СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ЗБОРНИК РАДОВА

Књ. XVIII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. 2

БЕОГРАД
1952

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ЗБОРНИК РАДОВА

Књ. XVIII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. 2

I2

БЕОГРАД
1952

ACADÉMIE SERBE DES SCIENCES

RECUEIL DES TRAVAUX

T. XVIII

INSTITUT MATHÉMATIQUE

№ 2

Уредник:

Дописник Д-р РАДИВОЈЕ КАШАНИН

управник Математичког института САН

Примљено на X скупу Одељења природно-математичких наука САН 22 XI 1951 године

Научна књига

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

Штампарија и књиговезница Српске академије наука, Космајска бр. 28

САДРЖАЈ:

Д-р техн. ИВАН АРНОВЉЕВИЋ
7 III 1869 — 7 XI 1951

7 новембра 1951 преминуо је у Београду д-р техн. Иван Арновљевић, дописни члан Српске академије наука, члан Научног савета Математичког института САН, редовни професор Универзитета у пензији.

Д-р И. Арновљевић родио се 7 III 1869 у Кикинди. Мајку је изгубио у осмој години живота, а годину дана касније и оца, судију окружног суда. Прва четири разреда гимназије апсолвирао је у Кикинди, друга, виша четири разреда, на самоуправној Српској православној великој гимназији у Новом Саду, где је 1886 матурирао. Као питомац Матице српске студирао је на Техничкој великој школи у Бечу, где је 1892 положио други државни испит за звање грађевинског инжињера.

Прво запошљење[1] И. Арновљевић добио је 1892 у бироу за трасирање Ing. Seligmann-а у Бечу, где је сарађивао на грађењу же-

[1]) Као извор за биографске податке служила нам је аутобиографија д-р И. Арновљевића из 1939 год.

лезница кроз долину реке Gail. Како га је више привлачила статика и мостоградња, прешао је у конструкциони биро Ing. Liss-a у Бечу, где је 1894 сарађивао на конкурсу за израду моста преко Дунава код Будимпеште. Већ у то време понудио му је проф. Brik место конструктора на катедри за мостоградњу. Овог места се није примио из скромности. 1894 ступио је у конструкциони биро за грађење мостова фирме Waagner у Бечу. Ту се под руководством Ing. P. Neumann-a (доцнијег професора на Техничкој великој школи у Брну) школовао за конструктора. (У то доба радили су код ове фирме Postuwanschitz, Kapsch, Brunner, касније сви професори техничких великих школа). 1897 ступио је И. Арновљевић као самосталан конструктор у службу код фирме за грађење мостова Biró у Бечу. После краћег времена понудила му је фирма Waagner место руководиоца бироа, но он је ту понуду одбио.

Крајем 1903 И. Арновљевић је намеравао да ступи у службу српских државних железница и водио о томе преговоре. Очекујући да ће се преговори повољно завршити, отказао је службу фирми Biró у Бечу; али место понуђено на крају тих преговора није одговарало по рангу његовој десетогодишњој пракси, па је био присиљен да понуду одбије. Тринаест месеци био је без службе и живео од уштеђевине. То време искористио је да допуни знања из Математике, Механике и Отпорности материјала, стечена на Техничкој великој школи.

Када је Дирекција за грађење водених путева у Бечу расписала конкурс за конструкторе за челичне грађевине, ступио је 1 децембра 1905 у њену службу као контрактуални инжињер. Сарадња на детаљном пројекту челичног каналског моста преко реке Skawe, а нарочито пројектовање корита и вешања, што је њему поверено, били су повод за науче радове наведене у списку радова под 1 до 3.

Године 1907 поверила му је Дирекција српских државних железница ревизију пројеката фирме Waagner-Biró-Kurz за изградњу челичних мостова. Овај је рад био повод за научне расправе наведене под 5 до 8.

По наговору проф. Brik-a и млађег пријатеља д-р М. Миланковића, поднео је 1909 молбу за дозволу за полагање ригороза на Техничкој великој школи у Бечу. За докторску дисертацију одобрена је расправа наведена под 9. За доктора техничких наука промовисан је 4 маја 1910.

На захтев д-р М. Миланковића, професора Филозофског факултета у Београду, конкурисао је на упражњено место катедре за Механику и Статику инжињерских конструкција. По избору у већу (7 јуна 1910) постављен је 24 јуна за контрактуалног, а 1 априла 1912, по пријему у српско поданство, за редовног професора. 10 октобра 1910 одржао је приступно предавање „Однос Механике према инжињерским наукама“.

За време балканских ратова, када се на Универзитету није предавало, био је мобилисан и као војни обвезник додељен на рад у одељење за цензуру.

1914, пре објаве рата, посетио је трипута пријатеља инж. J. Ђурића шефа ложионице Südbahn-а у Lienzu. Ове посете учиниле су да је од тамошњих цивилних и војних власти осумњичен за шпијунажу. Он је, међутим, спокојно радио на расправи наведеној под 13.

25 јула 1914 позвао га је срески начелник и саопштио му да се мора преселити у тамошњу касарну. 4 августа преведен је у Linz, предат команданту места и без саслушања притворен у војни затвор, где је затекао неколико земљака. Наредног дана спроведен је под војном стражом у Kufstein на тврђаву Geroldseck. Бојазан да му и пријатељ не страда толико га је потресла да је покушао да изврши самоубиство. Време од 6 августа до 1 септембра провео је у градској болници и 1 септембра поново је преведен на тврђаву. Наредног дана бацио се са другог спрата. До свести дошао је у болници, где је лежао са непомичном кичмом и раном на глави. После 8 дана могао се кретати. 25 септембра прочитао је у једном Innsbruck-ском дневном листу да је инж. J. Ђурић, шеф ложионице у Lienzu, осумњичен за одавање војних тајни, после строге истраге пуштен као невин. Ослобођење његова пријатеља побољшало је и његов положај. Сународницима који су остали у војном затвору у Линцу и ускоро пребачени у Kufstein било је дозвољено да га без сведока могу посећивати. Воља ослабљена последњим доживљајима и навика на самоћу били су јачи од свих уверавања да може напустити болницу, докле га 8 децембра један конфиниран студент није „превео“ у градски хотел и придружио шесторици земљака који су од августа били пуштени из тврђаве на слободу.

По ступању Италије у рат прешли су у варош Raabs. Тамо су била конфинирана лица из свих савезничких земаља. Одбор швајцарских високих школа за помоћ заробљеним студентима достављао је појединим лицима научна дела и књиге. На молбу достављена је д-р Арновљевићу H. Appell-ова „Traité de mécanique rationnelle“. У времену од маја 1916 до фебруара 1917 он је то дело подробно проучавао. Једну напомену у вези с тим проучавањем саопштио је непосредно Appell-у, који је садржај дописа предао уредништву „Nouvelles annales de mathématiques“ ради објављивања (в. рад под 11).

Од јануара до јуна 1918 држао је српским студентима који су студирали медицину на аустриским високим школама предавања о основама физике.

18 новембра 1918 враћени су сви српски и црногорски поданици специјалним возом у домовину. 25 новембра стигао је у Београд.

Предавања на Универзитету почела су тек маја 1919. У току четири семестра предавао је поред Механике са Отпорношћу материјала и Статику грађевинских конструкција и челичне мостове. Од 1920 и 1921 имају ови предмети своје наставнике, а 1922 издвојена је Отпорност материјала у засебан предмет. Од те године до пензионисања предавао је д-р Арновљевић Техничку механику слушаоцима II, III и IV семестра грађевинског и машинског отсека.

20 маја 1939 је пензионисан, пошто је навршио законом предвиђену старост.

По одлуци Савета Техничког факултета предавао је и даље Кинематику и Динамику као хонорарни професор до априла 1941.

18 марта 1948 изабран је за дописног члана Српске академије наука.

Од 8 септембра 1948 био је члан Научног савета Математичког института САН.

Радови д-р И. Арновљевића привукли су пажњу стручњака и данас се цене. Већ 1894 понудио му је проф. Brik место конструктора при катедри за мостове на Техничкој великој школи у Бечу, а 1897 фирма за грађење конструкција Waagner из Беча место руководиоца бироа. Радови под 1 до 3 цитирани су у инжињерском приручнику Hütte, 21—23 издање. Рад под 5 — О расподели силе у закованим штаповима — објављен је и у часопису „Annales des ponts et chaussées“. Радови под 7 и 8 значајни су и данас у добу велике примене армираног бетона и заваривања у конструкцијама.

Као признат научни радник и конструктор д-р И. Арновљевић изабран је 1910 за редовног професора Теориске механике на Техничком факултету Београдског универзитета. Од тада па до пензионисања (1939) он је својом делатношћу значајно подигао ниво наставе из Механике на том факултету и створио катедру Механике.

Школске године 1911—1912 био је изабран за декана Техничког факултета. Од 1924 вршио је дужност претседника Испитног одбора на Грађевинском отсеку.

Д-р И. Арновљевић био је предан, веома савестан и приступачан наставник. У односу према студентима умео је да заузме став који је истовремено уливао поштовање и поверење. Његова предавања су одговарала прогресу науке. Чланови испитног одбора памте како је стрпљиво и истрајно испитивао студенте.

Да би својим слушаоцима олакшао рад, д-р И. Арновљевић је непосредно по избору за професора написао предавања из Механике и Отпорности материјала и предавање из Статике инжињерских конструкција. Предавање из Механике и Отпорности материјала прерадио је и допунио 1933 и 1934 до 1938, а 1947 до 1949 штампани су „Основи Теориске механике“ у 6 књига.

Српска академија наука, ценећи научни рад д-р И. Арновљевића, изабрала га је 1948 за свог дописног члана и тиме дала видно признање његовом животном раду.

Својим радом на науци он се одужио Универзитету и Академији наука, а наставничким радом својој школи, а и једним и другим своме народу.

Нарочита црта карактера д-р И. Арновљевића била је скромност. Говори његових колега и ученика на комеморативној седници Техничке велике школе у Београду и на погребу доказ су за то.

Д-р Иван Арновљевић оставља у нашој науци видно и светло име.

Слава му!

У Београду 9 XII 1951 *М. Вречко*

СПИСАК РАДОВА Д-р И. АРНОВЉЕВИЋА

1. Ein Fall des eingespannten auf Zug und Biegung beanspruchten Stabes. Zeitschr. d. österr. Ing. und Arch. Vereins, Wien 1906, № 34, S. 480–483.

2. Der elastisch eingespannte auf Zug und Biegung beanspruchte Stab. Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst, Wien 1907, Heft 4, S. 61—66.

3. Der eingespannte auf Druck und Biegung beanspruchte Stab. Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst, Wien, 1907, S. 372—378.

4. Die Gleichgewichtbedingungen eines starren ebenen Systems. Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst, Wien, 1908, Heft 3.

5. Zur Kraftverteilung in genieteten Stäben. Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst, Wien 1908, S. 607—615. (Незнатно скраћено и у Annales des ponts et chaussées, 1908, IV.)

6. Inanspruchnahme der Anschlussnieten elastischer Stäbe. Zeitschrift f. Architektur und Ingenieurwesen, Hannover 1909, Heft 2, S. 90—106.

7. Das Verteilungsgesetz der Haftspannung bei axial beanspruchten Stäben. Zeitschrift f. Arch. und Ingenieurwesen, Hannover 1909, Heft 5.

8. Beitrag zur Theorie der Verbundbalken insbesondere der genieteten Träger. Zeitschrift f. Arch. und Ingenieurwesen, Hannover 1910, Heft 1, S. 58–74.

9. Nebenspannungen der Querträger infolge steifer Längsträgeranschlüsse. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst, Wien 1909, Heft 38.

10. Однос механике према инжењерским наукама. Приступно предавање држано 27 септембра 1910 год., Технички лист, Београд 1911.

11. Knotenverschiebungen ebener Fachwerke bei veränderlicher Lastrichtung. Der Eisenbau. V, № 3, S. 92—97, Leipzig 1914.

12. Sur les théorèmes des projections et des qualités de mouvement. Nouvelles annales des mathématiques, Paris 1918, p. 139—141.

13. Polarne otporne linije oslonaca lučnog nosača sa dva zglavka. Jugoslovenska akademija znanosti i umjetnosti u Zagrebu. Izvješća o raspravama matematičko-prirodoslovnog razreda 1919. Svezak 11 i 12, str. 81—91, knjiga 221 razreda matematičko-prirodoslovnoga, 64 str. 57—90.

14. Кривина линија у геометриском излагању. Споменица С. М. Лозанића, Београд, 1922.

15. Déđuction géometrique des dérivées supérieures des fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$. (Заједно са Б. Петронијевићем.) L'enseignement mathématique, 1923, № 5—6, p. 297—304, Genève 1924.

16. Prilozi statici ravnih nosača.

I. Poliedar napadnih momenata.

II. Geometrijski odnosi između verižnih poligona i momentnog poliedra.

III. Jednostavni okvir i njegovi statički određeni oblici. Tehnički list, godište VI, broj 17, 20 i 23, Zagreb 1924.

17. Kinetički pritisak zvona. Tehnički list, godina X, broj 2, Zagreb 1928.

18. Ubrzanje tačke u polarnim koordinatama, izvedeno geometriskim putem. Tehnički list, godina II, br. 15 i 16, Zagreb 1929.

19. Luci drugog stepena. Tehnički list, godina XII, br. 3, str. 40—41, Zagreb 1930.

20. Стереометриско претстављање момената равних фигура. Годишњак Техничког факултета, Београд 1935.

21. Инваријанта сила изражених у тетраедричним координатама. Годишњак Техничког факултета, Београд 1937.

22. Проблем брахистохроне и развитак варијационо рачуна. Наука и Техника, Београд 1947, стр. 218—271, 333—337, 436—441, 519—522.

23. Основи Теориске механике

I. Увод у Механику. Механика тачке. Београд 1947.

II. Статика у равни. Београд 1948.

III. Опште теореме система тачака. Кинематика крутих система. Београд 1947.

IV. Динамика у равни. Београд 1948.

V. Статика у простору. Београд 1949.

VI. Динамика у простору. Београд 1949.

24. Предавања из Механике и Отпорности материјала. Табаци. Београд 1910—1911.

25. Предавања из Статике инжењерских конструкција. Табаци. Београд 1910—1911.

26. Основи науке о чврстоћи. Београд 1933.

27. Предавања из Теориске механике.

I. део: Увод у Механику и Механика тачке. Београд 1934.

1. св. Увод. Кинематика тачке. Динамика праволинијског кретања тачке.
2. св. Динамика криволинијског кретања тачке. Статика тачке.

II. део: Статика материјалних система. Београд 1935—37.

1. св. Статика материјалне линије. Статика круте плоче. Теоријски део.
2. св. Статика круте плоче. Практични део.
3. св. Статика сила у простору.

III. део: 1. св. Опште механичке теореме система материјалних тачака. Кинематика крутих система тачака. Београд 1936.

2. св. Динамика равне плоче. Београд 1938.
3. св. Динамика крутих тела. Београд 1938.

ПРЕВОДИ

28. Страх од математике и како да га савладамо, написао F. Auerbach. Београд 1927. Педагогијска књижница, св. 32 и 33.

29. Теоријска Математика, написао J. Tannery (О методу у наукама. Прва серија. Свеска прва). Београд 1926. Педагогијска књижница, св. 40, 41, 42.

30. Механика, написао P. Painléve (О методу у наукама. Прва серија. Свеска друга). Београд 1928. Педагогијска књижница, св. 51, 52, 53.

31. Општа физика, написао H. Bouasse (О методу у наукама. Прва серија. Свеска друга). Београд 1928. Педагогијска књижница, св. 51, 52, 53.

NACHRUF

Dr. techn. Ivan Arnovljević

Am 7 November 1951 starb in Beograd das korrespondierende Mitglied der serbischen Akademie der Wissenschaften, Dr. techn. Ivan Arnovljević, Universitätsprofessor im Ruhestand.

Arnovljević wurde am 7 März 1869 in Kikinda geboren. Nachdem er am serbischen autonomen Gymnasium in Novi Sad im Jahre 1886 die Reifeprüfung ablegte, bezog er die Technische Hochschule in Wien und legte im Jahre 1892 die zweite Staatsprüfung aus dem Ingenieurfache ab.

Seine erste Anstellung erhielt er gegen Ende des Jahres 1892 im Trassierungsbüro des Zivilingenieurs F. Seligmann in Wien, wo er an den Vorarbeiten für den Bau der Gailtalbahn teilnahm. Da er mehr Neigung für zur Statik und Brückenbau hatte, trat er im Herbste des Jahres in das Konstruktionsbüro des Zivilingenieurs O. Liess in Wien, wo er Mitte 1894 an dem Wettwerb für den Bau einer Donaubrücke in Budapest mitarbeitete. Um diese Zeit bot ihm Prof. Brik die Stelle des Konstrukteurs an seiner Lehrkanzel an. Das Angebot lehnte er dankend ab. Im Frühling des Jahres 1894 trat er in das Konstruktionsbüro der Brückenbauanstalt R. Ph. Waagner in Wien ein. Hier erhielt er die praktische Ausbildung zum Eisenkonstrukteur unter Leitung des Büroschefs Ing. F. Neumann, später Professor an der Techn. Hochschule in Brno. Mitte Juli 1897 trat er als selbstständiger Konstrukteur in den Dienst der Brückenbauanstalt Anton Biró in Wien. Ende des Jahres 1903 trat er in Verhandlungen mit der Direktion der serbischen Staatsbahnen wegen Übertritt in ihre Dienste. In sicherer Erwartung eines günstigen Abschlusses kündigte er seine Stellung der Firma Biró. Die ihm in Serbien angebotene Stelle entsprach jedoch nicht seiner zehnjährigen Praxis und er lehnte sie ab. 13 Monate blieb er ohne Anstellung und lebte von Ersparnissen. Die Zeit verwandte er zur Auffrischung des an der Hochschule erworbenen Wissens aus Mathematik, Mechanik und Festigkeitslehre. — Mitte des Jahres 1905 trat er in den Dienst der Brückenbauanstalt A. Kurz in Wien, um an der Ausarbeitung der Pläne für den Bau der Traunbrücke (Gerberträger) im Zuge der Pyrnbahn mitzuwirken. — Am 1. Dezember 1905 trat er als vertragsmässiger Ingenieur in den Dienst der k. k. Direktion für den Bau der Wasserstrassen. Vorstand des Eisenkonstruktionsbüros war sein ehemaliger Dienstkollege bei Waagner Ing. F. Postuwantschitz.

Die Mitarbeit an dem Detailprojekt einer Kanalbrücke über den Skawafluss (siehe Allg. Bauzeitung 1908, Heft 2), insbesondere der Entwurf des Troges und dessen Aufhängung, die ihm übertragen wurden, gab ihm Veranlassung zu den im nachstehenden Verzeichnis unter 1 bis 3 angeführten Arbeiten (siehe auch des Taschenbuch „Hütte" 21—23 Auflage).

Im Jahre 1907 betreute ihn die Direktion der serbischen Staatsbahnen mit der Überprüfung der von der Firma Waagner-Biró-Kurz entworfenen Pläne der zu erbauenden Eisenbahnbrücken. Diese Arbeit gab ihm Anlass zu den nachstehend unter 5—8 angeführten Artikeln.

Auf Zureden des Prof. Brik und seines jüngeren Freundes Dr. Milutin Milanković reichte er Ende 1909 sein Gesuch um Zulassung zur Ablegung der strengen Prüfungen an der Technischen Hochschule in Wien. Als Dissertation wurde die nachstehend unter 9 angeführte Abhandlung genehmigt. Zum Doktor der techn. Wissenschaften wurde er am 4 Mai 1910 promoviert.

Im Jahre 1910 erwarb er den freigewordenen Lehrstuhl für Reine Mechanik und Baustatik an der Technischen Fakultät der Universität in Beograd.

Im Jahre 1914 war er dreimal Gast bei seinem Freunde Ing. Djurić in Lienz, Österreich. Diese Besuche erweckten bei den dortigen Zivil- und Militärbehörden den Verdacht der Spionage. Er arbeitete jedoch in aller Seelenruhe an der nachstehend unter 13 genannten Abhandlung. Ende Juli wurde er zum Bezirkshauptmann beschieden und musste in die dortige Kaserne übersiedeln. Nachher wurde er nach Linz gebracht, dem Stationskommandanten vorgeführt, aber nicht verhört und in den Garnisonsarrest, von dort nach Kufstein auf die Festung Geroldseck überführt und der Festungswache übergeben. Tief besorgt und ergriffen um das Schicksal seines Freundes Djurić, der inzwischen verhaftet worden war, wollte er zweimal freiwillig aus dem Leben scheiden. Nach Djurić Enthaftung hat sich auch seine Lage gebessert.

Durch die letztgenannten Erlebnisse geschwächte Willenskraft und die Angewohnung an Einsamkeit widerstanden allen Versuchungen dass er das Krankenhaus verlassen könne. Endlich wurde er Anfang Dezember 1914 von einem konfinierten Studenten aus dem Krankenhause ins Stadthotel „entführt" und seinen Landsleuten angeschlossen. In Raabs a/T, dem Sammelplatz aller in Österreich-Ungarn konfinierten feindlichen Staatsangehörigen, verbrachte er die Zeit bis Mitte November 1918. Auf seine Bitte erhielt er vom „Hilfswerk der schweizerischen Hochschulen für kriegsgefangene Studenten" P. Appel's Traité de mécanique rationelle. Eine Bemerkung, die ihm beim Studium dieses Buches einfiel, wurde auf Appel's Veranlassung in den „Nouvelles annales de mathématique" veröffentlicht (siehe Abhandlung 12).

In die Heimat befördert, kam er am 25 November 1918 nach Beograd zurück. Die Vorlesungen an der Universität haben erst im Mai 1919 begonnen. Wegen des Ablebens eines Kollegens hat er durch vier Semester neben Mechanik (einschliesslich Festigkeitslehre) und Baustatik auch „Eiserne Brücken" vorgetragen. Im Studienjahr 1910—11 erhielten seine Hörer seine Vorlesungen aus der Mechanik, Festigkeitslehre und Baustatik in lithographischen Bögen. Im Jahre 1933 erschienen die „Grundzüge der Festigkeitslehre". Ab 1921 fortan trug er durch drei Semester nur die Reine Mechanik den Hörern der Ingenieur- und Maschinenbauschule vor. Im Zeitraum 1934—39 gab der „Verein der Hörer der Maschinenbauschule" seine bedeutend erweiterten Vorlesungen aus der Reinen Mechanik in drei Teilen (Lithographie in Buchform) aus.

Nach Erreichung der gesetzmässigen Altersgrenze trat er am 20. Mai 1939 in den Ruhestand. Nach Beschluss des Kollegiums übte er seine Lehrtätigkeit (Kinematik und Dynamik) bis Anfang April 1941 heräus.

Als äussere Anerkennung seiner wissenschaftlichen Verdienste wurde er im Jahre 1947 zum korrespondierenden Mitglied der serbischen Akademie der Wissenschaften gewählt.

Arnovljević's wissenschaftliche Abhandlungen lassen sich in zwei Abschnitte zergliedern: jene bis zum Jahre 1910, wesentlich durch brückenbautechnische Probleme veranlasst, und restliche mehr theoretischen und pädagogischen Merkmales. Die unter 6 angeführte Abhandlung ist sehr bekannt geworden, jene über die Theorie der Verbundkörper stellen auch heute grundlegende Beiträge dar. Seine langjährige fruchtbare Lehrtätigkeit fand ihren Niederschlag in seinem sechsbändigen „Lehrbuch der Reinen Mechanik".

Allen ernsthaften und strebsamen Ingenieuren und Wissenschaftlern, die Arnovljević kennen gelernt haben, wird er als edler, bescheidener und pflichtergebener Mensch zum Vorbild dienen. Seine Schüler, Kollegen und Freunde werden ihm ein dankbares Gedenken bewahren.

Beograd, den 30 XII 1951 *M. Vrečko*

ZUSAMMENSTELLUNG DER VON ARNOVLJEVIĆ VERFASSTEN UND VERÖFFENTLICHTEN ABHANDLUNGEN UND WERKE

1. Ein Fall des eingespannten auf Zug und Biegung beanspruchten Stabes. Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Vereins, Wien 1906, № 34, S. 480—483.

2. Der elastich eingespannte auf Zug und Biegung beanspruchte Stab. Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst, Wien 1907, Heft 4, S. 61—66.

3. Der eingespannte auf Druck und Biegung beanspruchte Stab. Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst, Wien 1907. S. 372—378.

4. Die Gleichgewichtbedingungen eines starren ebenen Systems. Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst, Wien 1908, Heft 3.

5. Zur Kraftverteilung in genieteten Stäben. Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst, Wien 1908, S. 607—615. (Eine wenig gekürtzte Wiedergabe dieser Abhandlung ist in den „Annales des ponts et chaussées" 1908, IV, erschienen).

6. Inanspruchnahme der Anschlussnieten elastischer Stäbe. Zeitschrift f. Architektur und Ingenieurwesen, Hannover 1909, Heft 2, S. 90—106.

7. Das Verteilungsgesetz der Haftspannung bei axial beanspruchten Stäben. Zeitschrift f. Architektur und Ingenieurwesen, Hannover 1909, Heft 5.

8. Beitrag zur Theorie der Verbundbalken, insbesondere der genieteten Träger. Zeitschrift f. Arch. u. Ingenieurwesen, Hannover 1910, Heft 1, S. 58—74.

9. Nebenspannungen der Querträger infolge steifer Längsträgeranschlüsse. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst, Wien 1909, Heft 38.

10. Mechanik und Ingenieurwissenschaften. Antrittsvorlesung (serbisch). Tehnički list, Beograd 1911.

11. Knotenverschiebungen ebener Fachwerke bei veränderlicher Lastrichtung. Der Eisenbau. V, No 3, S. 92—97, Leipzig 1914.

12. Sur les théorèmes des projections et des moments des qualités de mouvement. Nouvelles annales des mathématiques, Paris 1918, pp. 139—141.

13. Polare Auflager-Widerstandslinien von Zweigelenkbögen. (Serbisch) Jugoslovenska akademija znanosti i umjetnosti u Zagrebu. Izvješća o raspravama matematičko-prirodoslovnog razreda 1919. Svezak 11 i 12, str. 81—91, knjiga 221 razreda matematičko-prirodoslovnoga, 64, str. 57—90.

14. Kurvenkrümmung geometrisch ausgelegt. (Serbisch). Spomenica S. M. Lozanića, Beograd 1922.

15. Déduction géometrique des dérivées supérieures des fonctions circulaires sin x et cos x. Gemeinschaftlich mit B. Petronijević. L'enseignement mathématique, 1923, № 5—6, pp. 297—304, Genève 1927.

16. Beiträge zur Statik ebener Träger. (Serbisch).
I. Momentenpolyeder.
II. Geometrische Beziehungen zwischen Seilecken und dem Momentenpolyeder.
III. Einfacher Rahmen und seine statisch bestimmte Formen. Tehnički list, Jahrg. VI, № 17, 20 u. 23, Zagreb 1924.

17. Kinetischer Druck bei Schwingungen einer Glocke, (Serbisch). Tehnički list, Jahrg. X, № 2, Zagreb 1928.

18. Geometrische Ableitung der Beschleunigung eines Punktes in Polarkoordinaten. (Serbisch). Tehnički list, Jahrg. XI, № 15 u. 16. Zagreb 1929.

19. Bögen zweiten Grades. (Serbisch). Tehnički list, Jahrg. XII, № 3. S. 40—41, Zagreb 1930.

20. Stereometrische Darstellung der Momente ebener Figuren. (Serbisch). Godišnjak Tehničkog fakulteta, Beograd 1935.

21. Die Invariante des Kräftesystems ausgedrückt in tetraedrischen Koordinaten. (Serbisch). Godišnjak Tehničkog fakulteta, Beograd 1937.

22. Das Problem der Brachistochrone und die Entwicklung der Variationsrechnung. (Serbisch). Nauka i Tehnika, Beograd 1947. S. 218—271, 333—337, 436—441, 519—522.

23. Grundlagen der Reinen Mechanik. (Serbisch).
I. Einführung. Mechanik des Punktes. Beograd 1947.
II. Statik in der Ebene. Beograd 1948.
III. Allgemeine Sätze über Punktsysteme. Kinematik starrer Punktsysteme. Beograd 1947.
IV. Dynamik in der Ebene. Beograd 1948.
V. Statik im Raume. Beograd 1949.
VI. Dynamik im Raume. Beograd 1949.

О ТРИГОНОМЕТРИСКИМ ЗБИРОВИМА

Теза

МИОДРАГА ТОМИЋА (Београд)

I. Увод

1. Предмет овог рада је испитивање и проучавање тригонометриских редова и полинома облика

$$\Sigma C_\nu e^{\nu\theta i}, \tag{I, 1}$$

односно

$$\Sigma C_\nu \sin \nu\theta, \tag{I, 2}$$

$$\Sigma C_\nu \cos \nu\theta, \tag{I, 3}$$

под претпоставком да су им коефицијенти C_ν позитивни и монотони, односно вишеструко монотони, тј. под претпоставком да је испуњен један или више услова облика

$$\begin{aligned} &C_n \geqslant 0, \\ &\Delta C_n = C_n - C_{n+1} \geqslant 0, \\ &\Delta^2 C_n = C_n - 2C_{n+1} + C_{n+2} \geqslant 0, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\Delta^k C_n = \sum_{\mu=1}^{k} (-1)^k \binom{k}{\mu} C_{n+\mu} \geqslant 0, \end{aligned} \tag{I, 4}$$

Како су услови за коефицијенте C_ν специјалног карактера, редови овог облика имају низ типичних особина, и услед тога били су предмет истраживања многих математичара. Нарочито у радовима L. Fejér-a [1], [2][1] и G. Szegő-a [24] наведене су целе групе проблема који се односе на ову врсту редова и полинома. Сем поменуте двојице, проблемима у вези са овом врстом редова и полинома бавили су се још F. Hausdorf [10], E. Jacobstal [11], Th. Kaluza [12], K. Knopp [14], G. Pólya [18], M. Riesz [20], W. Rogosinski [21], O. Szász [23] и други. Разлог да се тако развила

[1]) Бројеви у угластим заградама односе се на литературу на крају рада.

ова група проблема лежи с једне стране у томе што су редови (I, 1), односно (I, 2) и (I, 3) типични претставници за многе особине општих редова, тако да се границе у многим проблемима постижу управо овом врстом редова. Најзад, многобројни у примењеној анализи употребљавани изрази дају се претставити редовима овог облика (Fourier-ови редови за Legendre-ове полиноме и остале специјалне функције).

1. 1. Аналитички апарат за доказ ставова ове врсте битно се разликује код појединих ставова. За сваки нов став се мора прибећи другом поступку, тако да се често губи њихова прегледност. Овде покушавам да дам једну општу, јединствену методу којом се велики део тих ставова може обухватити, стари ставови проширити и добити нови. Ова метода носи геометриско обележје и њена суштина састоји се у томе *да се свакој страни једне полигоналне линије — чија су темена* $C_\nu e^{\nu\theta i}$ *— придода један круг који има ту особину да садржи наредни или се поклапа са њиме.* За систем кругова $K_n(r_n, C_n)$ такве особине да сваки од њих садржи све наредне, тј. $K_n \subseteq K_{n-1}$ казаћемо да чини *монотон скуп кругова.* Напоменимо да је појам монотоне конвергенције комплесног низа бројева који су увели Fejér и Szegő [8], садржан у појму монотон скуп кругова.

Очевидно скуп кругова је монотон ако постоји неједначина

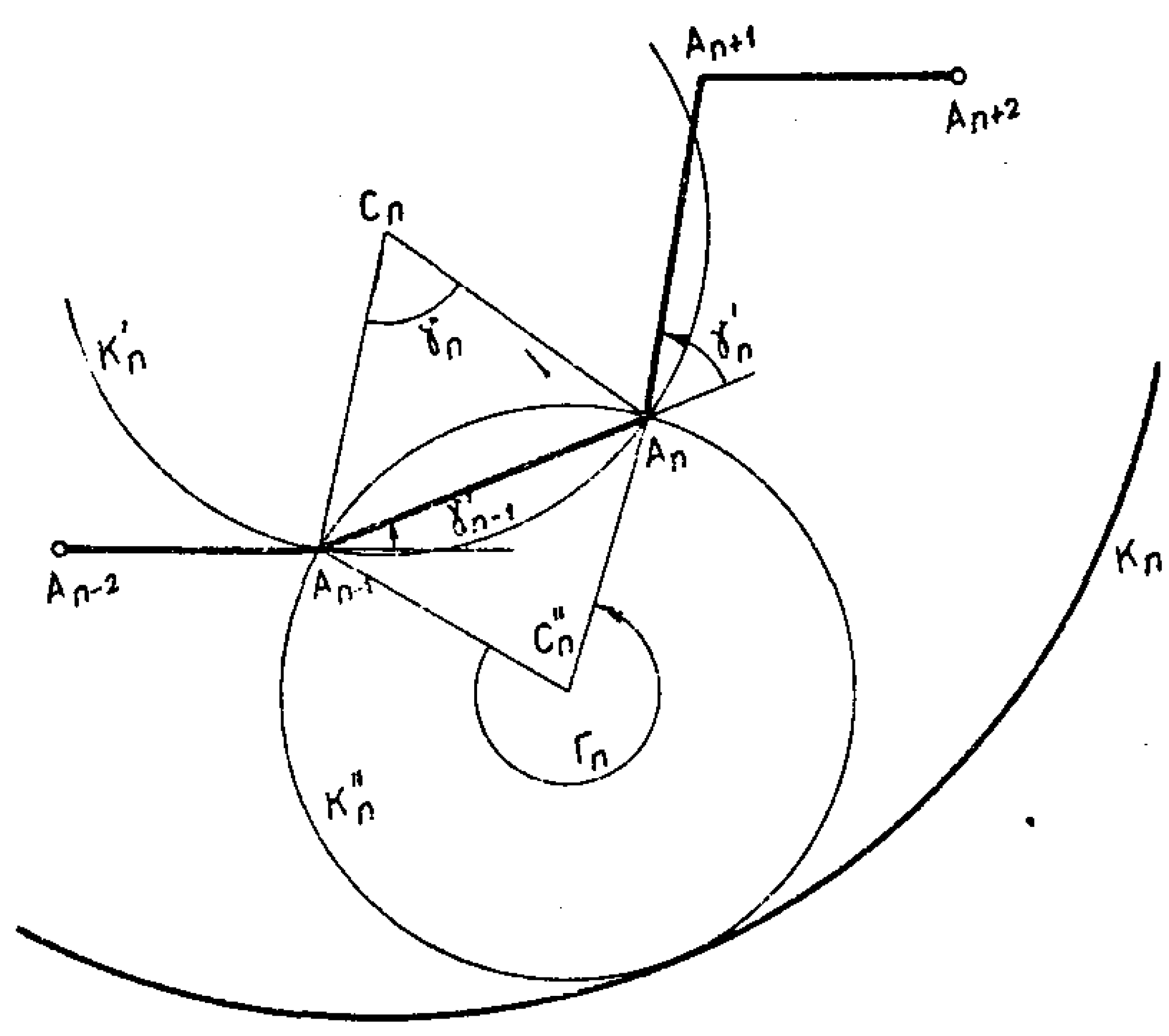
$$|C_{n-1} - C_n| \leqslant |r_{n-1} - r_n|.$$

Јасно је да ће крајња тачка полигоналне линије $\Sigma C_\nu e^{\nu\theta i}$ лежати тада у свим овим круговима. Ова геометриска метода није везана само за збирове облика $\Sigma C_\nu e^{\nu\theta i}$, већ се може применити и за неке општије тригонометриске збирове облика

$$\Sigma a_\nu \exp(2\pi\alpha_\nu i)$$

као што смо то у раду [16] J. Карамата и ја показали. Исто тако та метода доводи до извесних резултата и за специјалне класе Dirichlet-ових редова као што ћемо то на једном другом месту показати. Потпуности ради извешћу овде тај општи принцип у тачки 1. 2., док ћу у тачки 1. 3. навести његову специјализацију на теореме типа Kuzmin-Landau [16], коју смо дали у наведеном раду [16]. У тачки 1. 4. навешћу тај геометриски поступак за специјалне тригонометриске збирове Popken-овог [19] типа који се могу пренети на извесне Dirichlet-ове редове. Најзад у 1. 5. изложићу тај поступак специјално за Taylor-ове редове $\Sigma C_\nu e^{\nu\theta i}$. Први пут тај геометриски принцип изложио сам у моме раду [28] и применио га на теорију алгебарских полинома, о чијој примени овде неће бити речи.

1. 2. Уочимо полигоналну линију $A_0 A_1 A_2 \ldots$. Свакој страни те полигоналне линије можемо једнозначно асоцирати круг K_n, чије се средиште C_n налази на левој страни симетрале оријентисане дужи $\overline{A_{n-1} A_n}$ (тј. гледајући тачку A_n из A_{n-1}), и из кога се та страна види под углом γ_n $(0 < \gamma_n \leqslant \pi)$ (в. сл. 1).



Сл. 1

Полупречник r_n овог круга одредимо тако да круг K_n додирује круг k_n'', чији се центар c_n'' налази на симетрали дужи $\overline{A_{n-1} A_n}$, и из кога се та дуж види под углом Γ_n, где је $2\pi \geqslant \Gamma_n \geqslant \gamma_n$. Центар круга k_n'' налази се лево или десно од оријентисане дужи $\overline{A_{n-1} A_n}$, према томе да ли је $\Gamma_n \gtreqless \pi$. Када се Γ_n своди на γ_n (тј. када је $\Gamma_n = \gamma_n$), тада круг k_n'' прелази у k_n'.

Средиште круга K_n дато је са

$$C_n = s_{n-1} + \frac{(s_n - s_{n-1}) \exp(-\gamma_n i/2)}{2 \sin \gamma_n/2}\, i$$

где су s_n и s_{n-1} комплексни бројеви који одговарају тачкама A_n и A_{n-1}. Полупречник r_n круга K_n дат је са

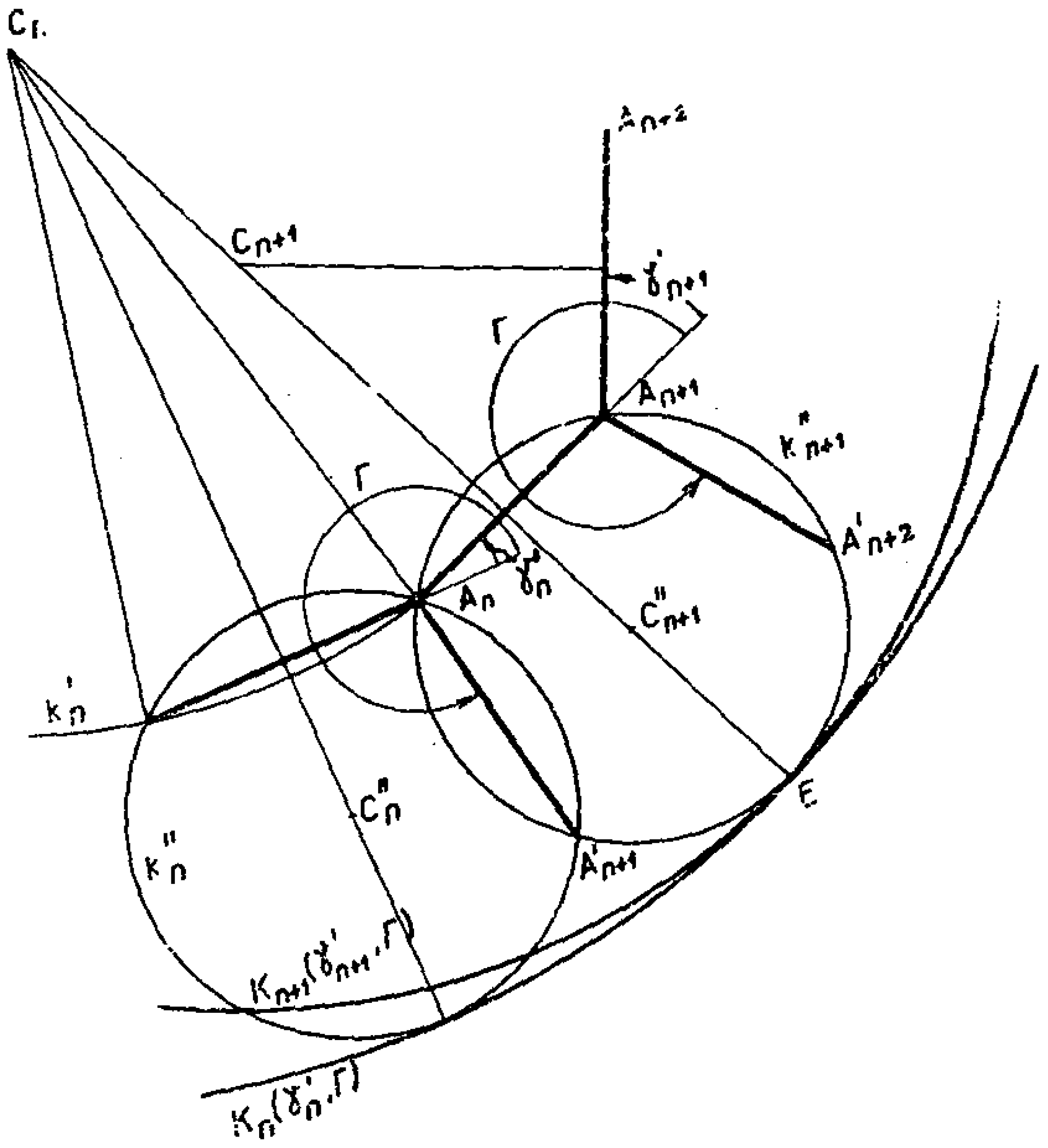
$$r_n = \frac{|s_n - s_{n-1}|}{2} \left\{ \operatorname{cotg} \frac{\gamma_n}{2} + \frac{1 - \cos \Gamma_n/2}{\sin \gamma_n/2} \right\}. \tag{I, 5}$$

Према томе, полигоналном линијом $A_0 A_1 A_2 \ldots$ и низовима углова γ_n и Γ_n низ кругова $K_n = K_n(\overline{A_{n-1} A_n}, \gamma_n, \Gamma_n)$ потпуно је одређен. Испитаћемо неке услове под којима овај скуп кругова постаје монотон у смислу наведеном у тачки 1. 1.

1. 3. Узмимо да су све стране полигоналне линије наведене у тачки 1. 2. једнаке међу собом, да су сви спољњи углови γ_n' монотони и да је $\Gamma_n = \Gamma$, тј.

$$\begin{aligned} &\overline{A_{n-1} A_n} = \overline{A_{n+1} A_n} \\ &0 < \gamma_n' < \gamma'_{n+1} \leqslant \Gamma < 2\pi \end{aligned} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{I, 6}$$

За круг k_n' (в. сл. 2) узмимо описан круг око троугла $A_{n-1} A_n A_{n+1}$. Његово средиште C_n је на пресеку симетрала страна $\overline{A_{n-1} A_n}$ и



Сл. 2

$\overline{A_n A_{n+1}}$. Због услова (I, 6) угао γ_n једнак је са γ_n' (в. сл. 2). За круг k_n'' узмимо описани круг над троуглом $A_{n-1} A_n A'_{n+1}$. Круг $K_n(\gamma_n', \Gamma)$ има према 1.2. средиште у C_n и додирује круг k_n''. Полупречник круга K_n дат је стога са

$$r_n = \frac{\overline{A_{n-1} A_n}}{2} \left\{ \operatorname{cotg} \frac{\gamma_n'}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\Gamma}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\Gamma}{2} \right\} =$$

$$= \frac{\overline{A_{n-1} A_n}}{2} \left\{ \operatorname{cotg} \frac{\gamma_n'}{2} + \operatorname{tg} \frac{\Gamma}{4} \right\}. \qquad (I, 7)$$

Ако на исти начин одредимо странама $\overline{A_n A_{n+1}}$, $\overline{A_{n+1} A_{n+2}}$ кругове k'_{n+1} и k''_{n+1}, тада круг $K_{n+1}(\gamma'_{n+1}, \Gamma)$ има за средиште C_{n+1}, а за полупречник

$$r_{n+1} = \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{2} \left\{ \operatorname{cotg} \frac{\gamma'_{n+1}}{2} + \operatorname{tg} \frac{\Gamma}{4} \right\}.$$

Средиште C_{n+1} је у пресеку симетрала страна $\overline{A_n A_{n+1}}$ и $\overline{A_{n+1} A_{n+2}}$. Кад се γ'_{n+1} мења од γ_n' до Γ, средиште C_{n+1} креће се дуж симетрале стране $A_n A_{n+1}$, од C_n до C_{n+1}. Круг $K_{n+1}(\gamma'_{n+1}, \Gamma)$ додирује круг $K_n(\gamma_n', \Gamma)$ у тачки E (в. сл. 2) и налази се цео у овом последњем кругу пошто је због $\gamma'_{n+1} \geqslant \gamma_n'$ очевидно и $r_{n+1} \leqslant r_n$ (в. (I, 7)). Ако се услов (I, 6) замени са

$$\overline{A_{n-1}A_n} \geqslant \overline{A_n A_{n+1}}$$

и задрже све остале дефиниције кругова k_n' и k_n'', тада су полупречници r_n и r_{n+1} кругова $K_n(\gamma_n', \Gamma)$ и $K_{n+1}(\gamma'_{n+1}, \Gamma)$ дати са

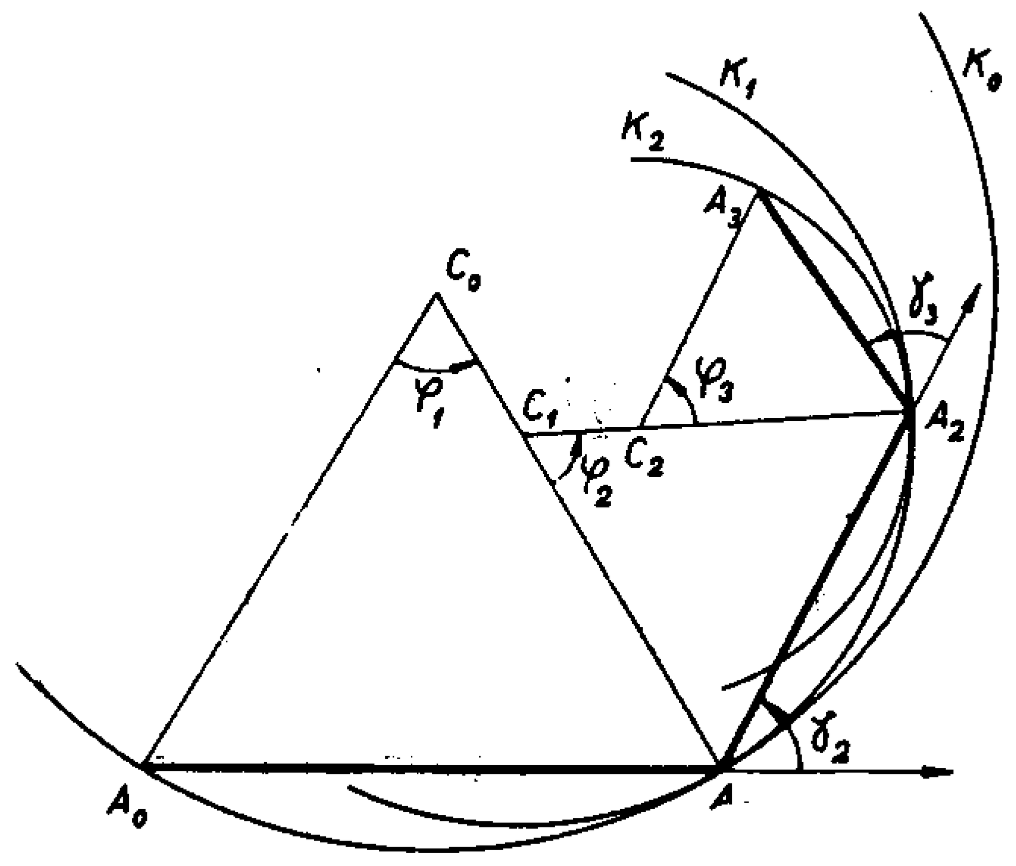
$$r_n = \frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{2}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\gamma_n'}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Gamma}{4}\right\},$$

$$r_{n+1} = \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{2}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\gamma'_{n+1}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Gamma}{4}\right\}.$$

У овом последњем случају уопште је $r_{n+1} < r_n$ и тада круг $K_n(\gamma_n', \Gamma)$ садржи и не додирује круг $K_{n+1}(\gamma'_{n+1}, \Gamma)$.

Примена и последице овог скупа монотоних кругова изложене су у раду [16].

1.4. Један нарочито подесан за примену систем монотоних кругова може се добити на овај начин. Над дужи $\overline{A_0 A_1}$ (в. сл. 3) конструишимо равнокрак троугао $A_0\, C_0\, A_1$ са произвољним углом на врху $\varphi_1\ (0 < \varphi_1 < \pi)$. Затим над сваком страном $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_2 A_3}, \ldots$ равнокраке троугле чији су углови на врховима $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$.



Сл. 3

Означимо спољње углове полигоналне линије $A_0\, A_1\, A_2 \ldots$ са $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$ Углове $\varphi_2, \varphi_3 \ldots$ одредимо тако да се темена $C_1\, C_2, \ldots$ налазе на дужима $\overline{C_0 A_1}$, $\overline{C_1 A_2}, \ldots$ $\overline{C_n A_{n+1}}, \ldots$. Због овог услова, $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ одређени су помоћу φ_1 и γ_ν, $\nu = 2, 3 \ldots$ преко релација

$$\frac{\varphi_{\nu-1} + \varphi_\nu}{2} = \gamma_\nu, \qquad \nu = 2, 3, \ldots \tag{I, 8}$$

Узмимо тачке $C_0, C_1, C_2, \ldots$ за средишта низа кругова K_n. Овај низ кругова K_n биће очевидно монотон ако је испуњена релација

$$r_{\nu-1} \geqslant r_\nu, \qquad \nu = 2, 3, \ldots \tag{I, 9}$$

и где је r_ν према сл. 3 дато са

$$r_\nu = \frac{\overline{A_{\nu-1}A_\nu}}{2\sin\varphi_\nu/2}.$$

Према томе, услов (I, 9) постаје

$$\frac{\overline{A_{\nu-2}A_{\nu-1}}}{2\sin\varphi_{\nu-1}/2} \geqslant \frac{\overline{A_{\nu-1}A_\nu}}{2\sin\varphi_\nu/2}. \tag{I, 10}$$

Специјално, овај услов биће испуњен ако је

$$\begin{gathered} \overline{A_{\nu-2}A_{\nu-1}} \geqslant \overline{A_{\nu-1}A_\nu}, \\ \varphi_{\nu-1} \leqslant \varphi_\nu, \qquad \nu=2, 3, \ldots \\ \gamma_\nu \leqslant \pi. \end{gathered} \tag{I, 11}$$

Из (I, 8) добивамо

$$\varphi_\nu = 2\gamma_\nu - \varphi_{\nu-1} = 2(\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1} + \ldots + (-1)^\nu \gamma_2) - (-1)^\nu \varphi_1, \quad \nu=2, 3, \ldots$$

Отуда је,

$$\varphi_\nu - \varphi_{\nu-1} = 2(\gamma_\nu - 2\gamma_{\nu-1} + 2\gamma_{\nu-2} - \ldots + 2(-1)^\nu \gamma_2) + (-1)^\nu \gamma_1 =$$

$$= 2\left\{\Delta^2\gamma_\nu + \Delta^2\gamma_{\nu-2} + \ldots \begin{array}{ll} +(\gamma_2-\varphi_1), & \nu \ \textit{парно} \\ +(\gamma_3 - 2\gamma_2 + \varphi_1), & \nu \ \textit{непарно} \end{array}\right\}.$$

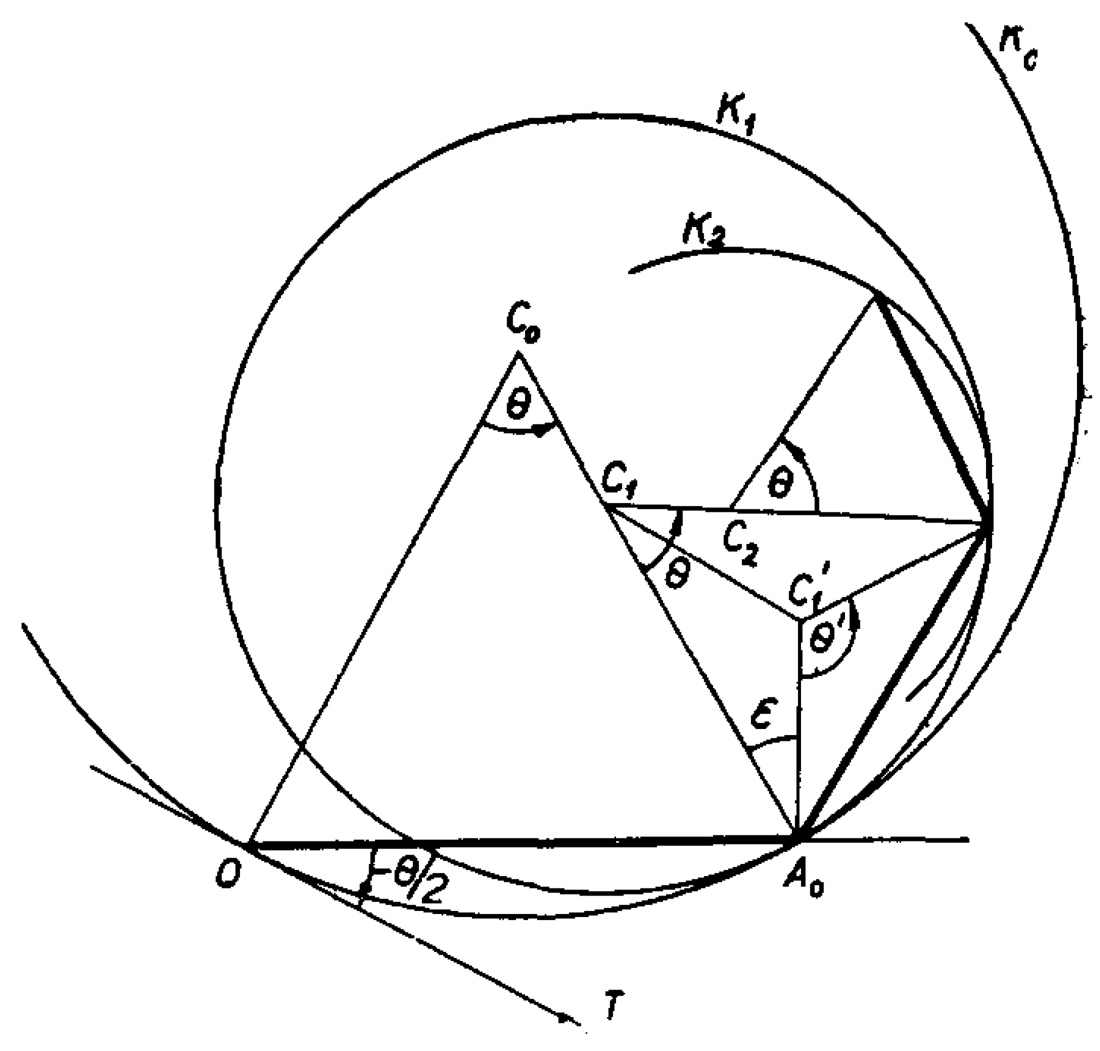
Специјално, ови услови су задовољени ако је

$$\begin{gathered} \gamma_\nu - 2\gamma_{\nu+1} + \gamma_{\nu+2} \geqslant 0, \quad \nu=4, 5, \ldots \\ \gamma_2 - \varphi_1 \geqslant 0, \quad \gamma_3 - 2\gamma_2 + \varphi_1 \geqslant 0, \end{gathered} \tag{I, 12}$$

тако да, у овом случају, за монотонију система кругова K_n асоцираних полигоналној линији $A_0A_1\ldots$, чији су спољњи углови $\gamma_\nu < \pi$, $\nu=1, 2, 3\ldots$, потребан је поред услова монотоније страна $\overline{A_{\nu-1}A_\nu}$, $\nu=1, 2, 3\ldots$ и услов који треба да задовоље спољњи углови γ_ν. Овај последњи услов изражен је преко других диференција од γ_ν (I, 12). Овај случај је специјалан случај општег, наведеног у тачки 1.2., где је очевидно $\varphi_n = \gamma_n = \Gamma$ и где је стога $k_n' \equiv k_n'' = K_n$. Једну примену овог случаја на специјалне Dirichlet-ове редове облика $\Sigma a_\nu \exp\{\lambda_\nu i\}$ даћемо у једном раду на другом месту.

1.5. Уочимо такву полигоналну линију $A_0A_1\ldots$ чији су сви спољњи углови једнаки θ (в. сл. 4) и овој линији асоцирајмо такав низ кругова K_n да се дужи $\overline{A_{n-1}A_n}$ виде из средишта тих кругова K_n под истим углом θ. Испитајмо под којим је условом тако одређен низ кругова K_n монотон. Напоменимо пре свега чињеницу да се средиште C_n круга K_n налази на полупречнику $\overline{C_{n-1}A_{n-1}}$ претходног круга K_{n-1} (в. сл. 4). Ако би, на пр., средиште круга K_1 било у C_1' тада је

$$\frac{\theta'}{2}=\frac{\theta}{2}+\varepsilon>\frac{\theta}{2},$$



Сл. 4

противно претпоставци да се дуж $\overline{A_0A_1}$ види из C_1' под углом $\theta'=\theta$. Из ове чињенице следи одмах и услов да овакав низ кругова K_n асоциран полигоналној линији са једнаким спољњим угловима θ буде монотон: *потребно је да низ полупречника буде монотон*, тј.

$$\overline{C_0A_0}\geqslant\overline{C_1A_1}\geqslant\ldots\overline{C_nA_n}\geqslant\ldots.$$

Овај се услов, с обзиром да је према сл. 4,

$$\overline{C_nA_n}=\frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{2\sin\theta/2},\qquad\theta\neq0,$$

своди на

$$\overline{A_0A_1}\geqslant\overline{A_1A_2}\geqslant\ldots\overline{A_{n-1}A_n}\geqslant\ldots,\tag{I, 13}$$

тј. на услов *да је низ страна полигоналне линије* $A_0A_1A_2\ldots$ *монотон*. Очевидно, овај монотони низ кругова је специјалан случај претходног, када је

$$\gamma_n=\Gamma_n=\theta.$$

Из овако дефинисаног низа монотоних кругова K_n следе особине које вреде без обзира да ли је низ K_n коначан или бесконачан:

1° *Круг* K_n *садржи круг* K_{n+1} ($K_n\supseteq K_{n+1}$). *Према томе, дужи* $\overline{A_nA_{n+1}}$, $\overline{A_{n+1}A_{n+2}},\ldots$ *се све налазе у кругу* K_n. *Специјално сва темена полигоналне линије* $A_0A_1A_2\ldots$ *налазе се у или на кругу* K_0.

2° *Тангента ма у ком темену* A_n *на круг* K_n, *који кроз то теме пролази, полови спољни угао* θ *полигоналне линије* (в. сл. 4).

Низ тачака $A_0, A_1,\ldots$ су темена једне полигоналне спирале (в. сл. 4). Ову полигоналну спиралу, чије стране монотоно опадају и чији су сви спољњи углови једнаки θ, зваћемо укратко θ-*спи-*

ралом. Овај рад има за циљ да из ових елементарних геометриских особина θ-спирале покаже како непосредно следе аналитичке особине редова са монотоним коефицијентима.

1. 5. 1. Један монотон низ кругова K_n код кога разлике узастопних полупречника образују монотон низ, тј. сами полупречници образују двоструко монотон низ

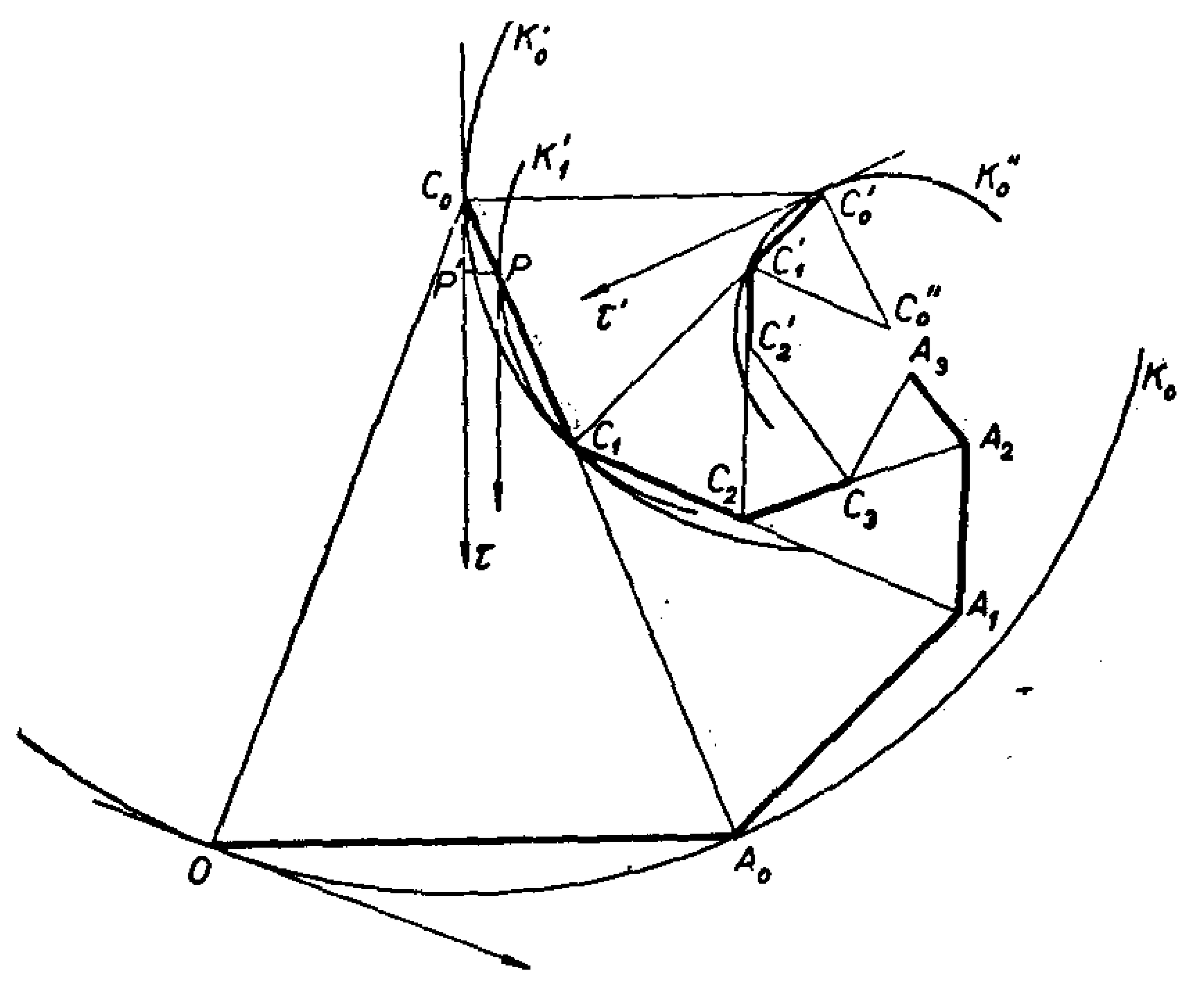
$$r_{n-1}-r_n \geqslant r_n-r_{n+1}$$

односно

$$r_{n-1}-2r_n+r_{n+1} \geqslant 0,\ n=1,2,\ldots,$$

називаћемо *монотон и конвексан низ кругова K_n (двоструко монотон низ K_n).*

Овде ћемо испитати под којим је условима монотон низ K_n асоциран једној θ-спирали из претходног одељка двоструко монотон, тј. какве нове геометриске особине карактеришу ту θ-спиралу.



Сл. 5

Посматрајмо полигоналну линију састављену од средишта

$$C_0C_1C_2\ldots$$

кругова K_n (в. сл. 5). За овако дефинисан монотон низ кругова K_n средиште C_n налази се на полупречнику $\overline{C_{n-1}A_{n-1}}$ круга K_{n-1}. Стога ће низ K_n бити двоструко монотон ако је поред услова (I, 13) задовољен и услов

$$\overline{C_0C_1} \geqslant \overline{C_1C_2} \geqslant \ldots\ \overline{C_{n-1}C_n} \geqslant \ldots.$$

Пошто је,

$$\overline{C_{n-1}C_n}=r_{n-1}-r_n=\frac{\overline{A_{n-1}A_n}-\overline{A_nA_{n+1}}}{2\sin\theta/2},$$

то последњи услов прелази у

$$\overline{A_0A_1}-\overline{A_1A_2} \geqslant \overline{A_1A_2}-\overline{A_2A_3} \geqslant \ldots\ \overline{A_{n-1}A_n}-\overline{A_nA_{n+1}} \geqslant \ldots \quad (I, 14)$$

Низ кругова K_n асоциран једној полигоналној θ-спирали $A_0A_1A_2\ldots$ двоструко је монотон ако је низ страна $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}\ldots$ те спирале двоструко монотон.

Према (I, 14) и низ средишта $C_0, C_1, \ldots$ образује једну θ-спиралу. Тој θ_1-спирали $C_0 C_1 C_2 \ldots$ може се асоцирати нов монотон низ кругова K_n' (в. сл. 5). Све особине првобитне θ-спирале $A_0 A_1 A_2 \ldots$ преносе се и на θ_1-спиралу центара $C_0 C_1 C_2 \ldots$; тако, на пример, особина 2^0 постаје

$2'$ *Тангенша у шачки C_n на круг K_n', који кроз шо шеме пролази, полови сиољњи угао θ_1-сиирале $C_0 C_1 \ldots$. Према шоме, ша шангенша је и симешрала дужи $\overline{A_{n-1} A_n}$; сшога круг K_n' лежи десно од ше симешрале. Сиецијално, сви кругови K_n' леже десно од симешрале дужи $\overline{A_0 A_1}$* (в. сл. 5).

1. 5. 2. Појам вишеструке монотоније може се неограничено проширити на систем кругова K_n.

Ако је за један моношон низ кругова K_n низ његових полуиречника r_n моношон реда k, за сисшем кругова K_n кажемо исшо шако да је моношон реда k. Низ полупречника задовољава, дакле, услове

$$\Delta^\nu r_n = \binom{\nu}{0} r_n - \binom{\nu}{1} r_{n+1} + \cdots + (-1)^\nu \binom{\nu}{\nu} r_{n+\nu} \geqslant 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, k \quad (I, 15)$$

У специјалном случају који посматрамо, монотон низ кругова K_n асоциран једној θ-спирали $A_0 A_1 A_2 \ldots$ биће монотон реда k ако средишта $C_n^{(k)}$ кругова $K_n^{(k-1)}$ образују једну θ-спиралу. Ова разматрања изводе се индукцијом. У претходном одељку дефинисани двоструко монотони низ кругова K_n биће троструко монотон ако је низ кругова K_n' двоструко монотон. Средишта $C_0', C_1', \ldots$ кругова K_n' образују исто тако једну θ-спиралу. Однос ове θ_2-спирале $C_0' C_1' \ldots$ према θ_1-спирали $C_0 C_1 \ldots$ исти је као и однос θ_1-спирале $C_0 C_1 \ldots$ према првобитној θ-спирали $A_0 A_1 \ldots$. Све особине између θ-спирале $A_0 A_1 \ldots$ и θ_1-спирале $C_0 C_1 \ldots$, преносе се и на θ_1-спиралу $C_0 C_1 \ldots$ и θ_2-спиралу $C_0' C_1' \ldots$. Према томе, θ_2-спирали $C_0' C_1' \ldots$ одговара монотон низ кругова $K_0'', K_1'', \ldots$.

Тангенша у C_0' на круг K_0'' симешрала је дужи $\overline{C_0 C_1}$. Сви кругови K_n'' су десно од ше симешрале.

Најзад, за један монотон низ кругова K_n, чији је низ полупречника r_n тотално монотон, тј. код кога су неједначине (I, 15) испуњене за свако $\nu = 1, 2, \ldots$ казаћемо да чини *шошално моношон низ кругова K_n*. Ако је низ кругова K_n асоциран једној θ-спирали тотално монотон, тада постоји бесконачан низ скупова кругова $K_n, K_n', \ldots$ који се асоцирају θ-спиралама образованим од средишта претходног низа кругова.

Особине напред наведене преносе се индукцијом и на ове бесконачне скупове кругова. Код тотално монотоног низа кругова поред θ-спирала средишта $C_0, C_1, \ldots$ итд., уочимо још Θ-спирале, где је Θ_0-спирала дефинисана са $A_0\, C_0\, C_0' \ldots$, Θ_1-спирала са $A_1\, C_1\, C_1' \ldots$, итд. (в. сл. 5).

Напоменимо, најзад, да θ-спирала претставља геометриску интерпретацију Abel-овог збира првог, другог, . . ., n-тог реда. Θ-спирала би одговарала Euler-овој трансформацији.

II. Тригонометриски полиноми и редови са монотоним коефицијентима

2. 1. Коначан или бесконачан тригонометриски збир

$$\sum_{\nu} a_\nu e^{\nu\theta i}, \tag{II, 1}$$

односно његове компоненте

$$\sum_{\nu} a_\nu \sin \nu\theta, \tag{II, 2}$$

и

$$\sum_{\nu} a_\nu \cos \nu\theta, \tag{II, 3}$$

чији су сви коефицијенти позитивни и монотони, тј.

$$a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots > 0, \tag{II, 4}$$

био је предмет знатног броја истраживања. Нарочито су се овим питањем бавили L. Fejér [1], [2], [3], G. Pólya [18], G. Szegő [24], [25], и други.

Особине тих тригонометриских израза, који налазе примену у многим гранама анализе, теорије функција и теорије Fourier-ових редова могу се протумачити као проста последица особина монотоних кругова наведених у 1. 5. Као што смо у уводу навели, та интерпретација у исти мах сједињује диспаратне методе употребљене за доказ тих ставова, даје могућност за њихово проширење, као и нове ставове. Овде ћемо навести само неколико типичних резултата који се односе на тригонометриске изразе облика (II, 1) односно (II, 2) и (II, 3), чији су коефицијенти монотони, тј. задовољавају услов (II, 4).

2. 2. Нека су z_ν комплексни бројеви што одговарају теменима A_ν полигоналне θ-спирале дефинисане у 1. 5., тј.

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i}, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Спољни угао θ-спирале дат је са

$$arc\ (z_{n+1}-z_n)=arc\,(z_n-z_{n-1})+\theta\,.$$

Систем кругова K_n је монотон (в. сл. 6) ако је

$$r_{n-1}=\frac{a_{n-1}}{2\sin\theta/2}\geqslant\frac{a_n}{2\sin\theta/2}=r_n\,,\quad n=1,2,\ldots$$

тј.

$$a_{n-1}\geqslant a_n,\quad n=1,2,\ldots$$

Као непосредну примену ове интерпретације изведимо став: *Кад коефицијенти* a_ν *збира*

$$S_{\alpha,\beta}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\sin(\alpha\nu+\beta)\,x$$

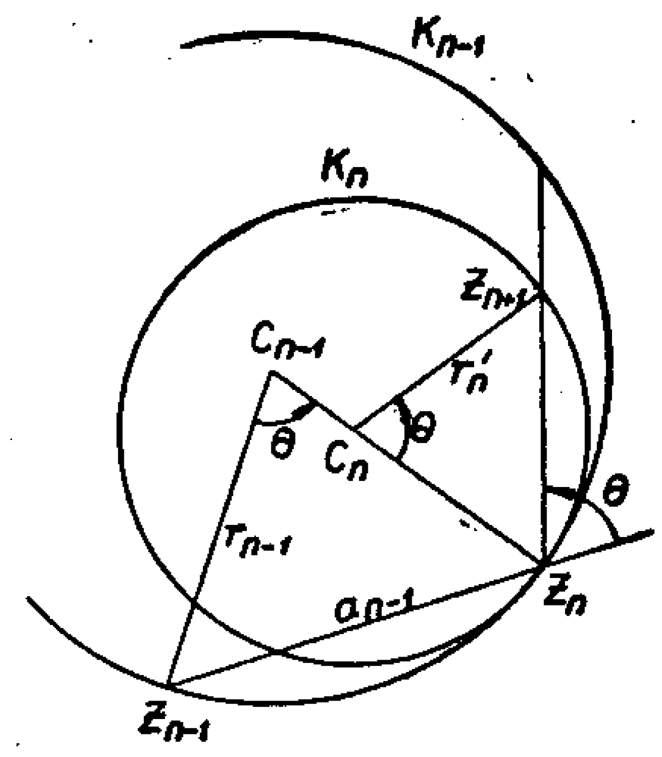
опадају, тј.

$$a_\nu\geqslant a_{\nu+1},\quad \nu=0,1,2,\ldots$$

тада је

$$-\frac{a_0\sin^2(\beta-\alpha/2)\,x/2}{\sin\alpha x/2}\leqslant S_{\alpha,\beta}\leqslant$$

$$\leqslant a_0\frac{\cos^2(\beta-\alpha/2)\,x/2}{\sin\alpha x/2}\qquad\text{(II, 5)}$$



Сл. 6

за $0<x<\pi$ *ма какви били* α *и* β.

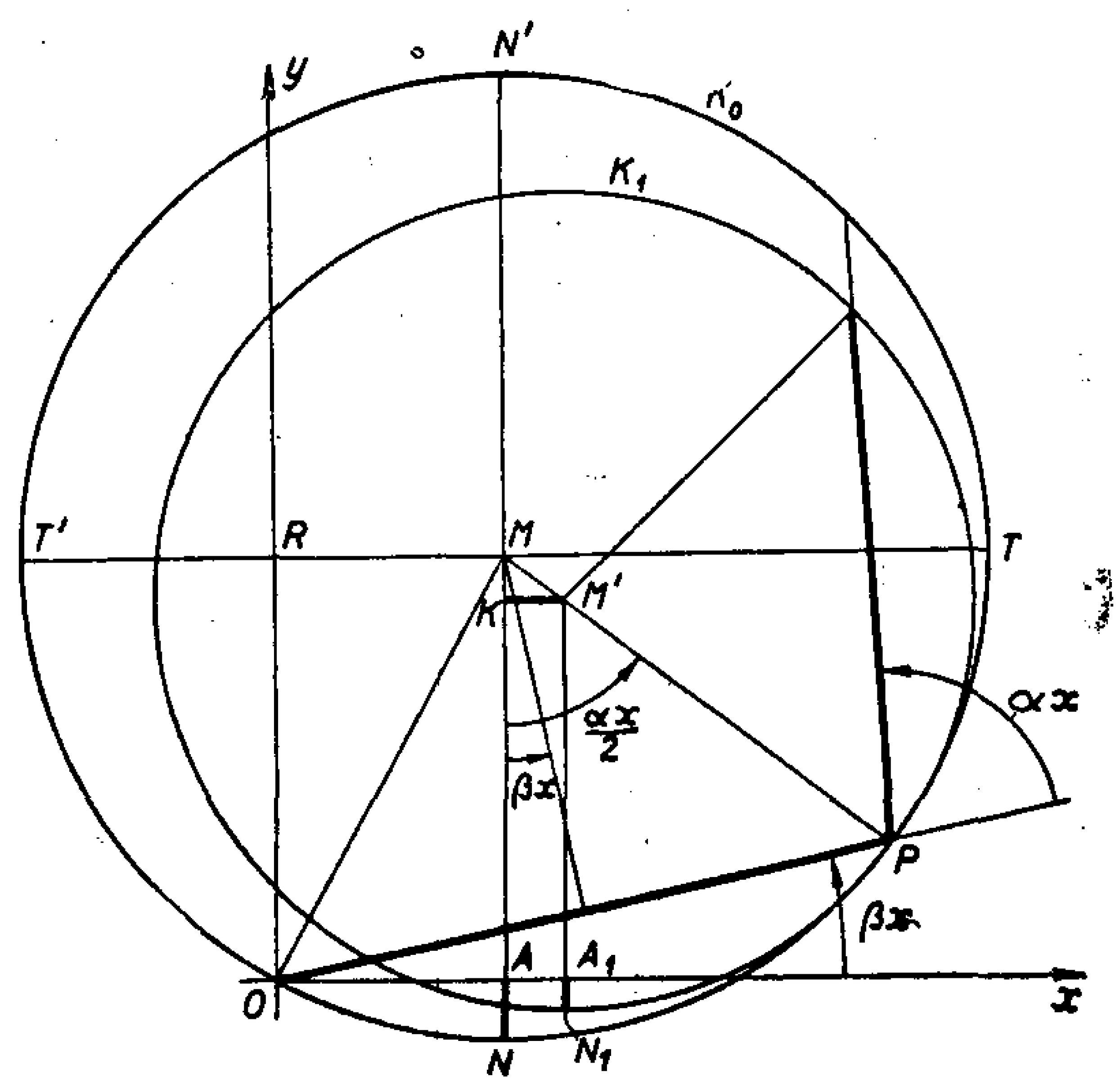
Доказ. Према својству 1^0 одељка 1. 5. тачка

$$z_\nu=\sum_\nu a_\nu e^{\alpha\nu x i}$$

садржана је у систему кругова K_n, према томе и у K_0. Цела слика је окренута на угао βx. Отуда, из слике 7 видимо да је

$$S_{\alpha,\beta}=\mathbf{Im}\left\{e^{\beta x i}\sum_\nu a_\nu e^{\alpha\nu x i}\right\}=$$

$$=\sum_\nu a_\nu\sin(\alpha\nu+\beta)\,x\geqslant-\overline{AN}.$$



Сл. 7

Из слике 7 је такође очевидно

$$\overline{AN}=\overline{MN}-\overline{AM}=\frac{a_0}{2\sin\alpha x/2}-\frac{a_0}{2\sin\alpha x/2}\cos(\alpha x/2-\beta x)=$$

$$=\frac{a_0}{\sin\alpha x/2}\sin^2(\beta-\alpha/2)x/2\,.$$

На исти начин добивамо (в. сл. 7)

$$S_{\alpha,\beta} < \overline{AM} + \overline{MN'} = \overline{AM} + \overline{MN} =$$

$$= \frac{a_0}{2\sin\alpha x/2} + \frac{a_0}{2\sin\alpha x/2}\cos(\alpha x/2 - \beta x) =$$

$$= \frac{a_0}{\sin\alpha x/2}\cos^2(\beta - \alpha/2)x/2\,.$$

Ако претпоставимо да је $a_0 > a_1$, тада из слике 7 добивамо

$$S_{\alpha,\beta} \geqslant -\overline{A_1N_1} = \overline{M'N_1} - \overline{A_1M'} = \overline{M'P} - \overline{A_1M'}\,,$$

где је

$$\overline{M'P} = \frac{a_1}{2\sin\alpha x/2}$$

и

$$\overline{A_1M'} = \overline{AM} - \overline{MK} =$$

$$= \frac{a_0}{2\sin\alpha x/2}\cos(\alpha x/2 - \beta x) - \overline{MM'}\cos(\alpha x/2 + \beta x)\,.$$

У овом случају, $a_0 > a_1$, чак је

$$S_{\alpha,\beta} > a_0\sin\beta x - \frac{a_1}{\sin\alpha x/2}\sin^2(\alpha x/2 + \beta x)\,.$$

Исто тако, према слици 7, за реални део

$$C_{\alpha,\beta} = \mathbf{Re}\,\{e^{\beta xi}\sum_\nu a_\nu e^{\alpha\nu xi}\} = \sum_\nu a_\nu\cos(\alpha\nu + \beta)x$$

важе ове неједначине

$$-(\overline{MT'} - \overline{RM}) \leqslant C_{\alpha,\beta} \leqslant (\overline{RM} + \overline{MT})\,.$$

Како је

$$\overline{RM} = \overline{OA} = \frac{a_0}{2\sin\alpha x/2}\sin(\alpha x/2 - \beta x)\,,$$

то последње неједначине прелазе у

$$-\frac{a_0}{2\sin\alpha x/2}[1 - \sin(\alpha x/2 - \beta x)] \leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha,\beta} \leqslant \frac{a_0}{2\sin\alpha x/2}[1 + \sin(\alpha x/2 - \beta x)]\,. \quad \text{(II, 6)}$$

2. 3. У раду [1] L. Fejér је дао став који исказује чињеницу да чим су коефицијенти једног синусног реда $s(\theta) = \Sigma a_\nu \sin\nu\theta$ монотони, у сваком размаку $(0, \varepsilon)$ са произвољним ε постоје места где је $s(\theta)$ позитивно. На овој интерпретацији основано, уопштење Fejér-овог става које смо дали J. Карамата и ја [15] гласи:

Ако су у изразу

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\theta$$

коефицијенти a_ν *монотони и такви да је израз*

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu - \frac{(2n+1)^2}{8} a_{n+1} \tag{II, 7}$$

позитиван од неког k, $n \geqslant k$, *тада постоје два позитивна броја* η *и* ε *независна од* n, *таква да је*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\theta \leqslant \eta,$$

за све $n \geqslant k$ *и* $0 \leqslant \theta < \varepsilon$.

Услов (II, 7) биће испуњен, на пример, када

$$a_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

или када

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu(\nu+1)(a_\nu - a_{\nu+1}) \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Из овог става извешћемо овај став:

Тригонометриски синусни ред са монотоно опадајућим коефицијентима a_ν, *који задовољавају услов*

a) $$a_n = O(1/n)$$

униформно је ограничен у $(0, \pi)$;

b) $$a_n = o(1/n)$$

униформно је конвергентан у $(0, \pi)$.

Докажимо тврђење под *b)*, пошто је доказ идентичан за тврђење под *a)*, кад се у њему замени o са O. Познато је да тригонометриски ред униформно конвергира у сваком отвореном размаку $(+0, \pi-0)$ ако су његови коефицијенти монотони. Према томе је довољно да покажемо да је ред униформно конвергентан у тачкама 0 и π. Према 1.5. особина 1^0, тачка

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i}$$

налази се у кругу K_{k+1} за $n \geqslant k$. Изразимо да се пројекција те тачке s_n на имагинарну осу налази између пројекција круга K_{k+1} на ту осу, па добивамо неједначину (C_{k+1} је центар круга K_{k+1})

$$\operatorname{Im}(s_n) \leqslant \operatorname{Im}(C_{k+1}) + \frac{1}{2} a_{k+1} \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2},$$

односно

$$\operatorname{Im}[s(\theta)] \leqslant \operatorname{Im}(s_k) + \frac{a_{k+1}}{2} \frac{\cos(2k+1)\theta/2}{\sin\theta/2} + \frac{a_{k+1}}{2} \frac{1}{\sin\theta/2},$$

или

$$\operatorname{Im}[s(\theta)] \leqslant \operatorname{Im}(s_k) + \frac{a_{k+1}}{2} \frac{\cos(2k+1)\theta/2}{\sin\theta/2} - \frac{a_{k+1}}{2\sin\theta/2} + \frac{a_{k+1}}{\sin\theta/2} =$$

$$= \operatorname{Im}(s_k) - a_{k+1} \frac{\sin^2(2k+1)\theta/4}{\sin\theta/2} + \frac{a_{k+1}}{\sin\theta/2}.$$

Према томе, за $n \geqslant k$ је

$$s(\theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin\nu\theta \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \sin\nu\theta - a_{k+1} \frac{\sin^2(2k+1)\theta/4}{\sin\theta/2} + \frac{a_{k+1}}{\sin\theta/2} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \sin\nu\theta + \frac{a_{k+1}}{\sin\theta/2} \cos^2(2k+1)\theta/4 \leqslant$$

$$\leqslant \theta \cdot \sum_{\nu=1}^{k} \nu a_\nu + \frac{a_{k+1}}{\sin\theta/2} =$$

$$= k\theta \frac{\sum_{\nu=1}^{k} \nu a_\nu}{k} + \frac{1}{(k+1)\sin\theta/2}(k+1)a_{k+1}.$$

Ако узмемо $k = [1/\theta]$ и пустимо да $\theta \to 0$, добивамо наведени став. Да се услов $o(1/n)$ у случају *b)* не може заменити условом $O(1/n)$ показује ред

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots$$

који, као што је познато, није униформно конвергентан у тачки $x=0$, али, као што се види из дела *b)* овог става, он је униформно ограничен за све $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

2.4. За испитивање распореда нула тригонометриских полинома, као и тригонометриских редова Fejér [1] је показао да основну улогу игра овај Szegő-ов став:

Косинусни полином

$$C_0 + C_1\cos\theta + C_2\cos 2\theta + \cdots + C_n\cos n\theta, \qquad \text{(II, 8)}$$

где је

$$0 < C_0 < C_1 < \cdots < C_n,$$

има, у размаку $(0, 2\pi)$, $2n$ *међусобно различитих нула* t_k, $k = 1, 2, \ldots 2n$ *за које важи*

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n+1/2} < t_k < \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n+1/2}, \qquad k = 1, 2, \ldots 2n, \qquad \text{(II, 9)}$$

Ови ставови о распореду нула су исто тако непосредна примена интерпретације дате у 1. 5. Тако, на пример, наведени став добивамо ако ставимо

$$2e^{n\theta i}\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \cos\nu\theta = \sum_{\nu=0}^{n} C_{n-\nu}e^{\nu\theta i} + e^{2n\theta i}\sum_{\nu=0}^{n} C_{n-\nu}e^{-\nu\theta i}$$

и означимо

$$z_n = \sum_{\nu=0}^{n} C_{n-\nu}e^{\nu\theta i};$$

тада последњи израз постаје

$$2e^{n\theta i}\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \cos\nu\theta = z_n + e^{2n\theta i}\bar{z}_n. \tag{II, 10}$$

За свако $\theta > \varepsilon$, тачка претстављена комплексним бројем z_n налази се на θ-спирали, чији крај пада у круг K_n. Тачка $\bar{z}_n$ се, према томе, налази на θ-спирали симетричној са првобитном према реалној оси (в. сл. 8). Како је $z_n(\theta) \neq 0$, то (II, 10) постаје нула само ако z_n дође у смер супротан са

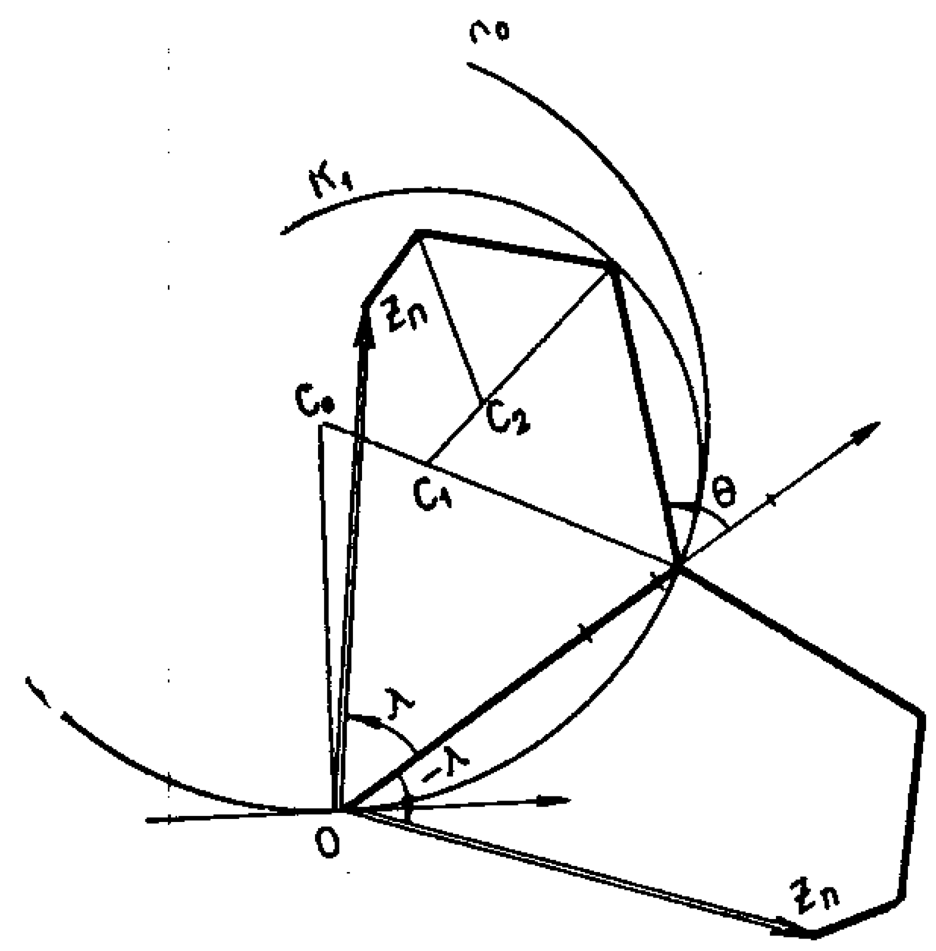
$$e^{2n\theta i}\bar{z}_n.$$

Нека је λ аргумент од z_n, тада вектор $\bar{z}_n e^{2n\theta i}$ пада у смер супротан од z_n кад год је

$$2n\theta = 2\lambda - \pi + 2k\pi.$$

Како је према особини 2^0 § 1. 5. увек

$$-\theta/2 < \lambda < \pi - \theta/2,$$



Сл. 8

то за неку вредност θ која се налази у размацима одређеним неједначинама

$$-\theta - \pi + 2k\pi < 2n\theta < 2\pi - \theta + 2k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$\bar{z}_n e^{2n\theta i}$ доћи ће у смер супротан од z_n, тј. $\Sigma C_\nu \cos\nu\theta$ постаје нула. Отуда следи да је свако такво t_k одређено размаком

$$\frac{k-1/2}{n+1/2}\pi, \quad \frac{k+1/2}{n+1/2}\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

2. 4. 1. Овим поступком може се доказати и овај став (Fejér [1]):

Ако коефицијенти реда

$$s(\theta) = b_{n+1}\sin(n+1)\theta + b_{n+2}\sin(n+2)\theta + \cdots, \tag{II, 11}$$

образују монотон нула-низ, тада непрекидна функција $s(\theta)$ *има у сваком од размака*

$$(m-1)\frac{\pi}{n+1/2}, \quad m\frac{\pi}{n+1/2}, \quad m=1, 2, \ldots n \tag{II,12}$$

најмање једну нулу.

У овом случају $s(\theta)$ да се написати у облику

$$2\,i\cdot s(\theta)=e^{(n+1)\theta i}\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{\nu\theta i}-e^{-(n+1)\theta i}\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{-\nu\theta i}.$$

Ако ставимо

$$z(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{\nu\theta i}, \quad c_\nu=b_{n+\nu+1}, \quad \nu=1, 2, \ldots,$$

тада последњи израз постаје

$$2\,i\cdot s(\theta)\,e^{(n+1)\theta i}=e^{2(n+1)\theta i}\cdot z(\theta)-\bar{z}(\theta). \tag{II, 13}$$

На истом принципу као у претходном одељку добивамо размак (II, 12) у коме се мора налазити бар једна нула функције.

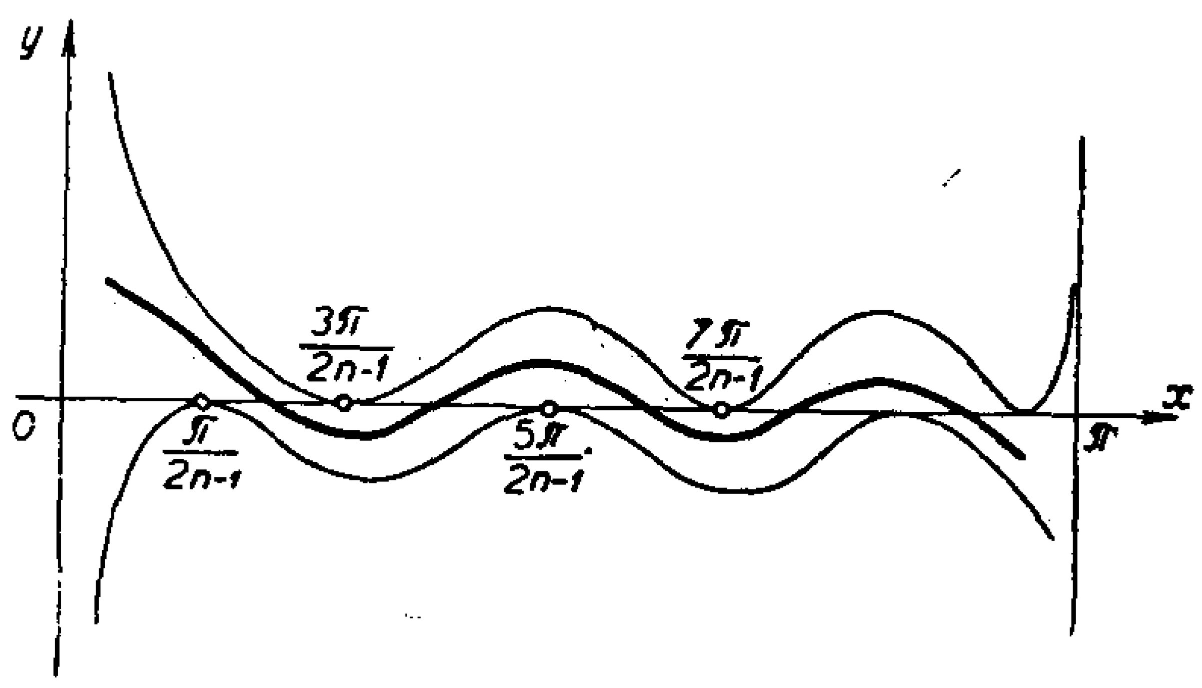
Последњи став о распореду нула је исто тако и непосредна последица основне неједначине (II, 5), изведене у тачки 2. 2. која се односи на синусни збир са монотоним коефицијентима. Ако се у тој неједначини стави

$$a_\nu=b_{n+\nu+1}, \quad \nu=0, 1, 2, \ldots, \quad \alpha=1, \quad \beta=n+1,$$

тада се та неједначина може написати у облику

$$-\frac{b_{n+1}\sin^2(n-1/2)\,\theta/2}{\sin\theta/2}<s(\theta)<\frac{b_{n+1}\cos^2(n-1/2)\,\theta/2}{\sin\theta/2}.$$

$s(\theta)$ као непрекидна функција ограничена је двема непрекидним функцијама датим последњим неједначинама, према томе мора да има бар једну нулу између двеју нула леве и десне границе ове неједначине (в. сл. 9).



Сл. 9

Ако се у последњим неједначинама (II, 6) одељка 2. 2. стави

$$\alpha=1, \; \beta=n+1, \; a_\nu=b_{n+\nu+1}, \; \nu=0, 1, 2, \ldots,$$

те неједначине прелазе у

$$-\frac{b_{n+1}}{2\sin x/2}\,[1-\sin(n-1/2)\,x]\leqslant C_{1,\,n+1}\leqslant\frac{b_{n+1}}{2\sin x/2}\,[1+\sin(n-1/2)\,x].$$

Како се и овде непрекидна функција

$$C_{1,\,n+1}=c(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1}\cos(n+\nu+1)\,\theta$$

налази између двеју непрекидних функција које додирују X-осу, то се између нула тих граничних функција мора наћи бар једна нула функције $C_{1,\,n+1}$, тј. функција $C_{1,\,n+1}$ има бар једну нулу у сваком од размака

$$\frac{k-1/2}{n+1/2}\,\pi,\quad \frac{k+1/2}{n+1/2}\,\pi,\quad k=1,2,\ldots,n,$$

2.4.2. Као што смо напоменули раније, овај геометриски поступак доводи и до низа нових уопштења. У овом правцу наведимо само овај резултат. Нека коефицијенти реда (II, 11) образују монотон нула-низ и нека је $b_{n+1}<b_{n+2}$ (где је искључено $b_{n+1}=b_{n+2}$); тада се размаци (II, 12) могу прецизирати у:

$$(k-\Lambda_2)\,\frac{\pi}{n+1-\Lambda_2/2},\quad k\,\frac{\pi}{n+1-\Lambda_1/2},\quad k=1,2,\ldots n,$$

где је $0<\Lambda_2<1$, $0<\Lambda_1<1$ дато са (II, 14) и (II, 15), тј. *у случају* $b_{n+1}<b_{n+2}$ *непрекидна функција* $s(\theta)$ *у* $\varepsilon<\theta<\pi-\varepsilon$ *има нуле у раздвојеним размацима.*

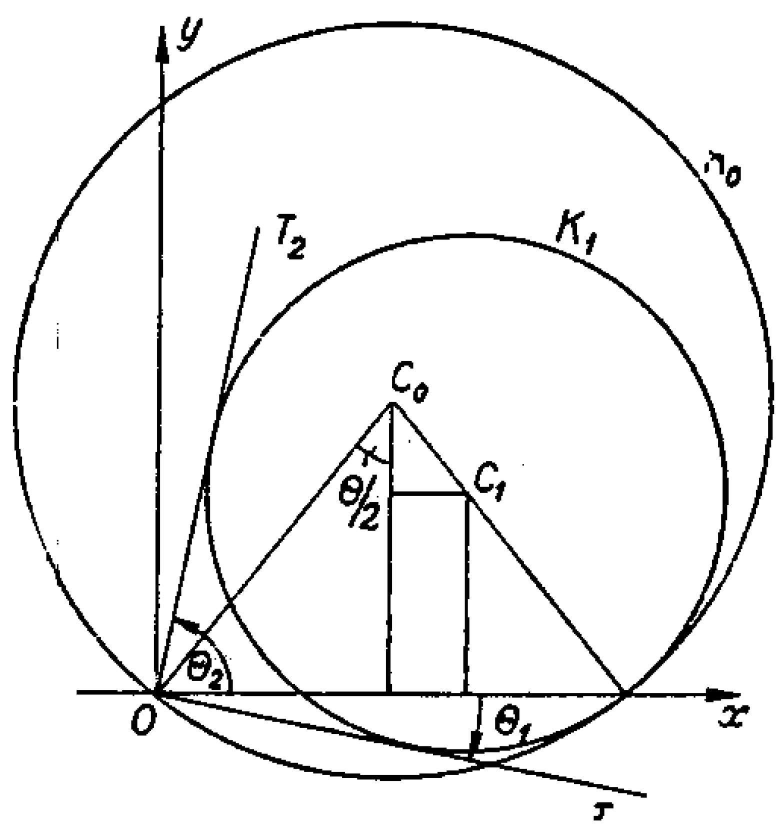
Према (II, 12) је

$$2i\cdot s(\theta)\,e^{(n+1)\theta i}=e^{2(n+1)\theta i}\,z(\theta)-\bar{z}(\theta)$$

са

$$z(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{\nu\theta i},\quad c_\nu=b_{n+\nu+1},\quad \nu=0,1,2,\ldots$$

Као и у претходном параграфу треба одредити $\arg z(\theta)=\Theta(\theta)$. Ради овога напоменимо само да се $z(\theta)$ налази у систему кругова $K_0, K_1,\ldots$ и да сада због $c_0<c_1$ $(c_0\neq c_1)$ круг K_1 лежи увек у K_0 (в. сл. 10). Према томе, $s(\theta)$ може бити нула само ако је $-\Theta_1\leqslant\Theta(\theta)\leqslant\Theta_2$ (в. сл. 10). Један елементаран рачун даје (пошто круг K_0 има центар C_1 са координатама $C_1\left(c_0-c_1/2,\ \frac{c_1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right)$) за углове правих $\overline{OT}_1$ и $\overline{OT}_2$ (сл. 10)



Сл. 10

$$\operatorname{tg}\Theta_1=-\sin\frac{\theta}{2}\,\frac{c_1}{2\sqrt{c_0^2-c_0c_1}+(2c_0-c_1)\cos\theta/2},$$

$$\operatorname{tg}\Theta_2=\sin\frac{\theta}{2}\,\frac{c_1}{2\sqrt{c_0^2-c_0c_1}-(2c_0-c_1)\cos\theta/2}.$$

Ако се, на пример, стави

$$-\operatorname{tg}\Theta_1=\frac{c_1\sin\theta/2}{2\sqrt{c_0^2-c_0c_1}+(2c_0-c_1)\cos\theta/2}=\operatorname{tg}\lambda(\theta)\cdot\frac{\theta}{2}\qquad\text{(II, 13)}$$

као и

$$\alpha_1=2\sqrt{c_0^2-c_0c_1},\quad\beta=2c_0-c_1,$$

тада је $\lambda(\theta)$ одређено са

$$\lambda(\theta)=\frac{2}{\theta}\operatorname{arctg}\frac{c_1\sin\theta/2}{\alpha_1+\beta_1\cos\theta/2}\leqslant\frac{2}{\theta}\operatorname{arctg}\frac{c_1\sin\theta/2}{\beta_1\cos\theta/2}=$$

$$=\frac{2}{\theta}\operatorname{arctg}\left(\frac{c_1}{\beta_1}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)<\frac{2}{\theta}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)=\frac{2}{\theta}\cdot\frac{\theta}{2}=1,$$

где претпоследња неједначина следи због $c_1/\beta_1=c_1/(2c_0-c_1)<1$ што се своди на $c_0-c_1<0$. Дакле, $\lambda(\theta)$ је увек <1, за све $0<\theta<\pi$. Лако је видети да је и $\lambda(0)<1$ и $\lambda(\pi)<1$. Према томе ако се означи

$$\Lambda_1(c_0,c_1)=\operatorname*{Max}_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}\left\{\frac{2}{\theta}\operatorname{arctg}\frac{c_1\sin\theta/2}{\alpha_1+\beta_1\cos\theta/2}\right\}<1,\qquad\text{(II, 14)}$$

биће према (II, 13)

$$\Theta_1<\Lambda_1\cdot\frac{\theta}{2}\quad\text{где је}\quad\Lambda_1<1.$$

На исти начин добива се да је

$$\Theta_2<\Lambda_2(\pi-\theta/2)\quad\text{са}\quad\Lambda_2<1,$$

где је

$$\Lambda_2(c_0,c_1)=\operatorname*{Max}_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}\left\{\frac{2}{2\pi-\theta}\operatorname{arctg}\frac{c_1\sin\theta/2}{\alpha_1-\beta_1\cos\theta/2}\right\}<1.\qquad\text{(II, 15)}$$

Сада је према слици 10

$$-\Lambda_1\frac{\theta}{2}<-\Theta_1\leqslant\Theta(\theta)\leqslant\Theta_2<\Lambda_2\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right).$$

Отуда следи да се нуле функције $s(\theta)$ налазе у размацима

$$(k-\Lambda_2)\frac{\pi}{n+1-\Lambda_2/2},\quad k\frac{\pi}{n+1-\Lambda_1/2},\qquad k=1,2,\ldots n,\qquad\text{(II, 16)}$$

и како су ови размаци садржани у

$$(k-1)\frac{\pi}{n+1/2},\quad k\frac{\pi}{n+1/2},$$

то се отуда добива наведени резултат као и чињеница да постоје размаци око тачака $(k-1)\pi/(n+1/2)$, $k=1,2,\ldots n$ у коме нема нула.

функција $s(\theta)$ ако је $b_{n+1} < b_{n+2}$. У овом резултату садржан је и резултат наведен у тачки 2. 3. да синусни ред или полином нема нула у близини $\theta=0$ ако му коефицијенти теже нули.

III. Тригонометриски полиноми и редови са двоструко и вишеструко монотоним коефицијентима

3. 1. У одељку 1. 5. 1. добили смо као услов да један низ кругова K_n асоциран једној θ-спирали буде двоструко монотон, потребно је да низ страна те θ-спирале буде двоструко монотон.

Нека су A_n темена θ-спирале, дата комплексним бројевима

$$s_{n-1}=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i}, \quad s_{-1}=A_0, \quad n=0,1,2,\ldots, \qquad \text{(III, 1)}$$

и претпоставимо да су a_ν двоструко монотони, тј.

$$\begin{aligned} \Delta a_\nu &= a_{\nu-1}-a_\nu \geqslant 0, \\ \Delta^2 a_\nu &= a_{\nu-1}-2a_\nu+a_{\nu+1} \geqslant 0, \end{aligned} \quad \nu=1,2,\ldots, \qquad \text{(III, 2)}$$

У овом случају (в. сл. 5), поред монотоног система кругова $K_0, K_1, \ldots$ асоцираних θ-спирали $0 s_0 s_1 \ldots$ имамо и монотон систем кругова $K_0', K_1' \ldots$ асоциран θ_1-спирали средишта првих кругова $C_0, C_1, \ldots$ (1. 5. 1.).

Особина **2'** одељка 1. 5. 1. да се извести и рачунски. Полупречник r_q' круга K_q', $q=1,2,\ldots$, дат је са (в. сл. 5)

$$\begin{aligned} r_q' = \overline{C_q' C_q} &= (\overline{C_q A_{q+1}} - \overline{C_{q+1} A_{q+2}})/2\sin\theta/2 = \\ &= \frac{a_{q-1}-a_q}{4}\operatorname{cosec}^2\theta/2, \end{aligned} \qquad \text{(III, 3)}$$

а центар C_q' круга K_q' са

$$\begin{aligned} C_q' &= C_q + r_q' \exp\left[(q-1)\theta+\theta/2+\pi/2+\pi+\pi/2+\theta/2\right] i = \\ &= C_q + r_q' e^{q\theta i}. \end{aligned} \qquad \text{(III, 4)}$$

Из последњег израза се види да је дуж $\overline{C_q' C_q}$ паралелна дужи $\overline{A_{q-1} A_q}$; према томе, тангента у тачки C_q на круг K_q' нормална је на дужи $\overline{A_{q-1} A_q}$. Ако у обрасцу (III, 4) (в. сл. 5) изразимо C_q као

$$C_q = \sum_{\nu=0}^{q-1} a_\nu \exp[\nu\theta i] + i\frac{a_q}{2}\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}\exp\left[\frac{2q-1}{2}\theta i\right] \qquad \text{(III, 5)}$$

а r_q' са (III, 3), добићемо дефинитивно

$$C_q' = s_{q-1} + i\frac{a_q}{2}\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}\ \exp\left[(2q-1)\frac{\theta i}{2}\right] +$$

$$+ \frac{a_{q-1}-a_q}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}\exp\,[q\theta i]. \qquad \text{(III, 5')}$$

3. 1. 1. У случају двоструко монотоног низа коефицијената a_ν (услов (III, 2)) тачка s_n налази се у или на кругу K_q', кад је $q \leqslant n$. Ако пројектујемо овај круг на реалну осу и изразимо да се између његових пројекција налази пројекција тачке s_n, добићемо неједначине

$$\mathbf{Re}\,(C_q') - r_q \leqslant \mathbf{Re}\,(s_n) \leqslant \mathbf{Re}\,(C_q') + r_q.$$

Према (III, 3) и (III, 5') биће

$$\mathrm{Re}\,(s_{q-1}) - \frac{a_q}{2}\,\frac{\sin(2q-1)\theta/2}{\sin\theta/2} + \frac{a_{q-1}-a_q}{4}\,\frac{\cos q\theta}{\sin^2\theta/2} -$$

$$- \frac{a_{q-1}-a_q}{4}\,\frac{1}{\sin^2\theta/2} \leqslant \mathbf{Re}\,(s_n),$$

$$\mathbf{Re}\,(s_n) \leqslant \mathbf{Re}\,(s_{q-1}) - \frac{a_q}{2}\,\frac{\sin(2q-1)\theta/2}{\sin\theta/2} +$$

$$+ \frac{a_{q-1}-a_q}{4}\,\frac{\cos q\theta}{\sin^2\theta/2} + \frac{a_{q-1}-a_q}{4}\,\frac{1}{\sin^2\theta/2},$$

односно

$$- \frac{a_q}{2}\,\frac{\sin(2q-1)\theta/2}{\sin\theta/2} - \frac{a_{q-1}-a_q}{4}\,\frac{\sin^2 q\theta/2}{\sin^2\theta/2} \leqslant \mathbf{Re}\,(s_n - s_{q-1}),$$

$$\mathbf{Re}\,(s_n - s_{q-1}) \leqslant \frac{a_q}{2}\,\frac{\sin(2q-1)\theta/2}{\sin\theta/2} + \frac{a_{q-1}-a_q}{4}\,\frac{\cos^2 q\theta/2}{\sin^2\theta/2},$$

где треба ставити

$$\mathrm{Re}\,(s_n - s_{q-1}) = \mathbf{Re}\left(\sum_{\nu=q}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i}\right) = \sum_{\nu=q}^{n} a_\nu \cos\nu\theta.$$

Отуда добивамо следећи став [15]:

Кад низ коефицијената a_ν задовољава услове

$$\Delta a_\nu \geqslant 0, \quad \nu = q,\ q+1, \ldots, n,\ n+1, n+2,$$

$$\Delta^2 a_\nu \geqslant 0, \quad a_{n+1} = a_{n+2} = 0,$$

шада сшавивши

$$2\,w_q(2\,x)=a_q\,\frac{\sin^2(q-1)\,x}{\sin^2 x}-a_{q-1}\,\frac{\sin^2 q\,x}{\sin^2 x},$$

$$2\,W_q(2\,x)=a_{q-1}\,\frac{\cos^2 q\,x}{\sin^2 x}-a_q\,\frac{\cos^2(q-1)\,x}{\sin^2 x},$$

и

$$C_{q,n}(\theta)=\sum_{\nu=q}^{n}a_\nu\cos\nu\,\theta,$$

добићемо

$$w_q(\theta)\leqslant C_{q,n}(\theta)\leqslant W_q(\theta)\quad \text{за}\quad 0<\theta<2\,\pi.$$

3. 2. Посматрајмо косинусни ред

$$c(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\cos\nu\theta, \tag{III, 6}$$

чији коефицијенти задовољавају услов двоструке монотоније, тј.:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\,a_\nu&=a_\nu-a_{\nu+1}\geqslant 0\,,\\ \Delta^2 a_\nu&=a_\nu-2\,a_{\nu+1}+a_{\nu+2}\geqslant 0,\end{aligned}\right.\qquad \nu=0,1,2\ldots \tag{III, 6'}$$

За тај ред важи овај Fejér-ов став [1]:

$c(\theta)$ у целом размаку $0<\theta<2\pi$ не узима негашивне вредносши. Ако је

$$a_0-2\,a_1+a_2>0,$$

шада је

$$c(\theta)\geqslant\frac{a_0-2\,a_1+a_2}{2}. \tag{III, 7}$$

Овај став је последица интерпретације збира

$$S(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\,e^{\nu\theta i},$$

дате у 1. 5. 1. Према слици 5, $S(\theta)$ се, због услова двоструке монотоније налази у сваком кругу K_n', па је због особине **2'** тога одељка десно од тангенте $C_0\,\tau$, тј.

$$c(\theta)=\mathbf{Re}\,[S(\theta)]>\frac{a_0}{2},$$

и отуда већ следи позитивитет од $c(\theta)$. Како $S(\theta)$ лежи и у K_1', тј. десно од тангенте у тачки P на круг K_1', то отуда добивамо и неједнакост (III, 7), јер је (в. сл. 5)

$$c(\theta)\geqslant\overline{P'P}=\left(\frac{a_0-a_1}{2\sin\theta/2}-\frac{a_1-a_2}{2\sin\theta/2}\right)\sin\theta/2=\frac{a_0-2\,a_1+a_2}{2}.$$

3. 2. 1. Косинусни полином

$$C_m(\theta)=\frac{c_0}{2}+c_1\cos\theta+c_2\cos 2\theta+\ .\ .\ .+c_m\cos m\theta, \qquad \text{(III, 8)}$$

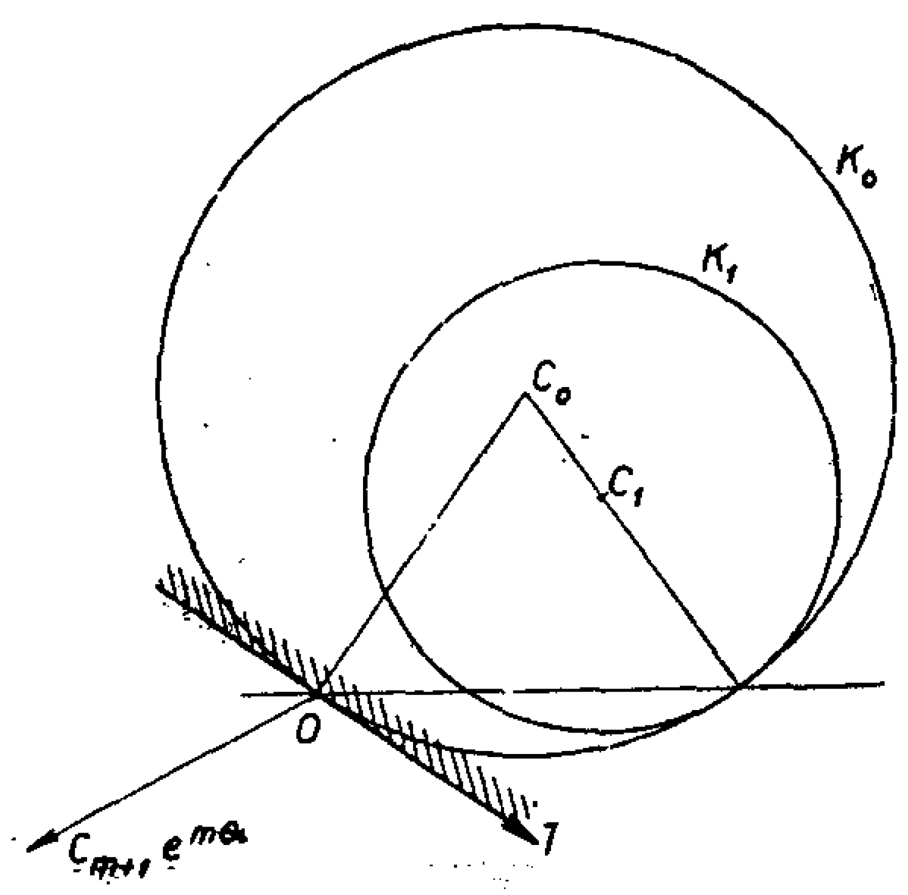
чији коефицијенти монотоно опадају и задовољавају услов

$$c_\nu-2c_{\nu+1}+c_{\nu+2}\geqslant 0, \quad \nu=1,2,\ .\ .\ .,m-2,$$

не спада у резултат наведен у претходном одељку, пошто овде не мора бити испуњен услов $c_{m-1}-2c_m\geqslant 0$. За полином (III, 8) могу се сада навести раздвојени размаци у којима он не може имати нула. $C_m(\theta)$ да се написати у облику

$$2\,C_m(\theta)=2\,e^{-\theta i/2}\sum_{\nu=1}^{m}c_\nu\cos\frac{2\nu-1}{2}\,\theta+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{m}(c_\nu-c_{\nu+1})e^{\nu\theta i}+c_{m+1}e^{m\theta i},$$



Сл. 11

Према 1. 5. 1. први члан десне стране се налази на тангенти круга K_0 (особина 2°) а други у систему кругова $K_0, K_1, .\ .\ .$ (в. сл. 11). $C_m(\theta)$ не може бити нула ако се $c_{m+1}e^{m\theta i}$ налази испод OT, тј. за

$$2k\pi-\theta/2\leqslant m\theta\leqslant\pi-\theta/2+2k\pi.$$

Отуда у размацима

$$\frac{2k\pi}{m+1/2}\leqslant\theta\leqslant\frac{(2k+1)\pi}{m+1/2}, \qquad k=0,1,2,\ldots,[m/2],$$

$C_m(\theta)$ не може бити нула. Тако, на пример, $C_m(\theta)$ нема нула у размаку $(0,\pi/(m+1/2))$.

3. 2. 2. Позитивитет једног косинусног полинома облика

$$T_n(\varphi)=\frac{\lambda_0}{2}+\lambda_1\cos\varphi+\ .\ .\ .+\lambda_n\cos n\varphi \qquad \text{(III, 9)}$$

долази до изражаја у неким проблемима анализе. Тако, на пример, класичан је Fejér-ов став о аритметичким срединама делимичних збирова Fourier-овог реда. Ту се ради о позитивитету полинома облика

$$1+2\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\cos\nu\varphi=\frac{1}{n}\left(\frac{\sin n\varphi/2}{\sin\varphi/2}\right)^2\geqslant 0.$$

Из позитивитета полинома (III, 9) следи, на пример, одмах горња граница апсолутне вредности од

$$L_n = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu c_\nu$$

за реално λ_ν, а где су c_ν коефицијенти потенцијалног реда функције $f(z)$. То следи непосредно из обрасца

$$L_n = \lim_{r \to 1} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\varphi i})\, T_n(\varphi)\, d\varphi .$$

W. Rogosinski и G. Szegő [22], [27], добили су низ ставова о особинама делимичних збирова Taylor-ових редова полазећи од неједначине

$$C_n(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos \nu\theta}{\nu+1} \geqslant 0 \quad \text{за свако } n. \qquad \text{(III, 10)}$$

Ова неједначина као и она дата у 3. 3. 1. може се доказати поступком који се оснива на особинама θ-спирале, а исто тако може се тим поступком добити позитивитет и других косинусних и синусних полинома. Према претходном одељку (III, 10) нема нула у $(0, \pi/(n+{}^1/_2))$, Ако се означи

$$C(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu\theta}{\nu+1},$$

то се због

$$\frac{1}{\nu+1} = \int_0^1 t^\nu\, dt$$

$C(\theta)$ може написати у облику

$$C(\theta) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{1-t^2}{1-2t\cos\theta+t^2}\, dt. \qquad \text{(III, 11)}$$

Из (III, 11) следи не само да је $C(\theta) \geqslant 0$ већ због $\partial C/\partial\theta \leqslant 0$ да $C(\theta)$ монотоно опада у целом интервалу $(0, \pi)$.

a) Посматрајмо, најпре, θ у размаку $\pi/(n+1/2) \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Најмања вредност од $C(\theta)$ у том размаку је за $\theta = \pi/2$ и износи према (III, 11)

$$C(\pi/2) = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} - 1 > 0 \cdot 5. \qquad \text{(III, 12)}$$

Израз

$$R_n(\theta)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\cos\nu\theta}{\nu+1} \tag{III, 13}$$

можемо с обзиром да се

$$S_n(\theta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{(n+\nu)\theta i}}{n+\nu+1}$$

налази у кругу K_0, и да је $R_n = \mathbf{Re}\,\{S_n(\theta)\}$ оценити са

$$R_n(\theta)\leqslant\frac{1}{2(n+1)}\left[1+\frac{1}{\sin\theta/2}\right], \qquad \text{(в. сл. 5).} \tag{III, 14}$$

Из

$$1-x<\frac{\sin\pi x}{\pi x}$$

следи

$$\frac{1}{\sin\theta/2}<\frac{4\pi}{\theta(2\pi-\theta)}.$$

Последњи израз монотоно опада, и (III, 14) се може оценити са

$$R_n(\theta)\leqslant\frac{1}{2(n+1)}\left[1+\frac{4\pi}{\pi/(n+1)\cdot[2\pi-\pi/3]}\right]=\frac{1}{2(n+1)}+\frac{4}{5\pi}\leqslant\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

Због (III, 12) следи сада позитивитет од $C_n(\theta)$ у $\pi/(n+1/2)<\theta<\pi/2$ а за $n>2$, водећи рачуна да је

$$C_n(\theta)=C(\theta)-R_n(\theta). \tag{III, 15}$$

b) Нека је $\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi$. Како $C(\theta)$ монотоно опада, то је

$$C(\theta)\geqslant \lg 2-1/2=0\cdot 1935\ldots \tag{III, 16}$$

Ако сада мајорирамо $R_n(\theta)$ користећи чињеницу да се $S_n(\theta)$ налази у кругу K_0' који је десно од $C_0\,\tau$ (в. сл. 5), добићемо

$$R_n(\theta)\leqslant\frac{1}{2(n+1)}+2\,r_0', \tag{III, 17}$$

где је r_0' полупречник круга K_0' и који је дат са (III, 3):

$$r_0'=\frac{1}{4(n+1)(n+2)\sin^2\theta/2}.$$

Ако ове вредности заменимо у израз (III, 17), добијамо

$$R_n(\theta)\leqslant\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)(n+2)(\sqrt{2}/2)^2}=\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

тј. за $n\geqslant 3$ је

$$R_n(\theta)\leqslant\frac{1}{8}+\frac{1}{20}=0.175$$

и због (III, 16) следи позитивитет од $C_n(\theta)$ у $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$ према (III, 15) за $n \geqslant 3$.

Најзад за $n < 3$, $C_0(\theta)$ и $C_1(\theta)$ су очевидно позитивни, а

$$C_2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\theta + \frac{1}{3} \cos 2\theta > 0$$

пошто је његова најмања вредност за $\cos\theta = -3/8$ и износи $7/96 > 0$.

3. 3. Нека је дат синусни полином

$$s(\theta) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\theta, \tag{III, 18}$$

чији коефицијенти задовољавају услове (III, 6'). Применом двоструког Abel-овог збира он прелази у

$$s(\theta) = \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu - 2a_{\nu+1} + a_{\nu+2}) S_\nu(\theta), \quad a_{n+1} = a_{n+2} = 0, \tag{III, 19}$$

где је

$$S_\nu(\theta) = \nu \sin\theta + (\nu - 1)\sin 2\theta + \cdots + \sin \nu\theta. \tag{III, 19'}$$

Сви тригонометриски полиноми $S_\nu(\theta)$ *су позитивни у* $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ (Lukács [3]). Да бисмо показали позитивитет полинома $S_\nu(\theta)$, приметимо да су њихови коефицијенти двоструко монотони. Збир

$$\sum_{k=0}^{n} (\nu + 1 - k)\, e^{k\theta i} \tag{III, 19''}$$

налази се зато у систему кругова K_0', K_1', ... K_ν', који се овде сви поклапају, јер је $\overline{C_0 C_1} = \overline{C_1 C_2} = \cdots = \overline{C_{\nu-1} C_\nu} = 1$. У овом случају може се директно израчунати $S_\nu(\theta)$, одакле се види његов позитивитет. Како је сада, тј. у случају (III, 19') $\overline{C_{\nu-1} C_\nu} = r_\nu$, где је r_ν полупречник K_ν-тог круга, са центром у C_ν, то се тачка $A_{\nu-1}$, која претставља комплексан број дат са (III, 19'') налази и на кругу K_0. Из те чињенице, следи према сл. 5

$$S_\nu = \mathbf{Im}\left[\sum_{k=0}^{\nu} (\nu + 1 - k)\, e^{k\theta i}\right] = \mathbf{Im}\,[\overrightarrow{OC_0'}] + \mathbf{Im}\,[r_0' e^{(\pi - n\theta)i}],$$

где r_0' означава полупречник круга K_0', тј. $r_0' = (\sin^2\theta/2)^{-1}$ (в. III. 3). Како је

$$\mathbf{Im}\,[\overrightarrow{OC_0'}] = \mathbf{Im}\,[OC_0] = \frac{a_0' \cos\theta/2}{2\sin\theta/2} = \frac{(\nu+1)\cos\theta/2}{2\sin\theta/2},$$

то последња једнакост даје

$$S_\nu(\theta) = \frac{(\nu+1)}{2\sin\theta/2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\sin\nu\theta}{4\sin^2\theta/2} = \frac{(\nu+1)\sin\theta - \sin\nu\theta}{4\sin^2\theta/2} \geqslant 0.$$

Из $S_\nu(\theta) \geqslant 0$ и (III, 19) следи *позитивитет синусног полинома* (III, 18) *чији су коефицијенти двоструко монотони.*

3. 3. 1. Као повод за испитивање позитивитета синусних редова поред осталог послужила је и Fejér-ова хипотеза из 1910 год. да је

$$s_n(\theta)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu\theta}{\nu}>0,\ \text{за}\ n=1,2,\ldots,\ \text{и}\ 0<\theta<\pi, \qquad \text{(III, 20)}$$

коју су доцније доказали D. Jackson [11], Th. Gronwall [9], E. Landau [17] и сам Fejér [3]. Неједначина (III, 20) није садржана у претходном ставу пошто низ

$$a_\nu=1/\nu,\quad \nu=1,2,\ldots,n\quad \text{и}\quad a_{n+1}=0\,,$$

није конвексан. За доказ горње неједначине приметимо прво да је

$$s_n(\theta)\geqslant 0\quad \text{за}\quad 0<\theta<\pi/n\quad \text{и}\quad \pi-\pi/n<\theta<\pi. \qquad \text{(III, 21)}$$

У последњем интервалу $s_n(\theta)>0$ пошто је

$$s_n(\pi-x)=\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\frac{\sin\nu x}{\nu}>0,\quad \theta=\pi-x,$$

при томе треба напоменути да $(\sin\nu x)/\nu$ за $0<x<\pi/n$ са растућим $\nu\leqslant n$ опада. Сада је према основној неједначини (§ 3. 1.)

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\sin\nu\theta}{\nu}\right|<\frac{1}{(n+1)\sin\theta/2},\quad 0<\theta<\pi. \qquad \text{(III, 22)}$$

Из

$$\frac{\pi-\theta}{2}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu\theta}{\nu}$$

и (III, 22) следи да је

$$s_n(\theta)=\frac{\pi-\theta}{2}-\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\sin\nu\theta}{\nu}>\frac{\pi-\theta}{2}-\frac{1}{(n+1)\sin\theta/2}.$$

Због (III, 21) биће неједначина (III, 20) испуњена за

$$\pi/n\leqslant\theta\leqslant\pi-\pi/n$$

ако је

$$\frac{1}{2}(\pi-\theta)\sin\frac{\theta}{2}>\frac{1}{n+1},\quad \text{за}\quad \pi/n\leqslant\theta\leqslant\pi-\pi/n. \qquad \text{(III, 23)}$$

Функција $\frac{1}{2}(\pi-\theta)\sin\theta/2$ има само један максимум у $(0,\pi)$; стога ће последња неједначина (III, 23) бити испуњена ако важи за крајеве размака (III, 23), што је случај због

$$\operatorname{tg}x>x,\quad \cos>1-\frac{x^2}{2}$$

и

$$\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}\geqslant\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}\geqslant\frac{\pi}{2n}\left(1-\frac{\pi^2}{8n^2}\right)>\frac{1}{n+1},$$

већ за $n\geqslant 2$.

Напоменимо да овај поступак дозвољава да се утврди позитивитет и других тригонометриских полинома ако се зна збир реда или горња граница збира оног реда од којих је тај полином збир првих n чланова.

3. 3. 2. За позитивитет синусног полинома могу се дати услови које треба да задовоље његови коефицијенти а који су општији од услова датих у 3. 3., тј. од двоструке монотоније његових коефицијената. Из једнакости

$$2\,i\cdot e^{n\theta i}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin\nu\theta = -\sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n-\nu}\,e^{\nu\theta i} + \\ + e^{n\theta i}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n-\nu}\,e^{(n-\nu)\theta i},$$

види се да је полином на десној страни дељив са $e^{2\theta i}-1$, тј.

$$2i\cdot e^{n\theta i}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin\nu\theta = (e^{2\theta i}-1)\,e^{(n-1)\theta i}\sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu\cos\nu\theta\,,$$

где је за непарно n

$$\begin{aligned} 2A_0 &= a_n + a_{n-2} + \cdots + a_1 \\ A_1 &= a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots + a_2 \\ A_2 &= a_n + a_{n-2} + \cdots + a_3 \\ &\cdots\cdots \\ A_{n-2} &= a_{n-1} \\ A_{n-1} &= a_n\,, \end{aligned}$$

а за парно n

$$\begin{aligned} 2A_0 &= a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots + a_1 \\ A_1 &= a_n + a_{n-2} + \cdots + a_2 \\ A_2 &= a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots + a_3 \\ &\cdots\cdots \\ A_{n-2} &= a_{n-1} \\ A_{n-1} &= a_n\,. \end{aligned}$$

Како је према § 3. 2. косинусни полином $\sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu\cos\nu\theta$ позитиван ако је

$$\begin{aligned} &A_\nu > A_{\nu+1}, \\ &A_\nu - 2A_{\nu+1} + A_{\nu+2} \geqslant 0, \end{aligned} \qquad \nu=0,1,\ldots n-1,\ A_n = A_{n+1} = 0,$$

то ако ове услове изразимо преко коефицијената a_ν добићемо као услов за позитивитет синусног полинома (III, 18):

$$
\begin{aligned}
&a_{n-1}-2a_n \geqslant 0,\\
&a_{n-2}-2a_{n-1}+a_n \geqslant 0,\\
&(a_{n-4}-2a_{n-3}+a_{n-2})+(a_{n-2}-2a_{n-1}+a_n)+a_n \geqslant 0,\\
&(a_{n-5}-2a_{n-4}+a_{n-3})+(a_{n-3}-2a_{n-2}+a_{n-1})+a_{n-1}-2a_n \geqslant 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

тј. *синусни полином је позитиван ако су збирови, парних за себе и непарних за себе, других диференција његових коефицијената позитивни.*

Из овог разматрања може се добити став о позитивитету синусног реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu\theta$. Треба само

$$\frac{1}{\sin\theta}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \sin\nu\theta$$

претворити у

$$A_0/2+\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \cos\nu\theta$$

и применити став о косинусном реду кад $r\to 1$. Отуда следи као специјалан случај да је *под условом двоструке монотоније коефицијената* a_n *и* $\lim a_n = 0$ *за* $n=\infty$ *синусни ред* $\Sigma a_\nu \sin\nu\theta$ *позитиван у* $0<\theta<\pi$.

3. 4. Нека су коефицијенти $b_{n+\nu+1}$, $\nu=0, 1, 2, \ldots$ синусног реда

$$s(\theta, n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1} \sin(n+\nu+1)\theta, \tag{III, 24}$$

двоструко монотони са $b_{n+\nu+1}\to 0$ када $\nu\to\infty$; тада је редом (III, 24) дефинисана функција у $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi-\varepsilon$ непрекидна, пошто је ред у том размаку униформно конвергентан. Према § 2. 4. 1. (II, 13), $s(\theta, n)$ може се претставити у облику

$$2i\cdot e^{n\theta i}\, s(\theta, n) = e^{2(n+1)\theta i} z(\theta) + \bar z(\theta), \tag{III, 25}$$

где је

$$z(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1} e^{\nu\theta i}.$$

Како су коефицијенти од $z(\theta)$ двоструко монотони, то је према § 3. 2. и § 3. 3.

$$\mathbf{Re}[z(\theta)] \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{Im}[z(\theta)] \geqslant 0,$$

па се аргумент од $z(\theta)$ налази у размаку $(0, \pi/2)$ за $0 < \theta < \pi$. Ако се са $\Theta(\theta)$ означи аргумент од $z(\theta)$, то се из обрасца (III, 25) види да $s(\theta, n)$ постаје нула за неку вредност θ која је одређена једначином

$$2(n+1)\theta + \Theta(\theta) = -\Theta(\theta) + 2k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad \text{(III, 26)}$$

и где је $0 < \Theta(\theta) < \pi/2$ (в. § 2. 4. 1.). Због тога нуле могу бити само у размацима

$$\frac{k-1/2}{n+1}\pi, \quad \frac{k}{n+1}\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(III, 27)}$$

На тај начин се добивају не само размаци упола мањи од оних датих у § 2. 4. 1. већ се дају и размаци у којима не може бити ниједна нула. Fejér-ов резултат пак за распоред ових нула показује само да у размацима $[(k-1/2)\pi/(n+1), k\pi/(n+1)]$ мора лежати најмање једна нула од $s(\theta, n)$, и не показује да у размацима $[k\pi/(n+1), (k+1/2)\pi/(n+1)]$ уопште нема нула.

Доња граница размака (III, 27) може се померити надесно, тј. цео размак сузити, пошто је $z(\theta)$ у десној половини круга K_0, тако да је онда $\Theta(\theta) \leqslant \pi/2 - \theta/4$ и размаци се сужавају у

$$\frac{k-1/2}{n+3/4}\pi \leqslant \theta_k \leqslant \frac{k}{n+1}\pi, \qquad k = 1, 2, \ldots n.$$

Најзад и овде, аналого § 2. 4. 2., могу се ови размаци и даље сужавати ако се води рачуна о односима између коефицијената $b_{n+\nu+1}$.

3. 5. Нека је најзад низ коефицијената a_ν троструко монотон, тј. нека задовољава поред услова (III, 6') § 3. 1. и услов

$$\Delta^3 a_\nu = a_\nu - 3a_{\nu+1} + 3a_{\nu+2} + a_{\nu+3} \geqslant 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots \qquad \text{(III, 28)}$$

Показаћемо, примера ради, овај став [1]:

Ако су коефицијенти a_ν тригонометриског реда

$$c(\theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos(2\nu - 1)\theta$$

троструко монотони, тј. ако задовољавају услове (III, 2) и (III, 28), *тада је он позитиван у* $0 < \theta < \pi/2$.

Да бисмо добили нешто општији став (сличан оном за синусни ред у § 3. 3. 2.), пођимо од

$$c(r, \theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \cos(2\nu - 1)\theta, \quad r < 1.$$

Користећи идентитет

$$\frac{\cos(2\nu-1)\theta}{\cos\theta} = \mp 1 \pm \cos 2\theta \mp \cos 4\theta \pm \cdots \pm \cos 2\nu\theta,$$

где горњи знаци одговарају за ν парно, а доњи за непарно, добивамо

$$\frac{c(r,\theta)}{2\cos\theta} = A_0/2 + A_1 \cos 2\theta + A_2 \cos 4\theta + \cdots,$$

где је

$$A_\nu = \sum_{k=\nu}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k r^k, \quad k=1,2,\ldots \tag{III, 29}$$

Да би $c(r,\theta)/2\cos\theta$ као косинусни ред према ставу из одељка 3. 2. био позитиван за $0<2\theta<\pi$, тј. за $0<\theta<\pi/2$, потребно је да буде

$$A_\nu - 2A_{\nu+1} + A_{\nu+2} \geqslant 0, \quad \nu=0,1,2,\ldots$$

Ако A_ν изразимо са (III, 29) добићемо као услов да су збирови непарних и парних трећих диференција позитивни, тј.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta^3 a_{2\nu-1} r^{2\nu-1} \geqslant 0, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta^3 a_{2\nu} r^{2\nu} \geqslant 0.$$

Аво сада пустимо да $r \to 1$, то из чињенице да $c(r,\theta) \to c(\theta)$ и да ова последња гранична функција $c(\theta)$ постоји, она је тада као гранична функција позитивних функција исто тако у $(0,\pi/2)$ позитивна. За позитивитет од $c(\theta)$ довољно је, дакле,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta^3 a_{2\nu-1} \geqslant 0, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta^3 a_{2\nu} \geqslant 0.$$

Специјално $c(\theta) \geqslant 0$ у $(0,\pi/2)$ ако је

$$\Delta^3 a_\nu \geqslant 0, \quad \nu=1,2,3,\ldots$$

3. 5. 1. Ако претпоставимо да су коефицијенти $b_{n+\nu+1}$, $\nu=0,1,2,\ldots$ синусног реда

$$s(\theta,n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1} \sin(n+\nu+1)\theta \tag{III, 30}$$

троструко монотони са $b_{n+\nu+1} \to 0$ када $\nu \to \infty$, тада се размаци његових нула, датих у § 3. 4., могу још сузити. Да бисмо добили у том случају Fejér-ове размаке

$$\frac{k-1/2}{n+1}\pi, \quad \frac{k}{n+1}\pi, \quad k=1,2,\ldots,n, \tag{III, 31}$$

треба према поступку наведеном у § 3. 4. одредити границе у којима лежи аргумент од

$$z(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1}\, e^{\nu\theta i}.$$

Можемо лако показати да је горња граница од

$$\Theta(\theta)=\operatorname{arc} z(\theta)=\pi/2-\theta/2.$$

Заиста, ако се стави

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\geqslant\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1}\sin\nu\theta}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1}\cos\nu\theta}=\operatorname{tg}\Theta(\theta),$$

то због $\sum b_{n+\nu+1}\cos\nu\theta\geqslant 0$ добивамо из ове неједначине да треба да буде

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1}\cos\frac{2\nu-1}{2}\theta\geqslant 0,$$

што је увек случај, према претходном одељку, ако су $b_{n+\nu+1}$ троструко монотони. Дакле,

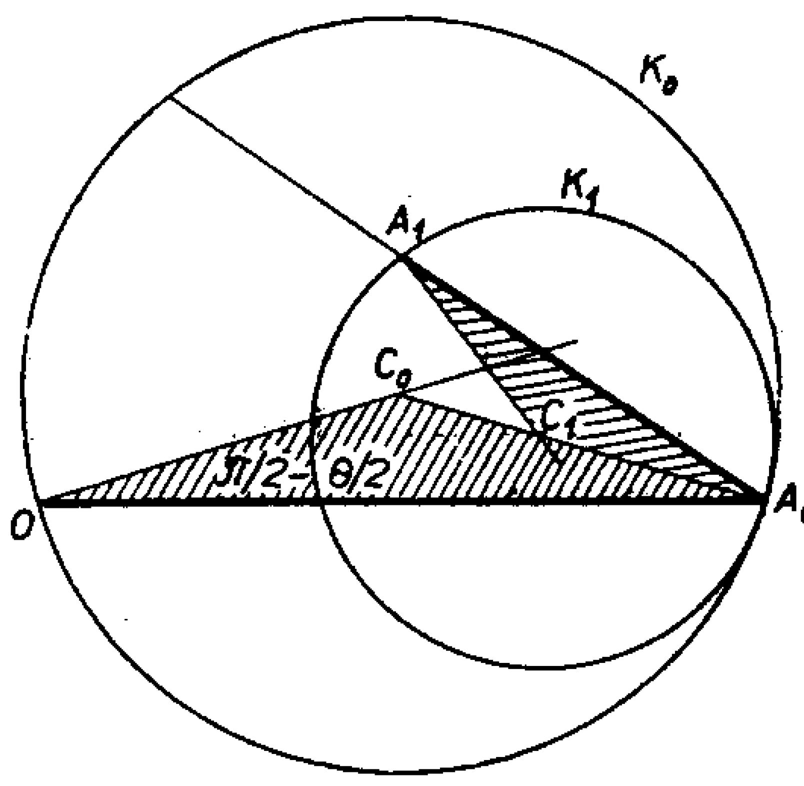
$$0<\Theta(\theta)<\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2},$$

а одатле следе, према наведеном поступку у § 3. 4. размаци (III, 31).

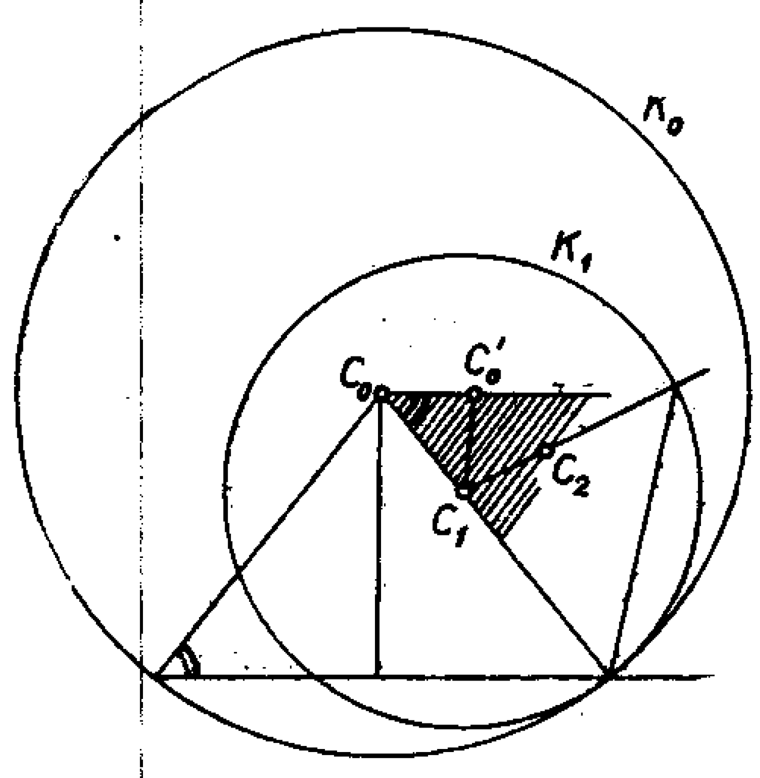
3. 6. Као што смо у уводу (§ 1. 1.) навели, овај поступак прецизира и област у којој се налази збир

$$s(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, e^{\nu\theta i}$$

под условом да коефицијенти a_ν задовољавају услове вишеструке монотоније. Наведимо два примера у том правцу. Из § 3. 5. знамо,



Сл. 12



Сл. 13

на пример, да под условом троструке монотоније од a_ν, аргумент од $s(\theta)$ налази се између 0 и $\pi/2-\theta/2$, дакле, $s(\theta)$ лежи у углу

$C_0 O A_0$ (в. сл. 12). Како $s(\theta)-a_0$ из истих разлога лежи у углу $C_0 A_0 A_1$, то отуда већ добивамо за $\pi/2 < \theta < \pi$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cos \nu\theta\right| < a_0,$$

ако су a_ν троструко монотони. Ако претпоставимо да су a_ν четвороструко монотони, тада је низ страна θ-спирале центара $C_0, C_1, \ldots$ троструко монотон. Применимо сада на овај низ страна $\overline{C_0C_1}\ \overline{C_1C_2}, \ldots$ претходно резоновање, па ћемо добити да $s(\theta)$ лежи у углу $C_0' C_0 C_1$. Како је $C_0 C_0' \perp \overline{OA_0}$ (в. § 1.5.), то $s(\theta)$ лежи испод праве $C_0 C_0'$ (в. сл. 13). Специјално, у овом случају вреди ова неједнначина

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu\theta \leqslant \frac{a_1}{2} \operatorname{cotg} \theta/2,$$

која је двапут прецизнија од уобичајене за случај просто монотоних коефицијената a_ν, где, као што је познато, на десној страни стоји $a_1 \sin\theta/2$.

IV. Примена на Taylor-ове редове са вишеструко монотоним коефицијентима

4. 1. У више радова Fejér и Szegő [8], [7], [1], посматрали су остатке

$$R_n(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu z^\nu, \quad n = 0, 1, 2 \ldots, \tag{IV, 1}$$

Taylor-овог реда

$$R_0(z) = f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu, \tag{IV, 2}$$

као и његове редуковане остатке, тј. изразе

$$r_n(z) = z^{-n} R_n(z), \tag{IV, 3}$$

под претпоставком да коефицијенти c_n задовољавају услове вишеструке монотоније и где је $\lim c_n = 0$, $n \to \infty$.

Ти су ставови најпре били дати за специјалне функције [6], [20]. У низу уопштења ставова ове врсте, као крајњу генерализацију Fejér и Szegő [8] дали су овај став:

Ако су коефицијенти Taylor-овог реда (IV, 2) *двоструко монотони и ако је задовољен услов*

$$\lim c_n = 0, \quad n \to \infty,$$

тада низ апсолутних вредности остатака (IV, 1), *као и низ њихових редукованих остатака* (IV, 3) *не расте, тј.*

$$|R_0(z)| \geqslant |R_1(z)| \geqslant |R_2(z)| \geqslant \cdots, \tag{I}$$

односно

$$|r_0(z)| \geqslant |r_1(z)| \geqslant |r_2(z)| \geqslant \cdots, \tag{II}$$

и што за сваку вредност од z која се налази у или на кругу $|z|=1$, осим за тачку $z=1$.

Очевидно из овог става следи и неједначина

$$|R_0(z)| = |f(z)| \geqslant |R_{n+1}(z)| = |f(z) - (c_0 + c_1 z + \cdot \cdot \cdot + c_n z^n)|,$$

тј.

$$|c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n| \leqslant 2 |f(z)|. \tag{IV, 4}$$

Неједначину (II) изводе Fejér и Szegő из неједначине (I) применом Schwarz-ове lemme која, као што је познато, гласи: *Ако је функција $F(z)$ регуларна у кругу $|z|=1$, тада из*

$$|F(z)| \leqslant M \quad \text{за} \quad |z| < 1 \quad \text{и} \quad F(0) = 0$$

следи

$$|F(z)| \leqslant M |z|, \quad \text{за} \quad |z| < 1$$

и где једнакост долази само ако је

$$F(z) = M e^{\alpha i} z.$$

Узимајући у овој lemme-и за $F(z)$ количник

$$\frac{R_\nu(z)}{R_{\nu-1}(z)}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

из (I), тј. из

$$|R_\nu(z)| \leqslant |R_{\nu-1}(z)|$$

следи

$$|R_\nu(z)| \leqslant |z \cdot R_{\nu-1}(z)|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

тј. (II). Треба, дакле, да покажемо (I) за збирове облика

$$\rho_n(\theta) = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu e^{\nu\theta i},$$

јер се ови збирови за $a_\nu = c_\nu r^\nu$ своде на (IV, 1). Довољно је показати само прву неједначину, тј.

$$|\rho_0(\theta)| \geqslant |\rho_1(\theta)|. \tag{IV, 5}$$

Остале се добивају применом овог резултата на $\rho_n(\theta)$. Њен доказ, међутим, непосредно следи из θ-спирале. Заиста како су коефицијенти од ρ_0 двоструко монотони, то $\rho_0(\theta)$ лежи у $K_0'\ldots$, дакле, десно од тангенте у C_0 на круг K_0' (в. сл. 5), па је зато

$$\overline{O\rho_0} \geqslant \overline{\rho_0 s_0},$$

што даје неједначину (IV, 5).

Ако претпоставимо да су коефицијенти c_ν троструко монотони, добићемо даља уопштења неједначине (II). Пошто у овом случају $f(z)$ лежи десно од $C_0'\tau'$, то је

$$\overline{C_0 f(z)} \geqslant \overline{C_1 f(z)} \geqslant \overline{C_2 f(z)} \geqslant \cdots .$$

Ако ову неједначину изразимо преко θ-спирале $C_0 C_1 C_2 \ldots$, добивамо

$$|r_0(z) - r_1(z)| \geqslant |r_1(z) - r_2(z)| \geqslant \cdots . \tag{III}$$

4, 1. 1. Ако претпоставимо да су c_ν вишеструко монотони, добићемо низ неједначина сличних са (III). Специјално, ако је c_ν четвороструко монотоно, може се добити неједначина

$$|r_{n-1}(z)| - 2\,|r_n(z)| + |r_{n+1}(z)| \geqslant 0 . \tag{IV}$$

За доказ ове неједначине изведимо најпре овај помоћни став из комплексних бројева: *Ако су за три комплексна броја r_0, r_1 и r_2 реални и имагинарни делови монотони и конвексни, тада су им и модули монотони и конвексни.*

Означимо

$$\alpha_i = \mathbf{Re}(r_i), \quad \beta_i = \mathbf{Im}(r_i), \qquad i = 0, 1, 2,$$

и нека је

$$\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2, \quad \beta_0 \geqslant \beta_1 \geqslant \beta_2, \tag{IV, 6}$$

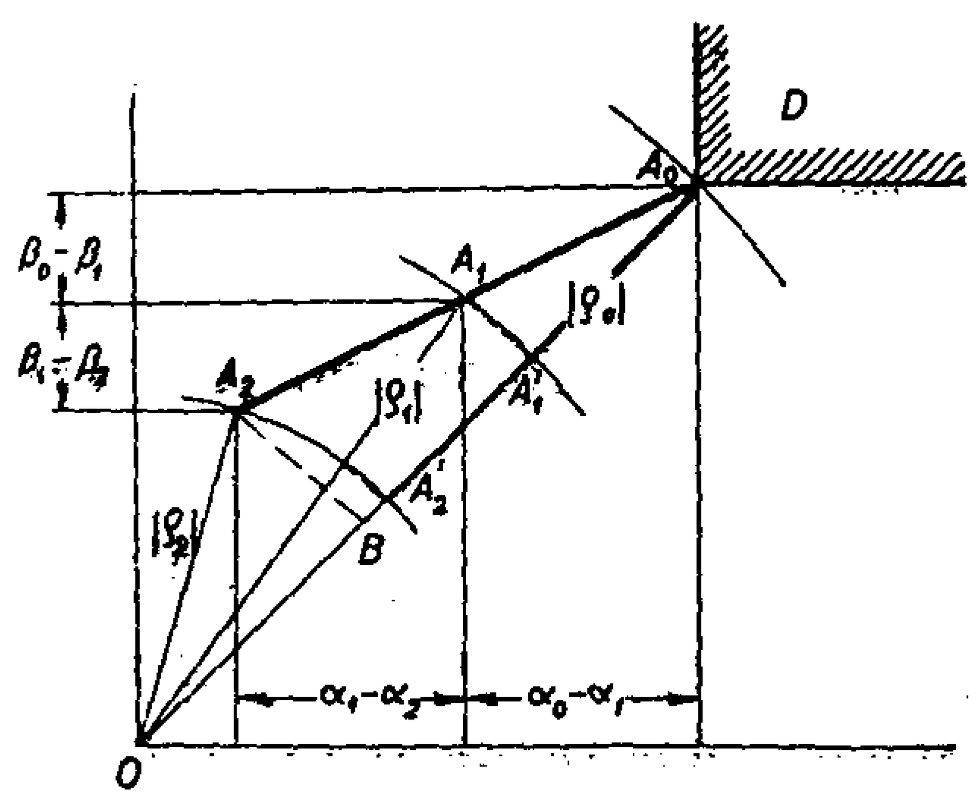
$$\alpha_0 - \alpha_1 \geqslant \alpha_1 - \alpha_2, \quad \beta_0 - \beta_1 \geqslant \beta_1 - \beta_2 .$$

Модули су сигурно монотони због (IV, 6). Ако је

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \quad \text{и} \quad \beta_0 - \beta_1 = \beta_1 - \beta_2,$$

тада се r_0, r_1 и r_2 налазе на једној правој (в. сл. 14), па је

$$|r_0| - 2\,|r_1| + |r_2| \geqq 0.$$



Сл. 14

Ако је било

$$\alpha_0 - \alpha_1 > \alpha_1 - \alpha_2,$$

или

$$\beta_0 - \beta_1 > \beta_1 - \beta_2,$$

или оба заједно, то r_0 пада у осенчену област D (в. сл. 14), па r_0 a fortiori расте и зато је

$$|r_0| - 2\,|r_1| + |r_2| > 0 .$$

Да бисмо отуда извели неједначину (IV), приметимо да се, на пример,

$$\beta_0 - \beta_1 > \beta_1 - \beta_2$$

своди на

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu - 2\,c_{\nu+1} + c_{\nu+2})\sin\nu\theta \geqslant 0, \tag{IV, 7}$$

пошто је

$$\beta_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \sin\nu\theta, \quad \beta_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu+1}\sin\nu\theta, \quad \beta_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu+2}\sin\nu\theta.$$

Ако са α_0, α_1 и α_2 означимо одговарајуће косинусне редове, као што смо то напред навели, то слична неједначина са (IV, 7) следи према § 3. 2.

4. 2. Према § 4. 1. (IV, 4) следи из

$$0 < \rho < 1 \quad \text{и} \quad |z| \leqslant 1, \quad z \neq 1$$

и

$$\frac{1}{(1-z)^\rho} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots$$

да је

$$|\gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_n z^n| < \frac{H}{|1-z|^\rho}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

где H зависи само од ρ. На исти начин у овом биномном реду за $\rho > 1$ Szegő [24] је добио да је

$$|\gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_n z^n| < \frac{Hn^{\rho-1}}{|1-z|^\rho}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Аутор наглашава да му није пошло за руком да нађе општи став еквивалентан оном из 4. 1. у случају да коефицијенти γ_ν монотоно расту, а као што је то случај у наведеном специјалном примеру биномног реда са $\rho > 1$. У том правцу наведимо овај резултат:

Ако коефицијенти Taylor-овог реда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$$

монотоно расту и ако је поред тога низ c_n такав да постоји један цео број $k \geqslant 1$ такав да низ разлика коефицијената c_n, тј.

$$\delta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} c_{n-\nu}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где је

$$c_{-k} = c_{-k+1} = \cdots = c_{-2} = c_{-1} = 0,$$

образује један опадајући низ, тј.

$$\delta_n^{(k)} > \delta_n^{(k+1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

тада је

$$|c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n| < H c_n |f(z)|$$

за све

$$n = 1, 2, \ldots, \quad |z| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad z \neq 1.$$

Нека је, најпре, $z = e^{\vartheta i}$. Тада је

$$s_n(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n = e^{n\vartheta i}(c_n + c_{n-1} e^{-\vartheta i} + \cdots + c_0 e^{-n\vartheta i}). \qquad \text{(IV, 8)}$$

Ставимо

$$\theta = -\vartheta, \; a_\nu = c_{n-\nu}, \; \nu = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

тада ће тачка

$$s_n = a_0 + a_1 e^{\theta i} + \cdots + a_n e^{n\theta i} = c_n + c_{n-1} e^{-\vartheta i} + \cdots + c_0 e^{-n\vartheta i}$$

бити у кругу K_0 чији је полупречник

$$r_0 = \frac{a_0}{2 \sin \theta/2} = \frac{c_n}{2 \sin \theta/2}.$$

Према томе је

$$|s_n| \leqslant 2 r_0,$$

односно због (IV, 8) биће

$$|c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n| \leqslant \frac{c_n}{\sin \theta/2} \leqslant \frac{2 c_n}{|1 - z|} \quad \text{са} \quad z = e^{\theta i}. \qquad \text{(IV, 9)}$$

Ова неједначина која је у ствари

$$|(1 - z) s_n(z)| \leqslant 2 c_n,$$

вреди за $z = e^{\theta i}$ и према познатом Cauchy-јевом ставу вреди и за све z круга $|z| \leqslant 1$. Ако њу помножимо са

$$|(1 - z)^{k-1} f(z)|,$$

она постаје

$$|(1 - z)^k f(z)| \, |s_n(z)| \leqslant 2 c_n |1 - z|^{k-1} |f(z)|. \qquad \text{(IV, 10)}$$

Пошто је

$$|1 - z|^{k-1} \leqslant 2^{k-1} \quad \text{за} \quad |z| \leqslant 1,$$

а у изразу

$$(1 - z)^k f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu^{(k)} z^\nu,$$

коефицијенти монотоно опадају, то по теореми Kakeya-Enestrom [28], постоји једно $m>0$ такво да је

$$|(1-z)^k f(z)|>m \quad \text{за све} \quad |z|\leqslant 1.$$

И из (IV, 10) следи

$$|s_n(z)|<\frac{2^k}{m}c_n|f(z)|, \quad |z|\leqslant 1, \quad z\neq 1,$$

што даје наведени став, где је $H=2^k/m$.

Наведени пример биномног реда са $\rho>1$ садржан је у овом ставу. Из (IV, 9) следи

$$s_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n}\gamma_\nu z^\nu\leqslant\frac{2\gamma_n}{|1-z|}=\frac{2\gamma_n}{|1-z|^\rho}|1-z|^{\rho-1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^\rho\gamma_n}{|1-z|^\rho}\leqslant\frac{(1+\varepsilon_n)2^\rho}{\Gamma(\rho)}\cdot\frac{n^{\rho-1}}{|1-z|^\rho}, \quad \varepsilon_n>0,$$

пошто је $\gamma_n\sim n^{\rho-1}/\Gamma(\rho)$, $n\to\infty$.

4. 3. Наведимо, најзад, да се многи од ових резултата могу проширити и на Taylor-ове редове чији коефицијенти задовољавају општије услове. У том правцу наведимо овај резултат.

Нека су, на пример, коефицијенти c_ν Taylor-овог реда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu z^\nu \tag{IV, 11}$$

такви да је $c_\nu=\rho^\nu\exp(\lambda_\nu i)$, $\lambda_0=0$, где ρ_ν чини један монотон низ, а низ аргумената λ_ν задовољава услове

$$\begin{aligned} &0\leqslant\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}<\theta_1<\pi, \\ &\lambda_\nu-2\lambda_{\nu-1}+\lambda_{\nu-2}\geqslant 0, \qquad \nu=3,4\ldots \\ &\lambda_\nu-3\lambda_{\nu-1}+3\lambda_{\nu-2}+\lambda_{\nu-3}\geqslant 0. \end{aligned} \tag{IV, 12}$$

Пођимо од интерпретације дате у § 1. 4. Taylor-ов ред (IV, 11) је облика

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho_\nu\exp[(\nu\theta+\lambda_\nu)i].$$

Да би овом збиру, према § 1. 4., могли да асоцирамо низ кругова $K_0, K_1, \ldots$ потребно је да су задовољени, на пример, услови (I, 12). Како је овде

$$\begin{aligned} \gamma_{\nu+2}&=[(\nu+1)\theta+\lambda_{\nu+1}]-[\nu\theta+\lambda_\nu] \\ &=\theta+\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu, \qquad \nu=0,1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{IV, 13}$$

то ће ти услови бити задовољени ако, на пример, за φ_1 узмемо

$$\theta+\lambda_1-\lambda_2\leqslant\varphi_1\leqslant\theta+\lambda_1,$$

јер је тада, према (IV, 13),

$$\gamma_2 = \theta + \lambda_1, \quad \gamma_3 = \theta + \lambda_2 - \lambda_1, \quad \gamma_\nu = \theta + \lambda_{\nu-1} - \lambda_{\nu-2},$$

тако да је

$$\gamma_\nu - 2\gamma_{\nu+1} + \gamma_{\nu+2} = \lambda_{\nu-1} - 3\lambda_{\nu-2} + 3\lambda_{\nu-3} + \lambda_{\nu-4}, \quad \nu = 4, 5, \ldots$$

Према (I, 12), због услова (IV, 12), постоји систем кругова $K_0, K_1, \ldots$ ако је још $\gamma_\nu < \pi$, што се овде, због прве и друге неједначине (IV, 12), своди на $0 < \theta < \pi - \theta_1$, тако да добивамо овај резултат:

Taylor-ов ред (IV, 11), *где модули коефицијената* ρ_ν *образују један монотон нула-низ, а њихови аргументи су троструко монотони, тј. задовољавају* (IV, 12) *је униформно конвергентан и нема нула у размаку*

$$0 < \theta \leqslant \pi - \lim_{\nu \to \infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] F e j é r, L. — *1.* Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. — *Trans. Amer. Math. Soc.* **39**, № 1, стр. 18—59 (1936).

[2] F e j é r, L. — *2.* Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten. — *Acta Lit. ac Scient.* Szeged, **2**, стр. 75—86 (1925).

[3] F e j é r, L. — *3.* Einige Sätze, die sich auf das Vorzeichen einer ganzen rationalen Funktion beziehen... — *Monatshefte für Math. und Phys.* **35**, стр. 305—344 (1928).

[4] F e j é r L. — *4.* Über ein trigonometrisches Analogon eines Kakeyaschen Satzes. — *Jahresber. der deutschen Math. Ver.* **38** (1939).

[5] F e j é r L. — *5.* Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel. — *Math. Zeit.* **24**, стр. 267—284 (1925).

[6] F e j é r L. — *6.* Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome. — *Math Zeit.* **24**, стр. 285—298 (1925).

[7] F e j é r, L. — *7.* Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge und ihre Legendre-Polynome. — *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **31**, стр. 307—316 (1936).

[8] F e j é r, L. und S z e g ö, G. — Über die monotone Konvergenz von Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. — *Práce Mat. Fyz.*, стр. 15—25 (1935).

[9] G r o n w a l l, T. H. — Über die Gibssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen. — *Math. Ann.* **72**, стр. 228—243 (1912).

[10] H a u s d o r f f, F. — Momentprobleme für ein endliches Intervall. — *Math. Zeit.* **16**, стр. 220—248 (1923).

[11] J a c k s o n, D. — Über eine trigonometrische Summe. — *Rend. Circ. Math. Palermo,* **32** (1911).

[12] J a c o b s t h a l, E. — Mittelwertsbildung und Reihentransformation. — *Math. Zeit.* **6**, стр. 110—117 (1920).

[13] K a l u z a, Th. — Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen — *Math. Zeit.* **28**, стр. 161—170 (1928).

[14] K n o p p, K. — Mehrfach monotone Zahlenfolgen. — *Math. Zeit.* **22**, стр. 75—85 (1925).

[15] K a r a m a t a, J. et T o m i ć, M. — *1.* Considérations géométriques relatives aux polynomes et séries trigonométriques. — *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe des sciences* **2**, стр. 155—175 (1948).

[16] K a r a m a t a, J. et T o m i ć, M. — *2.* Sur l'inégalité de Kusmin-Landau relative aux sommes trigonométriques et son application à la somme de Gauss. — *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe des sciences* **3**, стр. 207—218 (1950).

[17] L a n d a u, E. — Über eine trigonometrische Ungleichung. — *Math. Zeit.* **35**, стр. 36 (1933).

[18] P o l y a, G. — Über die Nullstellen gewisser ganzen Funktionen. — *Math. Zeit* **2**, стр. 352—383 (1918).

[19] P o p k e n, J. — Über eine trigonometrische Summe. — *Konigklike Akademie Van Wet. te Amsterdam* **35** (5), стр. 3—15 (1932).

[20] R i e s e z, M. — Sur la sommation des séries de Fourier. — *Acta. Lit. ac Scient.* Szeged., **1**, стр. 104—113 (1923).

[21] R o g o s i n s k i, — Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten. — *Math. Zeit.* **17**, стр. 260—276 (1923).

[22] R o g o s i n s k i, W. und S z e g ö, G. — Über die Abschnitte der Potenzreihen, die in einem Kreise beschränkt bleiben. — *Math. Zeit.* **28**, стр. 73—94 (1928).

[23] S z á s z, O. — Über Potenzreihen, die im Einheitskreise beschränkte Funktionen darstellen. — *Math. Zeit.* **8**, стр. 222—236 (1920).

[24] S z e g ö, G. — *1.* Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome. — *Math. Zeit.* **25**, стр. 172—187 (1926).

[25] S z e g ö, G. — *2.* Inequalities for the zeros of Legendre Polynomials and related functions. — *Trans. Amer. Math. Soc.* **39**, стр. 1—17 (1936).

[26] S z e g ö, G. — *3.* Zur Theorie der Legendreschen Polynome. — *Jahresber. deutscher Math. Ver.* **40**, стр. 163—166 (1931).

[27] S s e g ö, G. — *4.* Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein. — *Schriften der Königsberger Gelehr. Gesell., naturwiss. Klasse* **4**, стр. 59—70 (1928).

[28] T o m i ć, M. — *1.* Généralisations et démonstrations géométriques de certains théorèmes de Fejér et Kakeya. — *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe des sciences* **2**, стр. 146—156 (1948).

[29] T o m i ć, M. — *2.* Einige Sätze über die Positivität der trigonometrischen Polynome. — *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe des sciences* **4** (у штампи).

SUR LES SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES À COEFFICIENTS MONOTONES

par M. Tomić (Beograd)

L'auteur donne un exposé des résultats cités sous [15], [16], [28], [29], ainsi que de certains résultats nouveaux. Tous ces résultats découlent d'un même principe géométrique simple, à savoir: Étant

I 2

donnée une ligne polygonale (v. fig. 1), à chaque côté de cette dernière on associe un cercle K_n, dont le centre C_n se trouve à gauche de cette ligne (au sens de A_{n-1} vers A_n), et duquel on voit ce côté sous l'angle $\gamma_n\,(0 \leqslant \gamma_n \leqslant \pi)$. Le rayon du cercle K_n est déterminé par la circonstance que ce dernier doit contenir un nouveau cercle, k_n'', dont le centre c_n'' se trouve sur la bissectrice du côté $\overline{A_{n-1}A_n}$, au point d'où l'on voit ce côté, sous l'angle Γ_n $(2\pi \geqslant \Gamma_n \geqslant \gamma_n)$. *On cherche alors les conditions pour qu'on ait* $K_n \supseteq K_{n+1}$.

Dans le cas particulier où $\Gamma_n = \Gamma_{n+1}$, on s'est servi de ce principe géométrique simple pour démontrer les théorèmes de la note [16]. Ici on donne les résultats semblables à ceux de la note [15]. À titre d'exemple citons en quelques uns.

a) On obtient d'une manière générale les intervalles de Fejér [1] dans lesquels se trouvent les zéros des séries trigonométriques de la forme (II, 11). En particulier, sous les conditions $b_{n+1} < b_{n+2}$ $(b_{n+1} \neq b_{n+2})$, les coefficients b_{n+i} étant simplement monotones, on obtient les intervalles séparés (II, 16) qui contiennent les zéros de ces séries, et en dehors desquels il n'existent point de zéros (§ 2. 4. 2.).

b) La série trigonométrique $\Sigma a_\nu \sin \nu\theta$ dont les coefficients sont simplement monotones avec $a_n = O(1/n)$ est uniformément bornée dans $0 \leqslant \theta \leqslant \varepsilon$ (§ 2. 3.).

c) On tire la positivité du polynôme de Fejér $\Sigma(\sin \nu\theta)/\nu$ (§ 3. 3. 1.), ainsi que de celui de Rogosinski - Szegő $\Sigma \cos \nu\theta/(\nu_{+1})$ (§ 3. 2. 2.), en même temps que la possibilité d'une extension de ces résultats.

d) Si les coefficients a_ν sont quatre-fois monotones on a, par exemple,

$$\Sigma\, a_\nu \sin \nu\theta \leqslant \frac{a_1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}, \quad (\S\ 9.\ 6.).$$

e) De $\Delta^k c_\nu \geqslant 0$, $k = 0, 1, 2, 3$ résulte l'inégalité III (§ 4. 1.), où r_n est donné par (IV, 3).

f) Si les coefficients c_ν de la série de Taylor $\Sigma c_\nu e^{\nu\theta i}$, avec $c_\nu = \rho_\nu e^{\lambda_\nu i}$, satisfont aux conditions $\rho_\nu \leqslant \rho_{\nu+1}$ et (IV, 12), on obtient les résultats semblables à ceux relatifs aux séries trigonométriques à coefficients positifs et monotones; par exemple: cette série est uniformément convergente dans l'intervalle

$$0 < \theta \leqslant \pi - \lim_{\nu \to \infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}),$$

et n'y a point de zéros (§ 4. 3.).

РЕШАВАЊЕ СИСТЕМА АЛГЕБАРСКИХ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА ПОМОЋУ КРАКОВИЈАНА

В. В. МИШКОВИЋ (Београд)

I ДЕО

1. — Краковијани као рачунска шема

Увод. — Неко је рекао једном да је Математика вештина која нам помаже да што мање рачунамо! Колико у парадоксалности ове мисли има и истине то ће, мислим, примењени математичари лако осетити, још лакше, чини ми се, астрономи-калкулатори; кратко речено, осетиће сви они чији истраживачки рад неизбежно мора да прође и кроз фазу нумеричких рачуна. У Астрономији је та, нумеричка, фаза готово у сваком проблему не само неизбежна већ и несразмерно обимнија и заморнија но што је то случај и у једној другој од егзактних дисциплина. Сетимо се, из Класичне астрономије, проблема одређивања планетских и кометских путања, или рачуна поремећаја њихових кретања; или, из Стеларне астрономије, проблема одређивања транслаторног кретања Сунчева система из сопствених и радијалних кретања некретница. А што, специјално у Астрономији, тај нумерички рад чини гломазним и напорним то су не толико оне радње и делови његови који воде ка самом решењу проблема колико они, такозвани, „споредни“ радови, подразумевајући под овима оне, краће или дуже, припремне и помоћне, а све неопходне, рачунске радње које се обавезно провлаче кроз сав нумерички рад. Као мала илустрација овога нека послужи један пример из свакодневне астрономске праксе.

Да би се добио за извесни тренутак геоцентрички положај планете или комете, познатих путањских елемената, претходно се морају израчунати, за тај тренутак, хелиоцентричке правоугле екваторске координате тог тела. Означимо их са x, y, z. Оне се израчунавају помоћу израза, привидно врло једноставних, наиме

$$\begin{aligned} x &= aP_x(\cos E - e) + bQ_x \sin E, \\ y &= aP_y(\cos E - e) + bQ_y \sin E, \\ z &= aP_z(\cos E - e) + bQ_z \sin E, \end{aligned} \tag{1}$$

где су са a, b, e обележене: велика, односно мала полуоса, односно ексцентричност путање тела; са E ексцентрична аномалија за тражени датум; а са P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z, такозвани векторски елементи тела, уствари пројекције на осе екваторског координатног система јединичних вектора $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, усмерених ка перихелу, односно ка тачки на путањи $v = +90^0$. Развијени за нумерички рачун, ти изрази, из којих се ове величине израчунавају, овако изгледају

$$\begin{aligned} P_x &= -\sin\omega\cos i\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega, \\ Q_x &= -\cos\omega\cos i\sin\Omega - \sin\omega\cos\Omega, \\ P_y &= (\sin\omega\cos i\cos\Omega + \cos\omega\sin\Omega)\cos\varepsilon - \sin\omega\sin i\sin\varepsilon, \\ Q_y &= (\cos\omega\cos i\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega)\cos\varepsilon - \cos\omega\sin i\sin\varepsilon, \\ P_z &= (\sin\omega\cos i\cos\Omega + \cos\omega\sin\Omega)\sin\varepsilon + \sin\omega\sin i\cos\varepsilon, \\ Q_z &= (\cos\omega\cos i\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega)\sin\varepsilon + \cos\omega\sin i\cos\varepsilon; \end{aligned}$$

ω, Ω, i означавају у њима дате елементе који оријентишу путању тела, односно одређују положај путањске равни, а ε — нагиб еклиптике. Ако се траже тачни положаји планете или комете, вредности тих величина морају се израчунавати са седам децимала; ако се траже само приближни положаји, довољно је и пет децимала.

Сад треба знати да број нумерисаних планетоида износи данас око 1600. За сваки од ових морају бити израчунате вредности шест векторских елемената, и то на седам децимала. Број планетоида повећава се сваке године за по две до три десетине нових објеката, за које такође треба израчунати те величине. Отприлике двапут оволиком броју планетоида путањски елементи се поправљају, то јест замењују новима. Значи и векторске елементе треба прерачунавати. Свему томе треба додати још и десетину комета, за које то исто треба учинити — па ће довољно јасно бити колики нумерички рад претставља израчунавање само — векторских елемената. А то су тек потребне величине да би се могли предузети рачуни геоцентричких положаја тих тела.

Но и то је само једна од многобројних, и то још релативно једноставних, вретâ нумеричких предрадњи које свакодневна астрономска пракса захтева. О редукцијама посматрања и нумеричком раду које оне захтевају да и не говоримо. Те околности, то јест те неизбежне припремне и помоћне нумеричке операције, приморавале су астрономе одувек и приморавају их и данас да посвећују пажњу и усавршавању технике овог рада, другим речима, да изналазе средства за поједностављавање овог посла и уводе поступке који га убрзавају и механизују. Тако се данас извесне врсте оваквих радњи избегавају или олакшавају готовим нумеричким таблицама; за друге се астрономи служе графичким методама; код трећих, опет, прибегавају специјалним рачунским шемама. У ову последњу категорију улазе и — **краковијани**, којима посвећујемо овај рад.

Краковијаном је названа матрична шема уведена да механизује нумерички рад и растерети калкулатора оне напрегнутости пажње коју иначе та врста рада од њега захтева. Краковијане је у нумерички рачун увео *Т. Банахјевич* [1], [2], [3],[1] професор краковског универзитета и директор тамошње астрономске опсерваторије. Он је до њих дошао, око 1916 године, искористивши, и несвесно, давно већ тада познату шему *Cayley*-евих матрица, но о којој — како каже — дотада није знао ни да постоји.

Првих неколико година од њихова увођења, до 1927 отприлике, краковијани су примењивани били углавном само у Пољској и, готово, искључиво у астрономском нумеричком раду. Отада, међутим, док у Пољској *Банахјевич* и његови ученици и сарадници разрађују теорију краковијана и усавршавају технику рачуна са њима, почиње се постепено ова шема примењивати и ван граница Пољске. И, ма да су у прво време гледишта стручњака о погодностима и предностима краковијана као рачунског оператора била подељена, доста велики број признатих научника и стручњака изван Пољске почео их је примењивати и — служи се и данас њима.

Шира примена краковијана датира од како је та шема почела бивати искоришћавана не само у астрономском нумеричком раду већ и за решавање система линеарних алгебарских једначина, за нумеричко израчунавање детерминаната вишег реда и секуларних детерминаната, па и у другим сличним врстама нумеричког рада. Тако је ова шема заинтересовала и наше математичке кругове, нешто раније нумеричаре, а за овима и теоретичаре; прве — као средство за поједностављење и механизовање нумеричких радова, друге — као оператор, а нарочито у односу према већ разрађеном матричном рачуну.

Циљ овог рада је да нашим стручним круговима прикаже, с једне стране, краковијане као рачунску шему, а у исти мах и

[1]) Бројеви у угластим заградама односе се на литературу на крају рада.

њену примену специјално у решавању система алгебарских линеарних једначина. Зато ћемо, у овом првом делу, из опште теорије краковијана позајмити и, о краковијанима уопште, изложити само оно најбитније што је потребно да се објасни — поступак за решавање система линеарних једначина помоћу краковијана.

2. Дефиниције и ознаке краковијана

Дефиниције и ознаке. Краковијан је скуп бројева поређаних у квадратну или правоуглу шему, сличну матрицама, затворен у вертикалне витичасте заграде. Например

$$\begin{Bmatrix} 2.6 & 3.4 & -1.3 & 3.6 \\ 4.2 & 7.1 & 3.3 & 2.7 \\ 2.2 & -3.6 & 3.0 & 1.6 \\ -1.1 & -2.7 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos i \\ 0 & \sin i \end{Bmatrix}.$$

Као и код детерминаната и матрица, и код краковијана служимо се терминима врста, ступац, главна дијагонала, ред краковијана, итд. За разлику, међутим, од детерминаната, које претстављају бројеве које треба израчунавати, — краковијани су само р а ч у н с к е ш е м е којима се оперише по одређеним правилима.

Скраћено се обележава краковијан масним малим словом, например

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{Bmatrix}.$$

Елемент краковијана **a** у i-том ступцу и k-тој врсти обележава се са a_{ik}; дакле п р в и м индексом означава се редни број с т у п ц а, д р у г и м — редни број в р с т е краковијана.

i-ти ступац краковијана, узет као краковијан, обележава се са $\mathbf{a}_i$; дакле

$$\mathbf{a}_3 = \begin{Bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_n = \begin{Bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{nn} \end{Bmatrix}.$$

За краковијане **a** и **b** истих димензија (од по r ступаца и s врста) каже се да су једнаки ако су им елементи једнаких индекса — једнаки; дакле

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}, \text{ ако су } a_{ik} = b_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, r; \ k = 1, 2, \ldots, s).$$

Напр.

$$\begin{Bmatrix} \operatorname{tg}\varepsilon & \operatorname{ctg}\varepsilon & 1 \\ 1 & 1 & \sin 2\varepsilon \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin\varepsilon\ \sec\varepsilon & \cos\varepsilon\ \operatorname{cosec}\varepsilon & \operatorname{tg}\varepsilon\ \operatorname{ctg}\varepsilon \\ \cos\varepsilon\ \sec\varepsilon & \sin\varepsilon\ \operatorname{cosec}\varepsilon & 2\sin\varepsilon\ \cos\varepsilon \end{Bmatrix}.$$

Квадратни краковијан чији су сви елементи главне дијагонале јединица а остали нуле зове се **јединични краковијан** и означава се грчким словом τ; дакле

$$\tau=\{\,1\,\},\qquad \tau=\begin{Bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Bmatrix},\qquad \tau=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix}.$$

Јединични краковијан игра у трансформацијама и рачунима са краковијанима врло важну улогу.

Троугли се зове квадратни краковијан чији су сви елементи било испод било изнад главне дијагонале једнаки нули. У првом случају зове се краковијан **горњи** троугли ($\bigtriangledown$), у другом — **доњи** троугли ($\triangle$). Дакле, краковијан $\mathbf{a}$ (r-тог реда) је

горњи троугли ($\bigtriangledown$) ако је $a_{ik}=0$ за $i<k$,

доњи троугли ($\triangle$) ако је $a_{ik}=0$ за $i>k$,

док су $a_{ii}\neq 0$ $(i=1,2,3,\ldots\ldots r)$; дакле

горњи троугли краковијан је, напр.,

$$\begin{Bmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\ldots a_{m1}\\ 0 & a_{22} & a_{32}\ldots a_{m2}\\ 0 & 0 & a_{33}\ldots a_{m3}\\ \cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ 0 & 0 & 0\;\ldots a_{mn}\end{Bmatrix},$$

доњи троугли краковијан је, напр.,

$$\begin{Bmatrix}b_{11} & 0 & 0\ldots\ldots 0\\ b_{12} & b_{22} & 0\ldots\ldots 0\\ b_{13} & b_{23} & b_{33}\ldots\ldots 0\\ \cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ b_{1n} & b_{2n} & b_{3n}\ldots b_{nn}\end{Bmatrix}.$$

3. Основне операције са краковијанима

Сабирање и одузимање. Краковијани $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (од по r ступаца и s врста) сабирају се, односно одузимају, ако им се алгебарски саберу, односно одузму, елементи једнаких индекса; дакле

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\pm\mathbf{b},\ \text{ако су}\quad c_{ik}=a_{ik}\pm b_{ik}\quad (i=1,2,\ldots,r;\ k=1,2,\ldots,s).$$

Напр.

$$\begin{Bmatrix}2.6 & 3.4 & -1.3\\ 4.2 & 7.1 & 3.3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}2.2 & -3.6 & 3.0\\ -1.1 & -2.7 & 3.2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}4.8 & -0.2 & 1.7\\ 3.1 & -0.6 & 6.5\end{Bmatrix}.$$

Множење. Производ двају краковијана, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, који **морају** имати једнак број врста (рецимо s), је краковијан, $\mathbf{p}$, чији је општи члан

$$\mathbf{p}_{ik}=\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_k=a_{i1}\,b_{k1}+a_{i2}\,b_{k2}+\cdots+a_{is}\,b_{ks}\quad (i=1,2,\ldots r;\ k=1,2,\ldots,q).$$

Другим речима, производ двају краковијана добива се множењем ступаца једнога ступцима другога.

Напр.

$$\left\{\begin{matrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} (3-4+9) & (-6+6+12) & (9-8-3) & (-12+2-6) \\ (5-8+6) & (-10+12+8) & (15-16-2) & (-20+4-4) \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} 8 & 12 & -2 & -16 \\ 3 & 10 & -3 & -20 \end{matrix}\right\}.$$

Ово је **основна** операција краковијана; њоме се они почињу разликовати од матрица.

Производ више краковијана добива се множећи, редом, факторе-краковијане како су поређани; дакле, ако су дати краковијани **a**, **b**, **c**, **d**, њихов производ, **P**, биће

$$\mathbf{P} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}] \cdot \mathbf{d}.$$

Напр.

$$\left\{\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\left\{\left[\left\{\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{matrix}\right\}\right] \cdot \left\{\begin{matrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{matrix}\right\}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{matrix}\right\}\right\} =$$

$$= \left\{\left\{\left\{\begin{matrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \\ 7 & -5 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{matrix}\right\}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{matrix}\right\}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} 27 & -12 \\ 7 & 4 \\ -5 & -8 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 37 & 4 \\ -24 & -24 \\ -18 & 12 \end{matrix}\right\}.$$

Напред поменутих шест векторских елемената, који се јављају у изразима за хелиоцентричке правоугле екваторске координате планете (или комете), у облику краковијана пишу се овако

$$\left\{\begin{matrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{matrix}\right\},$$

и израчунавају се по правилу о множењу краковијана.

Краковијан **P**, производ више фактора, има онолико ступаца колико их има први фактор, а онолико врста колико последњи фактор има ступаца. У претпоследњем примеру: први фактор има два ступца, последњи фактор има три ступца; стога и производ има: два ступца, а три врсте.

Производ датог краковијана **a** и јединичног краковијана истог реда (у овом случају једнака броја врста) једнак је датом краковијану; дакле

$$\mathbf{a} \cdot \tau = \mathbf{a}.$$

Према томе множење датог јединичним краковијаном не мења — каже се и деми ше — дати краковијан.

Транспозиција краковијана. Међутим, производ јединичног и датог краковијана **a** једнак је такозваном транспонованом датом краковијану, то јест краковијану у коме су врсте постале ступци, а ступци — врсте. Дакле, ако је дат краковијан

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{Bmatrix},$$

његов транспоновани је

$$\tau \cdot \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{Bmatrix}.$$

Место $\tau \cdot \mathbf{a}$, пише се само $\tau\mathbf{a}$ и чита — транспоновани краковијан **a**.

Транспозиција краковијана користи се често и при писању, да би се уштедео простор. Тако, напр., место

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_r \end{Bmatrix}, \text{ обично се пише } \mathbf{a} = \tau\{a_1\, a_2 \ldots\ldots a_r\}.$$

Дељење. Квоцијент краковијана **a** и **b** (**a** са онолико врста колико **b** има ступаца) зове се краковијан

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} : \mathbf{b},$$

дефинисан једначином

$$\mathbf{a} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{b}.$$

(Згоднија изгледа дефиниција квоцијента једначином $\mathbf{a} = \mathbf{q} \cdot \tau\mathbf{b}$ (в. Banachiewicz [3], p. 36)).

4. Специјална правила

Пермутација. Производ краковијана није комутативан. Ако су дати краковијани **a**, **b**, **c**, и **d**, па образујемо

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{P}_1,\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{P}_2,\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{P}_3,$$

лако је проверити да је

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\tau\mathbf{P}_1,\quad \mathbf{c}\cdot\tau\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\tau\mathbf{P}_2,\quad \mathbf{d}\cdot\tau\mathbf{c}\cdot\tau\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\tau\mathbf{P}_3.$$

Например, нека је

$$\mathbf{a}=\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 1\end{Bmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix};$$

онда ће бити:

$$\mathbf{P}_1=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1 & 4\\ 4 & -5\\ 7 & -5\end{Bmatrix},$$

а

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1 & 4 & 7\\ 4 & -5 & -5\end{Bmatrix}=\tau\mathbf{P}_1;$$

$$\mathbf{P}_2=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}1 & 4\\ 4 & -5\\ 7 & -5\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}14 & -1\\ 4 & 7\end{Bmatrix},$$

а

$$\mathbf{c}\cdot\tau\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\\ 3 & 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}9 & 5\\ -4 & -6\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}14 & 4\\ -1 & 7\end{Bmatrix}=\tau\mathbf{P}_2.$$

Асоцијација. Производ краковијана није асоцијативан. Ако су дати краковијани **a**, **b**, **c**, **d**, може се показати да је

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot(\mathbf{d}\cdot\tau\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{d}\cdot\tau\mathbf{c}\cdot\tau\mathbf{b}).$$

Например, нека су дати краковијани:

$$\mathbf{a}=\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 1\end{Bmatrix},\ \mathbf{c}=\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix},\ \mathbf{d}=\begin{Bmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{Bmatrix};$$

онда ће бити:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}34 & -17\\ 10 & -8\end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot(\mathbf{d}\cdot\tau\mathbf{c})=\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 1\end{Bmatrix}\cdot\left(\begin{Bmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{Bmatrix}\right)=$$

$$=\begin{Bmatrix}34 & -17\\ 10 & -8\end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{d}\cdot\tau\mathbf{c}\cdot\tau\mathbf{b})=\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\left\{\begin{Bmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\\ 3 & 1\end{Bmatrix}\right\}=$$

$$=\begin{Bmatrix}34 & -17\\ 10 & -8\end{Bmatrix}.$$

Дисоцијација. Ако су дати краковијани **a**, **b**, **c**, **d**, за њихове производе вреде правила

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\tau\mathbf{c}\cdot\mathbf{b},$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot\tau\mathbf{d}\cdot\tau\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}.$$

Например, нека су дати краковијани:

$$\mathbf{a}=\begin{Bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{Bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{Bmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{Bmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{Bmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{Bmatrix},\quad \mathbf{d}=\begin{Bmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{Bmatrix}.$$

Онда ће бити

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})=\begin{Bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\left\{\begin{Bmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{Bmatrix}\right\}=$$

$$=\begin{Bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\left\{\begin{Bmatrix}10 & -5\\ 4 & 2\\ 0 & -5\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}\right\}=\begin{Bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}24 & -23\\ -38 & 6\end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}86 & 100\\ -52 & -35\end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{a}\cdot\tau\mathbf{d}\cdot\tau\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=\begin{Bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & -2 & 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}7 & 8\\ 4 & 5\\ 5 & 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}14 & 1\\ 24 & 33\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}86 & 100\\ -52 & -30\end{Bmatrix}.$$

Ово су основна правила рачуна са краковијанима.

5. Дељење троуглим краковијаном

Нека су дати квадратни краковијан **a** и троугли краковијан (истог реда) **b**. Квоцијент њихов,

$$\mathbf{q}=\mathbf{a}:\mathbf{b}, \text{ то јест } \mathbf{a}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{b},$$

израчунава се по правилу о множењу краковијана,

$$\mathbf{a}_i=\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{b}.$$

Одавде следује

$$\mathbf{a}_{ik}=\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{b}_k. \tag{A}$$

Према томе, ако је **b** г о р њ и троугли краковијан, из последњег обрасца добивамо

$$a_{ik}=\tau\{q_{i1}\ q_{i2}\ldots\ldots q_{ik}\}\cdot\tau\{b_{k1}\ b_{k2}\ldots\ldots b_{kk}\},$$

или, стављајући редом $k=1, 2, 3, \ldots. r$,

$$a_{ik}=\{q_{i1}\}\cdot\{b_{11}\},\qquad a_{i2}=\begin{Bmatrix} q_{i1}\\ q_{i2}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} b_{21}\\ b_{22}\end{Bmatrix},\ldots\ldots\quad a_{ir}=\begin{Bmatrix} q_{i1}\\ q_{i2}\\ \vdots\\ q_{ir}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} b_{r1}\\ b_{r2}\\ \vdots\\ b_{rr}\end{Bmatrix}.$$

П р и м е р. Нека буду краковијани **a** и **b**:

$$\mathbf{a}=\begin{Bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & -2 & 6 & 4\\ 6 & 1 & 7 & 3\\ 8 & 5 & -3 & -2\end{Bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{Bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Bmatrix}.$$

Израчунајмо њихов квоцијент **q**.

Према горњем правилу о израчунавању квоцијента биће елементи првог ступца квоцијента:

$$a_{11}=\{q_{11}\}\cdot\{b_{11}\},\ \text{или}\ 2=q_{11},\ \text{дакле}\ q_{11}=2;$$

$$a_{12}=\begin{Bmatrix} 2\\ q_{12}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} 3\\ 1\end{Bmatrix},\ \text{или}\ 4=6+q_{12},\ \text{дакле}\ q_{12}=-2;$$

$$a_{13}=\begin{Bmatrix} 2\\ -2\\ q_{13}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} 5\\ 2\\ 1\end{Bmatrix},\ \text{или}\ 6=10-4+q_{13},\ \text{дакле}\ q_{13}=0,$$

$$a_{14}=\begin{Bmatrix} 2\\ -2\\ 0\\ q_{14}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} 7\\ 3\\ -4\\ 1\end{Bmatrix},\ \text{или}\ 8=14-6+q_{14},\ \text{дакле}\ q_{14}=0.$$

За елементе другог ступца имаћемо:

$$a_{21}=\{q_{21}\}\cdot\{b_{11}\},\quad \text{или}\quad 3=q_{21},\quad \text{дакле}\quad q_{21}=3;$$

$$a_{22}=\begin{Bmatrix}3\\ q_{22}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}3\\ 1\end{Bmatrix},\quad \text{или}\quad -2=9+q_{22},\quad \text{дакле}\quad q_{22}=-11;$$

$$a_{23}=\begin{Bmatrix}3\\ -11\\ q_{23}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}5\\ 2\\ 1\end{Bmatrix},\quad \text{или}\quad 1=15-22+q_{23},\quad \text{дакле}\quad q_{23}=8;$$

$$a_{24}=\begin{Bmatrix}3\\ -11\\ 8\\ q_{24}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}7\\ 3\\ -4\\ 1\end{Bmatrix},\quad \text{или}\quad 5=21-33-32+q_{24},\quad \text{дакле}\quad q_{24}=49.$$

На сличан начин израчунаћемо елементе трећег и четвртог ступца и добити за тражени квоцијент

$$\mathbf{q}=\begin{Bmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ -2 & -11 & -6 & -11\\ 0 & 8 & -1 & 0\\ 0 & 49 & -17 & -4\end{Bmatrix}.$$

И није тешко проверити да је, доиста,

$$\mathbf{a}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}.$$

На тај начин израчунавамо постепено елементе $q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{ir}$, квоцијента датог квадратног, **a**, датим горњим троуглим краковијаном, **b**.

Ако је **b** доњи троугли краковијан, помоћу обрасца (A) добивамо

$$a_{ik}=\tau\{q_{ik}, q_{ik+1}, \ldots\ldots, q_{ir}\}\cdot\tau\{b_{kk}, b_{kk+1}, \ldots\ldots, b_{kr}\}.$$

односно, стављајући редом $k=r, r-1, \ldots\ldots, 3, 2, 1$,

$$a_{ir}=\{q_{ir}\}\cdot\{b_{rr}\},\qquad a_{i,r-1}=\begin{Bmatrix}q_{i,r-1}\\ q_{i,r}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}b_{r-1,r-1}\\ b_{r-1,r}\end{Bmatrix},\ldots\ldots\ a_{i1}=\begin{Bmatrix}q_{i1}\\ b_{i2}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ q_{ir}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}b_{11}\\ b_{12}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ b_{1r}\end{Bmatrix}.$$

6. Растављање квадратног у производ двају (горњих) троуглих краковијана

Претпоставимо да је дат квадратни краковијан **l**. Показаћемо како се овај раставља у производ двају троуглих (горњих) краковијана, рецимо $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$, тако да је

$$\mathbf{l} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{h},$$

или, у развијеном облику,

$$\begin{Bmatrix} l_{11} & l_{21} & \ldots\ldots & l_{r1} \\ l_{12} & l_{22} & \ldots\ldots & l_{r2} \\ l_{13} & l_{23} & \ldots\ldots & l_{r3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{1r} & l_{2r} & \ldots\ldots & l_{rr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_{11} & g_{21} & \ldots\ldots & g_{r1} \\ 0 & g_{22} & \ldots\ldots & g_{r2} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & g_{r3} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & g_{rr} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_{11} & h_{21} & \ldots\ldots & h_{r1} \\ 0 & h_{22} & \ldots\ldots & h_{r2} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & h_{r3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & h_{rr} \end{Bmatrix},$$

Према правилу о множењу краковијана можемо написати

$$l_{ik} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{h}_k. \tag{B}$$

Број елемената у факторима, различитих од нуле, које треба одредити, износи r^2+r, док број услова које треба њима задовољити износи r^2. Дакле, r величина има више но што има услова. Можемо их, према томе, произвољно бирати, и ставићемо, напр., за елементе g_{ii} $(i = 1, 2, \ldots\ldots, r)$ да су једнаки јединицама. Другим речима, елементе (g_{ii}) главне дијагонале првог фактора можемо сматрати као познате.

Ставимо сад у (B) $i = 1$ и, редом, $k = 1, 2, \ldots\ldots, r$; добићемо

$$\tau \{l_{11}\ l_{12}\ l_{13}\ \ldots\ldots\ l_{1r}\} = \{g_{11}\} \cdot \{h_{11}\ h_{21}\ h_{31}\ \ldots\ldots\ h_{r1}\}.$$

Одавде налазимо редом све елементе прве врсте другог фактора, краковијана $\mathbf{h}$.

Ставимо ли у (B) редом $i = 1, 2\ 3, \ldots\ldots r$ и $k = 1$, имаћемо

$$\{l_{21}\ l_{31}\ \ldots\ldots\ l_{r1}\} = \{g_{21}\ g_{31}\ \ldots\ldots\ g_{r1}\} \cdot \{h_{r1}\}.$$

Одавде добивамо елементе прве врсте првог фактора, краковијана $\mathbf{g}$. Наравно, под условом да је $h_{11} \neq 0$, што ћемо претпоставити да је испуњено.

Ако наставимо и ставимо у (B)

$i = 2$, а за k, редом, $2, 3, \ldots\ldots r$;
$i = 3$, а за k, редом, $3, \ldots\ldots r$;
$i = r$, $k = r$,

добиваћемо поступно другу, трећу ,.... r-ту врсту краковијана $\mathbf{h}$. А стављајући

за i редом $3, 4, \ldots\ldots r$ и $k = 2$;
i редом $4, \ldots\ldots r$ и $k = 3$;
. . . .
$i = r$ и $k = r$;

добићемо поступно другу, трећу, ... r-т › врсту краковијана $\mathbf{g}$, — опет под условом да се не деси да ‹ уде $h_{kk}=0$, што ћемо овде претпоставити да је задовољено.

7. Решавање система линеарн ıх једначина

Претпоставимо да нам је дат систем од n независних линеарних једначина са n непознатих

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + a_{\ 1}\, x_n &= l_1\,, \\ a_{12}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + a_{\ 2}\, x_n &= l_2\,, \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot &\cdot \cdot \cdot \\ a_{1n}\, x_1 + a_{2n}\, x_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + a_{\ n}\, x_n &= l_n\,. \end{aligned}$$

Са краковијанским начином бележења мо⋅емо овај систем кратко написати

$$\mathbf{x} \cdot \tau\mathbf{a} = \mathbf{l}. \tag{C}$$

Претпоставља се да је ред једначина у систему тако подешен да је $a_{11} \neq 0$, као и да су, уопште, m пр вих његових једначина $(m = 1, 2, \ldots, n)$ решљивих по m првих не ıознатих $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ово се може постићи изменом реда било неп эзнатих било једначина.

Одавде, према дефиницији квоцијента добивамо

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} : \tau\mathbf{a}.$$

Ова релација даје, уствари, тражена решења ⱶ ашег система једначина.

Ако, наиме, дати квадратни краковијан **a** замислимо растављен у производ два горња троугла краковијана, $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$, другим речима ставимо

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{h},$$

па ову вредност за **a** унесемо у (C), имаћемо

$$\mathbf{x} \cdot \tau(\mathbf{g} \cdot \mathbf{h}) = \mathbf{l},$$

што можемо написати

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{h} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{l}.$$

А применимо ли правило за дисоцијацију к раковијана, биће

$$\mathbf{x} \cdot \tau\mathbf{g} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{l}.$$

Одавде, дељењем прво краковијаном $\mathbf{h}$, а з ıтим краковијаном $\tau\mathbf{g}$, налазимо за решења датог система од n едначина, изражена у краковијанском облику,

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{l} : \mathbf{h}\} : \tau\mathbf{g}. \tag{D}$$

Пример. (W. E. Milne [6], p. 20). Наћи решења система

$$6.4375\,x_1+2.1849\,x_2-3.7474\,x_3+1.8822\,x_4=4.6351$$
$$2.1356\,x_1+5.2101\,x_2+1.5220\,x_3-1.1234\,x_4=5.2131$$
$$-3.7362\,x_1+1.4998\,x_2+7.6421\,x_3+1.2324\,x_4=5.8665$$
$$1.8666\,x_1-1.1104\,x_2+1.2460\,x_3+8.3312\,x_4=4.1322$$

Пре свега ћемо квадратни краковијан коефицијената поред непознатих раставити у производ двају горњих троуглих краковијана

g и **h**.

За чланове прве врсте другог фактора имамо

$$\{g_{11}\}\cdot\{h_{11}\;h_{21}\ldots\ldots h_{r1}\}=\tau\{a_{11}\;a_{12}\ldots\ldots a_{1r}\}.$$

Како смо рекли да ћемо узети $g_{ii}=1$, налазимо одмах

$$h_{11}=a_{11}=\quad 6.4375\overline{00}\,,\qquad h_{21}=a_{12}=2.1356\overline{00}\,,$$
$$h_{31}=a_{13}=-3.7362\overline{00}\,,\qquad h_{41}=a_{14}=1.8666\overline{00}\,.$$

За члавове прве врсте првог фактора добивамо

$$\{g_{21}\;g_{31}\ldots\ldots g_{r1}\}\cdot\{h_{11}\}=\{a_{21}\;a_{31}\ldots\ldots a_{r1}\}.$$

Како је h_{11} сад познато, налазимо

$$g_{21}=\frac{a_{21}}{h_{11}}=0.3394\overline{02}\,,\qquad g_{31}=\frac{a_{31}}{h_{11}}=-0.5821\overline{20}\,,\qquad g_{41}=\frac{a_{41}}{h_{11}}=0.2923\overline{81}$$

За чланове друге врсте другог фактора имаћемо

$$\begin{Bmatrix} a_{22}\\ a_{23}\\ a_{24}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} g_{21}\\ g_{22}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} h_{21} & h_{31} & h_{41}\\ h_{22} & h_{32} & h_{42}\end{Bmatrix},$$

значи

$$\begin{Bmatrix} 5.2101\overline{00}\\ 1.4998\overline{00}\\ -1.1104\overline{00}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0.3394\overline{02}\\ 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} 2.1356\overline{00} & -3.7362\overline{00} & 1.8666\overline{00}\\ h_{22} & h_{32} & h_{42}\end{Bmatrix},$$

то јест

$$h_{22}=\quad 4.4852\overline{73},$$
$$h_{32}=\quad 2.7678\overline{74},$$
$$h_{42}=-1.7439\overline{28}.$$

За чланове д р у г е врсте п р в о г фактора имаћемо

$$\{a_{32}\quad a_{42}\} = \begin{Bmatrix} g_{31} & g_{41} \\ g_{32} & g_{42} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{Bmatrix},$$

значи

$$\{1.522\overline{00}0 \quad -1.1234\overline{00}\} = \begin{Bmatrix} -0.5821\overline{20} & 0.2923\overline{81} \\ g_{32} & g_{42} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2.1356\overline{00} \\ 4.4852\overline{73} \end{Bmatrix},$$

то јест

$$g_{32} = \quad 0.6165\overline{01}\,,$$

$$g_{42} = -0.3896\overline{77}\,.$$

За чланове т р е ћ е врсте д р у г о г фактора имамо

$$\begin{Bmatrix} a_{33} \\ a_{34} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_{31} & h_{41} \\ h_{32} & h_{42} \\ h_{33} & h_{43} \end{Bmatrix},$$

значи

$$\begin{Bmatrix} 7.6421\overline{00} \\ 1.2460\overline{00} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.5821\overline{20} \\ 0.6165\overline{01} \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -3.7362\overline{00} & 1.8666\overline{00} \\ 2.7678\overline{74} & -1.7439\overline{28} \\ h_{33} & h_{43} \end{Bmatrix},$$

то јест

$$h_{33} = 3.7607\overline{86}\,,$$

$$h_{43} = 3.4077\overline{18}\,.$$

За члан т р е ћ е врсте п р в о г фактора имамо

$$\{a_{43}\} = \begin{Bmatrix} g_{41} \\ g_{42} \\ g_{43} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{Bmatrix},$$

то јест

$$\{1.2324\overline{00}\} = \begin{Bmatrix} 0.2923\overline{81} \\ -0.3896\overline{77} \\ g_{43} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -3.7362\overline{00} \\ 2.7678\overline{74} \\ 3.7607\overline{86} \end{Bmatrix}, \quad \text{дакле } g_{43} = 0.9049\overline{63}.$$

И, напослетку, за члан ч е т в р т е врсте д р у г о г фактора имаћемо

$$\{a_{44}\} = \begin{Bmatrix} g_{41} \\ g_{42} \\ g_{43} \\ g_{44} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_{41} \\ h_{42} \\ h_{43} \\ h_{44} \end{Bmatrix}, \quad \text{или} \quad 8.3312\overline{00} = \begin{Bmatrix} 0.2923\overline{81} \\ -0.3896\overline{77} \\ 0.9049\overline{63} \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1.8666\overline{00} \\ -1.7439\overline{28} \\ 3.4077\overline{18} \\ h_{44} \end{Bmatrix},$$

дакле

$$h_{44} = 4.0220\overline{14}\,.$$

Тако смо добили

$$\begin{Bmatrix} 6.4375 & 2.1849 & -3.7474 & 1.8220 \\ 2.1356 & 5.2101 & 1.5220 & -1.1234 \\ -3.7362 & 1.4998 & 7.6421 & 1.2324 \\ 1.8666 & -1.1104 & 1.2460 & 8.3312 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 & 0.3394\overline{02} & -0.5821\overline{20} & 0.2923\overline{81} \\ 0 & 1 & 0.6165\overline{01} & -0.3896\overline{77} \\ 0 & 0 & 1 & 0.9049\overline{63} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} 6.4375\overline{00} & 2.1356\overline{00} & -3.7362\overline{00} & 1.8666\overline{00} \\ 0 & 4.4852\overline{73} & 2.7678\overline{74} & -1.7439\overline{28} \\ 0 & 0 & 3.7607\overline{86} & 3.4077\overline{18} \\ 0 & 0 & 0 & 4.0220\overline{14} \end{Bmatrix}.$$

Ако сад, према обрасцу (A), за израчунавање квоцијента, израчунамо елементе краковијана

$$\mathbf{q} = \mathbf{l} : \mathbf{h},$$

добићемо

$$\begin{Bmatrix} 4.6351 \\ 5.2131 \\ 5.8665 \\ 4.1322 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 6.4375\overline{00} & 2.1356\overline{00} & -3.7362\overline{00} & 1.8666\overline{00} \\ 0 & 4.4852\overline{73} & 2.7678\overline{74} & -1.7439\overline{28} \\ 0 & 0 & 3.7607\overline{86} & 3.4077\overline{18} \\ 0 & 0 & 0 & 4.0220\overline{14} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.7200\overline{16} \\ 0.8194\overline{45} \\ 1.6721\overline{05} \\ -0.3681\overline{88} \end{Bmatrix}.$$

Извршимо ли сад још дељење нађеног квоцијента, **g**, транспонованим првим горњим троуглим фактором, добивамо

$$\begin{Bmatrix} 0.7200\overline{16} \\ 0.8194\overline{45} \\ 1.6721\overline{25} \\ -0.3681\overline{88} \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3394\overline{02} & 1 & 0 & 0 \\ -0.5821\overline{20} & 0.6165\overline{01} & 1 & 0 \\ 0.2923\overline{81} & -0.3896\overline{77} & 0.9049\overline{63} & 1 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 2.1851\overline{76} \\ -0.5603\overline{12} \\ 2.0053\overline{22} \\ -0.3681\overline{88} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix},$$

то јест тражена решења датог система једначина.

Унесемо ли нађене вредности непознатих у дати систем једначина, добивамо за разлике између левих и десних странâ једначинâ, у јединицама четврте децимале:

$$-0.02, \quad +0.02, \quad +0.04, \quad +0.03.$$

*

При овом излагању, а нарочито при избору примера за примену методе решавања система линеарних једначина, имали смо у виду питање које теоретичаре и не интересује уопште, а које је, међутим, за калкулаторе најважније, питање, наиме, да ли и у коликој мери примена краковијанске шеме — смањује нумерички рад? При том нисмо губили из вида ни чињеницу да нумерички рад зависи и од средстава и апаратуре којима се за то располаже. То нас је и навело да, прво, изаберемо пример на коме ће се ово моћи показати и, друго, да га детаљно обрадимо, како би се јасно могло видети шта се постиже краковијанском шемом.

Претпостављамо, и мора се претпоставити, да калкулатор располаже машином за рачунање. Узмимо да располаже електричном. У том случају би се могло поставити питање, рецимо код ове врсте проблема, која од трију метода — елиминације, матрична или краковијанска — води решењима са најмањим бројем нумеричких операција?

Банахјевич је упоређивао методу елиминације и краковијанску (или декомпозиције, како је он назива). И показао је да је, у случају система од четири једначине, однос операција 30 : 16, дакле 2 : 1 — у корист краковијанске шеме.

Што се тиче матричне и краковијанске шеме — оне ми се чине, у овом погледу, то јест у погледу броја нумеричких операција, адекватне. Али поборници краковијана (S. Arend [5]), мада не одричу опште предности матрица, заступају гледиште да „множење ступаца ступцима, изгледа, боље одговара психологији калкулатора“. У сваком случају, у астрономским рачунима краковијанска шема нашла је широку примену.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *T. Banachiewicz* — Was sind die Formeln neuer Art?; Acta Astronomica, Ser. c. t. I, 1929, p. 63—69.

[2] *T. Banachiewicz* — Zur Berechnung der Determinanten, wie auch der Inversen, und zur darauf kasierten Auflösung der Systeme linearer Gleichungen; Acta Astronomica, Ser. c. t. III, 1937, p. 41—67.

[3] *T. Banachiewicz* — Résolution d'un système l'équations linéaires algébriques par division; L'Enseignement mathématique; XXXIX, 1942—1950, Nos 1—2—3, p. 34—45.

[4] *S. Arend* — Cracoviens rotationnels. Leur utilisation dans les transformations fondamentales de coordonnées astronomiques, dans la théorie de la lunette méridienne et dans celle du théodolite; Bull. Astr. de l'Obs. royal de Belgique, Vol. IV, № 4, p. 64—70.

[5] *S. Arend* — Voies nouvelles dans le calcul scientifique, Ciel et Terre, 1941, *51*, № 12, p. 497—513.

[6] *W. E. Milne* – Numerical Calculus, 1949, Princeton University Press.

RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES ALGÉBRIQUES À L'AIDE DES CRACOVIENS

Par V. V. Michkovitch

Après un exposé des définitions et règles fondamentales du calcul avec des cracoviens, on a développé la méthode de résolution d'un système d'équations linéaires à l'aide des cracoviens et appliqué cette dernière à un exemple numérique.

РЕШАВАЊЕ СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА МАТРИЧНОМ МЕТОДОМ ПО БАНАХЈЕВИЧЕВОЈ СХЕМИ

ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ (Београд)

I. Систем од n независних линеарних једначина са n непознатих

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + a_{1n} x_n &= k_1, \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + a_{2n} x_n &= k_2, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + a_{nn} x_n &= k_n,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

може се у матричним ознакама написати

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{k}, \tag{2}$$

где је

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix} = \{a_{ij}\}, \tag{3}$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = [x_i], \quad \mathbf{k} = \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} = [k_i]. \tag{4}$$

У таквом случају биће матрица коефицијената $\mathbf{A}$ несингуларна, тј. њена детерминанта $|a_{ij}| = A$ различита од нуле ($A \neq 0$). Тада се решење матричне једначине (2) може добити множењем те једначине слева реципрочном матрицом A^{-1}, што даје

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{k}, \tag{5}$$

где је

$$\mathbf{A}^{-1} = \{\alpha_{ij}\}, \qquad \alpha_{ij} = \frac{A_{ji}}{A}, \tag{6}$$

а A_{ji} је кофактор елемента a_{ji} у детерминанти A матрице $\mathbf{A}$. Сама реципрочна матрица $\mathbf{A}^{-1}$ одређује се, како је познато, из једначине

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad \text{одн.} \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \tag{7}$$

где је са $\mathbf{I}$ обележена односна јединична матрица.

Из обрасца (5) је јасно да је читаво тежиште оваквог матричног решавања система линеарних једначина у израчунавању реципрочне матрице. Међутим, према обрасцу (6) ово израчунавање се своди у крајњој линији на познати Крамеров (Cramer) поступак за решавање система линеарних алгебарских једначина помоћу детерминаната и не претставља у суштини ништа ново [1].

II. Изванредно важне примене система линеарних једначина изазвале су велики број радова о проблему њиховог решавања и довеле до проналаска многих метода за то. У новије време због извесних нових примена то интересовање за питање решавања система линеарних једначина са бројним коефицијентима је чак и порасло. Из тих разлога приказаћемо овде неке најновије резултате до којих је у тој области дошао Т. Банахјевич (T. Banachiewicz), и то изложене у нарочитој верзији и са извесним нашим допунама. Да бисмо то постигли, поћи ћемо од једне директне методе решавања система линеарних једначина која је одавно опробана, тзв. *Гаусовог* (Gauss) *алгоритма елиминације*. Помоћу њега се дати систем од n линеарно независних једначина са n непознатих претвара у еквивалентни систем нарочитог облика. Матрица тако трансформисаног система треба да буде троугластог облика, што значи да сви њени елементи испод (или изнад) главне дијагонале буду једнаки нули. Другим речима, после трансформације прва једначина ће садржавати у општем случају свих n непознатих; друга једначина садржаваће само $n-1$ непознатих, без непознате x_1 итд.; и најзад последња једначина ће садржати само непознату x_n.

Гаусов алгоритам за извођење ове трансформације састоји се у овоме. Прва једначина система (1) са челним коефицијентом a_{11} помножи се са $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ и дода i-тој једначини. При томе је јасно да коефицијент a_{11} мора бити различит од нуле, што се увек може постићи размештањем самих једначина или непознатих. Кад се ово множење и додавање спроведе за сваку једначину, почев од друге, биће у свима једначинама система, осим прве, елиминисана непозната x_1. Затим се на систем од $n-1$ једначина са $n-1$ непознатих који образује овако изведени систем без прве једначине примени исти поступак. После тога ћемо добити систем у коме је у првој једначини у општем случају свих n непознатих, у другој једначини недостаје само непозната x_1, а у трећој и осталим једначинама има само $n-2$ непознате, без x_1 и x_2. Настављањем овог поступка, прво на систем од $n-2$ једначине са $n-2$ непознате, који чини овако изведени систем без прве две једначине, па затим поступно на даље изведене системе, добиће се, најзад, после $n-1$ корака систем од n једначина са n непознатих који се може написати у облику

$$\begin{aligned} b'_{11}x_1+b'_{12}x_2+\cdots+b'_{1,n-1}\,x_{n-1}+b'_{1n}\,x_n&=l'_1,\\ b'_{22}x_2+\cdots+b'_{2,n-1}\,x_{n-1}+b'_{2n}\,x_n&=l'_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ b'_{n-1,n-1}\,x_{n-1}+b'_{n-1,n}\,x_n&=l'_{n-1},\\ b'_{nn}\,x_n&=l'_n. \end{aligned} \tag{8}$$

Овај се систем може још упростити на тај начин што ћемо прву једначину поделити са $-b'_{11}$, а другу са $-b'_{22}$ и тако редом, тако да се систем (8) своди на систем једначина

$$\begin{aligned} -x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1,n-1}\,x_{n-1}+b_{1n}\,x_n+l_1&=0,\\ -x_2+\cdots+b_{2,n-1}\,x_{n-1}+b_{2n}\,x_n+l_2&=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ -x_{n-1}+b_{n-1,n}\,x_n+l_{n-1}&=0,\\ -x_n+l_n&=0, \end{aligned} \tag{9}$$

где смо независне чланове после овог дељења пребацили на леву страну тако да је

$$l_i=\frac{l'_i}{b_{ii}}. \tag{10}$$

У овом облику је решење система утолико олакшано што се, кад се решавање почне од последње једначине, у свакој наредној једначини појављује само по једна нова непозната са коефицијентима једнаким јединици. Свака непозната одређује се по обрасцу

$$\begin{gathered} x_i=l_i+b_{in}\,x_n+b_{i,n-1}\,x_{n-1}+\cdots+b_{i,i+1}\,x_{i+1}\\ (i=n,n-1,\ldots,1). \end{gathered} \tag{11}$$

Мора се одмах подвући да се број рачунских операција, које треба извести и број података које треба записати при решавању датог система на овај начин, не смањује у поређењу са обичним начином режавања, али се не можемо упуштати да то овде показујемо. Предност овог начина решавања је, међутим, у томе што чини читав поступак прегледнијим, омогућава да се он схематизује, што је и учињено [2], и најзад, нарочито што омогућава лаку контролу рада сталним извођењем проба у току рачуна.

У матричном облику се систем (9) може написати

$$\mathbf{B}\mathbf{x}+\mathbf{l}=0, \tag{12}$$

где је

$$\mathbf{B}=\begin{Bmatrix} -1 & b_{12} & b_{13}\cdot\cdot\cdot & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & -1 & b_{23}\cdot\cdot\cdot & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\cdot\cdot\cdot & -1 & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0\cdot\cdot\cdot & 0 & -1 \end{Bmatrix}=\{b_{ij}\}, \tag{13}$$

$$\mathbf{l}=\begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ l_n \end{Bmatrix}=[l_i], \tag{14}$$

а где је **x** раније дати стуб непознатих. Са гледишта матричног рачуна Гаусов алгоритам се, дакле, састоји у претварању матрице коефицијената **A** у троуласту матрицу **B** и, наравно, у односној трансформацији стуба независних чланова **k** у стуб **l**. У односу на матрицу коефицијената се, међутим, у Гаусовом алгоритму изводе искључиво тзв. *елементарне трансформације матрице*, тј.:

1) Множење врсте бројем и њено додавање другој врсти, што не мења уопште вредност детерминанте те матрице.

2) Размена врста или колона, што мења само знак поменуте детерминанте.

3) Множење врсте матрице одређеним бројем, чиме се множи и детерминанта те матрице.

На основу тога биће трансформат **B** матрице **A**, изведен овим елементарним трансформацијама, еквивалентан у погледу детерминанте полазној матрици, јер је са њом у јасној и одређеној вези.

Сам елиминациони поступак који одговара Гаусовом алгоритму, одн. претварање матрице **A** у троугласту матрицу **B**, изводи се матричном методом множењем матрице A слева редом са $n-1$ матрица

$$\mathbf{U}_1=\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{a_{n-1,1}}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}\right\},$$

$$\mathbf{U}_2=\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_{23}}{\beta_{22}} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -\frac{\beta_{n-1,2}}{\beta_{22}} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_{n2}}{\beta_{22}} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}\right\} \tag{15}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{U}_{n-1}=\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\gamma_{n,n-1}}{\gamma_{n-1,n-1}} & 1 \end{matrix}\right\}$$

и најзад матрицом

$$\mathbf{D}=\left\{\begin{matrix} -\frac{1}{b'_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b'_{22}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{b'_{nn}} \end{matrix}\right\}. \tag{16}$$

Структура матрица (15) је јасна. Свака од њих има све елементе главне дијагонале једнаке јединици, а осим тога свака садржи још само елементе по једног стуба, који могу бити различити од нуле, и то само слева од главне дијагонале. При томе су у матрици $\mathbf{U}_i$ ти елементи у i-тој колони испод главне дијагонале, а добивају се деобом са првим негативним дијагоналним елементом односних елемената у i-том систему једначина који се добива узастопним трансформацијама. Исто тако је јасна и структура матрице $\mathbf{D}$, кад се она упореди са системом једначина (8).

Према томе, ако се стави

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}\mathbf{U}_{n-1} \ldots \mathbf{U}_2\mathbf{U}_1, \tag{17}$$

биће

$$\mathbf{TA} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{Tk} = -\mathbf{1}. \tag{18}$$

Из ових матричних једначина проистиче

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{k} = -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{1}, \tag{19}$$

па кад ставимо

$$\mathbf{T}^{-1} = -\mathbf{C}, \tag{20}$$

где знак минус није од битног значаја, добићемо

$$\mathbf{A} = -\mathbf{CB} \quad \text{или} \quad \mathbf{A} + \mathbf{CB} = \mathbf{0} \tag{21}$$

и

$$\mathbf{k} = \mathbf{C1}. \tag{22}$$

Матрична једначина (21) указује на једну изванредно важну чињеницу коју је код симетричних матрица приметио Холески (Cholesky) [3] и независно од њега у општем случају Банахјевич [**4**, **5**], да се матрица $\mathbf{A}$ може разложити у производ две троугласте матрице истог реда. При томе је $\mathbf{B}$ троугласта матрица (13), а за помоћну матрицу $\mathbf{C}$ одмах ћемо показати да је и она троугласта са елементима десно од главне дијагонале једнаким нули, тј. показаћемо да је она облика

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{Bmatrix} = \{c_{ij}\}. \tag{23}$$

Иако је лако увидети да је матрица $\mathbf{C}$ троугласта из чињенице да је реципрочна матрица троугластој матрици, изнећемо један прост начин за њено израчунавање, који је показао Бодевиг (E. Bodewig) [**6**]. Наиме, биће с обзиром на (17) и (20)

$$\mathbf{C} = -\mathbf{U}_1^{-1}\,\mathbf{U}_2^{-2} \ldots \mathbf{U}_{n-1}^{-1}\,\mathbf{D}^{-1} \tag{24}$$

Међутим, ако се уочи да се свака од матрица $\mathbf{U}_i$ може раставити на збир јединичне матрице $\mathbf{I}$ и матрице $\mathbf{R}_i$ која има свуда нуле изузев оних елемената матрице $\mathbf{U}_i$ који су различити од нуле и леже ван главне дијагонале, тј. ако се стави

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{I} + \mathbf{R}_i, \tag{25}$$

одмах се види да је увек

$$\mathbf{R}_i \mathbf{R}_k = \mathbf{0} \quad \text{за} \quad k \geqslant i. \tag{26}$$

Стога је

$$\mathbf{I} = \mathbf{I} - \mathbf{R}_i^2 = (\mathbf{I} + \mathbf{R}_i)(\mathbf{I} - \mathbf{R}_i)$$

па је, према томе,

$$\mathbf{U}_i^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{R}_i. \tag{27}$$

На основу тога биће

$$\mathbf{C} = -(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1)(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2)\ldots(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{n-1})\mathbf{D}^{-1}$$

и према једначини (26)

$$\mathbf{C} = (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \cdots + \mathbf{R}_{n-1} - \mathbf{I})\,\mathbf{D}^{-1}. \tag{28}$$

С обзиром на структуру матрица $\mathbf{R}_i$ биће

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \cdots + \mathbf{R}_{n-1} - \mathbf{I} \tag{29}$$

троугласта матрица чији су еламенти на главној дијагонали негативне јединице, а од нуле различити елементи леже лево од главне дијагонале. Како је, према (16),

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{Vmatrix} -b'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b'_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & -b'_{nn} \end{Vmatrix} \tag{30}$$

то се, множењем матрице (29) овом матрицом, множе елементи сваке колоне те матрице редом, почев од прве са $-b'_{11}$, затим са $-b'_{22}$ итд. То, међутим, оставља троугласти облик матрице (29) непромењен и потврђује да је матрица $\mathbf{C}$ троугласта са елементима слева од главне дијагонале и на главној дијагонали.

Из матричне једначине (21) се, поред осталог, добија и веза између детерминаната A, $\overline{B}$ и C матрица $\mathbf{A}$, $-\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ која гласи

$$A = C\overline{B}. \tag{31}$$

Како је, међутим, очигледно $\overline{\mathbf{B}} = \pm 1$, биће

$$A = \pm C = \pm c_{11} c_{22} \cdots c_{nn}, \tag{32}$$

што показује да се вредност детерминанте коефицијената система линеарних једначина (1) добија као производ елемената главне дијагонале помоћне матрице **C**.

Ипак, после свих ових излагања је јасно да је формално решење трансформисаног система (12) линеарних једначина дато са

$$\mathbf{x} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{l}, \tag{33}$$

и да, према томе, поново захтева одређивање реципрочне матрице. Истина, сад се тражи одређивање реципрочне матрице за троугласту матрицу, што је нешто лакше, али укупан број операција и записивања неће се смањити.

III. Најважнији резултат досадашњих излагања, да се матрица може раставити у производ две троугласте матрице супротних схема ($\square = \triangle\!\!\!\!\triangledown$), може се искористити за врло просто одређивање матрица **B** и **C** и за решавање система линеарних једначина (1) без израчунавања реципрочне матрице. Банахјевичева је заслуга што је указао на тај пут и први конструисао нарочиту схему за то. Банахјевич је из непознатих разлога за извођење резултата да се матрица **A** може разложити у производ две троугласте матрице и за конструкцију те нове схеме решавања система линеарних једначина дефинисао нове операције са матрицама. Оне се у суштини састоје у друкчијој дефиницији множења матрица, не врста — стубац, већ стубац — стубац, али које није асоцијативно. Матрице са којима се рачуна на тај начин назвао је *краковијани* [**4, 5**]. Међутим, најновији радови Бодевига и Цурмила (R. Zurmühl) [**7, 8**], а и овај рад, показују да се Банахјевичеви резултати изводе и тумаче врло просто са матричним рачуном и да је увођење краковијана потпуно непотребно.

Да дођемо до Банахјевичеве схеме, уочићемо да се матрична једначина (2) може написати у облику

$$\{\mathbf{A},\ -\mathbf{k}\}\cdot\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ 1\end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{34}$$

а матрична једначина (12) у облику

$$\{\mathbf{B}\ \mathbf{l}\}\cdot\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ 1\end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{35}$$

где је у оба случаја **0** правоугаона нула матрица са n врста и $n+1$ колона. При томе је, с обзиром на (21) и (22),

$$\{\mathbf{A},\ -\mathbf{k}\} = -\mathbf{C}\{\mathbf{B}\ \ \mathbf{l}\} \tag{36}$$

или

$$\mathbf{F}+\mathbf{C}\,\mathbf{G}=\mathbf{0}, \tag{37}$$

кад се стави

$$\{\mathbf{A},-\mathbf{k}\}=\mathbf{F}, \quad \{\mathbf{B}\ \mathbf{l}\}=\mathbf{G}. \tag{38}$$

Матрица $\mathbf{F}$ је матрица $\mathbf{A}$ којој су као последњи $(n+1)$-и стубац додати независни чланови система једначина (1) са негативним знаком, а $\mathbf{G}$ је матрица $\mathbf{B}$ којој су додати независни чланови из система (9) као $(n+1)$-и стубац, и најзад $\mathbf{C}$ је раније дефинисана троугласта матрица (23). Експлицитно исписана матрична једначина (37) изгледа

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n}, & -k_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n}, & -k_2 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn}, & -k_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} & l_1 \\ 0 & -1 & \cdots & b_{2n} & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & l_n \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{Bmatrix} \tag{39}$$

и она у ствари одређује *Банахјевичеву схему* за решавање система линеарних алгебарских једначина.

Читав проблем се у суштини састоји у одређивању елемената b_{ij} и c_{ij}. Између елемената b_{ij} и c_{ij} с једне стране и елемената a_{ij} са друге стране добија се из схеме (39) врло лако веза

$$a_{ij}+c_{i1}\,b_{1j}+c_{i2}\,k_{2j}+\cdots+c_{ik}\,b_{kj}=a_{ij}+\sum_k{}' c_{ik}\,b_{kj}=0, \quad k\leqslant i,j, \tag{40}$$

при чему је увек k, број до кога се врши сабирање производа елемената i-те врсте матрице $\mathbf{C}$ и j-тог ступца матрице $\mathbf{B}$, једнак мањем од индекса i и j, или, ако су они једнаки, једнак тим индексима. Ово је очигледно из троугласте структуре матрица $\mathbf{C}$ и $\mathbf{B}$ и правила о множењу матрица. Према томе, јасно је, да се у општем случају, кад се оставе на страну елементи главне дијагонале матрице $\mathbf{B}$, јер су сви једнаки -1 и стога унапред познати, може рећи да су од нуле различити само они елементи b_{ij} за које је $i<j$ и они елементи c_{ij} за које је напротив $i\geqslant j$.

При исписивању једначина (40), које треба да нам послуже за одређивање елемената b_{ij} и c_{ij}, *најзгодније* је рачунати почев од првог ступца матрице $\mathbf{A}$, па одређивати све везе које одговарају елементима овог ступца идући одозго наниже. Предност таквог израчунавања је у томе, што се тада у свакој наредној од једначине (40) појављује само по један нови елемент c_{ij}, док је $i \geqslant j$, а по том један нови елемент b_{ij} за $i < j$. Ако се ова чињеница искористи, може се систем једначина (40), који даје везе између a_{ij}, b_{ij} и c_{ij}, написати у два одвојена облика, посебно за $i < j$, а посебно за $i \geqslant j$.

1) За $i < j$ биће

$$a_{ij}+c_{i1}\,b_{1j}+c_{i2}\,b_{2j}+\cdot\cdot\cdot+c_{i,\,i-1}\,b_{i-1,\,j}+c_{ii}\,b_{ij}=0,$$

одакле се за одређивање b_{ij} добија образац

$$b_{ij}=-(a_{ij}+c_{i1}\,b_{1j}+c_{i2}\,b_{2j}+\cdot\cdot\cdot+c_{i,\,i-1}\,b_{i-1,\,j}):c_{ii}. \tag{41}$$

2) За $i \geqslant j$ биће

$$a_{ij}+c_{i1}\,b_{1j}+c_{i2}\,b_{2j}+\cdot\cdot\cdot+c_{i,\,j-1}\,b_{j-1,\,j}+c_{ij}\,b_{jj}=0,$$

одакле се за одређивање c_{ij} добија образац

$$c_{ij}=a_{ij}+c_{i1}\,b_{1j}+c_{i2}\,b_{2j}+\cdot\cdot\cdot+c_{i,\,j-1}\,b_{j-1,\,j}. \tag{42}$$

Практично упутство за израчунавање елемената b_{ij} и c_{ij} гласи:

1) За одређивање елемента b_{ij} матрице **B** треба односном елементу a_{ij} матрице **A** додати скаларни производ елемената c_{ij} из i-те врсте до елемента c_{ii} на главној дијагонали и елемената b_{ij} j-тог ступца до елемента који се тражи (дакле, свих елемената ступца j испред елемента који се тражи), па тај скаларни производ поделити негативним елементом c_{ii} на главној дијагонали.

2) За одређивање елемента c_{ij} матрице **C** треба односном елементу a_{ij} матрице **A** додати скаларни производ елемената c_{ij} из i-те врсте до елемента који се тражи (свих испред елемента који се тражи) и елемента b_{ij} ступца j до елемента на главној дијагонали.

Израчунавање елемената b_{ij} матрице **B** овим поступком, по истом обрасцу, обухвата очигледно и елементе $(n+1)$-ог ступца, тј. $l_1, l_2, \ldots, l_n$, ако се узме да је

$$b_{i,\,n+1}=l_i \tag{43}$$

и да је

$$a_{i,\,n+1}=-k_i. \tag{44}$$

Осим тога исти поступак израчунавања служи и за врсте елемената $-s_i$ и $-\sigma_i$, које се могу додати испод врста матрица **F** и **C** у изразу (39). При томе $s_1, s_2, \ldots, s_n$ претстављају збирове колона матрице **A**, а $s_{n+1}=s$ збир независних чланова k_i система датих једначина. Са друге стране $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ претстављају збирове колона матрице **C**. После ове допуне правоугаона матрица **F** постаје квадратна реда $n+1$, а допуњена матрица **C** постаје правоугаона типа $(n+1,\ n)$. Тако проширена матрица **C** помножена матрицом **G** која је типа $(n,\ n+1)$ даје као резултат квадратну матрицу $(n+1)$-ог реда. Ради примене поступка и на ове допунске врсте ставићемо

$$-s_i = a_{n+1,\,i} \qquad (i=1,2,\ldots,n+1), \tag{45}$$

одн.

$$-\sigma_i = c_{n+1,\,i} \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{46}$$

Ове две нове врсте и њихово коришћење у израчунавању служе за контролу као проба за тачност рада, јер по обрасцу (42) израчунати елемент $c_{n+1,\,i}$ мора бити једнак збиру елемената c_{ij} у ступцу матрице **C** изнад елемента $c_{n+1,\,i}$. У тачност овог тврђења се лако уверавамо, ако испишемо изразе за све елементе c_{ki} ступца i матрице **C**, према обрасцу (42), и извршимо сабирање.

Из образаца (41) и (42) добија се:

1) Из обрасца (41) за $i=1$ $(i<j)$

$$b_{1j} = -a_{1j} : c_{11}, \qquad (j=1,2,\ldots,n+1), \tag{47}$$

јер у скаларном производу, који се иначе додаје, нема ниједног члана, пошто је b_{1j} увек први елемент овога ступца.

2) Из обрасца (42) за $j=1$ $(i \geqslant j)$

$$c_{i1} = a_{i1}, \qquad (i=1,2,\ldots,n+1), \tag{48}$$

јер је сад c_{i1} први елемент своје врсте и испред њега нема елемената.

Видели смо да је детерминанта матрице **C** једнака детерминанти матрице **A**, па ако матрица **A** није сингуларна, тј. ако је систем датих једначина линеарно независан, мора детерминанта **C** бити различита од нуле. То тврђење се управо своди на то да елементи главне дијагонале ове матрице морају бити различити од нуле. Међутим, применом показаног поступка може се догодити да се у току рачуна за неки дијагонални члан c_{ii} матрице **C** добије ипак вредност нула. То у ствари значи само да ће i-ти систем једначина који се добија поступном трансформацијом после i корака и који има $n-i$ непознатих имати први коефицијент у првој једначини једнак нули, што, наравно, не значи да детерминанта тог система мора бити једнака нули. У таквом случају треба само променити два стуба и то онај у коме се рачуна са неким од наредних, што је еквивалентно размени непознатих. То повлачи да се сви елементи b_{ij} изнад таквог c_{ii} морају избрисати и поново израчунати (иако Банахјевич тврди да се у том случају не мора у рачуну ништа понављати). Таква незгода се догађа само у оним случајевима кад је односни основни главни минор детерминанте A једнак нули. При томе се под основним главним минором разумеју минори ограђени цртама у детерминанти А матрице **A**, како је то показано у наредној схеми:

$$A = \left|\begin{array}{c|c|c|ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{array}\right| . \tag{49}$$

Да је заиста тако, одмах ћемо показати. Ако се узме у обзир да је i-ти дијагонални елемент c_{ii} матрице **C** увек први коефицијент у првој једначини i-тог система једначина, тј. да је $c_{11} = a_{11}$, $c_{22} = \beta_{22}$, итд., може се после крађег рачуна применом Гаусовог алгоритма показати да ће челни коефицијент у првом изведеном систему једначина бити

$$\beta_{22} = c_{22} = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}{a_{11}} = \frac{\Delta_2}{a_{11}} = \frac{\Delta_2}{c_{11}}. \tag{50}$$

Како мора бити $a_{11} > 0$ може β_{22} бити једнако нули само кад је

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 .$$

Уопште, како је

$$c_{ii} = \frac{\Delta_i}{c_{11}\; c_{22} \cdot \cdot \cdot c_{i-1,i-1}},$$

а $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{i-1,i-1}$ различити од нуле, биће c_{ii} једнако нули само ако је

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot\cdot & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\cdot\cdot & a_{2i} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdot\cdot\cdot & a_{ii} \end{vmatrix} = 0. \tag{51}$$

Кад наступи случај да је неки дијагонални члан једнак нули, а то се не може отклонити никаквим размештајем једначина и непознатих, значи да је матрица **A** сингуларна. Према томе, ако је $c_{rr} \neq 0$ а $c_{r+1,r+1} = 0$ и не може се отклонити, биће и сви наредни дијагонални елементи једнаки нули. На тај начин се овим поступком може одредити и ранг матрице **A** и биће у оваквом случају једнак броју r $(r < n)$. Хоће ли односни систем линеарних једначина бити неодређен или противречан, увиђа се израчунавањем елемената b_{rj}. Ако се за ове елементе добијају неодређене вредности, биће систем неодређен, иначе биће противречан.

IV. За практично провођење рачуна може се према (39) саставити од матрица **F**, **C** и **G**, допуњених елементима $-s_i$ и $-\sigma_i$, нарочита схема у врло простом облику. У том циљу треба уочити, прво, да се матрице **B** и **C** могу, пошто испуњавају супротна поља троугласте матрице, написати по Цурмилу [7, 8] као једна матрица ако се изоставе елементи главне дијагонале матрице **B**, јер су познати и сви једнаки -1. Овакву схему састављену од матрица **B** и **C** зваћемо *састављена матрица*. Наредна таблица показује распоред матрица и елемената који се неопходно морају унети у рачунску схему:

	$j=1$	2	3	. . .	n	$-k_i$	проба
$i=1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	. . .	a_{1n}	$-k_1$	
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	. . .	a_{2n}	$-k_2$	
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	. . .	a_{3n}	$-k_3$	
.	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . .	.	
n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	. . .	a_{nn}	$-k_n$	
$-s_j$	$-s_1$	$-s_2$	$-s_3$	. . .	$-s_n$	$-s$	
$i=1$	c_{11}	b_{12}	b_{13}	. . .	b_{1n}	l_1	
2	c_{21}	c_{22}	b_{23}	. . .	b_{2n}	l_2	
3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	. . .	b_{3n}	l_3	
.	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . .	.	
n	c_{n1}	c_{n2}	c_{n3}	. . .	c_{nn}	l_n	
$-\sigma_j$	$-\sigma_1$	$-\sigma_2$	$-\sigma_3$	. . .	$-\sigma_n$	$-\sigma=0$	
проба							
	$j=1$	2	3	. . .	n	l_i	x_i

(52)

Ова рачунска схема садржи матрицу **F** проширену елементима $-s_i$. Испод те матрице налази се матрица састављена од матрица **B** и **C** продужена елементима l_i и проширена елементима $-\sigma_i$. При томе је $\sigma_{n+1}=\sigma=0$, јер матрица **C** има само n стубова, чије збирове претстављају елементи σ_i. Са десне стране матрице **F** оставља се место за извођење једне пробе. Друга проба, која служи за контролу тачности израчунавања елемената c_{ij}, пише се при дну рачунске схеме. Непознате се уносе десно поред састављене матрице. Елементи главне дијагонале састављене матрице са којима се мора делити при израчунавању елемената b_{ij} истакнути су нарочитим оквиром да би падали у очи. Ово је Банахјевичева схема у Цурмиловој стилизацији. Наиме, матрице **B** и **C** у оригиналној Банахјевичевој схеми су одвојене.

Израчунавање почиње, како смо рекли, према обрасцима (41) и (42), полазећи од првог ступца и највишег елемента у њему. При израчунавању елемената b_{ij} и c_{ij} треба одређивати скаларне производе извесних већ израчунатих елемената b_{ij} и c_{ij}. Управо тежиште тог израчунавања је баш у одређивању тих скаларних производа, а са схеме је јасно како се они израчунавају.

Кад се одреде сви елементи састављене матрице заједно са елементима l_i, приступа се израчунавању непознатих по обрасцу (11), полазећи од последње непознате x_n, за коју важи

$$x_n = l_n. \tag{53}$$

Образац (11) показује да, ако смо нашли $n-i$ непознатих, па тражимо i-ту непознату x_i, треба елементу l_i додати скаларни производ свих непознатих испод x_i полазећи одоздо и свих елемената b_{ij} у i-тој врсти полазећи здесна до пред главни дијагонални елемент.

У току рада се врши стална контрола на основу обрасца

$$c_{ii}+c_{i+1,i}+\cdot\cdot\cdot+c_{ni}-\sigma_i=0, \tag{54}$$

при чему се σ_i израчуна по обрасцу (42). Ови збирови треба да дају као резултат нулу, али се у случају рачунања са нетачним заокругљеним бројевима може појавити и мало отступање, које се бележи испод схеме у јединицама најнижег места.

Кад се изврши израчунавање свих непознатих x_i, врши се последња проба замењивањем нађених решења у систем једначина (1), укључујући ту и збирове s_i, тј. уношењем у систем једначина

$$a_{i1}\,x_1+a_{i2}\,x_2+\cdot\cdot\cdot+a_{in}\,x_n-k_i=0 \quad (i=1,2,\ldots,n+1). \tag{55}$$

И у овом случају треба резултат замене свуда да даје нулу, али се и овде могу појавити отступања за неколико јединица најнижег места, која се уносе такође у стубац одређен за те пробе, десно од матрице **F**. Често је за контролу довољно унети само израчунате вредности непознатих у врсту збирова $(i=n+1)$ проширене матрице **F**. Врло редак, нарочито неповољан случај је кад је вредност детерминанте коефицијената врло мала. Тада се, кад се рачуна са приближним вредностима коефицијената, могу добити и знатнија отступања у пробама иако је рачун тачан. У том случају се морају уносити нарочите коректуре.

Пошто смо показали у детаљима нову схему и начин решавања система једначина по њој, поставља се природно питање: да ли ова схема смањује број рачунских операција и података које треба исписивати. То важно питање захтева детаљну и брижљиву анализу, у коју се овде не можемо упуштати. Према непотпуним Цурмиловим излагањима, читава вредност поступка по овој схеми лежи у једноликости непрестаног одређивања скаларних производа, који се лако могу одредити као готов резултат на многим адиционим машинама за рачунање, дакле, без исписивања појединих производа. У овој могућности је читава снага и вредност поступка. Са правилним коришћењем машине за рачунање може се постићи знатна уштеда у раду и много смањити напор пажње. Према Цурмиловим подацима, напр. при обичном решавању система од 10 једначина са 10 непознатих само нешто више од половине потребних операција може се извести на машини, док се по Банахјевичевом поступку 5/6 посла изводи на рачунској машини. Наравно да ове податке треба проверити. Уопште би било интересантно тачно утврдити колико времена и напора треба за решавање система једначина по новом поступку у поређењу са ранијим начинима.

Важно је напоменути и то да је Банахјевичева схема, као сажети израз једног читавог процеса, теже разумљива него обичан Гаусов алгоритам, али се њом могу чисто механички служити и калкулатори скоро без икаквих математичких знања.

V. Стварни ток решавања система једначина по овој методи показаћемо на наредном примеру система од четири једначине са четири непознате:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 18 \\
x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 14 \\
-x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 22 \\
3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 4.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Овај систем је врло прост и са тачним бројним коефицијентима. Ако су коефицијенти приближни бројеви са великим бројем децимала, треба узети у обзир читав низ практичних правила која олакшавају у таквим случајевима примену машина за рачунање, напр. у вези са бројем децимала, важећих цифара итд. Све су то ствари које треба да су познате сваком калкулатору и иначе.

Рачунска схема за решавање овог система једначина потпуно испуњена изгледа овако:

	$j=1$	2	3	4	$-k_i$	проба
$i=1$	1	−1	3	2	−18	0
2	1	1	1	−2	−14	0
3	−1	2	4	−2	−22	0
4	3	1	1	4	− 4	0
$-s_j$	−4	−3	−9	−2	58	
$i=1$	1	1	−3	−2	18	4
2	1	2	1	2	− 2	−2
3	−1	1	8	−0,25	5,25	6
4	3	4	−4	7	− 3	−3
$-\sigma_j$	−4	−8	−2	−6,75	0	
проба	0	0	0	0		
	$j=1$	2	3	4	l_i	x_i

При томе је, напр.,

$$c_{43} = 1 - 9 + 4 = -4,$$

$$b_{34} = (-2 + 2 + 2) : (-8) = -0{,}25,$$

$$l_2 = (-14 + 18) : (-2) = -2,$$

итд.

Решења датог система биће

$$x_1 = 4; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 6; \quad x_4 = -3.$$

VI. Навешћемо и нека упрошћења н која се наилази кад је матрица **A** симетрична, тј. кад је испуње услов

$$a_{ij}=a_{ji} \quad \text{одн.} \quad \mathbf{A}=\overline{\mathbf{A}} \tag{58}$$

где црте означују транспоновану матриц . Наиме, из обрасца (21) следи да је

$$\overline{\mathbf{A}}=-\overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{C}}, \tag{59}$$

па због симетрије матрице **A** мора бити

$$\mathbf{C}\,\mathbf{B}=\overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{C}},$$

тј.

$$\sum c_{ik}\, b_{kj}=\sum c_{jk}\, b_{ki}\,. \tag{60}$$

Међутим, пошто су матрице **B** и **C** троу ласте, чији су од нуле различити елементи у супротним пољи а, морају индекси тих елемената у скаларним производима (60) адовољавати услов

$$i, j \geqslant k. \tag{61}$$

Ако је $i<j$, то је могуће само за $k=i$ у том случају се (60) своди на

$$c_{ii}\, b_{ij}=c_{ji}\, b_{ii}\,,$$

па како је $b_{ii}=-1$, биће

$$b_{ij}=-\frac{c_{ji}}{c_{ii}}. \tag{62}$$

Исти тај резултат се добија и у случ ју $i>j$, само ће тада индекси имати размењена места. Овај о разац показује да, кад су израчунати елементи c_{ij}, ако је матр ца **A** симетрична, сваки елемент b_{ij} се добија деобом њему сим тричног елемента c_{ji} у састављеној матрици негативним дијагона ним елементом c_{ii} који је у истом стубу са елементом c_{ji}.

Коришћења обрасца (62) за израчуна ње састављене матрице кад је полазна матрица симетрична нем код Банхјевича. Он се налази први пут, уколико је мени позн то, код Цурмила [**7, 8**], који га приписује Герхарту Шрајеру и зводи потпуном индукцијом, дакле, друкчије но што смо ми то овде учинили. Сам Банахјевич, и пре њега Холески, примењ је други један поступак, који је изванредно кратак, али практички применљив углавном у оним случајевима где се зна да је матр ца датог система позитивно дефинитна. Такав је, напр., слу ј код матрице система нормалних једначина у рачуну изравнањ . Суштина ове методе лежи у чињеници да се, место матрице с стављене од матрица **B** и **C** са n^2 елемената, уведе, кад је **A** симет ична квадратна матрица

n-тог реда, само једна троугласта матрица

$$\mathbf{R}=\begin{Bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & r_{nn} \end{Bmatrix} \tag{63}$$

n-тог реда и њој транспонована

$$\bar{\mathbf{R}}=\begin{Bmatrix} r_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ r_{12} & r_{22} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{1n} & r_{2n} & r_{3n} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{nn} \end{Bmatrix} \tag{64}$$

што је довољно, пошто симетрична матрицаима само $n(n+1)/2$ независних елемената колико и једна троугласта матрица истог реда. Дакле, полази се од матричне једначине

$$\mathbf{A}=\bar{\mathbf{R}}\,\mathbf{R}, \tag{65}$$

којој одговара схема

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \cdots a_{nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \cdots 0 \\ r_{12} & r_{22} & 0 \cdots 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ r_{1n} & r_{2n} & r_{3n} \cdots r_{nn} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \cdots r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \cdots r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} \cdots r_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdots r_{nn} \end{Bmatrix}, \tag{66}$$

Из ове схеме се може написати систем од $n(n+1)/2$ једначина за одређивања елемената r_{ij}. За одређивање дијагоналних елемената те једначине дају образац

$$r_i^2 = a_{ii} - r_{1i}^2 - r_{2i}^2 - \cdot \cdot \cdot \cdot - r^2_{i-1,i}. \tag{67}$$

Одатле се елементи c_{ii} састављене матрице одређују као позитивни квадратни корени из елемената r_{ii}, јер унапред знамо да они морају бити позитивни (претпоставка о позитивној дефинитности матрице). Биће, дакле,

$$c_{ii} = \sqrt{r_{ii}}. \tag{68}$$

Из матричне једначине (65) добија се наредна детерминантна једначина

$$A = \bar{R}\,R = R^2 = (r_{11}\, r_{22} \ldots r_{nn})^2, \tag{69}$$

која показује како се израчунава вредност детерминанте A кад је позната матрица $\mathbf{R}$.

Потребне квадратне корене одређујемо из таблица или помоћу машине за рачунање, кад таблица нема. У ту сврху треба онда одредити логаритмаром неку приближну вредност траженог квадратног корена, па том вредношћу поделити на машини дати број и најзад као приближну вредност траженог квадратног корена узети аритметичку средину прве приближне вредности и резултата деобе.

Како је очигледно у матрици састављеној од матрица **R** и $\bar{\mathbf{R}}$ довољно одредити само матрицу **R**, као што је и у матрици **A**, кад је она симетрична, довољно обратити пажњу само напр. на горњи њен део заједно са главном дијагоналом, најбоље је рачунати по врстама. При томе је

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad r_{1j} = a_{1j} : r_{11}, \tag{70}$$

што је лако увидети из (66). Из (66) се за израчунавање осталих врста добија образац

$$r_{ij} = (a_{ij} - r_{1i}\, r_{1j} - r_{2i}\, r_{2j} - \cdot \cdot \cdot - r_{i-1,\,i}\, r_{i-1,\,j}) : r_{ii}, \quad (i < j). \tag{71}$$

Кратко, за израчунавање елемента r_{ij} треба елементу a_{ij} матрице **A** додати негативни скаларни производ i-тог ступца и j-тог ступца матрице **R** и то поделити са дијагоналним елементом r_{ii}. При том се елементи i-тог ступца узимају до дијагоналног члана r_{ii}, а они j-тог ступца до траженог елемента.

Пошто је у самој рачунској схеми довољно сад записати само десни део са главном дијагоналом матрице **A**, а у доњој таблици где је састављена матрица само матрицу **R**, пробе се додају у овом случају свуда здесна као колона у којој су $-s_i$ и $-\sigma_i$ збирови елемената врста. Како сад у трансформату датог система коефицијенти уз непознате нису једнаки јединици, непознате се одређују по обрасцу

$$x_i = (r_i - r_{in}\, x_n - r_{i,\,n-1}\, x_{n-1} - \cdot \cdot \cdot - r_{i,\,i+1}\, x_{i+1}) : r_{ii}, \tag{72}$$

при чему се израчунавање и овде почиње последњом непознатом, која је одређена са

$$x_n = r_n : r_{nn},$$

где су r_i елементи ступца у који се претвара стубац независних елемената датог симетричног система једначина.

VII. Осим на решавање система линеарних једначина, израчунавање вредности детерминанте и ранга матрице, може се код симетричних матрица овај упрошћени поступак искористити и за одређивање да ли је квадратна форма која одговара датој матрици дефинитна, семидефинитна или индефинитна. Напр., ако су сви главни дијагонални елементи c_{ii} састављене матрице позитивни, мора односна квадратна форма бити позитивно дефинитна, јер, како смо показали, ови елементи имају исти знак као основни главни минори детерминанте форме, а на основу познатог критеријума за позитивну дефинитност квадратних форми. Исто се тако овај поступак може искористити и за свођење квадратних форми на канонски облик, јер ће квадратна форма

$$\begin{aligned}\Phi \equiv \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i\, x_j = a_{11}\, x_1^2 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + 2\, a_{13}\, x_1\, x_3 + \cdots + 2\, a_{1n}\, x_1\, x_n \\ + a_{22}\, x_2^2 + 2\, a_{23}\, x_2\, x_3 + \cdots + 2\, a_{2n}\, x_2\, x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{nn}\, x_n^2\end{aligned} \tag{74}$$

бити претворена у форму

$$\Phi \equiv \sum_{i} c_{ii}\, y_i^2 = c_{11}\, y_1^2 + c_{22}\, y_2^2 + \cdots + c_{nn}\, y_n^2, \tag{75}$$

ако је

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n, \\ y_2 &= \qquad x_2 + \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}} x_3 \cdots + \frac{\beta_{2n}}{\beta_{11}} x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \qquad\qquad x_n. \end{aligned} \tag{76}$$

Коефицијенти β_{ij} су овде већ раније поменути коефицијенти првог изведеног система у примени Гаусовог алгоритма, итд.

Наравно, све се ово може искористити и за свођење једначина површина другог реда на канонски облик, и то врло просто и брзо изводити. У поређењу са познатим Лагранжовим поступком омогућава знатну уштеду времена и рада, а не може се применити само на квадратне форме у којима нема ниједног квадратног члана. У том се случају не може уосталом применити ни Лагранжов поступак директно, већ се пре тога мора извршити прво једна линеарна трансформација да би се појавили квадратни чланови ради примене самог поступка.

Као пример за ова наша тврђења уочимо квадратну форму

$$\Phi \equiv 6\, x_1^2 + 35\, x_2^2 + 11\, x_3^2 + 34\, x_2\, x_3 \tag{77}$$

и потражимо одговор на питање да ли је она позитивно дефинитна или није и при томе је довести на канонски облик. Банахјевичева схема, у коју смо ставили с обзиром на природу задатка само пробе за одређивање елемената c_{ij}, изгледаће

	$j=1$	2	3
$i=1$	6	0	0
2	0	35	17
3	0	17	11
$-s_j$	-6	-52	-23
$i=1$	6	0	0
2	0	35	$-\frac{17}{35}$
3	0	17	$\frac{96}{35}$
$-\sigma_j$	-6	-52	$-\frac{79}{35}$
	0	0	0
	$j=1$	2	3

Према томе је канонски облик дате квадратне форме

$$\Phi \equiv 6\,y_1^2 + 35\,y_2^2 + \frac{96}{35}\,y_3^2, \tag{79}$$

а одатле је јасно да је дата квадратна форма позитивно дефинитна.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Frazer R. A., Duncan W. J. and Collar A. R. — Elementary Matrices and some Applications to Dynamics and Differential Equations. Cambridge U. P., 1946.

[2] Runge C. und König H. — Numerisches Rechnen. Springer, Berlin, 1924.

[3] Bénoit — Sur une méthode de résolution des équations normales (procédé du commandant Cholesky), *Bull. géodésique* 2 (1924), Toulouse.

[4] Arend S. — Voies nouvelles dans le calcul scientifique. *Ciel et Terre,* LVII Année, № **12**, p. 497—513, Bruxelles, 1941.

[5] Banachiewicz T. — Résolution d'un système d'équations linéaires algébriques par division. *L'enseignement mathématique,* XXXIX Année 1942—1950, № 1—2—3, p. 34—45, Genève, 1950.

[6] Bodewig E. — Zu R. Zurmühl: Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme nach dem Matrizenverfahren von Banachiewicz. *Zeitschrift für angew. Math. u. Mech.,* Bd. **30**, Heft 4, S. 130—131, 1950.

[7] Zurmühl R. — Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme nach dem Matrizenverfahren von Banachiewicz. *Zeitschrift für angew. Math. u. Mech.*, Bd. **29**, S. 76—84, 1949,

[8] Zurmühl R. — Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure. Springer, Berlin 1950.

RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES ALGÉBRIQUES PAR LA MÉTHODE DE BANACHIEWICZ

Par Tatomir Angelitch

Ce travail est un exposé des résultats les plus récents concernant la théorie et la pratique de la résolution des systèmes d'équations linéaires algébriques par la méthode des matrices en utilisant le schéma de Banachiewicz. On y montre comment on peut, d'après Zurmühl (Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme nach dem Matrizenverfahren von Banachiewicz, *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 1949), développer et appliquer les résultats obtenus par Banachiewicz sans recours aux cracoviens.

Enfin, dans le cas d'un système d'équations dont la matrice des coefficients est symétrique, décomposable en deux matrices triangulaires d'après la formule

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} -1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{Bmatrix},$$

on donne une nouvelle démonstration très simple du fait qu'on a toujours

$$b_{ij} = -\frac{c_{ji}}{c_{ji}} .$$

ГЕОМЕТРИСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА БА ІАХЈЕВИЧЕВЕ СХЕМЕ

РАДИВОЈЕ КАШАНИН (Бі эград)

Методи које је проф. Т. Анђелић изложио у свом раду „Решавање система линеарних алгебарск іх једначина матричном методом по Банахјевичевој схеми“ мож : се дати геометриска интерпретација.

Узмимо два координатна триједра век гора: триједар X састављен од вектора $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ и триједар Y састављен од вектора $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$. Векторе реципрочних триједара означићемо са $\mathfrak{a}^1$, $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{a}^3$ и $\mathfrak{b}^1$, $\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{b}^3$. Претпоставимо да су нам п знате контраваријантне координате вектора $\mathfrak{b}_k$ с обзиром на триј дар X:

$$a_k{}^i = \mathfrak{a}^i \cdot \mathfrak{b}_k, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Тада је

$$\mathfrak{b}_k = a_k{}^1 \mathfrak{a}_1 + a_k{}^2 \mathfrak{a}_2 + a_k{}^3 \mathfrak{a}_3, \quad (k = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Коваријантне координате вектора $\mathfrak{r}$ у триједру X нека буду x_1, x_2, x_3, а у триједру Y нека буду y_1, y_2, y_3:

$$x_i = \mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{r}, \quad y_k = \mathfrak{b}_k \cdot$$

Помножимо ли (1) скаларно са $\mathfrak{r}$, добиће о

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_1{}^1 x_1 + a_1{}^2 x_2 + a_1{}^3 x \\ y_2 &= a_2{}^1 x_1 + a_2{}^2 x_2 + a_2{}^3 x \\ y_3 &= a_3{}^1 x_1 + a_3{}^2 x_2 + a_3{}^3 x \,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из координата x_i лако је израчуна и координате y_k. Биће лак и обрнут задатак ако је $\mathfrak{a}_i \parallel \mathfrak{b}_i$ за $i = 1, 2, 3$. Тада наиме једначине (2) гласе

$$y_1 = a_1{}^1 x_1, \quad y_2 = a_2{}^2 x_2, \quad y_3 = a_3{}^3 x_3.$$

Међутим, ако то није случај, треба сис ем једначина (2) решавати по x_1, x_2, x_3.

Да бисмо у том општем случају на н :ки начин уравнотежили један рачун с другим, увешћемо помоћни координатни триједар Z

вектора $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$ начињен овако. Сигурно постоји бар једна координатна раван триједра X која није паралелна с једном од координатних равни триједра Y. Нумеришући згодно векторе, може се узети да су те равни $X\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ и $Y\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$. Ове равни се, дакле, секу дуж неке праве. За правац вектора $\mathfrak{c}_2$ узећемо правац те праве. Вектор $\mathfrak{c}_2$ је зато компланаран с једне стране с векторима $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$, с друге стране с векторима $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$:

$$\mathfrak{c}_2 = \alpha_2{}^2\,\mathfrak{a}_2 + \alpha_2{}^3\,\mathfrak{a}_3 = \beta_2{}^1\,\mathfrak{b}_1 + \beta_2{}^2\,\mathfrak{b}_2 .$$

Вектор $\mathfrak{c}_1$ узећемо паралелно с вектором $\mathfrak{b}_1$, који се према (1), може линеарно изразити помоћу $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$; дакле,

$$\mathfrak{c}_1 = \beta_1{}^1\,\mathfrak{b}_1 = \alpha_1{}^1\,\mathfrak{a}_1 + \alpha_1{}^2\,\mathfrak{a}_2 + \alpha_1{}^3\,\mathfrak{a}_3 .$$

Вектор $\mathfrak{c}_3$ узећемо паралелно с вектором $\mathfrak{a}_3$, који се може линеарно изразити помоћу вектора $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$; дакле,

$$\mathfrak{c}_3 = \alpha_3{}^3\,\mathfrak{a}_3 = \beta_3{}^1\,\mathfrak{b}_1 + \beta_3{}^2\,\mathfrak{b}_2 + \beta_3{}^3\,\mathfrak{b}_3 .$$

И тако, за помоћни триједар Z имамо:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1{}^1\,\mathfrak{a}_1 + \alpha_1{}^2\,\mathfrak{a}_2 + \alpha_1{}^3\,\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{c}_1 = \beta_1{}^1\,\mathfrak{b}_1 \\ \alpha_2{}^2\,\mathfrak{a}_2 + \alpha_2{}^3\,\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{c}_2 = \beta_2{}^1\,\mathfrak{b}_1 + \beta_2{}^2\,\mathfrak{b}_2 \\ \alpha_3{}^3\,\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{c}_3 = \beta_3{}^1\,\mathfrak{b}_1 + \beta_3{}^2\,\mathfrak{b}_2 + \beta_3{}^3\,\mathfrak{b}_3 . \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Коваријантне координате вектора $\mathfrak{r}$ у триједеру Z нека буду z_1, z_2, z_3:

$$z_1 = \mathfrak{c}_1 \cdot \mathfrak{r}, \quad z_2 = \mathfrak{c}_2 \cdot \mathfrak{r}, \quad z_3 = \mathfrak{c}_3 \cdot \mathfrak{r}.$$

Скаларним множењем једначина (3) са $\mathfrak{r}$ добивамо

$$\begin{aligned} \alpha_1{}^1\,x_1 + \alpha_1{}^2\,x_2 + \alpha_1{}^3\,x_3 &= z_1 = \beta_1{}^1\,y_1 \\ \alpha_2{}^2\,x_2 + \alpha_2{}^3\,x_3 &= z_2 = \beta_2{}^1\,y_1 + \beta_2{}^2\,y_2 \\ \alpha_3{}^3\,x_3 &= z_3 = \beta_3{}^1\,y_1 + \beta_3{}^2\,y_2 + \beta_3{}^3\,y_3 . \end{aligned}$$

На тај начин, место система једначина (2) добивамо за трансформацију координата систем једначина

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1{}^1\,x_1 + \alpha_1{}^2\,x_2 + \alpha_1{}^3\,x_3 &= \beta_1{}^1\,y_1 \\ \alpha_2{}^2\,x_2 + \alpha_2{}^3\,x_3 &= \beta_2{}^1\,y_1 + \beta_2{}^2\,y_2 \\ \alpha_3{}^3\,x_3 &= \beta_3{}^1\,y_1 + \beta_3{}^2\,y_2 + \beta_3{}^3\,y_3 , \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

у којем се координате x_i и y_k налазе у равноправном положају. Осим тога, знамо шта геометриски значе леве и десне стране једначина (4): то су коваријантне координате вектора $\mathfrak{r}$ у координатном тријеДРУ Z.

Остаје нам да одредимо бројеве α и β.

Из прве једначине у (3) и прве једначине у (1) имамо одмах:

$$\alpha_1{}^k = \mathfrak{c}_1 \cdot \mathfrak{a}^k = \beta_1{}^1 a_1{}^k,$$

а број $\beta_1{}^1$ остаје произвољан. Узећемо

$$\beta_1{}^1 = -1 : a_1{}^1.$$

Дакле,

$$\alpha_1{}^1 = -1, \quad \alpha_1{}^2 = -a_1{}^2 : a_1{}^1, \quad \alpha_1{}^3 = -a_1{}^3 : a_1{}^1. \tag{5}$$

Друга једначина у (3) је векторска једначина

$$\alpha_2{}^2 \mathfrak{a}_2 + \alpha_2{}^3 \mathfrak{a}_3 = \beta_2{}^1 \mathfrak{b}_1 + \beta_2{}^2 \mathfrak{b}_2,$$

која је еквивалентна с три скаларне. Скаларним множењем са $\mathfrak{a}^1$ добивамо

$$0 = \beta_2{}^1 a_1{}^1 + \beta_2{}^2 a_2{}^1,$$

тј.

$$\beta_2{}^1 = -C a_2{}^1, \quad \beta_2{}^2 = C a_1{}^1,$$

где је C произвољан број. Множећи другу једначину у (3) скаларно са $\mathfrak{a}^2$ и $\mathfrak{a}^3$, добићемо

$$\alpha_2{}^2 = \mathfrak{c}_2 \cdot \mathfrak{a}^2 = \beta_2{}^1 a_1{}^2 + \beta_2{}^2 a_2{}^2 = \quad C\,(a_1{}^1 a_2{}^2 - a_1{}^2 a_2{}^1),$$

$$\alpha_2{}^3 = \mathfrak{c}_2 \cdot \mathfrak{a}^3 = \beta_2{}^1 a_1{}^3 + \beta_2{}^2 a_2{}^3 = -C\,(a_1{}^3 a_2{}^1 - a_1{}^1 a_2{}^3).$$

Узећемо

$$C = -1 : (a_1{}^1 a_2{}^2 - a_1{}^2 a_2{}^1).$$

Дакле,

$$\alpha_2{}^2 = -1, \quad \alpha_2{}^3 = \frac{a_1{}^3 a_2{}^1 - a_1{}^1 a_2{}^3}{a_1{}^1 a_2{}^2 - a_1{}^2 a_2{}^1}. \tag{6}$$

Број $\alpha_3{}^3$ у првој једначини у (3) остаје произвољан. Узећемо

$$\alpha_3{}^3 = -1. \tag{7}$$

Резултате (5), (6) и (7) даје и метода изнесена у чланку проф. Анђелића. —

Ради лакшег писања и изражавања радили смо у простору од три димензије. Међутим, лако је ова излагања уопштити на Еуклидов простор ма од колико димензија.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU SCHÉMA DE BANACHIEWICZ

Par R. Kašanin

On donne du schéma de Banachiewicz pour la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires l'interprétation géométrique sous forme de deux transformations successives de coordonnées, dans trois systèmes de coordonnées.

СТРОФОИДАЛНЕ ПЛОХЕ ТРЕЋЕГ РЕДА

ВИЛКО НИЧЕ (Загреб)

Увод. Као што циркуларне кривуље неког реда и рода заузимљу особито мјесто међу свим кривуљама тога реда и рода, ради својих особитости по којима се разликују од оних осталих, тако се и плохе које пролазе апсолутном чуњосјечницом разликују од осталих плоха истога реда и истих сингуларитета. Код плоха 2. реда имамо куглу насупрот осталих плоха 2. реда, јер само она пролази апсолутном чуњосјечницом. Код опћих плоха 3. реда имамо неколико разних облика таквих плоха. Два од тих облика припадају у пету врсту по Schläfli-у (в. Klein F. [**2**; § 8 стр. 25—28][1]), јер имаду на себи само три реална правца. Ова два облика разликују се по томе, што су плохе једног облика једнодјелне, док су оне другог облика дводјелне. Има плоха ове врсте и таквих облика, који припадају у врсту оних с једном и двије двоструке точке. Овакве се плохе најједноставније добију као производ пројективног свеска равнина и прамена кугала[2], као и посвеопћеном квадратном инверзијом кугле на кугли, како је то учињено у радњи „Кривуље и плохе 3. и 4. реда настале помоћу квадратне инверзије". Могу се оне међутим добити и на друге начине, а један такав начин видјет ћемо и у овој радњи. Међу оваквим плохама, које пролазе апсолутном чуњосјечницом, постоји једна особита врста унутар споменутих облика, која се по својим особинама истиче између осталих, а управо том ћемо се позабавити у овој радњи. Ова особита врста има ту особину, да њене тангенцијалне равнине дуж апсолутне чуњосјечнице оматају имагинаран стожац 2. реда којег се реалан врх налази на самој површини те плохе. Разлику између ових и осталих плоха које пролазе апсолутном чуњосјечницом, могли би према томе успоредити с разликом између обичних циркуларних кривуља 3. реда

[1]) Први број у угластим заградама односи се на литературу на крају чланка.
[2]) Други Штајнеров начин извођења опћих плоха 3. реда.

рода првога и нултога, и строфоидале, односно обичне строфоиде. Видјет ћемо, да овакве плохе имају неке изразите особине кугле. Ради аналогије са строфоидалом и строфоидом у равнини, називат ћемо такве опће плохе 3. реда строфоидалним плохама.

1. Steiner [**6**], Grassmann [**5**; стр. 74], Majcen [**3**] и други показали су више разних начина, како се могу добити и истраживати опће плохе 3. реда. R. Sturm је показао, да се оне могу добити и као производ пројективно придруженог снопа зрака и свежња плоха 2. реда. За наше сврхе одабрат ћемо управо овај начин, само што нећемо свежањ плоха 2. реда задати као обично с осам асоцираних точака (в. Reye T. [**5**; стр. 48]), него с једном чуњосјечницом и двије точке. С ова три елемента задан је наиме један специјалан свежањ плоха 2. реда.

Задајмо по вољи у простору неку чуњосјечницу c и двије точке A, B. Пресијечемо ли једном равнином спојнице точака A, B чуњосјечницу c у двије точке K_1, K_2, тад је точкама A, B, K_1, K_2 у тој равнини дан прамен чуњосјечница, а свака ова чуњосјечница даје с чуњосјечницом c темељну кривуљу 4. реда (распаднуту у двије чуњосјечнице) неког прамена плоха 2. реда. Точкама A, B пролази ∞^1 равнина, а сваком точком простора пролази ∞^1 таквих плоха, дакле точкама A, B и чуњосјечницом c пролази свега ∞^2 плоха 2. реда. Поставимо ли наиме спојницом AB било коју равнину, тада је праменом чуњосјечница темељних точака. A, B, K_1, K_2 у тој равнини и чуњосјечницом c дано ∞^2 плоха 2 реда, али све те плохе сијеку сваку равнину спојнице AB у оном прамену чуњосјечница, који је одређен точкама A, B и сјециштима K_1, K_2 те равнине с чуњосјечницом c.

Продужимо сада спојницу тачака A, B до њеног прободишта C с равнином чуњосјечнице c. Нађемо ли на овој спојници добивеном прободишту C хармонијски придружену точку C_1, тј. $(ABCC_1) = -1$, па овом точком C_1 и поларом t пола C, обзиром на чуњосјечницу c, поставимо равнину ρ, тад су ова равнина и точка C пол и поларна равнина свих ∞^2 плоха нашег свежња плоха 2. реда, а баш она ће нам згодно послужити.

Одаберимо надаље по вољи у простору неку точку S, која нека буде средиште неког снопа зрака (S). Прободиште сваке зраке овог снопа с равнином ρ нека буде пол поларне равнине чуњосјечнице c обзиром на једну плоху нашег свежња. Свакој зраци нашег снопа нека буде придружена баш оваква плоха нашег свежња плоха 2. реда. На тај смо начин те двије геометријске творевине пројективно придружили, јер ће четирима хармонијским зракама снопа (S) у некој равнини, бити придружене четири хармонијске плохе у једном прамену плоха унутар нашег свежња [5; стр. 48]. Четири плохе 2. реда, унутар неког прамена таквих плоха, зову се хармонијскима онда, ако њихове поларне равнине обзиром на исти пол, које увијек пролазе једним правцем, чине четири хармонијске равнине. Узмемо ли такву точку на темељној кривуљи прамена, онда четири поларне равнине прелазе у четири тангенцијалне равнине. Узмемо ли према томе точком S неку равнину и у њој четири хармонијске зраке нашег снопа, тад ће тим зракама бити придружене оне плохе нашег свежња, које ће дуж чуњосјечнице c тангирати оне стошце 2. реда, којима су врхови у прободиштима споменутих зрака с равнином ρ. Поставимо ли било којом тангентом чуњосјечнице c тангенцијалне равнине на споменуте четири плохе, односно њихове тангенцијалне стошце дуж чуњосјечнице c, онда су то сигурно четири хармонијске равнине, јер оне сијеку пресјечницу равнине ρ с равнином задатих четирију хармонијских зрака у четири хармонијске точке, будући да су ове сјецишта те пресјечнице са задане четири хармонијске зраке. Дакле, четирима хармонијским зракама точке S у истину су придружене четири хармонијске плохе нашег свежња. Да су ове четири плохе унутар једног прамена, видјет ћемо мало касније.

Производ нашег пројективно придруженог снопа (S) и свежња плоха 2. реда бит ће опћа плоха 3. реда, јер ју сваки правац простора сијече у три точке. Поставимо ли наиме таквим правцем p и точком S равнину, те њоме пресијечемо равнину ρ у правцу s, тад су точке правца s полови равнине чуњосјечнице c, обзиром на плохе једног прамена унутар нашег свежња плоха 2. реда. Доказати се то може овако: Равнина правца p и точке S сијече полару t чуњосјечнице c, обзиром на пол C, у једној точки, које ће полара на исту чуњосјечницу бити коњугирана полари t, а сјећи ће чуњосјечницу c у реалном или имагинарном пару точака D, E. Јер ова коњугирана полара полари t пролази полом C, који је на спојници AB, налазе се точке A, B, C, D и E у једној равнини. У точкама D, E имат ће плохе нашег свежња, придружене зракама точке S у равнини (pS), исте тангенцијалне равнине, које пролазе правцем s. Поставимо ли према томе точкама D, E и точкама A, B чуњосјечницу, која тангира те двије равнине (чим тангира у једној точки једну, онда у другој точки тангира и другу ову равнину), онда је ова чуњосјечница уз чуњосјечницу c саставни дио темељне кривуље прамена оних плоха 2. реда унутар нашег свежња, које су придружене зракама точке S у равнини (pS). Равнина (pS) сијече тај прамен плоха у прамену

… чуњосјечница c, налазе се на овако добивеној опћој плохи 3. реда, јер точком S сигурно пролази бар једна плоха нашег свежња, а зраке SA, SB пробадају себи придружене плохе нашег свежња управо у тим точкама. Спојимо ли точку S са сваком точком чуњосјечнице c, тад свака ова спојница има на чуњосјечници c по двије точке заједничке с добивеном плохом 3. реда, т. ј. она ју тангира, јер у тој точки тангира та зрака себи придружену плоху 2. реда унутар нашег свежња. Ово заправо произлази директно из дефиниције нашег свежња, јер свакој зраци точке S придружена је она плоха 2. реда, која пролази точкама A, B и чуњосјечницом c, дуж које ју дира онај стожац, којему се врх налази у прободишту те зраке с равнином ρ. Ако та зрака сијече чуњосјечницу c, онда је она одмах и изводница таквог стошца, дакле дира у том сјецишту себи придружену плоху, а према томе и насталу плоху 3. реда. Видимо дакле, да тангенцијалне равнине наше плохе 3. реда дуж чуњосјечнице c оматају стожац 2. реда, којег се врх налази у точки S на тој плохи.

Узмемо ли точке A, B као врхове стожаца, који пролазе чуњосјечницом c, тад се ти стошци сијеку у још једној чуњосјечници c_1, која лежи у равнини ρ. Ова чињеница произлази одавле: Имамо ли два стошца 2. реда, чији се продор распада у двије чуњосјечнице (оба стошца имају двије заједничке тангенцијалне равнине), па кроз оба врха поставимо било коју равнину, сјећи ће она те стошце у два пара изводница које чине један четверостран, а равнине продорних чуњосјечница у двије дијагонале тог четверострана. Трећа дијагонала тог четверострана је спојница врхова тих стожаца. Позната је чињеница, да сваку дијагоналу неког четверострана сијеку остале двије дијагонале у точкама, које с врховима тог четверострана на тој дијагонали стоје у хармонијском двоомјеру. Чуњосјечница c_1 мора према томе бити у равнини ρ, јер је она хармонијски придружена равнини чуњочјечнице c, обзиром на равнине (tA) и (tB) као темељне. Узмемо ли сада ову чуњосјечницу c_1 као базу, а точку S као врх, тад и овај стожац дира нашу плоху 3. реда дуж ове чуњосјечнице c_1, јер на свакој изводници овог стошца у точкама чуњосјечнице c_1 леже двије точке наше плохе. Ова чињеница произлази одатле, што свака точка чуњосјечнице c_1, спојена с точкама A, B, даје двије изводнице оне плохе 2. реда нашега свежња, која је придружена оној зраци точке S која пролази одабраном точком на чуњосјечници c_1. Будући да међутим прободишта M, N сваке зраке точке S с њој придруженом плохом 2. реда и њена прободишта Q, P с равнинама ρ и чуњосјечнице c чине хармонијски двоомјер $(QPMN) = -1$, морају точке M, N пасти скупа, ако једна од тих точака дође у тачку Q, као што се то десило у нашем случају. Дакле, споменуте зраке точке S и чуњосјечнице c_1 у истину дирају насталу плоху дуж те чуњосјечнице. Точке чуњосјечнице c_1 су наиме врхови свих стожаца унутар нашег специјалног свежња плоха 2. реда. Евидентно је, да се чуњосјечнице c, c_1 сијеку у двије точке правца t.

Поставимо точкама A, B и S равнину, па њоме пресијецимо чуњосјечницу c_1 у даљње двије точке. С тих пет точака одређена је у тој равнини нека чуњосјечница b, а чуњосјечницама b, c, као темељном кривуљом, одређен је један прамен плоха 2. реда унутар нашег свежња. Будући да све плохе овог прамена пролазе точком S, морају се друга прободишта свих оних зрака точке S, које су на описани начин придружене плохама овог прамена, са себи придруженим плохама, налазити у оној равнини α, која пролази пресјечницом t равнине ρ и равнине β чуњосјечнице c, а која је хармонијски придружена равнини правца t и точке S (равнина γ), с обзиром на споменуте двије као темељне, т. ј. $(\rho\beta\gamma\alpha) = -1$. Будући да у сјециштима кружница b, c све плохе споменутог прамена имају сталне тангенцијалне равнине, то се врхови тангенцијалних стожаца плоха тога прамена дуж чуњосјечнице c, налазе на пресјечници n тих двију заједничких тангенцијалних равнина, која лежи као што знадемо, у равнини ρ. Све точке наше тражене плохе 3. реда, које се налазе на оним зракама точке S, које су придружене плохама 2. реда прамена темељне кривуље (bc), налазе се према томе у равнини точке S и правца n, као и у равнини α правца t, дакле на њиховој пресјечници l. Правац l налази се према томе на нашој плохи 3. реда. Евидентно је, да се на тој плохи налази и пресјечница t равнина ρ и β, јер све плохе (дегенериране) нашег свежња, које су придружене зракама точке S у равнини (tS), пролазе правцем t.

Узмимо точком S по вољи неку равнину τ. Ова равнина нека сијече равнине β и ρ рецимо у правцима p и q. У тој равнини узмимо точком S зраку k, која нека сијече правац q у точки Q. Правац q нека пробада зраци k придружену плоху у точкама M, N, а правац p у равнини β нека сијече у точки P. Спојимо ли једно прободиште K зраке k, с њој придруженом плохом, с точкама M, N, P, Q, онда те спојнице дају четири хармонијске зраке ради хармонијског двоомјера $(MNPQ) = -1$. Вртимо ли зраку k у равнини τ око точке S, остаје тај двоомјер хармонијски. Помакнемо ли зраку k тако, да она пролази сјециштем правацa p, q, т. ј. точком P, онда у ту точку прелазе точке K, Q и M или N, а спојнице KM, KN прелазе у правце p, q, док спојница KQ остаје у зраци $k = PS$. Спојница KP прелази у тангенту настале кривуље 3. реда у точки P, а ради хармонитета горњег двоомјера лежат ће увијек та тангента и у равнини α. Доказати се све ово може на овај начин: Равнина τ сијече зраци k придружену плоху 2. реда у некој кривуљи a 2. реда, којој ће тангенте у њеним сјециштима L_1, L_2 с чуњосјечницом c пролазити точком Q. Ово произлази из дефиниције нашег свежња. Узмимо надаље, да се точка M налази на луку $L_1 L_2$ те пресјечне кривуље a. Пустимо ли сада зраку k путовати према точки P, путоват ће у ту точку сигурно и точка Q. Будући да су точке M, K на луку $L_1 L_2$, дакле унутар кута $QL_1 L_2$, који постаје све мањи, то ће у ту точку отпутовати и точке K, M, када тај кут буде једнак нули. Ако тангента лука $L_1 L_2$ у точки M сијече правац p у точки A, онда знамо да вриједи $(L_1 L_2 PA) = -1$. За сваку зраку k точка A остаје константна. Означимо ли сјециште спојнице MK и правца p с B, онда полара те точке обзиром на чуњосјечницу a сијече правац p у некој точки C, за коју такођер вриједи $(L_1 L_2 BC) = -1$. Путује ли зрака k с точкама M, K према точки P, то ће према тој точки путовати и точка C на правцу p, а према томе и точка B према точки a, која је увијек константна. Видимо дакле, да спојница BMK, односно MK прелази у спојницу AP, т. ј. у правац p, када зрака k пролази точком P. Да зрака KQ прелази у спојницу PS, као и спојница KN у правац q, је евидентно. Ради сталности хармонијског двоомјера $(MNPQ) = -1$ мора спојница KP прећи у правац који лежи у равнини α ради $(\rho\beta\gamma\alpha) = -1$, будући да сви правци p леже у равнини β, сви правци q у равнини ρ, а све спојнице PS у равнини γ. Познато је, да гранични положај спојнице KP прелази у гранични положај тетиве KP пресјечне кривуље наше плохе с равнином τ, дакле у њену тангенту у точки P. Јер се ово збива у свакој равнини точке S, то одавле произлази, да равнина α правaца l, t тангира нашу плоху 3. реда дуж правца t. Видимо, дакле, да је правац t такав правац наше плохе, у који су се стегнула два њена обична правца.

У равнини правца l и точке S повуцимо оне зраке k, које сијеку чуњосјечницу c. Знадемо, да те зраке тангирају нашу плоху 3. реда у тим сјециштима. На тој се плохи налази и точка S, као и сјецишта тих зрака с правцем l, јер је и он на тој плохи. Будући да те зраке имају с том плохом више од три точке заједничке, излази да се оне читаве налазе на тој плохи. Поставимо ли надаље такве равнине правца l и точкама A, B те њима пресијечемо чуњосјечницу c, тад свака трансверзала правца l и чуњосјечнице c, која пролази точком A или точком B, сијече, као што знадемо, и чуњосјечницу c_1 наше плохе 3. реда. И ове трансверзале имају према томе с том плохом више него три точке заједничке, дакле и оне се налазе читаве на тој плохи. Видимо према томе, да сваком од точака S, A и B пролазе по два правца наше плохе 3. реда, који сијеку чуњосјечницу c.

Показали смо, да је правац t такав правац наше плохе 3. реда, дуж којег ју тангира равнина $(tl) = \gamma$. Свака равнина тог правца сијече нашу плоху у још једној чуњосјечници. Све те чуњосјечнице (међу њима и c, c_1) морају сјећи тај правац у исте двије точке, јер само у два његова сјецишта с чуњосјечницом c (и с чуњосјечницом c_1) има та плоха тангенцијалне равнине, које се разликују од сталне такве равнине γ. Будући да на темељу изведеног сваки правац ових двају сјецишта пробада нашу плоху 3. реда још у само једној точки, то су наведена два сјецишта двоструке точке наше плохе, а правац t је њен четверозначни правац.

Позната је чињеница, да сваком двоструком точком неке опће плохе 3. реда с двије такве точке пролазе осим оног правца, који је четверозначан, још четири правца, који су двозначни. По два између њих, из сваке двоструке точке по један, се сијеку, а могу бити коњугирано комплексни прве или друге врсте. У нашем случају открит ћемо те правце на овај начин: Равнина точака S, A, B сијече нашу плоху у кривуљи 3. реда, на којој се налази и сјециште правца t с том равнином. Свака равнина правца t сијече ту кривуљу 3. реда у још даљње двије точке, којима пролази пресјечна чуњосјечница те равнине с нашом плохом. Вртимо ли ту равнину око правца t, доћи ћемо четири пута у положај, гдје ће оне двије точке на кривуљи 3. реда у равнини (SAB) пасти скупа, т. ј. у тој се равнини пресјечна чуњосјечница претвара у два реална или имагинарна правца, јер добива једну двоструку точку. То излази из чињенице, да на кривуљи 3. реда можемо из једне њене точке повући највише четири тангенте. Код наше плохе 3. реда то значи, да се у четири равнине праваца t налазе парови правца те плохе, т. ј. правцем t можемо поставити на ту плоху четири тангенцијалне равнине. Видјели смо, да се у тим тангенцијалним равнинама пресјечна чуњосјечница распада у два правца, ради настале двоструке точке. Разумије се само по себи, да овакве тангенцијалне равнине, као и двоструке точке плохе, могу бити или реалне, или имагинарне, а у том случају добивамо имагинарне правце прве, односно друге врсте.

На тај смо начин заправо открили свих 27 праваца наше опће плохе 3. реда, јер је правац t четворозначан, њега сијеку четири пара двозначних праваца, док су правац l и парови праваца који пролазе точкама S, A и B једнозначни. Дакле,

$$4+4 \cdot 2 \cdot 2+7=27.$$

Одабирањем разних положаја за точке S, A и B, као и положаја и облика чуњосјечнице c, која може бити и имагинарна, добили би разне варијанте опћих плоха 3. реда с двије или више двоструких точака, од којих двије могу бити реалне или имагинарне. Ове ће двоструке точке бити заправо такве, у каквима правац t сијече чуњосјечницу c.

Даље нећемо овако добивене плохе разматрати посве опћено, него ћемо се ограничити само на један њихов дио, и то онај који смо споменули у уводу.

2. Узмимо, да су точке A, B и S опет по вољи смјештене у простору, али намјесто реалне коначне чуњосјечнице c узмимо сада неизмјерно далеку апсолутну чуњосјечницу простора. Наш досадањи свежањ плоха 2. реда прешао је тиме у свежањ кугала, одређен у коначности точкама A, B. Равнина ρ бит ће симетрална равнина дужине AB, а њена сјецишта са зракама снопа точке S бит ће полови неизмјерно далеке поларне равнине обзиром на плохе 2. реда, које пролазе апсолутном чуњосјечницом. Имамо дакле кугле и њихова средишта. Видимо према томе, ако имамо свежањ кугала одређен двјема точкама A, B, па средиште сваке ове кугле спојимо с истом точком S у простору и том спојницом прободемо, ту куглу, тад сва таква прободишта чине неку опћу плоху 3. реда, која пролази апсолутном чуњосјечницом. Осим тога знадемо, на темељу разматрања у точ. **1.**, да су точке A, B и S на тој плохи, као и то, да је точка S врх тангенцијалног стошца 2. реда ове плохе дуж апсолутне чуњосјечнице на тој плохи. Ова занимива особина такве плохе каже нам другим ријечима, да ће сваки њен равнински пресјек кроз точку S бити не само циркуларан, него ће имати у тој точки и свој четвероструки фокус. У тој се наиме точки сијеку имагинарне тангенте тих пресјечних кривуља постављене у њиховим апсолутним точкама. Означимо овако добивену плоху 3. реда с **P**. Сви равнински пресјеци плохе **P** кроз точку S бити ће према томе или строфоидале, или обичне строфоиде, а с овом точком као четвероструким фокусом.

Узмимо точком S једну такву равнину и пресјецимо њом симетралну равнину ρ точака A, B у правцу s. Кугле нашег свежња, којима су средишта на правцу s, чине прамен кугала, које пролазе оном кружницом точака A, B, којој је средиште на правцу s, док јој је равнина на тај правац окомита. Равнина (Ss) сијече тај прамен кугала у прамену кружница, чија су средишта на правцу s. Зраке точке S, које пролазе овим средиштем на правцу s, сијеку придружене кружнице наведеног прамена у точкама строфоидале [**4**]. То вриједи за сваку равнину точке S, а према томе одавле излази, да се плоха **P** састоји из два дијела. Точка S налази се на овалном дијелу плохе, који је читав у коначности.

Одаберимо сада у нашем свежњу онај прамен кугала, које пролазе точкама A, B и S. Средишта тих кугала налазе се на оном правцу равнине ρ, који је окомит на равнини точака A, B, S и пролази средиштем кружнице ових точака. Равнина овог правца и точке S сијече припадни прамен кугала у прамену кружница, које пролазе точком S. Производ овог прамена кружница и придруженог прамена зрака точке S, које пролазе средиштима тих кружница, распада се овдје у правац l и точку S, односно у правац l и пар изотропних праваца, који се сијеку у точки S, као што се то може закључити на темељу наших разматрања у точ. **1**. То је наиме онај пар праваца плохе **P**, који пролазе точком S, а сијеку апсолутну чуњосјечницу. Видимо, дакле, да је точка S кружна точка наше особите плохе **P**. Правац l налази се испод равнине ρ, удаљен од ње исто толико колико и точка S изнад те равнине. Будући да су наши и сноп зрака (S) и свежањ кугала, као и њихова пројективна придруженост, симетрични обзиром на равнину точака A, B, S, то мора и наша строфоидална плоха **P** бити симетрична на ту равнину. Ова симетрална равнина (A, B, S) сијече плоху **P** у строфоидали, коју ћемо звати симетралном строфоидалом те плохе. Сјециштем L правца l с овом симетралном строфоидалом пролази асимптота a ове строфоидале [**7**; стр. 38]. Правцем l можемо према томе поставити још три тангенцијалне равнине наше строфоидалне плохе, осим оне у тачки S. Двије од тих равнина тангират ће плоху **P** у тачкама A, B, а трећа у неизмјерности.[1] Будући да су сви равнински пресјеци плохе **P** циркуларни,

[1]) Јер точком L пролази асимптота симетралне строфоидале.

сијеку равнине правца l ову плоху у кружницама. У равнинама (lA) и (lB) распада се та кружница у пар изотропних праваца, који се сијеку у точкама A, B, а према томе су и те точке кружне точке наше строфоидалне плохе **P**. Видјели смо у точ. **1.**, да се пресјечне чуњосјечнице с равнинама правца l у три његове равнине, и то (lA), (lB) и (lS), распадају у два правца, док у четвртој (lt) таква два правца падају скупа у правац t. У нашем специјалном случају су до сада три споменута изотропна пара праваца она три пара, у мало прије наведене прве три равнине.

Позната је чињеница, да је код строфоидале асимптота једнако удаљена од симетрале прамена кружница из којег та кривуља настаје, као и то, да се њен четвороструки фокус налази на њој. Одавле директно излази да је равнина α правца l и асимптота a асимптотска равнина наше плохе **P**. Другим ријечима то значи, да равнина α дира дуж неизмјерно далеког правца строфоидалну плоху **P**. Неизмјерно далеки правац t плохе **P** је према томе њен четверозначан правац, а то смо већ открили за правац t у коначности на плохама у точ. **1**. Овим смо надаље открили и сва три могућа реална правца на тој плохи. Ова чињеница, да строфоидална плоха **P** има у неизмјерности четверозначан правац, дуж којег ју тангира само равнина α, казује нам надаље то, да су сви равнински пресјеци плохе **P**, који су успоредни с асимптотском равнином α, такођер кружнице. Све овакве кружнице су чуњосјечнице, које пролазе сјециштима апсолутне чуњосјечнице и неизмјерно далеког четверозначног правца, као што смо у осталом и то већ видјели на реалним и коначним дијеловима аналогних плоха у точ. **1**. Ова су два сјецишта на апсолутној чуњосјечници, као што знадемо, имагинарне неизмјерно далеке двоструке точке наше строфоидалне плохе **P**. Будући да постоје четири тангенцијалне равнине плохе **P**, које су успоредне с асимптотском равнином α, а које ради симетрије тангирају ту плоху на симетралној строфоидали, излази, да плоха **P** има даљње четири кружне точке у својој симетралној равнини. Ова су четири пара изотропних праваца наше строфоидалне плохе њени познати двозначни правци, који пролазе њеним имагинарним двоструким точкама, на њеном неизмјерно далеком четверозначном правцу.

Све резултате наших досадашњих разматрања обухватит ћемо сада оваквим ставком:

а) *Строфоидалне плохе 3. реда, које настају као производ свежња кугала двију точака A, B и снопа зрака неке точке S, које пролазе средиштима тих кугала, симетрична је обзиром на равнину (A, B, S), има асимптотску равнину и пролази апсолутном чуњо-*

сјечницом, дуж које ју тангира стожац с врхом у точки S. У симетралној равнини има та плоха седам кружних точака, у које се убрајају и точке A, B, S.

Видјели смо сприједа, да све равнине точке S сијеку плоху **P** у строфоидалама, којима је точка S четвероструки фокус. Свака равнина точке S сијече неизмјерно далеку равнину апсолутне чуњосјечнице у једном правцу, а њу само у двије точке. Све равнине овог неизмјерно далеког правца чине у коначности свезак успоредних равнина. Пресјечне кривуље наше плохе с равнима оваквог свеска имат ће своје четверостуке фокусе на једној заједничкој окомици, јер само таква пролази полом оног неизмјерно далеког правца обзиром на апсолутну чуњосјечницу, а пресјечница је имагинарног пара тангенцијалних равнина плохе **P** у тим сјециштима на апсолутној чуњосјечници. Будући да у сваком оваквом свеску успоредних равнина једна пролази и точком S, а та точка је већ у том случају четвероструки фокус, то за нашу плоху вриједи и овај ставак:

b) *Четвероструки фокус сваког равнинског пресјека строфоидалне плохе P налази се у окомитој пројекцији точке S на ту равнину.*

Из овога ставка одмах произлазе и ови даљњи ставци:

c) *Сијечемо ли строфоидалну плоху* **P** *равнинама неког правца, тад се четвероструки фокуси ових пресјечних кривуља налазе на кружници, која пролази точком S и сијече окомито тај правац у дијаметралној точки S.*

d) *Све равнине снопа равнина неке по вољи одабране точке сијеку строфоидалну плоху* **P** *у кривуљама, којих се четвероструки фокуси налазе на кугли, која пролази врхом тог снопа и точком S тако, да су те двије точке дијаметралне на тој кугли.*

Наведени ставци изричу нам очиту аналогију строфоидалне плохе **P** с куглом. На темељу ових досадањих ставака можемо о нашим строфоидалним плохама изрећи још и ове ставке:

e) *Међу пресјечним кривуљама строфоидалне плохе* **P** *с равнинама неког свеска паралелних равнина налазе се, осим оне кроз точку S, још двије строфоидале. Међу равнима неког коначног правца налазе се строфоидале у три или једној таквој равнини, осим оне која пролази точком S.*

f) *Међу равнинама неке по вољи одабране точке налази их се* ∞^1, *које строфоидалну плоху* **P** *сијеку у строфоидалама, којих се четвероструки фокуси налазе на некој просторној циклики 4. реда на тој плохи.*

Последња два ставка произлазе директно одатле, што сваки правац точке S сијече ту плоху у још двије точке, а свака кружница, која пролази точком S, сијече ју у још даљње три точке. Надаље свака кугла продире овакву плоху 3. реда у просторној кривуљи 4. реда, јер обје већ имају заједничку апсолутну чуњосјечницу.

Чуњосјечница c_1 врхова свих стожаца унутар нашег свежња кугала је имагинарна кружница у симетралној равнини точака A, B. Будући да су пресјеци строфоидалне плохе P, с равнинама успоредним с њеном асимптотском равнином, кружнице, може се на темељу ставка b) врло лако запазити, да ће сви пресјеци равнина спојница AB бити строфоидале, којих ће се четвероструки фокуси налазити на кружници плохе P која пролази точком S, а равнина јој је окомита на тој спојници.

Свака опћа дводјелна плоха 3. реда има три реална правца а осим равнине ових трију реалних праваца има она још дванаест реалних равнина које пролазе тим правцима (сваким по четири), а које дирају ту плоху (Cremona L. [1; стр. 214]). Ових дванаест равнина већ је пронађено код наших строфоидалних плоха ако се узме на знање, да два реална правца у неизмјерности падају скупа, а према томе и двије тангенцијалне равнине које њима пролазе. Другим ријечима, све четири тангенцијалне равнине плохе **P**, успоредне с асимптотском равнином, су двозначне. Видимо према томе, да је наша строфоидална плоха **P** опћа плоха 3. реда V. врсте [2; § 2 стр. 17].

Поставимо ли неку куглу тако, да јој се средиште налази у точки S, онда та кугла дира нашу плоху **P** дуж апсолутне чуњосјечнице, јер дуж ње оба та тијела имају заједнички тангецијалан стожац. Продор ове кугле с нашом плохом састоји се дакле из двоструке апсолутне чуњосјечнице и још једне реалне или имагинарне кружнице. Свака кугла средишта S продире нашу плоху у једној кружници, које равнина сијече ту плоху у још једном правцу. Будући да у коначности има та плоха само један реалан правац, и то l, то је он ос тога прамена равнина. Видимо, дакле, да наша плоха може настати и као производ прамена равнина и прамена концентричних кугала.

Одаберемо ли врх S снопа зрака негдје на спојници точака A, B, строфоидална плоха **P** постат ће ротациона. Правац l отићи ће у овом случају такођер у неизмјерност, дакле ће плоха **P** имати неизмјерно далеки инфлексиони правац, а сви пресјеци кроз точку S бит ће усправне строфоиде.

3. Претпоставимо сада, да точке A, B падну скупа у неку точку D. Производ оваквог свежња кугала са снопом зрака неке

точке S, пројективно придружени на сприједа описани начин, бит ће строфоидална плоха с двоструком точком у точки D. Равнина ρ пролази сада том точком, разумије се окомито на заједничку тангенту o свих кугала нашег свежња (o = ос свежња), а кружница c_1 овакве плохе у тој равнини распада се у пар изотропних праваца точке D.

Осим већ сприједа споменутих особина, имат ће строфоидална плоха **P** оваквог облика још и неке друге, јер равнине свеска спојнице SD, као и равнине оси o свежња кугала, сијеку ту плоху у строфоидама.

Знадемо из разматрања из точ. **2.**, да се четвероструки фокуси свих равнинских пресјека строфоидалних плоха налазе на окомитој пројекцији точке S на равнине тих пресјека. Одавле међутим излази, да ће точком S пролазити свезак равнина, које овакву плоху сијеку у строфоидама, т. ј. равнине спојнице SD, јер све равнине двоструке точке сијеку овакву строфоидалну плоху у циркуларним кривуљама рода нултога. Из сприједа изведеног излази, да ће четвероструки фокуси свих оваквих пресјека бити на некој кугли, којој је дужина SD промјер. Поставимо ли правцем l и двоструком точком D равнину, тад је та равнина окомита на спојници SD, а сијече наша плоху у правцу l и пару изотропних праваца. Наша, мало прије споменута, кугла дира ову равнину, дакле сијече плоху **P** у кривуљи која се састоји из овога пара изотропних праваца, из апсолутне чуњосјечнице и још једне кружнице. Све равнине заједничке тангенте o свих кугала нашег свежња можемо сматрати оним куглама тог свёжња, које имају бесконачно дуги полумјер. Све точке плохе **P**, које су на овим „куглама“, леже на неизмјерно далеком правцу и некој кружници, која према ономе од прије пролази точком S и сијече заједничку тангенту свежња окомито у дијаметралној точки точке S. Ово у осталом вриједи за сва три облика плоха **P**. На темељу досадањих разматрања можемо особине строфоидалних плоха оваквог облика скупити у овакву ставку:

Четвероструки фокуси равнинских пресјека строфоидалне плохе 3. реда с двоструком точком, којих равнине пролазе том точком, леже на кугли, којој је промјер удаљаност двоструке точке D до врха S имагинарног тангенцијалног стошца те плохе дуж апсолутне чуњосјечнице. Унутар ових ∞^2 циркуларних кривуља 3. реда рода нултога постоји ∞^1 строфоида, које леже у равнинама спојнице SD и у равнинама оси o свежња кугала из којих та плоха настаје. Пресјеци равнинама првог свеска имају своје четвероструке фокусе у точки S, а пресјеци равнинама другога свеска имају те фокусе *на кружници која пролази точком S, а коју ос свежња кугала сијече окомито у дијаметралној точки точке S.*

Позната је чињеница, да је свака уникурзална циркуларна кривуља 3. реда ножишна кривуља параболе [**7**; стр. 25]. Строфоида је ножишна кривуља параболе, којој је фокус на спојници четвероструког фокуса и двоструке точке тако, да четвероструки фокус располавља удаљеност између фокуса те параболе и двоструке точке строфоиде. Равналица ове параболе је успоредница с асимптотом строфоиде повучена њеном двоструком точком.

Казали смо мало прије, да су пресјеци наше строфидалне плохе с равнинама оси o свежња кугала саме строфоиде, којих се четвероструки фокуси на кружници, која иде точком S и сијече ос o свежња кугала окомито у дијаметралној точки точке S. Поставимо сада точку F на спојници DS тако, да точка S располавља дужину FD. Точком F поставимо сада другу кружницу, која споменуту ос o свежња кугала сијече исто као прва кружница, која иде точком S. Свака равнина оси o сијече нашу строфоидалну плоху у строфоиди, којој је сјециште с првом описаном кружницом њен четвероструки фокус, док је сјециште с другом кружницом фокус параболе, којој је пресјечна строфоида ножишна кривуља, за двоструку точку D као пол. Равналице тих парабола налазе се у равнини ρ двоструке точке D. Замислимо сада на свакој равнини оваквог пресјека кроз ос o постављене окомите равнине, које тангирају оне параболе у тим равнинама, којих су ножишне кривуље њихови пресјеци с плохом **P**. Све равнине овако постављене тангентама такве параболе чине неки параболичан ваљак, који ће бити једнак свим осталим таквим ваљцима јер су посве једнаке параболе из којих они настају. Те су параболе једнаке зато, што им је свима фокус од равналице једнако далеко. Јер сви ови усправни ваљци тангирају дуж својих тјемених изводница исту равнину, а те тјемене изводнице пролазе једном точком окомито испод точке F (окомито обзиром на равнину ρ), то сви ови параболични ваљци оматају ротациони параболоид. Ос тога параболоида пролази точком F окомито на равнину ρ. У равнини ρ налазе се све равналице, а у точки F фокуси свих осних пресјека овог параболоида. На темељу ових разматрања можемо овакву строфоидалну плоху 3. реда дефинирати и на овај начин:

Строфоидална плоха 3. реда с двоструком точком је ножишна плоха ротационог параболоида, ако пол лежи у равнини равналица осних пресјека тога параболоида.

На оваквој строфоидалној плохи 3. реда с двоструком точком постоје само три кружне точке, опет у њеној симетралној равнини.

4. Узмимо сада, да су точке A, B на оси o нашег свежња кугала имагинарне. Производ овог свежња кугала и снопа зрака точке S, пројективно придружених на сприједа описани начин, бит ће у овоме случају једнодјелна опћа плоха 3. реда. Ову плоху можемо замислити да је настала раздвајањем оне с двоструком точком, ако се она раскинула у двострукој точки у смислу једноплошног хиперболоида [2; § 2]. Будући да из точке L, и неизмјерно далеке точке, можемо на симетралну кривуљу ове плохе поставити четири реалне тангенте, међу којима се налази и асимптота те кривуље, видимо да ће оваква строфоидална плоха 3. реда имати само три кружне точке, у које се убраја и точка S. Тангенцијалне равнине ове плохе, које пролазе точком S, оматају познати имагинаран тангенцијални стожац дуж апсолутне чуњосјечнице и реалан тангенцијални стожац дуж кружнице c_1 ове плохе у равнини ρ.

Знадемо, да све равнине точке S сијеку ову плоху у строфоидалама, односно строфоидама. Поставимо ли точком S равнине, које тангирају кружницу c_1 у равнини ρ, тад ове равнине не само тангирају ову плоху, него је и сијеку у строфоидама, јер ти пресјеци имају двоструку точку. Одавле излази ставак:

Точком S једнодјелне строфоидалне плохе 3. реда пролази ∞^1 равнина, које оматају стожац 2. реда, а сијеку ову плоху у строфоидама с четвероструким фокусом у тој точки, док су им двоструке точке на једној кружници.

Повучемо ли код ове плохе аналогију с нашим разматрањима у точ. **1.**, видимо одмах, да њене двије тангенцијалне равнине правца l постају имагинарне, ради имагинарности точака A, B. Правци плохе у тим равнинама су према томе имагинарни правци друге врсте. Исто су тако имагинарне и двије тангенцијалне двозначне равнине неизмјерно далеког четверозначног правца, у којима се налазе даљњи имагинарни правци друге врсте на нашој плохи, и то двозначни. Видимо, дакле, да је ова плоха у истини опћа плоха 3. реда с три реална правца, и то IV. врсте, т. ј. једнодјелна.

Строфоидална плоха овог облика, као и оне до сада споменуте, бит ће ротациона, ако точку S одаберемо на реалној спојници имагинарних точака A, B.

5. На крају ћемо обновити још једну чињеницу, изведену у овој радњи, која је у вези с разноликошћу облика опћих плоха 3. реда. Код извођења свих облика таквих плоха полази F. Klein од познате опће плохе 3. реда с четири двоструке точке. Раздвајањем тих плоха у двостуким точкама у смислу једноплошног и двоплошног хиперболоида, добива он свих пет врста опћих плоха 3. реда без сингуларитета, које се у главном разликују у броју и врсти њихових имагинарних праваца. Четврта и пета врста тих плоха има само три реална правца, док су остали имагинарни прве или друге врсте. Плохе четврте врсте су једнодјелне, а оне пете врсте су дводјелне. Видјели смо, да унутар ових двију врста има наших строфоидалних плоха. Ове наше плохе имају међутим двије имагинарне двоструке точке у неизмјерности, гдје им се налазе или два, или сва три реална правца, који су стегнути у један. Чињеница, коју смо овдје жељели истаћи је та, да међу опћим плохама 3. реда IV. и V. врсте има таквих, које имају пар имагинарних двоструких точака, јер се то на темељу Klein-ових, а и осталих разматрања о опћим плохама 3. реда, не може директно закључити.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cremona L. — Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung, Berlin 1870.

[2] Klein F. — Über Flächen dritter Ordnung, *Gesamm. math. Abhandlungen*, Bd. II, S. 11—44, Berlin 1922.

[3] Majcen J. — Eine neue Erzeugungsart für verschiedene typische Formen der Flächen 3. Ordnung. *Jahresb. d. deutsch. math. Verein.* **14**, 1905.

[4] Niče V. — О строфоидали и просторној кривуљи 4. реда на кугли. *Рад Југословенске академије* **276**, стр. 109—116, 1949.

[5] Reye T. — Die Geometrie der Lage, Leipzig 1910.

[6] Steiner J. — *Gesamm. Werke*, Bd. II, S. 651—659, Berlin 1882.

[7] Wieleitner H. — Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908.

LES SURFACES STROPHOÏDALES DU 3e ORDRE

Par Vilko Niče

L'auteur a étudié et trouvé un certain nombre de propriétées d'une espèce de surfaces du 3e ordre, qu'il appelle, à cause d'une certaine analogie avec la strophoïde, surfaces strophoïdales du 3e ordre. Les surfaces strophoïdales du 2e ordre seraient des sphères. Les surfaces strophoïdales du troisième ordre sont de surfaces du troisième ordre, passant par la section conique absolue, telles que leurs plans tangents le long de la section conique absolue enveloppent un cône imaginaire du second ordre.

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ GEGENBAUER-ОВИХ ПОЛИНОМА

С. АЉАНЧИЋ (Београд)

1. Gegenbauer-ови полиноми $C_n^\nu(x)$ дефинисани су генератрисом

$$\frac{1}{(1-2hx+h^2)^\nu}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(x)\,h^n, \tag{1}$$

или помоћу

$$C_n^\nu(x)=\frac{(-1)^n}{2^n\,n!}\,\frac{(2\nu)_n}{(\nu+{}^1/_2)_n}\,(1-x^2)^{1/2-\nu}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n+\nu-1/2}\right], \tag{2}$$

где је

$$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1).$$

Кад је $\nu=m+{}^1/_2$, m цео позитиван број, они су уско повезани са Legendre-овим асоцираним функцијама прве врсте целих индекса, наиме,

$$P_n^m(x)=(-1)^m\frac{(2m)!}{2^m\,m!}(1-x^2)^{m/2}\,C_{n-m}^{m+1/2}(x),$$

те садрже као специјалан случај $(m=\nu-{}^1/_2=0)$ и Legendre-ове полиноме.

Посматрани као функције од x, Gegenbauer-ови полиноми задовољавају диференцијалну једначину хипергеометриског типа, те се могу изразити и коначним хипергеометриским редом

$$C_n^\nu(x)=\frac{\Gamma(2\nu+n)}{n!\,\Gamma(2\nu)}F\left(-n,\,n+2\nu;\;\nu+{}^1/_2;\;\frac{1-x}{2}\right). \tag{3}$$

Овде ћемо, пре свега, показати да се $C_n^\nu(\cos\theta)$, $0<\theta<\pi$, може развити, према томе које вредности узима ν, у један од следећа два тригонометриска реда:

$$C_n^\nu(\cos\theta)=$$

$$=\frac{2\,\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma^2(\nu)\,n!}(2\sin\theta)^{1-2\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k^{1-\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu}\sin(n+2k+1)\,\theta, \tag{4}$$

$$0<\theta<\pi,\quad \nu>0,\quad \nu\neq 1,2,3,\ldots$$

односно

$$C_n^\nu(\cos\theta)=$$

$$=\frac{2\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k^\nu\,a_{n+k}^{2\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu}\sin\left[(n+2\nu+2k)\theta+(1/2-\nu)\pi\right],\quad (5)$$

$$0<\theta<\pi,\quad 0<\nu<1.$$

Коефицијенти a_k^ν одређени су са

$$f_\nu(x)=(1-x)^{-\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^\nu\,x^k, \quad (6)$$

т. ј.

$$a_k^\nu=\frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+k-1)}{k!}=\frac{(\nu)_k}{k!}=\frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)\,k!}, \quad (7)$$

тако да је

$$a_k^\nu\sim\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\,k^{\nu-1}, & k\to\infty,\\[2ex] \dfrac{1}{\Gamma(k+1)}\,\nu^k, & \nu\to\infty\,.\end{cases} \quad (8)$$

Развици (4) и (5) своде се за $\nu={}^1/_2$ на класичан Heine-ов [1][1] Fourier-ов ред за Legendre-ове полиноме.

Кад је ν реално и $n\geqslant 0$, коефицијенти ових тригонометриских редова показују знатну правилност. Тако је низ коефицијената

$$c_k^\nu(n)=\frac{a_k^{1-\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu},\quad k=0,\,1,\,2,\ldots \quad (9)$$

тотално монотон за $0<\nu<1$. За $s<\nu<s+1$, s цео позитиван број, првих s чланова низа ($k=0,\ 1,\ldots,\ s-1$) осцилују, али чланови низа од $(s+1)$-ог па надаље имају сталан знак и образују тотално монотон низ.

Слично вреди и за низ коефицијената

$$d_k^\nu(n)=\frac{a_k^\nu\,a_{n+k}^{2\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu},\quad k=0,\,1,\,2,\ldots \quad (10)$$

који се јавља у тригонометриском реду (5). И тада је за $0<\nu<1$ низ $d_n^\nu(n)$, $k=0,1,\ldots$ тотално монотон, а за $-(s+1)<\nu<-s$, s цео позитиван број, такав је само његов остатак $d_k^\nu(n)$, $k=2s+2$, $2s+3,\ldots$

[1]) Бројеви у угластим заградама односе се на литературу на крају чланка.

Ослањајући се на један општи став који је недавно доказао J. Карамата [2] (в. тачку **6**), показаћемо како се из тригонометриских редова (4) и (5) може добити познати Stieltjes-ов уопштени асимптотски развитак за $C_n^\nu(\cos\theta)$

$$C_n^\nu(\cos\theta)=\frac{2}{B(\nu,\nu+n)}\sum_{\mu=0}^{l}\frac{a_\mu^\nu\,a_\mu^{1-\nu}}{(\nu+n+\mu)\,a_\mu^{\nu+n}}\,\frac{\cos\left[n\theta+(\nu+\mu)\,(\theta-\pi/2)\right]}{(2\sin\theta)^{\nu+\mu}}+o\left(\frac{1}{n^{l+1-\nu}}\right),\quad n\to\infty \tag{11}$$

униформно за $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$. Караматин став омогућује да се из тригонометриског реда који је Abel-збирљив и чији коефицијенти показују извесну правилност добије асимптотски развитак његове Abel-ове суме.

Из тригонометриског развитка (4) могу се извести и неке друге особине Gegenbauer-ових полинома $C_n^\nu(\cos\theta)$, $0<\nu<1$. Тако, ако са θ_m обележимо нуле од $C_n^\nu(\cos\theta)$ које леже у размаку $(0,\pi/2)$, њихов положај је ту одређен са

$$(m-{}^1\!/_2)\frac{\pi}{n}<\theta_m<m\frac{\pi}{n+1},\qquad m=1,2,\ldots,n'=\left[\frac{n+1}{2}\right]. \tag{12}$$

Нуле из размака $(\pi/2,\pi)$ су симетрично распоређене према $\theta=\pi/2$.

Из (4) или (5) можемо добити и неједначину

$$\frac{\Gamma(\nu)}{2^{1-\nu}}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(2\nu+n)}\,|\,C_n^\nu(\cos\theta)\,|<\frac{G}{(\sin\theta)^\nu}, \tag{13}$$

$$(0<\theta<\pi,\quad 0<\nu<1,\quad n=1,2,\ldots;\ G \text{ не зависи од } n \text{ и } \theta),$$

која претставља аналогон Stieltjes-овој неједначини за Legendre-ове полиноме.

Први од наведених резултата следи непосредно из једног општег Fejér-овог [**3**; стр. 23] става који се односи на нуле тригонометриских редова Heine-ова типа са троструко монотоним коефицијентима. Други се, пак, може добити на аналоган начин као што је Fejér [**3**; стр. 52] из Heine-ова развитка за Legendre-ове полиноме извео Stieltjes-ову неједначину.

Тачка **2** садржи још неке особине Gegenbauer-ових полинома, а у тачки **3** изводимо један одређени интеграл који ће нам доцније бити потребан. У тачкама **4.1** и **4.2** долазимо до тригонометриских развитака (4) и (5) на два различита начина, једном директним развијањем у Fourier-ов ред, а други пут полазећи од једног интегралног облика за $C_n^\nu(\cos\theta)$. О правилности коефицијената који се јављају у (4) и (5) реч је у тачки **5**. У тачки **6** изводимо асимптотски развитак (11), а у тачки **7** неједначину (13).

2. Претходно наводимо неке особине Gegenbauer-ових полинома. Користећи (2), може се показати да је

$$\int_{-1}^{+1} x^k (1-x^2)^{\nu-1/2} C_n^\nu(x)\, dx = 0, \quad k=0, 1, \ldots, n-1, \tag{14}$$

тј. ортогоналитет Gegenbauer-ових полинома.

Из (2) непосредно следи и симетрија

$$C_n^\nu(-x) = (-1)^n C_n^\nu(x). \tag{15}$$

Најзад, Gegenbauer-ови полиноми $C_n^\nu(x)$, $x = \cos\theta$, могу се приказати у облику косинусног полинома

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k^\nu a_{n-k}^\nu \cos(n-2k)\theta. \tag{16}$$

Заиста,

$$(1-2h\cos\theta+h^2)^{-\nu} = (1-he^{-\theta i})^{-\nu}(1-he^{\theta i})^{-\nu} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\nu e^{-n\theta i} h^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\nu e^{n\theta i} h^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k^\nu a_{n-k}^\nu e^{(n-2k)\theta i} \right\} h^n,$$

те је према (1)

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k^\nu a_{n-k}^\nu e^{(n-2k)\theta i},$$

што је еквивалентно са (16).

3. Да не бисмо доцније прекидали излагање, израчунаћемо овде интеграл

$$\int_0^\pi \sin^a\theta \sin b\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2^a} \sin\frac{b\pi}{2} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}, \quad R\{a\} > -1. \tag{17}$$

Полазимо од функције

$$z^{b-1}(z^{-1}-z)^a$$

и интегришемо дуж контуре која се састоји из отсечка реалне осе од -1 до $+1$ и полукруга у горњој полуравни z. Критичне сингуларитете у $z=0$ и $z=\pm 1$ обилазимо деловима кружића, тако да у унутрашњости контуре нема сингуларитета. Интеграли дуж тих кружића тежиће нули са њиховим полупречником, уколико је $R\{a+1\} > 0$ и $R\{b-a\} > 0$. (Овог последњег услова ослобађамо се на крају аналитичким продужењем). Тако остаје само

$$e^{(b-a)\pi i}\int_1^0 x^{b-a-1}(1-x^2)^a\,dx+\int_0^1 x^{b-a-1}(1-x^2)^a\,dx$$

$$+i\int_0^\pi e^{b\theta i}(-2i\sin\theta)^a\,d\theta=0,$$

одакле

$$\int_0^\pi e^{b\theta i}\sin^a\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2^{a-1}}e^{\frac{b\pi i}{2}}\sin\frac{b-a}{2}\pi\int_0^1 x^{b-a-1}(1-x^2)^a\,dx=$$

$$=\frac{1}{2^a}e^{\frac{b\pi i}{2}}\sin\frac{b-a}{2}\pi\int_0^1 x^{\frac{b-a}{2}-1}(1-x)^a\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2^a}e^{\frac{b\pi i}{2}}\sin\frac{b-a}{2}\pi\,\frac{\Gamma\left(\frac{b-a}{2}\right)\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)}=$$

$$=\frac{\pi}{2^a}e^{\frac{b\pi i}{2}}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}.$$

Одавде добивамо, сем (17), и

$$\int_0^\pi \sin^a\theta\cos b\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2^a}\cos\frac{b\pi}{2}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)},\qquad R\{a\}>-1.$$

4. 1. Да бисмо добили тригонометриски ред (4), развићемо функцију

$$\mathfrak{C}_n^\nu(\cos\theta)=(\sin\theta)^{2\nu-1}C_n^\nu(\cos\theta)$$

у размаку $(0,\pi)$ у Fourier-ов синусни ред:

$$\mathfrak{C}_n^\nu(\cos\theta)=b_1\sin\theta+\cdots+b_n\sin n\theta+b_{n+1}\sin(n+1)\theta+\cdots$$

Пре свега, примећујемо да је

$$b_1=b_2=\cdots=b_n=0.$$

Заиста,

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathfrak{C}_n^\nu(\cos\theta)\,\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\nu-1/2}\, C_n^\nu(x)\, U_{k-1}(x)\, dx = 0$$

за $k=1, 2, \ldots, n$, на основу (14), јер је $U_{k-1}(x)$ полином по x степена $k-1<n$.

С друге стране, и за $\mathfrak{C}_n^\nu(x)$ важи (15), тј.

$$\mathfrak{C}_n^\nu\{\cos(\pi-\theta)\} = (-1)^n\,\mathfrak{C}_n^\nu(\cos\theta),$$

а како и $\sin m\theta$ има сличну симетрију, то је

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{C}_n^\nu(\cos\theta)\sin m\theta\,d\theta = 0$$

кадгод су n и m оба парна или оба непарна.

Према томе, $\mathfrak{C}_n^\nu(\cos\theta)$ мора имати синусни ред облика

$$\mathfrak{C}_n^\nu(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\sin(n+2k+1)\theta, \qquad 0<\theta<\pi.$$

За коефицијенте β_k налазимо, према (16),

$$\beta_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{C}_n^\nu(\cos\theta)\sin(n+2k+1)\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2\nu-1}\sum_{m=0}^{n} a_m^\nu a_{n-m}^\nu\cos(n-2m)\theta\cdot\sin(n+2k+1)\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2\nu-1}\left\{\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n} a_m^\nu a_{n-m}^\nu\sin(2n-2m+2k+1)\theta \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n} a_m^\nu a_{n-m}^\nu\sin(2m+2k+1)\theta\right\} d\theta .$$

Како су ове две последње суме једнаке, то је

$$\beta_k = \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{n} a_m^\nu a_{n-m}^\nu\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2\nu-1}\sin(2m+2k+1)\theta\,d\theta$$

и, према (17),

$$\beta_k = \frac{\Gamma(2\nu)}{2^{2\nu-2}} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{k+m} \frac{a_m^\nu a_{n-m}^\nu}{\Gamma(\nu+k+m+1)\,\Gamma(\nu-k-m)}, \qquad \nu > 0.$$

За нас је од интереса понашање коефицијената β_k кад $n \to \infty$. Зато ћемо, служећи се једним Saalschütz-овим [5] резултатом,

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} \frac{(x)_m (y+u+n-1)_m}{(x+u)_m (y)_m} =$$
$$= \frac{\Gamma(y)\,\Gamma(y-x+n)\,\Gamma(x+u)\,\Gamma(u+n)}{\Gamma(y-x)\,\Gamma(y+n)\,\Gamma(u)\,\Gamma(x+u+n)}, \tag{18}$$

добивени израз за коефицијенте β_k дати у затвореном облику. Доводећи овај претходно на облик леве стране у (18)

$$\beta_k = \frac{(-1)^n 2^{2-2\nu}\,\Gamma(2\nu)\,\Gamma(1-\nu+k)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1+\nu+k)\,\Gamma(1-\nu-n)\,n!}\,\cdot$$
$$\cdot \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} \frac{(\nu)_m (1-\nu+k)_m}{(1+\nu+k)_m (1-\nu-n)_m}, \qquad \nu > 0,$$

налазимо коначно, примењујући (18),

$$\beta_k = \frac{(-1)^n\,\Gamma(2\nu)\,\Gamma(1-2\nu)}{2^{2\nu-2}\,\Gamma^2(\nu)\,\Gamma(1-2\nu-n)\,n!}\;\frac{\Gamma(1-\nu+k)}{\Gamma(1-\nu)\,k!}\;\frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(k+n+1)}{(\nu+k+n)\,\Gamma(\nu+k+n)} =$$
$$= \frac{\Gamma(2\nu+n)}{2^{2\nu-2}\,\Gamma^2(\nu)\,n!}\;\frac{a_k^{1-\nu}}{(\nu+k+n)\,a_{n+k}^\nu}, \qquad \nu > 0.$$

Према томе, Fourier-ов ред за $\mathfrak{C}_n^\nu(\cos\theta)$ гласи

$$\mathfrak{C}_n^\nu(\cos\theta) = \frac{\Gamma(2\nu+n)}{2^{2\nu-2}\,\Gamma^2(\nu)\,n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^{1-\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu} \sin(n+2k+1)\theta,$$

и он конвергира за $\nu > 0$ и $0 < \theta < \pi$, јер је, према (8),

$$\frac{a_k^{1-\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu} \sim \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(1-\nu)} k^{-2\nu}, \quad k \to \infty.$$

Одавде непосредно добијамо развитак (4).

Развитак (5) извешћемо из (4), прво чисто формално, а затим ћемо оправдати легитимитет изведених операција. У ту сврху написаћемо (4) у облику

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \tag{19}$$
$$= \frac{2^{2-2\nu}\,\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma^2(\nu)\,n!}\, J\left\{(\sin\theta)^{1-2\nu} e^{(n+1)\theta i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^{1-\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu} e^{2k\theta i}\right\},$$
$$\nu > 0, \; 0 < \theta < \pi.$$

Ако овде место $(\sin\theta)^{1-2\nu}$ уврстимо ред

$$(\sin\theta)^{1-2\nu} = 2^{2\nu-1} e^{(1-2\nu)(\pi/2-\theta)i} (1-e^{2\theta i})^{1-2\nu} =$$
$$= 2^{2\nu-1} e^{(1-2\nu)(\pi/2-\theta)i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{2\nu-1} e^{2k\theta i} \tag{20}$$

који конвергира за $\nu<1$ и $0<\theta<\pi$, па изможимо оба реда под знаком $J\{\}$, добићемо

$$C_n^\nu(\cos\theta)=\frac{2\,\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma^2(\nu)\,n!}\,J\left\{e^{[(n+2\nu)\theta+(1/2-\nu)\pi]i}\sum_{k=0}^{\infty}g_k\,e^{2k\theta i}\right\},\tag{21}$$

где је

$$g_k=\sum_{m=0}^{k}\frac{a_m^{1-\nu}\,a_{k-m}^{2\nu-1}}{(\nu+n+m)\,a_{n+m}^{\nu}}.$$

Израз за g_k можемо написати у облику

$$g_k=\frac{(-1)^{k+1}\,\Gamma(\nu)\,n!}{\sin 2\nu\pi\,\Gamma(2\nu-1)\,\Gamma(\nu+n+1)\,\Gamma(2-2\nu-k)\,k!}\,\cdot$$

$$\cdot\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}\frac{(1-\nu)_m\,(n+1)_m}{(\nu+n+1)_m\,(2-2\nu-k)_m},$$

и ако на десну страну применимо Saalschütz-ов сумациони образац (18), налазимо после лаке трансформације

$$g_k=\frac{\Gamma(2\nu)\,n!}{\Gamma(2\nu+n)}\,\frac{a_k^{\nu}\,a_{n+k}^{\prime\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^{\nu}}.$$

Са овом вредношћу за g_k (21) постаје

$$C_n^\nu(\cos\theta)=\frac{2\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)}\,J\left\{e^{[(n+2\nu)\theta+(1/2-\nu)\pi]\,i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k^{\nu}\,a_{n+k}^{2\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^{\nu}}\,e^{2k\theta i}\right\},\tag{22}$$

што формално претставља тригонометриски развитак (5). Примећујемо да ред који овде фигурише под знаком $J\{\ \}$ конвергира за $\nu<1$ и $0<\theta<\pi$, јер је, према (8),

$$\frac{a_k^{\nu}\,a_{n+k}^{2\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^{\nu}}\sim\frac{1}{\Gamma(2\nu)}\,k^{2\nu-2},\quad k\to\infty.$$

Према самом начину извођења, релација (22) вреди само када је $0<\nu<1$ и $0<\theta<\pi$. Јер једино уз та ограничења су редови (19) и (20), као и њихов производ (22), истовремено конвергентни, па према томе и допуштене изведене операције.

4. 2. Тригонометриске развитке (4) и (5) можемо добити и полазећи од једног интегралног обрасца за $C_n^\nu(\cos\theta)$ који претставља уопштење Stieltjes-овог интеграла за Legendre-ове полиноме:

$$C_n^\nu(\cos\theta)=\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}\left\{e^{[(2\nu+n)\theta+(1/2-\nu)\pi]\,i}\int_0^1\frac{t^{2\nu+n-1}\,dt}{(1-t)^\nu\,(1-te^{2\theta i})^\nu}\right\},\tag{23}$$

$$0<\nu<1,\quad 0<\theta<\pi.$$

Овај образац добијамо из генератрисе (1). Према Chauchy-у је, наиме,

$$C_n^\nu(\cos\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(K)}\frac{dh}{h^{n+1}\,(h-e^{\theta i})^\nu\,(h-e^{-\theta i})^\nu},$$

где контура (K) обухвата тачку $h=0$, а искључује тачке $h=e^{\pm\theta i}$. Ако је изаберемо као што је показано на слици 1 и пустимо да полупречник великог круга тежи бесконачности а малих нули, интегралу ће за $0<\nu<1$ доприносити једино праволиниски делови контуре. Они, после лаке трансформације, дају (23).

Тригонометриски ред (5) добивамо из (23) ако под интегралом развијемо $(1-te^{2\theta i})^{-\nu}$ у ред и интегришемо члан по члан. Тако налазимо

$$\int_0^1 \frac{t^{2\nu+n-1}\,dt}{(1-t)^\nu(1-te^{2\theta i})^\nu} = \int_0^1 \frac{t^{2\nu+n-1}}{(1-t)^\nu}\sum_{k=0}^{\infty} a_k^\nu e^{2k\theta i}\, t^k\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^\nu e^{2k\theta i}\int_0^1 t^{2\nu+n+k-1}(1-t)^{-\nu}\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^\nu\,\Gamma(2\nu+n+k)\,\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\nu+n+k+1)}\,e^{2k\theta i} =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k^\nu\, a_{n+k}^{2\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu}\,e^{2k\theta i},$$

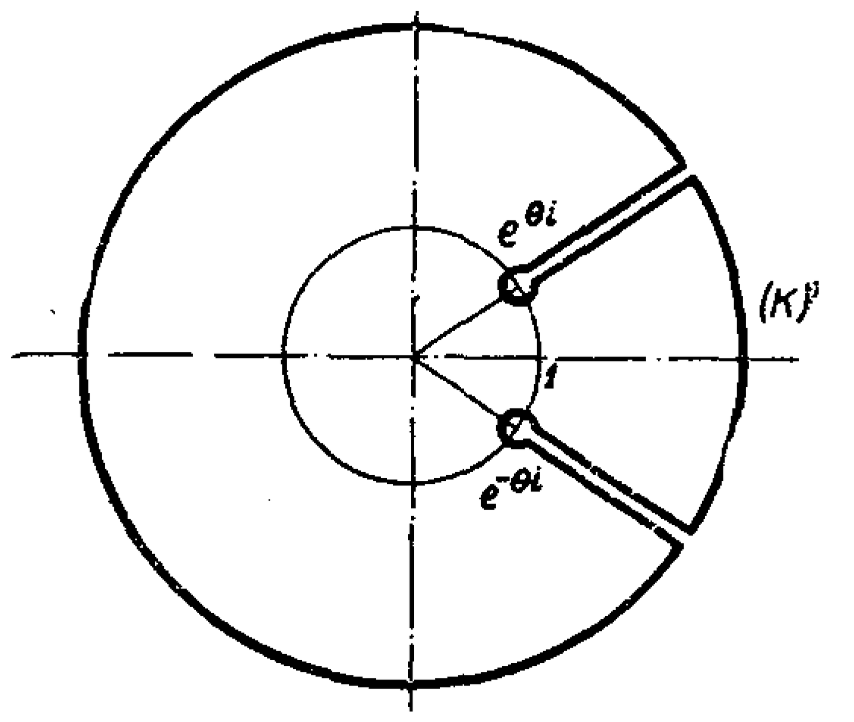
и ако ово уврстимо у (23) добивамо (5).

Остаје једино да оправдамо инверзију $\int_0^1$ и $\sum_0^\infty$. У питању је само лева околина тачке $t=1$. Међутим, ред

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^\nu e^{2k\theta i}\, t^k$$

и ту је униформно конвергентан за $\nu<1$ и $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$, јер је

$$a_k^\nu \sim \frac{1}{\Gamma(\nu)}k^{\nu-1}, \quad k\to\infty.$$



Сл. 1

Тригонометриски развитак (4) можемо сада извести из (5), на сличан начин као што смо у **4. 1** из (4) добили (5). А то се у суштини своди да уместо од интегралног обрасца (23) за $C_n^\nu(\cos\theta)$ пођемо од

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \frac{2\sin\nu\pi}{\pi(2\sin\theta)^{2\nu-1}}\,J\left\{e^{(n+1)\theta i}(1-e^{2\theta i})^{2\nu-1}\int_0^1\frac{t^{2\nu+n-1}\,dt}{(1-t)^\nu(1-te^{2\theta i})^\nu}\right\}.$$

$$0<\nu<1, \quad 0<\theta<\pi.$$

5. У овој тачки испитаћемо правилност коефицијената $c_k^\nu(n)$ (9) и $d_k^\nu(n)$ (10) који се јављају у тригонометриским развицима (4) и (5). У ту сврху раставићемо низ $c_k^\nu(n)$ на два низа

$$a_k^{1-\nu} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu} = b_k^\nu(n), \quad k=0,1,2,\ldots, \tag{24}$$

где смо за други, краткоће писања ради, увели нову ознаку. Према (7) можемо онда писати

$$a_k^{1-\nu}=\frac{B(1-\nu+k,\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}=\frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}\int_0^1 t^{k-\nu}(1-t)^{\nu-1}\,dt \tag{25}$$

и

$$b_k^{\nu}(n)=B(k+n+1,\nu)=\int_0^1 t^{k+n}(1-t)^{\nu-1}\,dt. \tag{26}$$

На основу познатог Hausdorff-овог става, наиме, да се *сваки тотално монотон низ* a_k, $k=0,1,\ldots$ *може написати у облику интеграла момената*

$$a_k=\int_0^1 t^k\,d\alpha(t),\quad k=0,1,2,\ldots,$$

где функција $\alpha(t)$ *не опада и ограничена је у* $0\leqslant t\leqslant 1$, видимо из (25) и (26) да је низ $b_k^{\nu}(n)$, $k=0,1,2,\ldots$ тотално монотон за $\nu>0$, а низ $a_k^{1-\nu}$, $k=0,1,2,\ldots$ само кад је $0<\nu<1$, јер тада конвергирају интеграли у (25) и (26) за свако $k=0,1,\ldots$ Међутим, ако је $s<\nu<s+1$, s цео позитиван број, првих s чланова овог последњег низа истина осцилују, али чланови од $(s+1)$-ог па надаље имају сталан знак. То увиђамо ако експлицитно напишемо чланове низа $a_k^{1-\nu}$, $k=0,1,2,\ldots$:

$$1,\quad \frac{(1-\nu)_1}{1!}<0,\quad \frac{(1-\nu)_2}{2!}>0,\ \ldots,\ (-1)^{s-1}\frac{(1-\nu)_{s-1}}{(s-1)!}>0,$$

$$(-1)^s\frac{(1-\nu)_s}{s!}>0,\quad (-1)^s\frac{(1-\nu)_{s+1}}{(s+1)!}>0,\ldots$$

Тотална монотонија низа $a_k^{1-\nu}$, $k=s$, $s+1,\ldots$ следи опет из (25).

За $0<\nu<1$ је, дакле, низ $c_k^{\nu}(n)$, $k=0,1,\ldots$ производ два тотално монотона низа, те се према (25) и (26) може написати у облику

$$\begin{aligned}\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)c_k^{\nu}(n)&=\int_0^1 t^{k-\nu}(1-t)^{\nu-1}\,dt\cdot\int_0^1 \tau^{k+n}(1-\tau)^{\nu-1}\,d\tau=\\&=\int_0^1\int_0^1 t^{k-\nu}\tau^{k+n}(1-t)^{\nu-1}(1-\tau)^{\nu-1}\,dt\,d\tau=\\&=\int_0^1 dx\int_x^1\left(\frac{x}{y}\right)^{k-\nu}y^{k+n-1}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{\nu-1}(1-y)^{\nu-1}\,dy=\\&=\int_0^1 x^k\,d\alpha(x),\end{aligned} \tag{27}$$

где смо ставили

$$\alpha(x)=\int_0^x \psi(\tau)\,d\tau, \tag{28}$$

са

$$\psi(x)=x^{-\nu}\int_x^1 y^n\,(y-x)^{\nu-1}\,(1-y)^{\nu-1}\,dy. \tag{29}$$

Лако је увидети да је $\psi(x)\geqslant 0$ за $0\leqslant x\leqslant 1$, јер ниједан од фактора који се јављају у интергранду није негативан за $x\leqslant y\leqslant 1$, и $0\leqslant x\leqslant 1$. Према (28), $\alpha(x)$ онда свакако не опада. С друге стране, ако је $0<\nu<1$, интеграл који фигурише у (29) ограничен је за $0\leqslant x\leqslant 1$, те је, према (28), и функција $\alpha(x)$ ограничена у $0\leqslant x\leqslant 1$. Према томе, $\alpha(x)$ задовољава услове Hausdorff-ова става, те је на основу (27) низ $c_k^\nu(n)$, $k=0,1,2\ldots$ тотално монотон. Слично се закључује ако је $s<\nu<s+1$ за низ $c_k^\nu(n)$, $k=s,\ s+1,\ldots$

На сличан начин може се испитати и низ коефицијената $d_k^\nu(n)$ (10), растављајући га на низове

$$a_k^\nu \quad \text{и} \quad \frac{a_{n+k}^{2\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu}=e_k^\nu(n),\quad k=0,1,\ldots$$

Према (7) је, наиме,

$$a_k^\nu=\frac{B(\nu+k,\,1-\nu)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)}=\frac{1}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)}\int_0^1 t^{\nu+k-1}\,(1-t)^{-\nu}\,dt \tag{30}$$

и

$$\begin{aligned} e_k^\nu(n)&=\frac{\Gamma(\nu)\,B(2\nu+n+k,\,1-\nu)}{\Gamma(2\nu)\,\Gamma(1-\nu)}=\\ &=\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)\,\Gamma(1-\nu)}\int_0^1 t^{2\nu+n+k-1}\,(1-t)^{-\nu}\,dt. \end{aligned} \tag{31}$$

Интеграл у (30) конвергира за $-k<\nu<1$, а онај у (31) за $-\frac{n+k}{2}<\nu<1$. Према томе, ако је

$$-(s+1)<\nu<-s,\quad s=-1,0,1,\ldots,$$

биће, на основу Haussdorff-ова става, низови a_k^ν, $k=s+1,\ s+2,\ldots$ и $e_k^\nu(n)$, $k=2s+2,\ 2s+3,\ldots$ тотално монотони. Слично као код низа $c_k^\nu(n)$, може се онда показати да ће за $-(s+1)<\nu<-s$, $s=-1,\ 0,\ 1,\ldots$ низ $d_k^\nu(n)$, $k=2s+2,\ 2s+3,\ldots$ бити тотално монотон.

6. У овој тачки извешћемо асимптотски развитак (11) служећи се једним ставом J. Карамате [2], који, прецизно формулисан, гласи овако:

Нека је

$$G_n(\theta)=\lim_{r=1}\sum_{k=0}^{\infty} A_k B_k(n) r^k e^{k\theta i} \tag{32}$$

и нека коефицијенти A_k *и* $B_k(n)$ *задовољавају ове услове:*

1°. *Низ* A_k, $k=0, 1, \ldots$ *је тотално монотон.*

2°. *Сваки члан низа* $B_k(n)$, $k=0, 1, \ldots$ *може се развити у асимптотски ред облика*

$$B_k(n)=\sum_{\mu=0}^{l}\frac{p_\mu(k)}{q_\mu(n)}+o\left(\frac{1}{q_l(n)}\right),\quad n\to\infty, \tag{33}$$

где низ функција $q_\mu(n)$, $\mu=0, 1, \ldots$ *са* n *све брже тежи бесконачности, тј.*

$$q_0(n)\prec q_1(n)\prec q_2(n)\prec\ldots\quad \text{кад}\ n\to\infty,$$

а

$$p_\mu(k),\quad \mu=0, 1, \ldots, l$$

су полиноми степена мањег од L. *Број* L *је одређен тако да*

3°. L-*та диференција низа* $B_k(n)$ *тежи монотоно нули, тј. од извесног* n *је*

$$\Delta^L B_k(n)\geqslant \Delta^L B_{k+1}(n)\to 0\quad \text{кад}\ k\to\infty.$$

Под наведеним условима функција $G_n(\theta)$ *има асимптотски развитак облика*

$$G_n(\theta)=\sum_{\mu=0}^{l}\frac{\Gamma_\mu(\theta)}{q_\mu(n)}+o\left(\frac{1}{q_l(n)}\right),\quad n\to\infty, \tag{34}$$

где је

$$\Gamma_\mu(\theta)=\lim_{r=1}\sum_{k=0}^{\infty} A_k p_\mu(k) r^k e^{k\theta i},\quad \mu=0, 1, \ldots, l. \tag{35}$$

Да бисмо добили асимптотски ред (11) полазимо од тригонометриских развитака (4) и (5). Први од њих написаћемо, користећи ознаку (24), у облику (32):

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma^2(\nu)\,n!}{2\,\Gamma(2\nu+n)}(2\sin\theta)^{2\nu-1}C_n^\nu(\cos\theta)&=\\ &=J\left\{e^{(n+1)\theta i}\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{1-\nu}\,b_k^\nu(n)\,e^{2k\theta i}\right\}=\\ &=J\left\{e^{(n+1)\theta i}\,S_n(2\theta)\right\},\end{aligned} \tag{36}$$

где смо ставили

$$S_n(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{1-\nu}\,b_k^\nu(n)\,e^{k\theta i}.$$

Према томе, довољно је развити $S_n(\theta)$ у асимптотски ред кад $n \to \infty$ да бисмо добили одговарајући за $C_n^\nu(\cos\theta)$

Узмимо прво случај када је $0 < \nu < 1$. Тада $S_n(\theta)$ задовољава услове које захтева Караматин став. Пре свега, коефицијенти $a_k^{1-\nu}$ и $b_k^\nu(n)$ су тада тотално монотони и, према (8),

$$b_k^\nu(n) \sim \Gamma(\nu)\, k^{-\nu}, \quad k \to \infty.$$

Значи услови 1^0 и 3^0 су испуњени, и то овај последњи за свако L. Остаје још да покажемо да се $b_k^\nu(n)$, $k = 0, 1, \ldots$ може развити у асимптотски ред облика (33). Међутим, према (26) је

$$\begin{aligned} b_k^\nu(n) &= \int_0^1 t^n \{1-(1-t)\}^k (1-t)^{\nu-1}\,dt = \\ &= \sum_{\mu=0}^{k} (-1)^\mu \binom{k}{\mu} \int_0^1 t^n (1-t)^{\nu+\mu-1}\,dt = \\ &= \sum_{\mu=0}^{k} (-1)^\mu \binom{k}{\mu} \frac{n!\,\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)} = \\ &= \frac{1}{a_n^\nu} \sum_{\mu=0}^{k} (-1)^\mu \binom{k}{\mu} \frac{a_\mu^\nu}{(\nu+n+\mu)\, a_\mu^{n+\nu}} = \\ &= \frac{1}{a_n^\nu} \left\{ \frac{1}{\nu+n} - \binom{k}{1} \frac{a_1^\nu}{(\nu+n+1)\, a_1^{\nu+n}} + \right. \\ &\quad \left. + \binom{k}{2} \frac{a_2^\nu}{(\nu+n+2)\, a_2^{\nu+n}} - \cdots \right\}. \end{aligned}$$

Водећи рачуна о (8), налазимо за $b_k^\nu(n)$

$$\begin{aligned} b_k^\nu(n) &= \frac{1}{a_n^\nu} \left\{ \frac{1}{\nu+n} - \binom{k}{1} \frac{a_1^\nu}{(\nu+n+1)\, a_1^{\nu+n}} + \binom{k}{2} \frac{a_2^\nu}{(\nu+n+2)\, a_2^{\nu+n}} - \cdots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^l \binom{k}{l} \frac{a_l^\nu}{(\nu+n+l)\, a_l^{\nu+n}} + o\left(\frac{1}{n^{l+1}}\right) \right\} = \\ &= \frac{1}{a_n^\nu} \left\{ \frac{1}{\nu+n} - \binom{k}{1} \frac{a_1^\nu}{(\nu+n+1)\, a_1^{\nu+n}} + \binom{k}{2} \frac{a_2^\nu}{(\nu+n+2)\, a_2^{\nu+n}} - \cdots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^l \binom{k}{l} \frac{a_l^\nu}{(\nu+n+l)\, a_l^{\nu+n}} \right\} + o\left(\frac{1}{n^{l+\nu}}\right), \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

тј. асимптотски развитак облика (33) са

$$p_\mu(k) = (-1)^\mu \binom{k}{\mu} a_\mu^\nu,$$

$$q_\mu(n) = (\nu+n+\mu)\, a_n^\nu\, a_\mu^{\nu+n} \sim \frac{1}{\Gamma(\nu)\,\mu!}\, n^{\mu+\nu}, \quad n \to \infty.$$

Према томе, пошто су сви услови става задовољени, $S_n(\theta)$ допушта асимптотски развитак облика (34), где је $\Gamma_\mu(\theta)$, према (35) и (6),

$$\Gamma_\mu(\theta) = \lim_{r=1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{1-\nu} p_\mu(k) r^k e^{k\theta i} =$$

$$= (-1)^\mu a_\mu^\nu \lim_{r=1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{\mu} a_k^{1-\nu} r^k e^{k\theta i} =$$

$$= (-1)^\mu a_\mu^\nu \frac{f_{1-\nu}^{(\mu)}(e^{\theta i})}{\mu!} e^{\mu\theta i} =$$

$$= (-1)^\mu a_\mu^\nu a_\mu^{1-\nu} (1 - e^{\theta i})^{\nu-\mu-1} e^{\mu\theta i}.$$

Са овом вредношћу за $\Gamma_\mu(\theta)$ асимптотски ред за $S_n(\theta)$ гласи

$$S_n(\theta) = \frac{1}{a_n^\nu} \sum_{\mu=0}^{l} (-1)^\mu \frac{a_\mu^\nu a_\mu^{1-\nu}}{(\nu+n+\mu)\, a_\mu^{\nu+n}} \frac{e^{\mu\theta i}}{(1-e^{\theta i})^{\mu-\nu+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\nu+l}}\right), \quad n \to \infty.$$

Асимптотски развитак за $C_n^\nu(\cos\theta)$ добивамо ако добивени развитак за $S_n(\theta)$ уврстимо у (36):

$$C_n^\nu(\cos\theta) =$$

$$= \frac{2\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma^2(\nu)\, n!} (2\sin\theta)^{1-2\nu} J\left\{ \sum_{\mu=0}^{l} (-1)^\mu \frac{a_\mu^\nu a_\mu^{1-\nu}}{(\nu+n+\mu)\, a_\mu^{\nu+n}} \frac{e^{(n+2\mu+1)\theta i}}{(1-e^{2\theta i})^{\mu-\nu+1}} \right\} +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n^{l-\nu+1}}\right) =$$

$$= \frac{2\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma^2(\nu)\, n!} \sum_{\mu=0}^{l} (-1)^\mu \frac{a_\mu^\nu a_\mu^{1-\nu}}{(\nu+n+\mu)\, a_\mu^{\nu+n}} \frac{J\{ i^{\mu-\nu+1} e^{(n+\nu+\mu)\theta i} \}}{(2\sin\theta)^{\nu+\mu}} + o\left(\frac{1}{n^{l-\nu+1}}\right),$$

$$n \to \infty.$$

Ако још ставимо

$$(-1)^\mu J\{ i^{\mu-\nu+1} e^{(n+\nu+\mu)\theta i} \} = J\{ i(-1)^\mu (i)^{-\nu} e^{(n+\mu+\nu)\theta i} \} =$$

$$= J\{ i\, e^{-(\mu+\nu)\pi i/2} e^{(n+\mu+\nu)\theta i} \} =$$

$$= \cos[n\theta + (\mu+\nu)(\theta - \pi/2)],$$

налазимо коначно

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \frac{2\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+n)} \sum_{\mu=0}^{l} \frac{a_\mu^\nu a_\mu^{1-\nu}}{(\nu+n+\mu)\, a_\mu^{\nu+n}} \frac{\cos[n\theta + (\mu+\nu)(\theta-\pi/2)]}{(2\sin\theta)^{\nu+\mu}}$$

$$+ o\left(\frac{1}{n^{l-\nu+1}}\right), \quad n \to \infty,$$

тј. асимптотски развитак (11).

Добивени асимптотски развитак вреди, засада, само када је $0 < \nu < 1$, јер једино тада низ коефицијената $a_k^{1-\nu}$, $k = 0, 1, \ldots$ задовољава услов о тоталној монотонији. Међутим, није тешко проширити резултат и на случај када је $s < \nu < s+1$, s цео позитиван број. Наиме, став J. Караматѐ уствари даје довољне услове за инверзију процеса $\lim\limits_{r=1} \sum\limits_{k=0}^{\infty}$ и асимптотике $(n \to \infty)$. Према томе, ако је $s < n < s+1$, s цео позитиван број, довољно је тригонометриски ред за $S_n(\theta)$ раставити на два дела, $\sum\limits_{k=0}^{s-1}$ и $\sum\limits_{k=s}^{\infty}$, па став применити на другу суму чији коефицијенти, према оном што је речено у тачки **5**, задовољавају услове о монотонији. У првој, коначној суми, инверзија је наравно дозвољена.

На сличан начин можемо, полазећи и од тригонометриског реда (5), доћи до асимптотског развитка (11).

7. Неједначину (13) ћемо извести полазећи од једног од развитака (4) или (5), и служећи се следећом особином биноминалног реда коју је први открио Fejér [**4**]:

Нека је $0 < \rho \leqslant 1$ *и*

$$\frac{1}{(1-u)^{\rho}} = \lambda_0 + \lambda_1 u + \ldots + \lambda_n u^n + \ldots$$

Тада је

$$|\lambda_0 + \lambda_1 u + \ldots + \lambda_n u^n| < \frac{G}{|1-u|^{\rho}}, \qquad (n=0,1,2,\ldots; \quad |u| \leqslant 1, \quad u \neq 1) \tag{37}$$

где константа G зависи једино од ρ.

Наиме, ако (5) напишемо, са ознаком из тачке **5**, у облику

$$C_n^{\nu}(\cos\theta) = \frac{2\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)}\, J\left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\nu}\, e_k^{\nu}(n)\, e^{[(n+2\nu+2k)\theta + (1/2-\nu)\pi]\,i}\right\},$$

биће

$$|C_n^{\nu}(\cos\theta)| \leqslant \frac{2\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)} \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\nu}\, e_k^{\nu}(n)\, z^k\right|, \qquad z = e^{2\theta i}.$$

Ако на десну страну применимо Abel-ову парцијалну сумацију и водимо рачуна о (6) $(0 < \nu < 1)$ и (37), налазимо

$$\begin{aligned} |C_n^{\nu}(\cos\theta| &\leqslant \frac{2\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \{e_k^{\nu}(n) - e_{k+1}^{\nu}(n)\}\{a_0^{\nu} + a_1^{\nu} z + \ldots + a_k^{\nu} z^k\}\right| \\ &\leqslant \frac{2\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)} \frac{1}{|1-e^{2\theta i}|^{\nu}} \sum_{k=0}^{\infty} |e_k^{\nu}(n) - e_{k+1}^{\nu}(n)|, \qquad z = e^{2\theta i}, \end{aligned}$$

и због монотоније низа $e_k^{\nu}(n)$

$$|C_n^{\nu}(\cos\theta)| \leqslant \frac{\Gamma(2\nu)\, e_0^{\nu}(n)}{2^{\nu-1}\,\Gamma(n)} \frac{1}{(\sin\theta)^{\nu}}$$

што претставља неједначину (13).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Heine E. — Handbuch der Kugelfunctionen, Bd. I, 2. Aufl., Berlin 1878.

[2] Karamata J. — Sur certains développements asymptotiques avec application aux polynomes de Legendre, *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe,* t. IV (у штампи).

[3] Fejér L. — Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, *Trans. of the Amer. Math. Soc.* 29, p. 19—59, 1936.

[4] Fejér L. — Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome, *Math. Zeitschr.* 24, S.285—298, 1925.

[5] Saalschütz L. — Eine Summationsformel, *Zeitschr. f. Math. u. Physik* 35, S. 186—188, 1890.

BEITRAG ZUR THEORIE DER GEGENBAUERSCHEN POLYNOME

S. Aljančić

Für die Gegenbauerschen Polynome $C_n^\nu(x)$, $x=\cos\theta$, die mit (1) definiert sind, gelten zwei trigonometrische Reihen (4) und (5) mit (6). Deren Koeffizienten, (9) und (10), haben eine interessante Struktur. So, zum Beispiel, oszillieren für $s<\nu<s+1$, s ganz, die ersten s Glieder der Koeffizientenfolge $c_k^\nu(n)$, $k=0, 1, \ldots$, während der Rest der Folge dasselbe Vorzeichen hat und totalmonoton ist. Von den trigonometrischen Reihen (4) und (5) ausgehend, werden einige Eigenschaften der Gegenbauerschen Polynome bewiesen: 1° Auf Grund eines unlängst von J. Karamata [2] bewiesenen allgemeinen Satzes über die asymptotische Entwicklung von Funktionen, die durch im Abelschen Sinne summierbare trigonometrische Reihen dargestellt sind, wird die bekannte asymtotische Entwicklng (11) für $C_n^\nu(\cos\theta)$, $n\to\infty$ bewiesen. 2° Die Ungleichung (13), die ein Analogon der Stieltjesschen Abschätzung für die Legendreschen Polynome darstellt, wird mittels einer Fejérschen [5] Ungleichung für die Binominalreihe bewiesen.

ЈЕДНО ПООПЋЕЊЕ ИНТЕГРАЛКОСИНУСА

ДАНИЛО БЛАНУША (Загреб)

1. У рјешењу задатка 8 Весник I, 3—4, стр. 149—153, показао сам, да се функција

$$S_p(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu)!(2\nu+p+1)}, \tag{1}$$

која је тиме дефинирана за сваки $p\neq-(2n+1)$, $n=0,1,2,3,\ldots$, може изразити у облику интеграла

$$x^p\,S_p(x)=\int t^p\cos t\,dt+K, \tag{2}$$

где је K константа интеграције, и да је

$$\lim_{x=\infty}x^p\,S_p(x)=\frac{\pi}{2\Gamma(-p)\cos\frac{p\pi}{2}}\quad\text{за } p<0 \text{ и } p\neq-1,\,-3,\,-5,\ldots \tag{3}$$

Како за $p<0$ интеграл (2) конвергира, кад горња граница тежи према неизмјерно, можемо га написати у облику

$$x^p\,S_p(x)=-\int_x^{\infty}t^p\cos t\,dt+K, \tag{4}$$

гдје је интеграл очито конвергентан и стога тежи к нули за $x\to\infty$, те добивамо, према (3), да је

$$K=\frac{\pi}{2\Gamma(-p)\cos\frac{p\pi}{2}}.$$

Дакле, према (1), за интеграл у (4) вриједи развој

$$\int_x^{\infty}t^p\cos t\,dt=\frac{\pi}{2\Gamma(-p)\cos\frac{p\pi}{2}}-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\,x^{2\nu+p+1}}{(2\nu)!\,(2\nu+p+1)}. \tag{5}$$

За негативне лихе вриједности од p постаје константа K неизмјерна, а исто тако један члан реда потенција. Провест ћемо за тај случај гранични пријелаз, кад $p \to -(2n+1)$. Ставимо

$$p = -(2n+1+\varepsilon),$$

па добивамо

$$-\int_x^\infty \frac{\cos t}{t^{2n+1}}\,dt = \lim_{\varepsilon=0}\left\{\frac{(-1)^{n+1}\pi}{2\,\Gamma(2n+1+\varepsilon)\cos\frac{(1+\varepsilon)\pi}{2}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\,\varepsilon\, x^{\varepsilon}}\right\} +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu)!\,(2n-2\nu)\,x^{2n-2\nu}} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\,x^{2\nu-2n}}{(2\nu)!\,(2\nu-2n)}. \tag{6}$$

Даље је

$$\lim_{\varepsilon=0}\left\{\frac{(-1)^{n+1}\pi}{2\,\Gamma(2n+1+\varepsilon)\cos\frac{(1+\varepsilon)\pi}{2}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\,\varepsilon\, x^{\varepsilon}}\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon=0}\frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(2n+1+\varepsilon)\,x^{\varepsilon}}\lim_{\varepsilon=0}\frac{\pi(2n)!\,\varepsilon\, x^{\varepsilon} + 2\,\Gamma(2n+1+\varepsilon)\cos\frac{(1+\varepsilon)\pi}{2}}{2\,(2n)!\,\varepsilon\cos\frac{(1+\varepsilon)\pi}{2}} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\left[-\lg x + \frac{\Gamma'(2n+1)}{(2n)!}\right],$$

што излази двократном примјеном l'Hospitalova правила. Но познато је, да вриједи [1; стр. 213][1].

$$\frac{d\lg\Gamma(n)}{dn} = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1},$$

гдје је $\gamma = 0{,}5772\ldots$ Eulerova (или Mascheroni-јева) константа. Излази стога

$$\frac{\Gamma'(2n+1)}{(2n)!} = \frac{\Gamma'(2n+1)}{\Gamma(2n+1)} = \frac{d\lg\Gamma(2n+1)}{d(2n+1)} = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

тако да развој (6) гласи

$$-\int_x^\infty \frac{\cos t}{t^{2n+1}}\,dt = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\lg x + \gamma - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}\right) +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu)!\,(2n-2\nu)\,x^{2n-2\nu}} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+n}\,x^{2\nu}}{(2\nu+2n)!\,2\nu}. \tag{7}$$

---

[1]) Први број у угластим заградама односи се на литературу на крају чланка.

За $n=0$ излази познати развој за интегралкосинус:

$$Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = \lg x + \gamma + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{2\nu\,(2\nu)!}.$$

2. Још ћемо размотрити интеграл (5) за позитивне вриједности од p укључиво нуле. У том случају је интеграл дивергентан, али је збројив. У аналогији с A-збројивим редовима [**2**; стр. 448] називат ћемо A-збројивим неки интеграл

$$\int_a^x f(t)\,dt \quad (x \to \infty),$$

ако постоји

$$\lim_{\sigma=+0} \int_a^\infty e^{-\sigma t} f(t)\,dt,$$

а тада ћемо ставити

$$A\text{-}\lim \int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{\sigma=+0} \int_a^\infty e^{-\sigma t} f(t)\,dt, \tag{8}$$

био интеграл с лијеве стране дивергентан или не. Познато је, да је релација (8) исправна без „A-lim", ако је интеграл конвергентан, јер је испуњен захтјев перманенције за ту врсту збројивости [**3**; стр. 388].

Полазимо од релације [**4**; стр. 159]

$$\int_0^\infty e^{-\sigma x} x^p \cos x\,dx = \frac{\Gamma(p+1}{(\sigma^2+1)^{(p+1)/2}} \cos\left[(p+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{\sigma}\right],$$

која у смислу дефиниције (8), кад $\sigma \to +0$, даје

$$A\text{-}\lim \int_0^\infty t^p \cos t\,dt = \Gamma(p+1)\cos\frac{(p+1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2\,\Gamma(-p)\cos\frac{p\pi}{2}}, \tag{9}$$

што очито вриједи за сваки $p > -1$. Будући да за тај случај можемо очито интегралу у (2) дати границе од 0 до x, уз $K=0$, то излази даље

$$A\text{-}\lim \int_0^\infty t^p \cos t\,dt = \int_0^x t^p \cos t\,dt + A\text{-}\lim \int_x^\infty t^p \cos t\,dt =$$

$$= x^p S_p(x) + A\text{-}\lim \int_x^\infty t^p \cos t\,dt,$$

дакле је, према (9),

$$A\text{-lim}\int_{x}^{\infty} t^p \cos t\, dt = \frac{\pi}{2\,\Gamma(-p)\cos\frac{p\pi}{2}} - \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu x^{2\nu+p+1}}{(2\nu)!\,(2\nu+p+1)}. \tag{10}$$

Како су с лијеве стране формуле (5) и (10) исте, то је са (10) добивена опћа формула, која вриједи за све реалне вриједности од p, јер за $p<0$ интеграл конвергира већ у обичном смислу, а за $p=-(2n+1)$ треба узети граничну вриједност израза (10), кад $p\to-(2n+1)$, а која је дана формулом (7). (За цијеле позитивне вриједности од p или 0 треба узети први од израза (9), или пустити у другом изразу, т. ј. у (10), да $p\to0$ или к цијелом позитивном броју).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Serret-Scheffers — Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung II, Leipzig und Berlin 1911.

[2] K. Knopp — Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin 1922.

[3] E. W. Hobson — The theory of functions of a real variable II, Cambridge 1926.

[4] G. Lejeune-Dirichlet — Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, Braunschweig 1904.

EINE VERALLGEMEINERUNG DES INTEGRALKOSINUS

D. Blanuša

Es wird die Formel (10) aufgestellt, die für alle reellen Werte von p gilt. Für $p<0$ konvergiert das Integral im gewöhnlichen Sinne, für $p=-(2n+1)$ ist der durch (7) gegebene Grenzwert zu nehmen. Für positive ganze Werte von p und für $p=0$ ist der erste Ausdruck in (9) zu benützen. Für $p=-1$ erhält man den bekannten Ausdruck für den Integralkosinus.

О КОНВЕРГЕНЦИЈИ ЈЕДНОГ НИЗА ПОЛИНОМА

РАНКО БОЈАНИЋ (Београд)

Нека је

$$
\begin{aligned}
&p_1(x, \alpha) = x(1-x), \\
&p''_{n+1}(x, \alpha) + \alpha p_n(x, \alpha) = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

и

$$p_n(0, \alpha) = p_n(1, \alpha) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Уопштавајући и пооштравајући Picard-ов став о егзистенцији решења граничног задатка

$$y'' = f(x, y); \qquad y(0) = y(1) = 0,$$

В. Г. Авакумовић [1][1] је доказао да је за $|\alpha| < \pi^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(1/2, \alpha) = \frac{2}{\alpha}\left\{\frac{1}{\cos\sqrt{\alpha}/2} - 1\right\}, \tag{2}$$

а затим је на основу тога доказао да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x, \alpha) \tag{3}$$

конвергира за свако x размака $(0, 1)$ ако је $0 \leqslant \alpha < \pi^2$.[2]

Авакумовићев доказ обрасца (2) почива на принципу аналитичког продужења. Према томе, остало је отворено питање да ли се образац (2) може доказати без употребе теорије функција комплексне променљиве, и да ли се конвергенција реда (3) може добити независно од тог обрасца.

У овом чланку доказаћу (2) елементарним путем. Штавише, из обрасца (6), који уствари претставља Fourier-ов ред полинома $p_n(x, \alpha)$, непосредно следи да ред (3) униформно конвергира за $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant \alpha < \pi^2$, тако да образац (2), уколико

---

[1]) Бројеви у угластим заградама односе се на литературу на крају чланка.

[2]) У Авакумовићевој расправи уместо $p_n(x, \alpha)$ једноставности ради стављено је $p_n(x)$. Специјално, $p_n(1/2, \alpha) = m_n(\alpha)$.

се ради само о конвергенцији тог реда, није чак ни потребан. Осим тога, из доказа се види да се овим поступком може добити Fourier-ов ред функција $p_n(x, \alpha)$, дефинисаних обрасцима

$$p_1(x, \alpha) = H(x),$$
$$p''_{n+1}(x, \alpha) + \alpha p_n(x, \alpha) = 0$$
$$p_n(0, \alpha) = p_n(1, \alpha) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

при чему се за функцију $H(x)$ претпоставља само да се може развити у Fourier-ов ред (образац (5)).

У суштини реалног доказа обрасца (2) лежи развијање језгра интегралне једначине, која одговара граничном задатку (1), у Fourier-ов ред (Mercer-ов став).

Доказ. Диференцијалну једначину

$$p''_{n+1}(x, \alpha) + \alpha p_n(x, \alpha) = 0$$

заједно са граничним условима

$$p_n(0, \alpha) = p_n(1, \alpha) = 0$$

можемо изразити овом интегралном једначином

$$p_{n+1}(x, \alpha) = \alpha(1 - x)\int_0^x t p_n(t, \alpha)\, dt + \alpha x \int_x^1 (1 - t)\, p_n(t, \alpha)\, dt,$$

односно

$$p_{n+1}(x, \alpha) = \frac{\alpha}{2}\int_0^1 (x + t - |x - t| - 2xt)\, p_n(t, \alpha)\, dt.$$

Како је

$$x + t - |x - t| - 2xt = 4\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\pi x \sin \nu\pi t}{(\nu\pi)^2},$$

то је

$$p_{n+1}(x, \alpha) = 2\alpha \int_0^1 p_n(t, \alpha) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\pi x \sin \nu\pi t}{(\nu\pi)^2}\, dt.$$

Међутим, ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\pi x \sin \nu\pi t}{(\nu\pi)^2}$$

униформно конвергира, па се може интегрисати члан по члан. На тај начин добијамо

$$p_{n+1}(x, \alpha) = 2\alpha \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\pi x}{(\nu\pi)^2} \int_0^1 p_n(t, \alpha) \sin \nu\pi t\, dt.$$

Означимо са $a_{n,\nu}$ Fourier-ов коефицијент функције $p_n(x, \alpha)$, тј. ставимо

$$a_{n,\nu} = 2\int_0^1 p_n(t, \alpha)\sin \nu\pi t\, dt.$$

Тада је

$$p_{n+1}(x, \alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha}{(\nu\pi)^2} a_{n,\nu} \sin \nu\pi x.$$

На основу познатог става о једнозначности Fourier-овог развитка функције $p_{n+1}(x, \alpha)$ добијамо да је

$$a_{n+1,\nu} = \frac{\alpha}{(\nu\pi)^2} a_{n,\nu}.$$

Одавде непосредно следи да је

$$a_{n,\nu} = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\right)^{2n-2} \frac{a_{1,\nu}}{\nu^{2n-2}}. \tag{4}$$

Према томе је

$$p_n(x, \alpha) = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\right)^{2n-2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{1,\nu}}{\nu^{2n-2}} \sin \nu\pi x, \tag{5}$$

при чему је

$$a_{1,\nu} = 2\int_0^1 p_1(t, \alpha)\sin \nu\pi t\, dt.$$

У специјалном случају, кад је $p_1(x, \alpha) = x(1-x)$, биће

$$a_{1,\nu} = \frac{4}{(\nu\pi)^3}(1 - \cos \nu\pi),$$

па је, према (4),

$$a_{n,\nu} = \frac{4}{\alpha\pi}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\right)^{2n} \frac{1-\cos\nu\pi}{\nu^{2n+1}}.$$

Ако је $\nu = 2k$, онда је $1 - \cos 2k\pi = 0$, а ако је $\nu = 2k+1$ онда је $1 - \cos(2k+1)\pi = 2$. Према томе је

$$a_{n,2k} = 0, \qquad a_{n,2k+1} = \frac{8}{\alpha\pi}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\right)^{2n} \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}},$$

тако да је Fourier-ов ред функције $p_n(x, \alpha)$ коначно

$$p_n(x, \alpha) = \frac{8}{\alpha\pi}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^{2n+1}}. \tag{6}$$

Како је

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^{2n+1}}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} = c,$$

то је

$$p_n(x, \alpha) \leqslant \frac{8c}{\alpha\pi}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\right)^{2n},$$

па према томе ред (3) униформно конвергира за свако x размака $(0, 1)$ ако је $0 \leqslant \alpha < \pi^2$.

Да бисмо најзад добили образац (2), довољно је да у (6) ставимо $x = 1/2$. Тада је

$$p_n(1/2, \alpha) = \frac{8}{\alpha\pi}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}.$$

Како је [2; књ. II_2 стр. 133]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}} = \frac{(-1)^n}{2n!} \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}} E_{2n},$$

где су E_{2n} Euler-ови бројеви, то је

$$p_n(1/2, \alpha) = \frac{2}{\alpha} \frac{(-1)^n}{2n!}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{2n} E_{2n}.$$

Отуда следи

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(1/2, \alpha) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{2n} E_{2n},$$

односно

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(1/2, \alpha) = \frac{2}{\alpha}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{2n} E_{2n} - 1\right\}.$$

Коначно је [2; књ. II_1 стр. 313]

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(1/2, \alpha) = \frac{2}{\alpha}\left\{\frac{1}{\cos\sqrt{\alpha}/2} - 1\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Авакумовић — a) Сукцесивна апроксимација и нуле интеграла диференцијалних једначина другог реда, *Зборник радова Математичког Института САН*, 1, стр. 1—16, 1951; b) Über die Randwertaufgabe zweiter Ordnung. *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe*, t. IV (у штампи).

[2] Р. Кашанин — Виша математика, Београд 1949—50.

ÜBER DIE KONVERGENZ EINER FOLGE VON POLYNOMEN

Ranko Bojanić

Der Verfasser beweist auf elementare Weise einen Satz, den Herr V. G. Avakumović ([1, b], Hilfssatz) unter Benutzung funktionentheoretischer Mittel bewiesen hat.

О ЕГЗИСТЕНЦИЈИ РЕШЕЊА ЈЕДНЕ КЛАСЕ ИМПЛИЦИТНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА

РАНКО БОЈАНИЋ (Београд)

1. Постоје углавном два различита поступка за испитивање егзистенције решења имплицитне диференцијалне једначине

$$x' - f(t, x, x') = 0\,.$$

Један поступак заснива се на теорији имплицитних функција, а састоји се у томе да се испита под којим се претпоставкама о функцији $f(t, x, x')$ претходна једначина може решити по x' [**1**; стр. 151—170][1]. Други поступак је онај који се употребљава кад се тражи не само егзистенција решења него и само решење; то је поступак сукцесивне апроксимације. Један став те врсте дао је F. A. Valentine [**2**]. Његов став гласи:

Нека је у области (A, B, B') *дефинисаној неједначинама*

$$|t - t_0| \leqslant A\,, \quad |x - x_0| \leqslant B\,, \quad |x' - x_0'| \leqslant B'$$

функција $f(t, x, x')$ *непрекидна и*

$$|f(t, x, x')| \leqslant M\,.$$

Претпоставимо да постоје позитивне константе ε, L *и* $K\,(K < 1)$, *такве да је за свако* t, x, x' *области* (A, B, B')

$$|f(t, \bar{x}, \bar{x}') - f(t, \underline{x}, \underline{x}')| \leqslant L\,|\bar{x} - \underline{x}| + K\,|\bar{x}' - \underline{x}'|\,, \tag{1}$$

$$|f(t, x_0, x_0') - f(t_0, x_0, x_0')| \leqslant \varepsilon < (1 - K)\,B' \tag{2}$$

и да је

$$x_0' = f(t_0, x_0, x_0')\,.$$

Тада постоји једно и само једно решење почетног задатка

$$x' = f(t, x, x'); \quad x(t_0) = x_0\,, \quad x'(t_0) = x_0' \tag{3}$$

дефинисано у размаку $|t - t_0| \leqslant D$, *где је*

$$D = \min\left\{A, \frac{B}{M}, \frac{B'(1 - K) - \varepsilon}{LM}\right\}. \tag{4}$$

То решење може се добити методом сукцесивне апроксимације.

---

1) Бројеви у угластим заградама односе се на литературу на крају чланка.

Овде ћемо дати један други доказ овог става који може да послужи као илустрација једног општег поступка за свођење нелинеарних проблема на линеарне. Тај поступак може се применити код граничних задатака нелинеарних диференцијалних једначина другог реда [3; a, b], затим код нелинеарних интегралних једначина са позитивним језгром, као и код нелинеарних парцијалних диференцијалних једначина елиптичког типа.

2. *Доказ.* Сукцесивне апроксимације почетног задатка (3) дефинисане су обрасцем

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\{t, x_{n-1}(t), x'_{n-1}(t)\}\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Једноставности ради претпоставимо да је $t > t_0$. Доказаћемо прво да функције $x_n(t)$ и $x_n'(t)$ припадају области (D, B, B') дефинисаној неједначинама

$$t - t_0 \leqslant D, \quad |x - x_0| \leqslant B, \quad |x' - x_0'| \leqslant B',$$

при чему је D дато обрасцем (4).

Функције $x_1(t)$ и $x_1'(t)$ припадају области (D, B, B') јер је

$$|x_1(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(t, x_0, x_0')\, dt \right| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(t, x_0, x_0')|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M(t - t_0) \leqslant MD \leqslant B,$$

$$|x_1'(t) - x_0'| = |f(t, x_0, x_0') - f(t_0, x_0, x_0')| < \varepsilon < B'.$$

Претпоставимо да функције $x_n(t)$ и $x_n'(t)$ припадају области (D, B, B'). Тада је

$$|x_{n+1}(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(t, x_n, x_n')\, dt \right| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(t, x_n, x_n')|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M(t - t_0) \leqslant MD \leqslant B.$$

Даље, на основу (1) и (2) је

$$|x'_{n+1}(t) - x_0'| = |f(t, x_n, x_n') - f(t_0, x_0, x_0')| \leqslant$$

$$\leqslant |f(t, x_n, x_n') - f(t, x_0, x_0')| + |f(t, x_0, x_0') - f(t_0, x_0, x_0')| \leqslant$$

$$\leqslant L\,|x_n - x_0| + K\,|x_n' - x_0'| + \varepsilon.$$

Ако је

$$|x'_{n+1}(t) - x_0'| \leqslant |x_n(t) - x_0'|$$

за $t-t_0 \leqslant D$, тада $x'_{n+1}(t)$ лежи у области (D, B, B'). Претпоставимо да постоји једно t у размаку $t-t_0 \leqslant D$ за које је

$$|x'_{n+1}(t) - x_0'| > |x_n'(t) - x_0'|.$$

Тада је

$$|x'_{n+1} - x_0'| \leqslant L\,|x_n - x_0| + K\,|x_n' - x_0'| + \varepsilon$$

$$< L\,|x_n - x_0| + K\,|x'_{n+1} - x_0'| + \varepsilon,$$

тј.

$$|x'_{n+1} - x_0'| < \frac{\varepsilon + L\,|x_n - x_0|}{1-K} < \frac{\varepsilon + LMD}{1-K} \leqslant B'.$$

Тиме смо потпуном индукцијом доказали да функције $x_n(t)$ и $x_n'(t)$ дефинисане обрасцем (5) припадају области (D, B, B').

Остало је још да докажемо да $x_n(t)$ конвергира решењу почетног задатка (3). Како је

$$|x_1(t) - x_0| \leqslant M(t-t_0) \leqslant 2M(t-t_0)$$

и

$$|x_1'(t) - x_0'| \leqslant |f(t, x_0, x_0') - f(t_0, x_0, x_0')| \leqslant 2M,$$

то стављајући

$$p_1(t) = 2M(t-t_0)$$

и

$$q_1(t) = 2M$$

добијамо да је

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leqslant p_1(t)$$

и

$$|x_1'(t) - x_0'(t)| \leqslant q_1(t).$$

Претпоставимо сада да је

$$\left.\begin{aligned} &|x_\nu(t) - x_{\nu-1}(t)| \leqslant p_\nu(t), \\ &|x_\nu'(t) - x'_{\nu-1}(t)| \leqslant q_\nu(t), \end{aligned}\right\} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Доказаћемо најпре да из (6) следи

$$\begin{aligned} &|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant p_{n+1}(t) \\ &|x'_{n+1}(t) - x_n'(t)| \leqslant q_{n+1}(t) \end{aligned} \tag{7}$$

ако погодно дефинишемо функције $p_n(t)$ и $q_n(t)$, а одатле непосредно следи да неједначине (7) важе за свако n.

Како је на основу (1) и (6):

$$|x_{n+1}(t)-x_n(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(t, x_n, x_n')-f(t, x_{n-1}, x'_{n-1})|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \{L\,|x_n-x_{n-1}|+K\,|x_n'-x'_{n-1}|\}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \{L\, p_n(t)+K\, q_n(t)\}\, dt$$

и

$$|x'_{n+1}(t)-x_n'(t)| \leqslant |f(t, x_n, x_n')-f(t, x_{n-1}, x'_{n-1})| \leqslant$$

$$\leqslant L\,|x_n-x_{n-1}|+K\,|x_n'-x'_{n-1}| \leqslant$$

$$\leqslant L\, p_n(t)+K\, q_n(t),$$

то да би из (6) следило (7) треба функције $p_n(t)$ и $q_n(t)$ да дефинишемо тако да буде

$$p_{n+1}(t)=\int_{t_0}^{t} \{L\, p_n(t)+K\, q_n(t)\}\, dt$$

$$q_{n+1}(t)=L\, p_n(t)+K\, q_n(t).$$

Одавде видимо да су све функције $p_n(t)$ и $q_n(t)$ позитивне, јер су функције $p_1(t)$ и $q_1(t)$ позитивне, и да је

$$q_n(t)=p_n'(t),$$

тако да за функције $p_n(t)$ добијамо рекурентни образац

$$p_1(t)=2M(t-t_0),$$

$$p_{n+1}(t)=\int_{t_0}^{t} \{L\, p_n(t)+K\, p_n'(t)\}\, dt, \quad n=1, 2, \ldots$$

односно

$$p_1(t)=2M(t-t_0),$$

$$p'_{n+1}(t)=K\, p_n'(t)+L\, p_n(t); \quad p_n(t_0)=0, \quad n=1, 2, \ldots \tag{8}$$

Решење ове једначине је полином n-тог степена

$$p_n(t)=2M\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu} L^{\nu} K^{n-\nu-1}\frac{(t-t_0)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}.$$

Из

$$x_n(t) = x_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \{ x_\nu(t) - x_{\nu-1}(t) \},$$

$$x_n'(t) = x_0' + \sum_{\nu=1}^{n} \{ x_\nu'(t) - x'_{\nu-1}(t) \},$$

видимо да је за доказ конвергенције функција $x_n(t)$ и $x_n'(t)$ довољно да докажемо да конвергирају редови

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu(t) \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu'(t),$$

јер је

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \{ x_\nu(t) - x_{\nu-1}(t) \} \right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} | x_\nu(t) - x_{\nu-1}(t) | \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu(t)$$

и

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu'(t) - x'_{\nu-1}(t) \} \right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} | x_\nu'(t) - x'_{\nu-1}(t) | \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu'(t).$$

Ставимо

$$P_n(t) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(t), \qquad P_n'(t) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu'(t), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Доказаћемо прво да низови (9) конвергирају за довољно мало $t - t_0$. То непосредно следи из

$$p_n(t) = 2M \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} L^\nu K^{n-\nu-1} \frac{(t-t_0)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \leqslant$$

$$\leqslant 2M \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} L^\nu K^{n-\nu-1} (t-t_0)^{\nu+1} =$$

$$\leqslant 2M (t-t_0) \{ L(t-t_0) + K \}^{n-1},$$

односно

$$p_n'(t) = 2M \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} L^\nu K^{n-\nu-1} \frac{(t-t_0)^\nu}{\nu!} \leqslant$$

$$\leqslant 2M \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} L^\nu K^{n-\nu-1} (t-t_0)^\nu =$$

$$\leqslant 2M \{ L(t-t_0) + K \}^{n-1},$$

јер с обзиром да је $L > 0$ и $0 < K < 1$, $t - t_0$ можемо увек изабрати тако мало да $L(t-t_0) + K$ буде мање од јединице.

Сада можемо да покажемо да низови (9) конвергирају за свако t. Сабирањем једначина (8) добијамо

$$P'_{n+1}(t) - p_1'(t) = K P_n'(t) + L P_n(t); \quad P_n(t_0) = 0,$$

односно

$$P'_{n+1}(t) = 2M + K P_n'(t) + L P_n(t); \quad P_n(t_0) = 0, \tag{10}$$

јер је $p_1(t) = 2M(t-t_0)$. За довољно мало $t-t_0$, $\left(t-t_0 < \frac{1-K}{L}\right)$ биће

$$\lim_{n=\infty} P_n(t) = P(t), \quad \lim_{n=\infty} P_n'(t) = P'(t),$$

и кад у једначини (10) пустимо да $n \to \infty$ она постаје

$$P'(t) - \frac{L}{1-K} P(t) = \frac{2M}{1-K}; \quad P(t_0) = 0.$$

Њено решење је

$$P(t) = \frac{2M}{L}\left\{e^{\frac{L}{1-K}(t-t_0)} - 1\right\},$$

па на основу принципа о аналитичком продужењу редови

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu(t) = P(t) \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu'(t) = P'(t)$$

конвергирају за свако t ако је $0 < K < 1$. Према томе, $x_n(t)$ и $x_n'(t)$ конвергирају ка некој граничној функцији $x(t)$ односно $x'(t)$ кад $n \to \infty$. Лако се може показати да је $x(t)$ решење постављеног задатка. На уобичајени начин види се да је ово решење једнозначно одређено почетним условима.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lawrence M. Graves, — The Theory of Functions of Real Variables, New York and London 1947.

[2] F. A. Valentine — On the convergence of an iteration process for the differential equation $x' = f(t, x, x')$. *Seminar Reports in Mathematics* (Los Angelos), p. 77—84, 1944.

[3] В. Г. Авакумовић, — а) Сукцесивна апроксимација и нуле интеграла диференцијалних једначина другог реда. *Зборник радова Математичког Института САН* **1**, стр. 1—16, 1951; b) Über die Randwertaufgabe zweiter Ordnung. *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe,* t. IV (у штампи).

EIN EXISTENZSATZ ÜBER DIE LÖSUNGEN EINER KLASSE IMPLIZITER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

Ranko Bojanić

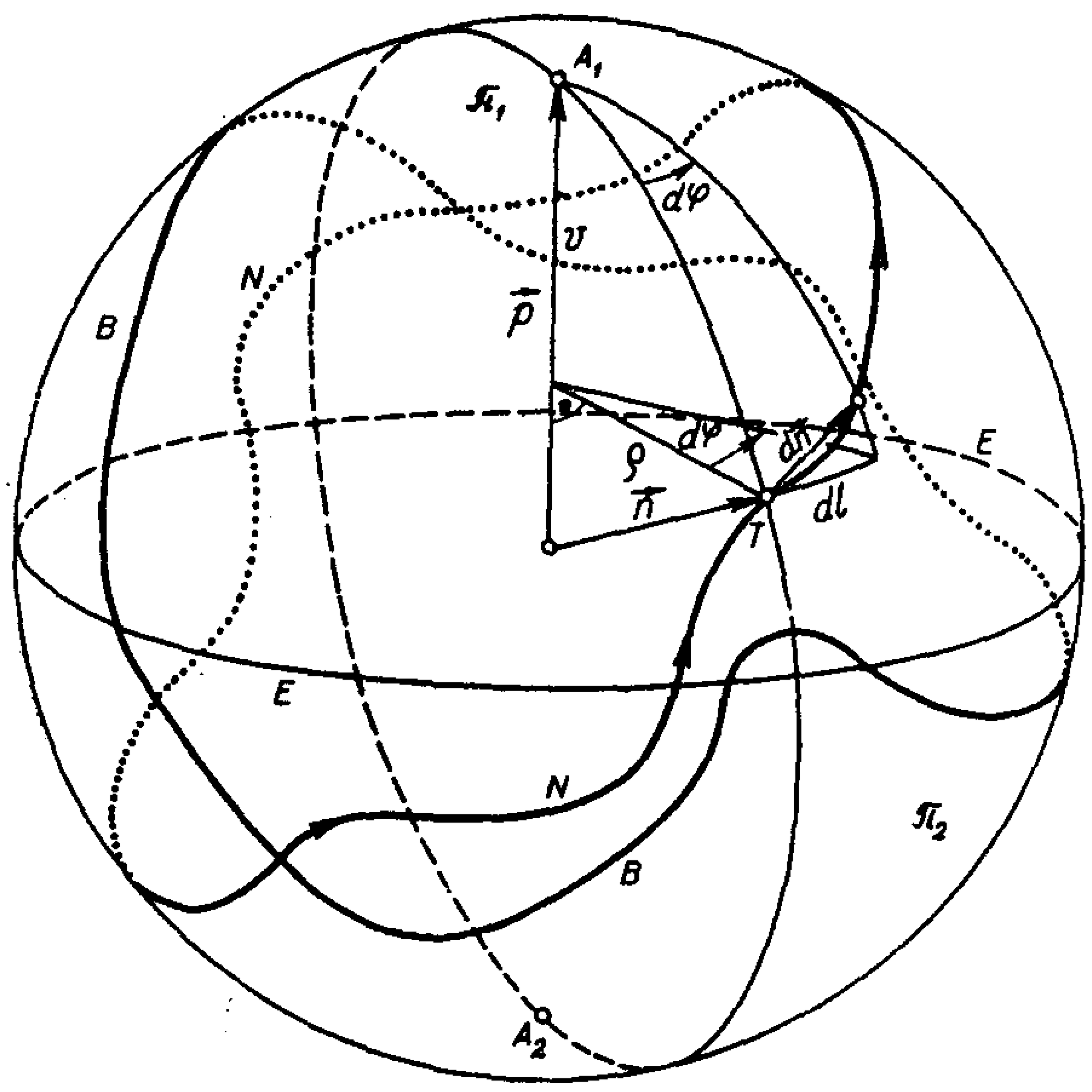
Unter Benutzung einer modifizierten Methode der schrittweisen Annäherungen (wie in [**3**; b]) wird ein Beweis eines Satzes des Herrn F. A. Valentine gegeben.

ДОКАЗ ЈАКОБИЈЕВОГ ТЕОРЕМА О СФЕРНОЈ СЛИЦИ ГЛАВНИХ НОРМАЛА ЗАТВОРЕНЕ КРИВУЉЕ

СТАНКО БИЛИНСКИ (Загреб)

Нека је C затворена кривуља у простору без сингуларних точака, а N нека је сферна слика њезиних главних нормала. Претпостављамо да је и кривуља N без двоструких точака и да дијели јединичну куглу на два једноставно-сувисла подручја Π_1 и Π_2. Показат ћемо, да тада оба ова подручја имају једнаку површину.[1]

Одаберимо у ту сврху на јединичној кугли сферне слике N било коју чврсту точку A_1 подручја Π_1 као један (сјеверни) „пол“ те кугле. Избор пола A_1 нека је само тиме ограничен, да дијаметрално супротна точка, тј. други (јужни) пол A_2, припада подручју Π_2. (Није тешко разабрати, да је то уз горње претпоставке увијек могуће учинити). Нека је пол A_1 одређен константним радијвектором $\mathbf{p}$. Нека



Сл. 1

је надаље куглина плоха оријентирана. Кривуљу C ћемо тада тако оријентирати, да је припадном оријентацијом кривуље N подручје Π_1 позитивно оријентирано. Обиђе ли точка T једном цијелу кривуљу N у позитивном смислу, мањи од лукова $\widehat{A_1T}$ главног круга

[1]) C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke, Bd VII., p. 39.

кугле ће при том једанпут позитивно описати цијелу површину подручја Π_1.

Ако је v висина калоте јединичне кугле, површина оног сектора те калоте, који припада централном куту φ, износи $v\varphi$, па је према томе површина P_1 подручја Π_1 једнака

$$P_1 = \int\limits_N v\, d\varphi \tag{1}$$

Нека је $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ једнаџба кривуље C, а $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$ једнаџба кривуље N, гдје је s дуљина лука на кривуљи C.

Ако је $T(s)$ точка кривуље N одређена радијвектором $\mathbf{n}$, бит ће $\frac{\mathbf{p}\times\mathbf{n}}{|\mathbf{p}\times\mathbf{n}|}$ јединични вектор, који у точки T одређује позитивни смјер географске паралеле. Тад је пројекција dl вектора $d\mathbf{n}$ у смјер географске паралеле једнака $\frac{\mathbf{p}\times\mathbf{n}}{|\mathbf{p}\times\mathbf{n}|}\cdot d\mathbf{n}$.

Дакле је

$$dl = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{n}, d\mathbf{n})}{|\mathbf{p}\times\mathbf{n}|}, \tag{2}$$

Надаље је

$$dl = \rho\, d\varphi, \tag{3}$$

гдје је

$$\rho = |\mathbf{p}\times\mathbf{n}|. \tag{4}$$

Ради (3), (4) и (2) бит ће дакле

$$d\varphi = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{n}, d\mathbf{n})}{(\mathbf{p}\times\mathbf{n})^2}. \tag{5}$$

Будући да је осим тога

$$v = 1 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{n}, \tag{6}$$

то према (5), (6), и (1) излази

$$P_1 = \int\limits_C \frac{1-\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}}{(\mathbf{p}\times\mathbf{n})^2}(\mathbf{p}, \mathbf{n}, d\mathbf{n}). \tag{7}$$

Пол A_2 је одређен радијвектором $(-\mathbf{p})$. Будући да је подручје Π_1 кривуљом N позитивно оријентирано, иста оријентација кривуље N придаје подручју Π_2 негативну оријентацију. Тако добивамо за површину P_2 подручја Π_2 израз

$$P_2 = \int\limits_C \frac{1+\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}}{(\mathbf{p}\times\mathbf{n})^2}(\mathbf{p}, \mathbf{n}, d\mathbf{n}). \tag{8}$$

Означимо ли сада

$$P_2 - P_1 = 2J, \tag{9}$$

онда је према (7) и (8)

$$J = \int_{\bar{C}} \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}}{(\mathbf{p}\times\mathbf{n})^2}(\mathbf{p}, \mathbf{n}, d\mathbf{n}). \tag{10}$$

Докажемо ли да је вриједност интеграла (10) једнака нули, бит ће ради (9) тиме и Јакобијев теорем доказан.

Примјеном Frenet-ових формула

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \varkappa\mathbf{n},$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\varkappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b},$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n}$$

излази из (10) редом

$$J = \int_{\bar{C}} \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}}{(\mathbf{p}\times\mathbf{n})^2}(\mathbf{p}, \mathbf{n}, -\varkappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b})\,ds =$$

$$= \int_{\bar{C}} \frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\cdot(\mathbf{p}\cdot\mathbf{b})\varkappa + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\cdot(\mathbf{p}\cdot\mathbf{t})\tau}{(\mathbf{p}\times\mathbf{n})^2}\,ds =$$

$$= \int_{\bar{C}} \frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{b})\,d(\mathbf{p}\cdot\mathbf{t}) - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{t})\,d(\mathbf{p}\cdot\mathbf{b})}{[\mathbf{p}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{t})]^2}.$$

Будући да је $\mathbf{p}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{t}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{p}\cdot\mathbf{t}) - \mathbf{t}\cdot(\mathbf{p}\cdot\mathbf{b})$, можемо даље писати

$$J = \int_{\bar{C}} \frac{\dfrac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{b})\,d(\mathbf{p}\cdot\mathbf{t}) - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{t})\,d(\mathbf{p}\cdot\mathbf{b})}{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{b})^2}}{1 + \left(\dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{t}}{\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}}\right)^2} = \int_{\bar{C}} \frac{d\left(\dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{t}}{\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}}\right)}{1 + \left(\dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{t}}{\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}}\right)^2},$$

па је дакле

$$J = \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{t}}{\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}}\bigg|_{s_1}^{s_1+L}, \tag{11}$$

гдје је $T_1(s_1)$ било која точка кривуље C, а L дуљина лука цијеле те кривуље. Но L је онда период векторских функција $\mathbf{t}$ и $\mathbf{b}$, а ради тога и период функције $\dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{t}}{\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}}$.

Ипак не можемо одатле одмах закључити, да је вриједност (11) интеграла J увијек једнака нули. Ради многозначности функције arc tg постоји наиме могућност да је та вриједност једнака неком многократнику од π.

Но овдје ћемо сада показати, да се након једног обиласка око цијеле кривуље C долази и опет до исте детерминације функције arc tg $\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{t}}{\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}}$, па да према томе интеграл J доиста ишчезава.

Ако кривуља C не лежи у једној равнини, бит ће и кривуља B, т. ј. њезина сферна слика бинормале, нека затворена сферна кривуља. Будући да сферна слика тангенте T и сферна слика бинормале B нигдје не могу за исту вриједност параметра s сјећи екватор E, нигдје не може функција $\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{t}}{\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}}$ бити неодређена, а сваки пут, кад кривуља B пресијече екватор E, пријећи ће arc tg $\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{t}}{\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}}$ преко неизмјерности на сусједну детерминацију. Али B је непрекидна затворена кривуља, па колико год пута она пресијецајући екватор прелази с једне куглине полутке на другу, толико се пута и враћа натраг на исту полутку, док не стигне на почетну точку. Ради тога ћемо се, пошавши од било које детерминације функције arc tg $\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{t}}{\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}}$, након једног обиласка око цијеле кривуље C при повратку на почетну точку увијек вратити с почетном детерминацијом. Зато је у сваком случају $J=0$ и Јакобијев теорем тиме доказан.

SUR UN THÉORÈME DE JACOBI

Par Stanko Bilinski

Sans faire intervenir explicitement le théorème de Gauss-Bonett, l'auteur démontre le théorème de Jacobi, à savoir que:

L'image sphérique de la normale principale d'une courbe fermée régulière divise la surface de la sphère en deux parties égales.

ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА ПОЈМА ДАРБУОВА ВЕКТОРА И ЛАНКРЕОВА СТАВА ЗА РИМАНОВ ПРОСТОР

ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ

У овом чланку ћемо показати шта у Римановом простору V_N од N димензија, чија је метрика одређена метричком формом

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1}$$

која у општем случају може бити и индефинитна, одговара појму Дарбуовог вектора из диференцијалне геометрије тродимензионог Еуклидовог простора и како се уопштава тзв. Ланкреов став.

Ово питање је у тесној вези са Френеовим обрасцима које је за Риманов простор позитивно дефинитне метрике генералисао Блашке (Blaschke) [1]. Данас је питање Френеових образаца за сваки Риманов простор произвољне метрике потпуно пречишћено и излаже се и у модерним уџбеницима као што то напр., чини Синџ (Synge) [2]. Стога, пре но што пређемо на решавање проблема који смо поставили и који, уколико је нама познато, досад није решен, изнећемо укратко и генерализацију Френеових образаца, јер се наше излагање непосредно на то надовезује а и што ћемо тако учинити само наше излагање јаснијим.

Уочимо ради тога неку криву C у Римановом простору V_N и узмимо да његова метричка форма (1) може бити индефинитна, да одмах обухватимо најопштији случај. Та крива C нека буде одређена једначинама

$$x^i = x^i(s) \tag{2}$$

где је s лук криве мерен од одређене тачке. Тада је

$$\frac{dx^i}{ds} = t^i_{(1)} \tag{3}$$

јединични вектор (орт) *тангенте* те криве, па ће бити

$$a_{ij}\, t^i_{(1)}\, t^j_{(1)} = t_{(1)\,i}\, t^i_{(1)} = \varepsilon_1 \tag{4}$$

или

$$\varepsilon_1\, t_{(1)i}\, t^i_{(1)} = 1\,, \tag{4'}$$

где је ε_1 тзв. *индикатор* смера тангенте и може бити $+1$ или -1. У случају позитивно дефинитне метрике биће ε_1 увек једнако $+1$. Разумљиво је да је јединични вектор дефинисан у Римановом простору индефинитне метрике само за она померања из уочене тачке, кад је $ds \neq 0$, тј. кад се не ради о нула померању.

Апсолутним (Бјанкијевим) диференцирањем једначине (4) по луку s добићемо

$$t_{(1)i}\, \frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = 0\,, \tag{5}$$

што показује да је вектор $\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s}$ управан на тангенти криве у уоченој тачки. Јединични вектор $t^i_{(2)}$ вектора $\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s}$ зове се јединични вектор *прве нормале*. Интезитет тог вектора, тј.

$$\left| \frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} \right| = \varkappa_1$$

зове се *прва кривина* уочене криве C. Према томе биће

$$\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = \varkappa_1\, t^i_{(2)} \tag{6}$$

и

$$\varepsilon_2\, t_{(2)i}\, t^i_{(2)} = 1\,, \tag{7}$$

где је сад ε_2 индикатор прве нормале. Образац (6) је *први Френеов образац* у општем Римановом простору.

Из једначине (7) апсолутним диференцирањем добијамо

$$t_{(2)i}\, \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = 0\,, \tag{8}$$

одакле се види да је вектор $\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s}$ управан на првој нормали, а на њој је управан и орт тангенте $t^i_{(1)}$, тј.

$$t_{(1)i}\, t^i_{(2)} = 0\,. \tag{9}$$

Према томе, вектор $\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s}$ може се разложити у две компоненте: једну у правцу тангенте и другу у правцу управном на $t^i_{(1)}$ и $t^i_{(2)}$

чији ћемо орт обележити са $t^i_{(3)}$, тако да буде

$$\varepsilon_3 \, t_{(3)\,i} \, t^i_{(3)} = 1 \,. \tag{10}$$

Ако интензитет компоненте вектора $\dfrac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s}$ у правцу $t^i_{(3)}$ обележимо са $\varkappa_2$, може се написати

$$\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = \varkappa_2 \, t^i_{(3)} + \alpha \, t^i_{(1)} \,, \tag{11}$$

где је α скалар који треба одредити. Множењем ове једначине са $t_{(1)\,i}$ добићемо на основу претпоставке о управности $t^i_{(1)}$ и $t^i_{(3)}$,

$$t_{(1)\,i} \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = \alpha \, \varepsilon_1 \,,$$

а из (9) апсолутним диференцирањем с обзиром на (6) добијамо

$$t_{(1)\,i} \, \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = - \, t^i_{(2)} \frac{\delta t_{(1)\,i}}{\delta s} = - \, t_{(2)\,i} \frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} =$$

$$= - \, \varkappa_1 \, t_{(2)\,i} \, t^i_{(2)} = - \, \varepsilon_2 \, \varkappa_1 = \alpha \, \varepsilon_1 \,,$$

одакле је

$$\alpha = - \, \varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \, \varkappa_1 \,.$$

Кад се у (11) унесе ова вредност за α, добиће се *други Френеов образац*

$$\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = \varkappa_2 \, t^i_{(3)} - \varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \, \varkappa_1 \, t^i_{(1)} \,. \tag{12}$$

Овде је $t^i_{(3)}$ јединични вектор *друге нормале* криве C, а $\varkappa_2$ је њена *друга кривина* (која се у простору од три димензије зове и *торзија*),

Ако овај поступак наставимо, па једначину (10) апсолутно диференцирамо по s, добићемо

$$t_{(3)\,i} \, \frac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s} = 0 \,, \tag{13}$$

што показује да је вектор $\dfrac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s}$ управан на вектору $t_{(3)\,i}$. Знамо да је поред тога вектор $t^i_{(3)}$ нормалан на векторима $t^i_{(1)}$ и $t^i_{(2)}$, те се вектор $\frac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s}$ може разложити у две компоненте: једну у правцу вектора $t^i_{(2)}$ и другу у правцу нормалном на тродимензиони простор одређен векторима $t^i_{(1)}$, $t^i_{(2)}$ и $t^i_{(3)}$, тј. може написати

$$\frac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s} = \varkappa_3 t^i_{(4)} + \beta t^i_{(2)}, \tag{14}$$

где је $t^i_{(4)}$ орт нормале на векторима $t^i_{(1)}$, $t^i_{(2)}$ и $t^i_{(3)}$, па задовољава услов

$$\varepsilon_3 t_{(3)i} t^i_{(3)} = 1 \tag{15}$$

и зове се јединични вектор *треће нормале*. Скалар $\varkappa_3$ је *трећа кривина* криве C, а β скалар који треба одредити. После множења једначине (14) са $t_{(2)i}$, а кад се узме у обзир да је по претпоставци

$$t_{(2)i} t^i_{(4)} = 0, \tag{16}$$

добиће се

$$t_{(2)i} \frac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s} = \varepsilon_2 \beta.$$

Да бисмо овде одредили β, диференцираћемо апсолутно једначину

$$t_{(2)i} t^i_{(3)} = 0, \tag{16'}$$

па ћемо, кад се узме у обзир (12) и да су сви вектори $t^i_{(1)}$, $t^i_{(2)}$, $t^i_{(3)}$ и $t^i_{(4)}$ ортонормирани, добити

$$t_{(2)i} \frac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s} = - t^i_{(3)} \frac{\delta t_{(2)i}}{\delta s} = - t_{(3)i} \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = - \varepsilon_3 \varkappa_2 = \varepsilon_2 \beta,$$

одакле следи

$$\beta = - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varkappa_2 .$$

Уношењем ове вредности за β у једначини (14) добија се *трећи Френеов образац*

$$\frac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s} = \varkappa_3 t^i_{(4)} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varkappa_2 t^i_{(2)} . \tag{17}$$

Ако се овај сад по својој структури јасан поступак конструисања ортонормираних вектора $t^i_{(h)}$ продужи, може се у општем случају за *h-ти Френеов образац* написати

$$\frac{\delta t^i_{(h)}}{\delta s} = \varkappa_h t^i_{(h+1)} - \varepsilon_{h-1} \varepsilon_h \varkappa_{h-1} t^i_{(h-1)} , \tag{18}$$

при чему је

$$t_{(k)i}\, t^i_{(l)} = \varepsilon_k\, \delta_{kl} = \begin{cases} \varepsilon_k & \text{за } k = l \\ 0 & \text{за } k \neq l, \end{cases} \tag{19}$$

за $h = 1, 2, \ldots, N-1$. При томе је по договору

$$\varkappa_0 = \varkappa_N = 0. \tag{20}$$

Овде је $\varkappa_h$ *h-ша кривина* криве C, а $t^i_{(h)}$ орт $(h-1)$-е *нормале* те криве.

На крају ћемо написати и закључни Френеов образац за Риманов простор V_N од N димензија. Њега је лако добити, кад се у (18) стави $h = N$ и узме у обзир (20). Он гласи

$$\frac{\delta t^i_{(N)}}{\delta s} = -\varepsilon_{N-1}\, \varepsilon_N\, \varkappa_{N-1}\, t^i_{(N-1)}. \tag{21}$$

У овом извођењу претпостављено је да су свих $N-1$ кривина различите од нуле и онда се може конструисати потпуно одређени N-едар ортонормираних вектора $t^i_{(k)}$ — *природни N-едар* криве C у Римановом простору V_N. Ако је, међутим, ма која од кривина, напр. $\varkappa_M$ $(M < N)$, једнака нули, описани поступак конструисања ортонормираних вектора се прекида и $N - M$ осталих јединичних вектора остају неодређени.

Да пређемо на сам наш проблем, уочимо детерминанту $|t^i_{(k)}|$. С обзиром на једначине (19) ова детерминанта је ортогонална, тј.

$$|t^i_{(k)}| = \pm 1, \tag{22}$$

јер је систем ортонормираних вектора $t^i_{(k)}$ локални Декартов правоугли N-едар. Једначине (19) изражавају услов да су вектори колона (k и l су индекси колона) у тој детерминанти ортонормирани. Међутим, у таквој детерминанти се $t_{(k)i}$ може сматрати као кофактор елемента $t^i_{(k)}$ у детерминанти $|t^i_{(k)}|$ подељен вредношћу саме те детерминанте (што уосталом или не мења тај кофактор или мења само знак, према томе је ли њена вредност $+1$ или -1). Стога се увек може једначини (19) написати аналогна једначина за врсте у облику

$$\sum_k t_{(k)i}\, t^j_{(k)} = \varepsilon_i\, \delta^j_i = \begin{cases} \varepsilon_i & \text{за } i = j \\ 0 & \text{за } i \neq j. \end{cases} \tag{23}$$

Извод неког од ових ортонормираних вектора, напр. јединичног вектора $t_{(h)i}$, у правцу другог неког од тих вектора, рецимо $t^i_{(l)}$, биће по дефиницији израз

$$t_{(h)i,j}\, t^j_{(l)}\,.$$

Пројекција овако добијеног вектора са слободним индексом i на неки трећи јединични вектор нашег система, напр. $t^i_{(k)}$, даће скаларну инваријанту

$$\gamma_{(hkl)} = t_{(h)i,j}\, t^i_{(k)}\, t^j_{(l)}. \tag{24}$$

Ове скаларне инваријанте $\gamma_{(hkl)}$, одређене у вези са системом ортонормираних вектора $t^i_{(k)}$, зову се *Ричијеви коефицијенти ротације*. Индекси h, k, l овде не означују тензорску природу, већ само означују редни број вектора који се појављују у изразу са десне стране у (24) и стога су стављени у заграду. При томе је, по договору, први индекс — индекс вектора чији се извод тражи, други је индекс вектора на који се пројицира, а трећи је индекс вектора у чијем се правцу одређује извод.

Ричијеви коефицијенти образују систем скаларних инваријаната који је антисиметричан у односу на прва два индекса, што је познато, тј. увек је

$$\gamma_{(hkl)} = -\gamma_{(khl)} \tag{25}$$

и

$$\gamma_{(hhl)} = 0. \tag{26}$$

Релација (24) која дефинише Ричијеве коефицијенте ротације може се, како је познато, написати и у облику

$$\gamma_{(hkl)} = t^i_{(h),j}\, t_{(k)i}\, t^j_{(l)}, \tag{27}$$

одакле се за $l=1$ добија

$$\gamma_{(hk1)} = t^i_{(k),j}\, t_{(k)i}\, t^j_{(1)}. \tag{28}$$

Како за апсолутно диференцирање увек вреди

$$\frac{\delta t^i_{(h)}}{\delta s} = t^i_{(h),j}\, \frac{dx^j}{ds} = t^i_{(h),j}\, t^i_{(1)}, \tag{29}$$

биће

$$\gamma_{(hk1)} = \frac{\delta t^i_{(h)}}{\delta s}\, t_{(k)i}\,. \tag{30}$$

За антисиметрични систем Ричијевих коефицијената ротације $\gamma_{(hkl)}$, који је другог реда, увешћемо ознаку ω_{hk}, тј. ставићемо

$$\gamma_{(hkl)} = \omega_{hk}, \tag{31}$$

па ће бити

$$\omega_{hk} = -\omega_{kh}. \tag{32}$$

Овај антисиметрични систем ω_{hk} звaћемо засад *Дарбуов оператор.*

Поред антисиметричности систем ω_{hk} има још једну нарочиту особину. Наиме, из једначине (30) се на основу једначина (18) добија

$$\omega_{hk} = [\varkappa_h\, t^i_{(h+1)} - \varepsilon_{h-1}\, \varepsilon_h\, \varkappa_{h-1}\, t^i_{(h-1)}]\, t_{(k)\, i},$$

а одатле на основу (19) проистиче да ће бити

$$\omega_{h\, h+1} = \varepsilon_{h+1}\, \varkappa_h, \qquad \omega_{h\, h-1} = -\varepsilon_h\, \varkappa_{h-1}. \tag{33}$$

Према томе, само оне координате Дарбуовог оператора ω_{hk} различите су од нуле чији се индекси разликују међусобно за јединицу, а све остале су једнаке нули. Матрица овог Дарбуовог оператора изгледаће стога

$$\{\omega_{hk}\} = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 0 & \varepsilon_2 \varkappa_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 \varkappa_1 & 0 & \varepsilon_3 \varkappa_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_3 \varkappa_2 & 0 & \varepsilon_4 \varkappa_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_N \varkappa_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon_N \varkappa_{N-1} & 0 \end{array} \right\}. \tag{34}$$

Укупан број координата које могу бити различите и од нуле и међу собом износи код Дарбуовог оператора у општем случају $N-1$.

Занимљиво је приметити да кад је N непаран број ($N = 2p+1$, где је p позитиван цео број) вредност детерминанте $|\omega_{hk}|$ увек је једнака нули. За N паран број ($N = 2p$) њена вредност није негативна и једнака је производу квадрата кривина са непарним индексима, тј. у том случају ће бити

$$|\omega_{hk}| = \varkappa_1^2\, \varkappa_3^2 \cdots \varkappa_{2p-1}^2, \tag{35}$$

што је лако проверити.

Назвали смо за први мах систем ω_{hk} оператором, јер су му елементи $\varkappa_i$ $(i=1, 2, \ldots, N-1)$, а то су кривине криве C у посматраном Римановом простору. У нашем излагању се претпоставља да су ове кривине различите од нуле, јер се остали случајеви лако изводе одатле. Кривине $\varkappa_i$ су променљиве од тачке до тачке, оне су функције положаја, али су независне од избора координатног система референције. Међутим, очигледно је да се овај систем вредности може схватити и као систем координата антисиметричног тензора, који је у свакој тачки криве C одређен из услова да су му координате у односу на локални природни N-едар референције бројно и по димензији једнаке кривинама уочене криве у тој тачки. У том смислу се ω_{hk} може сматрати као антисиметрични двоструки коваријантни тензор, који ћемо назвати *Дарбуов тензор* придружен датој кривој C у Римановом простору V_N од N димензија.

У тродимензионом Еуклидовом простору (чија је метрика наравно позитивно дефинитна) наш се Дарбуов тензор своди на тензор трећег реда

$$\{\omega_{hk}\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \varkappa_1 & 0 \\ -\varkappa_1 & 0 & \varkappa_2 \\ 0 & -\varkappa_2 & 0 \end{array} \right\}, \tag{36}$$

коме се на познати начин у том простору може координирати помоћу e-система релативни вектор

$$\mathfrak{d} = \{ d^i \}$$

једначином

$$d^i = \frac{1}{2} e^{ijk} \omega_{jk}. \tag{37}$$

Кад се узме у обзир особина (33) координата Дарбуовог тензора, увиђа се одмах да ће бити

$$\mathfrak{d} = \{\varkappa_2, 0, \varkappa_1\}, \tag{38}$$

што се може написати и у облику

$$d^i = \varkappa_2 \, t^i_{(1)} + \varkappa_1 \, t^i_{(3)}, \tag{39}$$

а то је познати Дарбуов вектор који увек лежи у ректификационој равни уочене тродимензионе криве.

Према томе, Дарбуов тензор ω_{hk} одговара у Римановом простору V_N појму Дарбуовог вектора из диференцијалне геометрије тродимензионог Еуклидовог простора. Дарбуов тензор је генерализација појма Дарбуовог вектора. Међутим, из ових излагања је јасно да и у тродимензионом простору иза тзв. Дарбуовог вектора стоји антисиметрични тензор другог реда као и у општем случају ма ког броја димензија, само што се у општем случају овом не може координирати никакав вектор.

Шта геометриски значе координате Дарбуовог тензора то смо видели, а сада ћемо показати и њихово кинематичко тумачење, јер Ричијеви коефицијенти ротације имају своје кинематичко значење, одакле им име потиче. У том циљу уочимо на кривој C поред локалног система ортонормираних вектора $t^i_{(k)}$ и неки јединични вектор ξ^i ($\xi^i \xi_i = 1$) који се дуж криве C паралелно помера, тј. који дуж криве C задовољава услов

$$\xi^i_{,j}\, t^j_{(1)} = 0\,. \tag{40}$$

Косинус угла $\theta_{(K)}$ између јединичног вектора ξ^i и ма ког од јединичних вектора система, напр. јединичног вектора $t^i_{(K)}$, биће одређен обрасцем

$$\cos\theta_{(K)} = \xi^i\, t_{(K)i}\,. \tag{41}$$

Ако се одреди извод ове једначине у правцу криве, тј. у правцу јединичног вектора тангенте $t^i_{(1)}$ те криве, добиће се с обзиром на услов (40)

$$\frac{d(\cos\theta_{(K)})}{ds} = -\sin\theta_{(K)}\,\frac{d\theta_{(K)}}{ds} = (\xi^i\, t_{(K)i})_{,j}\, t^j_{(1)} =$$

$$= \xi^i_{,j}\, t^j_{(1)}\, t_{(K)i} + \xi^i\, t_{(K)i,j}\, t^j_{(1)} = \xi^i\, t_{(K)i,j}\, t^j_{(1)}\,.$$

Овај образац одређује промену на јединицу лука (одн. брзину промене, кад се узме $s = t$, где је t време) косинуса угла између два правца од којих се један помера паралелно дуж криве а други природно као орт једне од њених нормала. Ако још као почетни положај уочимо онај у коме се орт ξ^i поклапа са неким другим од ортова нормала нашег система, напр. са $t^i_{(H)}$, биће у том случају угао $\theta_{(KH)} = \pi/2$ и претходни израз своди се на

$$-\frac{d\theta_{(KH)}}{ds} = t_{(K)i,j}\, t^i_{(H)}\, t^j_{(1)}\,,$$

тј. према (28) и (31) на

$$\frac{d\theta_{(KH)}}{ds} = -\omega_{KH} = \omega_{HK}\,. \tag{42}$$

Према томе, координате Дарбуовог тензора претстављају промену угла у односу на лук криве (одн. брзину те промене) између правца $t^i_{(K)}$ и правца $t^i_{(H)}$ кад се овај други паралелно помера дуж криве. Другим речима, координате ω_{HK} Дарбуовог тензора претстављају брзину ротације вектора $t^i_{(K)}$ око криве при померању дуж криве у односу на паралелно померени вектор $t^i_{(H)}$.

Да бисмо показали у чему је генерализација Ланкреовог става, помножићемо једначину (30) ортом $t^i_{(k)}$ и извршити сабирање по k, па ћемо с обзиром на (23) и (31) моћи да напишемо

$$\varepsilon_i \frac{\delta t^i_{(h)}}{\delta s} = \sum_k \omega_{hk}\, t^i_{(k)}, \tag{43}$$

одакле у општем случају следи

$$\left| \frac{\delta t^i_{(h)}}{\delta s} \right|^2 = \sum_k (\omega_{hk})^2 \cdot \varkappa^2_{h-1} + \varkappa^2_h, \tag{44}$$

што је одмах јасно. Напр., за $h=2$ (прва нормала) имамо

$$\left| \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} \right|^2 = (\omega_{21})^2 + (\omega_{23})^2 = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 .$$

Сад је лако увидети у чему може бити генерализација тзв. *Ланкреовог става*. Наиме, у Еуклидовом тродимензионом простору, кад се са $\varkappa$ обележи *тотална кривина* криве линије важи Ланкреов став у облику

$$\varkappa^2 = \varkappa_1^2 + {}_2^2 . \tag{45}$$

Очигледно је онда да се са једног становишта, кад се узме у обзир да се једначина (45) у тродимензионом простору може изразити и у облику

$$\varkappa^2 = \left| \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} \right|^2 = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 , \tag{46}$$

једначина (44) може сматрати као генерализација Ланкреовог става за Риманов простор. Са тог гледишта је обичан Ланкреов став уствари скоро тривијалан специјални случај општег става (44).

Међутим, јасно је да се сад на Ланкреов став може гледати и са другог становишта и да се он може сад и друкчије тумачити. Ако се, наиме, узме да $\varkappa^2$ обележава збир квадрата свих могућих кривина дате криве (што је случај у тродимензионом простору), тада би односни израз у Римановом простору V_N гласио

$$\varkappa^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \varkappa_i^2 . \tag{47}$$

Тај израз за $\varkappa^2$ може се у тродимензионом простору написати и помоћу извода јединичних вектора у облику

$$\varkappa^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{\delta t_{(1)}^i}{\delta s} \right|^2 + \left| \frac{\delta t_{(2)}^i}{\delta s} \right|^2 + \left| \frac{\delta t_{(3)}^i}{\delta s} \right|^2 \right\}, \tag{48}$$

коме у Римановом простору V_N одговара очигледно израз

$$\varkappa^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{\delta t_{(k)}^i}{\delta s} \right|^2 . \tag{49}$$

Најзад, као генерализација израза (48) може се сматрати и

$$\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{\delta t_{(k)}^i}{\delta s} \right|^2 \tag{50}$$

који се своди на (48) за $N=3$, али у општем случају није једнак $\varkappa^2$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Blaschke — Frenets Formeln für den Raum von Riemann. *Math. Zeitschrift* **6**, S. 94—99, 1920.

[2] J. L. Synge — Tensor Calculus. *Univ. of Toronto Press*, Toronto 1949.

VERALLGEMEINERUNG DES BEGRIFFS DES DARBOUX'SCHEN VEKTORS FÜR DEN RAUM VON RIEMANN

Tatomir Angelitch

In diesem Aufsatz wird gezeigt was in Riemanns Raum V_N von N Dimensionen, dessen Metrik durch die im allgemeinen Falle indefinite quadratische Form

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1}$$

festgelegt ist, dem Begriff des Darboux'schen Vektors der Differentialgeometrie des Euklidischen dreidimensionalen Raumes entspricht und wie für den Riemannschen Raum der sogenannte Lancret'sche Satz verallgemeinert werden kann.

Der Verfasser knüpft seine Ausführungen an eine Arbeit von W. Blaschke (Frenets Formeln für den Raum von Riemann. *Math.*

Zeitschrift **6**, S. 94 –99, 1920) und zeigt, dass dem Begriff des Darboux'schen Vektors ein antisymmetrischer Tensor ω_{hk} N-ter Ordnung entspricht von der Form

$$\{\omega_{hk}\} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 0 & \varepsilon_2 \varkappa_1 & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 \varkappa_1 & 0 & \varepsilon_3 \varkappa_2 & 0 \cdot \cdot \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \varkappa_2 & 0 & \varepsilon_4 \varkappa_3 \cdot \cdot \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot & 0 & \varepsilon_N \varkappa_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot & -\varepsilon_N \varkappa_{N-1} & 0 \end{array} \right\} \tag{2}$$

wo $\varkappa_h$ die $N-1$ Krümmungen und ε_h die Zeiger der Richtung der einzelnen Einheitsvektoren des lokalen natürlichen N-Beins der gegebenen Kurve sind.

Zum Schluss weist der Verfasser auf verschiedene Möglichkeiten der Verallgemeinerung des Lancret'schen Satzes.

НЕКА ПРОШИРЕЊА СТАВОВА О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ

ВЛАДЕТА ВУЧКОВИЋ (Београд)

Карамата [1][1)] је елементарним путем извео став о коначном прираштају за функције које имају прекидне изводе. Овде ћемо извести аналогна проширења осталих диференцијалних и интегралних ставова о средњој вредности.

1. Специјални случај поменутог става је следеће уопштење Rolle-ова става:

Став 1. *Нека је $f(x)$ непрекидна функција у затвореном размаку (a, b) и нека је $f(a)=f(b)=0$. Ако за свако x отвореног размака $(a+0, b-0)$ постоји леви $f'_-(x)$ и десни $f'_+(x)$ извод функције $f(x)$, тада постоји најмање једно ξ и из тог размака и два позитивна броја*

$$p>0, \quad q>0, \quad p+q=1$$

таква да је

$$p f'_+(\xi)+q f'_-(\xi)=0 \tag{1.1}$$

Помоћу овог става могуће је извести уобичајеним путем следећа проширења Cauchy-ева става о средњој вредности и Taylor-ове формуле.

Став 2. *Нека су функције $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрекидне у затвореном размаку (a, b), при чему је $\varphi(b) \neq \varphi(a)$. Ако за свако x отвореног размака $(a+0, b-0)$ постоје леви и десни изводи $f'_-(x)$, $\varphi'_-(x)$ и $f'_+(x)$, $\varphi'_+(x)$ функција $f(x)$ и $\varphi(x)$, и ако су у томе размаку $\varphi'_-(x)$ и $\varphi'_+(x) \neq 0$ и истог знака, тада постоји најмање једно ξ из тога размака и два броја*

$$p>0, \quad q>0, \quad p+q=1$$

тако да је

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{p f'_+(\xi)+q f'_-(\xi)}{p \varphi'_+(\xi)+q \varphi'_-(\xi)} \tag{1.2}$$

Доказ овог става добија се кад се на функцију

$$F(x)=[f(b)-f(a)]\,[\varphi(x)-\varphi(a)]-[f(x)-f(a)]\,[\varphi(b)-\varphi(a)]$$

примени став 1. Слично се изводи и

---

1) Бројеви у угластим заградама односе се иа литературу на крају чланка.

Став 3. *Нека је функција $f(x)$ непрекидна у затвореном размаку (a, b) и нека у том размаку има непрекидне изводе закључно са $(n-1)$-вим. Ако $f(x)$ у свакој тачки x отвореног размака $(a+0, b-0)$ има леви и десни n-ти извод $f_{-}^{(n)}(x)$ и $f_{+}^{(n)}(x)$, тада постоје два броја*

$$p > 0, \quad q > 0, \quad p+q=1$$

и једно ξ размака (a, b) тако да је за свако x тог размака

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\nu}}{\nu!} f^{(\nu)}(a) + R_n$$

где је

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} \{ p f_{+}^{(n)}(\xi) + q f_{-}^{(n)}(\xi) \}; \quad f^{(0)}(x) = f(x) \tag{1.3}$$

2. Да бисмо извели проширење интегралних ставова о средњој вредности, увешћемо једну класу функција која обухвата непрекидне функције и велики део прекидних функција. Проучавањем неких особина ове класе доћи ћемо до ставова чијом ћемо применом добити тражена проширења не само за функције ове класе већ и за све функције које имају дисконтинуитете прве врсте.

Дефиниција. *Функција $f(x)$ дефинисана у затвореном размаку (a, b) припада класи PS ако у свакој тачки тог размака, сем крајњих, постоје $f(x+0)$ и $f(x-0)$, ако постоје $f(a+0)$ и $f(b-0)$ и ако је или*

$$f(x-0) \leqslant f(x) \leqslant f(x+0)$$

или $\qquad x \in (a+0, b-0)$

$$f(x-0) > f(x) > f(x+0)$$

при чему су вредности функције у граничним тачкама a и b дате са

$$f(a) = f(a+0), \quad f(b) = f(b-0).$$

Из ове дефиниције непосредно следи да су функције класе PS ограничене у датом интервалу, да је множина њихових тачака дисконтинуитета пребројива и да су оне R-интеграбилне и RS-интеграбилне у односу на сваку функцију ограничене варијације ако им се тачке дисконтинуитета не поклапају.

Доказаћемо неке ставове о овим функцијама, од којих су прва два аналогони ставова о непрекидности и о највећој и најмањој вредности за непрекидне функције.

Став 4. *Ако функција $f(x)$ припада класи PS и ако је $f(a) < 0$ а $f(b) > 0$, онда у интервалу (a, b) постоји најмање једна тачка ξ тако да је*

или $f(\xi-0) \leqslant 0 \leqslant f(\xi+0)$, *или* $f(\xi-0) > 0 > f(\xi+0)$.

Доказ. Како је $f(a)=f(a+0)$ и $f(b)=f(b-0)$, то је

$$f(a+0)<0<f(b-0).$$

Отуда следи да у размаку (a, b) постоје тачке x_i и x_k, $i, k=1,2,\ldots$ за које је

$$f(x_i)<0 \quad \text{и} \quad f(x_k)>0, \quad x_i<x_k.$$

Од тачака x_i узећу једну и означићу је са a_1, а од тачака x_k такође једну коју ћу означити са b_1. Тада је

$$f(a_1)<0<f(b_1), \quad a_1<b_1.$$

Ако је $f(a_1+0)>0$ или $f(b_1-0)<0$ став је доказан. Нека је зато

$$f(a_1+0)<0<f(b_1-0) \tag{2.1}$$

Образоваћемо $\qquad c_1=(a_1+b_1)/2$.

Или је α) $f(c_1)>0$; или је β) $f(c_1)<0$; или је γ) $f(c_1)=0$. У случају γ) став је доказан. У случају α) остаје алтернатива $f(c_1-0)>0$. У случају β) остаје алтернатива $f(c_1+0)<0$.

Ако наступа случај α), тада ћемо на размак (a_1, c_1) применити сличан поступак дељења.

У случају β) поступак дељења применићемо на размак (c_1, b_1).

Тако долазимо до низа бројева A_n, B_n, $n=1,2,\ldots$ који задовољавају неједначине

$$f(A_n+0)<0<f(B_n-0) \tag{2.2}$$

Уз то постоји једна тачка ξ којој низ A_n тежи са леве стране, а низ B_n са десне стране.

Но из дефиниције функције $f(x)$ по (2.2) је

$$\text{или} \quad f(A_n)<0<f(B_n), \quad \text{или} \quad f(A_n)>0>f(B_n), \tag{2.3}$$

па граничним прелазом, због егзистенције леве и десне граничне вредности функције $f(x)$, из неједначина (2.3) следи

$$\text{или} \quad f(\xi-0)\leqslant 0\leqslant f(\xi+0), \quad \text{или} \quad f(\xi-0)\geqslant 0\geqslant f(\xi+0),$$

јер $f(A_n)\to f(\xi-0)$, а $f(B_n)\to f(\xi+0)$, што је и требало доказати.

Став 5. *Ако функција $f(x)$ припада класи PS, онда или $f(x-0)$ или $f(x+0)$ достиже у размаку (a, b) највећу и најмању вредност функције у том размаку.*

Доказ. Да $f(x)$ не може достићи у (a, b) своју најмању и највећу вредност а да их при томе не достигну или $f(x-0)$ или $f(x+0)$, следи из дефиниције класе PS. Наиме, или је

$$\operatorname*{Min}_{a \leqslant x \leqslant b} f(x-0) \leqslant \operatorname*{Min}_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) \leqslant \operatorname*{Max}_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) \leqslant \operatorname*{Max}_{a \leqslant x \leqslant b} f(x+0)$$

или

$$\operatorname*{Min}_{a \leqslant x \leqslant b} f(x+0) \leqslant \operatorname*{Min}_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) \leqslant \operatorname*{Max}_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) \leqslant \operatorname*{Max}_{a \leqslant x \leqslant b} f(x-0)$$

Преполовићемо размак (a, b) у два: (a, c), (c, b). Најмање у једном од ових функција $f(x)$ узима једну вредност $f(x_1)$ која није мања од ма које вредности функције $f(x)$ у целом размаку (a, b). Иначе би се у (a, b) нашле неке апцисе x_2 и x_3 да је

$$\text{за свако } x \text{ из } (a, c) \quad f(x) \leqslant f(x_2),$$
$$\text{за свако } x \text{ из } (c, b) \quad f(x) \leqslant f(x_3),$$

те једна од вредности $f(x_2)$ и $f(x_3)$ не би била мања ни од једне вредности функције $f(x)$ у размаку (a, b).

Итерацијом овог поступка следи да постоји размак (a_n, b_n) који лежи у размаку (a, b) тако да за неке x' из размака (a_n, b_n) $f(x')$ није мање од ма које вредности функције $f(x)$ у размаку (a, b).

Ако је x_0 једна тачка из размака (a, b) то у

$$
\begin{array}{ll}
(a_1, b_1) \text{ постоји једна тачка } x_1 \text{ тако да је } f(x_1) \geqslant f(x_0), & \\
(a_2, b_2) \text{ постоји једна тачка } x_2 \text{ тако да је } f(x_2) \geqslant f(x_1), & (2.4) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
(a_n, b_n) \text{ постоји једна тачка } x_n \text{ тако да је } f(x_n) \geqslant f(x_{n-1}). &
\end{array}
$$

Знамо да постоји $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \xi$.

Бројеви $x_\nu, \nu = 1, 2, \dots$ чине или узлазни или силазни низ, или су такви да их и са леве и са десне стране од ξ има бесконачно много. У последњем случају, они који су с леве стране чине низ који такође конвергира ка ξ, а исто и они с десне стране од ξ.

У случају да бројеви x_ν чине узлазни низ,

$$\lim f(x_n) = f(\xi - 0)$$

а у случају да бројеви x_n чине силазни низ,

$$\lim f(x_n) = f(\xi + 0),$$

а у случају да су бројеви x_ν распоређени и са леве и са десне стране од ξ (при чему их са обе стране има бесконачно много), из низа x_ν изабраћу само оне $\overline{x}_{m_k}$ који леже лево од ξ па ће за њих бити

$$\lim f(\overline{x}_{n_k}) = f(\xi - 0).$$

За оне тачке $\underline{x}_{m_k}$ које леже десно од ξ биће

$$\lim f(\underline{x}_{m_k}) = f(\xi + 0).$$

У сваком од прва два случаја низ

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3), \ldots \tag{2.5}$$

је узлазни, а у трећем случају низови

$$f(\overline{x}_{n_1}),\ f(\overline{x}_{n_2}),\ f(\overline{x}_{n_3}), \ldots \quad \text{и} \quad f(\underline{x}_{m_1}),\ f(\underline{x}_{m_2}),\ f(\underline{x}_{m_3}), \ldots$$

који се добијају из (2.5) избацивањем ордината за x_ν-ове који су десно од ξ, односно који су лево од ξ, такође су узлазни низови. Отуд је по (2.5) ако x_ν чине узлазни или силазни низ

$$\lim f(x_n) = f(\xi - 0) \geqslant f(x_0) \quad \text{или} \quad \lim f(x_n) = f(\xi + 0) \geqslant f(x_0).$$

а у случају када су тачке x_ν и слева и с десна од ξ, узећемо засебно оне с лева и засебно оне с десна, па ће бити

$$\lim f(\overline{x}_{n_k}) = f(\xi - 0) \geqslant f(x_0) \quad \text{и} \quad \lim f(\underline{x}_{m_k}) = f(\xi + 0) \geqslant f(x_0),$$

што је и требало доказати.

Применом овог поступка на функцију $-f(x)$ доказује се да $f(\xi - 0)$ или $f(\xi + 0)$ узимају најмању вредност функције у (a, b).

Последица. *Ако функција $f(x)$ припада класи PS и ако је A неки број који задовољава услов*

$$\operatorname{Min} f(x) \leqslant A \leqslant \operatorname{Max} f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b, \tag{2.6}$$

онда у интервалу (a, b) постоји бар једна тачка ξ тако да је

$$\text{или} \quad f(\xi - 0) \leqslant A \leqslant f(\xi + 0) \quad \text{или} \quad f(\xi - 0) > A > f(\xi + 0).$$

Приметимо да број A који задовољава неједначине (2.6) може да се увек напише у облику

$$A = p f(\xi + 0) + q f(\xi - 0), \quad p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0 \quad p + q = 1 \tag{2.7}$$

Став 6. *Ако функције $f(x)$ и $g(x)$ припадају класи PS, а функција $g(x)$ је или стално позитивна или стално негативна у* *целом размаку* (a, b), *онда у размаку* (a, b) *постоји једно* ξ *да је за сваки број* A *који задовољава неједначине*

$$\operatorname{Min}\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant A \leqslant \operatorname{Max}\frac{f(x)}{g(x)}, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{2.8}$$

увек

$$A = \frac{p\,f(\xi+0)+q\,f(\xi-0)}{p\,g(\xi+0)+q\,g(\xi-0)}, \quad p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0, \quad p+q=1. \tag{2.9}$$

Доказ овог става оснива се на следећој леми: Ако су p_1 и q_1 два броја $\geqslant 0$ са особином $p_1+q_1=1$, а ако су a и a_1 ма какви бројеви, а b и b_1 или оба позитивна или оба негативна броја, онда постоје увек два броја $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$ са особином $p+q=1$ која задовољавају идентитет

$$p_1\frac{a}{b}+q_1\frac{a_1}{b_1}=\frac{p\,a+q\,a_1}{p\,b+q\,b_1}.$$

Лако се налази да су то бројеви

$$\frac{p_1\,b_1}{p_1\,b_1+q_1\,b} \quad \text{и} \quad \frac{q_1\,b}{p_1\,b_1+q_1\,b}.$$

Доказ става 6. На основу последице ставова 4 и 5 је

$$A=p_1\frac{f(\xi+0)}{g(\xi+0)}+q_1\frac{f(\xi-0)}{g(\xi-0)},$$

$$a \leqslant \xi \leqslant b, \quad p_1 \geqslant 0, \quad q_1 \geqslant 0, \quad p_1+q_1=1,$$

а по леми одавде следи

$$A=\frac{p\,f(\xi+0)+q\,f(\xi-0)}{p\,g(\xi+0)+q\,f(\xi-0)}, \quad p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0, \quad p+q=1.$$

3. Следећи ставови су уопштења ставова о средњој вредности за интеграле, формулисана за Stieltjes-ове интеграле. Из њих је лако добити одговарајуће ставове за Riemann-ове интеграле.

Став 7. *Ако је функција* $g(x)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b) *а* $f(x)$ *припада класи* PS, *при чему им се тачке дисконтинуитета не поклапају, онда постоје два броја* $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p+q=1$, *и једно* ξ *из размака* (a, b) *тако да је*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\{p\,f(\xi+0)+q\,f(\xi-0)\}\{g(b)-g(a)\}. \tag{3.1}$$

Доказ се добија ако се на неједначину [**2**; стр. 72]

$$\operatorname*{Min}_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)\,\{g(b)-g(a)\}\leqslant \int_a^b f(x)\,dg(x)\leqslant \operatorname*{Max}_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)\,\{g(b)-g(a)\}$$

примени последица ставова 4 и 5.

Став 8. *Нека су функције класе* PS $g(x)$ *и* $h(x)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b) *и нека је*

$$h(x)-h(a)>0.$$

Ако је функција $f(x)$ *позитивна и интеграбилна у односу на обе функције* $g(x)$ *и* $h(x)$ *и ако она у том размаку не расте, тада постоје два броја* $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, $p+q=1$, *и једно* ξ *из размака* (a, b) *тако да је*

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dg(x)}{\int_a^b f(x)\,dh(x)}=\frac{p\,g(\xi+0)+q\,g(\xi-0)-g(a)}{p\,h(\xi+0)+q\,h(\xi-0)-h(a)} \tag{3.2}$$

Доказ се добија ако се на неједначине [**2**; стр. 79]

$$\operatorname*{Min}_{a\leqslant x\leqslant b}\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)}\leqslant\frac{\int_a^b f(x)\,dg(x)}{\int_a^b f(x)\,dh(x)}\leqslant\operatorname*{Max}_{a\leqslant x\leqslant b}\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)}$$

примени став 6.

Напоменнмо на крају да ставови **7** и 8 вреде не само за функције класе PS него и за све функције које имају тачке дисконтинуитета прве врсте. Наиме вредност интеграла се неће променити ако у тачкама дисконтинуитета функцији дамо ма коју вредност, па значи и ону која ће задовољити дефиницију класе PS.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Карамата — О теореми о средњој вредности. *Зборник Математичког института САН* **1**, стр. 119–124, 1951.

[2] J. Карамата — Теорија и пракса Stieltjes-ова интеграла, Београд 1949.

QUELQUES EXTENSIONS DES THÉORÈMES DE MOYENNE

Par V. Vučković

En supposant que les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ admettent leurs dérivées droites et gauches $f'_+(x)$, $\varphi'_+(x)$, $f'_-(x)$, $\varphi'_-(x)$ que $\varphi'_-(x)$ et $\varphi'_+(x)$ ont le même signe et sont $\neq 0$, on démontre qu'il existent deux nombres $p>0$, $q>0$, $p+q=1$ et un ξ dans l'intervalle considéré (a, b) tels que la formule (1.2), qui généralise la formule bien-connue de Cauchy, ait lieu.

En s'appuyant sur ce résultat on établit la formule (1.3) pour le reste du dévelopement de Taylor, lorsque la fonction $f(x)$ admet une n-ième dérivée gauche et droite.

Pour les fonctions ne possédant que les points de discontinuités de première espéce on établit, sous des conditions usuelles, des théorèmes de moyenne exprimés qar les formules (3.1) et (3.2).

МЕЂУСОБНИ РАСПОРЕД И КОНСТРУКЦИЈА НУЛА ПОЛИНОМА ТРЕЋЕГ СТЕПЕНА И НУЛА ЊЕГОВОГ ИЗВОДНОГ ПОЛИНОМА

Ш. РАЉЕВИЋ (Сарајево)

Већи број аутора [1][1)] доказао је ову теорему:

Нуле функције

$$F(z)=\sum_{j=1}^{p}\frac{m_j}{z-z_j}$$

жиже су криве $p-1$ класе, која сваку од дужи (z_j, z_k) додирује у тачки M_{jk} којом је та дуж подијељена у односу $m_j:m_k$.

Специјално [1]:

Нуле z' и z'' функције

$$F(z)=\sum_{j=1}^{3}\frac{m_j}{z-z_j}$$

жиже су конусног пријесека који дужи (z_1, z_2), (z_2, z_3), (z_3, z_1) додирује у тачкама $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, којима су те дужи подијељене респективно у односу $m_1:m_2$, $m_2:m_3$, $m_3:m_1$.

Из овога је Walsh [1] извео 1920 геометриску конструкцију нула z' и z'' за случај $p=3$, $m_1=m_2=m_3=1$.

На основи општег става показао је Cesàro [2; стр. 352] да су коријени z' и z'' једначине $f'(z)=0$, где је

$$f(z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$$

жиже елипсе која стране троугла (z_1, z_2, z_3) додирује у њиховим срединама.

Показаћемо како се у случају полинома

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3 \tag{1}$$

и његовог изводног полинома

$$P'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2 \tag{2}$$

---

1) Бројеви у угластим заградама односе се на литературу на крају чланка.

непосредном геометриском интерпретацијом самог поступка рјешавања једначине трећег степена може доћи не само до Cesàro-ових резултата, већ и до извјесних других закључака из којих произлази врло једноставна геометриска конструкција:

1° двију нула z' и z'' изводног полинома (2), кад је познат међусобни распоред нула z_1, z_2, z_3 полинома (1) и

2° двију нула полинома (1), кад је познат међусобни распоред његове треће нуле и нула z' и z'' изводног полинома (2).

1. 2. Уобичајени поступак рјешавања једначине трећег степена састоји се у овом: супституцијом

$$z = z_0 + t = z_0 - u - v, \tag{3}$$

где је

$$z_0 = -\frac{1}{3}\frac{a_2}{a_3},$$

рјешавање једначина $P(z)=0$ и $P'(z)=0$ своди се на рјешавање једначина

$$t^3 + pt + q = 0 \tag{1'}$$

$$3t^2 + p = 0, \tag{2'}$$

односно на рјешавање система једначина

$$u^3 + v^3 = q, \qquad uv = -\frac{1}{3}p. \tag{4}$$

Одавде се добивају три различита пара вриједности за u и v, које задовољавају систем (4)

$$u_j = u e^{\frac{2(j-1)\pi i}{3}}, \qquad v_j = v e^{\frac{-2(j-1)\pi i}{3}}; \qquad u_j v_j = uv; \quad j = 1, 2, 3, \tag{5}$$

и према томе, у општем случају, три различите вриједности за t

$$t_j = -u_j - v_j, \qquad \sum_{j=1}^{3} t_j = 0, \tag{6}$$

којима су одређене три нуле полинома (1)

$$z_j = z_0 + t_j, \quad j = 1, 2, 3, \tag{3'}$$

$$\sum_{i=1}^{3} z_j = 3 z_0,$$

Нуле полинома (2) одређене су онда релацијама

$$
\begin{aligned}
t' = -t'' = \sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt{uv} \\
z' = z_0 + \sqrt{uv}\,, \quad z'' = z_0 - \sqrt{uv}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

2. 1. Погледајмо шта значе релације (5), (6), (3′) и (7) ако их интерпретирамо геометриски.

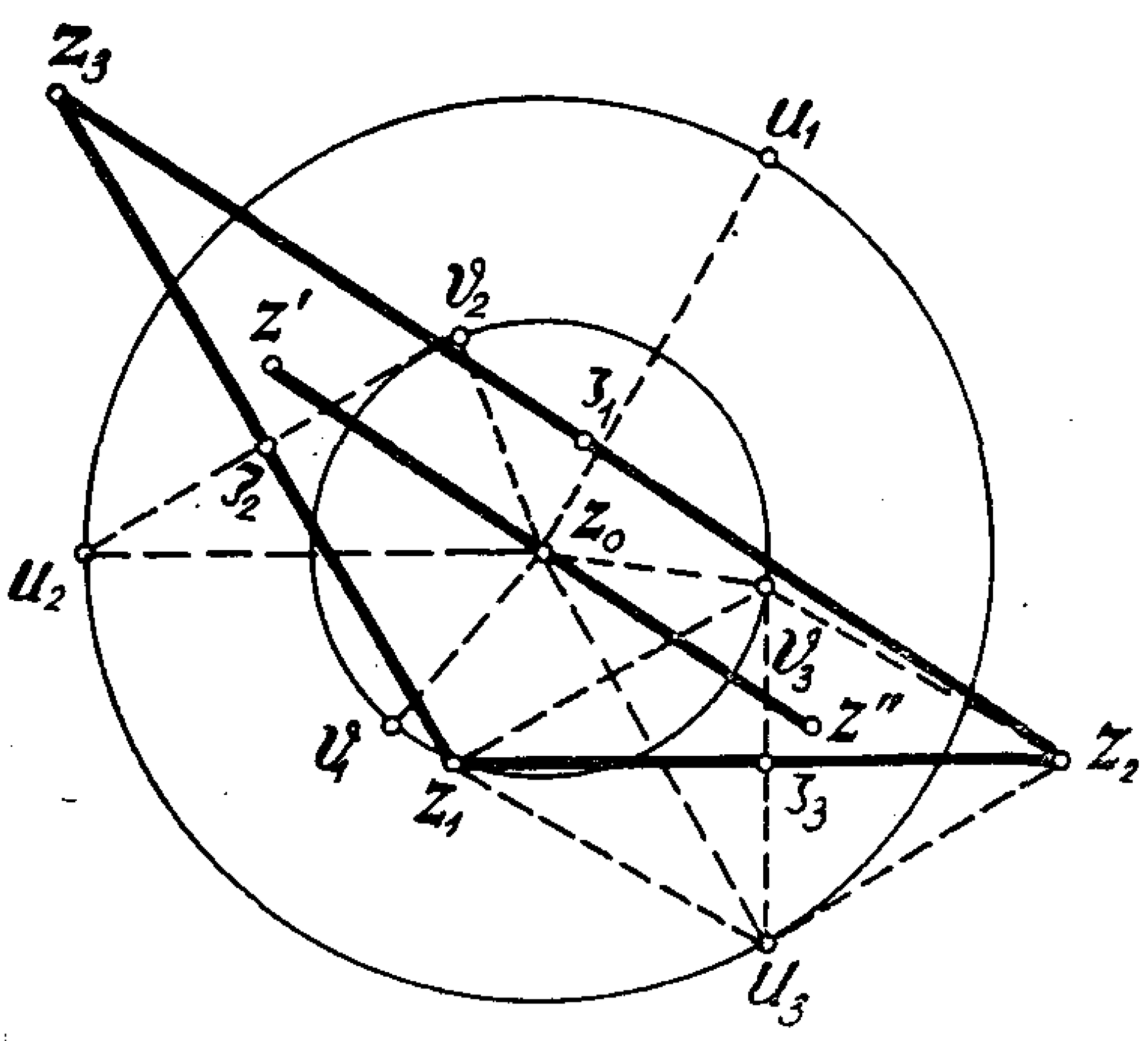
Нека су z_1, z_2, z_3 три тачке комплексне равни, у којима се налазе истоимене нуле полинома (1), и које, у општем случају, образују један разностраничан троугао (z_1, z_2, z_3). Тада је тачка

$$z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

тежиште тога троугла, а оријентисане дужи

$$t_j = z_j - z_0, \quad j = 1, 2, 3$$

дијелови су тежишних линија од тежишта z_0 до одговарајућих врхова троугла.



Сл. 1.

u_1 и v_1, u_2 и v_2, u_3 и v_3 су, респективно, компоненте оријентисаних дужи $-t_1$, $-t_2$, $-t_3$, те можемо узети да све оне имају заједничку почетну тачку у тежишту z_0. Ако крајње тачке тих компонената означимо, респективно, са U_1 и V_1, U_2 и V_2, U_3 и V_3 тада из релације (5) произлази да се тачке U_1, U_2, U_3 налазе на једном кругу и образују један, а да се тачке V_1, V_2, V_3 налазе на другом кругу и образују други истостраничан троугао.

Из релација (5) произлази такођер ($\sqrt{u_j v_j} = \text{const.}$) да три угла

$$U_j z_0 V_j, \quad j = 1, 2, 3$$

имају заједничку симетралу.

Из релација (7) произлази да се нуле z' и z'' изводног полинома (2) налазе на заједничој симетрали углова $U_j z_0 V_j$ $(j = 1, 2, 3)$ и да су удаљене од тежишта z_0, једна са једне а друга са друге стране, за геометриску средину модула $|u|$ и $|v|$.

2. 2. Да бисмо поближе одредили компоненте u_j и v_j $(j=1, 2, 3)$ претпоставимо да су стране троугла (z_1, z_2, z_3) оријентисане у директном смислу и да су у истом смислу поредане тако да насупрот врху z_j лежи стране b_j. У том случају су стране троугла (z_1, z_2, z_3) одређене релацијама

$$\begin{aligned} b_1 &= z_3 - z_2 = t_3 - t_2 = (u_1 - v_1)\, i\sqrt{3} \\ b_2 &= z_1 - z_3 = t_1 - t_3 = (u_2 - v_2)\, i\sqrt{3} \\ b_3 &= z_2 - z_1 = t_2 - t_1 = (u_3 - v_3)\, i\sqrt{3} \end{aligned} \tag{8}$$

из којих добијамо

$$u_j - v_j = -\frac{i}{\sqrt{3}} b_j \qquad j = 1, 2, 3. \tag{8'}$$

Како је међутим

$$u_j + v_j = -t_j,$$

то је

$$\left.\begin{aligned} u_j &= -\frac{1}{2} t_j - \frac{i}{2\sqrt{3}} b_j, \\ v_j &= -\frac{1}{2} t_j + \frac{i}{2\sqrt{3}} b_j, \end{aligned}\right\} \quad j = 1, 2, 3, \tag{9}$$

што значи да се свака од компонената u_j и v_j, са своје стране, изражава као збир двију компонената. При томе сваки пар (u_j, v_j) $j=1, 2, 3$, има по једну компоненту $(-t_j/2)$ заједничку и идентичну са дијелом тежишне линије од тежишта z_0 до средине ζ_j одговарајуће стране b_j. Друге двије компоненте пара су једна другој супротне и нормалне на страну b_j. Дужине тих супротних компонената могу се изразити релацијом

$$|d_j| = \frac{1}{2} |b_j| \operatorname{tg} 30^0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{10}$$

Овим су положај и величина компонената u_j и v_j $(j=1, 2, 3)$ потпуно одређени.

2. 3. Претходни резултати могу се исказати са слиједећа два планиметриска става, која су тим резултатима доказана:

Став 1. *Ако сшране макар којег дашог шроугла узмемо као дуже дијагонале ромбова и над сваком од њих консшруишемо ромб са углом на врху* $\alpha = 60^0$, *шада „вањски“ врхови ших ромбова образују један, а „унушрашњи“ врхови други исшосшраничан шроугао. Тежишше једног и другог исшосшраничног шроугла поклапа се са шежишшем дашог шроугла.*

Став 2. *Парови правих што спајају тежишта датог троугла са „ваљским" и „унутрашњим" врхом сваког од ромбова одређују по један угао, такав да се симетрале сва три тако одређена угла поклапају и своде на једну једину праву. Правац те праве је карактеристичан за облик датог троугла.*

Ставови 1 и 2 омогућују врло једноставну геометриску конструкцију дужи u_j и v_j као и конструкцију праве на којој се налазе нуле z' и z'' полинома (2), чији тачан положај, послије овог, није тешко одредити конструктивним путем.

Очигледно је да је за извођење конструкције довољно конструисати само један пар дужи (u_j, v_j).

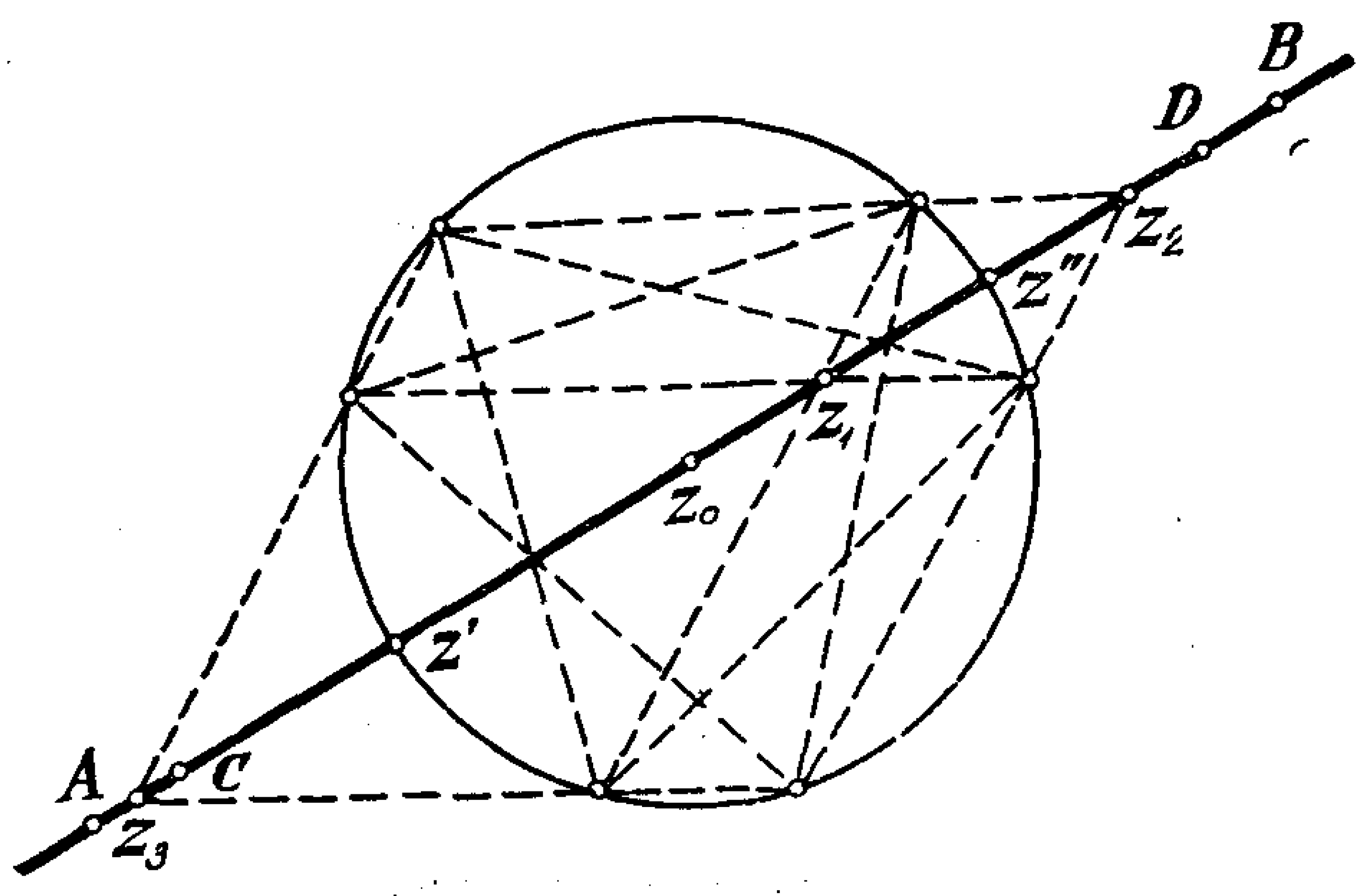
2. 4. Напоменимо да ставови 1 и 2 вреде и онда, кад се врхови датог „троугла" налазе на једној правој или, друкчије речено: конструкција нула z' и z'' полинома (2) остаје иста и онда кад се нуле полинома (1) налазе на једној правој. У том случају су компоненте u_j и v_j сваког пара (u_j, v_j) симетрично распоређене у односу на праву (z_1, z_2, z_3), те су све тачке U_1, U_2, U_2, V_1, V_2, V_3 распоређене на једном истом кругу.

Тачке z' и z'' налазе се на пресјеку тога круга и праве (z_1, z_2, z_3). Није тешко провјерити да се по *једна* од нула z_1, z_2, z_3 налази или у сваком од интервала

(AC), (z_0, z''), (z'', D),

или у сваком од интервала

(C, z') (z', z_0), (DB),



Сл. 2

гдје су ознаке интервала узете према слици 2 и гдје је

$$\overline{(z_0, C)} = \overline{(z_0, D)} = \overline{(z_0, z')}\sqrt{3} = r\sqrt{3},$$

$$\overline{(z_0, A)} = \overline{(z_0, B)} = 2r.$$

3. Међусобним множењем релација (9) добивамо

$$u_j v_j = \left(\frac{1}{2} t_j\right)^2 + \frac{1}{12} b_j^2,$$

а одатле

$$-\frac{1}{12} b_j^2 = \left(\frac{1}{2} t_j + \sqrt{u_j v_j}\right)\left(\frac{1}{2} t_j - \sqrt{u_j v_j}\right),$$

односно

$$-\frac{1}{12} b_j^2 = (z' - \zeta_j)(z'' - \zeta_j)$$

или

$$\pm \frac{i}{2\sqrt{3}} b_j = \sqrt{(z' - \zeta_j)(z'' - \zeta_j)}, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{11}$$

одакле слиједе:

Став 3. *Симетрала сваке стране троугла* (z_1, z_2, z_3) *поклапа се са симетралом угла чији се врх налази на средини те стране, а чији краковн пролазе кроз тачке* z' *и* z'', *у којима се налазе истоимене нуле полинома (2).*

Став 4. *Половина дужине краће дијагонале ромба, конструисаног над страном* b_j, $j = 1, 2, 3$, *једнака је геометриској средини дужина оних двију дужи које спајају средину* ζ_j *те стране са тачкама* z' *и* z''.

Ставови 3 и 4 омогућују врло једноставну геометриску конструкцију тачака U_j и V_j, а тиме и конструкцију стране b_j, кад је познат међусобни распоред тачака z', z'' и одговарајуће тачке ζ_j или, друкчије речено: на основу ставова 3 и 4 могуће је увијек једноставном геометриском конструкцијом одредити положај двију од нула z_1, z_2, z_3 полинома (1), ако је познат положај једне од њих и положај нула z' и z'' полинома (2).

4. Будући да се може писати

$$z' - \zeta_j = \frac{1}{2} t_j + \sqrt{u_j v_j} = -\frac{1}{2}(u_j + v_j - 2\sqrt{u_j v_j}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{u_j} - \sqrt{v_j})^2,$$

$$z'' - \zeta_j = \frac{1}{2} t_j - \sqrt{u_j v_j} = -\frac{1}{2}(u_j + v_j + 2\sqrt{u_j v_j}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{u_j} - \sqrt{v_j})^2,$$

то је

$$|z' - \zeta_j| + |z'' - \zeta_j| = |u_j| + |v_j| = \text{const.} \qquad j = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Релација (12) заједно са ставом 3 доводи до Cezàro-овог резултата исказаног у 1. 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Marden — The Geometry of the zeros of polynomial in a complex variable, New York 1949.

[2] Cezàro — Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis, Leipzig 1904.

RÉPARTITION ET CONSTRUCTION DES ZÉROS D'UN POLYNOME DU TROISIÈME ORDRE ET DE SA DÉRIVÉE

Par Š. Raljević

L'auteur déduit de l'interpretation géométrique du procédé de résolution de l'équation en question la répartition et la construction de ses zéros.

ПРЕЦИЗНОСТ СТАНДАРДНЕ ДЕВИЈАЦИЈЕ КОД МАКАКВОГ РАСПОРЕДА

БРАНИСЛАВ ИВАНОВИЋ (Београд)

Проф. Кашанин у својој расправи „Le coefficient d'approximation moyenne et le coefficient de corrélation"[1] напоменуо је на стр. 74 да је израчунавање помоћу стандардне девијације σ_2 у *општем случају* неприцизније него помоћу σ_{2k} за $k > 1$.

Овде ћемо показати да заиста можемо у извесним случајевима добити помоћу стандардне девијације већу прецизност него помоћу σ_{2k} $(k > 1)$.

I

Нека су $a_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ реални бројеви међу којима може бити и једнаких, али нису сви једнаки. Узмимо аритметичку средину $a = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ и образујмо разлику

$$\alpha_\nu = a_\nu - a.$$

Ставимо

$$\sigma_{2k} = + \sqrt[2k]{\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k}}$$

где је k цео број. За $k = 1$ имамо стандардну девијацију

$$\sigma_2 = + \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2}.$$

Како смо претпоставили да нису сви α_ν нуле, то је сигурно $\sigma_{2k} > 0$ за свако k.

Доказаћемо прво ову теорему:

---

[1]) *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe*, t. I, стр. 71—87, 1947.

Теорема I. — *Стандардна девијација је доња граница низа*

$$\sigma_{2k} = \sqrt[2k]{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k}}, \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

тј.

$$\sigma_2 = \min_{1 \leqslant k < \infty} \sigma_{2k}.$$

Доказ. Имамо

$$\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2} = \frac{\sqrt[2k]{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k}}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2}}} = \left\{ \frac{n^{k-1}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{2k}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2\right)^k} \right\}^{1/2k}.$$

Овај ће израз бити већи од јединице ако је поткорена вредност већа од јединице. За $k=1$ поткорена вредност једнака је јединици; показаћемо да ће за $k=2$ бити већа од јединице. У том циљу писаћемо

$$\frac{n\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^4}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2\right)^2} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^4 + (n-1)\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^4}{\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^4 + 2\sum_{\nu=1,\ \mu=1}^{n} \alpha_\nu^2 \alpha_\mu^2}, \qquad (\nu \neq \mu).$$

Како изрази

$$(n-1)\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^4 \quad \text{и} \quad 2\sum_{\nu=1,\ \mu=1}^{n} \alpha_\nu^2 \alpha_\mu^2, \qquad (\nu \neq \mu),$$

имају исти број чланова и претстављају симетричне функције и како је увек

$$\alpha_\nu^4 + \alpha_\mu^4 > 2\alpha_\nu^2 \alpha_\mu^2$$

кад је $\alpha_\nu \neq \alpha_\mu$, то је

$$(n-1)\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^4 > 2\sum_{\nu=1,\ \mu=1}^{n} \alpha_\nu^2 \alpha_\mu^4,$$

те је

$$\frac{n\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^4}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2\right)^2} > 1,$$

тј.

$$\frac{\sigma_4}{\sigma_2} > 1.$$

Ако сада претпоставимо да неједнакост $\sigma_{2k} : \sigma_2 > 1$ вреди за неко k, тј. да је

$$\frac{n^{k-1} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2\right)^k} > 1,$$

доказаћемо да ће та неједначина вредети и за $k+1$, тј. да је и

$$\frac{n^k \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k+2}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2\right)^{k+1}} > 1. \tag{1}$$

Овај израз можемо написати у облику

$$\frac{n^k \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k+2}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2\right)^{k+1}} = \frac{n^k \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k} \alpha_\nu^2}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2\right)^k \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2} =$$

$$= \frac{n^{k-1} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k} \alpha_\nu^2}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2\right)^k \cdot \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2} = \frac{n^{k-1} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k} \frac{\alpha_\nu^2}{\sigma_2^2}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2\right)^k}.$$

Да бисмо, дакле, доказали (1), довољно је показати да се збир $\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k}$ неће смањити ако му сваки члан респективно помножимо са $\alpha_\nu^2 / \sigma_2^2$, тј. показати да је разлика

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k} \frac{\alpha_\nu^2}{\sigma_2^2} - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k} > 0. \tag{2}$$

Ако из израза на левој страни извучемо $\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2\right\}^{-1}$, добићемо

$$\frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2} \cdot \left\{n \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k+2} - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2 \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2} \left\{n \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k+2} - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k+2} - \sum_{\nu=1,\, \mu=1}^{n} \alpha_\nu^2 \alpha_\mu^{2k}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2} \left\{(n-1) \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k+2} - \sum_{\nu=1,\, \mu=1}^{n} \alpha_\nu^2 \alpha_\mu^{2k}\right\}.$$

Како су и овде изрази $(n-1)\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu^{2k+2}$ и $\sum_{\nu=1,\,\mu=1}^{n}\alpha_\nu^2\alpha_\mu^{2k}$ симетричне функције и имају исти број чланова и како постоје ν и μ тако да је $\alpha_\nu \neq \alpha_\mu$, тј. да је

$$(\alpha_\nu^{2k}-\alpha_\mu^{2k})(\alpha_\nu^2-\alpha_\mu^2) > 0,$$

то постоје α_ν и α_μ тако да је

$$\alpha_\nu^{2k+2}+\alpha_\mu^{2k+2} > \alpha_\nu^2\alpha_\mu^{2k}+\alpha_\nu^{2k}\alpha_\mu^2.$$

Зато је

$$\frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu^2}\left\{(n-1)\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu^{2k+2}-\sum_{\nu=1,\,\mu=1}^{n}\alpha_\nu^2\alpha_\mu^{2k}\right\} > 0.$$

Тако смо доказали (2), па тиме и (1).

На тај начин смо путем потпуне индукције доказали теорему I.

Теорема II. — *Ако је*

$$\sigma_{2k} < c < \left(\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}\sigma_2,$$

онда је већи број чланова за које можемо тврдити помоћу стандардне девијације σ_2 да леже у интервалу $(a-c,\ a+c)$ него помоћу σ_{2k} $(k>1)$.

Доказ. — За $k>1$ према теореми I је

$$\left(\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2}\right)^{k-1} < \left(\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2}\right)^{k}, \text{ тј. } \sigma_{2k} < \left(\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}\sigma_2.$$

Према томе, постоји број c тако да је

$$\sigma_{2k} < c < \left(\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}\sigma_2 \tag{3}$$

Ставићемо $K=\frac{c}{\sigma_2}$, тада је $K>\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2}>1$. Зато у отвореном интервалу $(a-c,\ a+c)$ има бар

$$x = n - \frac{n}{K^2}$$

чланова датог скупа a_ν. Ставимо ли пак $K_1 = \frac{c}{\sigma_{2k}}$ биће

$$K_1 > \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_{2k}} = 1$$

па у истом интервалу има бар

$$y = n - \frac{n}{K_1^{2k}} \text{ [1]}$$

чланова датог скупа a_ν. Одатле излази

$$x - y = \frac{n}{K^2 K_1^{2k}} (K^2 - K_1^{2k}).$$

Међутим је

$$K^2 - K_1^{2k} = \frac{c^2}{\sigma_2^2} - \frac{c^{2k}}{\sigma_{2k}^{2k}} = \frac{c^2}{\sigma_2^2 \sigma_{2k}^{2k}} (\sigma_{2k}^{2k} - c^{2k-2} \sigma_2^2) >$$

$$> \frac{c^2}{\sigma_2^2 \sigma_{2k}^{2k}} \left\{ \sigma_{2k}^{2k} - \left(\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2}\right)^{\frac{k}{k-1} \cdot 2(k-1)} \sigma_2^{2k-2} {\sigma_2}^2 \right\} = 0,$$

те је $K^2 - K_1^{2k} > 0$, тј. $x > y$. Тиме је тврђење доказано.

На пример за бројеве

$$-5, \ -4, \ -4, \ -2, \ -1, \ -1, \ 1, \ 2, \ 2, \ 3, \ 3, \ 3, \ 3$$

имамо

$$\sigma_2 = 2{,}880, \quad \sigma_4 = 3{,}284, \quad \sigma_6 = 3{,}571, \quad \sigma_8 = 3{,}786, \quad \sigma_{10} = 3{,}952, \ldots$$

Извршићемо компарацију прецизности σ_2 са σ_{10}. Како је

$$\left(\frac{\sigma_{10}}{\sigma_2}\right)^{5/4} = 1{,}485,$$

то треба за c узети неку вредност из интервала (3,952; 4,277). Узмимо, рецимо, $c = 4{,}1$; тада је $K = 1{,}4236$ и $K_1 = 1{,}037$. Помоћу σ_2 можемо тврдити да се у интервалу $(-4{,}1;\ 4{,}1)$ налази чланова бар

$$x = n - \frac{n}{K^2} = 13 - \frac{13}{1{,}4236^2} = 6{,}49,$$

док помоћу σ_{10} можемо утврдити да се у том истом интервалу налази чланова бар

$$y = n - \frac{n}{K_1^{10}} = 13 - \frac{13}{1{,}037^{10}} = 3{,}96.$$

---

[1]) Од ове формуле имамо користи само кад је $c > \sigma_{2k}$; за $c < \sigma_{2k}$ добићемо $y < 0$.

Дакле, овде помоћу стандардне девијације добивамо двапута већу прецизност него помоћу σ_{10}.

Ако пак узмемо $c = 4{,}9$, биће $K = 1{,}701$ и $K_1 = 1{,}24$, те је тада

$$x = 8{,}51 \quad \text{и} \quad y = 11{,}49,$$

тј. овде добивамо већу прецизност помоћу σ_{10} него помоћу стандардне девијације σ_2.

II.

Као што смо навели, у унутрашњости интервала $(a - c,\ a + c)$ $(c \neq 0)$ лежи најмање

$$y = n - \frac{n}{K_1^{2k}} \tag{3}$$

чланова датога низа, при чему је

$$K_1 = c : \sigma_{2k} = c \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{2k} \right)^{-\frac{1}{2k}}.$$

Ако ово K_1 унесемо у (3), добићемо

$$y = n - f(k) \tag{4}$$

где је

$$f(k) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\alpha_\nu}{c} \right)^{2k}.$$

Ставићемо $(\alpha_\nu : c)^2 = \beta_\nu$. Према претпоставци нису сви α_ν нуле; узећемо само њих у обзир. Тада, изабравши целисходну нумерацију, можемо писати

$$f(k) = \sum_{\nu=1}^{m} \beta_\nu^k, \qquad (\beta_\nu > 0). \tag{5}$$

Према (4), изван затвореног интервала $(a - c,\ a + c)$ налази се мање од $f(k)$ чланова датог скупа $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Приметимо да је

$$f(k) > 0, \qquad f(0) = m$$

и

$$f'(k) = \sum_{\nu=1}^{m} \beta_\nu^k \log \beta_\nu, \qquad f'(0) = \log(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m).$$

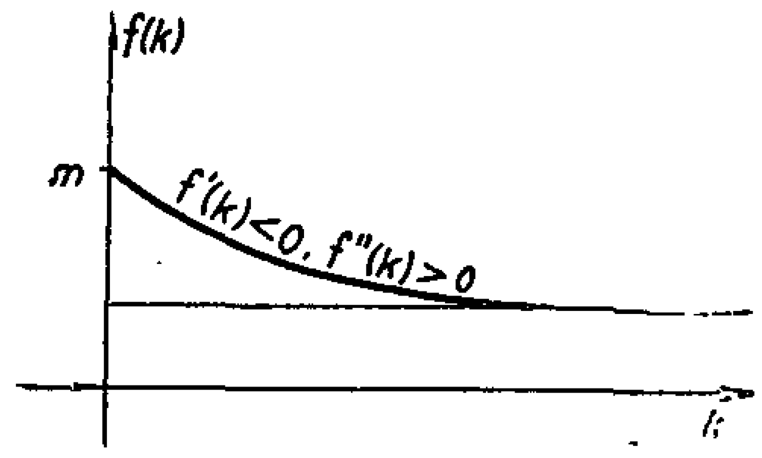
Како је

$$f''(k)=\sum_{\nu=1}^{m} \beta_\nu^k \log^2 \beta_\nu \qquad \text{тј.} \qquad f''(k)>0,$$

то $f'(k)$ стално расте.

А. Ако је $f'(k)$ стално негативно, тада $f(k)$ стално опада, и како је $f(k)>0$, то мора постојати $\lim\limits_{k\to\infty} f(k) \geqslant 0$. Отуда долазимо до закључка да ће овде прецизност бити утолико већа уколико је k веће (сл. 1).

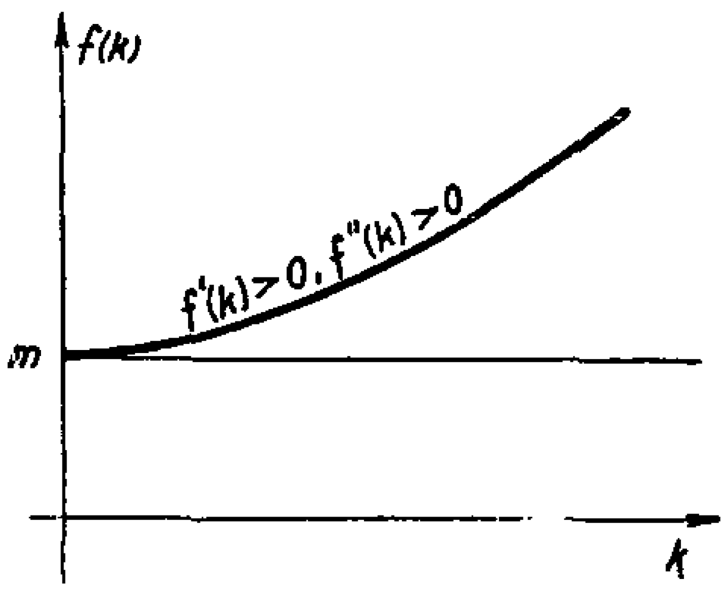
Б. Ако је $f'(k)$ стално позитивно, тада $f(k)$ стално расте, и прецизност ће утолико бити већа уколико је k мање. Имаћемо овде највећу прецизност ако је $k=1$, тј. ако узмемо стандардну девијацију (сл. 2).



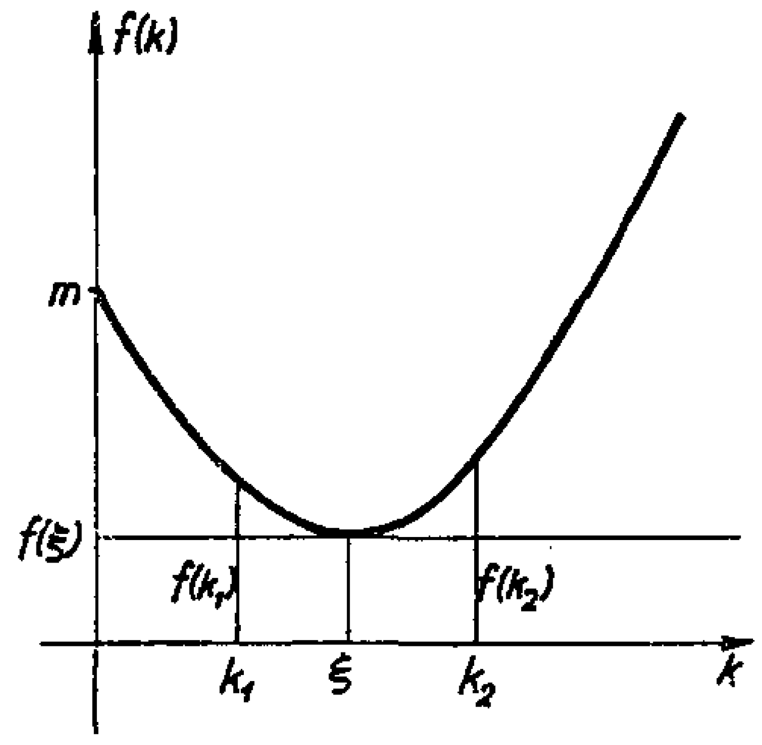
Сл. 1

В. Ако је $f'(k)$ за извесне вредности од k позитивно а за извесне негативно, тада мора постајати једно ξ за које је $f'(\xi)=0$, тј.

$$\sum_{\nu=1}^{m} \beta_k^\xi \log \beta_\nu = 0.$$



Сл. 2



Сл. 3

Како је $f''(\xi)>0$, то је $f(\xi)=\min$. Ако ставимо

$$k_1=[\xi] \quad \text{и} \quad k_1=[\xi]+1$$

и означимо

$$f(k_0)=\min_{r=1,2}\{f(k_r)\},$$

највећу прецизност имаћемо сада за $k=k_0$ (сл. 3).

PRÉCISION DE LA DÉVIATION STANDARDE POUR UNE REPARTITION QUELCONQUE

Par B. Ivanović

L'auteur montre qu'il existe de cas où l'on peut à l'aide de la déviation standarde, arriver à un résultat plus précis qu'à l'aide de moments d'ordres supérieurs et donne l'analyse de ces cas.

РЕШАВАЊЕ ПАРЦИЈАЛНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРОСТИРАЊА ТОПЛОТЕ ПОМОЋУ МРЕЖНОГ АНАЛИЗАТОРА

ДУШАН МИТРОВИЋ и РАЈКО ТОМОВИЋ (Београд)

I. Увод

Универзални мрежни анализатори за наизменичну струју [1][1] постали су данас неопходно средство за испитивање и пројектовање сложених електричних система. У исто време, усавршавањем њихове конструктивне стране, они добијају све више обележја и општих аналогних машина и, као такви, употребљавају се за решавање проблема изван области електротехнике. На широке могућности примене мрежних анализатора у разним областима, нарочито теориске хемије и физике, први је указао у пуној мери Gabriel Kron [**2**, **3**, **4**, **5**, **6**], у својим радовима објављеним од 1943 год. надаље, а затим и други аутори [**7**, **8**, **9**].

Циљ овога рада је био да се оцени практична корист нашег анализатора у решавању парцијалне диференцијалне једначине простирања топлоте аналогним путем. Питање је интересантно са техничке тачке гледишта, где је много пута врло важно добити, брзо и лако, читав скуп решења једне исте једначине за разне вредности параметра а са ограниченом тачношћу. Нас је интересовало: у којим ће се границама поклапати решења добијена на анализатору и аналитичким путем као и брзина рада код аналогне методе.

II. Принцип употребе анализатора

Ми смо се ограничили на пример једнодимензионог простирања топлоте кроз хомогену средину, одређен парцијалном диференцијалном једначином

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{k}{c\cdot\rho}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\,, \tag{1}$$

где су: θ температура, t време, x дужина, k проводност средине, c специфична топлота, ρ специфична густина. При томе су узети следећи услови

$$\theta(x,0)=0;\quad \theta(0,t)=0,\quad \theta(l,t)=1\,. \tag{2}$$

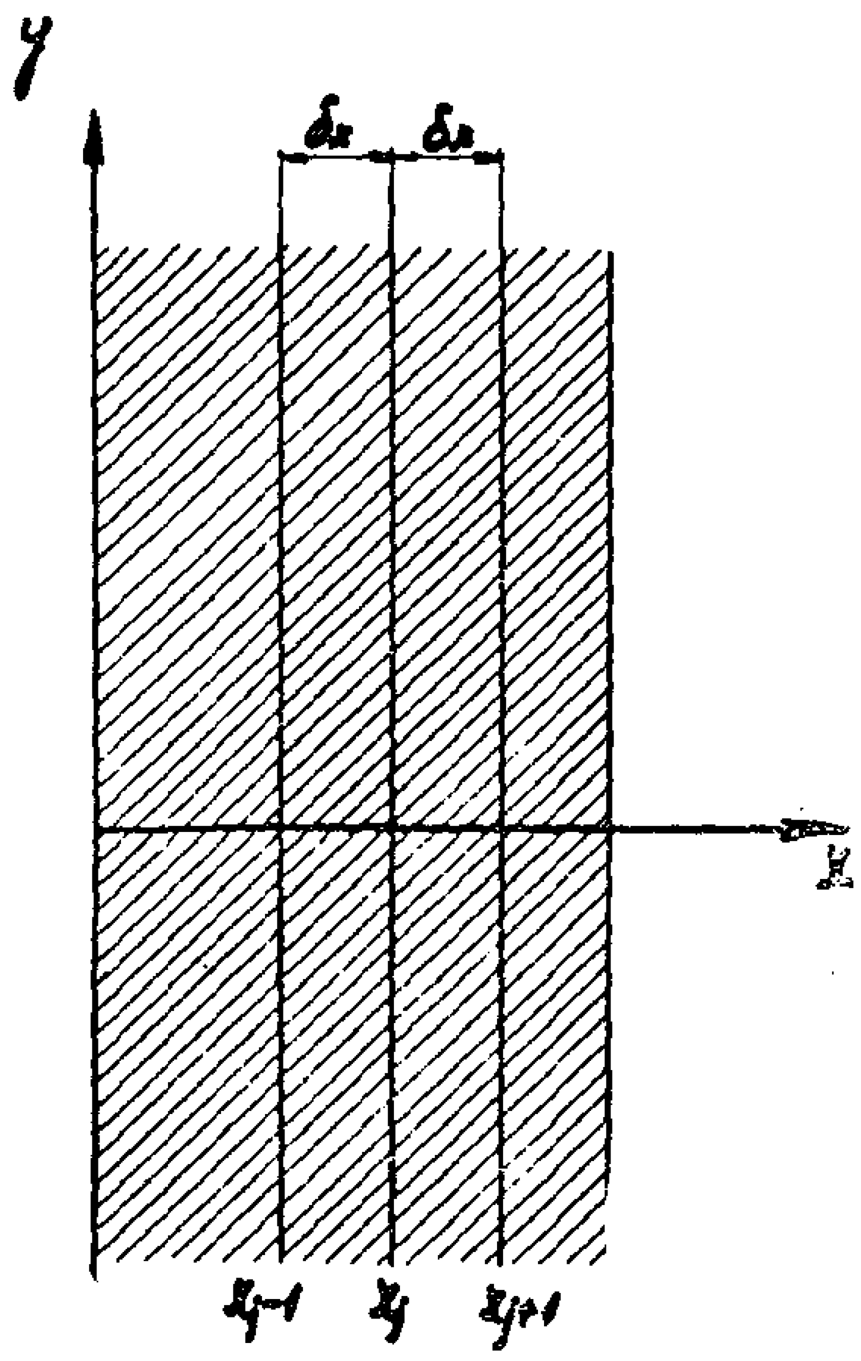
---

[1]) Бројеви у угластим заградама односе се на литературу на крају чланка.

Физички, ови услови одговарају случају зида од хомогеног материјала дебљине l (сл. 1), који је на температури 0^0 за $t<0$. За $t\geqslant 0$, десна површина зида доводи се на температуру $\theta=\mathrm{const.}$ Овај пример узет је из следећих разлога. Прво, јер се резултати мерења могу контролисати помоћу аналитичког решења једначине за поменуте услове

$$\theta(x,t)=1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}\,e^{-\frac{k}{c\rho}(2n-1)^2\pi^2 t/4l^2}\cdot\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \tag{3}$$

Друго, што је карактеристичан за овај начин решавања јер вишедимензионални проблем и разни почетни и гранични услови не уносе квалитативно нове моменте код добијања решења аналогним путем [10]. Према томе, искуство са овога примера може да послужи као оријентација у даљем раду са нашим мрежним анализатором.



Сл. 1

Решавање парцијалних диференцијалних једначина на аналогним машинама врши се свођењем на систем обичних диференцијалних једначина. [10]. То се постиже тако што се извод по једној независно променљивој замењује коначним разликама. Ако то учинимо за извод по x, добићемо следећи систем

$$\frac{\partial\theta_j}{\partial t}=\frac{k}{c\rho}\,\frac{\theta_{j-1}-2\theta_j+\theta_{j+1}}{(\delta x)^2};\qquad j=1,2,\ldots n. \tag{4}$$

Утицај броја n на тачност аналогних решења, нарочито код једначина као под (1), описан је у литератури из ове области [10]. У нашем примеру узето је $n=10$, што је потпуно довољно с обзиром да се аналогним путем врло тешко постижу резултати испод $1^0/_0$ отступања од тачних вредности.

Еквивалентна шема са електричним елементима анализатора за једначину (4) изгледа као што је то приказано на сл. 2.

То је, уствари, упрошћена шема једног кабла са концентрисаним параметрима где су G одводност и L индуктивитет занемарени.

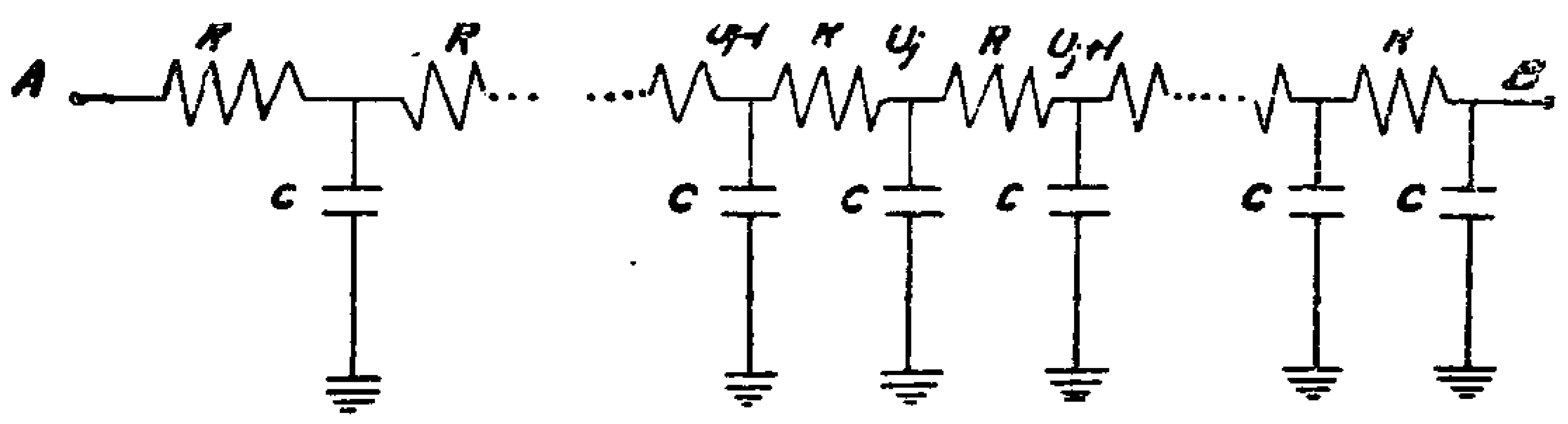
Једначина простирања електричних појава дуж кабла је

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{R_0 C_0} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{5}$$

или за случај концентрисаних параметара

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = \frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{R_0 C_0}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

где је U напон, R_0 отпор по јединици дужине, C_0 капацитет по јединици дужине.



Сл. 2. — Еквивалентна шема једначине (4) на анализатору

Поређењем једначина (4) и (6) види се да промене напона у неком чвору (сл. 2) могу да прикажу варијације температуре на одговарајућем месту зида (сл. 1), и то у размери

$$\frac{1}{R_0 C_0} = \frac{\frac{k}{c\rho}}{(\delta x)^2}. \tag{7}$$

III. Намештање система и мерење

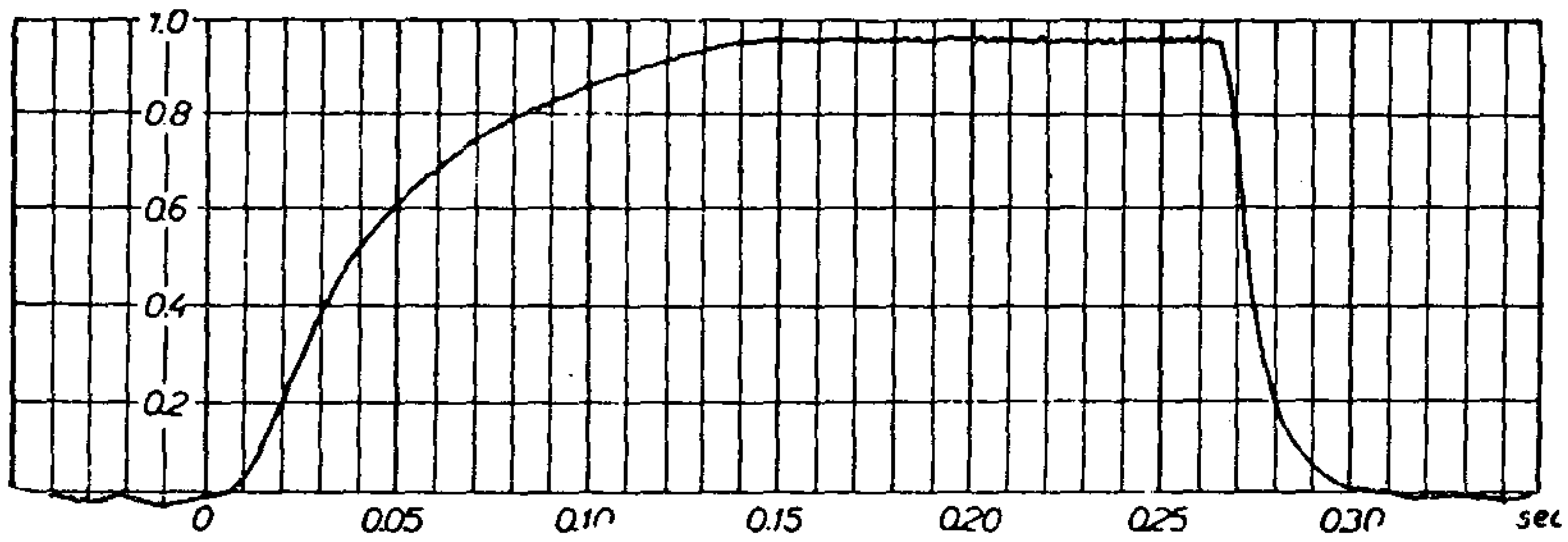
Овде се поставља важно практично питање да се екстремне вредности величина R_0, C_0, U крећу у опсезима анализатора и мерних уређаја.

Полазне вредности су одређене природом посматране термичке појаве и износе $l = 0{,}0316$ м., $k/c\rho = 0{,}01$ и $\delta x = 0{,}00316$ м. ($n = 10$). Из једначине (7) излази $R_0 C_0 = 0{,}001$ а, према опсезима анализатора, усвојено је $R_0 = 1000\,\Omega$, $C_0 = 1\,\mu F$.

Услови из једначине (2) остварују се електрично врло лако тиме што су кондензатори на сл. 2 пре почетка рада ненапуњени, а за $t = 0$ крај B веже се за константан извор напона $U(l, t) = 1$. Одмах се истиче велика предност аналогног решавања за техничке сврхе, јер се разни почетни и гранични услови за дату једначину остварују на истој шеми одговарајућим подешавањем напонских прилика.

Решења једначине (4) на мрежном анализатору добијају се као слике напона $U(x_j, t)$ на катодном или магнетном осцилографу, односно на сличним уређајима за бележење временски промењивих функција.

Како је временска учестаност појава дозвољавала, ми смо користили за дефинитивно бележење резултата магнетни осцилограф, где светлосни зрак директно исписује на фотографској траци криву напона тачке у коју је инструмент укључен. Једна таква фотографија дата је на слици 3.



Сл. 3. — Решење добивено аналогним путем $x_j = x_1 = 1 \cdot \delta x$

Звучна виљушка, са константним бројем трептаја, аутоматски бележи време сваких 0,01 sec., у облику вертикалних црта. Тачност бележења времена на овај начин је таква да практично потпуно отпада као извор грешке.

Метода је ограничена у погледу тачности, углавном, прецизношћу магнетног осцилографа, елемената анализатора, ширином траке за снимање и електричним сметњама са стране. Корисна ширина траке на којој се снимало износила је 100 мм.

Нас је у великој мери интересовало поклапање вредности ордината које смо мерили у милиметрима на сликама, за десет разних тачака x_j и за разно t, са вредностима добијеним из једначине (3). Отступања нису била већа од 2% у најгорем случају.

Исход мерења показује да се наш анализатор може на задовољавајући начин употребити код решавања техничких проблема у вези са простирањем топлоте у нестационарном стању.

IV. Апроксимација решења полиномом

Известан недостатак аналогне методе је свакако у томе што не даје решења за све вредности од x. При томе се, наравно, мисли да се ништа не мења у еквивалентној шеми. У том циљу, ми смо покушали да из експерименталних података $U(x_j, t)$ нађемо израз који ће, са извесном грешком, дати решење у целом домену интеграције.

Као основа послужила је Њутнова интерполациона формула за еквидистантне вредности аргумента. Она је прво примењена за апроксимацију по t

$$\theta(0{,}1,\ t) = -0{,}153 + 24{,}19\,t - 195{,}6\,t^2 + 574\,t^3,$$

$$\theta(0{,}5,\ t) = 0{,}064 + 22{,}6\,t - 207{,}7\,t^2 + 676\,t^3, \tag{8}$$

$$\theta(0{,}9,\ t) = 0{,}763 + 6{,}34\,t - 62{,}5\,t^2 + 208\,t^3.$$

Како су у посматраном интервалу коефицијенти уз t непрекидне функције од x, то је на њих поново примењена интерполациона формула[1])

$$+(-168 - 362\,x + 494\,x^2)\,t^2$$

$$+(459{,}5 + 1323\,x - 1780\,x^2)\,t^3.$$

Полиноми трећег реда по t и другог по x узети су због услова да грешке услед апроксимације засебно по x и t, не пређу 1% у односу на вредности мерене на анализатору.

Ради контроле тачности, испитано је поново подударање вредности из једначина (9) и (3) за низ парова x и t из домена интеграције. Ова отступања нису била већа од 3% (изузев за мале вредности t, где је θ врло мало па свако отступање даје велики проценат).

V. Закључак

Брзина рада на анализатору чини свакако ову методу решавања парцијалних диференцијалних једначина врло погодном за анализу практичних задатака. Стварно трајање једног решавања, као што се види на слици 3, свега је 0,3 sec. или за свих десет кривих 3 sec. Томе треба додати и време за манипулацију и намештање еквивалентне шеме које је реда десетак минута.

Предности аналогног решавања истичу се нарочито код мењања почетних и граничних услова, јер време за постављање шеме долази само једном у обзир за дату једначину.

Заправо, ови случајеви и претстављају тежиште употребе анализатора, а овај пример је више обрађен са гледишта упоређења аналогне методе и аналитичке. Вишедимензионални проблеми такође не захтевају некакве нове експерименталне уређаје сем већег броја RC елемената. Другим речима, њихово третирање је ограничено бројем R и C кутија анализатора.

---

[1]) У једначину су унете релативне вредности x у односу на 1.

У случају кад се тражи кретање појаве у целом домену интеграције, може се на основу једног скупа снимака $U(x_j, t)$ добити и континуално апроксимативно решење ради евентуалне потпуније анализе проблема.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Митровић и Р. Томовић — Мрежни анализатор Института за електропривреду, Електропривреда, бр. 4, стр. 163, 1950.

[2] Kron G. — Equivalent circuits for oscillating systems and the Riemann Christoffel curvature tensor. *Elec. Eng.*, vol. 62, p. 27, January 1943.

[3] Kron G. — Equivalent circuits to represent the electromagnetic field equations. *Phys. Rev.*, vol. 69, p. 126, 1943.

[4] Kron G. — Equivalent circuit of the field equations of Maxwell. *Proc. I. R. E*, vol. 32, p. 289, May 1944.

[5] Kron G. — Electric circuit models of the Schrödinger equation. *Phys. Rev.*, vol. 67, p. 39, 1945.

[6] Kron G. — Electric circuit models for the vibration spectrum of polyatomic molecules. *Journ. of Chemic. Phys.*, vol. 14, p. 19, January 1946.

[7] K. Spangenberg, G. Wallers and F. Schott — Electrical network analysers for the solution of electromagnetic field problems *Proc. I. R. E.*, vol. 37' p. 724, July 1949.

[8] James H. Green and Victor B. Corey — The analog solution of simultaneous partial differential equations by means of passive and active electrical networks. *Phys. Rev.*, vol. 78, p. 328, May 1950.

[9] L. M. Haupt — Solution of simultaneous equations through use of the A. C. network calculator. *RSI*, vol. 21, p. 683, August 1950.

[10] D. R. Hartree, — Calculating instruments and Machines, Urbana Press 1949.

SOLUTION OF THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE HEAT-FLOW ON THE A. C. NETWORK ANALYSER

D. Mitrović and R. Tomović

In order to examine the possibilities of the a. c. network analyser applied to the solutions of some types of the partial differential equations, the case of the heat flow in one dimension through homogenous medium with the given boundary condition, was worked out.

The results obtained on the a. c. network analyser are compared with the analytic solutions of the same equation.

The agreement between the analog and calculated solutions has been found satisfactory for most practical purposes and the analog method can be expanded without restrictions to the more complex cases.

At the end, it is shown that a continuous solution of the given equation can be approximated from the set of the analyser records when using the interpolation polynomials in two variables.