

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Марина Подунавац

**Еволуција путања планета у настањивим зонама  
посматраних система типа П и С помоћу интегратора  
REBOUND**

мастер рад

Београд, 2024.

**Ментор:**

др Анђелка Ковачевић, ванредни професор  
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Чланови комисије:**

др Наташа Тодоровић  
виши научни сарадник Астрономске опсерваторије у Београду

др Душан Марчета, доцент  
Универзитет у Београду, Математички факултет

Захваљујем се ментору, др Анђелки Ковачевић на великој помоћи при изради ове мастер тезе. Захваљујем јој се и на предлогу теме, такође и за бројне савете, корекције који су обликовали ову тезу.

Захвалила бих се др Наташи Тодоровић, на предлозима у вези REBOUND интегратора као и на детаљном читању рада из чега је проистекло много корисних савета.

Захваљујем се др Душану Марчети који је дао корисне савете.

*Мот оцу, мајци и брату*

**Наслов мастер рада:** Еволуција путања планета у настањивим зонама посматраних система типа П и С помоћу интегратора REBOUND

**Резиме:** За еволуцију планетских система коришћен је REBOUND интегратор. Приказан је развој планетиног боравка у два типа настањивих зона П и С. Анализирано је шест планетских система; три П тип система и три С тип система двојних звезда. П тип системи су: Кеплер 64, Кеплер 38, Кеплер 453, док су С тип системи: GJ 15, GJ 86, HD 8673. Показано је да секундар неће имати утицаја на границе настањивих зона око примара, ни на ексцентричност планета. Такође је показано у два примера Кеплер 453 и HD 8673 да ће планете ових система улазити и излазити из настањивих зона током периода од 100000 година.

**Кључне речи:** двојне звезде, егзопланете, настањиве зоне, REBOUND интегратор.

# Садржај

<b>1. Увод</b> .....	8
1.1. Циљ и задатак .....	10
1.2. Садржај глава.....	11
1.3. Особине двојних двојних звезда и њихова класификација .....	12
1.3.1. Визуелно двојне звезде .....	13
1.3.2. Спектроскопски двојне звезде.....	15
1.3.3. Еклипно двојне звезде .....	17
1.3.4. Тесне двојне звезде .....	18
1.4. Путањски елементи двојних звезда .....	19
1.5. Дефиниција егзопланета .....	22
<b>2. Појам циркумстеларне настањиве зоне и опис неких њихових модела</b> .....	23
2.1. Утицај звездине спектралне расподеле енергије (star's SED – spectral energy distribution) .....	24
2.2. Ексцентричност путање планете .....	25
2.3. Израчунавање спектралног тежинског фактора звезда.....	26
<b>3. REBOUND интегратор</b> .....	28
3.1. Класичан проблем N тела .....	29
<b>4. Резултати и дискусија</b> .....	31
4.1. Прикупљање података .....	31
4.2. Напомене за задатке .....	32
4.3. Двојни систем П типа - Кеплер 64 .....	36
4.4. Двојни систем П типа - Кеплер 38 .....	43
4.5. Двојни систем П типа - Кеплер 453 .....	50

4.6. Двојни систем С типа - GJ 15 .....	57
4.7. Двојни систем С типа - GJ 86 .....	67
4.8. Двојни систем П типа - HD 8673 .....	75
<b>5. Закључак.....</b>	<b>83</b>
<b>6. Литература .....</b>	<b>85</b>

# Глава 1

## Увод

Прве егзопланете<sup>1</sup> које су откривене и потврђене, су се налазиле око пулсара. Откривене су 1992 (Aleksander Wolszczan & Dale Frail, 1992). Три године касније откривена је планета која је кружила око 51 Pegasi (Michel Mayor & Didier Queloz, 1995). То је била прва звезда главног низа око које је откривена егзопланета. Најближа егзопланета која је лоцирана налази се у орбити Proxima Centauri. Егзопланета је од Земље удаљена 4.2 светлосне године<sup>2</sup>.

Edward Maunder први представља концепт *циркумстеларне настањиве зоне* 1913 године у свом делу "Are The Planets Inhabited?". Астрофизичар Su-Shu Huang први уводи појам *настањиве зоне* ("The Problem of Life in the Universe and the Mode of Star Formation", 1959), као подручје око звезде где течна вода може да постоји и био је први који га је представио у контексту настањивости планете и ванземаљског живота. Huang је испитивао настањиве зоне двојних система и закључио да би циркумстеларне настањиве зоне биле ретке у вишеструким звезданим системима услед гравитационих нестабилности у тим системима ("Life-Supporting Regions in the Vicinity of Binary Systems", 1960). Концепти настањиве зоне су се мењали током година, док 1993 године Kasting није увео појам циркумстеларне настањиве зоне да би прецизније указао на регион познат као настањива зона. Први је увео детаљан модел за настањиве зоне егзопланета који ће се и користити у овој тези.

Будући да звездани системи представљају значајан део популација у нашој галаксији, њихово проучавање, укључујући планете које орбитирају ове системе, може дати детаљан увид у разноликост планетарних система и услове који су погодни за живот на планетама. У двоструким звезданим системима, настањиве зоне су знатно сложеније него у системима са једном звездом. Досадашње студије су откриле различите типове настањивих зона, укључујући П-тип (циркумбинарне) и С-тип (циркумстеларне) зоне (Слика 1). У П-тип системима, планета орбитира око обе звезде на значајном растојању од њих, док у С-тип системима, за планету је потребна стабилна орбита изван динамички нестабилних региона због гравитационих интеракција између звезда. У оба случаја, критично је оценити гравитационе ефекте који могу довести до избацивања планета из настањивих зона њихових матичних звезда.

Процењује се да 50-70% свих звезда у нашој галаксији чине део двоструких или вишеструких система. С развојем истраживања вансоларних планета, откривено

---

<sup>1</sup> Видети дефиниције егзопланета у 1.5.

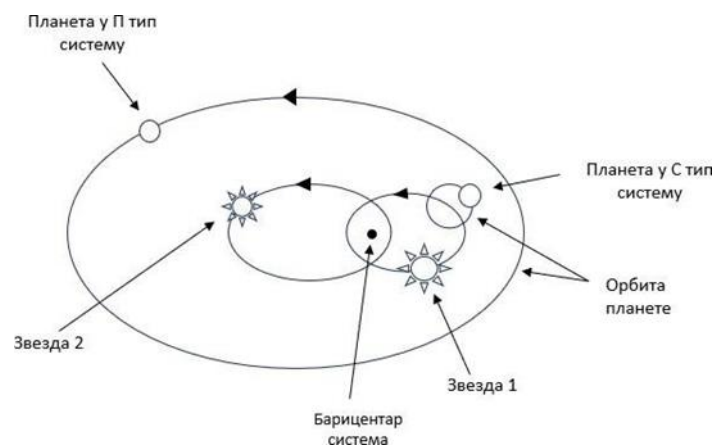
<sup>2</sup> 1 светлосна година = 9 460 730 472 580.8 km



је, током писања овог рада, преко 5651<sup>3</sup> планета, многе од којих могу бити део двојних или вишеструких звезданих система.

Према подацима *exoplanet.eu* у П-тип системима је досада откривен 21 звездани систем са планетама, док је у С-тип системима откривено 197 звезданих система са планетама.

Моделирање и анализа еволуције орбиталних параметара планета помажу у идентификацији настањивих зона и у одређивању времена које планете могу провести у овим зонама, што је кључно за будуће програме у потрази за вансоларним планетама са потенцијалом за живот.



Слика 1: Структура П и С система двојних звезда. Стрелице означавају смер кретања тела у овим системима.

<sup>3</sup> <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>

## 1.1. Циљ и задатак

Неопходно је за издвојене двојне системе П и С типа, помоћу података из астрономских база, показати еволуцију боравка егзопланете у овим системима у настањивим зонама примара. За симулације планетских система посматраних двојних звезда била је употребљена интеграциона конфигурациона схема (IAS15), доступна у оквиру REBOUND интегратора. У циљу процене ексцентричности планетине путање и стабилности планетиног боравка у настањивој зони примарне звезде, нумеричке интеграције за одређене почетне параметре су биле спроведене у периоду од 100000 година. Као улазни подаци симулација су сакупљени неопходни параметри двојних звезданих система и њихових планета из великих база података *Encyclopaedia of exoplanetary systems*<sup>4</sup>, *The Open Exoplanet Catalogue*<sup>5</sup>, *The VizieR*<sup>6</sup> као и из друге доступне научне литературе. Очекује се да добијени резултати REBOUND симулација омогуће представљање еволуције ексцентрицитетa планета на дугим временским периодима, да би се на тај начин испратила стабилност путање и истовремено време планетиног боравка у настањивој зони двојних система. Очекује се да сви ови резултати омогуће предвиђање стабилности настањивих зона двојних система. Кроз разне примере ће се, поред горе наведеног, приказати орбите објеката двојног система, растојања планета од звезда, израчунати границе настањивих зона, статуси планета у настањивим зонама, гравитациони потенцијал између звезде и приказати настањиве зоне око примара.

---

<sup>4</sup> <https://exoplanet.eu/home/>

<sup>5</sup> <https://openexoplanetcatalogue.com/>

<sup>6</sup> <https://vizier.cds.unistra.fr/>

## 1.2. Садржај глава

У првој глави је дат увод. У њему је укратко описан садржај, циљ и задатак рада. Дате су особине двојних звезда и њихова класификација. Описан је сваки тип двојних звезда. Описани су орбитални елементи звезда, елементи елипсе. Дефинисане су егзопланете.

У другој глави су дефинисане настањиве зоне, описани модели зона. Описана је ексцентричност, дефинисан спектрални тежински фактор звезди и дата формула за његово израчунавање. Формуле за израчунавање граница настањивих зона П и С типа су такође дате.

У трећој глави је описан REBOUND интегратор и схема IAS15. Описана је Гаус-Радау квадратура која је интегрисана у IAS15. Описан је класичан проблем N тела из механике који је имплементиран у REBOUND.

У четвртој глави се налази поставка задатка и анализа резултата. Садржи информације одакле су извучени подаци потребни за извршавање задатка. Дате су и формуле за израчунавање података који недостају. Урађени су примери и извршена је анализа резултата. Дата решења су приказана преко слика и табела.

У последњој глави се налази закључак о раду.

### 1.3. Особине двојних звезда и њихова класификација

Звезде које су довољно близу једна другој да се међусобно гравитационо привлаче, називају се *двојне или вишеструке звезде*. Међутим термин двојне звезде може укључити и три па чак и више звезда у систему. У тројном систему растојања између компонената могу бити различита, па тако две звезде могу бити на кратком растојању, док се трећа компонента налази на већој удаљености од обе звезде.

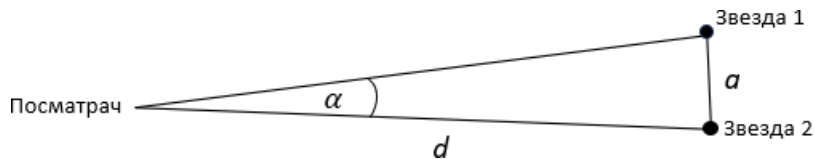
Двојне звезде се крећу око заједничког центра масе по Кеплеровим законима. Свака од звезда има своју орбиту око заједничког центра масе. У анализи примера занемариће се чињеница да се звезде крећу око заједничког центра масе. Секундар ће се кретати око примара који се налази у барицентру, док ће положај планете бити различит у зависности од типа двојног система.

Према методу који се користи за детекцију двојних звезда, можемо двојне звезде поделити на:

- Визуелно двојне звезде
- Спектроскопски двојне звезде
- Еклипно двојне звезде
- Тесне двојне звезде

Да би раздвојили две звезде на растојању  $d$ , од посматрача, можемо користити доњу формулу за мале углове, где се две компоненте на међусобном растојању  $a$ , виде под углом  $\alpha$ ["]<sup>7</sup>:

$$\alpha = ad/206265 \quad (1)$$



Слика 2.

За визуелне звезде које се посматрају телескопима са великим дометом, доња граница за мерење угла  $\alpha$  је реда 0.2 лучне секунде<sup>8</sup> на небу. Ова граница зависи и од услова под којима се посматрају објекти.

За бинарне звезде са  $\alpha < 1''$  компоненте се раздвајају помоћу интерферометра и тада можемо добити вредност за  $\alpha \sim 0.03''$ .

<sup>7</sup> при чему је величина 206265 број лучних секунди у једном радијану.

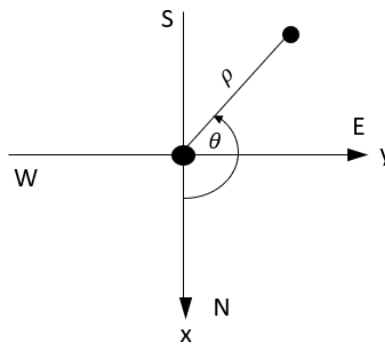
<sup>8</sup>  $1'' = 1/d[\text{pc}]$ ,  $d[\text{pc}] = 206265 \text{A.U.} = 3.0857 \times 10^{13} \text{km}$ .

### 1.3.1. Визуелно двојне звезде

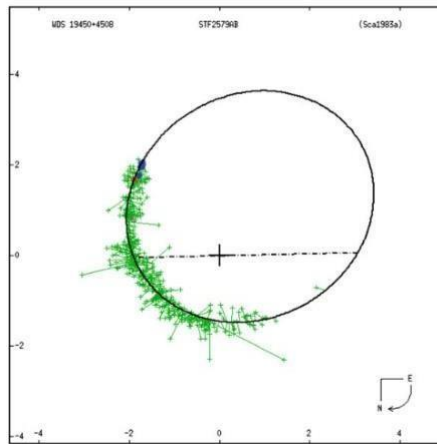
Звезде које се визуелно или телескопски могу раздвојити једна од друге називају се *визуелно двојне звезде*. Да би описали положај таквих звезда у систему потребно је знати релативан положај  $\rho$ ["] једне звезде у односу на другу, као и позициони угао  $\theta$ [deg] који се мери у интервалу  $[0^\circ, 360^\circ]$ . Постављањем веће звезде у координатни почетак (Слика 3), позициони угао  $\theta$  се дефинише као угаоно растојање између две звезде, док се релативним положајем види колико је удаљена једна звезда од друге. Мерења за угао  $\theta$  се врше од севера N који означава  $0^\circ$ , E је  $90^\circ$ , итд. Да би одредили положај секундара у односу на примар треба мерити, у дугим временским интервалима, обе поларне координате  $(\rho, \theta)$  и превести их у правоугле координате  $(x, y)$  помоћу следеће везе:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta \\y &= \rho \sin \theta\end{aligned}$$

На слици 3а је дат пример у коме је описана привидна орбита секундара у односу на примар који се налази у  $(0, 0)$ . Зеленом бојом, на орбити секундара и око ње, су обележене координате секундара  $(\rho, \theta)$  које су мерене током више деценија посматрања.



Слика 3: Постављање правоуглог и поларног координатног система у двојном систему звезда.



Слика 3а: Визуелни двојни систем  $\delta$  Cygni (извор USNO<sup>9</sup>). У црном крстићу је примар, док је орбита секундарна описана око примара.

<sup>9</sup> USNO - The U.S. Naval Observatory, <https://www.cnmoc.usff.navy.mil/usno/>

### 1.3.2. Спектроскопски двојне звезде

Двојне звезде које су сувише далеко да би се виделе као визуелне или су сувише близу једна друге да би се раздвојиле називају се *спектроскопски двојне звезде*. Код оваквих звезда посматра се спектар звезда и прати Доплерово померање линија у спектру звезда. Доплеров ефекат се изражава формулом:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

$\lambda$  – регистрована таласна дужина

$\lambda_0$  – емитована таласна дужина

$v_{rad}$  – радијална брзина

$c$  – брзина светлости ( $c \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ )

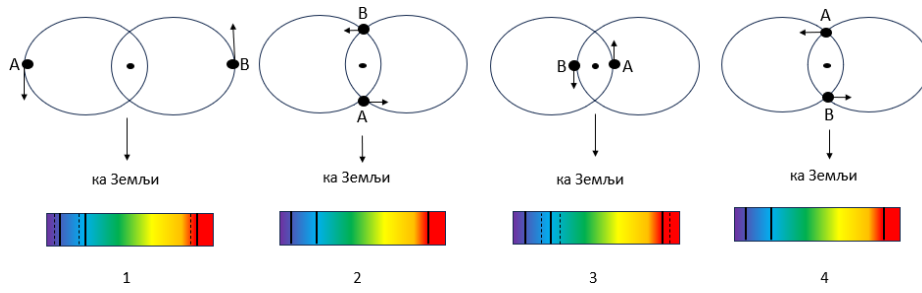
Ако се двојни систем не може раздвојити на компоненте онда добијени спектар представља комбинацију спектра обе звезде. У случају да је једна компонента система сјајнија од друге може се добити спектар само једне сјајније звезде и приметити периодично кретање линија ка плавом тј. ка црвеном делу спектра. Ако се спектралне линије крећу ка плавом делу спектра уочава се да се звезда приближава посматрачу, док у случају померања линија ка црвеном делу спектра звезда се одмиче од нас. Ако добијемо спектар обе звезде, приближног сјаја, имаћемо периодично раздвајање спектралних линија. Када су компоненте максимално раздвојене види се највећи помак линија у спектру (Вукићевић-Карабин и Атанацковић, 2010).

На слици 4а можемо да видимо везу између померања линија у спектру звезда и самог положаја звезда. На првој слици, звезда А се креће ка посматрачу па се њене линије у спектру померају ка плавом делу спектра, док се звезда В креће од посматрача, па се линије померају ка црвеном делу спектра. На другом и четвртом лику звезде су на линији посматрања, па немамо померај линија у спектру. На трећем лику видимо обрнуту ситуацију од првог лика. Сада се линије за звезду В померају ка плавом делу спектра, док се код звезде А линије померају ка црвеном делу.

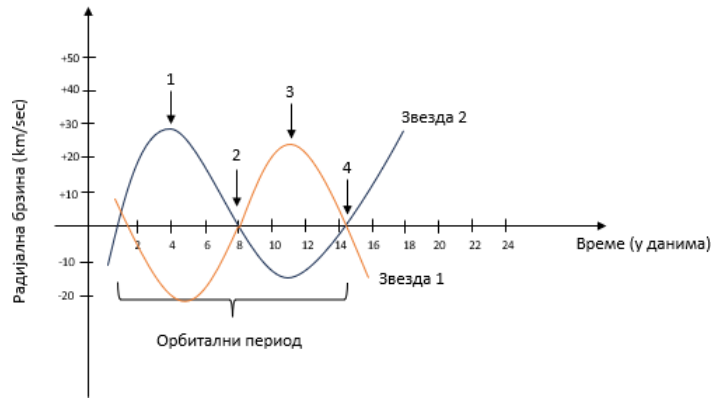
Из мерених Доплерових помака линија у спектру звезда добијају се криве радијалних брзина, 4б. Крива радијалних брзина има на x-оси орбитални период дат у данима, док је у-оси дата радијална брзина дата у km/sec.

Из криве сјаја извлачимо податке о радијалној брзини и орбиталном периоду звезда. Радијална брзина ће имати негативну вредност када се звезда приближава посматрачу, а позитивну када се удаљава.

а



б



Слике 4а и 4б: Спектар и крива радијалних брзина звезде.



### 1.3.3. Еклипно двојне звезде

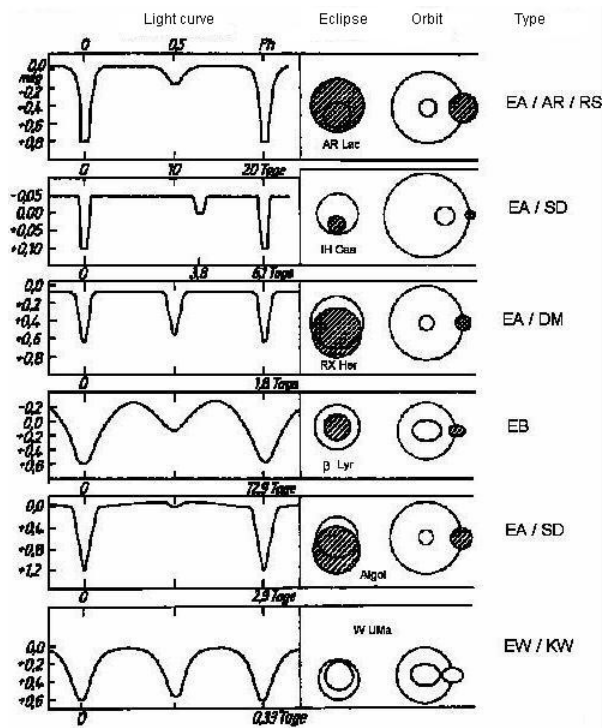
Метод потребан за детекцију *еклипсног типа двојних* звезде јесте фотометријско мерење. Многе звезде показују периодичну промену у својој привидној магнитуди. До промене сјаја може доћи услед помрачења између две звезде. Помрачења се дешавају јер је орбитална равна у односу на посматрача оријентисана тако да се у току кретања звезде међусобно помрачују. У криви сјаја можемо видети разлику у магнитудама током времена. Крива сјаја изгледа другачије у зависности од тога да ли је помрачење тотално, делимично или прстенасто.

На слици 5 можемо видети типове помрачења у зависности од типова звезда. Описаћемо један од примера на слици.

На првој слици имамо бинарни систем  $V^* AR Lac$  који се састоји од звезде сличних маса али различитих температура. Прва звезда је спектралне класе  $G2 IV$ ,  $1.23M_{\odot}$ , радијуса  $1.8R_{\odot}$ , температуре  $5560K$  друга је класе  $K0 IV$ , радијуса  $3.1R_{\odot}$ , температуре  $4100K$ .<sup>10</sup> У овом примеру можемо да видимо како већа звезда скроз прекрива мању, јачег сјаја. Услед овога видимо велики пад у криви сјаја, тј. велику разлику у магнитудама. Када имамо мањи пад тада мања звезда, јачег сјаја, прекрива већу. Ширина у дубини криве означава колико траје време транзита, док једна звезда прелази преко друге.

---

<sup>10</sup> пример преузет из [7] и [8]



Слика 5: Примери у којима се виде различити типови помрачења. Слика преузета из [34].

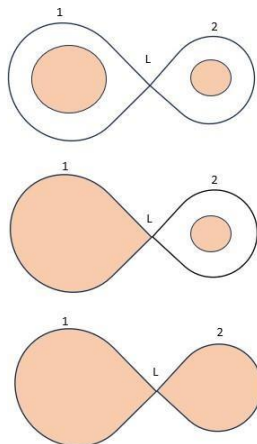
### 1.3.4. Тесне двојне звезде

Према Вукићевић-Карабин и Атанацковић (2010), код *тесних двојних звезда* растојање између компонената упоредиво је са њиховим димензијама, па размена материје међу компонентама мења ток њихове еволуције. Због близине компонената помрачење је веома могуће, па се опет анализирају криве сјаја.

На слици 6 приказане су две звезде, различитих маса. Гледајући редом видимо одвојени, полуодвојени и контактни двојни систем. Замишљена површ која је приказана назива се критична Рошова површ. То је екипотенцијална површ која ограничава два Рошова овала са заједничком тачком L (унутрашња Лагранжова тачка). Ова тачка лежи између компонената на правцу који повезује њихове центре и у њој је резултанта свих сила у систему једнака нули. Маса је везана за звезду док се налази унутар критичног Рошовог овала који дефинише највећу могућу запремину стабилне компоненте. У сваком овалу доминира гравитација једне компоненте.

Када једна од компонената у току своје еволуције попуни Рошов овал, она постаје нестабилна. У околини тачке L маса је у лабилној равнотежи, па њен и најмањи поремећај изазива истицање ка другој компоненти.

На тај начин звезда која је попунила Рошову запремину може да изгуби знатан део своје масе. Компоненте могу тако заменити своје улоге, па првобитно масивнија звезда еволуира у звезду мање масе, а мање масивна, примивши део масе преко L тачке, постаје масивнија компонента тесног двојног система. (Вукићевић-Карабин, Атанацковић, 2010).



Слика 6: Класификација тесно двојних система према попуњености Рошовог овала. Од горе на доле приказани су одвојени, полуодвојени и контактни двојни систем.

#### 1.4. Путањски елементи двојних звезда

Звезде и планете око њих, се крећу по Кеплеровим законима, по елиптичним путањама, око истог барицентра (центра масе). Елементи елиптичне путање планете, где се звезда налази у једном од фокуса елипсе ( $F_1$ ), се записују следећи начин:

$$\begin{aligned}
 b^2 &= a^2(1 - e^2) & a, b & \text{ - велика и мала полуоса елипсе} \\
 q &= a(1 - e^2) & q & \text{ - растојање до периастрона} \\
 Q &= a(1 + e^2) & Q & \text{ - растојање до апоастрона} \\
 r &= a \frac{(1 - e^2)}{1 + e \cos v} & r & \text{ - радијус, } v \text{ - права аномалија} \\
 \cos v &= \frac{\cos E(t) - e}{1 - e \cos E(t)} & E & \text{ - ексцентрична аномалија}
 \end{aligned}$$

где  $a$  - одређује величину елиптичне путање, а  $e$  - одређује облик путање

Аномалије потребне да би се у реалном временском тренутку одредио положај планете су  $v$ ,  $E$  и  $M$ .

Права аномалија  $v$ , је угао између правца периастрона и тренутног положаја планете, мереног од звезде.

Ексцентрична аномалија  $E$ , је угао на помоћном кругу (круг чији је пречник велика полуоса елипсе). Мери се од центра елипсе до положаја планете на помоћном кругу при чему  $E \in [0, 2\pi]$

Веза између праве и ексцентричне аномалије:

$$\tan \frac{v(t)}{2} = \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \tan \frac{E(t)}{2} \quad (1)$$

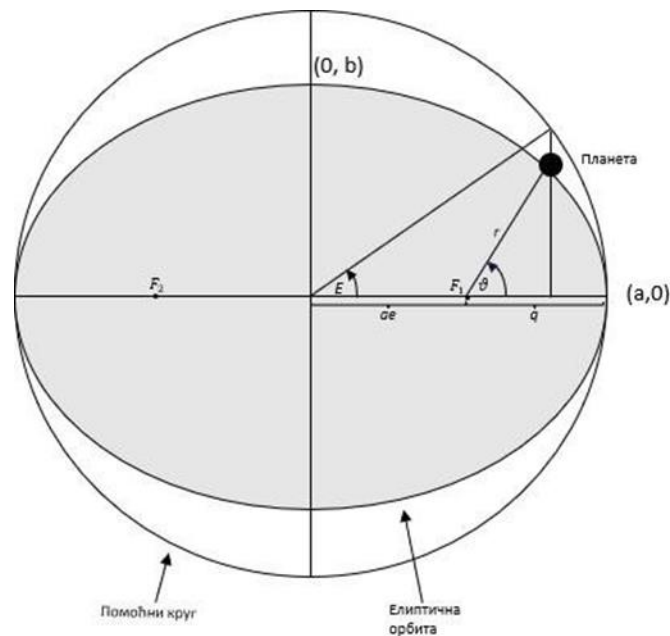
Средња аномалија  $M(t)$ , је угао који се односи на фиктивно средње кретање око орбите. Користи се за рачунање праве аномалије.

Средње годишње кретање,  $n$  је просечна угаона брзина објекта на орбити, док је  $P$  период обиласка орбите:

$$n \equiv \frac{2\pi}{P} [deg] \quad (2)$$

$$M(t) = \frac{2\pi}{P} (t - T) \equiv n(t - T) \quad (3)$$

$t - T$  - време протекло од положаја планете у периастрону



Слика 7: Елементи путање и помоћног круга за одређивање ексцентричности.

Посматрања двојних звезда дају привидну орбиту која представља пројекцију праве орбите на раван нормалну на правац визуре (Слика 8). Да би описали орбиталне елементе за елиптичну орбиту у простору, потребно је одредити седам параметара:

- $a$  [A] – полуоса праве орбите
- $e$  – описује облик орбите,  $0 < e < 1$
- $P$  [god] – период обиласка орбите
- $T$  – време проласка кроз периастрон дато у деловима године

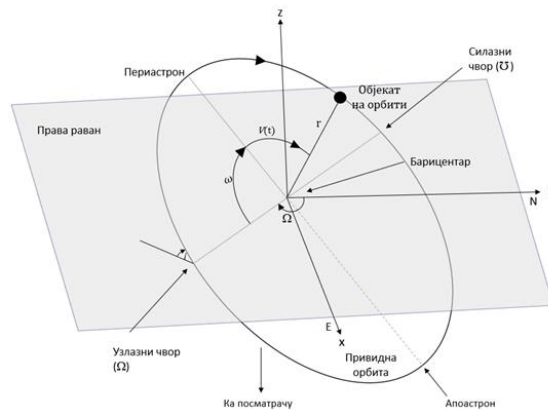
Елементи  $a$ ,  $e$ ,  $P$ ,  $T$  одређују праву орбиту.

Следећа три параметра описују пројекцију праве орбите на привидну орбиту:

- $i$  – инклинација, нагиб орбите у односу на праву раван.  $i \in [0, \pi]$ . Ако је  $i < \frac{\pi}{2}$  кретање дуж орбите је директно,  $i > \frac{\pi}{2}$  ретроградно, а ако је  $i = 0^\circ$  привидна и права раван се поклапају дуж линије посматрања.
- $\Omega$  – лонгитуда узлазног чвора. Мери се у привидној равни, од референтне тачке долиније чворова.  $\Omega \in [0, 2\pi)$ .
- $\omega$  – аргумент периастрона. Мери се у правој равни, од пресека двеју равни (линија чвора) до периастрона.

Веза између привидне и праве равни је дата:

$$\tilde{\omega} = \Omega + \omega, \text{ лонгитуда периастрона}$$



Слика 8: Права раван и привидна орбита и њихови елементи.

## 1.5. Дефиниција егзопланета

IAU (International Astronomical Union – Међународна астрономска унија) је 2022 године дала тренутне радне дефиниције егзопланета:

- Објекти са правим масама испод границе масе потребне за термонуклеарну фузију деутеријума (тренутно израчуната да износи 13 маса Јупитера за објекте са металичношћу Сунца), који круже око звезда, браон патуљака или остатака звезда и који имају однос маса са централним објектом испод L4/L5, (L4 и L5 су Лагранжове тачке<sup>11</sup>) нестабилности ( $M/M_{central} < 2/(25 + \sqrt{621}) \approx 1/25$ ) су “планете” (без обзира на то како су формиране). Минимални однос маса - величина потребни да би се екстрасоларни објекат сматрао планетом треба да буде исти као онај у Сунчевом систему.
- Супстеларни објекти са правим масама изнад границе масе за термонуклеарну фузију деутеријума су “браон патуљци”, без обзира како су формиран и где су лоцирани.
- Слободно плутајући објекти у младим звезданим јатима испод границе масе потребне за термонуклеарну фузију деутеријума који нису “планете” али су “браон субпатуљци”.

---

<sup>11</sup> Лагранжове тачке су тачке равнотеже за објекте мале масе који су под гравитационим утицајем два масивна орбитална тела.

## Глава 2

### Појам циркумстеларне настањиве зоне и опис неких њихових модела

Настањиве зоне се дефинишу као растојање од звезде на којима би течна вода могла да постоји на површини планете која кружи око звезде. Удаљеност зоне мора бити довољно близу звезде да би планета задржала воду на својој површини. Али и довољно далеко, да звезда својом близином не би утицала на залиху текуће воде. Настањиве зоне, које у себи могу потенцијално да садрже планете погодне за живот, су шире за врелије звезде. Код хладнијих звезда настањиве зоне су уже. У ужим зонама планете могу да трпе екстремне вредности зрачења од своје матичне звезде (извор Nasa).

Када је реч о двојном звезданом систему, обе звезде могу имати утицаја на настањиву зону планете. Према Kaltenegger & Haghighipour, (2013) код бинара са угаоним растојањем  $\rho < 50$  АЈ секундар може да има важну улогу у формирању планете са условима потребним за живот. Гравитациони ефекат секундара може утицати и на дугорочну стабилност орбите планете. Како се планета брже креће на својој орбити него секундар на својој, планета ће више пута осетити ефекат секундара. Зрачење секундара може значајно утиче на локацију и домет настањиве зоне.

Да би се одредила локација и домет настањиве зоне, користи се модел Сунчеве настањиве зоне. По том моделу настањива зона подразумева подручје око звезде где стеновита планета са моделом атмосфере  $CO_2/H_2O/N_2$  има на својој чврстој површини трајни резервоар воде. Пример такве планете је Земља (Kaltenegger & Haghighipour, 2013).

У блиском прилазу између две звезде, планетина атмосфера је подложна зрачењу са обе звезде. Укупан флуks који ће стизати на површину атмосфере планете бити ће једнак флуksу који на Земљу стиже на унутрашњу и спољашњу ивицу настањиве зоне Сунца.

На локацију унутрашње и спољашње ивице настањиве зоне утиче и удео облака у планетиној атмосфери. Укупан алbedo планете је функција хемијског састава чисте атмосфере као и додатног хлађења и загревања у атмосфери услед облака,  $A = A_{clear} + A_{cloud}$ . (Kaltenegger & Haghighipour, 2013)

Два модела настањиве зоне ће одређивати уску и емпиријску настањиву зону.

Први укључује границу између ефекта неконтролисане стаклене баште (runaway greenhouse) и максималног ефекта стаклене баште (maximum greenhouse) и овај модел не садржи колики је удео облака у атмосфери. Други модел, емпиријска зона, је изведена на основу флуksа који Венера и Марс примају на својој површини, у тренутку када обе планете не показују на својој површини течну воду (Kaltenegger & Haghighipour, 2013).

## 2.1. Утицај звезде спектралне расподеле енергије (*star's SED – spectral energy distribution*)

Спектрална расподела енергије представља количину енергије коју емитује објекат на различитим таласним дужинама. Како је планета подложна зрачењу од обе звезде, планетина атмосфера ће апсорбовати део од апсолутног упадног флуksа, који ће се разликовати у зависности од звезде расподеле енергије. Бондов алbedo планете се повећава са ефективном температуром звезде јер звезде са већом температуром више фотона емитује на кратким таласним дужинама по површини планетине атмосфере. На кратким таласним дужинама Рејлијево расејање у атмосфери планете је веома ефикасно. Тиме је повећана количина рефлектоване светлости, за врелије звезде. Као резултат тога, апсолутни упадни флуks на површини атмосфере планете је већи заврелије звезде (Kaltenegger & Haghighipour, 2013).

Да би сумирали флуks од сваке звезде понаособ треба да се измери флуks за сваку звезду према њеној спектралној расподели енергије. Укупан флуks који планета прима, у овом случају, једнак је (Kaltenegger & Haghighipour, 2013):

$$F_{Pl}(f, T_{Pr}, T_{Sec}) = W_{Pr}(f, T_{Pr}) \frac{L_{Pr}(T_{Pr})}{r_{Pl-Pr}^2} + W_{Sec}(f, T_{Sec}) \frac{L_{Sec}(T_{Sec})}{r_{Pl-Sec}^2} \quad (1)$$

Опсег настањиве зоне двојних звезда се може добити из једначине:

$$W_{Pr}(f, T_{Pr}) \frac{L_{Pr}(T_{Pr})}{l_{x-Bin}^2} + W_{Sec}(f, T_{Sec}) \frac{L_{Sec}(T_{Sec})}{r_{Pl-Sec}^2} = \frac{L_{Sun}}{l_{x-Sun}^2} \quad (2)$$

Из једначине (2) можемо да изразимо  $l_x$  унутрашњу/спољашњу границу настањиве зоне за звезду бинара:

$$l_{x-Bin} = \left( \frac{W_{Pr}(f, T_{Pr}) L_{Pr}(T_{Pr})}{\frac{L_{Sun}}{l_{x-Sun}^2} - \frac{W_{Sec}(f, T_{Sec}) L_{Sec}(T_{Sec})}{r_{Pl-Sec}^2}} \right)^{1/2} \quad (3)$$

$l_x$  –  $x$  (унутрашња, спољашња) граница настањиве зоне

$L_{Pr}$  – луинозност примара

$L_{Sec}$  – луинозност секундара

$T_{Pr}$  – температура примара

$T_{Sec}$  – температура секундара

$W_{Pr}(f, T_{Pr})$  – спектрални тежински фактор примара

$W_{Sec}(f, T_{Sec})$  – спектрални тежински фактор секундара

$f$  – удео облака у атмосфери планете



## 2.2. Екцентричност путање планете

У раду Kaltenegger & Haghighipour, (2013) коришћење формуле (2) из 2.1. за израчунавање опсега настањивих зона претпоставља да је орбита планете сличне Земљи кружна. У овој тези биће разматране настањиве зоне планета које имају скоро кружну екцентричност до оних са незанемарљивом екцентричношћу. Постојаће одступања од кроз кружне орбите ( $e=0$ ). У двојним системима, на довољно кратком растојању или при блиским прилазима између звезде, секундар може са својом гравитацијом да значајно утиче на екцентричност планете, а самим тим и на њен положај у настањивој зони примара. Такође може и да својим зрачењем, код блиских прилаза, утицати на садржај воде на планетиној површини. Да би се утицај секундара избегао, орбита планете мора да има мале вредности екцентричности, (да буде скоро кружна) да би могла да буде стабилна у настањивој зони.

Уз помоћ велике полуосе бинара, екцентричности бинара и односа маса звезда у систему може се одредити критична полуоса планете за С тип система. Она представља горњу вредност изнад које ће секундар учинити орбиту планете нестабилном. (Rabl & Dvorak 1988; Holman & Wiegert 1999)

$$a_{max} = a_{Bin}(0.464 - 0.38\mu - 0.631e_{Bin} + 0.15e_{Bin}^2 + 0.586\mu e_{Bin} - 0.198\mu e_{Bin}^2) \quad (4)$$

где је:

$$\mu = \frac{m_{Sec}}{m_{Pr} + m_{Sec}} \quad m_{Pr}, m_{Sec} - \text{масе примара и секундара}$$

Док је за П тип граница за планетину стабилности дата: (Dvorak 1986; Dvorak et al. 1989; Holman & Wiegert 1999)

$$a_{min} = a_{Bin}(1.60 + 4.12\mu - 5.09\mu^2 + 5.10e_{Bin} - 2.22e_{Bin}^2 - 4.27\mu e_{Bin} + 4.61\mu^2 e_{Bin}^2) \quad (5)$$

## 2.3. Израчунавање спектралног тежинског фактора звезда

Да би одредили локацију унутрашње и спољашње ивице настањиве зоне за звезде главног низа са вредностима ефективне температуре  $2600\text{K} < T_{star} < 7200\text{K}$  користимо (Коррагару et al. 2013a):

$$l_{x-star} = l_{x-sun} \left( \frac{\frac{L}{L_{sun}}}{1 + \alpha_x(T_i) l_{x-sun}^2} \right)^{1/2} \quad (6)$$

$$\alpha_x(T_i) = a_x T_i + b_x T_i^2 + c_x T_i^3 + d_x T_i^4 \quad (7)$$

где су  $a_x, b_x, c_x, d_x$ - коефицијенти из Табеле 1

Из једначине (6) укупан флуks који планета прима од примара на границама настањиве зоне може се израчунати помоћу:

$$F_{x-star}(f, T_{star}) = F_{x-sun}(f, T_{star}) [1 + \alpha_x(T_i) l_{x-sun}^2]^{-1} \quad (8)$$

Из једначине (6) добијамо спектрални тежински фактор, који се може представити са:

$$W_i(f, T_i) = [1 + \alpha_x(T_i) l_{x-sun}^2]^{-1} \quad (9)$$

$l_x = (l_{in}, l_{out})$  (AJ),  $x =$  (унутрашња, спољашња) граница настањиве зоне

$W_i(f, T_i)$  – спектрални тежински фактор за двојне звезде,  $i = Pr, Sec$

$T_i(K) = T_{star}(K) - 5780$ ,  $T_i$  – ефективна температура звезда,  $i = Pr, Sec$

Формула (6) се примењује се на звезде C типа. За II тип систем се из једначине (3) из 2.1. налазе спољашња и унутрашња ивица настањиве зоне,  $l_{x-Bin}$ .

	Уска зона настањивости		Емпиријска зона настањивости	
	Ефекат неконтролисане стаклене баште	Максимални ефекат стаклене баште	Скорашња Венера	Рани Марс
$l_{x-Sun}(A)$	0.97	1.67	0.75	1.77
Флукс (са Сунца на Земљи)	1.06	0.36	1.78	0.32
$a$	$1.2456 \times 10^{-4}$	$5.9578 \times 10^{-5}$	$1.4335 \times 10^{-4}$	$5.4471 \times 10^{-5}$
$b$	$1.4612 \times 10^{-8}$	$1.6707 \times 10^{-9}$	$3.3954 \times 10^{-9}$	$1.5275 \times 10^{-9}$
$c$	$-7.6345 \times 10^{-12}$	$-3.0058 \times 10^{-12}$	$-7.6364 \times 10^{-12}$	$-2.1709 \times 10^{-12}$
$d$	$-1.7511 \times 10^{-15}$	$-5.1925 \times 10^{-16}$	$-1.1950 \times 10^{-15}$	$-3.8282 \times 10^{-16}$

Табела 1: Коефицијенти једначине (7) из 2.3. (Коррагару et al. 2013b).

## Глава 3

### REBOUND интегратор

REBOUND је софтверски пакет који је интегратор N-тела.<sup>12</sup> Врши интеграцију кретања честица под утицајем гравитације n-масивних тела. Честице могу бити звезде, планете, месеци или честице прашине. REBOUND у себи садржи више интегратора. Нумерички интегратори у REBOUND-у користе проблем N тела. Интегратори показују еволуцију честица кроз време, корак по корак. Интегратори треба да имају тренутну позицију и координате брзине честице и једначине кретања које се налазе у облику диференцијалних једначина. Тачно решење ових једначина је непознато али интегратори апроксимирају решење нумерички. Интегратори који су имплементирани у REBOUND-у су: *IAS15* (Integrator with Adaptive Step-sizecontrol, 15<sup>th</sup> order), *WHFast*, *Gragg-Bulirsch-Stoer* (BS-Bulirsch-Stoer), *MERCURIUS* (Chambers 1999), *TRACE*, *SABA*, *JANUS*, *Leapfrog*, *Symplectic Epicycle Integrator* (SEI), *Embedded Operator Splitting Method* (EOS).

У овој тези се користио IAS15, интегратор вишег реда. Заснива се на Гаус-Радау квадратури. Према Weisstein, Eric W.<sup>13</sup> ова квадратура је поступак за нумеричку процену интеграла. Потребно је  $m + 1$  тачака које одговарају свим полиномима степена  $2m$ , тако да ефикасно одговара свим полиномима степена  $2m-1$ . Једначина има у себи тежински фактор  $W(x)=1$  у којој је крајња тачка  $-1$  из интервала  $[-1, 1]$  укључена у укупан број од  $n$  апциса што даје  $r = n-1$  слободних апциса. Општа формула гласи:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = w_1 f(-1) + \sum_{i=2}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

Слободне апцисе  $x_i, i=2, \dots, n$ , су корени Лежандровог полинома  $P(x)$ :

$$\frac{P_{n-1}(x) + P_n(x)}{1+x} \quad (2)$$

<sup>12</sup> <https://rebound.readthedocs.io/en/latest/>

<sup>13</sup> <https://mathworld.wolfram.com/RadauQuadrature.html>

Тежине слободних апциса су једнаке:

$$w_i = \frac{1 - x_i}{n^2(P_{n-1}(x_i))^2} \quad (3)$$

За  $n=1$  и користећи особине Лежандровог полинома, где је  $P_0(x) = 1$ :

$$w_1 = \frac{2}{n^2} \quad (4)$$

n	$x_i$	$w_i$
2	-1	0.5
	0.333333	1.5

Табела 2: Пример за  $n=2$ .

### 3.1 Класичан проблем N тела

Кретање N тачака са својим масама у њиховом заједничком гравитационом пољу јесте класичан проблем N тела. Нека су дате масе објеката  $m_1, m_2, \dots, m_n$  са векторима положајима  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$  њихових тежишта у координатном систему. Релативни положај масе  $m_k$  према маси  $m_i$  вектор (Миланковић, 1935):

$$\mathbf{l}_{ik} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i \quad (1)$$

Нека је  $\rho_{ik} = |\mathbf{l}_{ik}|$ , то  $\frac{\mathbf{l}_{ik}}{|\rho_{ik}|}$  вектор супротног правца. Како су  $\rho_{ik}$  и  $\rho_{ki}$  дужи које треба сматрати увек позитивним важиће:

$$\rho_{ik} = \rho_{ki} \quad (2)$$

Из претходног важи да маса  $m_k$  делује на масу  $m_i$  силом:

$$f m_i m_k \frac{1}{\rho_{ik}^2} \frac{\mathbf{l}_{ik}}{\rho_{ik}} = f m_i m_k \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i}{\rho_{ik}^3} \quad (3)$$

Привлачна дејства преосталих маса  $m_1, m_2, \dots, m_n$  на масу  $m_i$  добијамо заменом индекса  $k$  другим вредностима тј.  $k=1, 2, \dots, n$ . Једначина кретања масе  $m_i$  ће бити једнака:

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_k f m_i m_k \frac{r_k - r_i}{\rho_{ik}^3} \quad (4)$$

Знак збира се односи на све масе система са изузетком масе  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Једначина представља једначину кретања сваке произвољне масе система, ако је  $i=1, 2, \dots, n$ . Зато  $n$  векторских једначина:

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_k f m_i m_k \frac{r_k - r_i}{\rho_{ik}^3} \quad (5)$$

представљају диференцијалне једначине кретања маса  $m_1, m_2, \dots, m_n$ .

# Глава 4

## Резултати и дискусија

### 4.1. Прикупљање података

Подаци су прикупљени из више научних извора као што су научни радови, научна литература и из великих база података. Из база попут *exoplanet.eu*, *openexoplanetcatalogue.com*, *exoplanetarchive.ipac.caltech.edu*, *cds.unistra.fr* могу се извући разни подаци о звездама и планетама. Странице википедије које дају линкове ка многим научним радовима, омогућавају лакше прибављање података.

*Encyclopaedia of exoplanetary systems - exoplanet.eu*, ова страница садржи каталог планета, базе о планетама у бинарним системима, базе о циркумстеларним дисковима, научне радове и сл. Подаци о планети, садрже информације о маси, радијусу, великој полуоси, инклинацији, години када је откривена планета, име проналазача,... Када се приступи имену планете, у претрази, могу се видети и подаци о матичној звезди. И ту можемо видети податке о звезди. Подаци који су нам на располагању су растојање, спектрални тип, маса, старост, температура и сл. У бази се тренутно налази потврђених 216 С тип двојних система који садрже у себи егзопланету, док П тип система има 27. Потврђених егзопланета има тренутно 7026.

*NASA Exoplanet Archive - exoplanetarchive.ipac.caltech.edu*, је астрономски каталог звезда и егзопланета. Ова страница такође пружа и алате за рад са подацима из каталога. Подаци садрже звездане параметре као што су позиција звезде, сопствена кретања, температура, радијус, металичност, маса,... Док за планете имамо податке о орбиталном периоду, маси, ексцентричности, радијусу, великој полуоси и сл. Овај каталог има одличан поглед на податке у бази и добро филтрирање тражених података. У својој бази, тренутно, има 5690 потврђених егзопланета, док двојних звезда има 2461.

*The Open Exoplanet Catalogue - openexoplanetcatalogue.com*, је каталог свих откривених егзопланета. Сличан је претходним каталозима, али додатно даје информације о настањивој зони звезде и приказује, графички, положај планете у настањивој зони звезде. Подаци о планетама који се могу прибавити су маса, радијус, орбитални период, полуоса, ексцентричност итд. О звезди се може наћи маса, радијус, старост, температура,... Тренутно потврђених егзопланета има 5288 док је двојних система 181.

*The Strasbourg astronomical Data Center (CDS) - cds.unistra.fr*, садржи колекцију астрономских података и друге сродне податке. У њему се налазе база SIMBAD за астрономске објекте, VizieR који садржи колекцију каталога.

*simbad.cds.unistra.fr* – још једна од база астрономских података која се налази у склопу CDS-а. Омогућава претраживања објеката по различитим критеријумима: три о положају звезде, радијалној брзини, сопственом кретању звезде, паралакси, спектралном типу и флуксу. Даје и линкове према другим значајним изворима.

У задацима неће бити сви потребни подаци па се исти морају израчунавати преко формула. У случајевима када није дата луминозност звезде користи се релација маса-луминозност<sup>14</sup>:

$$L \sim 0.23M^{2.3} \quad (1)$$

Још једна релација ће се користити када недостаје неки податак:

$$\frac{L_*}{L_{\odot}} = \left(\frac{R_*}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T_*}{T_{\odot}}\right)^4 \quad (2)$$

Када се уносе подаци, у REBOUND, треба их уносити по реду тј. како је у систему дат распоред звезда и планета. Распоред је различит код П и код С система. У примерима се користи, као што је напоменуто интегратор IAS15, са корацима интеграције који могу бити  $dt = \{0.01, 0.001, \dots\}$ , где је  $dt$  изражен у годинама. Кораци могу бити и мањи што ће зависити од могућности самог интегратора да изврши што ефикасније задатак.

## 4.2. Напомене за задатке

У сваком задатку се налазе подаци о планетама и звездама. О звездама гледано с лева на десно у колонама табела се налазе, по реду, следећи подаци: које су звезде у систему, маса дата у јединицама масе Сунца ( $M_{\odot}$ ), радијус дат у јединицама Сунчевог радијуса ( $R_{\odot}$ ), луминозност дата у јединицама луминозности Сунца ( $L_{\odot}$ ), ефективна температура примара и секундара дата у Келвинима (К), велика полуоса бинара дата у астрономским јединицама (АЈ) и ексцентричност бинарног система. Када је реч о планетиним подацима у табелама су гледано с лева на десно дате маса планете изражене у Сунчевој маси ( $M_{\odot}$ ), велика полуоса изражена у астрономским јединицама (АЈ), ексцентрицитет планете, маса и радијус планете изражени у јединицама Земље.

---

<sup>14</sup> литература [17]



У П тип систему, као што је већ наглашено, примар је у барицентру. Секундар је око примара, а планета кружи око обе звезде. У С типу је такође примар у барицентру, али планета орбитира око примара. Секундар кружи око примара и планете.

У П тип системима вредност полуосе планете је увећана за  $a_{min}c$ , где је  $c$  – вредност узета произвољно. Ово нам омогућава да померимо планету у област где су стабилне вредности орбите планете и да постепено, у периоду од 100000 година, видимо како ће се развијати ексцентричност. Самим овим увећавањем полуосе планете мењаће се и растојања планете до примара и секундара.

Сви примери су рађени у *Google Colab*-у. *Google Colab* омогућава писање и извршавање кодова у *Jupyter Notebook* окружењу. Кодови су писани у програму *Python*. За извршавање програма на располагању су кориснику 12GB RAM-а без наплате.

За већину примера ће ових 12GB бити довољно за извршавање задатака. На сликама ниже су дате спецификације о процесору и меморији *Google Colab*-а:

```
power management:
MemTotal:      13290460 kB
MemFree:       8064304 kB
MemAvailable:  12249036 kB
Buffers:       225204 kB
Cached:        4102448 kB
SwapCached:    0 kB
Active:        437444 kB
Inactive:      4441752 kB
Active(anon):  1212 kB
Inactive(anon): 552120 kB
Active(file):  436232 kB
Inactive(file): 3889632 kB
Unevictable:   8 kB
Mlocked:       8 kB
SwapTotal:     0 kB
SwapFree:      0 kB
Dirty:         19284 kB
Writeback:     0 kB
AnonPages:     551764 kB
Mapped:        295816 kB
Shmem:         1576 kB
KReclaimable:  184272 kB
Slab:          227620 kB
SReclaimable:  184272 kB
SUnreclaim:    43348 kB
KernelStack:   5880 kB
PageTables:    7676 kB
SecPageTables: 0 kB
NFS_Unstable:  0 kB
Bounce:        0 kB
WritebackTmp:  0 kB
CommitLimit:   6645228 kB
Committed_AS:  2887688 kB
VmallocTotal:  34359738367 kB
VmallocUsed:   12216 kB
VmallocChunk:  0 kB
Percpu:        1120 kB
HardwareCorrupted: 0 kB
AnonHugePages: 0 kB
ShmemHugePages: 0 kB
ShmemPmdMapped: 0 kB
FileHugePages: 0 kB
FilePmdMapped: 0 kB
CmaTotal:      0 kB
CmaFree:       0 kB
Unaccepted:   0 kB
HugePages_Total: 0
HugePages_Free: 0
HugePages_Rsvd: 0
HugePages_Surp: 0
Hugepagesize:  2048 kB
Hugetlb:       0 kB
DirectMap4k:   78648 kB
DirectMap2M:   5160960 kB
DirectMap1G:   10485760 kB
```

Подаци о *Google Colab*-у

```

Number of CPU: 2
processor      : 0
vendor_id    : GenuineIntel
cpu family   : 6
model        : 79
model name   : Intel(R) Xeon(R) CPU @ 2.26GHz
stepping     : 0
microcode    : 0xffffffff
cpu MHz      : 2280.206
cache size   : 56320 KB
physical id  : 0
siblings     : 2
cpu cores    : 1
apicid       : 0
initial apicid : 0
fpu          : yes
fpu_exception : yes
cpuid level  : 13
wp           : yes
flags        : fpu vme de pse tsc msr pae mce cx8 apic sep mtrr pge mca cmov pat pse36 clflush mmx fxsr sse sse2 ss ht syscall nx pdpe1gb rdtscp lm constant_tsc rep_good nopl xtopology nonstop_tsc cpuid tsc_known_freq
bugs         : cpu_meltdown spectre_v1 spectre_v2 spec_store_bypass l1tf mds swaps taa mmio_stale_data retbleed bhi
bogomips     : 4400.41
clflush size : 64
cache_alignment : 64
address sizes : 46 bits physical, 48 bits virtual
power management:
processor     : 1
vendor_id    : GenuineIntel
cpu family   : 6
model        : 79
model name   : Intel(R) Xeon(R) CPU @ 2.26GHz
stepping     : 0
microcode    : 0xffffffff
cpu MHz      : 2280.206
cache size   : 56320 KB
physical id  : 0
siblings     : 2
cpu cores    : 1
apicid       : 1
initial apicid : 1
fpu          : yes
fpu_exception : yes
cpuid level  : 13
wp           : yes
flags        : fpu vme de pse tsc msr pae mce cx8 apic sep mtrr pge mca cmov pat pse36 clflush mmx fxsr sse sse2 ss ht syscall nx pdpe1gb rdtscp lm constant_tsc rep_good nopl xtopology nonstop_tsc cpuid tsc_known_freq
bugs         : cpu_meltdown spectre_v1 spectre_v2 spec_store_bypass l1tf mds swaps taa mmio_stale_data retbleed bhi
bogomips     : 4400.41
clflush size : 64
cache_alignment : 64
address sizes : 46 bits physical, 48 bits virtual

```

Подаци о Google Coolab-у

У примерима Кеплер 453 и HD 8673 добија се порука “Your session crashed after using all availableRAM.”. Да би се избегао овај проблем до решења се дошло ограничавањем опсега у коме ће бити приказани резултати у периоду од 100000 година. Опсег је ограничен на један орбитални период планете,  $P_{Pl}$ . Треба имати у виду да се смањивањем корака за извршавање кода, програм може извршити, док с друге стране услед смањења корака постоји последица да се прорачун изврши за мањи задати број година и такође се може утицати на тачност самих резултата.

### 4.3. Двојни систем П типа Керлер 64

Керлер 64 је еклипсно двојна звезда. Пар се састоји из примара који је F спектралне класе и много је сјајнији, док је секундар M класе. У систему се налазе још две звезде што овај систем чини четвороструким системом. Око првог пара се налази планета чији су подаци дати у табели 4, са додатним подацима о маси и радијусу планете у поређењу са Земљом ( $R_{\oplus}$ , ознака за радијус Земље,  $1R_{\oplus}=6.371km$ .  $M_{\oplus}$ , ознака за масу Земље,  $1M_{\oplus}= 5.972 \times 10^{24}kg$ ).

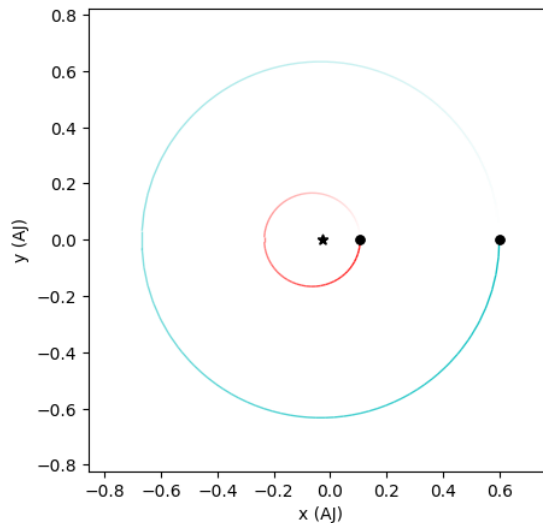
Звезде	$M(M_{\odot})$	$R(R_{\odot})$	$L(L_{\odot})$	$T_{eff}(K)$	$a_{Bin}(A)$	$e_{Bin}$
Примар	1.528	1.734	4.54	6407	0.17	0.21
Секундар	0.408	0.378	0.02	3561		

Табела 3: Подаци о бинарном систему Керлер 64.

$m_{Pl}(m_{\odot})$	$a_{Pl}(A)$	$e_{Pl}$	$m_{Pl}(m_{\oplus})$	$R_{Pl}(R_{\oplus})$
0.0005035	0.634	0.0539	2.2605	6.18

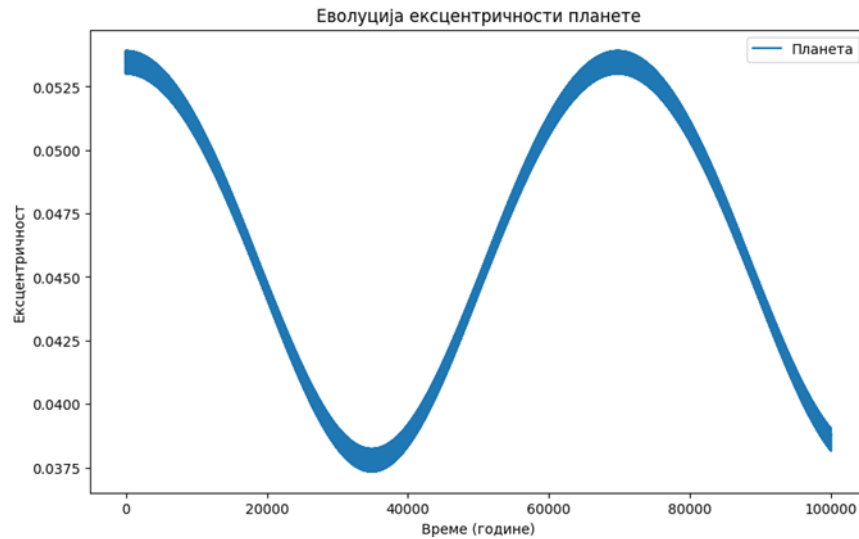
Табела 4: Подаци о планети Керлер 64b.

Кеплер 64 јесте П тип система и стога имамо распоред уноса података звезда, звезда, планете. У барицентру се налази примар, у координати (0,0). Око њега је секундар на удаљеност од  $a_{Bin}$ , а планета Кеплер 64b се креће око обе звезде удаљености  $a_{Pl}$ . На слици 9 се виде положаји објеката у зависности од положаја великих полуоса од центра.



Слика 9: Орбите двојног система Кеплер 64. Примар је у центру, орбита секундара је црвене боје, док је орбита планете плаве боје.

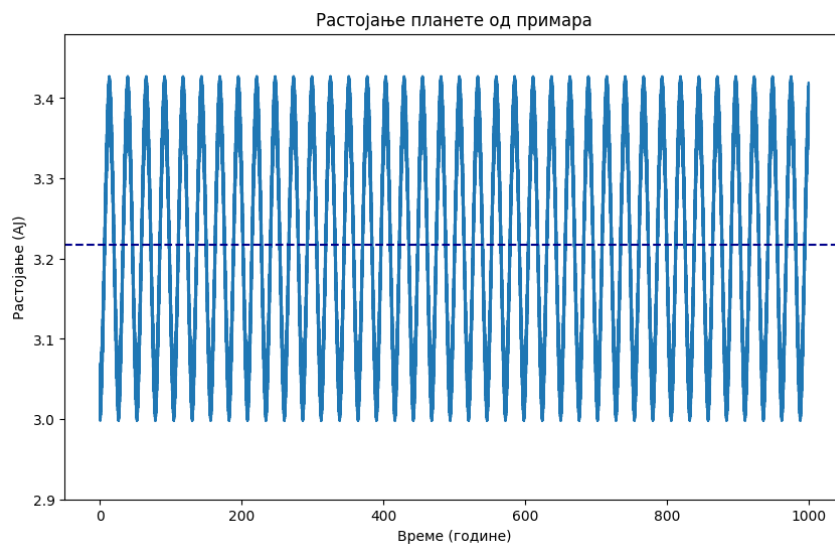
На слици 10 се види да како се ексцентрицитет ( $e_{Pl}=0.0539$ ) планете мења у току 100000 година. Може се приметити равномерно приближавање и удаљавање планете, одакле следи да ће планета имати стабилну орбиту. Секундар и примар неће имати утицај на планетину ексцентричност, ово је последица удаљености планете од бинара ( $a_{Bin} = 0.17, a_{Pl} = 0.634$ ).



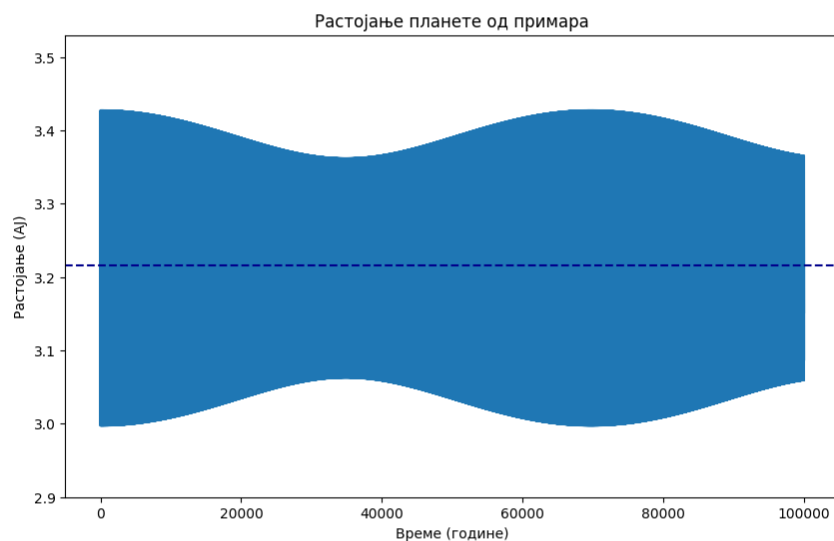
Слика 10: Промена ексцентричности током 100000 година.

На сликама 11 и 12 имамо растојања планете од звезда за време од 1000 и од 100000 година. Испрекидана тамно плава линија на сликама представља средњу вредност растојања. Њена вредност ће износити:  $\bar{r}_{Pl-Pr} = 3.2175, \bar{r}_{Pl-Sec} = 3.2161$ , за период од 1000 година,  $\bar{r}_{Pl-Pr} = 3.2175, \bar{r}_{Pl-Sec} = 3.2161$ , за период од 100000 година.

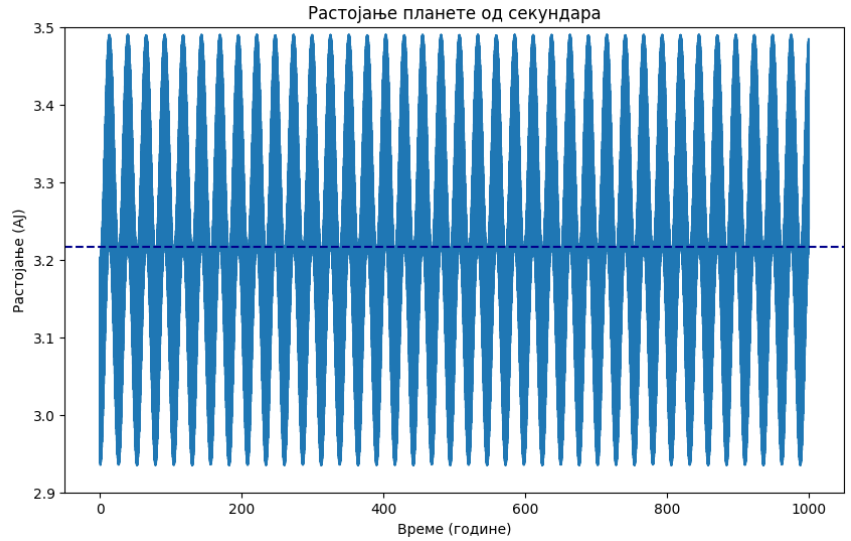
Растојање планете од примара је у интервалу  $[2.9975, 3.4275]$  АЈ док је од секундара у  $[2.9348, 3.4901]$  АЈ за 1000 година. За период од 100000 година растојање до примара је  $[2.9974, 3.4275]$  АЈ, док је до секундара изражено у АЈ у опсегу  $[2.9288, 3.4961]$ .



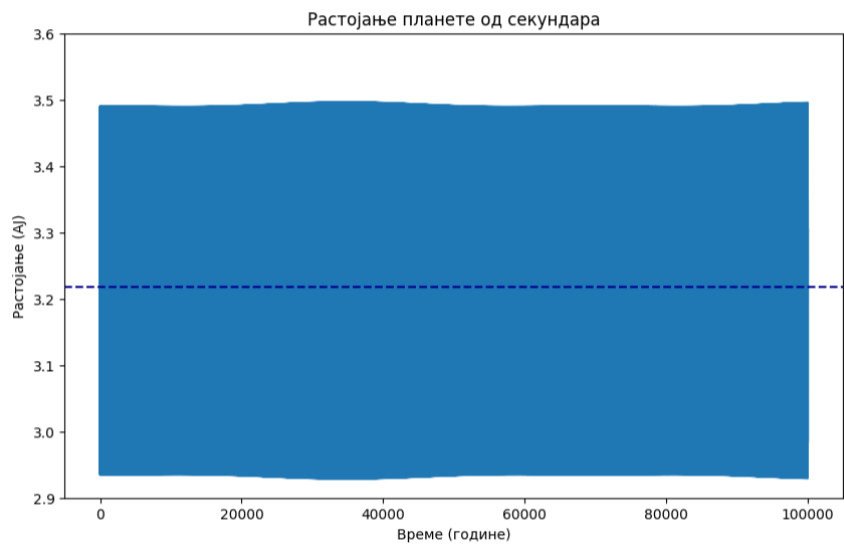
Слика 11а: Удаљеност планете од примара у распону од 1000 година.



Слика 11б: Удаљеност планете од примара у распону од 100000 година.



Слика 12а: Удаљеност планете од секундара у распону од 1000 година.

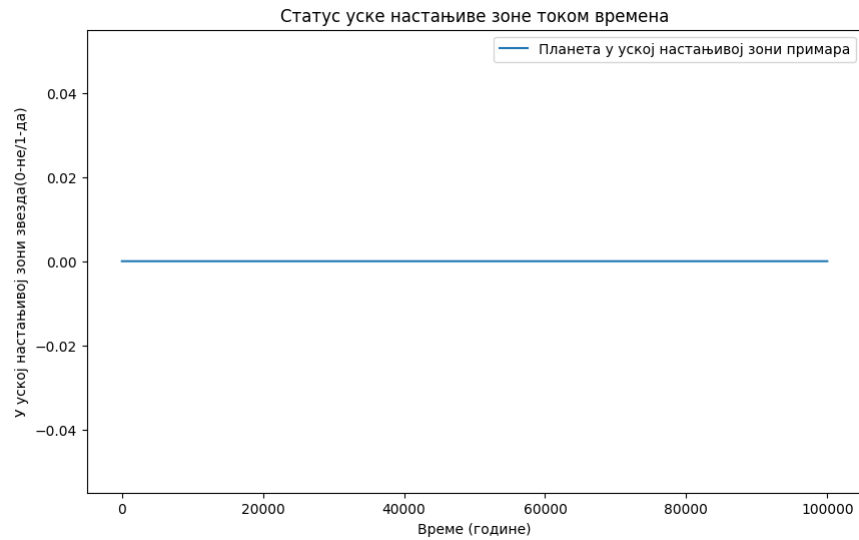


Слика 12б: Удаљеност планете од секундара у распону од 100000 година.

Планета Кеплер 64b, мора да се налази у опсегу настањивих зона примара. Да би се израчунале границе настањивих зона користи се формула (3) из 2.1. Према табели 5 планета се не налази у настањивој зони примара. Границе настањивих зона је много даља него што је локација планете  $a_{Pl}=0.634$ . На слици 13 и 14 се види да планета није ни у уској ни у емпиријској настањивој зони примара (0 на графицима).

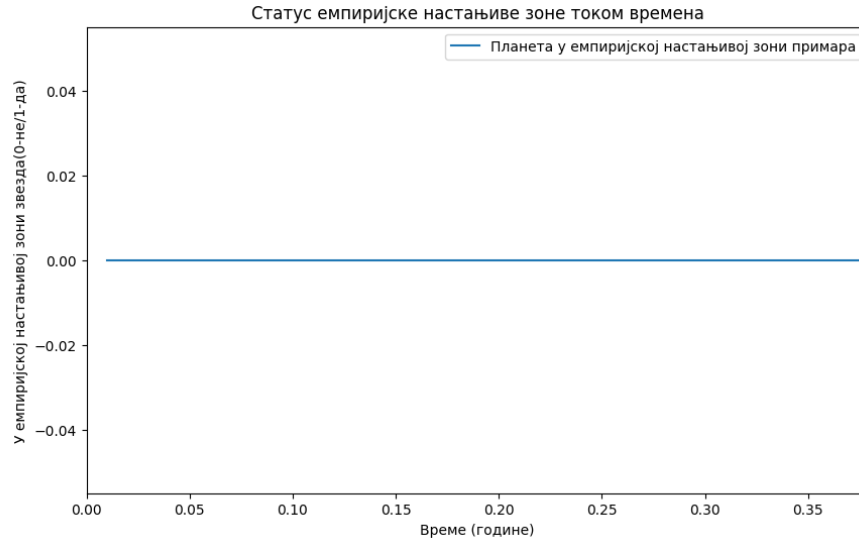
Кеплер 64	Уска настањива зона		Емпиријска настањива зона	
$l_{x-Sun} (A)$	0.97	1.67	0.75	1.77
Границе настањиве зоне примара	Ефекат неконтролисане стаклене баште (унутрашња граница)	Максимални ефекат стаклене баште (спољашња граница)	Скорашња Венера (унутрашња граница)	Рани Марс (спољашња граница)
	1.9938349262292616	3.3999849774431876	1.560415386852842	3.6003790406521916

Табела 5: Подаци о границама настањивих зона Керлера 64.



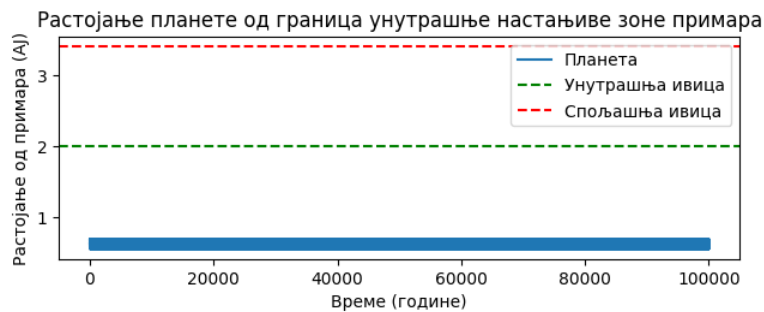
Слика 13: Уска настањива зона примара и положај планете у зони.



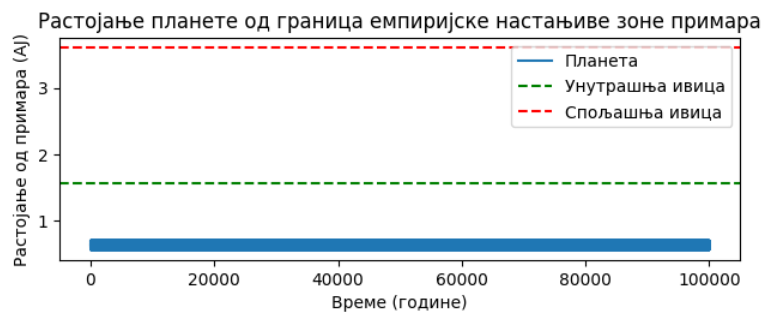


Слика 14: Емпиријска настањива зона примара и положај планете у зони.

На сликама 15 и 16 и гледајући границе настањиве зоне из табеле 5 може се видети колико је планета удаљена од настањивих зона примара.



Слика 15: Положај планете Кеплер 64 у односу на уску настањиву зону.



Слика 16: Положај планете Кеплер 64 у односу на емпиријску настањиву зону.

У задацима се може приказати колика је гравитациони потенцијал. Да би видели колики је гравитациони потенцијал објекта масе  $m$  искористићемо формулу за гравитациони потенцијал (гравитациони потенцијал је потенцијална енергија објекта која потиче од његовог положаја у гравитационом пољу):<sup>15</sup>

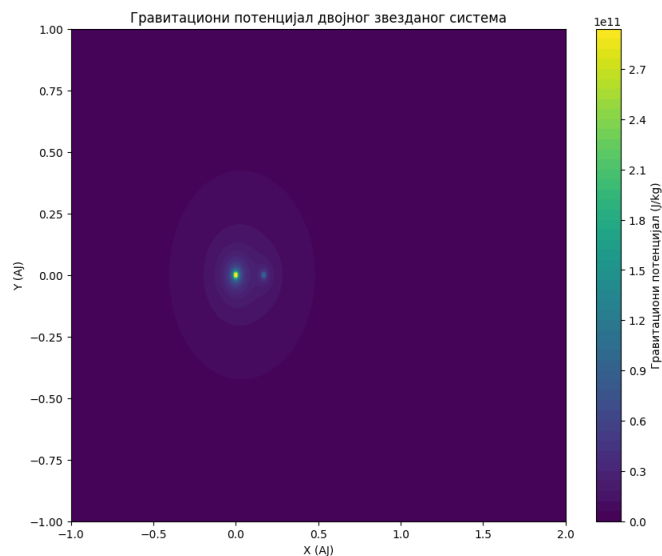
$$E(r) = \frac{Gm}{r} \quad (3)$$

$G$  – универзална гравитациона константа ( $= 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ )

$r$  – растојање мерено од центра масе објекта

$m$  – маса објекта

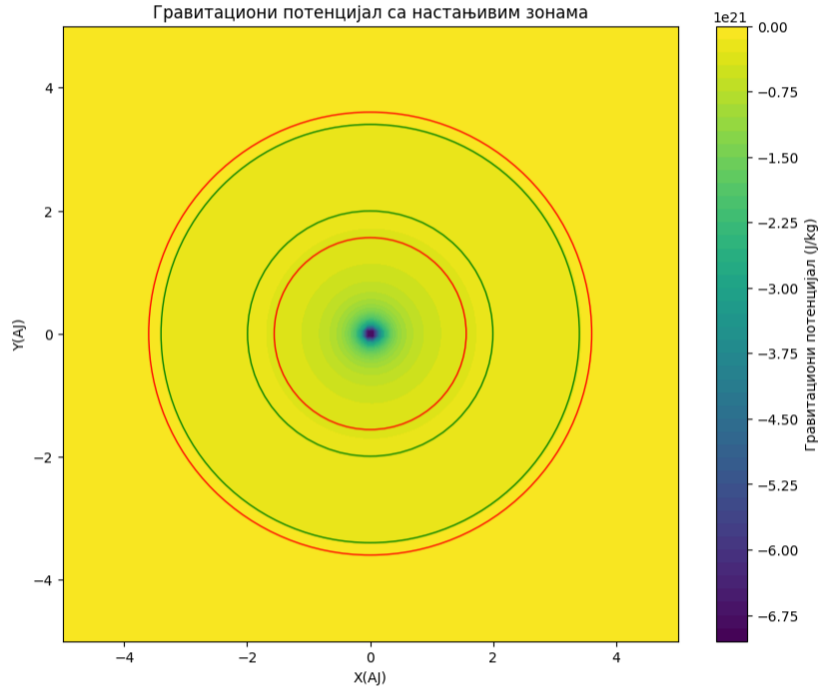
На слици 17 се види гравитациони потенцијал двојног система. Масе звезде су конвертоване у kg ( $1M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}$  kg). Позиције звезде на графику су задате у АЈ. Примар је на позицији (0, 0) док је секундар у (0.17, 0), а планета у (0.634, 0). Десно, поред графика, може да се види колики је гравитациони потенцијал звезде. Гравитациони потенцијал је низак, у љубичастој боји опсег је око (0.0 до 0.3).



Слика 17: Гравитациони потенцијал звезда система Кеплер 64. Поред лика је скала гравитационог потенцијала. Потенцијал се креће од 0.0 (тамно љубичасти опсег) па преко 2.7 (зелено-жути опсег скале). Примар је у центру, са секундаром у (0.17, 0).

На слици 18 могу да се виде настањиве зоне примара. Осе  $x$ ,  $y$  су приказане у АЈ. Може се закључити да планета неће бити у настањивим зонама примара. Координате објеката су дате у АЈ. У (0, 0) се налази примар, у (0.17, 0) секундар, а планета у (0.634, 0). Границе уске настањиве зоне (1.9938, 3.4) а емпиријске зоне (1.5604, 3.6004). Границе настањиве зоне налазе се око примара.

<sup>15</sup> <https://fizikadi.blogspot.ba/2009/10/04/potencijal-gravitacionog-polja/>



Слика 18: Приказ настањивих зона двојног система Кеплер 64. Зелени кругови означавају унутрашње границе настањивих зона, а црвени представљају спољашње границе зона.

#### 4.4. Двојни систем П типа Керлер 38

Керлер 38 је еклипсно двојни систем, П типа. Овде је примар G4 V (Orosz et al. 2012) спектралне класе, знатно је сјајнији, док је секундар М класе. У табели 6 су дати подаци о звездама. Око првог пара се налази планета чији су подаци дати у табели 7.

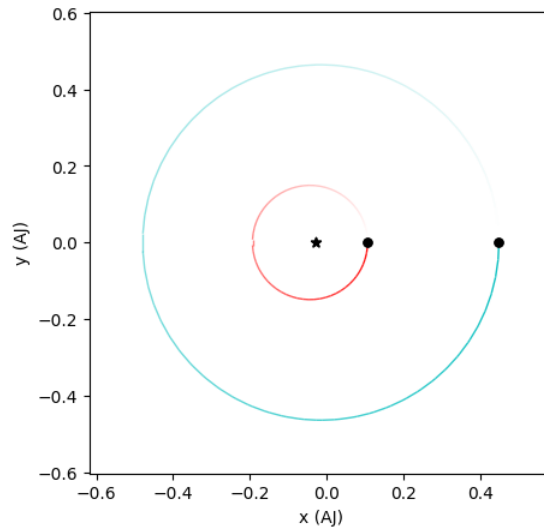
Звезде	$M(M_{\odot})$	$R(R_{\odot})$	$L(L_{\odot})$	$T_{eff}(K)$	$a_{Bin}(A)$	$e_{Bin}$
Примар	0.95	1.76	2.77	5623	0.15	0.1
Секундар	0.249	0.27	0.008	3318		

Табела 6: Подаци о бинарном систему Керлер 38.

$m_{Pl}(m_{\oplus})$	$a_{Pl}(A)$	$e_{Pl}$	$m_{Pl}(m_{\oplus})$	$R_{Pl}(R_{\oplus})$
0.000361	0.4644	0.0320	120.816	4.2748

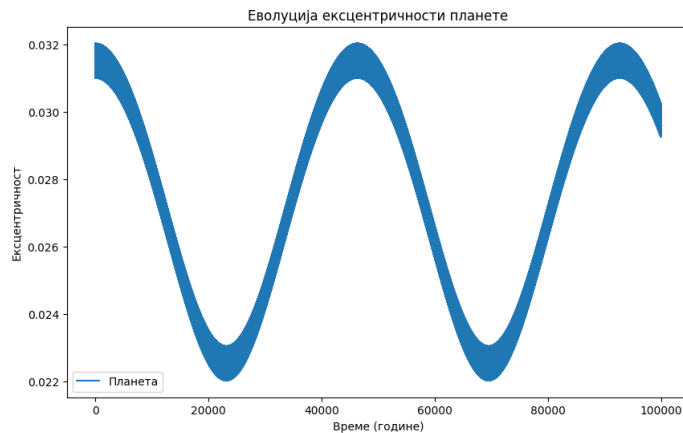
Табела 7: Подаци о планети Керлер 38b.

На слици 19 се виде положаји објеката у зависности од положаја великих полуоса од центра. На  $x, y$  - оси су приказана растојања тачака од центра система (од примара), у астрономским јединицама. У тачки  $(0,0)$  је примар, секундар се налази у  $(a_{Bin}, 0)$ , а планета Кеплер 38b се креће око обе звезде удаљености  $(a_{Pl}, 0)$ .



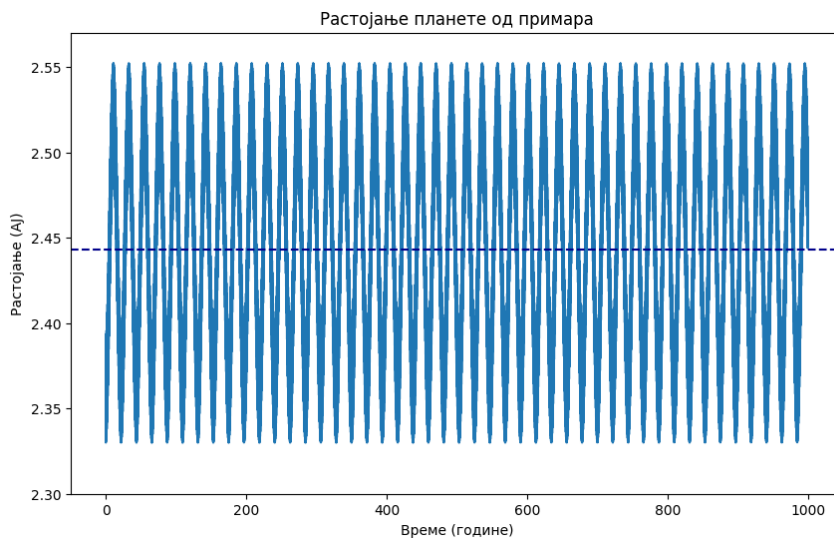
Слика 19: Орбите двојног система Кеплер 38. У центру је примар, на црвеној орбити је секундар. На плавој орбити је планета.

На слици 20 се види да како изгледа промена ексцентрицитета ( $e_{Pl} = 0.0320$ ) планете Керлер 38b за време од 100000 година. И овде ћемо имати равномерно приближавање и удаљавање планете, одакле следи да ће планета, у том периоду, имати стабилну орбиту. Секундар и примар неће имати утицај на ексцентричност орбите планете, због велике удаљености планете од бинара ( $a_{Bin}=0.15, a_{Pl}=0.4644$ ).

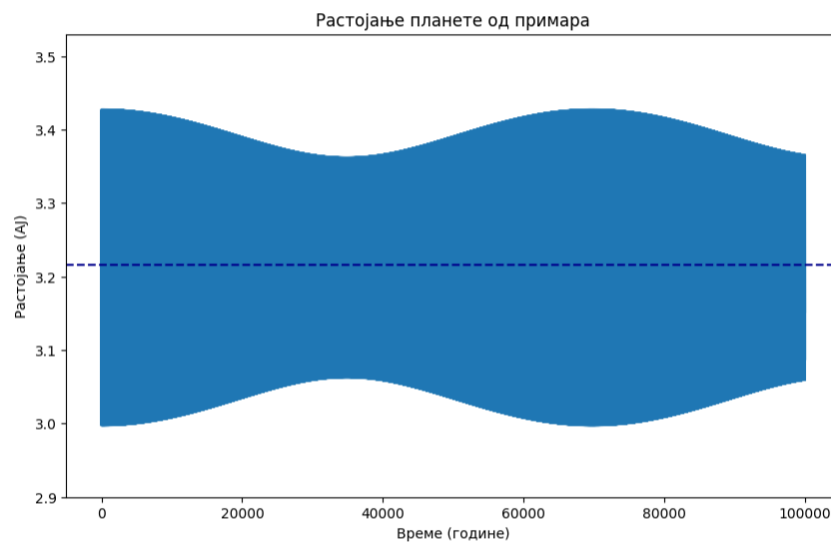


Слика 20: Промена ексцентричности током 100000 година.

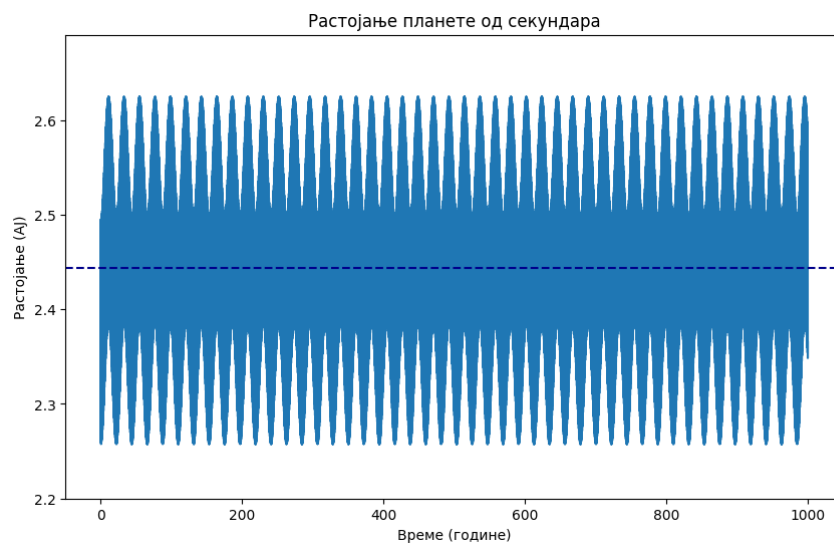
На сликама 21 и 22 имамо растојања планете од звезда за време од 1000 и 100000 година. Испрекидана тамно плава линија на сликама представља средњу вредност растојања. ( $\bar{r}_{Pl-Pr}=2.4427$ ,  $\bar{r}_{Pl-Sec}=2.4433$  за 1000 година,  $\bar{r}_{Pl-Pr}=2.4421$ ,  $\bar{r}_{Pl-Sec}=2.4433$  за 100000 година). Распон растојања планете од примара је у интервалу [2.3299, 2.5522] A], док је од секундара у [2.2572, 2.6249] A], за 1000год . Распон растојања планете од примара, за 100000 година је у интервалу [2.3299, 2.5522] A], док је од секундара у [2.2553, 2.6267] A]. Вредности на у оси су дате у A].



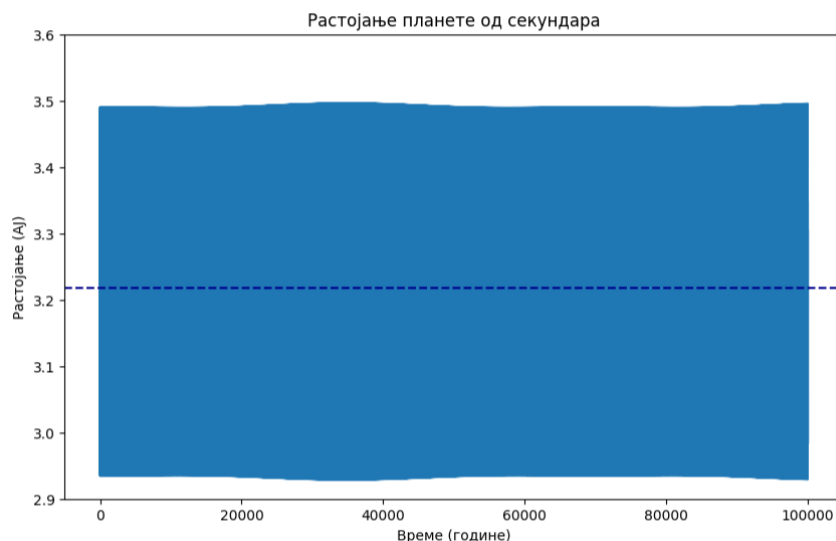
Слика 21а: Удаљеност планете од примара у распону од 1000 година.



Слика 21б: Удаљеност планете од примара у распону од 100000 година.



Слика 22а: Удаљеност планете од секундара у распону од 1000 година.

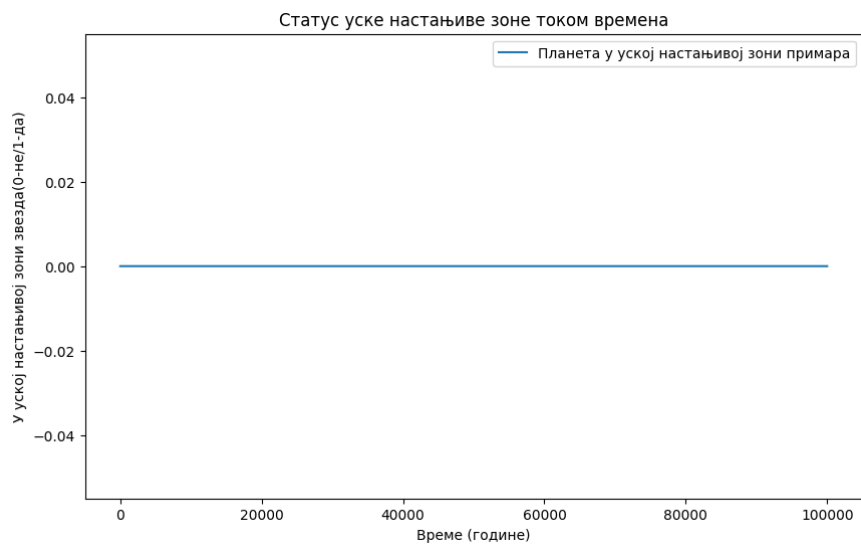


Слика 22б: Удаљеност планете од секундара у распону од 100000 година.

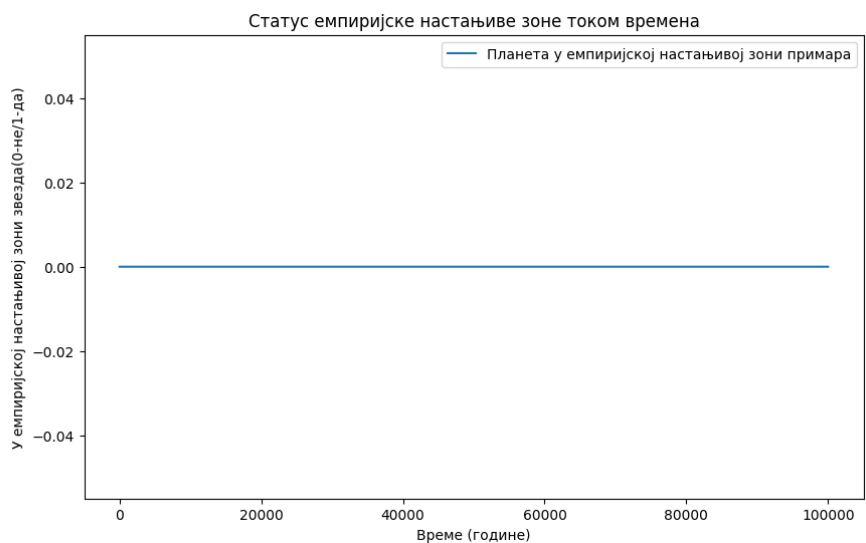
Планета Кеплер 38 се, према подацима из табеле 8, неће налазити у настањивим зонама примара. ( $a_{Pl}=0.4644$ ). Границе се израчунавају из главе 2.1. формула (3). Границе зона су сувише удаљене од планете да би била у зони настањивости. На сликама 23 и 24 се види да планета није ни у уској ни у емпиријској настањивој зони примара (0 на графицима).

Кеплер 38	Уска настањива зона		Емпиријска настањива зона	
$l_{x-Sun}$ (АЈ)	0.97	1.67	0.75	1.77
Границе настањиве зоне примара	Ефекат неконтролисане стаклене баште (унутрашња граница)	Максимални ефекат стаклене баште (спољашња граница)	Скорашња Венера (унутрашња граница)	Рани Марс (спољашња граница)
	1.630386759722054	2.8238806605392	1.2567438351415268	2.9954175833197296

Табела 8: Подаци о границама настањивих зона Керлера 38.



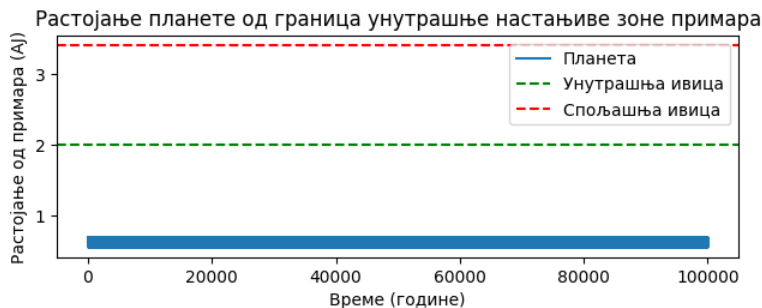
Слика 23: Уска настањива зона примара и положај планете у зона.



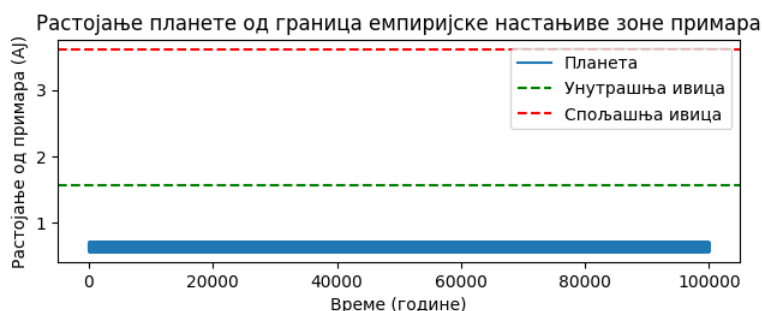
Слика 24: Емпиријска настањива зона примара и положај планете у зони.

На сликама 25 и 26 и гледајући границе настањиве зоне из табеле 8 може се видети колико ће планета бити удаљена од настањивих зона примара, током периода од 100000.



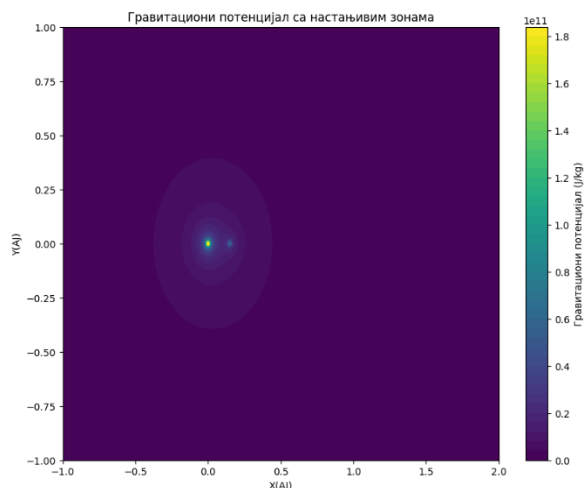


Слика 25: Удаљеност планете Кеплер 38 у односу на уску настајиву зону.



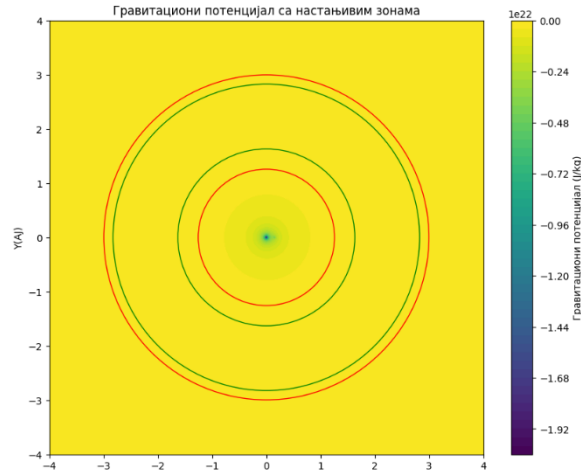
Слика 26: Удаљеност планете Кеплер 38 у односу на емпиријску настајиву зону.

Као и код претходног пара звезда и овде може да се прикаже гравитациони потенцијал. На слици 27 се види гравитациони потенцијал двојног система. Маса звезда су конвертоване у  $kg$ . Позиције звезди на графику су задате у АЈ. Примар је на позицији  $(0, 0)$ , секундар у  $(0.15, 0)$  док је планета у  $(0.4644, 0)$ . Гравитациони потенцијал ће биће низак  $(0.0, 0.250)$ .



Слика 27: Гравитациони потенцијал звезда система Кеплер 38. У центру је примар, док је секундар у  $(0.15, 0)$ .

На слици 28 могу да се виде настањиве зоне примара.  $x$ ,  $y$  осе су приказане у АЈ. Позиције звезде и планете су задате као у претходном пасусу. Може се закључити да планета неће бити у настањивим зонама примара  $a_{Pl} = 0.4644$ . Координате примара су  $(0, 0)$ , уске настањиве зоне  $[1.6304, 2.8239]$ , а емпиријске зоне  $[1.2567, 2.9954]$ . На слици је приказан и гравитациони потенцијал између две звезде.



Слика 28: Приказ настањивих зона двојног система Кеpler 38. Зелени кругови означавају унутрашње границе настањивих зона, а црвени представљају спољашње границе зона.

#### 4.5. Двојни систем П типа Керлер 453

Керлер 453 је еклипсно двојни систем, П типа. Овде је примар G5 спектралне класе знатно је сјајнији, од секундара. У табели 9 су дати подаци о звездама. Око првог пара се налази планета чији су подаци дати у табели 10.

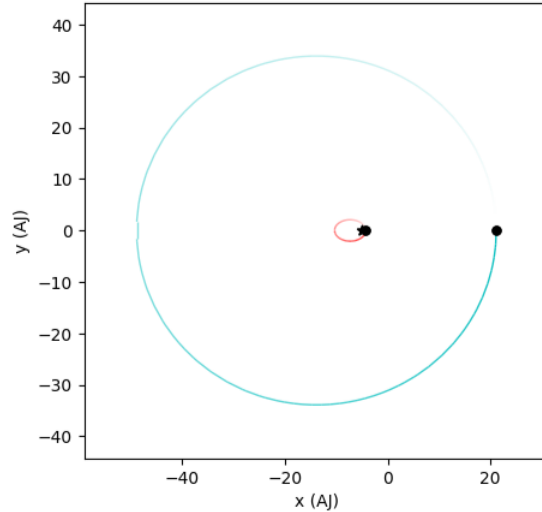
Звезде	$M(M_{\odot})$	$R(R_{\odot})$	$L(L_{\odot})$	$T_{eff}(K)$	$a_{Bin}(A)$	$e_{Bin}$
Примар	0.934	0.833	0.196	5527	0.1848	0.037
Секундар	0.1938	0.2143	0.005	3309		

Табела 9: Подаци о бинарном систему Керлер 453.

$m_{Pl}(m_{\odot})$	$a_{Pl}(A)$	$e_{Pl}$	$m_{Pl}(m_{\oplus})$	$R_{Pl}(R_{\oplus})$
0.00095	0.7903	0.04	9.538	6.0286

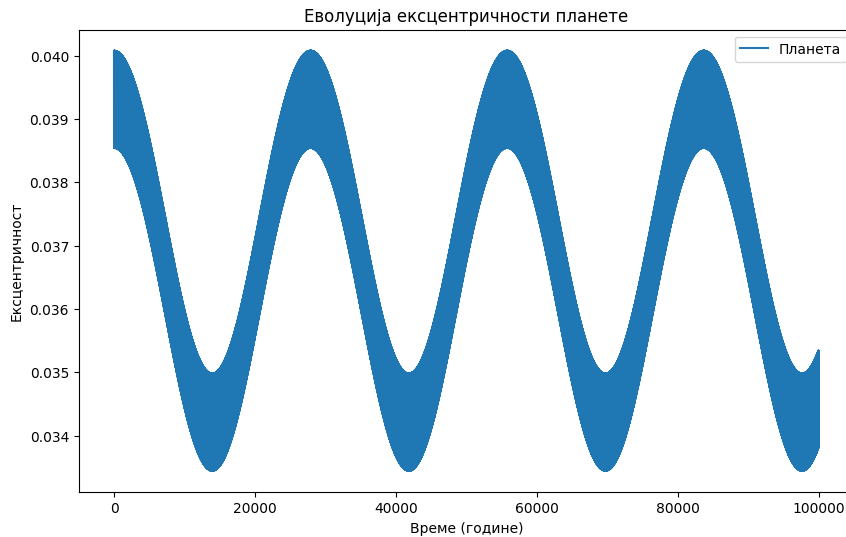
Табела 10: Подаци о планети Керлер 453b.

На слици 29. се виде положаји објеката у зависности од положаја великих полуоса од центра. На  $x, y$  - оси су приказана растојања тачака од центра система (од примара), у астрономским јединицама. У тачки  $(0,0)$  је примар, секундар се налази у  $(a_{Bin}, 0)$ , а планета Кеплер 453b се креће око обе звезде на удаљености  $(a_{Pl}, 0)$ .



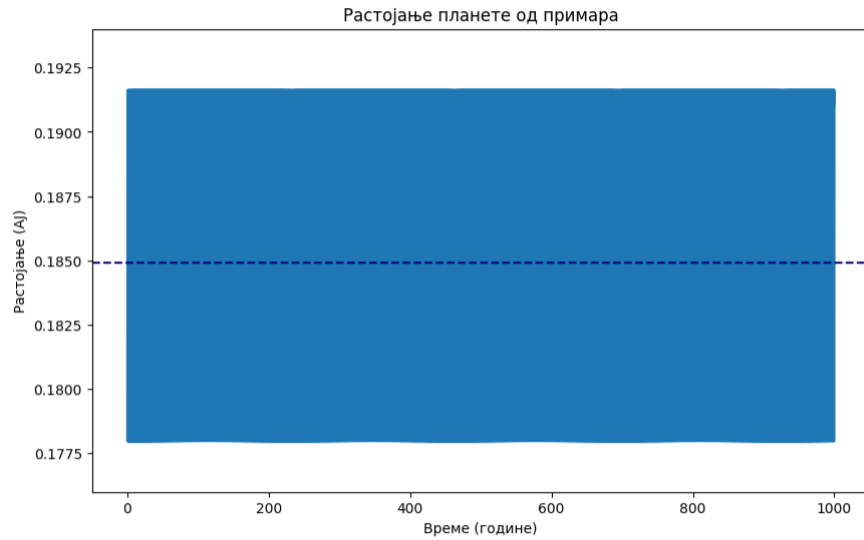
Слика 29: Орбите двојног система Кеплер 453. Примар је у центру. Црвена орбита је орбита секундара, док је орбита планете плава.

На слици 30 се види како се ексцентрицитет ( $e_{Pl} = 0.04$ ) планете мења у току 100000 година. Секундар и примар неће имати утицај на планетину ексцентрицитет, што је поново последица велике удаљености планете од бинара ( $a_{Bin} = 0.1848, a_{Pl} = 0.7903$ ). Распон ексцентрицитетности орбите, која је скоро кружна, је у интервалу  $[0.03344, 0.04]$ .

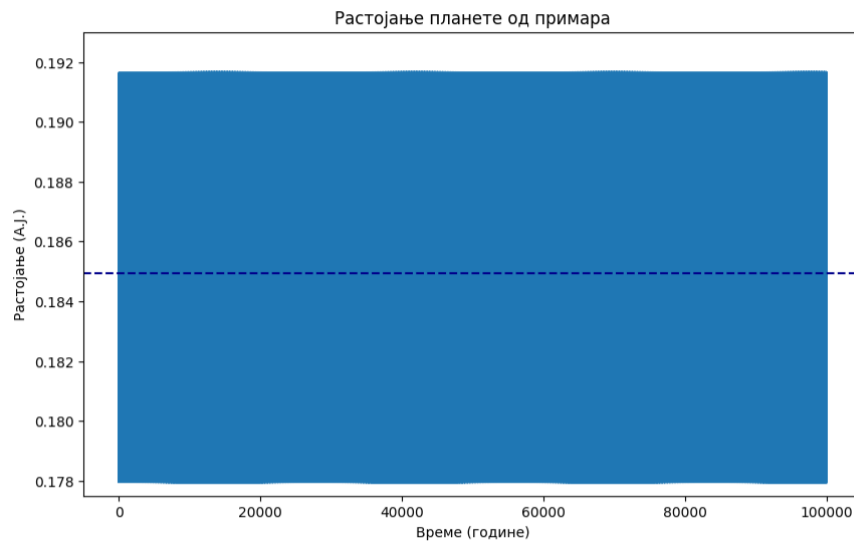


Слика 30: Промена ексцентрицитетности током 100000 година.

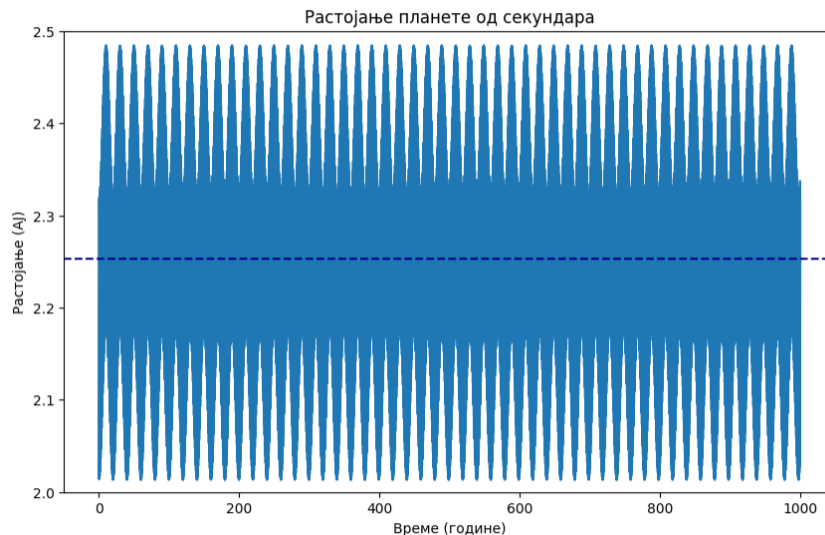
На сликама 31 и 32 имамо растојања планете од звезда за време од 1000 и 100000 година. Испрекидана тамно плава линија на сликама представља средњу вредност растојања. ( $\bar{r}_{Pl-Pr} = 0.1849$ ,  $\bar{r}_{Pl-Sec} = 2.2528$ ). Растојање планете од примара је у интервалу  $[0.1779, 0.1916]$  АЈ, док је од секундара у  $[2.0130, 2.4844]$  АЈ. Вредности растојања на у оси су дата у АЈ.



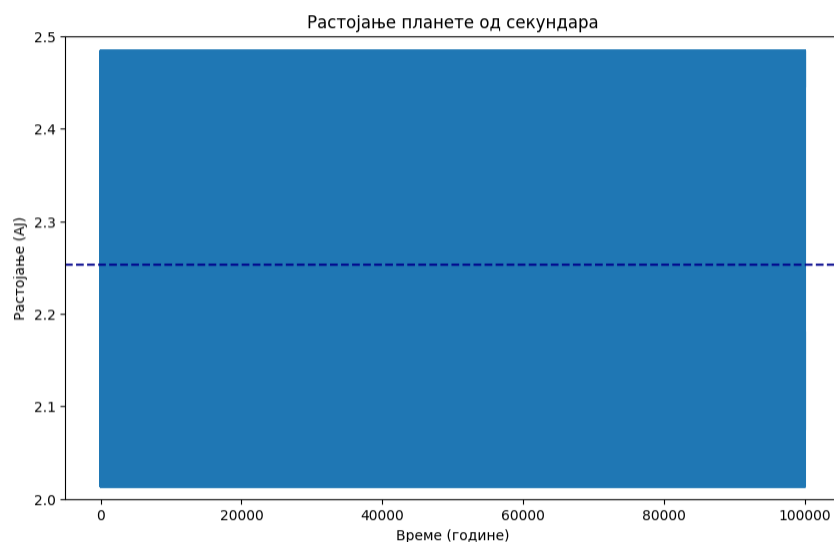
Слика 31а: Удаљеност планете од примара у распону од 1000 година.



Слика 31б: Удаљеност планете од примара у распону од 100000 година.



Слика 32а: Удаљеност планете од секундара у распону од 1000 година.

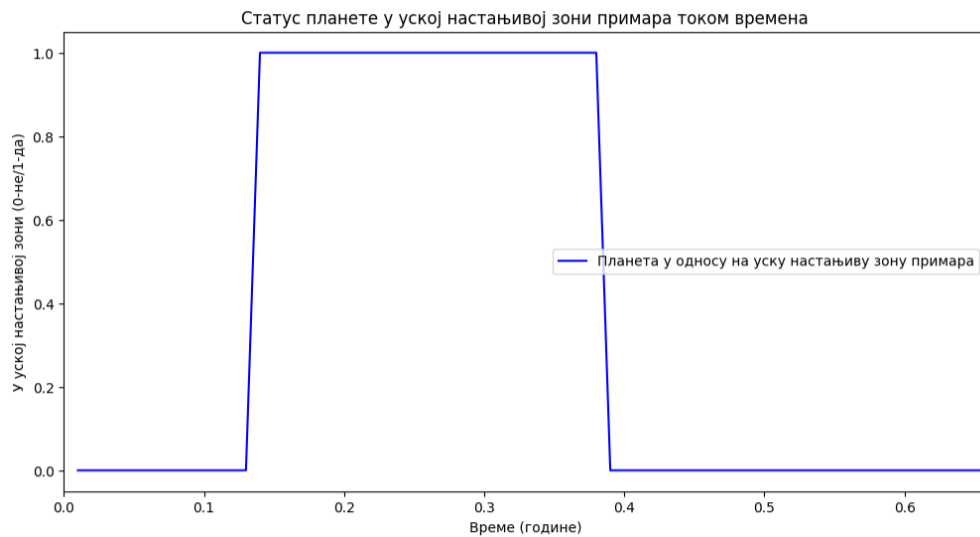


Слика 32б: Удаљеност планете од секундара у распону од 100000 година.

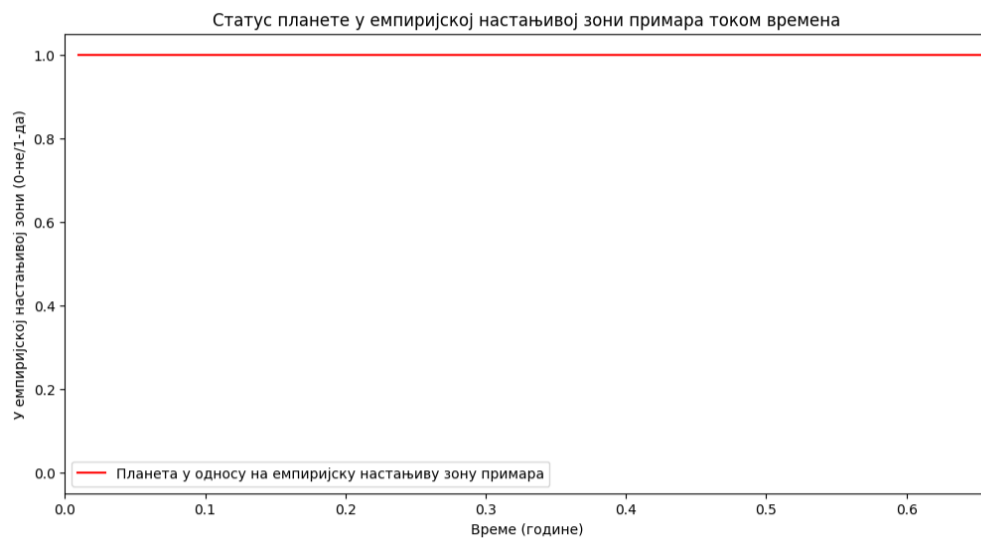
Планета Кеплер 453b, на својој орбити, ће улазити и излазити из спољашњих ивица настањивих зона (слике 33 и 34). На сликама 33 и 34 на x – оси је приказан један орбиталан период планете  $P_{Pl} = 0.6584532$  у годинама, да би се јасније видео положај планете у настањивим зонама. Може се видети, на слици 34, да ће планета бити у емпиријској настањивој зони, када се ограничи интервал на x – оси на орбиталан период планете. Али такође, погледом на слику 36 током периода од 100000 година планета ће улазити и излазити из емпиријске зоне. Одавде следи да планета неће имати сталну позицију у зони, па неће имати услове потребне за настањивост.

Кеплер 453	Уска настањива зона		Емпиријска настањива зона	
	$l_{x-Sun}(A)$	0.97	1.67	0.75
Границе настањиве зоне примара	Ефекат неконтролисане стаклене баште (унутрашња граница)	Максимални ефекат стаклене баште (спољашња граница)	Скорашња Венера (унутрашња граница)	Рани Марс (спољашња граница)
	0.4366508126305783	0.757989831126809	0.33607633137463977	0.8041468808985373

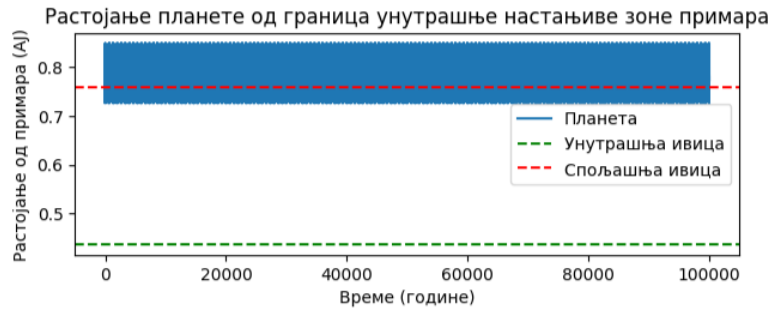
Табела 11: Подаци о границама настањивих зона.



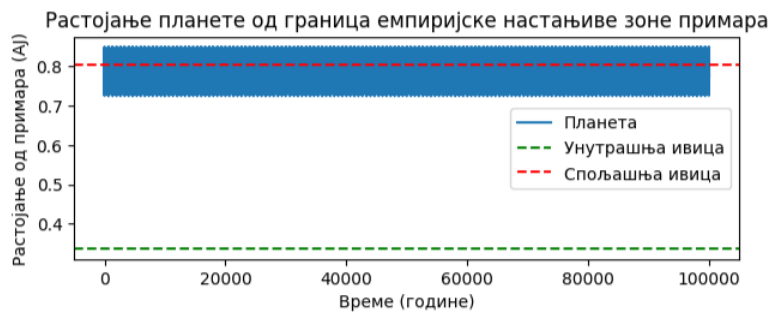
Слика 33: Уска настањива зона примара и положај планете у зони.



Слика 34: Емпиријска настањива зона примара и положај планете у зони.

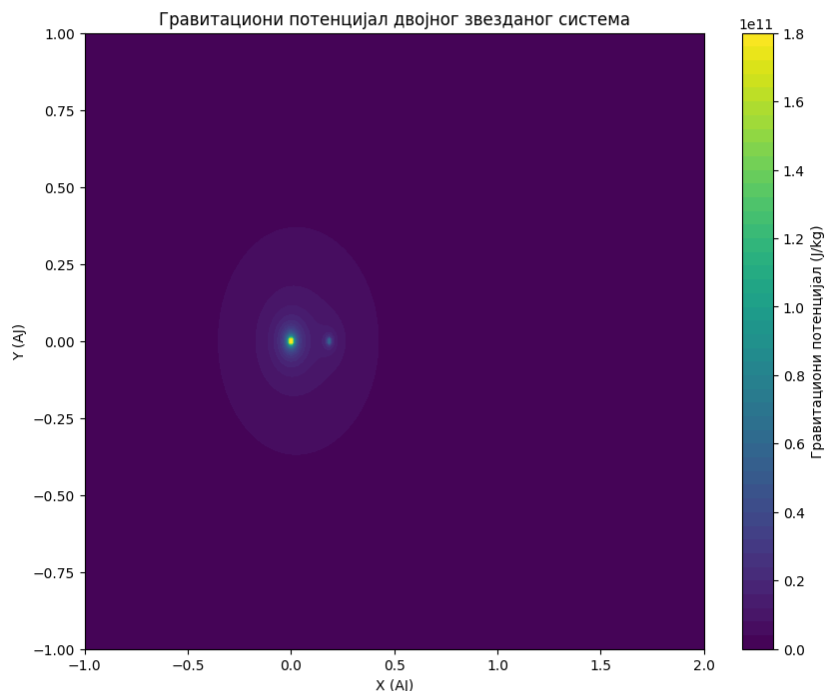


Слика 35: Удаљеност планете Кеплер 453 у односу на уску настањиву зону.



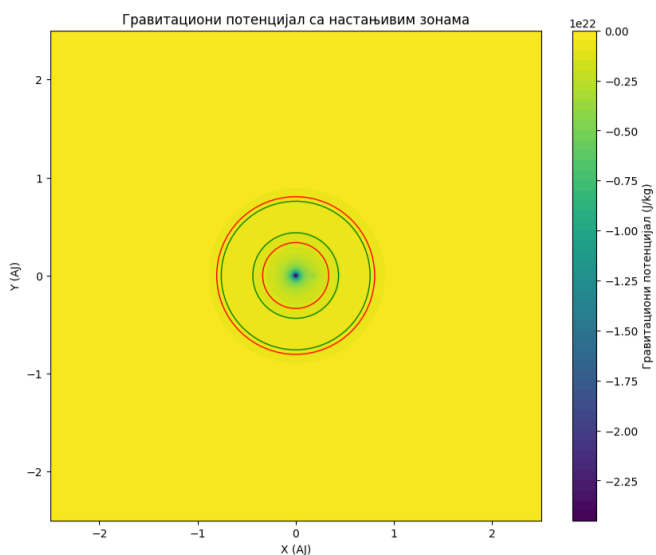
Слика 36: Удаљеност планете Кеплер 453 у односу на емпиријску настањиву зону.

На слици 37 се види гравитациони потенцијал двојног система Кеплер 453. Масе звезде су конвертоване у kg, а позиције звезде на графику су задате у АЈ. Примар је на позицији (0, 0) док је секундар у (0.1848, 0), а планета у (0, 0.7903). Десно, поред графика, може да се види колики је гравитациони потенцијал звезде. Објекти се налазе у љубичастој боји, опсега око (0.0 до 0.250), низак је гравитациони потенцијал.



Слика 37: Гравитациони потенцијал звезда система Кеплер 453. Примар је у центру, секундар у (0.2764, 0).

На слици 38 могу да се виде настањиве зоне око примара. Координате примара, секундара, секундара су, дате редом: (0, 0), (0.1848, 0) и (0.7903, 0) изражене у АЈ, границе уске настањиве зоне су (0.4366, 0.758), а емпиријске зоне (0.3361, 0.8041). На осам су позиције објеката приказане у АЈ. На слици је приказан и гравитациони потенцијал између две звезде.



Слика 38: Приказ настањивих зона двојног система Кеплер 453. Зелени кругови означавају унутрашње границе настањивих зона, а црвени представљају спољашње границе зона.



#### 4.6. Двојни систем С типа GJ 15

Звезде овог система припадају двојним звездама које су промењљиво варијабилне. Примар је M2V спектралне класе док је секундар M3V класе. Око примара се налазе обе планете. Услед великог растојања секундара од примара,  $a_{Bin} = 93$  АЈ, секундар неће утицати на орбиту планета ни на настањиве зоне примара. У табели 12 су дати подаци о звездама, а у табелама 13 и 14 подаци о планетама.

Звезде	$M(M_{\odot})$	$R(R_{\odot})$	$L(L_{\odot})$	$T_{eff}(K)$	$a_{Bin}(A)$	$e_{Bin}$
Примар	0.375	0.39	0.0216	3567	93	0.53
Секундар	0.164	0.2	0.0038	3259		

Табела 12: Подаци о бинарном систему GJ 15.

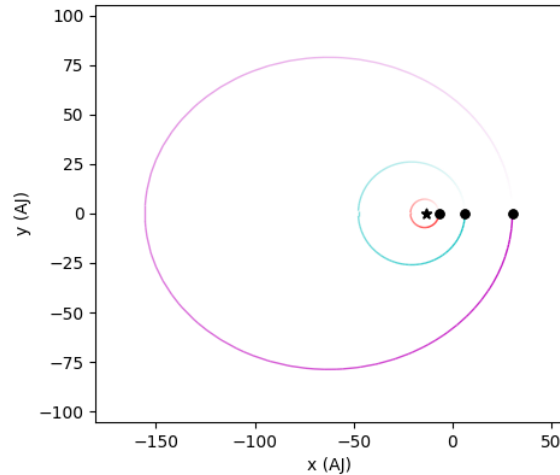
$m_{Pl_b}(m_{\odot})$	$a_{Pl_b}(A)$	$e_{Pl_b}$	$m_{Pl_b}(m_{\oplus})$	$R_{Pl_b}(R_{\oplus})$
0.000009	0.072	0.094	3.0299	-

Табела 13: Подаци о планети GJ 15A b.

$m_{Pl_c}(m_{\odot})$	$a_{Pl_c}(A)$	$e_{Pl_c}$	$m_{Pl_c}(m_{\oplus})$	$R_{Pl_c}(R_{\oplus})$
0.000107	5.4	0.27	35.927	-

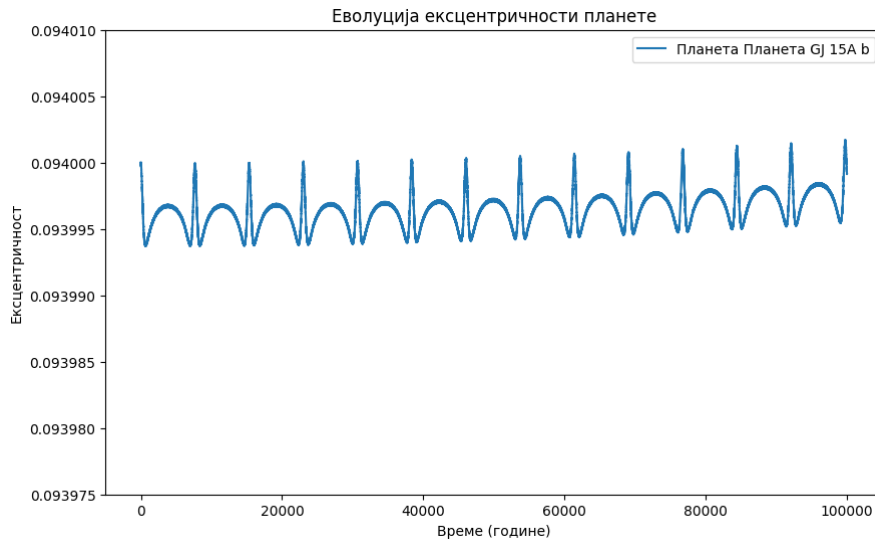
Табела 14: Подаци о планети GJ 15A c.

На слици 39 се виде положаји објеката у зависности од положаја великих полуоса од центра. На  $x$ ,  $y$  - оси су приказана растојања тачака од центра система (од примара), у астрономским јединицама. Растојања планета  $a_{Bin}$  од примара су увећана да би била боља прегледност слике 39.

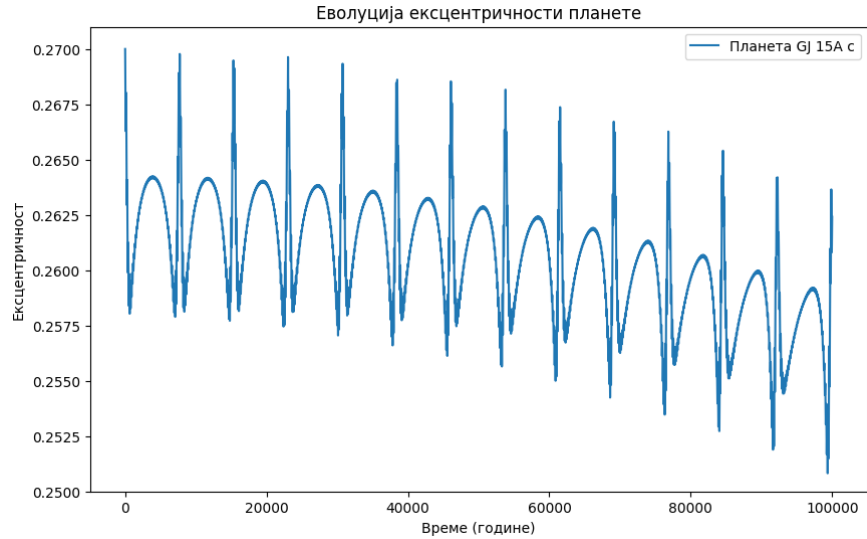


Слика 39: Орбите двојног система GJ 15. Око примара су, редом, приказане орбите планете *Ab* на црвеној орбити, планете *Ac* на плавој орбити и орбита секундарна дата у љубичастој боји.

На сликама 40 и 41 се види се како се мења ексцентричност орбита планета у току 100000 година. Вредности ексцентричности се крећу  $e_{min_{Ab}} = 0.09399$  па до  $e_{max_{Ab}} = 0.094001$ , за планету *Ab*, док се код планете *Ac* вредности крећу од  $e_{min_{Ac}} = 0.25082$  до  $e_{max_{Ac}} = 0.27$ .



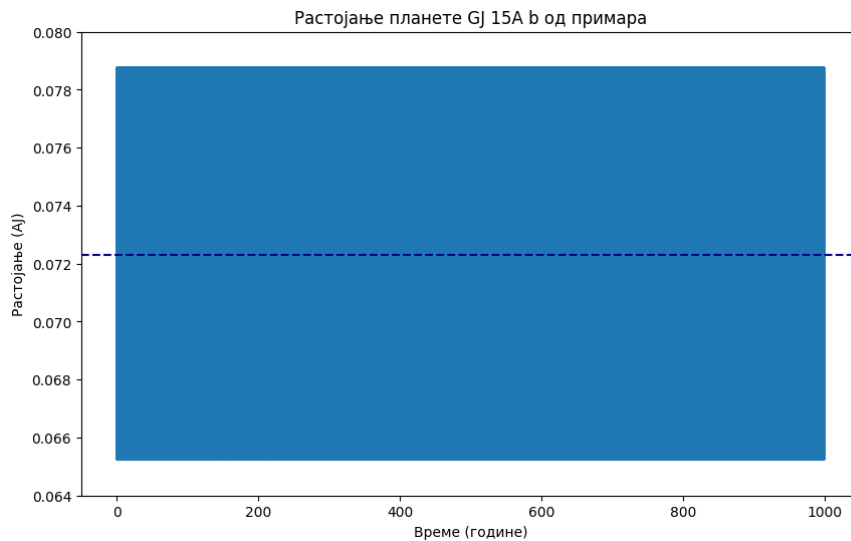
Слика 40: Промена ексцентричности планете *Ab* током 100000 година.



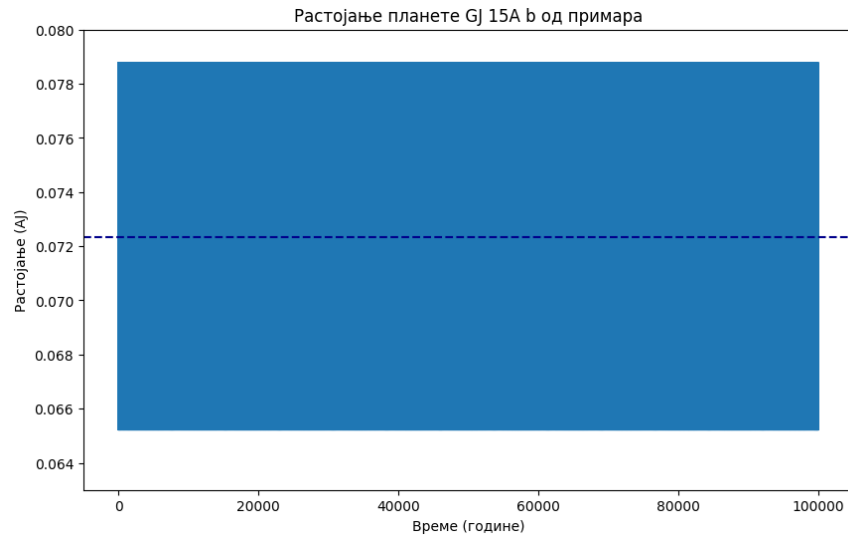
Слика 41: Промена ексцентричности планете Ас током 100000 година.

На сликама 42 и 43 имамо растојања планете од звезда за време од 1000 и 100000 година. Испрекидана тамно плава линија на сликама представља средњу вредност  $\bar{r}_{Pl_b-Pr} = 0.723$ ,  $\bar{r}_{Pl_b-Sec} = 59.4003$ ,  $\bar{r}_{Pl_c-Pr} = 5.6121$ ,  $\bar{r}_{Pl_c-Sec} = 60.2409$  за период од 1000 и 100000 година.

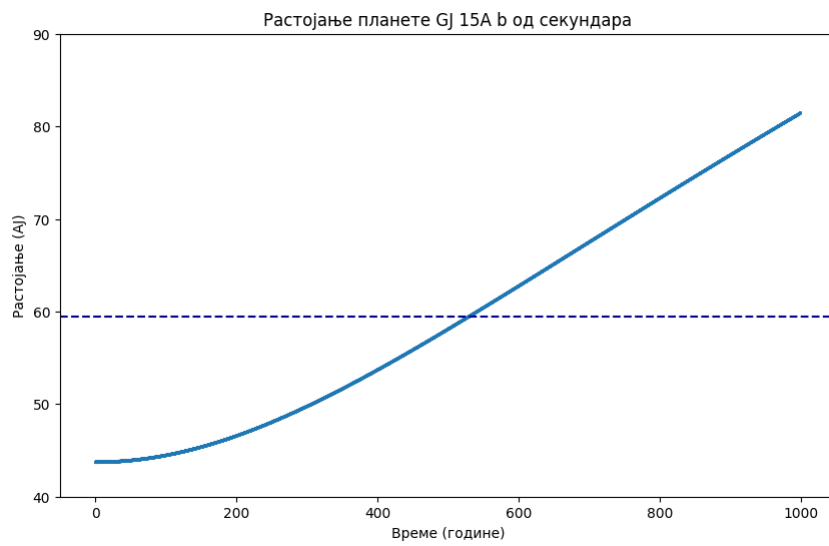
За период од 1000 и 100000 година растојања планете Аb од примара је [0.0652, 0.0787] АЈ, а од секундара [43.6460, 81.4971] АЈ. Растојање планет Ас од примара је [3.9420, 6.8489] АЈ док је од секундара удаљеност у интервалу [39.7691, 85.6528] АЈ. Опсежи растојања имају велике вредности јер је вредност бинарне полуосе велика  $a_{Bin} = 93$  АЈ, а мале вредности растојања планета до примара  $a_{Pl_b} = 0.072$ ,  $a_{Pl_c} = 5.4$ .



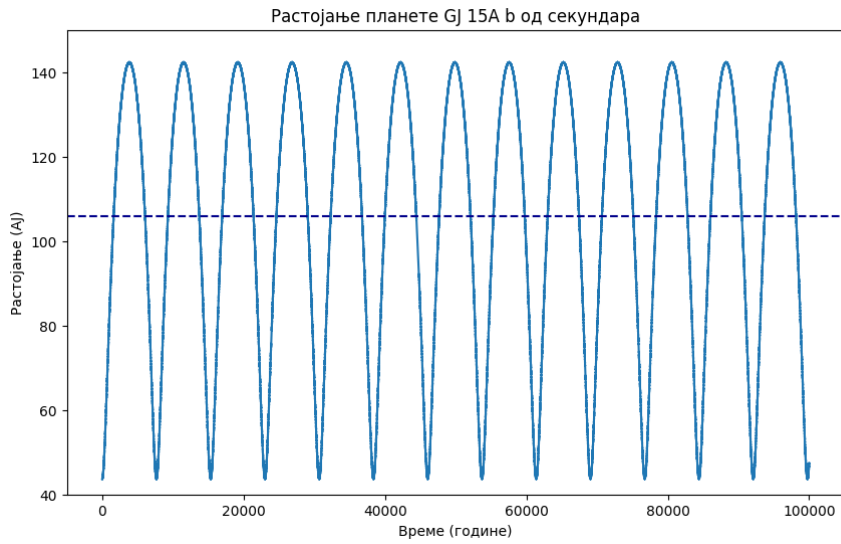
Слика 42а: Удаљеност планете GJ 15A b од примара у распону од 1000 година.



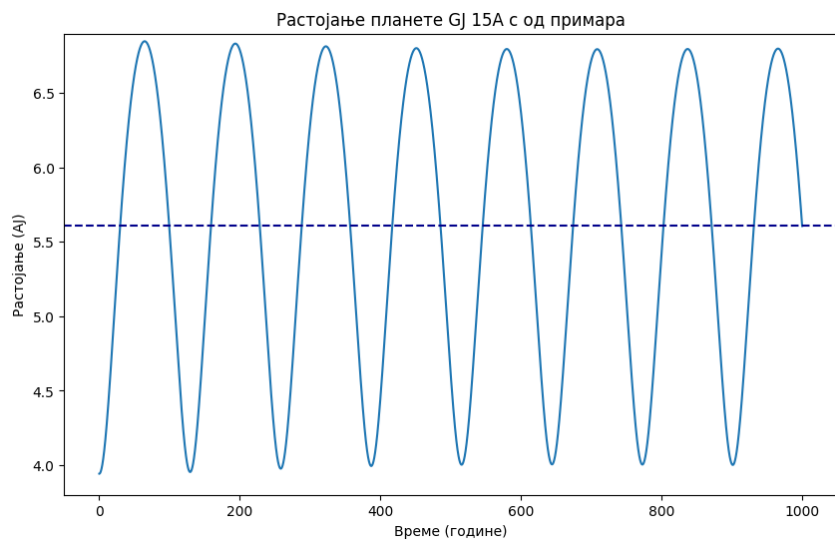
Слика 42б: Удаљеност планете GJ 15A b од примара у распону од 100000 година.



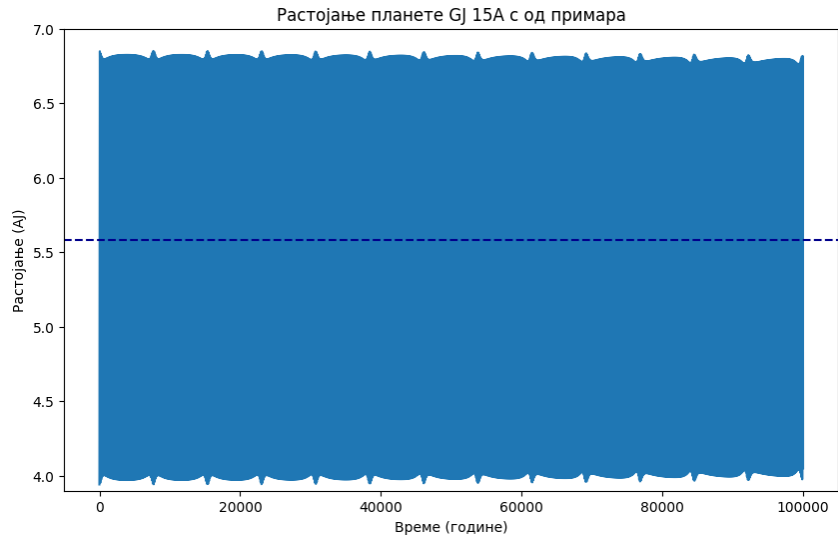
Слика 42ц: Удаљеност планете GJ 15A b од секундара у распону од 1000 година.



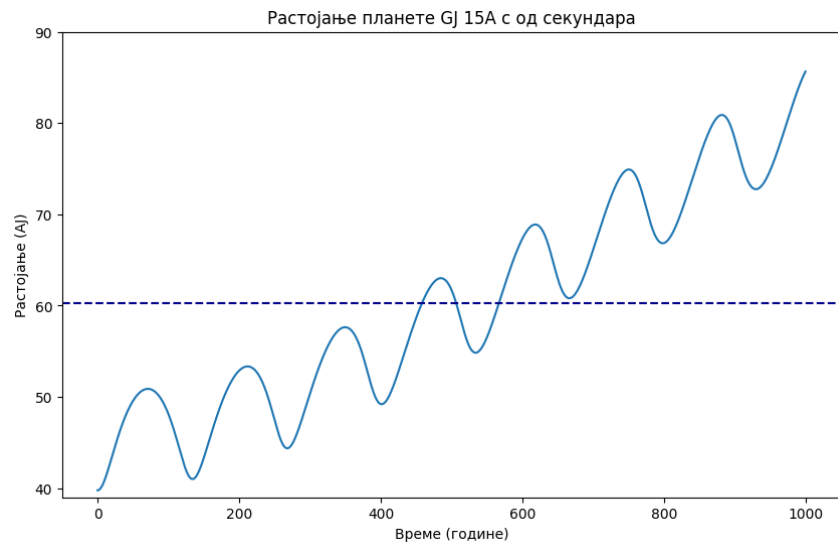
Слика 42е: Удаљеност планете GJ 15A b од секундара у распону од 100000 година.



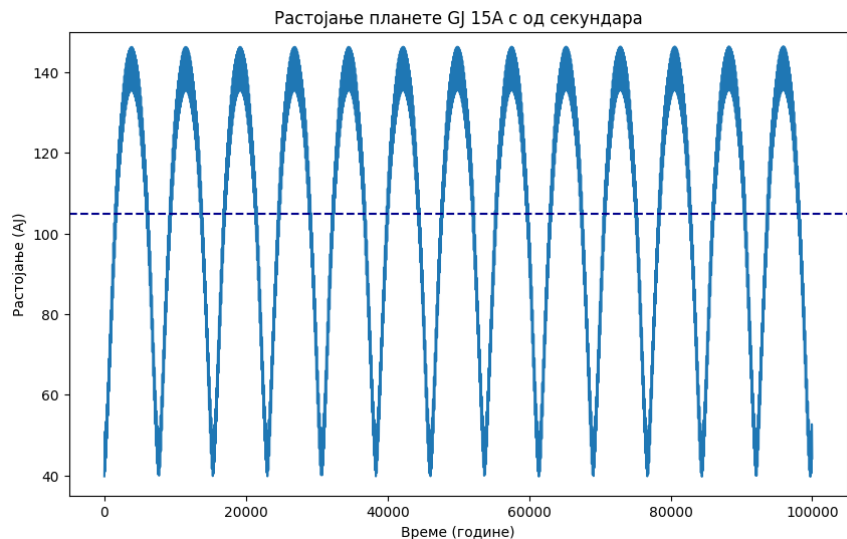
Слика 43а: Удаљеност планете GJ 15A c од примара у распону од 1000 година.



Слика 43б: Удаљеност планете GJ 15A с од примара у распону од 100000 година.



Слика 43ц: Удаљеност планете GJ 15A с од секундара у распону од 1000 година.

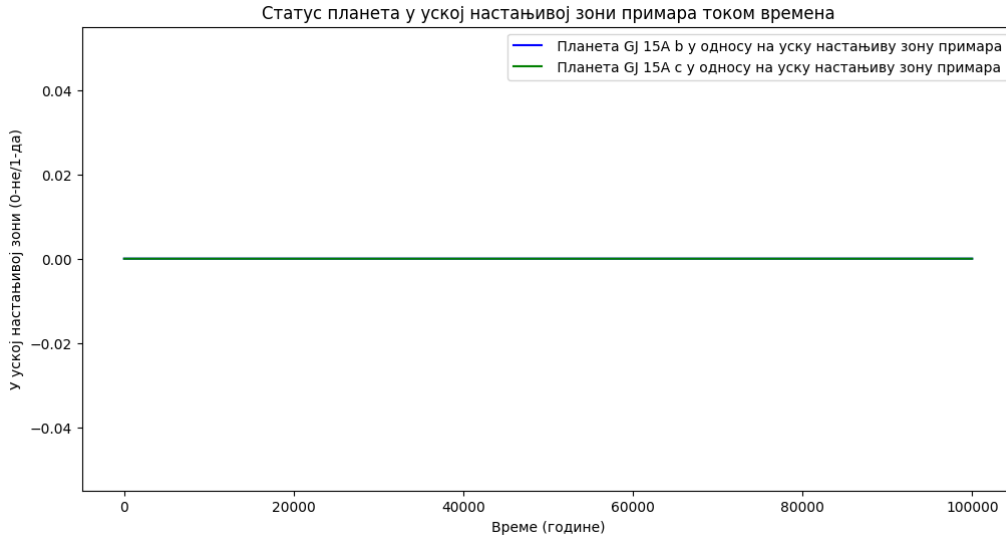


Слика 44е: Удаљеност планете GJ 15A с од секундара у распону од 100000 година.

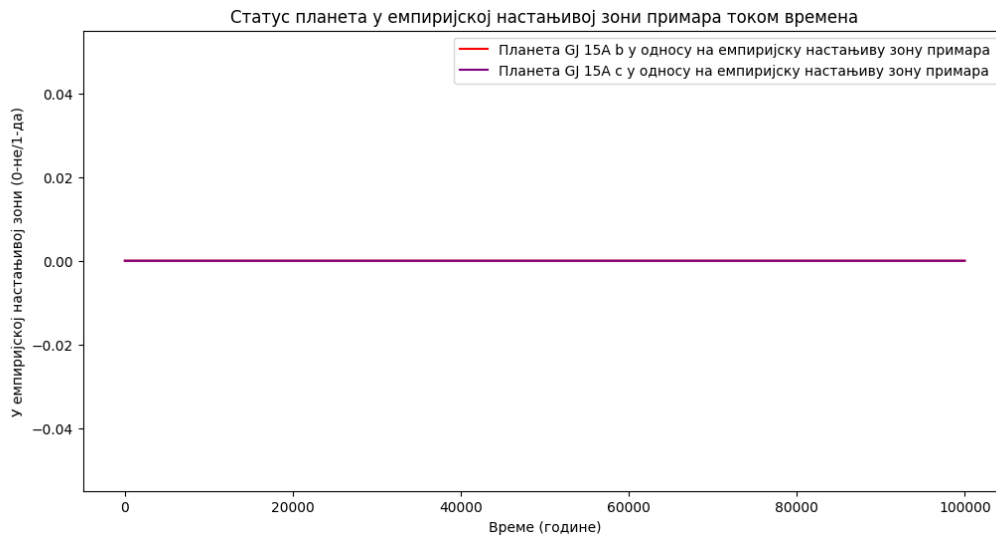
Погледом на табелу 15 и на полуосе планета  $a_{Pl_b} = 0.072$ ,  $a_{Pl_c} = 5.4$ , види се да су обе планете ван настањивих зона примара. Границе су израчунате на основу формуле (6) из 2.3. На сликама 45 и 46 видимо да се планете не налазе у зонама примара, налазе се у 0 (где 0 означава да планете нису у настањивим зонама, 1 планете се налазе у настањивим зонама). Планете нису у настањивим зонама.

GJ 15	Уска настањива зона		Емпиријска настањива зона	
$l_{x-Sun}(A)$	0.97	1.67	0.75	1.77
Границе настањиве зоне примара	Ефекат неконтролисане стаклене баште (унутрашња граница)	Максимални ефекат стаклене баште (спољашња граница)	Скорашња Венера (унутрашња граница)	Рани Марс (спољашња граница)
	0.1549654618514938	0.2910296748180417	0.11876826839943863	0.3130014977737308

Табела 15: Подаци о границама настањивих зона GJ 15.



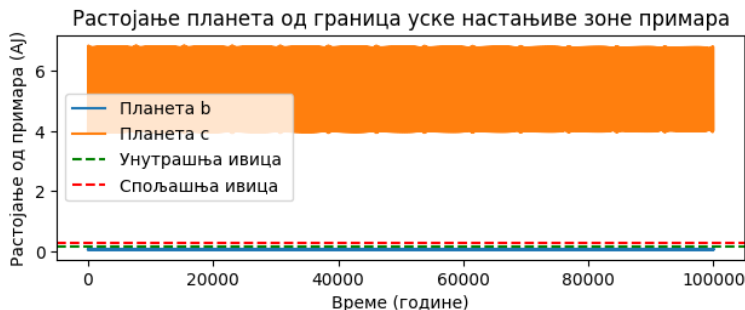
Слика 45: Уска настањива зона примара и положај планета у зони. На лику, линије које представљају планете су се поклопиле, јер се ниједна не налази у настањивим зонама примара.



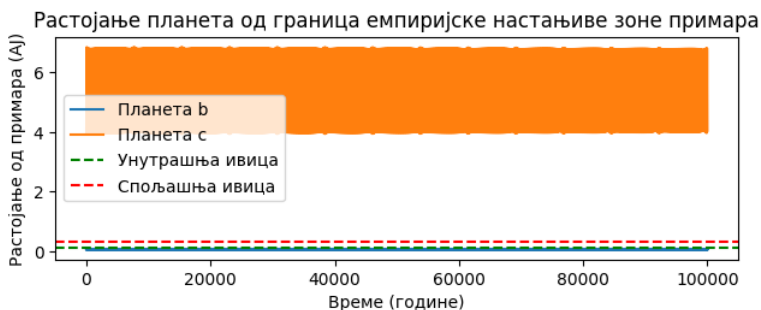
Слика 46: Емпиријска настањива зона примара и положај планета у зони. Линије које представљају планете су се поклопиле, јер се ниједна не налази у настањивим зонама примара.



На сликама 47 и 48 може се видети колико су планете удаљене од настањивих зона примара. Планета Ab је веома близу унутрашњих граница настањивих зона. Довољно је погледати у табелу 15 и видети колико је планета близу тих граница али не залази у њих.

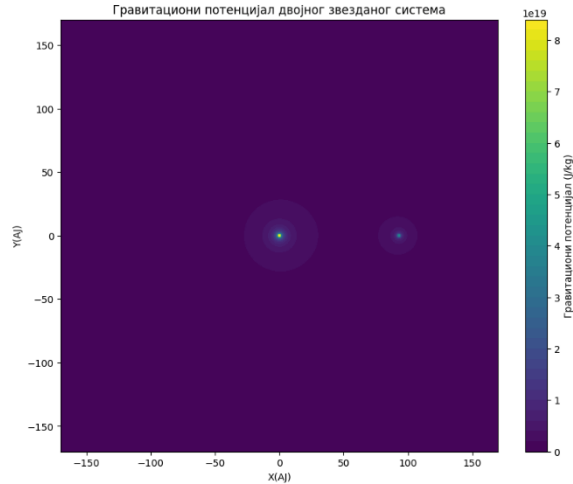


Слика 47: Уска настањива зона примара и положај планета у зони.



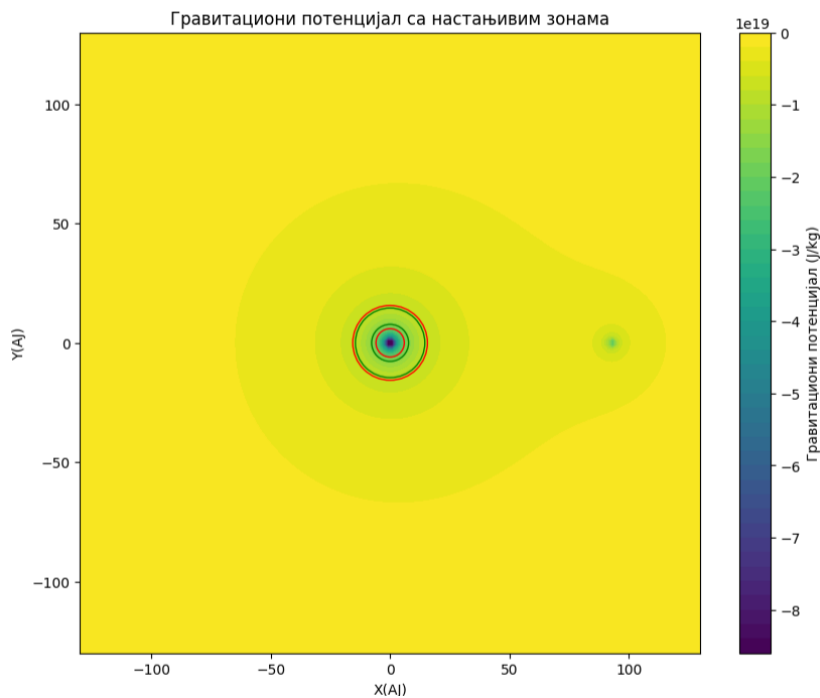
Слика 48: Емпиријска настањива зона примара и положај планета у зони.

На слици 49 се види гравитациони потенцијал двојног система масе звезде су конвертоване у  $kg$ . Позиције звезде на графика су задате у Ај. Примар је на позицији  $(0, 0)$ , планета Ab у  $(0.072, 0)$ , планета Ac у  $(5.4, 0)$ , секундар у  $(93, 0)$ . Десно, поред графика, може да се види колики је гравитациони потенцијал звезде. У љубичастој боји опсег је око  $(0.0$  до  $0.0002)$ . Гравитационални потенцијал је низак.



Слика 49: Гравитациони потенцијал звезда система GJ 15. Примар је у центру, док је секундар у (93, 0).

На слици 50 се виде настањиве зоне око GJ 15A. На  $x$ ,  $y$  осама су приказана растојања настањивих зона од примара, у АЈ. Да би се јасније виделе границе настањивих зона морало се извршити увећање 50 пута, па се зато добијају веће вредности граница него што су реалне вредности. Увећане границе уске зоне су [7.7483, 14.5515], а емпиријске [5.9384, 15.65]. На слици је приказан и гравитациони потенцијал између две звезде.



Слика 50: Приказ настањивих зона звезде GJ 15. Зелени кругови означавају унутрашње границе зона, а црвени кругови спољашње границе.

## 4.7. Двојни систем С типа GJ 86

GJ 86, Gliese 86 је двојни систем, С типа. Овде је примар K1V спектралне класе док је секундар бели патуљак. У табели 16 су дати подаци о звездама. Око првог пара се налази планета чији су подаци дати у табели 17. Погледом на податке о температури звезда, може се видети колико је примар сјајнији од секундара па ће имати већи утицај на настањиву зону. Док податак о великој полуоси бинара говори да секундар неће имати утицај на настањиву зону око примара, нити ће утицати на ексцентрицитет планете.

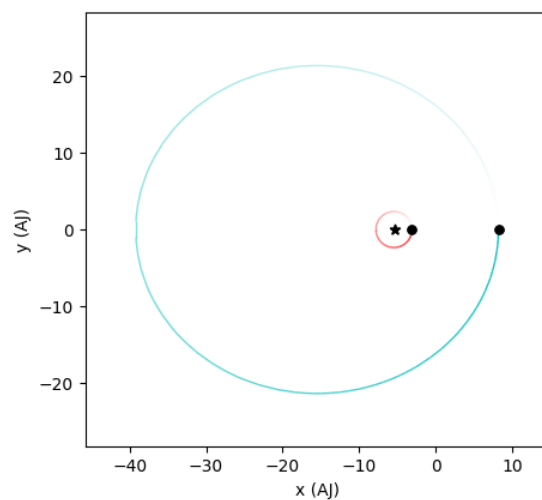
Звезде	$M(M_{\odot})$	$R(R_{\odot})$	$L(L_{\odot})$	$T_{eff} (K)$	$a_{Bin}(A)$	$e_{Bin}$
Примар	0.83	0.855	0.4026	5350	23.7	0.429
Секундар	0.5425	0.2143	0.1175	3309		

Табела 16: Подаци о бинарном систему GJ 86.

$m_{Pl}(m_{\odot})$	$a_{Pl}(A)$	$e_{Pl}$	$m_{Pl}(m_{\oplus})$	$R_{Pl}(R_{\oplus})$
0.00407	0.1177	0.048	1357.6	-

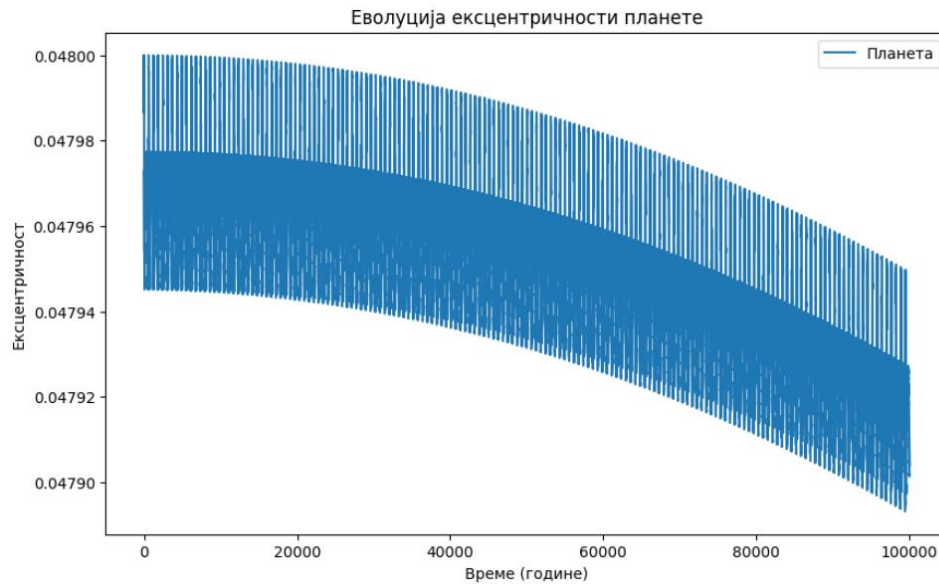
Табела 17: Подаци о планети GJ 86b.

На слици 51 се види како изгледају положаји и орбите објеката у систему. Полуоса планете је увећана 20 пута због боље прегледности слике.



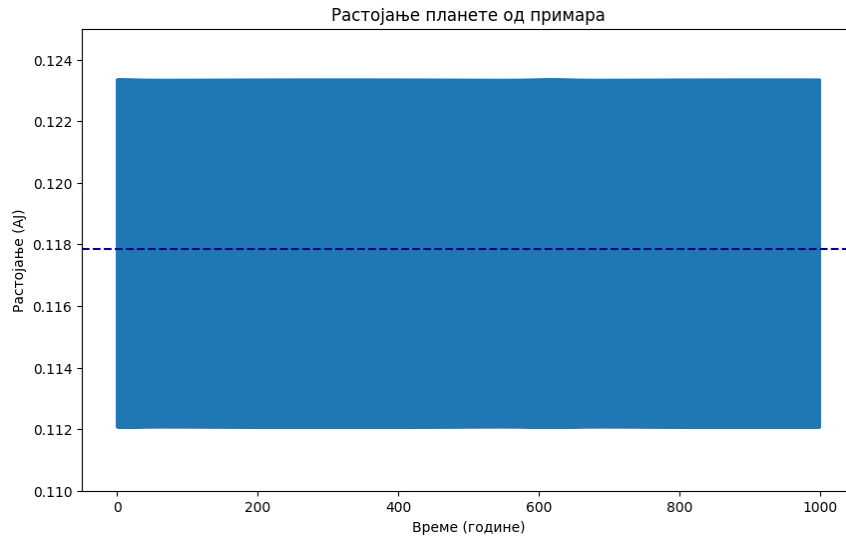
Слика 51: Орбите двојног система GJ 86. Примар је измештен из центра (црна звезда), црвена орбита је орбита планете, док је орбита секундара плава.

На слици 52 се види да како се ексцентрицитет планете мења у току 100000 година. Вредности се крећу у интервалу  $[0.04789, 0.048]$ . Током овог дугог периода може се приметити да вредност ексцентричности благо опада, не одступајући много од своје почетне вредности  $e_{pl} = 0.048$ .

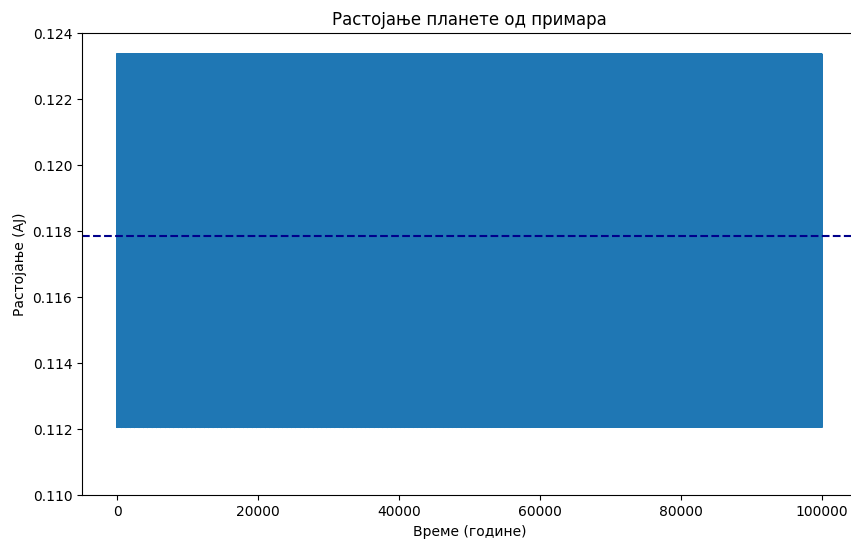


Слика 52: Промена ексцентричности током 100000 година.

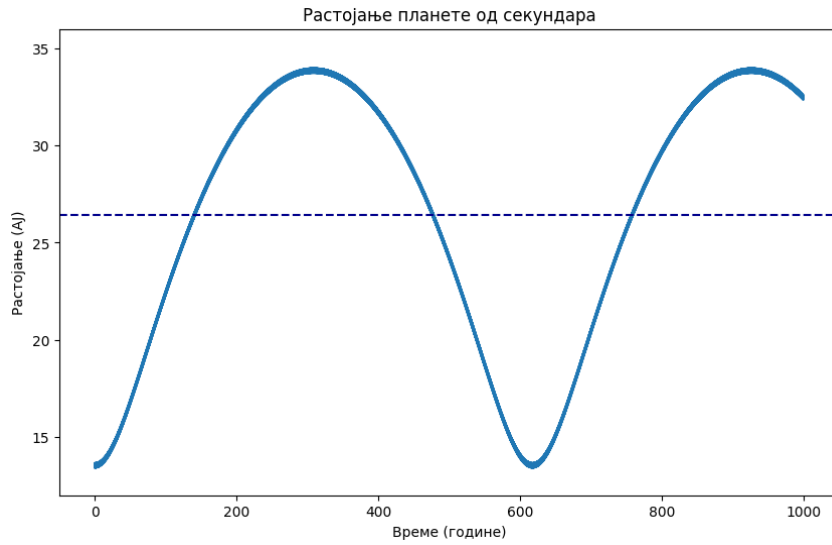
На сликама 53 и 54 могу се видети промене на растојању планете од звезде током 1000 и 100000. Испрекидана тамно плава линија на сликама представља средњу вредност растојања. Њена вредност ће износити  $\bar{r}_{pl-pr} = 0.1178$ ,  $\bar{r}_{pl-sec} = 26.4279$  за 1000 година, а  $\bar{r}_{pl-pr} = 0.1178$ ,  $\bar{r}_{pl-sec} = 25.8860$  за 100000 година. За период од 1000 година растојања планете од примара је  $[0.1120, 0.1233]$  АЈ, а од секундара  $[13.4213, 33.9787]$  АЈ, док за период од 100000 година растојања планете од примара ће бити у интервалу  $[0.1120, 0.1233]$  АЈ, а од секундара  $[13.4211, 33.9788]$  АЈ. Вредности растојања на у осу су дата у АЈ.



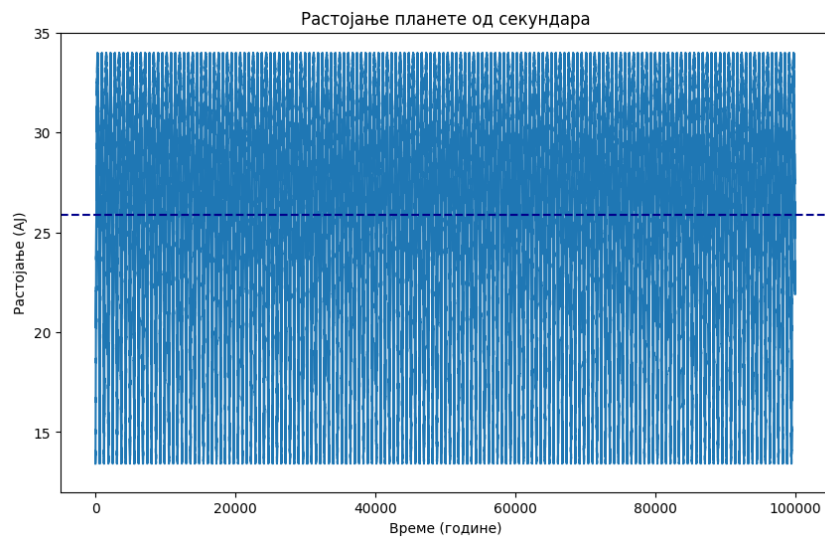
Слика 53а: Удаљеност планете од примара у распону од 1000 година.



Слика 53б: Удаљеност планете од примара у распону од 100000 година.



Слика 54а: Удаљеност планете од секундара у распону од 1000 година.



Слика 54б: Удаљеност планете од секундара у распону од 100000 година.

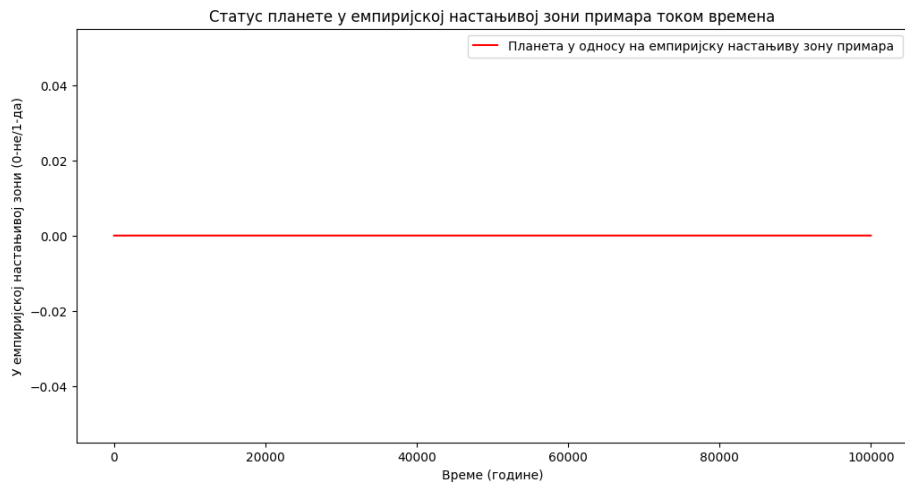
Планета 86а се не налази у настањивим зонама примара,  $a_{PI} = 0.1177$ . У табели 18 се виде границе настањивих зона. На сликама 55 и 56 се види статус планете у настањивим зонама.

GJ 86	Уска настањива зона		Емпиријска настањива зона	
$l_{x-Sun}$ (AJ)	0.97	1.67	0.75	1.77
Границе настањиве зоне примара	Ефекат неконтролисане стаклене баште (унутрашња граница)	Максимални ефекат стаклене баште (спољашња граница)	Скорашња Венера (унутрашња граница)	Рани Марс (спољашња граница)
	0.6361770931397721	1.114714793107412	0.4874365124544853	1.1834047503822407

Табела 18: Подаци о границама настањивих зона GJ 86.

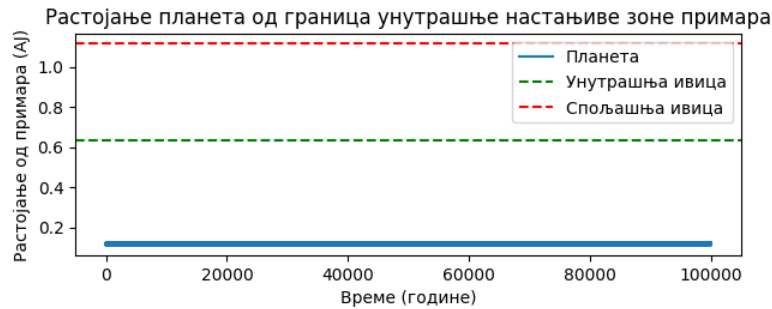


Слика 55: Уска настањива зона примара и положај планете у зони.

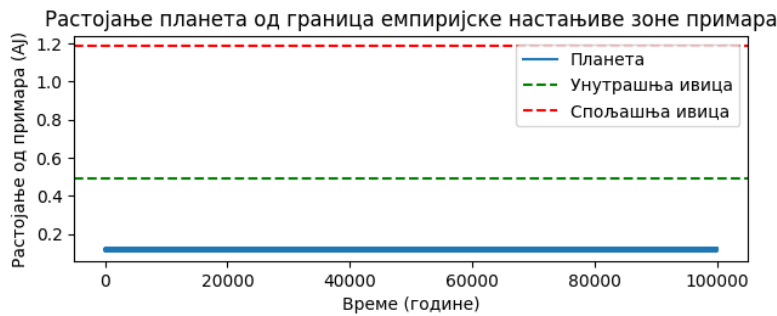


Слика 56: Емпиријска настањива зона примара и положај планете у зони.

На сликама 57 и 58 може се видети колико су планете удаљене од настањивих зона примара.



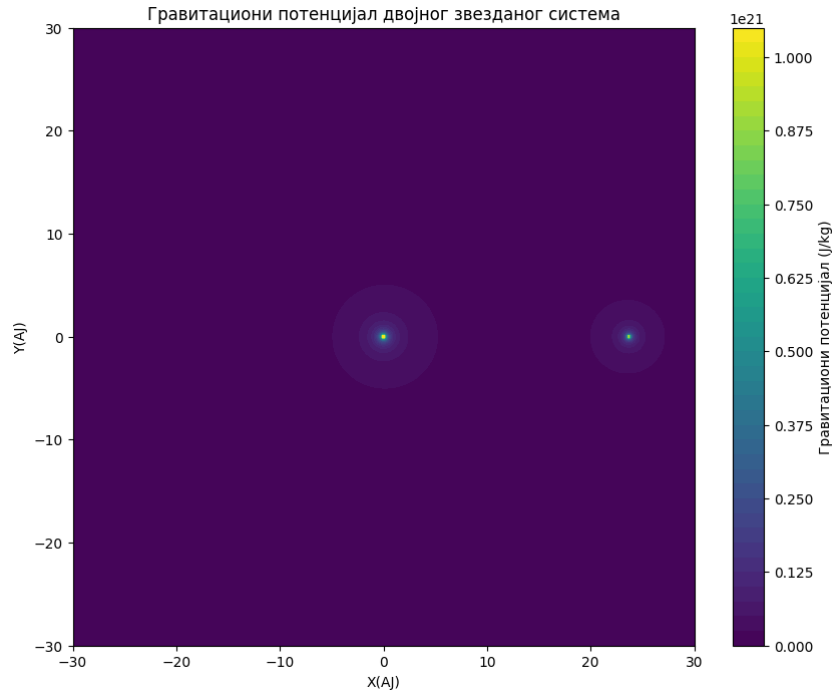
Слика 57: Уска настањива зона примара и положај планета у зони.



Слика 58: Емпиријска настањива зона примара и положај планета у зони.

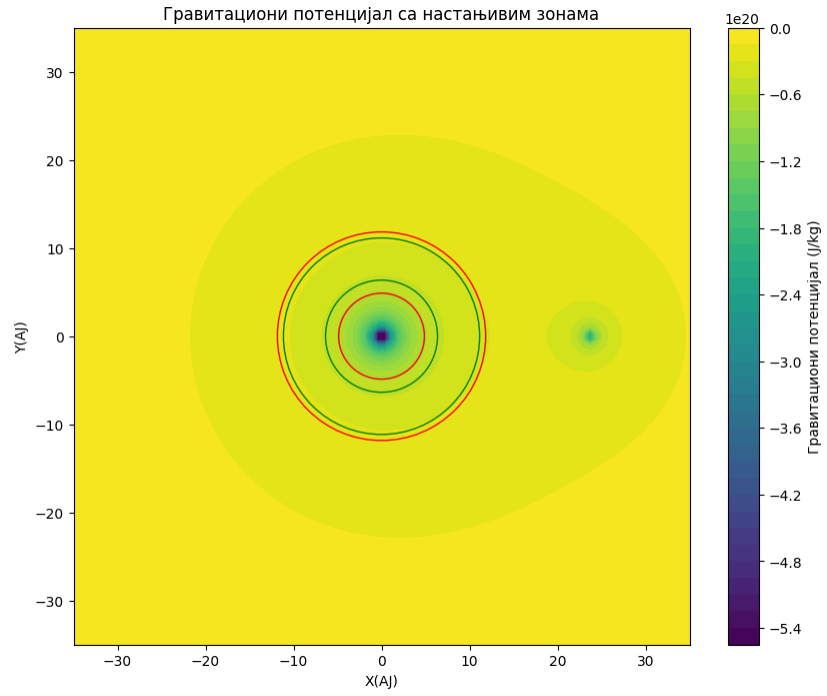
На слици 59 се види гравитациони потенцијал двојног система. Масе звезде су конвертоване у  $kg$ . Примар је на позицији  $(0, 0)$ , планета у  $(0.1177, 0)$ , а секундар у  $(23.7, 0)$ , а десно, поред графика, може да се види колики је гравитациони потенцијал звезде. Биће низак гравитациони потенцијал, опсег је око  $(0.0$  до  $0.004)$ .





Слика 59: Гравитациони потенцијал звезда система GJ 86. Примар је у центру док се секундар налази десно од њега у (23.7, 0).

На слици 60 могу да се виде настањиве зоне примара и гравитациони потенцијал.  $x$ ,  $y$  осе су приказане у АЈ. Границе настањивих зона су увећане десет пута да би биле јасније на лику. Увећане вредности границе уске настањиве зоне (6.3618, 11.1471), а емпиријске зоне (4.8743, 11.834), примар је у (0, 0), планета у (0.1177, 0), а секундар у (23.7, 0). На слици је приказан и гравитациони потенцијал између две звезде.



Слика 60: Приказ настањивих зона двојног система GJ 86. Зелени кругови означавају унутрашње границе зона, а црвени кругови спољашње границе.

## 4.8. Двојни систем С типа HD 8673

HD 8673 је систем, који се налази у северном делу сазвежђа Андромеде, С типа. Примар је F7 V спектралне класе док је секундар патуљак М класе. Око примара се налази планета HD8673 Ab, веома ексцентричне орбите. У табели 19 су дати подаци о звездама, а у табели 20 подаци о планети. Податак о радијусу секундара је непознат, маса секундара је у распону 0.33 – 0.45, док је велика полуоса такође дата у распону 35 – 60 (AJ), ексцентричност је мања од 0.5. Како се не знају тачне вредности, већ су дати опсеги, у задатку ће се узети вредности  $m_{Bin}=0.33$   $a_{Bin}=35$ , а за  $e_{Bin}= 0.25$ .

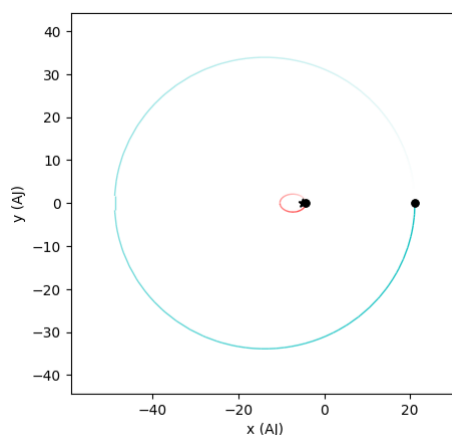
Звезде	$M(M_{\odot})$	$R(R_{\odot})$	$L(L_{\odot})$	$T_{eff}(K)$	$a_{Bin}(AJ)$	$e_{Bin}$
Примар	1.35	1.39	0.4587	6472	35 - 60	< 0.5
Секундар	0.33-0.45	-	0.01796	3520		

Табела 19: Подаци о бинарном систему HD 8673.

$m_{Pl}(m_{\odot})$	$a_{Pl}(AJ)$	$e_{Pl}$	$m_{Pl}(m_{\oplus})$	$R_{Pl}(R_{\oplus})$
0.01349	3.02	0.723	4514.725	-

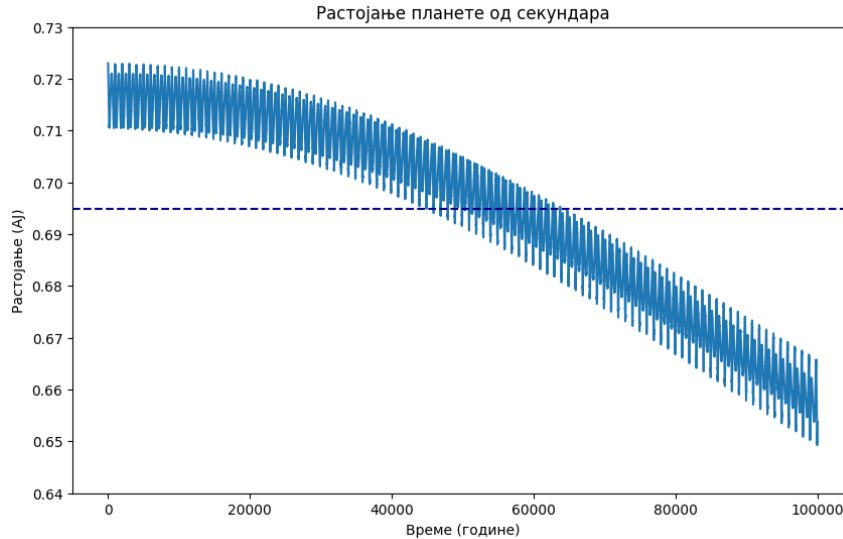
Табела 20: Подаци о планети HD 8673 Ab.

На слици 61 се види како изгледају положаји и орбите објеката у систему.



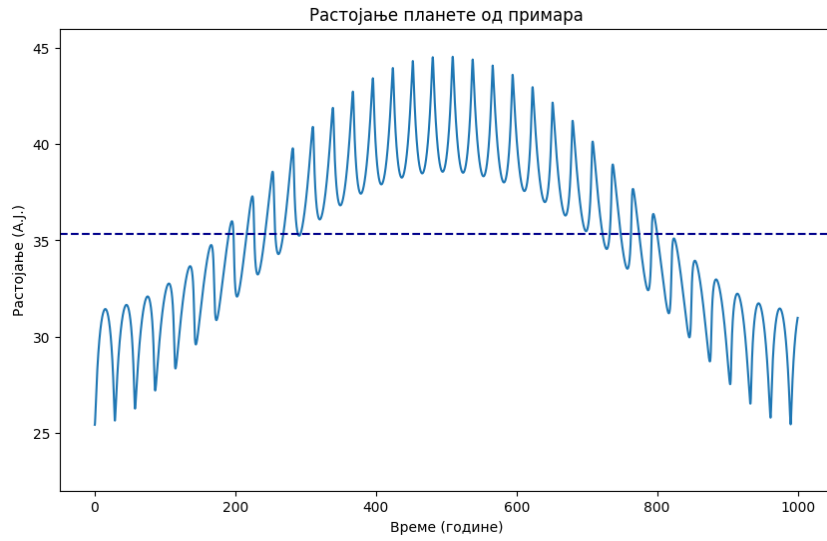
Слика 61: Орбите Орбите двојног система HD 8673. Примар је измештен из центра, орбита планете је црвена док је плава орбита од секундара.

На слици 62 се види како се ексцентрицитет орбите планете мења у току 100000 година. Вредности ексцентричности се смањују током година. Креће се од  $e_{max} = 0.723$  опадајући ка вредности од  $e_{min} = 0.6493$ .

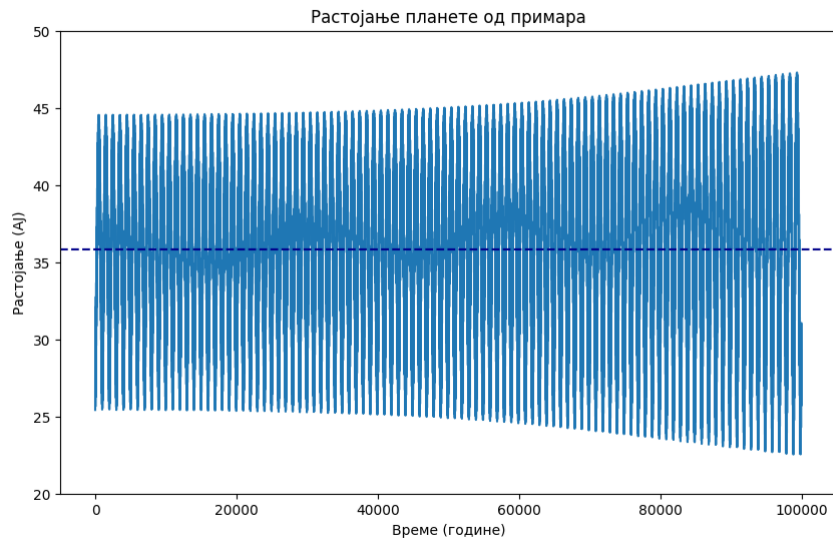


Слика 62: Промена ексцентричности током 100000 година.

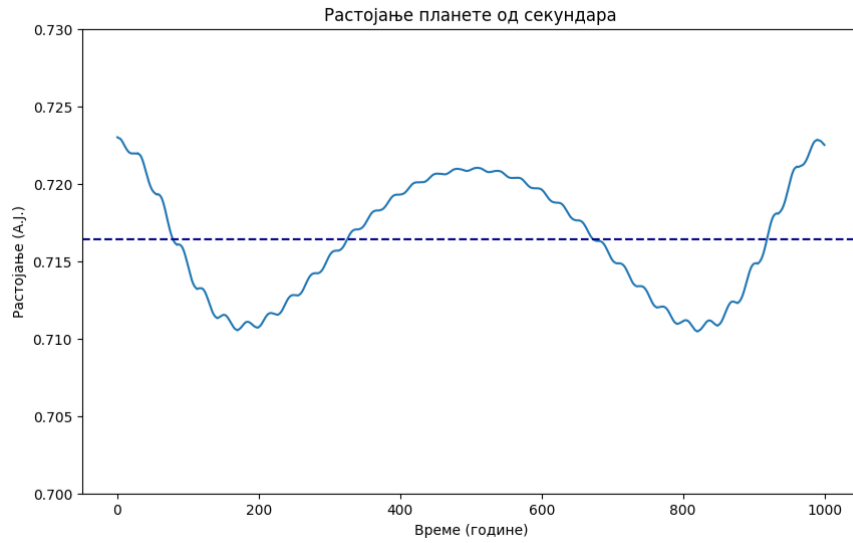
На сликама 63 и 64 могу се видети промене на растојању планете од звезде током 1000 и 100000. Испрекидана тамно плава линија на сликама представља средњу вредност растојања. Њена вредност ће износити  $\bar{r}_{Pl-Pr} = 35.3586$ ,  $\bar{r}_{Pl-Sec} = 0.7164$  за 1000 година, а  $\bar{r}_{Pl-Pr} = 35.7956$ ,  $\bar{r}_{Pl-Sec} = 0.6949$  за 100000 година. За период од 1000 година растојања планете од примара је  $[25.4218, 44.5417]$  А, а од секундара  $[0.7104, 0.7223]$  А, док за период од 100000 година растојања планете од примара ће бити у интервалу  $[22.5347, 47.2918]$  А, а од секундара  $[0.6493, 0.723]$  А. Може се приметити да је због високе вредности ексцентричности орбите планете, мање растојање до секундара него до примара. Вредности растојања на у осу су дата у А.



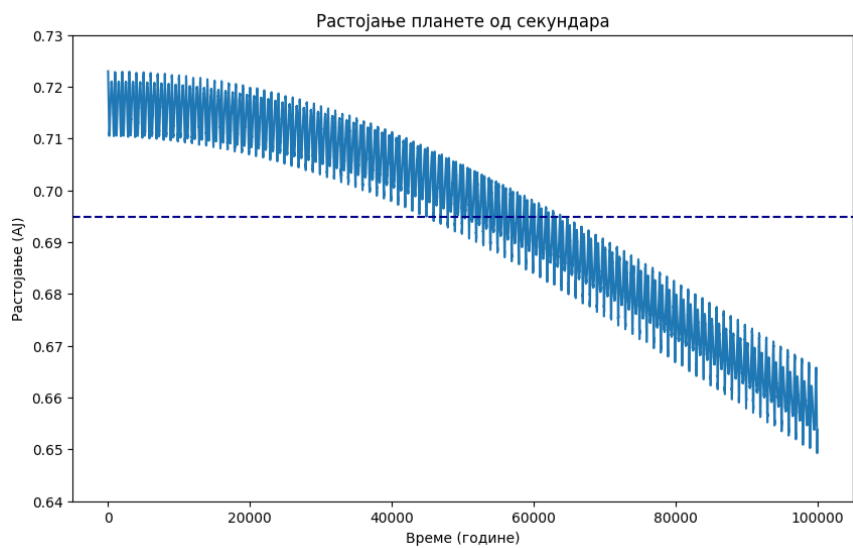
Слика 63а: Удаљеност планете од примара у распону од 1000 година.



Слика 63б: Удаљеност планете од примара у распону од 100000 година.



Слика 64а: Удаљеност планете од секундара у распону од 1000 година.

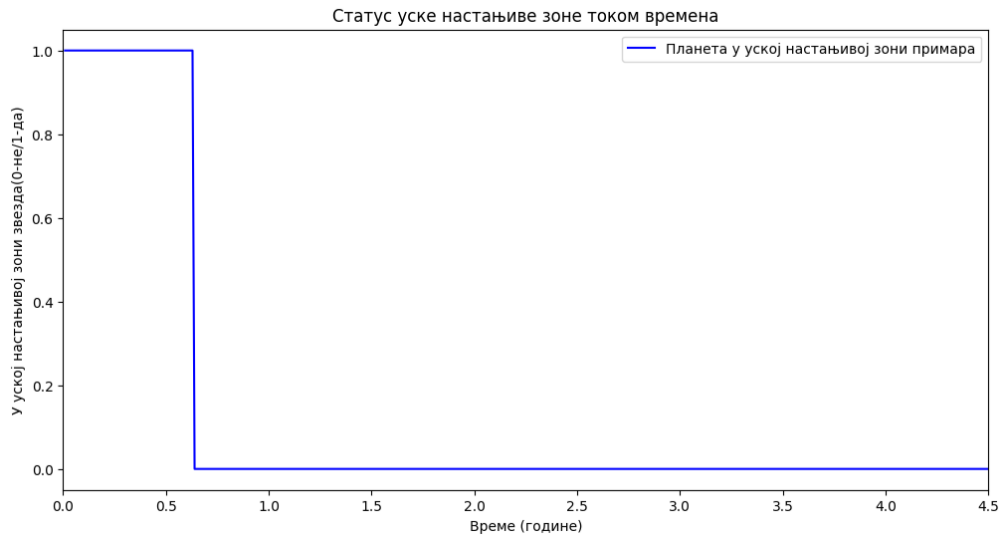


Слика 64б: Удаљеност планете од секундара у распону од 100000 година.

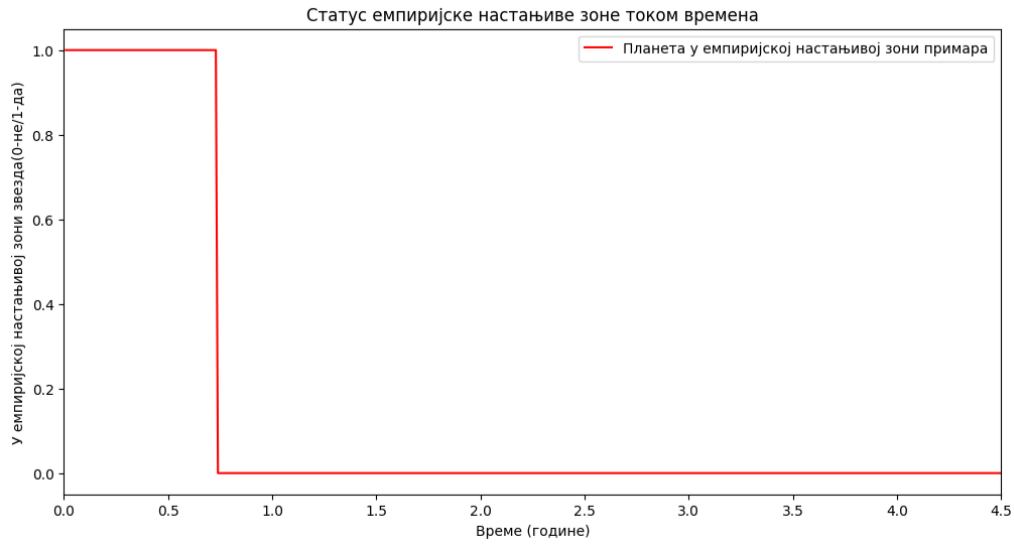
Планета 8673 Аб се налази у настањивим зонама примара,  $a_{Pl} = 0.723$ . У табели 21 се виде границе настањивих зона. На  $x$  - оси је приказан један орбитални период планете  $P_{Pl} = 4.5$  година, где се може са слика 65 и 66 видети како улази и излази из настањивих зона.

HD 8673	Уска настањива зона		Емпиријска настањива зона	
$l_{x-Sun}$ (A)	0.97	1.67	0.75	1.77
Границе настањиве зоне примара	Ефекат неконтролисане стаклене баште (унутрашња граница)	Максимални ефекат стаклене баште (спољашња граница)	Скорашња Венера (унутрашња граница)	Рани Марс (спољашња граница)
	0.6307189529141484	1.0715646209314675	0.49450581996650445	1.1338224781344128

Табела 21: Подаци о границама настањивих зона HD 8673.

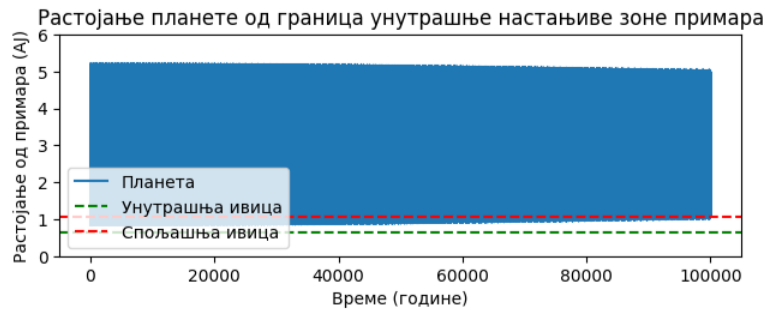


Слика 65: Уска настањива зона примара и положај планете у зони.

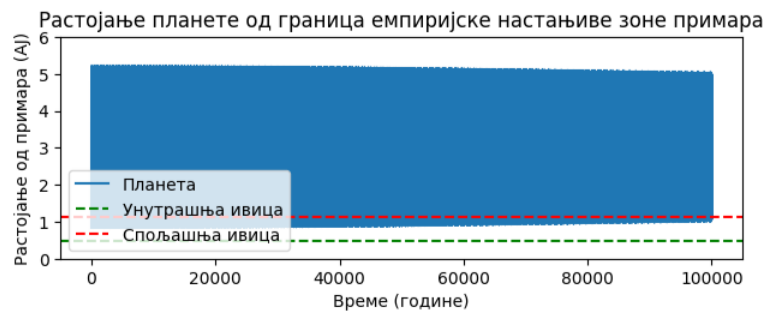


Слика 66: Емпиријска настањива зона примара и положај планете у зони.

На сликама 67 и 68 може се видети како планета улази и излази из настањивих зона.



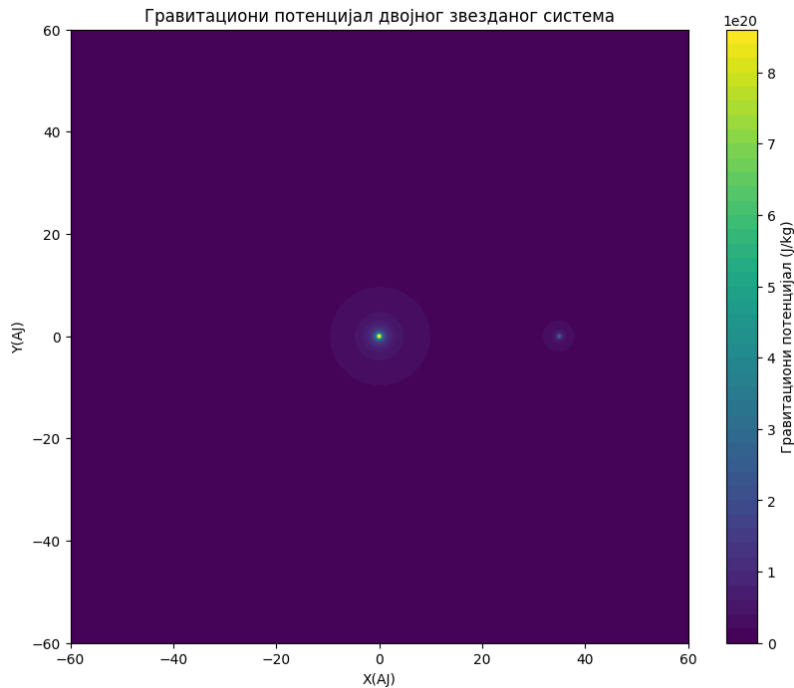
Слика 67. Уска настањива зона примара и положај планета у зони



Слика 68: Емпиријска настањива зона примара и положај планета у зони

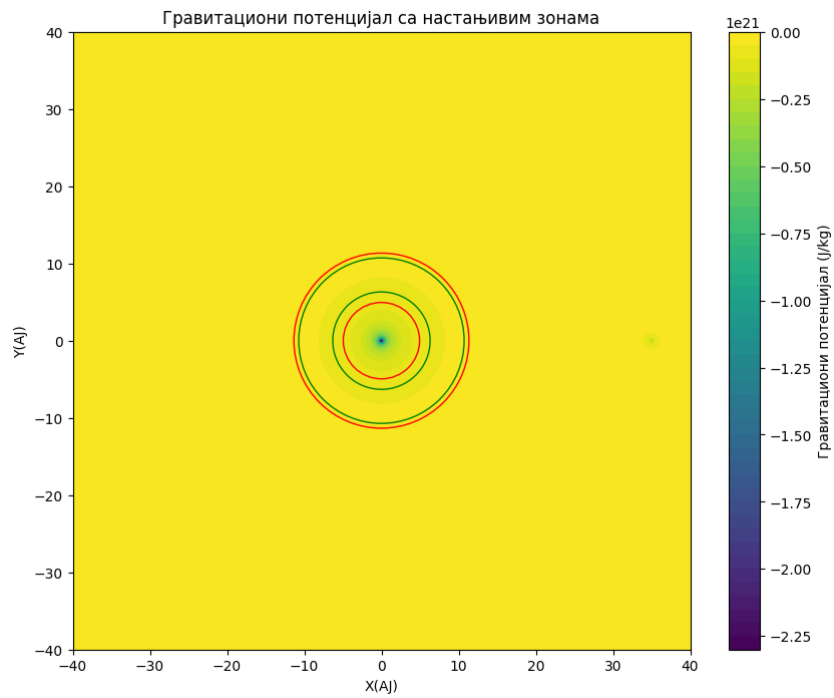


На слици 69 се види гравитациони потенцијал двојног система. Масе звезде су конвертоване у  $kg$ . Позиције звезде на графику су задате у АЈ. Примар је на позицији  $(0, 0)$ , планета у  $(3.02, 0)$ , а секундар у  $(35, 0)$ , а десно, поред графика, може да се види колики је гравитациони потенцијал звезде. Низак је гравитациони потенцијал, опсег је око  $(0.0$  до  $0.004)$ , који се налази у љубичастој зони.



Слика 69: Гравитациони потенцијал звезда система HD 8673. Примар је у центру, а секундар у  $(35, 0)$ .

На слици 70 могу да се виде настањиве зоне примара и гравитациони потенцијал.  $x, y$  осе су приказане у АЈ. На слици су границе настањивих зона увећане због боље прегледности слике. Увећане границе уске настањиве зоне су  $(6.3072, 10.7156)$ , а емпиријске зоне  $(4.9451, 11.3382)$ . Гравитациони потенцијал између две звезде је једнак нули, секундар је у  $(35, 0)$ .



Слика 70: Приказ настањивих зона двојног система HD 8673. Зелени кругови означавају унутрашње границе зона, а црвени кругови спољашње границе.

# Глава 5

## Закључак

У овој тези је први пут употребљен интегратор REBOUND за изучавање еволуције путања планета у настањивим зонама посматраних система типа П и С. У П тип систему приликом рачунања граница настањивих зона постојала је једначина (једначина (5) из литературе [4]) која која је служила за рачунања растојања између секундара и планете сличне Земљи. Ова једначина је захтевала да се приликом рачунања растојања  $r_{Pl-Sec}$ , зна више параметара како што су права аномалија  $v$  и позициони угао  $\theta$ . Праву аномалију су добили стављањем вредности  $v = \frac{k\pi}{3}$ ,  $k= 0, 1, 2, 3$ . Да би се одредио угао  $\theta$ , Haghighipour & Kaltenegger, (2013) су пронашли другачији приступ за решавање. Вредност угла су добили коришћењем и трансформацијама једначине кретања планете у циркумбинарној орбити. Може се сматрати да нису користили интеграторе, јер нема помена о њиховом коришћењу.

Применом REBOUND-а било је могуће брзо израчунавање растојања, преко норме матрице чији су елементи разлике између растојања  $r_{Pl-Sec}$ . Пошто се растојања између секундара и планете раде за период од 100000 година, биће велики број резултата. REBOUND је у, често, кратком року могао да изврши прорачуне, у зависности од унетих података. Прорачуни су се извршавали од оних простијих за пет минута, док је код сложенијих прорачуна некада требало и више часова. У примерима Кеплер 453 и HD 8673 био је потребан податак о периоду обиласка планете јер су планете ових двојних система улазиле и излазиле из настањивих зона. Када се програм извршавао за период од 100000 година, а не за један орбитални период планете, није се могло добро видети како планета улази и напушта настањиву зону примара. Подаци су се проналазили преко база података споменутих у овој тези.

У раду су обрађени примери П и С тип двојних звезда.

У П тип систему планета кружи око обе звезде на удаљености  $a_{Pl}$ . У обрађеним примерима П типа, Кеплер 64, Кеплер 38, Кеплер 453 система, по положајима орбита, удаљености саме планете од звезде у систему, могло се закључити да секундар неће имати утицаја на ексцентричност планетине орбите, нити ће утицати на настањиву зону примара. Вредности ексцентричности планета ће се кретати у интервалу  $e_{Pl} \in [0.0320, 0.0539]$ , вредности маса  $m_{Pl} \in [0.000361M_{\odot}, 0.00095M_{\odot}]$ . Код звезда у овим примерима се може видети из података да су мале вредности луминозности код секундара  $L_{Sec} \in [0.0049L_{\odot}, 0.008L_{\odot}]$ , па секундар неће имати утицаја на локацију/домет настањиве зоне примара.

У С тип систему планета кружи око примара, док секундар кружи око примара и звезде. У обрађеним примерима GJ 15, GJ 86 и HD 8673 ексцентричности орбите планета су биле у интервалу  $e_{Pl} \in [0.048, 0.723]$ , масе су се кретале у интервалу  $m_{Pl} \in [0.000009M_{\odot}, 0.1177M_{\odot}]$ . У примерима, С типа, вредности полуосе бинара  $a_{Bin}$  су биле велике  $a_{Bin} \in [23.7, 93]$ . Услед великих вредности полуосе бинара, а малих вредности луминозности  $L_{Sec} \in [0.0038L_{\odot}, 0.1175L_{\odot}]$ , секундар неће имати утицаја на ексцентричност планетине орбите, нити на локацију настањиве зоне  $a_{Pl} \in [0.072, 5.4]$ .

Главни закључак:

У примерима је показано да се ексцентричност мало мења у периоду од 100000 година. Планете ће имати стабилне орбите. Такође је показано да се планете система Кеплер 453 и HD 8673 налазе у настањивим зонама примара. Али њихов боравак у настањивим зонама није константан јер је показано да у току периода од 100000 година планете улазе и излазе из настањивих зона својих матичних звезда. А један од услова неопходних да планета има потребне услове за настањивост јесте дугорочан боравак у настањивој зони звезде.

Ово не значи нужно да нема услова за живот на њиховим површинама. Доказано је да на Земљи постоје облици живота који могу да опстану у екстремним условима (Ковачевић, 2016). Данашњи критеријуми за настањиве зоне ће у будућности морати да се мењају. У примерима је коришћен модел Сунчеве настањиве зоне, који се сигурно у будућности неће примењивати за друге системе. Ово тек остаје да се покаже, када се открију планете са знацима живота око својих матичних звезда.

# Литература

- [1] Heintz Wulff D.: 1971, *Double Stars*, D. Reidel. Publishing Company.
- [2] Hilditch R.W.: 2001, *An Introduction to Close Binary Stars*. Cambridge University Press.
- [3] Kaltenecker Lisa i Nader Haghighipour: 2013, Calculation the habitable zone of binary star systems. I. S- type binaries, *The Astrophysical Journal*, Volume 777, Number 2.
- [4] Haghighipour Nader, Lisa Kaltenecker: 2013, Calculating the Habitable Zone of Binary Star Systems II: P- Type Binaries. *Astrophysical Journal*, 777, article id. 166..
- [5] This research has made use of the Washington Double Star Catalog maintained at the U.S. Naval Observatory.
- [6] This research has made use of the NASA Exoplanet Archive, which is operated by the California Institute of Technology, under contract with the National Aeronautics and Space Administration under the Exoplanet Exploration Program.
- [7] Lanza, A. & Catalano, S. & Cutispoto, G. & Pagano, Isabella & Rodono, M., Erratum: 1998, Long-term starspot evolution, activity cycle and orbital period variation of AR Lacertae. *Astronomy & Astrophysics - ASTRON ASTROPHYS.* 339. 309-560. *Astronomy and Astrophysics* 339(2):309-560.
- [8] Montes, M.J. Fernández-Figueroa, E. De Castro, and J. Sanz-Forcada: 1997, Multiwavelength optical observations of chromospherically active binary systems. I. Simultaneous H $\alpha$ , Na i D1, D2 and He i D3 observations, *D. Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* 125, 263-287 .
- [9] Вукићевић-Карабин Мирјана, Атанацковић Олга: 2010, Општа астрофизика., Завод за уџбенике, Београд.
- [10] Perryman Michael: 2018, *The Exoplanet handbook*, second edition.
- [11] Ziqi Dai, Dong Ni, Lizhuang Pan and Yiheng Zhu: 2012 (2021), Five Methods of Exoplanet Detection, *Journal of Physics: Conference Series* 012135.
- [12] Kopparapu Ravi Kumar, Ramses Ramirez, James F. Kasting, Eymet Vincent, Tyler D. Robinson, Suvrath Mahadevan, Ryan C. Terrien, Shawn Domagal Goldman, Victoria Meadows, and Rohit Deshpande: 2013, Habitable zones around main-sequence stars: New Estimates, *The Astrophysical Journal*, Volume 765, Number 2
- [13] Rein Hanno, Spiegel David S.: 2014, IAS15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 446, Issue 2, p.1424-1437
- [14] Weisstein, Eric W.: "Radau Quadrature." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/RadauQuadrature.html>

- [15] проф. Милутин Миланковић: 1995, Небеска механика, предавања на Београдском универзитету. Vesta Company.
- [16] Ковачевић Б. Анђелка: 2016, Астробиологија. Математички факултет, Универзитет у Београду, Србија.
- [17] Neb Duric: 2004, *Advanced Astrophysics*. Cambridge, University Press.
- [18] Rein & Liu: 2012, REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics, *Astronomy and Astrophysics*, Volume 537, A128
- [19] A brief introduction to exoplanets, <https://sci.esa.int/s/ABnkm2A>
- [20] Ochsenbein et al.: 2000, This research has made use of the VizieR catalogue access tool, CDS, Strasbourg Astronomical Observatory, France (DOI : 10.26093/cds/vizier)., *A&AS*, 143, 23, "The VizieR database of astronomical catalogues."
- [21] Wenger et al: 2000, , "The SIMBAD astronomical database". This research has made use of the SIMBAD database, CDS, Strasbourg Astronomical Observatory, France , *A&AS*, 143, 9.
- [22] Lewis C. Roberts Jr., Brian D. Mason, Christopher R. Neyman, Yanqin Wu, Reed L. Riddle, J. Christopher Shelton, John Angione, Christoph Baranec, Antonin Bouchez, Khanh Bui, Rick Burruss, Mahesh Burse, Pravin Chordia, Ernest Croner, Hillol Das, Richard G. Dekany, Stephen Guiwits, David Hale, John Henning, Shrinivas Kulkarni Nicholas Law, Dan McKenna, Jennifer Milburn, Dean Palmer, Sujit Punjadi, A.N. Ramaprakash, Jennifer E. Roberts, Shriharsh P. Tendulkar, Thang Trinh, Mitchell Troy, Tuan Truong, Jeff Zolkower: 26 Feb 2015, Know The Star, Know the Planet. IV. A Stellar Companion to the Host star of the Eccentric Exoplanet HD 8673b, arXiv: 1502.06630v3.
- [23] R. W. Argyle: 2004, *Observing and Measuring Visual Double Stars*, Second Edition, Springer.
- [24] Lecavelier des Etangs, A. and Lissauer, Jack J.: 2022, The IAU working definition of an exoplanet *New Astronomy Reviews*, arXiv:2203.09520v1
- [25] Wolszczan, A. & Frail, D. A.: 1992, A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12, *Natur*.355..145W DOI : 10.1038/355145a0
- [26] Maunden, E. Walter: 1913, *Are the Planets Inhabited?*. New York: Harper and Brothers. Retrieved 17 April 2008.
- [27] Mayor, Michel; Queloz, Didier: November 1995, "A Jupiter-mass companion to a solar-type star". *Nature*. 978 (6555): 355359. Bibcode: 1995 Natur.378.355M. doi:10.1038/378355a0. S2CID 4339201
- [28] Lorenz, Ralph: 2020, "Maunder's Work on Planetary Habitability in 1913: Early Use of the term "Habitable Zone" and a "Drake Equation" Calculation". *Research Notes of the American Astronomical Society*. 4 (6): 79. Bibcode: 2020RNAAS...4..79L. doi:10.3847/2515-5172/ab9831. S2CID 219930646.

- [29] Kasting, James F.; Whitmire, Daniel P.; Reynolds, Ray T.: January 1993, "Habitable Zones around Main Sequence Stars". *Icarus*. 101 (1): 108–118. Bibcode:1993Icar..101..108K. doi:10.1006/icar.1993.1010. PMID 11536936.
- [30] Huang, Su-Shu: October 1959, "The Problem of Life in the Universe and the Mode of Star Formation". *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*. 71 (422): 421-424. Bibcode:1959PASP...71..421H. doi:10.1086/127417. JSTOR 40673575
- [31] Huang, Su-Shu: 1966, *Extraterrestrial life: An Anthology and Bibliography*. National Research Council (U.S.). Study Group on Biology and the Exploration of Mars. Washington, D. C.: National Academy of Sciences. pp. 87–93. Bibcode:1966elab.book.
- [32] Seager: 2013, *Exoplanet Habitability*, *Science*, 340, 577.
- [33] Huang, Su-Shu: 1960, "Life-Supporting Regions in the Vicinity of Binary Systems", Published By: *Astronomical Society of the Pacific*: Vol. 72, No. 425
- [34] Hoffmeister C: 1984, *Veränderliche Sterne – 2nd ed*