsque l'autre est considéré comme une source de lumière.

On obtient ainsi une généralisation du théorème bien connu de Gauss-Lucas sur les zéros de la dérivée d'un polynôme.

Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

М. ПРВАНОВИЋ

О ЈЕДНОМ ПОЉУ ВЕКТОРА ДУЖ КРИВЕ ПОТПРОСТОРА РИМАНОВА ПРОСТОРА

У овом раду се успоставља и испитује релација између вектора $v^i = \frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3} + g_{jk} \frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2} \frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2} \frac{\delta x^i}{\delta s}$ криве C потпростора Риманова простора и вектора који одговара вектору v^i у околном простору.

1. *ОЗНАКЕ И ПОТРЕБНЕ ЈЕДНАКОСТИ.* Нека су y^α $(\alpha = 1,2,\ldots,m)$ координате а $a_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta$ прва основна форма Риманова простора V_m. Нека је V_n потпростор простора V_m и нека су x^i $(i = 1,2,\ldots,n)$ координате а $g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ прва основна форма тог потпростора.

Претпоставимо да су метрике простора V_m и V_n позитивно дефинитне. Тада имамо релације

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta}\, y^\alpha{}_{,i}\, y^\beta{}_{,j}\,,$$

при чему запета испред индекса означава коваријантно диференцирање.

У току излагања латински индекси узимају вредности $1,2,\ldots,n$; први грчки индекси (α, β, γ) узимају вредности $1,2,\ldots,m$ а задњи грчки индекси (σ, τ) вредности од $n+1$ до m. Индекси испред којих се налази вертикална црта не означавају коваријантни или контраваријантни карактер величине, него служе за обележавање.

Ако са $N_{\sigma|}{}^\alpha$ обележимо систем од $m-n$ јединичних, узајамно ортогоналних, вектора простора V_m, нормалних на потпростор V_n, постоје једнакости

$$a_{\alpha\beta}\, N_{\sigma|}{}^\alpha\, N_{\tau|}{}^\beta = \delta^\sigma{}_\tau \tag{1.1}$$

$$a_{\alpha\beta}\, N_{\sigma|}{}^\alpha\, y^\beta{}_{,i} = 0. \tag{1.2}$$

Гаусове једначине потпростора V_n гласе ([1] с. 163, јед. 5)

$$y^\alpha{}_{;ij} = \sum_\sigma \Omega_{\sigma|ij}\, N_{\sigma|}{}^\alpha, \tag{1.3}$$

при чему су $\Omega_{\sigma|ij}$ компоненте тензора друге основне форме потпростора V_n, а тачка и запета (;) означава генералисано коваријантно диференцирање.

Генералисани коваријантни извод јединичног вектора нормале на потпростор дат је изразом ([1] с. 170, јед. 30)

$$N_{\sigma|}{}^{\alpha}{}_{;\,i} = -\,\Omega_{\sigma|ik}\, g^{kl}\, y^{\alpha}{}_{,\,l} + \sum_{\tau} \theta_{\tau\sigma|i}\, N_{\tau|}{}^{\alpha}, \tag{1.4}$$

где је

$$\theta_{\tau\sigma|i} = a_{\alpha\beta}\, N_{\sigma|}{}^{\alpha}{}_{;\,i}\, N_{\tau|}{}^{\beta} \equiv a_{\alpha\beta}\, N_{\tau|}{}^{\beta}\, N_{\sigma|}{}^{\alpha}{}_{,\,i} + [\mu\, \nu, \beta]_{\alpha}\, y^{\mu}{}_{,\,i}\, N_{\sigma|}{}^{\nu}\, N_{\tau|}{}^{\beta}.$$

Нека је $C: x^i = x^i(s)$ (s је лук) крива потпростора V_n. Обележимо са $\delta/\delta s$ апсолутно диференцирање дуж криве. Тада су

$$\frac{\delta x^i}{\delta s} = \frac{dx^i}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{\delta y^{\alpha}}{\delta s} = \frac{dy^{\alpha}}{ds} \tag{1.5}$$

компоненте јединичног вектора тангенте криве C респективно у односу на V_n и на V_m, а

$$\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{\delta^2 y^{\alpha}}{\delta s^2} = \frac{d^2 y^{\alpha}}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\,\gamma \end{Bmatrix} \frac{dy^{\beta}}{ds}\frac{dy^{\gamma}}{ds} \tag{1.6}$$

су компоненте вектора прве кривине криве C у односу, респективно, на потпростор V_n и на околни простор V_m. Ови вектори су везани релацијом ([1] с. 164, јед. 12′)

$$\frac{\delta^2 y^{\alpha}}{\delta s^2} = \frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\, y^{\alpha}{}_{,\,i} + \sum_{\tau} \Omega_{\tau|mn} \frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds} N_{\tau|}{}^{\alpha}. \tag{1.7}$$

Криве потпростора V_n Риманова простора V_m за које је, у свакој тачки, задовољен услов

$$a_{\alpha\beta} \frac{\delta q^{\alpha}}{\delta s} N_{\sigma|}{}^{\beta} = 0,$$

при чему је $q^{\alpha} = \dfrac{d^2 y^{\alpha}}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\,\gamma \end{Bmatrix} \dfrac{dy^{\beta}}{ds}\dfrac{dy^{\gamma}}{ds}$, су Дарбуове линије потпростора V_n [3]. Диференцијалне једначине Дарбуових линија потпростора V_n су [3]

$$\begin{aligned} &\Omega_{\sigma|ij} \frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\frac{\delta x^j}{\delta s} + \frac{\partial \Omega_{\sigma|ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} + 2\,\Omega_{\sigma|ij}\frac{d^2 x^i}{ds^2}\frac{dx^j}{ds} + \\ &+ \sum_{\tau} \Omega_{\tau|mn}\, \theta_{\sigma\tau|j} \frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

2. *ГЕОДЕЗИСКИ КРУГ.* Крива потпростора V_n чија је прва кривина константна, а друга једнака нули, зове се геодезиски круг. Из Френеових формула следи да су

$$\frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3} + g_{jk} \frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2} \frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2} \frac{\delta x^i}{\delta s} = 0 \tag{2.1}$$

диференцијалне једначине ових кривих. У низу радова К. Yano [2] испитује ове криве простора и оне величине простора које су инваријантне у односу на коциркуларну трансформацију, тј. ону конформну трансформацију при којој се геодезиски круг трансформише у геодезиски круг. Између осталог он, дуж кривих за које услов (2.1) није задовољен, дефинише вектор чије су контраваријантне компоненте

$$v^i = \frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3} + g_{jk} \frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2} \frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2} \frac{\delta x^i}{\delta s}. \tag{2.2}$$

Компоненте вектора, који у околном простору V_m одговара вектору v^i криве C, су

$$\mu^\alpha = \frac{\delta^3 y^\alpha}{\delta s^3} + a_{\beta\gamma} \frac{\delta^2 y^\beta}{\delta s^2} \frac{\delta^2 y^\gamma}{\delta s^2} \frac{\delta x^\alpha}{\delta s}. \tag{2.3}$$

У овом раду успостављамо релацију између вектора μ^α и v^i и испитујемо неке њене последице.

3. *РЕЛАЦИЈА ИЗМЕЂУ ВЕКТОРА μ^α И v^i КРИВЕ C, КОЈА ПРИПАДА ПОТПРОСТОРУ V_n.* Ако применимо генералисани коваријантни извод на једнакост (1.7), имамо

$$\left(\frac{\delta^2 y^\alpha}{\delta s^2}\right)_{;j} = \left(\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\right)_{;j} y^\alpha{}_{,i} + \frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} y^\alpha{}_{;ij} + \sum_\tau \left(\Omega_{\tau|mn} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds}\right)_{;j} N_{\tau|}{}^\alpha +$$
$$+ \sum_\tau \Omega_{\tau|mn} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds} N_{\tau|}{}^\alpha{}_{;j}.$$

После замене величина $y^\alpha{}_{;ij}$ и $N_{\tau|}{}^\alpha{}_{;j}$ њиховим вредностима из (1.3) и (1.4), добивамо

$$\left(\frac{\delta^2 y^\alpha}{\delta s^2}\right)_{;j} = \left(\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\right)_{;j} y^\alpha{}_{,i} + \sum_\tau \Omega_{\tau|ij} \frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} N_{\tau|}{}^\alpha + \sum_\tau \left(\Omega_{\tau|mn} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds}\right)_{;j} N_{\tau|}{}^\alpha +$$
$$+ \sum_\tau \Omega_{\tau|mn} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds} \left(- \Omega_{\tau|ik} g^{kl} y^\alpha{}_{,l} + \sum_\sigma \theta_{\sigma\tau|j} N_{\sigma|}{}^\alpha\right),$$

или после множења са dx^j/ds и сумирања по j

$$\frac{\delta^3 y^\alpha}{\delta s^3}=\frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3}y^\alpha{}_{,i}-\sum_\tau \Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|jk}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds}g^{kl}y^\alpha{}_{,l}+$$

(3.1)

$$+\sum_\sigma\left[\Omega_{\sigma|ij}\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\frac{\delta x^j}{\delta s}+\frac{d}{ds}\left(\Omega_{\sigma|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right)+\sum_\tau\Omega_{\tau|mn}\theta_{\sigma\tau|j}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right]N_{\sigma|}{}^\alpha$$

Ако са $e_{h|}{}^i$ обележимо компоненте јединичних вектора неке enuple потпростора V_n, где $h=1,2,\dots,n$ означава вектор а $i=1,2,\dots,n$ компоненту, онда је ([1] с. 46, јед. 27)

$$g^{kl}=\sum_h e_{h|}{}^k e_{h|}{}^l.$$

Како ова једнакост не зависи од избора n узајамно ортогоналних вектора $e_{h|}{}^l$, то ћемо их изабрати тако да вектор са компонентама $e_{1|}{}^i$ буде тангентан на криву, тј.

$$e_{1|}{}^i=\frac{dx^i}{ds}.$$

Стога је

$$\sum_\tau\Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|jk}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds}g^{kl}y^\alpha{}_{,l}=\sum_\tau\Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|jk}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}y^\alpha{}_{,l}+$$

(3.2)

$$+\sum_\tau\sum_h^{2,\dots,n}\Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|jk}e_{h|}{}^k e_{h|}{}^l\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds}y^\alpha{}_{,l}.$$

Из релације (1.7) следи

$$a_{\gamma\beta}\frac{\delta^2 y^\beta}{\delta s^2}\frac{\delta^2 y^\gamma}{\delta s^2}=a_{\beta\gamma}\left[\frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2}y^\beta{}_{,j}+\sum_\tau\Omega_{\tau|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}N_{\tau|}{}^\beta\right]\left[\frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2}y^\gamma{}_{,k}+\right.$$

$$\left.+\sum_\sigma\Omega_{\sigma|lt}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^t}{ds}N_{\sigma|}{}^\gamma\right],$$

одакле, с обзиром на (1.1) и (1.2), добивамо

$$a_{\beta\gamma}\frac{\delta^2 y^\beta}{\delta s^2}\frac{\delta^2 y^\gamma}{\delta s^2}=g_{jk}\frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2}\frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2}+\sum_\tau\Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|lt}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^t}{ds}. \tag{3.3}$$

На основу (3.1), (3.2) и (3.3), можемо написати

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^3 y^\alpha}{\delta s^3} + a_{\beta\gamma}\frac{\delta^2 y^\beta}{\delta s^2}\frac{\delta^2 y^\gamma}{\delta s^2}\frac{\delta y^\alpha}{\delta s} &= \left(\frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3} + g_{jk}\frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2}\frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2}\frac{\delta x^i}{\delta s}\right) y^\alpha{}_{,i} - \\
&- \sum_\tau \sum_h^{h=1,\dots,n} \Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|jk}\, e_{h|}{}^k e_{h|}{}^l \frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds} y^\alpha{}_{,l} + \\
&+ \sum_\sigma \left[\Omega_{\sigma|ij}\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\frac{\delta x^j}{\delta s} + \frac{d}{ds}\left(\Omega_{\sigma|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right) + \right.\\
&\left. + \sum_\tau \Omega_{\tau|mn}\,\theta_{\sigma\tau|j}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right] N_{\sigma|}{}^\alpha .
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Једнакост (3.4) је тражена релација између вектора μ^α и ν^i криве C у односу, респективно, на околни простор V_m и на потпростор V_n.

Из релације (3.4), с обзиром на (1.8), следи:

1) *Ако је крива C геодезиски круг у односу на околни простор и у односу на потпростор, онда је она и Дарбуова линија потпростора и дуж ње је*

$$\sum_\tau \sum_h^{2,\dots,n} \Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|jk}\, e_{h|}{}^k e_{h|}{}^l \frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0 .$$

2) *Ако је крива C геодезиски круг у односу на околни простор, онда је она Дарбуова линија потпростора, а вектор ν^i криве C у односу на потпростор има вредност*

$$\nu^l = \sum_\tau \sum_h^{2,\dots,n} \Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|jk}\, e_{h|}{}^k e_{h|}{}^l \frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds} , \tag{3.5}$$

тј. вектор чије су компоненте ν^i изражава се помоћу тензора друге основне форме потпростора V_n, и n јединичних, узајамно ортогоналних вектора од којих је један тангентан на криву C.

3) *Ако је крива C Дарбуова линија потпростора V_n и то у односу на сваку од $m-n$ нормала на потпростор, онда је вектор μ^α криве, у односу на околни простор, тангенцијалан на потпростор V_n.*

Другим речима:

Дуж Дарбуове линије потпростора V_n Риманова простора V_m, вектор μ^α криве је нормалан на нормали потпростора.

Заиста, ако релација (3.4) помножимо са $a_{\alpha\beta} N_{\rho|}{}^{\beta}$ и сумирамо по α, с обзиром на (1.1) и (1.2), добивамо

$$a_{\alpha\beta}\,\mu^{\alpha} N_{\rho|}{}^{\beta} = \Omega_{\rho|ij}\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\frac{\delta x^j}{\delta s} + \frac{d}{ds}\left(\Omega_{\rho|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right) +$$

$$+ \sum_{\tau} \Omega_{\tau|mn}\,\theta_{\rho\tau|j}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds}.$$

Према томе, кад је крива C Дарбуова линија потпростора V_n, задовољен је услов

$$a_{\alpha\beta}\,\mu^{\alpha} N_{\rho|}{}^{\beta} = 0. \tag{3.6}$$

4) Ако је потпростор V_n, потпростор неодређених линија кривине, онда је

$$\Omega_{\tau|ij} = \frac{\Omega_{\tau|}}{n} g_{ij}, \quad \Omega_{\tau|} = \Omega_{\tau|ij}\, g^{ij},$$

па је

$$\sum_{\tau}\sum_{h}^{2,\ldots,n}\Omega_{\tau|mn}\,\Omega_{\tau|jk}\, e_{h|}{}^{k}\, e_{h|}{}^{l}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^l}{ds} = \sum_{\tau}\sum_{h}^{2,\ldots,n}\left(\frac{\Omega_{\tau|}}{n}\right)^2 g_{jk}\, e_{h|}{}^{k}\frac{dx^j}{ds}\, e_{h|}{}^{l} = 0,$$

јер су, по претпоставци, јединични вектори $e_{h|}{}^{i}$ $(h = 2,\ldots, n)$ нормални на тангенти криве. Стога се, у овом случају, релација (3.4) може написати у облику

$$\begin{aligned}\frac{\delta^3 y^{\alpha}}{\delta s^3} + a_{\beta\gamma}\frac{\delta^2 y^{\beta}}{\delta s^2}\frac{\delta^2 y^{\gamma}}{\delta s^2}\frac{\delta y^{\alpha}}{\delta s} &= \left(\frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3} + g_{jk}\frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2}\frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2}\frac{\delta x^i}{\delta s}\right) y^{\alpha}{}_{,i} + \\ + \sum_{\sigma}\Bigg[\Omega_{\sigma|ij}\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\frac{\delta x^j}{\delta s} + \frac{d}{ds}\left(\Omega_{\sigma|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right) &+ \sum_{\tau}\Omega_{\tau|mn}\,\theta_{\sigma\tau|j}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds}\Bigg] N_{\sigma|}{}^{\alpha},\end{aligned} \tag{3.7}$$

тј.: *вектор* μ^{α}, *у односу на околни простор, криве* C, *која припада потпростору неодређених линија кривине, може се раставити на две компоненте: једну која је нормална на потпростор и другу која је тангенцијална на потпростор, а која је вектор* ν^i, *у односу на потпростор, криве* C.

5) Ако је потпростор V_n тотално геодезиски потпростор околна Риманова простора, тј. ако је

$$\Omega_{\tau|ij} = 0, \quad \text{за све} \quad \tau = m+1,\ldots, n$$

једначине (3.4) се своде на

$$\frac{\delta^3 y^{\alpha}}{\delta s^3} + a_{\beta\gamma}\frac{\delta^2 y^{\beta}}{\delta s^2}\frac{\delta^2 y^{\gamma}}{\delta s^2}\frac{\delta y^{\alpha}}{\delta s} = \left(\frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3} + g_{jk}\frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2}\frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2}\frac{\delta x^i}{\delta s}\right) y^{\alpha}{}_{,i}$$

одакле следи:

за сваку криву тотално геодезиског потпростора Риманова простора, вектор μ^α криве, у односу на околни простор, једнак је вектору v^i криве, у односу на потпростор, кад се овај последњи посматра из околна простора; и

геодезиски круг тотално геодезиског потпростора је и геодезиски круг околна простора и обрнуто.

4. *ОДНОС ИЗМЕЂУ ВЕКТОРА μ^α И v^i КРИВЕ С, КАД КРИВА ПРИПАДА ПОТПРОСТОРУ НЕОДРЕЂЕНИХ ЛИНИЈА КРИВИНЕ.* — Задржимо се сада на случају кад је V_n потпростор неодређених линија кривине. Тада је, с обзиром на услов $\Omega_{\tau|ij} = \Omega_{\tau|}\, g_{ij}/n$

$$\Omega_{\sigma|ij}\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\frac{\delta x^j}{\delta s} + \frac{d}{ds}\left(\Omega_{\sigma|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right) + \sum_\tau \Omega_{\tau|mn}\,\theta_{\sigma\tau|j}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds} =$$

$$= \frac{\Omega_{\sigma|}}{n}g_{ij}\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\frac{\delta x^j}{\delta s} + \frac{d}{ds}\left(\frac{\Omega_{\sigma|}}{n}g_{ij}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right) +$$

$$+ \sum_\tau \frac{\Omega_{\tau|}}{n}g_{mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\,\theta_{\sigma\tau|j}\frac{dx^j}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\Omega_{\sigma|}}{n}\right) + \sum_\tau \frac{\Omega_{\tau|}}{n}\,\theta_{\sigma\tau|j}\frac{dx^j}{ds}.$$

Стога се једначине (3.7) могу написати у облику

$$\mu^\alpha = v^i y^\alpha{}_{,i} + \sum_\sigma A_{\sigma|} N_{\sigma|}{}^\alpha,$$

где је

$$A_{\sigma|} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\Omega_{\sigma|}}{n}\right) + \sum_\tau \frac{\Omega_{\tau|}}{n}\,\theta_{\sigma\tau|j}\frac{dx^j}{ds},$$

или, ако ставимо

$$\sum_\sigma A_{\sigma|} N_{\sigma|}{}^\alpha = \xi^\alpha,$$

у облику

(4.1) $$\mu^\alpha = v^i y^\alpha{}_{,i} + \xi^\alpha$$

Обележимо са w, v и D интензитете вектора μ^α, v^i и ξ^α, тј. ставимо

$$w^2 = a_{\alpha\beta}\,\mu^\alpha\mu^\beta, \quad v^2 = g_{ij}\,v^i v^j, \quad D^2 = a_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha\xi^\beta.$$

Тада из (4.1) следи да су, за криву која припада потпростору неодређених линија кривине, интензитети вектора μ^α, v^i и ξ^α, тј. величине w, v и D, везане релацијом

$$w^2 = v^2 + D^2, \tag{4.2}$$

па се, ако су две од њих дате, трећа увек може израчунати.

Једначине (4.1) се такође могу написати у облику

$$w\,\mu_0^\alpha = v\,\bar{\mu}_0^\alpha + D\,\xi_0^\alpha, \tag{4.3}$$

при чему су сада μ_0^α и ξ_0^α компоненте јединичног вектора у одговарајућим правцима а $\bar{\mu}_0^\alpha$ су компоненте јединичног вектора v^i, кад се овај посматра у односу на околни простор,

Ако са α обележимо угао који образују јединични вектори μ_0^α и ξ_0^α и једначине (4.3) помножимо са $a_{\alpha\beta}\,\xi_0^\beta$, добивамо

$$w\,a_{\alpha\beta}\,\mu_0^\alpha\,\xi_0^\beta = D\,a_{\alpha\beta}\,\xi_0^\alpha\,\xi_0^\beta,$$

тј.

$$w\cos\alpha = D. \tag{4.4}$$

Множењем једначина (4.3) са $a_{\alpha\beta}\,\bar{\mu}_0^\beta$ и сумирањем по α, добивимо

$$w\,a_{\alpha\beta}\,\mu_0^\alpha\,\bar{\mu}_0^\beta = v\,a_{\alpha\beta}\,\bar{\mu}_0^\alpha\,\bar{\mu}_0^\beta,$$

што, с обзиром да вектори μ^α, $\bar{\mu}^\alpha$ и ξ^α припадају истој дводимензионој геодезиској површини, можемо написати у облику

$$w\sin\alpha = v. \tag{4.5}$$

Релација (4.4) даје везу између интензитета вектора μ^α и ξ^α, а релација (4.5) везу између интензитета вектора μ^α и v^i.

Из једначина (3.7) следе теореме:

Ако је крива С, која припада потпростору неодређених линија кривина, геодезиски круг у односу на околни простор, онда је она и геодезиски круг у односу на потпростор и Дарбуова линија тог потпростора.

Ако је крива С, која припада потпростору неодређених линија кривина, геодезиски круг у односу на потпростор, онда је вектор μ^α те криве, у односу на околни простор, нормалан на потпростор.

Вактор v^i криве С, која припада потпростору неодређених линија кривина, и која је Дарбуова линија потпростора у односу на сваку од $m-n$ нормала потпростора, посматран из околна простора, је вектор μ^α те криве.

(Саопштено на седници Мат. инст. 2-III-1955)

ЛИТЕРАТУРА

[1] C. E. Weatherburn — Riemannian geometry and the tensor calculus, Cambridge, 1950.

[2] K. Yano — Concircular Geometry I, II, III, IV. *Proc. Imper. Acad.* **16** (1940), str. 195—200, 354—360, 442—448, 505—511.

[3] M. Prvanovitch — Lignes de Darboux dans l'espace riemannien. *Bul. Sci. Math.* (2) t. **LXXVII** (1954).

A FIELD OF VECTORS ALONG A CURVE OF SUB-SPACE OF A RIEMANNIAN SPACE

by

Mileva Prvanovitch

Let V_n be a sub-space of a Riemannian space V_m, y^α the coordinates in V_m and x^i the coordinates in V_n. Latin indices take the values $1,2,\ldots,n$ and Greek ones $1,2,\ldots,m$ except τ, σ and ρ which take the values $n+1,\ldots,m$. (1. 6) are the components of the vectors of the first curvature, in respect to V_n and V_m, of the curve C, which belongs to the sub-space V_n. The curve C, whose first curvature is constant and the second is zero, is the geodesic circle of V_n. (2.1) are the differential equations of such curves. K. Yano [2] introduced the vector whose components v^i are given by the relation (2.2). This vector is equal to zero along the geodesic circle of V_n. (2.3) are the components of the vector μ^α, which corresponds, in the enveloping space V_m, to the vector v^i of curve C of sub-space V_n.

The object of this paper is to restitute and to investigate the equations (3.4). Those equations give the relation between the vector μ^α, in respect to the enveloping space V_n, and the vector v^i, in respect to the sub-space V_n, of the curve C of V_n.

Among the numerous consequences of the relation (3.4), we quote these:

If the curve C of V_n is the geodesic circle in respect to the enveloping space V_m, it is a Darboux line {[3]; eq. (1.8)} of the sub-space, and the vector v^i of C, in respect to the sub-space, has the value (3.5).

Along the Darboux line of the sub-space V_n, the vector μ^α of the curve satisfies the condition (3.6), i. e. it is normals of the sub-space V_n.

If the curve C of the sub-space with indeferminate lines of curvature is the Darboux line of the sub-space in respect of all m-n normals to the sub-space, the vector v^i of curve, observed in the enveloping space, is the vector μ^α of the curve.

The geodesic circle of the totally geodesic sub-space is the geodesic circle also of the enveloping space.

The magnitudes of the vectors μ^α, v^i and ξ^α of the curve C, which belongs to the sub- space with indeterminate linies of curvature, are bound by the relations (4.2), (4.4) and (4.5).

I4

ШЕФКИЈА РАЉЕВИЋ

CORRIGENDA УЗ РАД „О ЈЕДНОЈ ПРАВОЈ И ЈЕДНОЈ КАРАКТЕРИСТИЧНОЈ ДУЖИ У ПОЛИГОНИМА НУЛА ПОЛИНОМА“ *)

Приликом штампања, у уводу је омашком испуштена релација (10).

Наиме, почетак другог пасуса треба овако да гласи:

„Очигледно је да је Гаусово тежиште (3) полинома $P_n(z)$ идентично са геометријским тежиштем (4) само у случају кад је

$$p \sum_{\nu=1}^{p} m_\nu z_\nu = n \sum_{\nu=1}^{p} z_\nu , \tag{10}$$

на пр., кад све нуле тога полинома имају исти ред вишеструкости, тј. кад је

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_p \geqslant 1.\text{“} \tag{10'}$$

Учињена омашка не утиче на тачност ставова 1 и 2.

---

*) Овај Зборник, књ. 3., стр. 90.

Штампа
ГРАФИЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ „АКАДЕМИЈА“
Београд, Космајска 28 — Телефони: 20-732 и 24-701. Штампано у 1.000 примерака ћирилицом. Формат 70×100. Садржи 9 штампаних табака. Завршено 10-IV-1955