СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ЗБОРНИК РАДОВА

Књ. XXXV

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. 3

БЕОГРАД
1953

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ЗБОРНИК РАДОВА

Књ. XXXV

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. 3

Уредник:

Дописник Д-р РАДИВОЈЕ КАШАНИН
управник Математичког института САН

Примљено на X скупу Одељења природно-математичких наука САН
9 октобра 1953

БЕОГРАД
1953

ACADÉMIE SERBE DES SCIENCES

RECUEIL DES TRAVAUX

T. XXXV

L' INSTITUT MATHÉMATIQUE

№ 3

Rédacteur:

RADIVOJE KAŠANIN
Membre correspondent de l'Académie
Directeur de l'Institut Mathématique

Présenté à la X Séance de la Section des Sciences Mathématiques
et Naturelles de l'Académie serbe des Sciences du 9 oktobre 1953

Научна књига

КЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

Штампарија и књиговезница Српске академије наука, Космајска бр. 28

С А Д Р Ж А Ј:

УСПОМЕНИ
МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

рођен 24 IV 1868, умро 8 VI 1943

На дан десетогодишњице смрти Михаила Петровића, правог члана Српске академије наука, професора математике београдског Универзитета, Математички институт САН одржао је свечану комеморацију, којој су, поред чланова Математичког института, присуствовали академици, дописници, професори Универзитета и великих школа, наставници средњих школа, студенти и многи пријатељи и поштоваоци покојникови.

Комеморацију је отворио, у свечаној сали Српске академије наука, у 18.15 ч., управник Математичког института Р. Кашанин овим речима:

„На данашњи дан, пре десет година, преминуо је Михаило Петровић, прави члан Српске академије наука, професор математике београдског Универзитета. Математички институт Српске академије наука желео је да га се скромно, какав је и он увек био, сети овом комеморацијом, иако нема дана а да се име Михаила Петровића не помене у Институту.

Са Михаилом Петровићем наша математика излази пред светску јавност и у овој се јасно и сигурно афирмира. Свршивши Велику школу у Београду, Петровић одлази у Париз, где је дипломирао и докторирао на Сорбони, као питомац чувене École Normale Supérieure. Ту је стекао и опсежна математичка знања, код тадашњих чувених математичара, и општу ерудицију, а уједно и широк круг познаника; с овима је одржавао до краја живота сталне и присне везе. Плодан као писац, објављивао је своје радове не само у Београду, на српском језику, већ и у многобројним страним часописима широм целог света, и стално је учествовао на свима интернационалним и покрајинским конгресима математичара. Он је био научник светске класе.

Пола столећа је без прекида и неуморно радио на Универзитету и створио у Београду математичку школу. Уз њега су се изградили наши математичари, његови ученици и сарадници, који се труде да његов рад наставе и прошире. У том — колико замашном и тешком толико и деликатном — послу он је био, како у званичним тако и у приватним односима, и учитељ и друг.

Оно што одмах пада у очи у раду Михаила Петровића, то је огромна количина објављених радова (расправа и књига). Али још више пада у очи разноликост материје коју је у тим радовима обрађивао. Подухватао је проблеме из најразноврснијих области математике, из механике, из астрономије, из физике, из хемије, из филозофије — доводећи често у везу ствари на први поглед врло диспаратне. Непрестано у покрету, жива и радознала духа, пропутовао је цео глобус, од северног до јужног пола, и о томе врло вешто и занимљиво писао. Људи с таквом амплитудом у раду ни у његовој генерацији није било на свету много; сада, у доба све јачег диференцирања и све ужег специјализирања у појединим научним дисциплинама, једва да их има.

Данас, десет година откако нас је оставио, Михаило Петровић већ припада историји, оном херојском добу кад је мала Србија стварала своју културу и успевала да и својим културним постигнућима продире у свет. Десет година је како нас је оставио, али га још сви памтимо и знамо, многи је од нас већи део свог живота с њим провео, и увек нам се чини као да је ту, међу нама, са својим широким знањем и широким срцем, научник и човек, учитељ и друг.

Слава му!"

У име Претседништва САН поздравио је комеморацију академик А. Белић, претседник САН, овим говором:

„Мени је нарочито мило да поздравим у име Претседништва Српске академије наука данашњу комеморацију. Михаило Петровић био је један од најистакнутијих чланова Академије; он је био и њен понос и украс. Велики стручњак, сарадник страних научних часописа, познат у научном свету, он је просто својим присуством и радом у Академијиним публикацијама дизао углед наше установе. А, с друге стране, својим човечанским особинама, и као човек, и као учитељ, и као члан Претседништва Академијина, уносио је необично значајне хумане особине и у рад Академијин и у њене односе према људима. За хармоничан рад једне установе то много значи, и нестанак Михаила Петровића оставио је празнину која се и данас још осећа.

Непосредност Михаила Петровића, његова необична скромност, каква се може наћи само код великих научника и великих људи, који су далеко изнад ситница и ситничарства, његова свагдашња ведрина и готовост да свему нађе и позитивне стране, све га је то издизало до необичне висине међу људима тадашњег времена. Као ретко ко, он је ишао стално право, и својим научним и животним путем. То је код њега била једна целина. Он је живео, да би могао успешно научно радити, а научно је радио, са великом љубављу и марљивошћу, да би стекао право да удеси свој живот онако како жели.

И тако је урадио. Хармонију својих духовних особина он је унео и у свој свакидашњи живот, трудећи се и ту да буде користан и друштву и народу. Насмејан и расположен, он је ширио атмосферу узајамног поштовања и љубави и међу своје другове математичаре и све друге са којима је долазио у додир. Када је радио своју феноменологију, хтео је лингвистику да укључи у своја посматрања и да јој да математичку обраду. Часове које сам са њим провео разговарајући о томе остали су незаборавни за мене и по лепоти његова духа и користи коју сам и с те стране од њега имао. И данас када се са различних страна покушава, нарочито у Америци, да се математика или физика примене на лингвистику — мени се његове речи о немогућности тога стално враћају. У језику има сувише слободних компонената, говорио је он, да би се могле сврстати у математичке схеме, ма како оне биле гипке и многостране. Али ја нисам о томе хтео говорити. Ја сам овим неколиким речима хтео да истакнем да се данас, после десет година од смрти Михаила Петровића, сећамо, још можда јасније него одмах после смрти његове, и великог научника, и значајног академика и изванредног човека. Наше поштовање према његовој успомени само је порасло за то време, што најбоље показује колико је био потпун и као човек и као друштвени и научни радник. А у томе је права величина и научних и културних трудбеника".

Потом је академик М. Миланковић, потпретседник САН, евоцирао тренутке из последњих дана живота М. Петровића и са његове сахране, на којој је држао посмртни говор.

На крају је академик А. Билимовић, члан Научног савета Математичког института, одржао свој говор о научној делатности М. Петровића у области математике:

„Од краја прошлог столећа па наовамо математика се толико разгранала, можда и више од других наука, да је данас скоро немогуће бити „математичар целокупне науке". Она је толико проширила свој обим и обогатила свој садржај, како методама расуђивања тако и начинима излагања, да је постало скоро немогућно не само да неко ради и ствара у диспаратним областима без претходног вишегодишњег изучавања тих области, већ и да један специјалиста разуме радове другог специјалисте. Има примера чувених математичара који нису у стању ни да читају радове других математичара.

Садржај математике се проширио од т.зв. математичке логике са њеним отступањима од обичне логике, — да наведем само закон искљученог n-тог, место закона искљученог трећег, — преко теорије множина и топологије, па преко целокупне већ саме по себи обимне класичне математике, како анализе тако и геометрије, до тензора и матрица у вишедимензионалном простору, теорије група и разних, чак потпуно апстрактних, теорија простора, где се готово губе особине нашег обично схваћеног простора. Свака појединa грана, свака посебна математичка област још је отежана својим применама и својом важношћу у вези са оним проблемима које постављају друге дисциплине — механика, физика, астрономија, затим разне гране технике и, најзад, практични живот — например преко статистике. У непосредној близини стоји и филозофија математике, којом се баве математичари који имају склоност ка филозофији и филозофи који знају нешто математике.

Овим сам само у грубим цртама окарактерисао обим математичких дисциплина. Природно је сад да поставимо питање: у коју област математике спада научна делатност проф. Михаила Петровића.

У предратној Србији Петровић је био једини професор чисте математике Филозофског факултета, па је према томе, стицајем околности, морао заступати целокупну математику. На тај начин, у области наставе он је играо улогу „лекара целокупне медицине" у срезу. Таква улога би у потпуности окупирала просечног професора, али Петровић, са својим огромним математичким талентом, није могао остати у положају „среског математичара".

Његов математички талент, са импулсом добивеним у француској математичкој школи из доба Поенкареа, Пикара, Пенлевеа, и других чувених француских математичара, подигао је Петровића на положај математичара познатог целом свету. Покушајмо, ма и у кратким цртама, да окарактеришемо облик Петровића математичара, с једне стране као специјалисте у својој области, а с друге стране као научног радника широког хоризонта који се, у исто време, интересовао и радио и у областима ван своје специјалности.

Пре свега, Петровић спада у такозване класичне математичаре. Његова главна област — теорија функција комплексне променљиве са теоријом обичних диференцијалних једначина и теоријом редова — то је његова и главна област. Она, у облику у којем ју је Петрович обрађивао, спада у класичну математику. У тој је области радио Петровић кроз цели свој живот, од прве своје ноте у *Comptes Rendus* и тезе, и створио у Београду математичку школу на истој бази, на бази теорије функција и теорије обичних диференцијалних једначина. Његови ученици и наследници могу детаљније описати и окарактерисати Петровићеве радове у тој области, и треба то да ураде. Али, сем те уске области, Петровић је улазио и у друге, врло далеке од ове. Он је стварао и нарочите математичке апарате (например, теорију спектара), помоћу којих је желео да што дубље уђе у могућности примена математичких образаца на проучавање различитих веза између величина. Без обзира на то што је Петровић био углавном „математичар образаца", и то класичних образаца, њега је привлачила и област математичких концепција, где обрасци играју споредну улогу. У његовој „Феноменологији" главну улогу играју математичке аналогије; тој области је посветио више својих радова.

Не радећи лично у другим, некласичним областима, Петровић се увек интересовао и за друге математичке проблеме. Памтим какав је интерес показао за Gödel-ове радове у вези са проблемом решљивости, а то је најсуптилније питање савремене математичке логике.

Да пређем сад на другу страну карактеристике Петровићева математичког рада: на анализу метода расуђивања које је Петровић примењивао при свом математичком стварању.

Насупрот логистичкој методи, где се на прво место ставља логичка строгост и узастопност на бази примљених аксиома, методи која је у примени на анализу добила назив епсилонтике, методи која лицима недовољно упућеним у методе математичких наука изгледа као једино могућа (иако у својој савршеној форми она још није до краја спроведена ни у једној математичкој дисциплини), — постоји друга метода, такозвана конструктивна метода, метода нових, можда још и непроверених идеја, нових алгоритама — још непрецизираних, нових облика — још магловитих.

Петровић се углавном служио конструктивном методом. Разуме се, и на странама његових радова можемо наћи чувено епсилон (без овога се сада не може), али логичко мишљење и прецизирање свих услова, такозвана Вајерштрасовштина — била је апсолутно туђа Петровићу. С богатом математичком интуицијом, он је тражио ново, ново и ново. Образложење старог, дотеривање суптилних места, попуњавање логичких празнина — за све то Петровић није имао нимало укуса. Према томе, Петровића треба сматрати као изразито конструктивног математичара. Детаљнију анализу Петровићевих радова са тог гледишта такође би требало да изврши један од његових ученика.

Најзад, што се тиче форме излагања, Петровић се придржавао само класичних форама. У нову симболику, чак ни теорије множина, није хтео улазити, не из разлога што је ову сматрао неподесном, већ је говорио: „Доцкан је". Није се хтео служити ни векторским ни тензорским рачуном.

Што се тиче технике математичких трансформација и владања математичким рачуном уопште, Петровић је био прави мајстор. То мајсторство је понекад прелазило у виртуозност. Довољно је погледати његову релативно елементарну књигу „Рачунање с бројним размацима", да бисмо видели какву је имао Петровић моћ владања у постављању односа између величина.

Поред тога што је био велики математички талент, Петровић је био и велики математички трудбеник: не може се без великог труда написати математичка књига од 774 стране, велики број мањих књига и стотине чланака. Скроз је погрешна претстава о Петровићу као писцу који је писао своје математичке радове тако у пролазу, надохват. Можда је било и тога; Поенкаре, како је сам причао, решио је главну тешкоћу једног од својих најзначајнијих радова кад је ставио ногу на папучу аутобуса за време екскурзије по Алжиру. Али да се то деси, чак и Поенкареу, треба претходно добро и студиозно проучити одговарајућу област. Да би штампао толико велики број радова, великих и малих по обиму, Петровић је морао седети за својим великим писаћим столом сатима и сатима (често ми је причао како устане у четири сата ујутро и седне за свој писаћи сто), и од рукописа је преносио поглед само на своју вољену Саву и на Дунав, с тим да се опет, с новом мишљу, врати рукопису. И баш је за тим писаћим столом било право његово уживање. После предаје рукописа у штампу ништа га више није интересовало. Није волео да прегледа чак ни коректуре својих радова. Да је тежио неком научном успеху, да је пратио неке рецензије, да је тежио некој научној слави — од свега тога није било код њега ни трага. Научно стварање само по себи, психолошка преживљавања за време стварања, научне емоције — то је била база његовог научног рада и основна црта његова карактера, скромног у свима областима рада и понашања у животу.

Петровић је, као што знате, свирао на виолини, свирао мајсторски, с тачним и непогрешивим музикалним слухом и с поражавајућом меморијом. Он је уживао у својој музици, у музици са својим друговима, али никад није тежио да постане велики музичар, музичар за естраду, за славу. Не, музика је била за Петровића нарочита област стварања и извор његових мајсторских уживања. Требало га је видети са каквим је уживањем свирао чак и „циганску марсељезу“.

Карактеристика Петровића не би била потпуна ако не бисмо нагласили да је у Петровићу било два човека. Петровић озбиљан, дубок, бескрајно предан свом послу. Такав је био Петровић, пре свега, као математичар, научник и професор. Такав је био Петровић и у својим другим пословима. Такав је био Петровић и као истраживач и путник. Такав је био Петровић и рибар. „Не мислите да сам толико благ и са својим рибарима; не, посао је посао“, казао ми је једном Петровић поводом неког попуштања ђацима. — И други — весели Петровић, пријатељ свега смешног, екстравагантног, чак шаљивчина, али јако обдарен и у својој шали.

Петровић нематематичар чак је популарнији од Петровића математичара. Причати о Петровићу нематематичару много је занимљивије за широку публику него писати о Петровићу математичару. Мика Алас је популарнији од Петровића математичара. Нас, праве Петровићеве пријатеље, математичаре, чак и непријатно дира оно првенство које додељују Петровићу нематематичару. Многобројни Петровићеви ђаци, који су осетили огромну његову бригу о талентованој математичкој омладини, треба да се побрину о свестраном разјашњавању оне огромне улоге коју је Петровић одиграо у подизању математичке културе у овој земљи“.

MICHEL PETROVITCH
1868 – 1943

A l'occasion du dixième anniversaire de la mort de Michel Petrovitch, membre de l'Académie des Sciences serbe, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Belgrade, l'Institut Mathématique de l'Académie des Sciences serbe a tenu, le 8 juin 1953, une séance commémorative à laquelle ont assisté les membres et correspondants de l'Académie des Sciences, les professeurs de l'Université, des Hautes Ecoles, des Lycées de Belgrade, ainsi que de nombreux étudiants, anciens disciples et amis de Michel Petrovitch.

La séance, qui eut lieu à la Grande Salle de l'Académie des Sciences, fut ouverte, à 18 h 15, par M. R. Kašanin, Directeur de l'Institut Mathématique. Prenant ensuite la parole au nom de la Présidence, M. A. Belić, membre et président de l'Académie des Sciences a rendu hommage à l'éminent membre de notre Académie des Sciences. Puis M. M. Milankovitch, membre et Viceprésident de l'Académie des Sciences a évoqué les souvenirs des derniers moments de vie de Michel Petrovitch. Ensuite M. A. Bilimovitch, membre de l'Académie des Sciences, en terminant, a évoqué l'oeuvre remarquable de l'éminent mathématicien que fut Michel Petrovitch.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

СТЕРЕОМЕТРИСКЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ*

Кад се једна количина V, из буди каквих разлога, не може тачно израчунати, од интереса је наћи такве две количине M и N да се може поуздано тврдити да вредност X није већа од M, ни мања од N. То се рачунски изражава *двоструком неједначином*

$$N \leqq X \leqq M, \tag{1}$$

а геометриски на тај начин што се на бројној линији, која се пружа од $-\infty$ до $+\infty$, означи да тачка X лежи између двеју тачака M и N, или се са којом од њих поклапа.

До двоструких неједначина (1) долази се на разноврсне начине, према задатку са којим се има посла. Један од општијих начина, који се може искористити при стереометриским израчунавањима, основан је на употреби ових правила:

Прво правило: кад су a и b два броја од којих ни један није негативан, увек је

$$0 \leqq ab \leqq \frac{(a+b)^2}{4},$$

што непосредно следује из идентичности

$$ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2].$$

Друго правило: кад од n бројева $a, b, c, \dots$ ниједан није негативан, увек је

$$\frac{(a+b+c+\dots)^2}{n} \leqq a^2 + b^2 + c^2 + \dots \leqq (a+b+c+\dots)^2,$$

---

* Овај чланак пок. М. Петровића требало је да буде штампан као прилог у уџбенику ГЕОМЕТРИЈА за VI разр. гимн. од А. Билимовића и Т. Анђелића. Петровић је предао писцима чланак фебруара 1941 год., а сачувао га је Т. Анђелић.

што непосредно следује из двеју идентичности, лаке за проверавање

$$n(a^2+b^2+c^2+\ldots)=(a+b+c+\ldots)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2+\ldots$$

$$a^2+b^2+c^2+\ldots=(a+b+c+\ldots)^2-2(ab+ac+bc+\ldots).$$

У стереометриским задацима се често наилази на изразе у којима се налазе производи двеју количина, или збирови квадрата двеју или више количина. Кад се на такве изразе примене горе наведена правила, долази се до *стереометриских неједначина* које могу имати своје занимљивости и интереса. То ће се видети из примера што следују.

I пример: задатак да се израчуна запремина V зарубљене купе, кад јој се зна висина h и полупречник ρ њеног средњег круга, не може се ни на који начин тачно решити. Али, као што се зна, ако се са r и r' означе полупречници кружних основица купе, а са h њена висина, биће

$$V=\frac{\pi h}{3}(r^2+r'^2+rr'). \tag{2}$$

Па пошто је, према горњим правилима,

$$\frac{(r+r')^2}{2}\leqq r^2+r'^2\leqq(r+r')^2, \qquad 0\leqq rr'\leqq\frac{(r+r')^2}{4},$$

а

$$\rho=\frac{r+r'}{2}, \qquad (r+r')^2=4\rho^2,$$

то се према обрасцу (2) добива да је

$$V\leqq\frac{\pi h}{4}(4\rho^2+\rho^2) \quad \text{и} \quad V\geqq\frac{\pi h}{3}(2\rho+0),$$

према чему се за запремину V добива двострука неједначина

$$\frac{2\pi}{3}h\rho^2\leqq V\leqq\frac{5\pi}{3}h\rho^2 .$$

Из тога се на пр. изводи закључак да не постоје две зарубљене купе које имају исти средњи круг и исту висину, а од којих би једна била, по запремини, више од $2^1/_2$ пута већа од друге.

II пример: задатак да се израчуна запремина V лоптиног слоја, кад се зна висина h слоја и полупречник ρ *његовог средњег круга,* такође се не може решити. Али, као што се зна, ако се са r и r' означе полупречници кругова што ограничавају слој, биће

$$V=\frac{\pi h^3}{6}+\frac{\pi h}{2}(r^2+r'^2). \tag{3}$$

Пошто је $r+r'=2\varrho$, а према горњем правилу је

$$2\rho^2 \leqq r^2+r'^2 \leqq 4\rho^2,$$

то се према обрасцу (3) добива да је,

$$\frac{\pi h^3}{6}+\pi h\rho^2 \leqq V \leqq \frac{\pi h^3}{6}+2\pi h\rho^2.$$

Покушај да то искажеш у облику геометриског правила.

III пример: задатак да се израчуна збир

$$S=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

квадрата углова ма каквог сферног троугла такође је нерешљив. Али, као што се зна, збир $(\alpha+\beta+\gamma)$ увек је већи од 180^0, а мањи од 540^0, или (кад се услови изразе у деловима равнога угла), тај је збир увек већи од π, а мањи од 3π.

Према горњем правилу за $n=3$ је

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3} \leqq S \leqq (\alpha+\beta+\gamma)^2.$$

Пошто је

$$\alpha+\beta+\gamma < 3\pi, \qquad \alpha+\beta+\gamma > \pi,$$

то је

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 < 9\pi^2, \qquad \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3} > \frac{\pi^2}{3}$$

из чега се изводи двострука неједначина

$$\frac{\pi^2}{3} < S < 9\pi^2.$$

Из тога се на пр. лако изводи закључак да не постоје два сферна троугла таква да је збир квадрата углова једнога од њих више од 27 пута већи од збира квадрата другога троугла.

У стереометрији има доста таквих тачно нерешљивих задатака, али за које се могу на показани начин поставити двоструке неједначине, што бар приближно одређују непознате вредности. Покушај да сам нађеш који од ових задатака.

SUR LES INÉGALITÉS STÉRÉOMETRIQUES

par

M. PETROVITCH

Par des procédés tout-à-fait élémentaires, l'auteur parvient à donner des limites entre lesquelles se trouvent certaines grandeurs stéréometriques telles que: volume d'un cône tronqué dont on connaît la hauteur et le rayon du cercle moyen; volume d'un anneau sphérique dont on connaît la hauteur et le rayon de son cercle moyen; somme des carrés des angles d'un triangle sphérique quelconque.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

ВОЈИСЛАВ В. МИШКОВИЋ

ГРАФИЧКИ РАЦИОНАЛИЗАТОР

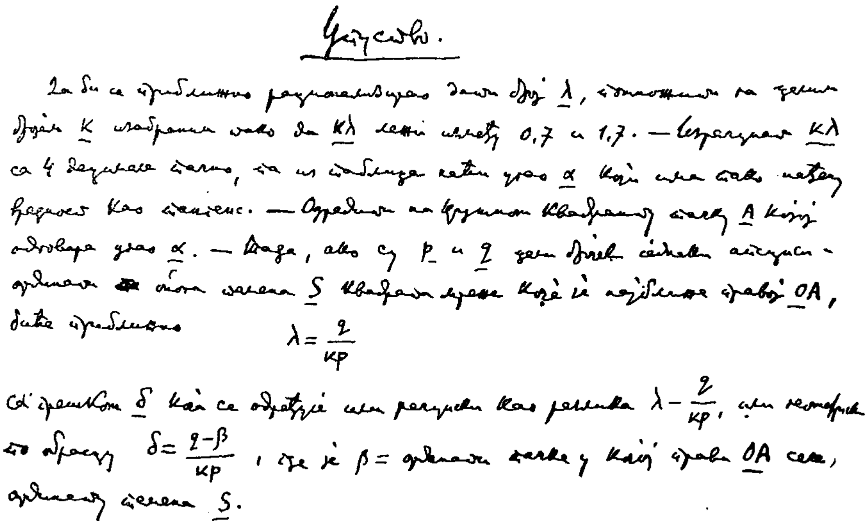
Успомена на *Михаила Петровића*

Објављујемо овај мали прилог, ма да није био намењен да буде објављен, као успомену на професора Петровића. Писан и његовом руком, оживеће нам у сећању, истина, не Петровића специјалисту за диференцијалне једначине, теорију редова и функција или творца математичких спектара, већ — Петровића који се радо разонођавао, покаткад, елементарном и нумеричком математиком. А оживеће нам за тренутак у сећању, тих неколико Петровићевих редака, и некадањи клуб математичара Београдског универзитета, који је он толико волео, можда баш зато што није имао никакав формални карактер, ни писане статуте, чак ни неки званични назив, али је радио интензивно, предано и успешно, тако да су се њиме поносили и његови чланови и наш Универзитет.

Ова Петровићева нотица датира из доба првих радних састанака нашег предратног клуба математичара. На једном од њих аутор ових редова приказао је идеју о квазиидентичним опозицијама планетоида и њихову улогу у идентификовању недовољно посматраних тих објеката. За примену идеје требало је одредити периоде, за сваки од *познатих* планетоида, после којих се они враћају у опозицију са Земљом у *исти*, или *приближно исти* положај као и у извесној, произвољно изабраној, почетној опозицији. Другим речима, требало је, за сваки од познатих планетоида — а у то време било их је око 1200 познатих — апроксимирати однос средњих сидеричких дневних кретања (или револуцијâ) планетоида и Земље што је могуће простијим разломком, то јест са што мањим апсолутним вредностима и бројиоца и имениоца. Усто је требало још, за сваку апроксимацију, оценити (у данима) и њено отступање од тачне вредности.

Дакле, већ и само одређивање периодâ квазиидентичних опозиција, за све нумерисане планетоиде, претстављало је позамашан нумерички посао.

Два-три дана после тога састанка клуба пресрео ме је у Семинару професор Петровић, мало насмејан, са: „Имам за ону вашу ствар згодан графички поступак“. И пружио ми је овај листић.


Упутство.

Да би се приближно рационалисао дати број λ, помножим га целим бројем k изабраним тако да $k\lambda$ лежи између 0,7 и 1,7. — Израчунам $k\lambda$ са 4 децимале тачно, па из таблица нађем угао α који има тако нађену вредност као тангенс. — Одредим на кружном квадранту тачку A којој одговара угао α. — Тада, ако су p и q цели бројеви апсциса и ордината оног темена S квадратне мреже које је најближе правој OA, биће приближно

$$\lambda = \frac{q}{kp}$$

Са грешком δ која се одређује или рачунски као разлика $\lambda - \frac{q}{kp}$, или геометријски по обрасцу $\delta = \frac{q-\beta}{kp}$, где је β = ордината тачке у којој права OA сече ординату темена S.

Сл. 1. Аутограф Петровићева Графичког рационализатора

Уз листић је била приложена и сличица квадранта са квадратном мрежом (в. сл. 2). Прочитао сам текст и видео одмах у чему је поступак. Једино ми, у том тренутку, нису биле јасне границе 0,7 и 1,7. И запитах професора Петровића: „Откуд баш 0,7 и 1,7“? Он се насмеја мало, па ће рећи: „Тако му најбоље дође, видићете“!

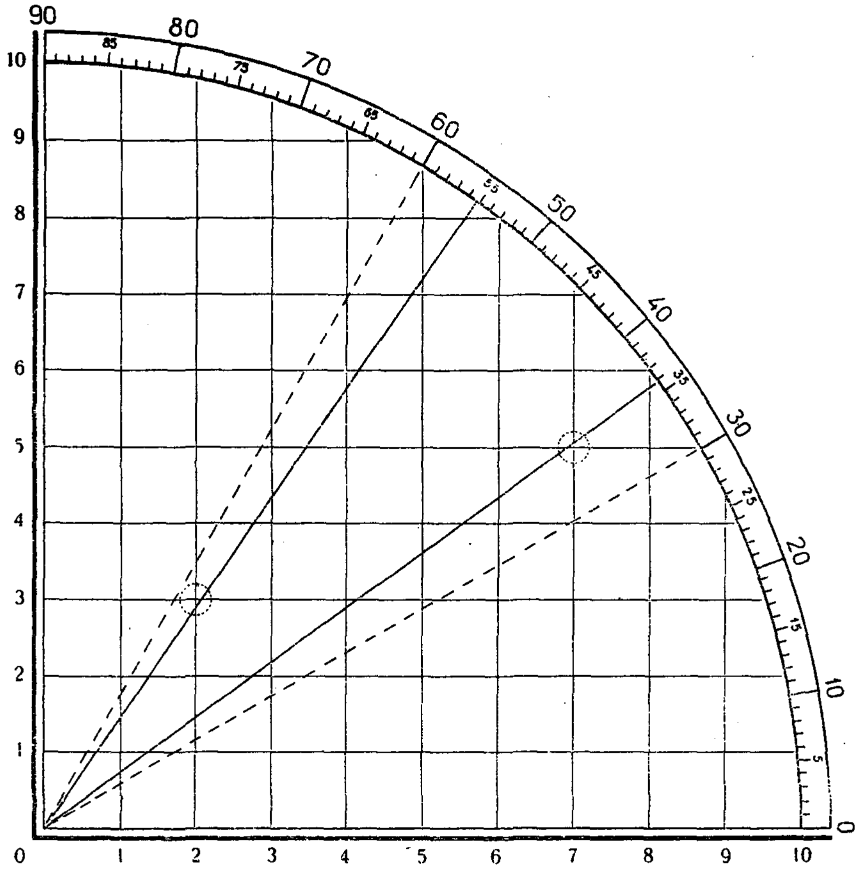
*

Ево укратко у чему се поступак састоји.

Претпоставимо да је дат разломак $\lambda = M/N$, $(M < N)$, где су M и N цели, вишецифрени бројеви. Треба тај разломак апроксимирати другим, рецимо q/p, где су p и q цели, но што мањи бројеви и — оценити приближно његово отступање од дате вредности.

Место да дати разломак развијамо у верижни разломак, поступно одређујемо приближне вредности и, за сваку од ових, израчунавамо отступање од датог разломка, може се ово, по Петровићеву поступку, краће, овако постићи.

Дати разломак $\lambda = M/N$ можемо схватити као коефицијент правца праве $y = \lambda x$ што пролази кроз почетак координатног система Oxy. Са овим координатним системом можемо, међутим,



Сл. 2. Графички рационализатор

извршити ротацију око координатног почетка. Извршимо је тако да у новом координатном систему коефицијент правца буде $k\lambda$, и то тако да овај падне између 0,7 и 1,7. Другим речима, фактор k бираћемо тако да угао између праве и нове апсцисе не буде мањи од 35^0, ни већи од 60^0. А ово ћемо увек моћи постићи, тј. моћи наћи такво k.

Замислимо сад да квадрант новог координатног система покријемо квадратичном мрежом, оивиченом поделом кружне периферије на степене (в. сл. 2), како бисмо могли непосредно са ње читати нагибе правих према апсцисној оси. Та слика претставља Петровићев графички рационализатор, чија је употреба изложена у аутографисаном упутству (в. сл. 1).

Објаснићемо је овде на једном нумеричком примеру. Узмимо да треба упростити разломак λ, у којем је $M=2583$, $N=35796$.

По Петровићеву поступку, за фактор k могли бисмо узети било који цео број од 10 до 24. Узећемо, наравно, најмањи, јер је овај и са гледишта рачуна најпогоднији. У том случају је

$$k\lambda = \operatorname{tg}\alpha = 0{,}7216, \text{ дакле } \alpha = 35^0\,49' \approx 35^0{,}8.$$

Повуцимо из почетка графичког рационализатора праву, под овим углом са апсцисном осом, до саме издељене периферије. Потражимо затим координате темена квадратића мреже кроз који пролази ова права, односно, темена најмање удаљена од те праве. Видимо да је то окружено теме чије су координате $p=7$ и $q=5$. Према томе, тражена приближна вредност датог разломка је

$$\lambda = \frac{M}{N} \approx \frac{q}{kp} = \frac{5}{70} \approx 0{,}0714,$$

са отступањем

$$\frac{M}{N} - \frac{q}{kp} = 0{,}0722 - 0{,}0714 \approx 0{,}001.$$

Да је за k узето 20, било би

$$k\lambda = \operatorname{tg}\alpha = 1{,}4432, \text{ дакле } \alpha = 55^0\,17' \approx 55^0{,}3.$$

Права повучена из почетка рационализатора под овим углом дала би $p=2$, $q=3$. Према томе, за приближну вредност датог разломка добили бисмо

$$\lambda = \frac{M}{N} \approx \frac{q}{kp} = \frac{3}{40} = 0{,}075.$$

За отступање налазимо

$$\text{рачунски:} \quad \frac{M}{N}-\frac{q}{kp}=0{,}0722-0{,}0750\approx 0{,}003;$$

$$\text{графички:} \quad \frac{M}{N}-\frac{q}{kp}\approx\frac{\varepsilon}{kp}\approx\frac{0{,}1}{40}=\frac{1}{400}\approx 0{,}00\overline{3}.$$

Петровићев графички рационализатор има две практичне предности. Прво, омогућује да се непосредно види и да ли се дати разломак апроксимира оздо (подбаченом) или озго (пребаченом приближном вредношћу). И, друго, омогућује да се релативно брзо и лако, са графика, не само нађе тражена приближна вредност датог разломка, већ да се и оцени његово приближно отступање од тачне вредности.

Што се тиче степена тачности који се графичким рационализатором може постићи, овај, наравно, зависи од његове величине и прецизности са којом је израђен.

Најзад, још једна напомена. Са графика се види и смисао граница 0,7 и 1,7. То су, уствари, само заокругљене приближне вредности коефицијената праваца, којима је Петровић хтео да ограничи и, на свој начин, ограничио онај сектор на којем ће се координате p и q моћи са подједнаком и највећом тачношћу са графика одређивати.

RATIONALISATEUR GRAPHIQUE

Souvenir de M. Petrovitch

par

V. V. MICHKOVITCH

L'auteur fait connaître un procédé graphique, jusqu'ici inédit, de M. Petrovitch, destiné à simplifier la rationalisation d'un nombre donné $\lambda < 1$. Le procédé consiste à multiplier le nombre donné par un nombre entier k tel que $0{,}7 < k\lambda < 1{,}7$. A l'aide de $k\lambda = \operatorname{tang}\alpha$ ainsi calculé, avec quatre décimales, on détermine l'angle α. Puis on trace, sur le graphique (Fig. 2), la droite passant par l'origine et faisant avec l'axe des abscisses l'angle α.

En remontant la droite ainsi tracée, on cherche le sommet du carré le plus proche de la droite. Si on désigne par p et q les coordonnées de ce sommet (encerclé sur la Fig. 2), on aura, pour une valeur approchée du nombre donné,

$$\lambda = \frac{q}{kp}.$$

L'erreur δ ainsi commise peut être évaluée soit par le calcul, en prenant la difference $\lambda - \frac{q}{kp}$, soit à l'aide du graphique en prenant $\delta = \frac{q-\beta}{kp}$, β étant l'ordonnée du point d'intersection de la droite et de l'ordonnée du sommet du carré choisi.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

МИЛУТИН МИЛАНКОВИЋ

О ПТОЛЕМАЈЕВУ ИЗРАЧУНАВАЊУ БРОЈА π

У своме „Зборнику астрономије"* Клаудије Птолемајос нам саопштава да опсег круга стоји према круговом пречнику у размери

$$3\,8'\,30'' : 1$$

То ваља разумети овако. Птолемајос се служио сексагезималним бројним системом не само за премеравање углова и лукова, већ и за изражавање његових тригонометриских функција од којих употребљава само тетиве. При томе дели периферију круга, као и ми, у 360^0 степена, степен у 60 минута, а минут у 60 секунада. При изражавању тригонометриске функције, тетиве, дели пречник круга у 120 делова, које назива „партес" а ове дели у минуте и секунде. Зато добивамо, преводећи горе саопштени број у децимални систем, да је размера опсега круга према његовом пречнику, дакле број π, прем Птолемајову рачуну једнака

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3\,\frac{17}{120}\,.$$

Птолемајос нам у своме делу не саопштава како је дошао до тог свог нумеричког резултата који, прерачунат на наш деци-

---

* Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie. Uebersetzt von K. Manitius. Zwei Bände. Leipzig, B. G. Teubner, 1912, 1913.

Споменуто место налази се у првом тому дела, његовој шестој књизи, седмом поглављу, на странама 384 и 385. У Heiberg-овом издању, то место се налази на стр. 513.

мални бројни систем даје $\pi=3{,}14167$ и који је, својом тачношћу, премашио израчунавања свих научника Антике. Желим да овом расправицом покажем како је Птолемајос дошао до саопштеног броја.

При томе ћу се послужити нашим садашњим језиком математике да бих њим изразио и замисли наших претходника.

Уцртамо ли у круг радиуса r правилан полигон од n страница, па пишемо ли

$$\alpha = \frac{360^0}{n},$$

то нам α предочава центрични угао сваке странице, тако да је њена дужина једнака $2r\sin\alpha/2$, а опсег полигона једнак

$$O_n = 2\,n\,r\sin\frac{\alpha}{2} = 2\,n\,r\sin\frac{180^0}{n}.$$

Опсег круга је

$$O = 2\,\pi\,r.$$

Када број n расте у бесконачност, опсег полигона приближава се до потпуности опсегу круга. Зато је

$$\lim_{n\to\infty}(O - O_n) = 0,$$

дакле

$$\pi = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{180^0}{n}.$$

Ова једноставна једначина даје нам могућност нумеричког израчунавања броја π из нумеричке вредности $\sin(180^0/n)$ уз довољно велику вредност броја n.

Применимо ова расуђивања служећи се таблицом тетива што ју је Птолемајос израчунао, а која се налази на странама 36 до 40 првог тома Маницијусова превода Птолемајова Зборника.

Са $\alpha=1^0$, тј. $n=360$, налазимо у тој таблици да је дужина тетиве у односу према пречнику круга дата овим бројем

$$\frac{t}{2r}=\frac{1}{120}\left(1+\frac{2}{60}+\frac{50}{3600}\right).$$

Опсег полигона је n пута толики. Зато је

$$O_n=\frac{360}{120}\left(1+\frac{2}{60}+\frac{50}{3600}\right).$$

Како је опсег круга $O=2\pi r$, то одатле следује

$$\pi=\frac{377}{120}=3\frac{17}{120},$$

дакле тачно онај број који је, као што је напред речено, Птолемајос у своме зборнику саопштио. Нико пре њега, а дуго времена и после њега, није дошао до тако тачног резултата.

UEBER DIE AUSRECHNUNG DES CLAUDIUS PTOLEMAUS DER ZAHL π

von

M. MILANKOVITCH

In seinem Werke „Handbuch der Astronomie“, übersetzt von Karl Manitius, Band I, Seite 384 und 385, Leipzig, B. G. Teubner, 1912, gibt Claudius Ptolemäus für den numerischen Wert der Zahl π folgende Zahl an:

$$\pi=3+\frac{8}{60}+\frac{30}{360},$$

d. h. auf unseres Dezimalsystem umgerechnet

$$\pi=3\,\frac{17}{120}=3{,}141666\ldots,$$

ohne mitzuteilen, wie er diese Zahl berechnet hat, die durch ihre Genauigkeit alle übrigen Berechnungen der antiken Autoren übertrifft.

Der Verfasser dieser Abhandlung zeigt, dass Ptolemäus zu dieser Zahl gelangt ist mittels der in unserer gegenwärtigen mathematischen Sprache leicht zu beweisenden Formel

$$\pi = \lim_{n \to \infty} n \sin\left(\frac{180^0}{n}\right),$$

indem er in dieselbe $n = 360$ eingesetetzt hat und den zugehörigen numerischen Wert von sin $(180^0/n)$ seinen auf den Seiten 36 bis 40 des ersten Bandes seines Werkes mitgeteilten Sehnentafeln entnommen hat.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Acad. Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

МИЛОШ РАДОЈЧИЋ

О ПРОБЛЕМУ РИМАНОВИХ ПОВРШИ

1. *Риманова површ и Риманова област.* — Реч је о конформном пресликавању области које припадају Римановим површима. Занимаће нас питање руба тих области. Ограничићемо се на конформно пресликавање *једноструко повезаних отворених области.* Но пре него што пређемо на предмет овог излагања утврдимо извесне називе, не износећи строгих дефиниција. Разликоваћемо наиме *Риманову* (или *риманску*) *површ** од макакве *вишелисне области.* Та се разлика увек не поставља јасно, али често претпоставља.

Имајући на уму да се листовима називају извесне области које нигде не покривају раван више од једанпут, ми ћемо сваку отворену или затворену област разастрту над једном равни у смислу Риманових површи, — област за коју можемо сматрати и да настаје аналитичким продужавањем неке мултиформне аналитичке функције — називати напросто *Римановом* или *вишелисном облашћу.* Опште посматрано, таква област покрива раван негде више, негде мање пута, а неге ни једанпут. У том смислу *једнолисне области* су посебна врста Риманових области.

Римановом површи називаћемо пак у овом излагању вишелисну област само ако се она не може сматрати „правим" делом друге (шире) вишелисне облати (ако се дакле, међу осталим, аналитичко продужавање изврши до крајњих могућности).

Према томе, сваку вишелисну област можемо сматрати делом неке Риманове површи.** Обичне тачке и алгебарске завојне тачке су увек унутарње тачке Риманових површи, трансцендентне завојне тачке образују (ако их има) њихове рубове.***

---

* Употребљавамо реч *површ* за геометриски лик који се у нас обично назива површином (surface, Fläche) а реч *површина* за величину или меру површи (aire, Flächeninhalt).

** Под Римановом површи подразумева се често макаква област екситенције неке мултиформне аналитичке функције, у којој је ова униформа, дакле макаква вишелисна област. Оправдана је и таква употреба назива, но тада би оно што сад називамо „Римановом површи" требало друкчије назвати (нпр. „потпуном Римановом површи", за разлику од осталих, „непотпуних").

*** *Завојна тачка* или *тачка грања* = Windungspunkt (Verzweigungspunkt), point de ramification.

2. *Основни став конформног пресликавања.* — Пођимо од тзв. основног става конформног пресликавања једнолисних, једноструко повезаних отворених области. Њиме се изражава неограничена могућност конформног пресликавања таквих области међу собом, под условом да разликујемо *три врсте* тих области: 1. области чији руб садржи више од једне тачке, 2. области чији се руб састоји само из једне тачке и 3. област која нема руба, која се дакле састоји из целе бројне равни укључивши и бесконачно далеку тачку. Постоји наиме став који потиче још од Римана [*B. Riemann*, **1**, 1851], али је тек доцније потпуно доказан [*D. Hilbert*, **1—3**, 1900—1909; *R. Courant*, **1—4**, 1910—1914; *P. Koebe*, **1**, **2**, 1912—1915; *C. Carathéodory*, **1**, **2**, 1912—1914 и др.] и по коме се *свака једнолисна једноструко повезана отворена област може пресликати обострано једнозначно и конформно на сваку другу такву област исте врсте.*

У ствари доказује се прво став по коме се *свака једнолисна једноструко повезана отворена област равни може пресликати обострано једнозначно и конформно* на једну од три отворене области w-равни:

на кружну област $|w| < R < \infty$

или на целу отворену раван $|w| < \infty$

или на целу затворену раван $|w| \leqslant \infty$

према томе да ли се њен руб састоји из више тачака, или само из једне тачке, или ниједне. Из овог става следује претходни непосредно. Једва је потребно споменути да у другом и трећем случају пресликавања врше линеарне функције. Само у првом случају функције које врше пресликавања су опште природе.

3. *Конформно пресликавање вишелисних једноструко повезаних области.* — За вишелисне једноструко повезане отворене области може се унапред очекивати аналоган став, уопштење претходног. Заиста постоји [*Koebe*, **3**, **4**, 1909; *Courant*, **1—4**, 1910—1914] следећи општи став:

Свака вишелисна једноструко повезана отворена област може се пресликати обострано једнозначно и конформно на једнолисну једноструко повезану отворену област.

Али питање: којој ће од три поменуте врсте припадати та једнолисна област, није потпуно решено ни до данас. Свакако, постоје извесни лаки случајеви кад се одговор на ово питање може одмах дати. Можемо их скупити у следећа два става. Први се односи на области које можемо сматрати деловима затворених, тј. алгебарских једноструко повезаних риманских површи; тада је лако разликовати којој ће од три врсте припадати уочена вишелисна област. Други се односи на извесне области које не можемо сматрати деловима затворених риманских површи, него само отворених.

I. Свака вишелисна једноструко повезана отворена област која припада једној затвореној Римановој површи може се пресликати обострано једнозначно и конформно на унутрашњост круга, или на целу отворену бројну раван, или на целу затворену бројну раван, или на целу затворену бројну раван, према томе да ли се њен руб састоји из више тачака, или из само једне тачке, или ни из једне.

II. Свака вишелисна једноструко повезана отворена област која се може сматрати делом само једне отворене једноструко повезане Риманове површи, али која има рубних тачака међу унутарњим тачкама те површи, може се пресликати обострано једнозначно и конформно на унутрашњост једног круга.

Како је садржај првог става једноставна последица споменутога Риманова става, докажимо само други став. Претпоставимо да унутрашња тачка α дотичне Риманове површи припада рубу уочене вишелисне области Δ. Како се та површ може конформно пресликати на неку равну област B у z-равни, а површ је отворена, област B има известан руб b (који се састоји из једне или више тачака). Но α је унутарња тачка површи, дакле одговара јој унутарња тачка a области B. Област Δ је једноструко повезана, дакле одговара јој у z-равни једноструко повезана област D, садржана у B и чији руб d садржи како тачку a тако руб b. Дакле руб d садржи најмање две тачке и према томе D, дакле и Δ, може се конформно пресликати на унутрашњост једног круга.

4. *Проблем типа Риманових површи.* — Према претходном, тешкоће чине само области отворених риманских површи које немају рубних тачака површи, тј. *„целе" отворене Риманове површи.* Питање конформног пресликавања вишелисних једноструко повезаних области, које још чека на своје потпуно решење гласи дакле: *када ће се једноструко повезана отворена Риманова површ пресликати на круг а када на целу отворену раван?* Другим речима: *када ће се отворена Риманова површ моћи сматрати као површ функције инверсне функцији мероморфној у целој отвореној равни, а када као површ функције инверсне функцији мероморфној у неком кругу и којој је тај круг есенцијална линија?*

Кад се Римамова површ пресликава (обострано једнозначно и конформно) на унутрашњост круга кажемо да је та површ *хиперболна* или *хиперболног типа;* кад се пресликава на целу отворену раван кажемо да је *параболна* или *параболног типа;* а кад је Риманова површ затворена, кад се дакле пресликава на целу затворену раван, кажемо да је *елипсна* или *елипсног типа.* Ови називи стоје у вези с теоријом линеарно аутоморфних одн. полиморфних функција, које су у неку руку карактерисане истоименим линеарним супституцијама [*F. Klein*, **1**, 1878; **2**, 1882]. С тим називима питање гласи: *кад ће једноструко повезана отворена Риманова површ бити хиперболног а када параболног типа?*

Отуд се овај проблем назива и *проблемом типа Риманове површи*. На њему се у новије време доста радило и налазили су се разни *услови (критеријуми) за параболни или хиперболни тип*. То је уствари *проблем руба у конформном пресликавању једноструко повезаних вишелисних области* или, тачније, основно питање које би се у том проблему имало решити пре свих других. То је дакле један од битних састојака општег и средишњег задатка теорије аналитичких функција: испитивања конформног пресликавања општих области.

Овде ћемо изнети известан преглед тих услова, који се не може сматрати потпуним, али би могао послужити ради првог сналажења у проучавању тог предмета.

5. *Пикаров став о изузетним вредностима као критеријум типа.* — На првоме месту може се навести познати Пикаров став [**1**, **2**, 1879] о изузетним вредностима у близини есенцијалних сингуларности као став који даје довољан услов да Риманова површ буде хиперболног типа. Општи Пикаров став казује да *функција узима у близини усамљене есенцијалне тачке* (тј. есенцијалне тачке у чијој је околини функција регуларна сем у половима) *сваку вредност бескрајно много пута, изузев, највише, две вредности.* Но како се у овом излагању ограничавамо на једноструко повезане области, довољно је узети у обзир Пикаров став за функције мероморфне у целој отвореној равни, који тада казује да таква функција узима *сваку вредност бескрајно много пута, изузев, највише две.* Дакле, ако постоје више од две изузетне вредности, функција не може бити мероморфна у целој отвореној равни. Према томе може се изрећи следећи довољни услов за хиперболни тип:

Ако изнад три или више тачака бројне равни једноструко повезана отворена Риманова површ нема унутарњих тачака ни на једном листу, или само на коначно много њих, та површ је хиперболног типа.

6. *Иверсенова два става.* — Изнесимо још неке довољне услове за хиперболни тип Риманове површи, замишљајући да је површ распрострта изнад комплексне w-равни. Постоји следећи став [*F. Iversen*, **1**, 1914, стр. 18]:

Уочимо ма коју (унутарњу) *тачку једне параболне Риманове површи, којој одговара у w-равни тачка w_0, и нека је w_1 ма која друга тачка w-равни ($w_0 \neq w_1$), обе у коначном делу равни. Тада постоји на тој површи непрекидан лук* (састојећи се из самих њених унутарњих тачака) *који полази из уочене тачке w_0 те површи а у равни спаја w_0 са w_1 не излазећи изван круга $|w-w_1|<|w_0-w_1|$.*

Обртањем Иверсенова става добијамо следећи услов за хиперболни тип риманске површи:

Ако на једноструко повезаној Римановој површи постоји тачка w_0 *и у* w*-равни још једна тачка* w_1 $(w_0 \neq w_1)$ *па ако не постоји непрекидан лук на површи, који полази из* w_0 *на површи а у* w*-равни спаја* w_0 *са* w_1 *остајући у кругу* $|w - w_1| < |w_0 - w_1|$, *тада је та Риманава површ хиперболног типа.*

Очигледно, лук поменут у овом ставу не мора постојати у случају кад на површи има извесних сингуларних линија. Дакле по Иверсенову ставу ако на површи има сингуларних линија, она је хиперболна. Тиме је обухвећен став II у бр. 3.

Из Иверсенова исказаног става произлази лако следећи, на изглед општији став [*Iversen*, **1**, 1914, стр. 24]:

Уочимо у некој тачки w_0 *елеменш функције инверсне мероморфној функцији и непрекидну криву* g *(у* w*-равни) која спаја* w_0 *са неком другом тачком* w'. *Тада постоји пут* (на Римановој површи) *који из* w_0 *води ка* w', *садржан у произвољно узаној траци што садржи криву* g, *а дуж кога се уочени елеменш може аналитички продужити до* w'.

Сад се обрнути став може изрећи овако:

Ако на једноструко повезаној Римановој површи, полазећи од извесне њене тачке изнад w_0 *не можемо описати непрекидну криву која се у равни удаљује произвољно мало ма од кога датог непрекидног лука који спаја* w_0 *са којом било тачком* w_1 *у* w*-равни, тада је та Риманова површ хиперболног типа.*

7. *Гросов став.* — Иверсенов став утврђује могућност аналитичког продужавања дуж ма које, у равни изабране континуиране криве, с произвољно малим удаљавањем од ње, али не казује ништа у погледу на униформност продужавања, тј. не тврди да пут којим се на површи крећемо нема у равни вишеструких тачака. Одређенији у том смислу је следећи Гросов став [*W. Gross*, **1**, 1918] који се односи на аналитичко продужавање дуж правих у разним правцима. Њиме се такође добија један критеријум за хиперболне површи. Став гласи:

Из сваке обичне тачке једне параболне Риманове површи могу се повући на тој површи у правцима који са извесним почетним правцем заклапају ма који угао $\varphi\ (0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ *полуправе на тој површи*, које се састоје из самих обичних тачака површи — *сем можда у извесним правцима за које мноштво вредности* φ *има меру једнаку нули.*

Вреди напоменути следећи став, садржан у суштини у Гросову ставу, мањег домета, али елементарније природе, јер не употребљава појам мере неког мноштва:

Уочимо на параболној Римановој површи коју било тачку и у w*-равни који било круг са средиштем у тој тачки. Тада у сваком исечку тога круга постоји на површи исечак истога круга, са средиштем у реченој тачки и који се састоји из самих њених обичних тачака.*

Обртањем Гросова става и претходнога добијамо опет довољне услове за хиперболне Риманове површи. Тако настаје из Гросова става следећи:

Ако се из неке обичне тачке једноструко повезане Риманове површи не могу повући на тој површи полуправе у правцима за које поменути угао φ, који их одређује, образује мноштво вредности коме је мера позитивна, тада је та Риманова површ хиперболна.

8. *Ставови из теорије линеарно аутоморфних функција.* — Међу ставове који имају карактер критеријума за тип Риманових површи можемо унети и следеће ставове, који садрже елементарне чињенице из теорије линеарно аутоморфних функција [*F. Klein*, **1**, 1878; **2**, 1882 и *H. Poincaré*, **1**, 1882; итд.]:

Ако на једноструко повезаној риманској површи постоји (на њој униформна *линеарно полиморфна функција и ако њена група линеарних супституција садржи макар само једну хиперболну супституцију, та површ је хиперболног типа; ако не садржи хиперболних супституција, али садржи макар само једну параболну супституцију, површ је параболног типа; ако садржи само елипсне супституције, површ је елипсног типа.*

Напоменимо да је тај став прилично опште природе, јер су, по дефиницији, линеарно аутоморфне функције у појединим „основним областима" општег мероморфног карактера.

9. *О типу правилно разгранатих Риманових површи.* — Теорија линеарно аутоморфних функција даје и тачније податке о разгранатости Риманових површи сва три типа. Реч је о *правилно разгранатим* површима чије су завојне тачке изнад коначно много тачака w-равни, рецимо, изнад $a_1, a_2, \ldots, a_q$ $(q \geqslant 2)$. Ред завојне тачке изнад a_ν нека буде за сваки лист m_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, q)$. То значи да се око a_ν пермутује увек по m_ν листова.

Ако је $q=2$ то су, очигледно, Риманове површи функција

$$z = \left(\frac{w - a_1}{w - a_2}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{или} \qquad z = \lg\left(\frac{w - a_1}{w - a_1}\right).$$

У првом, алгебарском случају површ је елипсног типа, у другом случају је парабалног типа.

Ако је $q=3$ имамо Шварцове „функције троугла" [види нпр. *Klein*, **3**, 1890]. Опишемо ли затворену линију, рецимо круг, кроз тачке a_1, a_2, a_3, цела риманска површ је подељена на области тако да две суседне области увек сачињавају цео један њен лист. Тим областима одговарају у z-равни кружни троугли чији углови, као што се лако увиђа, имају величине $\frac{\pi_1}{m_1}, \frac{\pi_2}{m_2}, \frac{\pi_3}{m_3}$. Као што је познато из теорије аутоморфних функција, тип Риманове површи зависи од величине тих углова: ако је он већи од π површ је елипсна, ако је једнак π параболна је, ако мањи од π хиперболна. Према томе:

Ако је правилно разграната Риманова површ разграната изнад три тачке a_1, a_2, a_3 бројне равни а ред тих завојних тачака је m_1, m_2, m_3, тада је та површ елипсна, параболна или хиперболна према томе да ли је

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}>1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}=1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}<1.$$

Једноставним рачуном налазимо да постоје свега четири случаја елипсног типа, као што показује схема I (у схеми n значи 2, 3, 4,...). Исто тако постоје свега четири случаја кад је површ параболног типа, као што показује схема II.

I

m_1	m_2	m_3
2	2	n
2	3	3
2	3	4
2	3	5

II

m_1	m_2	m_3
2	2	∞
2	3	6
2	4	4
3	3	3

У свим осталим случајевима (кад је $q=3$) којих има бескрајно много, тип је хиперболан.

Ако је $q=4$ постоји само један случај у коме је површ параболна, наиме кад је $m_1=m_2=m_3=m_4=2$. У сваком другом случају, а исто тако и кад год је $q>4$ површ је хиперболног типа.

Све случајеве регуларно разгранатих површи можемо дакле сажети у следећи став (види нпр. *R. Nevanlinna*, **2**, 1936, стр. 278 и след.):

Ако је правилно разграната Риманова површ разграната изнад q тачака равни ($q \geqslant 2$) а ред тих тачака грањања је $m_1, m_2, \ldots, m_q$, тада је та површ елипсна, параболна или хиперболна према томе да ли је збир

$$s=\sum_{1}^{q}\frac{1}{m_\nu}$$

већи, једнак или мањи од $q-2$.

10. *Неванлинин критеријум за Риманове површи потпуно разгранате изнад коначно много тачака.* — Као што произлази из општих ставова о мероморфним функцијама, које је доказао *R. Nevanlinna* [**1**, 1932] претходни став о риманским површима линеарно полиморфних функција допушта значајно уопштење у случају хиперболног типа. Реч је ма о каквим једноструко повезаним риманским површима потпуно разгранатим изнад коначно много тачака.

Каже се да је Риманова површ *потпуно разграната* изнад неке тачке бројне равни ако је то завојна тачка за сваки њен лист. Али Неванлинин став допушта да тај појам схватимо шире:

да површ сматрамо потпуно разгранатом изнад неке тачке и ако је то завојна тачка за сваки њен лист сем највише за коначно много листова. Тада се став може једноставно изрећи овако:

Ако је једнострyко повезана Риманова површ, потпуно разграната изнад коначно много тачака $a_1, a_2, \ldots, a_q$ $(q \geqslant 2)$ *тако да ред завојних тачака изнад* a_ν *није мањи од* m_ν (а може бити и бескрајан) *па ако је*

$$\sum_{1}^{q} \frac{1}{m_\nu} < q-2,$$

та површ је хиперболног типа.

Из претходних разматрања (бр. 9) следује одмах да постоје свега *пет* разних случајева кад је по Неванлинину ставу површ хиперболна, према приложеној схеми.

q	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
3	2	3	7	—	—
3	2	4	5	—	—
3	3	3	4	—	—
4	2	2	2	3	—
5	2	2	2	2	2

Разуме се, сваки од тих случајева подразумева бескрајно много разних, различито разгранатих риманских површи, јер услов је само да ред завојних тачака не буде мањи од m_ν.

Кад је $q=3$ може се нпр. узети да су све завојне тачке изнад a_1, a_2, a_3 логаритамске (∞, ∞, ∞). Но тада добијамо Пикаров став (бр. 5). Дакле *Пикаров став је посебан случај тога Неванлинина става.*

11. *Алфорсово уопштење Неванлинина става.* — Могло се унапред очекивати да ће Неванлинин став остати тачан и кад се уочена Риманова површ непрекидно деформише у извесним границама, ако се дакле и завојне тачке, које се налазе изнад извесне тачке равни и сачињавају једно место потпуне разгранатости, помере из те тачке, али не предалеко. Алфорс је успео да у том погледу докаже став [*L. Ahlfors*, **2**, 1932] који можемо изрећи следећим речима:

Уочимо q *једнострyко повезаних области бројне равни,* $G_1, G_2, \ldots, G_q$, *које су једна изван друге, и претпоставимо да продужујући аналитички ма коју грану аналитичке функције којој та површ припада, а остајући у* G_ν *наилазимо на завојну тачку чији ред није мањи од* m_ν. *Ако је тада*

$$\sum_{1}^{q} \frac{1}{m_\nu} < q-2,$$

та површ је хиперболног типа.

12. *Неки критеријуми за параболни тип.* — Пре свега, Р. Неванлина је год. 1932 објавио доказ да су *све Риманове површи с коначно много трансцендентних и алгебарских завојних тачака параболног типа* [*R. Nevanlinna*, **1**, 1932].

Од разних ставова који дају критеријуме за параболне Риманове површи с изолованим завојним тачкама споменимо затим Алфорсов став за једноструко повезане Риманове површи које у коначноме имају само алгебарских завојних тачака, а у бескрајно далекој тачки могу имати и трансцендентних завојних тачака [*Ahlfors*, **1**, 1931]:

Нека је $n(\rho)$ број завојних тачака, рачунајући сваку онолико пута колики је њен ред (или тзв. степен гранања, тј. ред смањен за јединицу) до којих се по тој Римановој површи може доспети на путовима краћим од ρ. *Ако интеграл*

$$\int^{\infty} \frac{d\rho}{\rho\, n(\rho)}$$

дивергује, Риманова површ је параболна.

Ако површ нема ни у бескрајно далекој тачки трансцендентних завојних тачака, критеријум се може пооштрити:

Ако су све завојне тачке алгебарске и ако се налазе у ограниченом делу бројне равни $|w| < \mu$, *довољно је диверговање интеграла*

$$\int^{\infty} \frac{d\rho}{n(\rho) - n(\rho - \mu)}$$

да би површ била параболна (*Радојчић*, **4**, 1937).

Ако замислимо да је Риманова површ разастрта надРимановом сфером (ако дакле удаљеност ρ меримо сферном мером) сличан интеграл вреди кад год су све завојне тачке алгебарске, тј. *из дивергенције интеграла*

$$\int^{\infty} \frac{d\rho}{n(\rho) - n(\rho - \pi)}$$

следује да је таква Риманова површ параболна.

Наместо претходна два интеграла може се узети и

$$\int^{\infty} \frac{\rho\, d\rho}{n(\rho)},$$

тј. *ако тај интеграл дивергује површ је параболног типа* [*Ahlfors*, **3**, 1936; *Радојчић*, **4**, 1937].

13. *Критеријум за параболни тип у облику збира.* — Из претходнога следује непосредно још један критеријум за Риманове површи које имају само алгебарских завојних тачака:

Ако је ν_k број завојних тачака, рачунајући сваку онолико пута колики је њен ред, а до којих се по површи може доћи на путовима краћим од $(k+1)\pi$ а не краћим од $(k-1)\pi$ и ако је бескрајни збир

$$\sum^{\infty} \frac{1}{\nu_k}$$

дивергентан, површ је параболног типа [*Ahlfors*, **3**, 1936].

За одређивање типа можемо се ослонити и на начин како се испреплићу листови Риманове површи. Нека је површ подељена на известан начин (који овде изближе не описујемо) на листове континуираних рубова. Пошавши од извесног листа назовимо укупност листова који имају заједничких рубова с полазним листом *првом генерацијом* листова; укупност даљих листова који имају заједничких рубова с првом генерацијом назовимо *другом генерацијом*, итд. Нека је $\delta(\nu)$ број листова у ν-тој генерацији [*A. Speiser*, **1**, 1930].

Ако су, задржавајући претходне услове, сферна растојања завојних тачака, мерена на површи, изнад извесне позитивне величина ε и ако њихов ред није већи од целог броја p, може се поставити следећи критеријум:

Кад бескрајни збир

$$\sum^{\infty} \frac{\nu}{\delta(0)+\ldots+\delta(m_\nu)},$$

где је

$$m_\nu = \nu\left[\frac{p}{2}\right] + (\nu+1)\frac{(6p)^c-1}{6p-1}, \qquad c = \left[\frac{10\pi}{\varepsilon}\right],$$

дивергује, Риманова површ је параболног типа [*Радојчић*, **7**, 1950].

Забележимо следећу последицу, која постоји под условом да је низ бројева $\delta(\nu)$ монотоно несилазан: *Ако бескрајан збир*

$$\sum^{\infty} \frac{1}{\delta(\nu)}$$

дивергује, површ је параболна.

Ово посматрање се може проширити и на случајеве кад нема ограничења за ред завојних тачака и за њихова растојања. Нека је p_ν највиши ред свих завојних тачака на рубовима листова првих ν генерација, а ε_ν најмање растојање за све те тачке.

Лако је показати да тада *из дивергенције бескрајног збира*

$$\sum^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu^2}{(6p)^{c_\nu}\,\delta(\nu)}, \qquad c_\nu = \left[\frac{5\pi}{\varepsilon_\nu}\right],$$

следује да је Риманова површ параболног типа [*Радојчић*, **7**, 1950, стр. 52].

14. *Кобајашијев критеријум за параболни тип.* — *Z. Kobayashi* [**1**, 1935] дао је став који обухвата све врсте Римановых површи с усамљеним завојним тачкама. При томе се ослања о мрежу која на површи настаје на следећи начин: Одредимо на површи око сваке завојне тачке њену околину која се састоји из свих тачака површи ближих тој завојној тачки него другим завојним тачкама. Рубови свих тих околина састоје се, очигледно, из тачака површи, које су једнако удаљене од, најмање, две завојне тачке; они образују тзв. *Кобајашијеву мрежу*. Ова се може претставити тополошким дрветом [*Speiser*, **1**, 1931] којим се тополошки приказује на прост начин узајамна повезаност листова Римановых површи. Као и тополошко дрво, Кобајашијева мрежа се састоји из „дужи" које су међу собом спојене у својим крајњим тачкама, „чворовима" мреже. Дуж сваке „дужи" састају се околине двеју завојних тачака. Из обих тих тачака види се та „дуж" (или неки њен део) под извесним углом. Овај угао називамо угаоном мером те дужи (или њеног дела). Тада можемо дефинисатн *угаону раздаљину* ма којих двеју тачака на мрежи као збир угаоних мера оних дужи преко којих су те две тачке мрежом повезане; при томе бирамо онај пут повезаности на коме је тај збир најмањи. Нека је θ угаона удаљеност које било тачке на мрежи од извесне полазне тачке. Означимо са $n(\theta)$ број тачака Кобајашијеве мреже, чија је угаона удаљеност од полазне тачке једнака θ. Тада Кобајашијев став гласи:

Једноструко повезана Риманова површ са самим изолованим завојним тачкама (алгебарским или трансцендентним) је параболног типа ако дивергује интеграл

$$\int \frac{d\rho}{\int_0^\rho n(\theta)\,d\theta}.$$

15. *Још један критеријум за Риманове површи с бескрајно много трансцендентних завојних тачака.* — До засебне врсте критеријума за тип једноструко повезаних Римановых површи долазимо кад претпоставимо да ја Риманова површ подељена на листове. Под листовима подразумевамо при томе области површи, које покривају бројну раван свугде само једанпут (једнолисне области) тако да не преостане ниједна област равни непокривена. Из начина како су листови узајамно повезани може се под извесним условима закључити коме типу припада површ. Да бисмо избегли непотребне заплете претпостављамо да је руб сваког листа континуиран и да околина сваке тачке на површи припада само коначном броју листова. За врло општу врсту *„неограничених“* Риманових површи може се *доказати могућност поделе на такве листове и описати општи начин њихове конструкције.* [*М. Радојчић*, **1**, 1929; **3**, 1931; **2**, 1930 и *T. Shimizu*, **1**, 1931].

Посматрајући Риманову површ на којој је аналитичка функција $z(w)$ мероморфног карактера, уочимо какав било прост лук $(a\,b)$ који полази из тачке $w = a$, где је извесна грана функције $z(w)$ регуларна, а завршава у $w = b$. Нека је Q_ε област која се састоји из свих тачака равни чија је удаљеност од тачака лука $(a\,b)$ мања од произољно малог броја ε. Ако у Q_ε постоји *прост* лук $(a\,b')$ који спаја тачку a с тачком b', удаљеном од b за мање од ε, а дуж кога се функција $z(w)$ може аналитички продужити, кажемо да је та Риманова површ *неограничена.** По Гросову ставу (бр. 7) *Риманове површи свих функција инверсних мероморфним функцијама су неограничене* [*Shimizu*, **1**, 1931; *Радојчић*, **2**, 1930].

Према томе критеријум за тип о коме је сада реч односи се на неограничене једноструко повезане Риманове површи. Постоји тада овај општи став:

Ако у z-равни листовима одговарају области с непрекидним рубовима, ако затим на рубу сваког листа, сем можда коначно много листова, има трансцендентних завојних тачака и ако је мноштво тих завојних тачака коначно, или ако је бесконачно али у цикличном распореду редуктибилно, тада је Риманова површ параболног типа. [*Радојчић*, **5**, 1938].

Циклични распоред трансцендентних завојних тачака може се пак једноставно дефинисати овако: Нека је A која била унутарња тачка дате Риманове површи. Опишимо на површи континуирану просту линију l_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ од A до сваке трансцендентне завојне тачке W_ν тако да сем A те линије немају заједничких тачака. Тада, очигледно, можемо на површи описати око тачке A у њеној једнолисној околини, затворену континуирану линију c, која сваку линију l_ν пресеца у само једној тачки L_ν. Под *цикличним распоредом завојних тачака* W_ν подразумевамо циклични распоред тачака L_ν на линији c [*Радојчић*, **5**, 1938; онда се даје еквивалентна дефиниција цикличног распореда одговарајућих „трансцендентних праменова“ у z-равни].

* *Радојчић*, **1**, 1929; **3**, 1931. У тим чланцима дефиниција је дата мање прецизно. У вези с тим, доказ да је површ функције инверсне мероморфној неограничена је недовољно прецизан. Онде сам се служио Иверсеновим ставом, но само применом Гросова става може се доћи до циља, као што је показао *Шимизу* [**1**, 1931]. У том смислу треба исправити и моју напомену у чланку **6**, стр. 12.

Кад је множтво трансцендентних завојних тачака коначно, претходни став је садржан у Неванлинину ставу поменутом на почетку бр. 12.

НАВОДИ

L. Ahlfors: **1.** Comment. Math. Helv. 3, 1931. — **2.** Bull. Soc. Math. France, 60, 1932. — **3.** Soc. Sc. Fenn., Comm. Phys.-Math. 6, 1936.

C. Carathéodory: **1.** Math. Ann. 72, 1912, p. 107. — **2.** Schwarz — Festschrift, Berlin 1914, p. 19.

R. Courant: **1.** Gött. Nachr., 1910, p. 154. — **2.** Math. Ann. 71, 1912, p. 145. — **3.** Math. Ann. 72, 1912, p. 517. — **4.** J. f. Math. 144, 1914, p. 190.

W. Gross: **1.** Mh. Math. u. Phys. 29, 1918.

D. Hilbert: **1.** Math.-Ver. 8, 1900, p. 184. — **2.** Math. Ann. 59, 1904, p. 161. — **3.** Gött. Nachr., 1909, p. 314

F. Iversen: **1.** Recherches sur les Fonctions Inverses des Fonctions Méromorphes (теза), Helsingsfors, 1914.

F Klein: **1.** Math. Ann. 14, 1878. — **2.** Math. Ann. 21, 1882. — **3.** Vorlesungen über die elliptischen Modulfunktionen I, II, Leipzig, 1890—92

Z. Kobayashi: **1.** Sc. Reports, Tokyo Bunr. Daig. 1935.

P. Koebe: **1.** Gött. Nachr., 1912, p. 844. — **2.** J. f. Math. 145, 1915, p. 177. — **3.** Atti del IV congr. math., Roma 1908, Vol. 2, 1909, p. 25. — **4.** Gött. Nachr., 1908, p. 337; 1909, p. 324.

R. Nevanlinna: **1.** Acta Math. 58, 1932. — **2.** Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1936.

E. Picard: **1.** C. R. Acad. Sc., Paris, 88, 1879, p. 1024. — **2.** C. R. Acad. Sc., Paris, 89, 1879, p. 745.

H. Poincaré: **1.** Acta Math. 1, 1882.

M. Radojčić: **1.** Глас Срп. Кр. Ак. 134, 1929. — **2.** C. R. Acad. Sc., Paris, 190, 1930. — **3.** Глас Срп. Кр. Ак. 146, 1931. — **4.** Publ. Math. de l'Univ. Belgrade, 6, 1937. — **5.** Глас Срп. Кр. Ак. 175, 1937. — **6.** Publ. Inst. Math., Belgrade, 2, 1948. — **7.** Publ. Inst. Math., Belgrade, 3, 1950.

B. Riemann: **1.** Dissertation, 1851, Werke, 2. Aufl., p. 3.

T. Shimizu: **1.** Jap. Jorn. Math. 8, 1931.

A. Speiser: **1.** Comm. Math. Helv. 2, 1930

SUR LE PROBLÈME DES TYPES DES SURFACES DER RIEMANN

par

M. Radojčić

L'auteur donne un aperçu élémentaire des critères concernant les types des surfaces de Riemann, sans prétendre à une liste complète.

Sous-titres: Surface de Riemann et domaine de Riemann. — Théorème fondamental sur la représentation conforme. — Représentation conforme des domaines simplement connexes des surfaces de Riemann. — Le problème des types. — Le théorème de Picard sur les valeurs exceptionnelles, comme critère des types. — Deux théorèmes d'Iversen. — Un théorème de Gross. — Quelques propositions de la théorie des fonctions linéairement automorphes. — Le critère de R. Nevanlinna pour les surfaces complètement ramifiées au-dessus d'un nombre fini de points. — La généralisation d'Ahlfors du théorème de Nevanlinna. — Quelques critères pour le type parabolique. Certains critères pour le type parabolique, en forme de somme. — Le critère de Kobayashi pour le type parabolique. — Encore un critère pour les surfaces ayant une infinité de points de ramification transcendants.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

РАДИВОЈЕ КАШАНИН

ИНТЕГРАЛИ ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНИХ ФУНКЦИЈА

1. Диференцијабилне функције

1.1. Као што је познато*, каже се да је функција $f(x, y)$ диференцијабилна у тачки (x, y) ако постоје $A(x, y)$ и $B(x, y)$ независно од h и k, тако да је

$$(1)\qquad \begin{gathered} f(x+h, y+k) - f(x, y) = h\,A(x, y) + k\,B(x, y) + \sigma\varepsilon, \\ \sigma = \sqrt{h^2+k^2}, \qquad \lim_{\sigma\to 0} \varepsilon = 0. \end{gathered}$$

Одатле непосредно излази да је функција $f(x, y)$ у истој тачки непрекидна и да има у овој делимичне изводе првог реда:

$$f_x'(x, y) = A(x, y), \quad f_y'(x, y) = B(x, y).$$

Ако је функција диференцијабилна у свакој тачки неког подручја, каже се једноставно да је диференцијабилна у том подручју.

Из саме егзистенције делимичних извода не може се закључити диференцијабилност. Може се закључити ако су делимични изводи непрекидни. Но, тај услов је и сувише строг. Диференцијабилност је осигурана и онда кад је само један од њих непрекидан, а други постоји. Ако функција $f(x, y)$ има у тачки (x, y) изводе $f_x'(x, y)$ и $f_y'(x, y)$, да би она у истој тачки била диференцијабилна, потребно је и довољно да буде

$$(2)\qquad \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sigma}\,[f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)] = 0.$$

Извесне теореме изведне под претпоставком да функција има непрекидне делимичне изводе $f_x'(x, y)$ и $f_y'(x, y)$ важе и под широм претпоставком да је она диференцијабилна; на пример, правило о диференцирању сложених функција. Циљ овога рада је да извесне интегралне теореме прошири на диференцијабилне функције, и то служећи се што елементарнијим средствима анализе. *Изричито претпостављамо да се ради о једнозначним функцијама.*

---

* *Р. Кашанин:* Виша математика I (3-ће изд. 1949), № 172.

1.2. На диференцијабилне функције наилази се и при разматрању функција једне комплексне променљиве. Доказаћемо, наиме, ово:

Да би функција

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$$

комплексне променљиве $z=x+iy$, *дефинисана у отвореном подручју* D, *имала у тачки* z *тог подручја извод, потребно је и довољно да функције* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *буду у тачки* (x,y) *диференцијабилне и и да за њих у тој тачки важе Коши-Риманове једначине*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Из дефиниције првог извода

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

излази, наиме,

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\cdot\Delta z+\gamma\cdot\Delta z, \qquad \lim_{\Delta z\to 0}\gamma=0. \tag{4}$$

Обрнуто, ако постоји $C(z)$, независно од Δz, тако да је

$$f(z+\Delta z)-f(z)=C(z)\cdot\Delta z+\gamma\cdot\Delta z, \qquad \lim_{\Delta z\to 0}\gamma=0,$$

онда функција $f(z)$ има извод $f'(z)=C(z)$. Ствар стоји, дакле, као и код функција једне реалне променљиве.

Раставићемо комплексне променљиве и функције у реалне и имагинарне делове:

$$z=x+iy, \quad \Delta z=h+ik, \quad \gamma=\varepsilon+i\eta,$$

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y), \quad f'(z)=A(x,y)+i\,B(x,y).$$

Тада (4) даје у подручју D две једначине:

$$u(x+h,y+k)-u(x,y)=h\,A(x,y)-k\,B(x,y)+h\varepsilon-k\eta,$$

$$v(x+h,y+k)-v(x,y)=h\,B(x,y)+k\,A(x,y)+h\eta+k\varepsilon.$$

Ставимо ли $\sigma=+\sqrt{h^2+k^2}$, можемо писати

$$h\varepsilon-k\eta=\sigma\left(\frac{h}{\sigma}\varepsilon-\frac{k}{\sigma}\eta\right)=\sigma\varepsilon_1,$$

$$h\eta+k\varepsilon=\sigma\left(\frac{h}{\sigma}\eta+\frac{k}{\sigma}\varepsilon\right)=\sigma\varepsilon_2.$$

Како $\gamma=\varepsilon+i\eta\to 0$ кад $\sigma=|\Delta z|\to 0$, и како је $|h/\sigma|\leqslant 1$ и $|k/\sigma|\leqslant 1$, то $\varepsilon_1\to 0$ и $\varepsilon_2\to 0$ кад $\sigma\to 0$. Према томе, ако постоји $f'(z)$, биће

$$u(x+h, y+k)-u(x,y)=hA(x,y)-kB(x,y)+\sigma\varepsilon_1,$$
$$v(x+h, y+k)-v(x,y)=hB(x,y)+kA(x,y)+\sigma\varepsilon_2,$$
$$\lim_{\sigma\to 0}\varepsilon_1=0,\quad \lim_{\sigma\to 0}\varepsilon_2=0.$$

Одавде закључујемо, прво, да су $u(x,y)$ и $v(x,y)$ диференцијабилне функције, и друго да је

$$\frac{\partial u}{\partial x}=A(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-B(x,y),$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=B(x,y),\quad \frac{\partial v}{\partial y}=A(x,y).$$

Имамо, дакле, (3).

Узмимо обрнуто: функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ су у тачки (x,y) диференцијабилне и важе за њих једначине (3). Тада је

$$u(x+h, y+k)-u(x,y)=h\,u'_x(x,y)+k\,u'_y(x,y)+\sigma\varepsilon_1,\quad \lim_{\sigma\to 0}\varepsilon_1=0,$$
$$v(x+h, y+k)-v(x,y)=-h\,u'_y(x,y)+k\,u'_x(x,y)+\sigma\varepsilon_2,\quad \lim_{\sigma\to 0}\varepsilon_2=0.$$

На основи тога,

$$f(z+\Delta z)-f(z)=[u(x+h,y+k)-u(x,y)]+i[v(x+h,y+k)-v(x,y)]=$$
$$=u'_x(x,y)\,\Delta z-i\,u'_y(x,y)\,\Delta z+\sigma(\varepsilon_1+i\varepsilon_2),$$
$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=u'_x(x,y)-i\,u'_y(x,y)+\frac{\sigma}{\Delta z}(\varepsilon_1+i\varepsilon_2).$$

како је $|\sigma/(\Delta z)|=1$, то се одмах види да постоји $f'(z)$ и да је

$$f'(z)=u'_x(x,y)-i\,u'_y(x,y). \tag{5}$$

Тиме је наведено тврђење доказано.

1.3. Извешћемо једну општу особину диференцијабилних функција:

Ако су функције $f(x,y)$ и $g(x,y)$ диференцијабилне у затвореном подручју S, онда за сваки дати позитиван број ε постоји подела подручја S у под-подручја $S_1, S_2,\ldots, S_n$ ове особине: у сваком од ових под-подручја S_k или на његовој контури постоји тачка (x_k, y_k) тако да је за свако x, y из S_k

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} |[f(x,y)-f(x_k,y_k)]-[(x-x_k)f'_x(x_k,y_k)+(y-y_k)f'_y(x_k,y_k)]|<\varepsilon\sigma_k,\\ |[g(x,y)-g(x_k,y_k)]-[(x-x_k)g'_x(x_k,y_k)+(y-y_k)g'_y(x_k,y_k)]|<\varepsilon\sigma_k,\\ \qquad (\sigma_k=+\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}). \end{array}\right.$$

Доказ је ово. Поделимо подручје S еквидистантним правима паралелним x – и y – осовини у делове. Ако том поделом постигнемо да релације (6) буду испуњене, ствар је у реду. Ако у неком од ових делова бар једна од тих релација није испуњена, поделићемо га на исти начин у делове. Итд.

Доћи ћемо тако до низа подручја S'_1, S'_2, S'_3,...., који тежи ка некој граничној тачки (x_o, y_o) у подручју S, а у којима наше тврђење не важи. Према дефиницији диференцијабилности, постоји око те тачке подручје S' тако да је за сваку тачку (x, y) из S'

$$|[f(x,y)-f(x_o,y_o)]-[(x-x_o)f'_x(x_o,y_o)+(y-y_o)f'_y(x_o,y_o)]|<\varepsilon\sigma_o,$$

$$|[g(x,y)-g(x_o,y_o)]-[(x-x_o)g'_x(x_o,y_o)+(y-y_o)g'_y(x_o,y_o)]|<\varepsilon\sigma_o.$$

Међутим, ако узмемо m_o довољно велико, сва подручја S'_m код којих је $m>m_o$ лежаће у S' те ће ове две неједначине важити и за те S'_m, што је у противречности с претпоставком да у њима наше тврђење не важи.

Јасно је да се ова особина може пренети и на три, четири,.... функције (коначан скуп њих). Наравно да важи и за једну функцију.

2. Криволиниски интеграл

2.1. Доказаћемо овај став:

Претпоставке: 1^0 *Функције* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *диференцијабилне су у отвореном подручју* D;

2^0 *У* D *је* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$;

3^0 *Затворена Жорданова крива линија* K *лежи у* D *и може се ректифицирати;*

4^0 *Затворено подручје* (K), *чија је контура* K, *део је подручја* D *и може се разложити у коначно много подручја нормалних и с обзиром на* x – *и с обзиром на* y – *осовину.* *

Тврђење:

$$\int_K P\,dx+Q\,dy=0. \tag{7}$$

Доказ је сличан класичном доказу који је дао Гурса за Кошијеву теорему.

Узмимо произвољно $\varepsilon>0$. Према **1.3** поделићемо (K) у n под-подручја у којима важи (6); означићемо њихове контуре са C_k. Растојање између правих којима је подела извршена нека буде δ. Узећемо поделу тако фином да при том буде изведено и разлагање предвиђено у претпоставци 4^0. На основи претпоставке 1^0, можемо на $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ применити (6):

---

* Подручје је нормално с обзиром на x-осовину ако му контуру чине праве $x=a$ и $x=b$ и криве $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, где су функције $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрекидне за $a<x<b$ и $f_1(x)<f_2(x)$. Аналогно за y-осовину.

$$P(x,y)=P(x_k,y_k)+(x-x_k)P'_x(x_k,y_k)+$$
$$+(y-y_k)P'_y(x_k,y_k)+\varepsilon_k\sigma_k,\quad |\varepsilon_k|<\varepsilon;$$
$$Q(x,y)=Q(x_k,y_k)+(x-x_k)Q'_x(x_k,y_k)+$$
$$+(y-y_k)Q'_y(x_k,y_k)+\eta_k\sigma_k,\quad |\eta_k|<\varepsilon.$$

Како су, на основи претпоставке 1^0, функције $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ на C_k непрекидне, то, на основи претпоставке 3^0, постоје криволиниски интеграли

$$\int_{C_k} P(x,y)\,dx=P(x_k,y_k)\int_{C_k} dx+P'_x(x_k,y_k)\int_{C_k}(x-x_k)\,dx+$$
$$+P'_y(x_k,y_k)\int_{C_k}(y-y_k)\,dx+\int_{C_k}\varepsilon_k\sigma_k\,dx,$$
$$\int_{C_k} Q(x,y)\,dy=Q(x_k,y_k)\int_{C_k} dy+Q'_x(x_k,y_k)\int_{C_k}(x-x_k)\,dy+$$
$$+Q'_y(x_k,y_k)\int_{C_k}(y-y_k)\,dy+\int_{C_k}\eta_k\sigma_k\,dy.$$

Међутим је

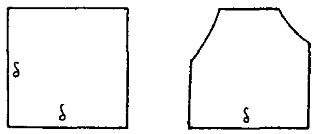
$$\int_{C_k} dx=0,\quad \int_{C_k} dy=0;$$
$$\int_{C_k}(x-x_k)\,dx=\int_{C_k} d\,1/2\,(x-x_k)^2=0,$$
$$\int_{C_k}(y-y_k)\,dy=\int_{C_k} d\,1/2\,(y-y_k)^2=0.$$

Затим је, на основи претпоставке 3^0,

$$\Big|\int_{C_k}\varepsilon_k\sigma_k\,dx\Big|<\varepsilon\,\delta\sqrt{2}\,l_k,\qquad \Big|\int_{C_k}\eta_k\sigma_k\,dy\Big|<\varepsilon\,\delta\sqrt{2}\,l_k,$$

где је l_k дужина контуре C_k (сл. 1). Напослетку, на основи претпоставке 4^0, над подручјима (K) и (C_k) може се извршити квадратура, а површина последњег је

$$p_k=\int_{C_k} x\,dy=-\int_{C_k} y\,dx.$$



Сл. 1

Према томе је

$$\int_{C_k} P(x,y)\,dx=-p_k P'_y(x_k,y_k)+\bar{\varepsilon}_k\,\delta\sqrt{2}\,l_k,\quad |\bar{\varepsilon}_k|<\varepsilon;$$
$$\int_{C_k} Q(x,y)\,dy=\quad p_k Q'_x(x_k,y_k)+\bar{\eta}_k\,\delta\sqrt{2}\,l_k,\quad |\bar{\eta}_k|<\varepsilon.$$

Сабирањем добивамо

$$(8)\qquad \begin{cases} \int\limits_{C_k} P\,dx+Q\,dy=p_k\,[Q'_x(x_k,y_k)-P'_y(x_k,y_k)]+2\,\alpha_k\,\delta\,\sqrt{2}\,l_k, \\ \qquad\qquad |\alpha_k|<\varepsilon. \end{cases}$$

Ако је испуњена и претпоставка 2°, биће

$$\int\limits_{C_k} P\,dx+Q\,dy=2\sqrt{2}\,\delta\,l_k\alpha_k.$$

Но свакако је

$$l_k\leqslant 4\,\delta+s_k,$$

где је s_k дужина оног дела криве K који учествује у контури C_k. Према томе је

$$\int\limits_{C_k} P\,dx+Q\,dy=2\sqrt{2}\,(4\,\delta^2+\delta\,s_k)\,\bar{\alpha}_k,\qquad |\bar{\alpha}_k|<\varepsilon.$$

Саберемо ли ове једначине од $k=1$ до $k=n$, поништиће се на левој страни интеграли по трансверзалама и добићемо

$$\int\limits_{C_K} P\,dx+Q\,dy=2\sqrt{2}\,(4\,n\,\delta^2+\delta s)\,\alpha,\qquad |\alpha|<\varepsilon,$$

где је s дужина контуре K. Број $n\,\delta^2$ је збир површина квадрата који леже у (K) и на контури K. Он је сигурно мањи од површине c^2 једног довољно великог квадрата у ком се налази (K); онда је и $\delta<c$. Према томе је

$$\Big|\int\limits_{K} P\,dx+Q\,dy\Big|<2\,\sqrt{2}\,(4c^2+cs)\,\varepsilon,$$

где су c и s одређени бројеви. И тако, посматрани криволиниски интеграл је, по апсолутној вредности, мањи од сваког унапред датог позитивног броја. Он је, дакле, нула.

Тиме је тврђење (7) доказано.*

Уобичајеним поступком може се изведени став пренети и на вишеструко повезана подручја.

2.2. Из става **2.1** лако је извести ово:

Претпоставке: 1° *Функције $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ диференцијабилне су у отвореном једноструко повезаном подручју D;*

2° *У D је* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,

3° Γ *и* Γ' *су једноставне Жорданове криве*

* Претпоставка 2° тврђења интервенише у поништавања збира првих чланова десне стране једначина (8). Стога је довољно претпоставити: *у D је* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, *осим евентуално у једном скупу тачака чија је мера нула.*

линије које спајају тачке M и N, леже у D и могу се ректифицирати;

4⁰ *Затворено подручје (K), чија је контура $K=\Gamma+\Gamma'$, део је подручја D и може се разложити у коначно много подручја нормалних и с обзиром на x – и с обзиром на y – осовину.*

Тврђење:

$$\int_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy=\int_{\Gamma'} P\,dx+Q\,dy\,.$$

То значи да тада интеграл зависи само од почетне и завршне тачке.

2.3. Став **2.1** допушта овакву инверзију:

Претпоставке: 1⁰ *Функције $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ диференцијабилне су у отвореном подручју D;*

2⁰ *Затворена Жорданова крива линија K лежи у D и може се ректифицирати;*

3⁰ *Затворено подручје (K), чија је контура K, може се разложити у коначно много подручја нормалних и с обзиром на x – и с обзиром на y – осовину;*

4⁰ *Ма како изабрали K (уз услове 2⁰ и 3⁰), увек је*

$$\int_{K} P\,dx+Q\,dx=0\,.$$

Тврђење: *Ако је дато $\eta>0$, у сваком под-подручју D' подручја D има бар једна тачка (x',y') у којој је*

$$|\,Q'_x(x',y')-P'_y(x',y')\,|<\eta\,. \tag{9}$$

Наиме, доказујући **2.1**, дошли смо, под садашњим претпоставкама 1⁰, 2⁰ и 3⁰, до једначине (8). Поделу ћемо извршити тако фином да се у изабраном под-подручју D' налази један квадрат C_k. У њему, према (8), постоји тачка (x_k,y_k) тако да је

$$\int_{C_k} P\,dx+Q\,dy=\delta^2\,[Q'_x(x_k,y_k)-P'_y(x_k,y_k)]+8\sqrt{2}\,\delta^2\alpha_k\,,\qquad |\alpha_k|<\varepsilon\,,$$

јер је сад $p_k=\delta^2$, $l_k=4\,\delta$. Међутим, према садашњој претпоставци 4⁰, криволиниски интеграл на левој страни је нула. Дакле,

$$Q'_x(x_k,y_k)-P'_y(x_k,y_k)=-8\sqrt{2}\,\alpha_k,\qquad |\alpha_k|<\varepsilon\,.$$

Узмемо ли $\varepsilon<\eta/8\sqrt{2}$, тврђење је доказано.

Из (8) не излази да је $Q'_x(x_k,y_k)=P'_y(x_k,y_k)$. Још мање се сме тврдити да је у свакој тачки подручја D, под наведеним претпоставкама, $Q'_x=P'_y$.

2.4. H. Loomann у својој расправи „Über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen“ (*Gött. Nachr.* 1923, p. 97-108) доказао је ово:

„Нека буду $p(x,y)$ и $q(x,y)$ две једнозначне у G дефинисане функције од x и y које задовољавају ове услове a) $p(x,y)$ и

$q(x,y)$ су непрекидне у (x,y); б) у свакој тачки постоје $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial q}{\partial x}$; в) изузевши једног скупа мере нула важи $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$. Тада је

$$\int p\,dx+q\,dy=0$$

дуж сваког оног правоугаоника са странама паралелним осовинама чија унутрашњост и контуре падају у G".

Претпоставке су овде шире него у **2.1**: не тражи се диференцијабилност функција p и q, већ само егзистенција извода $\partial p/\partial y$ и $\partial q/\partial x$ и непрекидност функција p и q. Но, резултат је ужи него онај у **2.1**: код Ломана је K специјална крива линија, наиме правоугаоник чије су стране паралелне координатним осовинама.

3. Коши-Риманове једначине

3.1. У отвореном подручју D функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ нека буду диференцијабилне и нека у свакој тачки тог подручја задовољавају Коши-Риманове једначине

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{10}$$

Ако у диференцијабилним функцијама $u(x,y)$ и $v(x,y)$ пређемо са правоуглих координата x и y на поларне ρ и φ, можемо због диференцијабилности применити правило о диференцирању сложених функција:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\rho\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi+\rho\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi, \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi}=-\rho\frac{\partial v}{\partial x}\sin\varphi+\rho\frac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi.$$

Одавде се види да u и v имају изводе по ρ и φ.

Променимо ли ρ и φ за $\Delta\rho$ и $\Delta\varphi$, промениће се x и y за h и k, а ако $\Delta\rho$ и $\Delta\varphi$ теже ка нули, тежиће и h и k ка нули и обрнуто. Према томе, ако су u и v диференцијабилне функције од x и y, биће то и с обзиром на ρ и φ.

Даље је

$$\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}-\frac{\partial v}{\partial \varphi}=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\varphi+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\sin\varphi,$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\varphi-\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin\varphi.$$

Према томе, услов (10) повлачи за собом

$$(10^{\text{bis}}) \qquad \rho\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\rho\frac{\partial v}{\partial \rho},$$

и обрнуто.

На тај начин, еквиваленција једначина (10) и (10^{bis}) изведена је под претпоставком о диференцијабилности функција $u(x,y)$ и $v(x,y)$, а не о непрекидности њихових извода првог реда.

Лако се директним рачуном уверити о овом: ако функција $g(x,y)$ има у подручју D непрекидне делимичне изводе првог и другог реда и при том је

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0,$$

а функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ су у истом подручју диференцијабилне функције и задовољавају Коши-Риманове једначине (10), онда су и функције

$$(11) \qquad \begin{cases} P(x,y)=u\dfrac{\partial g}{\partial y}-v\dfrac{\partial g}{\partial x}, \\ Q(x,y)=u\dfrac{\partial g}{\partial x}+v\dfrac{\partial g}{\partial y} \end{cases}$$

у D диференцијабилне и задовољавају Коши-Риманове једначине

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x},$$

3.2. На основи **2.1** излази одмах ово:

Претпоставке: 1° *Функције* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *диференцијабилне су у отвореном подручју* D *и задовољавају у њему Коши-Риманове једначине* (10);

2° *Затворена Жорданова крива линија* K *лежи у* D *и може се ректифицирати;*

3° *Затворено подручје* (K), *чија је контура* K, *део је подручја* D *и може се разложити у коначно много под-подручја нормалних и с обзиром на* $x-$ *и с обзиром на* $y-$*осовину.*

Тврђење:

$$(12) \qquad \int_K u\,dx-v\,dy=0, \quad \int_K v\,dx+u\,dy=0.$$

Тако је (12) изведено претпостављајући диференцијабилност функција $u(x,y)$ и $v(x,y)$, а не непрекидност њихових извода првог реда.

Уопштавање на вишеструко повезана подручја евидентно је.

3.3. Пошавши од оног што смо рекли у **2.1** за (11), извешћемо ово:

Претпоставке: 1^0 *Функције* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *диференцијабилне су у о̄твореном ӣодручју* D *и задовољавају у њему Коши-Риманове једначине* (10);

2^0 *За̄творена Жорданова крива линија* K *лежи у* D *и може се рек̄ифицира̄ти*;

3^0 *За̄творено ӣодручје* (K), *чија је кон̄тура* K, *део је ӣодручја* D *и може се разложӣти у коначно много ӣодручја нормалних и с обзиром на* $x-$ *и с обзиром на* $y-$*осовину.*

Тврђење: *У свакој та̄чки* (ξ,η) *из* (K) *која не лежи на* K *је*

$$(13)\begin{cases} 2\pi\, u(\xi,\eta) = \\ = \oint\limits_K \dfrac{[(x-\xi)\,v(x,y)-(y-\eta)\,u(x,y)]\,dx+[(y-\eta)\,v(x,y)+(x-\xi)\,u(x,y)]\,dy}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \\ 2\pi\, v(\xi,\eta) = \\ = \oint\limits_K \dfrac{[(x-\xi)\,v(x,y)-(y-\eta)\,u(x,y)]\,dy-[(y-\eta)\,v(x,y)+(x-\xi)\,u(x,y)]\,dx}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}. \end{cases}$$

Узећемо, наиме у (11)

$$g(x,y) = -\log r, \quad r = +\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

јер ова функција задовољава услове у D осим у тачки (ξ,η). Опишемо ли око те тачке круг γ тако да он лежи у (K), моћи ћемо на функције P и Q из (11) применити (12):

$$\oint\limits_K P\,dx - Q\,dy = \oint\limits_\gamma P\,dx - Q\,dy,$$

$$\oint\limits_K Q\,dx + P\,dy = \oint\limits_\gamma Q\,dx + P\,dy.$$

Међутим је

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x-\xi}{r^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{y-\eta}{r^2},$$

па је, према (11), лако видети да су

$$P\,dx - Q\,dy \quad \text{и} \quad Q\,dx + P\,dy$$

баш изрази који стоје под интегралом у (13).

На кругу γ они ће се упростити, јер је ту

$$x-\xi = R_0\cos\psi, \quad y-\eta = R_0\sin\psi, \quad r = R_0;$$

$$dx = -R_0\sin\psi\,d\psi, \quad dy = R_0\cos\psi\,d\psi.$$

Према томе, на контури γ имамо

$$P\,dx - Q\,dy = u(x, y)\,d\psi, \quad Q\,dx + P\,dy = v(x, y)\,d\psi.$$

Дакле,

$$\int_\gamma P\,dx - Q\,dy = \int_0^{2\pi} u(\xi + R_0 \cos\psi,\ \eta + R_0 \sin\psi)\,d\psi,$$

$$\int_\gamma Q\,dx + P\,dy = \int_0^{2\pi} v(\xi + R_0 \cos\psi,\ \eta + R_0 \sin\psi)\,d\psi.$$

Но, како су, због диференцијабилности, $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрекидне функције у D, можемо R_0 узети тако мало да буде

$$|u(\xi + R_0 \cos\psi,\ \eta + R_0 \sin\psi) - u(\xi, \eta)| < \varepsilon,$$

$$|v(\xi + R_0 \cos\psi,\ \eta + R_0 \sin\psi) - v(\xi, \eta)| < \varepsilon,$$

ма како изабрали $\xi > 0$. На основи тога је

$$\left|2\pi u(\xi, \eta) - \oint_K P\,dx - Q\,dy\right| < 2\pi\varepsilon,$$

$$\left|2\pi v(\xi, \eta) - \oint_K Q\,dx + P\,dy\right| < 2\pi\varepsilon.$$

Како ε може бити произвољно мален позитиван број, то је тиме (13) доказано.

3.4. *Ако у отвореном подручју D диференцијабилне функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ задовољавају Коши-Римановe једначине, оне у свакој тачки тог подручја имају непрекидне изводе по x и y свих редова.*

Наиме, око ма које тачке (ξ, η) отвореног подручја D можемо повући криву која ће задовољавати услове из **3.3**, па написати формуле (13). У интегралима на десној страни сматраћемо ξ и η као параметре. Одмах се види да функције под интегралима имају непрекидне изводе по ξ и η свих редова и да се може применити правило о диференцирању под знаком интеграла. Тиме је тврђење доказано.

3.5. Став **3.2** допушта овакву инверзију:

Претпоставке: 1^0 *Функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ су непрекидне у отвореном подручју D;*

2^0 *Затворена Жорданова крива линија K лежи у D и може се ректифицирати;*

3^0 *Затворено подручје (K), чија је контура K, може се разложити у коначно много подручја нормалних и с обзиром на x — и с обзиром на y — осовину;*

4^0 *Ма како изабрали K (уз услове 2^0 и 3^0), увек је*

$$\int_K u\,dx - v\,dy = 0, \quad \int_K v\,dx + u\,dy = 0.$$

Тврђење: *Функције* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *су у* D *диференцијабилне и задовољавају Коши-Риманове једначине* (10).

Јер на основи претпоставке 4^0, интегралима

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u\,dx - v\,dy, \quad G(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v\,dx + u\,dy$$

једнозначно су дефинисане у D функције $F(x, y)$ и $G(x, y)$, за које, према претпоставци 1^0, имамо

$$\frac{\partial F}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -v; \quad \frac{\partial G}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = u.$$

Одмах се види да је

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial x},$$

тј. да функције F и G задовољавају Коши-Риманове једначине. Осим тога, како су u и v, према претпоставци 1^0, непрекидне функције, сигурни смо да су F и G диференцијабилне функције. На основи **2.4** постоје, дакле, непрекидни изводи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}.$$

Одавде излази да су функције u и v диференцијабилне и да је

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

што смо и тврдили.

Кад су, дакле, испуњени услови $1^0 - 4^0$, можемо на функције u и v применити став **2.4**.

3.6. Узевши у (13) за K круг са средиштем у тачки $M_o(x_o, y_o)$ који лежи у подручју D, добиће се за сваку тачку $M(\xi, \eta)$ из унутрашњости тог круга познати развоји у конвергентне бесконачне редове

$$(14) \quad \begin{cases} u(\xi, \eta) = a_o + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi)\,\rho^\nu, \\ v(\xi, \eta) = -b_o + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \sin \nu\varphi - b_\nu \cos \nu\varphi)\,\rho^\nu, \end{cases}$$

где је

$$\xi = x_o + \rho \cos \varphi, \quad \eta = y_o + \rho \sin \varphi.$$

Исто тако, за сваку тачку $M(\xi, \eta)$ из кружног прстена око тачке $M_0(x_0, y_0)$ који лежи у D добивају се развоји

$$(15)\qquad \begin{cases} u(\xi, \eta) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} (a_\nu \cos \nu \varphi + b_\nu \sin \nu \varphi)\, \rho^\nu . \\ v(\xi, \eta) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} (a_\nu \sin \nu \varphi - b_\nu \cos \nu \varphi)\, \rho^\nu . \end{cases}$$

Све то под претпоставком да су функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ у D диференцијабилне и да задовољавају Коши-Риманове једначине (10).

Под истим претпоставкама, на основи **3.4**, закључујемо да функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ задовољавају Лапласову једначину

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

3.7. Хармониска функција $U(x, y)$ дефинише се овако: постоје непрекидни делимични изводи првог и другог реда и при томе је

$$U''_{xx} + U''_{yy} = 0 .$$

На основи **3.4** види се да у овој дефиницији има више услова него што је потребно. Можемо, наиме, дефинисати овако: За функцију $U(x, y)$ рећи ћемо да је у отвореном подручју D хармониска ако задовољава ове услове: 1° она има у D диференцијабилне изводе првог реда U'_x и U'_y (према томе, постоје U''_{xx}, U''_{xy}; U''_{yx}, U''_{yy}); 2° у свакој тачки подручја D је

$$U''_{yx} = U'_{xy}\,, \qquad U''_{yy} = -\,U''_{xx}\,.$$

Јер, ако ставимо $u = U'_x$ и $v = -U'_y$, биће функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ у подручју D диференцијабилне и задовољаваће Коши-Риманове једначине, па можемо применити **3.4**: и изводи другог реда функције $U(x, y)$ су непрекидни.

4. Функције комплексне променљиве

4.1. На основи **1.2** и (14) одмах се може извести да се функција $f(z)$, ако има извод у свакој тачки неког отвореног подручја D, може у једном кругу око сваке тачке z_0 тог подручја развити у цео ред по $z - z_0$, тј. да је аналитичка. Одатле излази да у свакој тачки подручја D она има изводе свих редова ако има у њима извод првог реда; уосталом, ово излази и из (5), на основи **3.4**.

Применивши (15), добићемо за $f(z)$ Лоранов ред, па онда можемо увести и појам сингуларних тачака и њихово разврставање. Тако се може изградити цео диференцијални рачун комплексних функција и без појма интеграла тих функција.

Кад се уведе појам интеграла и код комплексних функција, (12) даје Кошијев став, (13) Кошијев интеграл, а **3.5** Морерин став.

Подлога за све то је став **2.1**.

4.2. Ломан, у напред цитираној расправи (в. **2.4**) доказао је ово: Ако су функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ у отвореном подручју D непрекидне и имају изводе

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

који у D (осим евентуално у једном скупу мере нула) задовољавају Коши-Риманове једначине (10), функција $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ је у D аналитичка. За извођење овог става Ломан, а после њега и остали*, претпостављају да је већ изграђен интегрални рачун комплексне промењиве (дефиниција интеграла, Коши-Гурсаов став, Морерин став) и служе се теоријом скупова и Лебеговим интегралом (осим К. Мајера**, који место Лебегова интеграла употребљава виша средства из теорије комплесних функција).

Према **1.2**, из Ломанова става излази сигурно ово:

Ако су функције $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *у отвореном подручју* D *непрекидне и имају изводе*

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

који у D *задовољавају Коши-Риманове једначине* (10), *функције* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *су у* D *диференцијабилне.*

Кад би се овај став могао непосредно и што елементарније извести, онда би Ломанов став био брза последица онога што смо рекли у **1.2**. У основи, требало би из претпоставки Ломанова става извести да важи (2) у **1.1**.

* В. и *D. Menchoff:* Les conditions de monogénéité (Paris, Hermann et Cie) 1936.

** *K. Meier:* Zum Satz von Loomann-Menchoff (*Comm. Math. Helvetici* **25** (1951), p. 181—195).

LES INTÉGRALES DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

par
R. KAŠANIN

On admet comme connu qu'une fonction $f(x, y)$ est dite différentiable au point (x, y) lorsqu'il existe des fonctions $A(x, y)$ et $B(x, y)$ telles qu'on ait, indépendamment de h et k,

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=h\,A(x, y)+k\,B(x, y)+\sigma\,\varepsilon,$$

$$\sigma=\sqrt{h^2+k^2}, \quad \lim_{\sigma\to} \varepsilon=0.$$

Il s'ensuit directement que la fonction $f(x, y)$ est continue au même point et possède en ce point les dérivées partielles du premier ordre

$$f'_x(x, y)=A(x, y), \quad f'_y(x, y)=B(x, y).$$

Le but de la présente note est d'étendre certains théorèmes intégraux aux fonctions différentiables en ne faisant intervenir que les théorèmes d'analyse les plus élémentaires. La condition essentielle est que les fonctions soient uniformes.

L'énoncé du théorème fondamental est donné dans **2.1**:

Hypothèses: 1° Les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont différentiables dans le domaine ouvert D;

2° Dans le domaine D on a $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$;

3° La courbe fermée K de Jordan est située dans D et est rectifiable;

4° Le domaine fermé (K), ayant pour contour K, est une partie du domaine D et est décomposable en un nombre fini de domaines normaux à la fois par rapport à x et par rapport à y*.

On affirme qu'on a alors

$$\int_K P\,dx+Q\,dy=0.$$

La démonstration de cette affirmation est semblable à la démonstration classique du théorème de Cauchy donnée par Goursat. On ne suppose pas la continuité des dérivées.

En admettant cela, si les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont différentiables dans le domaine ouvert D et y satisfont les équations de Cauchy-Riemann, on aura, avec les mêmes conditions sur la courbe K et le domaine (K),

$$\int_K u\,dx-v\,dy=0, \quad \int_K v\,dx+u\,dy=0,$$

sans supposer la continuité des dérivées.

* Le domaine est dit normal par rapport à l'axe des x si son contour est formé par les droites $x=a$ et $x=b$ et les courbes $y=f_1(x)$ et $y=f_2(x)$, les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant continues pour $a<x<b$ et $f_1(x)<f_2(x)$. De même pour l'axe des y.

Pour ces mêmes fonctions sont valables les formules (13), données dans **3.3**, à l'aide desquelles on parvient aux conclusions suivantes: si dans le domaine ouvert D les fonctions différentiables $u(x, y)$ et $v(x, y)$ satisfont les équations de Cauchy-Riemann, elles possèdent en chaque point de ce domaine des dérivées continues par rapport à x et y de tous les ordres.

En prenant dans (13) pour K un cercle ayant son centre au point $M_0(x_0, y_0)$, situé dans le domaine D, on aura pour chaque point $M(\xi, \eta)$ situé à l'intérieur de ce cercle, des développements en séries infinies convergentes connus (14), et pour l'anneau circulaire des développements (15), — tout ceci avec la supposition que les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont différentiables dans D et satisfont les équations de Cauchy-Riemann.

Ces considérations permettent de définir une fonction harmonique de la manière suivante: une fonction $U(x, y)$ sera dite harmonique dans le domaine ouvert D si elle satisfait les conditions suivantes:

1° elle possède dans D les dérivées différentiables du premier ordre, U'_x et U'_y (par conséquent existent les $U''_{xx}, U''_{xy}, U''_{yx}, U''_{yy}$);

2° en chaque point de D on a

$$U''_{yx} = U''_{xy}, \quad U''_{yy} = -U''_{xx}.$$

Les résultats précédents sont immédiatement applicables aux fonctions des variables complexes en vertu de la propriété (**1.2**) suivante:

Pour que la fonction d'une variable complexe $z = x + iy$,

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y),$$

définie dans le domaine ouvert D, ait au point z de ce domaine une dérivée, il faut et il suffit que les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ soient au point x, y différentiables et qu'en ce point les équations de Cauchy-Riemann soient valables pour ces dernières.

On peut de cette façon développer tout le calcul différentiel des fonctions complexes (existence des dérivées d'ordres supérieurs; séries de Taylor et de Laurent, notion de points singuliers) sans même la notion de l'intégrale de ces fonctions. En introduisant la notion de l'intégrale aussi pour les fonctions complexes, la formule (12) donne le théorème de Cauchy, la formule (13) l'intégrale de Cauchy, et **3.5** le théorème de Morera. Tout ceci repose sur le théorème **2.1**.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

ЈОВАН КАРАМАТА

О АСИМПТОТСКОМ ПОНАШАЊУ НИЗОВА ДЕФИНИСАНИХ РЕКУРЕНТНИМ РЕЛАЦИЈАМА

1. У саопштењу „О геометријској интерпретацији М. Миланковића конвергенције бесконачних редова" [2], показао сам да се поменута геометријска интерпретација конвергенције бесконачних редова своди на решавање једначине

$$x = f(x)$$

методом сукцесивне апроксимације, тј. низом узастопних приближних вредности x_n одређених рекурентном релацијом облика

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

као и да брзина конвергенције посматраних редова, тј. низа x_n, зависи од реда додира у тачки пресека криве

$$y = f(x)$$

са правом

$$y = x.$$

Том приликом, поред осталих примера, навео сам и општи став који даје брзину конвергенције низа приближних вредности (1) кад је поменути ред додира $k > 1$ и који гласи

Став I. *Нека је*

$$a > 0, \quad k > 1,$$

$$f(x) = x + a(w - x)^k + o\{(w - x)^k\}, \quad x \to w - 0,$$

и низ x_n *дефинисан са* (1); *ако је* $w - x_0 > 0$ *и довољно мало, тада је*

$$x_n = w - a^*/n^{k^*} + o(1/n^{k^*}), \quad n \to \infty,$$

са

$$k^* = 1/(k-1) \quad и \quad a = 1/(k-1)\, a^{k^*}.$$

У вези са овим ставом цитирао сам аналоган став који се налази код G. Pólya и G. Szegö [8, стр. 31, зад. 174 и 173], али је тај став нешто ужи, јер не само што претпоставља да је

$$f(x) = x + a(w - x)^k + b(w - x)^l + o\{(w - x)^l\}, \quad x \to w - 0, \quad са \quad l < k,$$

већ се и у доказу имплицитно претпоставља да је и функција $f(x)$ монотона у близини тачке $x=w$.[1])

Доказ става I у овом општем облику дао је А. Островски [7]. У истом раду он даје и преглед ставова ове врсте, упоређује их и проучава њихову ефикасност. Због доцније примене навешћу први од ових ставова који је основни став ове врсте, јер даје најопштије услове које треба да задовољава функција $f(x)$ да би низ (1) конвергирао. Без ограничења могу ставити да је $w=0$, а тада овај став у нешто измењеној транскрипцији гласи (види напр. [1] и [6]).

Став II. *Ако је*

$$f(x)\geqslant 0 \quad за \quad 0\leqslant x\leqslant c$$

и

$$\inf_{x\leqslant t\leqslant c}\{t-f(t)\}>0 \quad за\ свако \quad 0<x<c. \tag{2}$$

(*што је испуњено ако је* $f(x)$ *непрекидно и* $0\leqslant f(x)<x$ *за* $0\leqslant x\leqslant c$) *тада низ* x_n, *дефинисан рекурентном релацијом*

$$x_{n+1}=f(x_n), \quad n=0,1,2,\ldots, \quad са \quad 0<x_0\leqslant c,$$

монотоно опада и тежи нули кад $n\to\infty$.

Доказ овог става је непосредан, јер из (2) следи да је $x_n>x_{n+1}$, тако да x_n мора тежити неком $\xi\geqslant 0$, па

$$x_n-f(x_n)=x_n-x_{n+1}\to 0 \quad кад \quad x_n\to+0,$$

а ово се противи претпоставци (2) ако је $\xi>0$.

Што се тиче доказа става I, напоменуо бих само да се он може непосредно свести на специјалан случај где је

$$f(x)=x+a(w-x)^k, \quad a>0, \quad k>1, \tag{3}$$

ако се има у виду ова лема:

Нека су $\varphi(x)$ *и* $\Phi(x)$ *монотоне функције које не опадају за* $0\leqslant x\leqslant c$, *и нека је*

$$t_{n+1}=\varphi(t_n), \quad T_{n+1}=\Phi(T_n), \quad n=0,1,2,\ldots;$$

тада из

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\Phi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant c,$$

[1]) Наиме у скици доказа примера 174, на стр. 188, аутори се ослањају на поступак E. Jacobsthala наведен у примеру 173, који се односи на исти став, али са специјалном функцијом $f(x)=\sin x$. Том приликом на стр. 188, у другом и трећем реду одозго, аутори из $\sin_N x>c/\sqrt{N+\alpha}$ закључују да је $\sin(\sin_N x)>\sin(c/\sqrt{N+\alpha})$, чиме имплицитно уводе претпоставку да функција $f(x)=\sin x$ монотоно расте.

и

$$0 \leqslant t_0 \leqslant x_0 \leqslant T_0 \leqslant c,$$

следи

$$t_n \leqslant x_n \leqslant T_n, \quad \text{за} \quad n=0, 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Доказ ове леме добива се непосредно индукцијом, јер ако претпоставимо да је за неко n (4) испуњено, биће

$$t_{n+1} = \varphi(t_n) \leqslant \varphi(x_n) \leqslant f(x_n) = x_{n+1},$$

као и

$$x_{n+1} = f(x_n) \leqslant \Phi(x_n) \leqslant \Phi(T_n) = T_{n+1}.$$

Став I се, међутим, може проширити и на случај кад ред додира k није чист степен. Довољно је да се претпостави да се функција $f(x)-x$ у близини тачке додира „правилно понаша", тј. да буде

$$f(x) - x \backsim ax^k L(x), \quad x \to +0,$$

где се $L(x)$ „споро мења", што значи да је $L(x) > 0$ и да

$$L(ux)/L(x) \to 1 \quad \text{кад} \quad x \to +0,$$

и то за свако $u > 0$. Дефиницију и особине функција које се правилно понашају дао сам у радовима [3] и [4], а оне особине које ће нам у овом излагању бити потребне навешћу у тачки 2.

Прецизно формулисано ово уопштење става I дато је ставом III у тачки 3. У овом случају се, међутим, доказ не може више свести на наведену лему и специјални случај (3), али се може у главним цртама применити Островсков поступак.

Ако се у ставу III функција $f(x)$ замене функцијом $1/g(1/x)$, добива се непосредно у тачки 4 наведени став IV. Овај став даје тада асимптотско понашање низа y_n који тежи бесконачности са n и који је дефинисан рекурентном релацијом облика

$$y_{n+1} = g(y_n), \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

и казује како се ово асимптотско понашање може добити из асимптотског понашања функције $g(y)$ кад $y \to \infty$. Ставови ове врсте су од нарочитог интереса у многим проблемима анализе, а примера ради, навешћу у тачки 5 један случај где се такав став јавља.

Напомињем да је у ставовима III и IV изричито претпостављено да k буде веће од 1, односно $r < 1$, јер не само да наведени поступци у доказу не важе кад је $k=1$, односно $r=1$, већ би се и одговарајући став битно разликовао, а претпоставке о функцији $L(x)$ морале би бити много прецизније.

2. Пре него што пређем на поменуто проширење става I, навешћу овде оне од особина функција које се правилно понашају које ће ми у доказу става III бити потребне.

Претпоставка да се извесна функција $h(x)$ правилно понаша у близини тачке $x = +0$ своди се на чињеницу да она има облик

$$h(x) = x^r L(x),$$

где је r коначан реалан број, а $L(x)$ функција која се у близини тачке $x = +0$ споро мења и која се може написати у каноничном облику

$$L(x) = C(x) \exp\left\{\int_x^1 \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt\right\}, \quad x > 0,$$

при чему

$$C(x) \to C \neq 0 \quad \text{а} \quad \varepsilon(x) \to 0 \quad \text{кад} \quad x \to +0.$$

Према томе, ако се функција $h(x)$ правилно понаша у близини тачке $x = +0$, тада можемо увек ставити да је

$$h(x) \sim C\, x^r L(x), \quad \text{са} \quad C \neq 0, \quad x \to +0,$$

и, без ограничења, за компаративну функцију $L(x)$ можемо претпоставити да има облик

$$L(x) = \exp\left\{\int_x^1 \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt\right\},$$

односно да је

$$x\, L'(x) = o\{L(x)\} \quad \text{кад} \quad x \to +0.$$

У томе случају је функција

$$x^r L(x) \quad \text{за} \quad r > 0$$

монотона у близини тачке $x = +0$. Према томе, за довољно мало x постоји увек њена инверсна функција, која тада има облик

$$x^{1/r} L^*(x),$$

где се $L^*(x)$ такође споро мења у близини тачке $x = +0$.

Како и овде $L^*(x)$ служи само као компаративна функција, то није потребно дати њену тачну вредност и довољно је наћи само најједноставнију функцију која се асимптотски подједнако понаша. За одређивање таквог једног израза можемо се у многим случајевима такође послужити сукцесивном апроксимацијом. Ако наиме ставимо

$$L_1^*(x) = L^{-r*}(x^{r*})$$

и

$$L_{n+1}^*(x) = L^{-r*}(x^{r*} L_n^*(x)), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где је

$$r^* = 1/r,$$

тада су

$$y_n = L_n^*(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

узастопна приближна решења једначине

$$y = L^{-r*}(x^{r*} y),$$

а која се за $z = x^{r*} y$ своди на

$$z^r L(z) = x.$$

Дакле, ако овај поступак конвергира, тада

$$L_n^*(x) \sim L^*(x) \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Међутим, како се овде тражи само што једноставнији израз који се асимптотски понаша као $L^*(x)$ и како се $L(x)$ споро мења у близини тачке $x = +0$, то често већ прве од функција $L_n^*(x)$ имају ову особину. Ово наступа чим је за неко $n = k$

$$L_{n+1}^*(x) \sim L_n^*(x), \tag{5}$$

јер се тада и

$$L_n^*(x) \sim L_k^*(x) \quad \text{за свако} \quad n > k,$$

тако да се и

$$L^*(x) \sim L_k^*(x) \quad \text{кад} \quad x \to +0.$$

Према томе се у овом случају можемо задржати на првој од функција $L_k^*(x)$ за коју важи релација (5), и као компаративну функцију уместо функције $L^*(x)$, можемо узети ову функцију.

Тако, напр., ако је

$$L(x) = (\lg 1/x)^p \quad \text{са произвољним } p,$$

биће већ

$$L_2^*(x) \sim L_1^*(x),$$

па је

$$L^*(x) \sim L_1^*(x) = (\lg x^{-r*})^{-pr*} = r^{pr*} (\lg 1/x)^{-pr*}, \quad x \to +0,$$

Ако је, међутим,

$$L(x) = e^{(\lg 1/x)^c} \quad \text{са} \quad 0 < c < 1,$$

и ако краткоће ради ставимо

$$y = \lg 1/x,$$

биће

$$L_1^*(x) = \exp\{-r^{-1-c} y^c\},$$

$$L_2^*(x) = \exp\{-r^{-1-c}(y + r^{-c} y^c)^c\},$$

$$L_3^*(x) = \exp\left\{-r^{-1-c}\left[y + r^{-c}(y + r^{-c} y^c)^c\right]^c\right\},$$

па је за

$$0 < c < 1/2,$$

већ

$$L_2^*(x) \sim L_1^*(x),$$

тј.

$$L^*(x) \sim L_1^*(x) = e^{-r^{-1-c}} y^c,$$

док је за

$$1/2 \leqslant c < 2/3,$$

тек

$$L_3^*(x) \sim L_2^*(x),$$

тако да је

$$L^*(x) \sim L_2^*(x) \sim e^{-r^{-1-c}(y^c + cr^{-c}y^{2c-1})}.$$

Уопште, ако је

$$\frac{k-1}{k} \leqslant c < \frac{k}{k+1},$$

тада је тек

$$L_{k+1}^*(x) \sim L_k^*(x),$$

па је

$$L^*(x) \sim L_k^*(x), \quad x \to +0,$$

тек за

$$k = [1/(1-c)].$$

Отуда можемо закључити да не мора увек постојати коначно n тако да се нека од функција $L_n^*(x)$ асимптотски понаша као $L^*(x)$, а ово наступа нарочито кад $L(x)$ сувише брзо тежи нули или бесконачности.

3. На основи наведених особина функција које се правилно понашају можемо сад прећи на доказ уопштења става I, а које гласи

Став III. *Нека је функција $f(x)$ дефинисана у близини тачке $x = +0$ и нека се у близини ове тачке функција $x - f(x)$ правилно понаша, тј. нека је*

$$f(x) = x - a(x)\, x^k L(x), \tag{6}$$

где

$$a(x) \to a \neq 0, \quad x \to +0, \tag{7}$$

и

$$x L'(x) = o\{L(x)\}, \quad x \to +0. \tag{8}$$

Ако је

$$a > 0 \quad \text{и} \quad k > 1, \tag{9}$$

и ако је x_0 довољно мало, тако да буде

$$f(x) > 0 \quad \text{за} \quad 0 < x \leqslant x_0,$$

и

$$\inf_{\xi \leqslant x \leqslant x_0} \{x - f(x)\} > 0 \quad \text{за свако} \quad 0 < \xi < x_0, \tag{10}$$

шада из

$$x_{n+1}=f(x_n)\,, \quad n=0,1,2,\dots\,, \tag{11}$$

следи да је

$$x_n \backsim a^* n^{-k*} L^*(1/n)\,, \quad n\to\infty\,, \tag{12}$$

где је

$$k^*=1/(k-1) \quad \text{и} \quad a^*=(k^*/a)^{k*}\,, \tag{13}$$

а

$$x^{k*} L^*(x)$$

инверсна функција функције

$$x^{k-1} L(x)\,.$$

Доказ. Из (10) и става II следи да

$$x_n\to 0 \quad \text{кад} \quad n\to\infty\,. \tag{14}$$

Ако ставимо

$$f(x)=x-h(x) \quad \text{и} \quad k=1+q,$$

тада је, према (9),

$$q>0,$$

а према (6) и (7)

$$h(x)=a(x)\,x^{1+q}\,L(x)\backsim a\,x^{1+q}\,L(x), \quad x\to+0,$$

па је, према (11) и (14)

$$x_n-x_{n+1}=h(x_n)\backsim a\,x_n^{1+q}\,L(x_n), \quad n\to\infty. \tag{15}$$

Према томе се

$$x_{n+1}\backsim x_n \quad \text{кад} \quad n\to\infty. \tag{16}$$

Даље је

$$\begin{aligned} x_n^q\,L(x_n)-x_{n+1}^q\,L(x_{n+1})&=\\ &=(x_n^q-x_{n+1}^q)\,L(x_n)+x_{n+1}^q\{L(x_n)-L(x_{n+1})\}=\\ &=q\,(x_n-x_{n+1})\,\xi_n^{q-1}\,L(x_n)+x_{n+1}^q\,(x_n-x_{n+1})\,L'(\eta_n), \end{aligned} \tag{17}$$

при чему се ξ_n и η_n налазе у размаку (x_{n+1}, x_n). Како се, према (16), x_n и x_{n+1} асимптотски подједнако понашају, то је, дакле, и

$$x_n\backsim \xi_n\backsim \eta_n\backsim x_{n+1}, \quad n\to\infty,$$

а отуда је, на основу особина функција које се споро мењају, и

$$L(x_n)\backsim L(\eta_n)\backsim L(x_{n+1}), \quad n\to\infty.$$

Из ових релација и (15) добивамо за први члан обрасца (17)

$$\begin{aligned} q\,(x_n-x_{n+1})\,\xi_n^{q-1}\,L(x_n)&\backsim aqx_n^{2q}\,(L^2(x_n))\backsim\\ &\backsim aqx_n^q\,x_{n+1}^q\,L(x_n)\,L(x_{n+1}), \quad n\to\infty, \end{aligned}$$

а за други члан

$$x_{n+1}^q (x_n - x_{n+1}) L'(\eta_n) \backsim a x_n^{q+1} \, x_{n+1}^q L(x_n) L'(\eta_n) \backsim$$

$$\backsim a \, x_n^q \, x_{n+1}^q \, L(x_n) L(x_{n+1}) \frac{\eta_n L'(\eta_n)}{L(\eta_n)}, \quad n \to \infty.$$

Према томе се, с обзиром на (8), релација (17) своди на

$$\frac{1}{x_{n+1}^q L(x_{n+1})} - \frac{1}{x_n^q L(x_n)} \to aq \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

тако да се

$$\frac{1}{x_n^q L(x_n)} \backsim aqn \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

па се

$$x_n^q L(x_n) \backsim 1/aqn \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Ако сад са

$$x^{k^*} L^*(x)$$

означимо инверсну функцију функције

$$x^q L(x) = x^{k-1} L(x),$$

то добивамо коначно (види, напр. [5, стр. 116—120]), с обзиром на (13),

$$x_n \backsim \frac{1}{(aqn)^{k^*}} L^*\left(\frac{1}{aqn}\right) \backsim a^* n^{-k^*} L^*(1/n), \quad n \to \infty,$$

чиме је тврђење (12) става III доказано.

4. Ако у ставу III извршимо смене

$$x = 1/y \quad \text{и} \quad f(x) = 1/g(y),$$

тада се претпоставке (6), (7) и (8) своде на чињеницу да се

$$g(y) - y$$

правилно понаша кад $y \to \infty$, тако да функцију $g(y)$ можемо написати у облику

$$g(y) = y + A(y) \, y^r L(y), \tag{18}$$

где

$$A(y) \to A \neq 0, \quad y \to \infty, \tag{19}$$

$$y L'(y) = o\{L(y)\}, \quad y \to \infty, \tag{20}$$

и где је, с обзиром на (9),

$$A > 0 \quad \text{и} \quad r < 1. \tag{21}$$

Заиста, према (6) је

$$g(y) - y = \frac{y}{1 - a(1/y)\, y^{1-k} L(1/y)} - y =$$

$$= \frac{a(1/y)}{1 - a(1/y)\, y^{1-k} L(1/y)}\, y^{2-k} L(1/y),$$

тако да се, ако ставимо

$$A(y) = \frac{a(1/y)}{1 - a(1/y)\, y^{1-k} L(1/y)}, \quad 2 - k = r,$$

и $L(1/y)$ заменимо са $L(y)$, релације (6), (7) и (8) своде на (18), (19) и (20), а услови (9) на услове (21).

Ако затим ставимо

$$\xi = 1/\eta \quad \text{и} \quad x_0 = 1/y_0,$$

тада из

$$x - f(x) = \frac{g(y) - y}{y g(y)}$$

следи да ће услови (10) бити испуњени ако је y_0 довољно велико да буде

$$\inf_{y_0 \leqslant y \leqslant \eta} \{g(y) - y\} > 0 \quad \text{за свако} \quad \eta > y_0.$$

Даље се рекурентна релација (11) своди на

$$y_{n+1} = g(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и најзад тврђење (12) на

$$y_n \sim A^* n^{r^*} L^*(n), \quad n \to \infty,$$

где је

$$r^* = 1/(1 - r), \quad A^* = (A/r^*)^{r^*},$$

а

$$x^{r^*} L^*(x)$$

инверсна функција функције

$$x^{1-r} L(x).$$

Овим добијамо ставу III аналоган став који гласи

Став IV. *Нека је функција $g(y)$ дефинисана за велике вредности од y и нека се $g(y)-y$ правилно понаша кад $y\to\infty$, тј. нека је*

$$g(y)=y+A(y)\,y^r\,L(y);$$

где

$$A(y)\to A\neq 0,\quad y\to\infty,$$

и

$$y\,L'(y)=o\{L(y)\},\quad y\to\infty.$$

Ако је

$$A>0,\quad r<1,$$

и ако је y_0 довољно велико тако да буде

$$\inf_{y_0\leqslant y\leqslant\eta}\{g(y)-y\}>0 \quad \textit{за свако} \quad \eta>y_0,$$

тада из

$$y_{n+1}=g(y_n),\quad n=0,1,2,\dots, \tag{22}$$

следи да је

$$y_n\backsim A^*\,n^{r^*}L^*(n),\quad n\to\infty,$$

где је

$$r^*=1/(1-r),\quad A^*=(A/r^*)^{r^*},$$

а

$$y^{r^*}L^*(y)$$

инверсна функција функције

$$y^{1-r}L(y).$$

5. Илустрације ради навешћу овде још поступак којим је Б. Поповић [9] показао да постоји таква функција $A(t)$ која се за бескрајно много вредности од t понаша као

$$C\,t^{1+\varepsilon},\quad 0<\varepsilon<1,\quad C>0,$$

а при томе не опада сувише брзо, тј. задовољава услов

$$A(t+h)-A(t)\geqslant -Mh,$$

за свако $t\geqslant 0$ и $0\leqslant h\leqslant h_0$, где су M и h_0 коначни и позитивни бројеви, и поред тога што њена Laplace-ова трансформација, тј.

$$J(\sigma)=\int_0^\infty e^{-\sigma t}\,dA(t)=\sigma\int_0^\infty e^{-\sigma t}A(t)\,dt$$

остаје ограничена кад $\sigma\to 0$.

При образовању ове функције јавља се низ бројева y_n који је дефинисан рекурентном релацијом облика (22) са специјалном функцијом облика

$$g(y) = y + 2y^r \quad \text{и} \quad r < 1.$$

Иако за сам поступак није битан експлицитни облик овог низа, ипак је од интереса да се напомене да овај низ не расте сувише брзо, јер се према ставу III он понаша само као известан степен од n кад $n \to \infty$. Према томе, за конструкцију овакве функције $A(t)$ није потребно да овај низ расте сувише брзо, као што је то обично случај код многих сличних проблема. Али, ако желимо да образујемо функцију $A(t)$ која се местимично понаша као Ct, ово би се евентуално могло постићи само низовима y_n који теже бесконачности брже од маког степена од n, уколико таква функција уопште постоји. Ово се најбоље увиђа из самог начина образовања функције $A(t)$; стога ћу овај поступак изнети у нешто сажетом облику и том приликом штавише показати да се наведени услови које мора задовољавати функција $A(t)$ могу још нешто сузити, и то овако:

Постоји таква функција $A(t)$ чији извод остаје ограничен, тј.

$$|A'(t)| < M, \quad \text{за свако} \quad t \geqslant 0, \tag{23}$$

чија Laplace-ова трансформација тежи нули, и то тако да буде

$$J(\sigma) = \sigma \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} A(t)\, dt = O(\sigma^k), \quad \sigma \to 0, \tag{24}$$

ма колико велик био број k, а која се при томе ипак местимично понаша као $Ct^{1-\varepsilon}$, тј. постоји низ бројева t_n такав да је

$$A(t_n) \backsim Ct_n^{1-\varepsilon}, \quad t_n \to \infty, \tag{25}$$

са $C > 0$ и произвољно мало $\varepsilon > 0$.

Да бисмо ово показали, образујмо најпре функцију $H(t)$, која у размаку $(-1, +1)$ има одређен извод и ове особине:

1⁰ $$H(-1) = H(+1), \quad H'(-1) = H'(+1), \tag{26}$$

2⁰ функција

$$K(x) = \int_{-1}^{+1} e^{-xt} H(t)\, dt \tag{27}$$

има у тачки $x = 0$ нулу најмање q-тог реда, тј.

$$K^{(\nu)}(0) = (-1)^{\nu} \int_{-1}^{+1} t^{\nu} H(t)\, dt = 0 \quad \text{за} \quad \nu = 0, 1, \ldots, q-1. \tag{28}$$

Из (28) следи да је

$$|K(x)| \leqslant \frac{2^q K}{q!} x^{q-1} (e^x - e^{-x}) \quad \text{за свако} \quad x \geqslant 0, \tag{29}$$

где је

$$|H(t)| \leqslant K \quad \text{за} \quad -1 \leqslant t \leqslant +1.$$

Заиста, парцијалном интеграцијом интеграла (27) добивамо, према (28),

$$K(x) = x^q \int_{-1}^{+1} e^{-xt} H_q(t)\, dt, \tag{30}$$

где је $H_q(x)$ q-ти интеграл функције $H(x)$, тј.

$$H_q(x) = \frac{1}{(q-1)!} \int_{-1}^{+1} (x-t)^{q-1} H(t)\, dt,$$

тако да је

$$|H_q(x)| \leqslant \frac{K\, 2^q}{q!} \quad \text{за свако} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

што према (30) даје неједначину (29).

Једна таква функција $H(t)$ која има особине 1⁰ и 2⁰ је, например, полином $(q+8)$-ог степена,

$$H(t) = (1-t^2)^2 P(t),$$

где је $P(t)$ Лежандров полином $(q+4)$-тог степена.

Помоћу функције $H(t)$ образована функција

$$A(t) = z_n H\left(\frac{t - y_n^*}{z_n}\right) \quad \text{за} \quad y_n \leqslant t \leqslant y_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{31}$$

са

$$y_n^* = \frac{y_n + y_{n+1}}{2}, \quad z_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{2}, \quad y_0 = 0,$$

испуњаваће сва три услова (23), (24) и (25) ако низ y_n образујемо тако да буде

$$y_{n+1} = y_n + 2(y_n)^{p/(q+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad y_1 = 1, \tag{32}$$

где је p произвољан позитиван број $< q+1$.

Заиста, према (26) функција $A(t)$ има одређен извод за свако $t \neq 0$, а из (31) следи

$$|A'(t)| = \left|H'\left(\frac{t-y_n^*}{z_n}\right)\right| \leqslant \underset{-1\leqslant t\leqslant 1}{\mathrm{Max}} |H'(t)|,$$

што казује да је услов (23) задовољен.

Даље је

$$J(\sigma) = \sigma \int_0^\infty e^{-\sigma t} A(t)\, dt =$$

$$= \sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu \int_{y_\nu}^{y_{\nu+1}} e^{-\sigma t} H\left(\frac{t-y_\nu^*}{z_\nu}\right) dt =$$

$$= \sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu^2\, e^{-\sigma y_\nu*} \int_{-1}^{+1} e^{-\sigma z_\nu t} H(t)\, dt,$$

па је према (29)

$$|J(\sigma)| \leqslant \frac{2^q K}{q!} \sigma^q \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu^{q+1}\, e^{-\sigma y_\nu *} (e^{\sigma z_\nu} - e^{-\sigma z_\nu}) =$$

$$\leqslant \frac{2^q K}{q!} \sigma^q \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu^{q+1} (e^{-\sigma y_\nu} - e^{-\sigma y_{\nu+1}}).$$

Из (32) међутим следи да је

$$z_n^{q+1} = y_n^p \quad \text{за} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а

$$z_0 = 1/2, \quad \text{јер је} \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1,$$

па је према томе

$$|J(\sigma)| \leqslant \frac{2^q K}{q!} \sigma^q \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu^p (e^{-\sigma y_\nu} - e^{-\sigma y_{\nu+1}}) + \frac{K\sigma^q}{2q!} =$$

$$\leqslant \frac{2^q K}{q!} \sigma^q \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\sigma y_\nu} (y_\nu^p - y_{\nu-1}^p) + \frac{K\sigma^q}{2q!}.$$

Како је овај последњи збир $p!/\sigma^p$ (види, напр. [5, стр. 82—83, образац 22]), то је

$$|J(\sigma)| \leqslant \frac{2^q p!}{q!} K \sigma^{q-p} + \frac{K}{2 \cdot q!} \sigma^q,$$

што казује да је и услов (24) задовољен ако само изаберемо p и q тако да буде

$$k = q - p. \tag{33}$$

Најзад, ако означимо са C апсолутни максимум функције $H(t)$ за $-1 \leqslant t \leqslant +1$ и ставимо

$$C = H(t^*),$$

тада се за

$$t_n = y_n^* + t^* z_n = y_n + (1 + t^*) z_n = z_n^{(q+1)/p} + (1 + t^*) z_n \tag{34}$$

и

$$T_n = A(t_n) = z_n H(t^*) = C z_n, \tag{35}$$

тачке са апсцисама t_n и ординатама $T_n = A(t_n)$ налазе на кривој

$$(T/C)^{(q+1)/p} + (1 + t^*) \frac{T}{C} = t,$$

коју добивамо елиминацијом z_n из (34) и (35), а за коју важи

$$T \backsim C\, t^{p/(q+1)} = C\, t^{1-\varepsilon}, \quad t \to \infty.$$

Према томе је задовољена релација (25) ако за низ t_n узмемо вредности дате обрасцем (34) и ако ставимо

$$\varepsilon = \frac{q - p + 1}{q + 1}. \tag{36}$$

Из (33) и (36) видимо да заиста можемо изабрати k произвољно велико, а ε произвољно мало, ако само $q - p$ и q изаберемо довољно велико, али тако да им количник буде довољно мали. Уосталом, из (33) и (36) добивамо за p и q ове вредности:

$$p = \frac{k+1}{\varepsilon} - k - 1, \quad q = \frac{k+1}{\varepsilon} - 1,$$

а што је требало показати.

У наведеном поступку за конструкцију функције $A(t)$ је битно да низ y_n задовољава рекурентну релацију (32). Ова релација, међутим, је типа (22) става III, са

$$g(y) = y + 2\, y^{p/(q+1)},$$

тј. са

$$A(y) - A = 2, \quad L(y) = 1 \quad \text{и} \quad r = p/(q+1) < 1,$$

тако да су сви услови овога става задовољени, па је

$$y_n \backsim \left(2\,\frac{q-p+1}{q+1}\right)^{\frac{q+1}{q-p+1}} n^{\frac{q+1}{q-p+1}}, \quad n \to \infty .$$

Како ову релацију с обзиром на (36) можемо написати и у облику

$$y_n \backsim (2\,\varepsilon)^{1/\varepsilon}\, n^{1/\varepsilon}, \quad n \to \infty ,$$

то отуда и из (25) јасно видимо да y_n мора утолико брже да расте уколико су амплитуде функције $A(t)$ веће, и да би оно морало да расте брже од маког степена од n да би функција $A(t)$ могла местимично да се понаша као Ct.

ПОПИС ЛИТЕРАТУРЕ

[1] Бајрактаревић, М. — О конвергенцији низа (x_n) чији су чланови дефинисани једначином $x_{n+1} = f(x_n)$. *Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron.*, II. *Ser.*, **6** (1951), 201—209.

[2] Карамата, J. — О геометријској интерпретацији М. Миланковића конвергенције бесконачних редова. *Зборник радова Мат. инст. САН* **1** (1951), стр. 125—134.

[3] Karamata, J. — Sur un mode de croissance régulière des fonctions. *Mathematica (Cluj)* **4** (1930), pp. 38—53.

[4] Karamata, J. — Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux. *Bull. de la Soc. Math. de France* LXI (1933), pp. 55—62.

[5] Карамата J. — Теорија и пракса Stieltjes-ова интеграла. Београд 1949.

[6] De Misès, R. und Pollaczek-Geiringer. — Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung. *Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechanik* **9** (1926), S. 58—62.

[7] Ostrowski, A. — Sur la convergence et l'estimation des erreurs dans quelques procédés de résolution des équations numériques. *Сборник посвященый памяти Д. А. Граве*, Москва (1940), с. 213—234.

[8] Pólya, G. u. Szegö, G. — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I. Berlin 1925.

[9] Поповић, Б. — Један став о асимптотским вредностима Laplace-ова интеграла. *„Глас“ Срп. Акад. наука* (CLXXXV) **92** (1940), стр. 33—46.

ÜBER DAS ASYMPTOTISCHE VERHALTEN DER FOLGEN DIE DURCH ITERATION DEFINIERT SIND

J. KARAMATA

Anschliessend an einen in [**2**], [**8**, Aufgaben 173—4] und [**7**] behandelten Satz wird hier die folgende Erweiterung gegeben.

Sei $f(x)$ in der Umgebung des Punktes $x=+0$ definiert und verhält sich daselbst die Funktion $x-f(x)$ regulär (vergl. [**3**] u. [**4**]), *d. h. es sei*

$$f(x)=x-a(x)\,x^k\,L(x),$$

wobei

$$a(x)\to a\neq 0;\quad x\to+0,$$

und

$$x\,L'(x)=o\{L(x)\},\quad x\to+0$$

gesetzt werden kann.

Sei weiter

$$a>0,\quad k>1$$

und x_0 genügend klein gewählt damit

$$f(x)>0\quad \textit{für}\quad 0<x\leqslant x_0,$$

und

$$\inf_{\xi\leqslant x\leqslant x_0}\{x-f(x)\}>0\quad \textit{für jedes}\quad 0<\xi<x_0$$

gilt, dann folgt aus

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad n=0,1,2,\dots,$$

dass

$$x_n\sim a^*\,n^{-k^*}\,L^*(1/n),\quad n\to\infty,$$

ist, wo

$$k^*=1/(k-1)\quad \textit{und}\quad a^*=(k^*/a)^{k^*}$$

ist, und wobei $x^{k^*}L^*(x)$ die inverse Funktion der Funktion $x^{k-1}L(x)$ bedeutet.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

МАХМУД БАЈРАКТАРЕВИЋ

О НИЗОВИМА ДЕФИНИСАНИМ ЈЕДНАЧИНОМ $x_\nu = \varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\dots(\varepsilon_\nu f(0))\dots))$

Предмет овог рада је испитивање особина низова дефинисаних једначином (2). Специјалан случај низа ове врсте, гдје је $f(x) = \sqrt{2+x}$, испитиван је и у страној [1] и у домаћој литератури [2] и [3]. У отсјеку I овог рада дате су неке опште особине низова (2), а у отсјеку II наведен је извјестан број критерија за конвергенцију ових низова. За илустрацију резултата добивених у I и II наведена су у отсјеку III два примјера, од којих први претставља генерализацију малочас наведеног специјалног низа.

I

Функција $f(x)$ нека буде у затвореном размаку $[-a, +a]$ $(a > 0)$ непрекидна и нека у том размаку монотоно расте у ужем смислу. Нека је осим тога, $f(-a) = b \geqslant 0$, $f(x) > x$ $(|x| < a)$, $f(a) = a$.

Сваки број z затвореног размака $I = [0,2]$ претставићемо у облику

$$z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu}, \quad (0 \leqslant z \leqslant 2), \tag{1}$$

гдје бројеви d_ν $(\nu = 0, 1, 2, \dots)$ за свако z имају одређену вриједност 0 или 1.

Сваком броју z из I одговара једнозначно један низ бројева облика

$$x_\nu = \varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\dots(\varepsilon_\nu f(0))\dots)) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots), \tag{2}$$

гдје бројеви ε_ν $(\nu = 0, 1, 2, \dots)$, дати једначинама

$$\varepsilon_0 = 1 - 2d_0, \quad \varepsilon_\nu = \frac{1 - 2d_\nu}{1 - 2d_{\nu-1}} \quad (\nu = 1, 2, \dots) \tag{3}$$

за свако z из I, имају одређену вриједност $+1$ или -1. При томе пар низова (2), односно пар низова (3), који одговарају коначном диадном разломку $z = p/2^q$ $(0 < p < 2^{q+1},\ q \geqslant 0)$ сматрамо само једним чланом скупа низова (2), односно скупа низова (3).

Под овим условима вриједи:

A. — *Сваки низ* (2) *има највише двије тачке нагомилавања*: $\xi_1 = \underline{\lim}_{\nu \to \infty} x_\nu$, $\xi_2 = \overline{\lim}_{\nu \to \infty} x_\nu$ $(\xi_1 \leqslant \xi_2)$. *Према томе*, ξ_1 *и* ξ_2 *су овим једначинама дефинисане као функције од* z *у размаку* I: $\xi_1 = \xi_1(z)$, $\xi_2 = \xi_2(z)$.

B. — *Функције* $\xi_1(z)$ *и* $\xi_2(z)$ *монотоно опадају у ужем смислу од* a *до* $-a$, *и то тако да је*

$$a \geqslant \xi_2(z) \geqslant \xi_1(z) > \xi_2(z_1) \geqslant \xi_1(z_1) \geqslant -a \quad (0 \leqslant z < z_1 \leqslant 2).$$

C. — *Функције* $\xi_1(z)$, $\xi_2(z)$ *имају особину*

$$\xi_1(2-z) + \xi_2(z) = 0 \quad (0 \leqslant z \leqslant 2),$$

тј. ове функције су међусобно симетричне у односу на тачку (1,0) *као центар симетрије.*

D. — *У свакој тачки размака* $(0 \leqslant z < 2)$, $\xi_1(z)$ *је непрекидна функција са десне стране. У свакој тачки размака* $0 < z \leqslant 2$, $\xi_2(z)$ *је непрекидна са лијеве стране. — Посљедица: Ако је* $\xi_1(z) = \xi_2(z)$ *за свако* z *размака* I, *тада је ова функција непрекидна у том размаку. У овом случају је* $f(-a) = b = 0$.

E. — *Ако постоји макар једна тачка* z *размака* I *за коју је* $\xi_2(z) > \xi_1(z)$, *онда су свуда у том размаку тачке дисконтинуитета функција* $\xi_1(z)$ *и* $\xi_2(z)$ *густо распоређене а има их пребројиво много.*

Докази.

A. — Навешћемо претходно неке чињенице које се могу лако доказати:

1. — Сваком коначном низу бројева $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ у којем сваки члан има или вриједност $+1$ или вриједност -1, одговара одређена функција $x_\nu(t)$ дефинисана у затвореном размаку $[-a, +a]$ једначином

$$x_\nu(t) = \varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\ldots(\varepsilon_\nu f(t))\ldots)) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Функција $x_\nu(t)$ је непрекидна функција, и у наведеном размаку монотоно расте или монотоно опада у ужем смислу, према томе да ли је

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu = 1 \quad \text{или} \quad -1.$$

2. — Ако ставимо да је $x_\nu = x_\nu(0)$, тада је:

$$\text{за } \varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu = +1 \quad \begin{cases} x_\nu < x_{\nu+1} & \text{за} \quad \varepsilon_{\nu+1} = +1, \\ x_\nu > x_{\nu+1} & \text{за} \quad \varepsilon_{\nu+1} = -1; \end{cases}$$

$$\text{за } \varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu = -1 \quad \begin{cases} x_\nu > x_{\nu+1} & \text{за} \quad \varepsilon_{\nu+1} = +1, \\ x_\nu < x_{\nu+1} & \text{за} \quad \varepsilon_{\nu+1} = -1. \end{cases}$$

Из ових чињеница и из претпоставки учињених о функцији $f(x)$ слиједи да се за свако $z \neq p/2^q$ $(0 < p < 2^{q+1};\ q \geqslant 0)$ одговарајући низ (2) састоји од два дијела: једног који монотоно расте у ужем смислу и другог који монотоно опада у ужем смислу, при чему је сваки члан првог дијела мањи од сваког члана другог дијела. Чланови низа (2) могу се груписати у групе облика

$$x_{\lambda_k-1},\ x_{\lambda_k},\ x_{\lambda_k+1}, \dots,\ x_{\lambda_{k+1}-2}\quad (k=0,1,2,\dots),$$

гдје смо претпоставили да за низ бројева $\varepsilon_i\ (i=0,1,2,\dots)$, који одговара броју z, вриједи

$$\varepsilon_0,\ \left.\begin{matrix}\varepsilon_i=-1 & \text{за} & i=\lambda_k\\ \varepsilon_i=+1 & \text{за} & i\neq\lambda_k\end{matrix}\right\}\ \begin{matrix} i>0;\ k=0,1,2,\dots;\\ \lambda_k<\lambda_{k+1},\ \lambda_0\geqslant 1,\end{matrix}\tag{4}$$

тако да свака група за непарно k (парно k) припада првом дијелу низа (2), а свака група за парно (непарно) k другом дијелу тог низа ако је уз то $\varepsilon_0=+1$ $(\varepsilon_0=-1)$. Јасно је да су оба дијела конвергентна, јер су оба монотона и ограничена. У случају кад је $\lambda_0>1$, наведеним групама треба додати и групу чланова чији су индекси мањи од λ_0-1. Изузетак чине случајеви $z=0$ и $z=2$, када је $\varepsilon_i=1\ (i=1,2,\dots)$, а одговарајући низ (2) монотоно расте према граничној вриједности a, односно монотоно опада према граничној вриједности $-a$.

За $z=p/2^q$ из (3) добивају се два низа бројева ε_ν облика

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\dots,\ \varepsilon_{q-1},\ \begin{cases}\varepsilon_q=+1,\\ \varepsilon_q=-1,\end{cases}\ \varepsilon_{q+1}=-1,\ \varepsilon_{q+i}=1\ (i=2,3,\dots;\ q\geqslant 0)\tag{5}$$

који се разликују само по члану ε_q, а сваком од њих одговара по један конвергентан низ (2), јер

$$f(\varepsilon_{q+2} f(\varepsilon_{q+3} f(\dots(\varepsilon_{q+i} f(0))\dots)))\to a$$

кад $i\to\infty$ $(q\geqslant 0)$. Први од ових низова монотоно опада (расте) у ужем смислу, а други монотоно расте (опада) у ужем смислу, апстрахујући чланове $x_i\ (i<q)$, кад је

$$\varepsilon_0\varepsilon_1\dots\varepsilon_q=1,\quad \varepsilon_0\varepsilon_1\dots\overline{\varepsilon}_q=-1\ \ (\varepsilon_0\varepsilon_1\dots\varepsilon_q=-1,\ \varepsilon_0\varepsilon_1\dots\overline{\varepsilon}_q=1).$$

Граничне вриједности ових низова су

$$\xi'=\varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\dots(\varepsilon_{q-1} f(b))\dots))\quad \text{и}\quad \xi''=\varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\dots(\varepsilon_{q-1} f(-b))\dots)).$$

Ако ова два низа сматрамо дијеловима само једног низа, онда су ξ' и ξ'' његова горња и доња тачка нагомилавања ξ_2 и ξ_1, за које вриједи

$$\xi'=\xi_1\leqslant x_{q-1}\leqslant\xi_2=\xi''\quad \text{за}\quad \varepsilon_0\varepsilon_1\dots\varepsilon_q=-1,\quad \varepsilon_0\varepsilon_1\dots\overline{\varepsilon}_q=+1,$$

$$\xi''=\xi_1\leqslant x_{q-1}\leqslant\xi_2=\xi'\quad \text{за}\quad \varepsilon_0\varepsilon_1\dots\varepsilon_q=+1,\quad \varepsilon_0\varepsilon_1\dots\overline{\varepsilon}_q=-1.$$

Знак једнакости важи за $b=f(-a)=0$. – Овим је доказана тврдња А.

В. — За доказивање тачности тврдње В поступићемо овако. Нека су дата два броја из I:

$$z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu} < z_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\overline{d}_\nu}{2^\nu}.$$

Тада је увијек могуће наћи један индекс q такав да је

$$\overline{d}_\nu = d_\nu, \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, q-1), \quad d_q = 0, \quad \overline{d}_q = 1.$$

Из (3) слиједи

$$d_\nu = \frac{1 - \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu}{2} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots). \tag{3a}$$

Претпоставимо да је $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q-1} = -1$, тј. да је, према (3a), $d_{q-1} = 1$. Тада је, према (3), $\varepsilon_q = -1$, $\overline{\varepsilon}_q = 1$, гдје цртица изнад ознаке означава да дотични број одговара броју z_1. Функција $x_{q-1}(t)$, према А, монотоно опада у ужем смислу. Како је пак

$$\varepsilon_q f(\dots(\varepsilon_{q+i} f(0))\dots) < 0 < \overline{\varepsilon}_q f(\dots(\overline{\varepsilon}_{q+i} f(0))\dots) \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

то је

$$x_{q+i} > x_{q-1} = \overline{x}_{q-1} > \overline{x}_{q+i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

За $i \to \infty$ добивамо

$$\lim_{\nu \to \infty} x_\nu \geqslant x_{q-1} \geqslant \overline{\lim_{\nu \to \infty} x_\nu}.$$

Међутим, оба знака једнакости не могу заједно доћи у обзир, јер би то значило да је

$$z = z_1 = \frac{p}{2^q} \quad (0 < p < 2^{q+1}, \; q \geqslant 0),$$

што се противи претпоставци да је $z < z_1$. Према томе је заиста

$$\xi_1(z) > \xi_2(z_1) \quad (z < z_1).$$

На потпуно аналоган начин доказује се да је $\xi_1(z) > \xi_2(z_1)$ $(z < z_1)$ и у случају кад је $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q-1} = 1$, тј. кад је $d_{q-1} = -1$.

Специјално:

за $z = 0$ је $d_\nu = 0$, $\varepsilon_\nu = 1$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots)$, те је $\xi_1(0) = a$;

$$\text{за } z = 1 \begin{cases} d_0 = 1, \; d_\nu = 0 \; (\nu = 1, 2, \dots) \text{ и } \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = -1, \varepsilon_\nu = 1, \; (\nu = 2, 3, \dots), \\ \hfill \text{те је } \xi_1(1) = -b; \\ d_0 = 0, \; d_\nu = 1 \; (\nu = 1, 2, \dots) \text{ и } \varepsilon_1 = -1, \varepsilon_0 = \varepsilon_\nu = 1, \; (\nu = 2, 3, \dots), \\ \hfill \text{те је } \xi_2(1) = b; \end{cases}$$

за $z=2$ је $d_\nu=1$ $(\nu=0,1,2,\dots)$ и $\varepsilon_0=-1$, $\varepsilon_\nu=1$ $(\nu=1,2,\dots)$, те је $\xi_2(2)=-a$.

Овим је доказана тврдња В.

С. — За доказивање тачности тврдње С користићемо се слиједећим помоћним ставом који је лако доказати: Да би се два низа ε_ν и $\bar{\varepsilon}_\nu$ $(\nu=0,1,2,\dots)$, који одговарају респективно бројевима z и z_1 из I, разликовали само по члану са индексом нула, тј. да би било $\bar{\varepsilon}_0=-\varepsilon_0$, $\bar{\varepsilon}_i=\varepsilon_i$ $(i=1,2,\dots)$, потребно је и довољно да бројеви z и z_1 задовољавају релацију $z+z_1=2$. Ако је $z=p/2^q$, под одговарајућим низом бројева ε_i $(i=1,2,\dots)$ треба подразумијевати пар низова (5).

Нека су сада дата два броја z и z_1 из I, $z+z_1=2$. Тада за низове (2) који одговарају овим бројевима, на основу помоћног става, вриједи $x_\nu=-\bar{x}_\nu$ $(\nu=0,1,2,\dots)$. Одавде за $\nu\to\infty$ слиједи $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} x_\nu=-\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\bar{x}_\nu$, тј. $\xi_2(z)=-\xi_1(z_1)$ односно $\xi_1(2-z)=-\xi_2(z)$. Овим је доказана и тврдња С.

D. — Нека је $z=d_0,d_1d_2\dots$ Из оног што је речено у А о природи низова (2), слиједи да је за свако $\varepsilon>0$ могуће увијек наћи довољно велик број $N(\varepsilon)$ такав да је за бесконачно много вриједности индекса $\nu>N(\varepsilon)$

$$\underline{\lim_{\nu\to\infty}} x_\nu - x_\nu = \xi_1(z) - x_\nu < \varepsilon. \tag{6}$$

Нека су ν_1 и ν_2 таква два индекса и нека је $\nu_2>\nu_1$. Тада је $x_{\nu_1}<x_{\nu_2}<\xi_1(z)$.

Нека је, најприје,

$$z=\frac{p}{2^q} \quad (p \text{ и } q \text{ цијели; } 0<p<2^{q+1};\ q\geqslant 0).$$

Онда је

$$z=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{d_\nu}{2^\nu} \quad \text{гдје је } d_q=1,\ d_{q+i}=0 \quad (i=1,2,\dots).$$

Из овог слиједи да је

$$\varepsilon_0\,\varepsilon_1\dots\varepsilon_q=-1\,,\quad \varepsilon_{q+1}=-1\,,\quad \varepsilon_{q+i}=1 \quad (i=2,3,\dots)\,.$$

Према томе, одговарајући низ (2) x_ν $(\nu=q,q+1,\dots)$ монотоно расте. За ν_1 и ν_2 можемо, дакле, узети ма која два броја већа од q, тј. $q<\nu_1<\nu_2$. Нека је, даље,

$$z_1=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\bar{d}_\nu}{2^\nu} \quad (\bar{d}_\nu=d_\nu,\ \nu\leqslant\nu_2;\ \bar{d}_{\nu_2+1}=+1\,,$$

гдје је

$$d_{\nu_2+i}\,, \quad i=2,3,\ldots \tag{7}$$

низ бројева 0 и 1 узетих ма којим редом). Тада за одговарајући низ бројева $\bar{\varepsilon}_\nu$ вриједи: $\bar{\varepsilon}_\nu=\varepsilon_\nu,\ \nu\leqslant\nu_2;\ \bar{\varepsilon}_{\nu_2}=1,\ \bar{\varepsilon}_{\nu_2+1}=-1$, те је

$$x_{\nu_1}<\bar{x}_{\nu_2+i}<x_{\nu_2} \quad (i=1,2,\ldots). \tag{8}$$

Множењем ове неједначине са -1, додавањем сваком њеном члану броја $\xi_1(z)$, за $i\to\infty$, с обзиром на (6), добива се да је

$$0<\xi_1(z)-\xi_1(z_1)<\varepsilon. \tag{9}$$

Како је пак по дефиницији броја z_1

$$z_1=z+\sum_{\nu=\nu_2+1}^{\infty}\frac{\bar{d}_\nu-d_\nu}{2^\nu}=z+\frac{1}{2^{\nu_2+1}}+\frac{\theta}{2^{\nu_2+1}}\,,\quad 0\leqslant\theta\leqslant1\,,$$

јер је, по претпоставци, избор низа (7) сасвим произвољан, то је (9) испуњено за све вриједности z_1 из затвореног размака

$$\left[z+\frac{1}{2^{\nu_2+1}}\,,\ z+\frac{1}{2^{\nu_2}}\right].$$

Како се мјесто ν_2 може узети ма који број ν_2+i $(i=1,2,\ldots)$, то се на тај начин добива низ затворених размака, који заједно чине један размак

$$\left[z+\frac{1}{2^{\nu_2+i}}\,,\ z+\frac{1}{2^{\nu_2}}\right].$$

Овај за $i\to\infty$ прелази у размак $[z, z+1/2^{\nu_2}]$. Овим је доказано да је $\xi_1(z)$ непрекидна функција од z с десне стране у свакој тачки $z=p/2^q$ размака $0<z<2$. Слично се доказује тачност ове тврдње и за $z=0$.

Нека је сада $z\neq p/2^q$, $0\leqslant z\leqslant 2$. — Како је $x_{\nu_2+1}>x_{\nu_2}$, то мора бити или $\varepsilon_0\ldots\varepsilon_{\nu_2}=+1,\ \varepsilon_{\nu_2+1}=+1$, и према томе $d_{\nu_2}=0$ и $d_{\nu_2+1}=0$, или $\varepsilon_0\ldots\varepsilon_{\nu_2}=-1,\ \varepsilon_{\nu_2+1}=-1$, и према томе $d_{\nu_2}=1$ и $d_{\nu_2+1}=0$. Ако и сада са (7) дефинишемо z_1, биће опет испуњене неједначине (8) и (9). Како је пак, по дефиницији бројева z и z_1,

$$z_1=z+\sum_{\nu=\nu_2+1}^{\infty}\frac{\bar{d}_\nu-d_\nu}{2^\nu}=z+\frac{1+\theta}{2^{\nu_2+1}}-\sum_{\nu_2+2}^{\infty}\frac{d_\nu}{2^\nu}\,,\quad 0\leqslant\theta\leqslant1\,,$$

то је (9) испуњено за све вриједности од z_1 из затвореног размака

$$\left[z + \frac{1}{2^{\nu_2+1}} - \sum_{\nu_2+2}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu},\ z + \frac{1}{2^{\nu_2}} - \sum_{\nu_2+2}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu}\right]. \tag{10}$$

Ако је још и $x_{\nu_2} < x_{\nu_2+1} < \xi_1(z)$, може се ν_2 замијенити у (10) са ν_2+1. Ова два затворена размака, уствари, чине један затворени размак

$$\left[z - \sum_{\nu_2+3}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu_2+2}},\ z - \sum_{\nu_2+2}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu_2}}\right].$$

За свако z_1 овог размака је испуњена неједначина (9). Ако је пак

$$x_{\nu_2} < x_{\nu_2+\lambda} < \xi_1(z) < x_{\nu_2+\lambda-1} < \dots < x_{\nu_2+2} < x_{\nu_2+1} \quad (\lambda \geqslant 2), \tag{11}$$

може се ν_2 у (10) замијенити са $\nu_2+\lambda$, те имамо да је (9) испуњено за свако z_1 из затвореног размака

$$\left[z - \sum_{\nu_2+\lambda+2}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu_2+\lambda+1}},\ z - \sum_{\nu_2+\lambda+2}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu_2+\lambda}}\right]. \tag{12}$$

Међутим, лако је доказати да је десна граница размака (12) једнака лијевој граници размака (10). Из овог слиједи да је (9) испуњено и за свако z_1 затвореног размака који се састоји из оба размака (10) и (12).

Из свега овог, резонујући даље слично као и у случају кад је било $z = p/2^q$, слиједи да је (9) испуњено за свако z_1 из размака

$$\left[z,\ z + 2^{-\nu_2} - \sum_{\nu_2+2}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu}\right].$$

Овим је у потпуности доказано да је $\xi_1(z)$ непрекидна функција од z са десне стране у свакој тачки размака $0 \leqslant z < 2$.

На потпуно сличан начин доказује се да је $\xi_2(z)$ непрекидна функција од z с лијеве стране у свакој тачки размака $0 < z \leqslant 2$. — Ако је $\xi_1(z) = \xi_2(z)$ за свако z размака I, онда је, према оном што је речено у B,

$$\xi_1(1) = -b = \xi_2(1) = b = 0.$$

Овим је доказана тврдња D.

E. — За доказивање тврдње E поступићемо овако. Нека је z тачка у којој, по претпоставци, $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ имају прекид. То је, с обзиром ка особине B и D, могуће онда и само онда ако је $\xi_1(z) < \xi_2(z)$. Нека су z_1 и z_2 $(0 \leqslant z_1 < z_2 \leqslant 2)$ крајеви ма каквог размака који не садржи тачку z. Бројеве: k; $\bar{d}_0, \bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_{k-1}$ можемо увијек изабрати тако да

$$\bar{z} = \varsigma + \frac{z}{2^k}, \quad \left(\varsigma = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\bar{d}_\nu}{2^\nu}\right)$$

буде тачка затвореног размака $[z_1, z_2]$. У тачки $\bar{z}$ морају $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ имати прекид, јер из општег члана низа (2), који одговара броју $\bar{z}$, $\bar{x}_{k+i} = \bar{x}_{k-1}(x_i)$ због монотоније и непрекидности функције $\bar{x}_{k-1}(t)$, слиједи за $i \to \infty$ да је $\xi_1(\bar{z}) < \xi_2(\bar{z})$.

Да је број тачака дисконтинуитета функција $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ пребројив, слиједи из особине монотоности тих функција. Овим је доказана тврдња E.

II

У овом дијелу навешћемо неколико критерија за непрекидност функције $\xi_1(z)$ (а према томе и функције $\xi_2(z)$) у размаку $0 \leqslant z \leqslant 2$, у ком случају је, за свако z тог размака, $\xi_1(z) = \xi_2(z)$ и одговарајући низ (2) конвергентан.

A. — *Да би $\xi_1(z)$ била непрекидна функција од z у размаку $0 \leqslant z \leqslant 2$, потребно је и довољно да буде $b = f(-a) = 0$ и да $x_{\nu+1} - x_\nu \to 0$ кад $\nu \to \infty$.*

B. — *Да би $\xi_1(z)$ била непрекидна функција од z у размаку $0 \leqslant z \leqslant 2$, потребно је да једначина*

$$-t = f(-f(t)) \quad (-a < t < 0) \tag{13}$$

има само једно рјешење ξ_0 и да је $b = f(-a) = 0$.

У слиједећим критеријима претпоставићемо да функција $f(x)$ има први извод $f'(x)$ у свакој тачки размака $-a < x < +a$ и да је $b = f(-a) = 0$.

C. — *Да би функција $\xi_1(z)$ била непрекидна функција у затвореном размаку $[0,2]$, потребно је да је $f'(\xi_0) \leqslant 1$; ξ_0 је такође (једини) коријен једначине $t = -f(t)$.*

D. — *Да би $\xi_1(z)$ била непрекидна функција од z у $[0,2]$, довољно је да је $f'(x) \leqslant q < 1$ $(-a < x < +a,\ q > 0)$.*

E. — *Нека је функција $f(x)$, задржавајући све досад учињене претпоставке о њој, у размаку $-a \leqslant x \leqslant +a$ конвексна одоздо. Тада је $\xi_1(z)$ непрекидна функција од z.*

Прије него што наведемо остале критерије, боље прегледности ради, учинићемо ово:

1. — Увешћемо нову ознаку једначином

$$\left.\begin{array}{l} y_i^{(\nu)}(t) = \varepsilon_i f(\varepsilon_{i+1} f(\dots(\varepsilon_\nu f(t))\dots)) \quad (i=0,1,2,\dots); \\ \text{специјално је: } y_0^{(\nu)}(t) = x_\nu(t), \; y_\nu^{(\nu)}(t) = \varepsilon_\nu f(t). \end{array}\right. \tag{14}$$

2. — Примијенићемо став о средњим вриједностима на разлику

$$x_{\nu+1} - x_\nu = x_\nu(\varepsilon_{\nu+1} f(0)) - x_\nu(0) = \varepsilon_{\nu+1} f(0) \cdot x'_\nu(\xi^{(\nu)}),$$

гдје је

$$\xi^{(\nu)} = \theta \cdot \varepsilon_{\nu+1} f(0), \quad 0 < \theta < 1. \tag{15}$$

3. — Увешћемо ознаку: $f'_{i,\nu} = f'(y_i^{(\nu)}(\xi^{(\nu)}))$.

Осим тога ћемо претпоставити да је $f(x)$ за $-a \leqslant x \leqslant +a$ стално конкавна одоздо, задржавајући и све остале претпоставке учињене досад о њој.

F. — *Нека је за свако* z $(0 \leqslant z \leqslant 2)$, *узевши у обзир* (4),

$$\prod_{i=\lambda_k}^{\lambda_{k+1}-1} f'_{i,\nu} \leqslant q < 1, \quad \prod_{i=\lambda_{k_\nu}}^{\nu} f'_{i,\nu} \leqslant Q, \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu > N; \; k=0,1,\dots, k_\nu - 1; \\ \lambda_{k_\nu} = \operatorname*{Max}_{\lambda_k \leqslant \nu} \lambda_k; \; Q > 0 \end{array} \right\};$$

шада је $\xi_1(z)$ *нейрекидна функција од* z $(0 \leqslant z \leqslant 2)$.

Уводећи постепено нова ограничења, добива се слиједећи низ све једноставнијих али и све ужих критерија који гласе:

G. — *Ако су за свако* z $(0 \leqslant z \leqslant 2)$ *исйуњени услови:*

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi_0) < 1, \\ f'_{\lambda_k,\nu} \cdot [f'(\tau)]^{\lambda_{k+1}-\lambda_k-1} \leqslant q < 1, \\ f'_{\lambda_{k_\nu},\nu} \cdot [f'(\tau)]^{\nu-\lambda_{k_\nu}} < Q, \end{array}\right\} \begin{array}{l} \nu > N; \; k=0,1,\dots k_\nu - 1; \\ \xi_0 \leqslant \tau \leqslant 0, \end{array}$$

шада је $\xi_1(z)$ *нейрекидна функција од* z $(0 \leqslant z \leqslant 2)$.

H. — *Да би* $\xi_1(z)$ *била нейрекидна функција од* z $(0 \leqslant z \leqslant 2)$, *довољно је да је исйуњен услов*

$$f'(-\overset{0}{\breve{f}}(\overset{1}{\breve{f}}(\overset{2}{\breve{f}}(\dots(\overset{n}{\breve{f}}(0))\dots)))) \cdot [f'(0)]^n \leqslant q < 1 \quad (n=0,1,2,\dots). \tag{16}$$

I. — *Функција* $\xi_1(z)$ *је нейрекидна функција од* z *у размаку* [0,2], *ако је исйуњен услов*

$$f'(x) \leqslant q \cdot f'(0) \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\varkappa}$$

$$\left\{ q < 1; \; -a \leqslant x \leqslant -a(1 - f'(a)); \; \varkappa = -\frac{\log f'(0)}{\log f'(a)} \right\}. \tag{17}$$

Докази:

A. — Тачност тврдње А слиједи непосредно из особина низа (2) наведених у IA и ID.

B. — Доказ за В слиједи непосредно из IB, ID и из слиједеће чињенице: да би низ $x_0=-f(0)$, $x_{\nu+1}=-f(x_\nu)$ $(\nu=1,2,\ldots)$ био конвергентан, потребно је и довољно да једначина (13) има само један коријен ξ_0; ξ_0 је уједно и једини коријен једначине $t=-f(t)$.

C. — Претпоставимо да је $f'(\xi_0)>1$. Тада ξ_0 није једино рјешење једначине (13), те, према II B, $\xi_1(z)$ не може бити непрекидна функција у размаку $0\leqslant z\leqslant 2$. Овим је доказана тачност за С.

D. — Према (14) и (15) добива се

$$x_{\nu+1}-x_\nu=\varepsilon_0\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{\nu+1}\cdot f(0)\cdot\prod_{i=1}^{\nu} f'_{i,\,\nu}\cdot f'(\xi^{(\nu)}),\quad (0\leqslant z\leqslant 2)\qquad (18)$$

те $|x_{\nu+1}-x_\nu|\leqslant f(0)\cdot q^{\nu+1}\to 0$ за $\nu\to\infty$. Према II A, $\xi_1(z)$ је непрекидна функција. Овим је доказано D.

E. — Из дефиниције функције $f(x)$ слиједи да је: $f'(x)<1$ $(-a\leqslant x\leqslant +a)$, $f'(a)\leqslant 1$. Разликоваћемо два случаја према томе да ли је $\varepsilon_i=-1$ а) за коначно много, b) за бесконачно много вриједности индекса i. У случају а), према оном што је речено у I A, одговарајући низ (2) је конвергентан. У случају b) могуће је за свако N наћи један број $n(N)$ такав да за свако $\nu>n(N)$ постоји најмање N вриједности индекса $i\leqslant\nu$ за које је $\varepsilon_i=-1$. За свако такво ν можемо писати да је, с обзиром на (14), (15), (4) и особине извода $f'(x)$,

$$|x_{\nu+1}-x_\nu|=f(0)\cdot\prod_{k=0}^{N} f'_{\lambda_k,\,\nu}\cdot\prod_{\substack{i=1\\ i\neq\lambda_k\leqslant\lambda_N}}^{\nu} f'_{i,\nu}\cdot f'(\xi^{(\nu)})<f(0)\cdot[f'(0)]^N\to 0 \text{ за } N\to\infty.$$

Овим је, према II A, доказано Е.

F. У овом случају, због $f'(x)<1$ $(x\geqslant 0)$, вриједи, с обзиром на (18) и (4),

$$|x_{\nu+1}-x_\nu|=f(0)\cdot\prod_{i=1}^{\lambda_0-1} f'_{i,\nu}\cdot\prod_{k=0}^{k_\nu-1}\prod_{i=\lambda_k}^{\lambda_{k+1}-1} f'_{i,\nu}\cdot\prod_{i=\lambda_{k_\nu}}^{\nu} f'_{i,\nu}\cdot f'(\xi^{(\nu)})\leqslant$$

$$\leqslant f(0)\cdot 1\cdot q^{k_\nu}\cdot Q\cdot f'(\xi^{(\nu)})\to 0\quad\text{кад}\quad \nu\to\infty.$$

Ако је у (4) $k=0,1,\ldots,n$, гдје је n коначан број, одговарајући низ (2) је такођер конвергентан, како је то у IA већ раније утврђено.

G. — Доказ слиједи непосредно из II F и из чињенице да је $f'(t)<f'(\tau)<1 \quad (t>0)$.

H. — Да би се доказала тачност за H, довољно је доказати да су испуњени услови из II G ако је испуњен услов (16). — Заиста из (16) за $n=0$ слиједи $f'(\xi_0)\leqslant q<1$. С друге стране, лако је доказати да је

$$f'_{\lambda_k,\,\nu}<f'(-\overset{0}{f}(\overset{1}{f}(\overset{2}{f}(\dots(\overset{n+1}{f}(0))\dots)))),\quad n=\lambda_{k+1}-\lambda_k-1.$$

Према томе, ако је испуњен услов (16), онда је тим прије испуњен други од услова II G за $\tau=0$. Надаље, због $\xi^{(\nu)}<f(0)$, имамо

$$f'_{\lambda_{k_\nu},\,\nu}<f'(-\overset{0}{f}(\overset{1}{f}(\dots(\overset{n+1}{f}(0))\dots))),\quad n=\nu-\lambda_{k_\nu}.$$

Према томе из

$$f'(-\overset{0}{f}(\overset{1}{f}(\dots(\overset{n+1}{f}(0))\dots)))\cdot[f'(0)]^n\leqslant Q,\quad n=\nu-\lambda_{k_\nu}$$

слиједи да је тим прије

$$f'_{\lambda_{k_\nu},\,\nu}\cdot[f'(0)]^n\leqslant Q,\quad n=\nu-\lambda_{k_\nu}.$$

Међутим, замијенивши у (16) n са $n+1$, подијеливши, затим, добивену неједначину са $f'(0)$ и ставивши $q/f'(0)=Q$, добива се

$$f'(-\overset{0}{f}(\overset{1}{f}(\dots(\overset{n+1}{f}(0))\dots)))\,[f'(0)]^n\leqslant\frac{q}{f'(0)}=Q.$$

Овим је доказана тврдња H.

I. — У циљу доказивања ове тврдње користићемо се функцијом $\varphi(x)=kx+c$, $k=f'(a)$, $c=a(1-k)$. Једначина $y=kx+c$ је једначина тангенте криве $y=f(x)$ у тачки (a,a), те је

$$f(x)<\varphi(x)\quad(-a\leqslant x\leqslant+a),\quad f(a)=\varphi(a).$$

Потпуном индукцијом лако се доказује да је

$$\overset{0}{f}(\overset{1}{f}(\dots(\overset{n}{f}(0))\dots))<a(1-k^{n+1})\quad(n=0,1,2,\dots).$$

Из ове неједначине, због конкавности функције $f(x)$, слиједи

$$f'(-\overset{0}{f}(\overset{1}{f}(\dots(\overset{n}{f}(0))\dots)))<f'[-a(1-k^{n+1})]\quad(n=0,1,2,\dots).$$

Према томе, ако је

$$f'[-a(1-k^{n+1})]\cdot[f'(0)]^n \leqslant q < 1 \quad (n=0,1,2,\ldots), \tag{19}$$

онда је тим прије испуњен услов (16). Услов (19) је много једноставнији од услова (16), али је по обиму нешто ужи. Међутим, (19) се може замијенити још ужим и једноставнијим условом

$$f'[-a(1-k^t)]\cdot[f'(0)]^t \leqslant q\cdot f'(0), \quad (q<1;\ t\geqslant 1), \tag{20}$$

гдје је t непрекидна променљива величина $(t\geqslant 1)$. Извршивши смјену $x=-a(1-k^t)$ и ставивши да је $\varkappa=-\log f'(0)/\log f'(a)$, услов (20) прелази у услов (17).

III

За илустрацију закључака добивених у отсјецима I и II навешћемо овдје слиједећа два примјера.

Примјер 1. — Ако је

$$f(x)=\frac{a}{\sqrt[m]{2a}}\sqrt[m]{a+x}, \quad m>0,$$

онда у размаку $0\leqslant z\leqslant 2$

1° за $0<m<2^{-1}$ функције $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ имају пребројиво много тачака дисконтинуитета свуда густо распоређених у наведеном размаку;

2° за $2^{-1}\leqslant m<4$ функције $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ су непрекидне:

$$\xi_1(z)=\xi_2(z);$$

3° за $m>4$ питање остаје неријешено.

Доказ. — Посматрана функција $f(x)$ испуњава све претпоставке из I. За $0<m<1$ она је конвексна одоздо, за $m>1$ она је конкавна одоздо и за $m=1$ је $f(x)=(x+a)/2$, $f'(x)=2^{-1}$. Да би био испуњен и услов $f(x)>x$ $(|x|<a)$, у случају $m<1$, потребно је и довољно да је $m\geqslant 2^{-1}$. Према томе, а на основу II D и II E, за $2^{-1}\leqslant m\leqslant 1$ одговарајуће функције $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ су непрекидне функције од z у размаку $0\leqslant z\leqslant 2$. За $0<m<2^{-1}$ једначина $f(x)=x$ има осим корјена $x=a$ још један корijен $x=a'$ $(0<a'<a)$. У овом случају функција $f(x)$ $(-a'\leqslant x\leqslant a')$ испуњава све претпоставке наведене у I, при чему је још

$$b=f(-a)=a\,\frac{\sqrt[m]{a-a'}}{\sqrt[m]{2a}}>0.$$

За $m>1$, примијенивши (17), добивамо услов

$$1>q\geqslant\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{m}\left(1-\frac{\log 2^{m-1}}{\log 2m}\right)},\quad \left(m>1;\quad 0\leqslant 1+\frac{x}{a}\leqslant\frac{1}{2m}\right).$$

Да би овај услов био испуњен, потребно је и довољно да буде $1<m<4$.

Примјер 2. — Нека је $f(x)=c+\lambda x$, $\lambda\leqslant 2^{-1}$, $c=a(1-\lambda)$. Тада је, с обзиром на (3а).

$$x_\nu(t)=c\left(\sum_{i=0}^{\nu}\frac{1}{k^i}-2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d_i}{k^i}\right)+\frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_1\dots\varepsilon_\nu}{k^{\nu+1}}\,t.$$

За $\nu\to\infty$ добива се, независно од вриједности величине t,

$$\xi_1(z)=\frac{c\,k\,\theta'}{k-1},\quad \xi_2(z)=\frac{c\,k\,\theta''}{k-1},\quad(-1\leqslant\theta'\leqslant\theta''\leqslant+1).$$

За $k=2$ је $\xi_1(z)=\xi_2(z)=a(1-z)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Polya und Szegö — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, Berlin 1925., Aufgaben 183, 184, und 185.

[2] J. Карамата — *Весник Друштва математичара и физичара НР Србије* **3—4** (1949), стр. 157, задатак 14.

[3] Часлав Станојевић — Решење задатка 14. *Весник Друштва математичара и физичара НР Србије* **3—4** (1950), стр, 96.

SUR LES SUITES DÉFINIES PAR L'ÉQUATION $x_\nu=\varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\dots(\varepsilon_\nu f(0))\dots))$

par

M. BAJRAKTAREVIĆ

Chaque nombre z du segment $I=[0,2]$ peut être représenté sous la forme

$$z=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{d_\nu}{2^\nu},\quad(0\leqslant z\leqslant 2),\qquad (1$$

les nombres d_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ ayant, pour chaque z, la valeur déterminée 0 ou 1. A tout nombre z de I correspond univoquement une suite de nombres de la forme

$$x_\nu = \varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\ldots(\varepsilon_\nu f(0))\ldots)), \tag{2}$$

où les nombres ε_ν, donnés par les équations

$$\varepsilon_0 = 1 - 2d_0, \quad \varepsilon_\nu = \frac{1 - 2d_\nu}{1 - 2d_{\nu-1}}, \tag{3}$$

pour chaque z de I, ont la valeur déterminée $+1$ ou -1. Les deux suites (2), respectivement les deux suites (3), qui correspondent au nombre

$$z = \frac{p}{2^q}, \quad (0 < p < 2^{q+1}, \ q \geqslant 0),$$

sont considérées comme un élément de l'ensemble des suites (2), respectivement de l'ensemble des suites (3).

L'auteur étudie les propriétés des suites définies par l'équation (2). Dans la partie I on donne quelques propriétés générales des suites (2). Dans la partie II on a cité un certain nombre de criteriums pour la convergence de ces suites. Pour illustrer les résultats obtenus dans I et II on donne, dans la partie III, deux exemples dont le premier représente la généralisation de la suite particulière lorsque $f(x) = \sqrt{2+x}$ et qui a été étudiée par plusieurs auteurs.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Acad. Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

ВЛАДЕТА ВУЧКОВИЋ

ЈЕДНО ПРОШИРЕЊЕ УСЛОВА КОНВЕРГЕНЦИЈЕ КОД СТАВОВА ТАУБЕРОВЕ ПРИРОДЕ

За примену ставова Тауберове природе потребно је имати што општији облик услова конвергенције, како би се став могао применити на што ширу класу функција. Осим тога, истраживања у овом правцу дају дубљи увид у структуру инверзних ставова, показујући границе за класу функција које дозвољавају инверзију.

Циљ овог рада је да у том смислу настави нека проучавања J. Карамате, и то нарочито она из расправа [3] и [4].

1. Најпознатији облик услова конвергенције за ставове Тауберове природе је Шмитов:

$$(\text{УК-1}) \qquad \liminf_{x=\infty} \; \operatorname*{Min}_{x \leqslant x' \leqslant X(x,\varepsilon)} [f(x') - f(x)] \geqslant -\omega(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

При томе је $f(x)$ подинтегрална функција, а $X(x, \varepsilon)$ функција којом се одређује дужина размака конвергенције. Тако, на пример, за $(C\text{-}1)$- и A-збирљивост је $X(x, \varepsilon) = (1+\varepsilon)x$, за B-збирљивост $X(x,\varepsilon) = x + \varepsilon\sqrt{x}$ итд.

Карамата, који се у низу радова бавио проширавањем Шмитова услова, дао му је општи облик

$$(\text{УК-2}) \quad \liminf_{x=\infty} \; \operatorname*{Min}_{x \leqslant x' \leqslant X(x,\varepsilon)} \frac{\rho(x') f(x') - \rho(x) f(x)}{\rho(x)} \geqslant -\omega(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

где је $\rho(x)$ функција која не опада и осим тога задовољава још низ накнадних услова (в. нпр. Карамата [5]). Авакумовић [1] је у случају A-збирљивости (па према томе и $(C\text{-}k)$-збирљивости) показао да су сви ти услови непотребни и да је довољно да $\rho(x)$ припада класи $R-O$, тј. да је $\rho(x)$ функција дефинисана за $x \geqslant 0$ и да и да задовољава услов*

$$(1.1) \qquad \rho(x') \asymp \rho(x) \quad \text{униформно за} \quad x \leqslant x' \leqslant X(x,\varepsilon).$$

* Знак $F(x) \asymp G(x)$ значи да постоје две константе $0 < \mu < M$ тако да је $\mu \leqslant \dfrac{F(x)}{G(x)} \leqslant M$ кад $x \to \infty$.

С друге стране, у тежњи да обухвати један услов конвергенције који је дао Боас [2], Карамата је у [4] проширио Шмитов услов код $(C\text{-}1)$ - збирљивости дајући му облик

$$(\text{УК-3}) \quad \liminf_{x=\infty} \ \operatorname*{Min}_{x \leqslant x' \leqslant X(x,\varepsilon)} \{\Phi[f(x')] - \Phi[f(x)]\} \geqslant -\omega(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

где је функција $\Phi(x)$ непрекидна и стварно расте на целој реалној оси $(-\infty < x < \infty)$.

У овом раду ићи ћемо за тиме да Караматин услов конвергенције УК-3 проширимо на сличан начин као што услов УК-2 проширује услов УК-1, као и да том проширењу дамо неке специјалне облике.

2. У овој тачки увешћемо неке ознаке које ћемо стално задржати.

За функцију $\Phi(x)$ казаћемо да припада класи Φ ако је $\Phi(x)$ непрекидна и стално расте у целом размаку $-\infty < x < \infty$.

За функцију $\rho(x)$ рећи ћемо да припада класи $R-o$ ако она припада класи $R-O$ и ако уз то задовољава и услов

$$(2.1) \quad \limsup_{x=\infty} \ \operatorname*{Max}_{x \leqslant x' \leqslant X(x,\varepsilon)} \left| \frac{\rho(x') - \rho(x)}{\rho(x)} \right| = o(1), \quad \varepsilon \to 0.$$

С обзиром на финитну форму збирљивости коју ћемо проучавати, имаћемо углавном да је $X(x,\varepsilon) = x + \varepsilon$.

Слично ћемо за низ U_n рећи да припада класи $R-O$ ако је задовољен услов

$$(2.2) \quad U_{n'} \asymp U_n \text{ униформно за } n \leqslant n' \leqslant N(n,\varepsilon),$$

а да припада класи $R-o$ ако је поред (2.2) задовољен и услов

$$(2.3) \quad \limsup_{n=\infty} \ \operatorname*{Max}_{n \leqslant n' \leqslant N(n,\varepsilon)} \left| \frac{U_{n'} - U_n}{U_n} \right| = o(1), \quad \varepsilon \to 0.$$

3. Основни став овог рада је

Став I. *Нека је за* $x \geqslant 0$:

$\alpha(x)$ *функција која не опада, тежи бесконачности кад* $x \to \infty$ *и нека је*

$$(3.1) \quad \alpha(x) = \alpha(x+0);$$

$\varphi(x)$ *нека је инверзна функција функције* $\alpha(x)$ *и нека је*

$$(3.2) \quad \varphi(x) = \varphi(x-0);$$

$X = X(x,\varepsilon)$ *нека је најмањи број такав да буде*

$$(3.3) \quad \alpha(X) \geqslant \alpha(x) + \varepsilon, \ \varepsilon > 0,$$

тј.

$$(3.4) \quad X(x,\varepsilon) = \varphi[\alpha(x) + \varepsilon];$$

нека функција $\Phi(x)$ *припада класи* Φ, *а функција* $\rho(x)$ *класи* $R-o$ *и нека је функција* $f(x)$ *интеграбилна у односу на функцију* $\alpha(x)$.

Тада из

$$\int_0^x f(t)\,d\alpha(t)=o(1), \quad x\to\infty. \tag{3.5}$$

следи

$$f(x)=o(1), \quad x\to\infty \tag{3.6}$$

кадгод је задовољен услов конвергенције

$$\liminf_{x=\infty}\ \operatorname*{Min}_{x\leqslant x'\leqslant X(x,\varepsilon)} \frac{\rho(x')\,\Phi[f(x')]-\rho(x)\,\Phi[f(x)]}{\rho(x)} > o(1), \quad \varepsilon\to 0. \tag{УК-4}$$

4. Да би доказали став I довољно је доказати само да је

$$f(x)=O(1), \quad x\to\infty. \tag{4.1}$$

Наиме из (4.1) следи тада да услов УК-4 добива облик

$$\liminf_{x=\infty}\ \operatorname*{Min}_{x\leqslant x'\leqslant X(x,\varepsilon)} \{\Phi[f(x')]-\Phi[f(x)]\} > o(1), \quad \varepsilon\to 0, \tag{4.2}$$

који је потребан за o-инверзију*. То се лако увиђа из неједначине

$$\Phi[f(x')]-\Phi[f(x)]-M\left|\frac{\rho(x')-\rho(x)}{\rho(x)}\right| \leqslant \frac{\rho(x')\,\Phi[f(x')]-\rho(x)\,\Phi[f(x)]}{\rho(x)} \leqslant$$

$$\leqslant \Phi[f(x')]-\Phi[f(x)]+M\left|\frac{\rho(x')-\rho(x)}{\rho(x)}\right|,$$

узевши у обзир да из $f(x)=O(1)$ следи и $\Phi[f(x)]=\Phi[O(1)]=O(1)$, $x\to\infty$.

Без ограничења општости, нека је $\Phi(t)>0$ (иначе посматраћемо функцију $\Phi(t)+K$). Из услова УК-4 следи да је за $x>x_0$

$$\Phi[f(t)] > \frac{\rho(x)}{\rho(t)}\{\Phi[f(x)]-\omega(\varepsilon)-\varepsilon'\}, \quad x\leqslant t\leqslant X(x,\varepsilon),$$
$$\omega(\varepsilon)\to 0 \text{ кад } \varepsilon\to 0, \quad \varepsilon'\to 0 \text{ кад } x\to\infty,$$

па по услову (1.3)

$$\Phi[f(t)] > M(\varepsilon)\{\Phi[f(x)]-\omega(\varepsilon)-\varepsilon'\},$$

тј.

$$f(t) > \psi\{M(\varepsilon)[\Phi[f(x)]-\omega(\varepsilon)-\varepsilon']\}, \quad x\leqslant t\leqslant X(x,\varepsilon) \tag{4.3}$$

где је $\psi(t)$ инверзна функција функције $\Phi(t)$.

---

* o-инверзију нећемо доказивати, јер се она врши потпуно аналогно као код Карамате у [4].

По једначини (3.5) је за произвољно $\eta > 0$

$$(4.4) \qquad \eta > \frac{1}{\alpha(X)-\alpha(x)} \int_x^{X(x,\varepsilon)} f(t)\, d\alpha(t) > -\eta,$$

па је, узевши у обзир (4.3) и леву страну неједначине (4.4),

$$\eta > \psi \{M(\epsilon)[\Phi[f(x)] - \omega(\varepsilon) - \varepsilon']\},$$

тј.

$$(4.5) \qquad \frac{\Phi(\eta)}{M(\varepsilon)} > \Phi[f(x)] - \omega(\varepsilon) - \varepsilon'.$$

Ако у (4.5) пустимо прво да $x \to \infty$, а онда $\varepsilon \to 0$, добивамо најзад

$$(4.6) \qquad \limsup_{x=\infty} \Phi[f(x)] \leqslant \frac{\Phi(0)}{M(0)} = C,$$

при чему је по (1.3) $M(0) \neq 0$.

Слично, из услова

$$(4.7) \quad \liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x \leqslant x' \leqslant X(x,\varepsilon)} \frac{\rho(X)\Phi[f(X)] - \rho(x')\Phi[f(x')]}{\rho(X)} > o(1), \quad \varepsilon \to 0$$

који је еквивалентан са условом УК-4, и из десне стране неједначине (4.4) добићемо

$$(4.8) \qquad \liminf_{x=\infty} \Phi[f(x)] \geqslant C_1.$$

Из (4.6), (4.8) и из непрекидности функције $\Phi(t)$ закључујемо да је

$$(4.9) \qquad f(x) = O(1), \quad x \to \infty.$$

Тиме је завршена O-инверзија.

Према примедби на почетку ове тачке, сада је лако извршити o-инверзију и добити да је

$$(4.10) \qquad f(x) = o(1), \quad x \to \infty.$$

чиме је завршен доказ става I.

5. Став I садржи уопштења већине ставова за интеграле и функције из Караматине расправе [3]. Ми их овде нећемо наводити сем једног, који нам се чини нарочито погодним да осветли природу уопштења које се постигло условом УК-4.

Уопштавајући више ставова Ландауа и Харди-Литлвуда, Карамата је у наведеној расправи доказао и следећи став:

Ако фунција $F(x)$ има своја прва два извода, тада из

$$F(x) \to A, \quad x \to \infty \tag{5.1}$$

а услова

$$cF'(x) + F''(x) > O(1), \quad x \to \infty, \tag{5.2}$$

где је с произвољна константа, следи

$$F'(x) \to 0, \quad x \to \infty. \tag{5.3}$$

(в. Карамата [**3**], став 2.)

Извешћемо сада једно даље уопштење овог става. То је

Став 5.1. *Из* (5.1) *следи* (5.3) *кадгод је задовољен услов*

$$c\,\Phi[F'(x)] + \Phi'[F'(x)] \cdot F''(x) > O(1), \quad x \to \infty, \tag{5.4}$$

где је с произвољна константа, а $\Phi(x)$ припада класи Φ и има у свакој тачки први извод.

Јасно је да се за $\Phi(x) = x$ услов (5.4) своди на услов (5.2).
Став 5.1 специјалан је случај става I, и то ако се узме да је

$$\mathrm{X}(x, \varepsilon) = x + \varepsilon, \quad \rho(x) = \exp(cx), \quad \alpha(x) = x \quad \text{и} \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + A.$$

Да бисмо показали да је услов УК-4 заиста задовољен ако је задовољен услов (5.4), помножимо (5.4) са e^{cx} и скупимо чланове са леве стране. Тад услов (5.4) постаје

$$\{e^{cx}\,\Phi[F'(x)]\}' > -Me^{cx}. \tag{5.5}$$

Интеграцијом неједначине (5.5) од x до $x' = x + \varepsilon$ и деобом са e^{cx} добивамо, стављајући $F'(x) = f(x)$,

$$\frac{e^{cx'}\,\Phi[f(x')] - e^{cx}\,\Phi[f(x)]}{e^{cx}} > -M\,\frac{e^{cx'} - cx}{e^{cx}}.$$

Како је, за $x' \leqslant x + \varepsilon$,

$$\frac{e^{cx'} - e^{cx}}{e^{cx}} \leqslant e^{\varepsilon} - 1 \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

следи да је услов УК-4 заиста задовољен за $\rho(x) = e^{cx}$. Остале замене су очевидне, те их не морамо детаљно изводити.

6. Да би у ставу I од функција прешли на низове, ставићемо

$$\alpha(x) = Q_n = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \quad \text{за} \quad n \leqslant x < n+1, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$\rho(x) = \rho_n \quad \text{за} \quad n - \theta \leqslant x < n+1-\theta, \quad 0 < \theta < 1$$

$$f(x) = a_n \quad \text{за} \quad n - \theta \leqslant x < n+1-\theta.$$

Тако ћемо добити

Став I'. *Нека је за* $n = 1, 2, 3, \ldots$ a_n *дати низ произвољних реалних бројева;* $Q_n = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu$ *низ бројева који не опадају и теже бесконачности са* n, *тј.*

$$(6.1) \qquad q_n \geqslant 0\,; \quad Q_n \to \infty, \quad n \to \infty\,;$$

број $N = N(n, \varepsilon)$ *дефинисан као најмањи цео број који задовољава неједначину*

$$(6.2) \qquad Q_N \geqslant Q_n + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0;$$

ρ_n *низ који припада класи* $R - o$ *и* $\Phi(t)$ *функција која припада класи* Φ.

Тада из

$$(6.3) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu q_\nu = o(1), \quad n \to \infty$$

следи

$$(6.4) \qquad a_n = o(1), \quad n \to \infty$$

кадгод је задовољен услов конвергенције

$$(\text{УК-4}') \qquad \liminf_{n=\infty} \ \operatorname{Min}_{n \leqslant n' \leqslant N(n,\varepsilon)} \frac{\rho_{n'} \Phi[a_{n'}] - \rho_n \Phi[a_n]}{\rho_n} > o(1), \quad \varepsilon \to 0.$$

И овај став садржи проширења већине ставова за низове из Караматине расправе [**3**], од којих ћемо навести само једно.

7. Приметимо пре свега да је услов УК-4′ увек задовољен ако је $0 < q_n \to 0$, $n \to \infty$, $\log(\rho_{n-1}/\rho_n) = O(q_n)$, $n \to \infty$ и

(7.1) $$\rho_{n+1}\,\Phi(a_{n+1}) - \rho_n\,\Phi(a_n) < O(\rho_n\,q_n)\,, \quad n \to \infty\,,$$

(в. Карамата [3] стр. 220).

Ставимо ли $q_n = 1/D_n$, $a_n = D_n\,U_n$ и претпоставимо ли да је

$$D_n - D_{n-1} = O(1)\,, \quad n \to \infty\,.$$

тада ставу I′ можемо дати следећи облик:

Став 7.1. *Под претпоставком да за $n = 1, 2, 3, \ldots$ низови D_n и ρ_n задовољавају следеће услове:*

$$0 < D_n \to \infty, \quad D_n - D_{n-1} = O(1)\,, \quad n \to \infty,$$

$$0 < \rho_n\,, \quad \rho_n - \rho_{n-1} = O(\rho_n/D_n)\,, \quad n \to \infty$$

и да функција $\Phi(t)$ припада класи Φ, из

$$\sum_{\nu=1}^{n} U_\nu = o(1)\,, \quad n \to \infty$$

следи

$$D_n\,U_n \to 0\,, \quad n \to \infty$$

кадгод је задовољен услов

(7.1) $$\rho_{n+1}\,\Phi(D_{n+1}\,U_{n+1}) - \rho_n\,\Phi(D_n\,U_n) < O\left(\frac{\rho_n}{D_n}\right), n \to \infty.$$

Ставимо ли у овом ставу $\rho_n = n^{-\mu}$, $D_n = n$, $n = 1, 2 \ldots$ и $\Phi(t)) = t^{1/(2k+1)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ он прелази у

Став 7.2. *Из конвергенције реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$ са произвољним реалним члановима U_ν следи да*

$$n\,U_n \to 0 \quad ca \quad 1/n$$

кадгод је задовољен услов

$$U_{n+1}^{\frac{1}{2k+1}} - U_n^{\frac{1}{2k+1}} < \mu \frac{U_n^{\frac{1}{2k+1}}}{n} + \frac{M}{n^{1+\frac{1}{2k+1}}} \tag{7.2}$$

где су μ *и* M *произвољне константе.*

Напоменимо да услов (7.1) не добива одмах облик

$$U_{n+1}^{\frac{1}{2k+1}} - U_n^{\frac{1}{2k+1}} < \mu \frac{U_n}{n} + \frac{M}{n^{1+\frac{1}{2k+1}}},$$

већ постаје

$$\frac{U_{n+1}^{\frac{1}{2k+1}}}{(n+1)^{\mu-\frac{1}{2k+1}}} - \frac{U_n^{\frac{1}{2k+1}}}{n^{\mu-\frac{1}{2k+1}}} < \frac{M}{n^{1+\mu}}.$$

Помножимо ли ову неједначину са $(n+1)^{\mu-\frac{1}{2k+1}}$ и одузмемо ли лево и десно $U_n^{\frac{1}{2k+1}}$, она постаје

$$U_{n+1}^{\frac{1}{2k+1}} - U_n^{\frac{1}{2k+1}} < \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu-\frac{1}{2k+1}} - 1\right] U_n^{\frac{1}{2k+1}} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu} \frac{M}{n^{1+\frac{1}{2k+1}}}.$$

Сменивши $\mu - \dfrac{1}{2k+1}$ са μ (због произвољности броја μ) одавде се лако добива облик (7.2).

У случају да желимо општи закључак, наиме да

$$n^{\alpha} U_n \to 0, \quad \alpha > 0, \quad n \to \infty,$$

у услову (7.2) мења се само други члан са десне стране, који у овом случају добива облик

$$\frac{M}{n^{\frac{2(k+\alpha)}{2k+1}}}.$$

Став 7.2 је уопштење става Ж' из наведене Караматине расправе. Караматин услов

$$U_{n+1} - U_n < \mu \frac{U_n}{n} + \frac{M}{n^2}$$

добива се из услова (7.2) за $k=0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Avakumović V. — Sur une extension de la condition de convergence des théorèmes inverses de sommabilité. *C. R.* **200** (1935), p. 1515–1517.

[2] Boas R. P. — A Tauberian theorem connected with the problem of three bodies *Am. J. of Math.* **61** (1938) str. 151–164.

[3] Карамата Ј. — Неколико ставова Тауберове природе у односу на асимптотско понашање интеграла и редова. *Глас С. К. А.* CLXV, **81** (1935), први разред, стр. 173–229.

[4] ——— Ein Tauberscher Satz im Dreikörperproblem. *Am. J. of Math.* **61** (1939), str. 769–770.

[5] ——— Einige weitere Konvergenzbedingungen der Inversionssätze der Limitierungsverfahren. *Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade* **2** (1933), str. 1–16

UNE EXTENSION DE LA CONDITION DE CONVERGENCE DANS LES THÉORÈMES DE NATURE TAUBERIENNE

par

Vladeta Vučković

Par un procédé analogue à celui de Karamata dans [**4**] on montre que la condition de convergence pour la sommabilitée d'un type „finite"

$$\liminf_{x=\infty} \min_{x \leqslant x' \leqslant X(x,\varepsilon)} \{\Phi[f(x')] - \Phi[f(x)]\} > o(1), \quad \varepsilon \to 0$$

peut être géneralisée sous la forme

$$\liminf_{x=\infty} \min_{x \leqslant x' \leqslant X(x,\varepsilon)} \frac{\rho(x')\,\Phi[f(x')] - \rho(x)\,\Phi[f(x)]}{\rho(x)} > o(1), \quad \varepsilon \to 0,$$

où $\rho(x)$ est une fonction à croissance régulière c'est-à-dire une fonction satisfaisant les conditions (1.1) et (2.1). Du théorème géneral I avec cette condition de convergence, sont tirés, comme simples corrolaires, les théorèmes suivants:

Théorème 5.1. *Soit $F(x)$ une fonction qui admet ses deux dérivées prémières, de $F(x) \to A, x \to \infty$ il s'ensuit que $F'(x) \to 0$, $x \to \infty$ s'il existe une fonction $\Phi(t)$, avec $\Phi'(t) > 0$ dans tout intervalle $(-\infty, \infty)$ telle que la condition de convergence*

$$c\,\Phi[F'(x)] + \Phi'[F'(x)]\,F''(x) > O(1), \quad x \to \infty$$

soit remplie, avec c quelconque.

Théorème 7.2. De la convergence de la série $\Sigma\ U_\nu$ *et de la condition de convergence*

$$U_{n+1}^{\frac{1}{2k+1}} - U_n^{\frac{1}{2k+1}} < \mu \frac{U_n^{\frac{1}{2k+1}}}{n} + \frac{M}{n^{1+\frac{1}{2k+1}}},$$

avec μ *et* M *quelconques, il s'ensuit que*

$$n\,U_n \to o \quad avec \quad 1/n.$$

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

МИОДРАГ ТОМИЋ

О ЈЕДНОМ СТАВУ Л. БЕРВАЛДА

1. У свом раду [1], као специјалан случај једног оппттег става ([1] став 2, стр. 67, види такође [5]) Л. Бервалд је доказао овај став, који садржи познати Какејев став:

Ако коефицијенти реалног полинома

$$f(x)=c_0+c_1 x+c_2 x^2+\ldots+c_n x^n\,, \tag{1}$$

задовољавају неједначине

$$\begin{gathered} 0>c_0>c_1>\ldots>c_{k-1}\,, \\ c_k>c_{k-1}>\ldots>c_n\,, \\ 0\leqslant k\leqslant n+1\,,\quad c_{-1}=c_{n+1}=0\,, \end{gathered} \tag{2}$$

тада полином $f(x)$ има на јединичном кругу највише просту нулу $x=1$, у унутрашњости јединичног круга k или $k-1$ нула према томе да ли је $f(1)>$ или $\leqslant 0$ ([1] став 3, стр. 70).

За доказ свих ставова ове врсте поменути аутор користи више помоћних ставова, између осталог један Фејеров став ([1] Hilfssatz 1, стр. 62—63) који се односи на косинусне полиноме са конвексним коефицијентима.

Овде ћемо доказати овај став користећи један прост геометриски принцип који смо и раније употребљавали за доказ сличних ставова [3], [4]. Сем тога користим још и чињеницу да су *нуле полинома непрекидне функције коефицијената.*

Истим геометриским принципом доказаћемо и следећи став А. Брауера ([2], став 2) који не следи из Бервалдових ставова:

Полином

$$f(x)=x^n-(a_1 x^{n-1}+a_2 x^{n-2}+\ldots+a_n)\,, \tag{8}$$

где су a_i цели коефицијенти који задовољавају услове

$$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\ldots\geqslant a_n>0\,, \tag{4}$$

има све нуле сем једне у јединичном кругу.

Преко једног става О. Перона, А. Брауер [2] изводи из овог става да је *полином* (3) *са целим рационалним коефицијентима који задовољавају* (4), *несводљив у рационалном или квадратном имагинарном пољу.*

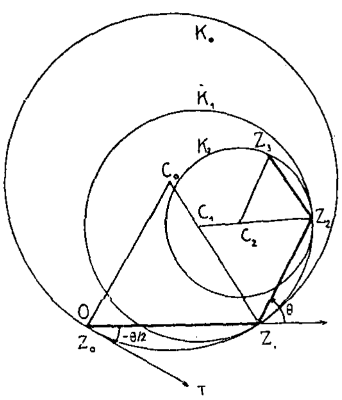
2. *Геометриска интерпретација и њене особине* [3], [4]:

А. Нека су

(5) $$a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n > 0,$$

(6) $$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i}, \quad n = 0, 1, \quad 0 < \theta \leqslant \pi,$$

K_ν кругови из чијих се тачака дуж $\overline{z_\nu z_{\nu+1}}$ види под углом $\theta/2$.



Сл. 1

Тада је (в. сл. 1)

1^0 $K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_n$.

2^0 Тангента у тачки z_n на круг K_n заклапа угао $-\theta/2$ са $\overline{z_{n-1} z_n}$. Специјално тангента у почетку z_0, чини угао $-\theta/2$ са реалном осом.

В. На исти начин се образује систем кругова и изводе њихове особине 1^0 и 2^0 ако је

$$0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n.$$

У овом случају биће, например, особина 1^0 изражена са

1^0 $K_o \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n$.

3. *Доказ Бервалдова става.*

Написаћемо (1) са условима (2) у облику

$$-f(x) = -c_0 - c_1 x - \dots - c_{k-1} x^{k-1} - x^k (c_k + c_{k+1} x + \dots + c_n x^{n-k}).$$

Због првог услова (2) према В 1^0 за $x = e^{\theta i}$ $(\theta \neq 0)$ збир

$$-c_0 - c_1 x - \dots - c_{k-1} x^{k-1},$$

налази се у систему кругова $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_{k-1}$, односно на кругу K_{k-1} (в. сл. 2).

Због другог од услова (2) за $x = e^{\theta i}$ $(\theta \neq 0)$ вектор

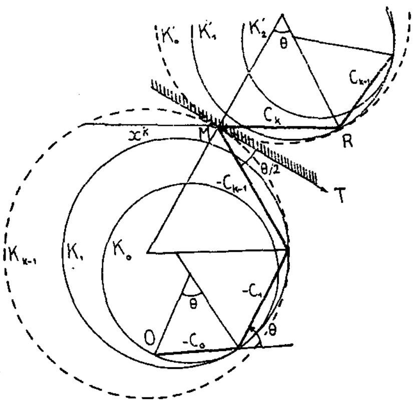
$$-x^k (c_k + c_{k+1} x + \dots + c_n x^{n-k})$$

је у систему кругова $K'_0 \supset K'_1 \supset \dots \supset K'_{n-k}$. Кругови K_{k-1} и K'_0 имају заједничку тангенту $\overrightarrow{MT}$, тј. додирују се споља (в. сл. 2).

Ово следи из А 2^0 и В 2^0. Отуда је $f(e^{\theta i}) \neq 0$ за $0 < \theta \leqslant \pi$, јер је крај вектора $f(e^{\theta i})$ увек изнад $\overrightarrow{MT}$, тј. изван круга K_0 (на коме лежи 0). Нека је сада, например, $f(1) > 0$. Ако на непрекидан начин првих k коефицијената c_0, $c_1, \ldots c_{k-1}$ теже нули, а при томе услови (2) остају стално испуњени следи да $f(x)$ има $n-k$ нула изван круга $|x|=1$. У ствари, тада

$$-f(x) \to -x^k(c_k + c_{k+1}x + \ldots + c_n x^{n-k}),$$

а овај последњи полином има према Какеја ставу [3] $n-k$ нула ван $|x|=1$, па је то случај и у почетном положају (где је $f(x)$ дато са (1)). Ово следи из чињенице да је услов (2) по претпоставци стално испуњен, тако да ни једна нула приликом варијације c_ν $(\nu=0, 1, 2, \ldots, k-1)$ не може доћи на круг $|x|=1$ догод је $\theta \neq 0$. (За свако $\theta \neq 0$ и c_ν постоји слика 2.) Сем тога, када c_ν, $\nu=0, 1, 2, \ldots, k-1$ теже нули (например монотоно) биће стално $-f(1) < 0$ као у почетном положају, па нуле не могу прећи ни кроз реалну осу. $f(x)$ има још једну реалну нулу у (0,1) ако је $f(1) > 0$, што се непосредно види из $f(0) = c_0 < 0$ и $f(1) > 0$.



Сл. 2

Ако је $f(1) \leqslant 0$, резоновање је потпуно исто, само треба пустити да последњих $n-k$ коефицијената $c_k, c_{k+1}, \ldots, c_{n-k}$ теже непрекидно нули.

Доказ Брауерова става. За $\theta \neq 0$, $|x| \geqslant 1$ $(x = |x| e^{\theta i})$ лако се види да је $\varphi(x)$ дато са (3) $\neq 0$. Довољно је да $\varphi(x)$ напишемо у облику

$$-\varphi(x) = a_n + \ldots + a_1 x^{n-1} - x^n.$$

Први збир овог израза налази се у систему кругова (сл. 2) K_0, $K_1, \ldots, K_{n-1}$, који се могу и сви поклапати (ако је $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$), а члан $-x^n$ на правој $\overline{MR}$, дакле изван K_0. Тиме је доказано да је $\varphi(x) \neq 0$ за $\theta \neq 0$ и $|x| \geqslant 1$. Функција $\varphi(x)/x^n$ има само један реалан корен у $(1, \infty)$, јер $\varphi(x)/x^n \to 1$ за $x \to \infty$ и $\varphi(1) < 0$ (јер су a_i бројеви $\neq 0$) и најзад извод од $\{\varphi(x)/x^n\}$ је позитиван за $x > 0$. Дакле, $(n-1)$ корена од $\varphi(x)$ су у кругу $|x| = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Berwald — Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze. *Math. Zeit.* **37** (1932), 61—76.

[2] A. Brauer — On algebraic equations with all but one root in the interior of the unit circle. *Math. Nachr.* **4** (1950/51), 250—257.

[3] M. Tomić — Généralisation et démonstration géometrique de certaines théorèmes de Fejér et Kakeya. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe de Sci.* **2** (1848), 146—154.

[4] ———— О тригонометриским збировима. *Зборник радова Мат. института* **2** (1952), 13—52.

[5] M. Marden — The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable, New York 1949.

SUR UN THÉORÈME DE L. BERWALD

par

MIODRAG TOMIĆ

En utilisant une méthode géometrique élémentaire, déjà exposée dans [**3**] et [**4**], on déduit une simple démonstration du suivant théorème de L. Berwald ([**1**] th. 3, p. 70):

Si les coefficients d'un polynôme (1) *satisfont aux conditions* (2) *alors* (1) *possède sur la circonférence du cercle d'unité au plus un zéro simple* $x=1$ *et dans le circle d'unité* k *ou* $k-1$ *zéros suivant que* $f(1) >$ *ou* $\leqslant 0$.

La même méthode géometrique donne immediatement le suivant héorème de A. Brauer ([**2**], th. 2):

Le polynôme (3) *dont les coefficients sont des nombres entiers satisfaisant aux* (4), *a tous ces zéros, à l'exception d'un, dans le cercle d'unité.*

La démonstration du théorème de L. Berwald éxige encore le ait bien connu, que les zéros d'un polynôme sont des fonctions continues de ses coefficients.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

ШЕФКИЈА РАЉЕВИЋ

О ЈЕДНОЈ ПРАВОЈ И ЈЕДНОЈ КАРАКТЕРИСТИЧНОЈ ДУЖИ У ПОЛИГОНИМА НУЛА ПОЛИНОМА

1. Нека су z_ν, $\nu=1,2,\ldots,p<n$, различите нуле полинома n-тог степена

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_n\neq 0, \tag{1}$$

и нека је ред вишеструкости сваке од њих, респективно, m_ν, $\nu=1,2,\ldots p$, тј. нека је

$$P_n(z)=a_n\prod_{\nu=1}^{p}(z-z_\nu)^{m_\nu}; \qquad n=\sum_{\nu=1}^{p} m_\nu\,. \tag{2}$$

Тада је тежиште ζ_1 нула полинома $P_n(z)$, које ћемо ради краткоће у изражавању називати Г а у с о в о т е ж и ш т е полинома, одређено релацијом

$$\zeta_1=\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{p} m_\nu z_\nu}{\sum\limits_{1}^{p} m_\nu}=-\frac{a_{n-1}}{n\,a_n}\,, \tag{3}$$

а тежиште ζ_2 полигона нула полинома $P_n(z)$, које ћемо за разлику од тежишта (3) називати г е о м е т р и ј с к о т е ж и ш т е полинома, релацијом

$$\zeta_2=\frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{p} z_\nu\,. \tag{4}$$

Гаусово тежиште ζ'_1 изводног полинома $P'_n(z)$, гдје је

$$P'_n(z)=P_n(z)\cdot\sum_{1}^{p}\frac{m_\nu}{z-z_\nu}=n\,a_n\prod_{j=1}^{q}(z-z'_j)^{m'_j}\,, \quad \sum_{1}^{q} m'_j=n-1\,, \tag{5}$$

одређено је релацијом

$$\zeta'_1 = \frac{\sum_1^q m'_j z'_j}{\sum_1^q m'_j} = -\frac{a_{n-1}}{n\, a_n}, \tag{6}$$

његово геометријско тежиште релацијом

$$\zeta'_2 = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} z'_j$$

а Гаусово тежиште $\overset{*}{\zeta_1}$ полинома

$$P_*(z) = P'_n(z) \Big/ \prod_{\nu=1}^{p} (z - z_\nu)^{m_\nu - 1} = \prod_{j=1}^{\lambda} (z - z'_j)^{m'_j}, \quad \sum_1^{\lambda} m'_j = p - 1, \tag{8}$$

чије су нуле оних $p-1$ нула изводног полинома (5) које нису идентичне са нулама полинома (2), одређено је релацијом

$$\overset{*}{\zeta_1} = \frac{\sum_1^{\lambda} m'_j z'_j}{\sum_1^{\lambda} m'_j} = \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^{\lambda} m'_j z'_j. \tag{9}$$

Очигледно је да је Гаусово тежиште (3) полинома $P_n(z)$ идентично са геометријским тежиштем (4) само у случају кад све нуле тога полинома имају исти ред вишеструкости, тј. кад је

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_p \geqslant 1. \tag{10}$$

У сваком другом случају та два тежишта су различита и одређују праву

$$(\zeta_1, \zeta_2) \tag{11}$$

у равни комплесних бројева.

У тачки 2 ћемо показати да права (11) има за распоред нула полинома (2) значење слично оном што га има реална оса за распоред нула оних полинома чији су коефициенти реални бројеви.

У тачки 3 ћемо доказати:

Став 1. *Ако се Гаусово тежиште ζ_1 и геометријско тежиште ζ_2 полинома $P_n(z)$ не поклапају, тада се та два тежишта и Гаусово тежиште ζ_1^* полинома $P_*(z)$, чије су нуле оних $p-1$ нула изводног полинома $P'_n(z)$, које нису идентичне са нулама полинома $P_n(z)$, налазе на једној истој правој. При томе тежиште ζ_1^* дијели споља растојање тежишта ζ_2 и ζ_1 у односу $1:p$.*

Ако, поред тога, полином $P_n(z)$ нема једноструких, а полином $P_*(z)$ нема вишеструких нула, тада се и геометријско тешиште ζ'_2 изводног полинома $P'_n(z)$ налази на правој (ζ_1, ζ_2), при чему тежиште ζ'_2 дијели споља растојање тежишта ζ_2 и ζ_1 у односу $1:2p$.

У тачки 4 доказујемо:

Став 2. *У случају* $p=3$, *праву* (ζ_1^*, ζ_1) *треба схватити као генералисану Ајлерову праву, а дуж* $\zeta_1 - \zeta_1^*$ *као генералисану Ајлерову дуж.*

2. Узмимо праву (11) за реалну осу и ставимо

$$z_\nu = x_\nu + y_\nu i, \quad \nu = 1, 2, \ldots, p. \tag{12}$$

Тада ћемо, поред односа

$$\sum_{\nu=1}^{p} m_\nu y_\nu = 0, \tag{13}$$

који слиједи из (3), добити још и однос

$$\sum_{\nu=1}^{p} y_\nu = 0, \tag{14}$$

који слиједи из (4), што значи, *да су нуле полинома* (2) *распоређене са једне и са друге стране праве* (11), *тако да је збир удаљености нула од те праве са једне њене стране једнак збиру удаљености нула са друге стране.*

У случају кад полином (2) има само једну нулу реда m_1, а све остале нуле истог реда m_2, различитог од m_1, тј. кад је $m_2 = m_3 = \ldots = m_p \neq m_1$, тада се нула реда m_1 налази на правој (11). То слиједи отуда што је, према (3) и (4),

$$\zeta_1 [m_1 + (p-1) m_2] = m_1 z_1 + m_2 \sum_{\nu=2}^{p} z_\nu,$$

$$m_2 p \zeta_2 = m_2 z_1 + m_2 \sum_{\nu=2}^{p} z_\nu,$$

одакле је

$$m_2 p (\zeta_1 - \zeta_2) = (m_1 - m_2)(z_1 - \zeta_1). \tag{15}$$

Једнакост (15) показује не само да тачка z_1 лежи на правој (11), већ и у каквом односу стоје величине дужи $z_1 - \zeta_1$ и $\zeta_1 - \zeta_2$.

3. Између нула полинома (2) и нула полинома (8) постоји однос

$$\sum_{=1}^{\lambda} m'_j z'_j = \frac{1}{\sum_{1}^{p} m_\nu} \sum_{j=1}^{p} \left[m_j \left(\sum_{\nu=1}^{p} z_\nu - z_j \right) \right] = \sum_{\nu=1}^{p} z_\nu - \frac{\sum_{1}^{p} m_\nu z_\nu}{\sum_{1}^{p} m_\nu} \tag{16}$$

те, у вези са (3), (4) и (9), имамо

$$\overset{*}{\zeta_1}=\frac{p\,\zeta_2-\zeta_1}{p-1},$$

односно (17)

$$(\zeta_2-\overset{*}{\zeta_1}):(\zeta_1-\overset{*}{\zeta_1})=1:p.$$

Ако је при томе још свако $m_\nu>1$, $\nu=1,2,...,p$, а полином (8) нема вишеструких нула, тада је

$$\lambda=p-1,\quad q=2p-1,\quad \sum_1^q z'_j=\sum_1^p z_\nu+\sum_1^{p-1} z'_j$$

те је

$$\zeta'_2=\frac{2p\zeta_2-\zeta_1}{2p-1},$$

односно (18)

$$(\zeta_2-\zeta'_2):(\zeta_1-\zeta'_2)=1:2p.$$

Из (17) и (18) слиједи став 1.

4. Кад је $p=3$, тачке z_1, z_2, z_3, у којима су смјештене истоимене нуле полинома (2), и Гаусово тежиште ζ_1 тога полинома одређују, у општем случају, један потпуни четвероврх у равни комплексних бројева. Средине страна

$$\xi_1=\frac{1}{2}(z_2+z_3),\quad \xi_2=\frac{1}{2}(z_3+z_1),\quad \xi_3=\frac{1}{2}(z_1+z_2),$$

(19)

$$\eta_\nu=\frac{1}{2}(z_\nu+\zeta_1),\quad \nu=1,2,3$$

и дијагоналне тачке

$$z_{jk}=(m_j z_j+m_k z_k)/(m_j+m_k),\quad j,k=1,2,3 \tag{20}$$

тога четвероврха налазе се на конусном пресјеку девет тачака [**1**; стр. 84, 110, 121]

$$(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\eta_1\,\eta_2\,\eta_3\,z_{12}\,z_{23}\,z_{31}). \tag{21}$$

С друге стране, тачком $\overset{*}{\zeta_1}$ као центром и тачкама z_1, z_2, z_3, одређен је, у општем случају, један и само један конусни пресјек

$$(\overset{*}{\zeta_1};\,z_1\,z_2\,z_3) \tag{22}$$

описан око $\Delta\,(z_1\,z_2\,z_3)$.

Из (3), (4), (17) и (19) имамо редом

$$\zeta_2-\overset{*}{\zeta_1}=\frac{1}{2}(\zeta_1-\zeta_2), \tag{23}$$

$$\zeta_0 = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \overset{*}{\zeta_1}) = \frac{1}{2}(\xi_\nu + \eta_\nu), \quad \nu = 1, 2, 3, \tag{24}$$

$$\xi_\nu - \overset{*}{\zeta_1} = \frac{1}{2}(\zeta_1 - z_\nu), \quad \nu = 1, 2, 3, \tag{25}$$

$$z_\nu - \overset{*}{\zeta_1} = \eta_\nu - \xi_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \tag{26}$$

$$\eta_j - \eta_k = \frac{1}{2}(z_j - z_k), \quad j, k = 1, 2, 3, \tag{27}$$

одакле произилази:

а) геометријско тежиште ζ_2 дијели изнутра растојање Гаусових тежишта ζ_1^* и ζ_1 у односу $1:2$;

b) центар конусног пресјека девет тачака (21) налази се на средини дужи $\zeta_1 - \zeta_1^*$;

c) конусни пресјеци (21) и (22) су двоструко хомотетични, а њихови хомологни елементи се односе као $1:2$.

У специјалном случају, кад је $m_\nu = \nu \cdot m$, $\operatorname{tg} \measuredangle z_\nu = \nu$, $(\nu = 1, 2, 3)$; Гаусово тежиште полинома (2) се поклапа са ортоцентром троугла $(z_1 z_2 z_3)$ (слиједи из [2; стр. 113]), а Гаусово тежиште полинома (8) са центром круга описаног око тога троугла. У том случају је, дакле, (21) Фајербахов круг, (22) круг описан око $\Delta(z_1 z_2 z_3)$, а дуж $\zeta_1 - \zeta_1^*$ Ајлерова дуж у том троуглу.

Одатле, као закључак, Став 2.*

5. Напоменимо на крају да је полином (2) само специјалан случај функције

$$f(z) = a \prod_{\nu=1}^{p} (z - z_\nu)^{m_\nu}, \quad m_\nu \gtrless 0, \quad \sum_1^p m_\nu \neq 0; \tag{28}$$

да у том случају нуле полинома (8) одговарају нулама функције

$$F(z) = d[\log f(z)]/dz = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{m_\nu}{z - z_\nu} \tag{29}$$

и да, и у том случају, вриједе односи (16), (17) и (18), тј. да и за функције (28) и (29) вриједе ставови 1 и 2, уз одговарајуће измјене у значењу појмова Гаусово и геометријско тежиште, дефинисаних (и у овом случају) са (3), (4), (7) и (9).

* Ако тачке ξ_1, ξ_2, ξ_3, (19), схватимо као геометријска тежишта системâ одређених са $p-1$ од p датих тачака, тада слична генерализација Ајлерове праве и Ајлерове дужи вриједи и за $p > 3$, и не само за тачке у једној равни, већ и за тачке распоређене макар како у простору.

Ова чињеница, за случај $p=3$ на примјер, омогућује врло једноставну геометријску конструкцију фокуса Марденових [3; стр. 8] конусних пресјека, уз претпоставку да је познат положај тачке $\zeta_1=(m_1 z_1+m_2 z_2+m_3 z_3)/(m_1+m_2+m_3)$ у односу на дати $\Delta(z_1 z_2 z_3)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Coxeter — The real projective plan, New York, Toronto, London, 1949.
[2] J. Карамата — Комплексан број, Београд, 1950.
[3] M. Marden — The Geometry of the zeros of polynomial in a complex variable, New York, 1949.

SUR UNE DROITE ET SUR UN SEGMENT CARACTÉRISTIQUE DANS LES POLYGONES DES ZÉROS DES POLYNÔMES

par

ŠEFKIJA RALJEVIĆ

Soient: (3) le centre de gravité des zéros et (4) le centre de gravité du polygone des zéros du polynôme (2); (7) le centre de gravité du polygone des zéros de la derivée (5) du polynôme (2), et (9) le centre de gravité des (p—1) zéros du polynôme (5) qui ne sont pas identiques aux zéros du polynôme (2), ou, ce qui revient au même, le centre de gravité des zéros du polynôme (8).

Les deux centres de gravité (3) et (4) ne sont identiques l'un à l'autre que dans le cas (10), tandis que dans tous les autres cas ils déterminent la droite (11). Pour cette droite on donne les deux théorèmes suivants:

Théorème 1. Si (10) n'est pas valable, les trois centres de gravité (3), (4) et (9) sont situés sur une même droite, la droite (11), et à la fois (17) est valable.

Si encore $m_\nu > 1$, pour chaque $\nu = 1,2,\dots,p$, et si les zéros du polynôme (8) sont tous différents, le centre de gravité (7) est aussi situé sur la droite (11), mais, dans ce cas, (18) est aussi valable.

Théorème 2. Dans le cas $p = 3$, il faut considérer la droite (11) comme la droite d'Euler généralisée et le segment ζ_1—ζ_1^* comme le segment d'Euler généralisé.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

БОГОЉУБ СТАНКОВИЋ

РЕШЕЊЕ ЈЕДНЕ ХОМОГЕНЕ ИНТЕГРАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

1. У овом раду посматраћу линеарну хомогену интегралну једначину

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} f(t)\,dt \tag{1}$$

која има следеће физичко тумачење.

Распоред топлоте у линеарном проводнику дат је једначином:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}.$$

Нека је проводник неограничен са оба краја и задовољава почетне услове

$$\theta(x,0)=\begin{cases} f(x) & \text{за} \quad x\geqslant 0\\ 0 & \text{за} \quad x<0.\end{cases}$$

Тада је решење парцијалне једначине провођења топлоте дато релацијом

$$\theta(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}} f(u)\,du. \tag{2}$$

Нека је поред почетног услова дат и „гранични", наиме нека је у тачки $x=0$ распоред топлоте дат за свако $t\geqslant 0$ и то тако да је

$$\theta(0,t)=\frac{\lambda}{2}f(t),$$

где је λ произвољан параметар. Питање је која функција $f(t)$ може, на основу релације (2), да задовољи ове услове. Налажење функције $f(x)$ се тада своди на решавање интегралне једначине (1).

Једначину (1) можемо сматрати и као карактеристичну секуларну једначину интегралне трансформације са језгром

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}e^{-\frac{t^2}{4x}},$$

тј. трансформације

$$G(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}\int_{0}^{\infty} e^{\frac{t^2}{4\sigma}} f(t)\, dt. \tag{3}$$

Због сличности овог језгра са језгром Гаусове трансформације,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}\, e^{-\frac{(\xi-t)^2}{4\sigma}},$$

ову трансформацију називаћемо g-трансформацијом, иако се она једноставним сменама своди, у извесном смислу, на Лапласову. Према томе, решења једначине (1) су карактеристичне (сопствене) функције g-трансформације, и циљ овога рада је да покаже да је спектар карактеристичних (сопствених) вредности λ ове трансформације непрекидан, као и јединственост њима одговарајућих карактеристичних функција $f(t)$ (тј. јединственост решења сингуларне интегралне једначине (1)), ако при томе претпоставимо да се исте правилно понашају било за $t=0$, било за $t=\infty$ и то у тачки 2 наведеном смислу. Ако међутим за ова решења ништа не претпоставимо, једначина (1) има још бескрајно много решења као што се види из примедбе на крају рада.

Једначину (1) решавао је М. Пароди [1] симболичким рачуном. Лапласовом трансформацијом,

$$\varphi(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt,$$

свео је интегралну једначину (1) на функционалну једначину

$$\varphi(s)=\frac{\lambda}{\sqrt{s}}\,\varphi(\sqrt{s}) \tag{4}$$

и показао да су за $\lambda=1$ и $\lambda=2$ решења једначине (4)

$$\varphi(s)=\frac{1}{s},$$

односно

$$\varphi(s)=\frac{\ln s}{s}.$$

Према томе, $f(t)=1$ је решење једначине (1) за $\lambda=1$, а $f(t)=\ln t+c$ за $\lambda=2$, где је c Ојлерова константа.

Овде ћемо, међутим, показати да свакој позитивној вредности λ одговара одређено решење како интегралне једначине (1), тако и функционалне једначине (4) и да су она, до на једну мултипликативну константу, једина решења која се у тачки $t=0$ или $t=\infty$ правилно понашају.

2. За функцију $q(x)$ казаћемо да се правилно понаша у близини тачке $x=0$ (односно $x=\infty$) ако задовољава релацију

$$q(x) \sim x^{\alpha} L(x) \quad \text{кад} \quad x \to 0 \quad (\text{односно } x \to \infty),$$

где je $L(x)$ позитивна и непрекидна функција за $x>0$, која припада класи споропроменљивих функција, тј. задовољава услов да

$$\frac{L(ux)}{L(x)} \to 1$$

за свако $u>0$ кад $x \to 0$ (односно $x \to \infty$).

Наведимо овде само оне особине овако дефинисане класе функција $q(x)=x^{\alpha} L(x)$ које ћемо користити у даљем раду (в. Карамата [**2**, **3**]).

A. $$\frac{q(ux)}{q(x)} \to u^{\alpha}, \quad u>0, \quad x \to 0;$$

B. $$q(x) \to 0, \quad \alpha>0, \quad x \to 0;$$

$$q(x) \to \infty, \quad \alpha<0, \quad x \to 0;$$

C. Ставимо

$$\left.\begin{aligned} P_1(y) &= \operatorname*{Max}_{0 \leqslant x \leqslant y} \{x^{\gamma} L(x)\}, & p_1(y) &= \operatorname*{Min}_{x \geqslant y} \{x^{\gamma} L(x)\}, \\ P_2(y) &= \operatorname*{Max}_{x \geqslant y} \{x^{-\gamma} L(x)\}, & p_2(y) &= \operatorname*{Min}_{0 \leqslant x \leqslant y} \{x^{-\gamma} L(x)\}. \end{aligned}\right\} \quad (\gamma>0)$$

Тада je, кад $x \to 0$,

a. $P_1 \sim x^{\gamma} L(x)$, $\quad P_2 \sim x^{-\gamma} L(x)$;

b. $p_1(y) \sim x^{\gamma} L(x)$, $\quad p_2(y) \sim x^{-\gamma} L(x)$.

Према томе су $P_i(y)$ и $p_i(y)$ функције које се такође правилно понашају за $x=0$, а при томе су обе функције монотоне.

3. Обележимо са $\varphi(s)$ Лапласову трансформацију функције $f(t)$,

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

и докажимо најпре став Абелове врсте који се односи на понашање функције $\varphi(s)$ кад $s \to \infty$.

Став I. *Ако се $f(x)$ понаша правилно у близини $x=0$, њена Лапласова трансформација $\varphi(s)$ се правилно понаша у близини $s=\infty$; прецизније из*

$$f(x) \sim q(x) = x^{\alpha} L(x), \quad \alpha > -1, \quad x \to 0, \tag{6}$$

следи

$$s\,\varphi(s) \sim \Gamma(\alpha+1)\ q(1/s), \quad s \to \infty.$$

Специјално из

$$f(x) \sim |\ln x|^{\beta} L^{*}(|\ln x|), \quad x \to 0,$$

следи

$$s\,\varphi(s) \sim \ln^{\beta} s\, L^{*}(\ln s), \quad s \to \infty$$

за свако β.

Овај је став формулисао Деч [4], али га не доказује, већ само указује на главне црте његовог доказа [5]. Осим тога, став I је у извесном смислу дуалан ставу који је доказао К. Кноп [7], где је „$x \to 0$, $s \to \infty$" замењено са „$x \to \infty$, $s \to 0$", а који гласи

Став I*. *Ако је $L(x)$ спoропроменљива функција, $\alpha > -1$ и $q(x) = x^{\alpha} L(x)$ тада из*

$$f(x) \sim q(x), \quad x \to \infty,$$

следи

$$s\,\varphi(s) \sim \Gamma(\alpha+1)\, q\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \to 0.$$

Да бисмо доказали став I, докажимо претходно овај помоћни став:

Помоћни став. *Ако је $L(x)$ спoропроменљива функција и $\alpha > -1$, тада је*

$$\int_0^{\infty} e^{-t/\sigma} t^{\alpha} L(t)\, dt \sim \Gamma(\alpha+1)\, \sigma^{\alpha+1} L(\sigma).$$

Доказ. Нека је $a > 0$ и $0 < \gamma < \alpha+1$; тада је

$$J(\sigma) = \frac{1}{\sigma^{\alpha+1} L(\sigma)} \int_0^{\infty} e^{-t/\sigma} t^{\alpha} L(t)\, dt = \frac{1}{\sigma^{\gamma} L(\sigma)} \int_0^{a} e^{-t} t^{\alpha-\gamma} (\sigma t)^{\gamma} L(\sigma t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\sigma^{-\gamma} L(\sigma)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha+\gamma} (\sigma t)^{-\gamma} L(\sigma t)\, dt,$$

па је на основу особине 2.C.a.

$$J(\sigma) \leqslant \frac{P_1(a\sigma)}{\sigma^{\gamma} L(\sigma)} \int_0^a e^{-t} t^{\alpha-\gamma} dt + \frac{P_2(a\sigma)}{\sigma^{-\gamma} L(\sigma)} \int_a^{\infty} e^{-t} t^{\alpha+\gamma} dt,$$

а отуда

$$\lim_{\sigma=0} \sup J(\sigma) \leqslant a^{\gamma} \int_0^a e^{-t} t^{\alpha-\gamma} dt + a^{-\gamma} \int_a^{\infty} e^{-t} t^{\alpha+\gamma} dt.$$

Како ово важи за произвољно мало $\gamma > 0$ то можемо пустити да $\gamma \to 0$, па је

$$\lim_{\sigma=0} \sup J(\sigma) \leqslant \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt = \Gamma(\alpha+1).$$

Сличним поступком из особине 2.C.b. следи да је

$$\lim_{\sigma=0} \inf J(\sigma) \geqslant \Gamma(\alpha+1),$$

а тиме је помоћни став доказан.

Доказ става I. Према (6) можемо ставити:

$$f(x) = x^{\alpha} L(x) + \varepsilon(x) x^{\alpha} L(x)$$

тако да

$$\varepsilon(x) \to 0, \quad x \to 0.$$

Ако још ставимо $s = \frac{1}{\sigma}$, тада је

$$\varphi(1/\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-t/\sigma} t^{\alpha} L(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-t/\sigma} \varepsilon(t) t^{\alpha} L(t) dt,$$

па се, према помоћном ставу, тврђење става I своди на

$$\int_0^{\infty} e^{-t/\sigma} \varepsilon(t) t^{\alpha} L(t) dt = o\{\sigma^{\alpha+1} L(\sigma)\}, \quad \sigma \to 0. \tag{7}$$

Нека је $\varepsilon > 0$ и η тако изабрано да буде

$$|\varepsilon(t)| < \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)} \quad \text{за} \quad 0 \leqslant t \leqslant \eta;$$

тада је

$$\left|\int_0^\infty e^{-t/\sigma}\,\varepsilon(t)\,t^\alpha L(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\eta e^{-t/\sigma}|\varepsilon(t)|\,t^\alpha L(t)\,dt + \int_\eta^\infty e^{-t/\sigma}|\varepsilon(t)|\,t^\alpha L(t)\,dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty e^{-t/\sigma}\,t^\alpha L(t)\,dt + o\,(e^{-\eta/\sigma}) <$$

$$< \varepsilon\,\sigma^{\alpha+1} L(\sigma) + o\,\{\sigma^{\alpha+1} L(\sigma)\}, \quad \sigma\to 0,$$

што доказује релацију (7), а тиме је и став I доказан.

Посматрајмо, сада, g-трансформацију (1) и извршимо у њој смене

$$\frac{1}{4\sigma}=s, \qquad t=\sqrt{\tau}.$$

Тада је

$$G\left(\frac{1}{4s}\right)=\sqrt{\frac{s}{\pi}}\int_0^\infty e^{-s\tau}\,\frac{f(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}\,d\tau$$

или

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-s\tau}\,g(\tau)\,d\tau,$$

$$\varphi(s)=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,G\left(\frac{1}{4s}\right), \qquad g(\tau)=\frac{f(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}.$$

Према томе за g-трансформацију важи аналоган став ставу I који гласи:

Став II. *Нека је g-трансформација конвергентна за* $0<\sigma<\sigma_0$ *и*

$$f(x)\sim x^\beta L(x^2), \quad \beta>-1, \quad x\to 0,$$

где се $L(x)$ споро мења, тада је

$$G(\sigma)\sim\frac{2^\beta}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\sigma^{\beta/2} L(\sigma), \quad \sigma\to 0.$$

Наведимо овде још два гранична случаја ставова I и II и то:

Став III. *Нека је $\varphi(s)$ Лапласова трансформација функције $f(x)$. Ако је $f(x)$ непрекидна за $x=0$ тада је и $s\,\varphi(s)$ непрекидно за $s=\infty$, тј. из*

$$f(x)\to f(+0), \quad x\to 0,$$

следи

$$s\,\varphi(s)\to f(+0), \quad s\to\infty.$$

Став IV. *Нека је $G(\sigma)$ g-трансформација функције $f(x)$. Ако је $f(x)$ непрекидно за $x=0$, тада је и $G(\sigma)$ непрекидно за $x=0$, тј. из*

$$f(x) \to f(+0), \quad x \to 0,$$

следи

$$G(\sigma) \to f(+0), \quad \sigma \to 0.$$

4. При обради интегралне једначине (1) користићемо се решењима функционалне једначине

$$\psi(s) = \lambda \psi(\sqrt{s}) \tag{8}$$

која претставља специјалан случај Шредерове

$$\psi(s) = \lambda \psi[\alpha(s)].$$

Између низа радова о Шредеровој функционалној једначини напоменућемо овде испитивања П. Апела [6] који је посматрао једначину

$$F[\alpha(x)] = F(x)$$

као уопштење једначине која дефинише периодичне функције. П. Апел наводи као пример случај када је $\alpha(x) = x^2$ што одговара једначини (8) за $\lambda = 2$ и добија решење у облику реда

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} x^{2^{n+1}} (1 - x^{2^n})^2, \quad |x| \leqslant 1.$$

Међутим, лако је непосредно проверити да се опште решење једначине (8) може написати у облику

$$\psi(s) = \lambda^{\frac{\ln \ln s}{\ln 2}} \omega\left(\frac{\ln \ln s}{\ln 2}\right), \tag{9}$$

где је $\omega(t)$ произвољна функција периоде 1, тј. задовољава релацију

$$\omega(x+1) = \omega(x).$$

5. Вратимо се једначини (1). Ако претпоставимо да је функција десно непрекидна, тада је на основу става IV

$$f(+0) = \lambda f(+0).$$

Ова, пак, релација за $f(+0) \neq 0$ може бити задовољена само ако је $\lambda = 1$. Према томе, само ако је $\lambda = 1$ једначина (1) допушта решења која су десно непрекидна и различита од нуле за $x = 0$.

Потражимо ова решења ако при томе још претпоставимо да је за $s > s_0$ функција $e^{-ex} f(x)$ интеграбилна у размаку $(0, \infty)$.

Лапласовом трансформацијом једначина (1) своди се на функционалну

$$\varphi(s) = \frac{\lambda}{\sqrt{s}}\, \varphi(\sqrt{s})$$

која, када се стави

$$s\,\varphi(s) = \psi(s),$$

прелази у једначину (8) чије је решење (9). За $\lambda = 1$ решење (9) се своди на

$$\psi(s) = \omega\left(\frac{\ln \ln s}{\ln 2}\right). \tag{10}$$

Како, на основу става III, непрекидност функције $f(x)$ за $x = 0$ повлачи за собом непрекидност функције $\psi(s) = s\,\varphi(s)$ за $s = \infty$, то непрекидном решењу за $x = 0$ једначине (1) одговара непрекидно решење (10) за $s = \infty$. На основу периодичности функције $\omega(x)$ то је могуће само ако је $\omega(x) = \text{const.}$ тј. $\varphi(s) = 1/s$, односно $f(x) = 1$.

Став V. *Једино решење* $f(x)$ *једначине* (1) *за* $\lambda = 1$ *која има особине да је*

1. *непрекидно и различито од нуле за* $x = 0$,

2. $e^{-sx} f(x)$ *интеграбилно у размаку* $(0, \infty)$ *за* $s > s_0$,

јесте $f(x) = 1$.

Претпоставимо, даље, да је

$$f(x) \sim x^{\beta} L(x^2);$$

тада на основу става II и једначине (1) следи

$$f(x) \sim \frac{2^{\beta}\lambda}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{\beta+1}{1}\right) x^{\beta/2} L(x).$$

Да би обе ове релације могле да постоје мора да буде

a. $\beta = 0$,

b. $\dfrac{L(x^2)}{L(x)} \to \lambda, \quad x \to 0.$

Ставимо у релацији b. $x = e^{-y}$ и $L(e^{-y}) = R(y)$. Она се тада своди на

$$\frac{R(2y)}{R(y)} \to \lambda, \quad y \to \infty,$$

а ова последња је увек задовољена када је $R(y)$ облика

$$R(y) = y^{\nu} L^{*}(y).$$

Према томе, ако је

$$L(x) = |\ln x|^{\nu}\, L^{*}(|\ln x|)$$

релација b. ће бити увек задовољена ако је при томе $\lambda = 2^{\nu}$. Како ν може бити макакав број, то следи да је спектар карактеристичних вредности g-трансформације непрекидан.

Потражимо карактеристичне функције које одговарају карактеристичним вредностима $\lambda = 2^{\nu}$. Како је наш циљ да нађемо решење једначине (1) које се правилно понаша за $x = 0$, то се на основу става I, мора правилно понашати и Лапласова трансформација тог решења. Решење (9) једначине (8), пак, може се правилно понашати за $s = \infty$ само ако је $\omega(x) = \text{const.}$, па је, према томе

$$\psi(s) = \lambda^{\frac{\ln \ln s}{\ln 2}} = \ln^{\nu} s,$$

а одакле следи даје

$$\varphi(s) = \frac{1}{s} \ln^{\nu} s$$

Став VI. *Једино решење једначине* (1) *за* $\lambda = 2^{\nu}$ *које има особине*

1. $f(s) \sim x^{\beta} L(x^2)\,, \quad \beta > -1\,, \quad x \to \infty\,,$
2. $e^{-sx} f(x)$ *интеграбилно у размаку* $(0, \infty)\,, \ s > s_0,$

јесте $f(x) \supset \dfrac{1}{s} \ln^{\nu} s\,.$

Видели смо да је основа читавог расматрања био став I који даје понашање Лапласове трансформације за $s = \infty$ под претпоставком о понашању $f(x)$ за $x = 0$. Међутим, ако пођемо од става I*, доћи ћемо до истих закључака и основни став који би одговарао ставу VI гласи:

Став VI*. *Једино решење једначине* (1) *за* $\lambda = 2^{\nu}$, *које има особине*

1. $f(x) \sim x^{\beta} L(x^2)\,, \quad \beta >= 1, \quad x \to \infty\,,$
2. $e^{-sx} f(x)$ *интеграбилно у размаку* $(0, \infty)$ *за свако* $s > 0$

јесте $f(x) \supset \dfrac{\ln^{\nu} s}{s}\,.$

6. Покажимо на крају како се може одредити функција $f(x)$ која је одређена са једначином

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{s} \ln^{\nu} s\,.$$

а) $\nu = k$ цео број $\geqslant 0$. Да бисмо у овом случају нашли L-функцију $f(t)$ која одговара l-функцији $\varphi(s) = \dfrac{\ln^{\nu} s}{s}$, пођимо од интеграла

$$s^{-x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{x-1}\, dt\,.$$

k-ти извод леве и десне стране релације, за $x=1$, даје

$$(-1)^k \frac{ln^k s}{s} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[\frac{1}{\Gamma(x)}\right]_{x=1}^{(i)} \int_0^\infty e^{-st} (ln\, t)^{k-i}\, dt$$

тако да је тражена функција $f(x)$ дата изразом

$$f(x) = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \gamma_i (ln\, x)^{k-i},$$

где смо ставили

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \frac{x^i}{i!}.$$

b) $\nu \leqslant 0$. Ставимо $\nu = -\mu$, $\mu > 0$ и користићемо следећу везу за Лапласову трансформацију [8]

$$\int_0^\infty \frac{x^t\, r(t)}{\Gamma(t+1)}\, dt \supset \frac{1}{s}\, g(ln\, s),$$

где $r(s) \supset g(s)$. У нашем случају је $g(s) = s^{-\mu}$, па је $r(t) = \frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}$ а одатле следи да је

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \frac{x^t\, t^{\mu-1}}{\Gamma(t+1)}\, dt \supset \frac{1}{s}\, ln^{-\mu} s.$$

c) ν произвољан позитиван број. У случају a), за $\nu = k$ цео број $\geqslant 0$ имали смо

$$\frac{ln^k s}{s} \subset (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \gamma_i (ln\, x)^{k-i} = f_k(x),$$

а у случају b), за $\nu = -\mu \leqslant 0$

$$\frac{1}{s\, ln^\mu s} \subset \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \frac{x^t\, t^{\mu-1}}{\Gamma(t+1)}\, dt = \varphi_\mu(x), \quad \varphi_0(x) = 0.$$

Нека је сада $\nu \geqslant 0$. Ставимо $k = [\nu - 0] + 1$, $k - \mu = \nu \geqslant 0$ и образујмо композицију од $f_k(t)$ и $\varphi_\mu(t)$, тј.

$$\frac{ln^k s}{s} \cdot \frac{1}{s\, ln^\mu s} \subset \varphi_\mu^*(t)\, f_k^*(t) = \int_0^t \varphi_\mu(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau,$$

односно

$$\frac{1}{s}\frac{ln^{\nu} s}{s} \subset \varphi_{\mu}^{*}(t)\, f_{k}^{*}(t).$$

Према томе је тражена функција

$$f(x) \supset \frac{1}{s}\, ln^{\nu} s\,, \quad \nu \geqslant 0,$$

дата изразом

$$f(x) = \frac{d}{dx}\{\varphi_{\mu}^{*}(x)\, f_{k}^{*}(x)\}.$$

Примедба. Др Ј. Карамата дао ми је пример функције која задовољава једначину (1), а која се не понаша правилно за $x = 0$ или $x = \infty$.

Ако пођемо од релације

$$\frac{x^{u}}{\Gamma(1+u)} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4x}} \frac{t^{2u}}{\Gamma(1+2u)}\, dt \tag{11}$$

па је помножимо са функцијом

$$u^{\mu-1}\, \omega\left(\frac{ln\, u}{ln\, 2}\right), \quad \omega(x+1) = \omega(x),$$

и интегришемо по u у границама од 0 до ∞, добићемо функцију

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{x^{u}\, u^{\mu-1}\, \omega(ln\, u / ln\, 2)}{\Gamma(u+1)}\, du$$

која задовољава једначину (1) са $\lambda = 2^{-\mu}$, а не понаша се правилно. Или ако релацију (11) претходно диференцирамо довољан број пута, па је затим помножимо са истом фукцијом $u^{\mu-1}\, \omega\left(\frac{ln\, u}{ln\, 2}\right)$ добићемо решење једначине (1) са произвољно $\lambda > 0$.

Исто тако ми је Др. Ј. Карамата указао да се резултати из 6 a, b, c могу на сличан начин добити директно из релације (11).

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Parodi — Équations intégrales et transformation de Laplace, Paris 1950, pp. 65—67.

[2] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière des fonctions. *Mathematica*, Vol. IV (1930).

[3] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière, théorèmes fondamentaux. *Bull. Soc. Math. de France* **61** (1933).

[4] G. Doetsch — Handbuch der Laplace-Transformation, Basel 1950, s. 479.
[5] G. Doetsch — Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, s. 102.
[6] P. Appell — Formation d'une fonction $F(x)$ possédant la propriété $F[\varphi(x)]=F(x)$. *C. R.* **88** (1879), pp. 807—810.
[7] K. Knopp — Zwei Abelsche Sätze. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe de Sci.* **4** (1952), pp. 89—94.
[8] W. Magnus und F. Oberhettinger — Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik, Berlin 1948, s. 170.

SOLUTION D'UNE ÉQUATION INTÉGRALE HOMOGÉNE

par
BOGOLJUB STANKOVIĆ

En partant des théorèmes de nature abelienne sur la transformation

$$G(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4\sigma}}f(t)\,dt\,,$$

dont quelques-uns sont démontrés dans cette note, on parvient, sur l'équation intégrale

$$f(x)=\frac{\lambda}{\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}}f(t)\,dt\,,$$

aux résultats suivants:

1. Le spectre des valeurs caractéristiques de cette équation intégrale est continu.

2. On a montré l'existence des fonctions caractéristiques de cette équation intégrale ainsi que leur unicité si on se limite à la classe des fonctions „se comportant régulièrement" au vaisinage de $x=0$ ou $x=\infty$.

3. On en a donné aussi les solutions.

J. Karamata a donné un contreexemple montrant que, si l'on ne se limite pas aux fonctions „se comportant régulièrement", des fonctions caractéristiques correspondant à une valeur caractéristique il en existe en nombre infini.

L'équation intégrale a aussi sa signification physique. Si par $\theta(x,t)$ on donne la répartition de chaleur dans un conducteur linéaire illimité aux conditions initiales suivantes:

$$\theta(x,0)=\begin{cases} f(x) & \text{pour } x\geqslant 0\\ 0 & \text{pour } x<0\,,\end{cases}$$

te les „conditions limites"

$$\theta(0,t)=\frac{\lambda}{2}f(x)\,,$$

l'équation intégrale donne alors la fonction $f(x)$.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

РАНКО БОЈАНИЋ и ВЛАДЕТА ВУЧКОВИЋ

О СОПСТВЕНИМ ФУНКЦИЈАМА ГРАНИЧНОГ ЗАДАТКА МАЛИХ ОСЦИЛАЦИЈА ЕЛАСТИЧНЕ ПЛОЧЕ

0.1 (i) Нека је S произвољна отворена и ограничена област x, y — равни са непрекидним и глатким рубом S'. Нека су даље

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

сопствене вредности поређане тако да образују низ који монотоно расте, а

$$\Phi_1(P), \Phi_2(P), \ldots, \Phi_n(P), \ldots$$ [1])

одговарајуће ортонормиране сопствене функције граничног задатка

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} &\Delta\Delta u - \lambda u = 0, \quad P \in S \\ &u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad P \in S', \end{aligned}$$

при чему $\partial/\partial n$ означава извод у правцу нормале на рубу S'.

У овоме раду испитиваћемо асимптотско понашање суме квадрата и производа сопствених функција граничног задатка (А), тј. асимптотско понашање функција

$$E(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(P) \quad \text{и} \quad I(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n(P)\,\Phi_n(Q).$$

Овим проблемом бавио се специјално А. Плејел [**1**, стр. 89—98], који је, уопштавајући Карлеманов метод, доказао да је

$$\text{(I')} \qquad E(\lambda) \sim \frac{1}{4\pi}\sqrt{\lambda}, \quad \lambda \to \infty,$$

$$\text{(II')} \qquad I(\lambda) = O(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \to \infty.$$ [2])

[1]) Са P, Q, T, Π, итд. означаваћемо, као што је уобичајено, тачке области S.
[2]) Овај образац непосредно следи из претходног применом Коши-Шварцове неједначине.

Овде ћемо дати другу апроксимацију асимптотског понашања функције $E(\lambda)$, као и прецизнију неједначину за функцију $I(\lambda)$. Другим речима, доказаћемо да је

$$E(\lambda)=\frac{1}{4\pi}\sqrt{\lambda}+O(\sqrt[4]{\lambda}),\quad \lambda\to\infty, \tag{I}$$

$$I(\lambda)=O(\sqrt[4]{\lambda}),\quad \lambda\to\infty. \tag{II}$$

Из неједначине (I) поред осталог следи да је

$$\Phi_n(P)=O(\sqrt[4]{n}),\quad n\to\infty. \tag{III}$$

Осим тога навешћемо неколико особина ζ-функције граничног задатка (A) која је за довољно велико $R(s)$ дефинисана редом

$$\zeta(P,Q;s)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)\,\lambda_n^{-s}.$$

(ii) Карлеман-Плејелов поступак за процену асимптотског понашања суме квадрата и производа сопствених функција граничног задатка (A) у најкраћим цртама састоји се у следећем. Ако са $G(P,Q;\lambda)$ означимо Гринову функцију граничног задатка (A), а са $G(P,Q)$ Гринову функцију граничног задатка

$$\begin{aligned}&\Delta\Delta u=0,\quad P\in S,\\ &u=0,\ \frac{\partial u}{\partial n}=0,\quad P\in S',\end{aligned} \tag{A *}$$

тада је $G(P,Q;-\lambda)$ резолвента језгра $G(P,Q)$ [**2**, стр. 120], па је према томе

$$G(P,Q)-G(P,Q;-\lambda)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)}.$$

Међутим, $G(P,Q)$ је симетрично, позитивно дефинитно и ограничено језгро, па се према Мерсеровом ставу [**2**, стр. 117] може развити у апсолутно и униформно конвергентан билинеарни ред

$$G(P,Q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n}.$$

Према томе је

$$G(P,Q;-\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n+\lambda}.$$

Означимо са r_{PQ} растојање тачака P и Q. Како је, према дефиницији Гринове функције [1, стр. 92],

(1) $$G(P, Q; -\lambda) = R(P, Q; -\lambda) - H(P, Q; -\lambda),$$

где је

$$R(P,Q;-\lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \int_1^\infty e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, r_{PQ}\, t/\sqrt{2}} \sin(\sqrt[4]{\lambda}\, r_{PQ}\, t/\sqrt{2}) \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{8\pi} r_{PQ}^2 \lg \frac{1}{r_{PQ}} + \ldots$$

тзв. сингуларни део Гринове функције $G(P, Q; -\lambda)$, а $H(P, Q; -\lambda)$ решење једначине

(3) $$\Delta\Delta u + \lambda u = 0$$

које на рубу S' задовољава услове

(4) $$H(P, Q; -\lambda) = R(P, Q; -\lambda), \quad P \in S',$$
$$\frac{\partial H(P, Q; -\lambda)}{\partial n} = \frac{\partial R(P, Q; -\lambda)}{\partial n}, \quad P \in S',$$

то је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n + \lambda} = \lim_{P=Q} \{R(P,Q;-\lambda) - H(P,Q;-\lambda)\} =$$

(5) $$= \frac{1}{8\sqrt{\lambda}} - H(P,P;-\lambda).$$

Применом класичних Гринових образаца Плејел је показао да је

(6) $$H(Q, Q; -\lambda) = F[H_Q, H_Q] +$$
$$+ \int_{S'} \left[R(T,Q;-\lambda) \frac{\partial \Delta R(T,Q;-\lambda)}{\partial n} - \frac{\partial R(T,Q;-\lambda)}{\partial n} \Delta R(T,Q;-\lambda)\right] dS'_T\,{}^{4)}$$

где је једноставности ради стављено

[4]) Криволиниски интеграл дуж руба S' означаваћемо са

$$\int_{S'} [\ldots]\, dS'_T.$$

Слично томе

$$\int_S [\ldots]\, dS_T$$

претставља површински интеграл по области S. У оба случаја T је променљива интеграције.

$$F[H_Q, H_Q] = \int_S \{[\Delta H(T,Q;-\lambda)]^2 + \lambda H^2(T,Q;-\lambda)\}\, d S_T .$$

Док се процена криволиниског интеграла у обрасцу (6) изводи доста једноставно, јер се под интегралом јавља функција $R(P,Q;-\lambda)$ и њени изводи, дотле се за процену асимптотског понашања израза $F[H_Q, H_Q]$ мора применити поступак сасвим друге природе, јер се ту под знаком интеграла налази функција $H(P,Q;-\lambda)$ чије се асимптотско понашање тражи.

За процену асимптотског понашања израза $F[H_Q, H_Q]$ Плејел је искористио варијациони рачун. Он је, наиме, приметио да је функција $H(T,Q;-\lambda)$ решење варијационог проблема који се састоји у томе да се нађе минимум израза

$$F[V,V] = \int_S [(\Delta V)^2 + \lambda V^2]\, d S_T ,$$

при чему се за функцију $V(T)$ претпоставља да је заједно са својим изводима до четвртог реда непрекидна у области S, а на рубу S' задовољава услове

$$V(T) = R(T,Q;-\lambda), \quad \frac{\partial V(T)}{\partial n} = \frac{\partial R(T,Q;-\lambda)}{\partial n}, \quad T \in S'. \tag{7}$$

Одатле непосредно следи да је

$$0 < F[H_Q, H_Q] \leqslant F[V,V], \tag{8}$$

где је $V(T)$ произвољна функција која има непрекидне изводе до четвртог реда у области S, а на рубу S' задовољава услове (7). Таква функција је, на пример,

$$V(T) = R(T,Q;-\lambda)\, \eta(r_{TQ}),$$

где функција $\eta(r_{TQ})$ има особину да је у довољно малом кругу са центром у тачки Q једнака нули, а ван њега јединици и да су јој четврти изводи непрекидни у области S. У том случају из неједначине (8) и обрасца (6) добија се

$$|H(Q,Q;-\lambda)| \leqslant \frac{c}{l_Q} \lambda^{-3/4}, \tag{9}$$

где је l_Q најкраће отстојање тачке Q од руба S'. Према томе је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n + \lambda} = \frac{1}{8\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-3/4}), \quad \lambda \to \infty ,$$

тј.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n + \lambda} \sim \frac{1}{8\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \to \infty .$$

Одавде, применом класичног Харди-Литлвудовог става Тауберове природе [1, стр. 6], следи (I′) и као непосредна последица (II′).

Уместо Харди-Литлвудовог става може се употребити Икехарин став, као што је то код аналогног граничног задатка другог реда

$$\text{(B)} \qquad \Delta u + \lambda u = 0, \quad P \in S, \qquad u = 0, \quad P \in S',$$

показао Т. Карлеман [3]. Међутим, било да се употреби Харди-Литлвудов било Икехарин став, тим путем се не могу добити прецизнији резултати од (I′), односно (II′), јер се ни један ни други став, као што је познато, не могу побољшати.

(iii) Поступак којим ћемо се овде служити за извођење неједначина (I) и (II) заснива се с једне стране на прецизнијој процени асимптотског понашања функције $H(P, Q; -\lambda)$, а с друге стране на једном ставу Тауберове природе који омогућава да се та прецизнија процена у потпуности искористи.

У првом делу овог рада доказаћемо:

Став 1. *За фиксирано Q и произвољно P области S је*

$$|H(P, Q; -\lambda)| \leqslant c\, e^{-l_Q \sqrt[4]{\lambda}/2\sqrt{2}}, \tag{10}$$

где је l_Q најкраће отстојање тачке Q од руба S' и где константа c зависи само од Q и од области S.

Овај став доказаћемо сличним поступком који је Плејел употребио за извођење неједначине (9), који се, као што смо напоменули, заснива на варијационом рачуну, за разлику од дводимензионалног случаја, где процена експоненцијалног типа за функцију $H(P, Q; -\lambda)$ непосредно следи из чињенице да решење једначине $\Delta u - \lambda u = 0$ достиже своју највећу, односно најмању вредност на рубу посматране области.

Затим ћемо у другом делу доказати поменути став Тауберове природе који у извесном смислу претставља уопштење једног става В. Г. Авакумовића [4; a, b], помоћу кога је он добио најбоље могуће процене за асимптотско понашање суме квадрата и производа сопствених функција граничног задатка другог реда (B). Став који ћемо доказати гласи:

Став 2. *Нека је $S(u)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека интеграл*

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{d\{S(u)\}}{u + x}$$

конвергира за једно, па према томе за свако $x > 0$. Тада из

$$f(x) = O\left(e^{-c\sqrt[4]{x}}\right), \quad x \to \infty, \quad (c > 0), \tag{a}$$

и услова конвергенције

(*b*) $$S(v)-S(u)>-m\sqrt[4]{u} \quad за \quad u\leqslant v\leqslant u+u^{3/4}$$

следи

$$S(u)=O(\sqrt[4]{u}), \quad u\to\infty.$$

(iv) Из ставова 1 и 2 непосредно следе неједначине (I) и (II). Наиме, из неједначине (10) која важи за свако $Q\in S$, па према томе и за $Q=P$, с обзиром на (5) добијамо најпре

$$E^*(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n+\lambda}=\frac{1}{8\sqrt{\lambda}}+O(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}}), \quad \lambda\to\infty, \tag{11}$$

где је $c=l_P/\sqrt{2}$. Ако ставимо

$$S(u)=\sum_{\lambda_n\leqslant u}\Phi_n^2(P)-\frac{1}{4\pi}\sqrt{u},$$

биће

$$\int_0^{\infty}\frac{d\{S(u)\}}{u+\lambda}=E^*(\lambda)-\frac{1}{8\sqrt{\lambda}}=O(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}}), \lambda\to\infty,$$

тако да је услов (*a*) става 2 задовољен. Осим тога, $S(u)$ очевидно задовољава услов конвергенције (*b*), па је на основу става 2

$$S(u)=\sum_{\lambda_n\leqslant u}\Phi_n^2(P)-\frac{1}{4\pi}\sqrt{u}=O(\sqrt[4]{u}), \quad u\to\infty.$$

Тиме је неједначина (I) доказана.

Да бисмо доказали неједначину (II), приметимо најпре да је

$$|R(P,Q;-\lambda)|\leqslant\frac{c}{\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,r_{PQ}/\sqrt{2}},$$

(в. [1], стр. 96). Из ове неједначине и неједначине (10) за функцију $H(P,Q;-\lambda)$ непосредно следи да је за $P\neq Q$

$$I^*(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n+\lambda}=O(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}}), \quad \lambda\to\infty, \tag{12}$$

где је $c=\mathrm{Min}(r_{PQ}/\sqrt{2}, l_Q/2\sqrt{2})$. Како је

$$\int_0^{\infty}\frac{d\{I(u)\}}{u+\lambda}=I^*(\lambda)=O(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}}), \quad \lambda\to\infty,$$

то је услов (a) става (2) очевидно испуњен. Даље, из

$$\{I(v)-I(u)\}^2=\{\sum_{u<\lambda_n\leqslant v}\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)\}^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{u<\lambda_n\leqslant v}\Phi_n^2(P)\sum_{u<\lambda_n\leqslant v}\Phi_n^2(Q)$$

и (I) добијамо

$$I(v)-I(u)=O(\sqrt[4]{u})\quad \text{за}\quad u\leqslant v\leqslant u+u^{3/4}.$$

Према томе, услов конвергенције (b) је и у овом случају задовољен, тако да применом става 2 добијамо непосредно неједначину (II).

0.2. Прецизност добијених асимптотских процена за функције $E^*(\lambda)$, $E(\lambda)$, $I^*(\lambda)$ и $I(\lambda)$ омогућава нам да добијемо податке о асимптотском понашању n-те сопствене функције граничног задатка (A), као и да испитамо неке особине ζ-функције тог граничног задатка.

(i) Неједначина (III) је непосредна последица обрасца (I). Наиме, из

$$\Phi_n^2(P)=E(\lambda_n)-E(\lambda_n-\varepsilon)$$

и (I) следи

$$\Phi_n^2(P)=\frac{1}{4\pi}(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_n-\varepsilon})+O(\sqrt[4]{\lambda_n})=$$

$$=O(\sqrt[4]{\lambda_n}),\quad n\to\infty,$$

тј.

$$\Phi_n(P)=O(\sqrt[8]{\lambda_n}),\quad n\to\infty.$$

Тиме је неједначина (III) доказана јер је, као што је познато [**5**],

$$\lambda_n\sim\left(\frac{4\pi}{\sigma}\right)^2 n^2,\quad n\to\infty, \tag{13}$$

где је σ површина области S.

(ii) Из неједначине (III) и обрасца (13) између осталог следи да билинеарни ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)\,\lambda_n^{-s} \tag{14}$$

којим је, као што смо рекли, за довољно велико $R(s)$ дефинисана ζ-функција граничног задатка (A), конвергира апсолутно ако је $R(s)>3/4$. Међутим, већ из Плејелових резултата (I′) односно (II′)

следи да ред (14) конвергира за $R(s) > 1/2$. Наиме, у том случају из

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)\,\lambda_n^{-s} = \int_1^{\infty} e^{-s\lg\lambda}\, d\{I(\lambda)\},$$

сменом $\lg\lambda = u$ и парцијалном интеграцијом, добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)\,\lambda_n^{-s} = s\int_0^{\infty} e^{-su}\, I(e^u)\, du,$$

одакле следи да ред (11) конвергира за $R(s) > 1/4$, јер је према неједначини (II)

$$I(e^u) = O(e^{u/4}), \quad u \to \infty.$$

(iii) Наведимо најзад неке особине функције $\zeta(P, Q; s)$ које следе из неједначина (11) и (12). Контурном интеграцијом (в. [3]) добија се

$$\zeta(P, Q; s) = \frac{\sin\pi s}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty} \lambda^{-s}\, I^*(\lambda)\, d\lambda + F(s), \tag{15}$$

где је $\varepsilon > 0$ и

$$F(s) = \frac{1}{2\pi}\,\varepsilon^{1-s}\, e^{\pi i(s+1)}\int_0^{2\pi} I^*(\varepsilon e^{i\theta})\, e^{i\theta(1-s)}\, d\theta.$$

Из (15) и неједначине (12) следи да је $\zeta(P, Q; s)$ цела функција са нулама у тачкама $s = 0, -1, -2, \ldots$. Кад је $P = Q$, добија се сличним поступком, с обзиром на (11)

$$\zeta(P, P; s) = \frac{\sin\pi s}{4\pi}\,\frac{1}{2s-1} + \frac{\sin\pi s}{\pi}\, G(s) + H(s),$$

где је $G(s)$ цела функција и

$$H(s) = \frac{1}{2\pi}\,\varepsilon^{1-s}\, e^{\pi i(s+1)}\int_0^{2\pi} E^*(\varepsilon e^{i\theta})\, e^{i\theta(1-s)}\, d\theta.$$

Према томе је $\zeta(P, P; s)$ мероморфна функција са полом у тачки $s = 1/2$ и резидуумом $1/8\pi$. Осим тога, $\zeta(P, P; s)$ има нуле у тачкама $s = 0, -1, -2, \ldots$.

Процена асимптотског понашања функције $H(P,Q;-\lambda)$

1.1. *Неједначина за* $H(P,Q;-\lambda)$. Ако је $V(T)$ регуларно решење једначине (3), тада је

$$V(P)=\int_{S'}\left[\frac{\partial\,\Delta\,G(P,T;-\lambda)}{\partial n}V(T)-\Delta\,G(P,T;-\lambda)\frac{\partial\,V(T)}{\partial n}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\,G(P,T;-\lambda)}{\partial n}\Delta\,V(T)-G(P,T;-\lambda)\frac{\partial\,\Delta\,V(T)}{\partial n}\right]d\,S'_T.$$

Како је према (1) и (4), с обзиром на симетрију Гринове функције,

$$G(P,T;-\lambda)=0,\qquad \frac{\partial\,G(P,T;-\lambda)}{\partial n}=0,\qquad T\in S',$$

то је

$$V(P)=\int_{S'}\left[\frac{\partial\,\Delta\,G(P,T;-\lambda)}{\partial n}V(T)-\Delta\,G(P,T;-\lambda)\frac{\partial V(T)}{\partial n}\right]d\,S'_T.$$

Ако ставимо овде $V(T)=H(T,Q;-\lambda)$, биће

$$H(P,Q;-\lambda)=$$

$$=\int_{S'}\left[\frac{\partial\,\Delta\,G(P,T;-\lambda)}{\partial n}H(T,Q;-\lambda)-\Delta\,G(P,T;-\lambda)\frac{\partial\,H(T,Q;-\lambda)}{\partial n}\right]d\,S'_T.$$

Из овог обрасца, с обзиром на (1) и (4), добијамо

$$H(P,Q;-\lambda)=$$

$$=\int_{S'}\left[\frac{\partial\,\Delta\,R(P,T;-\lambda)}{\partial n}R(T,Q;-\lambda)-\Delta\,R(P,T;-\lambda)\frac{\partial\,R(T,Q;-\lambda)}{\partial n}\right]d\,S'_T+$$

$$+\int_{S'}\left[\Delta H(P,T;-\lambda)\frac{\partial H(T,Q;-\lambda)}{\partial n}-\frac{\partial\,\Delta H(P,T;-\lambda)}{\partial n}H(T,Q;-\lambda)\right]d\,S'_T.$$

Ставимо ли, краткоће ради,

$$F\,[H_P,H_Q]=$$

$$=\int_{S}[\Delta\,H(P,T;-\lambda)\,\Delta\,H(T,Q;-\lambda)+\lambda\,H(P,T;-\lambda)\,H(T,Q;-\lambda)]\,d\,S_T,$$

тада из Гриновог обрасца

$$(1.1)\qquad \int\limits_{S}(\Delta U \Delta V - U \Delta\Delta V)\, dS = \int\limits_{S'}\left(\Delta V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial \Delta V}{\partial n}\right) dS'$$

непосредно следи

$$F[H_P, H_Q] =$$

$$= \int\limits_{S'}\left[\Delta H(P,T;-\lambda)\frac{\partial H(T,Q;-\lambda)}{\partial n} - \frac{\partial \Delta H(P,T;-\lambda)}{\partial n} H(T,Q;-\lambda)\right] dS'_T,$$

па је према томе

$$H(P,Q;-\lambda) = F[H_P, H_Q] +$$

$$(1.2)$$

$$+ \int\limits_{S'}\left[\frac{\partial \Delta R(P,T;-\lambda)}{\partial n} R(T,Q;-\lambda) - \Delta R(P,T;-\lambda)\frac{\partial R(T,Q;-\lambda)}{\partial n}\right] dS'_T.$$

Овај образац за $P=Q$ своди се, због симетрије функција $R(P,Q;-\lambda)$ и $H(P,Q;-\lambda)$, на образац (6).

Да бисмо применом Плејеловог поступка добили прецизније неједначине за функцију $H(P,Q;-\lambda)$, како у случају $P=Q$ тако и за $P \neq Q$, приметимо најпре да је

$$(1.3)\qquad |F[H_P, H_Q]| \leqslant F^{1/2}[H_P, H_P] \cdot F^{1/2}[H_Q, H_Q].$$

Према томе, процена асимптотског понашања израза $F[H_P, H_Q]$ своди се, с обзиром на симетрију функције $H(P,Q;-\lambda)$, на процену израза $F[H_\Pi, H_\Pi]$, где је најпре $\Pi = P$, а затим $\Pi = Q$.

За функцију $\eta(r_{PQ})$ из тачке 0.1 (ii) узећемо функцију дефинисану на следећи начин:

Нека је Π произвољна тачка области S и нека је l_Π најкраће отстојање тачке Π од руба S'. Ставимо

$$\eta(r) = \begin{cases} 1, & r \geqslant l_\Pi, \\ \dfrac{\chi(r)}{\chi(l_\Pi)}, & {}^1/_2\, l_\Pi \leqslant r \leqslant l_\Pi, \\ 0, & r \leqslant {}^1/_2\, l_\Pi, \end{cases}$$

где је

$$\chi(r) = \int\limits_{{}^1/_2 l_\Pi}^{r} (t - {}^1/_2\, l_\Pi)^4 (t - l_\Pi)^4\, dt.$$

Функција

$$\bar{R}(T, \Pi; -\lambda) = R(T, \Pi; -\lambda)\,\eta(r_{T\Pi})$$

је непрекидна у области S заједно са својим изводима до четвртог реда, а на рубу S' очевидно задовољава услове (7), па је према (8)

$$0 < F[H_\Pi, H_\Pi] \leqslant F[\bar{R}_\Pi, \bar{R}_\Pi].$$

Коначно, из (1.2), (1.3) и ове неједначине следи

$$(1.4)\quad \begin{aligned} |H(P, Q; -\lambda)| &\leqslant F^{1/2}[\bar{R}_P, \bar{R}_P]\, F^{1/2}[\bar{R}_Q, \bar{R}_Q] + \\ &+ \int_{S'} \left| \frac{\partial \Delta R(P, T; -\lambda)}{\partial n} R(T, Q; -\lambda) - \Delta R(P, T; -\lambda) \frac{\partial R(T, Q; -\lambda)}{\partial n} \right| d S'_T . \end{aligned}$$

1.2. *Процена асимптотског понашања израза* $F[\bar{R}_\Pi, \bar{R}_\Pi]$ *и доказ става* 1. (i) Из Гриновог обрасца (1.1) непосредно следи

$$F[V, V] = \int_S V(\Delta\Delta V + \lambda V)\, dS + \int_{S'} \left(V \frac{\partial \Delta V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n} \Delta V \right) d S' .$$

Ако овде ставимо $V(T) = \bar{R}(T, \Pi; -\lambda)$, онда се, на основу дефиниције функције $\eta(r_{T\Pi})$, површински интеграл по области S своди на

$$\int_{S_\Pi} \bar{R}(T, \Pi; -\lambda)\, [\Delta\Delta \bar{R}(T, \Pi; -\lambda) + \lambda \bar{R}(T, \Pi; -\lambda)]\, d S_T = I_1 ,$$

где је S_Π област између два концентрична круга чији се центри налазе у тачки Π, а полупречници су им $^1/_2\, l_\Pi$ и l_Π. Криволиниски интеграл по рубу S' очевидно је

$$\int_{S'} [R(T, \Pi; -\lambda) \frac{\partial \Delta R(T, \Pi; -\lambda)}{\partial n} - \frac{\partial R(T, \Pi; -\lambda)}{\partial n} \Delta R(T, \Pi; -\lambda)]\, d S'_T = I_2$$

јер је на рубу $\bar{R}(T, \Pi; -\lambda) = R(T, \Pi; -\lambda)$. Према томе је

$$(1.5)\quad \begin{aligned} F[\bar{R}_\Pi, \bar{R}_\Pi] &= \\ &= \int_{S_\Pi} \bar{R}(T, \Pi; -\lambda)\, [\Delta\Delta \bar{R}(T, \Pi; -\lambda) + \lambda \bar{R}(T, \Pi; -\lambda)]\, d S_T + \\ &+ \int_{S'} [R(T, \Pi; -\lambda) \frac{\partial \Delta R(T, \Pi; -\lambda)}{\partial n} - \frac{\partial R(T, \Pi; -\lambda)}{\partial n} \Delta R(T, \Pi; -\lambda)]\, d S'_T = \\ &= I_1 + I_2 . \end{aligned}$$

Остало је, дакле, да видимо како се понашају интеграли I_1 и I_2 кад $\lambda \to \infty$. При томе ћемо користити следеће неједначине за функцију $R(P, Q; -\lambda)$ и њене изводе [1, стр. 96], које важе за $0 < \lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$ и $0 \leqslant r \leqslant r_0 < \infty$, где је $r = r_{PQ}$ и где је c константа која не зависи од λ, али која не мора бити увек иста:

$$|R(T,\Pi;-\lambda)| \leqslant \frac{c}{\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, r/\sqrt{2}}; \quad \left|\frac{\partial R(T,\Pi;-\lambda)}{\partial r}\right| \leqslant \frac{c}{\lambda^{1/4}} e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, r/\sqrt{2}},$$

$$\left|\frac{\partial^2 R(T,\Pi;-\lambda)}{\partial r^2}\right| \leqslant c \cdot \lg \sqrt[4]{\lambda}\ r \cdot e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, r/\sqrt{2}},$$

$$\left|\frac{\partial^3 R(T,\Pi;-\lambda)}{\partial r^3}\right| \leqslant \frac{c}{r} e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, r/\sqrt{2}}; \quad \left|\frac{\partial^4 R(T,\Pi;-\lambda)}{\partial r^4}\right| \leqslant \frac{c}{r^2} e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, r/\sqrt{2}}.$$

На основу претходних неједначина налази се да је

$$|\bar{R}(T,\Pi;-\lambda)| \leqslant \frac{c}{\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, r_{T\Pi}/\sqrt{2}},$$

$$|\Delta\Delta \bar{R}(T,\Pi;-\lambda) + \lambda \bar{R}(T,\Pi;-\lambda)| \leqslant c(\sqrt{\lambda} + \lg\lambda)\, e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, r_{T\Pi}/\sqrt{2}}.$$

Према томе је

$$\begin{aligned} |I_1| &\leqslant c \int_{S_\Pi} e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, r_{T\Pi}\sqrt{2}}\, dS_T \leqslant \\ &\leqslant c\, e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, l_\Pi/\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

јер је у области S_Π увек $r_{T\Pi} \geqslant {}^1/_2\, l_\Pi$.

За криволиниски интеграл I_2 налази се лако да је

$$\begin{aligned} |I_2| &\leqslant c \int_{S'} e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, r_{T\Pi}\sqrt{2}}\, dS'_T \leqslant \\ &\leqslant c\, e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, l_\Pi/\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

јер је $r_{T\Pi} \geqslant {}^1/_2\, l_\Pi$, $T \in S'$.

Коначно, из (1.5), (1.6) и (1.7) следи

$$F[\bar{R}_\Pi, \bar{R}_\Pi] \leqslant c\, e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, l_\Pi/\sqrt{2}}.$$

(ii) За криволиниски интеграл у неједначини (1.4) добија се

$$\int_{S'}\left|\frac{\partial\,\Delta R(P,T;-\lambda)}{\partial n}R(T,Q;-\lambda)-\Delta R(P,T;-\lambda)\frac{\partial R(T,Q;-\lambda)}{\partial n}\right|d\,S'_T\leqslant$$

$$\leqslant c\int_{S'}e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,(r_{PT}+r_{TQ})/\sqrt{2}}\,d\,S'_T\leqslant \tag{1.9}$$

$$\leqslant c\,e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,(l_P+l_Q)/\sqrt{2}}.$$

(iii) Из добивених неједначина (1.8) и (1.9) непосредно следи процена асимптотског понашања функције $H(P,Q;-\lambda)$. Наиме, из (1.8) најпре следи

$$F^{1/2}[\bar{R}_P,\bar{R}_P]\cdot F^{1/2}[\bar{R}_Q,\bar{R}_Q]\leqslant ce^{-\sqrt[4]{\lambda}\,(l_P+l_Q)/2\sqrt{2}}.$$

Из ове неједначине и (1.9), с обзиром на неједначину (1.4) добијамо коначно

$$|H(P,Q;-\lambda)|\leqslant c\,e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,(l_P+l_Q)/2\sqrt{2}}+c\,e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,(l_P+l_Q)/\sqrt{2}}\leqslant$$

$$\leqslant c\,e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,(l_P+l_Q)/2\sqrt{2}}.$$

Одавде следи да је, за фиксирано Q и произвољно $P\in S$,

$$|H(P,Q;-\lambda)|\leqslant c\,e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,l_Q/2\sqrt{2}},$$

а тиме је став **1** доказан.

Један став Тауберове природе

2.1. Овде ћемо доказати став 2, на основу кога смо добили процене асимптотског понашања функција $E(\lambda)$ и $I(\lambda)$. Без ограничења можемо претпоставити да је у услову (a) $c=1$.

Сам доказ заснива се на следећим лемама.

Лема 1. *За* $y\geqslant x\geqslant 0$ *је*

$$S(y)-S(x)>-m\sqrt[4]{x}-m'\{\sqrt{y}-\sqrt{x}\}. \tag{2.1}$$

Доказ. Нека је

$$\alpha(x)=e^{\sqrt[4]{x}},\quad \beta(x)=\lg^4 x.$$

Како је
$$\beta[\mu\,\alpha(x)] = x + 4\lg\mu\cdot x^{3/4} + O(\sqrt{x}),$$
то можемо одредити једно $\mu > 1$ тако да је за довољно велико x
$$\beta[\mu\,\alpha(x)] \leqslant x + x^{3/4}.$$
Тада је према (b)

(2.2) $$S(x') - S(x) > -m\sqrt[4]{x} \quad \text{за} \quad x \leqslant x' \leqslant \beta[\mu\,\alpha(x)].$$

Нека је $y > x$ и
$$x_{\nu+1} = \beta[\mu\,\alpha(x_\nu)] = \beta[\mu^\nu\,\alpha(x)], \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n.$$
Број n изабраћемо тако да је $x_n \leqslant y \leqslant x_{n+1}$. Из неједначине (2.2) следи тада да је
$$S(x_\nu) - S(x_{\nu-1}) > -m\sqrt[4]{x_{\nu-1}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1,$$
и
$$S(y) - S(x_n) > -m\sqrt[4]{x_n}.$$
Сабирањем ових неједначина добићемо, с обзиром на то да је $x_0 = x$,
$$S(y) - S(x) > -m\sqrt[4]{x} - m\sum_{\nu=1}^{n-1}\sqrt[4]{\beta[\mu^\nu\,\alpha(x)]}.$$
Како је
$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\sqrt[4]{\beta[\mu^\nu\,\alpha(x)]} \leqslant \int_0^n \sqrt[4]{\beta[\mu^t\,\alpha(x)]}\,dt =$$
$$\leqslant \frac{1}{2\lg\mu}[\sqrt{x_n} - \sqrt{x}],$$
то је
$$S(y) - S(x) > -m\sqrt[4]{x} - \frac{m}{2\lg\mu}[\sqrt{x_n} - \sqrt{x}],$$
а одавде непосредно следи (2.1), јер је $x_n \leqslant y$.

Из неједначине (2.1) следи да је за $u \leqslant v \leqslant u+1$

(2.3) $$S(v^4) - S(u^4) \geqslant -m_1 n.$$

Лема 2. *Из* (a)* *и услова конвергенције*
$$S(v) - S(u) > -m_2\sqrt{u}, \quad u \leqslant v \leqslant \lambda u, \quad \lambda > 1,\text{**}$$

---

* Довољно је, шта више, само да је
$$\int_0^\infty \frac{S(u)\,du}{(u+x)^2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \to \infty.$$

** Из (2.1) непосредно следи да $S(u)$ задовољава овај услов конвергенције.

следи

$$S(u)=O(\sqrt{u}), \quad u\to\infty. \tag{2.4}$$

Доказ ове леме добија се једноставном транскрипцијом доказа једног Сасовог става [6].

На основу (2.3) и (2.4) добијамо да је за $u\leqslant v\leqslant u+1$

$$\frac{1}{v}S(v^4)-\frac{1}{u}S(u^4)>-m_3. \tag{2.5}$$

Ова неједначина очевидно следи из

$$\frac{1}{v}S(v^4)-\frac{1}{u}S(u^4)=\frac{1}{u}\{S(v^4)-S(u^4)\}-\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)S(v^4).$$

Наиме, према (2.3) је први члан десне стране $>-m_1$, а из (2.4) следи

$$\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)S(v^4)=O(1), \quad u+1\geqslant v\to\infty,$$

јер је у том случају $1/u-1/v=O(1/v^2)$.

За доказ става 2 потребна нам је још позната чињеница да је, кад $x\to 0$,

$$f(x)=\int_0^\infty\frac{d\{S(u)\}}{u+x}=O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{2.6}$$

2.2. Доказ става II. Због (a) и (2.6) постоји

$$\varphi(s)=\frac{1}{\pi s}\int_0^\infty f(x)e^{-s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}}\sin\{s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}\}\,dx. \tag{2.7}$$

У тачки 2.3 доказаћемо да се у овом интегралу сме изменити ред интеграције, тако да је

$$\varphi(s)=\frac{1}{s}\int_0^\infty d\{S(u)\}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}}\sin\{s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}\}\frac{dx}{x+u}.$$

Како је за $s>0$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}}\sin\{s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}\}\frac{dx}{x+u}=e^{-s\sqrt[4]{u}},$$

то је

$$\varphi(s)=\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-s\sqrt[4]{u}}\,d\{S(u)\}. \tag{2.8}$$

Доказ се сада своди на то да покажемо да је функција $\varphi(s)$ регуларна у десној полуравни укључивши и тачку $s=0$. Да је функција $\varphi(s)$ регуларна за $R(s)>0$ следи из чињенице да интеграли (2.7) и (2.8) конвергирају за реалне и позитивне s што је непосредна последица неједначине (2.4). Да бисмо показали да је функција $\varphi(s)$ регуларна у тачки $s=0$, доказаћемо да интеграл (2.7) апсолутно конвергира ако s лежи у довољно малом кругу око нуле. То, међутим, непосредно следи из (a), (2.6) и неједначине

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leqslant 2\, e^{|z|},$$

која важи за свако комплексно z.

Парцијалном интеграцијом интеграла (2.7) и сменом $\sqrt[4]{u} \mid u$ добијамо

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-su}\, S(u^4)\, du.$$

Ако ставимо

$$\psi(s)=\int_s^\infty \varphi(t)\, dt,$$

тада је функција

$$\psi(s)=\int_0^\infty e^{-su}\, S(u^4)\,\frac{du}{u}$$

регуларна у десној полуравни укључивши и тачку $s=0$.

Тиме је доказ става 2 завршен, јер из (2.5) и регуларности функције $\psi(s)$ у тачки $s=0$ следи

$$\frac{1}{u}\, S(u^4)=O(1), \quad u\to\infty,$$

као што то произлази из познатог става Ј. Карамате [**7**, стр. 28—36.].

2.3. *Промена реда интеграције.* Остало је још једино да докажемо да се у интегралу (2.7) сме изменити ред интеграције.

(i) Нека је

$$F(x)=e^{-s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}}\sin\{s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}\}.$$

Како je за коначне R_1 и R_2

$$\int_0^{R_1} F(x)\,dx \int_0^{R_2} \frac{dS(u)}{u+x} = \int_0^{R_2} dS(u) \int_0^{R_1} \frac{F(x)}{u+x}\,dx,$$

то je

$$\int_0^{\infty} F(x)\,dx \int_0^{R_2} \frac{dS(u)}{u+x} = \lim_{R_1=\infty} \int_0^{R_2} dS(u) \int_0^{R_1} \frac{F(x)}{u+x}\,dx.$$

Доказаћемо најпре да je

$$\lim_{R_1=\infty} \int_0^{R_2} dS(u) \int_0^{R_1} \frac{F(x)}{u+x}\,dx = \int_0^{R_2} dS(u) \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{u+x}\,dx.$$

За фиксирано R_2 нека je

$$D_1 = \int_0^{R_1} dS(u) \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{u+x}\,dx - \int_0^{R_2} dS(u) \int_0^{R_1} \frac{F(x)}{u+x}\,dx =$$

$$= \int_0^{R_2} dS(u) \int_{R_1}^{\infty} \frac{F(x)}{u+x}\,dx.$$

Тада je

$$|D_1| \leqslant \int_0^{R_2} \frac{|dS(u)|}{u+R_1} \int_{R_1}^{\infty} e^{-s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}}\,dx \to 0, \quad R_1 \to \infty.$$

Према томе je

$$\int_0^{\infty} F(x)\,dx \int_0^{R_2} \frac{dS(u)}{u+x} = \int_0^{R_2} dS(u) \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{u+x}\,dx.$$

(ii) Кад $R_2 \to \infty$, биће

$$\int_0^\infty dS(u) \int_0^\infty \frac{F(x)}{u+x}\, dx = \lim_{R_2=\infty} \int_0^\infty F(x)\, dx \int_0^{R_2} \frac{dS(u)}{u+x}.$$

Остало је, дакле, да докажемо да је

$$\lim_{R_2=\infty} \int_0^\infty F(x)\, dx \int_0^{R_2} \frac{dS(u)}{u+x} = \int_0^\infty F(x)\, dx \int_0^\infty \frac{dS(u)}{u+x}.$$

Нека је

$$D_2 = \int_0^\infty F(x)\, dx \int_0^\infty \frac{dS(u)}{u+x} - \int_0^\infty F(x)\, dx \int_0^{R_2} \frac{dS(u)}{u+x} =$$

$$= \int_0^\infty F(x)\, dx \int_{R_2}^\infty \frac{dS(u)}{u+x}.$$

Ставимо

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{dS(u)}{u+x} \quad \text{и} \quad g(t) = \int_0^t \frac{dS(u)}{u+1}.$$

Тада парцијалном интеграцијом добијамо

$$\int_{R_2}^\infty \frac{dS(u)}{u+x} = f(1) - g(R_2)\frac{1+R_2}{x+R_2} + (1-x)\int_{R_2}^\infty \frac{g(t)}{(x+t)^2}\, dt,$$

тако да је

$$D_2 = \int_0^\infty F(x)\, dx \left\{ f(1) - g(R_2)\frac{1+R_2}{x+R_2} + (1-x)\int_{R_2}^\infty \frac{g(t)}{(x+t)^2}\, dt \right\}.$$

Како je $|g(t)| \leqslant M$ за $t \geqslant R_2$, то je

$$|D_2| \leqslant \int_0^\infty |F(x)| \left| f(1) - g(R_2)\frac{1+R_2}{x+R_2} \right| dx + M \int_0^\infty |F(x)| \frac{|1-x|}{R_2+x} dx.$$

Означимо са J_1 и J_2 интеграле на десној страни ове неједначине. J_2 очевидно тежи нули кад $R_2 \to \infty$. Доказаћемо да то исто важи и за J_1.

За довољно велико R_2 je

$$g(R_2) = f(1) + o(1),$$

тако да je

$$f(1) - g(R_2)\frac{1+R_2}{x+R_2} = f(1)\frac{x-1}{x+R_2} + o(1)\frac{1+R_2}{x+R_2}, \quad R_2 \to \infty.$$

Према томе je

$$|J_1| \leqslant |f(1)| \int_0^\infty |F(x)| \frac{|x-1|}{x+R_2} dx + o(1) \int_0^\infty |F(x)| \frac{1+R_2}{x+R_2} dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|f(1)|}{R_2} \int_0^\infty (x+1) |F(x)| dx + o(1) \int_0^\infty |F(x)| dx,$$

тj.

$$|J_2| = o(1), \quad R_3 \to \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Å. Pleijel — Propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes des vibrations. *Arkiv för Mat. och Fys.* **27** A, №. 13 (1940).

[2] R. Courant — D. Hilbert — Methoden der Mathematischen Physik, I, Berlin, 1931.

[3] T. Carleman — Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes. *Förhandlingar Skandinaviska Matematikerkongressen*, Stockholm, 1934, 34—44.

[4] V. G. Avakumović — (a) Bemerkung uber einen Satz des Herrn T. Carleman. *Math. Zeitschr.* **53**,(1950) 53—58. (b) Über die Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung. *Publ. de l'Inst. Math. Beograd* **4** (1952), 95—96.

[5] R. Courant — Über die Schwingungen eingespannter Platten. *Math. Zeitsch.* **15** (1922), 195—200.

[6] O. Szász — Über einige Sätze von Hardy und Littlewood. *Nachrichten v. der Gesell. der Wiss. Göttingen, Math. Phys Klasse,* (1930) 311—333.

[7] J. Karamata — Über einen Satz von H. Heilbronn und E. Landau. *Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade,* **5** (1936) 28—38.

ÜBER DIE EIGENFUNKTIONEN DER SCHWINGENDEN PLATTE

RANKO BOJANIĆ und VLADETA VUČKOVIĆ

(i) Sei S ein offenes und beschränktes Gebiet der x, y — Ebene und S' der Rand von S; S' sei glatt. Ferner bezeichne $\{\lambda_n\}$ die Eigenwerte und $\{\Phi_n(P)\}$ die orthonormierten Eigenfunktionen der Randwertaufgabe

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} &\Delta\Delta\, u - \lambda u = 0, \quad P \in S, \\ &u = 0, \; \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad P \in S'; \end{aligned}$$

dabei bezeichnet P, ebenso wie nachher Q, einen Punkt aus S.

Nach Å. Pleijel [1] ist

$$\text{(1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n + \lambda} = \frac{1}{8\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-3/4}), \quad \lambda \to \infty,$$

woraus sich auf Grund des bekannten Hardy-Littlewoodschen Satzes Tauberscher Art ergibt dass

$$\text{(I')} \qquad E(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(P) \sim \frac{1}{4\pi}\sqrt{\lambda}, \quad \lambda \to \infty$$

ist. Ausserdem folgt aus (I') dass

$$\text{(II')} \qquad I(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n(P)\, \Phi_n(Q) = O(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \to \infty$$

ist.

Will man aber für $E(\lambda)$ und $I(\lambda)$ schärfere Abschätzungen als (I′) bzw. (II′) erhalten, so muss man, wie dies V. G. Avakumović [4,b], bei der Behandlung der Randwertaufgabe zweiter Ordnung bemerkt hat anstatt des Hardy-Littlewoodschen Satzes einen anderen Satz Tauberscher Art verwenden. Um diese Beweisanordnung auf die Randwertaufgabe (A) übertragen zu können ist es notwendig einerseits die Pleijelsche Abschätzung zu verschärfen, anderseits einen neuen, dem Avakumovićschen analogen Satz Tauberscher Art zu beweisen.

Durch die Verschärfung der Pleijelschen Beweisanordnung für die Abschätzung der Greenschen Funktion werden folgende asymptotische Formeln

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n+\lambda} = \frac{1}{8\sqrt{\lambda}} + O\left(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n+\lambda} = O\left(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}}\right), \quad \lambda \to \infty \tag{3}$$

bewiesen.

Dann wird folgender Satz Tauberscher Art bewiesen:

Satz 2. *Sei $S(u)$ von beschränkter Schwankung auf jeder endlichen Strecke und*

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{d\{S(u)\}}{u+x} \tag{4}$$

konvergent für ein (und somit für alle) $x > 0$.

Wenn $f(x)$ der Bedingung

$$f(x) = O\left(e^{-cx^{1/4}}\right), \quad x \to \infty \tag{a}$$

$(c > 0)$ und $S(u)$ der Konvergenzbedingung

$$S(v) - S(u) > -m\sqrt[4]{u} \text{ für alle } u \leqslant v \leqslant u + u^{3/4} \tag{b}$$

genügt, so ist

$$S(u) = O(\sqrt[4]{u}), \quad u \to \infty.$$

Durch Anwendung dieses Satzes gewinnt man aus (2) und (3) sowohl die zweite Approximation für die Funktion $E(\lambda)$ als auch eine verschärfte Abschätzung für die Funktion $I(\lambda)$:

$$E(\lambda)=\frac{1}{4\pi}\sqrt{\lambda}+O(\sqrt[4]{\lambda}),\quad \lambda\to\infty \tag{I}$$

und

$$I(\lambda)=O(\sqrt[4]{\lambda}),\quad \lambda\to\infty. \tag{II}$$

Die Abschätzung (I) folgt aus dem Satze 2 wenn man

$$S(u)=\sum_{\lambda_n\leqslant u}\Phi_n^2(P)-\frac{1}{4\pi}\sqrt{u}$$

setzt und beachtet dass auf Grund von (2) das Stieltjessche Integral (4) $O(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}})$ ist.

(II) folgt auf dieselbe Weise indem man direkt $S(u)=I(u)$ nimmt.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

СТАНИМИР ФЕМПЛ

О НЕКИМ РЕДУКЦИЈАМА ПОТПУНОГ НОРМАЛНОГ ЕЛИПТИЧКОГ ИНТЕГРАЛА ТРЕЋЕ ВРСТЕ

Означимо са $F(k, \varphi)$, $E(k, \varphi)$, $\Pi(n, k, \varphi)$ нормалне елиптичке интеграле I, II и III врсте са модулом k, амплитудом φ и параметром n:

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}, \quad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \Delta(\varphi)\, d\varphi,$$

$$\Pi(n, k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)},$$

при чему је

$$\Delta(\varphi) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,. \tag{1}$$

Означимо надаље са F, E и Π_0 одговарајуће потпуне интеграле.

Јакоби је показао [1, §§ 49 – 50, стр. 139] да је

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin\alpha\cos\alpha\,\Delta(\alpha)\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)} = E(k, \alpha)\,F - F(k, \alpha)\,E\,.$$

Интеграл на левој страни се може изразити помоћу интеграла Π_0, јер је

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)} = \frac{\Pi(n, k, \varphi) - F(k, \varphi)}{k^2\sin^2\alpha}$$

(параметар $n=-k^2\sin^2\alpha$). Из тога следи да је

$$\Pi_0=F+\frac{tg\,\alpha}{\Delta(\alpha)}\,[E(k,\alpha)\,F-F(k,\alpha)\,E]\,, \tag{2}$$

што значи да се потпуни нормални елиптички интеграл III врсте може изразити комбинацијама потпуних и непотпуних нормалних елиптичких интеграла I и II врсте. Овиме је омогућено израчунавање потпуних нормалних елиптичких интеграла II врсте помоћу постојећих таблица за елиптичке интеграле [2].

У специјалном случају $\alpha=0$, тј. $n=0$, је

$$\Pi_0=F\,,$$

док се за случај $\alpha=\pi/2$, тј. $n=-k^2$, лако можемо уверити да је

$$\Pi_0=\frac{E}{1-k^2}\,.$$

У ова два позната случаја, потпуни нормални интеграл III врсте изражава се само потпуним интегралима I и II врсте.

Може се поставити питање: За које вредности параметра се потпуни нормални интеграли III врсте могу свести на изразе у којима се појављују само потпуни нормални интеграли I и II врсте?

Питање је утолико пре од интереса, што се – како ће се показати – у таквим изразима појављују само нормални интеграли I врсте.

У овом раду, решавајући делимично то питање на основу ниже наведених ставова, хтео бих да укажем на једну методу добијања везе између параметра и модула, применом које се решава постављено питање.

I

Параметарски угао интеграла III врсте

$$\alpha=\arc\sin\frac{\sqrt{-n}}{k}$$

има реалну вредност само у случају

$$-k^2\leqslant n\leqslant 0\,; \tag{3}$$

једино у том случају, за оно што следи, биће употребљива формула (2) која, иначе, важи за све вредности α. Услед тога, биће потребно наћи подесне формуле за случај позитивног n и за случај

$-\infty < n \leqslant -k^2$. У овом другом случају, кад n лежи у размаку $(-\infty, -1)$, подинтегрална функција интеграла Π_0 има дисконтинуитет за $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{-n}}$. Та вредност φ је реална и лежи између интегралних граница, па је интеграл дивергентан. Стога, осим случаја (3), у обзир долазе још само случајеви

$$0 \leqslant n < \infty \tag{4}$$

и

$$-1 \leqslant n < -k^2. \tag{5}$$

За случај (3), због

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{-n}}{k}, \tag{6}$$

добива се из једначине (2)

$$\Pi_0 = F + \sqrt{\frac{-n}{(n+1)(n+k^2)}} \cdot$$

$$\cdot \left[E\left(k, \arcsin \frac{\sqrt{-n}}{k}\right) F - F\left(k, \arcsin \frac{\sqrt{-n}}{k}\right) E \right]. \tag{7}$$

За случај (4) може се употребити једначина [3, стр. 134]

$$(n+1)\Pi_0 - F + E = E - \frac{n(1-k^2)}{n+k^2} F + \sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \left\{ FE_1 - (F-E) F_1 \right\},$$

из које следи

$$\Pi_0 = \frac{k^2 F}{n+k^2} + \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}} (F E_1 + E F_1 - F F_1), \tag{8}$$

где је

$$F_1 = F\left(k', \arcsin \sqrt{\frac{n}{n+k^2}}\right), \qquad E_1 = E\left(k', \arcsin \sqrt{\frac{n}{n+k^2}}\right), \tag{9}$$

при чему је k' комплементаран модуо модула k:

$$k' = \sqrt{1-k^2}. \tag{10}$$

За случај (5) је

$$1 \leqslant \frac{\sqrt{-n}}{k} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Ако се сада интеграли

$$w_1=\int_0^{\frac{\sqrt{-n}}{k}}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\qquad w_2=\int_0^{\frac{\sqrt{-n}}{k}}\frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{1-z^2}\,dz,$$

узму дуж праволиниске путање, обилазећи при томе критички сингуларитет $z=1$ по једном полукругу са центром у тачки $z=1$, интеграли дуж полукруга конвергираће према нули кад полупречник путање тежи ка нули, тако да ће остати

$$F\left(k,\arcsin\frac{\sqrt{-n}}{k}\right)=F(k,\alpha)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+$$

$$+\frac{1}{i}\int_1^{\frac{\sqrt{-n}}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

$$E\left(k,\arcsin\frac{\sqrt{-n}}{k}\right)=E(k,\alpha)=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx+$$

$$+\frac{1}{i}\int_1^{\frac{\sqrt{-n}}{k}}\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{x^2-1}}\,dx.$$

Ако се у другим интегралима десне стране изврши смена

$$x=\frac{1}{\sqrt{1-k'^2t^2}},$$

биће

$$F(k,\alpha)=F-i\int_0^{\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}},$$

$$E(k,\alpha)=E-i\,k'^2\int_0^{\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}}\sqrt{\frac{1-t^2}{(1-k'^2t^2)^3}}\,dt.$$

Како због $-1 \leqslant n \leqslant 0$ излази $-n k^2 \leqslant k^2$, тј. $n k'^2 \leqslant n + k^2$, одакле следи $k'^2 \geqslant \frac{n+k^2}{n}$ и

$$\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}} \leqslant 1,$$

то се види да је горња граница последња два интеграла реална и да није већа од јединице. Зато се, после смене $t = \sin\varphi$, добива

$$F(k,\alpha) = F - i F\left(k', \arcsin\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}\right), \tag{11}$$

$$E(k,\alpha) = E - i k'^2 \int_0^{\arcsin\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)^{3/2}}.$$

Како је [4, стр. 301]

$$\int_0^{\psi} \frac{\cos^2\psi \, d\psi}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\psi)^3}} = \frac{F(k',\psi) - E(k',\psi)}{k'^2} + \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}$$

и како је у овом случају

$$\sin\psi = \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}, \qquad \cos\psi = \frac{k}{k'}\sqrt{\frac{n+1}{-n}},$$

то је

$$\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}} = \frac{1}{k'^2}\sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}},$$

па је

$$E(k,\alpha) = E - i\left[F\left(k', \arcsin\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}\right) - \right.$$

$$\left. - E\left(k', \arcsin\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}\right) + \sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\right].$$

Ако још означимо

$$F\left(k', \arcsin\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}\right) = F_2; \quad E\left(k', \arcsin\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}\right) = E_2, \tag{12}$$

последња једначина гласиће

$$E(k,\alpha)=E-i\left[F_2-E_2+\sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\right],$$

а једначина (11),

$$F(k,\alpha)=F-iF_2.$$

Уношењем ових вредности у једначину (2), због (6) и због

$$\cos\alpha=\frac{i}{k}\sqrt{-(n+k^2)},$$

тј.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\Delta(\alpha)}=-i\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}},$$

ова постаје

$$\Pi_0=\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\,(E_2F+F_2E-F_2F), \qquad (13)$$

где E_2 и F_2 имају значење (12).

II

Према начину излагања, ставове ћу поделити у две групе.

I група ставова

Нека је n параметар потпуног нормалног елиптичког интеграла III врсте Π_0, његов модуо нека је k и нека је F потпуни нормални елиптички интеграл I врсте са истим модулом.

Став 1. *За*

$$n=-(1-k') \qquad (14)$$

је

$$\Pi_0=\frac{1+k'}{2k'}F. \qquad (15)$$

Став 2. *За*

$$n=k \qquad (16)$$

је

$$\Pi_0=\frac{\pi}{4(1+k)}+\frac{1}{2}F \qquad (17)$$

Став 3. *За*

$$n=-k \qquad (18)$$

је

$$\Pi_0=\frac{\pi}{4(1-k)}+\frac{1}{2}F. \qquad (19)$$

Код доказивања ових ставова послужиће се адиционим теоремама за елиптичке интеграле I и II врсте које гласе [5, стр. 327—28]:

Кадгод између три амплитуде φ, ψ и σ постоји веза

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\sigma), \tag{20}$$

увек је

$$F(k,\varphi) + F(k,\psi) = F(k,\sigma) \tag{21}$$

и

$$E(k,\varphi) + E(k,\psi) = E(k,\sigma) + k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma. \tag{22}$$

Из ових теорема следи за $\psi = \varphi$ и $\sigma = \pi/2$:

$$F(k,\varphi) = \frac{1}{2}F, \tag{23}$$

$$E(k,\varphi) = \frac{1}{2}E + \frac{k^2}{2}\sin^2\varphi, \tag{24}$$

а амплитуда φ, због $\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right) = k'$, мора задовољавати једначину

$$\cos^2\varphi - k'\sin^2\varphi = 0,$$

тј.

$$\mathrm{tg}^2\,\varphi = \frac{1}{k'}. \tag{25}$$

Доказ става 1. Узимајући за φ вредност

$$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{-n}}{k}, \tag{26}$$

једначина (25) се своди на

$$\frac{-n}{n+k^2} = \frac{1}{k'},$$

одакле следи вредност за n:

$$n = -(1-k'). \tag{27}$$

Величина n је у овом случају негативна, а како из $k' \geqslant k'^2$ следи $-1+k' \geqslant -1+k'^2$, то је $-1+k' = n \geqslant -k^2$, па величина n припада случају (3). Услед тога се Π_0 може изразити у облику (7). Како је сада, према једначини (23),

$$F\left(k, \arcsin\frac{\sqrt{-n}}{k}\right)=\frac{1}{2}F,$$

а због

$$k^2\sin^2\varphi=1-k',$$

према једначини (24),

$$E\left(k, \arcsin\frac{\sqrt{-n}}{k}\right)=\frac{1}{2}E+\frac{1-k'}{2}$$

и како је за вредност n из једначине (27)

$$\sqrt{\frac{-n}{(n+1)(n+k^2)}}=\frac{1}{k'},$$

то се једначина (7) своди на облик (15), што је требало показати.

Доказ става 2. Означимо:

$$F'=F\left(k',\frac{\pi}{2}\right),\quad E'=E\left(k',\frac{\pi}{2}\right). \tag{28}$$

Тада за комплементаран модуо k' једначине (23), (24) и (25) добивају облик

$$F(k',\varphi)=\frac{1}{2}F', \tag{29}$$

$$E(k',\varphi)=\frac{1}{2}E'+\frac{k'^2}{2}\sin^2\varphi, \tag{30}$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{1}{k}. \tag{31}$$

Узимајући за φ вредност

$$\varphi=\arcsin\sqrt{\frac{n}{n+k^2}},$$

једначина (31) се своди на

$$\frac{n}{k^2}=\frac{1}{k}$$

одакле излази вредност за n:

$$n=k. \tag{32}$$

Овде је n позитивно, те припада случају (4). Услед тога се интеграл Π_0 може изразити у облику (8). Како је према једначинама (9) и (29)

$$F\left(k', \arcsin\sqrt{\frac{n}{n+k^2}}\right)=F_1=\frac{1}{2}F',$$

а због

$$k'^2 \sin^2\varphi=\frac{n\,k'^2}{n+k^2},$$

према једначинама (9) и (30),

$$E\left(k', \arcsin\sqrt{\frac{n}{n+k^2}}\right)=E_1=\frac{1}{2}E'+\frac{n\,k'^2}{2(n+k^2)}$$

и како за вредност n из једначине (32) следи

$$\frac{k^2}{n+k^2}=\frac{k}{1+k}, \qquad \frac{n\,k'^2}{2(n+k^2)}=\frac{1-k}{2},$$

$$\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}=\frac{1}{1+k},$$

то се једначина (8) своди на облик

$$\Pi_0=\frac{1}{2}F+\frac{1}{2(1+k)}(E'F+F'E-F'F). \tag{33}$$

По познатој Лежандровој релацији [6] је

$$E'F+F'E-F'F=\frac{\pi}{2}. \tag{34}$$

Зато се једначина (33) своди на облик (17), што је требало показати.

Доказ става 3. Узимајући за φ вредност

$$\varphi=\arcsin\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}},$$

једначина (31) се своди на

$$-\frac{n+k^2}{k^2(n+1)}=\frac{1}{k},$$

одакле следи вредност за n:

$$n = -k. \tag{35}$$

Величина n се у овом случају налази између -1 и $-k^2$, те припада случају (5). Услед тога се интеграл Π_0 може изразити у облику (13). Како је сада, према једначинама (12) и (29),

$$F\left(k', \arcsin \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}\right) = F_2 = \frac{1}{2} F',$$

а због

$$k'^2 \sin^2 \varphi = \frac{n+k^2}{n},$$

према једначинама (12) и (30),

$$E\left(k', \arcsin \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}\right) = E_2 = \frac{1}{2} E' + \frac{n+k^2}{n},$$

и како је за вредност n из једначине (35):

$$\frac{n+k^2}{2n} = \frac{1-k}{2}, \qquad \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}} = \frac{1}{1-k},$$

то се једначина (13) своди на облик

$$\Pi_0 = \frac{1}{2(1-k)}(E'F + F'E - F'F) + \frac{1}{2} F.$$

Услед релације (34), ова једначина добива облик (19), што је требало показати.

II група ставова

Нека је n параметар потпуног нормалног елиптичког интеграла II врсте Π_0, његов модуо нека је k и нека је F потпуни нормални елиптички интегал I врсте са истим модулом. Нека је надаље

$$A(\lambda) = \sqrt[3]{\frac{4(1-\lambda^2)}{\lambda^4}} \tag{36}$$

и

$$N(\lambda) = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{1+A(\lambda)} + \sqrt{2 - A(\lambda) + 2\sqrt{1 - A(\lambda) + A^2(\lambda)}}\right]. \tag{37}$$

Став 4. *За*

$$n = -k^2 N(k) \tag{38}$$

је

$$\Pi_0 = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{1 - N(k)}\right] F. \tag{39}$$

Став 5. *За*

$$n = \frac{1}{2} k'^2 N(k') - \frac{1}{4}(4 - k'^2) + \frac{k'^2}{8N(k') - 4} \tag{40}$$

је

$$\Pi_0 = \frac{\pi}{6k'}\sqrt{2N(k') - 1} - \frac{1}{3}[N^2(k') - N(k') - 2] F. \tag{41}$$

Став 6. *За*

$$n = -k^2 - k'^2 [1 - N(k')]^2 \tag{42}$$

је

$$\Pi_0 = \frac{\pi}{6k'\sqrt{2N(k') - 1}} + \frac{1}{3}[1 + N(k')] F. \tag{43}$$

За доказивање ових ставова послужићу се једним поступком који следи из мултипликативне теореме за елиптичке интеграле I врсте [4, стр. 338]. Ако, наиме, три амплитуде φ_{m-1}, φ_m, φ_{m+1}, задовољавају једначине

$$F(k, \varphi_{m-1}) = (m-1) F(k, \varphi),$$

$$F(k, \varphi_m) = m F(k, \varphi), \tag{44}$$

$$F(k, \varphi_{m+1}) = (m+1) F(k, \varphi), \tag{45}$$

онда између тих амплитуда мора постојати веза

$$tg\,\frac{\varphi_{m-1} + \varphi_{m+1}}{2} = \Delta(\varphi)\, tg\,\varphi_m, \tag{46}$$

при чему се полази од $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_1 = \varphi$. (Краткоће ради, овај поступак није примењен на доказивање прва три става).

Зауставићу се на случају $m = 2$.

Из једначина (44), (45) и (46) добива се

$$F(k, \varphi_2) = 2F(k, \varphi), \tag{47}$$

$$F(k, \varphi_3) = 3F(k, \varphi), \tag{48}$$

$$tg\,\frac{\varphi + \varphi_3}{2} = \Delta(\varphi)\, tg\,\varphi_2. \tag{49}$$

За $\varphi_3 = \dfrac{\pi}{2}$, из једначина (48) и (49), следи

$$F(k, \varphi) = \frac{1}{3} F, \tag{50}$$

$$tg\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \Delta(\varphi)\, tg\, \varphi_2. \tag{51}$$

Како још за $m=1$ из једначине (46) излази

$$tg\, \frac{\varphi_2}{2} = \Delta(\varphi)\, tg\, \varphi, \tag{52}$$

то услов (51) постаје

$$tg\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\,\Delta^2(\varphi)\, tg\, \varphi}{1 - \Delta^2(\varphi)\, tg^2\, \varphi}. \tag{53}$$

На сличан начин могу се свести и интеграли II врсте. Стављајући $\psi=\varphi$ и $\sigma=\varphi_2$ у једначини (22), добива се

$$E(k, \varphi_2) = 2\, E(k, \varphi) - k^2 \sin^2 \varphi \sin \varphi_2. \tag{54}$$

Како је на основу адиционе теореме (22):

$$E(k, \varphi_2) + E(k, \varphi) = E(k, \varphi_3) + k^2 \sin\varphi \sin\varphi_2 \sin\varphi_3,$$

то за $\varphi_3 = \dfrac{\pi}{2}$, обзиром на једначину (54), следи

$$E(k, \varphi) = \frac{1}{3} E + \frac{k^2}{3} \sin\varphi \sin\varphi_2 (1 + \sin\varphi),$$

а ова једначина, због једначине (52), постаје

$$E(k, \varphi) = \frac{1}{3} E + \frac{2\, k^2}{3} \, \frac{\sin\varphi\,(1+\sin\varphi)\, tg\,\varphi\, \Delta(\varphi)}{1 + \Delta^2(\varphi)\, tg^2\, \varphi}. \tag{55}$$

Види се, дакле, да се уз услов (53) елиптички интеграли I и II врсте, (50) и (55), могу изразити помоћу одговарајућих потпуних интеграла.

Из услова (53) следи

$$k^2 \sin^5\varphi - k^2 \sin^4\varphi - 2\, k^2 \sin^3\varphi + 2 \sin^2\varphi + \sin\varphi - 1 = 0.$$

Како у обзир долазе вредности φ које се налазе између 0 и $\pi/2$, то отпада корен $\sin\varphi = -1$ последње једначине. На тај начин, место тога услова добива се услов

$$k^2 \sin^4\varphi - 2\, k^2 \sin^3\varphi + 2 \sin\varphi - 1 = 0. \tag{56}$$

У обзир би дошла једино она вредност за $\sin\varphi$ која се налази између 0 и 1. Примењујући, рецимо, Штурмову теорему, лако се показује да постоји само једна таква вредност за $\sin\varphi$.

Сменом

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}(t+1),$$

горња једначина се своди на облик

$$t^4 - 6t^2 + \frac{8(2-k^2)}{k^2}t - 3 = 0.$$

Како кубна резолвента ове једначине

$$z^3 - 3z^2 + 3z - \frac{(2-k^2)^2}{k^4} = 0$$

има један реалан и два комплексна корена, то ако се стави

$$A(\lambda) = \sqrt[3]{\frac{4(1-\lambda^2)}{\lambda^4}}, \tag{57}$$

због

$$z_1 = 1 + A(k), \quad z^2 = 1 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}A(k), \quad z_3 = 1 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}A(k),$$

реални корени једначине (56) су

$$\sin\varphi_{1,2} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{z_1} \mp \frac{1}{2}(\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}).$$

Како је

$$\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = \sqrt{2 - A + 2\sqrt{1 - A + A^2}},$$

а овај израз је реалан, то је

$$\sin\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+A} \pm \sqrt{2 - A + 2\sqrt{1-A+A^2}}\right).$$

Како је још $\sin\varphi_1 < 0$, то у обзир долази друга вредност $\sin\varphi_2$, па је

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{1 + A(k)} + \sqrt{2 - A(k) + 2\sqrt{1 - A(k) + A^2(k)}}\right] \tag{58}$$

тражена вредност.

Доказ става 4. Узимајући

$$n=-k^2\sin^2\varphi$$

тј.

$$n=-\frac{k^2}{4}\left[1-\sqrt{1+A(k)}+\sqrt{2-A(k)+2\sqrt{1-A(k)+A^2(k)}}\right]^2, \quad (59)$$

имаћемо случај (3), а на основу једначина (50) и (55), израз (7) за Π_0 постаје

$$\Pi_0=\frac{(k^2\sin^4\varphi-2k^2\sin^3\varphi-1)-2}{3(k^2\sin^4\varphi-1)}F.$$

Услед једначине (56), овом изразу се може дати једноставнији облик

$$\Pi_0=\frac{1+\sin\varphi}{\sin\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)}\frac{F}{3},$$

при чему $\sin\varphi$ има вредност (58). Да би се избегли компликовани изрази, последњи се разломак може још појединоставити, ако се прошири са $2-\sin\varphi$, а затим се на именилац примени једначина (56). На тај се начин добива

$$\Pi_0=\frac{(1+\sin\varphi)(2-\sin\varphi)}{(k^2\sin^4\varphi-2k^2\sin^3\varphi+2\sin\varphi)-\sin^2\varphi}\frac{F}{3},$$

или

$$\Pi_0=\frac{F}{3}\left(1+\frac{1}{1-\sin\varphi}\right). \quad (60)$$

Према једначинама (36), (37) и (58), једначина (59) добива облик (38), док једначина (60) добива облик (39), што је требало показати.

Доказ става 5. За комплементаран модуо k', једначине (50), (55) и (56) добивају облик

$$F(k',\varphi)=\frac{1}{3}F', \quad (61)$$

$$E(k',\varphi)=\frac{1}{3}E'+\frac{2k'^2}{3}\frac{\sin\varphi(1+\sin\varphi)\operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}{1+(1-k'^2\sin^2\varphi)\operatorname{tg}^2\varphi}, \quad (62)$$

$$k'^2\sin^4\varphi-2k'^2\sin^3\varphi+2\sin\varphi-1=0, \quad (63)$$

при чему је (в. (58))

$$\sin\varphi=\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1+A(k')}+\sqrt{2-A(k')+2\sqrt{1-A(k')+A^2(k')}}\right]=N(k'). \quad (64)$$

И овде је $0 \leqslant \sin\varphi \leqslant 1$. Узимајући сада

$$\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{n}{n+k^2}}, \tag{65}$$

тј.

$$n = k^2 \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{k^2\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi}, \tag{66}$$

величина n припада случају (4). Да би се израз за n поједноставнио, последњи разломак проширићемо са $k'^2(1-\sin\varphi)^2$ и узети у обзир једначину (63). Биће

$$n = k^2\,\frac{(k'^2\sin^4\varphi - 2\,k'^2\sin^3\varphi) + k'^2\sin^2\varphi}{-(k'^2\sin^4\varphi - 2\,k'^2\sin^3\varphi) - k'^2(2\sin\varphi - 1)} = \frac{1}{2}\,\frac{k'^2\sin^2\varphi - 2\sin\varphi + 1}{\sin\varphi - 1/2}$$

тј.

$$n = \frac{1}{2}\,k'^2\sin\varphi - \frac{1}{4}(4-k'^2) + \frac{k'^2}{8\sin\varphi - 4}.$$

На основу једначина (36), (37) и (64), величина n добива облик (40). Смењујући сада у једначину (8) вредности (66), добићемо

$$\Pi_0 = F\cos^2\varphi + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\varphi}}\,(E_1\,F + F_1\,E - F_1\,F).$$

Због једначине (65), леве стране једначина (61) и (62) претстављају величине F_1 и E_1 (в. (9)), а према овим једначинама, на основи Лежандрове релације (34), израз у загради добива облик

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2\,k'^2}{3}\,\frac{\sin\varphi\operatorname{tg}\varphi\,(1+\sin\varphi)\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}{1+(1-k'^2\sin^2\varphi)\operatorname{tg}^2\varphi}\,F. \tag{67}$$

Уносећи ову вредност у последњу једначину, због

$$\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi},$$

ова постаје

$$\Pi_0 = \frac{\pi}{6}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} + \frac{(k'^2\sin^4\varphi - 2\,k'^2\sin^3\varphi - 1) - 2}{3\,(k'^2\sin^4\varphi - 1)}\,F\cos^2\varphi. \tag{68}$$

Да би се добио што подеснији облик за рачун, и први и други члан десне стране могу се упростити применом једначине (63). Биће

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{k'^2\sin^4\varphi - k'^2\sin^2\varphi}{k'^2\sin^2\varphi - 1}} = \frac{1}{k'}\sqrt{2\sin\varphi - 1}. \tag{69}$$

Коефицијент уз $\frac{1}{3}F\cos^2\varphi$ постаће

$$\frac{1+\sin\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)\sin\varphi},$$

а кад се овај разломак прошири са $2-\sin\varphi$ и поново примени једначина (63), добиће се

$$\frac{2+\sin\varphi-\sin^2\varphi}{(k'^2\sin^4\varphi-2k'^2\sin^3\varphi+2\sin\varphi)-\sin^2\varphi}=\frac{2+\sin\varphi-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Кад се ова вредност и вредност (69) унесу у једначину (68), добиће се подеснији израз са Π_0:

$$\Pi_0=\frac{\pi}{6k'}\sqrt{2\sin\varphi-1}+\frac{F}{3}(2+\sin\varphi-\sin^2\varphi).$$

На крају, ако место $\sin\varphi$ ставимо његову вредност (64), обзиром на (37), последња једначина примиће облик (41), што је требало показати.

Доказ става 6. Узимајући

$$\varphi=\arcsin\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}, \tag{70}$$

биће

$$n=-\frac{k^2}{1-k'^2\sin^2\varphi}. \tag{71}$$

Како је $\sin\varphi$ позитивна величина која није већа од јединице, лако се показује да се разломак у (71) налази између -1 и $-k^2$ те да, стога, величина n припада случају (5). Услед тога, за одређивање величине Π_0 узеће се једначина (13).

Израз за n може добити простији облик ако се последњи разломак најпре прошири са $\frac{1}{k'^2}-2\sin\varphi+\sin^2\varphi$, а затим примени једначина (63). Добиће се

$$n=\frac{k^2}{k'^2}\,\frac{1-2k'^2\sin\varphi+k'^2\sin^2\varphi}{(k'^2\sin^4\varphi-2k'^2\sin^3\varphi+2\sin\varphi)-1/k'^2}=$$

$$=-(1-2k'^2\sin\varphi+k'^2\sin^2\varphi)=-k'^2(1-\sin\varphi)^2-k^2.$$

Ако овде за $\sin\varphi$ ставимо његову вредност (64), израз за n, обзиром на (36) и (37), добива облик (42). Смењујући сада у једначину (13) вредност (71), добиће се

$$\Pi_0 = \frac{\sqrt{1-k'^2 \sin^2\varphi}}{k'^2 \sin\varphi \cos\varphi}(E_2 F + F_2 E - F_2 F).$$

Због једначине (70), леве стране једначина (61) и (62) представљају величине F_2 и E_2 (в. (12)), а према овим једначинама, на основу Лежандрове релације, израз у загради добива облик (67). Уносећи ово у последњу једначину, добива се

$$\Pi_0 = \frac{\pi}{6k'}\sqrt{\frac{k'^2 \sin^2\varphi - 1}{k'^2 \sin^4\varphi - k'^2 \sin^2\varphi}} - \frac{2}{3}\,\frac{\sin\varphi\,(1+\sin\varphi)\,(1-k'^2\sin^2\varphi)}{k'^2\sin^4\varphi - 1}\,F,$$

а ако се још код сваког имениоца примени једначина (63), биће

$$\Pi_0 = \frac{\pi}{6k'\sqrt{2\sin\varphi - 1}} + \frac{F}{3}(1+\sin\varphi).$$

Ако место $\sin\varphi$ ставимо његову вредност (64), обзиром на (37), последња једначина добива облик (43), што је требало показати.

III

Из излагања у II, јасно се види пут за изналажење онаквих вредности параметра n интеграла Π_0 код којих се тај интеграл изражава само помоћу потпуних нормалних елиптичких интеграла I и II врсте. Разумљиво је да ће се, при сваком даљем кораку, једначине компликовати. Али, на основи досадашњих резултата, ипак се могу извући неколико општих закључака.

a) За један низ вредности параметра n, израженог као функција модула k, потпуни нормални елиптички интеграл III врсте Лежандровог типа може се свести на израз у коме се појављују само потпуни нормални елиптички интеграли I и II врсте са истим модулом.

b) Изузев случаја $n = -k^2$, сви се овакви интеграли могу изразити помоћу потпуног нормалног елиптичког интеграла I врсте са истим модулом.

c) За све овакве вредности параметра, модуо и параметар увек су међусобно везани алгебарским једначинама.

ЛИТЕРАТУРА

[1] K. G. Jacobi — Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Königsberg 1829.

[2]. Jahnke-Emde — Funktionentafeln. Leipzig u. Berlin 1909.

[3] С. Фемпл — Компланација косе кружне купе. *Гласник математичко-физички и астрономски* 4 (1939), №. 3.

[4] O. Schlömilch — Vorlesungen über einzelne Theile der Höheren Analysis. Braunschweig 1879.

[5] W. Laska — Sammlung von Formeln der reinen u. angewandten Mathematik. Braunschweig 1888—94.

[6] A. M. Legendre — Traité des fonctions elliptiques et intégrales Eulériennes. Paris 1825.

ÜBER EINIGE REDUKTIONEN DES VOLLSTÄNDIGEN ELLIPTISCHEN NORMALINTEGRALS III GATTUNG

STANIMIR FEMPL

Es ist bekannt, dass sich vollständige elliptische Normalintegrale III Gattung durch Kombinationen von vollständigen und unvollständigen elliptischen Normalintegralen I und II Gattung ausdrücken lassen.

In dieser Abhandlung stellt der Verfasser zwei Gruppen von Bedingungen auf, die der Parameter und der Modul befriedigen müssen (Formeln (14), (16), (18), und (38), (40), (42)), damit das Legendresche vollständige elliptische Normalintegral III Gattung auf das vollständige Normalintegral I Gattung mit demselben Modul zurückgeführt werden kann (Formeln (15), (17), (19) und (39), (41), (43)).

Die Aufstellung dieser Bedingungen weist auf ein Verfahren hin, auf Grund desse man Relationen zwischen Modul und Parameter ableiten kann, welche die Reduktionen im obigen Sinne ermöglichen. Dabei sind Parameter und Modul immer durch algebraische Gleichungen verknüpft.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

ВОЈИСЛАВ Г. АВАКУМОВИЋ

О ТЕМЕНИМА ЗАТВОРЕНЕ КРИВЕ

1.1. Најједноставнија теорема диференцијалне геометрије у великом је несумњиво она коју је дао Mukhopadyaya [1, стр. 17—18]:

Теорема A. *Кривина затворене конвексне криве у равни има најмање четири темена.*

При томе се теменима криве зову оне тачке у којима извод кривине по луку мења свој знак.

Ова теорема је више пута доказивана и у разним правцима уопштавана. Између осталога, показано је да споменута теорема важи већ и онда ако је кривина непрекидна, у ком случају се под теменом криве подразумева она тачка у којој кривина постизава своје највеће одн. најмање вредности. Поред тога, закључак теореме A важи и онда, као што је то приметио D. Fog [2], ако уочена крива нема двојних тачака а лежи у равни или на лопти.

Уопштења, одн. аналогони теореме A које ћу овде доказати леже у једном другом правцу.

1.2. У овоме раду ја ћу се бавити кривима које имају особину да је први извод њиховог вектора положаја стално различит од нула-вектора а четврти извод непрекидан.

Затворену конвексну криву у простору дефинишемо овако:

Затворена крива у простору је затворена конвексна крива ако кроз ма које две тачке на кривој пролази најмање једна раван која са кривом нема других заједничких тачака.

Вектор положаја криве обележаваћу са $\mathfrak{r}_1$ а дужину њеног лука са s, дакле $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1\,(s)$.

$\mathfrak{t}$ одн. $\mathfrak{n}$ одн. $\mathfrak{b}$ означавају ортове тангенте одн. главне нормале одн. бинормале криве $\mathfrak{r}_1$. $\varkappa$ одн. τ означавају кривину одн. торзију криве $\mathfrak{r}_1$. Ако крива $\mathfrak{r}_1$ лежи на некој површини онда $\varkappa_N$ одн. $\varkappa_g$ означавају кривину нормалног пресека одн. геодезијску кривину криве с обзиром на површину у којој крива лежи. Цртице обележавају изводе по s.

1.3. Како смо претпоставили да $\mathfrak{r}_1$ има четири непрекидна извода, екстремне тачке скалара $\varkappa$, τ, $\varkappa_N$ и $\varkappa_g$ су оне тачке у којима $\varkappa'$, τ', $\varkappa_N'$ и $\varkappa_g'$ мењају свој знак.

Циљ овог рада је да се докажу следеће две теореме.

Теорема 1. *Ако је* $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1(s)$ *затворена конвексна линија кривине, тада* $\varkappa_g$ *и* $\varkappa_N$ *имају најмање четири екстремне тачке.*

У равни и на лопти је свака крива линија кривине; поред тога у равни је $\varkappa = \varkappa_g$, а на јединичној лопти је $\varkappa^2 = 1 + \varkappa_g^2$. Према томе теорема 1 садржи као специјалан случај теорему А и њен анологон на лопти.

Теорема 2. *Ако је* $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1(s)$ *затворена крива а*

$$\mathfrak{r}_2(s) = \mathfrak{r}_2(0) + \int_0^s \mathfrak{n}\, ds$$

затворена конвексна крива, тада τ *и* $\varkappa$ *имају најмање четири екстремне тачке.*

Ради лакшег разумевања навешћу прво неке дефиниције и обрасце везане за појам појаса криве [1, стр. 12—14].

1.4. Ако је за неку криву $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1(s)$ везан неки помични ортогонални триједар

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1(s), \quad \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2(s), \quad \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_3(s)$$

десне оријентације, а такав да се дуж целе криве орт $\mathfrak{a}_3$ поклапа са ортом тангенте криве, онда се обвојница фамилије површина дефинисаних ортовима $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ зове појас уочене криве; крива $\mathfrak{r}_1$ се зове носач појаса а орт $\mathfrak{a}_3$ нормала појаса.

Као што је познато ортови појаса задовољавају „Френеове једначине појаса“:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}'_1 &= \quad * \quad + k_3\,\mathfrak{a}_2 - k_2\,\mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{a}'_2 &= -k_3\,\mathfrak{a}_1 \quad * \quad + k_1\,\mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{a}'_3 &= +k_2\,\mathfrak{a}_1 - k_1\,\mathfrak{a}_2 \quad * \quad . \end{aligned}$$

Скалар

$k_1 = k_1(s)$ се зове торзија,

$k_2 = k_2(s)$ се зове отступање,

$k_3 = k_3(s)$ се зове кривина

носача с обзиром на уочени појас.

На основи Френеових једначина, скалари k_1, k_2 и k_3 могу се изразити помоћу образаца:

$$\begin{aligned} k_1 &= \mathfrak{a}'_2\,\mathfrak{a}_3 = -\mathfrak{a}'_3\,\mathfrak{a}_2, \\ k_2 &= \mathfrak{a}'_3\,\mathfrak{a}_1 = -\mathfrak{a}'_1\,\mathfrak{a}_3, \\ k_3 &= \mathfrak{a}'_1\,\mathfrak{a}_2 = -\mathfrak{a}'_2\,\mathfrak{a}_1. \end{aligned}$$

a. Ако је дуж носача

$$k_1 \equiv 0,$$

појас се зове „кривински појас" а носач „линија кривине" појаса. У том случају је

$$0 \equiv k_1 = \tau_g, \quad k_2 = -\varkappa_N, \quad k_3 = \varkappa_g.$$

При томе се τ_g, $\varkappa_N$ и $\varkappa_g$ односе на појас одн. површину у којој крива лежи. Триједар појаса је природни триједар површине, тј.

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{t} \quad \text{и} \quad \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{N},$$

где $\mathfrak{N}$ означава орт нормале на површину.

b. Ако је дуж носача

$$k_2 \equiv 0,$$

појас се зове „оскулаторни појас". Уочени триједар појаса је уобичајени природни триједар криве, тј.

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{b}.$$

У том случају је

$$k_1 = \tau \quad \text{и} \quad k_3 = \varkappa.$$

c. Ако је дуж носача

$$k_3 \equiv 0,$$

појас се зове „геодетски појас" а носач „геодетска линија" појаса односно површине у којој крива лежи. У том случају се орт главне нормале носача поклапа са ортом нормале појаса па је

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{a}_2 = -\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{n};$$

$$k_1 = \tau, \quad k_2 = -\varkappa, \quad k_3 = \varkappa_g \equiv 0.$$

2.1. Доказаћу овај помоћни став:

Лема 1. *Означимо са* $\mathfrak{a}_i^* = \mathfrak{a}_i^*(s)$ $(i = 1,2,3)$ *криву*

$$\mathfrak{a}_i^*(s) = \mathfrak{a}_i^*(0) + \int_0^s \mathfrak{a}_i \, d s$$

где су $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ *ортови ортогоналног триједра појаса криве* $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1(s)$. *(дакле* $\mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{r}_1(s)$*).*

Ако је $\mathfrak{r}_1$ затворена крива дужине l а $\mathfrak{c}$ ма какав сталан вектор, онда за сваки пojас носача $\mathfrak{r}_1$ важе обрасци:

$$\int_{K_\nu} \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_\nu^*\, k'_\mu\, d s = \mathfrak{c}\, k_\mu(0)\left(\mathfrak{a}_\nu^*(l) - \mathfrak{a}_\nu^*(0)\right) - \mathfrak{c}\oint \mathfrak{a}_\mu k_\nu\, d s, \quad \nu \neq \mu,$$

где K_ν означава да је интеграл узет дуж криве $\mathfrak{a}_\nu^*$.

Доказ. Довољно је да докажемо један од ових шест образаца, јер се осталих пет доказују на потпуно исти начин. Узмимо, на пример, $\nu=2$ и $\mu=3$. Тада парцијалном интеграцијом добивамо

$$\int_{K_\nu} \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_2^*\, k'_3\, d s = \mathfrak{c}\, k_3(0)\left(\mathfrak{a}_2^*(l) - \mathfrak{a}_2^*(0)\right) - \oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_2\, k_3\, d s.$$

Због $k_3 = -\mathfrak{a}'_2\,\mathfrak{a}_1$, а на основу Лангранжевог идентитета, добива се

$$\begin{aligned}
-\oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_2\, k_3\, d s &= \oint (\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_2)(\mathfrak{a}'_2\,\mathfrak{a}_1)\, d s \\
&= \oint (\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}'_2)(\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{a}_1)\, d s + \oint (\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_1)(\mathfrak{a}'_2\,\mathfrak{a}_2)\, d s \\
&= -\oint (\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}'_2)\,\mathfrak{a}_3\, d s,
\end{aligned}$$

јер је $\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{a}_1 = -\mathfrak{a}_3$, а вектор $\mathfrak{a}'_2$ је управан на вектор $\mathfrak{a}_2$. Због $\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}'_2 = (\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}_2)'$ добива се парцијалном интеграцијом

$$\begin{aligned}
-\oint (\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}'_2)\,\mathfrak{a}_3\, d s &= -(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}_2)\,\mathfrak{a}_3\Big|_0^l + \oint (\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}_2)\,\mathfrak{a}'_3\, d s \\
&= -\oint \mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}'_3\times\mathfrak{a}_2)\, d s.
\end{aligned}$$

С обзиром на трећу Френеову једначину је $\mathfrak{a}'_3\times\mathfrak{a}_2 = k_2\,\mathfrak{a}_3$, па је

$$\begin{aligned}
-\oint (\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}'_2)\,\mathfrak{a}_3\, ds &= -\oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_3\, k_2\, d s \\
&= -\mathfrak{c}\int_0^s \mathfrak{a}_3\, k_2\, d s\,\Big|_0^l + \oint \mathfrak{c}'\, d s \int_0^s \mathfrak{a}_3\, k_2\, d s \\
&= -\mathfrak{c}\oint \mathfrak{a}_3\, k_2\, d s,
\end{aligned}$$

јер је $\mathfrak{c}'=0$.

2.2. Доказ теореме 1.[1]) Уочимо кривински појас криве $\mathfrak{r}_1$. Тада је, као што смо рекли, $k_2 = -\varkappa_N$, $k_3 = \varkappa_g$ и $\mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{r}_1$. За $\nu = 1$, $\mu = 2, 3$ обрасци помоћног става 1 гласе према томе овако:

$$(1) \qquad -\oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_1 \varkappa_N\, ds = -\mathfrak{c}\oint \mathfrak{a}_2 k_1\, ds = 0,$$

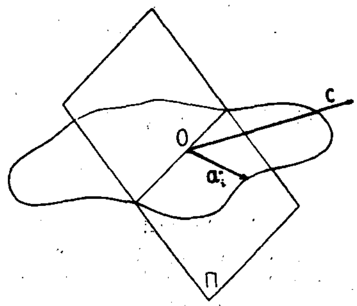
$$(2) \qquad \oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_1 \varkappa_g\, ds = -\mathfrak{c}\oint \mathfrak{a}_3 k_1\, ds = 0,$$

јер је дуж носача кривинског појаса, тј. дуж линије кривине, $k_1 \equiv 0$.

Како су $\varkappa_N$ и $\varkappa_g$ периодичне функције, то се њихове екстремне вредности појављују у парном броју. Отуда следи: ако претпоставимо да теорема 1 није тачна, $\varkappa_N$ и $\varkappa_g$ ће имати тачно две екстремне вредности.

Претпоставимо да $\varkappa'_N$ и $\varkappa'_g$ мењају свој знак у тачкама $s = s_1$ и $s = s_2$ (то не значи да су бројеви s_1 и s_2 исти у односу на $\varkappa_N$ и на $\varkappa_g$; но како је доказ за $\varkappa_N$ независан од доказа за $\varkappa_g$, то можемо усвојити овај скраћени начин изражавања).

По претпоставци, кроз тачке s_1 и s_2 пролази најмање једна раван *П* која са кривом нема других заједничких тачака.



Сл. 1

Како су интеграли (1) и (2) инваријантни с обзиром на избор почетка *O* вектора $\mathfrak{r}_1$, то ћемо тачку *O* изабрати у равни *П*. Стални вектор $\mathfrak{c}$ нека је управан на раван *П*. Тада изрази $\mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_1 \varkappa'_N$ и $\mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_1 \varkappa'_g$ не мењају знак (види сл. 1 са $i = 1$, тј. $\mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{r}_1$). Стога је

$$\oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_1 \varkappa'_N\, ds \neq 0 \quad \text{и} \quad \oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_1 \varkappa'_g\, ds \neq 0$$

што се противи једначинама (1) и (2).

Доказ теореме 2. Уочимо оскулаторни појас криве $\mathfrak{r}_1$. Тада је као што смо видели $k_1 = \tau$, $k_3 = \varkappa$ и $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{n}$, па је $\mathfrak{a}_2^* = \mathfrak{r}_2$. Према томе, ако је $\mathfrak{r}_2$ затворена крива, обрасци помоћног става 1 гласиће за $\nu = 1$, $\mu = 2, 3$ овако:

[1]) Овде употребљени поступак проширује познати поступак G. Herglotz-a [1, стр. 17—18]

$$\oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_2\,\tau'\,d\,s = -\mathfrak{c}\oint \mathfrak{a}_1\,k_2\,d\,s = 0, \tag{3}$$

$$\oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_2\,\varkappa'\,d\,s = -\mathfrak{c}\oint \mathfrak{c}_3\,k_2\,ds = 0, \tag{4}$$

јер је дуж оскулаторног појаса $k_2 \equiv 0$. Истим поступком као и напред, а водећи рачуна о томе да је $\mathfrak{r}_2$ затворена конвексна крива исте дужине као и крива $\mathfrak{r}_1$, дошли бисмо, под претпоставком да τ и $\varkappa$ имају тачно две екстремне тачке, до закључка да

$$\mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_2'\,\tau' \quad \text{и} \quad \mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_2\,\varkappa'$$

не мењају свој знак (види сл. 1 са $i=2$, тј. $\mathfrak{a}_i^* = \mathfrak{r}_2$). Као и напред, види се да је ово у контрадикцији са једначинама (3) и (4).

На место оскулаторног појаса могли смо за доказ употребити и геодетски појас.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Blaschke W. — Einführung in die Differentialgeometrie, Berlin 1940.
[2] Fog D. — Über den Vierscheitelsatz und seine Verallgemeinerungen. *Sitzungsberichte der Preussischen Akad. der Wiss.* (1933). str. 251—254.

ÜBER DIE SCHEITEL DER GESCHLOSSENEN KURVEN

VOJISLAV G. AVAKUMOVIĆ

Definition: Eine viermal stetig differenzierbare geschlossene Kurve $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1(s)$ wird konvex genannt falls durch je zwei auf der Kurve liegende Punkte mindestens eine Ebene geht die mit der Kurve sonst keine gemeinsame Punkte hat.

Verfasser beweist: 1. Die geodätische Krümmung $\varkappa_g$ und die normale Krümmung $\varkappa_N$ einer geschlossenen konvexen Krümmungskurve haben mindestens vier Extremalwerte.

2. Es sei $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1(s)$ eine geschlossene Kurve und

$$\mathfrak{r}_2(s) = \mathfrak{r}_2(0) + \int_0^s \mathfrak{n}\,d\,s$$

(wobei $\mathfrak{n}$ die Hauptnormale der Kurve $\mathfrak{r}_1$ bezeichnet) eine geschlossene konvexe Kurve. Dann haben die Krümmung $\varkappa$ und die Windung τ der Kurve $\mathfrak{r}_1$ mindestens vier Extremalwerte.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

МИЛОРАД М. ЈОВИЧИЋ

НЕПОСРЕДНА ГРАФИЧКА РЕСТИТУЦИЈА КОСЕ АКСОНОМЕТРИЈЕ

Постављање проблема. Два основна задатка Нацртне геометрије су да се омогући за сваки од различитих начина пројектовања јединичног ортогоналног триедра:

1) непосредно цртање жељене пројекције триедра кад је дата величина јединичног вектора и међусобни положај триедра, центра пројектовања и пројекциске равни, и

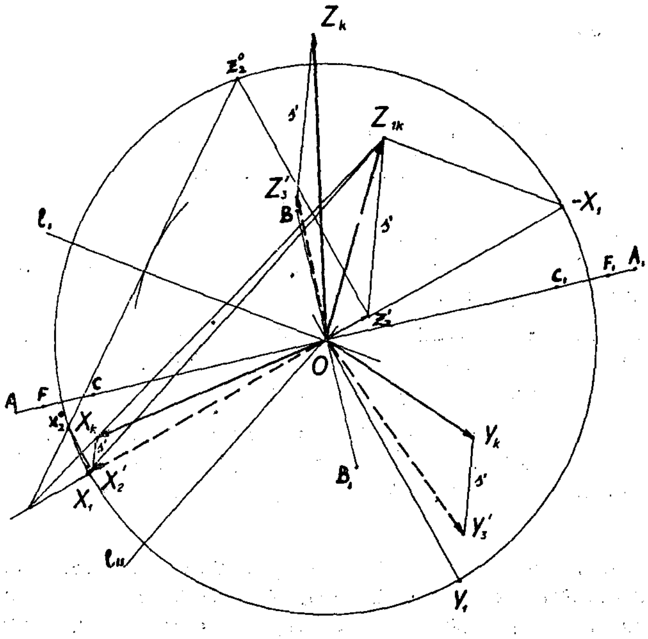
2) непосредна графичка реституција дате пројекције триедра — непосредно графичко одређивање праве величине јединичног вектора и положаја триедра и центра пројектовања према равни слике.

Историски развој. За брзу и лаку израду перспективних слика које ће створити потребан перспективан-дубински утисак најподеснија пројекција је коса аксонометрија, па су у току изграђивања графичких поступака Нацртне геометрије објављени многобројни радови — и данас се још објављују — у којима се предлажу различита решења горња два задатка за косу аксонометрију.

Карл Полке је 1853 г. формулисао решење првог задатка теоремом: за косу аксонометрију координатног почетка и три краја јединичних вектора ортогоналног триедра могу се узети четири произвољне тачке на цртежу, под условом да нису све на истој правој. Полке није објавио доказ своје теореме, нагласио је само његову сложеност. Како је исправност теореме оспоравана, публиковао ју је Јакоб Штајнер у *Journal für reine und angewandte Mathematik* **55** (1858), стр. 356—378, као проблем који треба решити. После неуспелих радова Дешвандена и Кинкелина, први је Полкеов ученик Шварц доказао исправност теореме, решивши елементарним аналитичким апаратом општији проблем: за дати тетраедар произвољног облика може се одредити правац паралелног пројектовања и положај пројекциске основе тако да пројекција тетраедра буде слична датом четворотеменику у равни.

Сви каснији докази Полкеове теореме су претежно аналитички и своде се на Шварцову примену сличних фигура упроњену афином сродношћу. Ни један од њих није дао непосредну и прихватљиву графичку реституцију. То се покушава овим радом.

Решење проблема. Постављам ортогонални јединични триедар $O\,X\,Y\,Z$ у произвољан положај према пројекциској равни Π са почетком O у Π, и пројектујем га произвољним паралелним зрацима s у косу аксонометрију $O\,X_k\,Y_k\,Z_k$. (сл. 1) Да бих раван



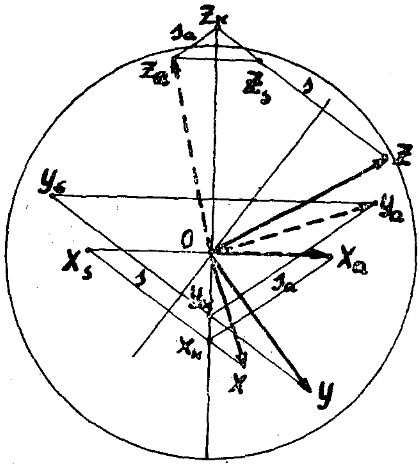
Сл. 1

$O\,X\,Y$ триедра положио у Π, обрћем га најпре око вектора $O\,X$ док вектор $O\,Y$ не дође у Π у положај $O\,Y_1$. При томе стално пројектујем триедар зрацима s, па се тачке Y и Z пројектују у крајеве спрегнутих полупречника елипсе — пројекције круга обртања. Нова пројекција триедра је $O\,X_k\,Y_1\,Z_{1k}$. Затим обрћем триедар око вектора $O\,Y_1$, док не доведем и вектор $O\,X$ у Π у положај $O\,X_1$. При томе стално пројектујем тачку Z у Z_{1k}, а X паралелним зрацима у низ тачака X_i.

Пројекциски зраци тачке Z образују елиптички конус са врхом Z_{1k}. Његов кружни пресек — круг обртања тачака Z и X — управан је на Π, па је Π раван главног пресека конуса кроз малу осовину, праве $X_1\,Z_{1k}$ и $-X_1\,Z_{1k}$ су изводнице конуса у Π, а дуж $Z_{1k}\,O$ је пречник конуса спрегнут равни круга. Тачке Z и X су спрегнуте на кругу, па зраци тачке X паралелни изводницама конуса образују једнограни троосни хиперболоид коме је средиште тачка O, а конус асимптотски транслаторно померен за дуж $O\,Z_{1k}$. Пресек хиперболоида и Π је низ пројекција X_i тачке

X — хипербола чије су асимптоте l_{I} и l_{II} паралелне са $X_1 Z_{1k}, -X_1 X_{1k}$. Ова хипербола и горња елипса имају два једнака а управна полупречника OX_1 и OY_1, а њима спрегнут полупречник OZ_{1k} је заједнички, па су им тангенте у тачкама X_1 и Y_1 паралелне. Имају и заједничке носаче осовина, јер су ови симетрале угла асимтота уједно паралелни симетралама угла правих $X_1 Z_{1k}$ и $-X_1 Z_{1k}$, које су два зрака афинитета за елипсу и круг над пречником $Y_1, -Y_1$.

Елипса $OY_1 Z_{1k}$ може бити коса пројекција круга над ма којим њеним пречником, тј. сваки полупречник елипсе може се сматрати јединичним вектором ортогоналног триедра коме је други вектор у Π једнак и управан првом, а коса пројекција трећег вектора је спрегнута првом на елипси уједно спрегнута другом на хиперболи. За све овде могуће триедре сви положаји других вектора образују елипсу конгруентну елипси првих вектора и обрнуту према овој за 90°. Ова друга елипса је ортогонална трајекторија породице хипербола, јер у пресечним тачкама X_1 има са њима управне тангенте. Како имају и заједничке носаче осовина, конфокалне су. Стога је за пресечну тачку X_1 збир потега велика осовина елипсе, а разлика истих потега реална осовина хиперболе, па је одавде величина једног потега збир а другог разлика полуосовина елипсе и хеперболе.



Сл. 2

На основи овога изводим графички поступак непосредне реституције дате косе аксонометрије $OX_k Y_k Z_k$:

Усвајам два вектора, на сл. 1 OY_k и OZ_k, за спрегнуте полупречнике елипсе и одредим графички њене осовине, $2a$, $2b$, окренем их око средишта O за 90° и нађем жиже F, F_1 на великој осовини AA_1 окренуте елипсе. Трећи вектор OX_k је полупречник хиперболе конфокалне елипси, и помоћу потега тачке X_k одредим реалну осовину $2c$ хиперболе. Потезима $a+c$ и $a-c$ одредим тачку X_1, пресек елипсе и хиперболе, и тачку Y_1 спрегнуту X_1 на кругу. Дуж OX_1 је права величина јединичног вектора триедра, а права OX_1 је ортогонална пројекција праве OX.

Да бих одредио правац пројекциских зрака s и положај триедра Π, уцртам најпре тачку Z_{1k} спрегнуту тачки X_1 хиперболе уједно и тачки Y_1 елипсе $Y_k Z_k$. Тачке Z_{1k} и X_k су спрегнуте тачке елипсе — косе пројекције круга управног на Π, са заједничким пречником $-X_1, X_1$. Помоћу афинитета одредим на кругу, обореном у Π око $-X_1, X_1$, афини пар спрегнутих тачака Z_2^0, X_2^0 и пројектујем их спонама обртања у Z'_2, X'_2, ортогоналне пројекције тачака Z, X кад је Y у Π. Овим је одређен положај тачке X и зрак $s = X X_k$. Ортогоналне пројекције Y'_3 и Z'_3 тачака Y и Z одређујем из тачака Y_k, Z_k зрацима s помоћу јединичне лопте или на пр. помоћу афинитета елипсе $O\,Y_1\,Z_{1\,k}$ на којој су тачке Y_k, Z_k, и елипсе $O\,Y_1\,Z'_2$, на којој су тражене ортогоналне пројекције Y'_3, Z'_3 тачака Y и Z.

Осим овако одређеног положаја триедра, дата коса аксонометрија одређује још један положај триедра (сл. 2): тачке X_s, Y_s, Z_s симетричне тачкама X, Y, Z обзиром на раван кроз средиште O управну на зраке s, дају нов ортогонални триедар супротне диспозиције, који се истим зрацима пројектује у дату косу аксонометрију. Кад се одреди њему симетричан триедар X_a, Y_a, Z_a обзиром на Π, овај трећи триедар је симетричан другом, дакле има исту диспозицију осовина као и први и пројектује се у дату косу аксонометрију зрацима s_a симетричним s обзиром на Π.

UNMITTELBARE GRAPHISCHE RESTITUTION IN DER SCHIEFEN AXONOMETRIE

MILORAD M. JOVIČIĆ

Es wird ein graphisches Verfahren der Restitution und damit zugleich ein Beweis des Pohlkeschen Satzes in folgender Weise durchgeführt:

Sei $OXYZ$ ein rechtwinkliges gleichschenkliges Achsenkreuz, dessen Anfangspunkt O in der Bildebene Π enthalten ist, und s_1 die Sehrichtung. Zuerst wird das Achsenkreuz um OX gedreht, bis OY in Π fällt; es sei dann $Z_{1\,k}$ die Projektion von Z. Danach wird es um OY gedreht, bis auch OX in Π fällt. Bei der ersten Drehung bewegen sich Y und Z längs eines Kreises, dessen zu s_1 parallele Projektion eine gewisse Ellipse ist. Bei der zweiten Drehung projiziere man Z und X parallel so, dass sich Z stets nach $Z_{1\,k}$ projiziert; dann bewegt sich die Projektion von X längs einer Hyperbel. Durch die Betrachtung jener Ellipse und dieser Hyperbel gewinnt der Autor sein Verfahren:

Ist $O\,X_k\,Y_k\,Z_k$ die gegebene schiefe Projektion des Achsenkreuzes, so bestimme man die Achsen der Ellipse, dessen konjugierte Halbmesser z. B. $O\,Y_k$ und $O\,Z_k$ sind und drehe sie um 90^0 um den Punkt O. Dann ist $O\,X_k$ Halbmesser einer konfokalen Hyperbel, also man bestimme ihre Hauptachse und sodann den Schnittpunkt X_1 von Ellipse und Hyperbel; $O\,X_1$ ist die wahre Grösse von $O\,X$. Da $Z_{1\,k}$ Endpunkt des zu $O\,X_1$ konjugierten Halbmessers der Hyperbel ist, ermittelt man leicht auch die Richtung s_1.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

СЛОБОДАН АЉАНЧИЋ

О АСИМПТОТСКОМ РАЗВИЈАЊУ *A*-ЗБИРЉИВИХ ЛИНЕАРНИХ ФУНКЦИОНЕЛА

ТЕЗА

I УВОД

1.1. У Математичкој анализи се још почетком XIX века операсало са дивергентним редовима, ово тим пре што су и нумерички резултати давали задовољавајућу тачност (у Астрономији). Тек појавом Абела и Кошиа, који су дали основе модерне Анализе, почело је да се устаљује схватање да докази не смеју почивати на операцијама са дивергентним редовима. Али, самим тиме, указала се и потреба да се протумачи зашто и дивергентни редови доводе до прихватљивих резултата. Коши [4] је то учинио на примеру Стирлинговог реда. Основна Кошиева идеја долази до изражаја и на следећем једноставном примеру.

Нека је

$$F(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}}{x+u}\,du, \quad x>0.$$

Ако овде ставимо

$$\frac{1}{x+u}=\frac{1}{x}-\frac{u}{x^2}+\frac{u^2}{x^3}-\cdots+(-1)^n\frac{u^n}{x^{n+1}}+(1)^{n+1}\frac{u^{n+1}}{x^{n+2}}\,\theta\,,$$

где је

$$\theta=\frac{1}{1+u/x},$$

па према томе $0<\theta<1$, и интегришемо члан по члан, налазимо

$$F(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\cdots+(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}+R_n, \tag{1.1.1}$$

где је

$$R_n=(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{x^{n+2}}\theta_1, \quad 0<\theta_1<1.$$

Кад $n\to\infty$, ред (1.1.1) дивергира за свако x, али ипак може послужити за приближно израчунавање функције $F(x)$ за велике вредности x. Наиме, за дато $x\gg 1$ чланови реда по апсолутној вредности прво врло брзо опадају, да би затим неограничено расли. Један од њих, дакле, постиже минимум. Ако се, према томе, у реду задржимо на члану који претходи минималном, отступање од тачне вредности $F(x)$ биће, на основу облика остатка, само један део минималног члана. А овај може бити врло мали, често и довољно мали за тражену тачност. Наравно, отступање се за дато x не може учинити произвољно малим, јер је оно с доње стране ограничено апсолутном вредношћу минималног члана. То је битна разлика (у погледу нумеричког рачуна) оваквих дивергентних редова од конвергентних, а тиме се и објашњава зашто су они понекад погоднији од конвергентних за нумерички рад: довољно је да минимални члан нема сувише велики индекс.

1.2. Стилтјес [22*a*] и Поенкаре [**18**] су једновремено, независно један од другог, увели појам семиконвергентног односно асимптотског реда. У литератури је преовладао последњи термин.

Ред, био он конвергентан или дивергентан, асимптотски претставља функцију $f(x)$ за велике вредности x,

$$f(x)\sim c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots \tag{1.2.1}$$

ако за свако $n=0,1,2,\ldots$

$$x^n\left\{f(x)-\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\cdots+\frac{c_n}{x^n}\right)\right\}\to 0, \quad x\to\infty. \tag{1.2.2}$$

Док се Стилтјес у свом раду задржао на овој дефиницији и дао примере, Поенкаре је отишао много даље. Он је показао да се, под извесним условима, на асимптотске редове могу применити алгебарске и инфинитезималне операције, и да свакој од њих примењеној на асимптотски ред одговара аналогна операција примењена на функцију $f(x)$.

Нека је

$$f(x)\sim\sum\frac{a_\nu}{x^\nu} \quad \text{и} \quad g(x)\sim\sum\frac{b_\nu}{x^\nu}.$$

Тада је:

1⁰
$$\alpha f(x)+\beta g(x)\sim\sum\frac{\alpha a_\nu+\beta b_\nu}{x^\nu},$$

2⁰
$$f(x)\,g(x)\sim\sum\frac{c_\nu}{x^\nu},\qquad c_\nu=\sum_{m=0}^{\nu}a_m\,b_{\nu-m}.$$

3⁰ Ако је $R(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ рационална функција аргумената $y_1, y_2, \ldots, y_p$ и функције $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ имају асимптотске развитке, тада и функција

$$F(x)=R(f_1, f_2, \ldots, f_p)$$

има асимптотски развитак, под претпоставком да именитељ од R не тежи нули кад $x\to\infty$. Овај асимптотски развитак се израчунава формално као да су развици функција $f_i(x)$ конвергентни редови.

4⁰ Ако

$$g(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n+\cdots$$

има полупречник конвергенције $r>0$, и

$$f(x)\sim\sum\frac{a_\nu}{x^\nu},\qquad x\to\infty,$$

тада и функција $F(x)=g(f)$ има асимптотски развитак, под претпоставком да је $|a_0|<r$. Израчунава се као да је ред $\Sigma a_\nu/x^\nu$ конвергентан.

5⁰ Ако је функција $f(x)$ непрекидна за $x>x_0$ и

$$f(x)\sim\sum\frac{a_\nu}{x^\nu},\qquad x\to\infty,$$

тада је

$$\int_x^\infty\left\{f(t)-a_0-\frac{a_1}{t}\right\}dt\sim\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{a_\nu}{(\nu-1)\,x^{\nu-1}},\qquad x\to\infty.$$

Одавде следи: Ако, сем наведених претпоставки о $f(x)$, постоји непрекидан извод $f'(x)$ и овај допушта асимптотски развитак, онда је

$$f'(x)\sim-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu a_\nu}{x^{\nu+1}},\qquad x\to\infty.$$

Тек благодарећи томе што су наведене операције са асимптотским редовима дозвољене, могла је њихова теорија и примена да дође до пуног замаха. У томе је Поенкареова заслуга.

1.3. Ако функција $f(x)$ има асимптотски развитак, овај је Стилтјесовим алгоритмом (1.2.2) једнозначно одређен (мада се често, на тај начин, не може и ефективно израчунати). Обрнуто, међутим, не важи јер функције $f(x)$ и $f(x)+e^{-x}$ имају исти асимптотски развитак. Тиме се пред теорију асимптотских редова постављају два основна проблема:

1^0 Егзистенција асимптотског развитка када је дата функција и његово практично изналажење.

2^0 Како ограничити класу функција да би, када је дат асимптотски ред, овом одговарала једна једина функција.

Оба ова питања нису у потпуности и на задовољавајући начин решена.

(i) За асипмптотско развијање функција постоји читав низ метода, више или мање практичних, у зависности од облика у коме је дата функција. Први асимптотски развици добивени су из Ојлер-Маклореновог збирног обрасца, више-мање случајно. Али, тек се Лапласова [**14**] метода „функција великих бројева"[1]), коју је Коши проширио на комплексно подручје[2]), с правом може назвати првом методом асимптотског развијања. Базирала је дуго на једној плаузибилној примедби, наиме, да за велике вредности n интегралу

$$\int f(x)\,[g(x)]^n\,dx$$

у првом реду доприноси најужа околина максимума функције $g(x)$. Ригурозност долази тек са Пероном [**17**], а даља усавршавања у радовима Дебиа [**6**] и Ватсона [**24***c*].

Дарбуова [**5**] метода користи зависност асимптотског понашања низа f_n $(n\to\infty)$ од сингуларитета које његова функција-генератриса

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, t^n$$

има на кругу конвергенције. Хар [**8**] преноси овај поступак на функције $f(x)$ $(x\to\infty)$, где улогу функције-генератрисе преузима Лапласова трансформација од $f(x)$.

Не мање значајне су метода Лјувила и Стеклова [**21**], која даје асимптотски развитак за решење линеарне диферецијалне једначине, и метода Барнса [**2***a*], Форда [**8**] и Њусама [**16**], која се односи на асимптотско развијање $(x\to\infty)$ функција дефинисаних Тајлоровим редовима специјалног типа

$$\sum \frac{x^n}{n!\,(n+\vartheta)}, \quad \vartheta\neq 0,-1,-2,\ldots$$

---

[1]) Fonctions des grands nombres.

[2]) Sattelpunktmethode, method of the steepest descent.

Први покушај да се бар један значајнији број метода асимптотског развијања сведе под један општи принцип учинио је Деч [7]. Нека функционална трансформација T пресликава функцију F на функцију f, тј.

$$f = T(F). \tag{1.4.1}$$

Тада, из асимптотског понашања једне од функција F и f, можемо закључити о понашању друге у околини извесне тачке. Ако из F закључујемо о f имамо асимптотику Абелове природе, у обрнутом случају Тауберове. Најзад, постоји и трећа врста, индиректна Абелова асимптотика, у случају да трансформација (1.4.1) допушта инверзију

$$F = T^{-1}(f),$$

а закључује се о функцији F.

(ii) У погледу другог проблема наведеног на почетку ове тачке први допринос дао је Стилтјес [17*b*]. Стилтјесова основна идеја састоји се у томе да дивергентном реду

$$\frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} - \dots, \quad c_\nu \geqslant 0, \tag{1.4.2}$$

када c_ν испуњавају одређене услове, преко конвергентног верижног разломка

$$\cfrac{1}{a_1 x + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 x + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

координира одређени интеграл

$$\int_0^\infty \frac{f(u)}{x+u}\, du$$

и овај сматра сумом реда (1.4.2). Одређивање позитивне функције $f(u)$ из коефицијената реда (1.4.2) своди се на чувени Стилтјесов проблем момената.

Доцније су Ватсон [19*b*], Неванлина [11] и Карлеман [3*b*] дали низ услова под којим се из

$$f(x) \sim \sum \frac{c_\nu}{x^\nu}, \quad x \to \infty,$$

једнозначно може одредити $f(x)$ ако је ова функција регуларна у $-\pi/2\alpha < \varphi < \pi/2\alpha$, $r > R\,(x = r\,e^{i\varphi})$. Ти услови су типа

$$\left| x^n \left\{ f(x) - \sum_{0}^{n-1} \frac{\alpha_\nu}{x^\nu} \right\} \right| < \left(\frac{n}{k} \right)^{n/k} e^{-n/k} \rho^n \, (k \geqslant \alpha)$$

за довољно велико n и погодно $\rho > 0$.

1.4. Потенцијални асимптотски редови, какве су увели Поенкаре и Стилтјес, претрпели су у своме развоју низ генерализација.

У случају да функција $f(x)$ не испуњава већ први ($n=0$) услов (1.2.2), Поенкаре проширује појам асимптотског реда на тај начин што погодним избором функција $g(x)$ и $h(x)$, уместо $f(x)$ развија у асимптотски ред функцију

$$\frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \sim \sum \frac{b_\nu}{x^\nu},$$

и тако добија уопштени асимптотски развитак

$$f(x) \sim g(x) + h(x) \sum \frac{b_\nu}{x^\nu}, \quad x \to \infty .$$

Променљива x може узимати и комплексне вредности. Но тада се мора прецизирати у ком правцу, односно у ком углу важе услови (1.2.2) кад $|x| \to \infty$, па према томе и асимптотски развитак. Ова генерализација на комплексно подручје омогућила је Неванлини [15] да употпуни круг дозвољених операција са асимптотским редовима. Он је показао да се диференцирањем асимптотског реда добија асимптотски ред извода, али само код асимптотских редова који важе у читавом углу а не само дуж кривих линија.

Карлеман [3*a*, *b*] је први увео асимптотске редове облика

$$c_0(x) + \frac{c_1(x)}{x} + \frac{c_2(x)}{x^2} + \dots, \quad x \to \infty,$$

где коефицијенти $c_\nu(x)$ нису константе већ периодичке функције по x.

Најзад, Шмит [20 *a*, *b*] испитује асимптотске редове са општом, не више потенцијалном, скалом функција $\{q_\nu\}$, тј. облика

$$\frac{c_0(x)}{q_0(x)} + \frac{c_1(x)}{q_1(x)} + \frac{c_2(x)}{q_2(x)} + \dots, \quad x \to \infty .$$

$c_\nu(x)$ су периодичке функције а низ функција скале $\{q_\nu\}$ мора задовољавати следећа два услова:

$$(1.3.1) \qquad q_\nu(x) \neq 0,$$

и $\qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$(1.3.2) \qquad \frac{q_\nu(x)}{q_{\nu+1}(x)} \to 0, \quad x \to \infty.$$

Целисходност ових генерализација огледа се у првом реду у томе уколико су и које операције са таквим асимптотским редовима дозвољене. Тако већ множење код општих скала долази у питање, јер формалним множењем добијамо производе облика $(q_\chi q_\varkappa)^{-1}$ који сами не морају имати асимптотски развитак по скали $\{q_\nu\}$. Због тога Шмит издваја из општих скала оне које, например, дозвољавају множење, тј. код којих за свако χ, $\varkappa = 0, 1, \ldots$ важи

$$(1.3.3) \qquad [q_\chi(x)\, q_\varkappa(x)]^{-1} \sim \sum \frac{q_{\nu\chi\varkappa}}{q_\nu(x)},$$

затим оне који дозвољавају диференцирање, итд.

Тиме је питање примене основних операција и на асимптотске редове по општим скалама решено. Међутим, сложеније операције, на пример, општи гранични прелаз примењен на асимптотске редове, нису досада ни код асимптотских редова са потенцијалном скалом испитивани, ако се изузме случај униформних асимптотских редова, тј. таквих код којих сваки гранични прелаз (1.2.2) важи униформно. Ми ћемо се овде бавити и таквим сложенијим операцијама примењеним на асимптотске редове по општим скалама. Прецизније, испитаћемо услове под којим се на линеарну трансформацију датог асимптотског реда сме применити општи гранични прелаз.

II ПРОБЛЕМАТИКА И РЕЗУЛТАТИ

2.1. Под *функционелом* подразумева се функционална трансформација која сваком елементу $f(x)$ (свакој тачки) функционалног простора F придодаје одређен број $A[f]$ тела реалних или комплексних бројева K. Функционела је *линеарна* ако је

$$A[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 A[f_1] + c_2 A[f_2]$$

за свако

$$f_1 \text{ и } f_2 \in F \text{ и за свако } c_1 \text{ и } c_2 \in K.$$

Функционела је *ограничена* ако је (горња граница)

$$\sup |A[f]|$$

коначна за свако $f \in F$ за које је норма $\|f\| \leqslant 1$. Ако ову горњу границу обележимо са M_A тада је за свако $f \in F$

$$|A[f]| \leqslant M_A \cdot \|f\|.$$

Нека је F_c простор свих у размаку (a, b) непрекидних функција у коме је норма дефинсана са

$$\|f\| = \operatorname*{Max}_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|.$$

Ф. Рис [19] је показао да свакој линеарној и ограниченој функционели $A[f]$ дефинисаној у простору F_c одговара одређена функција ограничене варијације $\alpha(x)$ (иста за свако f), тако да се линеарна функционела $A[f]$ да претставити Стилтјесовим интегралом

$$A[f] = \int_a^b f(t)\, d\alpha(t).$$

При томе је

$$M_A = \int_a^b |d\alpha(t)|.$$

$\alpha(x)$ је генератриса линеарне функционеле $A[f]$. Размак (a, b) може бити и бесконачан. — Сличне тврдње постоје и за друге функционалне просторе, на пример за простор L-интеграбилних функција.

Ф. Рис [19] је дао и један значајан став о граничном процесу код низа линеарних функционела у простору F_c. Наиме, нека су $A_1[f], A_2[f], \ldots, A[f]$ линеарне и ограничене функционеле и нека су $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha(x)$ њихове генератисе које задовољавају услов

$$\alpha_1(a) = \alpha_2(a) = \ldots = \alpha(a) = 0.$$

Да би тада

$$A_n[f] \to A[f], \quad n \to \infty$$

за сваку функцију f која припада F_c, потребно је и довољно да

1⁰ $$\alpha_n(b) \to \alpha(b), \quad n \to \infty;$$

2⁰ $$\int_a^x \alpha_n(t)\, dt \to \int_a^x \alpha(t), \quad n \to \infty, \quad a < x \leqslant b;$$

3⁰ да варијација генератрисе $\alpha_n(x)$ остане ограничена, тј.

$$W_a^b \{\alpha_n(x)\} = O(1), \quad n \to \infty.$$

2.2. Проблематика овог рада односи се на развијање линеарних функционела

(2.2.1) $$A_n[f]=\int_0^\infty f(t)\,d\alpha_n(t),$$

где n не мора бити цео позитиван број, у асимптотске редове ($n\to\infty$), и то по општим скалама. Прецизније, које потребне и довољне услове мора задовољавати генератриса $\alpha_n(t)$, да би линеарна функционела $A_n[f]$ имала асимптотски развитак по скали $\{q_\nu(n)\}$, тј.

(2.2.2) $$A_n[f]\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{q_\nu(n)},\quad n\to\infty,$$

где је

(2.2.3) $$c_\nu=\int_0^\infty f(t)\,d\pi_\nu(t),\quad \nu=0,1,\ldots$$

Сукцесивном применом напред наведеног Рисовог става налазимо да је за то потребно и довољно да

1° $$\int_0^x\alpha_n(t)\,dt\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{q_\nu(n)}\int_0^x\pi_\nu(t)\,dt,\quad n\to\infty,\quad x>0;$$

2° $$\lim_{t=\infty}\left\{q_k(n)\left[\alpha_n(t)-\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{\pi_\nu(t)}{q_\nu(n)}\right]\right\}\underset{n\to\infty}{\to}\lim_{t=\infty}\pi_k(t);\quad k=0,1\ldots$$

3° $$W_0^\infty\left\{q_k(n)\left[\alpha_n(t)-\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{\pi_\nu(t)}{q_\nu(n)}\right]\right\}=O(1),\quad n\to\infty;\quad k=0,1,\ldots$$

Самим тиме што овај став важи за сваку функцију $f\in F_c$, у њему су садржана знатна ограничења за генератрису $\alpha_n(x)$ линеарне функционеле, тј. класа ових је прилично уска. О томе говори већ сама чињеница да генератриса $\alpha_n(x)$ мора бити таква да конвергира не само (2.2.1) за свако позитивно n, већ да конвергирају и сви несвојствени Стилтјесови интеграли (2.2.3) ($\nu=0,1\ldots$). Међутим, баш у применама, конвергенција ових последњих долази у питање. Зато се поставља проблем да се на неки начин прошири класа линеарних функционела на које се може применити горњи став. У том погледу може се ићи у два правца. Или, класу линеарних функционела проширити на уштрб њеног дефиниционог поља, тј. сузити функционални простор F_c, или, што је од већег интереса, а за конкретну примену шта више и неизбежно, проширити појам саме линеарне функционеле. Ово на тај начин, што би се уместо конвергентних линеарних функционела, увео појам A-збирљивих линеарних фуикционела, тј. таквих које се оснивају на Абеловом збиру несвојствених Стилтјесових интеграла и код којих постоји

$$\lim_{\sigma=+0} \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\, d\alpha_n(t).$$

Аналогни став за развијање A-збирљивих линеарних функционела у асимптотске редове, почиваће на ставу који је сличан Рисовом ставу о граничном прелазу, али се односи на A-збирљиве линеарне функционеле.

Нека је

$$A_n[\sigma, f] = \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\, d\alpha_n(t), \quad \sigma > 0,$$

што можемо написати и у облику

$$A_n[\sigma, f] = \int_0^\infty e^{-\sigma' t} f(t)\, d\beta_n(\sigma'', t), \quad \sigma = \sigma' + \sigma'',$$

где је

$$\beta_n(\sigma'', t) = \int_0^t e^{-\sigma'' \xi}\, d\alpha_n(\xi).$$

Ако онда функција $e^{-\sigma x} f(x)$ и генератриса $\beta_n(\sigma, x)$ испуњавају услове $1^0 - 3^0$ Рисовог става, и то за свако $\sigma > 0$, тада ће

$$A_n[\sigma, f] \underset{n\to\infty}{\to} A[\sigma, f] = \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\, d\alpha(t) \tag{2.2.4}$$

и то за свако $\sigma > 0$ и за сваку непрекидну функцију $f(x)$, за коју

$$e^{-\sigma x} f(x) \to 0, \quad n \to \infty \text{ за свако } \sigma > 0.$$

Претпоставимо ли да оба израза који се јављају у (2.1.4) имају граничну вредност када $\sigma \to +0$, тј.

$$\lim_{\sigma=+0} A_n[\sigma, f] = A_n[+0, f]$$

и

$$\lim_{\sigma=+0} A[\sigma, f] = A[+0, f],$$

тада се основно питање састоји у томе под којим ће условима

$$A_n[+0, f] \to A[+0, f], \quad n \to \infty.$$

На овако општем ставу почивало би асимптотско развијање A-збирљивих линеарних функционела. Изгледа да у природи не лежи да се дају потребни и довољни услови под којим овакав став важи и стога овде дајемо извесне довољне услове, и то претпостављајући да функција $f(x)$ има специјалну структуру

$$f(x) = e^{-i\tau x} \psi(x)$$

и функција $\psi(x)$ задовољава извесне услове које ћемо накнадно навести.

Прецизније, проблем који ћемо овде третирати, а који ћемо одмах формулисати за асимтотске редове, своди се на питање под којим условима ће A-збирљива линеарна функционела

$$\mathfrak{A}[e^{-i\tau t}\psi(t)] = \lim_{\sigma=+0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,d\varphi(t;\lambda),$$

чија генератриса $\varphi(t;\lambda)$ допушта асимтотски развитак по општој скали $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$\varphi(t;\lambda) = \sum_{\mu=0}^{l}\frac{p_\mu(t)}{q_\mu(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda\to\infty, \tag{2.2.5}$$

сама имати асимтотски развитак по скали $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$\mathfrak{A}[e^{-i\tau t}\psi(t)] = \sum_{\mu=0}^{l}\frac{P_\mu(\tau)}{q_\mu(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda\to\infty, \tag{2.2.6}$$

где се коефицијенти

$$P_\mu(\tau) = \lim_{\sigma=+0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,dp_\mu(t), \quad \mu=0,1,\dots,l, \tag{2.2.7}$$

израчунавају формалном применом операције

$$\lim_{\sigma=+0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,d\{\quad\} \tag{2.2.8}$$

члан по члан на асимптотски развитак језгра $\varphi(t;\lambda)$.

2.3. Да би прегнатније могли формулисати услове под којим важи горе наведено тврђење, претходно ћемо дефинисати једну класу функција и прецизирати извесне појмове.

Са Ω_h^m означићемо класу функција облика

$$F(t) = \omega_0(t)\pi_m(t) + \omega_1(t)\pi_{m-1}(t) + \dots + \omega_m(t), \tag{Ω_h^m}$$

где су $\pi_\mu(t)$ полиноми μ-тог степена по t, а $\omega_\mu(t)$ периодичке функције периоде $h>0$. Специјално када $\omega_\mu(t)$ дегенеришу у константе, класа Ω_h^m се своди на класу полинома m-тог степена.

За функцију $\psi(t)$ казаћемо да припада класи Θ_t ако се може приказати Лаплас-Стилтјесовим интегралом

$$\psi(t) = \int_0^\infty e^{-tu}\,d\alpha(u), \quad t\geqslant 0,$$

где је $\alpha(t)$ ограничене варијације у $(0,\infty)$. Слично дефинишемо класу Θ_ν и код низова

$$a_\nu = \int_0^\infty e^{-\nu u}\,d\alpha(u), \quad \nu = 0,1,\dots$$

Специјално ако је $\psi(t)$ тотално монотона функција у размаку $(0, \infty)$, тј. ако је

$$(2.3.1) \qquad \Delta_h^k \psi(t) = \psi(t) - \binom{k}{1} \psi(t+h) + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} \psi(t+kh) \geqslant 0$$

за свако цело позитивно k и за свако $h > 0$, тада она припада класи Θ_l. Наиме, на основу једног Хаусдорфовог [10] става, класа тотално монотоних функција је еквивалентна са класом функција које се могу приказати Лаплас-Стилтјесовим интегралом наведеног облика са позитивним неопадајућим језгром $\alpha(t)$. – Аналогно важи за тотално монотоне низове a_ν код којих је (2.3.1) (са $a_\nu = a(\nu)$) испуњено за свако цело позитивно k и за $h = 1$.

2.4. Сада ћемо формулисати услове под којим важи асимптотски развитак (2.2.6) са (2.2.7).

Нека $\psi(t)$ припада класа Θ_l и нека коефицијенти $p_\mu(t)$, $\mu = 0, 1, \dots, l$ асимптотског развитка (2.2.5) припадају класи Ω_h^m. Ако тада постоји цео број $K > m$ тако да је

$$(2.4.1) \qquad \int_0^\infty |d\{\Delta_h^K \varphi(t - Kh; \lambda)\}| = o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty,$$

важиће (2.2.6), и то униформно по τ у размаку $(2s\pi/h + \varepsilon, 2(s+1)\pi/h - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \pi/h$, $s = 0, \pm 1, \dots$

Нешто прецизиније и за примену погодније услове добијамо ако, задржавајући остале претпоставке, уместо услова (2.4.1) захтевамо да варијација W K-те диференције функције $\varphi(t; \lambda)$ задовољава у размаку $(0, T)$ услов

$$W_0^T \{\Delta_h^K \varphi(t; \lambda)\} < \frac{M}{q_l(\lambda)}, \quad M \text{ не зависи од } \lambda,$$

и ако за $t \geqslant T$ и $\lambda \geqslant \Lambda$

$$\Delta_h^K \varphi(t; \lambda) \text{ монотоно } \to 0 \text{ када } t \to \infty.$$

Како је функционела $\mathfrak{A}[e^{-i\tau t} \psi(t)]$ дефинисана Стилтјесовим интегралом, то одавде следе аналогни ставови за A-збирљиве Дирихлеове редове

$$\lim_{\sigma = 0} \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_\nu^* b_\nu(\lambda) e^{-(\sigma + i\tau)\lambda_\nu}, \quad (\lambda_\nu \nearrow \infty),$$

па специјално и за A-збирљиве тригонометриске редове

$$\lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu(\lambda) r^\nu e^{\nu\theta i}.$$

За ове последње формулисаћемо одговарајуће ставове за асимптотско развијање. — Нека низ a_ν, $\nu=0,1,\ldots$ припада класи Θ_ν и нека низ $b_\nu(\lambda)$, $\nu=0,1,\ldots$ допушта асимптотски развитак по општој скали $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$b_\nu(\lambda)=\sum_{\mu=0}^{l}\frac{p_\mu(\nu)}{q_\mu(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty, \tag{2.4.2}$$

где су коефицијенти $p_\mu(\nu)$, $\mu=0,1,\ldots,l$ полиноми степена m по ν. Ако је за неко цело $K>m$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|\Delta^{K+1}b_{\nu-K-1}(\lambda)|=o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty, \tag{2.4.3}$$

тада за $0<\theta<2\pi$ постоји гранична вредност

$$\lim_{r=1}\sum_{r=0}^{\infty}a_\nu b_\nu(\lambda)\,r^\nu e^{\nu\theta i}=\mathfrak{B}\{b_\nu(\lambda)\},$$

и асимптотски развитак од $\mathfrak{B}\{b_\nu(\lambda)\}$ добија се формалном применом операције

$$\mathfrak{B}\{\quad\}=\lim_{r=1}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\{\quad\}\,r^\nu e^{\nu\theta i}$$

члан по члан на асимптотски развитак (2.4.2). Добијени асимптотски развитак важи униформно по θ у $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant2\pi-\varepsilon$.

Специјално можемо, задржавајући остале претпоставке, уместо (2.4.3) захтевати да за $\lambda\geqslant\Lambda$ и $\nu\geqslant\nu_0$ K-та диференција $\Delta^K b_\nu(\lambda)$ монотоно тежи нули, тј.

$$\Delta^K b_\nu(\lambda)\geqslant\Delta^K b_{\nu+1}(\lambda)\to0,\quad \nu\to\infty. \tag{2.4.4}$$

Први став ове врсте дао је за тригонометриске редове Карамата [**12** *a*], претпостављајући тоталну монотонију низа a_ν и услов (2.4.4), и тиме потстакао и овај наш рад.

Ако функција $\varphi(t;\lambda)$ има R-интеграбилан извод $\chi(t;\lambda)$ по t, добијамо аналогне ставове за Риманове интеграле. За примену је нарочито од интереса случај када функција $\chi(t;\lambda)$ има изводе по t до реда K и $(-1)^K\partial\chi(t,\lambda)/\partial t^K$ монотоно тежи нули, а коефицијенти $p_\mu(t)$ асимптотског развитка функције $\int_0^t\chi(u;\lambda)\,du$ су полиноми по t. Тада област важења добивеног асимптотског развитка садржи само једну изузетну тачку $\tau=0$.

2.5. Изложена метода асимптотског развијања доводи с једне стране до нових асимптотских развитака, а с друге стране обједињује различите асимптотске развитке једне исте функције, који су до сада, углавном, добијани применом различитих метода. Наиме, ако је једном утврђено да се на дати ред или интеграл сме применити поступак, онда је са (2.2.5) и (2.2.6) у ствари дато пресликавање асимптотских развитака, тј. сваком асимптотском развитку функције $\varphi(t;\lambda)$ одговара један развитак функције $\mathfrak{A}[e^{-i\tau t}\psi(t)]$.

У последњем делу овог рада применили смо нашу методу на ултрасферне полиноме $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$, $0<\theta<\pi$, за $n\to\infty$. Полазна тачка је тригонометриски ред [23 *b*; 1]

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma^2(\lambda)\,n!}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}\,\frac{(n+\nu)!}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}}\sin(n+2\nu+1)\theta,$$

где су уведене ознаке

$$(2.5.1)\qquad \begin{aligned}&(x)^{(\nu)}=x(x+1)\dots(x+\nu-1), \quad (x)^{(0)}=1;\\ &(x)_{(\nu)}=x(x-1)\dots(x-\nu+1), \quad (x)_{(0)}=1.\end{aligned}$$

Развијајући $\frac{(n+\nu)!}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}}$, $\nu=0,1,\dots$ по различитим скалама (α, β, γ параметри)

$$\frac{(n+\nu)!}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}}=$$

$$=B(\lambda,n+\alpha+1)\sum_{\mu=0}^{k}(-1)^{\mu}\binom{\nu-\alpha}{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}}+o(n^{-\lambda-k}),$$

$$=B(\lambda,n+\alpha+1)\sum_{\mu=0}^{k}\binom{\beta-\nu}{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\beta)_{(\mu)}}+o(n^{-\lambda-k}),$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda)}{(n+\gamma)^{\lambda}}\sum_{\mu=0}^{k}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{\mu!}\,\frac{Q_\mu^{(\lambda)}(\nu-\gamma+1)}{(n+\gamma)^{\mu}}+o(n^{-\lambda-k}),$$

где је $Q_\mu^{(\lambda)}$ дефинисано са

$$e^{yx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{\lambda}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{Q_\mu^{(\lambda)}(y)}{\mu!}x^{\mu},$$

добијамо за функцију $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ следеће асимптотске развитке:

1° $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\lambda+1)} (2\sin\theta)^{1-2\lambda}.$

$$(2.5.2) \qquad \cdot \sum_{\mu=0}^{k} (-1)^{\mu} \frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}\,\mu!} f_{\mu}^{(\lambda)}(\theta) + o\,(n^{\lambda-k-1}),$$

где је

$$f_{\mu}^{(\lambda)}(\theta) + J\left\{\frac{e^{(n+2\mu+1)\theta i}}{(1-e^{2\theta i})^{\mu-\lambda+1}} F(-\mu,\ \alpha;\ \lambda-\mu;\ 1-e^{-2\theta i})\right\},\ ^{*)}$$

(α параметар; F хипергеометриска функција).

2° $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\beta+\lambda+1)}\,.$

$$(2.5.3) \qquad \cdot \sum_{\mu=0}^{k} \frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{\mu!\,(n+\beta)_{(\mu)}} g_{\mu}^{(\lambda)}(\theta) + o\,(n^{\lambda-k-1}),$$

где је

$$g_n^{(\lambda)}(\theta) = J\left\{i\,\frac{e^{[(n+\lambda-\mu)\theta-(\lambda+\mu)\pi/2]\,i}}{(2\sin\theta)^{\lambda+\mu}} F(-\mu,\ \lambda-\beta-1;\ \lambda-\mu;\ 1-e^{2\theta i})\right\},$$

(β параметар; F хипергеометриска функција).

3° $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)\,n!} (2\sin\theta)^{1-2\lambda}.$

$$(2.5.4) \qquad \cdot \sum_{\mu=0}^{k} (-1)^{\mu} \frac{(\lambda)^{(\mu)}}{\mu!\,(n+\gamma)^{\mu+\lambda}} J\{e^{(n+1)\theta i} h_{\mu}^{(\lambda)}(e^{2\theta i})\} + o\,(n^{\lambda-k-1}),$$

где је $h_{\mu}^{(\lambda)}(z)$ дефинисано са

$$e^{(1-\gamma)x}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{\lambda}(1-z\,e^x)^{\lambda-1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{h_{\mu}^{(\lambda)}(z)}{\mu!} x^{\mu}.$$

Асимптотски развици 1° – 3° важе униформно у размаку $0 < \varepsilon \leqslant \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$.

За специјалне вредности параметара α, β, γ ($\alpha = 0$, $\beta = \lambda - 1$, $\gamma = 0$) асимптотски развици 1° – 3° своде се на познате развитке ултрасферних полинома (в. Сеге [**23** *а*, стр. 191 и 206]).

---

*) $R\{z\}$ и $J\{z\}$ су реални одн. имагинарни део од z.

У тачки 4.5 дајемо асимптотски развитак интеграла

$$Z_\nu(\tau, x) = \int_0^\infty e^{i\tau t}\, t^{\nu-1/2} \left(1+\frac{t}{2x}\right)^{\nu-1/2} dt, \qquad -1/2 < \nu < 1/2,$$

када је $x \to \infty$. Специјално за $\tau = 1$ следе одавде асимптотски развици $(x \to \infty)$ за Ханкелове функције $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$.

Најзад у тачки 4.6 изводимо познати Стирлингов образац за функцију $\Gamma(x)$, $x \to \infty$.

III ДОКАЗИ СТАВОВА

3.1. Претходно ћемо доказати неколико лема да доцније не би прекидали излагање.

Лема 1. *Нека су* $\alpha(t)$ *и* $\beta(t)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b) *и нека је* $f(t)$ *S-интеграбилна у односу на* $\alpha(t)$ *и* $\beta(t)$. *Тада из*

$$f(t) \geqslant 0 \quad \text{за} \quad a \leqslant t \leqslant b$$

следи

$$\left|\, \int_a^b f(t) \mid d\alpha(t) \mid - \int_a^b f(t) \mid d\beta(t) \mid \,\right| \leqslant \int_a^b f(t) \mid d\{\alpha(t) - \beta(t)\} \mid .$$

Доказ. Пре свега, $f(t)$ је S-интеграбилна и у односу на $\alpha(t) - \beta(t)$, јер је тада и функција $\alpha(t) - \beta(t)$ ограничене варијације, а од дисконтинуитета може имати највише све дисконтинуитете функција $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, који се, према претпоставци, не поклапају са дисконтинуитетима функције $f(t)$. С друге стране (в. Карамата [**12** *b*, стр. 54—55]), функција $f(t)$ интеграбилна је и у односу на тоталну варијацију функција $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\alpha(t) - \beta(t)$, тј.

$$S_n^{(\alpha)} = \sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu) \mid \alpha(t_\nu) - \alpha(t_{\nu-1}) \mid \;\to\; \int_a^b f(t) \mid d\alpha(t) \mid,$$

$$S_n^{(\beta)} = \sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu) \mid \beta(t_\nu) - \beta(t_{\nu-1}) \mid \;\to\; \int_a^b f(t) \mid d\beta(t) \mid,$$

$$S_n^{(\alpha-\beta)} = \sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu) \mid \alpha(t_\nu) - \beta(t_\nu) - \alpha(t_{\nu-1}) + \beta(t_{\nu-1}) \mid \to$$

$$\to \int_a^b f(t) \mid d\{\alpha(t) - \beta(t)\} \mid,$$

када при подели

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \qquad \text{размака } (a, b)$$

и

$$t_{\nu-1} \leqslant \tau_\nu \leqslant t_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

дужина највећег размака

$$\delta_n = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{ t_\nu - t_{\nu-1} \} \to 0, \quad n \to \infty,$$

тако да све тачке дисконтинуитета функција $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ падну у подеоне тачке.

Ако онда у

$$S_n^{(\alpha-\beta)} \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu) \Big| \, |\alpha(t_\nu) - \alpha(t_{\nu-1})| - |\beta(t_\nu) - \beta(t_{\nu-1})| \, \Big| \geqslant \Big| S_n^{(\alpha)} - S_n^{(\beta)} \Big|$$

извршимо гранични прелаз $n \to \infty$, следи тврђење леме 1.

Лема 2. *Нека је функција $\Phi(t)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку и $\Phi(t) = \Phi(0)$ за $t < 0$. За неко фиксирано $h > 0$ и $r = 1, 2, \ldots$ ставимо*

$$\Delta_h^r \Phi(t) = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \Phi(t + \nu h).$$

Тада из

$$\int_0^T |d\{\Delta_h^r \Phi(t - rh)\}| < M T^m, \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{3.1.1}$$

следи

$$\int_0^T |d\Phi(t)| < M T^{m+r}. \tag{3.1.2}$$

Константа M не зависи од T.

Доказ потпуном индукцијом. Константа M не мора бити иста на сваком месту где се појављује.

(i) Нека је $r = 1$. На основу леме 1 следи тада из (3.1.1)

$$MT^m > \int_0^T |\alpha\{\Phi(t-h) - \Phi(t)\}| \geqslant$$

$$> \left| \int_0^T |d\Phi(t-h)| - \int_0^T |d\Phi(t)| \right| =$$

$$> \int_{T-h}^T |d\Phi(t)|. \tag{3.1.3}$$

Одредимо цео број n тако да је

(3.1.4) $$(n-1)\,h < T \leqslant n\,h\,.$$

Тада је на основу (3.1.3)

$$\int_0^T |d\,\Phi(t)| \leqslant \int_0^h + \int_h^{2h} + \ldots + \int_{(n-1)h}^{nh} <$$

$$< M\,h^m\,\{\,1^m + 2^m + \ldots + n^m\,\} <$$

$$< M\,n^{m+1}\,.$$

Међутим, према (3.1.4)

$$n = \frac{T+\eta}{h}\,, \quad 0 \leqslant \eta < h\,,$$

те је

(3.1.5) $$\int_0^T |d\,\Phi(t)| < M\left(\frac{T+\eta}{h}\right)^{m+1} < M\,T^{m+1}.$$

(ii) Претпоставићемо да тврђење важи за једно $r \geqslant 1$, па ћемо доказати да оно тада важи и за $r+1$. Заиста, нека је

$$\int_0^T |\,d\,\{\Delta_h^{r+1}\,\Phi\,[t-(r+1)\,h]\,\}\,| < M\,T^m\,.$$

Тада, слично као под (i), добијамо аналогон обрасца (3.1.3)

$$\int_{T-h}^T |\,d\,\{\,\Delta_h^r\,\Phi\,(t-r\,h)\,\}\,| < M\,T^m\,,$$

а одавде, на исти начин као што смо под (i) извели образац (3.1.5)

$$\int_0^T |\,d\,\{\,\Delta_h^r\,\Phi\,(t-r\,h)\,\}\,| < M\,T^{m+1}.$$

Међутим, по претпоставци, тврђење важи за r, те из последње неједначине следи

$$\int_0^T |\,d\,\Phi\,(t)\,| < M\,T^{m+1+r}$$

што је требало доказати.

Лема 3. *Нека је $\Phi(t)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку и $\Phi(t)=\Phi(0)$ за $t<0$.*

Ако је за фиксирано $h>0$ и једно $k\,(=1,2,\ldots)$.

$$\int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Phi(t-kh)\}| < \infty, \tag{3.1.6}$$

тада за $R[z]>0$ важи

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, d\,\Phi(t) = (e^{-hz}-1)^{-k}\int_0^\infty e^{-zt}\, d\{\Delta_h^k \Phi(t-kh)\}. \tag{3.1.7}$$

Доказ. Полазимо од идентитета

$$\begin{aligned}(e^{-hz}-1)^k \int_0^T e^{-zt}\, d\,\Phi(t) &= \\ = \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu \binom{k}{\nu} e^{-(k-\nu)hz}\int_0^{T-(k-\nu)h} e^{-zt}\, d\,\Phi(t) &+ R_k(T),\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

где је

$$R_k(T) = \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu \binom{k}{\nu} e^{-(k-\nu)hz}\int_{T-(k-\nu)h}^{T} e^{-zt}\, d\,\Phi(t). \tag{3.1.9}$$

Ако у првој суми на десној страни у (3.1.8) ставимо $t+(k-\nu)h\,|\,t$ и водимо рачуна да је $\Phi(t)=\Phi(0)$ за $t<0$, добијамо

$$\begin{aligned}(e^{-hz}-1)^k \int_0^T e^{-zt}\, d\,\Phi(t) &= \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \binom{k}{\nu}\int_0^T e^{-zt}\, d\{\Phi[t-(k-\nu)h]\} + R_k(T) = \\ &= \int_0^T e^{-zt}\, d\{\Delta_h^k \Phi(t-kh)\} + R_k(T).\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Међутим,

$$|R_k(T)| \leqq \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} e^{-(k-\nu)h\,R[z]} \int_{T-(k-\nu)h}^{T} e^{-R[z]t} |d\Phi(t)| <$$

$$< \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} e^{-R[z]T} \int_{T-(k-\nu)h}^{T} |d\Phi(t)| <$$

$$< 2\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \cdot e^{-R[z]T} \int_{0}^{T} |d\Phi(t)|,$$

а на основу леме 2

$$|R_k(T)| < M\,T^k e^{-R[z]T}.$$

На основу ове процене за $R_k(T)$ следи тада из (3.1.10), када $T \to \infty$, тврђење леме 3.

Лема 4. *Опште решење диференцне једначине*

$$\Delta_h^k f(t) = 0, \quad h > 0,$$

дато је са

$$f(t) = \omega_1(t)\,\pi_{k-1}(t) + \omega_2(t)\,\pi_{k-2}(t) + \ldots + \omega_k(t), \tag{3.1.11}$$

где су π_μ *полиноми степена* μ *по* t, *а* $\omega_\mu(t)$ *периодичке функције периоде* h.

За функције облика (3.1.11) *казаћемо да припадају класи* Ω_h^{k-1}.

Доказ потпуном индукцијом.

(i) За $k=1$ тврђење је тривијално. За $k=2$, једно решење диференцне једначине

$$\Delta_h^2 f(t) \equiv \Delta_h f(t) - \Delta_h f(t+h) = 0$$

је полином првог степена по t, $\pi_1(t)$, тј.

$$\Delta_h \pi_1(t) - \Delta_h \pi_1(t+h) = 0.$$

Ако са $F(t)$ означимо ма које друго решење, онда је количник $\Delta_h F(t)/\Delta_h \pi_1(t)$ због

$$\frac{\Delta_h F(t)}{\Delta_h \pi_1(t)} = \frac{\Delta_h F(t+h)}{\Delta_h \pi_1(t+h)},$$

периодична функција периоде h, $\omega_1(t)$, тј.

$$\Delta_h F(t) = \omega_1(t)\, \Delta_h \pi_1(t)$$

или

$$F(t) - F(t+h) = \omega_1(t)\, \{\pi_1(t) - \pi_1(t+h)\}.$$

Ако ово напишемо у облику

$$F(t) - \omega_1(t)\, \pi_1(t) = F(t+h) - \omega_1(t+h)\, \pi_1(t+h),$$

увиђамо да је и $F(t) - \omega_1(t)\, \pi_1(t)$ периодична функција периоде h, одакле следи

$$F(t) = \omega_1(t)\, \pi_1(t) + \omega_2(t).$$

(ii) Претпоставимо да тврђење важи за једно одређено k. Тада из

$$\Delta_h^{k+1} f(t) \equiv \Delta_h^k \{\Delta_h f(t)\} = 0,$$

према претпоставци, следи

$$\Delta_h f(t) = \omega_1(t)\, \pi_{k-1}(t) + \omega_2(t)\, \pi_{k-2}(t) + \ldots + \omega_k(t).$$

Међутим, ако ово напишемо у облику

$$\Delta_h f(t) = \omega_1(t)\, \Delta_h \pi_k^*(t) + \omega_2(t)\, \Delta_h \pi_{k-1}^*(t) + \ldots + \omega_h(t)\, \Delta_h \pi_1^*(t),$$

односно

$$f(t) - \omega_1(t)\, \pi_k^*(t) - \ldots - \omega_k(t)\, \pi_1^*(t) =$$

$$= f(t+h) - \omega_1(t+h)\, \pi_k^*(t+h) - \ldots - \omega_k(t+h)\, \pi_1^*(t+h),$$

увиђамо да је

$$f(t) - \omega_1(t)\, \pi_k^*(t) - \ldots - \omega_k(t)\, \pi_1^*(t) = \omega_{k+1}(t),$$

где је $\omega_{k+1}(t)$ периодична функција периоде h.

3.2. У овој и следећој тачки извешћемо основне ставове 3 и 6 у којима је садржано тврђење (2.1.3) о инверзији асимптотике и операције (2.2.8). У оба случаја претходно доказујемо извесне прелиминарне ставове.

Став 1. *Нека је $\Phi(t;\lambda)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку и*

$$\Phi(t;\lambda) = \Phi(0;\lambda) \quad \textit{за} \quad t < 0$$

и нека

$$\Phi(t;\lambda) \to \Phi(t), \quad \lambda \to \infty \quad \textit{за} \quad t \geqslant 0. \tag{3.2.1}$$

Ако су k-ше диференције $\Delta_h^k \Phi(t;\lambda)$ и $\Delta_h^k \Phi(t)$ $(h>0)$ ограничене варијације у размаку $(0,\infty)$, шј.

$$\int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Phi(t-kh;\lambda)\}|<\infty,$$

(3.2.2)

$$\int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Phi(t-kh)\}|<\infty$$

и

(3.2.3) $$\int_0^\infty |d\{\Delta_h^k[\Phi(t-kh;\lambda)-\Phi(t-kh)]\}|\to 0,\quad \lambda\to\infty,$$

шада

1° *за* $\sigma>0$ *конвергирају иншеграли*

$$F(\sigma,\tau;\lambda)=\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\,d\,\Phi(t;\lambda),$$

$$F(\sigma,\tau)=\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\,d\,\Phi(t);$$

2° *за* $\tau\neq 2s\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$ *йосшоје граничне вредносши*

$$\lim_{\sigma=0} F(\sigma,\tau;\lambda)=F(\tau;\lambda),$$

$$\lim_{\sigma=0} F(\sigma,\tau)=F(\tau);$$

3°

$$F(\tau;\lambda)\to F(\tau),\quad \lambda\to\infty,$$

униформно за $2s\pi/h+\varepsilon\leqslant\tau\leqslant 2(s+1)\pi/h-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi/h$, $s=0$, $\pm 1,\ldots$

Доказ. На основу леме 3 је

$$F(\sigma,\tau;\lambda)=[e^{-(\sigma+i\tau)h}-1]^{-k}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\,d\{\Delta_h^k\,\Phi(t-kh;\lambda)\},$$

(3.2.4)

$$F(\sigma,\tau)=[e^{-(\sigma+i\tau)h}-1]^{-k}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\,d\{\Delta_h^k\,\Phi(t-kh)\}.$$

Прво тврђење под 1° тада следи из (3.2.2), јер је

$$|F(\sigma,\tau;\lambda)|\leqslant|e^{-(\sigma+i\tau)h}-1|^{-k}\int_0^\infty|d\{\Delta_h^k\Phi(t-kh;\lambda)\}|.$$

Слично се доказује и друго.

Како интеграли у (3.2.4) конвергирају и за $\sigma=0$, то на основу Абелова става постоје граничне вредности $F(\tau, \lambda)$ и $F(\tau)$ за $\tau \neq 2 s\pi/h$, $s=0, \pm 1, \ldots$

Да би доказали тврђење 3^0, ставимо

$$\Psi(t; \lambda)=\Phi(t; \lambda)-\Phi(t). \tag{3.2.5}$$

Тада је

$$|F(\sigma, \tau; \lambda)-F(\sigma, \tau)| \leqslant |e^{-(\sigma+i\tau)h}-1|^{-k} \int_0^{\infty} |d\{\Delta_h^k \Psi(t-kh; \lambda)\}|,$$

и ако овде пустимо да $\sigma \to 0$ добијамо

$$|F(\tau; \lambda)-F(\tau)| \leqslant |e^{-i\tau h}-1|^{-k} \int_0^{\infty} |d\{\Delta_h^k \Psi(t-kh; \lambda)\}| \leqslant$$

$$\leqslant \left|2 \sin \frac{\varepsilon h}{2}\right|^{-k} \int_0^{\infty} |d\{\Delta_h^k \Psi(t-kh; \lambda)\}|,$$

за $2s\pi/h+\varepsilon \leqslant \tau \leqslant 2(s+1)\pi/h-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi/h$, $s=0, \pm 1, \ldots$

Према (3.2.3) је, дакле,

$$\limsup_{\lambda=\infty} |F(\tau; \lambda)-F(\tau)| \leqslant 0$$

униформно по τ у назначеним размацима. Тиме је завршен доказ става 1.

Уопштење става 1 даје следећи

Став 2. *Нека $\Phi(t; \lambda)$ и $\Phi(t)$ задовољавају услове става* 1 *и нека је за $t \geqslant 0$*

$$\psi(t)=\int_0^{\infty} e^{-tu}\, d\alpha(u), \tag{3.2.6}$$

где је $\alpha(t)$ ограничене варијације у размаку $(0, \infty)$.

Тада,

1^0 *за $\sigma>0$ конвергирају интеграли*

$$G(\sigma, \tau; \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-i\tau t}\, \psi(t)\, d\Phi(t; \lambda),$$

$$G(\sigma, \tau) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-i\tau t}\, \psi(t)\, d\Phi(t);$$

2^0 *за* $\tau \neq 2s\pi/h$, $s=0, \pm 1, \ldots$ *постоје граничне вредности*

$$\lim_{\sigma=0} G(\sigma, \tau; \lambda) = G(\tau; \lambda),$$

$$\lim_{\sigma=0} G(\sigma, \tau) = G(\tau);$$

3^0

$$G(\tau; \lambda) \to G(\tau), \quad \lambda \to \infty,$$

униформно за $2s\pi/h + \varepsilon \leqslant \tau \leqslant 2(s+1)\pi/h - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/h$, $s=0, \pm 1, \ldots$

Доказ. Ако $F(\sigma,\tau;\lambda)$ и $F(\sigma,\tau)$ означавају функције из става 1, тада је за $\sigma > 0$

$$G(\sigma, \tau; \lambda) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} \left\{ \int_0^\infty e^{-tu}\, d\alpha(u) \right\} d\Phi(t; \lambda) =$$

$$= \int_0^\infty F(\sigma+u, \tau; \lambda)\, d\alpha(u) \tag{3.2.7}$$

и слично

$$G(\sigma, \tau) = \int_0^\infty F(\sigma+u, \tau)\, d\alpha(u).$$

Измена поретка интеграла је очигледно у оба случаја дозвољена.

Међутим, на основу леме 3 је

$$|F(\sigma+u, \tau; \lambda)| \leqslant |e^{-(\sigma+u+i\tau)h} - 1|^{-k} \int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Phi(t-kh; \lambda)\}| \leqslant$$
$$\leqslant M(\lambda)(1 - e^{-\sigma h})^{-k},$$

и ова неједначина важи за $\sigma > 0$, $u \geqslant 0$ и τ произвољно. Према (3.2.7) је онда

$$|G(\sigma, \tau; \lambda)| \leqslant M(\lambda)(1 - e^{-\sigma h})^{-k} \int_0^\infty |d\alpha(u)|,$$

чиме је доказано прво тврђење под 1^0. Слично се доказује и друго.

Показаћемо сада да

$$G(\sigma, \tau; \lambda) \to \int_0^\infty F(u, \tau; \lambda)\, d\alpha(u) = G(\tau; \lambda), \quad \sigma \to 0. \tag{3.2.8}$$

У том циљу полазимо од

$$|G(\sigma, \tau; \lambda) - G(\tau; \lambda)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^U |F(\sigma+u, \tau; \lambda) - F(u, \tau; \lambda)|\, |d\alpha(u)| + \tag{3.2.9}$$
$$+ \int_U^\infty |F(\sigma+u, \tau; \lambda)|\, |d\alpha(u)| + \int_U^\infty |F(u, \tau; \lambda)|\, |d\alpha(u)|,$$

где ћемо U одмах одредити. Нека је τ фиксирано и $\neq 2s\pi/h$, $s=0, \pm 1, \ldots$, а $\eta > 0$, иначе произвољно. Тада је могуће изабрати U довољно велико тако да је

$$
\begin{aligned}
&\int_U^\infty |F(\sigma+u, \tau; \lambda)|\,|d\alpha(u)| < \eta, \\
(3.2.10)\qquad & \\
&\int_U^\infty |F(u, \tau; \lambda)|\,|d\alpha(u)| < \eta.
\end{aligned}
$$

Заиста, ако уочимо први интеграл, биће

$$
\begin{aligned}
|F(\sigma+u, \tau; \lambda)| &\leqslant |e^{-(\sigma+u+i\tau)h} - 1|^{-k} \int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Phi(t-kh; \lambda)\}| < \\
&< M(\lambda)\left\{\frac{e^{(\sigma+u)h}}{2[\operatorname{ch}(\sigma+u)h - \cos\tau h]}\right\}^{k/2} < \\
&< M(\lambda, \tau),
\end{aligned}
$$

јер је функција

$$\frac{e^x}{\operatorname{ch} x - \cos y}$$

ограничена по x за $y \neq 2s\pi$. Према томе,

$$\int_U^\infty |F(\sigma+u, \tau; \lambda)|\,|d\alpha(u)| < M(\lambda, \tau)\int_U^\infty |d\alpha(u)|,$$

а овај последњи интеграл се за довољно велико U може учинити произвољно малим.— Слично се може показати да се, бирајући U довољно велико, може задовољити и друга неједначина у (3.2.10).

Што се тиче првог интеграла на десној страни у (3.2.9), примећујемо да је функција $F(x, \tau; \lambda)$ непрекидна по x за $x > 0$, а према 2^0 става 2 и са десне стране у $x=0$ када је $\tau \neq 2s\pi/h$, $s=0, \pm 1, \ldots$. Према томе, она је униформно непрекидна по x у сваком коначном размаку $(0, X)$ када је $\tau \neq 2s\pi/h$, $s=0, \pm 1, \ldots$. Ако, дакле, у (3.2.9) пустимо да $\sigma \to 0$, добићемо

$$\limsup_{\sigma=0} \left| G(\sigma, \tau; \lambda) - G(\tau; \lambda) \right| < 2\eta,$$

тј.

$$G(\sigma, \tau; \lambda) \to G(\tau; \lambda), \quad \sigma \to 0,$$

што претставља прво од тврђења под 2^0. — Слично се доказује и друго, тј. да

$$G(\sigma, \tau) \to \int_0^\infty F(u, \tau)\, d\alpha(u) = G(\tau), \quad \sigma \to 0. \tag{3.2.11}$$

Најзад, да би доказали тврђење 3^0 полазимо, на основу (3.2.8) и (3.2.11), од

$$G(\tau;\lambda) - G(\tau) = \int_0^\infty \{F(u,\tau;\lambda) - F(u,\tau)\}\, d\alpha(u). \tag{3.2.12}$$

Са ознаком (3.2.5) је за довољно мало $\varepsilon > 0$ и $2s\pi/h + \varepsilon \leqslant \tau \leqslant \leqslant 2(s+1)\pi/h - \varepsilon$, $s = 0, \pm 1, \ldots$

$$|F(u,\tau;\lambda) - F(u,\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant |e^{-(u+i\tau)h} - 1|^{-k} \int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Psi(t-kh;\lambda)\}| \leqslant$$

$$\leqslant \left| 2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^{-k} \int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Psi(t-kh;\lambda)\}|.$$

Према томе,

$$|G(\tau;\lambda) - G(\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| 2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^{-k} \int_0^\infty |d\alpha(u)| \cdot \int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Psi(t-kh;\lambda)\}|$$

у назначеним размацима за τ. Кад овде пустимо да $\lambda \to \infty$ непосредно следи тврђење 3^0, чиме је став 2 у потпуности доказан.

Сада смо у стању да из става 2 изведемо централни став о асимптотском развијању.

Став 3. *Нека је*

$$\psi(t) = \int_0^\infty e^{-tu}\, d\alpha(u), \quad t \geqslant 0, \tag{3.2.13}$$

где је $\alpha(t)$ *ограничене варијације у размаку* $(0, \infty)$.

Нека функција $\varphi(t;\lambda)$ *има за* $t \geqslant 0$ *асимптотски развитак по општој скали* $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$\varphi(t;\lambda) = \frac{p_0(t)}{q_0(\lambda)} + \frac{p_1(t)}{q_1(\lambda)} + \ldots + \frac{p_l(t)}{q_l(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{3.2.14}$$

где функције $p_\mu(t)$, $\mu = 0, 1, \ldots, l$ *припадају класи* Ω_h^m.

Ако је за неко цело $K > m$

$$\int_0^\infty |d\{\Delta_h^K \varphi(t-Kh;\lambda)\}| = o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{3.2.15}$$

тада,

1° *за* $\tau \neq 2\,s\,\pi/h$, $s=0, \pm 1, \ldots$ *постоји гранична вредност*

$$g(\tau;\lambda)=\lim_{\sigma=0}\int_0^{\infty} e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\,\psi(t)\,d\,\varphi(t;\lambda);$$

2° $g(\tau;\lambda)$ *има асимптотски развитак по скали* $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$g(\tau;\lambda)=\frac{P_0(\tau)}{q_0(\lambda)}+\frac{P_1(\tau)}{q_1(\lambda)}+\ldots+\frac{P_l(\tau)}{q_l(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

где је

$$P_\mu(\tau)=\lim_{\sigma=0}\int_0^{\infty} e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,d\,p_\mu(t),\quad \mu=0,1,\ldots,l.$$

Овај развитак је униформан за $2s\pi/h+\varepsilon \leqslant \tau \leqslant 2(s+1)\pi/h-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$

Доказ следи непосредно из става 2 ако у овом за функцију $\Phi(t;\lambda)$ узмемо

$$\Phi(t;\lambda)=q_l(\lambda)\left\{\varphi(t;\lambda)-\sum_{\mu=0}^{l}\frac{p_\mu(t)}{q_\mu(\lambda)}\right\}.$$

Показаћемо да тако изабрана функција $\Phi(t;\lambda)$ задовољава све услове става 2. Пре свега, из (3.2.14) следи да

(3.2.16) $$\Phi(t;\lambda)\to 0,\quad \lambda\to\infty \quad \text{за } t\geqslant 0,$$

тј. овде је

$$\Phi(t)\equiv 0.$$

С друге стране, како је цео позитиван број $K>m$, а коефицијенти $p_\mu(t)$, $\mu=0,1,\ldots,l$ припадају класи Ω_h^m, то је на основу леме 4,

(3.2.17) $$\Delta_h^K\,\Phi(t;\lambda)=q_l(\lambda)\,\Delta_h^K\,\varphi(t;\lambda),$$

те је са (3.2.15) испуњен и последњи услов (3.2.5) става 2.

Због $\Phi(t)\equiv 0$, биће и функција $G(\tau)$ става 5 идентички једнака нули, те, према 3° става 2,

$$G(\tau;\lambda)\to 0,\quad \lambda\to\infty,$$

униформно за $2s\pi/h+\varepsilon\leqslant\tau\leqslant 2(s+1)\pi/h-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$ Одавде, ако уведемо експлицитни израз за функцију $\Phi(t;\lambda)$, следи

$$q_l(\lambda)\lim_{\sigma=0}\int_0^{\infty} e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\,\psi(t)\,d\left\{\varphi(t;\lambda)-\sum_{\mu=0}^{l}\frac{p_\mu(t)}{q_\mu(\lambda)}\right\}\to 0,\quad \lambda\to\infty,$$

односно

$$q_l(\lambda)\left\{g(\tau;\lambda)-\sum_{\mu=0}^{l}\frac{P_\mu(\tau)}{q_\mu(\lambda)}\right\}\to 0, \quad \lambda\to\infty,$$

што претставља тврђење става 3.

3.3. У овој тачки извешћемо став 6 који даје нешто прецизније и за примену погодније услове него ли став 3. Претходно ћемо доказати два прелазна става, аналогоне ставова 1 и 2.

Став 4. *Нека је $\Phi(t;\lambda)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку и*

$$\Phi(t;\lambda)=\Phi(0;\lambda) \quad \text{за} \quad t<0$$

и нека

$$\Phi(t;\lambda)\to\Phi(t), \quad \lambda\to\infty \quad \text{за} \quad t\geqslant 0. \tag{3.3.1}$$

Ако је у размаку $(0, T)$ k-та диференција $(h>0)$ функције $\Phi(t;\lambda)$ униформно ограничене варијације, тј.

$$W_0^T\{\Delta_h^k\Phi(t;\lambda)\}<M, \qquad M \text{ не зависи од } \lambda, \tag{3.3.2}$$

и ако за $t\geqslant T$ и $\lambda\geqslant\lambda_0$

$$\Delta_h^k\Phi(t,\lambda) \text{ и } \Delta_h^k\{\Phi(t;\lambda)-\Phi(t)\} \text{ монотоно } \to 0, \quad t\to\infty, \tag{3.3.3}$$

тада важе тврђења 1^0-3^0 става 1.

Доказ. Из (3.3.2) и првог услова (3.3.3) следи да су k-те диференције $\Delta_h^k\Phi(t;\lambda)$ и $\Delta_h^k\Phi(t)$ ограничене варијације у размаку $(0,\infty)$. За прву од њих је, наиме,

$$W_0^\infty\{\Delta_h^k\Phi(t;\lambda)\}=W_0^T\{\Delta_h^k\Phi(t;\lambda)\}+\Delta_h^k\Phi(T;\lambda)<\infty.$$

Слично следи и за $W_0^\infty\{\Delta_h^k\Phi(t)\}$, јер, на основу једног Хелиевог [11] става, услов (3.3.2) повлачи за собом да је и $\Delta_h^k\Phi(t)$ ограничене варијације у размаку $(0, T)$. Тиме се доказ тврђења 1^0 и 2^0 става 4 своди на доказ који смо већ дали код доказа става 1.

Нека је $\Psi(t;\lambda)$ одређено са (3.2.5). Ради доказа тврђења 3^0 полазимо, служећи се лемом 3, од

$$|F(\sigma,\tau;\lambda)-F(\sigma,\tau)|\leqslant \tag{3.3.4}$$

$$\leqslant|e^{-(\sigma+i\tau)h}-1|^{-k}\left|\int_0^{T+kh}e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}d\{\Delta_h^k\Psi(t-kh;\lambda)\}\right|+$$

$$+|e^{-(\sigma+i\tau)h}-1|^{-k}\int_{T+kh}^{\infty}|d\{\Delta_h^k\Psi(t-kh;\lambda)\}|,$$

одакле, с обзиром на други услов (3.3.3), следи

$$
\begin{aligned}
& | F(\sigma, \tau; \lambda) - F(\sigma, \tau) | \leqslant \\
& \leqslant | e^{-(\sigma + i\tau)h} - 1 |^{-k} \left\{ \left| \int_0^{T+kh} e^{-i\tau t} \, d\{\Delta_h^k \Psi(t - kh; \lambda)\} \right| + \right. \\
& \left. + \{1 - e^{-\sigma(T+kh)}\} \int_0^{T+kh} | d\{\Delta_h^k \Psi(t - kh; \lambda)\} | + \Delta_h^k \Psi(T; \lambda) \right\}.
\end{aligned}
$$

Ако у овој неједначини пустимо да $\sigma \to 0$, добићемо

$$
\begin{aligned}
& | F(\tau; \lambda) - F(\tau) | \leqslant \\
& \leqslant | e^{-i\tau h} - 1 |^{-k} \left\{ \left| \int_0^{T+kh} e^{-i\tau t} \, d\{\Delta_h^k \Psi(t - kh;)\} \right| + \Delta_h^k \Psi(T; \lambda) \right\},
\end{aligned}
$$

те је за довољно мало $\varepsilon > 0$ и $2s\pi/h + \varepsilon \leqslant \tau \leqslant 2(s+1)\pi/h - \varepsilon$, $s = 0, \pm 1, \ldots$

$$
\begin{aligned}
& | F(\tau; \lambda) - F(\tau) | \leqslant \\
& \leqslant \left| 2 \sin \frac{\varepsilon h}{2} \right|^{-k} \left\{ \left| \int_0^{T+kh} e^{-i\tau t} \, d\{\Delta_h^k \Psi(t - kh; \lambda)\} \right| + \Delta_h^k \Psi(T; \lambda) \right\}.
\end{aligned}
$$

Како је према претпоставци (3.3.2) $\Delta_h^k \Psi(t; \lambda)$ униформно ограничене варијације у размаку $(0, T + kh)$, а $e^{-i\tau}$ непрекидна функција, то је на основу познатог Хелиевог [11] става дозвољен гранични прелаз кад $\lambda \to \infty$ под интегралом који фигурише на десној страни последње неједначине. Према томе, на основу (3.3.1),

$$
\limsup_{\lambda = \infty} | F(\tau; \lambda) - F(\tau) | \leqslant 0,
$$

чиме је доказано тврђење 3^0 става 4.

Аналогон ставу 2 је следећи

Став 5. *Нека* $\Phi(t; \lambda)$ *и* $\Phi(t)$ *задовољавају услове става* 4 *и нека је*

$$
\psi(t) = \int_0^{\infty} e^{-tu} \, d\alpha(u), \tag{3.3.5}
$$

где је $\alpha(t)$ *ограничене варијације у размаку* $(0, \infty)$.

Тада важе тврђења $1^0 - 3^0$ *става* 2.

Доказ. Као што смо видели при доказу става 4, услов (3.3.2) и први услов (3.3.3) повлаче за собом ограниченост варијације k-тих диференција функција $\Phi(t;\lambda)$ и $\Phi(t)$ у размаку $(0,\infty)$. Тиме се доказ тврђења 1^0 и 2^0 става 5 своди на доказ који смо дали код става 2.

Да бисмо доказали тврђење 3^0, претходно ћемо испитати функцију

$$\Theta(t,\tau)=\int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{[e^{-(u+i\tau)h}-1]^k}\,d\alpha(u), \quad t\geqslant 0.$$

Показаћемо да је $\Theta(t,\tau)$, у (t,τ)-равни из које су исечене траке $2s\pi/h-\varepsilon<\tau<2s\pi/h+\varepsilon$, $s=0,\pm 1,\ldots$ ограничена и непрекидна по t.

Ограниченост следи непосредно из претпоставке да је $\alpha(t)$ ограничене варијације у размаку $(0,\infty)$:

$$|\Theta(t,\tau)|\leqslant \int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{|e^{-(u+i\tau)h}-1|^k}\,|d\alpha(u)|\leqslant$$

$$\leqslant M\left|2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^{-k}. \tag{3.3.6}$$

Нека је $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x\neq y$ и $\eta>0$, иначе произвољно. Број U одредићемо тако да је

$$2\left|2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^{-k}\int_U^\infty |d\alpha(u)|<\eta$$

за фиксирано h и ε, што је увек могуће постићи на основу претпоставке о функцији $\alpha(t)$. Тада је у уоченом делу (t,τ)-равни

$$|\Theta(y,\tau)-\Theta(x,\tau)|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_0^U \frac{e^{-xu}[e^{-(y-x)}-1]}{[e^{-(u+i\tau)h}-1]^k}\,d\alpha(u)\right|+\left|\int_U^\infty \frac{e^{-yu}-e^{-xu}}{[e^{-(u+i\tau)h}-1]^k}\,d\alpha(u)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e^{|y-x|}-1}{\left|2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^k}\int_0^U|d\alpha(u)|+\frac{2}{\left|2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^k}\int_U^\infty|d\alpha(u)|.$$

Према томе

$$\lim_{y=x} \sup |\Theta(y,\tau)-\Theta(x,\tau)| \leqslant \eta,$$

што значи да је функција $\Theta(t,\tau)$ непрекидна по t када се τ налази у посматранима размацима.

Сада ћемо доказати тврђење 3^0. Полазимо од (3.2.12)

$$G(\tau;\lambda)-G(\tau)=\int_0^\infty \{F(u,\tau;\lambda)-F(u,\tau)\}\, d\alpha(u).$$

На основу леме 3 и са ознаком (3.2.5) је тада

$$G(\tau;\lambda)-G(\tau)=$$

$$=\int_0^\infty \frac{d\alpha(u)}{[e^{-(u+i\tau)h}-1]^k}\int_0^\infty e^{-ut}e^{-i\tau t}\, d\{\Delta_h^k \Psi(t-kh;\lambda)\}=$$

$$=\int_0^\infty \Theta(t,\tau)\, e^{-i\tau t}\, d\{\Delta_h^k \Psi(t-kh;\lambda)\},$$

па према томе

$$|G(\tau;\lambda)-G(\tau)|\leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_0^{T+kh} \Theta(t,\tau)\, e^{-i\tau t}\, d\{\Delta_h^k \Psi(t-kh;\lambda)\}\right|+$$

$$+\int_{T+kh}^\infty |\Theta(t,\tau)|\, |d\{\Delta_h^k \Psi(t-kh;\lambda)\}|.$$

Међутим, на основу (3.3.6) и другог услова (3.3.3) налазимо

$$|G(\tau;\lambda)-G(\tau)|\leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_0^{T+kh} \Theta(t,\tau)\, e^{-i\tau t}\, d\{\Delta_h^k \Psi(t-kh;\lambda)\}\right|+$$

$$+M\left|2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^{-k}\cdot \Delta_h^k \Psi(T;\lambda).$$

Како је за посматрана τ функција $\Theta(t,\tau)$ непрекидна по t, а $\Delta_h^k \Psi(t;\lambda)$ униформно ограничене варијације у $(0, T+kh)$, то је на основу Хелиевог [11] става дозвољен гранични прелаз $\lambda\to\infty$ под знаком интеграла. Према томе, на основу (3.3.1),

$$\lim_{\lambda=\infty} \sup |G(\tau;\lambda)-G(\tau)| \leqslant 0$$

униформно за $2s\pi/h+\varepsilon\leqslant\tau\leqslant 2(s+1)\pi/h$, $0<\varepsilon<\pi/h$, $s=0, \pm 1, \ldots$ Тиме је став 5 у потпуности доказан.

Из става 5 следи, на сличан начин као што је из става 2 изведен став 3, следећи

Став 6. *Нека је*

$$\psi(t)=\int_0^\infty e^{-tu}\,d\,\alpha(u)\,,\quad t\geqslant 0\,,$$

где је $\alpha(t)$ *ограничене варијације у размаку* $(0,\infty)$.

Нека функција $\varphi(t;\lambda)$ *има за* $t\geqslant 0$ *асимптотски развитак по општој скали* $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$\varphi(t;\lambda)=\frac{p_0(t)}{q_0(\lambda)}+\frac{p_1(t)}{q_1(\lambda)}+\cdots+\frac{p_l(t)}{q_l(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty\,,$$

где функције $p_\mu(t)$, $\mu=0,1,\ldots,l$ *припадају класи* Ω_h^m.

Ако је за неко цело $K>m$ *варијација* K*-те диференције* $(h>0)$

$$W_0^T\{\Delta_h^k\varphi(t;\lambda)\}<\frac{M}{q_l(\lambda)}\,,\quad M \text{ не зависи од } \lambda\,,$$

и за $t\geqslant T$ *и* $\lambda\geqslant\Lambda$

$$\Delta_h^K\varphi(t;\lambda)\ \text{монотоно}\to 0 \text{ када } t\to\infty\,,$$

тада,

1^0 *за* $\tau\neq 2s\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$ *постоји гранична вредност*

$$g(\tau;\lambda)=\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma\tau}e^{-i\tau t}\,\psi(t)\,d\,\varphi(t;\lambda)\,;$$

2^0 $g(t;\lambda)$ *има асимптотски развитак по скали* $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$g(\tau;\lambda)=\frac{P_0(\tau)}{q_0(\lambda)}+\frac{P_1(\tau)}{q_1(\lambda)}+\cdots+\frac{P_l(\tau)}{q_l(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty\,,$$

где је

$$P_\mu(\tau)=\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}\,e^{-i\tau t}\,\psi(t)\,d\,p_\mu(t),\quad \mu=0,1,\ldots,l.$$

Овај асимптотски развитак је униформан за $2s\pi/h+\varepsilon\leqslant\tau\leqslant 2(s+1)\pi/h-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$

Примедба I. Специјално, ако је $\psi(t)$ тотално монотона функција у размаку $(0,\infty)$, биће задовољен услов (3.3.5). Наиме, Хаусдорф [10] је показао да је класа тотално монотоних функција у размаку $(0,\infty)$ идентична са класом функција које се могу приказати Лаплас-Стилтјесовим интегралом облика

$$\int_0^\infty e^{-tu}\,d\,\alpha(u)$$

где је $\alpha(t)$ ограничена и неопадајућа функција у $(0,\infty)$.

Примедба II. Ако су испуњени услови ставова 3 и 6, тада као њихова тривијална последица следи, да се асимптотски развитак функције

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} \psi(t)\, d\varphi(\tau;\lambda), \quad \sigma > 0,$$

може добити из асимптотског развитка функције $\varphi(t;\lambda)$, примењујући на овај последњи члан по члан операцију

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} \psi(t)\, d\{\quad\}.$$

Добијени асимптотски развитак важи, као што се то види из доказа ставова 3 и 6, без изузетка за свако τ.

3.4. Како је функција $g(\tau;\lambda)$ чији асимптотски развитак дају ставови 3 и 6 изражена Стилтјесовим интегралом, то погодним избором функције $\varphi(t;\lambda)$ можемо добити одговарајуће ставове за A-збирљиве редове, специјално за A-збирљиве тригонометриске редове, и за A-збирљиве Риманове интеграле.

(i) Следећа два става односе се на асимптотско развијање A-збирљивих тригонометриских редова.

Став 7. *Нека је*

$$a_\nu = \int_0^\infty e^{-\nu u}\, d\alpha(u), \quad \nu = 0, 1, \dots, \tag{3.4.1}$$

где је $\alpha(u)$ ограничене варијације у $(0, \infty)$.

Нека низ $b_\nu(\lambda)$, $\nu = 0, 1, \dots$ има асимптотски развитак по општој скали $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$b_\nu(\lambda) = \frac{p_0(\nu)}{q_0(\lambda)} + \frac{p_1(\nu)}{q_1(\lambda)} + \cdots + \frac{p_l(\nu)}{q_l(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{3.4.2}$$

где су $p_\mu(\nu)$, $\mu = 0, 1, \dots, l$, посматрани као функције променљиве ν, полиноми m-тог степена.

Ако за неко цело $K > m$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta^{K+1} b_{\nu-K-1}(\lambda)| = o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{3.4.3}$$

тада

1^0 *за $0 < \theta < 2\pi$ постоји гранична вредност*

$$g(\theta;\lambda) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu(\lambda) r^\nu e^{\nu\theta i};$$

2^0 $g(\theta;\lambda)$ *има асимптотски развитак по скали* $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$g(\theta;\lambda)=\frac{P_0(\theta)}{q_0(\lambda)}+\frac{P_1(\theta)}{q_1(\lambda)}+\cdots+\frac{P_l(\theta)}{q_l(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

где је

$$P_\mu(\theta)=\lim_{r=1}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\,p_\mu(\nu)\,r^\nu e^{\nu\theta i},\quad \mu=0,1,\ldots,l.$$

Овај асимптотски развитак је униформан за $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\varepsilon$.

Став 7 добијамо из става 3 ако у овом за $\varphi(t;\lambda)$ узмемо

$$\varphi(t;\lambda)=\sum_{\nu\leqslant t}b_\nu(\lambda), \tag{3.4.4}$$

тј. степенасту функцију која за $t=0,1,\ldots$ има скокове дужине $b_0(\lambda)$, $b_1(\lambda),\ldots$ и ставимо $h=1$, тј. за коефицијенте $p_\mu(t)$ асимптотског развитка (3.2.14) функције $\varphi(t;\lambda)$ претпоставимо да припадају класи Ω_1^m, тј.

$$p_\mu(t)=\omega_0(t)\,\pi_m(t)+\omega_1(t)\,\pi_{m-1}(t)+\ldots+\omega_m(t), \tag{3.4.5}$$

где су $\pi_k(t)$ полиноми k-тог степена по t, а $\omega_k(t)$ периодичке функције периоде 1.

Тада је

$$\int_0^x e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,d\varphi(t;\lambda)=\sum_{\nu\leqslant x}e^{-\nu\sigma}e^{-i\nu\tau}\psi(\nu)\,b_\nu(\lambda),$$

и ако ставимо

$$e^{-(\sigma+i\tau)}=r\,e^{\theta i} \tag{3.4.6}$$

и

$$\psi(\nu)=a_\nu,$$

добијамо

$$\int_0^x e^{-\sigma t}\,e^{-i\tau t}\,\psi(t)\,d\varphi(t;\lambda)=\sum_{\nu\leqslant x}a_\nu\,b_\nu(\lambda)\,r^\nu\,e^{\nu\theta i}.$$

Кад $x\to\infty$, ред на десној страни конвергираће заједно са интегралом, те је

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,d\varphi(t;\lambda)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\,b_\nu(\lambda)\,r^\nu e^{\nu\theta i}.$$

Према (3.4.6), граничном прелазу $\sigma \to 0$ одговара $r \to 1$, те је

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} \psi(t)\, d\varphi(t; \lambda) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^\infty a_\nu b_\nu(\lambda) r^\nu e^{\nu\theta i},$$

кадгод гранична вредност на левој страни постоји.

С друге стране из (3.4.4) следи

$$b_\nu(\lambda) = \varphi(\nu; \lambda) - \varphi(\nu-1; \lambda). \tag{3.4.7}$$

Како су на основу претпоставке (3.4.5) коефицијенти $p_\mu(\nu)$ у асимптотском развитку (3.2.14)

$$\varphi(\nu; \lambda) = \sum_{\mu=0}^{l} \frac{p_\mu(\nu)}{q_\mu(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty,$$

за целе вредности $\nu = 0, 1, \ldots$ полиноми m-тог степена по ν, то према (3.4.7) низ $b_\nu(\lambda)$, $\nu = 0, 1, \ldots$ има асимптотски развитак облика

$$b_\nu(\lambda) = \sum_{\mu=0}^{l} \frac{p_\mu(\nu) - p_\mu(\nu-1)}{q_\mu(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{l} \frac{p_\mu^*(\nu)}{q_\mu(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),$$

где су $p_\mu^*(\nu)$ полиноми $(m-1)$-степена по ν.

Најзад, ако за диференцију Δ_1^k краткоће ради пишемо само Δ^k, услов (3.2.15) постаје

$$\int_0^\infty |d\{\Delta^K \varphi(t-K; \lambda)\}| = o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad K > m.$$

Да би га изразили помоћу низа $b_\nu(\lambda)$, примећујемо да се његова лева страна своди на ред

$$\sum_{\nu=0}^\infty |\Delta^K \varphi(\nu - K; \lambda) - \Delta^K \varphi(\nu - K - 1; \lambda)|,$$

или, према (3.4.7), на

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} | \Delta^K b_{\nu-K}(\lambda) |,$$

па став 7 добијамо ако уместо $m-1$ и K пишемо m и $K+1$.

За примену је нарочито погодан следећи

Став 8. *Сва тврђења става 7 важе ако, задржавајући остале претпоставке о низовима a_ν и $b_\nu(\lambda)$, $\nu=0, 1, \ldots$, уместо услова (3.4.3) захтевамо да за неко цело $K>m$ и $\lambda \geqslant \Lambda$*

(3.4.8) $$\Delta^K b_\nu(\lambda) \text{ монотоно} \to 0 \text{ када } \nu_0 \leqslant \nu \to \infty.$$

Доказ. На основу (3.4.8) је

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} | \Delta^{K+1} b_{\nu-K-1}(\lambda) | =$$

(3.4.9) $$= \sum_{\nu=0}^{\nu_0+K} | \Delta^{K+1} b_{\nu-K-1}(\lambda) | + \sum_{\nu_0+K+1}^{\infty} \{ \Delta^K b_{\nu-K-1}(\lambda) - \Delta^K_{\nu-K}(\lambda) \} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{\nu_0+K} | \Delta^K b_{\nu-K-1}(\lambda) | + \sum_{\nu=0}^{\nu_0+K} | \Delta^K b_{\nu-K}(\lambda) | + \Delta^K b_{\nu_0}(\lambda).$$

Међутим, како су $p_\mu(\nu)$ полиноми m-тог степена по ν и $K>m$, то из (3.4.2) следи

$$q_l(\lambda)\, \Delta^K b_\nu(\lambda) \to 0, \quad \lambda \to \infty,$$

па према (3.4.9)

$$q_l(\lambda) \sum_{\nu=0}^{\infty} | \Delta^{K+1} b_{\nu-K-1}(\lambda) | \to 0, \quad \lambda \to \infty,$$

тј. испуњен је услов (3.4.3) става 7. — Став 8 смо могли, наравно, добити и директно из става 6.

Ако у ставу 8 уместо услова (3.4.1) претпоставимо да је низ a_ν тотално монотон, тиме добијамо познати Караматин [**12**a] став.

(ii) Ако функција $\varphi(t; \lambda)$ има R-интеграбилан први извод $\chi(t; \lambda)$, тада добијамо аналогоне ставова 3 и 6 за A-збирљиве Риманове интеграле. Специјално за примену је погодан следећи

Став 9. *Нека је*

$$\psi(t)=\int_0^\infty e^{-tu}\,d\,\alpha(u)\,,\quad t\geqslant 0, \tag{3.4.10}$$

где је $\alpha(t)$ *ограничене варијације у размаку* $(0,\infty)$.

Функција $\chi(t;\lambda)$ *нека има изводе по* t *до* K*-тог реда закључно и нека је*

$$\int_0^t \chi(u;\lambda)\,d\,u=\sum_{\mu=0}^{l}\frac{p_\mu(t)}{q_\mu(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty\,, \tag{3.4.11}$$

где су коефицијенти $p_\mu(t)$, $\mu=0,1,\ldots,l$ *полиноми* m*-тог степена по* t.

Ако је тада за неко цело $K>m$

$$\int_0^\infty\left|\frac{\partial^K\chi(t;\lambda)}{\partial\,t^K}\right|d\,t=o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty\,, \tag{3.4.12}$$

онда постоји гранична вредност

$$R(\tau;\lambda)=\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}\,e^{-i\tau t}\,\psi(t)\,\chi(t;\lambda)\,d\,t \tag{3.4.13}$$

и асимптотски развитак функције $R(\tau;\lambda)$ *дат је са*

$$R(\tau;\lambda)=\sum_{\mu=0}^{l}\frac{T_\mu(\tau)}{q_\mu(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty\,,$$

где је

$$T_\mu(\tau)=\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}\,e^{-i\tau t}\,\psi(t)\,p'_\mu(t)\,d\,t\,.$$

Овај развитак је униформан по τ *у сваком коначном размаку који не садржи тачку* $\tau=0$.

Уместо услова (3.4.11) *можемо захтевати да је*

$$W_0^T\left\{\frac{\partial^{K-1}\chi(t;\lambda)}{\partial\,t^{K-1}}\right\}<\frac{M}{q_l(\lambda)}\,,\quad M \text{ не зависи од } \lambda, \tag{3.4.14}$$

и да за $t\geqslant T$

$$(-1)^{K-1}\frac{\partial^{K-1}\chi(t;\lambda)}{\partial\,t^{K-1}}\quad \text{монотоно} \to 0 \text{ када } t\to\infty\,. \tag{3.4.15}$$

IV ПРИМЕНЕ

4.1. У овој и наредним тачкама применићемо став 8 на ултрасферне полиноме $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$, да бисмо добили њихов асимптотски развитак кад $n\to\infty$. Ултрасферни полиноми су дефинисани помоћу функције-генератрисе

$$\frac{1}{(1-2h\cos\theta+h^2)^\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)\,h^n .$$

Као полазна тачка може нам послужити један од тригонометриских редова за ултрасферне полиноме (в. Сеге [**23** *a*, стр. 95]) ($\lambda>0,\ \lambda\neq 1,2,\ldots,\ 0<\theta<\pi$)

$$\begin{aligned}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)&=\frac{2\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma^2(\lambda)\,n!}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\,.\\ &\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}\,\frac{(n+\nu)!}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}}\sin(n+2\nu+1)\theta\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

или

$$\begin{aligned}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)&=\frac{2\,\Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}\,\frac{(2\lambda)^{(n+\nu)}}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}}\,.\\ &\cdot\cos[(n+2\lambda+2\nu)\theta-\lambda\pi]\,.\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

Рачун ћемо изводити само за први од њих.

Тригонометриски ред (4.1.1) написаћемо претходно у облику

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma^2(\lambda)\,n!}{2\,\Gamma(2\lambda+n)}(2\sin\theta)^{2\lambda-1}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\\ &=J\left\{e^{(n+1)\theta i}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}\,\frac{(n+\nu)!}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}}\,e^{2\nu\theta i}\right\}=\\ &=J\left\{e^{(n+1)\theta i}\,S_n^{(\lambda)}(2\theta)\right\},\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

где смо ставили

$$S_n^{(\lambda)}(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}\,\frac{(n+\nu)!}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}}\,e^{\nu\theta i}.\tag{4.1.4}$$

Асимптотски развитак за $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ добићемо, дакле, из одговарајућег за $S_n^{(\lambda)}(\theta)$.

Нека је, са ознакама из става 7 и 8,

$$\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}=a_\nu \quad \text{и} \quad \frac{(n+\nu)!}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}}=b_\nu(n).$$

Показаћемо да коефицијенти a_ν и $b_\nu(n)$ задовољавају услове (3.4.1), (3.4.2) и (3.4.8) става 7 односно 8. У том циљу примећујемо да је према једном Хаусдорфовом ставу потребан и довољан услов да низ c_n, $n=0, 1, \ldots$ буде тотално монотон, да се може приказати у облику интеграла момената

$$c_n=\int_0^1 t^n \, d\,\alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ не опада и ограничена је у $0\leqslant t\leqslant 1$.

Ако коефицијенте a_ν и $b_\nu(n)$ напишемо у облику

$$\text{(4.1.5)} \quad a_\nu=\frac{B(1-\lambda+\nu,\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)}=\frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)}\int_0^1 t^{\nu-\lambda}(1-t)^{\lambda-1}\,dt$$

и

$$\text{(4.1.6)} \quad b_\nu(n)=B(\nu+n+1,\lambda)=\int_0^1 t^{\nu+n}(1-t)^{\lambda-1}\,dt,$$

увиђамо да је низ a_ν, $\nu=0, 1, \ldots$ тотално монотон за $0<\lambda<1$, а низ $b_\nu(n)$, $\nu=0, 1, \ldots$ за $\lambda>0$. Према томе, на основу примедбе у тачки 2.3 услов (3.4.1) је испуњен када је $0<\lambda<1$. С друге стране због тоталне монотоније низа $b_\nu(n)$ и чињенице да се

$$b_\nu(n)\sim\Gamma(\lambda)\,\nu^{-\lambda}\to 0, \quad \nu\to\infty,$$

следи да је услов (3.4.8) става 8 испуњен за свако K и n.

Да бисмо могли да применимо став, остаје још једино да видимо да ли низ $b_\nu(n)$ допушта асимптотски развитак облика (3.4.2), чији су коефицијенти $p_\mu(\nu)$, $\mu=0, 1, \ldots, k$ полиноми по ν. То ћемо проверити посебице у сваком случају, развијајући $b_\nu(n)$ по различитим скалама $\{q_\mu(n)\}$.

4.2. Први од асимптотских развитака ултрасферних полинома $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$, поменутих у тачки 2.5 даје следећи

Став 10. *Нека F означава хипергеометриску функцију и нека је*

$$(x)^{(\nu)}=x(x+1)\ldots(x+\nu-1), \quad (x)^{(0)}=1.$$

Тада је униформно по θ у размаку $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2}{\Gamma(\lambda)}\,\frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\lambda+1)}\,(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^\mu\frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}\,\mu!}\,f_\mu^{(\lambda)}(\theta)+o\left(n^{\lambda-l-1}\right),$$

где је

$$f_{\mu}^{(\lambda)}(\theta)=J\left\{\frac{e^{(n+2\mu+1)\theta i}}{(1-e^{2\theta i})^{\mu-\lambda+1}}F(-\mu,\alpha;\lambda-\mu;1-e^{-2\theta i})\right\}.$$

За специјалну вредност параметра α, $\alpha=0$, *овај асимптотски развитак своди се на познати уопштени Стилтјесов развитак за ултрасферне полиноме* (Сеге [**23***а*, стр. 191, став 8.21.11]).

Доказ. Да бисмо могли применити став 8, потребно је, према оном што смо видели у претходној тачки, да још проверимо да ли $b_{\nu}(\lambda)$ допушта асимптотски развитак облика (3.4.2). У том циљу развићемо $b_{\nu}(\lambda)$ у асимптотски ред по скали $\{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}\}$. Према (4.1.6) је

$$b_{\nu}(n)=\int_0^1 t^{\nu+n}(1-t)^{\lambda-1}\,dt=$$

$$=\int_0^1 t^{n+\alpha}\{1-(1-t)\}^{\nu-\alpha}(1-t)^{\lambda-1}\,dt=$$

$$=\int_0^1 t^{n+\alpha}(1-t)^{\lambda-1}\left\{\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}\binom{\nu-\alpha}{\mu}(1-t)^{\mu}\right\}dt$$

и интеграцијом члан по члан добијамо асимптотски развитак за $b_{\nu}(n)$ у облику

$$b_{\nu}(n)=B(\lambda,n+\alpha+1)\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu}\binom{\nu-\alpha}{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}}+o(n^{-\lambda-l}).\tag{4.2.1}$$

Одавде видимо да је задовољен и последњи услов, (3.4.2), става 7, јер су функције $p_{\mu}(\nu)$ у овом случају

$$p_{\mu}(\nu)=\binom{\nu-\alpha}{\mu}(-1)^{\mu},$$

тј. полиноми μ-тог степена по ν, док је

$$\frac{1}{q_{\mu}(n)}=(\lambda)^{(\mu)}\frac{B(\lambda,n+\alpha+1)}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}}.$$

На основу става 8 онда следи да је у $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\varepsilon$ униформно по θ:

$$S_n^{(\lambda)}(\theta)=B(\lambda,n+\alpha+1)\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}}P_{\mu}(\theta)+ +o(n^{-\lambda-l}),\tag{4.2.2}$$

где је

$$P_\mu(\theta) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\nu-\alpha}{\mu} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} r^\nu e^{\nu\theta i}.$$

Израз за $P_\mu(\theta)$ можемо свести на коначан облик. У том циљу полазимо од

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} z^{\nu-\alpha} = z^{-\alpha}(1-z)^{\lambda-1}, \quad z = re^{\theta i}.$$

Диференцирајући μ пута леву и десну страну, налазимо

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu-\alpha)_{(\mu)} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} z^{\nu-\alpha-\mu} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\mu} (-1)^m \binom{\mu}{m} (\alpha)^{(m)} (1-\lambda)^{(\mu-m)} \frac{(1-z)^{\lambda-\mu+m-1}}{z^{\alpha+m}},$$

одакле

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu-\alpha}{\mu} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} z^\nu =$$

$$= \frac{z^\mu (1-z)^{\lambda-\mu-1}}{\mu!} \sum_{m=0}^{\mu} (-1)^m \binom{\mu}{m} (\alpha)^{(m)} (1-\lambda)^{(\mu-m)} (z^{-1}-1)^m =$$

$$= (1-\lambda)^{(\mu)} \frac{z^\mu (1-z)^{\lambda-\mu-1}}{\mu!} \sum_{m=0}^{\mu} \frac{(-\mu)^{(m)} (\alpha)^{(m)}}{(\lambda-\mu)^{(m)} m!} (1-z^{-1})^m =$$

$$= (1-\lambda)^{(\mu)} \frac{z^\mu (1-z)^{\lambda-\mu-1}}{\mu!} F(-\mu, \alpha; \lambda-\mu; 1-z^{-1}).$$

Према томе

$$(4.2.3) \quad P_\mu(\theta) = \frac{(1-\lambda)^{(\mu)}}{\mu!} e^{\mu\theta i} (1-e^{\theta i})^{\lambda-\mu-1} F(-\mu, \alpha; \lambda-\mu; 1-e^{-\theta i}).$$

На основу (4.1.3) и (4.2.2), асимптотски развитак за $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ гласи

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma^2(\lambda)\,n!}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot$$

$$\cdot J\left\{e^{(n+1)\theta i}B(\lambda, n+\alpha+1)\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}}P_{\mu}(\theta)+o(n^{-\lambda-l})\right\}$$

односно, према (4.2.3), униформно за $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2}{\Gamma(\lambda)}\,\frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\lambda+1)}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}\mu!}f_{\mu}^{(\lambda)}(\theta)+o(n^{\lambda-l-1}). \tag{4.2.4}$$

где смо ставили

$$f_{\mu}^{(\lambda)}(\theta)=J\left\{\frac{e^{(n+2\mu+1)\theta i}}{(1-e^{2\theta i})^{\mu-\lambda+1}}F(-\mu,\alpha;\lambda-\mu;1-e^{-2\theta i})\right\}.$$

Добијени асимптотски развитак важи, засада, само када је $0<\lambda<1$, јер је једино тада низ коефицијената $a_{\nu}, \nu=0, 1, \ldots$, према оном шта је речено у тачки 4.1, тотално монотон. Међутим, није тешко проширити резултат и на случај када је $s<\lambda<s+1$, s цео позитиван број. Наиме, тада је, према (4.1.5), низ a_{ν}, $\nu=s, s+1, \ldots$ тотално монотон, па ред за $S_n^{(\lambda)}(\theta)$ (4.1.4) треба поделити на две суме $\sum\limits_{\nu=0}^{s-1}$ и $\sum\limits_{\nu=s}^{\infty}$, и став применити на другу.

Специјално за $\alpha=0$ асимптотски развитак (4.2.4) своди се на

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2}{B(\lambda,\lambda+n)}\sum_{\mu=0}^{l}\frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{\mu!\,(\lambda+n)^{(\mu+1)}}\,\frac{\cos[(n+\lambda+\mu)\theta-(\lambda+\mu)\pi/2]}{(2\sin\theta)^{\lambda+\mu}}$$
$$+o(n^{\lambda-l-1}).$$

4.3. Други од асимптотских развитака за $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ даје следећи

Став 11. *Нека F означава хипергеометриску функцију и нека је*

$$(x)_{(\nu)}=x(x-1)\ldots(x-\nu+1),\quad (x)_{(0)}=1.$$

Тада је униформно по θ *у размаку* $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\beta+\lambda+1)}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\mu=0}^{l}\frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{\mu!\,(n+\beta)_{(\mu)}}\,g_\mu^{(\lambda)}(\theta)+o\,(n^{\lambda-l-1}),$$

где је

$$g_n^{(\lambda)}(\theta)=J\left\{i\,\frac{e^{[(n+\lambda-\mu)\theta-(\lambda+\mu)\pi/2]i}}{(2\sin\theta)^{\lambda+\mu}}\,F(-\mu,\lambda-\beta-1;\lambda-\mu;\,1-e^{2\theta i})\right\}.$$

Специјално за $\beta=\lambda-1$ *овај асимптотски развитак своди се на познати уопштени Дарбуов асимптотски развитак за ултрасферне полиноме* (Сеге [**23**a, стр. 191, став 8.21.10]).

Доказ. Низ коефицијената $b_\nu(n)$ развићемо по скали $\{(n+\beta)_{(\mu)}\}$. Према (4.1.6) је

$$b_\nu(n)=\int_0^1 t^{\nu+n}(1-t)^{\lambda-1}\,dt=$$

$$=\int_0^1 t^{n+\beta}\left\{1+\frac{1-t}{t}\right\}^{\beta-\nu}(1-t)^{\lambda-1}\,dt=$$

$$=\int_0^1 t^{n+\beta}(1-t)^{\lambda-1}\left\{\sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{\beta-\nu}{\mu}(1-t)^{\mu}\,t^{-\mu}\right\}dt$$

и интеграцијом добијамо за $b_\nu(n)$ асимптотски развитак у облику

$$(4.3.1)\quad b_\nu(n)=B(\lambda,n+\beta+1)\sum_{\mu=0}^{l}\binom{\beta-\nu}{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\beta)_{(\mu)}}+o\,(n^{-\lambda-l}).$$

Са ознакама става 7, овде је

$$\frac{1}{q_\mu(n)}=\frac{B(\lambda,n+\beta+1)}{(n+\beta)_{(\mu)}}(\lambda)^{(\mu)}$$

и

$$p_\mu(\nu)=\binom{\beta-\nu}{\mu},$$

тј. задовољен је и услов (3.4.2) става 7.

Примењујући онда став на $S_n^{(\lambda)}(\theta)$ добијамо

(4.3.2) $$S_n^{(\lambda)}(\theta) = B(\lambda, n+\beta+1) \sum_{\mu=0}^{l} \frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\beta)_{(\mu)}} R_\mu(\theta) + o(n^{-\lambda-l}),$$

униформно за $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \varepsilon$, где смо ставили

$$R_\mu(\theta) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta-\nu}{\mu} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} r^\nu e^{\nu\theta i}.$$

Да бисмо упростили израз за $R_\mu(\theta)$, полазимо од

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} z^{-\nu} = z^{1-\lambda}(z-1)^{\lambda-1},$$

односно

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} z^{\beta-\nu} = z^{\beta-\lambda+1}(z-1)^{\lambda-1}.$$

Диференцирајући μ пута, налазимо

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\beta-\nu)_{(\mu)} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} z^{\beta-\nu-\mu} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\mu} \binom{\mu}{m} (\beta-\lambda+1)_{(m)} (\lambda-1)_{(\mu-m)} \frac{(z-1)^{\lambda-\mu+m}}{z^{\lambda-\beta+m-1}},$$

одакле,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta-\nu}{\mu} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} z^{-\nu} =$$

$$=(-1)^\mu \frac{z^{\mu-\beta}}{\mu!} \sum_{m=0}^{\mu} \binom{\mu}{m} (\lambda-\beta-1)^{(m)} (1-\lambda)^{(\mu-m)} \frac{(z-1)^{\lambda-\mu+m-1}}{z^{\lambda-\beta+m-1}} =$$

$$= \frac{(-1)^\mu}{\mu!} z^{\mu-\beta} \sum_{m=0}^{\mu} \frac{(-\mu)^{(m)}}{m!} (\lambda-\beta-1)^{(m)} \frac{(1-\lambda)^{(\mu)}}{(\lambda-\beta)^{(m)}} \frac{(z-1)^{\lambda-\mu+m-1}}{z^{\lambda-\beta+m-1}} =$$

$$=(-1)^\mu \frac{(1-\lambda)^{(\mu)}}{\mu!} (1-z)^{\lambda-\mu-1} F(-\mu, \lambda-\beta-1; \lambda-\mu; 1-z).$$

Према томе,

$$(4.3.3)\quad R_\mu(\theta) = (-1)^\mu \frac{(1-\lambda)^{(\mu)}}{\mu\,!}(1-e^{\theta i})^{\lambda-\mu-1} F(-\mu, \lambda-\beta-1; \lambda-\mu; 1-e^{\theta i})\,.$$

На основу (4.1.3) и (4.3.2), асимптотски развитак за $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ гласи

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = 2\,\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma^2(\lambda)\,n\,!}\,(2\sin\theta)^{1-2\lambda}.$$

$$\cdot J\left\{B(\lambda, n+\beta+1)\,e^{(n+1)\theta i}\sum_{\mu=0}^{l}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\beta)_{(\mu)}}R_\mu(\theta) + o\,(n^{-\lambda-l})\right\},$$

односно, водећи рачуна о (4.3.3),

$$P_n^{(\lambda)}\cos\theta) = \frac{2}{\Gamma(\lambda)}\,\frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\beta+\lambda+1)}\,(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\,\cdot$$

(4.3.4)

$$\cdot\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^\mu\,\frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{(n+\beta)_{(\mu)}\,\mu\,!}\,g_\mu^{(\lambda)}(\theta) + o\,(n^{\lambda-l-1})$$

униформно за $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$, где је

$$g_\mu^{(\lambda)}(\theta) = J\left\{i\,\frac{e^{[(n+\lambda-\mu)\theta-(\lambda+\mu)\pi/2]}}{(2\sin\theta)^{\lambda+\mu}}F(-\mu, \lambda-\beta-1; \lambda-\mu; 1-e^{2\theta i}\right\}.$$

Специјално за $\beta = \lambda - 1$ асимптотски развитак (4.3.4) своди се на

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = 2\,\frac{(\lambda)^{(n)}}{n\,!}\sum_{\mu=0}^{l}\frac{(\lambda)^{(\mu)}\,(1-\lambda)^{(\mu)}}{(n+\lambda-1)_{(\mu)}\,\mu\,!}\,\frac{\cos\,[(n+\lambda-\mu)\theta-(\lambda+\mu`\pi/2]}{(2\sin\theta)^{\lambda+\mu}} +$$

$$+\, o\,(n^{\lambda-l-1})\,.$$

4.4. Најзад, трећи асимптотски развитак за $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ даје следећи

Став 12. *Нека је* $h_\mu^{(\lambda)}(z)$ *одређено са*

$$e^{(1-\gamma)x}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^\lambda(1-z\,e^x)^{\lambda-1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} h_\mu^{(\lambda)}\,(z)\,\frac{x^\mu}{\mu\,!}\,.$$

Тада је униформно по θ у размаку $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)\,n\,!}\,(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\,.$$

$$\cdot \sum_{\mu=0}^{l} (-1)^{\mu}\,\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{\mu!\,(n+\gamma)^{\mu+\lambda}}\,J\left\{e^{(n+1)\theta i}\,h_{\mu}^{(\lambda)}\,(e^{2\theta i})\right\} + o(n^{\lambda-l-1})\,.$$

Специјално за $\gamma = 0$ *овај асимптотски развитак своди се на развитак Лјувил-Стекловљева типа за ултрасферне полиноме.* (За случај Лежандрових полинома ($\lambda = {}^1/_2$) види Сеге [**23***a*, стр. 205, образац (8.61.7)].)

Доказ. Низ коефицијената $b_\nu(n)$ развићемо по скали $\{(n+\gamma)^{\mu+\lambda}\}$. Према (4.1.6) је

$$b_\nu(n) = \int_0^1 t^{\nu+n}(1-t)^{\lambda-1}\,dt = \int_0^1 t^{n+\gamma}\,\frac{t^{\nu-\gamma}}{(1-t)^{1-\lambda}}\,dt\,,$$

одакле сменом $t \mid e^{-t}$ налазимо

$$b_\nu(n) = \int_0^{\infty} e^{-(n+\gamma)t}\,\frac{e^{-(\nu-\gamma+1)t}}{(1-e^{-t})^{1-\lambda}}\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(n+\gamma)t}\,t^{\lambda-1}\,e^{-(\nu-\gamma+1)t}\left(\frac{t}{1-e^{-t}}\right)^{1-\lambda} dt\,.$$

Ако ставимо

$$F(-t, y) = e^{-yt}\left(\frac{-t}{e^{-t}-1}\right)^{1-\lambda},$$

имаћемо

$$b_\nu(n) = \int_0^{\infty} e^{-(n+\gamma)t}\,t^{\lambda-1}\,F(-t, \nu-\gamma+1)\,dt =$$

$$= \frac{1}{(n+\gamma)^{\lambda}}\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{\lambda-1}\,F\left(-\frac{t}{n+\gamma},\ \nu-\gamma+1\right)dt\,;$$

уводећи полиноме $Q_\mu^{(\lambda)}(y)$ степена μ по y, дефинисане генератрисом

$$(4.4.1) \qquad F(x,y) = e^{yx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{\lambda} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{Q_\mu^{(\lambda)}(y)}{\mu\,!}\,x^{\mu}\,,$$

добијамо

$$b_\nu(n)=\frac{1}{(n+\gamma)^\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\lambda-1}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{Q_\mu^{(\lambda)}(\nu-\gamma+1)}{\mu!}\left(-\frac{t}{n+\gamma}\right)^\mu dt.$$

Интегришући последњи ред члан по члан, налазимо асимптотски развитак за

$$(4.4.2)\qquad b_\nu(n)=\frac{\Gamma(\lambda)}{(n+\gamma)^\lambda}\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^\mu\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{\mu!}\frac{Q_\mu^{(\lambda)}(\nu-\gamma+1)}{(n+\gamma)^\mu}+o\,(n^{-\lambda-l}).$$

Са ознакама става 7 овде је

$$\frac{1}{q_\mu(n)}=\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{\mu!}\,\frac{\Gamma(\lambda)}{(n+\gamma)^{\lambda+\mu}},\quad p_\mu(\nu)=(-1)^\mu Q_\mu^{(\lambda)}(\nu-\gamma+1),$$

па је и услов (3.4.2) става 7 испуњен.

Примењујући онда став на $S_n^{(\lambda)}(\theta)$, добијамо

$$S_n^{(\lambda)}(\theta)=\Gamma(\lambda)\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^\mu\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\gamma)^\mu\mu!}h_\mu^{(\lambda)}(e^{\theta i})+o(n^{-\lambda-l})$$

униформно за $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\varepsilon$, где смо ставили

$$h_\mu^{(\lambda)}(e^{\theta i})=\lim_{r=1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}Q_\mu^{(\lambda)}(\nu-\gamma+1)\,r^\nu e^{\nu\theta i}.$$

Генератрису од $h_\mu^{(\lambda)}(z)$ добићемо ако (4.4.1.) помножимо са $\dfrac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}z^\nu$

$$\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}e^{yx}z^\nu\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^\lambda=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}Q_\mu^{(\lambda)}(y)\,z^\nu}{\nu!\,\mu!}x^\mu,$$

ставимо $y=\nu-\gamma+1$ и саберемо од $\nu=0$ до ∞

$$e^{(1-\gamma)x}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^\lambda\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}(ze^x)^\nu=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}Q_\mu^{(\lambda)}(\nu-\gamma+1)}{\nu!\,\mu!}z^\nu x^\mu,$$

односно

$$e^{(1-\gamma)x}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{\lambda}(1-ze^x)^{\lambda-1}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{h_\mu^{(\lambda)}(z)}{\mu!}x^{\mu}. \tag{4.4.3}$$

Према томе, асимптотски развитак за $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ гласи

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)\,n!}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot$$

$$\cdot\, J\left\{e^{(n+1)\theta i}\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\gamma)^{\lambda+\mu}\,\mu!}h_\mu^{(\lambda)}(e^{2\theta i})+o\,(n^{-\lambda-l})\right\},$$

односно, према (4.4.3), униформно за $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$,

$$\begin{aligned}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)&=\frac{2\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)\,n!}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\,.\\ &\cdot\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\gamma)^{\lambda+\mu}\,\mu!}J\{e^{(n+1)\theta i}h_\mu^{(\lambda)}(e^{2\theta i})\}+o\,(n^{\lambda-l-1}),\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

где је $h_\mu^{(\lambda)}(z)$ дато са (4.4.3).

4.5. У овој тачки извешћемо асимптотски развитак $(x\to\infty)$ интеграла

$$Z_\nu(\tau,x)=\int_0^{\infty}e^{i\tau t}\,t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{t}{2x}\right)^{\nu-1/2}dt,\qquad -1/2<\nu<1/2.$$

Са ознакама става 9, овде је

$$\psi(t)=t^{\nu-1/2},\qquad \chi(t;x)=\left(1+\frac{t}{2x}\right)^{\nu-1/2}.$$

Како је за свако цело позитивно k

$$(-1)^k\psi^{(k)}(t)\geqslant 0\quad \text{а}\quad (-1)^k\chi_t^{(k)}(t;x)\geqslant 0\quad \text{и монотоно}\to 0,\quad t\to\infty,$$

то је с једне стране, на основу примедбе I уз став 6, испуњен услов (3.4.10), а с друге стране услов (3.4.15) става 9. Исто тако је лако увидети да је задовољан услов (3.4.14) става 9. Најзад,

$$\int_0^t \chi(u;x)\,du = \frac{2x}{\nu+{}^1/_2}\left\{\left(1+\frac{t}{2x}\right)^{\nu+{}^1/_2}-1\right\} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{l}\binom{\nu-{}^1/_2}{\mu}\frac{t^{\mu+1}}{(\mu+1)(2x)^{\mu}} + o(x^{-l}), \quad x\to\infty,$$

тј. коефицијенти $p_\mu(t)$ су овде полиноми $(\mu+1)$-ог степена. Ако, дакле, применимо став 9 на функција $Z_\nu(\tau, x)$, њен асимптотски развитак биће

$$Z_\nu(\tau,x) = \sum_{\mu=0}^{l}\binom{\nu-{}^1/_2}{\mu}\frac{T_\mu(\tau)}{(\mu+1)(2\lambda)^{\mu}} + o(x^{-l}),$$

где смо ставили

$$T_\mu(\tau) = (\mu+1)\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}\,e^{i\tau t}\,t^{\nu+\mu-{}^1/_2}\,dt.$$

Међутим, како је

$$\int_0^\infty e^{-zt}t^\alpha\,dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}, \quad \alpha>-1, \quad R\{z\}>0,$$

то је

$$T_\mu(\tau) = (\mu+1)\frac{\Gamma(\nu+\mu+{}^1/_2)}{(-i\tau)^{\nu+\mu+{}^1/_2}}, \quad \tau\neq 0.$$

Према томе, асимптотски развитак функције $Z_\nu(\tau, x)$ гласи

$$Z_\nu(\tau,x) = \frac{1}{(-i\tau)^{\nu+{}^1/_2}}\sum_{\mu=0}^{l}\binom{\nu-{}^1/_2}{\mu}\frac{\Gamma(\nu+\mu+{}^1/_2)}{(-2i\tau x)^{\mu}} + o(x^{-l}).$$

Специјално за $\tau=1$ добијамо одавде асимптотски развитак за Ханкелове функције $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, $x\to\infty$. Наиме, за $-{}^1/_2<\nu<{}^1/_2$ [**14**, стр. 28]

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{\Gamma({}^1/_2-\nu)}{i\pi\,\Gamma({}^1/_2)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu[1-e^{-2i\pi(\nu-{}^1/_2)}]\int_1^\infty e^{ixt}(t^2-1)^{\nu-{}^1/_2}\,dt,$$

и сменом $t\,|\,1+t/x$,

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{\Gamma({}^1/_2-\nu)}{i\pi\,\Gamma({}^1/_2)}[1-e^{-2i\pi(\nu-{}^1/_2)}]\frac{e^{ix}}{\sqrt{2x}}Z_\nu(1,x) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left\{\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)i\right\}\sum_{\mu=0}^{k}\frac{(\nu-{}^1/_2)_{(\mu)}(\nu+{}^1/_2)^{(\mu)}}{\mu!\,(-2ix)^{\mu}} +$$

$$+ o(x^{-k-{}^1/_2}).$$

Асимптотски развитак за $H_\nu^{(2)}(x)$ следи одавде ако ставимо $i \mid -i$.

4.6. Примедба II уз став 6 омогућује нам да изведемо Стирлингов образац. Полазимо од

$$\log \Gamma(x) = (x - {}^1/_2) \log x - x + {}^1/_2 \log 2\pi + \rho(x),$$

где је

$$\rho(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) \frac{dt}{t}.$$

Асимптотски развитак за $\log \Gamma(x)$ добићемо из одговарајућег за $\rho(x)$.

Ако $\rho(x)$ напишемо у облику

$$\rho(x) = \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t/x}} - \frac{x}{t} - \frac{1}{2} \right) \frac{dt}{t}, \tag{4.6.1}$$

имаћемо, с ознакама става 9,

$$\sigma = 1, \quad \tau = 0, \quad \psi(t) = \frac{1}{t}, \quad \chi(t; x) = \frac{1}{1-e^{-t/x}} - \frac{x}{t} - \frac{1}{2}.$$

Према примедбама уз став 6, испуњени су услови става 9, јер је $1/t$ тотално монотона функција, а према

$$\left\{ \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right\}^{(k)} =$$

$$= (-1)^k \left(a_1 \frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^2} + a_2 \frac{e^{-2t}}{(1-e^{-2t})^2} + \dots + a_k \frac{e^{-kt}}{(1-e^{-t})^{k+1}} \right) - (-1)^k \frac{k!}{t^{k+1}}$$

те је

$$(-1)^k \left\{ \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right\}^{(k)} \geqslant 0$$

и од извесног t_0, монотоно тежи нули, и то за свако k.

С друге стране, функција $\chi(t; x)$ има асимптотски развитак облика [1])

$$\frac{1}{1-e^{-t/x}} - \frac{x}{t} - \frac{1}{2} = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{B_\mu}{(2\mu)!} \frac{t^{2\mu-1}}{x^{2\mu-1}} + o(x^{-2k+1}), \quad x \to \infty,$$

те је и услов у погледу коефицијената асимптотског развитка од $\chi(t; x)$ задовољен.

[1]) B_μ су Бернулиеви бројеви.

Према ставу 9 и (4.6.1), асимптотски развитак за $\rho(x)$ гласи

$$\rho(x) = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{B_\mu}{(2\mu)!\, x^{2\mu-1}} \int_0^\infty e^{-t} t^{2\mu-2}\, dt + o(x^{-2k+1}) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k} \frac{B_\mu \Gamma(2\mu-1)}{(2\mu)!\, x^{2\mu-1}} + o(x^{-2k+1}) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k} \frac{B_\mu}{(2\mu-1)\, 2\mu} \frac{1}{x^{2\mu-1}} + o(x^{-2k+1}), \quad x \to \infty .$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аљанчић С. — Прилог теорији Гегенбауерових полинома. *Зборник радова Мат. инст. САН* **2** (1952), стр. 113—128.

[2] Barnes E. W. — The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor series. *Phil. Trans.* (A) **206** (1906), str. 249—297.

[3] Carlemann T. — (a) Les fonctions quasi-analytiques, Paris 1926. (b) Développements asymptotiques des solutions d'une classe d'équations différentielles linéaires. *Acta Math.* **43** (1922), str. 319—336.

[4] Cauchy A. — *Comptes rendus* **8**, str. 370.

[5] Darboux G. — Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres. *Journal de Math.* (3) **4** (1878), str. 5—56, 377—416.

[6] Debye P. — *Math. Annalen* **67** (1909).

[7] Doetsch G. — Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung. *Journal für reine und angew. Math.* **167** (1931), str. 274—293.

[8] Ford W. E. — The asymptotic developpments of functions defined by Maclaurin series. Univ. of Michigan Press, 1936.

[9] Haar A. — Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen. *Math. Annalen* **96** (1926), str. 69—107.

[10] Hausdorff F. — Summationsmethoden und Momentfolgen. *Math. Zeitschrift* **9** (1921), str. 74—109, 280—299.

[11] Helly E. — Über lineare Funktionaloperationen. *Wiener Sitzungsberichte* (IIa) **121**, str. 265—297.

[12] Karamata J. — (a) Sur certains développements asymptotiques avec applications aux polynomes de Legendre. *Publ. de l'Institut math. de l'Académie serbe des sciences* **4** (1952), str. 69—88. (b) Теорија и пракса Стилтјесова интеграла, Београд 1949.

[13] Laplace — Suplément à la Mécanique céleste, Paris 1827.

[14] Magnus W. und Oberhettinger F. — Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik, Berlin 1943.

[15] Nevanlinna F. — Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen. *Ann. Acad. Sc. Fennicae* (A) **3** (1916).

[16] Newsom C. V. — Thesis. Univ. of Michigan Press, 1931.

[17] Perron O. — Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen grosser Zahlen. *Münchener Berichte* (1917), str. 191—220.

[18] Poincaré H. — Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. *Acta Math.* **8** (1886), str. 295—344.

[19] Riesz F. — (a) Sur les opérations fonctionnelles linéaires. *Comptes Rendus* (29 novembre 1904). (b) Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales. *Ann. Ec. Norm.* (3) **XXVIII** (1911), str. 33—62. (c) Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires. *Ann. Ec. Norm.* (3) **XXXI** (1914), str. 9—14.

[20] Schmidt H. — (a) Über asymptotische Entwicklungen mit allgemeiner Skala *Jahresber. der Deutschen Math. Ver.* **44** (1934), str. 49—51. (b) Beiträge zu einer Theorie der allgemeinen asymptotischen Darstellungen. *Math. Annalen* **113** (1937), str. 629—656.

[21] Stekloff W. — Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, definies par les équations différentielles linéaires du second ordre, et leur applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les-dites fonctions. *Communications de la Soc. Math. de Kharkow* (2) **10** (1907), str. 97—200.

[22] Stieltjes Th. J. — (a) Recherches sur quelques séries semi-convergentes. *Ann. Ec. Norm.* (3) **3** (1886), str. 201—258. (b) Recherches sur les fractions continues. *Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse* **8** (1894), str. 1—122; **9** (1895), str. 1—47.

[23] Szegö G. — (a) Orthogonal polynomials. *Amer. Math. Soc. Colloqu. Publ.* **XXIII**, 1939. (b) Über gewisse orthogonale Polynome, die zu einer oszillierenden Belegunsfunktion gehören. *Math. Annalen* **110** (1934), str. 501—513. (c) Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome. *Schriften der Königsberger Gesellschaft, naturwiss. Klasse,* **10** (1933), str. 35—112.

[24] Watson G. N. — (a) A theory of asymptotic series. *Trans. of the Royal Soc. of London* (A) **211**, str. 279—313. (b) *Proc. London Math. Soc.* (2) **17** (1918), str. 133.

ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNGEN A-SUMMIERBARER LINEARER FUNKTIONELLEN

SLOBODAN ALJANČIĆ

Es sei F_c der Funktionalraum aller stetigen Funktionen, $f(t) \in F_c$ und $\alpha_n(t)$ von beschränkter Schwankung in $(0, \infty)$. Es ist nicht schwer, durch sukzessive Anwendung des bekannten Rieszschen [19] Satzes, einzusehen, unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen eine vom (nicht notwendig ganzzahligen) Parameter n abhängige lineare Funktionelle

$$(*) \qquad A_n[f] = \int_0^\infty f(t)\, d\alpha_n(t)$$

eine nach allgemeiner Skala $\{q_\mu(n)\}$ fortschreitende asymptotische Entwicklung

$$(**) \qquad A_n[f(t)] \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_\mu}{q_\mu(n)}, \quad n \to \infty,$$

gestatten würde, wenn eine solche ihre Erzeugende $\alpha_n(t)$ besitzt. Da aber hier der Spielraum der Funktionen $f(t)$ ziemlich weit ist — der ganze Funktionalraum F_c — ist dadurch derjenige der Erzeugenden

$\alpha_n(t)$ wesentlich gekürzt. Es sei bloss darauf hingewiesen, dass von der Struktur der Erzeugenden nicht nur die Konvergenz des uneigentlichen Stieltjesschen Integrals (*), sondern auch derjenigen uneigentlichen Integrale welche die Koeffizienten c_μ der asymptotischen Entwicklung (**) bestimmen, abhängt. Deswegen ist es naheliegend, den Begriff der linearen Funktionelle in dem Sinne zu erweitern, dass man nicht nur konvergente, sondern auch A-summierbare Stieltjessche Integrale, d. h. solche bei welchen

$$\mathfrak{A}_n[f] = \lim_{\sigma=0} \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\, d\alpha_n(t)$$

existiert, zulässt. Da in disem Falle von einer ähnlichen Aussage über asymptotische Entwicklung, die notwendige und hinreichende Bedingungen enthalten würde, kaum die Rede sein könnte, begrenzen wir uns hier auf eine spezielle Klasse A-summierbarer linearer Funktionellen und geben gewisse hinreichende Bedingungen für deren asymptotische Entwicklung.

Es sei $\alpha(t)$ von beschränkter Schwankung in $(0, \infty)$. Wir betrachten A-summierbare lineare Funktionellen, bei welchen

$$f(t) = e^{-i\tau t}\, \psi(t), \quad \tau \text{ reeller Parameter,}$$

mit

$$\psi(t) = \int_0^\infty e^{-tu}\, d\alpha(u)$$

ist. Speziell, kann also $\psi(t)$ der Klasse der im Interval $(0, \infty)$ totalmonotonen Funktionen angehören.

Bevor wir zur Formulierung unserer Sätze übergehen, geben wir einige Erklärungen. Es bezeichne $\pi_\mu(t)$ ein Polynom μ-ten Grades und $\omega_\mu(t)$ eine periodische Funktion der Periode $h > 0$. Wir sagen dann, dass $F(t)$ der Klasse Ω_h^m angehöre, wenn es die Form

$$F(t) = \omega_0(t)\, \pi_m(t) + \omega_1(t)\, \pi_{m-1}(t) + \cdots + \omega_m(t)$$

hat. $F(t)$ aus Ω_h^m genügt der Differenzengleichung

$$\Delta_h^{m+1}\, U = 0,$$

wo

$$\Delta_h^k U \text{ für } U(t) - \binom{k}{1} U(t+h) + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} U(t+hk)$$

gesetzt ist.

Es sei $q_\mu(n)$, $\mu = 0, 1, \ldots$ eine Funktionenfolge, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\frac{q_\mu(n)}{q_{\mu+1}(n)} \to 0, \quad n \to \infty \text{ und } q_\mu(n) \neq 0 \; (\mu = 0, 1, \ldots)$$

Wir sagen dann, dass $\{q_\mu(n)\}$ eine allgemeine Skala bildet.

Nun gehen wir zu Sätzen über asymptotische Entwicklung A-summierbarer linearer Funktionellen über. Die Funktion $\varphi(t; \lambda)$ gestatte die asymptotische Entwicklung nach allgemeiner Skala $\{q_\mu(\lambda)\}$:

$$\varphi(t; \lambda) = \frac{p_0(t)}{q_0(\lambda)} + \frac{p_1(t)}{q_1(\lambda)} + \ldots + \frac{p_l(t)}{q_l(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty,$$

wo die Koeffizienten $p_\mu(t)$, $\mu = 0, 1, \ldots, l$ der Klasse Ω_h^m angehören. Dann existieren für $\tau \neq 2s\pi/h$; $s = 0, \pm 1, \ldots$ die Grenzwerte

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} \psi(t)\, d\varphi(t; \lambda) = g(\tau; \lambda),$$

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} \psi(t)\, d p_\mu(t) = P_\mu(\tau), \quad \mu = 0, 1, \ldots, l,$$

und es gilt

$$g(\tau; \lambda) = \frac{P_0(\tau)}{q_0(\lambda)} + \frac{P_1(\tau)}{q_1(\lambda)} + \ldots + \frac{P_l(\tau)}{q_l(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty,$$

gleichmässig in $2s\pi/h + \varepsilon \leqslant \tau \leqslant 2(s+1)\pi/h - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/h$, $s = 0 \pm 1, \ldots$, wenn für ein ganzzahliges $K > m$, entweder

(i) die Schwankung W

$$W_0^\infty \{\Delta_h^K \varphi(t; \lambda)\} = o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty,$$

oder, (ii)

$$W_0^T \{\Delta_h^K \varphi(t; \lambda)\} < \frac{M}{q_l(\lambda)}, \quad M \text{ frei von } \lambda,$$

und für $t \geqslant T$

$$\Delta_h^K \varphi(t; \lambda) \quad \text{monoton} \to 0, \quad t \to \infty.$$

Hieraus folgen, mit zweckmässiger Übertragung unserer Erklärungen, analoge Sätze für Reihen, speziell für A-summierbare trigonometrische Reihen, und für Riemannsche Integrale der Form

$$\lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu(\lambda) r^\nu e^{\nu\theta i}$$

und

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} \psi(t) \chi(t; \lambda)\, dt.$$

Für A-summierbare trigonometrische Reihen bewies bereits Prof. Karamata [**12** *a*] einen diesem Ideenkreis angehörigen Satz, welcher auch für diese Arbeit Anregung gab. Im Falle Riemannscher Integrale, wenn $(-1)^K \chi(t; \lambda)$ eine K-te partielle Ableitung nach t, die $\geqslant 0$ ist und monoton gegen Null strebt, besitzt und die Koeffizienten $p_\mu(t)$ Polynome in t sind, gelten analoge Aussagen und ihr Gültigkeitsbereich besitzt im Endlichen nur $\tau=0$ als Ausnahmestelle.

Die dargestellte Methode der asymptotischen Entwicklung zeichnet sich dadurch aus, dass sie, wenn einmal über ihre Anwendbarkeit entschieden ist, unbegrenzt viele verschiedene asymptotische Entwicklungen einer A-summierbaren linearen Funktionelle liefert. Nämlich, jede asymptotische Eutwicklung der Erzeugenden spiegelt sich in einer der linearen Funktionelle. So z. B. erhielten wir für ultrasphärische Polynome $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$, von ihrer trigonometrischen Darstellung (4.1.1) oder (4.1.2) ausgehend, drei verschiedene asymptotische Entwicklungen ($n\to\infty$). Wenn F die hypergeometrische Funktion bedeutet, α, β, γ Parameter sind und der Kürze halber

$$(x)^{(\nu)}=x(x+1)\dots(x+\nu-1),\quad (x)^{(0)}=1;$$

$$(x)_{(\nu)}=x(x-1)\dots(x-\nu+1),\quad (x)_{(0)}=1;$$

gesetzt wird, so ist gleichmässig in $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$

$$\text{(i)}\quad\left\{\begin{aligned}
P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)&=\frac{2}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\lambda+1)}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot\\
&\quad\cdot\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}\,\mu!}f_\mu^{(\lambda)}(\theta)+o(n^{\lambda-l-1}),\\
f_\mu^{(\lambda)}(\theta)&=\Im\left\{\frac{e^{(n+2\lambda+1)\theta i}}{(1-e^{2\theta i})^{\lambda-\lambda+1}}F(-\mu,\alpha;\lambda-\mu;1-e^{-2\theta i})\right\};
\end{aligned}\right.$$

$$\text{(ii)}\quad\left\{\begin{aligned}
P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)&=\frac{2}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\beta+\lambda+1)}\cdot\\
&\quad\cdot\sum_{\mu=0}^{l}\frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{\mu!\,(n+\beta)_{(\mu)}}g_\mu^{(\lambda)}(\theta)+o(n^{\lambda-l-1}),\\
g_\mu^{(\lambda)}(\theta)&=\Im\left\{i\frac{e^{[(n+\lambda-\mu)\theta-(\lambda+\mu)\pi/2]i}}{(2\sin\theta)^{\lambda+\mu}}F(-\mu,\lambda-\beta-1;\lambda-\mu;1-e^{2\theta i})\right\};
\end{aligned}\right.$$

$$\text{(iii)}\quad\left\{\begin{aligned}
P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)&=\frac{2\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)\,n!}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot\\
&\quad\cdot\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{\mu!\,(n+\gamma)^{\mu+\lambda}}\Im\{e^{(n+1)\theta i}h_\mu^{(\lambda)}(e^{2\theta i})\}+o(n^{\lambda-l-1}),\\
&\text{wobei } h_\mu^{(\lambda)}(z) \text{ durch}\\
&e^{(1-\gamma)x}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{\lambda}(1-z\,e^x)^{\lambda-1}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{h_\mu^{(\lambda)}(z)}{\mu!}x^{\mu}.
\end{aligned}\right.$$

bestimmt ist. Für spezielle Werte der Parameter α, β, γ ($\alpha=0$, $\beta=\lambda-1$, $\gamma=0$) gehen diese Entwicklungen in bereits bekannte (s. Szegö [23 *a*], S. 191 und 206) über.

Als Beispiel asymptotischer Entwicklung A-summierbarer Riemannscher Integrale, führen wir die Entwicklung der Funktion

$$Z_\nu(\tau, x) = \int_0^\infty e^{i\tau t}\, t^{\nu-1/2} \left(1+\frac{t}{2x}\right)^{\nu-1/2} dt, \quad -1/2 < \nu < 1/2,$$

an. Es ist

$$Z_\nu(\tau, x) = (-i\tau)^{-\nu-1/2} \sum_{\mu=0}^{l} \binom{\nu-1/2}{\mu} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1/2)}{(-2i\tau x)^\mu} + o(x^{-l}), \quad x\to\infty,$$

gleichmässig für $|\tau| \geqslant \varepsilon > 0$, woraus für $\tau=1$ und $-1/2 < \nu < 1/2$ die bekannte asymptotische Entwicklung der Hankelschen Funktion $H_\nu^{(1)}(x)$ folgt.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

РАНКО БОЈАНИЋ

АСИМПТОТИКА РЕШЕЊА ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

— ТЕЗА —

УВОД

0.1 Класични проблем малих осцилација еластичне мембране састоји се у томе да се у извесној области S, x, y-равни нађу решења једначине

$$\Delta u + \lambda u = 0, \tag{0.1}$$

која на рубу S' посматране области у најједноставнијем случају задовољавају гранични услов

$$u = 0.$$

Као што је познато, таква решења постоје само за специјалне вредности параметра λ или, другим речима, једначина (0.1) има решења која нису идентички једнака нули у области S само кад је λ такозвана сопствена вредност. Свакој сопственој вредности одговара највише коначно много сопствених функција, односно решења посматраног граничног задатка.

Велики број проблема механике и физике, нарочито оних у вези са осцилацијама, своди се на решавање сличних граничних задатака. Са математичке тачке гледишта сваки такав проблем је или проблем егзистенције или проблем процене сопствених вредности и сопствених функција неког граничног задатка.

Проблемима егзистенције сопствених вредности и сопствених функција граничних задатака парцијалних диференцијалних једначина бавили су се многи математичари. Ти проблеми у радовима Римана, Шварца, Поенкареа и нарочито Хилберта заузимају централно место. Међутим тек почетком овог века могло се прићи проблему њихове асимптотске процене који је са гледишта механике и физике од далеко већег значаја. Физичари H. A. Lorenz [1] и A. Sommerfeld [2] први су дошли до закључка да довољно велике сопствене вредности мембране која трепери не зависе од облика мембране већ само од њене површине. Непосредно затим је H. Weyl [3], на основу теорије линеарних интегралних једначина, доказао да је

$$N(t) \sim \frac{S}{4\pi} t, \quad t \to \infty,$$

где је $N(t)$ број сопствених вредности које су мање од t, а S површина посматране мембране, што је показало да су претпоставке физичара биле тачне. R. Courant [4, стр. 321—380] је касније, помоћу варијационог рачуна, добио много прецизније резултате. Специјално, у случају мембране која трепери он је доказао да је

$$N(t) = \frac{S}{4\pi} t + O(\sqrt{t} \lg t), \quad t \to \infty.$$

0.2 Међутим, за физичара значајнији, а и са гледишта теориске математике дубљи и тежи проблем асимптотског понашања сопствених функција подухватили су тек тридесетих година овог века A. Hammerstein [5] и нарочито T. Carleman [6]. Док је Хамерштајн, служећи се теоријом линеарних интегралних једначина, испитивао понашање сопствених функција за велике вредности индекса n, дотле је Карлеман дао један потпуно нов и оригиналан метод за испитивање асимптотског понашања суме квадрата сопствених функција који се састоји у следећем.

Нека је S коначна и отворена област x, y-равни, S' њен руб и нека су $\{\lambda_n\}$ сопствене вредности, а $\{\Phi_n(P)\}$ одговарајуће ортонормиране сопствене функције граничног задатка

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad P \in S,$$
$$u = 0, \quad P \in S'.$$

Ако са $G(P, Q; \lambda)$ означимо Гринову функцију овог граничног задатка, а са $G(P, Q)$ Гринову функцију граничног задатка

$$\Delta u = 0, \quad P \in S,$$
$$u = 0, \quad P \in S'$$

тада је, као што је познато,

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n + \lambda)} = G(P, Q) - G(P, Q; -\lambda).$$

Овај образац био је основа на којој је Карлеман изградио свој поступак за процену суме квадрата сопствених функција. Он је најпре доказао да је

$$(0.2)\qquad \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)} = \frac{1}{4\pi} \lg \lambda + b + O(e^{-c\sqrt{\lambda}}), \quad \lambda \to \infty,$$

где су b и $c>0$ константе које не зависе од λ. Доказ овог обрасца своди се очевидно на процену асимптотског понашања функције $G(P, Q; -\lambda)$ кад $\lambda \to \infty$, а почива на елементарним особинама Гринове функције. Како је, наиме,

$$G(P, Q; -\lambda) = \frac{1}{2\pi} K_0(r_{PQ}\sqrt{\lambda}) - H(P, Q; -\lambda),$$

где је

$$K_0(r_{PQ}\sqrt{\lambda}) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ} t}}{\sqrt{t^2-1}} dt,$$

а $H(P, Q; -\lambda)$ регуларно решење једначине

$$(0.3)\qquad \Delta u - \lambda u = 0$$

које на рубу S' задовољава услов

$$(0.4)\qquad H(P, Q; -\lambda) = \frac{1}{2\pi} K_0(r_{PQ}\sqrt{\lambda}), \quad P \in S',$$

и слично томе

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \lg \frac{1}{r_{PQ}} - H(P, Q),$$

то је

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{P=Q} \left\{ \lg \frac{1}{r_{PQ}} - K_0(r_{PQ}\sqrt{\lambda}) \right\} - H(Q, Q) + H(Q, Q; -\lambda) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \lg \lambda + \gamma - \lg 2 - H(Q, Q) + H(Q, Q; -\lambda),$$

где је γ Ајлерова константа. На основу Парафовог става свако решење једначине (0.3) достиже своју најмању, односно највећу вредност на рубу S'. Стога је, према (0.4), за утврђено Q и произвољно $P \in S$

$$|H(P, Q; -\lambda)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \operatorname*{Max}_{P \in S'} K_0(r_{PQ}\sqrt{\lambda}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} K_0(l_Q \sqrt{\lambda}),$$

где је l_Q најкраће отстојање тачке Q од руба S'. Специјално за $P=Q$ је

$$|H(Q, Q; -\lambda)| \leqslant \frac{1}{2\pi} K_0(l_Q\sqrt{\lambda}) = O(e^{-l_Q\sqrt{\lambda}}), \quad \lambda \to \infty,$$

а одатле непосредно следи (0.2).

Други део Карлемановог поступка састоји се у примени ставова Тауберове природе помоћу којих се коначно добија процена асимптотског понашања суме квадрата сопствених функција. Наиме, из обрасца (0.2) следи да је функција

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^2(Q)\lambda_n^{-s}$$

регуларна у целој равни осим у тачки $s=1$, где има пол првог реда са резидуумом $1/4\pi$, а одатле на основу познатог Икехариног става следи да је

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) \sim \frac{1}{4\pi}\lambda, \quad \lambda \to \infty. \tag{0.5}$$

0.3 На овај Карлеманов рад надовезао се низ радова A. Pleijel-a [7] и S. Minakshisundaram-a [8] који су се бавили углавном генерализацијама Карлеманових резултата. Плејел и Минакшисундарам, који је независно од Карлемана дошао од сличних резултата, проширили су Карлеманов метод на општије класе парцијалних диференцијалних једначина елиптичног типа, добијајући на тај начин као и Карлеман, прву апроксимацију за асимптотско понашање суме квадрата сопствених функција посматраног граничног задатка. Овим испитивањима биле су обухваћене парцијалне диференцијалне једначине вишег степена, парцијалне диференцијалне једначине поларног типа, као и једначине малих осцилација у Римановим просторима, где Белтрамијев оператор игра ону улогу коју у Еуклидовом простору игра Лапласов оператор.

Из радова Карлемана, Плејела и Минакшисундарама произлази да је за добијање прве апроксимације асимптотског понашања суме квадрата сопствених функција довољна процена потенцијалног типа за Гринову функцију. Међутим, познато је да Гринова функција опада експоненцијалном брзином кад $\lambda \to \infty$, што се не искоришћава у потпуности ни код једног става Тауберове природе кога они употребљавају. Јасно је према томе да је за добијање прецизнијих резултата био потребан један нов став Тауберове природе. Тај проблем подухватио је још T. Carleman [6] и он је дао један став те врсте, али је тек В. Г. Авакумовић [9,] дао став који је стварно омогућио да се експоненцијална процена Гринове функције у потпуности искористи. Његов став гласи:

Нека је $S(u)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека интеграл

$$f(x) = x \int_0^\infty \frac{dS(u)}{u+x}$$

конвергира за једно па према томе за свако $x > 0$. *Тада из*

$$f(x) = O(e^{-c\sqrt{x}}), \quad x \to \infty, \quad c > 0,$$

и услова конвергенције

$$\sqrt{u}\ \{S(v) - S(u)\} \geqslant -m, \quad u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u}$$

следи

$$S(u) = O(1/\sqrt{u}), \quad u \to \infty.$$

Применом овог става код дводимензионалног проблема уместо (0.5) Авакумовић је добио

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) = \frac{1}{4\pi}\lambda + O(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \to \infty,$$

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n(P)\,\Phi_n(Q) = O(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \to \infty.$$

0.4 (i) Побољшавајући с једне стране Плејелов поступак за процену регуларног дела Гринове функције који се заснива на варијационом рачуну, а с друге стране уопштавајући поменути Авакумовићев став Тауберове природе, В. Вучковић и аутор [10] показали су да се и код граничног задатка малих осцилација еластичне плоче може добити друга апроксимација асимптотског понашања суме квадрата сопствених функција, као и прецизна процена асимптотског понашања суме производа сопствених функција.

Међутим при покушају да се на тај начин добију слични резултати за суме сопствених функција уопштеног граничног задатка малих осцилација k-димензионалног континуума

$$\Delta_k u - A(P)\,u + \lambda u = 0, \quad P \in S,$$

$$u = 0, \quad P \in S',$$

где је Δ_k k-димензионални Лапласов оператор и где S претставља отворену и ограничену област k-димензионалног простора, а S' њен руб, наилази се како на принципијелне тако и на техничке тешкоће. За процену регуларног дела Гринове функције могу се и овде применити ставови аналогни Парафовом ставу, али се тешкоћа састоји у томе што се не зна експлицитно сингуларни део Гринове функције који је у општем случају решење једне нехомогене линеарне интегралне једначине Фредхолмовог типа. Због тога се нарочито код примене ставова Тауберове природе аналогних ставу из тачке **0.3** јављају нови проблеми, као што је на пример проблем претстављања сингуларног дела Гринове функције у облику Стилтјесове трансформације.

(ii) Да би смо што прегледније изложили овај поступак за процену асимптотског понашања суме квадрата и производа сопствених функција уопштеног граничног задатка малих осцилација, задржаћемо се овде на тродимензионалном проблему

$$(A)\qquad \begin{aligned} &\Delta u - A(P)\,u + \lambda u = 0, \quad P \in S \\ &u = 0, \quad P \in S'. \end{aligned}$$

Основни резултати које ћемо овде доказати су

$$(\mathrm{I})\qquad \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) = \frac{1}{6\pi^2}\lambda^{3/2} + O(\lambda), \quad \lambda \to \infty,$$

$$(\mathrm{II})\qquad \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n(P)\,\Phi_n(Q) = O(\lambda), \quad \lambda \to \infty.$$

Специјални случај овог граничног задатка кад је функција $A(P)$ једнака нули посматрао је у својој тези Å. Pleijel [7]. Он је ту поред осталог доказао да је

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) \sim \frac{1}{6\pi^2}\lambda^{3/2}, \quad \lambda \to \infty.$$

В. Г. Авакумовић [9] је касније добио обрасце (I) и (II), али опет у специјалном случају кад је $A(P) = 0$.

(iii) У првој глави у тачки **1.1** даћемо, прегледности ради, дефиницију Гринове функције граничног задатка (A) као и њеног сингуларног и регуларног дела. У тачки **1.2** доказаћемо егзистенцију решења интегралне једначине

$$\Gamma(P, Q; -\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi\, r_{PQ}} - \int_S \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi\, r_{PT}} A(T)\,\Gamma(T, Q; -\lambda)\, dS_T,$$

као и да је то решење сингуларни део Гринове функције. Затим ћемо у тачки **1.3** дати процену асимптотског понашања сингуларног и регуларног дела Гринове функције. У тачки **1.4** доказаћемо да се у довољно малој околини тачке Q функција $\Gamma(P, Q; -\lambda)$ понаша као функција $\Gamma_r(P, Q; -\lambda)$ која је решење једначине

(0.6) $$\Gamma_r(P,Q;-\lambda)=\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PQ}}}{4\pi\,r_{PQ}}-\int\limits_{K(Q;\,r)}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PT}}}{4\pi\,r_{PT}}A(T)\,\Gamma_r(T,Q;-\lambda)\,dS_T,$$

где је $K(Q;r)$ лопта полупречника r са центром у тачки Q; за довољно мало r је $K(Q;r)\subset S$. Другим речима, доказаћемо да је за произвољно $P\in K(Q;r)$

$$\Gamma(P,Q;-\lambda)=\Gamma_r(P,Q;-\lambda)+O\left(e^{-\frac{1}{2}r\sqrt{\lambda}}\right),\quad \lambda\to\infty.$$

Функцију $\Gamma_r(P,Q;-\lambda)$ увели смо зато што се једначина (0.6) може решити сукцесивном апроксимацијом кад је област $K(Q;r)$ довољно мала. То даље омогућава да докажемо да постоји функција $\Omega(Q;u)$ таква да је

$$\int_0^\infty\frac{d\,\Omega(Q;u)}{u+\lambda}=\frac{1}{\lambda}\lim_{P=Q}\left\{\frac{1}{4\pi\,r_{PQ}}-\Gamma_r(P,Q;-\lambda)\right\}$$

и да је

(0.7) $$\Omega(Q;u)=\frac{1}{2\pi^2}\sqrt{u}+O(1),\quad u\to\infty.$$

На основу тога доказаћемо

Став 1. *За утврђено* $Q\in S$ *је*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)}=\frac{1}{\lambda}\lim_{P=Q}\left\{\frac{1}{4\pi\,r_{PQ}}-\Gamma_r(P,Q;-\lambda)\right\}-\frac{1}{\lambda}M(Q)+O\left(e^{-\frac{1}{2}r\sqrt{\lambda}}\right),$$
$$\lambda\to\infty,$$

где је $M(Q)$ *ограничена функција променљиве* Q, *а* $r>0$ *константа која не зависи од* λ. *Осим тога је за* $P\neq Q$

$$\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)}=G(P,Q)+O\left(e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{\lambda}}\right),\quad \lambda\to\infty.$$

где је $c=\min(r_{PQ},l_Q)$.

(iv) У другој глави доказаћемо следећи став Тауберове природе:

Став 2. *Нека је* $S(u)$ *ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека интеграл*

$$f(x)=\int_0^\infty\frac{dS(u)}{u+x}$$

конвергира за једно па према томе за свако $x > 0$. *Тада из услова*

$$(a) \qquad f(x) = O(e^{-c\sqrt{x}}), \quad x \to \infty,$$

где је $c > 0$, *и услова конвергенције*

$$(b) \qquad S(v) - S(u) > -m, \quad u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u}$$

следи

$$S(u) = O(1), \quad u \to \infty.$$

Први ставови ове врсте, као што смо напоменули, потичу од Карлемана и Авакумовића, док је најопштије ставове тог типа дао у својој тези В. Вучковић [11]. Како се међутим и ту случај кад је Стилтјесова трансформација реда $O(e^{-c\sqrt{x}})$ мора засебно посматрати, то ћемо у другој глави, целине ради, дати директан доказ става **2.**

(v) Из ставова **1** и **2** добијају се обрасци (I) и (II) на следећи начин. Ако ставимо

$$E(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} - \Omega(Q; u) + M(Q), \qquad E(0) = 0,$$

тада је, према ставу **1**,

$$\int_0^\infty \frac{dE(u)}{u+\lambda} = O(e^{-\frac{1}{2}r\sqrt{\lambda}}), \quad \lambda \to \infty.$$

Према томе, услов (a) става **2** је задовољен. На основу обрасца (0.7) имамо даље да је за $u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u}$

$$E(v) - E(u) = \sum_{u \leqslant \lambda_n < v} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} - \Omega(Q; v) + \Omega(Q; u) =$$

$$= \sum_{u \leqslant \lambda_n < v} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} - \frac{1}{2\pi^2}(\sqrt{v} - \sqrt{u}) + O(1) \geqslant$$

$$\geqslant - 1/2\pi^2(\sqrt{1 + 1/\sqrt{u}} + 1) + O(1) \geqslant -m.$$

Према томе, и услов конвергенције (b) става **2** је задовољен, па је на основу тога става

$$E(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} - \Omega(Q; u) + M(Q) =$$

$$= O(1), \quad u \to \infty,$$

тј.

$$E^*(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} =$$

$$= \Omega(Q; u) + M(Q) + O(1) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{u} + O(1), \quad u \to \infty.$$

Одавде непосредно следи образац (I), јер је

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) = \int_0^\lambda u \, d E^*(u) =$$

$$= u E^*(u) \Big|_0^\lambda - \int_0^\lambda E^*(u) \, du =$$

$$= \frac{1}{6\pi^2} \lambda^{3/2} + O(\lambda), \quad \lambda \to \infty.$$

Да би смо доказали неједначину (II) ставимо

$$I(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n} - G(P, Q), \quad I(0) = 0.$$

Тада је, према ставу **1**,

$$\int_0^\infty \frac{d\,I(u)}{u+\lambda} = O\left(e^{-{}^1\!/_2 c \sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda \to \infty,$$

тако да је услов (a) става **2** испуњен. Даље, из

$$\{I(v) - I(u)\}^2 = \Big\{ \sum_{u \leqslant \lambda_n < v} \frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n} \Big\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{u \leqslant \lambda_n < v} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n} \sum_{u \leqslant \lambda_n < v} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n}$$

и обрасца (I), који смо мало пре доказали, добијамо да је за $u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u}$

$$I(v) - I(u) = O(1), \quad u \to \infty.$$

Према томе, и услов конвергенције је задовољен, тако да применом става **2** добијамо непосредно неједначину (II).

I ГЛАВА

1.1 Гринова функција $G(P, Q; -\lambda)$. (i) Нека је S коначна и отворена област тродимензионалног Еуклидовог простора са делимично глатким рубом S'. Означимо, као и раније, са $\{\lambda_n\}$ сопствене вредности, а са $\{\Phi_n(P)\}$ одговарајуће ортонормиране функције граничног задатка

$$(A) \qquad \begin{aligned} &\Delta u - A(P)\, u + \lambda u = 0, \quad P \in S \\ &u = 0, \quad P \in S'. \end{aligned}$$

За функцију $A(T)$ претпоставићемо да је позитивна и да је заједно са својим првим изводима непрекидна у области S. Тада су све сопствене вредности граничног задатка (A) позитивне.

Означимо са $G(P, Q; \lambda)$ Гринову функцију овог граничног задатка, а са $G(P, Q)$ Гринову функцију граничног задатка

$$(A^*) \qquad \begin{aligned} &\Delta u - A(P)\, u = 0, \quad P \in S, \\ &u = 0, \quad P \in S'. \end{aligned}$$

Функција $G(P, Q; -\lambda)$ је резолвента језгра $G(P, Q)$ па је према томе

$$(1.1) \qquad \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\, \Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n + \lambda)} = G(P, Q) - G(P, Q; -\lambda).$$

(ii) Нека је Q утврђена, иначе произвољна, тачка области S. Гринова функција $G(P, Q; -\lambda)$ за $P \neq Q$ је решење једначине

$$(1.2) \qquad \Delta u - A(P)\, u - \lambda u = 0$$

које на рубу S' задовољава услов

$$(1.3) \qquad G(P, Q; -\lambda) = 0, \quad P \in S'.$$

Кад $P \to Q$, функција $G(P, Q; -\lambda)$ тежи бесконачности, али тако да је

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varkappa(Q;\varepsilon)} \frac{\partial G(P, Q; -\lambda)}{\partial r}\, dS_{P'} = -1,$$

где је $\varkappa(Q; \varepsilon)$ руб лопте полупречника ε са центром у тачки Q.

На основу ове дефиниције конструисаћемо Гринову функцију $G(P, Q; -\lambda)$ на следећи начин.

Означимо са $\Gamma(P, Q; -\lambda)$ функцију која је за $P \neq Q$ решење једначине (1.2) и која задовољава услов

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varkappa(Q;\varepsilon)} \frac{\partial \Gamma(P, Q; -\lambda)}{\partial r} dS_{P}' = -1. \tag{1.4}$$

Овако дефинисана функција $\Gamma(P, Q; -\lambda)$ зове се елементарно решење једначине (1.2), односно сингуларни део Гринове функције $G(P, Q; -\lambda)$.

Ако ставимо

$$\gamma(P, Q; -\lambda) = \Gamma(P, Q; -\lambda) - G(P, Q; -\lambda), \tag{1.5}$$

тада из претходне дефиниције Гринове функције и њеног сингуларног дела следи да је функција $\gamma(P, Q; -\lambda)$ заједно са своја прва два извода непрекидна у области S и да је решење једначине (1.2) које на рубу области S, с обзиром на (1.3), задовољава услов

$$\gamma(P, Q; -\lambda) = \Gamma(P, Q; -\lambda), \quad P \in S'. \tag{1.6}$$

Функција $\gamma(P, Q; -\lambda)$ зове се регуларни део Гринове функције.

1.2 Егзистенција функција $\Gamma(P, Q; -\lambda)$ и $\gamma(P, Q; -\lambda)$. (i) Доказ егзистенције функције $\Gamma(P, Q; -\lambda)$ коју смо дефинисали у претходној тачки заснива се на следећој леми:

Лема 1.1 *Нека је S произвољна ограничена област тродимензионалног простора. Ако са r_{PQ} означимо растојање тачака P и Q, тада је за произвољну функцију $\varphi(P)$, интеграбилну у области S, и $\sigma \geqslant 0$*

$$\int_S \int_S \frac{e^{-\sigma r_{PQ}}}{r_{PQ}} \varphi(P) \varphi(Q) \, dS_P \, dS_Q \geqslant 0.$$

Доказ. За доказ ове леме потребан нам је познати интеграл [**12**, стр. 195]

$$e^{-\sigma\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\sigma}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(au+bv+cw)}}{(u^2+v^2+w^2+\sigma^2)^2} du \, dv \, dw.$$

Како је $r_{PQ}^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$, то је, према претходном обрасцу,

$$e^{-\sigma r_{PQ}} = \frac{\sigma}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\{(x-\xi)u+(y-\eta)v+(z-\zeta)w\}}}{(u^2+v^2+w^2+\sigma^2)^2}\,du\,dv\,dw\,,$$

па је за $\sigma > 0$

$$I(\sigma) = \int_S\int_S e^{-\sigma r_{PQ}}\varphi(P)\varphi(Q)\,dS_P\,dS_Q =$$

$$=\frac{\sigma}{\pi^2}\int_S\int_S\varphi(P)\varphi(Q)\,dS_P\,dS_Q\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\{(x-\xi)u+(y-\eta)v+(z-\zeta)w\}}}{(u^2+v^2+w^2+\sigma^2)^2}\,du\,dv\,dw=$$

$$=\frac{\sigma}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_S e^{i(xu+yv+zw)}\varphi(P)\,dS_P\right|^2\frac{du\,dv\,dw}{(u^2+v^2+w^2+\sigma^2)^2}\geqslant 0\,.$$

Међутим, из чињенице да је $I(\sigma)\geqslant 0$ за $\sigma\geqslant 0$ следи да је и

$$\int_\sigma^{\sigma'} I(t)\,dt\geqslant 0\,,$$

тј.

$$\int_S\int_S\frac{e^{-\sigma r_{PQ}}}{r_{PQ}}\varphi(P)\varphi(Q)\,dS_P\,dS_Q\geqslant\int_S\int_S\frac{e^{-\sigma' r_{PQ}}}{r_{PQ}}\varphi(P)\varphi(Q)\,dS_P\,dS_Q\,.$$

Кад у овој неједначини пустимо да $\sigma'\to\infty$, добијамо коначно да је

$$\int_S\int_S\frac{e^{-\sigma r_{PQ}}}{r_{PQ}}\varphi(P)\varphi(Q)\,dS_P\,dS_Q\geqslant 0\,,$$

што је требало доказати.

(ii) Ако једноставности ради ставимо

(1.7 $$K(P,Q;-\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}}\sqrt{A(P)A(Q)}\,,$$

тада је на основу претходне леме

$$\int_S\int_S K(P,Q;-\lambda)\varphi(P)\varphi(Q)\,dS_P\,dS_Q\geqslant 0$$

за сваку функцију $\varphi(P)$ која је делимично непрекидна у области S.

Другим речима, језгро $K(P,Q;-\lambda)$ хомогене интегралне једначине

$$(1.8)\qquad u(P;\lambda)=\varkappa\int_S K(P,T;-\lambda)\,u(T;\lambda)\,dS_T$$

је симетрично и позитивно дефинитно за свако $\lambda\geqslant 0$. Одатле непосредно следи да су све сопствене вредности те интегралне једначине позитивне [4, стр. 112]. Према томе, нехомогена интегрална једначина

$$(1.9)\qquad u(P;\lambda)=\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}}\sqrt{A(P)}-\int_S K(P,T;-\lambda)\,u(T;\lambda)\,dS_T$$

на основу Фредхолмових ставова [4, стр. 99] има једно и само једно решење јер $\varkappa=-1$ није сопствена вредност одговарајуће хомогене интегралне једначине (1.8).

Ако у једначини (1.9) ставимо

$$u(P;\lambda)=\sqrt{A(P)}\,\Gamma(P,Q;-\lambda),$$

тада је $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ решење интегралне једначине

$$(1.10)\qquad \Gamma(P,Q;-\lambda)=\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}}-\int_S\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PT}}}{4\pi r_{PT}}A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T.$$

(iii) Да би смо доказали да је $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ сингуларни део Гринове функције $G(P,Q;-\lambda)$, треба према **1.1** (ii) да докажемо 1^0 да у тачки $P=Q$ $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ има сингуларитет карактеристичан за Гринову функцију, тј. да задовољава услов (1.4), и 2^0 да је за $P\neq Q$ функција $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ решење диференцијалне једначине (1.2).

1^0 Ако једначину (1.10) помножимо са $A(P)\,\Gamma(P,Q;-\lambda)$ и интегришемо по P у области S, добићемо

$$\int_S A(T)\,\Gamma^2(T,Q;-\lambda)\,dS_T=$$

$$=\int_S\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{TQ}}}{4\pi r_{TQ}}A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T-$$

$$-\int_S\int_S\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PT}}}{4\pi r_{PT}}A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,A(P)\,\Gamma(P,Q;-\lambda)\,dS_P\,dS_T.$$

Како је, према леми **1.1**, последњи интеграл на десној страни позитиван, то је

$$\int_S A(T)\,\Gamma^2(T,Q;-\lambda)\,dS_T \leqslant$$

$$\leqslant \int_S \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{TQ}}}{4\pi r_{TQ}} A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_S \frac{e^{-2\sqrt{\lambda}\,r_{TQ}}}{(4\pi r_{TQ})^2} A(T)\,dS_T \right\}^{1/2} \left\{ \int_S A(T)\,\Gamma^2(T,Q;-\lambda)\,dS_T \right\}^{1/2},$$

тј.

$$\int_S A(T)\,\Gamma^2(T,Q;-\lambda)\,dS_T \leqslant \int_S \frac{e^{-2\sqrt{\lambda}\,r_{TQ}}}{(4\pi r_{TQ})^2} A(T)\,dS_T.$$

Помоћу ове неједначине доказаћемо најпре да је функција $r_{PQ}\,\Gamma(P,Q;-\lambda)$ ограничена у области S. Једноставности ради ставимо

$$W(P,Q;-\lambda) = \int_S \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T.$$

Тада из претходне неједначине следи да је за $\lambda \geqslant 0$

$$W^2(P,Q;-\lambda) = \left\{ \int_S \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_S \frac{e^{-2\sqrt{\lambda}\,r_{PT}}}{(4\pi r_{PT})^2} A(T)\,dS_T \cdot \int_S A(T)\,\Gamma^2(T,Q;-\lambda)\,dS_T \leqslant$$

$$\leqslant \int_S \frac{e^{-2\sqrt{\lambda}\,r_{PT}}}{(4\pi r_{PT})^2} A(T)\,dS_T \cdot \int_S \frac{e^{-2\sqrt{\lambda}\,r_{TQ}}}{(4\pi r_{TQ})^2} A(T)\,dS_T \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A^2}{(4\pi)^4} \int_S \frac{1}{r_{PT}^2}\,dS_T \cdot \int_S \frac{1}{r_{TQ}^2}\,dS_T,$$

где је $A = \underset{T \in S}{\mathrm{Max}}\, A(T)$.

Означимо са $K(C;r)$ лопту полупречника r са центром у тачки C, а са d пречник најмање лопте која садржи област S. Како је

$$\int_S \frac{1}{r_{CT}^2}\, dS_T \leqslant \int_{K(C;d)} \frac{1}{r_{CT}^2}\, dS_T =$$

$$\leqslant \int_0^d \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = 4\pi d,$$

то је

$$|W(P,Q;-\lambda)| \leqslant \frac{Ad}{4\pi};$$

$W(PQ;-\lambda)$ је према томе ограничена функција промењивих P и Q. У том случају из

$$\Gamma(P,Q;-\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} - W(P,Q;-\lambda) \tag{1.11}$$

следи да је

$$|\Gamma(P,Q;-\lambda)| \leqslant \frac{1}{4\pi r_{PQ}} + \frac{Ad}{4\pi} \leqslant \frac{M'}{r_{PQ}}, \tag{1.12}$$

тј. да је $r_{PQ}\,\Gamma(P,Q;-\lambda)$ ограничена функција промењивих P и Q у области S.

Даље је, с обзиром на (1.12),

$$|W_{x_i}'(P,Q;-\lambda)| = \left| - \int_S \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi r_{PT}^2} (\sqrt{\lambda}\, r_{PT}+1) \frac{x_i - t_i}{r_{PT}} A(T)\Gamma(T,Q;-\lambda) dS_T \right| \leqslant$$

$$\leqslant M'' \int_S \frac{1}{r_{PT}^2 r_{TQ}}\, dS_T.$$

Како је

$$\int_S \frac{1}{r_{PT}^2 r_{TQ}}\, dS_T \leqslant \frac{1}{r_{PQ}} \int_S \frac{r_{PT}+r_{TQ}}{r_{PT}^2 r_{TQ}}\, dS_T =$$

$$\leqslant \frac{1}{r_{PQ}} \int_S \frac{1}{r_{PT} r_{TQ}}\, dS_T + \frac{1}{r_{PQ}} \int_S \frac{1}{r_{PT}^2}\, dS_T \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8\pi d}{r_{PQ}},$$

то је коначно

$$|W_{x_i}'(P,Q;-\lambda)| \leqslant \frac{M}{r_{PQ}}.$$

Према томе је

$$(1.13) \qquad \left| \frac{\partial W(P, Q; -\lambda)}{\partial r} \right| \leqslant \frac{3M}{r_{PQ}}.$$

Из ове неједначине као последицу добијамо да функција $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ задовољава услов (1.4). Наиме, из (1.11) и чињенице да функција $e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PQ}}/4\pi r_{PQ}$ задовољава услов (1.4), следи да је довољно доказати да је

$$\lim_{\varepsilon=0} \int\limits_{\varkappa(Q;\varepsilon)} \frac{\partial W(P,Q;-\lambda)}{\partial r}\, dS_P' = 0.$$

Ово, међутим, непосредно следи из неједначине (1.13). Према томе, функција $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ задовољава услов (1.4).

2° Доказ да је $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ за $P \neq Q$ решење диференцијалне једначине (1.2) је нешто сложенији због тога што функције $e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PQ}}/4\pi r_{PQ}$ и $\Gamma(P,Q;-\lambda)$, као функције од P и Q, нису ограничене у области S.

Нека је $P \neq Q$. Једноставности ради ставимо

$$R(P,Q;-\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}}.$$

Тада је

$$\Gamma(P,Q;-\lambda) = R(P,Q;-\lambda) - \int\limits_S R(P,T;-\lambda)A(T)\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T.$$

Како је

$$(1.14) \qquad R_{x_i}'(P,T;-\lambda) = -R_{t_i}'(P,T;-\lambda),$$

то је

$$\Gamma_{x_i}'(P,Q;-\lambda) = R_{x_i}'(P,Q;-\lambda) + \int\limits_S R_{t_i}'(P,T;-\lambda)A(T)\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T.$$

Парцијалном интеграцијом добијамо

$$\Gamma_{x_i}'(P,Q;-\lambda) = R_{x_i}'(P,Q;-\lambda) +$$

$$+ \int\limits_{S'} R(P,T;-\lambda)\cos(n,t_i)\,A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T' -$$

$$- \int\limits_S R(P,T;-\lambda)\,\{A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\}_{t_i}'\,dS_T,$$

где је (n,t_i) угао који спољашња нормала на рубу S' заклапа са t_i-осом. Поновно диференцирање, с обзиром на (1.14), даје

$$\Gamma_{x_i x_i}''(P,Q;-\lambda) = R_{x_i x_i}''(P,Q;-\lambda) -$$

$$-\int_{S'} R_{t_i}'(P,T;-\lambda)\cos(n,t_i)\,A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T' +$$

$$+\int_{S} R_{t_i}'(P,T;-\lambda)\,\{A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\}_{t_i}'\,dS_T.$$

Сабирањем ових једначина по i од $i=1$ до 3, с обзиром на

$$\Delta R(P,Q;-\lambda) - \lambda R(P,Q;-\lambda) = 0,$$

добијамо

$$\Delta\Gamma(P,Q;-\lambda) = \lambda R(P,Q;-\lambda) -$$

$$-\int_{S'} \frac{\partial R(P,T;-\lambda)}{\partial n}\,A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T' +$$

(1.15)

$$+\int_{S}\sum_{i=1}^{3} R_{t_i}'(P,T;-\lambda)\,\{A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\}_{t_i}'\,dS_T,$$

где је $\partial/\partial n$ извод у правцу спољашње нормале на рубу S'.

Означимо са S^* област која се добија из области S исецањем две лопте полупречника ε са центром у тачкама P и Q. Руб тих лопти означимо са $\varkappa(P;\varepsilon)$, односно $\varkappa(Q;\varepsilon)$. Тада је

$$I = \int_{S}\sum_{i=1}^{3} R_{t_i}'(P,T;-\lambda)\,\{A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\}_{t_i}'\,dS_T =$$

$$= \lim_{\varepsilon=0}\int_{S^*}\sum_{i=1}^{3} R_{t_i}'(P,T;-\lambda)\,\{A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\}_{t_i}'\,dS_T.$$

На последњи интеграл можемо применити Гринов образац

$$\int_{S^*}\sum_{i=1}^{3} U_{t_i}'\,V_{t_i}'\,dS_T = -\int_{S^*} U\Delta V\,dS_T + \int_{S^{*\prime}} U\,\frac{\partial V}{\partial n}\,dS_T',$$

јер су подинтегралне функције као и њихови изводи непрекидни у области S^*. На тај начин добијамо да је

$$I = -\lambda \int_S R(P,T;-\lambda)\, A(T)\, \Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T +$$

$$+ \int_{S'} \frac{\partial R(P,T;-\lambda)}{\partial n} A(T)\, \Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T' -$$

$$- \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_{\varkappa(P;\varepsilon)} + \int_{\varkappa(Q;\varepsilon)} \right\} \frac{\partial R(P,T;-\lambda)}{\partial n} A(T)\Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T'.$$

Из чињенице да функција $R(P,Q;-\lambda)$ задовољава услов (1.4), као и да се према (1.11) $\Gamma(T,Q;-\lambda)$ понаша као $1/4\pi r_{TQ}$ кад $T \to Q$, следи да је

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varkappa(P;\varepsilon)} \frac{\partial R(P,T;-\lambda)}{\partial n} A(T)\Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T' = -A(P)\Gamma(P,Q;-\lambda)$$

и

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varkappa(Q;\varepsilon)} \frac{\partial R(P,T;-\lambda)}{\partial n} A(T)\, \Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T' = 0,$$

па се за I коначно добија

$$I = -\lambda \int_S R(P,T;-\lambda)\, A(T)\, \Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T +$$

$$+ \int_{S'} \frac{\partial R(P,T;-\lambda)}{\partial n} A(T)\Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T' + A(P)\Gamma(P,Q;-\lambda).$$

Кад ову вредност за I унесемо у једначину (1.15), она постаје

$$\Delta\Gamma(P,Q;-\lambda) - A(P)\, I(P,Q;-\lambda) =$$

$$= \lambda \{ R(P,Q;-\lambda) - \int_S R(P,T;-\lambda)\, A(T)\, \Gamma(T,Q;-\lambda) dS_T \},$$

тј.

$$\Delta\Gamma(P,Q;-\lambda) - A(P)\Gamma(P,Q;-\lambda) - \lambda\Gamma(P,Q;-\lambda) = 0.$$

Тиме смо доказали да је $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ сингуларни део Гринове функције $G(P,Q;-\lambda)$.

(iv) Регуларни део $\gamma(P, Q; -\lambda)$ Гринове функције према тачки 1.1 (ii) је решење једначине (1.2) које на рубу S' задовољава услов (1.6). Функција $\gamma(P, Q; -\lambda)$ је према томе решење једног нехомогеног граничног задатка, а егзистенција решења непосредно следи из чињенице да одговарајући хомогени гранични задатак нема решења.

(v) На исти начин као у претходним тачкама може се показати да је сингуларни део Гринове функције $G(P, Q)$ граничног задатка (A*) решење интегралне једначине

$$\Gamma(P,Q) = \frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \int_S \frac{1}{4\pi r_{PT}} A(T)\,\Gamma(T,Q)\,dS_T$$

коју добијамо из (1.10) за $\lambda = 0$. Регуларни део $\gamma(P, Q)$ је решење једначине

$$\Delta u - A(P)\,u = 0$$

које на рубу S' задовољава услов

$$\gamma(P, Q) = \Gamma(P, Q), \quad P \in S'.$$

Према томе је

$$G(P, Q) = \Gamma(P, Q) - \gamma(P, Q) \tag{1.5*}$$

1.3 Процена асимптотског понашања функција $\Gamma(P,Q; -\lambda)$ **и** $\gamma(P, Q; -\lambda)$. (i) За испитивање асимптотског понашања функције $\Gamma(P, Q; -\lambda)$ за велике вредности параметра λ потребна нам је

Лема 1.2 *За* $\alpha \geqslant 0$ *је*

$$\int_S \frac{e^{-\alpha r_{PQ}}}{r_{PT}\, r_{TQ}}\, dS_T \leqslant \frac{4\pi}{\alpha}\left\{\frac{1 - e^{-\alpha r_{PQ}}}{\alpha\, r_{PQ}} - e^{-\alpha d}\right\};$$

специјално за $\alpha = 0$ *је*

$$\int_S \frac{1}{r_{PT}\, r_{TQ}}\, dS_T \leqslant 4\pi\,(2d - r_{PQ}),$$

где је d *пречник најмање лопте која садржи област* S.

Доказ. Нека је $K(C; r)$ лопта са средиштем у тачки C полупречника r и нека је d пречник најмање лопте која садржи област S. Тада је за свако $P \in S$

$$\int_S \frac{e^{-\alpha r_{PT}}}{r_{PT}\, r_{TQ}}\, dS_T \leqslant \int_{K(P;d)} \frac{e^{-\alpha r_{PT}}}{r_{PT}\, r_{TQ}}\, dS_T = J,$$

јер је $S \subset K(P; d)$. Ставимо почетак координатног система у тачку P, тако да z-оса пролази кроз тачку Q, и краткоће ради $r_{PQ} = l$. Тада је (в. сл. 1)

$$J = \int_0^d \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-\alpha\rho}\rho\cos\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2l\rho\sin\varphi + l^2}}\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^d e^{-\alpha\rho}\rho\, d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2l\rho\sin\varphi + l^2}}.$$

Како је уопште за $a > 0$ и $b > 0$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sqrt{a^2 - 2ab\sin\varphi + b^2}) \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{a^2 - 2ab\sin\varphi + b^2}} = \frac{1}{ab} \int_{|a-b|}^{a+b} f(t)\, dt,$$

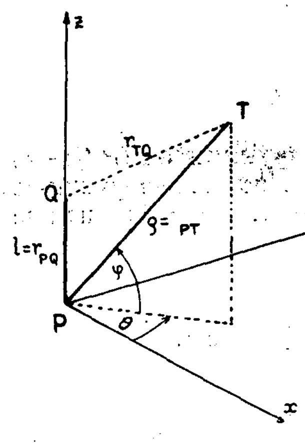
то је

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2l\rho\sin\varphi + l^2}} = \frac{1}{l\rho}(\rho + l - |\rho - l|),$$

па је

$$J = \frac{2\pi}{l} \int_0^d e^{-\alpha\rho}(\rho + l - |\rho - l|)\, d\rho =$$

$$= 4\pi\left\{\frac{1}{l}\int_0^l e^{-\alpha\rho}\rho\, d\rho + \int_l^d e^{-\alpha\rho}\, d\rho\right\},$$



Сл. 1.

тј.

$$J = \frac{4\pi}{\alpha}\left\{\frac{1 - e^{-\alpha r_{PQ}}}{\alpha r_{PQ}} - e^{-\alpha d}\right\}.$$

Друга неједначина доказује се на исти начин.

Лема 1.3 *За* $\lambda \geqslant \lambda_0$ *је*

$$|\Gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant \frac{1}{2\pi r_{PQ}} e^{-1/2\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}. \tag{1.16}$$

Доказ. Функција $r_{PQ}\Gamma(P, Q; -\lambda)$ је према (1.12) ограничена функција променљивих P и Q у области S. За утврђено Q и

$\lambda > 0$ нека је

$$M = \operatorname*{Max}_{P \in S} |4\pi r_{PQ} e^{1/2\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}} \Gamma(P,Q;-\lambda)|.$$

Тада из (1.10) и $0 \leqslant A(T) \leqslant A$ добијамо да је

$$|4\pi r_{PQ} e^{1/2\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}} \Gamma(P,Q;-\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-1/2\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}} + \frac{MA}{4\pi} r_{PQ} e^{1/2\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}} \int_S \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,(r_{PT} + 1/2 r_{TQ})}}{r_{PT}\, r_{TQ}} dS_T \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{MA}{4\pi} r_{PQ} \int_S \frac{e^{-1/2\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{r_{PT}\, r_{TQ}} dS_T,$$

јер је $r_{PT} + r_{TQ} \geqslant r_{PQ}$. Интеграл на десној страни можемо мајорирати помоћу претходне леме. На тај начин добијамо да је

$$|4\pi r_{PQ} e^{1/2\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}} \Gamma(P,Q;-\lambda)| \leqslant 1 + \frac{4MA}{\lambda}.$$

Ова неједначина важи за свако $P \in S$, па је према томе и

$$M \leqslant 1 + \frac{4MA}{\lambda}.$$

Изаберимо λ_0 тако да буде $4A \leqslant 1/2\,\lambda_0$. Тада из претходне неједначине непосредно следи да је $M \leqslant 2$ за $\lambda \geqslant \lambda_0$, а тиме је лема очевидно доказана.

(ii) Процена функције $\gamma(P,Q;-\lambda)$ своди се уствари на то да се докаже да решење једначине (1.2) достиже своју екстремну вредност на рубу посматране области S.

Лема 1.4 *За* $\lambda \geqslant \lambda_0$ *и произвољно* $P \in S$ *је*

$$|\gamma(P,Q;-\lambda)| \leqslant \frac{1}{2\pi l_Q} e^{-1/2\sqrt{\lambda}\, l_Q}, \tag{1.17}$$

где је l_Q *најкраће отстојање тачке* Q *од руба* S'.

Доказ. Нека је при утврђеном Q

$$u(P) = \gamma^2(P, Q; -\lambda).$$

Из

$$\Delta u(P) = 2 \sum_{i=1}^{3} \gamma'^2_{x_i}(P, Q; -\lambda) + 2\gamma(P, Q; -\lambda)\Delta\gamma(P, Q; -\lambda)$$

и једначине (1.2) чије је решење функција $\gamma(P,Q;-\lambda)$ следи да је

$$\Delta u(P) = 2\sum_{i=1}^{3} \gamma'^2_{x_i}(P,Q;-\lambda) + 2A(P)\gamma^2(P,Q;-\lambda) + 2\lambda\gamma^2(P,Q;-\lambda) \geqslant 0.$$

То значи да функција $u(P)$ нема екстремума у области S и према томе своју највећу вредност достиже на рубу S', тј.

$$|\gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant \operatorname*{Max}_{P \in S'} |\gamma(P, Q; -\lambda)|.$$

Одавде, с обзиром на (1.6) и (1.16) непосредно следи да је за $\lambda \geqslant \lambda_0$

$$|\gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant \operatorname*{Max}_{P \in S'} |\Gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{Max}_{P \in S'} \frac{1}{2\pi r_{PQ}} e^{-1/2\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi l_Q} e^{-1/2\sqrt{\lambda}\, l_Q},$$

где је l_Q најкраће отстојање тачке Q од руба S'. Тиме је лема доказана.

1.4 Функција $\Gamma_r(P, Q; -\lambda)$. У овој тачки доказаћемо следећу лему:

Лема 1.5 *Нека је* $r = \min(l_Q, 1/\sqrt{A})$, *где је* l_Q *најкраће отстојање тачке* Q *од руба* S', *и* $A = \operatorname{Max} A(T)$. *Тада је за* $P \in K(Q;r)$

$$\Gamma(P, Q; -\lambda) = \Gamma_r(P, Q; -\lambda) + O(e^{-1/2 r\sqrt{\lambda}}), \quad \lambda \to \infty,$$

где је

$$(1.18)\quad \Gamma_r(P, Q; -\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} - \int_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T)\Gamma_r(T, Q; -\lambda)\, dS_T$$

Доказ. Из (1.10) следи да је

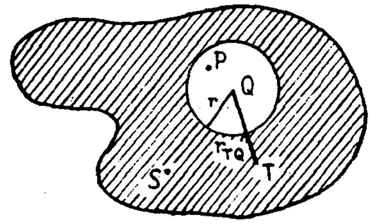
$$\Gamma(P,Q;-\lambda)=\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}}-\left\{\int\limits_{K(Q;r)}+\int\limits_{S^*}\right\}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r_{PT}}}{4\pi r_{PT}}A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T.$$

За $\lambda\geqslant\lambda_0$ према леми **1.3** је

$$|\Gamma(T,Q;-\lambda)|\leqslant\frac{1}{2\pi r_{TQ}}e^{-1/2\sqrt{\lambda}r_{TQ}}.$$

Како је $r_{TQ}\geqslant r$ за $T\in S^*$ (в. сл. 2), то је

$$|\Gamma(T,Q;-\lambda)|\leqslant\frac{1}{2\pi r_{TQ}}e^{-1/2\,r\sqrt{\lambda}},\ T\in S^*,$$



Сл. 2

па је према леми **1.2**

$$\left|\int\limits_{S^*}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r_{PT}}}{4\pi r_{PT}}A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T\right|\leqslant\frac{Ae^{-1/2\,r\sqrt{\lambda}}}{8\pi^2}\int\limits_{S^*}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r_{PT}}}{r_{PT}r_{TQ}}dS_T\leqslant$$

$$\leqslant\frac{Ae^{-1/2\,r\sqrt{\lambda}}}{8\pi^2}\int\limits_{S}\frac{1}{r_{PT}r_{TQ}}dS_T\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A\,d}{\pi}e^{-1/2\,r\sqrt{\lambda}}.$$

Према томе је

$$\begin{aligned}\Gamma(P,Q;-\lambda)&=\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}}+e^{-1/2\,r\sqrt{\lambda}}B(P,Q;-\lambda)-\\&-\int\limits_{K(Q;r)}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r_{PT}}}{4\pi r_{PT}}A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T,\end{aligned}\tag{1.19}$$

где је

$$|B(P,Q;-\lambda)|\leqslant\frac{A\,d}{\pi}.$$

Нека је $P\in K(Q;r)$ и нека је $\Gamma_r(P,Q;-\lambda)$ решење једначине (1.18). Ставимо

$$D(P,Q;-\lambda)=\Gamma(P,Q;-\lambda)-\Gamma_r(P,Q;-\lambda).$$

Тада из (1.18) и (1.19) следи да је за $\lambda \geqslant \lambda_0$.

$$D(P, Q; -\lambda) = e^{-1/2 r \sqrt{\lambda}} B(P, Q; -\lambda) -$$

$$- \int\limits_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda} r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T) D(T, Q; -\lambda) dS_T.$$

Нека је

$$M = \max_{P \in K(Q;r)} |D(P, Q; -\lambda)|.$$

Тада из претходне једначине добијамо да је

$$|D(P, Q; -\lambda)| \leqslant \frac{A d}{\pi} e^{-1/2 r \sqrt{\lambda}} + \frac{A M}{4\pi} \int\limits_{K(Q;r)} \frac{1}{r_{PT}} dS_T \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A d}{\pi} e^{-1/2 r \sqrt{\lambda}} + \frac{A M r^2}{2},$$

јер је за $P \in K(Q; r)$

$$\int\limits_{K(Q;r)} \frac{1}{r_{PT}} dS_T = 2\pi \left(r^2 - \frac{1}{3} r^2_{PQ}\right).$$

Претходна неједначина важи за свако $P \in K(Q; r)$ па је према томе

$$M \leqslant \frac{A d}{\pi} e^{-1/2 r \sqrt{\lambda}} + \frac{A M r^2}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A d}{\pi} e^{-1/2 r \sqrt{\lambda}} + \frac{M}{2},$$

јер је $A r^2 \leqslant 1$, тј.

$$M \leqslant \frac{2 A d}{\pi} e^{-1/2 r \sqrt{\lambda}},$$

а тиме је лема доказана.

1.5 Проблем претстављања. У овој тачки доказаћемо најпре да се једначина (1.18) може решити сукцесивном апроксимацијом, а затим ћемо на основу тога доказати да постоји функција $\Omega(Q; u)$ таква да је

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\Omega(Q; u)}{u + \lambda} = \frac{1}{\lambda} \lim_{P=Q} \left\{\frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P, Q; -\lambda)\right\} \tag{1.20}$$

за коју важи процена

$$\Omega(Q; u) = \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{u} + O(1),\ u \to \infty. \tag{1.21}$$

(i) Нека је

$$u_0(P; \lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}},$$

$$u_1(P; \lambda) = \frac{1}{(4\pi)^2}\int\limits_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(r_{PT}+r_{TQ})}}{r_{PT}\, r_{TQ}}\, dS_T \tag{1.22}$$

. . . .

$$u_n(P; \lambda) =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{n+1}} \underbrace{\int\int\cdots\int}_{n}\limits_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(r_{PT_1}+r_{T_1T_2}+\dots+r_{T_nQ})}}{r_{PT_1}\, r_{T_1T_2}\cdots r_{T_nQ}} A(T_1)\dots A(T_n)\, dS_{T_1}\dots dS_{T_n}.$$

Низ функција $\{u_n(P; \lambda)\}$ дефинисан је рекурентним обрасцем

$$u_0(P; \lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} \tag{1.23}$$

$$u_{n+1}(P; \lambda) = \int\limits_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T)\, u_n(T; \lambda)\, dS_T. \tag{1.24}$$

Ако за утврђено Q и неко λ ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n(P; \lambda)$$

конвергира униформно по P, тада је

$$\Gamma_r(P, Q; -\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n(P; \lambda). \tag{1.25}$$

Заиста, према (1.23), (1.24) и (1.25) је тада

$$\int\limits_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T)\, \Gamma_r(T, Q; -\lambda)\, dS_T = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{n+1}(P; \lambda) =$$

$$= u_0(P; \lambda) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n(P; \lambda) =$$

$$= \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P, Q; -\lambda).$$

(ii) Доказаћемо најпре да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(P;\lambda)$$

конвергира униформно по P ако је област $K(Q;r)$ довољно мала.

Из (1.22) видимо да су све функције $\{u_n(P;\lambda)\}$ позитивне, а из (1.23) и (1.24) следи да је за $\lambda \geqslant 0$

$$u_0(P;\lambda) \leqslant \frac{1}{4\pi r_{PQ}},$$

$$u_{n+1}(P;\lambda) \leqslant \frac{A}{4\pi} \int\limits_{K(Q;r)} \frac{1}{r_{PT}} u_n(T;\lambda)\, dS_T.$$

Ставимо

$$v_0(r_{PQ}) = \frac{1}{4\pi r_{PQ}},$$

(1.26) $$v_{n+1}(r_{PQ}) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{K(Q;r)} \frac{1}{r_{PT}} v_n(r_{TQ})\, dS_T.$$

Тада индукцијом добијамо да је

(1.27) $$u_n(P;\lambda) \leqslant A^n v_n(r_{PQ}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ако даље ставимо $r_{PQ} = l$ и уведемо сферне координате, једначине (1.26) постају

$$v_0(l) = \frac{1}{4\pi l}$$

$$v_{n+1}(l) = \frac{1}{4\pi}\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{v_n(\rho)\,\rho^2 \cos\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2l\rho\sin\varphi + l^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^r v_n(\rho)\,\rho^2\, d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2l\rho\sin\varphi + l^2}} =$$

$$= \frac{1}{l}\int_0^r \frac{\rho + l - |\rho - l|}{2} v_n(\rho)\,\rho\, d\rho, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Коначно, из

$$v_{n+1}(l) = \frac{1}{l}\int_0^l v_n(\rho)\,\rho^2\,d\rho + \int_l^r v_n(\rho)\,\rho\,d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^r v_n(\rho)\,\rho\,d\rho$$

индукцијом добијамо да је

$$v_n(l) \leqslant \frac{1}{2r\pi}\left(\frac{r^2}{2}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Из ове последње неједначине и (1.27) добијамо да је

(1.28) $$u_n(P;\lambda) \leqslant \frac{1}{2\,r\pi}\left(\frac{A\,r^2}{2}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Одавде међутим непосредно следи да ред

$$\sum_{u=1}^{\infty}(-1)^n\,u_n(P;\lambda)$$

конвергира униформно по P за утврђено Q и произвољно $\lambda \geqslant 0$, јер r можемо увек изабрати тако да буде $A\,r^2 < 2$.

(iii) Остало је још да докажемо обрасце (1.20) и (1.21). Нека је

$$u_n^*(Q;u) =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{n+1}}\overbrace{\int\int\ldots\int}^{n}_{K(Q;r)} h\left(r_{QT_1} + r_{T_1T_2} + \ldots + r_{T_nQ}; u\right)\frac{A(T_1)\ldots A(T_n)}{r_{QT_1}r_{T_1T_2}\ldots r_{T_nQ}}\,dS_{T_1}\ldots dS_{T_n}$$

где је

$$h(a;u) = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^u \frac{\sin a\sqrt{t}}{t}\,dt\,.$$

Из $|h(a;u)| \leqslant h$ где константа h не зависи ни од a ни од u, и неједначине (1.28) следи да је

$$|u_n^*(Q;u)| \leqslant \frac{h}{(4\pi)^{n+1}} \overbrace{\int\int\ldots\int}^{n}_{K(Q;r)} \frac{A(T_1)\ldots A(T_n)}{r_{QT_1} r_{T_1T_2} \ldots r_{T_nQ}} dS_{T_1}\ldots dS_{T_n} =$$

$$\leqslant h\, u_n(Q;0) \leqslant \tag{1.29}$$

$$\leqslant \frac{h}{2r\pi}\left(\frac{Ar^2}{2}\right)^n, \quad u = 1, 2, \ldots$$

Према томе ред

$$\frac{1}{2\pi^2}\sqrt{u} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n^*(Q;u) = \Omega(Q;u) \tag{1.30}$$

конвергира униформно по u. За $u = 0$ нека је $\Omega(Q;0) = 0$. Како је даље

$$\int_0^{\infty}\frac{h(a;u)}{(u+\lambda)^2}du = \int_0^{\infty}\left\{1 - \frac{1}{\pi}\int_0^u \frac{\sin a\sqrt{t}}{t}dt\right\}\frac{du}{(u+\lambda)^2} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin a\sqrt{t}}{t}\,\frac{dt}{t+\lambda} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-a\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{1}{\lambda}e^{-a\sqrt{\lambda}},$$

то је најпре, према (1.22)

$$\int_0^{\infty}\frac{u_n^*(Q;u)}{(u+\lambda)^2}du =$$

$$= \frac{1}{\lambda(4\pi)^{n+1}} \overbrace{\int\int\ldots\int}^{n}_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(r_{QT_1}+r_{T_1T_2}+\ldots+r_{T_nQ})}}{r_{QT_1} r_{T_1T_2}\ldots r_{T_nQ}} A(T_1)\ldots A(T_n)\, dS_{T_1}\ldots dS_{T_n} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}u_n(Q;\lambda), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а одатле према (1.30) и (1.25) следи да је

$$\int_0^\infty \frac{\Omega(Q;u)}{(u+\lambda)^2}\,du = \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(Q;\lambda) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\lim_{P=Q}\left\{\frac{1-e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(P;\lambda)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\lim_{P=Q}\left\{\frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P,Q;-\lambda)\right\}.$$

Одавде коначно парцијалном интеграцијом добијамо образац (1.20).

(iv) Из неједначине (1.29) следи да је за произвољно утврђено $Q \in S$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(Q;u) = O(1),\quad u\to\infty,$$

па је према (1.30)

$$\Omega(Q;u) = \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{u} + O(1),\quad u\to\infty.$$

1.6 Доказ става 1. Кад се P налази у близини тачке Q према леми **1.5** је

$$\Gamma(P,Q;-\lambda) = \Gamma_r(P,Q;-\lambda) + O(e^{-1/2\,r\sqrt{\lambda}}),\quad \lambda\to\infty.$$

Како процена (1.17) за $\gamma(P,Q;-\lambda)$ важи за произвољно $P \in S$, то према (1.1) и (1.5) за $P \in K(Q;r)$ имамо да је

$$\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)} = G(P,Q) - \Gamma_r(P,Q;-\lambda) +$$

$$+ O(e^{-1/2\,r\sqrt{\lambda}}) + O(e^{-1/2\,l_Q\sqrt{\lambda}}) =$$

$$= G(P,Q) - \Gamma_r(P,Q;-\lambda) + O(e^{-1/2\,r\sqrt{\lambda}}),\quad \lambda\to\infty,$$

јер је $l_Q \geqslant r$. Даље, из (1.5*),

$$\Gamma(P,Q) = \frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \int_S \frac{1}{4\pi r_{PT}}\,A(T)\,\Gamma(T,Q)\,dS_T$$

и претходног обрасца следи да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)} = \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P, Q; -\lambda)\right\} - \frac{1}{\lambda} M(P, Q) +$$

$$+ O(e^{-1/2 r\sqrt{\lambda}}),\ \lambda \to \infty,$$

где смо једноставности ради ставили

$$M(P, Q) = \int_S \frac{1}{4\pi r_{PT}} A(T)\,\Gamma(T,Q)\,dS_T + \gamma(P, Q).$$

$M(P, Q)$ је очевидно непрекидна функција променљивих P и Q. Према томе, кад $P \to Q$ добијамо да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \lim_{P=Q}\left\{\frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P, Q; -\lambda)\right\} - \frac{1}{\lambda} M(Q) +$$

$$+ O(e^{-1/2 r\sqrt{\lambda}}),\ \lambda \to \infty,$$

где је $M(Q) = M(Q, Q)$. Тиме је прва неједначина става **1** доказана.

Друга неједначина става 1 непосредно следи из обрасца (1.1) и процена (1.16) и (1.17) које смо добили за $\Gamma(P; Q; -\lambda)$ и $\gamma(P, Q; -\lambda)$.

II ГЛАВА

2.1 (i) Овде ћемо доказати став **2** који спада у групу ставова Тауберове природе за Стилтјесову трансформацију која опада експоненцијалном брзином. Доказ става **2** као и докази осталих сличних ставова заснивају се у суштини на једном ставу. J. Карамате **[13]** који у нешто измењеном облику гласи:

Нека је $K(u)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} K(u)\,du$$

конвергира за $R(s) > 0$. Тада из услова конвергенције

$$K(v) - K(u) \geqslant -m,\quad u \leqslant v \leqslant u+1$$

и регуларности функције $F(s)$ *у тачки* $s=0$ *следи*

$$K(u)=O(1),\ u\to\infty.$$

(ii) За доказ става **2** потребне су нам следеће леме.

Лема 2.1 *За* $y>x\geqslant 0$ *из услова конвергенције* (b) *става* **2** *следи да је*

$$S(y)-S(x)\geqslant -m-m_1(\sqrt{y}-\sqrt{x}). \tag{2.1}$$

Доказ. Нека је $1<\mu<e$ и

$$\alpha(x)=e^{\sqrt{x}},\quad \beta(x)=\lg^2 x.$$

Тада је

$$\beta[\mu\,\alpha(x)]\leqslant x+\sqrt{x}.$$

Према томе је

$$S(x')-S(x)\geqslant -m,\quad x\leqslant x'\leqslant\beta[\mu\,\alpha(x)]. \tag{2.2}$$

Нека је $y>x$ и

$$x_0=x$$

$$x_\nu=\beta[\mu\,\alpha(x_{\nu-1})]=\beta[\mu^\nu\alpha(x)],\ \nu=1,2,\ldots,n.$$

Број n изабраћемо тако да буде $x_n<y\leqslant x_{n+1}$. Из неједначине (2.2) следи

$$S(x_\nu)-S(x_{\nu-1})>-m,\quad \nu=1,2,\ldots,n-1,$$

$$S(y)-S(x_n)>-m.$$

Ове неједначине, кад их саберемо, дају

$$S(y)-S(x)>-m-n\,m.$$

Како је међутим $x_n<y$, тј. $n<(\sqrt{y}-\sqrt{x})/\lg\mu$, то је

$$-n\,m>-\frac{m}{\lg\mu}(\sqrt{y}-\sqrt{x}),$$

одакле непосредно следи (2.1).

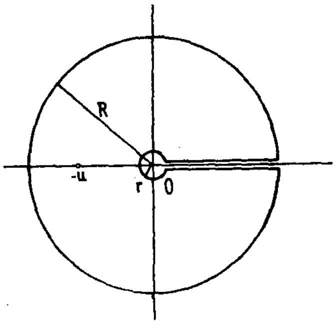
Лема 2.2 *Нека су* δ, ν, s *и* u *позитивни бројеви и нека је* $\nu\delta<s$. *Тада је*

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^\nu\frac{\sin s\sqrt{x}}{x+u}\,dx=\pi e^{-s\sqrt{u}}\left(\frac{\operatorname{sh}\delta\sqrt{u}}{\delta\sqrt{u}}\right)^\nu. \tag{2.3}$$

Доказ. Нека је

$$f(z) = \left(\frac{\sin\delta\sqrt{z}}{\delta\sqrt{z}}\right)^{\nu} e^{siz}.$$

Ако са C означимо контуру приказану на сл. 3, према Кошиевом ставу биће



Сл. 3

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Ставимо овде $z = ue^{i\pi}$. Тада је

$$f(-u) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w+u}\,dw,$$

или

$$2\pi i\left(\frac{\operatorname{sh}\delta\sqrt{u}}{\delta\sqrt{u}}\right)^{\nu} e^{-s\sqrt{u}} = \int_r^R \left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{\nu} \frac{e^{si\sqrt{x}}}{x+u}\,dx +$$

$$+\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\delta\sqrt{R}\,e^{ti/2}}{\delta\sqrt{R}\,e^{ti/2}}\right)^{\nu}\frac{e^{si\sqrt{R}\,e^{ti/2}}}{Re^{ti}+u}\,Rie^{ti}\,dt +$$

$$+\int_R^r\left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{\nu}\frac{e^{-si\sqrt{x}}}{x+u}\,dx -$$

$$-\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\delta\sqrt{r}\,e^{ti/2}}{\delta\sqrt{r}\,e^{ti/2}}\right)^{\nu}\frac{e^{si\sqrt{r}\,e^{ti/2}}}{re^{ti}+u}\,rie^{ti}\,dt,$$

тј.

$$\left(\frac{\operatorname{sh}\delta\sqrt{u}}{\delta\sqrt{u}}\right)^{\nu} e^{-s\sqrt{u}} = \int_r^R\left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{\nu}\frac{\sin s\sqrt{x}}{x+u}\,dx + I_1 + I_2. \tag{2.4}$$

Како је за произвољно комплексно z увек

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leqslant 2\,e^{|z|},$$

то је најпре

$$|I_1| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\delta\sqrt{R}\,e^{ti/2}}{\delta\sqrt{R}\,e^{ti/2}}\right)^{\nu}\frac{e^{si\sqrt{R}\,e^{ti/2}}}{R\,e^{ti}+u}R\,i\,e^{ti}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-(s-\delta\nu)\sqrt{R}\sin\frac{t}{2}}}{\sqrt{R^2+2Ru\cos t+u^2}}\,dt \to 0, \quad R\to\infty,$$

јер је $\delta\nu < s$. Даље,

$$|I_2| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\delta\sqrt{r}\,e^{ti/2}}{\delta\sqrt{r}\,e^{ti/2}}\right)^{\nu}\frac{e^{si\sqrt{r}\,e^{ti/2}}}{r\,e^{ti}+u}r\,i\,e^{ti}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-(s-\delta\nu)\sqrt{r}\sin\frac{t}{2}}}{\sqrt{r^2+2\,r\,u\cos t+u^2}}\,dt \to 0, \quad r\to 0.$$

Из ових неједначина и (2.4) непосредно следи (2.3).

Лема 2.3 *Нека је $S(u)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека*

$$f(x) = \int_0^{\infty}\frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du$$

конвергира за једно ūа ūрема ūоме за свако $x > 0$. Ако је

(2.5) $$f(x) = O(1/x^{1+\varepsilon}), \quad x\to\infty, \quad \varepsilon > 0,$$

ūада је

(2.6) $$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\,\frac{\sin s\sqrt{x}}{s}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-su}\,S(u^2)\,du.$$

Доказ ове леме своди се уствари на то да докажемо да је

(2.7) $$\int_0^{\infty}\sin s\sqrt{x}\,dx\int_0^{\infty}\frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du = \int_0^{\infty}S(u)\,du\int_0^{\infty}\frac{\sin s\sqrt{x}}{(x+u)^2}\,dx.$$

Наиме, из

$$\int_0^\infty \frac{\sin s\sqrt{x}}{(x+u)^2}\,dx = \frac{\pi s}{2\sqrt{u}}\,e^{-s\sqrt{u}}$$

и претходног обрасца следи да је

$$\int_0^\infty f(x)\sin s\sqrt{x}\,dx = \pi s\int_0^\infty e^{-s\sqrt{u}}\,S(u)\frac{du}{2\sqrt{u}},$$

одакле сменом $u|u^2$ добијамо (2.6).

1°. Доказаћемо најпре да је за $\delta > 0$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\sin s\sqrt{x}\,dx\int_0^\infty \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du =$$

(2.8)

$$= \int_0^\infty S(u)\,du\int_0^\infty \left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\frac{\sin s\sqrt{x}}{(x+u)^2}\,dx.$$

За коначне R_1 и R_2 је

$$\int_0^{R_1} \left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\sin s\sqrt{x}\,dx\int_0^{R_2} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du =$$

$$= \int_0^{R_2} S(u)\,du\int_0^{R_1} \left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\frac{\sin s\sqrt{x}}{(x+u)^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{R_2} S(u)\,du\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\frac{\sin s\sqrt{x}}{(x+u)^2}\,dx -$$

$$- \int_0^{R_2} S(u)\,du\int_{R_1}^{\infty} \left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\frac{\sin s\sqrt{x}}{(x+u)^2}\,dx.$$

Како је

$$\left|\int_R^\infty \left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\frac{\sin s\sqrt{x}}{(u+x)^2}\,dx\right| \leqslant \int_R^\infty \frac{du}{(u+x)^2} = \frac{1}{u+R},$$

то кад у претходном обрасцу пустимо да $R_1 \to \infty$ добијамо да је

$$\int_0^{R_2} S(u)\,du \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k} \frac{\sin s\sqrt{x}}{(u+x)^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k} \sin s\sqrt{x}\,dx \int_0^{R_2} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du =$$

(2.9)

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k} \sin s\sqrt{x}\,dx \int_0^{\infty} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du -$$

$$- \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k} \sin s\sqrt{x}\,dx \int_{R_2}^{\infty} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du .$$

Нека је, даље,

$$g(u) = \int_0^{u} \frac{S(u)}{(u+1)^2}\,du \quad \text{и} \quad f(x) = \int_0^{\infty} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du .$$

Тада из

$$\int_R^{\infty} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du = f(1) - g(R)\left(\frac{R+1}{R+x}\right)^2 - 2(x-1)\int_R^{\infty} \frac{u+1}{(u+x)^3}\,g(u)\,du$$

и ограничености функције $g(u)$ следи да је

$$\left|\int_R^{\infty} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du\right| \leqslant |f(1) - g(R)|\left(\frac{R+1}{R+x}\right)^2 + \left|1 - \left(\frac{R+1}{R+x}\right)^2\right| |f(1)| +$$

$$+ 2M(x+1)\int_R^{\infty} \frac{u+1}{u^3}\,du \leqslant$$

$$\leqslant |f(1) - g(R)|\left(\frac{R+1}{R}\right)^2 +$$

$$+ 2|f(1)|\frac{x+1}{R} + |f(1)|\frac{x^2+1}{R^2} + 2M(x+1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R^2}\right).$$

За $R > 1$ је

$$\left|\int_R^{\infty} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du\right| \leqslant 4|f(1) - g(R)| + \frac{M'}{R}(x^2 + x + 1).$$

Према томе је за $k \geqslant 4$

$$\left| \int_0^\infty \left(\frac{\sin \delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}} \right) \sin s\sqrt{x}\, dx \int_{R_2}^\infty \frac{S(u)}{(u+x)^2}\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \left(\frac{\sin \delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}} \right)^{2k} dx \left| \int_{R_2}^\infty \frac{S(u)}{(u+x)^2}\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant 4\,|f(1) - g(R_2)| \int_0^\infty \left(\frac{\sin \delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}} \right)^{2k} dx +$$

$$+ \frac{M'}{R_2} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}} \right)^{2k} (x^2 + x + 1)\, dx .$$

Коначно, из (2.9) кад $R_2 \to \infty$, и ове последње неједначине непосредно следи (2.8).

2⁰. Остало је још да докажемо да се у (2.8) гранични прелаз $\delta \to 0$ испред знака интеграла може заменити граничним прелазом $\delta \to 0$ иза знака интеграла. При томе ћемо користити познати Арзела-Лебегов став за несвојствене интеграле у следећем облику:

Нека је $\lim\limits_{\delta=0} F(x, \delta) = F(x)$ *и нека интеграли*

$$\int_0^\infty F(x, \delta)\, dx \quad \text{и} \quad \int_0^\infty F(x)\, dx \tag{2.10}$$

постоје. Ако је за свако $x > 0$ *и* $\delta \geqslant 0$

$$|F(x, \delta)| \leqslant G(x) \tag{2.11}$$

и ако интеграл

$$\int_0^\infty G(x)\, dx \tag{2.12}$$

постоји, тада је

$$\lim_{\delta=0} \int_0^\infty F(x, \delta)\, dx = \int_0^\infty F(x)\, dx .$$

На основу неједначине $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leqslant 1$, која важи за свако реално x, и процене (2.6) за функцију $f(x)$ може се лако показати да су сви услови Арзела-Лебеговог става на левој страни обрасца (2.8) задовољени и да према томе гранични прелаз $\delta\to 0$ испред знака интеграла можемо заменити граничним прелазом $\delta\to 0$ иза знака интеграла.

Да би смо доказали да је то дозвољено и на десној страни обрасца (2.8) ставимо

$$F(u,\delta)=S(u)\int_0^\infty\left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\frac{\sin s\sqrt{x}}{(u+x)^2}\,dx.$$

Из (2.3) диференцирањем по u добијамо да је

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\frac{\sin s\sqrt{x}}{(u+x)^2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi e^{-s\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}}\left\{\left(s+\frac{2k}{\sqrt{u}}\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\delta\sqrt{u}}{\delta\sqrt{u}}\right)^{2k}-\frac{2k}{\sqrt{u}}\left(\frac{\operatorname{sh}\delta\sqrt{u}}{\delta\sqrt{u}}\right)^{2k-1}\operatorname{ch}\delta\sqrt{u}\right\}.$$

Према томе је

$$F(u,\delta)=\pi S(u)\frac{e^{-s\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}}\left\{\left(s+\frac{2k}{\sqrt{u}}\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\delta\sqrt{u}}{\delta\sqrt{u}}\right)^{2k}-\frac{2k}{\sqrt{u}}\left(\frac{\operatorname{sh}\delta\sqrt{u}}{\delta\sqrt{u}}\right)^{2k-1}\operatorname{ch}\delta\sqrt{u}\right\}.$$

Како је осим тога

$$F(u)=\frac{\pi s}{2\sqrt{u}}\,e^{-s\sqrt{u}}\,S(u),$$

то је услов (2.10) Арзела-Лебеговог става очевидно задовољен. Даље, на основу неједначине $\left|\frac{\operatorname{sh}x}{x}\right|\leqslant e^x$, која важи за свако реално x, имамо да је

$$|F(u,\delta)|\leqslant\pi|S(u)|\frac{e^{-s\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}}\left\{\left(s+\frac{2k}{\sqrt{u}}\right)e^{2\delta k\sqrt{u}}+\frac{2k}{\sqrt{u}}e^{2\delta k\sqrt{u}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\pi|S(u)|\left(s+\frac{4k}{\sqrt{u}}\right)\frac{e^{-(s-2\delta k)\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}}.$$

Ако је $2\delta k\leqslant s/2$ тада је

$$|F(u,\delta)|\leqslant\pi|S(u)|\left(s+\frac{4k}{\sqrt{u}}\right)\frac{e^{-1/2\,s\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}},\quad\delta\geqslant 0.$$

Из ове неједначине следи да су и услови (2.11) и (2.12) задовољени. Применом Арзела-Лебеговог става добијамо коначно (2.7), а тиме је лема доказана.

2.2. Доказ става 2. Нека је најпре s реалан и позитиван број. Према леми (2.3) је

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x)\frac{\sin s\sqrt{x}}{s}\,dx = \int_0^\infty e^{-su}\,S(u^2)\,du.$$

Функција $\varphi(s)$, као функција комплексне променљиве s, регуларна је у десној полуравни, тј. за $R(s)>0$, што непосредно следи из чињенице да се може написати у облику Лапласове трансформације. На основу неједначине $\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leqslant 2e^{|z|}$, која важи за свако комплексно z и процене (a) за функцију $f(x)$ непосредно следи да је функција $\varphi(s)$ регуларна и у тачки $s=0$. Коначно, из неједначине (2.1) следи да је

$$S(v^2) - S(u^2) > -m, \quad u \leqslant v \leqslant u+1.$$

Функција $S(u^2)$ задовољава дакле услове поменутог Караматиног става, па је

$$S(u^2) = 0(1), \quad u \to \infty.$$

Тиме је став **2** доказан.

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. A. Lorenz — Vortrag auf dem internationalen Kongresse in Rom, 1908, *Phys. Zeitschrift* **11** (1910), 1248.

[2] A. Sommerfeld — *Phys. Zeitschrift* **11** (1910), 1057—1066.

[3] H. Weyl — Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte, *Göttinger Nachrichten* (1911), 110—117.

[4] R. Courant—D. Hilbert — Methoden der Mathematischen Physik I, Berlin, 1931.

[5] A. Hammerstein — Über die asymptotische Darstellung der Eigenfunktionen linearer Integralgleichungen, *Math. Ann.* **95**, 101—109.

[6] T. Carleman — Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes. *Förhandlingar Skandinaviska Matematikerkongressen Stockholm*, 1934, 34 — 44.

[7] Å. Pleujel — Propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes de vibrations. *Arkiv för Matematik, Astronomy och Fysik* **27** A, No 13 (1940); — Asymptotic relations for the eigenfunctions of certain boundary value problems of polar type. *American J. of Math.* **70** (1948), 892 — 907.

[8] S. Minakshisundaram — A generalization of Epstein Zeta functions. *Canadian Journ. of Math.* **1** (1949), 320—327; — and Å. Pleijel, Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds. *Canadian Journ. of Math.* **1** (1949), 242—256.

[9] V. G. Avakumović — Bemerkung über einen Satz des Herrn T. Carleman, *Math. Zeitschrift* **53** (1950), 53—58, — Über die Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung, *Publ. de l'Institut Math. de l'Acad. Serbe des Sciences*, **4** (1952), 95—96.

[10] Р. Бојанић и В. Вучковић — О сопственим функцијама граничног задатка малих осцилација еластичне плоче. *Зборник радова Математичког института САН*, **3** стр. 107—128.

[11] В. Вучковић — Стилтјесова трансформација која опада брзином експоненцијалне функције, *Зборник радова Математичког института САН*, **3** (1954).

[12] S. Bochner — Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig 1932.

[13] J. Karamata – Über einen Satz von H. Heilbron und E. Landau *Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade* **5** (1936), 28—38.

PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINEAIRES

Par

RANKO BOJANIĆ

Le problème classique de la théorie des membranes vibrantes, dans le cas le plus simple, consiste à trouver dans un domaine S du plan les solutions de l'équation

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

qui s'annulent sur le bord du domaine considéré. T. Carleman [6] a donné une méthode pour l'évaluation asymptotique de la somme de carrés des fonctions propres $\{\Phi_n(Q)\}$ en montrant que

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) \sim \frac{1}{4\pi}\lambda, \quad \lambda \to \infty,$$

où $\{\lambda_n\}$ sont les valeurs propres du problème considéré. Å. Pleijel [7] et S. Minakshisundaram [8] ont complété et étendu cette méthode aux cas plus généraux, mais tous ces résultats sont de la même portée que celui de Carleman quant aux évaluations du comportement asymptotique. Une amélioration dans cette direction a été récemment donnée par V. G. Avakumović* qui a montré que

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) = \frac{1}{4\pi}\lambda + O(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \to \infty$$

et

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n(P)\, \Phi_n(Q) = O(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \to \infty .$$

* Ces résultats découlent de l'évaluation de la fonction de Green donnée par Carleman [6] et d'un théorème de nature taubérienne de Avakumović [9_1].

Quant aux évaluations plus précises relatives au comportement asymptotique des fonctions propres dans les cas plus généraux, les problèmes sont restés ouverts.

Dans cette ordre d'idées, quoique la méthode permet de traiter le cas à n dimensions, nous avons considéré le problème généralisé de la membrane à trois dimensions

$$(A) \qquad \begin{aligned} &\Delta u - A(P)\, u + \lambda u = 0, \quad P \in S, \\ &u = 0 \quad \text{sur le bord de } S, \end{aligned}$$

où $A(P)$ est une fonction positive, avec les dérivées partielles du premier ordre continues dans S. Pour les fonctions propres orthonormées de ce problème nous avons montré que

$$\text{(I)} \qquad \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) = \frac{1}{6\pi^2} \lambda^{3/2} + O(\lambda), \quad \lambda \to \infty,$$

$$\text{(II)} \qquad \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n(P)\, \Phi_n(Q) = O(\lambda), \quad \lambda \to \infty.$$

Dans la méthode de Pleijel le problème central consiste dans l'évaluation de la partie régulière, c. à d. de la compensatrice de la fonction de Green. Par contre la méthode dont nous nous sommes servi repose sur l'étude de la partie singulière de cette fonction et sur l'application d'un théorème de nature taubérienne, analogue à celui de Avakumović.

Nous avons en premier lieu démontré l'existence de la solution de l'équation intégrale

$$\Gamma(P, Q; -\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} - \int_S \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T)\, \Gamma(T, Q; -\lambda)\, dS_T$$

où r_{PQ} est la distance entre les points P et Q, et montré que cette solution est la partie singulière de la fonction de Green du problème aux limites (A). De ce résultat on obtient les évaluations suivantes

$$|\Gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant \frac{1}{2\pi r_{PQ}}\, e^{-1/2\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}, \quad \lambda \geqslant \lambda_0,$$

ainsi que

$$|\gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant \frac{1}{2\pi l_Q}\, e^{-1/2\sqrt{\lambda}\, l_Q},$$

où $\gamma(P, Q; -\lambda)$ est la partie régulière de la fonction de Green et où l_Q représente la borne inférieure de la distance du point fixe Q au bord de S.

En seconde lieu, nous avons introduit la fonction $\Gamma_r(P, Q; -\lambda)$, solution de l'équation intégrale

$$(*) \quad \Gamma_r(P, Q; -\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} - \int_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T)\, \Gamma_r(T, Q; -\lambda)\, dS_T$$

où $K(Q;r)$ est la sphère de centre Q et de rayon r suffisamment petit, telle que $K(Q;r) \subset S$. Pour tout $P \in K(Q;r)$, on a

$$\Gamma(P, Q; -\lambda) = \Gamma_r(P, Q; -\lambda) + O(e^{-\frac{1}{2} r\sqrt{\lambda}}), \quad \lambda \geqslant \lambda_0.$$

Lorsque r est suffisamment petit, l'équation (*) peut être résolue par des approximations succesives. On peut alors montrer l'existence d'une fonction $\Omega(Q;u)$ telle que

$$(**) \quad \int_0^\infty \frac{d\,\Omega(Q;u)}{u+\lambda} = \frac{1}{\lambda} \lim_{P=Q} \left\{ \frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P, Q; -\lambda) \right\}$$

et

$$\Omega(Q;u) = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{u} + O(1), \quad u \to \infty.$$

De ces évaluations et de la formule

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\, \Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n + \lambda)} = G(P, Q) - G(P, Q; -\lambda)$$

où $G(P, Q) = G(P, Q; 0)$ et

$$G(P, Q; -\lambda) = \Gamma(P, Q; -\lambda) - \gamma(P, Q; -\lambda)$$

il s'ensuit que

$$(***) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n(\lambda_n + \lambda)} = \lim_{P=Q} \left\{ \frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P, Q; -\lambda) \right\} - \frac{1}{\lambda} M(Q) + O(e^{-\frac{1}{2} r\sqrt{\lambda}}), \; \lambda \to \infty.$$

Pour $P \neq Q$ on obtient

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\, \Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n + \lambda)} = G(P, Q) + O(e^{-\frac{1}{2} c\sqrt{\lambda}}), \lambda \to \infty.$$

où $c = \min(r_{PQ}, l_Q)$.

En troisième lieu nous avons établi le théorème suivant**

Soit $S(u)$ à variation bornée dans tout intervalle fini et soit l'intégrale

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{dS(u)}{u+x}$$

convergeant pour tout $x > 0$. Alors de

$$f(x) = O(e^{-c\sqrt{x}}), \quad x \to \infty, \quad c > o,$$

et

$$S(v) - S(u) > -m \quad pour \quad u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u},$$

il résulte que

$$S(u) = O(1), \quad u \to \infty.$$

Pour obtenir l'évalution (I) il suffit de poser dans le théorème précédent

$$S(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} - \Omega(Q;u) + M(Q), \quad S(0) = 0.$$

En tenant compte de (***) il s'ensuit que

$$S(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} - \Omega(Q;u) + M(Q) = O(1),$$

c. à d.

$$\sum_{\lambda_n \leqslant u} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} = \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{u} + O(1), \quad u \to \infty,$$

d'où l'on déduit l'aftirmation (I) après une sommation par parties. La formule (II) s'obtient d'une manière analogue.

** Récemment V. Vučković [11] a donné quelques théorèmes plus généraux de ce genre.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

ВЛАДЕТА ВУЧКОВИЋ

СТИЛТЈЕСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА КОЈА ОПАДА БРЗИНОМ ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ

— ТЕЗА —

УВОД

0.1. Да бих избегао понављања, навешћу ознаке које ћу употребљавати током целог рада.

Са $A(u)$ обележаваћу функцију реалне променљиве u, дефинисану за $u \geqslant 0$, која је ограничене варијације у сваком коначном размаку. Осим тога, претпоставићу свуда да је $A(0) = 0$.

Са $L(t)$ означићу Лапласову трансформацију

$$L(t) = \int_0^\infty e^{-tu}\, dA(u) \tag{0.1.1}$$

која конвергира за $t > 0$, а са $S(x)$ Стилтјесову трансформацију

$$S(x) = \int_0^\infty \frac{dA(u)}{u + x} \tag{0.1.2}$$

која конвергира за једно и тиме свако $x > 0$.

Напомињем одмах да је, с обзиром на претпоставку $A(0) = 0$,

$$L(t) = t \int_0^\infty e^{-tu} A(u)\, du, \tag{0.1.1'}$$

и

$$S(x) = \int_0^\infty \frac{S(u)\, du}{(u + x)^2}. \tag{0.1.2'}$$

Ови облици добијају се лако парцијалном интеграцијом интеграла (0.1.1) и (0.1.2) (в. нпр. Видер [1]) и њима ћу се често користити у даљем раду.

0.2. Предмет овога рада је испитивање Стилтјесове, односно Лапласове трансформације која опада брзином експоненцијалне функције степена, нарочито с обзиром на могућност инверзних ставова. Како се у том погледу случај експоненцијалног опадања разликује од осталих начина асимптотског понашања ових трансформација, навешћу неке познате ставове да бих ову разлику боље истакао. При томе ћу се ограничити на Лапласову трансформацију, јер је већина најкарактеристичнијих ставова формулисана у односу на њу.

Основни инверзни став који су дали Харди и Литлвуд [2] односи се на случај кад Лапласова трансформација расте брзином степена; он гласи:

Ако $A(u)$ *не опада, тада из*

$$L(t) \sim \frac{A\,\Gamma(\alpha+1)}{t^\alpha},\quad t\to 0,\quad (\alpha>0),$$

следи

$$A(u) \sim A u^\alpha,\quad u\to\infty.$$

За веће брзине рашћења Харди и Рамануџан дали су такође један став за Дирихлетове редове који за Лапласову трансформацију (в. Авакумовић и Карамата [1]) гласи:

Ако је $A(u)$ *позитивна функција која не опада, тада из*

$$L(t) \sim e^{1/t},\quad t\to 0,$$

следи

$$\log A(u) \sim 2\sqrt{u},\quad u\to\infty.$$

Авакумовић [3] је проучио случај кад брзина рашћења трансформације $L(t)$ за $t\to 0$ постаје све већа. При томе је као упоредне функције узео итерирану експоненцијалну функцију $e_n(t)$ дефинисану са $e_1(t)=exp(t), \ldots\ldots, e_n(t)=exp[e_{n-1}(t)]$, и итерирани логаритам дефинисан са $lg_1 u = lg u, \ldots\ldots, lg_n u = lg(lg_{n-1} u)$. Његов став гласи:

Ако $A(u)$ *не опада, тада из*

$$lg_{n+1} L(t) \sim \frac{1}{t},\ t\to 0$$

следи

$$\theta\, lg_n u\,.\, e_n'(\theta\, lg_n u) < A(u) < \lambda \frac{u}{lg_n u},$$

при чему

$$1>\theta\to 1 \ \text{ и } \ 1<\lambda\to 1 \ \textit{ кад } \ u\to\infty.$$

Оно што је битно код овога става је чињеница да инверзни ставови за Лапласову трансформацију постоје кад ова расте произвољном брзином. Насупрот томе, из испитивања изнетих у овом раду следи да у случају кад Лапласова трансформација опада брзином експоненцијалне функције постоји гранична брзина иза које нема више могућности за инверзне ставове. То је основна разлика о којој сам говорио у почетку ове тачке.

У погледу Лапласове трансформације која опада спорије од експоненцијалне функције Геза Фројд је недавно [1] дао један став који у најпростијем облику гласи:

Ако $A(u)$ не опада, тад из

$$L(t) = O(t^{\varepsilon}),\ t \to 0,\ (\varepsilon > 0),$$

следи

$$A(u) = O\left(\frac{1}{lg\, u}\right),\ u \to \infty,$$

Први став за Лапласову трансформацију која експоненцијално опада дао је Авакумовић [1] као аналогон једног Карлемановог става за Стилтјесову трансформацију[1]:

Ако је

$$L(t) = O(e^{-1/t}),\ t \to 0,$$

и ако функција $A(u)$ задовољава услов конвергенције

$$\sqrt{u}\,[A(v) - A(u)] > -m \quad \text{за} \quad \text{свако} \quad u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u},$$

тада је

$$\sqrt{u}\, A(u) = O(1),\ u \to \infty.$$

Касније, у [2], Авакумовић је дао општији став који се односи на брзине опадања типа $O[exp(-1/t^{\theta})]$ где је $0 < \theta \leqslant 1$

Свакако да се, слично као и код експоненцијалног рашћења, и овде може поставити питање инверзних ставова кад Лапласова трансформација опада брзином итериране експоненцијалне функције. На њега одговор даје један став Деча [2, стр. 483. став 6] који каже да из

$$L(t) = O(e^{-1/t^{1+\varepsilon}}),\quad t \to 0,\quad (\varepsilon > 0)$$

следи

$$A(u) = 0,$$

сем на множини нулте мере.

0.3. Познато је да су инверзни ставови за Стилтјесову трансформацију $S(x)$ аналогни ставовима за Лапласову трансформацију, те су мање проучавани. Обрађен је детаљно случај кад је $S(x) \sim A/x^{\alpha}$ и закључци су аналогни инверзним ставовима за Лапласову трансформацију са сличним асимптотским понашањем.

[1] Карлеманов став навешћу у тачки **0.3.**

Тек у новије време дато је неколико ставова за Стилтјесову трансформацију $S(x)$ која експоненцијално опада кад $x \to \infty$. Како се основни део мојих испитивања односи на тај случај, навешћу детаљно све ставове у вези са овом брзином опадања, тим пре што они нису многобројни.

Први став ове врсте дао је Т. Карлеман [1]. Његов став је од принципијелног значаја јер је њиме почело испитивање ставова ове врсте. Карлеманов став гласи:

Ако $A(u) + C \log u$ *не опада, тада из*

$$S(x) = O(e^{-\sqrt{x}}), \quad x \to \infty, \tag{0.3.1}$$

следи да је за свако $0 < \delta < {}^1/_2$

$$\lim_{x \to \infty} x^{1/2-\delta} [A(x + x^{1/2+\delta}) - A(x)] = 0.$$

Н. Винер [2] је 1936 г. доказао исти став. 1950 г. је Авакумовић [1] доказао далеко оштрији став, којим је истовремено дао и један нов поступак за доказ сличних ставова. Његов став гласи:

Ако $A(u)$ *задовољава услов конвергенције* $\sqrt{u}\,[A(v) - A(u)] > -m$ *за свако* $u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u}$, *тада из* (0.3.1) *следи:*

$$\sqrt{u}\, A(u) = O(1), \quad u \to \infty.$$

Најзад, Р. Бојанић и ја дали смо у [1] следећи став:

Ако $A(u)$ *задовољава услов конвергенције* $A(v) - A(u) > -m\sqrt[4]{u}$ *за свако* $u \leqslant v \leqslant u + \sqrt[4]{u^3}$, *тада из*

$$S(x) = O(e^{-\sqrt[4]{x}}), \quad x \to \infty$$

следи

$$A(u) = O(\sqrt[4]{u}), \quad u \to \infty.$$

0.4. Главни циљ овог рада је проучавање Стилтјесове трансформације $S(x)$ односно реда $\Sigma a_\nu / (\lambda_\nu + x)$, који опадају експоненцијалном брзином, али дајем и одговарајуће ставове за Лапласову трансформацију, које изводим или као короларе из ставова за Стилтјесову трансформацију или доказујем методиком употребљеном за доказ ових последњих.

Стилтјесову трансформацију $S(x)$ проучио сам у случају кад је

$$S(x) = O(e^{-x^\alpha}), \quad x \to \infty, \quad (\alpha > 0),$$

при чему у случају $0 < \alpha \leqslant {}^1/_2$ подинтегрална функција $A(u)$

задовољава општи услов конвергенције

(0.3.2) $u^{\beta}[A(v) - A(u)] > -m$ *за свако* $u \leqslant v \leqslant u + u^{1-\alpha}$,

где је $\beta > -\alpha$.

Ставови за Лапласову трансформацију изведени су за случај кад је

$$L(t) = O(e^{-1/t^{\theta}}), \quad t \to 0 \quad (0 < \theta \leqslant 1),$$

и овај случај се поклапа са Авакумовићевим проучавањима [2], али при томе ја имам општији услов конвергенције (0.3.2) за функцију $A(u)$.

И овде се поставља питање егзистенције инверзних ставова кад Стилтјесова трансформација опада све брже и брже. На њега даје одговор став 3.1 који каже да из

$$S(x) = O(e^{-x^{1/2+\varepsilon}}), \quad x \to \infty, \quad (\varepsilon > 0),$$

следи

$$A(u) = 0$$

сем на множини нулте мере.

Значи да и у овом случају постоји највећа брзина опадања иза које престаје могућност инверзних ставова. Тиме је скала брзина опадања оних Стилтјесових трансформација за које је могућа инверзија затворена на доле.

0.5. Од методолошког је интереса приметити да основни став овог рада има сасвим други карактер него што га имају инверзни ставови, који су у ствари његове последице. Тај став, кога изводим у првом делу расправе, припада групи ставова теорије функција познатих под именом ставова о композицији. Њихова битност је у томе што се из извесних особина једне функције $f(s)$ (у главном) комплексне променљиве s изводе особине једне друге функције $F(s)$, која се добива из аналитичког израза за функцију $f(s)$ извесном трансформацијом. Такви су, на пример, познати ставови Крамер-Поље, Адамара и Манделбројта за Дирихлетове редове (в. нпр. В. Бернштајн [1]).

0.6. Сматрам својом дужношћу да се на овом месту захвалим г. професору В. Авакумовићу, који ми је дао потстицај за овај рад, као и на помоћи у току рада. Исто сам тако захвалан г. професору Ј. Карамати, који је прегледао цео рад и указао ми на могућност краћег доказа леме 1.2.

ПРВИ ДЕО

У овом делу доказаћу неколико ставова који се односе на Стилтјесову трансформацију $S(x)$ и Стилтјесове редове

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n + x},$$

а проистичу из основног става 1.1, који је према томе централни став овог дела. Прегледности ради прво ћу навести тај став и из њега извести остале. Ознаке су исте као и у тачки **0.1** увода.

Став 1.1. *Ако је*

$$S(x) = O(e^{-x^{\alpha}}), \quad x \to \infty \tag{1.2}$$

где је $0 < \alpha \leqslant {}^1/_2$, *тада је функција*

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} u^{\gamma} A(u^{1/\alpha})\, du, \quad (\gamma > -1), \tag{1.3}$$

регуларна не само у полуравни $R\{s\} > 0$ *већ и у тачки* $s = 0$.

Поставља се питање да ли се вредност експонента γ у (1.3) може да смањи. То би се могло постићи интегрирањем функције $X(s)$ по s од s до ∞, али у општем случају који посматрамо то није могуће. Наиме, како је

$$u^{\gamma} A(u) \sim A u^{\gamma} \quad u \to 0 \quad (A = \text{конст.})$$

то применом познатог Абеловог става (Деч (Doetsch) [1] стр. 200 Satz 12) следи

$$X(s) \sim A \frac{\Gamma(\gamma+1)}{s^{\gamma+1}}, \quad s \to \infty$$

и баш за размак $-1 < \gamma \leqslant 0$ који нам је потребан (да би интеграцијом добили важење и у случају $-2 < \gamma \leqslant -1$, итд.) не постоји $\int_s^{\infty} X(s)\, ds$.

Међутим, у случају кад је за неко произвољно мало $a > 0$

$$A(u) = 0 \text{ за } 0 < u \leqslant a$$

постоји став (Деч [1] стр. 199, Satz 10) по коме је тада

$$X(s) = O(e^{-aR\{s\}}), \quad s \to \infty$$

у углу $|\arg s| \leqslant \varphi < \pi/2$. Према томе се $X(s)$ може произвољно пута интегралити. Тада је функција

$$X_1(s) = \int_s^{\infty} X(s)\,ds = \int_0^{\infty} e^{-su}\,u^{\gamma-1}\,A\,(u^{1/\alpha})\,du$$

регуларна такође у тачки $s=0$. (Овде је промена реда интеграције за реалне $s > 0$ дозвољена на основу Фубинијеве теореме). Интеграцијом функције $X_1(s)$ итд. долазимо до закључка да је и функција

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-su}\,u^{\delta}\,A\,(u^{1/\alpha})\,du$$

где је δ ма који реалан број, регуларна у тачки $s=0$. Напоменућу поново да ово важи само у случају кад је $A(u)=0$ за $0 < u \leqslant a$, где је a произвољно мали, позитиван број. Међутим, за Стилтјесове редове је овај услов увек испуњен, те тако долазимо до следећег става:

Став 1.2. *Нека је*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \;.\;\;.\;\;.\;\;.\; < \lambda_n \to \infty$$

и нека ред

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n + x}$$

конвергира за једно и тиме свако $x > 0$.

Ако је

$$g(x) = O(e^{-x^{\alpha}}),\quad x \to \infty,$$

где је $0 < \alpha \leqslant {}^1/_2$, *а*

$$A(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} a_n,$$

тада је функција

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-su}\,u^{\delta}\,A(u^{1/\alpha})\,du$$

где је δ *ма какав реалан број, регуларна не само у полуравни* $R\{s\} > 0$ *већ и у тачки* $s=0$.

С друге стране, ако је $\gamma \geqslant 0$, парцијалном интеграцијом се добива

$$\chi_2(s) = \int_0^\infty u^\gamma A(u^{1/\alpha}) e^{-su} du = -\frac{u^\gamma A(u^{1/\alpha})}{s} e^{-su} \Big|_0^\infty +$$

$$+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-su} d\{u^\gamma A(u^{1/\alpha})\} = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-su} d\{u^\gamma A(u^{1/\alpha})\},$$

па сменом $u^{1/\alpha}$ на место u следи

$$\chi_2(s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-su^\alpha} d\{u^{\gamma\alpha} A(u)\},$$

где је, због $\gamma \geqslant 0$ и $\alpha > 0$, такође $\gamma\alpha \geqslant 0$.

Применом става 1.1 добија се на тај начин

Став 1.3. *Из* (1.2), *при чему је* $0 < \alpha \leqslant {}^1/_2$, *следи да је функција*

$$\chi_2(s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-su^\alpha} d\{u^\tau A(u)\}, \quad (\tau \geqslant 0)$$

регуларна не само у полуравни $R\{s\} > 0$ *већ и у тачки* $s = 0$.

Овај став добија нарочито једноставан облик ако се формулише за Стилтјесове и Дирихлетове редове; он тада гласи:

Став 1.3'. *Нека је*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots\cdots < \lambda_n \to \infty$$

и нека ред

$$g(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{\lambda_n + x}$$

конвергира за једно и тиме свако $x > 0$.

Ако је

$$g(x) = O(e^{-x^\alpha}), \quad x \to \infty,$$

при чему је $0 < \alpha \leqslant {}^1/_2$, *тада је функција претстављена Дирихле* *шовим редом*

$$\chi_3(s) = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{\tau} e^{-s\lambda_n^{\alpha}}$$

где је $\tau \geqslant 0$, *регуларна не само у полуравни* $R\{s\} > 0$ *већ и у шачки* $s = 0$.

Напомињем да у ставу 1.3 место степена u^{τ} може стајати ма какав полином од u (а слично у ставу 1.3 место λ_n^{τ} ма који полином од λ_n). У том смислу би се могло ићи за уопштавањем ових ставова, као и ставова 1.1 и 1.2, али ћу то питање у овом раду оставити по страни.

Прелазим сада на доказ става 1.1 Прегледности ради поделићу га у неколико лема.

Лема 1.1. *Нека је* $u > 0$, $s > 0$, $0 < \alpha \leqslant {}^1/_2$ *и* δ *реалан број шакав да је*

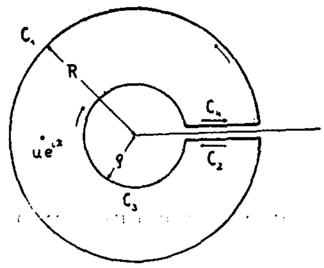
$$-1 < \delta < \infty \quad \text{кад је } 0 < \alpha < {}^1/_2$$
$$-1 < \delta \leqslant -{}^1/_2 \text{ кад је } \alpha = {}^1/_2 .$$

Тада је

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x^{\delta} e^{-sx^{\alpha}\cos\pi\alpha} \sin(sx^{\alpha}\sin\pi\alpha - \pi\delta)}{u+x}\, dx = u^{\delta} e^{-su^{\alpha}} . \tag{1.4}$$

Доказ: Функцију

$$g(z) = \frac{z^{\delta} e^{-sz^{\alpha}} e^{-i\pi\alpha}}{z+u}$$



Сл. 1.

интегрисаћу дуж контуре која се састоји: 1) из периферије C_1 централног круга довољно великог полупречника R; 2) из праволиниске путање C_2 дуж реалне позитивне осе од R до ρ ($< R$); 3) из периферије C_3 централног круга довољно малог полупречника ρ и 4) из праволиниске путање C_4 дуж реалне позитивне осе од ρ до R (сл. 1). Једини сингуларитет функције $g(z)$ који лежи у области обухваћеној овом контуром је пол $u e^{i\pi}$ који лежи на негативној реалној оси. По ставу о резидууму је према томе,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1+C_2+C_3+C_4} g(z)\, dz = u^{\delta} e^{i\pi\delta} e^{-su^{\alpha}} .$$

Даље је

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} g(z)\,dz = \frac{R^{1+\delta}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta\delta}\,\frac{e^{-sR\alpha[\cos\alpha(\theta-\pi)+i\sin\alpha(\theta-\pi)]}}{R e^{i\theta}+u}\,d\theta .$$

Како је за $0<\alpha\leqslant {}^1/_2$, $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant -\alpha\pi\leqslant\alpha(\theta-\pi)\leqslant\alpha\pi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, лако следи да

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} g(z)\,dz \to 0 \qquad \text{код } R\to\infty .$$

Слично се добија да

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_3} g(z)\,dz \to 0 \qquad \text{кад } \rho\to 0 .$$

Што се тиче интеграла по контурама C_2 и C_4 лако се добија да је

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_{C_2} g(z)\,dz + \oint_{C_4} g(z)\,dz\right\} =$$

$$= \frac{e^{\pi\delta i}}{2\pi i}\left\{ e^{\pi\delta i}\int_R^{\rho} \frac{x^\delta e^{-sx^\alpha e^{i\pi\alpha}}}{x+u}\,dx + \right.$$

$$\left. + e^{-\pi\delta i}\int_\rho^R \frac{x^\delta e^{-sx^\alpha e^{-i\pi\alpha}}}{x+u}\,dx\right\} =$$

$$= \frac{e^{\pi\delta i}}{\pi}\int_\rho^R \frac{x^\delta e^{-sx^\alpha\cos\pi\alpha}\sin(sx^\alpha\sin\pi\alpha-\pi\delta)}{x+u}\,dx$$

одакле непосредно следи тврђења леме 1, кад $\rho\to 0$ и $R\to\infty$.

Лема 1.2. *За* u, s, α *и* δ *као у леми* 1.1. *нека је*

$$F_\alpha(x;s) = \int_0^x t^\delta e^{-st^\alpha\cos\pi\alpha}\sin(st^\alpha\sin\pi\alpha-\pi\delta)\,dt . \tag{1.5}$$

Тада је

$$F_\alpha(x;s) = O(x^{1+\delta}),\quad x\to 0, \tag{1.6}$$

$$F_\alpha(x;s) = O(e^{-{}^1/_2 sx^\alpha\cos\pi\alpha}),\quad x\to\infty,\quad (0<\alpha<{}^1/_2) \tag{1.7}$$

$$F_{1/2}(x;s) = O(1),\quad x\to\infty\ (-1<\delta\leqslant -{}^1/_2). \tag{1.7'}$$

Доказ. (1.6) је очигледно. (1.7) следи лако ако је $F_\alpha(\infty; s) = 0$. Наиме, из

$$F_\alpha(x; s) = \left\{ \int_0^\infty - \int_x^\infty \right\} e^\delta \, t^{-st^\alpha \cos \pi\alpha} \sin(st^\alpha \sin \pi\alpha - \pi\delta) \, dt$$

и $\int_0^\infty = 0$ добија се одмах

$$(1.8) \qquad F_\alpha(x; s) = -\int_x^\infty e^\delta \, t^{-st^\alpha \cos \pi\alpha} \sin(st^\alpha \sin \pi\alpha - \pi\delta) \, dt,$$

а одавде се (1.7) добија обичном мајорацијом. Према томе, остаје да се докаже да је $F_\alpha(\infty; s) = 0$, и то за $0 < \alpha < 1/2$. У ту сврху ставићу у интегралу

$$(1.4) \qquad \int_0^\infty \frac{t^\delta e^{-st^\alpha \cos \pi\alpha} \sin(st^\alpha \sin \pi\alpha - \pi\delta)}{u+t} \, dt = u^\delta e^{-su^\alpha} \quad (0<\alpha<1/2)$$

$\delta + 1$ место δ и извршити гранични прелаз $u \to 0$, одакле одмах следи

$$F_\alpha(\infty; s) = \int_0^\infty t^\delta e^{-s t^\alpha \cos \pi\alpha} \sin(s t^\alpha \sin \pi\alpha - \pi\delta) \, dt = 0, \quad 0 < \alpha < 1/2,$$

што је и требало доказати.

У случају кад је $\alpha = 1/2$ лако се непосредно увиђа да важи процена (1.7′).

Лема 1.3. *Нека је*

$$(1.9) \qquad S(x) = \int^\infty \frac{d\,A(u)}{u+x}$$

функција из става 1.1 *а* $F_\alpha(x; s)$ *функција из леме* 1.2. *Тада постоји*

$$(1.10) \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F_\alpha(x; s) \, S(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F_\alpha(x; s) \, dx \int_0^\infty \frac{A(u) \, du}{(u+x)^2}$$

и у двоструком интегралу са десне стране једначине (1.10) *сме се променити ред интеграције.*

Доказ. Функцију $S(x)$ узећу у облику

$$S(x)=\int_0^\infty \frac{A(u)\,du}{(u+x)^2}. \tag{1.11}$$

Према познатом ставу (в. нпр. Видер [1] стр. 331, Т. 3 *c*) за Стилтјесову трансформацију је даље

$$S(x)=O\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\to 0+. \tag{1.12}$$

На основу процена (1.2), (1.6) и (1.12) постоји

$$\int_0^\infty F_\alpha(x;s)\,S(x)\,dx.$$

Доказаћу сада да се у двоструком интегралу са десне стране једначине (1.10) сме променити ред интеграције.

За коначне R_1 и R_2 је најпре

$$\int_0^{R_1} F_\alpha(x;s)\,dx\int_0^{R_2}\frac{A(u)}{(u+x)^2}\,du=\int_0^{R_2}A(u)\,du\int_0^{R_1}\frac{F_\alpha(x;s)}{(u+x)^2}\,dx,$$

одакле следи

$$\int_0^\infty F_\alpha(x;s)\,dx\int_0^{R_2}\frac{A(u)}{(u+x)^2}\,du=\lim_{R_1=\infty}\int_0^{R_2}A(u)\,du\int_0^{R_1}\frac{F_\alpha(x;s)}{(u+x)^2}\,dx.$$

Доказаћемо да је гранична вредност са десне стране једнака

$$\int_0^{R_2}A(u)\,du\int_0^\infty\frac{F_\alpha(x;s)}{(u+x)^2}\,dx.$$

У ту сврху довољно је показати да разлика

$$D_1=\int_0^{R_2}A(u)\,du\int_0^\infty\frac{F_\alpha(x;s)}{(u+x)^2}\,dx-\int_0^{R_2}A(u)\,du\int_0^{R_1}\frac{F_\alpha(x;s)}{(u+x)^2}\,dx=$$

$$=\int_0^{R_2}A(u)\,du\int_{R_1}^\infty\frac{F_\alpha(x;s)}{(u+x)^2}\,dx$$

тежи нули кад $R_1 \to \infty$. То непосредно следи отуда што $\int\limits_a^{\infty} [F_\alpha(x;s)/(u+x)^2]\, dx$, $a > 0$, конвергира, а тотална варијација функције $A(u)$ је ограничена за коначно R_2. Према томе је

$$\int\limits_0^{\infty} F_\alpha(x;s)\, dx \int\limits_0^{R_2} \frac{A(u)\, du}{(u+x)^2} = \int\limits_0^{R_2} A(u)\, du \int\limits_0^{\infty} \frac{F_\alpha(x;s)}{(u+x)^2}\, dx,$$

одакле излази

$$\int\limits_0^{\infty} A(u)\, du \int\limits_0^{\infty} \frac{F_\alpha(x;s)}{(u+x)^2}\, dx = \lim_{R_2 \to \infty} \int\limits_0^{\infty} F_\alpha(x;s)\, dx \int\limits_0^{R_2} \frac{A(u)\, du}{(u+x)^2}.$$

Доказаћу да је гранична вредност са десне стране једнака

$$\int\limits_0^{\infty} F_\alpha(x;s)\, dx \int\limits_0^{\infty} \frac{A(u)\, du}{(u+x)^2}.$$

У ту сврху посматраћу разлику

$$D_2 = \int\limits_0^{\infty} F_\alpha(x;s)\, dx \int\limits_0^{\infty} \frac{A(u)\, du}{(u+x)^2} - \int\limits_0^{\infty} F_\alpha(x;s)\, dx \int\limits_0^{R_2} \frac{A(u)\, du}{(u+x)^2} =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} F_\alpha(x;s)\, dx \int\limits_{R_2}^{\infty} \frac{A(u)\, du}{(u+x)^2}$$

и доказати да $D_2 \to 0$ кад $R_2 \to \infty$.

Парцијалном интеграцијом се добија

$$\int\limits_{R_2}^{\infty} \frac{A(u)\, du}{(u+x)^2} = \frac{A(R_2)}{x+R_2} + \int\limits_{R_2}^{\infty} \frac{dA(u)}{x+u}.$$

Увешћу, осим тога, функцију

$$g(t) = \int\limits_0^{t} \frac{dA(u)}{u+1},$$

која задовољава асимптотску процену

$$g(R_2) = S(1) + o(1),\quad R_2 \to \infty. \tag{1.13}$$

На основу тога је

$$\int\limits_{R_2}^{\infty} \frac{dA(u)}{u+x} = S(1) - g(R_2)\frac{1+R_2}{x+R_2} + (1-x)\int\limits_{R_2}^{\infty} \frac{g(t)}{(x+t)^2}\,dt.$$

тако да се D_2 може написати у облику

$$D_2 = A(R_2)\int\limits_0^{\infty} \frac{F\alpha(x;s)}{x+R_2}\,dx + \int\limits_0^{\infty} F\alpha(x;s)\left[S(1) - g(R_2)\frac{1+R_2}{x+R_2}\right]dx +$$

(1.14)

$$+\int\limits_0^{\infty} F\alpha(x;s)(1-x)\,dx\int\limits_{R_2}^{\infty}\frac{g(t)}{(x+t)^2}\,dt.$$

У случају кад је $0<\alpha<{}^1/_2$, функција $F\alpha(x;s)$ задовољава експоненцијалну процену (1.7), одакле следи (узевши у обзир (1.13) за процену другог интеграла у (1.14))

$$|D_2|\leqslant C\frac{|A(R_2)|}{R_2}\int\limits_0^{\infty} e^{-sx^{\alpha}\cos\pi\alpha}\,dx + C\frac{|S(1)|}{R_2}\int\limits_0^{\infty}|x-1|\,e^{-sx^{\alpha}\cos\pi\alpha}\,dx+$$

$$+\,o(1)\cdot\int\limits_0^{\infty}\frac{1+R_2}{x+R_2}\,e^{-sx^{\alpha}\cos\pi\alpha}\,dx.$$

Из ове неједначине одмах излази да $D_2\to 0$ кад $R_2\to\infty$, јер из конвергенције интеграла (1.11) имам процену $A(u) = o(u)$, $u\to\infty$, на основу које се први члан са десне стране горње неједначине анулира код $R_2\to\infty$.

Међутим, у случају $\alpha = {}^1/_2$ за функцију $F_{1/2}(x;s)$ имам само процену (1.7'), која није довољна да би се могао извести закључак да $D_2\to 0$ кад $R_2\to\infty$.

Зато ћу случај кад је $\alpha={}^1/_2$ третирати као гранични случај кад $\alpha\to{}^1/_2$ и применити Арзела-Лебегов став за несвојствене интеграле у следећем облику:

Нека је

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0-}\varphi_\alpha(u)=\varphi(u)$$

и нека интеграли

$$\int\limits_0^{\infty}\varphi_\alpha(u)\,du,\qquad \int\limits_0^{\infty}\varphi(u)\,du$$

постоје. Ако је за свако $u>0$ и $\alpha<\alpha_0$

$$|\varphi_\alpha(u)| \leqslant \psi(u)$$

а ако интеграл

$$\int_0^\infty \psi(u)\, du$$

постоји, тада је

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0-} \int_0^\infty \varphi_\alpha(u)\, du = \int_0^\infty \varphi(u)\, du.$$

У случају када је $\alpha={}^1/_2$, биће тим пре $S(x)=O(e^{-x^\alpha})$ за $0<\alpha<{}^1/_2$ те на основу малопредоказаног важи једначина

$$(1.17)\quad \int_0^\infty F_\alpha(x;s)\, dx \int_0^\infty \frac{A(u)}{(u+x)^2}\, du = \int_0^\infty A(u)\, du \int_0^\infty \frac{F_\alpha(x;s)}{(u+x)^2}\, dx, (0<\alpha<{}^1/_2).$$

Ставимо

$$\varphi_\alpha(u) = A(u) \int_0^\infty \frac{F_\alpha(x;s)}{(u+x)^2}\, dx.$$

Парцијалном интеграцијом добива се

$$\int_0^\infty \frac{F_\alpha(x;s)}{(u+x)^2}\, dx = -\frac{F_\alpha(x;s)}{u+x}\Bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{F_\alpha'(x;s)}{u+x}\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^\delta e^{-sx^\alpha \cos\pi\alpha} \sin(sx^\alpha \sin\pi\alpha - \pi\delta)}{u+x}\, dx = \pi\, u^\delta e^{-su^\alpha}.$$

Последњи резултат се добива на основу леме 1.1.

Према томе је

$$(1.16)\qquad \varphi_\alpha(u) = \pi A(u)\, u^\delta e^{-su^\alpha},$$

где ћу узети $-1<\delta\leqslant -{}^1/_2$.

Значи

$$(1.17)\qquad \lim_{\alpha\to{}^1/_2} \varphi_\alpha(u) = \pi A(u)\, u^\delta e^{-s\sqrt{u}} = \varphi(u).$$

Због $A(u) = o(u)$, $u \to \infty$ јасно је да постоје

$$\int_0^\infty \varphi_\alpha(u)\, du = \pi \int_0^\infty A(u)\, u^\delta e^{-su^\alpha}\, du$$

$$\int_0^\infty \varphi(u)\, du = \pi \int_0^\infty A(u)\, u^\delta\, e^{-s\sqrt{u}}\, du.$$

Осим тога је

$$|\varphi_\alpha(u)| = \pi\, |A(u)|\, u^\delta\, e^{-su^\alpha} \leqslant \psi(u),$$

где је за $0 < u < \infty$ и $1/4 \leqslant \alpha < 1/2$

$$\psi(u) = 2\pi\, |A(u)|\, u^\delta\, e^{-s\sqrt[4]{u}}$$

Значи, $\int\limits_0^\infty \psi(u)\, du$ постоји. Применом Арзела-Лебеговог става је према томе (узевши $1/4 \leqslant \alpha < 1/2$ и $\alpha_0 = 1/2$)

$$(1.18)\qquad \lim_{\alpha \to 1/2-} \int_0^\infty A(u)\, du \int_0^\infty \frac{F_\alpha(x; s)}{(u+x)^2}\, dx = \int_0^\infty A(u)\, du \int_0^\infty \frac{F_{1/2}(x; s)}{(u+x)^2}\, dx.$$

С друге стране, опет применом истог става, лако је показати да је

$$(1.19)\qquad \lim_{\alpha \to 1/2-} \int_0^\infty F_\alpha(x; s)\, dx \int_0^\infty \frac{A(u)\, du}{(u+x)^2} = \int_0^\infty F_{1/2}(x; s)\, dx \int_0^\infty \frac{A(u)\, du}{(u+x)^2}$$

Из (1.15), (1.18) и (1.19) следи да је и за $\alpha = 1/2$

$$\int_0^\infty F_\alpha(x; s)\, dx \int_0^\infty \frac{A(u)\, du}{(u+x)^2} = \int_0^\infty A(u)\, du \int_0^\infty \frac{F_\alpha(x; s)}{(u+x)^2}\, dx,$$

чиме је лема 1.3 у потпуности доказана.

Лема 1.4. *Ако је $F_\alpha(x; s)$ функција из леме 1.2, тада је функција*

$$(1.20)\qquad \chi(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F_\alpha(x; s)\, S(x)\, dx$$

регуларна не само у полуравни $R\{s\} > 0$ већ и у тачки $s = 0$.

Доказ. На основу процене

$$\left|\frac{\sin s}{s}\right| < 2\, e^{|s|},$$

која важи за свако комплексно s, имамо

$$
\begin{aligned}
&|F_\alpha(x;s)| \leqslant \int_0^x t^\delta e^{|s|\,t^\alpha \cos \pi\alpha} |\sin(s\,t^\alpha \sin \pi\alpha - \pi\delta)|\, dt \leqslant \\
(1.21)\qquad & \\
&\leqslant M\,|s|\,x^{\delta+\alpha+1} e^{|s|\,x^\alpha(\cos\pi\alpha+\sin\pi\alpha)},
\end{aligned}
$$

па на основи ове неједначине и неједначине (1.2) интеграл са десне стране једначине (1.20) апсолутно (па и униформно) конвергира у кругу

$$
(1.22)\qquad |s| < \frac{1}{\cos\pi\alpha + \sin\pi\alpha}.
$$

Тиме је лема доказана. Напомињем да се област дефинисана неједначином (1.22) може проширити даље у леву полураван ако се у интегралу (1.21) узме $R\{s\}$ уместо $|s|$.

Доказ става 1.1. Према леми 1.4 функција

$$
\chi(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F_\alpha(x;s)\, S(x)\, dx
$$

регуларна је не само у десној полуравни већ и у тачки $s=0$. Претпоставим ли привремено да је s реалан и позитиван број, биће на основи леме 1.3 и леме 1.1

$$
\begin{aligned}
\chi(s) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F_\alpha(x;s)\, dx \int_0^\infty \frac{A(u)\, du}{(u+x)^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(u)\, du \int_0^\infty \frac{F_\alpha(x;s)}{(u+x)^2}\, dx = \\
&= \int_0^\infty A(u)\, du\, \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{F'_\alpha(x;s)}{u+x}\, dx = \\
&= \int_0^\infty u^\delta e^{-su^\alpha} A(u)\, du.
\end{aligned}
$$

Према томе, функција

$$
\chi(s) = \int_0^\infty u^\delta e^{-su^\alpha} A(u)\, du,
$$

где је $0<\alpha\leqslant 1/2$ и $\delta>-1$ кад је $0<\alpha<1/2$, а $-1<\delta\leqslant -1/2$ кад је $\alpha=1/2$, која је регуларна за $R\{s\}>0$, регуларна је и у тачки $s=0$.

Сменивши u^α са u, добивам да је

$$\chi(s)=\int_0^\infty e^{-su}\,u^{\frac{\delta+1}{\alpha}-1}\,A\,(u^{1/\alpha})\,du.$$

У случају $0<\alpha<{}^1/_2$ овим је завршен доказ става 1.1, јер је због $\delta>-1$ и $\gamma=\dfrac{\delta+1}{\alpha}-1>-1$. У случају $\alpha={}^1/_2$ за експонент $\left.\dfrac{\delta+1}{\alpha}-1\right]$ важи само

$$-1<\frac{\delta+1}{\alpha}-1\leqslant 0.$$

Међутим, диференцирањем функције $\chi(s)$ по s овај се експонент сваки пут повећава за јединицу, те према томе може бити ма који број >-1.

ДРУГИ ДЕО

У овом делу дајем праве инверзне ставове, који се односе на Стилтјесову трансформацију, Стилтјесове редове, Лапласове интеграле и Дирихлетове редове.

Став 2.1. *Ако је*

$$S(x)=O\,(e^{-x^\alpha}),\quad x\to\infty, \tag{1.2}$$

где је $0<\alpha\leqslant{}^1/_2$ *и ако* $A\,(u)$ *задовољава услов конвергенције*

$$u^\beta\,[A\,(v)-A\,(u)]>-m\quad \text{за свако}\quad u\leqslant v\leqslant u+u^{1-\alpha} \tag{2.1}$$

при чему је $\beta>-\alpha$, *тада је*

$$u^\beta\,S\,(u)=O\,(1),\quad u\to\infty. \tag{2.2}$$

Извешћу најпре три леме које су ми потребне за доказ овог става.

Лема 2.1. *Из услова конвергенције* (2.1) *следи да за свако* $u\leqslant v\leqslant 2\,u$ *функција* $A\,(u)$ *задовољава и услов*

$$A\,(v)-A\,(u)>-m\,u^{\alpha-\beta}. \tag{2.3}$$

Доказ. Нека је $\varphi\,(t)=\exp\,(t^\alpha)$. Инверзна функција функције $\varphi\,(t)$ је $\phi\,(t)=(\log t)^{1/\alpha}$. Како је

$$\phi\,[\lambda\,\varphi\,(x)]=x+\frac{\log\lambda}{\alpha}\,x^{1-\alpha}+O\,(x^{1-2\alpha}),$$

то могу изабрати једно $\lambda > 1$ такво да је

$$\phi\,[\lambda\,\varphi\,(x)] \leqslant x + x^{1-\alpha}\,.$$

Тада је, према (2.1), за свако x' које се налази у размаку $[x, \phi\,[\lambda\,\varphi\,(x)]\,]$

$$A\,(x') - A\,(x) > -m\,x^{-\beta}. \tag{2.4}$$

Нека је y неки број $> x$. Ставиhу

$$x_{\nu+1} = \phi\,[\lambda\,\varphi\,(x_\nu)] = \phi\,[\lambda^\nu\,\varphi\,(x)],\quad \nu = 0,1,2,\ldots\ldots, n$$

и ограничиhу број n тако да је $x_n \leqslant y \leqslant x_{n+1}$. Ако у (2.4) ставим најпре x_ν место x' и $x_{\nu-1}$ место x, при чему је $\nu = 1,2,\ldots,(n-1)$, и најзад y место x' и x_n место x, добиhу сабирањем свих тако формираних неједначина

$$A\,(y) - A\,(x) > -m\,x^{-\beta} - m\sum_{\nu=1}^{n=1}\{\phi\,[\lambda^\nu\,\varphi\,(x)\,]\,\}^{-\beta}.$$

У случају $\beta > 0$ сума с десне стране да се мајорирати интегралом

$$J = \int_0^{n-1}\{\,\phi\,[\lambda^\tau\,\varphi\,(x)\,]\,\}^{-\beta} d\tau.$$

За $\beta \neq \alpha$ је

$$J = \frac{\alpha}{(\alpha-\beta)\log\lambda}\,(x_n^{\alpha-\beta} - x^{\alpha-\beta}) \leqslant \frac{\alpha}{|\alpha-\beta|\log\lambda}\,(y^{\alpha-\beta} - x^{\alpha-\beta}),$$

а за $\beta = \alpha$ је

$$J = \frac{\alpha}{2\log\lambda}\log\frac{x_n}{x} \leqslant \frac{\alpha}{2\log\lambda}\log\frac{y}{x}.$$

Према томе, за $x \leqslant y \leqslant 2\,x$ је за $\beta > 0$ у сваком случају

$$A\,(y) - A\,(x) > -m\,x^{-\beta} - m_1\,x^{\alpha-\beta} > -m_2\,x^{\alpha-\beta}.$$

У случају $\beta \leqslant 0$ је

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}[\phi\,[\lambda^\nu\,\varphi\,(x)]\,]^{-\beta} = \sum_{\nu=1}^{n-1}[\nu\log\lambda + x^\alpha]^{-\frac{\beta}{\alpha}},$$

где чланови збира монотоно расту. Но тада је

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}[\nu\log\lambda+x^{\alpha}]^{-\beta/\alpha}=O\,[(n-1)\log\lambda+x^{\alpha}]^{-\beta/\alpha+1}=$$
$$=O\,(x_n^{\alpha-\beta})=O\,(y^{\alpha-\beta})$$

па је и у овом случају испуњена неједначина (2.3).

Лема 2.2. *Из* (1.2) (*употребљава се само много слабија процена* $S(x)=O\,(x^{\alpha-\beta}),\ x\to\infty$) *и услова* (2.3) *следи*

(2.5) $$A\,(u)=O\,(u^{\alpha-\beta}),\quad u\to\infty.$$

Доказ ове леме нећу наводити, јер се он добива преношењем поступка примењеног од Саса у [1].

Лема 2.3. *Функција* $A\,(u)$ *из става 2.1 задовољава и услов конвергенције*

(2.6) $$v^{\beta/\alpha}A\,(v^{1/\alpha})-u^{\beta/\alpha}A\,(u^{1/\alpha})>-m\ \text{за свако}\ u\leqslant v\leqslant u+1.$$

Доказ. Имам најпре идентитет

$$v^{\beta/\alpha}A\,(v^{1/\alpha})-u^{\beta/\alpha}A\,(u^{1/\alpha})=u^{\beta/\alpha}\,[\,A\,(v^{1/\alpha})-A\,(u^{1/\alpha})]\,+$$
$$+\,(v^{\beta/\alpha}-u^{\beta/\alpha})\,A\,(v^{1/\alpha}).$$

Из услова (2.1) следи да је први члан са десне стране $>-m$. Како је за $u\leqslant v\leqslant u+1$

$$v^{\beta/\alpha}-u^{\beta/\alpha}=O\,(v^{-1+\beta/\alpha}),\quad v\to\infty$$

употребом неједначине (2.5) види се да ће израз

$$(v^{\beta/\alpha}-u^{\beta/\alpha})\,A\,(v^{1/\alpha})$$

увек бити униформно ограничен, чиме је завршен доказ леме.

Доказ става 2.1. На основу става 1.1 функција

$$\chi\,(s)=\int_0^{\infty}e^{-su}\,u^{\beta/\alpha}A\,(u^{1/\alpha})\,du$$

је регуларна и у тачки $s=0$ (јер због $\beta>-\alpha$ је $\beta/\alpha>-1$), а из њене регуларности у нули и услова (2.6) следи непосредно

$$u^{\beta/\alpha}A\,(u^{1/\alpha})=O\,(1),\quad u\to\infty,$$

као што су показали Ингхам и Карамата [2] у разради ставова Н. Винера и Х. Хајлброна - Е. Ландауа.

Став 2.1 вероватно није најбољи могућ због ограничења $\beta > -\alpha$. Међутим, кад је за извесно $a > 0$ $A(u) = 0$ за $0 < u \leqslant a$, могуће је добити најопштији могућ став у томе смислу да буде $\beta > -1$. Формулисан за Стилтјесове редове он гласи:

Став 2.2. *Нека је*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \cdots < \lambda_n \to \infty$$

и нека ред

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n + x}$$

конвергира за једно и тиме свако $x > 0$.

Ако је

$$g(x) = O(e^{-x^{\alpha}}), \quad x \to \infty ,$$

где је $0 < \alpha \leqslant {}^1/_2$ *и ако коефицијенти реда задовољавају услов конвергенције*

$$u^{\beta} \sum_{u < \lambda_n \leqslant v} a_n > -m \qquad \text{за свако } u \leqslant v \leqslant u + u^{1-\alpha},$$

при чему је $\beta > -1$, *тада је*

$$u^{\beta} \sum_{\lambda_n \leqslant u} a_n = O(1), \quad u \to \infty .$$

Доказ овог става добија се непосредно отуда што је на основу става 1.2 функција

$$\chi(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} u^{\beta/\alpha} A(u^{1/\alpha})\, du ,$$

где је

$$A(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} a_n ,$$

регуларна у нули, а подинтегрална функција $u^{\beta/\alpha} A(u^{1/\alpha})$ задовољава услов конвергенције (2.6).

Напомињем да је ограничење $\beta > -1$ најбоље могуће, јер већ за $\beta = -1$ став постаје тривијалан. Наиме, из саме конвергенције реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n + x}$$

следи

$$\sum_{\lambda_n \leqslant u} a_n = o(u), \quad u \to \infty.$$

Из става 2.1 могуће је извести и одговарајући став за Лапласову трансформацију, који гласи:

Став 2.3. *Ако је*

$$L(t) = O\left(\exp \frac{-1}{t^{\alpha/(1-\alpha)}}\right), \quad t \to 0+, \tag{2.7}$$

где је $0 < \alpha \leqslant 1/2$ (*тј.* $0 < \frac{\alpha}{1-\alpha} \leqslant 1$), *и ако подинтегрална функција* $A(u)$ *задовољава услов конвергенције*

$$u^\beta [A(v) - A(u)] > -m \quad \textit{за свако } u \leqslant v \leqslant u + u^{1-\alpha} \tag{2.1}$$

при чему је $\beta > -\alpha$, *тада је*

$$u^\beta A(u) = O(1) \quad u \to \infty. \tag{2.2}$$

Пре него што изведем доказ овог става навешћу и одговарајући став за Дирихлетове редове који је садржан у ставу 2.3. То је

Став 2.4. *Нека је*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots\cdots < \lambda_n \to \infty$$

и нека Дирихлетов ред

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad (s = \sigma + i\tau),$$

конвергира за $\sigma > 0$. *Ако је*

$$D(\sigma) = O\left(\exp \frac{-1}{\sigma^{\alpha/(1-\alpha)}}\right), \quad \sigma \to 0+,$$

при чему је $0<\alpha\leqslant {}^1/_2$ $\left(\text{тј. } 0<\frac{\alpha}{1-\alpha}\leqslant 1\right)$, *и ако коефицијенти реда задовољавају услов конвергенције*

$$u^{\beta}\sum_{u<\lambda_n\leqslant v} a_n > -m \quad \text{за свако} \quad u\leqslant v\leqslant u+u^{1-\alpha},$$

при чему је $\beta > -\alpha$, *тада је*

$$u\sum_{\lambda_n\leqslant u} a_n = O(1), \quad u\to\infty .$$

Доказ става 2.3. Из (2.1) следи да $A(u)$ задовољава услов конвергенције (2.3). Осим тога из

(2.8) $$L(t)=O(t^{\beta-\alpha}), \quad t\to 0+,$$

(што је по (2.7) увек испуњено) и услова (2.3) следи

(2.9) $$A(u)=O(u^{\alpha-\beta}), \quad u\to\infty$$

(Авакумовић [2], Карамата [3]).

На основу процене (2.7), постоји интеграл

$$\int_0^\infty e^{-xy}L(y)\,dy=\int_0^\infty e^{-xy}\,dy\int_0^\infty e^{-yt}\,dA(t)=$$

$$=\int_0^\infty dA(t)\int_0^\infty e^{-y(x+t)}\,dy=\int_0^\infty \frac{dA(t)}{x+t}=S(x).$$

Промену реда интеграције оправдаћу слично као у доказ става 1.1.

За коначне R_1 и R_2 је

$$\int_0^{R_1} e^{-xy}\,dy\int_0^{R_2} e^{-yt}\,dA(t)=\int_0^{R_2} dA(t)\int_0^{R_1} e^{-(x+t)y}\,dy;$$

одавде се лако добива да је

$$\int_0^\infty e^{-xy}\,dy\int_0^{R_2} e^{-yt}\,dA(t)=\int_0^{R_2} dA(t)\int_0^\infty e^{-(x+t)y}\,dy.$$

Даље је

$$\int_0^\infty dA(t)\int_0^\infty e^{-(x+t)y}\,dy = \lim_{R_2\to\infty}\int_0^\infty e^{-xy}\,dy\int_0^{R_2} e^{-yt}\,dA(t),$$

па је промена реда интеграције оправдана ако разлика

$$D=\int_0^\infty e^{-xy}\,dy\int_{R_2}^\infty e^{-yt}\,dA(t)$$

тежи нули кад $R_2\to\infty$.

Парцијалном интеграцијом добивам да је

$$\int_{R_2}^\infty e^{-yt}\,dA(t) = -A(R_2)e^{-yR_2}+y\int_{R_2}^\infty A(t)e^{-yt}\,dt,$$

тј.

$$D = -A(R_2)\int_0^\infty e^{-(x+R_2)y}\,dy + \int_0^\infty y\,e^{-xy}\,dy\int_{R_2}^\infty A(t)\,e^{-yt}\,dt =$$

$$= -\frac{A(R_2)}{x+R_2}+J_1.$$

Даље је

$$|J_1|<M\int_0^\infty y\,e^{-xy}\,dy\int_{R_2}^\infty t^{\alpha-\beta}\,e^{-yt}\,dt<$$

$$<M\int_0^\infty y^{\beta-\alpha}e^{-(x+{}^1/_2R_2)y}\,dy<\frac{M}{(x+{}^1/_2R_2)^{1+\beta-\alpha}},$$

па је

$$|D|<\frac{|A(R_2)|}{x+R_2}+\frac{M}{(x+{}^1/_2R_2)^{1+\beta-\alpha}}\to 0 \quad \textit{кад}\ R_2\to\infty$$

и $1+\beta-\alpha>0$.

Према томе је

$$S(x)=\int_0^\infty\frac{dA(t)}{x+t}=\int_0^\infty e^{-xy}L(y)\,dy. \tag{2.10}$$

Извешћу сада процену функције $S(x)$ кад $x\to\infty$. На основи процене (2.7) је

$$L(y) = H(y)\, exp\left[\frac{-1}{y^{\alpha/(1-\alpha)}}\right],$$

где је $H(y)=O(1)$ кад $y\to 0$ и $H(y)=o(y)$ кад $y\to\infty$. Према томе је

$$S(x) = \int_0^\infty H(y)\; exp\left[-y^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} - xy\right]dy.$$

Ставим ли у овом интегралу

$$y = \left[\frac{\alpha}{(1-\alpha)x}\right]^{1-\alpha} u,$$

он постаје

$$S(x) = \left[\frac{\alpha}{(1-\alpha)x}\right]^{1-\alpha} e^{-x^\alpha}\,.$$

$$\cdot\int_0^\infty exp\left\{-\left[\frac{(1-\alpha)x}{\alpha}\right]^\alpha\left[u^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\,u - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]\right\}H(y)\,dy.$$

Функција

$$\varphi(y) = u^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\,u - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\,u =$$

$$= u^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\,u - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

достиже свој минимум за $u=2^{1-\alpha}$ и он износи

$$\psi(2^{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha}\left[2^{-\alpha} - \alpha^{1-\alpha}(1-\alpha)^\alpha\right].$$

Међутим, како је $0<\alpha\leqslant {}^1/_2$, то је

$$\alpha^{1-\alpha}(1-\alpha)^\alpha < \frac{1}{2^{1-\alpha}} < \frac{1}{2^\alpha},$$

јер је $1-\alpha\geqslant\alpha$, тј. $\frac{1}{2^{1-\alpha}}\leqslant\frac{1}{2^\alpha}$, па је $\psi(2^{1-\alpha})\geqslant 0$. Према томе је

$$u^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\,u - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \geqslant \frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\,u,$$

одакле излази

$$|S(x)| \leqslant M \left[\frac{\alpha}{(1-\alpha)x}\right] e^{-x^\alpha} \int_0^\infty exp \left\{ - \left[\frac{(1-\alpha)x}{\alpha}\right]^\alpha \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} u \right\} du,$$

тј.

$$(2.11) \qquad S(x) = O(e^{-x^\alpha}), \quad x \to \infty.$$

Применом става 2.1 добија се одавде одмах тврђење става 2.3.

Напоменућу да став 2.3 садржи као специјалан случај следећи став В. Авакумовића из расправе [2].

Ако је

$$(2.12) \qquad L(t) = O\left(exp \frac{-1}{t^\theta}\right), t \to 0$$

где је $0 < \theta \leqslant 1$ *и функција* $A(u)$ *задовољава услов конвергеције*

$$(2.13) \quad u^{\frac{1}{1+\theta}} [A(v) - A(u)] > -m \quad \textit{за свако} \quad u \leqslant v \leqslant u + u^{\frac{1}{1+\theta}},$$

тада је

$$(2.14) \qquad u^{\frac{1}{1+\theta}} A(u) = O(1), \quad u \to \infty.$$

Стави ли се, наиме, у став 2. $\theta = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ и $\beta = 1 - \alpha$ тад (2.7) прелази у (2.12), (2.1) у (2.13) и (2.2) у (2.14).

ТРЕЋИ ДЕО

У овом делу проучавам случај кад је експонент α већи од $^1/_2$. Као што сам већ у уводу навео, став који овде добијам утврђује да постоји гранична брзина којом Стилтјесова трансформација може да тежи нули. За веће брзине је подинтегрална функција увек идентички једнака нули, сем евентуално на множини нулте мере.

Став 3.1. *Из*

$$(3.1) \qquad S(x) = O(e^{-x^\alpha}), \quad x \to \infty,$$

при чему је

$$\alpha > {}^1/_2,$$

следи

$$(3.2) \qquad A(u) \equiv 0,$$

сем евентуално на множини нулте мере.

И доказ овог става извешћу, прегледности ради, у неколико лема.

Лема 3.1.

$$g(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S(x)\,\frac{\sin s\sqrt{x}}{s}\,dx$$

је цела парна функција и за $R\{s\} > 0$ *може се претставити Лапласовим интегралом*

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-su} A(u^2)\,du. \tag{3.3}$$

Доказ. На основи процене (3.1) је

$$S(x) = O(e^{-A\sqrt{x}}), \quad x \to \infty, \tag{3.4}$$

за свако $A > 0$. На основи ове процене и неједначине

$$\left|\frac{\sin s}{s}\right| < e^{|s|}$$

која важи за свако комплексно s интеграл

$$\int_0^\infty S(x)\,\frac{\sin s\sqrt{x}}{s}\,dx$$

конвергира апсолутно (па и униформно) за свако s за које је

$$|s| < A.$$

Како је A ма какав реалан број > 0, следи да горњи интеграл конвергира за свако коначно s. Поред тога, очито је да је $g(s)$ парна функција. Према томе је

$$g(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S(x)\,\frac{\sin s\sqrt{x}}{s}\,dx \tag{3.5}$$

цела парна функција.

Претпоставим ли привремено да је s реалан број > 0, то је

$$\begin{aligned}\int_0^\infty S(x)\,\frac{\sin s\sqrt{x}}{s}\,dx &= \frac{1}{s}\int_0^\infty \sin s\sqrt{x}\,dx \int_0^\infty \frac{dA(u)}{u+x} = \\ &= \frac{1}{s}\int_0^\infty dA(u)\int_0^\infty \frac{\sin s\sqrt{x}}{u+x}\,dx = \frac{\pi}{s}\int_0^\infty e^{-s\sqrt{u}}\,dA(u),\end{aligned} \tag{3.6}$$

уколико сам у овом двоструком интегралу смео променити ред интеграције. Да бих то доказао, поћи ћу од интеграла

$$(3.7) \qquad \int_0^\infty e^{-sx^\gamma \cos \pi\gamma} \sin (sx^\gamma \sin \pi\gamma)\, dx \int_0^\infty \frac{d\,A\,(u)}{u+x},$$

где је $^1/_4 \leqslant \gamma < {^1/_2}$. Као у доказу става 1.1, може се показати да се у (3.7) сме изменити ред интеграције, те да је

$$(3.8) \qquad \begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-sx^\gamma \cos \pi\gamma} \sin (sx^\gamma \sin \pi\gamma)\, dx \int_0^\infty \frac{d\,A\,(u)}{u+x} = \\ &= \int_0^\infty d\,A\,(u) \int_0^\infty \frac{e^{-sx^\gamma \cos \pi\gamma} \sin (sx^\gamma \sin \pi\gamma)}{u+x}\, dx \left\{ = \pi \int_0^\infty e^{-su^\gamma}\, d\,A\,(u) \right\}. \end{aligned}$$

Потпуно исто као у доказу става 1.1, применом Арзела-Лебеговог става, може се закључити да се овде сме извршити прелаз $\gamma \to {^1/_2}$, чиме је оправдана промена реда интеграције у (3.6), јер за $\gamma = {^1/_2}$ (3.8) прелази у средњу једначину из (3.6).

Према (3.5) и (3.6) је

$$g\,(s) = \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-s\sqrt{u}}\, d\,A\,(u) = \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-su}\, d\,A\,(u^2),$$

одакле се парцијалном интеграцијом добива

$$(3.3) \qquad g\,(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, A\,(u^2)\, du\,.$$

Лапласов интеграл (3.3) је конвергентан за $R\{s\} > 0$, па према томе претставља функцију $g\,(s)$ у десној полуравни, што је и требало доказати.

Лема 3.2. *За све*

$$(3.9) \qquad |\arg s| = \omega \neq \frac{\pi}{2} \quad \textit{и} \quad |s| \geqslant 1$$

је

$$|g(s)| \leqslant M(\omega). \tag{3.10}$$

Доказ. Довољно је да докажем да неједначина (3.10) важи у случају $\omega < \frac{\pi}{2}$, јер из парности функције $g(s)$ следи да иста неједначина важи и за $\omega > \frac{\pi}{2}$.

Како из конвергенције Стилтјесове трансформације $S(x)$ непосредно следи да је $A(u) = o(u)$, $u \to \infty$, то на основи (3.3), стављајући $s = \rho e^{i\omega}$, добивам одмах да је

$$|g(s)| < C \int_0^\infty e^{-\rho u \cos \omega} u^2 \, du = \frac{C}{\rho^3 \cos^3 \omega} \leqslant \frac{C}{\cos^3 \omega},$$

чиме је лема доказана.

Лема 3.3. *За свако s функција $g(s)$ задовољава неједначину*

$$|g(s)| < K(\alpha) \exp\left(|s|^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}\right). \tag{3.11}$$

Доказ. Из (3.5), (3.1) и неједначине

$$\left| \frac{\sin s}{s} \right| < 2 e^{|s|}$$

добива се простом мајорацијом да је за свако s

$$|g(s)| \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-x^\alpha + |s| \sqrt{\alpha}} \sqrt{x} \, dx.$$

Сменом $x = (|s|/(2\alpha))^{2/(2\alpha-1)} u$ добива се даље

$$\varphi(|s|)=\int_0^{\infty} e^{-x^{\alpha}+|s|\sqrt{x}}\sqrt{x}\,dx=$$

$$=\left(\frac{|s|}{2\alpha}\right)^{\frac{2}{2\alpha-1}}\int_0^{\alpha}\exp\left\{-\left(\frac{|s|}{2\alpha}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}\left(u^{\alpha}-2\alpha\sqrt{u}\right)\right\}du=$$

$$=\left(\frac{|s|}{2\alpha}\right)^{\frac{2}{2\alpha-1}} e^{2\alpha\left(\frac{|s|}{2\alpha}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{|s|}{2\alpha}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}\left(u^{\alpha}-2\alpha\sqrt{u}+2\alpha\right)\right\}du.$$

Слично као при доказу става 2.3. може се показати да је за $u>0$

$$u^{\alpha}-2\alpha\sqrt{u}+2\alpha>\frac{1}{2}u,$$

одакле следи

$$\varphi(|s|)\leqslant\left(\frac{|s|}{2\alpha}\right)^{\frac{2}{2\alpha-1}}\exp\left\{2\alpha\left(\frac{|s|}{2\alpha}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}\right\}\cdot\int_0^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{|s|}{2\alpha}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}\frac{u}{2}\right\}du=$$

$$\leqslant 2\left(\frac{|s|}{2\alpha}\right)^{\frac{2-2\alpha}{2\alpha-1}}\exp\left\{2\alpha\left(\frac{|s|}{2\alpha}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant K(\alpha)\exp\left\{|s|^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}\right\},$$

чиме је лема доказана.

Лема 3.4. *Нека је функција $f(s)$ регуларна у свим тачкама угла*

(3.12) $$\varphi_0\leqslant\arg s\leqslant\varphi_1$$

и нека је на зрацима $\arg s=\varphi_0$ *и* $\arg s=\varphi_1$

(3.13) $$|f(s)|\leqslant M.$$

Нека осим тога постоји такав позитиван број δ *да је у углу* $\varphi_0\leqslant\arg s\leqslant\varphi_1$.

(3.14) $$|f(s)|<K\exp\left\{|s|^{\frac{\pi}{\varphi_1-\varphi_0}-\delta}\right\},$$

Тада је у свакој унутарњој тачки угла

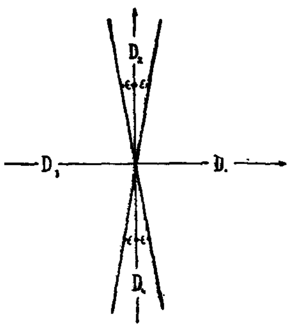
$$|f(s)| \leqslant M.$$

Доказ. *Поља-Сеге* [1] зад. 330. Став је од *Фрагмен-Линделефа.*

Доказ става 3.1. Доказаћу најпре да је функција $g(s)$, из леме 3.1 ограничена у целој равни. Узмем ли да је α број из процене (3.1), а $\delta > 0$ такво да је $\frac{2\alpha-1}{2\alpha\delta} < 1$, то могу одредити један фиксиран број $\varepsilon > 0$ који ће задовољити неједначину

$$\varepsilon < \frac{\pi}{2} \frac{2\alpha-1}{2\alpha(1+\delta)-\delta}. \tag{3.15}$$

Комплексну s-раван поделићу зрацима $\arg s = -\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\arg s = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, $\arg s = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ и $\arg s = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ у четири области D_1, D_2, D_3 и D_4 (в. сл. 2) тако да је D_1 област дефинисана са $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqslant \arg s \leqslant \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, D_2 област дефинисана са $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant \leqslant \arg s \leqslant \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ док су D_3 и D_4 њихове симетричне слике у односу на координатни почетак.



Сл. 2.

На зрацима $\arg s = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ и $\arg s = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, по леми 3.2, $g(s)$ задовољава неједначину

$$|g(s)| \leqslant M(\varepsilon); \tag{3.16}$$

како је $g(s)$ парна функција, иста процена важи и на зрацима $\arg s = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ и $\arg s = -\frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

Даље, у углу D_2, на основи (3.11) и (3.15), следи да $g(s)$ задовољава неједначину

$$|(g s)| \leqslant K(\alpha) \exp\left\{|s|^{\frac{\pi}{\varphi_1 - \varphi_0} - \delta}\right\},$$

где је $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ и $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

Применом леме 3.4 закључујем да је $g(s)$ ограничена у D_2, а како је она парна функција, да је ограничена и у D_4.

Доказаћу сада да је $g(s)$ ограничена и у области D_1 (а из њене парности следиће исто за D_3). Јасно је да је за довољно мало $\eta > 0$ $g(s)$ ограничена на правој $R\{s\} = \eta$. Како се функција $g(s)$ у десној полуравни може претставити Лапласовим интегралом, следи да је она ограничена и десно од праве $R\{s\} = \eta$, тј. у целој области D_1 јер за мале $|s|$ већ се из (3.5) да закључити ограниченост функције $g(s)$.

Према томе, $g(s)$ је ограничена у целој равни. Како је она цела функција, применом првог Лиувиловог става закључујем: функција $g(s)$ је константа. Како, као Лапласов интеграл, $g(s) \to 0$ кад $s \to +\infty$, добивам најзад да је

$$g(s) \equiv 0. \tag{3.17}$$

Вратим ли се на (3.3), имам

$$\int_0^\infty e^{-su} A(u^2)\, du \equiv 0$$

одакле применом става о једнозначности Лапласове трансформације (Деч [1] стр. 35), закључујем

$$A(u) \equiv 0,$$

сем евентуално на множини нулте мере, чиме је завршен доказ става 3.1.

Као што сам у уводу напоменуо за Лапласову трансформацију важи сличан став:

Ако је

$$L(t) = O\left(\exp\frac{-1}{t^\theta}\right), \quad t \to 0+ \tag{3.19}$$

где је $\theta > 1$, *тада је*

$$A(u) \equiv 0,$$

сем евентуално на множини нулте мере.

Овај став је последица једног Дечовог става (в. Деч [2], стр. 483; став 6).

ЛИТЕРАТУРА

Avakumović G. Vojislav — [1] Bemerkung über einen Satz des Herrn T. Carleman. *Math. Zeitschr.* **53** (1950), Heft 1, str. 53—58.

[2] Einige Sätze über Laplacesche Integrale. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sci.* **3** (1950) str. 287—304.

[3] O Laplace-ovim integralima koji se ponašaju kao iterirana eksponencijalna funkcija. *Glas* CLXXIII (1936), str 183—196.

Avakumović V. i Karamata J. — Über einige Taubersche Sätze, deren Asymptotik vom Exponentialcharakter ist. *Math. Zeitschr.* **41** (1936), Heft 3, str. 345—356.

Bernstein Vladimir — Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris 1933.

Бојанић Р. и Вучковић В. — О сопственим вредностима граничног задатка малих осцилација еластичне плоче. *Зборник радова мат. инст. САН* **3** (1953) стр. 107—129.

Widder David Vernon — The Laplace Transform, Princeton 1946.

Wiener Norbert — [1] Tauberian Theorems. *Ann. of Math.* **33** (1932), str. 1—100.

[2] A theorem of Carleman. *The Science Reports of Nat. Tsing-Hua Univ.* (*A*) **3** (1936), str. 291—298.

Doetsch Gustav — [1] Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937.

[2] Handbuch der Laplace-Transformation, Basel. 1950.

Karamata Jovan — [1] Über einen Satz von H. Heilbron und E. Landau. *Publ. Math de l'Univ. de Belgrade* **5** (1936), str. 28—38.

[2] Quelques théorèmes de nature tauberiene. *Studia Mathematica* **4** (1933), str. 4—7.

Carleman Torsten — [1] Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes (1934) (foto-kopija).

[2] Über die Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen. *Berichte über die Verh. der Sächsch. Acad. der Wiss.* **88** (1936), 119—132.

Littlewood John E. — The converse of Abel's Theorem on power Series. *Proc. of the London Math. Soc.* (Ser. 2) **9** (1911), 434—448.

Pólya-Szegö — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, Berlin 1925.

Freud Geza — Restglied eines Tauberschen Satzes. *Acta Mathematica* (1952).

Hardy G. H. i Littlewood J. E. — [1] Tauberian Theorems concerning Power Series and Dirichlet's Series whose coefficients are positive. *Proc. London Math. Soc.* (Ser. 2) **13** (1914), str. 174—191.

[2] Notes on the theory of series (XI): On Tauberian theorems. *Ibid* **30** (1928), 23—27.

DIE STIELTJES-TRANSFORMATION DIE MIT DER GESCHWINDIGKEIT DER EXPONENTIALFUNKTION UNENDLICH KLEIN WIRD

VLADETA VUČKOVIĆ

Es sei $A(u)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung auf jeder endlichen Strecke und es sei $A(0) = 0$.

$$S(x) = \int_0^\infty \frac{d\,A(u)}{u+x}$$

bezeichne die Stieltjes-Transformation die für ein und somit für alle $x > 0$ konvergiert;

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, d\,A(u)$$

bezeichne die Laplace-Transformation die für $\sigma > 0$ konvergiert. Dabei ist $s = \sigma + i\tau$.

Verfasser beweist u. A.

Satz 1.1. *Wenn*

$$S(x) = O(e^{-x^{\alpha}}), \quad x \to \infty \tag{1.1}$$

und $0 < \alpha \leqslant {}^1/_2$, *so ist die für* $\sigma > 0$ *reguläre Funktion*

$$\chi(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} u^{\gamma} A(u^{1/\alpha})\, du, \quad (\gamma > -1),$$

noch im Punkte $s = 0$ *regulär.*

Satz 2.1. *Aus* (1.1) *und der Konvergenzbedingung*

$$u^{\beta}[A(v) - A(u)] > -m \quad \text{für alle} \quad u \leqslant v \leqslant u + u^{1-\alpha} \tag{2.1}$$

(wobei $\beta > -\alpha$*) folgt*

$$u^{\beta} A(u) = O(1), \quad u \to \infty. \tag{2.2}$$

Satz 2.3. *Aus*

$$L(\sigma) = O\left\{\exp \frac{-1}{\sigma^{\alpha/(1-\alpha)}}\right\}, \quad \sigma \to 0+, \quad (0 < \alpha \leqslant {}^1/_2),$$

und der Konvergenzbedingung (2.1) *folgt* (2.2).

Satz 3.1. *Ist*

$$S(x) = O(e^{-x^{\alpha}}), \quad x \to \infty$$

und $\alpha > {}^1/_2$, *so ist* $A(u)$ *eine Nullfunktion.*

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ

ПРИМЕНА ХИПЕРБОЛНИХ ФУНКЦИЈА НА ИЗВОЂЕЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФОРМУЛА ПРАВОЛИНИЈСКОГ ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА ЛОБАЧЕВСКОВЕ РАВНИ ЧИСТО ПЛАНИМЕТРИЈСКИМ ПУТЕМ

Претходна примедба

Док су творци неевклидове геометије, *Лобачевски* и *Бољај*, могли да изведу те тригонометријске формуле само узимајући у помоћ фигуре тродимензионалног простора, дотле је немачки математичар *Либман* успео да те формуле изведе чисто планиметријски применом хиперболних функција и граничних лукова.[1]) То извођење донекле је упростио енглески математичар *Сомервил*.[2])

У следећим редовима писац је покушао да Либман-Сомервилово извођење још више упрости, при чему му је било од извесне помоћи и Каганово извођење уз руски превод *„Геометријских испитивања"* Лобачевскога.[3])

Полазну тачку за ово извођење претставља гранични лук код кога је тангента у једној крајњој тачци (тј. управна на осу која пролази кроз ту тачку) паралелна са осом која пролази кроз другу крајњу тачку. Тај се гранични лук означава са S, а сваки други гранични лук са s.

---

[1]) Први пут је то извођење *Либман* саопштио у једној расправи из 1907-е г., па затим у другом издању своје *„Nichteuklidische Geometrie"*, 1912-е. У трећем издању од 1923-е то се извођење налази на стр. 32 *ff* и 55 *ff*.

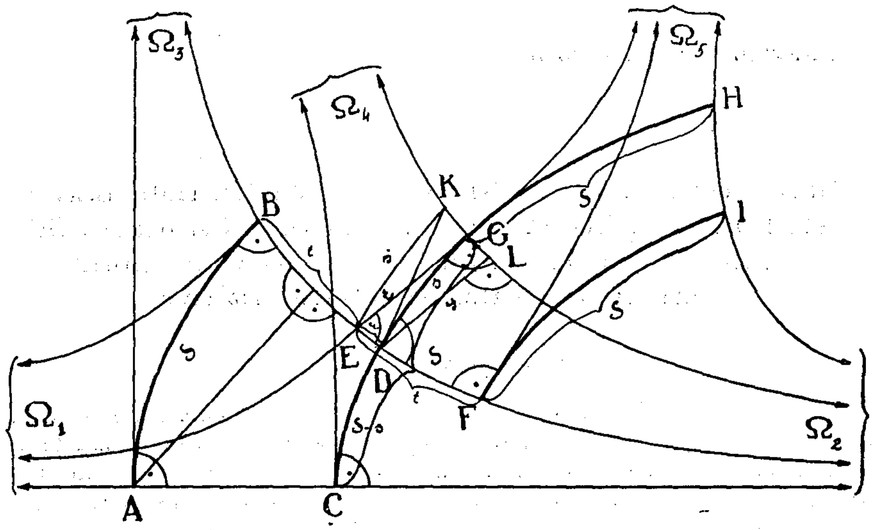
[2]) *D. M. Sommerville*, The Elements of Noneukleadean Geometry, 1914 (p. 61—74),

[3]) Каганов превод изашао је у првој свесци новог издања целокупних дела Лобачевскога од стране совјетске Академије наука у Москви 1945 г. под насловом: *Н. М. Лобачевский*, Геометрические иследования по теории пapaлелных линий. Перевод... *В. Ф. Кагана*.

У том преводу одговарајуће излагање налази се у „Приложенie VII", стр. 164—166 (т. 14 и 15).

У следећем биће цитиран и мој српски превод Лобачевскога, чије је друго издање издала српска Академија наука у збирци „Класични научни списи", књ. III, 1951 (и то биће цитирани „Додатци" и параграфи).

У фиг. 1 гранични луци AB, CG, GH и FJ једнаки су и равни луку S, док је гранични лук $DG = s$, тако да је лук $CD = S - s$, а лук $DH = S + s$. Даље је (ако са Ω означимо тачку пресека двеју паралелних у бесконачности) $B\Omega_1 \parallel A\Omega_1$, $G\Omega_1 \parallel C\Omega_1$ и (према ставу 25-ом) $B\Omega_1 \parallel G\Omega_1$. Ако се дуж EG означи са t, биће



Фиг. 1

$\sphericalangle GED = \Pi(t)$, пошто је $E\Omega_2 \parallel G\Omega_2$. Како је $\sphericalangle \Omega_1 EB = GED$, то је и $BE = t$. Како је пак $F\Omega_5 \parallel J\Omega_5$, $G\Omega_5 \parallel H\Omega_5$ и $E\Omega_5 \parallel F\Omega_5$, то је и $EF = t$ (и $DF = t - u$).

Ако се дуж ED означи са u, следоваће непосредно из фигуре да је (према формули $s = s' \cdot e^x$ из става 33):

$$S : (S - s) = e^{t+u}, \quad (S + s) : S = e^{t-u},$$

а одавде

$$S - s = S e^{-(t+u)}, \quad S + s = S e^{t-u}.$$

Сабирањем последњих двеју једначина следоваће

$$2S = S\,(e^t e^{-u} + e^{-t} e^{-u}) =$$
$$= S e^{-u} (e^t + e^{-t}),$$

а одавде

$$e^u = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t;$$

одузимањем (претпоследње од последње) следоваће

$$2s = S\,(e^t e^{-u} - e^{-t} e^{-u}) =$$
$$= S e^{-u} (e^t - e^{-t}) =$$
$$= S \frac{2}{e^t + e^{-t}} (e^t - e^{-t}),$$

а одавде

$$s = S\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = S \operatorname{tgh} t.$$

Ако се лук EK означи са s', биће

$$s' = s e^u = S \operatorname{tgh} t \cosh t = S \frac{\sinh t}{\cosh t} \cosh t = S \sinh t.$$

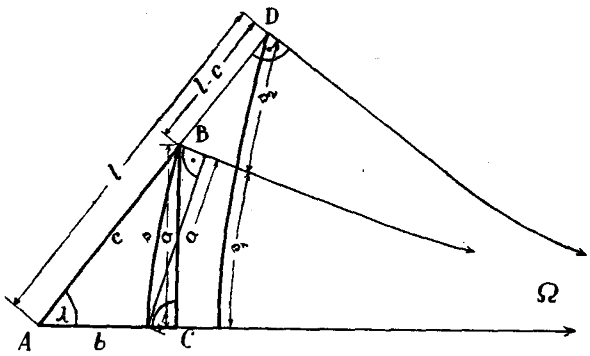
Ако се напослетку управна DL означи са y, биће (пошто је y истом односу према луку s у коме је t према s')

$$s = S \sinh y.$$

II

Тригонометријске формуле за праволинијски правоугли троугао Лобачевскове равни изводе се овако (хиперболне функције изложене су у „Додатку II").

Нека је у фиг. 2 ABC праволинијски правоугли троугао са правим углом C и странама a, b, c. Продужимо страну c иза темена B до тачке D тако, да управна у тачци D на то продужење буде паралелна са продужењем стране b иза тачке C, тј. да буде $D\Omega \| A\Omega$. Ако растојање AD означимо са l, биће према томе



Фиг. 2

$\sphericalangle \lambda = \Pi(l)$. Повуцимо из темена B полуправу $B\Omega \| D\Omega$, тада ће $\sphericalangle DB\Omega$ бити $= \Pi(l-c)$. Повуцимо даље из тачака B и D граничне луке s и $s_1 + s_2$, чије ће осе бити паралелне $C\Omega$, $B\Omega$ и $D\Omega$.

Како је (на основу формула изведених у претходној фигури) с једне стране

$$s_1 + s_2 = S \operatorname{tgh} l$$

а с друге

$$s_1 + s_2 = S \frac{\sinh a}{\cosh (l-c)} + S \operatorname{tgh} (l-c),$$

[пошто је

$$s = S \sinh a, \quad e^u = \cosh (l - c),$$

дакле

$$s_1 = s\, e^{-u} = S \frac{\sinh a}{\cosh (l - c)}$$

и

$$s_2 = S \operatorname{tgh} (l - c) \qquad],$$

то је

$$S \operatorname{tgh} l = S \frac{\sinh a}{\cosh (l - c)} + S \operatorname{tgh} (l - c),$$

$$\frac{\sinh l}{\cosh l} = \frac{\sinh a}{\cosh (l - c)} + \frac{\sinh (l - c)}{\cosh (l - c)},$$

дакле

$$\sinh l \cosh (l - c) = \sinh a \cosh l + \sinh (l - c) \cosh l.$$

Али како је

$$\cosh (l - c) = \cosh l \cosh c - \sinh l \sinh c,$$

$$\sinh (l - c) = \sinh l \cosh c - \cosh l \sinh c,$$

то је даље

$$\sinh l (\cosh l \cosh c - \sinh l \sinh c) =$$

$$= \sinh a \cosh l + \cosh l (\sinh l \cosh c - \cosh l \sinh c),$$

$$\sinh c (\cosh^2 l - \sinh^2 l) = \sinh a \cosh l,$$

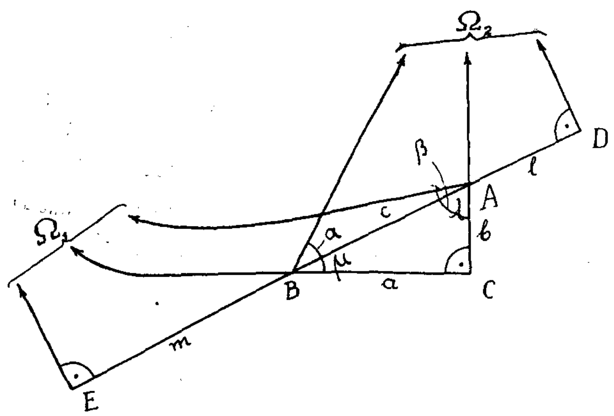
$$\sinh c = \sinh a \cosh l.$$

Ово је основна формула тригонометрије правоуглог троугла Лобачевскове равни, у којој се јављају само хиперболне функције страна троуглових (a и b) и дужи паралелизма (угла λ), а која је изведена чисто планиметријски, без употребе сферног троугла. Остале формуле изводе се чисто планиметријски на основу кореспонденције која постоји између правоуглог троугла и тропавоуглог (тзв. Ламбертовог) четвороугла.

III

Та се кореспонденција утврђује на следећи начин.

У фиг. 3 полазну тачку сачињава правоугли троугао ABC са правим углом у C, оштрим угловима λ и μ и странама c, a и b. Како претпостављамо да је $\lambda = \Pi(l)$ и $\mu = \Pi(m)$, то је хипотенуза c продужена иза тачке A за l и иза тачке B за m, а из крајњих тачака тих продужења D и E подигнуте су управне. Даље је катета a продужена иза B тако да $B\Omega_1$ буде $\| E\Omega_1$, катета b



Фиг. 3

продужена иза A тако да $A\Omega_2$ буде $\| D\Omega_2$, а из тачака A и B повучене полуправе $A\Omega_1$ и $B\Omega_1$ тако да је $\sphericalangle \Omega_2 BC = \alpha = \Pi(a)$, а $\sphericalangle \Omega_1 AC = \beta = \Pi(b)$.

Тада ће из фиг. 3 следовати да је:

(1) $$\Pi(c+l) = \alpha - \mu,$$

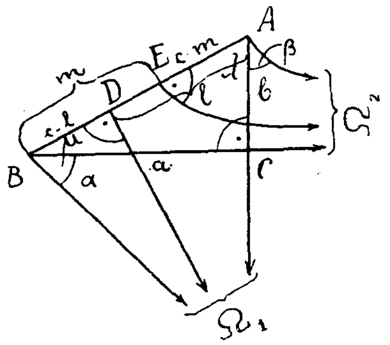
(1′) $$\Pi(c+m) = \beta - \lambda.$$

У фиг. 4 на хипотенузи c правоуглог троугла ABC подигнута је у тачци D, која дели хипотенузу на одсечке $DB = c - l$ и $DA = l$, управна $D\Omega_1$, тако да је $B\Omega_1 \| D\Omega_1$ и $A\Omega_1 \| D\Omega_1$. Даље је из тачке E на хипотенузи c, која ову дели на одсечке $BE = m$ и $AE = c - m$, подигнута управна $E\Omega_2$ тако да је $B\Omega_2 \| E\Omega_2$, а из тачке A повучена полуправа $A\Omega_2 \| C\Omega_2$ тако да је $\beta = \Pi(b)$.

Тада ће из фигуре следовати да је:

(2) $$\Pi(c-l) = \alpha + \mu,$$

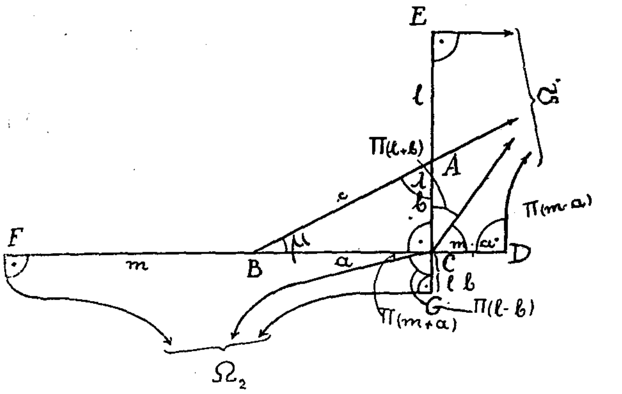
(2′) $$\Pi(c-m) = \beta + \lambda.$$



Фиг. 4

Лако се да показати да би исти резултат следовао и за случајеве када је $l > c$ и $l = c$.

У фиг. 5 катета a правоуглог троугла ABC продужена је иза тачке C до тачке D тако да је $BD=m$, а катета b иза тачке



Фиг. 5

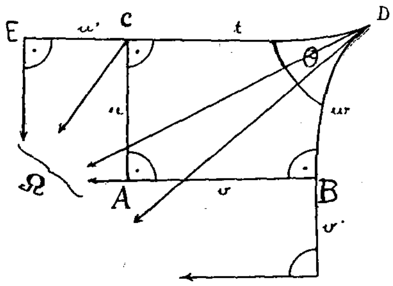
A до тачке E тако да је $AE=l$. Даље је катета a продужена иза тачке B до тачке F тако да је $BF=m$, а катета b иза тачке C до тачке G тако да је $AG=l$. Напослетку у тачкама D, E, F и G подигнуте су одговарајуће управне тако да је $C\Omega_1 \parallel D\Omega_1$, $C\Omega_1 \parallel E\Omega_1$, $C\Omega_2 \parallel G\Omega_2$ и $C\Omega_2 \parallel F\Omega_2$.

Тада ће из фигуре следовати да је:

(3) $$\Pi(m-a) + \Pi(l+b) = \pi/2,$$

(3′) $$\Pi(m+a) + \Pi(l-b) = \pi/2.$$

Нека је у троправоуглом четвороуглу $ABCD$ (фиг. 6) $AC=u$, $AB=v, BD=w, CD=t$ и оштри угао $=\theta$. Ако продужимо страну t иза тачке C до тачке E за дуж u' и у крајњој тачци E подигнемо управну, а из тачке D овој паралелну $D\Omega$, биће:



Фиг. 6

(I) $$\Pi(t+u') + \Pi(w) = \theta.$$

На сличан начин следоваће из исте фигуре да је:

(II) $$\Pi(w+v') + \Pi(t) = \theta.$$

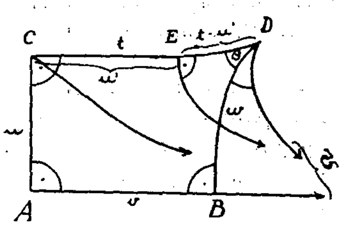
У фиг. 7 страна троправоуглог четвороугла ABC подељена је тачком E на одсечке u' и $t-u'$, у тачци E подигнута је управна $E\Omega$, а из тачке D овој паралелна $D\Omega$. Тада из фигуре следује да је:

(I′) $$\Pi(t-u') - \Pi(w) = \theta.$$

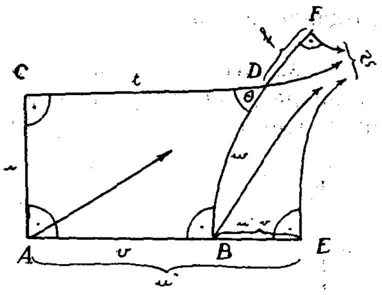
На сличан начин следоваће (одговарајућом допуном фигуре):

(II′) $$\Pi(w-v')-\Pi(t)=\theta.$$

У фиг. 8 страна v троправоуглог четвороугла $ABCD$ продужена је иза тачке B до тачке E тако да је $AE=u', BE=u'-v$, у



Фиг. 7



Фиг. 8

тачци E подигнута је управна $E\Omega$, а страна w продужена иза тачке D за дуж $DF=f$ и из тачке F повучена управна $F\Omega$.

Тада из фигуре следује да је:

(III) $$\Pi(u'-v)+\Pi(w+f)=\pi/2.$$

На сличан начин следоваће (одговарајућом допуном фигуре):

(III) $$\Pi(v'-u)+\Pi(t+f)=\pi/2.$$

Како је троправоугли четвороугао одређен са два од својих пет комада (четири стране u, v, w и t и оштри угао θ), то ћемо да бисмо доказали да му одговара правоугли троугао са странама a, b, c, и угловима λ и μ, ставити $t=c$ (тј. претпоставити да је горња страна четвороугла равна хипотенузи троугла) и $u=m'$ (тј. претпоставити да је предња страна u четвороугла равна допунској дужи паралелизма угла μ). Како је тада

$$\Pi(c+m)=\Pi(t+u')$$

и

$$\Pi(c-m)=\Pi(t-u'),$$

то ће ид 1′ и I следовати

$$\Pi(c+m)=\theta-\Pi(w)=\beta-\lambda,$$

а из 2′ и I′:

$$\Pi(c-m)=\theta+\Pi(w)=\beta+\lambda.$$

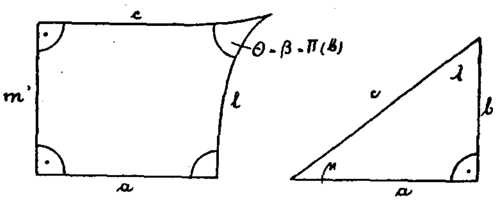
Сабирањем идентитета $\theta-\Pi(w)=\beta-\lambda$ и $\theta+\Pi(w)=\beta+\lambda$ следоваће да је $2\theta=2\beta$, дакле $\theta=\beta$, тј. оштри угао θ троправоуглог четвороугла $ABCD$ биће једнак углу $\Pi(b)=\beta$ правоуглог троугла ABC. А из одузимања тих идентитета следоваће да је $\Pi(w)=\lambda$, тј. да је задња страна w троправоуглог четвороугла једнака дужи паралелизма l угла λ правоуглог троугла ($\Pi(\lambda) = l$). Како је даље $\Pi(f) = \theta = \beta = \Pi(b)$, то је и $f = b$.

Напослетку, како је $u' = m$, из III и 3 следоваће:

$$\Pi(m - v) = \pi/2 - \Pi(l + b) = \Pi(m - a),$$

а одавде $v = a$.

Као што се види, троправоуглом четвороуглу $c, m', a, l, \Pi(b)$ одговара доиста правоугли троугао $c, a, b, \Pi(l), \Pi(m)$, одн. правоугли троугао c, a, b, λ, μ (фиг. 9).



Фиг. 9

На сличан начин одговараће сваком од четири троправоугла четвороугла, који су још могући, по један нов правоугли троугао. Имаћемо према томе у свему следећих пет (тзв. асоцираних или придружених) правоуглих троуглова:

1. $c, \ a, \ b, \ \Pi(l), \ \Pi(m)$;
2. $l, \ b, \ m', \ \Pi(a'), \ \Pi(c)$;
3. $a', \ m', \ c', \ \Pi(b'), \ \Pi(l)$;
4. $b', \ c', \ l', \ \Pi(m), \ \Pi(a')$;
5. $m, \ l', \ a', \ \Pi(c), \ \Pi(b')$.

IV

Хиберболне формуле добијају се применом формуле

1. $\sinh c = \sinh a \cosh l$,

која је изведена чисто планиметријски за троугао $c, a, b, \Pi(l), \Pi(m)$, на сваки од остала четири придружена троугла. На тај начин добијају се ове четири формуле:

2. $\sinh l = \sinh b \cosh a'$
3. $\sinh a' = \sinh m' \cosh b'$,
4. $\sinh b' = \sinh c' \cosh m$,
5. $\sinh m = \sinh l' \cosh c$.

Да бисмо дошли до дефинитивних формула, треба се ослободити чланова са акцентима (тј. допунских дужи). То бива на основу следеће четири трансформационе формуле:

$$1'.\quad \sinh a = [\operatorname{cotg} \Pi(a) = \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}\Pi(a') =]\ \frac{1}{\sinh a'}\ ;$$

$$2'.\quad \cosh a = \left[\frac{1}{\sin \Pi(a)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha'} = \frac{1}{\cos \Pi(a')} = \right]\operatorname{cotgh} a';$$

$$3'.\quad \sinh a' = [\ \cosh a =]\ \frac{1}{\sinh a}\ ;$$

$$4'.\quad \cosh a' = \operatorname{cotgh} a.$$

Применом четврте од ових формула претвара се формула

$$\sinh l = \sinh b \cosh a' = \sinh b \operatorname{cotgh} a = \sinh b\ \frac{1}{\operatorname{tgh} a}$$

у формулу

$$2.\quad \sinh b = \sinh m \operatorname{tgh} a.$$

На тај начин добијају се дефинитивне формуле:

$$3.\quad \sinh a = \sinh m \operatorname{tgh} b,$$

$$4.\quad \sinh c = \sinh b \cosh m,$$

$$5.\quad \cosh c = \sinh l\ \operatorname{snih} m.$$

Из дефинитивних формула 2, 3 и 5 следује нова формула:

$$6.\quad \cosh c = \cosh a \cosh b$$

на следећи начин.

Из

$$\sinh b = \operatorname{tgh} a \sinh l \quad \text{биће} \quad \sinh l = \frac{\sinh b}{\operatorname{tgh} a},$$

из

$$\sinh a = \operatorname{tgh} b \sinh m \quad \text{биће} \quad \sinh m = \frac{\sinh a}{\operatorname{tgh} b},$$

према томе из

$$\cosh c = \sinh l \sinh m.$$

следоваће заменом:

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

Кад се овако добијена формула .римени на придружене троугле 2, 3, 4 и 5 добиће се најпре формуле:

$$\cosh l = \cosh b \cosh m',$$

$$\cosh a' = \cosh m' \cosh c',$$

$$\cosh b' = \cosh c' \cosh l',$$

$$\cosh m = \cosh l' \cosh a,$$

па затим дефинитивне формуле:

$$7.\quad \cosh l = \cosh b \operatorname{cotgh} m,$$

$$8.\quad \operatorname{tgh} a = \operatorname{tgh} m \ \operatorname{tgh} c,$$

$$9.\quad \operatorname{tgh} b = \operatorname{tgh} c \ \operatorname{tgh} l,$$

$$10.\quad \cosh m = \operatorname{cotgh} l \cosh a.$$

V

Кад се у ових десет формула, у којима се јављају само хиперболне функције (страна троуглових a, b, c и дужи паралелизма l и m) место хиперболних функција дужи паралелизма l и m уведу тригонометријске функције одговарајућих углова паралелизма $\Pi(l)$ и $\Pi(m)$, одн. углова λ и μ, што бива на основу нама већ познатих трансформационих формула (в. „Додатак III“):

$$\sinh l = \operatorname{cotg} \lambda = \operatorname{cotg} \Pi(l),$$

$$\cosh l = \frac{1}{\sin \lambda} = \frac{1}{\sin \Pi(l)},$$

$$\operatorname{tgh} l = \cos \lambda = \cos \Pi(l),$$

$$\coth l = \frac{1}{\cos \lambda} = \frac{1}{\cos \Pi(l)},$$

добиће се следећих десет полутригонометријских формула:

$$1.\quad \sinh a = \sinh c \ \sin \Pi(l),$$

$$2.\quad \sinh b = \operatorname{tgh} a \ \operatorname{cotg} \Pi(l),$$

$$3.\quad \sinh a = \operatorname{tgh} b \ \operatorname{cotg} \Pi(m),$$

$$4.\quad \sinh b = \sinh c \ \sin \Pi(m),$$

$$5.\quad \cosh c = \operatorname{cotg} \Pi(l) \ \operatorname{cotg} \Pi(m),$$

$$6.\quad \cosh c = \cosh a \ \cosh b,$$

$$7.\quad \cos \Pi(m) = \cosh b \ \sin \Pi(l),$$

$$8.\quad \operatorname{tgh} a = \operatorname{tgh} c \ \cos \Pi(m),$$

$$9.\quad \operatorname{tgh} b = \operatorname{tgh} c \ \cos \Pi(l),$$

$$10.\quad \cos \Pi(l) = \cosh a \ \sin \Pi(m).$$

У ових десет формула налази се и оних пет (одн. седам) формула које су изведене у „Додатку III“ (то су формуле 6-10 и формуле 4 и 1).

Напослетку, кад се у ових десет полутригонометријских формула замене и хиперболне функције страна одговарајућим угловима паралелизма $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$, добиће се следећих десет чисто тригонометријских формула за правоугли траоугао:

1. $\operatorname{tg}\Pi(c) = \operatorname{tg}\Pi(a)\,\sin\Pi(l)$,
2. $\operatorname{tg}\Pi(l) = \cos\Pi(a)\,\operatorname{tg}\Pi(b)$,
3. $\operatorname{tg}\Pi(m) = \cos\Pi(b)\,\operatorname{tg}\Pi(a)$,
4. $\operatorname{tg}\Pi(c) = \operatorname{tg}\Pi(b)\,\sin\Pi(m)$,
5. $\sin\Pi(c) = \operatorname{tg}\Pi(l)\,\operatorname{tg}\Pi(m)$,
6. $\sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\,\sin\Pi(b)$,
7. $\sin\Pi(l) = \sin\Pi(b)\,\cos\Pi(m)$,
8. $\cos\Pi(a) = \cos\Pi(c)\,\cos\Pi(m)$,
9. $\cos\Pi(b) = \cos\Pi(c)\,\cos\Pi(l)$,
10. $\sin\Pi(m) = \sin\Pi(a)\,\cos\Pi(l)$.

У ових десет формула налазе се и оних пет чисто тригонометријских формула (то су и овде формуле 6-10) које је Лобачевски извео у §-у 35-ом (в. и „Додатак III").

APPLICATION DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES À LA RÉDUCTION DES FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES DU TRIANGLE RECTANGLE DANS LE PLAN DE LOBATSCHEWSKY

Par

BRANISLAV PETRONIJEVIĆ

Les deux inventeurs de la géometrie non-euclidienne n'ont pu deduire les formules trigonométriques du triangle rectangle dans leur plan qu'en se servant des figures spatiales. *Liebmann* était le premier qui, en appliquant les fonctions hyperboliques, a pu effectuer cette déduction d'une manière purement planimétriques. *Sommerville* a, qlus tard, simplifié le procédé planimétrique de *Liebmann*. Et l'auteur, dans cette étude, a voulu simplifier encore davantage le procédé de *Sommerville*.

МЕЂУНАРОДНИ КОНГРЕС МАТЕМАТИЧАРА 1954

Конгрес ће се одржати у Амстердаму од четвртка 2-ог септ. до четвртка 9-ог септ. (закључно) и састаће се у згради „The Royal Tropical Institute". Прва и последња седница одржаће се у згради „Concertgebouw" у Амстердаму.

Сву кореспонденцију упућивати на Секретаријат: 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam, The Netherlands.

Као што је у првом саопштењу означено, постојаће две категорије чланова на Конгресу. Редовни, који плаћају 50 форината (или уколико не присуствују банкету 40 форината) и кооптирани, који плаћају 20 форината (односно без банкета 10 форинти).

Уплате могу бити уплаћене одмах (по могућству пре 15. II. 1954) у корист рачуна „The Amsterdamsche Bank N. V., Filiaal Leiden.

Научни програм

Од стране Организационог одбора до сада су позвани једно двадесетак истакнутих математичара да одржеједночасовна саопштења. Највећи део се одазвао овом позиву. Организациони одбор сматра да ће у овим саопштењима бити приказане најновије тековине у свима областима математичких наука.

Од 45 стручњака, који су позвани да одрже получасовна саопштења, велика већина их је прихватила позив. Ова саопштења распоређена су по појединим секцијама на следећи начин:

Секција	I	Алгебра и Теорија бројева	8	саопштења
	II	Анализа	13	„
	III	Геометрија и Топологија	8	„
	IV	Вероватноћа и Статистика	4	„
	V	Математичка физика и Примењена математика	6	„
	VI	Логика и Основи	3	„
	VII	Филозофија, Историја и Настава	3	„

Кратка предавања моћи ће одржати редовни чланови Конгреса који се претходно пријаве. Време одређено за овакво предавање износи 15 минута. Организациони одбор намерава да раздели примерке прикупљених сепарата ових предавања свима редовним члановима на почетку Конгреса. Организациони одбор не може се обавезати да ће пријаве које стигну после 15. II. моћи бити прихваћене.

Извештај ће бити штампан после Конгреса. Сваки редован члан примиће га бесплатно. По сниженој цени моћи ће набавити извештај и они који то изјаве пре 15. III. 1954; пошто се за сада још не може одредити обим Извештаја, ни цена му се не може још утврдити.

Хотелске могућности

Организациони одбор резервисао је известан број хотелских соба. Цена соби по категорији хотела (укључујући континентални доручак) по дану и по лицу износи:

A. D. Gld. 15.— До D. Gld. 18.—
B. D. Gld. 9.— До D. Gld. 14.—
C. D. Gld. 4.— До D. Gld. 8.—