УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Давид Бузго

БЛАШКЕОВИ ПРОИЗВОДИ

мастер рад

Београд, 2024.

Ментор:

др Марек Светлик, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Миљан Кнежевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Владимир Божин, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: ____________________

Захвалност дугујем професору Мареку Светлику на помоћи током израде овог мастер рада.

Садржај

Глава 1

Увод

Блашкеови производи су названи по аустријском математичару Вилхелму Блашкеу* који је 1915. године увео бесконачне Блашкеове производе. Коначни Блашкеови производи су се изучавали и пре тога као специјална класа рационалних функција [1]. Конструисани су тако да буду ограничене холоморфне функције на јединичном диску са нулама у унапред задатом, коначном или бесконачном, скупу тачкака $z_1, z_2, \ldots$. Као производи аутоморфизама јединичног диска они су на неки начин аналогни полиномима који су производ аутоморфизама комплексне равни. Због тога, као и због још неких особина које ће бити описане они се некад називају *хиперболичким полиномима.*

1.1 Аутоморфизми јединичног диска

Блашкеови производи су коначан или бесконачан производ аутоморфизама јединичног диска. Да бисмо их дефинисали потребно је прво да пронађемо све аутоморфизме јединичног диска. У овој секцији ћемо увести појам конформног изоморфизма, као и конформног аутоморфизма. Доказаћемо Шварцову† лему, и помоћу ње одредити све аутоморфизме јединичног диска. Коначно, доказаћемо неке особине ових аутоморфизама које ће бити корисне за даљи рад.

*Wilhelm Blaschke (1885 - 1962) – аустријски математичар

†Karl Schwarz (1843 - 1921) – немачки математичар

Конформна пресликавања и аутоморфизми

Дефиниција 1.1. *Нека је Ω област. Пресликавање $f : \Omega \to \mathbb{C}$ је конформно на Ω ако је f холоморфно на Ω и $f'(z) \neq 0$ за свако $z \in \Omega$.*

Свако конформно пресликавање је локално „1-1”. Прецизније, имамо следеће тврђење.

Став 1.2. *Нека је Ω област, и нека је $f : \Omega \to \mathbb{C}$ конформно пресликавање. Тада за свако $z_0 \in \Omega$ постоји околина U тачке z_0 такво да је функција f ињективна на U.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Постоји $z_0 \in \Omega$ такво да за свако $r > 0$ функција f није ињективна на диску $B_r(z_0) = \{z \in \Omega \mid |z - z_0| < r\}$. Тада постоје низови комплексних бројева $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такви да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

- $h_n \neq t_n$;
- $|h_n|, |t_n| < \dfrac{1}{n}$;
- $f(z_0 + h_n) = f(z_0 + t_n)$.

Покажимо прво да је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(z_0 + t_n) - f(z_0 + h_n)}{t_n - h_n} = f'(z_0)$. Нека је $\gamma_n(t) = z_0 + h_n + t(t_n - h_n),\ t \in [0, 1]$ дуж која спаја тачке $z_0 + h_n$ и $z_0 + t_n$ и посматрајмо разлику

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z_0 + h_n) - f(z_0 + t_n)}{h_n - t_n} - f'(z_0)\right| &= \left|\frac{\int_{\gamma_n} f'(z)\,dz - f'(z_0)\int_{\gamma_n} dz}{t_n - h_n}\right| \\ &\leq \frac{\int_{\gamma_n} |f'(z) - f'(z_0)||dz|}{|t_n - h_n|} \\ &\leq \max_{t\in[0,1]} |f'(\gamma_n(t)) - f'(z_0)|\,.\end{aligned}$$

Како је $|h_n|, |t_n| < \dfrac{1}{n}$, имамо да је

$$\max_{t\in[0,1]} |f'(\gamma_n(t)) - f'(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|\leq 1/n} |f'(z) - f'(z_0)|.$$

Нека је сада $\varepsilon > 0$ произвољно. Функција f је холоморфна, па је и функција f' непрекидна, што значи да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $|f'(z) - f'(z_0)| < \varepsilon$ за свако $z \in B_{1/n_0}(z_0)$.

Односно, за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је

$$\left|\frac{f(z_0+h_n)-f(z_0+t_n)}{h_n-t_n} - f'(z_0)\right| < \varepsilon, \qquad \text{кад год је } n > n_0.$$

Дакле, имамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(z_0+h_n)-f(z_0+t_n)}{h_n-t_n} = f'(z_0)$. Са друге стране, како је $f(z_0+h_n) = f(z_0+t_n)$ за све $n \in \mathbb{N}$, добијамо да је $f'(z_0) = 0$ што је контрадикција.

То значи да за свако $z_0 \in \Omega$ постоји $r > 0$ такво да је f „1-1" на $U = B_r(z_0)$, што је и требало показати. $\square$

Конформно пресликавање, међутим, не мора бити „1-1". Посматрајмо, на пример, функцију $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ дефинисану са $f(z) = e^z$. Извод ове функције је $f'(z) = e^z \neq 0$, за све $z \in \mathbb{C}$, па је f конформна функција. Међутим, за свако $z \in \mathbb{C}$ и за свако $k \in \mathbb{Z}$ важи једнакост $f(z) = f(z + 2k\pi i)$, па функција f није „1-1".

Ипак, ако је функција $f : \Omega \to \mathbb{C}$ холоморфна и инјективна на целом домену тада је она и конформна.

Став 1.3. *Нека је $f : \Omega \to \mathbb{C}$ холоморфна и инјективна функција. Тада је f конформна.*

Доказ. Претпоставимо супротно – да постоји $z_0 \in \Omega$ такво да је $f'(z_0) = 0$. Без умањења општости можемо претпоставити да је $z_0 = 0$, и да је $f(0) = 0$. Постоји $\varepsilon > 0$ такви да за $|z| < \varepsilon$ важи једнакост

$$f(z) = az^k + z^{k+1}\psi(z),$$

при чему су $\psi(z)$ холоморфна функција на $B_\varepsilon = \{z \mid |z| < \varepsilon\}$, $a \in \mathbb{C}$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Уведимо функције $F(z) = az^k - w$ и $G(z) = z^{k+1}\psi(z)$. Показаћемо да за довољно мале $z, w \in \mathbb{C}$ важи неједнакост $|F(z)| > |G(z)|$. За произвољно $w \in \mathbb{C}$ је

$$\begin{aligned} |F(z) - |G(z)| &= |az^k - w| - |z^{k+1}\psi(z)| \\ &\geq |az^k| - |w| - |z^{k+1}\psi(z)| \\ &= |az^k|\left(1 - |z|\frac{|\psi(z)|}{|a|}\right) - |w|. \end{aligned}$$

Изаберимо $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ такво да за свако $|z| \leq \varepsilon_1$ важи $\left|z\dfrac{\psi(z)}{a}\right| < \dfrac{1}{2}$.

Сада је $|F(z)| - |G(z)| > 0$ ако је $|az^k|/2 - |w| > 0$, па је за свако w за које важи $|w| < \varepsilon_1^k \dfrac{|a|}{2}$ испуњена неједнакост $|F(z)| > |G(z)|$.

За w довољно блиско нули једначина $F(z) = 0$, тј. $az^k = w$ има тачно k решења у B_{ε_1}.

Дакле, за такво w важи да је$|F(z)| > |G(z)|$ за $|z| = \varepsilon_1$ и $F(z)$ има тачно k нула у B_{ε_1}. Испуњени су услови Рушеове теореме, па закључујемо да и $F + G$ има тачно k нула у B_{ε_1}.

Коначно, добили смо да функција $f(z) = w$ има $k \geq 2$ решења у околини тачке 0, па f није „1-1".

Дакле, ако је $f : \Omega \to \mathbb{C}$ холоморфна ињективна функција тада је она и конформна. $\square$

Дефиниција 1.4. *Нека су Ω_1, Ω_2 области у $\mathbb{C}$. Пресликавање $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ је конформни изоморфизам области Ω_1 на област Ω_2 ако је пресликавање f конформно и бијекција.*

Скуп свих конформних изоморфизама области Ω_1 на област Ω_2 означавамо са $\mathrm{Isom}(\Omega_1, \Omega_2)$. Специјално, скуп свих конформних пресликавања области Ω_1 на себе ($\mathrm{Isom}(\Omega_1, \Omega_1)$) означавамо са $\mathrm{Aut}(\Omega_1)$ и називамо га скуп свих конформних аутоморфизама области Ω_1.

Уколико постоји конформни изоморфизам области Ω_1 на област Ω_2, за области Ω_1 и Ω_2 кажемо да су изоморфне и пишемо $\Omega_1 \sim \Omega_2$. Да бисмо оправдали овај назив, покажимо да је овако дефинисана релација $\sim$ релација еквиваленције.

Став 1.5. *Релација $\sim$ је релација еквиваленције на скупу свих области $\Omega \subset \mathbb{C}$.*

Доказ. Докажимо најпре да је релација $\sim$ рефлексивна. Нека је дата произвољна област $\Omega \subset \mathbb{C}$. Уочимо идентичко пресликавање $\mathbf{1}_\Omega : \Omega \to \Omega$ дефинисано са $\mathbf{1}_\Omega(z) = z$. Оно је очигледно бијекција, а како је $\mathbf{1}'_\Omega(z) = 1 \neq 0$ за свако $z \in \Omega$ видимо да је $\mathbf{1}_\Omega$ конформни изоморфизам области Ω на област Ω.

Да бисмо доказали да је релација $\sim$ симетрична, претпоставимо да су дате две области $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ такве да постоји конформни изоморфизам $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ области Ω_1 на област Ω_2. Пресликавање f је бијекција, па постоји њему инверзно пресликавање $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ које је такође бијекција. Показаћемо да је пресликавање f^{-1} такође конформно на основу чега ћемо добити да је $\Omega_2 \sim \Omega_1$. Односно, да је $\sim$ симетрична релација.

Пресликавање f^{-1} је холоморфно као инверз холоморфног па је довољно показати да је $(f^{-1})'(w) \neq 0$ за $w \in \Omega_2$. Како је f^{-1} бијекција, оно је специјално и „1-1". Одатле, будући да је f^{-1} холоморфно закључујемо да је $(f^{-1})'(w) \neq 0$ за свако $w \in \Omega_2$. Дакле, релација $\sim$ је и симетрична.

Нека су Ω_1, Ω_2 и Ω_3 три области у комплексној равни такве да су пресликавања $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ и $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ конформни изоморфизми. Показаћемо да је и пресликавање $g \circ f : \Omega_1 \to \Omega_3$ такође конформни изоморфизам. Како су пресликавања f и g холоморфна и бијективна и пресликавање $g \circ f$ је такође холоморфна бијекција. Уз то, имамо да је за свако $z \in \Omega_1$

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z) \neq 0.$$

Дакле, $g \circ f$ је конформни изоморфизам области Ω_1 на област Ω_3. Овиме смо показали да је релација $\sim$ транзитивна. Коначно, $\sim$ је рефлексивна, симетрична и транзитивна па је $\sim$ релација еквиваленције. □

У доказу претходног става смо заправо доказали и више од тога да је $\sim$ релација еквиваленције. Наиме, када смо доказивали да је $\sim$ симетрична релација, доказали смо да је f^{-1} конформни изоморфизам области Ω_2 на област Ω_1 кад год је f конформни изоморфизам области Ω_1 на област Ω_2. Поред тога, приликом доказивања транзитивности релације $\sim$ доказали смо да је композиција конформних изоморфизама такође конформни изоморфизам. Та тврђења нам омогућавају да докажемо следећи став.

Став 1.6. *Нека је Ω област у $\mathbb{C}$. Тада је скуп $\mathrm{Aut}(\Omega)$ са операцијом композиције пресликавања група.*

Доказ. Нека су f, g произвољни елементи скупа $\mathrm{Aut}(\Omega)$. Како су f и g конформни аутоморфизми области Ω одмах закључујемо да је и $g \circ f$ конформни аутоморфизам области Ω.

Композиција пресликавања је асоцијативна, па је специјално и композиција конформних аутоморфизама асоцијативна. Алгебарска структура $(\mathrm{Aut}(\Omega), \circ)$ садржи неутрал јер је идентичко пресликавање $\mathbf{1}_\Omega$ један конформни аутоморфизам области Ω.

Уколико је f један конформни аутоморфизам области Ω, на основу претходног става закључујемо да је тада f^{-1} конформни аутоморфизам области Ω, па сваки елемент скупа $\mathrm{Aut}(\Omega)$ има њему инверзни елемент. □

Пресликавање $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$

Корисно је да уведемо следеће ознаке

- Јединични диск – $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$;
- Јединична кружница – $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$;
- Проширена комплексна раван – $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Циљ нам је одредити све аутоморфизме јединичног диска. Да бисмо то урадили, одредимо најпре билинеарна (линеарна фракциона, Мебијусова*) пресликавања која сликају јединични диск на јединични диск.

Прво ћемо показати да за произвољно $a \in \mathbb{D}$ пресликавање $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ слика $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$. Како је

$$|1-\overline{a}z| = |z||1/z-\overline{a}|$$

за $|z| = 1$ имамо да је

$$|1-\overline{a}z| = |\overline{z}-\overline{a}| = |z-a|.$$

Дакле, добили смо да је $\varphi_a(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$. Како је уз то $\varphi_a(a) = 0 \in \mathbb{D}$, тачка из унутрашњости диска $\mathbb{D}$ се слика у унутрашњост диска $\mathbb{D}$, па закључујемо да пресликавање φ_a слика $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$.

Покажимо да је пресликавање φ_a једино билинеарно пресликавање које слика $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$ до на множење константом модула 1.

Став 1.7. *Нека је билинеарно пресликавање $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ такво да је*

а) $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$; *б)* $f(a) = 0$; *в)* $f(1) = 1$.

Тада је $f(z) = \varphi_a(z)e^{i\theta}$, где је $\theta = 2\arg(1-a)$.

Доказ. Лако је проверити да пресликавање $\cdot e^{2i\arg(1-a)}\varphi_a$ испуњава све наведене услове. Претпоставимо да је f билинеарно пресликавање које испуњава све услове из исказа става и докажимо да је $f = e^{2i\arg(1-a)}\varphi_a$.

Означимо са l праву која садржи тачке a и 0, и са k кружницу која садржи тачке α и 1 и ортогонална је на $\mathbb{T}$. Права l пролази кроз центар кружнице $\mathbb{T}$, па је $l \perp \mathbb{T}$. Сада, пошто билинеарно пресликавање f чува углове, користећи услов *а)*, имамо да да је $f(l) \perp \mathbb{T}$. Како је $f(a) = 0$, закључујемо да је $f(l)$

*August Ferdinand Möbius (1790 - 1868) – немачки математичар и теоретски астроном) заправо права која садржи координатни почетак. За слику кружнице k важи $0, 1 \in f(k)$, па је и $f(k)$ такође права. Коначно, имамо да је $\infty \in f(l) \cap f(k)$, па је $f^{-1}(\infty) = l \cap k$.

Како је билинеарно пресликавање јединствено одређено сликом трију тачака, и имамо да је $f(a) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(l \cap k) = \infty$, закључујемо да је $f = e^{2i \arg(1-a)} \varphi_a$. $\square$

Пресликавање φ_a ће играти значајну улогу у наставку текста, па ће бити изложене неке особине овог пресликавања.

Став 1.8. *Нека је $a \in \mathbb{D}$ произвољно. Тада за пресликавање φ_a важе следећа тврђења:*

а) φ_a *је холоморфно на* $\mathbb{D}$*;*

б) $\varphi_a(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$*;*

в) $\varphi_a'(z) = \dfrac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{a}z)^2}$*;*

г) $|\varphi_a'(z)| = \dfrac{1 - |\varphi_a(z)|^2}{1 - |z|^2}$*;*

д) $\varphi_a^{-1}(z) = \varphi_{-a}(z)$*;*

ђ) $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Доказ. а) Како је φ_a количник две функције које су очигледно холоморфне, и φ_a је холоморфна функција у свакој тачки $z \neq 1/\overline{a}$. Уз то, именилац је нула само у тачки $1/\overline{a}$, па како је $|a| < 1$ то је и $|1/\overline{a}| > 1$, па је φ_a холоморфна на $\mathbb{D}$.

б) φ_a је билинеарно пресликавање, па знамо да оно слика уопштене кружнице на уопштене кружнице. Даље, како је

$$\varphi_a(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - a}{1 - \overline{a}e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{1 - ae^{-i\theta}}{1 - \overline{a}e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{\overline{1 - \overline{a}e^{i\theta}}}{1 - \overline{a}e^{i\theta}},$$

имамо да је

$$\left|\varphi_a(e^{i\theta})\right| = \left|e^{i\theta}\right| \frac{\left|\overline{1 - \overline{a}e^{i\theta}}\right|}{|1 - \overline{a}e^{i\theta}|} = 1.$$

Односно, $\varphi_a(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$, па мора бити $\varphi_a(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$.

в) У питању је извод количника. Директним рачуном добијамо

$$\varphi_a'(z) = \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)' = \frac{(1-\overline{a}z)+\overline{a}(z-a)}{(1-\overline{a}z)^2} = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}.$$

г) Посматрајмо $|\varphi_a(z)|^2 = \dfrac{(z-a)\overline{(z-a)}}{|1-\overline{a}z|^2}$. Имамо да је

$$\begin{aligned}|\varphi_a(z)|^2 &= \frac{|z|^2+|a|^2-a\overline{z}-\overline{a}z}{|1-\overline{a}z|^2}\\ &= \frac{|1-\overline{a}z|^2+|z|^2+|a|^2-a\overline{z}-\overline{a}z-(1-\overline{a}z)\overline{(1-\overline{a}z)}}{|1-\overline{a}z|^2}\\ &= 1-\frac{1-|a|^2-|z|^2+|z|^2|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2},\end{aligned}$$

па факторисањем бројиоца $1-|a|^2-|z|^2+|z|^2|a|^2 = (1-|a|^2)(1-|z|^2)$, имајући у виду да је $\varphi'(z) = \dfrac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}$ добијамо да је

$$|\varphi_a(z)|^2 = 1-(1-|z|^2)|\varphi_a'(z)|.$$

Изражавањем $|\varphi_a'(z)|$ из претходне једнакости добијамо тражену једнакост

$$|\varphi_a'(z)| = \frac{1-|\varphi_a(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

д) Показаћемо да је $\varphi_a \circ \varphi_{-a}$ идентичко пресликавање. Пошто је, као композиција билинеарних пресликавања, и пресликавање $\varphi_a \circ \varphi_{-a}$ такође билинеарно, да бисмо доказали да је оно идентичко пресликавање довољно је доказати да фиксира три тачке.

Заменом одговарајућих вредности добијамо да је

- $\varphi_a(\varphi_{-a}(0)) = \varphi_a(a) = 0$,
- $\varphi_a(\varphi_{-a}(-a)) = \varphi_a(0) = -a$,
- $\varphi_a(\varphi_{-a}(\infty)) = \varphi_a(1/\overline{a}) = \infty$,

па је $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$.

ђ) Пресликавање φ_a је билинеарно пресликавање, па и „1-1". На основу особине *а)* φ_a је холоморфно на $\mathbb{D}$, па применом става 1.3 можемо закључити да је φ_a конформно пресликавање. Уз то имамо да је $\varphi_a(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, па се на основу принципа очувања области област $\mathbb{D}$ слика на област чија је граница $\mathbb{T}$. Како је још и $\varphi_a(0) = -a \in \mathbb{D}$, закључујемо да је баш $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. $\square$

Шварцова лема

Показали смо да су пресликавања φ_a аутоморфизми јединичног диска, а јасно је да су и ротације $z \mapsto e^{i\theta}z$ такође аутоморфизми јединичног диска. Дакле, сва пресликавања облика

$$z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

су аутоморфизми јединичног диска. Испоставиће се да су то и једини аутоморфизми јединичног диска, али да бисмо то доказали биће нам потребна следећа теорема.

Теорема 1.9 (Шварцова лема)**.** *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција за коју је $f(0) = 0$. Тада је $|f(z)| \leq |z|$ и $|f'(0)| \leq 1$.*

Додатно, ако је $|f'(0)| = 1$ или постоји $z_0 \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ такво да је $|f(z_0)| = |z_0|$, тада је $f(z) = e^{i\theta}z$, за неко $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказ. Посматрајмо функцију

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Јасно је да је она холоморфна на $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Међутим, како је

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z} = f'(0),$$

видимо да је сингуларитет $z = 0$ ове функције отклоњив, па је на основу теореме о отклоњивом сингуларитету функција g холоморфна и у $z = 0$. Дакле, $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ је холоморфна функција.

Нека је $B_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ диск полупречника r са центром у 0. За свако $r < 1$ имамо да је функција g холоморфна на B_r и непрекидна на $\overline{B_r}$, па је на основу принципа максимума модула

$$\max_{z\in\overline{B_r}}|g(z)| = \max_{|z|=r}|g(z)| = \max_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z}\right|.$$

Пошто $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ имамо да је $|f(z)| \leq 1$ за свако $|z| < 1$, па је

$$\max_{z\in\overline{B_r}}|g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Нека је сада $z_0 \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ произвољно. Тада за свако $r > |z_0|$ имамо неједнакост

$$|g(z_0)| \le \max_{z \in \overline{B_r}} |g(z)| \le \frac{1}{r},$$

па пуштањем да $r \to 1-$ добијамо $|g(z_0)| = \left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| \le 1$, тј.

$$|f(z_0)| \le |z_0|.$$

За $z_0 = 0$ на исти начин добијамо $|f'(0)| \le 1$, док неједнакост $0 = |f(0)| \le 0$ тривијално важи.

Докажимо сада и други део тврђења. Претпоставимо зато да је испуњен један од следећа два услова

1) Постоји $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ такво да је $|f(z_0)| = |z_0|$;

2) $|f'(0)| = 1$.

У оба случаја постоји $z_0 \in \mathbb{D}$ такво да је $|g(z_0)| = 1$. Пошто је $z_0 \in \mathbb{D}$ знамо да постоји $1 > r > 0$ такво да је $z_0 \in B_r$. Применимо принцип максимума модула на функцију g и област B_r. Добијамо да функција g достиже максимум модула у унутрашњости ове области, па је $g(z) = e^{i\theta}$ за неко $\theta \in \mathbb{R}$. Односно,

$$f(z) = e^{i\theta} z, \qquad \text{за неко } \theta \in \mathbb{R},$$

што је и требало доказати. □

Сви аутоморфизми јединичног диска

Коначно можемо да одредимо све аутоморфизме јединичног диска. Као што смо већ видели, да функције облика

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \qquad a \in \mathbb{D},\ \theta \in \mathbb{R}$$

су аутоморфизми јединичног диска. Сада ћемо показати и да су сви аутоморфизми јединичног диска овог облика.

Теорема 1.10. *Функција $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ је аутоморфизам јединичног диска ако и само ако постоје $\theta \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{D}$ такви да је*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

за свако $z \in \mathbb{D}$.

Доказ. Претпоставимо да је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ произвољан аутоморфизам јединичног диска. Посматрајмо функцију $g(z) = f \circ \varphi_{-a}(z)$, при чему је $a = f^{-1}(0)$. Функција g је композиција аутоморфизама јединичног диска, па је она холоморфна и слика $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$. Уз то, видимо да је и

$$g(0) = f \circ \varphi_{-a}(0) = f(a) = 0.$$

Применом Шварцове леме на функцију g добијамо да је

$$|g(z)| \leq |z|, \qquad \text{за свако } z \in \mathbb{D}. \tag{1.1}$$

Функција g је аутоморфизам јединичног диска као композиција таквих, па је и g^{-1} такође аутоморфизам јединичног диска. Поред тога, како је

$$g^{-1}(0) = g^{-1}(g(0)) = 0,$$

и на g^{-1} можемо применити Шварцову лему. Сада имамо да је

$$|g^{-1}(z)| \leq |z|, \qquad \text{за свако } z \in \mathbb{D}.$$

Будући да је $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, оно је и „НА”, па произвољно $z \in \mathbb{D}$ можемо написати у облику $z = g(\zeta)$, за неко $\zeta \in \mathbb{D}$. Сада, применом претходне неједнакости на $\zeta = g(z)$ добијамо да је

$$|z| \leq |g(z)|, \qquad \text{за свако } z \in \mathbb{D}. \tag{1.2}$$

Из неједнакости (1.1) и (1.2) добијамо да је $|g(z)| = |z|$ за свако $z \in \mathbb{D}$, па на основу Шварцове леме имамо и да је $g(z) = e^{i\theta}z$ за свако $z \in \mathbb{D}$. Односн, имајући у виду дефиницију пресликавања g добијамо да је за свако $z \in \mathbb{D}$

$$f \circ \varphi_{-a}(z) = e^{i\theta}z.$$

Компоновањем са десне стране функцијом $\varphi_a(z)$ добијамо тражену једнакост

$$f(z) = e^{i\theta}\varphi_a(z), \qquad \text{за свако } z \in \mathbb{D}.$$

$\square$

Последица 1.11. *Ако су $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ два аутоморфизма са истом нулом $a \in \mathbb{D}$ тада је $\varphi_1(z) = e^{i\theta}\varphi_2(z)$ за неко $\theta \in \mathbb{R}$.*

Шварц-Пикова лема

Претпоставимо сада да је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ произвољна холоморфна функција и фиксирајмо $z \in \mathbb{D}$. Функција

$$F(\zeta) = \varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z}(\zeta)$$

је холоморфна на $\mathbb{D}$, слика $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$ и важи да је $F(0) = 0$, па она испуњава све услове Шварцове леме. Применом Шварцове леме на функцију F добијамо

$$|\varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z}(\zeta)| \leq |\zeta|, \quad \text{за свако } \zeta \in \mathbb{D}.$$

Заменом $\zeta = \varphi_z(w)$ добијамо

$$|\varphi_{f(z)} \circ f(w)| \leq |\varphi_z(w)|,$$

односно

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{1 - \overline{f(z)} f(w)} \right| \leq \left| \frac{w - z}{1 - \overline{z} w} \right|. \tag{1.3}$$

Додатно, како је $F'(\zeta) = \varphi'_{f(z)}\Big(f\big(\varphi_{-z}(\zeta)\big)\Big) f'\big(\varphi_{-z}(\zeta)\big)\varphi'_{-z}(\zeta)$, будући да је

$$\varphi'_a(0) = 1 - |a|^2 \quad \text{и} \quad \varphi'_a(a) = \frac{1}{1 - |a|^2},$$

стављањем $\zeta = 0$ имамо

$$\begin{aligned} F'(0) &= \varphi'_{f(z)}\big(f(z)\big) f'(z) \varphi'_{-z}(0) \\ &= \frac{1}{1 - |f(z)|^2} f'(z)(1 - |z|^2). \end{aligned}$$

Пошто је на основу Шварцове леме $|F'(0)| \leq 1$ добијамо и

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}. \tag{1.4}$$

Додатно, ако постоје различити комплексни бројеви $z, w \in \mathbb{D}$ такви да у некој од неједнакости (1.3) или (1.4) важи једнакост тада постоје и $z_0, \zeta_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq \zeta_0$ такви да је $|F_{z_0}(\zeta_0)| = |\zeta_0|$ па је на основу Шварцове леме $F_{z_0}(z) = \varphi(z)$, за неки аутоморфизам диска $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Тада је

$$\varphi_{f(z_0)} \circ f \circ \varphi_{-z_0}(z) = \varphi(z),$$

па је и $f = \varphi_{-f(z_0)} \circ \varphi \circ \varphi_{z_0} \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{D}$ аутоморфизам јединичног диска. Што значи да постоје $a \in \mathbb{D}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ такви да је

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \overline{a} z}.$$

Овиме је доказана следећа теорема.

Теорема 1.12 (Шварц-Пикова лема)**.** *Нека је* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *холоморфна функција. Тада је*

а) $$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|, \qquad \text{за све } z, w \in \mathbb{D},$$

б) $$|f'(z)| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}, \text{ за свако } z \in \mathbb{D}.$$

Притом, ако постоје $z, w \in \mathbb{D}$ *такви да се у неједнакости а) достиже једнакост, тада је* $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$*. Слично, ако постоји* $z \in \mathbb{D}$ *такво да се у неједнакости б) достиже једнакост, тада је такође* $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$*. Додатно, ако је* $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$*, тада се у обе неједнакости достиже једнакост за свака два* $z, w \in \mathbb{D}$*.*

1.2 Хиперболичка геометрија на јединичном диску

У овој секцији ћемо увести псеудохиперболичко и хиперболичко растојање на јединичном диску. Дефинисаћемо основне појмове као што су хиперболичка дужина криве, хиперболичка удаљеност тачака и слично. Формулисаћемо Шварц–Пикову лему у терминима хиперболичке метрике. Показаћемо да су хиперболички дискови управо еуклидски дискови (наравно, са другим центром и полупречником).

Псеудохиперболичко растојање

Уводимо функцију $\delta : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to [0, \infty)$ са

$$\delta(z, w) = |\varphi_z(w)|\,. \tag{1.5}$$

Није тешко видети да је дата функција инваријантна у односу на аутоморфизме јединичног диска. Прецизније, важи следећи став.

Став 1.13. *Нека је* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *произвољно и нека су* $z, w \in \mathbb{D}$*. Тада је*

$$\delta(z, w) = \delta(\varphi(z), \varphi(w)).$$

Доказ. Треба показати да је $\left|\varphi_{\varphi(z)}(\varphi(w))\right| = |\varphi_z(w)|$. Аутоморфизми $\varphi_{\varphi(z)}(\zeta)$ и $\varphi_z(\zeta)$ имају исту нулу, тачку z. На основу последице 1.11 закључујемо да је

$$\varphi_{\varphi(z)}(\zeta) = e^{i\theta}\varphi_z(\zeta), \qquad \text{за свако } \zeta \in \mathbb{D}.$$

Одавде добијамо и да је $\left|\varphi_{\varphi(z)}(\varphi(w))\right| = |\varphi_z(w)|$. □

Пре него што докажемо да је δ растојање на $\mathbb{D}$, докажимо следећу лему.

Лема 1.14. *Нека су $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ произвољне тачке. Тада је*

$$\delta(|z_1|, |z_2|) \leq \delta(z_1, z_2) \leq \delta(-|z_1|, |z_2|).$$

Додатно, важи и

$$\begin{aligned} \delta(|z_1|, |z_2|) = \delta(z_1, z_2) \quad &\textit{ако и само ако} \quad \arg z_1 = -\arg z_2, \\ \delta(-|z_1|, |z_2|) = \delta(z_1, z_2) \quad &\textit{ако и само ако} \quad \arg z_1 = \arg z_2. \end{aligned}$$

Доказ. Нека је $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, за $r_1, r_2 > 0$ и $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$. На основу претходног става имамо да је

$$\delta(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) = \delta(r_1 e^{i(\theta_1-\theta_2)}, r_2) = \frac{|r_1 e^{i(\theta_1-\theta_2)} - r_2|}{|1 - r_1 r_2 e^{-i(\theta_1-\theta_2)}|}.$$

Одредићемо најмању и највећу вредност ове функције у зависности од $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$. Посматрајмо зато функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисану са

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \left(\frac{r_1 e^{i\theta} - r_2}{1 - r_1 r_2 e^{-i\theta}}\right) \overline{\left(\frac{r_1 e^{i\theta} - r_2}{1 - r_1 r_2 e^{-i\theta}}\right)} \\ &= \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2 (e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{1 + r_1^2 r_2^2 - r_1 r_2 (e^{i\theta} + e^{-i\theta})} \\ &= \frac{r_1^2 - 2 r_1 r_2 \cos\theta + r_2^2}{1 - 2 r_1 r_2 \cos\theta + r_1^2 r_2^2}. \end{aligned}$$

Ова функција је диференцијабилна на $\mathbb{R}$ и њен извод је

$$f'(\theta) = 2 r_1 r_2 \frac{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)\sin\theta}{(r_1^2 r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\theta + 1)^2},$$

па су све тачке облика $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ њене стационарне тачке. Како је f очигледно периодична са периодом 2π довољно је испитати стационарне тачке на интервалу $[0, 2\pi)$. Имамо да је $\operatorname{sgn}(f'(\theta)) = \operatorname{sgn}(\sin\theta)$, па добијамо да функција f расте за $\theta \in (0, \pi)$ и опада за $\theta \in (\pi, 2\pi)$. Дакле, две екстремне вредности функције f на интервалу $[0, 2\pi)$ су строги минимум у тачки $\theta = 0$ и строги максимум у тачки $\theta = \pi$.

Пошто је $\delta(z_1, z_2)^2 = f(\theta_1 - \theta_2)$, из неједнакости

$$f(0) \leq f(\theta_1 - \theta_2) \leq f(\pi)$$

добијамо неједнакост

$$\delta(r_1, r_2) \leq \delta(z_1, z_2) \leq \delta(-r_1, r_2),$$

тј.

$$\delta(|z_1|, |z_2|) \leq \delta(z_1, z_2) \leq \delta(-|z_1|, |z_2|).$$

Ако је $\delta(|z_1|, |z_2|) = \delta(z_1, z_2)$, закључујемо да је $f(0) = f(\theta_1 - \theta_2)$. Како је $f(0)$ строги минимум функције f закључујемо и $\theta_1 - \theta_2 = 0$, односно $\arg z_1 = \arg z_2$. Слично поступамо и у случају $\delta(z_1, z_2) = \delta(-|z_1|, |z_2|)$, и добијамо $-\arg z_1 = \arg z_2$. $\square$

Став 1.15. *Пресликавање δ је растојање на скупу $\mathbb{D}$.*

Доказ. Нека су $z, w \in \mathbb{D}$ произвољни.

- Јасно је да је $\delta(z, w) = |\varphi_z(w)| \geq 0$ за свако $z, w \in \mathbb{D}$.

- Треба показати да је $\delta(z, w) = 0$ ако и само ако је $z = w$.

  Претпоставимо прво да је $\delta(z, w) = 0$. имамо да је $|\varphi_z(w)| = 0$, а пошто је φ_z бијекција и $\varphi_z(z) = 0$ добијамо $z = w$. С друге стране, ако је $z = w$ имамо да је $\delta(z, w) = |\varphi_z(z)| = 0$.

- Пошто је псеудохиперболичка удаљеност инваријантна у односу на $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, да бисмо доказали да је $\delta(z, w) = \delta(w, z)$ довољно је доказати

  $$\delta(\varphi_z(z), \varphi_z(w)) = \delta(\varphi_z(w), \varphi_z(z))$$
  $$\delta(0, \varphi_z(w)) = \delta(\varphi_z(w), 0),$$

  то јест, довољно је показати да за свако $z \in \mathbb{D}$ важи једнакост

  $$\delta(0, z) = \delta(z, 0),$$

  што је тачно будући да је $\delta(0, z) = \delta(-\varphi_z(0), -\varphi_z(z)) = \delta(z, 0)$.

- Докажимо још неједнакост троугла. Нека су $z, w, a \in \mathbb{D}$ три произвољне тачке. Пошто је δ инваријантно у односу на аутоморфизме јединичног диска, можемо претпоставити да је $a = 0$ као и да је $w > 0$. Дакле, довољно је доказати да је

  $$\delta(z, w) \leq \delta(z, 0) + \delta(w, 0).$$

  На основу леме 1.14 имамо да је

  $$\delta(z, w) \leq \delta(-|z|, |w|) = \frac{|z| + |w|}{1 + |z||w|}.$$

  Пошто је $|z||w| \geq 0$, из последње неједнакости добијамо и

  $$\delta(z, w) \leq |z| + |w|.$$

  Коначно, како је $\delta(0, z) = |z|$ тврђење је доказано.

□

Пресликавање δ се зове псеудохиперболичко растојање.

Шварц-Пикову лему можемо формулисати у терминима хиперболичке геометрије на следећи начин.

Теорема 1.16. *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање. Тада за свако $z, w \in \mathbb{D}$ важи*

$$\delta(f(z), f(w)) \leq \delta(z, w). \tag{1.6}$$

Притом, уколико постоје два различита комплексна броја $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ таква да у претходној неједнакости важи једнакост, тада је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Доказ. Следи директно из дела *а)* теореме 1.12 (Шварц-Пикова лема). □

Упркос томе, растојање δ није индуковано дужином. Растојање није адитивно јер ни за које три међусобно различите тачке $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$ не важи $\delta(z_1, z_2) + \delta(z_2, z_3) = \delta(z_1, z_3)$. Другим речима, за три међусобно различите тачке важи строга неједнакост троугла у следећем смислу.

Став 1.17. *Нека су $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$ међусобно различите тачке. Тада је*

$$\delta(z_1, z_3) < \delta(z_1, z_2) + \delta(z_2, z_3).$$

Доказ. Позматрајмо прво случај када је $z_2 = 0$. Тада је $\delta(z_1, 0) = |z_1|$, $\delta(0, z_3) = |z_3|$, па је довољно доказати неједнакост

$$\delta(z_1, z_3) < |z_1| + |z_2|.$$

Како основу леме 1.14 имамо да је

$$\delta(z_1, z_3) \leq \frac{|z_1| + |z_3|}{1 + |z_1||z_3|},$$

и z_1, z_2 и z_3 су међусобно различите тачке у јединичном диску, имамо $z_1, z_3 \neq 0$, па је

$$\delta(z_1, z_3) \leq \frac{|z_1| + |z_3|}{1 + |z_1||z_3|} < |z_1| + |z_3|.$$

Да бисмо завршили доказ, нека су сада z_1, z_2 и z_3 произвољне тачке у $\mathbb{D}$ и уведимо ознаке $\zeta_1 = \varphi_{z_2}(z_1)$ и $\zeta_3 = \varphi_{z_2}(z_3)$. Тада је једнакост

$$\delta(z_1, z_3) = \delta(z_1, z_2) + \delta(z_2, z_3)$$

еквивалентна са једнакошћу

$$\delta(\zeta_1, \zeta_3) = \delta(\zeta_1, 0) + \delta(0, \zeta_3)$$

која се не може достићи за међусобно различите $\zeta_1, \zeta_3 \neq 0$. $\square$

Хиперболичко растојање

Да бисмо се решили овог проблема, уводимо хиперболичку метрику са

$$\rho(z)|dz| = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Хиперболичка дужина C^1 криве $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{D}$ индукована овом метриком је

$$l(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)\,|dz|,$$

а хиперболичко растојање између две тачке $d(z, w) = \inf_{\gamma \in \Gamma} l(\gamma)$, при чему је Γ фамилија свих C^1 кривих које спајају z и w.

Испоставиће се да d заиста јесте растојање, као и да је оно адитивно дуж одређених кривих које ћемо звати h-праве. Може се показати да се метрика ρ природно јавља у Поенкаеровом диск моделу. Видети главу 5 у дисертацији [2].

Приликом доказивања да је $\delta : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to [0, \infty)$ растојање прво смо показали да је δ инваријантно на аутоморфизме јединичног диска. Овог пута ћемо доказати и више – да аутоморфизми диска не мењају дужину C^1 криве.

Став 1.18. *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно, и нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ произвољна C^1 крива. Тада је*

$$l(f \circ \gamma) \leq l(\gamma).$$

Ако је f аутоморфизам у претходној неједнакости важи једнакост.

Доказ. Хиперболичка дужина криве $f \circ \gamma$ једнака је

$$\begin{aligned} l(f \circ \gamma) &= \int_{f \circ \gamma} \rho(z)\,|dz| = \int_0^1 \rho(f \circ \gamma(t))|(f \circ \gamma)'(t)|\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{2}{1 - |f \circ \gamma(t)|^2} |f'(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt. \end{aligned}$$

Како је f холоморфно, на основу Шварц-Пикове леме имамо да је

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2},$$

при чему за $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ важи једнакост. Дакле, имамо да је

$$\begin{aligned} l(f \circ \gamma) &\leq \int_0^1 \frac{2}{1 - |\gamma(t)|^2} |\gamma'(t)|\,dt \\ &= \int_\gamma \rho(z)\,|dz| \\ &= l(\gamma). \end{aligned}$$

У случају да је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ последња неједнакост постаје једакост па је у том случају $l(f \circ \gamma) = l(\gamma)$. □

Одредимо сада експлицитну формулу за $d(z, w)$. Приметимо да је на основу претходног става и дефиниције пресликавања d довољно одредити експлицитну формулу за $d(0, a)$, $a > 0$. Нека је $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ произвољна C^1 крива таква да је $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(1) = a$, а $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}$ функције дефинисане са $\alpha(t) = \mathrm{Re}(\gamma(t))$ и $\beta(t) = \mathrm{Im}(\gamma(t))$. Јасно је да су α и β такође C^1 функције, па имамо да је

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^1 \frac{2|\alpha'(t) + i\beta'(t)|}{1 - |\alpha(t) + i\beta(t)|^2}\,dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{2|\alpha'(t)|}{1 - \alpha^2(t)}\,dt \\ &\geq \left| \int_0^1 \frac{2\alpha'(t)}{1 - \alpha^2(t)}\,dt \right| \\ &= \left| \ln \frac{1+a}{1-a} \right| = \ln \frac{1+a}{1-a}. \end{aligned}$$

Дакле, за $a > 0$ важи неједнакост

$$\ln \frac{1+a}{1-a} \leq d(0,a).$$

Пошто за криву $\gamma(t) = at$ све неједнакости у претходном разматрању постају једнакости, имамо да је и $d(0,a) \leq l(\gamma) = \ln \frac{1+a}{1-a}$, па је

$$d(0,a) = \ln \frac{1+a}{1-a}, \qquad \text{за све } a \in [0,1).$$

Пошто је пресликавање d инваријантно у односу на аутоморфизме јединичног диска имамо $d(z,w) = d(0, \varphi_z(w)) = d(0, |\varphi_z(w)|)$. Дакле, експлицитна формула за пресликавање d је

$$d(z,w) = \ln \frac{1+\delta(z,w)}{1-\delta(z,w)}, \qquad \text{за } z, w \in \mathbb{D}. \tag{1.7}$$

Пре него што покажемо да је d растојање формулишимо следећу лему.

Лема 1.19. *Нека зу $z, w \in \mathbb{D}$ произвољни. Тада је*

$$\ln \frac{1+|z|}{1-|z|} + \ln \frac{1+|w|}{1-|w|} = \ln \frac{1+\delta(|z|, -|w|)}{1-\delta(|z|, -|w|)}.$$

Доказ. Како је

$$\begin{aligned}
\ln \frac{1+|z|}{1-|z|} + \ln \frac{1+|w|}{1-|w|} &= \ln \frac{(1+|z|)(1+|w|)}{(1-|z|)(1-|w|)} \\
&= \ln \frac{1+|zw|+|z|+|w|}{1+|zw|-|z|-|w|},
\end{aligned}$$

дељењем имениоца и бројиоца унутар логаритма са $1+|zw|$ добијамо

$$\ln \frac{1+|z|}{1-|z|} + \ln \frac{1+|w|}{1-|w|} = \ln \frac{1+\frac{|z|+|w|}{1+|zw|}}{1-\frac{|z|+|w|}{1+|zw|}}.$$

Сада, будући да је $\dfrac{|z|+|w|}{1+|zw|} = \delta(|z|, -|w|)$, добијамо тражено тврђење. $\square$

Став 1.20. *Пресликавање d је растојање на $\mathbb{D}$.*

Доказ.

- Како је $\dfrac{1+\delta(z,w)}{1-\delta(z,w)} \geq 1$, јасно је да је $d(z,w) \geq 0$ за све $z, w \in \mathbb{D}$.

- Имамо да је $d(z, w) = 0$ ако и само ако је $\dfrac{1+\delta(z,w)}{1-\delta(z,w)} = 1$ одакле добијамо да у том случају мора бити $\delta(z, w) = 0$. Пошто је δ растојање закључујемо да је $d(z, w) = 0$ ако и само ако је $z = w$.

- Будући да је $\delta(z, w) = \delta(w, z)$, јасно је да је и $d(z, w) = d(w, z)$.

- Остаје да се докаже неједнакост троугла. Као и до сада, можемо претпоставити да је једна тачка у 0 и посматрати само $z, w \in \mathbb{D}$. Довољно је доказати да је
$$d(z, w) \leq d(z, 0) + d(0, w),$$
односно
$$\ln \frac{1+\delta(z,w)}{1-\delta(z,w)} \leq \ln \frac{1+|z|}{1-|z|} + \ln \frac{1+|w|}{1-|w|}.$$
На основу леме 1.19 имамо да је претходна неједнакост еквивалентна са неједнакошћу
$$\ln \frac{1+\delta(z,w)}{1-\delta(z,w)} \leq \ln \frac{1+\delta(|z|,-|w|)}{1-\delta(|z|,-|w|)},$$
а како је функција $x \mapsto \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ растућа за $x \in [0, 1)$, довољно је показати да је
$$\delta(z, w) \leq \delta(|z|, -|w|). \tag{1.8}$$
Међутим, ово је управо тврђење леме 1.14, па имамо да за све $z, w, \xi \in \mathbb{D}$ важи неједнакост
$$d(z, w) \leq d(z, \xi) + d(\xi, w).$$

Коначно, добили смо да је $d : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ растојање. $\square$

Ово растојање називамо хиперболичким растојањем на $\mathbb{D}$. Показаћемо да за њега важи адитивност дуж одређених кривих. Из доказа неједнакости троугла у случају хиперболичког растојања d можемо приметити да у неједнакости троугла важи једнакост важи ако и само ако у неједнакости (1.8) важи једнакост. На основу леме 1.14, та једнакост важи ако и само ако је $\arg z = -\arg w$. Односно, ако су тачке $z, 0$ и w колинеарне и такве да се тачка 0 налази између тачака z и w, тада је
$$d(z, 0) + d(0, w) = d(z, w).$$
Другим речима, хиперболичко растојање је адитивно дуж сваке праве која пролази кроз координатни почетак. Наравно, постоје и криве које не садрже

координатни почетак дуж којих је хиперболичко растојање адитивно. То ће бити управо хиперболичке праве.

Геодезијске линије у диск моделу

Приликом извођења формуле за хиперболичку удаљеност $d(z, w)$ показали смо да је крива најмање хиперболичке дужине која спаја тачке 0 и $a \in [0, 1)$ управо дуж $[0, a]$. Пошто конформни изоморфизми не мењају растојање између тачака, за произвољан аутоморфизам φ имамо да крива $\varphi([0, a])$ представља најкраће хиперболичке растојање између тачака $\varphi(0)$ и $\varphi(a)$ у односу на метрику $\rho(z)\,|dz|$. Због тога, у интересу нам је да одредимо слику интервала $[0, a]$ при пресликавању φ.

Знамо да је φ билинеарно пресликавање, па оно слика уопштене кружнице на уопштене кружнице и чува углове. Означимо реалну осу са l и одредимо слику $\varphi(l)$. Пошто је $l \perp \mathbb{T}$, имамо да је $\varphi(l) \perp \varphi(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$. Уз то, имамо да је $\varphi([0, a]) \subset \mathbb{D}$, па је најкраћа крива која спаја тачке $\varphi(0)$ и $\varphi(a)$ подскуп уопштене кружнице која садржи тачке $\varphi(0), \varphi(a)$ и ортогонална је на $\mathbb{T}$. Сходно томе, дефинишеме хиперболичке праве и хиперболичке дужи.

Дефиниција 1.21. *Подскуп $l \subset \mathbb{D}$ је хиперболичка права (h-права) ако постоји уопштена кружница C која је ортогонална на јединичну кружницу $\mathbb{T}$ таква да је $l = C \cap \mathbb{D}$.*

Дефинишимо сада и хиперболичку дуж.

Дефиниција 1.22. *Нека су $z, w \in \mathbb{D}$ две различите тачке, и нека је $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ такав да је $\varphi(z) = 0$ и $\varphi(w) = a > 0$. Скуп $\varphi^{-1}([0, a])$ зовемо хиперболичка дуж одређена тачкама z и w и означавамо са $[z, w]_h$.*

Испоставља се да на овај начин добијамо управо Поенкаеров* диск модел. Објекте и релације из апсолутне геометрије у овом моделу ћемо звати h-објектима и h-релацијама.

Нека је l хиперболичка права и z_1, z_2 и z_3 три различите тачке са те праве. Већ смо видели да је хиперболичко растојање адитивно дуж сваке праве која

*Henri Poincaré(1854 - 1912) – француски математичар, теоретски физичар, инжињер и филозоф науке.

пролази кроз координатни почетак. Претпоставимо сада да се z_2 налази h-између z_1 и z_3 (тј. $z_2 \in [z_1, z_3]_h$). Пошто је $[z_1, z_2]_h + [z_2, z_3]_h = [z_1, z_3]_h$* имамо да је

$$d(z_1, z_3) = \int_{[z_1,z_3]_h} \rho(z)\,|dz| = \int_{[z_1,z_2]_h} \rho(z)\,|dz| + \int_{[z_2,z_3]_h} \rho(z)\,|dz|$$
$$= d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3).$$

Дато разматрање ћемо формулисати у следећој теореми

Теорема 1.23. *Нека је $l \subset \mathbb{D}$ h-права и нека су $z_1, z_2, z_3 \in l$ три тачке на l такве да је $z_2 \in [z_1, z_3]_h$. Тада је*

$$d(z_1, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3).$$

Додатно, ако за три тачке z_1, z_2 и z_3 важи горња једнакост оне су h-колинеарне.

Доказ. Остало је да се докаже да једнакост $d(z_1, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$ важи само ако су тачке z_1, z_2 и z_3 h-колинеарне. Као и до сада, можемо претпоставити да је $z_2 = 0$ и $z_3 = a > 0$. У том случају полазна једнакост постаје

$$\ln \frac{1 + \delta(z_1, a)}{1 - \delta(z_1, a)} = \ln \frac{1 + |z_1|}{1 - |z_1|} + \ln \frac{1 + a}{1 - a}.$$

Горња једнакост је, на основу леме 1.19 еквивалентна са

$$\ln \frac{1 + \delta(z_1, a)}{1 - \delta(z_1, a)} = \ln \frac{1 + \delta(-|z_1|, a)}{1 - \delta(-|z_1|, a)},$$

одакле добијамо да је $\delta(z_1, a) = \delta(-|z_1|, a)$, па на основу леме имамо 1.14 $\arg z_1 = -\arg a$, одакле је $z_1 < 0$. Коначно, тачке z_1, z_2 и z_3 су h-колинеарне. $\square$

Хиперболички дискови

Дефиниција 1.24. *Отворен хиперболички диск (отворен h-диск) са h-центром у $z_0 \in \mathbb{D}$ и h-полупречником $r > 0$ је скуп свих тачака јединичног диска чије је h-растојање од тачке z_0 мање од r.*

$$D_h(z_0; r) = \{z \in \mathbb{D} \mid d(z_0, z) < r\}.$$

*Ако су $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ две криве, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ је крива дефинисана са $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma_2(2t-1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$

Затворен h-диск са h-центром у $z_0 \in \mathbb{D}$ и h-полупречником $r > 0$ је

$$\{z \in \mathbb{D} \mid d(z_0, z) \leq r\}.$$

Није тешко приметити да је затворење отвореног h-диска $D_h(z_0; r)$ управо h-затворен h-диск са h-центром z_0 и h-полупречником r. Ово оправдава ознаку $\overline{D_h(z_0; r)}$ коју ћемо користити за затворен h-диск.

Испоставља се да је топологија индукована метриком d једнака топологији наслеђеној од стандардне топологије на $\mathbb{C}$. Ово је последица чињенице да аутоморфизми јединичног диска сликају кружнице садржане у $\mathbb{D}$ у кружнице садржане у $\mathbb{D}$ и једнакости скупова

$$D_h(0, r) = \{z \in \mathbb{D} \mid 2\operatorname{artanh}(|z|) < r\} = D(0, \tanh(r/2)).$$

У даљем раду ће нам користити експлицитне формуле за $D_h(a; r)$, па ћемо формулисати следећи став.

Став 1.25. *Нека је $D_h(a; r)$ хиперболички диск у $\mathbb{D}$ чији је хиперболички центар тачка a и хиперболички полупречник r. Тада је $D_h(a; r)$ еуклидски диск чији је еуклидски центар тачка c и еуклидски полпуречник R, при чему је*

$$c = \frac{a\left(1 - \tanh^2 \frac{r}{2}\right)}{1 - |a|^2 \tanh^2 \frac{r}{2}} \quad \text{и} \quad R = \frac{(1 - |a|^2)\tanh \frac{r}{2}}{1 - |a|^2 \tanh^2 \frac{r}{2}}.$$

Доказ. Видели смо да је

$$D_h(0; r) = D(0, \tanh(r/2)),$$

па је $D_h(0; r)$ заиста еуклидски диск са центром $c = 0$ и полупречником $R = \tanh \frac{r}{2}$.

Посматрајмо сада произвољан h-диск $D_h(a; r)$. Имамо да је

$$\begin{aligned} D_h(a, r) &= \{z \in \mathbb{D} \mid d(a, z) < r\} \\ &= \{z \in \mathbb{D} \mid d(0, \varphi_a(z)) < r\} \\ &= \{\varphi_{-a}(\zeta) \mid d(0, \zeta) < r,\ \zeta \in \mathbb{D}\} \quad = \varphi_{-a}(D_h(0, r)). \end{aligned}$$

Одатле, хиперболички диск $D_h(a; r)$ се може добити као директна слика хиперболичког диска $D_h(0; r)$ при пресликавању φ_{-a}. Пошто је φ_{-a} хомеоморфизам диска $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$, граница хиперболичког диска $\partial D_h(a; r)$ је слика кружнице $\partial D_h(0; r)$. Поред тога, φ_{-a} је билинеарно пресликавање па је и слика кружнице $\partial D_h(0;r)$ уопштена кружница садржана у $\mathbb{D}$. Дакле, $\varphi_{-a}(\partial D_h(0;r))$ мора бити баш еуклидска кружница. На основу принципа очувања области, будући да је $\varphi_{-a}(D_h(0;r)) \subset \mathbb{D}$ област чија је граница еуклидска кружница, закључујемо да је $\varphi_{-a}(D_h(0;r))$ еуклидски диск.

Нађимо сада еуклидски центар и полупречник хиперболичког диска $D_h(a;r)$. Посматрајмо еуклидску праву l одређену тачкама 0 и a. Права l пролази кроз еуклидски центар диска $D_h(0;r)$, па је $l \perp \partial D_h(0;r)$. Како је φ_{-a} конформно пресликавање, имамо да је и $\varphi_{-a}(l) \perp \varphi_{-a}(\partial D_h(0;r))$, тј. $\varphi_{-a}(l) \perp \partial\varphi_{-a}(D_h(0;r))$.

Посматрајмо тачке $-a, 0, a \in l$. Имамо да је $\varphi_{-a}(-a) = 0, \varphi_{-a}(0) = a$ и $\varphi_{-a}(a) = \dfrac{2a}{1+|a|^2}$, па је $\varphi_a(l) = l$. Дакле, права l је нормална на границу хиперболичког диска $\partial D_h(a,r)$, па она садржи еуклидски центар c хиперболичког диска $D_h(a,r) = \varphi_{-a}(D_h(0,r))$.

Означимо са z_1 и z_2 тачке пресека праве l и хиперболичког диска $D(0,r)$. Имамо да је

$$z_1 = e^{i\arg a}\tanh\frac{r}{2}, \quad z_2 = -e^{i\arg a}\tanh\frac{r}{2}.$$

Сада имамо да је

$$c = \frac{\varphi_a(z_1)+\varphi_a(z_2)}{2} \qquad \text{и} \qquad R = \frac{|\varphi_a(z_1)-\varphi_a(z_2)|}{2}.$$

Односно,

$$c = \frac{\frac{z_1+a}{1+\overline{a}z_1} + \frac{z_2+a}{1+\overline{a}z_2}}{2} = \frac{z_1 + a + |a|^2 z_2 + \overline{a}z_1 z_2 + z_2 + a + |a|^2 z_1 + \overline{a}z_1 z_2}{2(1+\overline{a}z_1+\overline{a}z_2+\overline{a}^2 z_1 z_2)},$$

па како је $z_1 = -z_2$, даље је

$$c = \frac{a - \overline{a}z_1^2}{1-\overline{a}^2 z_1^2} = \frac{a - \overline{a}e^{2i\arg a}\tanh^2\frac{r}{2}}{1-\overline{a}^2 e^{2i\arg a}\tanh^2\frac{r}{2}} = \frac{a(1-\tanh^2\frac{r}{2})}{1-|a|^2\tanh^2\frac{r}{2}}.$$

Одредимо сада $R = \frac{|\varphi_a(z_1)-\varphi_a(z_2)|}{2}$. Како је

$$\frac{\left|\frac{z_1+a}{1+\overline{a}z_1} - \frac{z_2+a}{1+\overline{a}z_2}\right|}{2} = \frac{|z_1-z_2|(|1-|a|^2)}{2|(1-|a|^2\tanh^2\frac{r}{2})|},$$

и $\tanh x \le 1$ за све $x \in \mathbb{R}$, добијамо

$$R = \frac{\tanh\frac{r}{2}|e^{i\arg a}+e^{i\arg a}|(1-|a|^2)}{2(1-|a|^2\tanh^2\frac{r}{2})} = \frac{(1-|a|^2)\tanh\frac{r}{2}}{1-|a|^2\tanh^2\frac{r}{2}}.$$

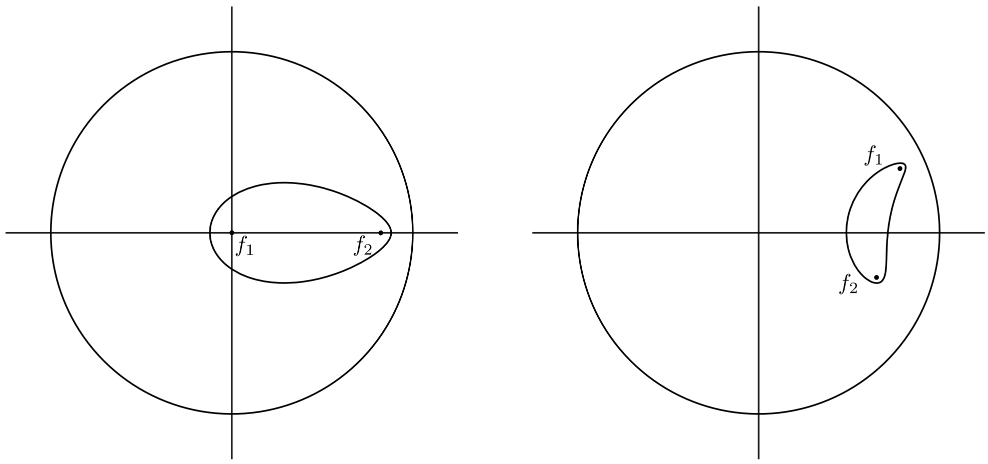
$\square$

1.3 Хиперболичке елипсе

Дефиниција 1.26. *Нека су дате две тачке $f_1, f_2 \in \mathbb{D}$, и нека је $R > 0$. Хиперболичка елипса (h-елипса) са фокусима f_1, f_2 и великом осом $R > d(f_1, f_2)$ је скуп*

$$\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{D} \mid d(f_1, z) + d(z, f_2) = R\}.$$

Приметимо да је, будући да су пресликавања $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ изометрије, директна слика h-елипсе аутоморфизмом φ такође h-елипса. Додатно, њихове велике осе су једнаке, и ако су f_1, f_2 фокуси h-елипсе $\mathcal{E}$ онда су $\varphi(f_1), \varphi(f_2)$ фокуси h-елипсе $\varphi(\mathcal{E})$. На основу овог разматрања видимо да се свака h-елипса може изометрично пресликати на h-елипсу чији су фокуси 0 и $a > 0$, а велика оса $R > 0$.



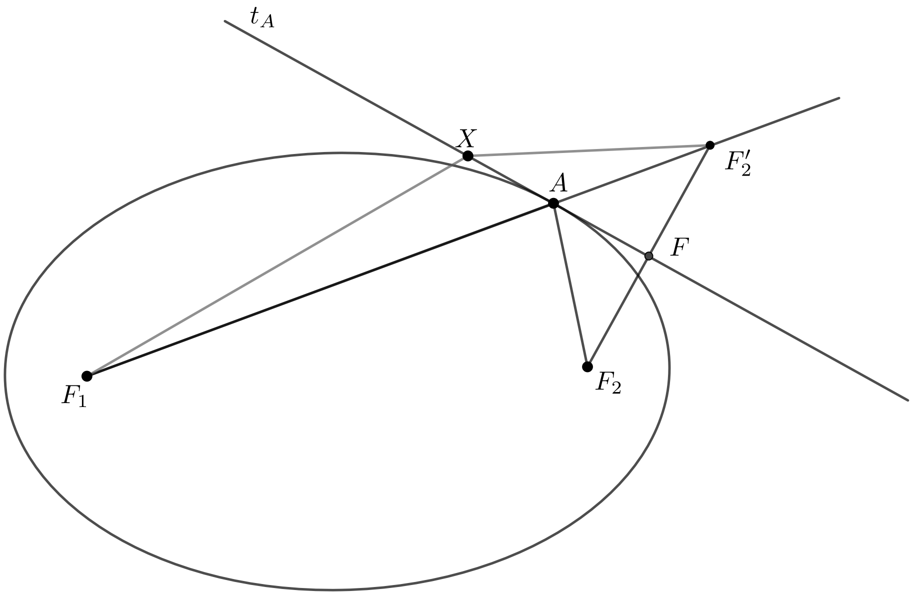
Слика 1.1: Две хиперболичке елипсе чији су фокуси тачке f_1 и f_2.

Да бисмо исказали нека својства h-елипсе биће нам потребна њена тангента.

Дефиниција 1.27. *Хиперболичка тангента (h-тангента) на h-елипсу $\mathcal{E}$ у тачки $a \in \mathcal{E}$ је h-права l која садржи тачку a и не садржи ни једну другу тачку h-елипсе $\mathcal{E}$.*

Као што ћемо видети у наставку, неке од најзначајнијих особина елипсе се могу доказати користећи само аксиоме апсолутне геометрије. Самим тим, те особине важе и за овако дефинисану h-елипсу у Поенкаеровом диск моделу.

Покажимо прво да у произвољној тачки елипсе $\mathcal{E}$ која се налази у апсолутној равни постоји права која је на њу тангентна.



Слика 1.2: Конструкција тангенте на елипсу.

Став 1.28. *Нека је $\mathcal{E}$ елипса са фокусима F_1 и F_2, великом осом $R > 0$ и нека је $A \in \mathcal{E}$ произвољна тачка на елипси. Тада постоји права t_A која садржи тачку A и не садржи ни једну другу тачку елипсе $\mathcal{E}$. Ову праву зовемо тангентом на елипсу $\mathcal{E}$ у тачки A.*

Доказ. Нека је F_2' тачка на полуправој F_1A таква да је $AF_2' = AF_2$, и важи распоред $\mathcal{B}(F_1, A, F_2')$. Нека је F средиште дужи F_2F_2', и t_A права која одређена тачкама A и F.

Да бисмо доказали да је права t_A тангентна на елипсу $\mathcal{E}$ у тачки A, претпоставимо супротно: да постоји још једна тачка $X \in t_A, X \neq A$ таква да је

$$F_1X + XF_2 = R.$$

Како је $X \in t_A$, а троуглови $\triangle F_2FA$ и $\triangle F_2'FA$ су подударни на основу става ССС, имамо и једнакост углова $\angle F_2'FA = \angle F_2FA$. Сада су, на основу става СУС троуглови $\triangle F_2FX$ и $\triangle F_2'FX$ подударни.

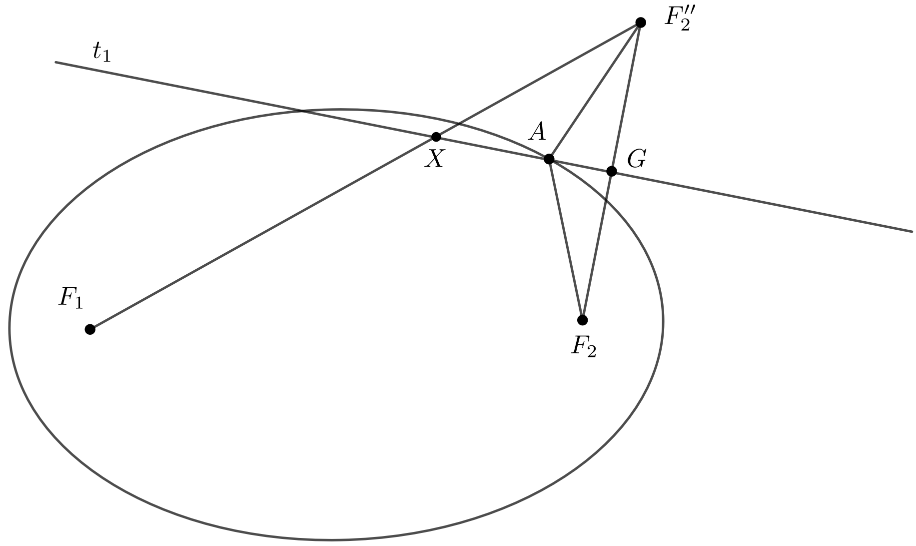
Приметимо да је $F_1F_2' < F_1X + XF_2'$ јер $X \neq A$. Међутим, сада је и

$$R = F_1F_2' < F_1X + XF_2' = F_1X + XF_2,$$

па X не припада елипси $\mathcal{E}$. □

Сада, када смо показали постојање тангенте на елипсу покажимо и да је она јединствена.

Став 1.29. *Нека је дата елипса* $\mathcal{E}$ *и тачка* A *на њој. Тада постоји јединствена тангента на* $\mathcal{E}$ *у тачки* A.



Слика 1.3: Јединственост тангенте.

Доказ. Нека је t_1 произвољна тангента елипсе $\mathcal{E}$ у тачки A. Нека су F_1, F_2 фокуси ове елипсе, $R > 0$ њена велика оса и нека је t_A тангента на $\mathcal{E}$ у тачки A конструисана као у претходном ставу.

Нека је F_2'' тачка симетрична тачки F_2 у односу на праву t_1, а G средиште дужи F_2F_2''. Права t_1 сече дуж F_2F_2'' у тачки G, па по Пашовој аксиоми права t_1 сече и једну од дужи F_1F_2 или F_1F_2''. Претпоставимо прво да права t_1 сече дуж F_1F_2'' у тачки $X \neq A$.

Троуглови $\triangle XF_2G$ и $\triangle XF_2''G$ су подударни по ставу СУС, па је $XF_2'' = XF_2$. Даље је

$$F_1X + F_2X = F_1X + XF_2'' < F_1A + AF_2'',$$

па како је и $\triangle AF_2G \cong \triangle AF_2''G$, добијамо да је $AF_2'' = AF_2$, па и

$$F_1X + F_2X < F_1A + F_2A.$$

Дакле, права t_1 садржи тачку из унутрашњости елипсе, па није тангента.

Ако права t_1 сече дуж F_1F_2 у тачки X, тада је $F_1X + XF_2 = F_1F_2 < R$, па опет долазимо до закључка да је X у унутрашњости елипсе. □

Теорема 1.30 (Оптичко својство елипсе)**.** *Нека је дата елипса $\mathcal{E}$ са фокусима F_1 и F_2 и нека је A тачка на елипси $\mathcal{E}$, а t права кроз тачку A. Тада је $\angle(F_1A, t) = \angle(t, F_2A)$ ако и само ако је t тангента на елипсу.*

Доказ. Нека је прво $t = t_A$ тангента на елипсу, и нека су све ознаке као у ставу 1.28. Видели смо да су троуглови $\triangle AF_2F$ и $\triangle AF_2'F$ подударни, па је специјално и $\angle(FAF_2') = \angle(FAF_2)$. Како су још углови $\angle(F_1A, t_A)$ и $\angle(t_A, AF_2')$ унакрсни, добијамо тражено тврђење.

Претпоставимо сада да су углови $\angle(F_1A, t)$ и $\angle(F_2A, t)$ једнаки. Нека је l_1 права која садржи тачке F_1 и A, а h права која је нормална на праву t_1 и садржи тачку F_2. Означимо са Y пресек ове две праве. Пошто је $\angle(l_1, t) = \angle(F_2A, t)$, добијамо да су углови $\angle(t, AY)$ и $\angle(F_2A, t)$ једнаки. Означимо са F пресек правих h и t. На основу става УСУ добијамо да су троуглови $\triangle AFF_2$ и $\triangle AFY$ подударни, па је F средиште дузжи F_2Y. На исти начин као и у доказу става 1.28 закључујемо да је t_1 тангента на елипсу $\mathcal{E}$ у тачки A. □

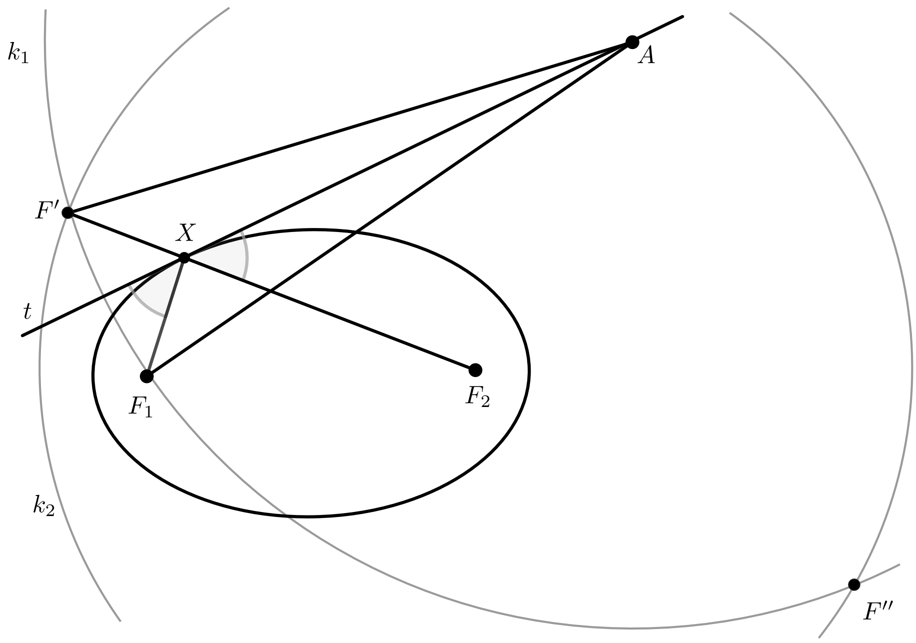
Став 1.31. *Нека је дата елипса $\mathcal{E}$ и тачка A ван елипсе $\mathcal{E}$. Тада постоје две тангенте елипсе $\mathcal{E}$ које садрже тачку A.*

Доказ. Нека су F_1, F_2 фокуси дате елипсе $\mathcal{E}$, а R дужина њене велике осе. Нека су k_1 кружница са центром у A и полупречником AF_1, а k_2 кружница са центром у F_2 и полупречником R.

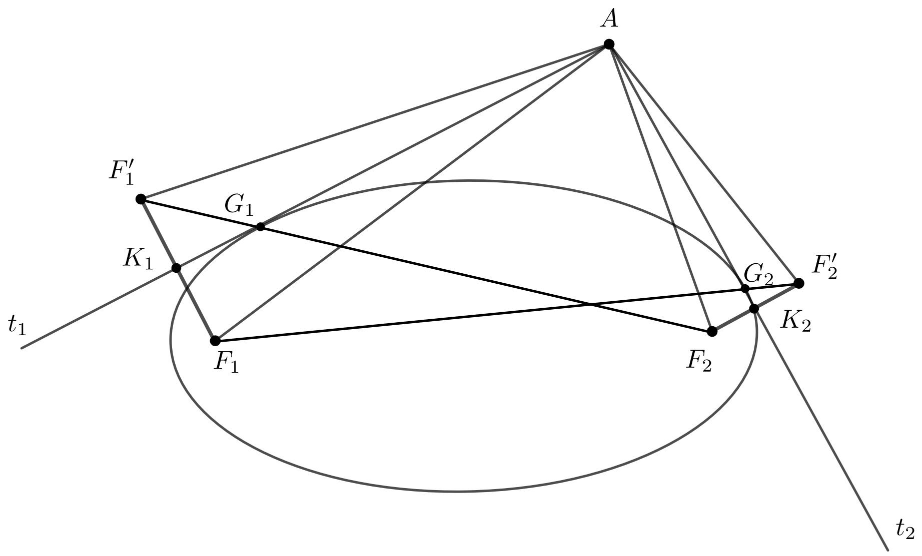
Како је $F_2A < F_1A + F_1F_2 < F_1A + R$ и $F_2 \neq A$, кружнице k_1 и k_2 имају тачно две пресечне тачке F' и F''.

Нека је t симетрала угла $\angle F'AF_1$. Покажимо да је t тангента елипсе $\mathcal{E}$. Нека је X пресек праве t и дужи $F'F_2$. Како је $F'A = F_1A$, јер F' и F_1 припадају кружници k_1, $\angle(F'A, t) = \angle(t, AF_1)$ јер је t симетрала угла $\angle F'AF_1$ и XA заједничка дуж троуглова $\triangle F_1AX$ и $\triangle F'AX$, добијамо $\triangle F_1AX \cong \triangle F'AX$. Дакле, углови $\angle F_1XA$ и $\angle F'XA$ су једнаки, па су и њима суплементни углови $\angle(F_1X, t)$ и $\angle(t, XF')$ једнаки. Међутим, углови $\angle(t, XF')$ и $\angle(F_2X, t)$ су унакрсни па добијамо да је $\angle(F_1X, t) = \angle(F_2X, t)$. На основу оптичког својства елипсе закључујемо да је t тангента на елипсу $\mathcal{E}$. □

Став 1.32. *Нека је дата елипса $\mathcal{E}$ са фокусима F_1 и F_2 и тачка A у спољашњости елипсе. Нека су t_1, t_2 тангенте на елипсу $\mathcal{E}$ из тачке A. Тада је $\angle(F_1A, t_1) = \angle(F_2A, t_2)$.*



Слика 1.4: Конструкција тангенте на елипсу из спољашње тачке A.



Слика 1.5: Тангента на елипсу из спољашње тачке A.

Доказ. Означимо са G_1, G_2 тачке у којима праве t_1, t_2 додирују елипсу $\mathcal{E}$, и нека су тачке F_1', F_2' добијене рефлексијом тачака F_1, F_2 у односу на t_1, t_2 редом, а K_1, K_2 средишта страница F_1F_1' и F_2F_2'.

Докажимо прво да су троуглови $\triangle F_1F_2'A$ и $\triangle F_2F_1'A$ подударни.

Како је $F_1G_1 = F_1'G_1$, тачке F_1', G_1 и F_2 су колинеарне и $G_1 \in \mathcal{E}$ закључујемо да је $F_1'F_2 = R$, где је R велика оса елипсе $\mathcal{E}$. На исти начин закључујемо да је $F_1F_2' = R$, па је $F_1F_2' = F_1'F_2$. Поред тога, имамо и да је $F_1A = F_1'A$, као и $F_2A = F_2'A$. На основу става ССС закључујемо да је $\triangle(F_1AF_2') \equiv \triangle(F_1'AF_2)$.

Сада је, будући да је $\angle(F_1AF_2') = \angle(F_1'AF_2)$,

$$\begin{aligned}\angle F_1'AF_2' &= \angle(F_1'AF_1) + \angle(F_1AF_2')\\ &= \angle(F_1'AF_1) + \angle(F_1'AF_2).\end{aligned}$$

Очигледно је да важи $\angle(F_1'AF_2') = \angle(F_1'AF_2) + \angle(F_2AF_2')$, па из претходне две једнакости закључујемо $\angle(F_1'AF_1) = \angle(F_2'AF_2)$. Праве t_1, t_2 су симетрале углова из претходне једнакости редом, па добијамо тражено тврђење. □

Хиперболички конвексан омотач

Дефиниција 1.33. *За подскуп апсолутне равни $\Omega \subset \mathbb{A}$ кажемо да је конвексан ако за сваке две тачке $A, B \in \Omega$ и C које припада дужи AB важи $C \in \Omega$.*

Дефиниција 1.34. *Конвексни омотач скупа $\Omega \subset \mathbb{A}$ је најмањи конвексан скуп који садржи скуп Ω. Овај скуп означавамо са $\mathrm{co}(A)$.*

Став 1.35. *Унутрашњост елипсе је конвексан скуп.*

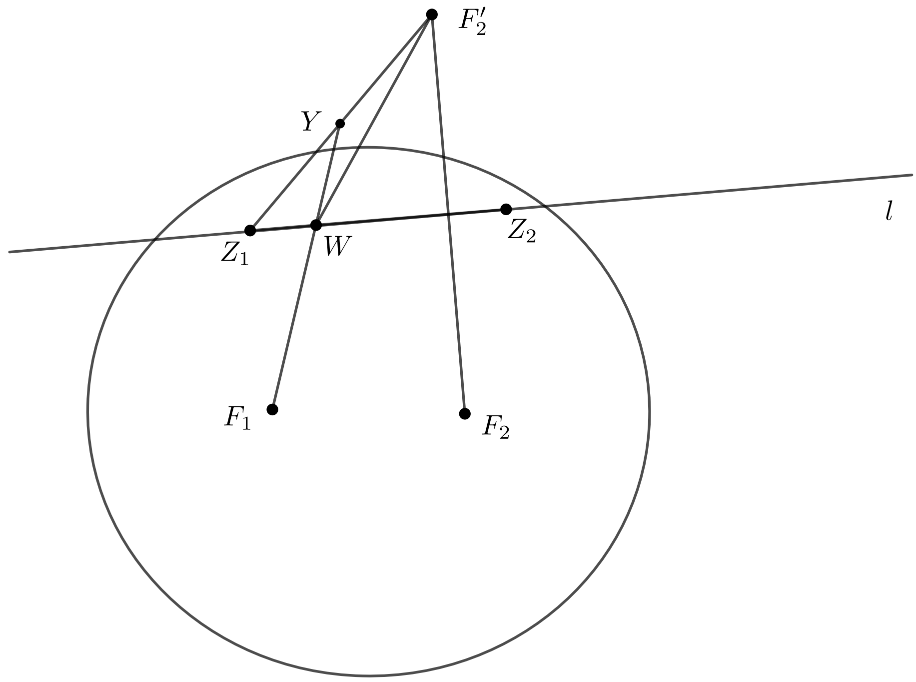
Доказ. Посматрајмо елипсу $\mathcal{E}$ са фокусима F_1 и F_2 и великом полуосом R. Нека су Z_1, Z_2 у унутаршњости ове елипсе, и нека је F_2' рефлексија тачке F_2 у односу на праву l која садржи тачке Z_1 и Z_2. Нека је још F_2' рефлексија тачке F_2 у односу на праву l.

Посматрајмо произвољну тачку $W \in [Z_1, Z_2]_h$, и уочимо праву p која садржи тачке F_1 и W. Ова права сече страницу троугла $\triangle Z_1Z_2F_2'$ у тачки w, па на основу Пашове аксиоме права p има заједничку тачку са неком од дужи Z_1F_2 или Z_2F_2'. Претпоставимо, без умањења општости да заједничка тачка Y припада дужи Z_1F_2'. Посматрајмо величину $F_1W + F_2W$. Пошто тачка W припада дужи Z_1Z_2 имамо да је $F_2W = F_2'W$, па је и

$$F_1W + F_2W = F_1W + F_2'W < F_1W + WY + YF_2'.$$

Сада је, будући да су F_1, W и Y колинеарне тачке имамо

$$F_1W + WY + YF_2' = F_1Y + YF_2', \tag{1.9}$$



Слика 1.6: Унутрашњост елипсе је конвексан скуп.

па применом неједнакости троугла на троугао $\triangle F_1YZ_1$ добијамо

$$F_1Y + YF_2' < F_1Z_1 + Z_1Y + YF_2' = F_1Z_1 + Z_1F_2',$$

па како је $Z_1 \in l$, важи да је $Z_1F_2' = Z_1F_2$. Коначно, добили смо

$$F_1W + F_2W < F_1Z_1 + F_2Z_1 < R,$$

па се тачка W налази у унутрашњости елипсе $\mathcal{E}$. □

Глава 2

Коначни Блашкеови производи

У овој глави ћемо увести појам коначних Блашкеових производа и доказати неке њихове особине. Већина ових особина се може наћи у раду [3] који даје преглед резултата везаних за коначне Блашкеове производе. Као што ће бити истакнуто, многе тврђења везана за Блашкеове производе су аналогна неким тврђењима за полиноме. Детаљан приказ ове аналогије може се наћи у раду [4].

2.1 Дефиниција и основне особине

Коначан Блашкеов производ је производ коначно много аутоморфизама јединичног диска. Пошто су аутоморфизми јединичног диска холоморфне функције на $\mathbb{D}$, и Блашкеови производи су холоморфне функције на $\mathbb{D}$. Блашкеове производе карактерише чињеница да су то холоморфна пресликавања диска у диск са нулама у унапред задатим тачкама.

Дефиниција 2.1. *Нека су $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ аутоморфизми јединичног диска. Функцију*

$$B(z) = \varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z) \cdots \varphi_n(z) \tag{2.1}$$

називамо Блашкеовим производом n–тог реда. Специјално, константну функцију $z \mapsto e^{i\theta}$, где је $\theta \in \mathbb{R}$ називамо Блашкеовим производом нултог реда.

Тачка $a \in \mathbb{D}$ је нула Блашкеовог производа B ако и само ако је она нула неког од аутоморфизама $\varphi_j(z)$. Како сви они имају тачно једну нулу унутар јединичног диска, и Блашкеов производ реда n има тачно n нула унутар јединичног диска рачунајући и вишеструкости. У наставку текста, ако није другачије наглашено, подразумева се да бројимо нуле са њиховим вишестру-костима.

Сваки од аутоморфизама из (2.1) можемо на јединствен начин представити као

$$\varphi_j(z) = e^{i\theta_j}\frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j}z},$$

где је $z_j = \varphi_j^{-1}(0)$ нула овог аутоморфизма, а $e^{i\theta_j} = -\varphi_j(0)/z_j$. Дакле, сваки Блашкеов производ се може представити у облику

$$B(z) = e^{i\theta}\prod_{k=1}^{n}\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z},$$

за $\theta = \sum\limits_{k=1}^{n}\theta_j$.

Јасно је да нуле, рачунајући и њихову вишеструкост, одређују Блашкеов фактор до на константу јединичног модула. Често ћемо, једноставности ради, изостављати тај константан фактор и посматрати Блашкеов производ

$$B(z) = \prod_{k=1}^{n}\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z}.$$

Видели смо (особина *г)* става 1.8) да за произвољан аутоморфизам диска $\varphi(z)$ важи једнакост

$$\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{1 - |z|^2} = |\varphi'(z)|. \tag{2.2}$$

Одредимо сада израз за модуо коначног Блашкеовог производа.

Став 2.2. *Нека су $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{D}$ произвољни, $\varphi_j(z) = \dfrac{z - z_j}{1 - \overline{z_j}z}$ аутоморфизми диска, а $B = \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n$ Блашкеов производ. Тада за свако $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{T}$ важи једнакост*

$$\frac{1 - |B(z)|^2}{1 - |z|^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(|\varphi_k'(z)|\prod_{j=1}^{k-1}|\varphi_j(z)|^2\right)^*.$$

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по n. Случај $n = 1$ је случај када је Блашкеов производ заправо аутоморфизам диска, и то је управо једнакост (2.2). Претпоставимо да тврђење важи за Блашкеове производе реда $n - 1$ и покажимо да оно важи и за Блашкеове производе реда n.

*Сматраћемо да је празан производ једнак 1, тј. $\prod_{j=1}^{0}|\varphi_j(z)|^2 = 1$.

Приметимо да је

$$\begin{aligned}\frac{|\varphi_1|^2 - |\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_n|^2}{1-|z|^2} &= \frac{|\varphi_1|^2 - 1 + 1 - |\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_n|^2}{1-|z|^2} \\ &= -\frac{1-|\varphi_1|^2}{1-|z|^2} + \frac{1-|\varphi_1\varphi_2 \cdots \varphi_n|^2}{1-|z|^2},\end{aligned}$$

тј.

$$\frac{1-|\varphi_1\varphi_2 \cdots \varphi_n|^2}{1-|z|^2} = \frac{1-|\varphi_1|^2}{1-|z|^2} + |\varphi_1|^2 \frac{1-|\varphi_2\varphi_3 \dots \varphi_n|^2}{1-|z|^2}.$$

Сада, применом једнакости (2.2) и индуктивне хипотезе добијамо

$$\begin{aligned}\frac{1-|\varphi_1\varphi_2 \cdots \varphi_n|^2}{1-|z|^2} &= |\varphi_1'| + |\varphi_1|^2 \sum_{k=2}^{n} \left(|\varphi_k'| \prod_{j=2}^{k-1} |\varphi_j|^2 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(|\varphi_k'| \prod_{j=1}^{k-1} |\varphi_j|^2 \right),\end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

Став 2.3. *Нека је $B : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Блашкеов производ. Тада за $|z| < 1$ имамо $|B(z)| < 1$, за $|z| = 1$ имамо $|B(z)| = 1$ и за $|z| > 1$ имамо $|B(z)| > 1$.*

Доказ. Како је

$$|B(z)| = \left| e^{i\theta} \prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z} \right| = \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z} \right|$$

и пошто је $\left| \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z} \right| < 1$ за $|z| < 1$, $\left| \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z} \right| = 1$ за $|z| = 1$ и $\left| \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z} \right| > 1$ за $|z| > 1$ добијамо тражени закључак. □

Став 2.4. *Нека је B коначан Блашкеов производ. Ако је $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такво да је $B(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ тада је и $B(1/\overline{z}) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и важи једнакост*

$$B(z)\overline{B(1/\overline{z})} = 1.$$

Додатно, имамо да је

$$B(0) \lim_{z \to 0} \overline{B(1/\overline{z})} = 1.$$

Доказ. Посматрајмо коначан Блашкеов производ $B(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}$.

Нека је $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такво да је $B(z) \neq 0$. Из услова $B(z) \in \mathbb{C}$ закључујемо да је $z \neq 1/\overline{z_j}$ за све $j \in \overline{1,n}$, док из услова $B(z) \neq 0$ закључујемо да је $z \neq z_j$ за све $j \in \overline{1,n}$. Даље имамо да је

$$\begin{aligned} B(z)\overline{B(1/\overline{z})} &= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}\right) \cdot \overline{\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(1/\overline{z}) - z_k}{1 - \overline{z_k}(1/\overline{z})}\right)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} \cdot \frac{1 - \overline{z_k} z}{z - z_k}\right) = 1. \end{aligned}$$

Други део тврђења добијамо пуштањем да $z \to 0$ у једнакости $B(z)\overline{B(1/\overline{z})} = 1$.

□

Ако је тачка $a \in \mathbb{C}$ нула реда $m \in \mathbb{N}$ Блашкеовог производа B, тада је

$$B(z) = \left(\frac{z - a}{1 - \overline{a} z}\right)^m B_1(z),$$

где је B_1 Блашкеов производ такав да је $B_1(a) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Имамо да је

$$\begin{aligned} \overline{B(1/\overline{z})} = 1/B(z) &= \left(\frac{z - a}{1 - \overline{a} z}\right)^{-m} \frac{1}{B_1(z)} \\ &= \left(\frac{1 - \overline{a} z}{z - a}\right)^{m} \frac{1}{B_1(z)}, \end{aligned}$$

при чему је $B_1(z) \neq 0$ за довољно малу околину U тачке a. Дакле, добили смо да је тачка a пол реда m функције $\overline{B(1/\overline{z})}$, па је тачка $1/\overline{a}$ пол реда m функције $B(z)$. На сличан начин се доказује и да је тачка $1/\overline{a}$ нула функције B ако је тачка a њен пол.

Последица 2.5. *Ако је $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ нула(пол) реда m Блашкеовог производа B тада је $1/\overline{z}$ пол(нула) реда m Блашкеовог производа B.*

Блашкеов производ

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}$$

можемо посматрати и као количник два полинома степена n

$$B(z) = e^{i\theta} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)},$$

при чему је $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$, а $Q_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (1 - \overline{z_k} z) = z^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{z} - \overline{z_k}\right)$. Пошто су нуле полинома Q_n управо $1/\overline{z_1}, 1/\overline{z_2}, \ldots, 1/\overline{z_n}$ имамо да је

$$Q_n(z) = z^n \overline{P\left(1/\overline{z}\right)},$$

то јест, Q_n је баш конјуговано реципрочан полином полиному P_n. Дакле, ако је B Блашкеов производ са нулама $z_1, z_2, \ldots, z_n$ рачунајући и вишеструкости тада је

$$B(z) = e^{i\theta} \frac{P(z)}{z^n \overline{P\left(1/\overline{z}\right)}}, \tag{2.3}$$

где је $P(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$. Једначина $B(z) = w$, тј. једначина $e^{i\theta}\dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)} = w$ еквивалентна је једначини

$$e^{i\theta} P_n(z) - wQ_n(z) = 0, \tag{2.4}$$

за $z \notin \{1/\overline{z_1}, 1/\overline{z_2}, \ldots, 1/\overline{z_n}\}$. Са леве стране ове једначине се налази полином степена не већег од n, па како је коефицијент уз члан z^n тог полинома једнак $e^{i\theta} - w\overline{(z_1\, z_2\, \cdots\, z_n)}$, и како је $|z_j| < 1$ закључујемо да за $|w| \leq 1$ једначина (2.4) има тачно n решења. Дакле, за свако $w \in \overline{\mathbb{D}}$ једначина $B(z) = w$ има тачно n решења. На основу става 2.4 имамо да за свако $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такво да је $B(0) \neq w$ важи еквиваленција

$$B(z) = w \quad \text{ако и само ако} \quad B(1/\overline{z}) = 1/\overline{w}.$$

Можемо закључити да једначина $B(z) = w$ има тачно n решења и за $|w| > 1$, $w \neq 1/\overline{B(0)}$.

Додатно, $B(z) = \infty$ ако и само ако је $Q_n(z) = 0$, односно ако и само ако је $z = 1/\overline{z_j}$, за неко $j \in \overline{1, n}$. Користећи став 2.3 и претходно разматрање добијамо и нешто прецизније тврђење

Теорема 2.6. *Нека је $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \left\{1/\overline{B(0)}\right\}$ произвољно и нека је B Блашкеов производ реда n. Тада једначина $B(z) = w$ има тачно n решења рачунајући и вишеструкост. Ако је $w \in \mathbb{D}$, та решења се налазе у $\mathbb{D}$. Ако је $w \in \mathbb{T}$, она се налазе у $\mathbb{T}$ и ако је $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, решења се налазе у $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.*

Видели смо да Блашкеови производи имају јединични модул на кружници $\mathbb{T}$. Испоставља се да су они једина холоморфна пресликавања диска са том особином.

Теорема 2.7. *Нека је f холоморфна функција на $\mathbb{D}$ таква да важи*

$$\lim_{|z| \to 1} |f(z)| = 1.$$

Тада је f Блашкеов производ.

Доказ. Како је $\lim_{|z|\to 1} |f(z)| = 1$, то постоји $\delta > 0$ такво да је $|f(z)| > 0$ кад год је $|z| > 1 - \delta$. Другим речима, функција f нема нула ван затвореног диска $\overline{B_{1-\delta}(0)} = \{z \in \mathbb{D} \mid |z| \leq 1 - \delta\}$. Тих нула има највише коначно много јер би у супротном скуп нула функције f имао тачку нагомилавања у компакту $\overline{B_{1-\delta}(0)} \subset \mathbb{D}$, па бисмо на основу теореме јединости имали да је $f = 0$.

Нека су $z_1, z_2, \ldots, z_n$ нуле функције f унутар јединичног диска рачунајући и њихове вишеструкости, и уочимо Блашкеов производ

$$B(z) = \varphi_{z_1}(z)\varphi_{z_2}(z)\cdots\varphi_{z_n}(z)$$

чије су нуле управо $z_1, z_2 \ldots, z_n$. Посматрајмо функције $f(z)/B(z)$ и $B(z)/f(z)$. Оне су холоморфне на $\mathbb{D}$ и имамо да је

$$\lim_{|z|\to 1} \left|\frac{f(z)}{B(z)}\right| = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{|z|\to 1} \left|\frac{B(z)}{f(z)}\right| = 1.$$

Претпоставимо да постоји $\zeta_0 \in \mathbb{D}$ такво да је $|f(\zeta_0)/B(\zeta_0)| > 1$, и нека је

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{f(\zeta_0)}{B(\zeta_0)}\right| - 1\right) > 0.$$

Како је $\lim_{|z|\to 1} |f(z)/B(z)| = 1$, постоји $r \in (0,1)$ такво да $\zeta_0 \in r\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ и за $|z| \geq r$ важи $||f(z)/B(z)| - 1| < \varepsilon$.

Сада је функција $f(z)/B(z)$ аналитичка на $r\mathbb{D}$, непрекидна на $\overline{r\mathbb{D}}$ и за $z \in \partial r\mathbb{D}$ имамо $|f(z)/B(z)| < 1 + \varepsilon$. На основу принципа максимума модула за функцију f/B на области $r\mathbb{D}$ добијамо

$$\left|\frac{f(\zeta_0)}{B(\zeta_0)}\right| < 1 + \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left|\frac{f(\zeta_0)}{B(\zeta_0)}\right|,$$

односно

$$\left|\frac{f(\zeta_0)}{B(\zeta_0)}\right| < 1,$$

што је контрадикција са претпоставком да је $|f(\zeta_0)/B(\zeta_0)| > 1$, па закључујемо да је за свако $z \in \mathbb{D}$ $|f(z)/B(z)| \leq 1$. Применом истог поступка и на функцију $|B(z)/f(z)|$ добијамо да је $|f(z)/B(z)| = 1$ за свако $z \in \mathbb{D}$. На основу принципа максимума модула закључујемо да је $\dfrac{f(z)}{B(z)} = e^{i\theta}$ за неко $\theta \in \mathbb{R}$, па је

$$f(z) = e^{i\theta}B(z).$$

То јест, f је Блашкеов производ. $\square$

Ова теорема је аналогна следећој теореми за полиноме.

Теорема. *Нека је f цела функција таква да је*

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty.$$

Тада је f полином.

Последица 2.8. *Нека је B Блашкеов производ реда n и φ аутоморфизам јединичног диска. Тада су $B \circ \varphi$ и $\varphi \circ B$ такође Блашкеови производи реда n.*

Доказ. Видимо да су $B \circ \varphi$ и $\varphi \circ B$ непрекидне функције на $\overline{\mathbb{D}}$ са јединичним модулом на кружници $\mathbb{T}$. Дакле, како су $B \circ \varphi$ и $\varphi \circ B$ холоморфне функције на $\mathbb{D}$ које су непрекидне на $\overline{\mathbb{D}}$, имамо да је

$$\lim_{|z|\to 1} |B \circ \varphi(z)| = |B\varphi(e^{i\theta})| = 1,$$

као и да је

$$\lim_{|z|\to 1} |B \circ \varphi(z)| = \varphi\left(B\left(e^{i\theta}\right)\right) = \varphi\left(e^{i\widetilde{\theta}}\right) = 1.$$

Дакле, функције $B \circ \varphi$ и $\varphi \circ B$ су Блашкеови производи.

Покажимо још да су они истог реда као и полазни Блашкеов производ B. Приметимо да је $B \circ \varphi(z) = 0$ ако и само ако је $\varphi(z)$ нула Блашкеовог производа B. Пошто је φ аутоморфизам диска, па и бијекција, закључујемо да и $B \circ \varphi$ има исти број нула као и B, па је $B \circ \varphi$ такође Блашкеов производ реда n.

Посматрајмо сада Блашкеов производ $\varphi \circ B$. Једначина $\varphi \circ B(z) = 0$ еквивалентна је једначини

$$B(z) = \varphi^{-1}(0)$$

која има тачно n решења на основу теореме 2.6. Дакле, и Блашкеов производ $\varphi \circ B$ има тачно n нула. □

Уколико у теореми 2.7 дозволимо да функција F има полове унутар диска $\mathbb{D}$ добијамо следеће тврђење.

Теорема 2.9. *Нека је функција F мероморфна на $\mathbb{D}$ таква да је*

$$\lim_{|z|\to 1} |F(z)| = 1.$$

Тада се она може представити као количник два Блашкеова производа B_1 и B_2.

$$F = \frac{B_1}{B_2}.$$

Доказ. Нека су $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$ полови функције F чије су вишеструкости $p_1, p_2, \dots, p_m$ редом. Посматрајмо Блашкеов производ

$$B_2(z) = \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{z - \zeta_k}{1 - \overline{\zeta_k} z} \right)^{p_k}$$

чије су нуле управо тачке $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$. Пошто је $z = \zeta_k$ пол реда p_k функције F, постоји холоморфна ненула функција f дефинисана на околини U_k тачке ζ_k тако да је $F(z) = (z - \zeta_k)^{-p_k} f(z)$. Сада је

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to \zeta_j} F(z) B_2(z) &= \lim_{z \to \zeta_j} (z - \zeta_k)^{-p_k} f(z) B_2(z) \\
&= \lim_{z \to \zeta_j} (z - \zeta_k)^{-p_k} f(z) \left(\frac{z - \zeta_k}{1 - \overline{\zeta_k} z} \right)^{p_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \left(\frac{z - \zeta_j}{1 - \overline{\zeta_j} z} \right)^{p_j} \\
&= \frac{f(\zeta_k)}{(1 - |\zeta_k|^2)^{p_k}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \left(\frac{\zeta_k - \zeta_j}{1 - \overline{\zeta_j} \zeta_k} \right)^{p_j},
\end{aligned}$$

па је функција $G : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ дефинисана са

$$B_1(z) = \begin{cases} F(z) B_2(z), & z \neq \zeta_k, \\ \dfrac{f(\zeta_k)}{(1 - |z|^2)^{p_k}} \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \left(\frac{z - \zeta_j}{1 - \overline{\zeta_j} z} \right)^{p_j}, & z = \zeta_k. \end{cases}$$

холоморфна. Како је уз то $\lim\limits_{|z| \to 1} |B_1(z)| = 1$, на основу теореме 2.7 имамо да је $B_1(z)$ Блашкеов производ. Закључујемо да је

$$F(z) = \frac{B_1(z)}{B_2(z)}.$$

□

Видели смо да се сваки Блашкеов производ реда n може представити као количник полинома степена n и њему конјуговано-реципрочног полинома. Испоставља се да је, под одређеним условима, сваки такав количник Блашкеов производ.

Став 2.10. *Нека је P полином степена n. Ако су све нуле полинома P унутар јединичног диска, тада је*

$$B(z) = \frac{P(z)}{z^n \overline{P(1/\overline{z})}}$$

Блашкеов производ реда n.

Доказ. Како су све нуле полинома P унутар јединичног диска, за $|z| < 1$ је $P(1/\overline{z}) \neq 0$, па је функција B холоморфна на $\mathbb{D}$ као композиција таквих. За произвољно $z = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ имамо да је

$$|B\left(e^{i\theta}\right)| = \frac{|P\left(e^{i\theta}\right)|}{\left|\left(e^{i\theta}\right)^n \overline{P(1/\overline{z})}\right|} = \frac{\left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|}{\left|\overline{P\left(e^{i\theta}\right)}\right|} = 1,$$

па је на основу теореме 2.7 функција B Блашкеов производ. Полином P има n нула које су по претпоставци све унутар јединичног диска, па ред Блашкеовог производа B јесте једнак n. □

За Блашкеов производ реда n, и за произвољно $w \in \mathbb{D}$ једначина $B(z) = w$ има тачно n решења рачунајући и вишеструкост. Блашкеови производи су и једина холоморфна пресликавања са овом особином. Да бисмо то доказали, формулишимо најпре следећу лему.

Лема 2.11. *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ функција таква да $\lim\limits_{|z|\to 1} |f(z)| \neq 1$. Тада постоји низ комплексних бројева $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из $\mathbb{D}$ такав да $|z_n| \to 1$ и $f(z_n) \to w_0 \in \mathbb{D}$.*

Доказ. Пошто је $\lim\limits_{|z|\to 1} |f(z)| \neq 1$, имамо да постоји $\varepsilon > 0$ такво да за свако $r > 0$ можемо наћи $\zeta_r \in \mathbb{D}$ за које важи да је $|\zeta_r| > r$ и $|f(\zeta_r)| \leq 1 - \varepsilon$.

Формирајмо низ $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такав да је $|z_n| > 1 - \frac{1}{n}$ и $|f(z_n)| \leq 1 - \varepsilon$. Пошто је $f(z_n)$ низ у компакту $\overline{B_{1-\varepsilon}}$, постоји његов конвергирајући подниз

$$f(z_{n_k}) \to w_0 \in B_{1-\varepsilon} \quad k \to \infty,$$

па је z_{n_k} низ комплексних бројева са траженом особином. □

Теорема 2.12. *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање такво да за произвољно $w \in \mathbb{D}$ једначина*

$$f(z) = w$$

има тачно n решења рачунајући њихову вишеструкост. Тада је $f(z)$ Блашкеов производ.

Доказ. Следећи доказ је дао Тибор Радо* у [5]. Доказаћемо да је $\lim\limits_{|z|\to 1} |f(z)| = 1$, одакле, на основу теореме 2.7, следи да је f Блашкеов производ реда n.

Претпоставимо прво да је $\lim\limits_{|z|\to 1} |f(z)| \neq 1$. Тада на основу леме 2.11 знамо да постоји низ $\{z_m\}$ такав да $|z_m| \to 1$ и $f(z_m) \to w_0 \in \mathbb{D}$. На основу претпоставке,

*Tibor Radó (1895 - 1965) – мађарски математичар једначина $f(z) = w_0$ има тачно n решења. Нека су та решења $a_1, a_2, \ldots, a_k$ са вишеструкостима $n_1, n_2, \ldots, n_k$ редом. Показаћемо да за z из довољно мале околине тачке a_j, и за w довољно блиско тачки w_0 једначина $f(z) = w$ има тачно n_j решења.

Пошто је f холоморфна функција и a_j је нула реда n_j функције $f(z) - w_0$ имамо да постоји $\delta_j > 0$ такво да је

$$f(z) - w_0 = (z - a_j)^{n_j} f_j(z),$$

при чему је f_j холоморфна функција која нема нула на $B_{\delta_j}(a_j)$. Функција f_j нема нула на $B_{\delta_j}(a_j)$, па постоји холоморфна функција g_j таква да је $g_j(z)^{n_j} = f_j(z)$, за свако $z \in B_{\delta_j}(a_j)$.

Посматрајмо сада функцију $\psi_j(z) = (z - a_j)g_j(z)$ дефинисану на $B_{\delta_j}(0)$. Будући да је $z = a_j$ нула првог реда ове функције, постоји $\delta'_j \leq \delta_j$ такво да је $\psi_j(z)$ инјективна на $B_{\delta'_j}(a_j)$. Изаберимо $\delta > 0$ такво да су испуњени следећи услови

- Свака од функција ψ_j инјективна на $B_\delta(a_j)$, тј. $\delta \leq \delta'_j$ за свако $j \in \overline{1,k}$;
- Дискови $B_\delta(a_j)$ су међусобно дисјунктни, тј. $\delta < \frac{a_i - a_j}{2}$ за свако $1 \leq i < j \leq k$;
- Дискови $B_\delta(a_j)$ не секу јединичну кружницу $\mathbb{T}$, тј. $\delta < \frac{1-|a_j|}{2}$, за свако $j \in \overline{1,k}$.

Сада је $\psi_j(B_\delta(a_j))$ отворена околина нуле за свако $j \in \overline{1,k}$ на основу принципа очувања области (ψ_j је инјективно) и чињенице да је $\psi_j(a_j) = 0$. Дакле, и $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} \psi_j(B_\delta(a_j))$ је околина нуле па постоји $\varepsilon > 0$ такво да је

$$B_\varepsilon(0) \subset \bigcap_{j=1}^{k} \psi_j(B_\delta(a_j)).$$

Пошто $|z_m| \to 1$, и $f(z_m) \to w_0$, можемо изабрати $m_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $z_{m_0} \notin \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} B_\delta(a_j)$ и $f(z_m) \in B_\varepsilon(w_0)$.

Једначина

$$f(z) = f(z_{m_0}) \tag{2.5}$$

има тачно n_j решења на сваком од скупова $B_\delta(a_j)$, а како је $z_{m_0} \notin B_\delta(a_j)$ и $z = z_{m_0}$ је очигледно решење дате једначине, добили смо да једначина (2.5) има бар

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k + 1 = n + 1$$

решења. Дошли смо до контрадикције, па закључујемо да мора бити

$$\lim_{|z| \to 1} |f(z)| = 1.$$

Овиме је доказ завршен. □

Аналогно тврђење за полиноме је следећа теорема.

Теорема. *Нека је f цела функција. Тада је f полином степена n ако и само ако једначина $f(z) = w$ има тачно n решења за свако $w \in \mathbb{C}$.*

2.2 Апроксимација Блашкеовим производима

Једна од значајних особина полинома јесте њихова густина у скупу непрекидних функција на компактном скупу K са нормом $\|f\|_\infty = \sup_{z \in K} |f(z)|$. То је такозвана Стоун * –Вајерштрасова † теорема. Одговарајућу теорему за Блашкеове производе је дао Каратеодори‡ у раду [6]. Пре исказа и доказа ове теореме представићемо нека друга тврђења о конвергенцији низа Блашкеових производа.

Лема 2.13. *Нека су дати комплексни низови $\{z_k^1\}_{k\in\mathbb{N}}, \{z_k^2\}_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, \{z_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$ такви да је $\lim_{j\to\infty} z_k^j = a_j \in \mathbb{C}$ за свако $j \in \overline{1,n}$. Тада полином дефинисан са*

$$P_k(z) = \prod_{j=1}^{n} \left(z - z_k^j\right)$$

конвергира ка полиному $P(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - a_j)$ равномерно на компактима.

Доказ. Тврђење ћемо доказати индукцијом по степену полинома. Нека је $K \subset \mathbb{C}$ произвољан компакт, и нека је $P_k(z) = z - z_k^1$ низ полинома степена 1 такав

*Marshall Harvey Stone (1903 - 1989) – амерички математичар
†Karl Weierstraß (1815 - 1897) – немачки математичар
‡Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή (1873 - 1950) – грчки математичар

да $z_k^1 \to a_1$ кад $k \to \infty$. Тада је тврђење очигледно тачно јер је

$$\sup_{z\in K} |(z - z_k^1) - (z - a_1)| = \sup_{z\in K} |a_1 - z_k^1| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Претпоставимо зато да је тврђење тачно за полиноме произвољног степена $n \in \mathbb{N}$. Како је

$$\begin{aligned}\sup_{z\in K}\left|\prod_{j=1}^{n+1}(z-a_j) - \prod_{j=1}^{n+1}(z-z_k^j)\right| &= \sup_{z\in K}\left|\prod_{j=1}^{n+1}(z-a_j) - (z-a_1+a_1-z_k^1)\prod_{j=2}^{n+1}(z-z_k^j)\right| \\ &\le \sup_{z\in K}|z-a_1|\left|\prod_{j=2}^{n+1}(z-a_j) - \prod_{j=2}^{n+1}(z-z_k^j)\right| + |a_1-z_k^1|\sup_{z\in K}\left|\prod_{j=2}^{n+1}(z-z_k^j)\right|,\end{aligned}$$

и $\sup\limits_{z\in K}\left|\prod_{j=2}^{n+1}(z-z_k^j\right| \le M$, $|a_1 - z_k^1| \to 0$ кад $k \to \infty$ довољно је доказати да је

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{z\in K}|z-a_1|\left|\prod_{j=2}^{n+1}(z-a_j) - \prod_{j=2}^{n+1}(z-z_k^j)\right| = 0.$$

Имамо да је $\sup_{z\in K}|z-a_1|$ коначан број јер је $|z-a_1|$ непрекидна функција на компакту. Уз то, на основу индуктивне хипотезе имамо да је

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{z\in K}\left|\prod_{j=2}^{n+1}(z-a_j) - \prod_{j=2}^{n+1}(z-z_k^j)\right| = 0,$$

па је тврђење доказано. □

Став 2.14. *Нека је дат Блашкеов производ* $B(z) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}$, *при чему су* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$. *Нека су* $\{z_k^1\}_{k\in\mathbb{N}}, \{z_k^2\}_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, \{z_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$ *низови тачака из* $\mathbb{D}$ *такви да је*

$$\lim_{k\to\infty} z_k^j = a_j,$$

за свако $j \in \overline{1,n}$. *Тада низ Блашкеових производа* $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *дефинисан са*

$$B_k(z) = \prod_{j=1}^{n}\frac{z-z_k^j}{1-\overline{z_k^j}z}$$

конвергира ка $B(z)$ *равномерно на* $\overline{\mathbb{D}}$.

Доказ. Нека је $B_k(z) = \dfrac{P_k(z)}{Q_k(z)}$, при чему је $P_k(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_k^j)$, а $Q_k(z) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \overline{z_k^j}z\right)$. Тада је разлика $|B(z) - B_k(z)|$ једнака

$$\left|\frac{P_k(z)}{Q_k(z)} - \frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \left|\frac{P_k(z)Q(z) - P(z)Q_k(z)}{Q_k(z)Q(z)}\right|.$$

Све нуле полинома $Q(z)$ налазе се изван затвореног јединичног диска, па је $\min\limits_{z\in\overline{\mathbb{D}}}|Q(z)| = m_1 > 0$. Покажимо сада да је и $\min\limits_{z\in\overline{\mathbb{D}}}|Q_k(z)| > 0$.

Пошто $z_k^j \to a_j$ кад $k \to \infty$ за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји довољно велико $k_0 \in \mathbb{N}$ такво да за свако $k > k_0$ важи $|z_k^j - a_j| < \varepsilon$ за све $j \in \overline{1,n}$. Изаберимо $\varepsilon > 0$ такво да за свако $j \in \overline{1,n}$ $a_j \in B_{1-2\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 - 2\varepsilon\}$. Тада и $z_k^j \in B_{1-\varepsilon}$ за свако $j \in \overline{1,n}$ и за свако $k > k_0$, па је $1 - \left|\overline{z_k^j}\right| > \varepsilon$. Како је

$$\min_{z\in\overline{\mathbb{D}}}|Q_k(z)| = \min_{z\in\overline{\mathbb{D}}}\prod_{j=1}^{n}\left|1 - \overline{z_k^j}z\right| \geq \min_{z\in\overline{\mathbb{D}}}\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \left|\overline{z_k^j}\right|\right) \geq \min_{\substack{z\in\overline{\mathbb{D}}\\ j\in\overline{1,n}}}\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \left|\overline{z_k^j}\right|\right)$$

закључујемо да за $k > k_0$ имамо $\min\limits_{z\in\overline{\mathbb{D}}}|Q_k(z)| \geq \varepsilon^n > 0$. Дакле, за $k > k_0$ важи да је $|Q_k(z)Q(z)| \geq \varepsilon^n m_1 = m > 0$.

Сада имамо да је

$$\begin{aligned}|P_k(z)Q(z) - P(z)Q_k(z)| &= |P_k(z)Q(z) - P(z)Q(z) + P(z)Q(z) - P(z)Q_k(z)| \\ &= |Q(z)|\,|P(z) - P_k(z)| + |P(z)|\,|Q(z) - Q_k(z)|.\end{aligned}$$

На основу леме 2.13 имамо да полином $P_k(z)$ тежи ка полиному $P(z)$ равномерно на компакту $\overline{\mathbb{D}}$, па за произвољно $\varepsilon_1 > 0$ и довољно велико $k \in \mathbb{N}$ важи неједнакост $\max\limits_{z\in\overline{D}}|P(z) - P_k(z)| < \varepsilon_1$. Слично је и $\max\limits_{z\in\overline{D}}|P(z) - P_k(z)| < \varepsilon_2$, а пошто су полиноми P и Q ограничене функције на $\overline{\mathbb{D}}$ постоји $M > 0$ такво да је $|P(z)| + |Q(z)| < M$ за $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Добијамо да је

$$|P_k(z)Q(z) - P(z)Q_k(z)| < M(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Сада, за $\varepsilon > 0$ произвољно и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{m\varepsilon}{2M}$ имамо да је за довољно велико $k \in \mathbb{N}$

$$|B_k(z) - B(z)| = \left|\frac{P_k(z)Q(z) - P(z)Q_k(z)}{Q_k(z)Q(z)}\right| < \frac{\frac{m\varepsilon}{2M} + \frac{m\varepsilon}{2M}}{m} = \varepsilon,$$

за свако $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Односно, $B_k(z) \to B(z)$ равномерно на $\overline{\mathbb{D}}$. $\square$

Став 2.15. *Нека је $B_n(z)$ низ Блашкеових производа који конвергира равномерно ка функцији $B(z)$ на $\mathbb{D}$. Тада је и функција $B(z)$ Блашкеов производ.*

Доказ. $B(z)$ је холоморфна функција као равномерни лимес холоморфних функција. Даље, имамо да је

$$\big|1 - |B(z)|\big| \leq \big||B(z)| - |B_n(z)|\big| + \big|1 - |B_n(z)|\big|.$$

Нека је сада $\varepsilon > 0$ произвољно и нека је $n_0 \in \mathbb{N}$такво да је

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \big||B(z)| - |B_n(z)|\big| < \varepsilon,$$

кад год је $n > n_0$. Тада за свако $n > n_0$ и за свако $z \in \mathbb{D}$ важи неједнакост

$$|B(z) - 1| < \varepsilon + \big|1 - |B_n(z)|\big|.$$

Пуштањем да $|z| \to 1$ у горњој неједнакости добијамо да је

$$\lim_{|z| \to 1} |1 - |B(z)|| < \varepsilon.$$

Како је $\varepsilon > 0$ било произвољно, то је и $\lim\limits_{|z| \to 1} |B(z)| = 1$.

Дакле, B је холоморфна функција на $\mathbb{D}$ за коју је $\lim\limits_{|z| \to 1} |B(z)| = 1$. На основу теореме 2.7, закључујемо да је B Блашкеов производ. □

Пре него што формулишемо Каратеодоријеву теорему издвојимо следећу лему

Лема 2.16. *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ произвољна холоморфна функција. Тада за произвољно $n \in \mathbb{N}$ постоји Блашкеов производ B_n такав да функција $f(z) - B_n(z)$ има нулу реда барем n у 0.*

Доказ. Тврђење ћемо доказати индукцијом по реду нуле $n \in \mathbb{N}$.

Можемо претпоставити да је $|f(0)| < 1$ јер је у супротном функција f константна зато што достиже максимум модула у унутрашњости диска $\mathbb{D}$. Како функција $f(z) - \varphi_{-f(0)}(z)$ очигледно има нулу за $z = 0$, и $\varphi_{-f(0)}(z)$ је Блашкеов производ првог реда, индуктивна база је доказана.

Претпоставимо сада да за произвољну холоморфну функцију f постоји Блашкеов производ B_n такав да је $z = 0$ нула реда барем n функције $f(z) -$

$B_n(z)$. Како на основу Шварцове имамо да је $|\varphi_{f(0)} \circ f(z)| \leq |z|$, функција g дефинисана са

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_{f(0)} \circ f(z)}{z}, & z \neq 0, \\ (\varphi_{f(0)} \circ f(z))'(0), & z = 0. \end{cases}$$

слика $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$. Уз то, она је и холоморфна, па применом индуктивне хипотезе на функцију g долазимо до Блашкеовог производа B_n таквог да је $z = 0$ нула реда n функције

$$\frac{\varphi_{f(0)} \circ f(z)}{z} - B_n(z).$$

Јасно је да је $z = 0$ нула реда барем $n+1$ функције $\varphi_{f(0)} \circ f(z) - zB_n(z)$. Посматрајмо функцију $f(z) - \varphi_{-f(0)}(zB_n(z))$ и покажимо да је $z = 0$ нула реда барем $n+1$ ове функције. Како је

$$\varphi_{-f(0)}(z) - \varphi_{-f(0)}(w) = \frac{(1-|f(0)|^2)(z-w)}{(1-\overline{f(0)}z)(1-\overline{f(0)}w)}, \quad \text{за све } z, w \in \mathbb{D},$$

имамо да је

$$\varphi_{-f(0)}(\varphi_{f(0)} \circ f(z)) - \varphi_{-f(0)}(zB_n(z)) = \frac{(1-|f(0)|^2)(\varphi_{f(0)} \circ f(z) - zB_n(z))}{(1-\overline{f(0)}\,\varphi_{f(0)} \circ f(z))(1-\overline{f(0)}zB_n(z))}.$$

Закључујемо да је $z = 0$ нула реда $n+1$ функције

$$\varphi_{-f(0)}(\varphi_{f(0)} \circ f(z)) - \varphi_{-f(0)}(zB_n(z)) = f(z) - \varphi_{-f(0)}(zB_n(z)).$$

Овиме је доказ завршен. $\square$

Теорема 2.17 (Каратеодори). *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ произвољна холоморфна функција. Тада постоји низ Блашкеових производа B_n такав да $B_n \to f$ равномерно на компактима.*

Доказ. Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција и $B_n(z)$ Блашкеов производ такав да је $z = 0$ нула реда бар n функције $f(z) - B_n(z)$. На основу претходне леме знамо да постоји такав Блашкеов производ. Сада имамо да је функција

$$z \mapsto \frac{f(z) - B_n(z)}{2}$$

холоморфна на $\mathbb{D}$ и важи $\dfrac{|f(z) - B_n(z)|}{2} \leq 1$. Како је $z = 0$ нула реда $n+1$, на основу теореме 2.19 закључујемо да је $|f(z) - B_n(z)| \leq 2|z|^{n+1}$.

За произвољан компакт $K \subset \mathbb{D}$ имамо да је $\max\limits_{z \in K} |z| = r_K < 1$ и $r^n \to 0, \ n \to \infty$ за свако $|r| < 1$, па је тврђење доказано. $\square$

Теорема 2.18 (Хелсон-Сарасон [7]). *Нека је $u : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ непрекидна функција. Тада постоји низ Блашкеових производа B_n таквих да $B_n(z) \to u(z)$ равномерно на $\mathbb{T}$.*

Доказ. Нека је $\theta : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је

$$u(z) = e^{i\theta(z)}, \quad \text{за } z \in \mathbb{T}.$$

Како су тригонометријски полиноми густи у простору непрекидних функција (видети, нпр. [8]) постоји низ тригонометријских полинома

$$\theta_n(e^{it}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

такав да $\theta_n \to \theta$ равномерно на $\mathbb{T}$. Сваком тригонометријском полиному θ_n можемо придружити комплексан полином

$$Q_n(z) = ia_0 + (b_1 + ia_1)z + \ldots + (b_n + ia_n)z^n$$

за који важи да је $\operatorname{Im} Q_n(z) = \theta_n(z)$ и $\operatorname{Re} Q_n(0) = 0$.

Посматрајмо функцију $e^{\frac{1}{2}Q_m(z)}$ и њен Тејлоров развој у тачки $z = 0$. Имамо да је

$$e^{\frac{1}{2}Q_m(z)} = \underbrace{e^{i\gamma} + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n}_{e^{i\gamma}P_n(z)} + \alpha_{n+1} z^{n+1} + \ldots,$$

при чему је $\gamma = \frac{1}{2} \operatorname{Im} Q(0)$. Означимо са $P_n(z)$ полином $P_n(z) = 1 + e^{-i\gamma}\alpha_1 z + \ldots + e^{-i\gamma}\alpha_n z^n$. Степени ред конвергира равномерно на компактима који су садржани у његовој области конвергенције, па имамо да полином $P_n(z) \to e^{\frac{1}{2}Q_m(z) - \gamma}$ равномерно на $\overline{\mathbb{D}}$. Закључујемо да за довољно велико n полином P_n нема нула унутар затвореног јединичног диска $\overline{\mathbb{D}}$.

Како полином $P_n(z)$ нема нула у $\mathbb{D}$ и $z_0 \in \mathbb{C}$ је нула полинома $P_n(z)$ ако и само ако је $1/\overline{z_0}$ нула полинома $z^n P(1/\overline{z})$, закључујемо да су све нуле полинома $z^n \overline{P(1/\overline{z})}$ садржане у $\mathbb{D}$. На основу става 2.10 имамо да је

$$B_n(z) = \frac{z^n \overline{P_n(1/\overline{z})}}{P_n(z)} e^{-2i\gamma}.$$

Блашкеов производ. За $z \in \mathbb{T}$ је

$$\begin{aligned}\frac{z^n}{B_n(z)} = e^{2i\gamma} \frac{P_n(z)}{\overline{P_n(1/\overline{z})}} &= e^{2i\gamma} \frac{1 + \alpha_1 e^{-i\gamma} z + \alpha_2 e^{-i\gamma} z^2 + \ldots + e^{-i\gamma} z^n}{1 + \overline{\alpha_1} e^{i\gamma} \frac{1}{z} + \overline{\alpha_2} e^{i\gamma} \frac{1}{z^2} + \ldots + \overline{\alpha_n} e^{i\gamma} \frac{1}{z^n}} \\ &= e^{2i\gamma} e^{2i \arg(P_n(z))} = e^{2i \arg(e^{i\gamma} P_n(z))}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Пошто $e^{i\gamma}P_n(z) \to e^{\frac{1}{2}Q_m(z)}$ равномерно на $\overline{\mathbb{D}}$, а $x \mapsto e^x$ је непрекидна, па и равномерно непрекидна функција на компакту $\overline{\mathbb{D}}$, имамо да

$$e^{2i\arg(e^{i\gamma}P_n(z))} \to e^{2i\arg(e^{\frac{1}{2}Q_m(z)})}$$

равномерно на $\mathbb{D}$. Односно, будући да је $\arg(e^{\frac{1}{2}Q_m(z)}) = \frac{1}{2}\operatorname{Im} Q_m(z) + 2k\pi$, за неко $k \in \mathbb{Z}$ добијамо да

$$e^{2i\arg(e^{i\gamma}P_n(z))} \to e^{i\operatorname{Im} Q_m(z)}$$

равномерно на $\mathbb{T}$. Имајући у виду једнакост (2.6) закључујемо да за за произвољни тригонометријски полином $Q_m(z)$ постоји низ Блашкеових производа $B_n(z)$ такав да за свако $\varepsilon > 0$ и n довољно велико важи

$$\sup_{z\in\mathbb{T}} \left| \frac{z^n}{B_n(z)} - e^{i\operatorname{Im} Q_m(z)} \right| < \varepsilon.$$

Нека је сада $\varepsilon > 0$ произвољно, θ_m такво да је $\sup\limits_{z\in\mathbb{T}} |\theta_m(z) - \theta(z)| < \varepsilon$, а B_n Блашкеов производ такав да је $\sup\limits_{z\in\mathbb{T}} \left| \dfrac{z^n}{B_n(z)} - e^{i\operatorname{Im} Q_m(z)} \right| < \varepsilon$. Тада за свако $z \in \mathbb{T}$ важи неједнакост

$$\begin{aligned}
\left| \frac{z^n}{B_n(z)} - u \right| = \left| \frac{z^n}{B_n(z)} - e^{i\theta(z)} \right| &= \left| \frac{z^n}{B_n(z)} - e^{i\operatorname{Im} Q_m(z)} + e^{i\theta_n(z)} - e^{i\theta(z)} \right| \\
&\le \left| \frac{z^n}{B_n(z)} - e^{i\operatorname{Im} Q_m(z)} \right| + \left| e^{i\theta_n(z)} - e^{i\theta(z)} \right| \\
&< \varepsilon + |e^{i\theta(z)}|\,|e^{i(\theta_n(z)-\theta(z))} - 1| \\
&\le \varepsilon + |\theta_n(z) - \theta(z)| \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

при чему је приликом преласка из претпоследњег у последњи ред искоришћена неједнакост $e^x - 1 \le x$. Како је $z \in \mathbb{T}$ било произвољно, то је и

$$\sup_{z\in\mathbb{T}} \left| \frac{z^n}{B_n(z)} - u(z) \right| < 2\varepsilon.$$

Коначно, будући да је $\varepsilon > 0$ произвољно, низ $\dfrac{z^n}{B_n(z)}$ конвергира ка $u(z)$ кад $n \to \infty$ равномерно на $\mathbb{T}$, што је и требало доказати. $\square$

2.3 Блашкеови производи и Шварцова лема

Следећа теорема представља уопштење Шварцове леме на холоморфну функцију $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ са произвољним бројем нула.

Теорема 2.19. *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција и нека су $z_1, z_2, \dots, z_n$ нуле функције f вишеструкости $r_1, r_2, \dots, r_n$ редом. Тада је*

а) $|f(z)| \leq \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} \right|^{r_k}$, *за свако* $z \in \mathbb{D}$,

б) $|f^{(r_j)}(z_j)| \leq \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z_j - z_k}{1 - \overline{z_k} z_j} \right|^{r_k} \frac{r_j!}{(1 - |z_j|^2)^{r_j}}$, *за свако* $j \in \overline{1, n}$.

Притом, уколико постоји тачка $z \in \mathbb{D}$ таква да се у а) достиже једнакост, или се једнакост достиже у б), за неко $j \in \overline{1, n}$ функција f је Блашкеов производ.

Доказ. Посматрајмо функцију

$$g(z) = \begin{cases} f(z) \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} \right)^{-r_k}, & z \neq z_j \text{ за све } j \in \overline{1, n}, \\ \dfrac{f^{(r_j)}(z_j)}{r_j!} (1 - |z_j|^2)^{r_j} \displaystyle\prod_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^{n} \left(\frac{z_j - z_k}{1 - \overline{z_k} z_j} \right)^{-r_k}, & z = z_j. \end{cases}$$

Функција g је холоморфна на $\mathbb{D} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ као композиција холоморфних. Да бисмо показали да је функција g холоморфна и у z_j, по теореми о отклоњивом сингуларитету довољно је показати да за свако $j \in \overline{1, n}$ важи

$$\lim_{z \to z_j} g(z) = g(z_j).$$

Како је z_j нула реда r_j, имамо да је $f(z) = \frac{f^{(r_j)}(z_j)}{r_j!} (z - z_j)^{r_j} + o\big((z - z_j)^{r_j}\big)$, кад $z \to z_j$. Дакле, имамо да је

$$g(z) = f(z) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} \right)^{-r_k} = \left(\frac{f^{(r_j)}(z_j)}{r_j!} (z - z_j)^{r_j} + o\big((z - z_j)^{r_j}\big) \right) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - \overline{z_k} z}{z - z_k} \right)^{r_k}.$$

Даље, како је $o\big((z - z_j)^{r_j}\big) \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - \overline{z_k} z}{z - z_k} \right)^{r_k} = o(1)(1 - \overline{z_j} z)^{r_j} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^{n} \left(\frac{1 - \overline{z_k} z}{z - z_k} \right)^{r_k}$, имамо да је

$$g(z) = \frac{f^{(r_j)}(z_j)}{r_j!} (1 - \overline{z_j} z)^{r_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left(\frac{1 - \overline{z_k} z}{z - z_k} \right)^{r_k} + o(1)(1 - \overline{z_j} z)^{r_j} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^{n} \left(\frac{1 - \overline{z_k} z}{z - z_k} \right)^{r_k}.$$

Сада, пошто је $z_i \neq z_j$ за $i \neq j$ имамо да је

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_j} f(z)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)^{-r_k} &= \lim_{z\to z_j}\frac{f^{(r_j)}(z_j)}{r_j!}(1-\overline{z_j}z)^{r_j}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(\frac{1-\overline{z_k}z}{z-z_k}\right)^{r_k}\\
&= \frac{f^{(r_j)}(z_j)}{r_j!}(1-|z_j|^2)^{r_j}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(\frac{z_j-z_k}{1-\overline{z_k}z_j}\right)^{-r_k}\\
&= g(z_j).
\end{aligned}$$

Дакле, функција g је холоморфна на $\mathbb{D}$. Применом принципа максимума модула на функцију g на скупу $r\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{D} \mid |z| < r\}$, имамо да за свако $1 > r > \max_{j\in\overline{1,n}} |z_j|$ важи

$$\sup_{z\in r\mathbb{D}}|g(z)| = \max_{z\in\overline{r\mathbb{D}}}|g(z)| = \max_{|z|=r}|g(z)| = \max_{|z|=r}\left|f(z)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)^{-r_k}\right|.$$

Како је $\left|\dfrac{|a|-|b|}{1-|b||a|}\right| \leq \left|\dfrac{a-b}{1-\overline{b}a}\right| \leq \dfrac{|a|+|b|}{1+|b||a|}$, и $\dfrac{1-|b||a|}{|a|-|b|} = |a| + \dfrac{1-|a|^2}{|a|-|b|}$, заменом у претходну једнакост имамо да за свако $1 > r > \max_k |z_k| = r_0$ важи

$$\begin{aligned}
\max\left|f(z)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)^{-r_k}\right| &\leq \max_{|z|=r}|f(z)|\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{|z|-|z_k|}{1-|z_k||z|}\right|^{-r_k}\\
&\leq \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-r|z_k|}{r-|z_k|}\right)^{r_k}\\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(r+\frac{1-r^2}{r-|z_k|}\right)^{r_k}.
\end{aligned}$$

Коначно, добијамо да за свако $1 > r > r_0 = \max|z_k|$ важи неједнакост

$$\sup_{z\in r\mathbb{D}}|g(z)| \leq \prod_{k=1}^{n}\left(r+\frac{1-r^2}{r-|z_k|}\right)^{r_k} \leq \prod_{k=1}^{n}\left(r+\frac{1-r^2}{r-r_0}\right)^{r_k} = \left(r+\frac{1-r^2}{r-r_0}\right)^{m}.$$

Пуштањем да $r \to 1^-$ у претходној неједнакости, добијамо

$$\sup_{z\in r\mathbb{D}}|g(z)| \leq \lim_{r\to 1^-}\left(r+\frac{1-r^2}{r-r_0}\right) = 1.$$

Дакле, имамо да је $|g(z)| \leq 1$, па је

$$|f(z)| \leq \prod_{k=1}^{n}\left|\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right|^{r_k}, \quad \text{за } z \neq z_j$$

и
$$|f^{(r_j)}(z_j)| \le \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z_j - z_k}{1 - \overline{z_k} z_j} \right|^{r_k} \frac{r_j!}{(1 - |z_j|^2)^{r_j}}, \qquad \text{за свако } j \in \overline{1, n}.$$

Приметимо још и да се нека од горње две неједнакости достиже у тачки $z_0 \in \mathbb{D}$ ако и само ако је $|g(z_0)| = |f(z_0)|$. Како је на основу принципа максимума модула у том случају $g(z)$ константна функција, имамо да је
$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} \right)^{r_k}, \text{ за неко } \theta \in \mathbb{R}.$$

□

У специјалном случају $z = 0$ добијамо $|f(0)| \le |z_1 \cdot z_2 \cdots z_n|$, па смо добили још једну особину која је карактеристична за Блашкеове производе.

Последица 2.20. *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција са нулама $z_1, z_2, \ldots z_n$ таква да је $|f(0)| = |z_1 \cdot z_2 \cdots z_n|$. Тада је f Блашкеов производ.*

Глава 3

Извод коначних Блашкеових производа

У овој глави ћемо дати неке изразе за извод коначног Блашкеовог производа. Показаћемо да Блашкеов производ реда n има тачно $n-1$ критичну тачку и показаћемо тврђења аналогна тврђењима за полиноме која дају ограничења за локацију критичних тачака.

3.1 Извод коначног Блашкеовог производа

Једноставности ради, посматрајмо Блашкеов производ без константног члана $e^{i\theta}$. То јест, посматрајмо $B(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}$, и уведимо ознаку $B_j(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}$ за Блашкеов производ реда $n-1$.

Извод Блашкеовог производа рачунамо директно и добијамо да је

$$B'(z) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} \right)' B_k(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{(1 - \overline{z_k} z)^2} B_k(z).$$

Специјално, у тачкама $z = z_j$, будући да је $B_j(z_k) = 0$, осим за $k = j$, када је $B_j(z_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{z_j - z_k}{1 - \overline{z_k} z_j}$ имамо да је

$$B'(z_j) = \frac{1 - |z_j|^2}{(1 - \overline{z_j} z_j)^2} B_j(z_j) = \frac{1}{1 - |z_j|^2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{z_j - z_k}{1 - \overline{z_k} z_j}. \tag{3.1}$$

Како је $B(z) = B_k(z)\dfrac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z}$ за $z \neq z_k$ имамо да је

$$\begin{aligned} B'(z) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - |z_k|^2}{(1 - \overline{z_k}z)^2} \frac{1 - \overline{z_k}z}{z - z_k} B(z) \right) \\ &= B(z) \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{(1 - \overline{z_k}z)(z - z_k)}, \qquad \text{за } z \neq z_j. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Коначно, обједињавањем једнакости (3.1) и (3.2) имамо

$$B'(z) = \begin{cases} B(z) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{(1 - \overline{z_k}z)(z - z_k)}, & z \notin \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}, \\ \dfrac{1}{1 - |z|^2} \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z}, & z \in \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}. \end{cases} \tag{3.3}$$

При чему, будући да је Блашкеов производ холоморфна функција на одговарајућем скупу, последња једнакост важи за свако $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{z_1}, 1/\overline{z_2}, \ldots, 1/\overline{z_n}\}$. Специјално, претходна једнакост важи за свако $z \in \mathbb{D}$.

Став 3.1. *Нека је B Блашкеов производ реда n. Тада је за свако $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$*

$$\lim_{z \to e^{i\theta}} \frac{1 - |B(z)|^2}{1 - |z|^2} = |B'(e^{i\theta})|.$$

Доказ. У Ставу 2.2 смо видели да је

$$\frac{1 - |B(z)|^2}{1 - |z|^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(|\varphi_k'(z)| \prod_{j=1}^{k-1} |\varphi_j(z)|^2 \right).$$

Пуштањем да $z \to e^{i\theta}$ десна страна једнакости постаје $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k'(e^{i\theta})|$, а то је управо једнако $|B'(e^{i\theta})|$, као што ће бити показано у наредном ставу.

□

Став 3.2. *За произвољно $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ и Блашкеов производ $B(z) = \varphi_1(z)\varphi_2(z)\ldots\varphi_n(z)$ важи*

$$B'(e^{i\theta}) = B(e^{i\theta})e^{-i\theta} \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k'(e^{i\theta})|.$$

Специјално, $|B'(e^{i\theta})| \neq 0$.

Доказ. Заменом $z = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ у једнакост (3.3) добијамо

$$\begin{aligned} B'(e^{i\theta}) &= B(e^{i\theta}) \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|z_k|^2}{(1-\overline{z_k}e^{i\theta})(e^{i\theta}-z_k)} \\ &= B(e^{i\theta}) \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|z_k|^2}{e^{i\theta}(1-\overline{z_k}e^{i\theta})(1-e^{-i\theta}z_k)} \\ &= B(e^{i\theta})e^{-i\theta} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|z_k|^2}{(1-\overline{z_k}e^{i\theta})\overline{(1-e^{i\theta}\overline{z_k})}} \\ &= B(e^{i\theta})e^{-i\theta} \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k'(e^{i\theta})|. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Специјално, пошто је $|B(e^{i\theta})| = 1$, имамо

$$|B'(e^{i\theta})| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|z_k|^2}{|1-\overline{z_k}e^{i\theta}|^2}. \tag{3.5}$$

□

Сви сабирци у једнакости (3.5) су позитивни, па Блашкеов производ $B(z)$ нема критичних тачака на јединичној кружници $\mathbb{T}$. Пошто је $B'(e^{i\theta}) \neq 0$, знамо да је B локално „1-1" на $\mathbb{T}$. Сада, уз помоћ теореме 2.6 имамо следећу последицу.

Последица 3.3. *Ако је B Блашкеов производ реда n, тада за свако $w_0 \in \mathbb{T}$ једначина*

$$B(z) = w_0$$

има тачно n ***различитих*** *решења која леже на јединичној кружници $\mathbb{T}$.*

На основу последице 2.8 знамо да је $B \circ \varphi$ Блашкеов производ са нулама $\varphi^{-1}(z_1), \varphi^{-1}(z_2), \ldots, \varphi^{-1}(z_n)$ када су B Блашкеов производ са нулама $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и φ аутоморфизам диска. Слично тврђење важи и за критичне тачке Блашкеовог производа $B \circ \varphi(z)$.

Став 3.4. *Нека су $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ критичне тачке Блашкеовог производа B, и нека је $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Тада су критичне тачке Блашкеовог производа $B \circ \varphi$ управо тачке $\varphi^{-1}(\zeta_1), \varphi^{-1}(\zeta_2), \ldots, \varphi^{-1}(\zeta_{n-1})$.*

Доказ. Како је $(B \circ \varphi)'(z) = B'(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)$, и $\varphi'(z) \neq 0$ за $z \in \mathbb{D}$ добијамо да је $(B \circ \varphi)'(z) = 0$ само ако је $B'(\varphi(z)) = 0$. То се дешава када је $\varphi(z) = \zeta_k$, то јест, $z = \varphi^{-1}(\zeta_k)$. □

3.2 Хиперболички извод Блашкеовог производа

Извод функције f у тачки z је гранична вредност

$$\lim_{w \to z} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}.$$

Разлика $f(z) - f(w)$ назива се прираштај функције, а величина $\frac{f(z) - f(w)}{z - w}$ диференцијални количник. Да бисмо увели аналогну величину у диску $\mathbb{D}$ уведимо прво псеудо-хиперболичку удаљеност тачака.

Дефиниција 3.5. *Нека су $z, w \in \mathbb{D}$ комплексни бројеви. Комплексна псеудо-хиперболичка удаљеност тачака z и w је*

$$[z, w] = \frac{z - w}{1 - \overline{w}z}.$$

Дефиниција 3.6. *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција. Величину*

$$f^*(z, w) = \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]}$$

називамо хиперболички диференцијални количник.

Хиперболички извод функције f уводимо, очекивано, пуштајући да $w \to z$ у хиперболичком диференцијалном количнику.

Дефиниција 3.7. *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција. Хиперболички извод функције f у тачки $z \in \mathbb{D}$ је*

$$f^h(z) = \lim_{w \to z} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2} f'(z).$$

Као што је извод полинома полином и хиперболички извод Блашкеовог производа је Блашкеов производ.

Став 3.8. *Нека је $B(z)$ коначан Блашкеов производ. Тада је $B^h(z)$ такође Блашкеов производ. Нуле Блашкеовог производа $B^h(z)$ су управо критичне тачке Блашкеовог производа $B(z)$.*

Доказ. Очигледно је да је $B^h(z)$ холоморфна функција на $\mathbb{D}$, а на основу Става 3.1 добијамо да је $\lim_{|z| \to 1} |B^h(z)| = 1$. Дакле, $B^h(z)$ је коначан Блашкеов производ. Јасно је да су његове нуле управо нуле функције $B'(z)$ које се налазе у $\mathbb{D}$. $\square$

Касније ћемо видети да Блашкеов производ реда n има тачно $n-1$ критичну тачку. Уз помоћ тог тврђења закључујемо да је хиперболички извод Блашкеовог производа реда n Блашкеов производ реда $n-1$.

Пошто смо увели хиперболички диференцијални количник, можемо формулисати и следећу теорему из ([1] стр. 254)

Теорема 3.9. *Нека је $w \in \mathbb{D}$ произвољно. Тада је $B(z)$ коначан Блашкеов производ степена n ако и само ако је $B^*(z,w)$ коначан Блашкеов производ степена $n-1$ по променљивој z.*

Доказ. Нека је прво $B(z)$ коначан Блашкеов производ реда n. Тада је, на основу Последице 2.8, и функција $z \mapsto \varphi_{B(w)} \circ B(z) = [B(z), B(w)]$ такође Блашкеов производ реда n. Тај Блашкеов производ се анулира за $z = w$, па он садржи фактор $\varphi_w(z) = [z, w]$. Закључујемо да је $z \mapsto B^*(z,w) = \dfrac{[B(z), B(w)]}{[z,w]}$ Блашкеов производ реда $n-1$.

Претпоставимо сада да је $z \mapsto B^*(z,w)$ Блашкеов производ реда $n-1$. Јасно је да је тада и

$$z \mapsto B^*(z,w) \cdot [z,w] = B^*(z,w)\varphi_w(z)$$

Блашкеов производ. У питању је Блашкеов производ реда n

$$z \mapsto \frac{B(z) - B(w)}{1 - \overline{B(z)}B(w)}.$$

Односно, композиција $\varphi_{B(w)} \circ B$. Композицијом са леве стране аутоморфизмом диска $\varphi_{-B(w)}$ долазимо до закључка да је $B(z)$ Блашкеов производ реда n. $\square$

Ова теорема је аналогна следећој теореми за полиноме:

Теорема. *За дато $w \in \mathbb{C}$, $P(z)$ је полином степена k ако и само ако је диференцијални количник*

$$P^{\#}(z,w) = \frac{P(z) - P(w)}{z - w}$$

полином степена $k-1$ по променљивој z.

3.3 Број критичних тачака Блашкеовог производа

Ако представимо Блашкеов производ као у (2.3), при чему је

$$P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n,$$

добијамо да је

$$B'(z) = \left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n}{\overline{\alpha_0} z^n + \overline{\alpha_1} z^{n-1} + \ldots + \overline{\alpha_n}}\right)' \tag{3.6}$$

Дакле, $B'(z) = \dfrac{G(z)}{(\overline{\alpha_0} z^n + \overline{\alpha_1} z^{n-1} + \ldots + \overline{\alpha_n})^2}$, где је

$$\begin{aligned} G(z) &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 z + \ldots + n\alpha_n z^{n-1})(\overline{\alpha_0} z^n + \overline{\alpha_1} z^{n-1} + \ldots + \overline{\alpha_n}) \\ &\quad - (\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n)(n\overline{\alpha_0} z^{n-1} + (n-1)\overline{\alpha_1} + \ldots + \overline{\alpha_{n-1}}) \\ &= z^{2n-1}(n\alpha_n \overline{\alpha_0} - n\alpha_n \overline{\alpha_0}) + z^{2n-2}() + \cdots \end{aligned} \tag{3.7}$$

Да би било $B'(z) = 0$, мора бити $G(z) = 0$. Пошто уз члан z^{2n-1} у полиному G имамо $(n\alpha_n\overline{\alpha_0} - n\overline{\alpha_0}\alpha_n) = 0$, G је полином степена највише $2n - 2$. Дакле, Блашкеов производ B има највише $2n - 2$ критичне тачке.

На основу једнакости $B(z)\overline{B(1/\overline{z})} = 1$ закључујемо да су Блашкеови производи на одређен начин симетрични у односу на јединични диск $\mathbb{D}$. Да бисмо видели каква симетрија важи за критичне тачке, диференцираћемо ову једнакост. Будући да је

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left(\overline{B(1/\overline{z})}\right) &= \overline{\left(\frac{d}{d\overline{z}} B(1/\overline{z})\right)} \\ &= \overline{(B'(1/\overline{z})\,(-1/\overline{z}^2)} \\ &= -\frac{1}{z^2}\overline{B'(1/\overline{z})}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

добијамо

$$B'(z)\overline{B(1/\overline{z})} = B(z)\overline{B'(1/\overline{z})}/z^2,$$

односно

$$B'(z) = \frac{1}{z^2} B(z)^2 \overline{B'(1/\overline{z})}. \tag{3.9}$$

Како полазна једнакост важи за $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, z_1, \ldots, z_n, 1/\overline{z_1}, \ldots, 1/\overline{z_n}\}$, можемо формулисати следећи став.

Став 3.10. *Нека је B Блашкеов производ и $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ таква да је $B(\zeta) \neq 0$. Тада је $B'(\zeta) = 0$ ако и само ако је $B'(1/\overline{\zeta}) = 0$.*

На основу претходног става, критичне тачке „долазе у паровима”, па можемо очекивати да у $\mathbb{D}$ Блашкеов производ B има највише $n - 1$ критичну тачку. Важи јаче тврђење.

Теорема 3.11. *Нека је* $B(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}$ *Блашкеов производ реда* n*. Тада функција* $B'(z)$ *има тачно* $n - 1$ *нулу унутар јединичног диска* $\mathbb{D}$*.*

Доказ. Уочимо функцију

$$g(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |z_k|^2}{(1 - \overline{z_k} z)^2} B_k(z).$$

Ова функција је холоморфна на $\mathbb{D}$, и за $z = e^{i\theta}$ имамо

$$\begin{aligned}
|g(e^{i\theta})| &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |z_k|^2}{(1 - \overline{z_k} e^{i\theta})^2} B_k(e^{i\theta}) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |z_k|^2}{(1 - \overline{z_k} e^{i\theta})^2} \left(\frac{e^{i\theta} - z_k}{1 - \overline{z_k} e^{i\theta}} \right)^{-1} B(e^{i\theta}) \right| \\
&= \left| B(e^{i\theta}) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |z_k|^2}{(1 - \overline{z_k} e^{i\theta})(e^{i\theta} - z_k)} \right| \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - \overline{z_k} e^{i\theta}|^2},
\end{aligned}$$

па је $|g(z)| < |B'(z)|$ за свако $z \in \mathbb{T}$. Обе функције су холоморфне на $\mathbb{D}$, па применом Рушеове теореме закључујемо да функције $B'(z)$ и

$$B'(z) - g(z) = \frac{1 - |z_n|^2}{(1 - \overline{z_n} z)^2} B_n(z)$$

имају исти број нула у $\mathbb{D}$. Како је $\frac{1 - |z_n|^2}{(1 - z_n z)^2} \neq 0$ за $z \in \mathbb{D}$, $B'(z) - g(z) = 0$ ако и само ако је $B_n(z) = 0$. Међутим, како је $B_n(z)$ Блашкеов производ реда $n - 1$, закључујемо да функције $B'(z) - g(z)$, па и $B'(z)$ имају тачно $n - 1$ нулу у $\mathbb{D}$. □

3.4 Гаус-Лука теорема за Блашкеове производе

Следећи резултат се први пут имплицитно јавио у Гаусовом* раду, а експлицитно га је формулисао и доказао Лука† у раду [9].

*Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) – немачки математичар, астроном, картограф и физичар
†Félix Lucas

Теорема 3.12 (Гаус-Лука)**.** *Нека је P неконстантан моничан полином са нулама $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тада се нуле полинома $P'(z)$ налазе у $\mathrm{co}_E(a_1, a_2, \ldots, a_n)^\dagger$.*

Доказ. Нека је ζ произвољна нула полинома P'. Ако је ζ уједно и нула полинома P, тј. $\zeta = a_k$, тривијално важи да је $\zeta \in \mathrm{co}_E(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Претпоставимо зато да је $P(\zeta) \neq 0$. Тада је логаритамски извод P'/P једнак нули, тј.

$$0 = \frac{P'(\zeta)}{P(\zeta)} = \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(\zeta - a_k)\right)' = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\zeta - a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{\zeta - a_k}}{|\zeta - a_k|^2}.$$

Дакле, имамо да је

$$\zeta \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\zeta - a_k|^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{|\zeta - a_k|^2},$$

па и

$$\zeta = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \frac{|\zeta - a_k|^{-2}}{\sum\limits_{j=1}^{n} |\zeta - a_j|^{-2}}. \tag{3.10}$$

Пошто је $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|\zeta - a_k|^{-2}}{\sum\limits_{j=1}^{n} |\zeta - a_j|^{-2}} = 1$, у једнакости (3.10) је нула полинома P' представљена као конвексна комбинација нула полинома P, па $\zeta \in \mathrm{co}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. □

Доказ аналогног тврђења за Блашкеове производе дали су Фрикан и Машреги у [10]. Пре него што кренемо са доказом, докажимо једно помоћно тврђење. Доказ тог тврђења који је овде презентован се може наћи у [11]. На истом месту се може наћи и листа референци ка другим доказима и ка доказима сличних тврђења.

Лема 3.13. *Нека су дати полиноми*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = \prod_{j=1}^{p} (z - z_j)^{m_j}, \quad a_n \neq 0$$

и

$$F(z) = (a_0 + \varepsilon_0) + (a_1 + \varepsilon_1) z + \ldots + (a_n + \varepsilon_n) z^n,$$

и нека је $0 < r_k < \min\limits_{j \neq k} |z_k - z_j|$. Тада постоји $\varepsilon > 0$ такво да полином $F(z)$ има тачно m_k нула унутар кружнице C_k са центром у z_k полупречника r_k кад год је $\varepsilon_j < \varepsilon$ за свако $j \in \overline{1, n}$.

† Са $\mathrm{co}_E(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ означавамо Еуклидски конвексни омотач тачака $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Доказ. Нека је

$$P(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 z + \ldots + \varepsilon_{n-1} z^{n-1}.$$

За $z \in C_k$ имамо да је

$$|P(z)| \leq \varepsilon + |z|\varepsilon + \ldots + \varepsilon |z|^{n-1} \leq \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} (r_k + |z_k|)^j,$$

док је за $z \in C_k$

$$|f(z)| \geq a_n r_k^{m_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} (|z_j - z_k| - r_k)^{m_j} = \delta_k > 0.$$

За $0 < \varepsilon < \dfrac{\delta_k}{\sum\limits_{j=0}^{n-1} (r_k + |z_k|)^j}$ је $|P(z)| < |f(z)|$, па на основу Рушеове теореме имамо да f и $F = f + P$ имају исти број нула унутар кружнице C_k. Тврђење следи пошто је једина нула функције f унутар кружнице C_k тачка z_k и то је нула вишеструкости m_k. □

Теорема 3.14 (h-Гаус-Лука)**.** *Нека је B Блашкеов производ са нулама $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тада се нуле функције B' које су у $\mathbb{D}$ налазе у $\mathrm{co}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.*

Доказ. Уведимо ознаке

$$\mathbb{D}_- = \{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Im} z < 0\} \quad \text{и} \quad \mathbb{D}_+ = \{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Приметимо да су ово полуравни у Поенкаеровом диск моделу, а самим тим и конвексни скупови. Претпоставимо најпре да су све нуле Блашкеовог производа B садржане у $\mathbb{D}_+$. Показаћемо да су тада и све нуле извода B' модула мањег од 1 такође у $\mathbb{D}_+$. Слично као у доказу теореме 3.12, ако је z нула функције B' која је уједно и нула функције B тривијално важи да је $z \in \mathbb{D}_+$. Претпоставимо зато да је $B'(z) = 0$, $B(z) \neq 0$ и посматрајмо логаритамски извод функције B

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{(1 - \overline{z_k} z)(z - z_k)}.$$

Уведимо ознаку $\psi_k(z) = \dfrac{1 - |z_k|^2}{(1 - \overline{z_k} z)(z - z_k)}$. Ако покажемо да је $\operatorname{Im}(\psi_k(z)) > 0$ за свако $z \in \overline{\mathbb{D}_-}$, на основу једнакости

$$\operatorname{Im}\left(\frac{B'(z)}{B(z)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}\left(\frac{1 - |z_k|^2}{(1 - \overline{z_k} z)(z - z_k)}\right).$$

имаћемо да је $B'(z) \neq 0$ за $z \in \mathbb{D}, \operatorname{Im}(z) \leq 0$.

Посматрајмо зато $\psi_k(\overline{\mathbb{D}_-})$. Функција ψ_k је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{z_k, 1/\overline{z_k}\}$, па и на $\overline{\mathbb{D}_-}$. Дакле, слика области $\psi_k(\mathbb{D}_-)$ је област са границом $\psi_k(\partial\mathbb{D}_-)$. Одредимо ту област.

Нека је прво $e^{i\theta}, \pi \leq \theta \leq 2\pi$ полукружни део границе $\partial\mathbb{D}_-$. Како је

$$\begin{aligned}\psi_k(e^{i\theta}) &= \frac{1-|z_k|^2}{(1-\overline{z_k}e^{i\theta})e^{i\theta}(1-z_k e^{-i\theta})} \\ &= \frac{1-|z_k|^2}{|1-\overline{z_k}e^{i\theta}|^2}e^{-i\theta},\end{aligned}$$

имамо $\operatorname{Im}(\psi_k(e^{i\theta})) > 0$ за $\theta \in (\pi, 2\pi)$ и $\operatorname{Im}(\psi_k(e^{i\theta})) = 0$ за $\theta \in \{\pi, 2\pi\}$.

Посматрајмо сада слику сегмента $[-1,1]$ при пресликавању ψ_k. Како је

$$\psi_k(t) = \frac{1-|z_k|^2}{(1-z_k t)(t-z_k)} = \frac{1-|z_k|^2}{|1-z_k t|^2|t-z_k|^2}(1-z_k t)(t-\overline{z_k}),$$

довољно је одредити $\operatorname{Im}((1-z_k t)(t-z_k))$. За $t \in \mathbb{R}$, важи

$$\operatorname{Im}((1-z_k t)(t-\overline{z_k})) = \operatorname{Im}(t - z_k t^2 + |z_k|^2 t - \overline{z_k}) = -t^2\operatorname{Im}(z_k) + \operatorname{Im}(z_k).$$

Коначно, добили смо да је $\operatorname{Im}(\psi_k(t)) = (1-t^2)\operatorname{Im}(z_k) \geq 0$, за $t \in [-1,1]$ при чему се једнакост достиже само на крајевима интервала. Притом, на основу става 3.2 имамо и $\psi_k(\pm 1) \neq 0$. Дакле, добили смо да је слика затворене доње полукружнице $\overline{\mathbb{D}_-}$ при сваком од пресликавања ψ_k садржана у затвореној полуравни без нуле $\overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$, где је $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ горња полураван. Отуда, будући да је

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = \psi_1(z) + \psi_2(z) + \ldots + \psi_n(z) \tag{3.11}$$

имамо и да B'/B слика $\overline{\mathbb{D}_-}$ у неки подскуп скупа $\overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$. Другим речима $B'(z) \neq 0$ за $z \in \overline{\mathbb{D}_-}$.

Нека се сада нуле $z_1, z_2, \ldots, z_m$ Блашкеовог производа B налазе у $\mathbb{D}_- \cup (-1,1)$. За довољно велико $l \in \mathbb{N}$ постоји Блашкеов производ B_l са нулама $z_1 + \frac{i}{l}, z_2 + \frac{i}{l}, \ldots, z_n + \frac{i}{l}$. Показаћемо да критичне тачке Блашкеовог производа B_l теже ка критичним тачкама Блашкеовог производа B кад $l \to \infty$. Извод Блашкеовог производа B је

$$B'(z) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-|z_k|^2}{(1-\overline{z_k}z)^2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{z-z_j}{1-\overline{z_j}z}\right).$$

Пошто је $B'(z)$ рационална функција, можемо је написати у облику $B'(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где су P, Q полиноми. Јасно је да су тада нуле функције $B'(z)$ управо нуле полинома $P(z)$. Коефицијенти полинома $P(z)$ су непрекидне функције по $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{D}^n$ јер сваки од њих настаје коначним сабирањем и множењем бројева $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{D}$.

Представимо сада Блашкеов производ $B_l'(z)$ као количник два полинома $B_l'(z) = \dfrac{P_l(z)}{Q_l(z)}$. Пошто су коефицијенти полинома $P_l(z)$ непрекидне функције по $(z_1 + 1/l, z_2 + 1/l, \ldots, z_n + 1/l)$ закључујемо да сваки од коефицијената полинома $P_l(z)$ тежи ка одговарајућем коефицијенту полинома $P(z)$ кад $l \to \infty$. Отуда, на основу леме 3.13, имамо и да све нуле полинома $P_l(z)$ теже ка нули полинома $P(z)$. Другим речима, критичне тачке Блашкеовог производа B_l теже ка критичним тачкама Блашкеовог производа B кад $l \to \infty$.

Нека је сада B Блашкеов производ са нулама $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и нека су, без умањења општости $z_1, z_2, \ldots, z_m$ темена h-конвексног h-полигона у чијој се унутрашњости налазе све нуле функције B. Такође можемо претпоставити да су z_i, z_{i+1} за $i \in \overline{0, m-1}$, при чему смо, једноставности ради за теме z_m увели и додатну ознаку $z_0 = z_m$.

Нека је $\varphi_j \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ такво да је $\varphi_j(z_j) = 0, \varphi_j(z_{j+1}) \in (-1, 1)$. Тада, будући да се h-права l која садржи тачке z_j и z_{j+1} слика на $\varphi_j(l) = (-1, 1)$, и све тачке $z_1, z_2, \ldots, z_n$ се налазе са исте стране h-праве l имамо и да се све тачке $\varphi_j(z_k)$ налазе са исте стране h-праве $(-1, 1)$. Можемо гарантовати да се $\varphi_j(z_k)$ налазе баш у $\overline{\mathbb{D}_+}$.

На основу претходно доказаног све нуле функције $(B \circ \varphi_j)'$ се налазе у $\mathbb{D}_+$ Међутим, како је ζ нула функције $(B \circ \varphi_j)'$ ако и само ако је $B'(\varphi_j(\zeta)) = 0$, имамо да су нуле функције B' садржане у $\varphi_j^{-1}(\mathbb{D}_+)$.Дакле, све нуле функције B' се налазе у

$$D = \bigcap_{j=0}^{m} \varphi_j^{-1}(\overline{\mathbb{D}_+}).$$

Пошто је $\mathbb{D}_+$ h-конвексан скуп, такав је и $\overline{\mathbb{D}}$. Такође, и $\varphi_j^{-1}(\overline{\mathbb{D}_+})$ је конвексан као слика h-конвексног хиперболичком изометријом. Дакле, D је h-конвексан скуп као пресек h-конвексних, док тривијално важи да је $z_1, z_2, \ldots, z_n \in D$. $\square$

3.5 Марденова теорема за Блашкеове производе

За полиноме другог и трећег степена лако можемо одредити нуле извода као функцију од нула полазних полинома. Конкретно, за полином другог степена имамо $P(z) = (z-a)(z-b)$, па је $P'(z) = 2z - (a+b)$ и видимо да се нула извода налази на средини дужи чији су крајеви нуле полинома. Погледајмо шта се дешава са Блашкеовим производом другог степена. Претпоставимо за почетак да су нуле Блашкеовог производа B тачке $z = 0$ и $z = a > 0$. Тада је

$$B'(z) = \frac{z-a}{1-az} + z\frac{1-a^2}{(1-az)^2} = \frac{2z-az^2-a}{(1-az)^2}.$$

Дакле, нула извода $B'(z)$ је $z = \dfrac{1}{a} - \sqrt{\dfrac{1}{a^2} - 1}$, а ово заиста јесте хиперболичка средина дужи $[0,a]_h$.

Одговарајуће тврђење за полиноме степена три је Марденова теорема.

Теорема 3.15 (Марденова теорема)**.** *Нека је $P(z)$ полином трећег степена са нулама $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, и нека је E јединствена елипса која је тангентна на сваку страницу троугла $\triangle z_1z_2z_3$ у њеном средишту. Тада су нуле полинома $P'(z)$ управо фокуси елипсе E.*

Наредни доказ дао је Калман у раду [12] и настао је комбинацијом Марденовог* и Бошеровог† доаза који се могу наћи у [11] и [13].

Лема 3.16. *Нека је P полином трећег степена, и $M(z) = az + b$, $a \neq 0$. Тада је $P \circ M$ такође полином трећег степена. Ако су z_1, z_2, и z_3 нуле полинома P, тада су $M^{-1}(z_1), M^{-1}(z_2)$ и $M^{-1}(z_3)$ нуле полинома $P \circ M$ и ако су ζ_1, ζ_2 нуле полинома P', тада су $M^{-1}(\zeta_1)$ и $M^{-1}(\zeta_2)$ нуле полинома $(P \circ M)'$.*

Доказ. Нека је $P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0, \quad a_3 \neq 0$ полином трећег степена са нулама z_1, z_2, z_3. Јасно је да је $P \circ M(z)$ такође полином трећег степена. Имамо да је $P \circ M(\zeta) = 0$ ако и само ако је $M(\zeta) = z_j$, за неко $j \in \{1,2,3\}$. Дакле, нуле полинома $P \circ M$ су управо $M^{-1}(z_1)$, $M^{-1}(z_2)$ и $M^{-1}(z_3)$.

Како је

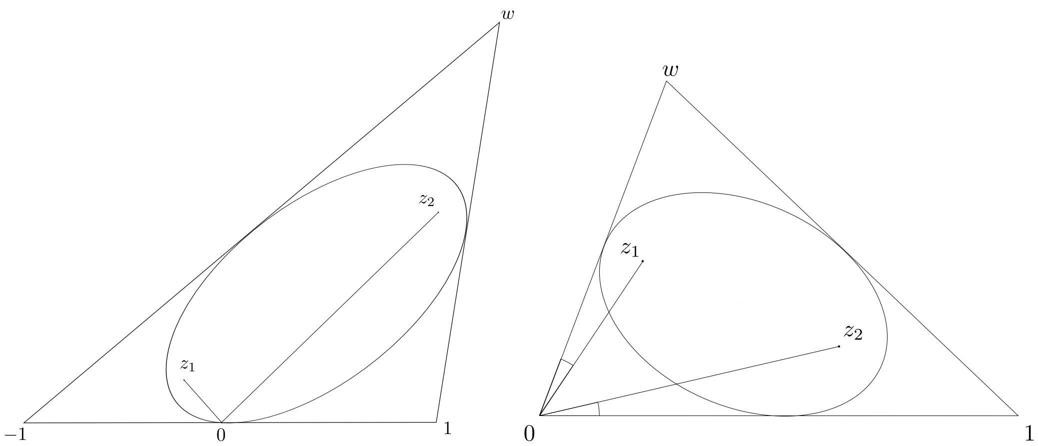
$$(P \circ M)'(z) = P' \circ M(z) \cdot M'(z) = aP' \circ M(z),$$

*Morris Marden (1905 - 1991) – амерички математичар.

†Maxime Bôcher (1867 - 1918) – амерички математичар.

и $a \neq 0$ нуле полинома $P \circ M$ су управо $M^{-1}(\zeta_1), M^{-1}(\zeta_2)$, где су ζ_1, ζ_2 нуле полинома P'. □

Наравно, последња лема важи и за полиноме произвољног степена.



Слика 3.1:

Доказ Марденове теореме. За произвољан полином Q трећег степена постоје $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{C}$ такви да полином $P = Q \circ M$ има нуле $-1, 1$ и $w \in \overline{\mathbb{H}}$. Посматрајмо зато полином $P(z) = (1 - z^2)(z - w)$. Извод овог полинома је $P'(z) = 3z^2 - 2wz - 1$. Дакле, ако су z_1 и z_2 нуле полинома $P'(z)$ имамо да је

$$z_1 + z_2 = \frac{2}{3}w \qquad \text{и} \qquad z_1 \cdot z_2 = -\frac{1}{3}.$$

Односно, $\arg z_1 + \arg z_2 = \pi$, па су углови које дужи $[0, z_1]$ и $[0, z_2]$ граде са реалном осом једнаки. То значи да, ако за елипсу $\mathcal{E}$ са фокусима z_1 и z_2 важи $0 \in \mathcal{E}$, тада је, на основу оптичког својства, реална оса тангентна на ову елипсу.

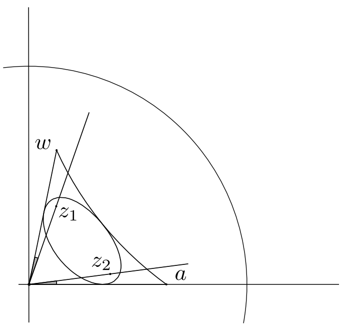
Показаћемо да је једна елипса са фокусима z_1, z_2 тангентна на све странице троугла. Слично као и малопре, можемо посматрати полином $P(z) = z(z - 1)(z - w)$. Његов извод је $P'(z) = 3z^2 - 2z(1 + w) + w$ са нулама z_1 и z_2. Нека је $\mathcal{E}$ елипса чији су фокуси тачке z_1, z_2 и која садржи половину дужи $[0, 1]$. На основу претходног, реална оса је тангентна на ову елипсу. Нека је t друга тангента на елипсу $\mathcal{E}$ која полази из тачке 0. На основу става 1.32 имамо да је $\angle(t, [0, z_1]) = \angle([0, z_2], [0, 1])$. Међутим, како је

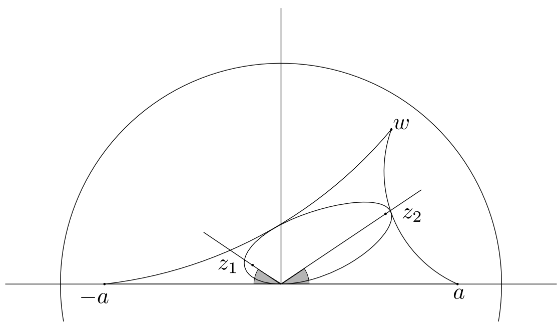
$$z_1 + z_2 = \frac{1 + w}{2},$$
$$z_1 \cdot z_2 = \frac{w}{3}.$$

добијамо $\arg z_1 + \arg z_2 = \arg w$, то јест $\angle([0,w],[0,z_1]) = \angle([0,z_2],[0,1])$. Дакле, $[0,w] \subset t$. $\square$

Доказ наредног тврђења дао је Сингер у раду [14] користећи Клајнов модел хиперболичке равни. Ми ћемо ово тврђење доказати пратећи доказ претходног тврђења.

Теорема 3.17 (Марденова теорема за Блашкеове производе)**.** *Нека је $B(z)$ Блашкеов производ трећег степена са нулама z_1, z_2 и z_3. Нуле функције $B'(z)$ које се налазе у $\mathbb{D}$ су фокуси h-елипсе $\mathcal{E}$ којој су странице h-троугла $\triangle_h z_1 z_2 z_3$ h-тангентне у својим средиштима.*





Слика 3.2: h-троуглови са теменима $0, a$ и w (лево) и $-a, a$ и w (десно). Са z_1, z_2 су означене критичне тачке Блашкеовог производа чије су нуле темена троугла.

Доказ. За произвољан Блашкеов производ B чије су нуле a_1, a_2, a_3 постоји аутоморфизам φ диска који тачку a_3 пресликава у тачку $w \in \mathbb{D}_+$, и тачке a_1, a_2 у тачке $-a, a \in (-1,1)$. Посматрајмо зато Блашкеов производ

$$B_1(z) = \frac{z-a}{1-az} \cdot \frac{z+a}{1+az} \cdot \frac{z-w}{1-\overline{w}z}$$

чије су нуле управо тачке $-a, a$ и w. Његов извод је

$$B'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\frac{z-w}{1-\overline{w}z} + \frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}z)^2}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\frac{z-w}{1-\overline{w}z} + \frac{1-|w|^2}{(1-\overline{w}z)^2}\frac{(z-a)(z+a)}{(1-\overline{a}z)(1+\overline{a}z)}.$$

Након свођења на заједнички именилац добијамо да су нуле извода B' управо нуле полинома

$$P(z) = z^4 + 2z^3\frac{\overline{w}}{a^2} \cdot \frac{1-a^4}{1-|w|^2} + z^2\frac{3a^4|w|^2 + a^4 - |w|^2 - 3}{a^2(1-|w|^2)} + 2z\frac{w}{a^2}\frac{1-a^4}{1-|w|^2} + 1.$$

Пошто знамо да је z_1 нула овог полинома ако и само ако је $1/\overline{z_1}$ нула овог полинома можемо претпоставити да су $z_1, z_2, 1/\overline{z_1}, 1/\overline{z_2}$ нуле овог полинома, при чему $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Пошто је

$$\frac{z_1 z_2}{\overline{z_1 z_2}} = 1,$$

имамо да је $2\arg z_1 + 2\arg z_2 = 2\pi$, па је $\arg z_1 + \arg z_2 = \pi$. Уз то, како је

$$z_1 + z_2 + 1/\overline{z_1} + 1/\overline{z_2} = -2\frac{\overline{w}}{a^2}\frac{1-a^4}{1-|w|^2} \in \mathbb{D}_+$$

закључујемо да је бар један од $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_+$. Из једнакости $\arg z_1 + \arg z_2 = \pi$ закључујемо да су тада обе тачке z_1 и z_2 у горњем полудиску, као и да су углови које дужи $[0, z_1]$ и $[0, z_2]$ заклапају са реалном осом су једнаке. Дакле, на основу оптичког својства елипсе (теорема 1.30), закључујемо да је реална оса h-тангента h-елипсе са фокусима z_1 и z_2 која садржи тачку 0.

Имамо следећи закључак: Ако је B Блашкеов производ чије су нуле z_1, z_2 и z_3, критичне тачке ζ_1 и ζ_2, и $\mathcal{E}$ h-елипса са фокусима ζ_1 и ζ_2 која садржи h-половину s странице h-троугла $\triangle_h z_1 z_2 z_3$, тада је та страница h-тангентна на $\mathcal{E}$ у s.

Као и приликом доказа Марденове теореме, показаћемо да таква h-елипса $\mathcal{E}$, која додирује једну страницу h-троугла $\triangle_h z_1 z_2 z_3$, додирује и остале две странице тог троугла.

Аналогно доказу Марденове теореме, посматрајмо овог пута Блашкеов производ

$$B(z) = z\frac{z-a}{1-az}\frac{z-w}{1-\overline{w}z}$$

са нулама $0, a$ и w. Његов извод је

$$B'(z) = \frac{z-a}{1-az} \cdot \frac{z-w}{1-\overline{w}z} + z\frac{1-a^2}{(1-az)^2} \cdot \frac{z-w}{1-\overline{w}z} + z\frac{z-a}{1-az} \cdot \frac{1-|w|^2}{(1-\overline{w}z)^2},$$

па су његове критичне тачке нуле полинома четвртог степена

$$\begin{aligned} P(z) &= \overline{p}z^4 - 2\overline{s}z^3 + z^2(3+|s|^2-|p|^2) - 2sz + p \\ &= z^4 - 2\frac{\overline{s}}{\overline{p}}z^3 + \frac{3+|s|^2-|p|^2}{\overline{p}}z^2 - \frac{2s}{\overline{p}}z + \frac{p}{\overline{p}}, \end{aligned}$$

при чему је $p = aw$ и $s = a + w$.

Као и у претходном случају, нека су $z_1, z_2, 1/\overline{z_1}, 1/\overline{z_2}$ нуле функције B' с тим да је $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Како је

$$\frac{z_1 z_2}{\overline{z_1 z_2}} = \frac{p}{\overline{p}},$$

добијамо $z_1 z_2 = aw$, па важи да је

$$\arg z_1 + \arg z_2 = \arg w.$$

Односно, $\angle([0,1),[0,z_2)) = \angle([0,z_1),[0,w))$. Дакле, ако је $\mathcal{E}$ елипса чији су фокуси тачке z_1 и z_2 која додирује h-страницу $[0,a]_h$ h-троугла $\triangle_h 0aw$ тада она, на основу става 1.32, додирује и h-страницу $[0,w]_h$ тог h-троугла. Додирна тачка ове h-елипсе и h-троугла је управо h-средиште h-странице $[0,w]_h$. На исти начин се показује да елипса $\mathcal{E}$ додирује и трећу страницу h-троугла $\triangle_h 0aw$. Дакле, $\mathcal{E}$ је управо h-елипса уписана у h-троугао $\triangle_h 0aw$. $\square$

Глава 4

Решења једначине $B(z) = \gamma$

У овој глави ћемо посматрати решења једначине $B(z) = \gamma$, где је B Блашкеов производ, а $|\gamma| = 1$. На основу последице 3.3 знамо да за Блашкеов производ реда n постоји тачно n различитих тачака на $\mathbb{T}$ које су решење дате једначине. У случају $n = 3$, повлачењем тетива које спајају та решења Блашкеовом производу можемо да придружимо елипсу и добијамо ситуацију која је на неки начин обрнута Понселеовом поризму. Резултати приказани у овој глави се могу пронаћи у књизи [15].

4.1 Понселеов поризам

„Поризми" су назив једног од изгубљених Еуклидових дела. У модерној литератури се термин „поризам" помиње само уз називе неких теорема и тада се значење термина „поризам" не разликује од термина „теорема". Примери су Штајнеров поризам и Понселеов поризам (Понселеова теорема о затворењу). Историја овог термина је компликована.

По тврђењима Прокла*, у историјској литератури се термин „поризам" користио као термин за последицу.[16] Вебстеров речник [17] даје две дефиниције термина „поризам". Према првој дефиницији, „поризам" је *последица која следи из доказа.* Друга дефиниција у Вебстеровом речнику потиче из Плејферових мемоара [16] и делује најближе контексту у коме се овај термин данас помиње. Плејфер поризам дефинише као „..Тврђење које потврђује постојање услова при којима одређени проблем има бесконачно много решења..." †

*Πρόκλος ὁ Διάδοχος (412 - 485) – грчки филозоф

† *"...A proposition affirming the possibility of finding such conditions as will render a certain*

Понселеов поризам је познат резултат из пројективне геометрије који је добио име по Француском математичару и инжењеру Жан Виктор Понселеу*.

Теорема 4.1 (Понселеов поризам)**.** *Нека су дате две конике у равни k_1 и k_2. Ако постоји n-тоугао који је описан око конике k_1 и уписан у конику k_2 тада постоји бесконачно много таквих n-тоуглова. Свака тачка конике k_2 је теме једног таквог полигона и свака тачка конике k_1 је тачка у којој је неки такав полигон тангентан на k_1.*

4.2 Блашкеови производи степена 3

Пре него што покажемо како се елипсе на природан начин могу придружити Блашкеовом производу степена 3, посматрајмо прво Блашкеов производ степена 2. Као и обично, претпоставићемо да је

$$B(z) = \frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z}\frac{z - a_2}{1 - \overline{a_2}z}.$$

На основу последице 3.3 знамо да за свако $|\gamma| = 1$ једначина $B(z) = \gamma$ има тачно два различита решења z_1 и z_2. Дакле, свакој тачки $z \in \mathbb{T}$ можемо придружити још једну тачку z' такву да је $B(z) = B(z')$.

Уколико повучемо дужи које спајају такве парове тачака z и z', видећемо да све оне пролазе кроз једну тачку као на слици 4.1. Специјално, уколико је $B(0) = 0$ све те дужи пролазе кроз другу нулу Блашкеовог производа. Покажимо да се случај у коме Блашкеов производ B има две произвољне нуле може свести на случај када је једна од његових нула тачка $z = 0$.

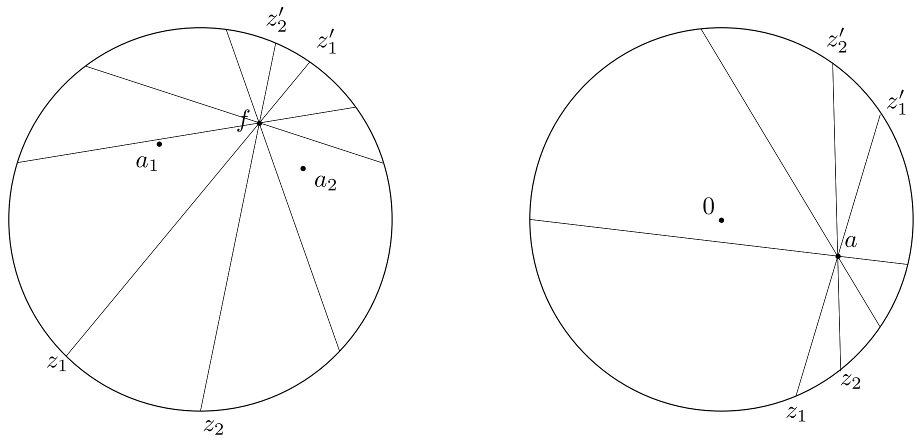
Нека је дат Блашкеов производ $B(z) = \dfrac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z}\dfrac{z - a_2}{1 - \overline{a_2}z}$ Блашкеов производ са нулама $a_1, a_2 \in \mathbb{D}$. Дефинишимо Блашкеов производ $\widetilde{B}$ са

$$\widetilde{B}(z) = \varphi_{B(0)} \circ B(z) = \frac{B(z) - B(0)}{1 - \overline{B(0)}B(z)}.$$

Јасно је да је $\widetilde{B}(0) = 0$, а пошто је $\varphi_{B(0)}$ бијекција, имамо да је $\widetilde{B}(z_1) = \widetilde{B}(z_2)$ ако и само ако је $B(z_1) = B(z_2)$. Другим речима, дужи добијене на претходно описан начин за Блашкеове производе B и $\widetilde{B}$ се не разликују. Дакле, довољно је размотрити случај када је $B(0) = 0$.

determinate problem indeterminate or capable of innumerable solutions...”

*Jean-Victor Poncelet (1788-1867) - Француски математичар, инжењер и генерал Политехничке школе.



Слика 4.1: Све дужи које спајају тачке z и z' пролазе кроз исту тачку f.

Теорема 4.2. *Нека је*

$$B(z) = z\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

Блашкеов производ другог степена и нека су $z_0, z_0' \in \mathbb{T}$ *две различите тачке такве да важи* $B(z_0) = B(z_0')$. *Тада се* a *налази на дужи која спаја тачке* z_0 *и* z_0'.

Доказ. Нека су $r_0, r_0' \in (0,1)$ и $\theta_0, \theta_0' \in [0, 2\pi)$ такви да је $z_0 = a + r_0 e^{i\theta_0}$ и $z_0' = a + r_0' e^{i\theta_0'}$. Пошто је $|z_0| = |a + r_0 e^{i\theta_0}| = 1$ имамо да је

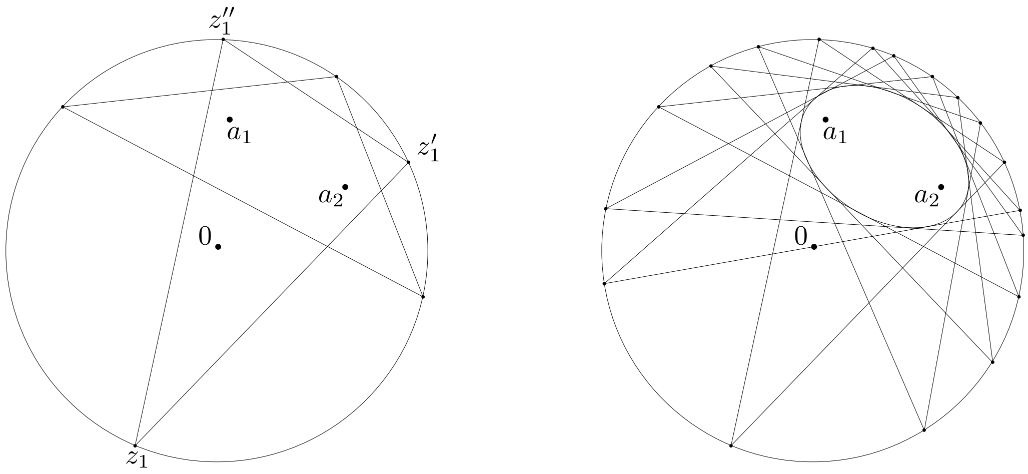
$$B(z_0) = z_0 \frac{z_0 - a}{z_0(\overline{z_0} - \overline{a})} = \frac{r_0 e^{i\theta_0}}{r_0 e^{-i\theta_0}} = e^{2i\theta_0}.$$

Дакле, из једнакости $B(z_0) = B(z_0')$ закључујемо да је $e^{2i\theta_0} = e^{2i\theta_0'}$. Пошто су z_0 и z_0' различите тачке, закључујемо да је $|\theta_0 - \theta_0'| = \pi$, □

Сада можемо посматрати и Блашкеове производе трећег степена. Као и малопре, довољно је посматрати Блашкеове производе са нулама $0, a_1, a_2$ облика

$$B(z) = z\frac{z-a_1}{1-\overline{a_1}z}\frac{z-a_2}{1-\overline{a_2}z}.$$

Опет, на основу последице 3.3 за сваку тачку $z \in \mathbb{T}$ постоје још тачно две различите тачке z', z'' на јединичној кружници такве да је $B(z) = B(z') = B(z'')$. Спајањем одговарајућих тачака за свако $z \in \mathbb{T}$ добијамо фамилију троуглова као на слици 4.2. Показаћемо да ова фамилија троуглова придружених Блашкеовом производу B заиста одређује елипсу. Ту елипсу ћемо звати Блашкеова елипса.



Слика 4.2: Два троугла (лево) и шест троуглова (десно).

Теорема 4.3. *Нека је*

$$B(z) = z\frac{z-a_1}{1-\overline{a_1}z}\frac{z-a_2}{1-\overline{a_2}z}$$

Блашкеов производ трећег степена, и нека су z_1, z_2 и z_3 три различите тачке такве да важи $B(z_1) = B(z_2) = B(z_3)$. Тада је елипса E одређена једначином

$$|z-a_1| + |z-a_2| = |1-\overline{a_1}a_2|$$

уписана у троугао са теменима z_1, z_2, z_3. Додатно, свака тангента на елипсу E сече кружницу $\mathbb{T}$ у две тачке z_1, z_2 такве да је $B(z_1) = B(z_2)$.

Да бисмо доказали ову теорему биће нам потребна следећа лема.

Лема 4.4. *Нека је B Блашкеов производ степена $n \geq 2$ са нулама $0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, $\lambda \in \mathbb{T}$ произвољно и тачке $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{T}$ такве да је $B(z_j) = \lambda$ за $j \in \overline{1,n}$. Тада се функција $F(z) = \dfrac{B(z)/z}{B(z)-\lambda}$ може написати у облику*

$$F(z) = \frac{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{n-1})}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{z-z_j},$$

при чему је

а) $m_j = \dfrac{\lambda}{z_jB'(z_j)}$;

б) $\dfrac{1}{m_j} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-|a_k|^2}{|z_j-a_k|^2}$;

в) $0 < m_j < 1$;

г) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j = 1$.

Доказ. Приметимо најпре да је F рационална функција као рационална комбинација рационалних функција. Нуле имениоца ове функције су решења једначине $B(z) = \lambda$, тј. $z_1, z_2, \ldots, z_n$, па закључујемо да је именилац ове функције $(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$. С друге стране, нуле бројиоца су управо $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ одакле растављањем на парцијалне разломке добијамо да се F може представити у поменутом облику.

а) Множењем обе стране једнакости $F(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{z-z_j}$ са $(z - z_j)$ и пуштањем да $z \to z_j$ добијамо

$$m_j = \lim_{z\to z_j} F(z)(z-z_j) = \frac{B(z_j)}{z_j} \lim_{z\to z_j} \frac{z-z_j}{B(z)-\lambda}.$$

Пошто је $\lambda = B(z_j)$, последња гранична вредност је заправо $1/B'(z_j)$, па је коначно $m_j = \dfrac{B(z_j)}{z_jB'(z_j)} = \dfrac{\lambda}{z_jB'(z_j)}$.

б) На основу једнакости (3.4), будући да је $|z_j| = 1$, имамо

$$\frac{B'(z_j)}{B(z_j)} = \frac{1}{z_j}\left(\frac{1-|0|^2}{|1-0|^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-|a_k|^2}{|1-\overline{a_k}z_j|^2}\right).$$

Након примене идентитета $|1 - \overline{a_k}z_j| = |\overline{z_j} - \overline{a_k}| = |z_j - a_k|$ који важи јер је $1/z_j = \overline{z_j}$ за $|z_j| = 1$ добијамо тражену једнакост

$$\frac{1}{m_j} = \frac{z_jB'(z_j)}{B(z_j)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-|a_k|^2}{|z_j-a_k|^2}.$$

в) Из последње једнакост лако је видети да је $1/m_j > 1$, па како је m_j очигледно позитивно добијамо да је $m_j \in (0,1)$.

г) Пуштајући да $z \to \infty$ у једнакости $zF(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z\frac{m_j}{z-z_j}$ добијамо да је $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j = \lim_{z\to\infty} zF(z)$. Будући да је $B(0) = 0$, Блашкеов производ B можемо записати у облику

$$B(z) = \frac{z^n + \ldots + a_1z}{\overline{a_1}z^{n-1} + \ldots + 1} = \frac{z}{\overline{a_1}} + o(1), \quad z \to \infty,$$

па је

$$\lim_{z\to\infty} zF(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{B(z)}{B(z)-\lambda} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z-\overline{a_1}\lambda} = 1.$$

Добили смо да је $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j = 1$ што је и требало доказати. □

Пре доказа теореме посматрајмо још и рационалну функцију $B(z)-\lambda$. Јасно је да је $B(z)-\lambda$ рационална функција чији су полови управо полови Блашкеовог производа, односно тачке $1/\overline{a_1}, 1/\overline{a_2}, \ldots, 1/\overline{a_{n-1}}$. Како су још нуле ове рационалне функције су управо решења једначине $B(z)=\lambda$, односно тачке $z_1, z_2, \ldots, z_n$ имамо да је

$$B(z)-\lambda = \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}{(1-\overline{a_1}z)(1-\overline{a_2}z)\cdots(1-\overline{a_{n-1}}z)}$$

Специјално, за $n=3$ и $z=a_j$ лева страна претходне једнакости једнака је $-\lambda$, па изједначавањем модула обе стране добијамо једнакост

$$|a_j-z_1||a_j-z_2||a_j-z_3| = (1-|a_j|^2)|1-a_1\overline{a_2}|. \tag{4.1}$$

Доказ теореме 4.3. Посматрајмо функцију

$$F(z) = \frac{B(z)/z}{B(z)-\lambda} = \frac{m_1}{z-z_1} + \frac{m_2}{z-z_2} + \frac{m_3}{z-z_3}.$$

Сабирањем последња два разломка, будући да је на основу дела *г)* леме 4.4 $m_1+m_2+m_3=1$ добијамо

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{m_1}{z-z_1} + \frac{(m_2+m_3)z - m_2z_3 - m_3z_2}{(z-z_2)(z-z_3)} \\ &= \frac{m_1}{z-z_1} + (1-m_1)\frac{z - \dfrac{m_2z_3+m_3z_2}{1-m_1}}{(z-z_2)(z-z_3)}. \end{aligned}$$

Нека је ζ_1 конвексна комбинација тачака z_2 и z_3 одређена са $\zeta_1 = \dfrac{m_2z_3+m_3z_2}{1-m_1}$. Као конвексна комбинација тачака z_1 и z_2, јасно је да ζ_1 припада дужи која их спаја. Показаћемо да је ζ_1 баш тачка дужи z_2z_3 која је тангентна на елипсу $E: |z-a_1|+|z-a_2| = |1-\overline{a_1}a_2|$. Како је $F(a_1)=F(a_2)=0$ имамо да је

$$\frac{m_1}{|a_1-z_1|} = (1-m_1)\frac{|a_1-\zeta_1|}{|a_1-z_2||a_1-z_3|}$$

$$\frac{m_1}{|a_2-z_1|} = (1-m_1)\frac{|a_2-\zeta_1|}{|a_2-z_2||a_2-z_3|}.$$

Сада је

$$|a_1-\zeta_1| + |a_2-\zeta_1| = \frac{m_1}{1-m_1}\left(\frac{|a_1-z_2||a_1-z_3|}{|a_1-z_1|} + \frac{|a_2-z_2||a_2-z_3|}{|a_2-z_1|}\right).$$

Дељењем имениоца и бројиоца разломка $\dfrac{m_1}{1-m_1}$ са m_1, и употребом једнакости (4.1) претходна једначина постаје

$$|a_1 - \zeta_1| + |a_2 - \zeta_2| = \frac{1}{1/m_1 - 1}\left(\frac{(1-|a_1|^2)|1-\overline{a_1}a_2|}{|a_1 - z_1|^2} + \frac{(1-|a_2|^2)|1-\overline{a_1}a_2|}{|a_2 - z_1|^2}\right).$$

Коначно, употребом дела *в)* леме 4.4 добијамо да је

$$|a_1 - \zeta_1| + |a_2 - \zeta_2| = |1 - \overline{a_1}a_2|. \tag{4.2}$$

Дакле, тачка ζ_1 заиста припада елипси E. Остаје да се покаже да је права одређена тачкама z_2 и z_3 заиста тангента на елипсу E.

Да бисмо то урадили, показаћемо да су апсолутне вредности углова $\angle(z_2\zeta_1a_1)$ и $\angle(z_3\zeta_1a_2)$ једнаке одакле ће тврђење следити на основу оптичког својства елипсе (теорема 1.30).

Како је $\angle(z_2\zeta_1a_1) = \arg\left(\dfrac{z_2-\zeta_1}{a_1-\zeta_1}\right)$, и углови $\angle(z_2\zeta_1a_1)$ и $\angle(z_3\zeta_1a_2)$ су супротно оријентисани, посматрајмо њихов збир

$$\arg\left(\frac{z_2-\zeta}{a_1-\zeta_1}\right) + \arg\left(\frac{z_3-\zeta_1}{a_2-\zeta_1}\right) = \arg\left(\frac{(z_2-\zeta_1)(z_3-\zeta_1)}{(a_1-\zeta_1)(a_2-\zeta_1)}\right).$$

Даље, на основу леме 4.4 имамо да је

$$\begin{aligned}\frac{(z_2-\zeta_1)(z_3-\zeta_1)}{(a_1-\zeta_1)(a_2-\zeta_1)} &= \frac{(z_2-\zeta_1)(z_3-\zeta_1)}{(a_1-\zeta_1)(a_2-\zeta_1)}\cdot\frac{z_1-\zeta_1}{z_1-\zeta_1}\\ &= -\frac{1}{F(\zeta_1)}\cdot\frac{1}{z-\zeta_1} = -m_1.\end{aligned}$$

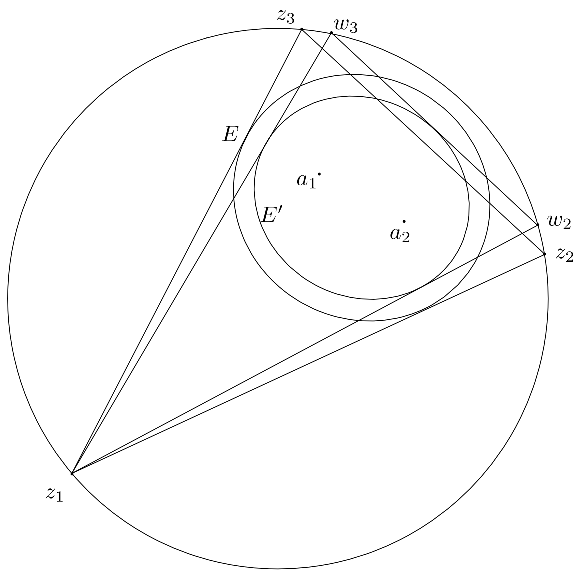
Углови су једнаки, па дуж z_2z_3 заиста јесте тангентна на елипсу E у тачки ζ_1. $\square$

Дакле, сваком Блашкеовом производу степена 3 коме се једна нула налази у 0 можемо придружити елипсу. Пратећи терминологију из [15] ове елипсе ћемо звати Блашкеове елипсе, а елипсе које се могу уписати у троугао са теменима на $\mathbb{T}$ ћемо звати Понселеове елипсе. Јасно је да је свака Блашкеова елипса уједно и Понселеова елипса. Показаћемо да важи и обратно – свака Понселеова елипса је Блашкеова елипса.

Став 4.5. *Нека су фокуси елипсе E тачке $a_1, a_2 \in \mathbb{D}$. Ако постоји троугао са теменима на $\mathbb{T}$ који је описан око елипсе E тада је она одређена једначином $|z-a_1| + |z-a_2| = |1-\overline{a_1}a_2|$.*

Доказ. Нека су z_1, z_2 и z_3 темена троугла описаног око елипсе E из исказа става. На основу теореме 4.3 знамо да за елипсу $E' : |z-a_1|+|z-a_2| = |1-\overline{a_1}a_2|$ и произвољну тачку са кружнице z_1 имамо троугао чија су темена $z_1, w_2, w_3 \in \mathbb{T}$ који је описан око елипсе E'. Претпоставимо најпре да је велика оса елипсе E строго већа од велике осе $|1 - \overline{a_1}a_2|$ елипсе E' (Слика 4.3).

Елипсе E и E' имају исте фокусе па је елипса E' садржана у елипси E. Дакле, z_3 се налази на делу кружног лука који спаја z_1 и w_3, а z_2 се налази на делу кружног лука који спаја z_1 и w_2. Закључујемо да дуж z_2z_3 пресеца елипсу E', а самим тим и елипсу E. Слично се показује и да елипса E не може бити садржана у елипси E', па је $E = E'$. □



Слика 4.3: Слика уз став 1.28

Закључујемо да за сваке две тачке $a_1, a_2 \in \mathbb{D}$ постоји јединствена Понселеова елипса чији су фокуси a_1 и a_2 и то је управо Блашкеова елипса придружена Блашкеовом производу

$$B(z) = z\frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z}\frac{z - a_2}{1 - \overline{a_2}z}.$$

Библиографија

[1] J. Mashreghi and E. Fricain, *Blaschke Products and Their Applications*, (2013.) pp. vii.

[2] M. Svetlik, *Ocene Švarc-Pikovog tipa za harmonijska preslikavanja i hiperbolička metrika*, Matematički fakultet, (2020.)

[3] S. R. Garcia, J. Mashreghi and William T. Ross. *Finite Blaschke products: a survey*, Math and Computer Science Faculty Publications, 181, (2018.)

[4] T.W. Ng, C. Yin, *Polynomials Versus Finite Blaschke Products*, Springer US, (2013.), pp. 249–273.

[5] T. Radó. *Zur theorie der mehrdeutigen konformen abbildungen*, Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung, 1 (1922-23.), pp. 55–64.

[6] C. Caratheodory. *Theory of functions of a complex variable.* Vol. 2, Chelsea Publishing Company, New York, (1954.), Translated by F. Steinhardt.

[7] H. Helson, D. Sarason, *Past and future*, Math. Scand 21 (1967.) pp 5-16.

[8] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, Inc., (1976.)

[9] F. Lucas, *Sur une application de la Mécanique rationnelle á la théorie des équations*, C.R. Hebd. Séances Acad. Sci. (1879.) pp. 224-226.

[10] E. Fricain and J. Mashreghi. *On a characterization of finite Blaschke products*, Complex Variables Elliptic Equations, 59, (2014.)

[11] M. Marden. *Geometry of polynomials*. American Mathematical Society, (1966.)

[12] D. Kalman, *An Elementary Proof of Marden's Theorem*, American Mathematical Monthly, 115, (2008.)

[13] M. Bôcher, *Some propositions concerning the geometric representation of imaginaries*, Annals of Math. 7 (1892.) pp. 70-76.

[14] D. Singer, *The location of critical points of finite Blaschke products*, Conformal Geometry and Dynamics, 10, (2006.), pp. 117-124.

[15] U. Daepp, P. Gorkin, A. Shaffer and K. Voss. *Finding ellipses: what Blaschke products, Poncelet's theorem, and the numerical range know about each other.* MAA Press. (2018.)

[16] T. L. Heath, "Porism". In: *Encyclopædia Britannica* 22 (1911.), pp. 102-103.

[17] Merriam-Webster, "Porism". In: *Webster's international dictionary of the English language*. (1898.)

[18] A.F. Beardon and D. Minda. *"The hyperbolic metric and geometric function theory".* In: *Proceedings of the International Workshop on Quasiconformal Mappings and their Applications s (IWQCMA05).* Ed. by S. Ponnusamy, T. Sugawa, and M. Vuorinen. (2007.)

Биографија аутора

Давид Бузго је рођен у Вршцу, 11. маја 1998. године. Основну школу „Вук Караџић" и природно-математички смер Гимназије „Борислав Петров Браца" је завршио у Вршцу. Основне студије Математичког факултета Универзитета у Београду је уписао 2017. године на на студијском програму Математика, модул Теоријска математика и примене. Основне академске студије завршава 2022. године и исте године уписује мастер студије на истом студијском програму и модулу. Од фебруара 2023. године, ангажован је као сарадник у настави на Катедри за примењену математику Електротехничког факултета Универзитета у Београду.