Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

PRAMENOVI KRUGOVA

\- Master rad -

Mentor:
dr. Srđan Vukmirović, vanredni profesor

Članovi komisije:
dr Tijana Šukilović, vanredni profesor
dr Mirjana Milijević, docent

Student:
Mirela Berić 1139/2020

Beograd, 2024.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu se proučavaju pramenovi krugova koji su interesantni iz razloga što povezuju više vrsta geometrije: inverzivnu, projektivnu, analitičku, ...
Takođe su i korisni jer imaju višestruku i značajnu primenu. Koriste se u matematici, fizici, elektronici, umetnosti, telekomunikacijama, u laboratorijskim okruženjima, industriji za merenje i testiranje signala visokih frekvencija, kao i u medicinskim uređajima kao što su rendgen aparati itd. Koaksijalni kablovi se koriste i u kućnim antenskim sistemima za prijem televizijskih signala ili u satelitskim komunikacijama. Dakle, pramenove krugova, osim u matematici koristimo i u svakodnevnom životu.

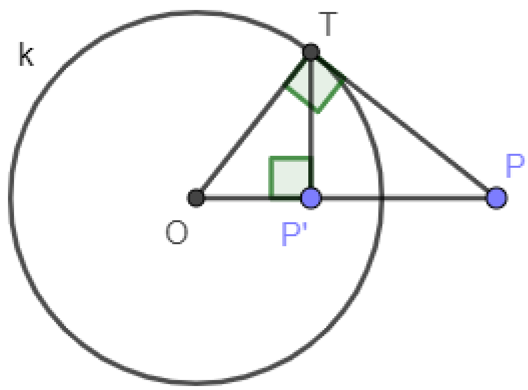
Struktura rada je sledeća.
Na samom početku ćemo se upoznati sa inverzijom u odnosu na krug koja je osnova za definisanje pramenova krugova. Navešćemo i par osobina ortogonalnih krugova, jer su često deo pramenova krugova, pa čak i jedna njegova vrsta. Kada definišemo i potenciju u odnosu na krug i radikalne ose, dolazimo do posebne familije krugova – pramenova krugova koja proučavamo u četvrtom poglavlju. Krug je određen sa tri tačke, a pramen krugova dobijamo kada izostavimo jednu tačku. U petom poglavlju ćemo prikazati poznati Štajnerov porizam i njegov lanac koji predstavljaju samo jednu od mnogih zanimljivosti i lepota krugova. U šestom poglavlju ćemo se osvrnuti na analitički pristup pramenovima krugova, gde možemo videti oblike jednačine za svaki navedeni pramen krugova. Na kraju dolazimo do primena pramenova krugova. Prikazaćemo primenu u fizici odnosno na naelektrisanje čestica, kao i u elektronici odnosno proizvodnji kablova. Navedene su i primene na matematičke zadatke koji se javljaju na Olimpijskim takmičenjima.

Prilikom izrade ovog rada, napravila sam određen broj apleta u Geogebri, radi boljeg razumevanja i ilustracije.

Želim da se zahvalim mentoru i članovima komisije na saradnji, komentarima i pažljivom čitanju rada, što je pomoglo da rukopis bude bolji.

1. Inverzija u odnosu na krug

Definicija 1.1. Neka je $k = k(O, r)$ proizvoljan krug ravni E^2, zatim $E^2_* = E^2 \setminus \{O\}$. *Inverzijom u odnosu na krug* k nazivamo transformaciju $\varphi_k : E^2_* \to E^2_*$, koja svaku tačku $P \in E^2_*$ prevodi u tačku $P' \in E^2_*$ takvu da je $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$. Tačku O nazivamo *centrom* ili *središtem inverzije*, duž r nazivamo *poluprečnikom*, veličinu r^2 nazivamo *stepenom*, a krug k nazivamo *krugom inverzije* φ_k.



Slika 1

Konstrukcija inverzne tačke P' se dobija na sledeći način:

- Prvi slučaj: Neka se P nalazi van kruga k.
  - Nađemo tangentu iz tačke P na krug;
  - Tačka T je tačka dodira tangente i kruga;
  - Povučemo pravu kroz tačke O i P;
  - Nađemo normalu iz tačke T na pravu $p(O, P)$;
  - Tačka P' se nalazi u preseku normale i prave $p(O, P)$.
- Drugi slučaj: Neka se P nalazi unutar kruga k.
  To je ustvari inverzivan postupak konstrukcije tačke P ako je dato P'.
- Treći slučaj: P se nalazi na kružnici k. Tada je $P' = P$.

Dokazaćemo da su tačke P i P' zaista inverzne. U tu svrhu, posmatramo trouglove $\Delta\, OTP$ i $\Delta\, OP'T$. Ti trouglovi su slični, jer su im odgovarajući uglovi podudarni. Zato važe sledeće proporcije:

$$\frac{OT}{OP} = \frac{OP'}{OT}.$$

Kako je $OT = r$, tako dobijamo traženu jednakost $OP \cdot OP' = r^2$.

Iz definicije neposredno sledi da je inverzija u odnosu na krug $k \subset E^2$ bijektivna transformacija. To nije transformacija cele ravni E^2 već samo njenog dela E_*^2, jer u njoj nije definisana slika tačke O, niti je tačka O slika neke tačke ravni E^2 (Slika 1).

Međutim, iako inverzija nije definisana u tački O, možemo smatrati da je slika tačke O beskonačno daleka tačka ravni, i obrnuto. Pri tome, ravni dodajemo samo jednu tačku i time ustvari dobijamo dopunjenu ravan koja je homeomorfna Rimanovoj sferi, koja se koristi u kompleksnoj geometriji.

Narednom teoremom izvodimo najvažnija svojstva uvedene transformacije.

Teorema 1.2. Inverzija u odnosu na krug je involuciona transformacija.
Dokaz. Neka je $\varphi_k: E_*^2 \to E_*^2$ inverzija u odnosu na krug $k(O, r)$. Ako je $P \in E_*^2$ biće $P' = \varphi_k(P)$ tačka poluprave OP takva da je $OP \cdot OP' = r^2$. Stoga je i tačka P na polupravoj OP' takva da je $OP \cdot OP' = r^2$, pa je $\varphi_k(P') = P$. ■

Teorema 1.3. U inverziji $\varphi_k: E_*^2 \to E_*^2$ u odnosu na krug, tačka P je invarijantna ako i samo ako je $P \in k$.
Dokaz. Ako je tačka $P \in E_*^2$ invarijantna, imamo da je $OP \cdot OP = r^2$, pa je $OP = r$, i prema tome $P \in k$. Obrnuto, ako je $P \in k$ biće tačka $P' = \varphi_k(P)$ na polupravoj OP takva da je $OP \cdot OP' = r^2$, $OP = r$ i prema tome $P = P'$. ■

Teorema 1.4. Proizvod dveju inverzija u odnosu na koncentrične krugove $k(O, r)$ i $k_1(O, r_1)$ je homotetija sa koeficijenton $\left(\frac{r_1}{r}\right)^2$.
Dokaz. Ako se tačka P preslikava prvom inverzijom u P', a P' drugom inverzijom u P'', tada je $OP \cdot OP' = r^2$ i $OP' \cdot OP'' = {r_1}^2$, pa proizvod zadatih inverzija preslikava tačku P u tačku P'' takvu da je

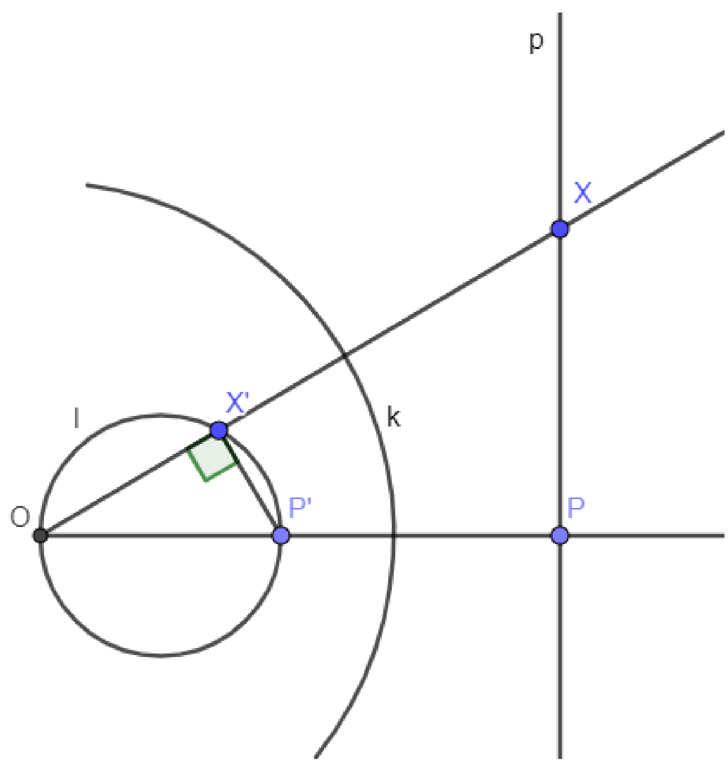
$$\frac{OP''}{OP} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2. \quad ■$$

Teorema 1.5. U inverziji $\varphi_k: E_*^2 \to E_*^2$ tački P koja se nalazi u krugu k odgovara tačka P' koja se nalazi izvan kruga k; i obrnuto, tački P koja se nalazi izvan kruga k odgovara tačka P' koja se nalazi u krugu k .

Dokaz. Neka je O središte i r poluprečnik inverzije φ. Ako je tačka P u krugu k, tada je $OP < r$, te iz relacije $OP \cdot OP' = r^2$ sledi $OP' > r$, pa je tačka P' izvan kruga. Obrnuto, ako je tačka P izvan kruga k, tada je $OP > r$, te iz relacije $OP \cdot OP' = r^2$ sledi da je $OP' < r$, pa je tačka P' u krugu k. ■

Inverzija preslikava uopštene krugove (krugove i prave) u uopštene krugove (krugove i prave). Ovde pod pravom podrazumevamo krug beskonačno velikog poluprečnika. Drugim rečima, važe sledeće dve teoreme.

Teorema 1.6. Neka su u ravni E^2 dati krug $k(O, r)$ i prava p. Pri tome, ako prava p sadrži tačku O, tada je $\varphi_k(p \setminus \{O\}) = p \setminus \{O\}$, ako prava p ne sadrži tačku O, tada lik $\varphi_k(p)$ predstavlja krug kojem nedostaje tačka O.
Dokaz. Razmotrimo najpre slučaj kada je $O \in p$. Neka je $X \in E^2 \setminus \{O\}$ i $X' = \varphi_k(X)$. Ako je $X \in p \setminus \{O\}$, biće tačka X' na polupravoj OX, pa je $X' \in p \setminus \{O\}$. Obrnuto, ako je $X' \in p \setminus \{O\}$, biće $X = \varphi_k(X')$, pa je tačka X na polupravoj OX', i prema tome $X \in p \setminus \{O\}$. Stoga je u razmatranom slučaju $\varphi_k(p \setminus \{O\}) = p \setminus \{O\}$.



Slika 2

Razmotrimo sada slučaj kada je $O \notin p$ (Slika 2, aplet [1]). Ako sa P obeležimo podnožje normale iz tačke O na pravu p, sa X bilo koju drugu tačku prave p, a sa X' i P' tačke koje u inverziji φ_k odgovaraju tačkama X i P, biće

$$\sphericalangle POX = \sphericalangle X'OP' \quad \text{i} \quad OP \cdot OP' = OX \cdot OX'.$$

Stoga je $\triangle\, POX \sim \triangle\, X'OP'$, pa je i $\sphericalangle OPX \cong \sphericalangle OX'P'$. Međutim, ugao $\sphericalangle OPX$ je prav, pa je i $\sphericalangle OX'P'$ prav. Stoga tačka X' pripada krugu kojem je duž OP' prečnik. Obrnuto, ako je $X' \in p' \setminus \{O, P\}$, tada je $\sphericalangle X'OP'$ oštar, te prava p normalna na krak OP' seče krak OX' u nekoj tački X. Pri tome je

$$\sphericalangle POX = \sphericalangle X'OP' \qquad \text{i} \qquad \sphericalangle OPX = \sphericalangle OX'P',$$

pa je $\triangle\, POX \sim \triangle\, X'OP'$. Stoga je i $OP \cdot OX = OX' \cdot OP'$, pa je

$$OP \cdot OP' = OX \cdot OX',$$

i prema tome $\varphi_k(X) = X'$. ∎

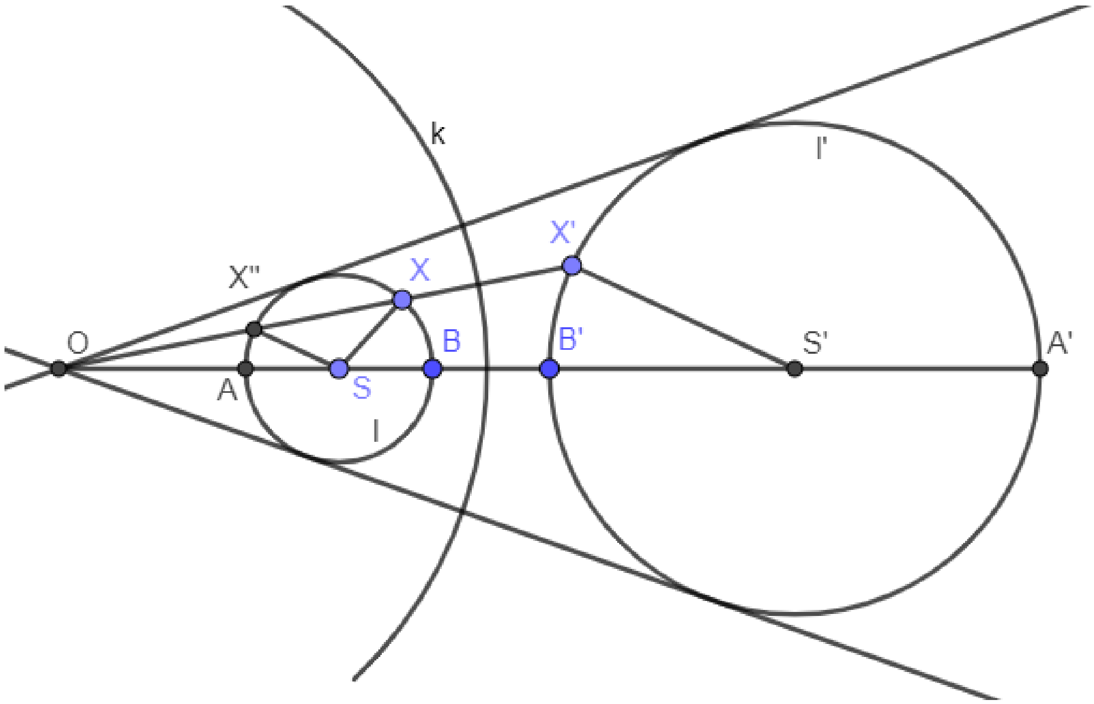
Uvodimo pojam potencije u odnosu na krug, koju koristimo za dokaz naredne teoreme. Više o potenciji i njenim osobinama, biće u trećem poglavlju.

Definicija 1.7. Neka su u ravni E^2 dati krug k i prava s kojoj pripada tačka P. Neka prava s seče krug k u tačkama X i Y. Proizvod $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY}$ predstavlja *potenciju tačke P u odnosu na krug k.*

Teorema 1.8. Neka su u ravni E^2 data dva kruga $k(O, r)$ i $l(S, \rho)$. Vredi sledeće:

1. ako $O \in l$, tada je $\varphi_k(l \setminus \{O\})$ prava linija;
2. ako je $O \notin l$, tada je $\varphi_k(l)$ takođe krug.

Dokaz. 1. Ako lik $\varphi_k(l \setminus \{O\})$ obeležimo sa l', biće $\varphi_k(l') = l \setminus \{O\}$. Stoga prema prethodnoj teoremi, lik l' predstavlja pravu liniju.



Slika 3

2. Neka je $X \in l$, $X' = \varphi_k(X)$ i X'' druga zajednička tačka prave OX i kruga l (Slika 3). Ako obeležimo sa t stepen inverzije φ_k i sa p potenciju tačke O u odnosu na krug l, imamo da je $OX \cdot OX' = t$ i $OX \cdot OX'' = p$. Deljenjem odgovarajućih strana ovih jednakosti, nalazimo da je

$$OX' : OX'' = t : p.$$

Stoga tačka X' pripada krugu l' koji u homotetiji $\mathcal{H}_{O,t:p}$ odgovara krugu l.
Obrnuto, neka je $X' \in l'$, $X'' = \mathcal{H}_{O,t:p}(X')$ i X druga zajednička tačka prave OX'' sa krugom l. Ako ponovo obeležimo sa t stepen inverzije φ_k i sa p potenciju tačke O u odnosu na krug l, biće (Slika 3)

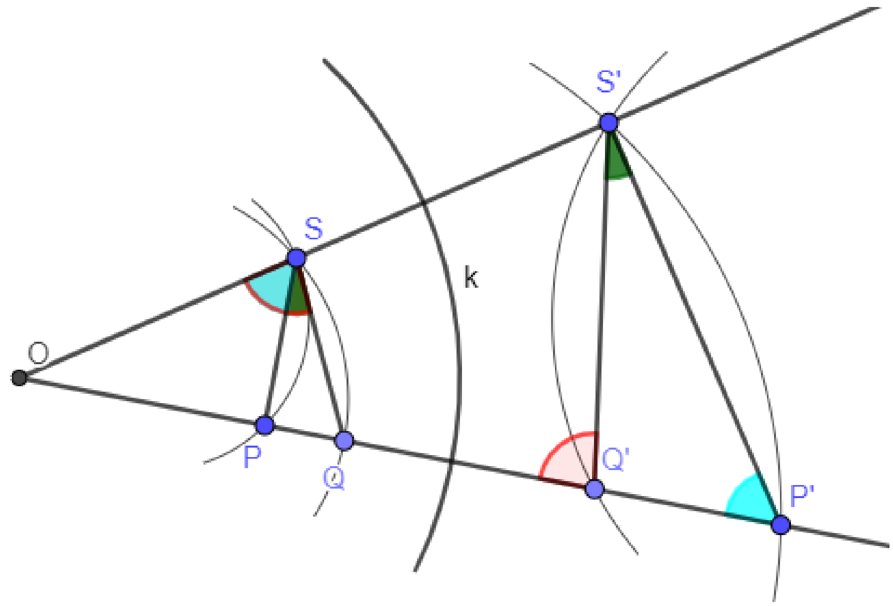
$$OX' : OX'' = t : p \quad \text{i} \quad OX \cdot OX'' = p.$$

Množenjem odgovarajućih strana ovih jednakosti nalazimo da je je $OX : OX' = t$.
Stoga je i $X' = \varphi_k(X)$. ■

Još jedna lepa osobina inverzije je da "čuva" uglove između krivih, tj. ugao između dve krive jednak je uglu koji zaklapaju njihove slike.

Definicija 1.9. *Uglom koji zahvataju dve krive* koje se seku u nekoj tački T, zvaćemo ugao koji zahvataju tangente tih krivih u tački T.

Teorema 1.10. Ugao pod kojim se seku dve krive p i q ravni E^2 u presečnoj tački S jednak je s uglom pod kojim se seku njima inverzne krive p' i q' u odgovarajućoj tački S'.



Slika 4

Dokaz. Obeležimo sa O središte pomenute inverzije, sa P i Q tačke u kojima neka prava kroz tačku O, različita od prave OS, seče linije p i q, a sa P' i Q' tačke koje u toj inverziji odgovaraju tačkama P i Q (Slika 4). Iz same konstrukcije sledi da tačke P' i Q' pripadaju linijama p' i q'. S obzirom da je

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OS'},$$

biće četvorouglovi $SS'P'P$ i $SS'Q'Q$ tetivni, pa je

$$\sphericalangle OSP = \sphericalangle S'P'P \quad \text{i} \quad \sphericalangle OSQ = \sphericalangle S'Q'Q\,.$$

Stoga je

$$\sphericalangle PSQ = \sphericalangle P'S'Q'.$$

Ako se tačke P i Q krećući se po linijama p i q približavaju tački S, onda i njihove odgovarajuće tačke P' i Q' kreću se po linijama p' i q' približavajući se tački S. U graničnom slučaju sečice SP i SQ predstavljaju tangente na linijama p i q u tački S, a sečice $S'P'$ i $S'Q'$ predstavljaju tangente na linijama p' i q' u tački S'. Stoga je i ugao koji je određen tangentama na linijama p i q u tački S jednak s uglom koji je određen tangentama na linijama p' i q' u tački S'. ■

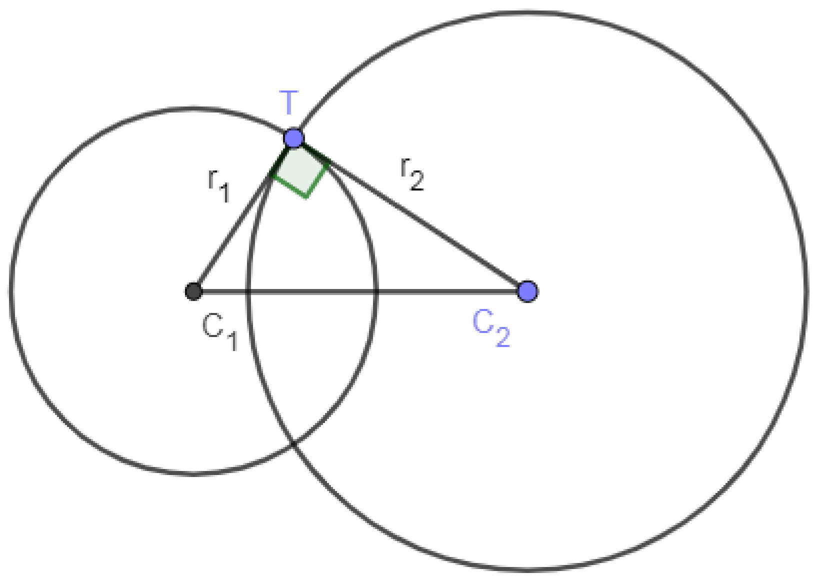
Pomoću navedenih osobina inverzije možemo definisati pojam ortogonalnih krugova, koje ćemo koristiti za detaljnije definisanje pramena krugova, te sledi par reči o njima.

2. Ortogonalni krugovi

Definicija 2.1. Za dva kruga reći ćemo da su *upravni, normalni* ili *ortogonalni* ako zahvataju prav ugao (njihove tagente zahvataju prav ugao).

Nije teško uočiti da su krugovi *ortogonalni* ako i samo ako tangenta jednog kruga sadrži središte drugog.

Sledeća teorema važi zbog Pitagorine teoreme.
Teorema 2.2. *Dva kruga su ortogonalna* ako i samo ako je trougao $\triangle C_1C_2T$ pravougli (pri čemu su C_1 i C_2 centri tih krugova, a T tačka preseka tangenti datih krugova, povučenih iz centara C_1 i C_2).
Odnosno, *dva kruga su ortogonalna* ako i samo ako $C_1C_2{}^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2$ (Slika 5).

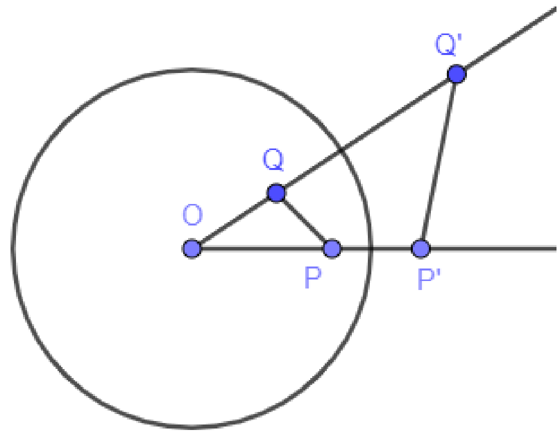


Slika 5

Teorema 2.3. Krug k_1 je fiksan u inverziji φ_k ako i samo ako je ortogonalan na k, tj. $\varphi_k(k_1) = k_1 \Leftrightarrow k_1 \perp k$.
Dokaz. Ovo tvrđenje direktno proizilazi na osnovu Teoreme 1.6., Teoreme 1.8., Teoreme 1.10. i činjenice $\varphi_k(k) = k$. ■

Teorema 2.4. Ako je $\varphi_k(P) = P'$ i $\varphi_k(Q) = Q'$ sledi $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$, gde je O centar inverzije.
Dokaz. Pošto su P' i Q' slike tačaka P i Q pri inverziji φ_k, onda važi $OP \cdot OP' = r^2$ i $OQ \cdot OQ' = r^2$. Odatle lako dobijamo jednakost $OP : OQ = OQ' : OP'$. Primetimo

da važi i $\sphericalangle POQ = \sphericalangle Q'OP'$ jer je to zajednički ugao (Slika 6), te po stavu SUS tvrđenje direktno važi. ■

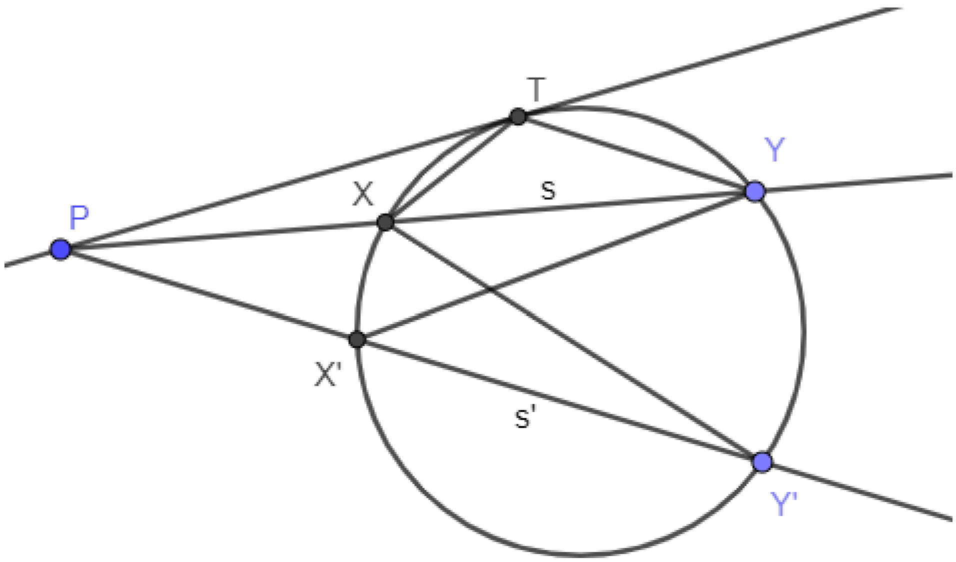


Slika 6

3. Potencija u odnosu na krug i radikalna osa

Teorema 3.1. Ako su u ravni E^2 dati krug k i tačka P na pravoj s, tada za svaku pravu s koja seče krug k u tačkama X i Y važi relacija $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = const$. Ako je tačka P van kruga k i T dodirna tačka jedne od tangenti iz tačke P na krug k, tada je

$$\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PT}^2.$$



Slika 7

Dokaz. Neka su s i s' dve različite prave od kojih prva sadrži tačku P i seče krug k u tačkama X i Y, a druga sadrži tačku P i seče krug k u tačkama X' i Y' (Slika 7).
Vredi da je $\triangle PXY' \sim \triangle PX'Y$, pa je $PX : PY' = PX' : PY$, i prema tome

$$\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PX'} \cdot \overrightarrow{PY'}.$$

Specijalno, ako je tačka P izvan kruga k i T dodirna tačka neke tangente iz tačke P na krugu k, tada je $\triangle PXT \sim \triangle PTY$, pa je $PX : PT = PT : PY$, i prema tome

$$\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PT}^2. \quad \blacksquare$$

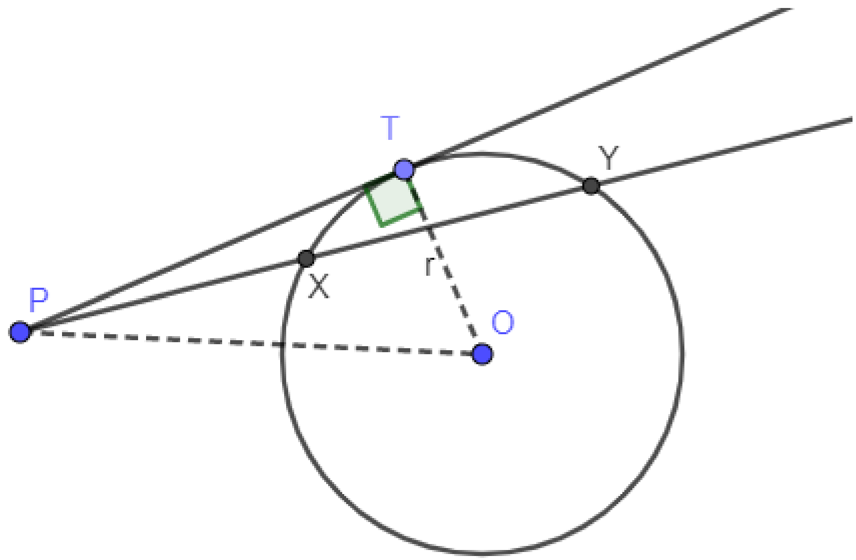
Definicija 3.2. Konstantan proizvod $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY}$ iz Teoreme 3.1., koji nazivamo *potencijom tačke u odnosu na krug* k, simbolički obeležavamo sa $p(P, k)$.
Iz definicije direktno sledi da za tačku P i krug $k(O, r)$ u ravni E^2 imamo da je

$$p(P,k)\quad \begin{cases} < 0, & ako\ je\ \ OP < r \\ = 0, & ako\ je\ \ OP = r \\ > 0, & ako\ je\ \ OP > r. \end{cases}$$

Vredi sledeće.

1. Ako je tačka P unutar kruga k, onda $p(P,k) < 0$.
2. Ako $P \in k$, onda $p(P,k) = 0$.
3. Ako je P izvan kruga k, onda $p(P,k) = \overrightarrow{PT}^2$ (dužina tangente)

Primetimo i da važi $p(P,k) = \overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PT}^2 = OP^2 - r^2$ (Slika 8).



Slika 8

Teorema 3.3. Geometrijsko mesto tačaka (GMT) ravni iz kojih su potencije na dva kruga $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, $O_1 \neq O_2$, jednake je prava r normalna na pravu O_1O_2.

Dokaz. Ako je P tačka takva da je $p(P,k_1) = p(P,k_2)$, biće

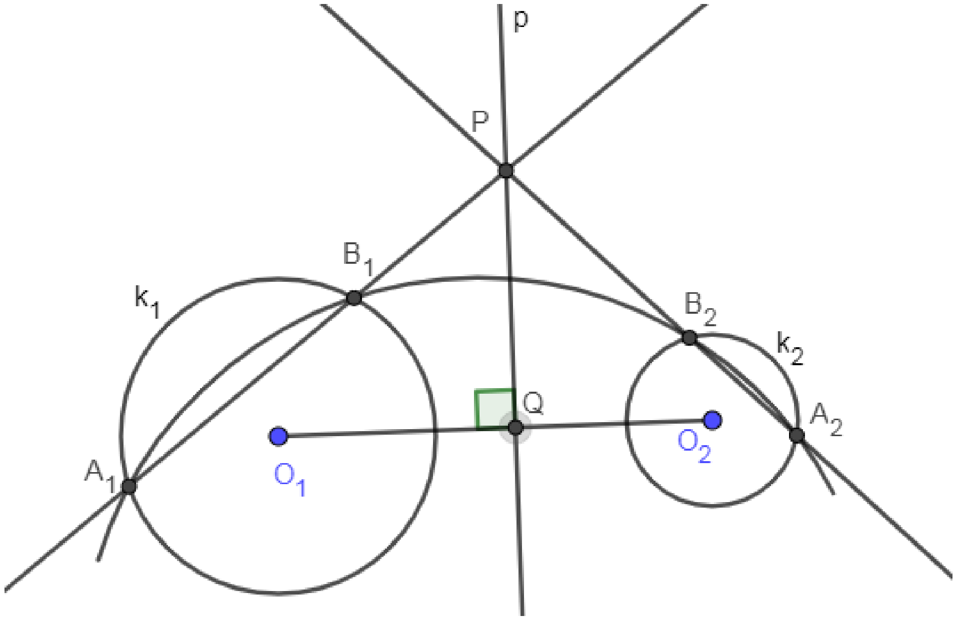
$$O_1P^2 - {r_1}^2 = O_2P^2 - {r_2}^2,$$

pa je

$$O_1P^2 - O_2P^2 = {r_1}^2 - {r_2}^2.$$

Iz ove jednakosti sledi da je razlika kvadrata duži O_1P i O_2P konstantna, pa se tačka P nalazi na pravoj p koja je normalna na pravu O_1O_2 (Slika 9) u tački Q za koju je

$$O_1Q^2 - O_2Q^2 = {r_1}^2 - {r_2}^2.$$



Slika 9

Obrnuto, ako je $P \in p$, tada je

$$O_1P^2 = O_1Q^2 + PQ^2 \quad \text{i} \quad O_2P^2 = O_2Q^2 + PQ^2,$$

pa je

$$O_1P^2 - O_2P^2 = O_1Q^2 - O_2Q^2 = r_1 - r_2.$$

Stoga je

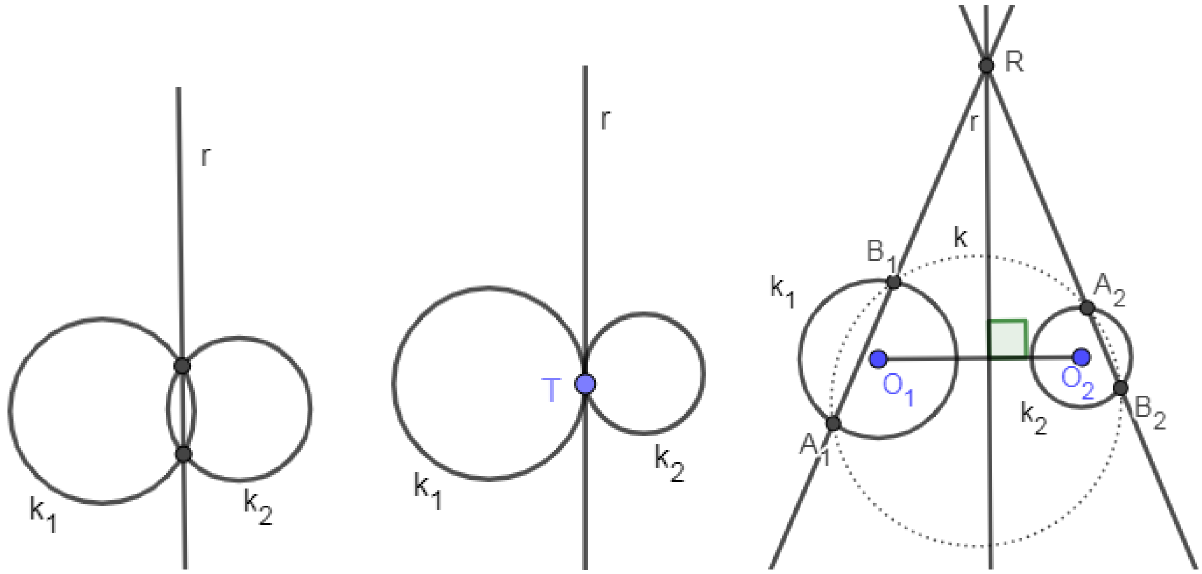
$$O_1P^2 - {r_1}^2 = O_2P^2 - {r_2}^2,$$

tj.

$$p(P, k_1) = p(P, k_2). \qquad \blacksquare$$

Definicija 3.4. Pravu p koja predstavlja skup svih tačaka ravni E^2 čije su potencije u odnosu na dva ekscentrična kruga k_1 i k_2 među sobom jednake nazivamo *potencijalnom* ili *radikalnom osom* krugova k_1 i k_2.

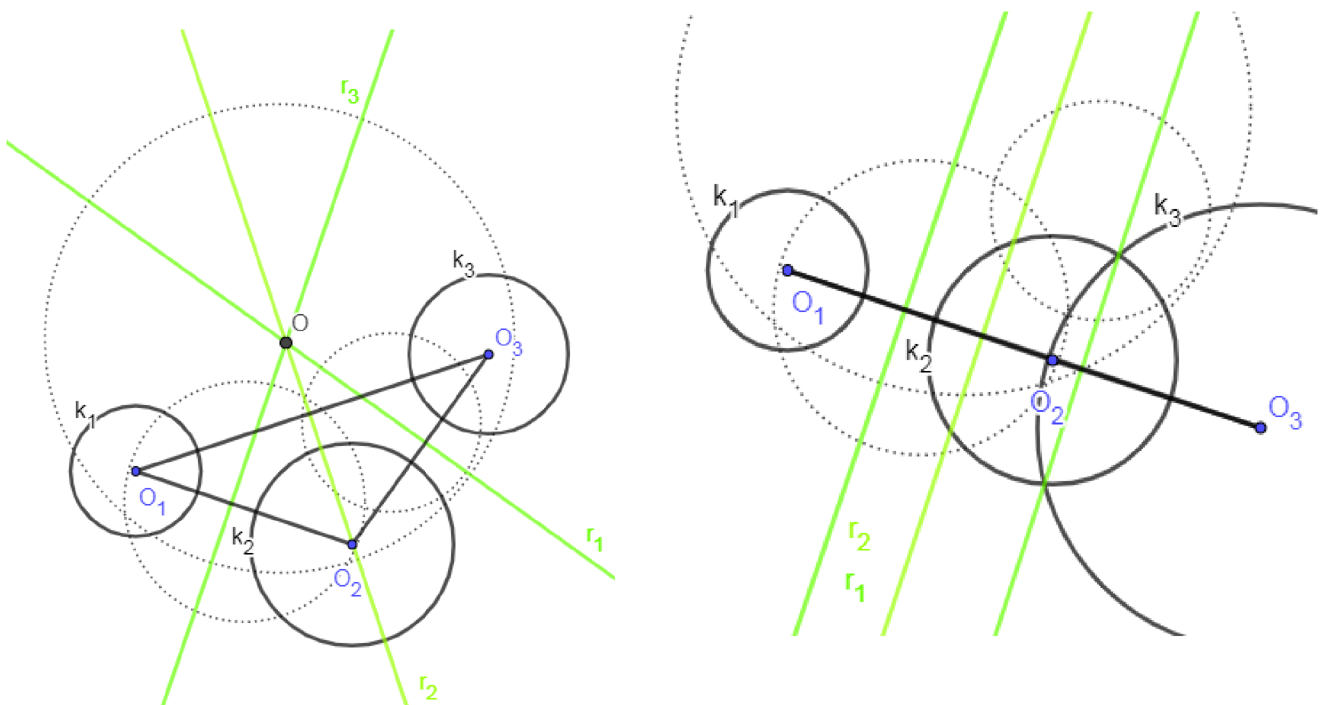
Nije teško ustanoviti da je radikalna osa krugova k_1 i k_2 koji se seku u tačkama A i B prava određena tačkama A i B, da je radikalna osa krugova k_1 i k_2 koji se dodiruju u tački A prava koja u toj tački dodiruje krugove k_1 i k_2. Da bi se izvela konstrukcija radikalne ose dva disjunktna ekscentrična kruga $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, dovoljno je odrediti jednu tačku R te ose, a zatim kroz istu konstruisati pravu normalnu na pravu O_1O_2. Da bi dobili tačku R, konstruiše se proizvoljan krug koji seče krugove k_1 i k_2 respektivno u tačkama A_1, B_1 i A_2, B_2. Tačka u kojoj se seku prave A_1B_1 i A_2B_2, pripada radikalnoj osi krugova k_1 i k_2 i to je tražena tačka R.
Sva tri slučaja su prikazana na slici 10.



Slika 10

Teorema 3.5. Radikalne ose tri kruga ravni E^2 pripadaju jednom pramenu pravih.

Napomena. Skup svih pravih u ravni koje prolaze kroz jednu tačku, naziva se *pramen pravih.*



Slika 11. Radikalne ose tri kruga pripadaju jednom pramenu

Dokaz. Neka su O_1, O_2, O_3 centri triju krugova k_1, k_2, k_3 koji se nalaze u ravni E^2 i r_1, r_2, r_3 radikalne ose krugova k_2 i k_3, k_3 i k_1, k_1 i k_2, redom. Ako tačke O_1, O_2, O_3 nisu kolinearne, prave O_2O_3 i O_3O_1 se seku, te se i prave r_1 i r_2 koje su normalne na njih, seku u nekoj tački O. Pri tome je $p(O,k_2) = p(O,k_3)$ i $p(O,k_3) = p(O,k_1)$, pa je $p(O,k_1) = p(O,k_2)$ i prema tome $O \in r_3$. Na taj način, ako tačke O_1, O_2, O_3 nisu kolinearne, radikalne ose krugova k_1, k_2, k_3 seku se u jednoj tački (Slika 11 levo). Ako tačke O_1, O_2, O_3 pripadaju pravoj s, biće prave r_1, r_2, r_3 normalne na pravu s, i prema tome među sobom paralelne (Slika 11 desno). ■

Teorema 3.6. Radikalna osa r krugova k_1 i k_2 je geometrijsko mesto centara krugova istovremeno ortogonalnih na k_1 i k_2.
Dokaz. Pretpostavimo da $O \in r$ i da je krug $k(O,r_3)$ normalan na $k_1(O_1,r_1)$. Pošto $O \in r$, imamo da važi $OO_1{}^2 - r_1{}^2 = p(O,k_1) = p(O,k_2) = OO_2{}^2 - r_2{}^2$. Iz normalnosti krugova k i k_1 imamo $OO_1{}^2 - r_1{}^2 = OT_1{}^2$, gde su T_1 i T_2 presečne tačke kruga k sa krugovima k_1 i k_2, redom. Odatle

$$OO_2{}^2 - r_2{}^2 = OT_1{}^2 = r_3 = OT_2{}^2,$$

pa su krugovi k i k_2 međusobno normalni.
Obrnuto, ako su krugovi k i k_1 normalni, i krugovi k i k_2 takođe normalni, važe jednakosti

$$OO_1{}^2 - r_1{}^2 = OT_1{}^2 = r_3 = OT_2{}^2 = OO_2{}^2 - r_2{}^2,$$

što znači da $O \in r$, i tvrđenje je dokazano. ■

Sledi zadatak iz geometrije o ortogonalnosti krugova, detaljno objašnjen.

Zadatak. U ravni su data dva kruga l_1 i l_2 koja se seku. Krug k_1 dodiruje spolja krugove l_1 i l_2, krug k_2 dodiruje spolja krugove l_1, l_2 i k_1, krug k_3 dodiruje spolja krugove l_1, l_2 i k_2, itd. Dokazati da su krugovi $k_1, k_2, k_3, \ldots$ ortogonalni na nekoj pravoj ili na nekom krugu.

Rešenje. Neka je A zajednička tačka krugova l_1 i l_2 koja je sa iste strane prave određene središtima krugova l_1 i l_2 kao i krugovi k_i $(i = 1,2,3,\ldots)$. Neka je φ_k inverzija u odnosu na proizvoljan krug k čije je središte tačka A. Krugovi l_1 i l_2 sadrže tačku A, pa se, bez tačke A, inverzijom φ_k preslikavaju na prave $l_1{}'$ i $l_2{}'$ koje ne sadrže tačku A. Krugovi k_i $(i = 1,2,3,\ldots)$ ne sadrže tačku A, pa se preslikavaju na krugove $k_i{}'$ koji takođe ne sadrže tačku A. Krugovi k_i dodiruju krugove l_1 i l_2, pa slike krugova k_i u inverziji φ_k – krugovi $k_i{}'$ – dodiruju slike krugova l_1 i l_2 u istoj inverziji – prave $l_1{}'$ i $l_2{}'$. Krugovi k_i pripadaju spoljašnjosti krugova l_1 i l_2, pa se krugovi k_i' nalaze sa istih strana pravih l_1' i l_2'. Dakle, krugovi k_i' dodiruju prave l_1' i l_2' i nalaze se sa istih njihovih strana, pa njihova središta pripadaju jednoj pravoj – simetrali s' jednog ugla koji zahvataju prave l_1' i l_2', odakle sledi da su krugovi k_i' normalni na pravoj s'. Ta prava se u inverziji φ_k preslikava na neku pravu ili krug s (u zavisnosti od toga da li prava s' sadrži tačku A). Inverzijom φ_k se krugovi k_i' preslikavaju u krugove k_i, a prava s' u pravu ili krug s. Znamo da se inverzijom uglovi preslikavaju u njima podudarne uglove, pa su krugovi k_i normalni na (pravoj ili krugu) s, što je i trebalo dokazati.

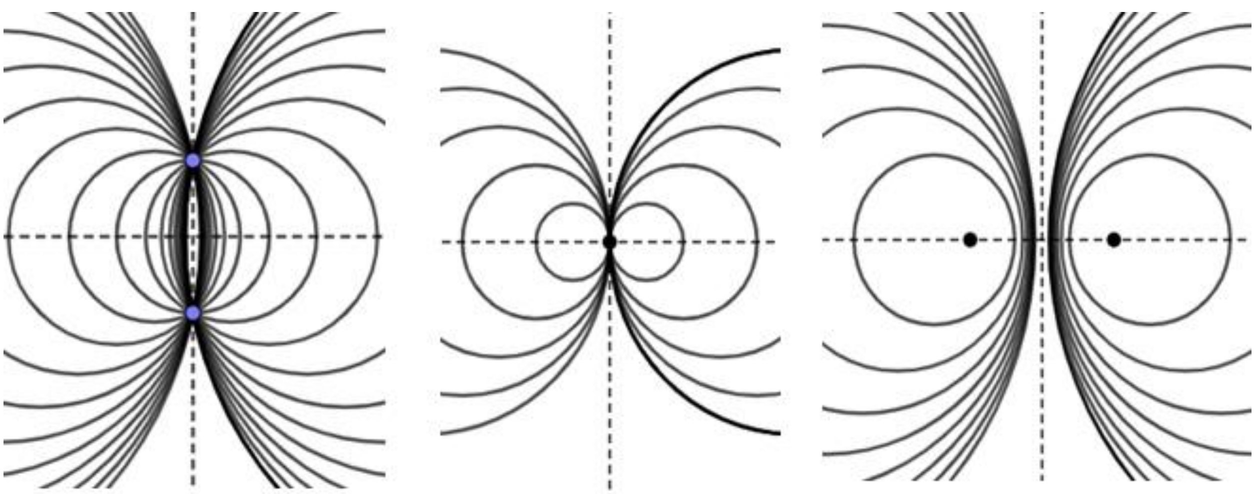
Najzad, pojam radikalne ose omogućuje da u geometriji ravni E^2 definišemo pramen krugova, što je i tema proučavanja ovog master rada.

4. Pramenovi krugova

Definicija 4.1. Skup svih krugova ravni E^2 od kojih svaka dva imaju za radikalnu osu istu pravu s nazivamo *sistemom koaksijalnih krugova* ili *pramenom krugova*. Pravu s nazivamo *radikalnom osom* tog pramena krugova.

Jasno je da je svaki pramen krugova određen sa dva kruga (oni određuju radikalnu osu).
Iz ove definicije i definicije radikalne ose dva kruga, zaključujemo da važi sledeće tvrđenje.
Teorema 4.2. Ako se u jednom pramenu krugova dva kruga seku u tačkama A i B, tada se svaka dva kruga tog pramena seku u tačkama A i B.
Ako se u jednom pramenu krugova dva kruga dodiruju u tački C, tada se svaka dva kruga tog pramena dodiruju u tački C.
Ako u jednom pramenu krugova dva kruga nemaju zajedničkih tačaka, tada nikoja dva kruga tog pramena nemaju zajedničkih tačaka.

S obzirom na takav uzajamni položaj krugova jednog pramena, u geometriji E^2 razlikujemo tri vrste pramenova krugova.

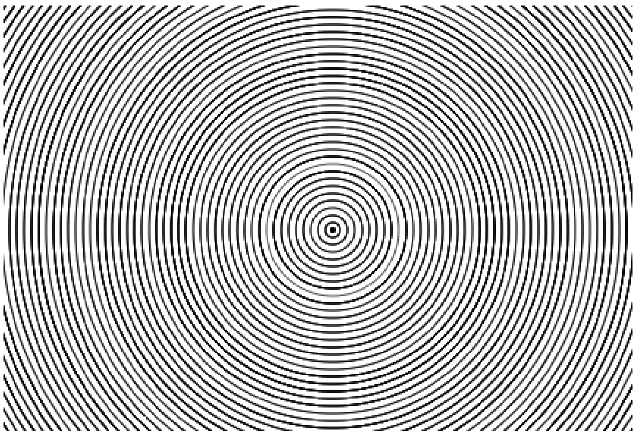


(a) (b) (c)

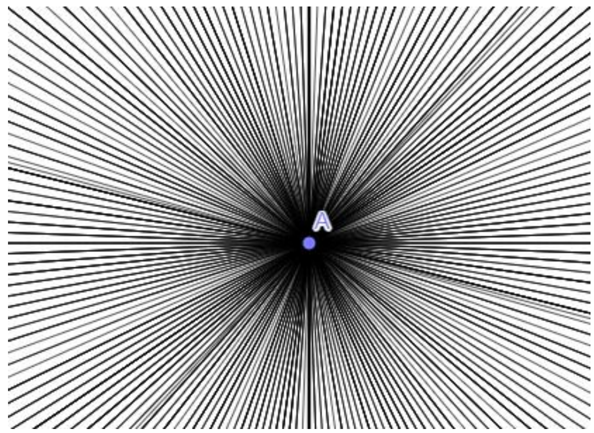
Slika 12

Definicija 4.3. Pramen krugova u ravni E^2 je *eliptički* ako se krugovi tog pramena seku u dvema različitim tačkama (Slika 12 a), *parabolički* ako se dodiruju u istoj tački (Slika 12 b) i *hiperbolički* ako nemaju zajedničkih tačaka (Slika 12 c).

Pored navedene tri vrste pramenova krugova, koje smatramo nedegenerisanim, postoje još dve vrste degenerisanih pramenova krugova. To su *pramen koncentričnih krugova* (aplet [2]) koji za radikalnu osu imaju beskrajno daleku pravu i *pramen pravih* (aplet [3]) tj. krugova beskrajno velikih poluprečnika (pravih koje se seku u jednoj tački ili su među sobom paralelne).



Koncentrične kružnice



Pramen pravih

Primedba. Ako je neki krug ortogonalan na dva kruga nekog pramena, tada je on ortogonalan na sve krugove tog pramena.

Teorema 4.4. Skup krugova ortogonalnih na sve krugove datog pramena predstavlja opet pramen krugova. U tom slučaju radikalna osa prvog pramena sadrži središta krugova drugog pramena.

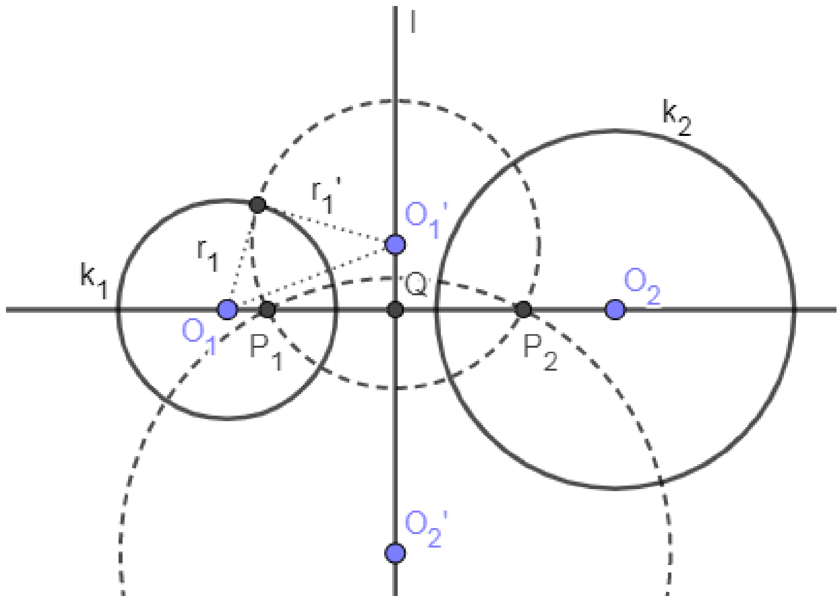
Dokaz. Neka je prvi pramen zadat krugovima $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Neka je l radikalna osa krugova k_1 i k_2, a $O_1{}'$ i $O_2{}'$ tačke prave l koje su izvan krugova k_1 i k_2. Te dve tačke imaju istu potenciju u odnosu na krugove k_1 i k_2, pa prema tome predstavljaju središta krugova koji ortogonalno seku date krugove. Kako je ortogonalnost uzajamna, to tačka O_1 ima istu potenciju ${r_1}^2$ u odnosu na krugove sa centrima $O_1{}'$ i $O_2{}'$. Zaista, to sledi iz činjenice da je poluprečnik r_1 istovremeno i odsečak tangente iz tačke O_1 na krugove sa centrima u tačkama $O_1{}'$ i $O_2{}'$ (Slika 13). Analogno, tačka O_2 ima istu potenciju ${r_2}^2$ u odnosu na navedene krugove. Odavde sledi da je prava O_1O_2 radikalna osa pramena određenog krugovima sa centrima redom u tačkama $O_1{}'$ i $O_2{}'$. Označimo sa Q presečnu tačku pravih $p(O_1, O_2)$ i $p(O_1{}', O_2{}')$. Prema Pitagorinoj teoremi sledi

$$O_1{O_1{}'}^2 = {QO_1}^2 + {QO_1{}'}^2 = {r_1}^2 + {r_1{}'}^2,$$

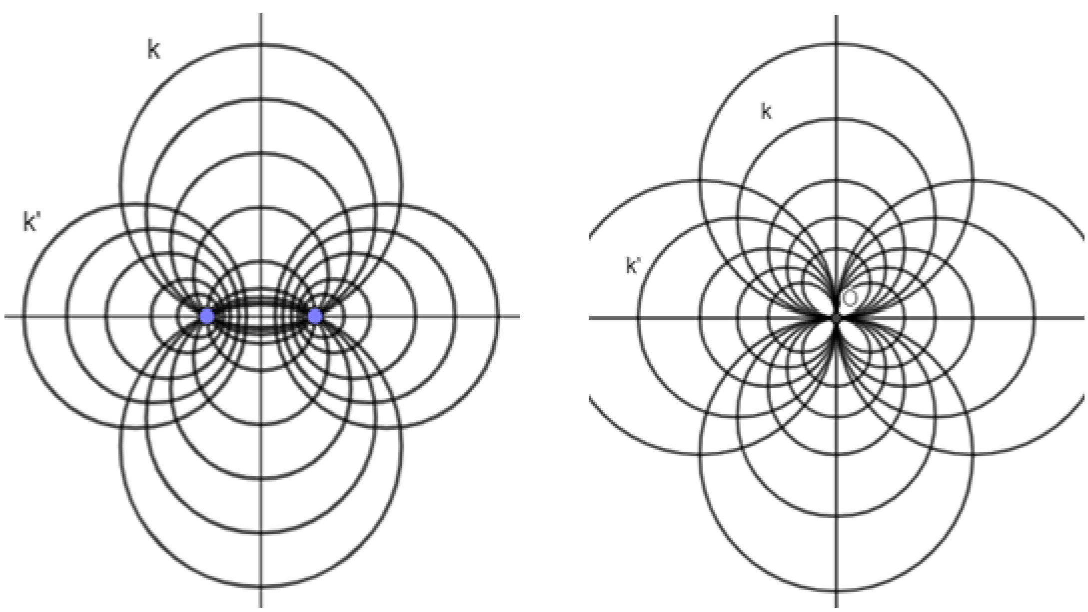
tj.

$$QO_1{}^2 - r_1{}^2 = -(QO_1{}'^2 - r_1{}'^2).$$

Odavde sledi da ako je potencija tačke Q u odnosu na jedan pramen pozitivna, onda je ona negativna u odnosu na drugi pramen. To znači da se tačka Q nalazi unutar krugova jednog, a van krugova drugog pramena. Drugim rečima, ako je jedan pramen eliptički, onaj drugi je hiperbolički i obrnuto (Slika 14 levo). Očigledno je da ako je prvi pramen parabolički, onda je isti takav i onaj drugi (Slika 14 desno). ■



Slika 13



Slika 14

Definicija 4.5. Pramenovi krugova iz prethodne teoreme nazivaju se *ortogonalnim*.

Eliptički pramen ćemo označiti sa $\mathcal{X}_{AB}$ (svi krugovi prolaze kroz tačke A i B), a parabolički sa $\mathcal{X}_{r,T}$ (r je radikalna osa, a T tačka dodira). Hiperbolički pramen krugova zovemo još i *pramen Apolonijevih (disjunktnih) krugova*, i označićemo ga sa $\mathcal{A}_{AB}$ (značenje tačaka A i B će biti objašnjeno u sledećoj teoremi). On je najmanje očigledan od tri navedena i zato ćemo njemu posvetiti više pažnje. Za početak, navodimo teoremu o Apolonijevom krugu.

Teorema 4.6. Za dve fiksne tačke A i B i realni broj $\lambda > 0$, geometrijsko mesto tačaka P, takvo da je $\frac{AP}{BP} = \lambda$, je krug. Taj krug nazivamo *Apolonovijev krug*[1].

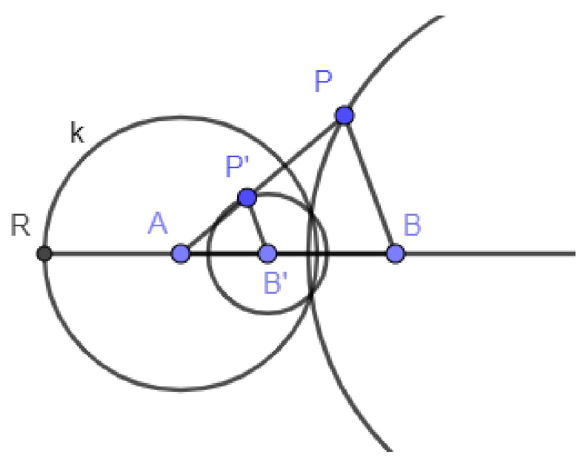
Dokaz. Bez umanjenja opštosti, posmatrajmo krug $k = k(A, 1)$. Neka je φ inverzija, i $B' = \varphi_k(B)$. Uzmimo da je P proizvoljna tačka takva da zadovoljava $\frac{AP}{BP} = \lambda$ i $P' = \varphi_k(P)$. Tada imamo $AP \cdot AP' = AB \cdot AB' = 1$. Po teoremi 2.4. imamo $\triangle AB'P' \sim \triangle APB$. Odatle sledi

$$\frac{P'B'}{PB} = \frac{AP'}{AB} = \frac{1}{AP \cdot AB} \Longrightarrow$$

$$P'B' = \frac{PB}{AP} \cdot \frac{1}{AB} = \frac{1}{\frac{AP}{BP} \cdot AB} = \frac{1}{\lambda \cdot AB}\,.$$

To znači da P' pripada kružnici k_λ čiji je centar B', polupręčnika $\frac{1}{\lambda \cdot AB}$ (Slika 15). Odnosno, slika svih tačaka P pri inverziji je krug $k_\lambda{}' = k(B', \frac{1}{\lambda \cdot AB})$. Dakle,

$$P = \varphi_k(k_\lambda{}') = k. \qquad \blacksquare$$



Slika 15

[1] Apolonijev krug je nazvan po starogrčkom naučniku Apoloniju iz Perga, u 3. veku p.n.e.

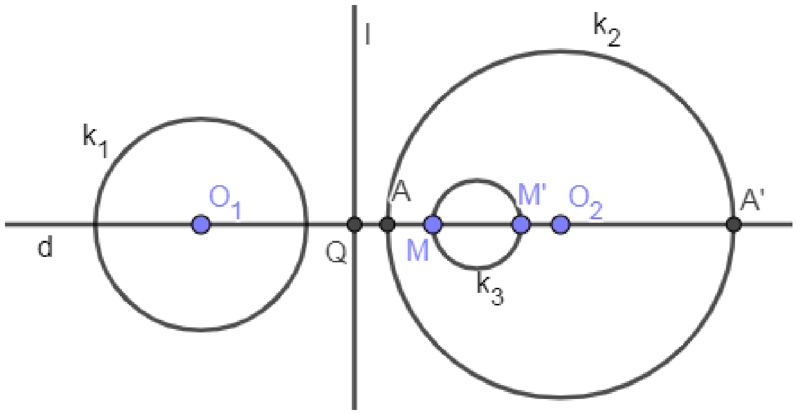
Napomena. Za $\lambda = 1$, dobijamo pravu, odnosno to je baš simetrala duži AB.

Iz dokaza prethodne teoreme jasno je da inverzija φ_k $(k = k(A,\ 1))$ celu familiju Apolonijevih krugova $\mathcal{A}_{AB}$ slika u familiju krugova sa centrom u tački $B' = \varphi_k(B)$. Bilo koji krug eliptičkog pramena $\mathcal{X}_{AB}$ se sa φ_k slika u pravu kroz B'.
Vidimo da je familija pravih kroz tačku B' ortogonalna na familiju koncentričnih krugova sa centrom u tački B'. Kada primenimo inverziju φ_k, dobijamo da su svi krugovi pramena $\mathcal{X}_{AB}$ normalni na sve Apolonijeve krugove određene tačkama A i B.
Dakle, na osnovu teoreme 4.6. sledi da Apolonijevi krugovi određeni tačkama A i B čine pramen krugova (jer su ortogonalni na pramen $\mathcal{X}_{AB}$) i time dajemo smisao oznaci $\mathcal{A}_{AB}$ za pramen hiperboličkih krugova.

Posledica 4.7. Svaki krug L koji sadrži tačke A i B je ortogonalan na sve krugove familije $\mathcal{A}_{AB}$.

Posledica 4.8. Postoji jedinstven krug ortogonalan na tri data kruga koji ne pripadaju jednom pramenu.
Dokaz. Ovo je direktna posledica teoreme 3.5. ■

Teorema 4.9. Za svaka dva kruga postoji tačno jedan pramen krugova kome oni pripadaju.
Dokaz. U slučaju kada se krugovi seku ili se dodiruju, dokaz je trivijalan. Neka su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ disjunktni (Slika 16). Neka je l njihova radikalna osa, a Q presečna tačka prave l i prave $d = p(O_1, O_2)$. Neka su A i A' preseci kruga k_2 sa pravom d. Tada je proizvod $\overrightarrow{QA'} \cdot \overrightarrow{QA}$ isti za sve krugove pramena. Neka su M i M' presečne tačke proizvoljnog kruga k_3 posmatranog pramena sa pravom d. Tada je zadovoljen uslov $\overrightarrow{QA'} \cdot \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QM'} \cdot \overrightarrow{QM}$, kojim je i određen krug pramena. Ako se tačke M i M' poklapaju, onda je krug k_3 ustvari tačka.
Ako su krugovi k_1 i k_2 koncentrični, onda se dogovorno hiperbolički pramen, određen tim krugovima, sastoji od svih krugova koji su koncentrični sa datim krugovima. U tom slučaju radikalnu osu predstavlja beskonačno daleka prava ravni posmatranih krugova. ■



slika 16

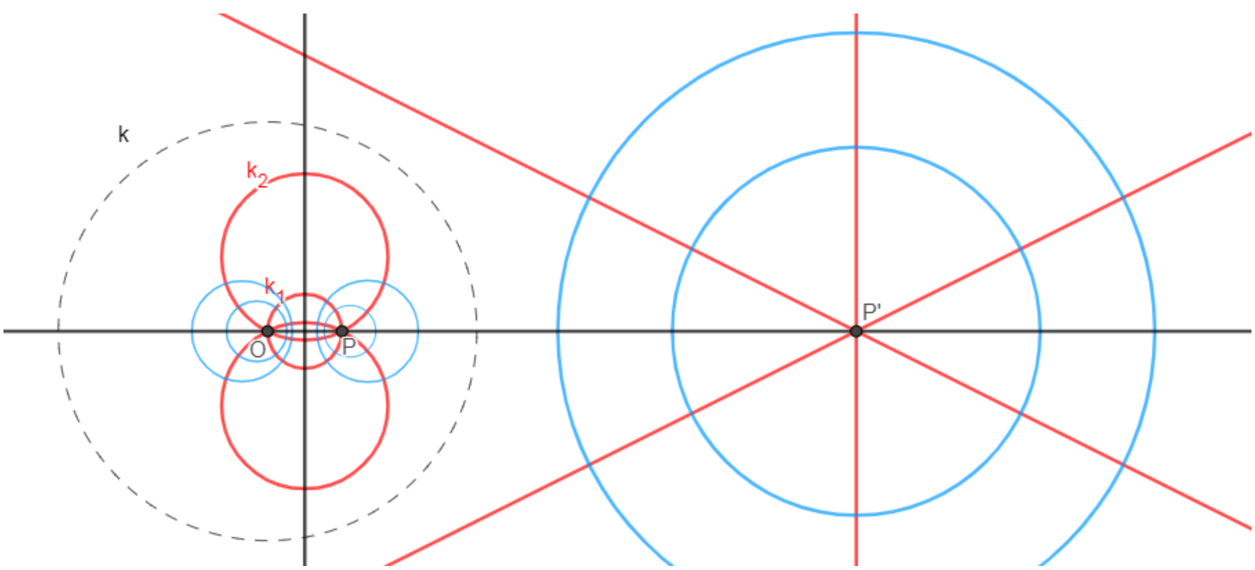
Posledica 4.10. Inverzijom možemo bilo kakva dva disjunktna kruga preslikati na koncentrične krugove.

Dokaz. Posmatrajmo disjunktne krugove $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Znamo da postoji hiperbolički pramen $\mathcal{A}_{AB}$ kojem oni pripadaju. Videli smo da su krugovi $\varphi_k(k_1)$ i $\varphi_k(k_2)$ koncentrični, sa centrom u tački $O' = \varphi_k(O)$. Time je dokaz gotov. ■

5. Štajnerov porizam

Osobinom da pomoću inverzije u odnosu na krug, krugove možemo preslikati u koncentrične krugove, rešavamo *Štajnerov*[2] *porizam*[3]. U tu svrhu, definišemo *inverzivno rastojanje*.

Neka su O i P tačke u kojima se seku krugovi k_1 i k_2 nekog pramena $\mathcal{K}$ i neka je P' slika tačke P u inverziji u odnosu na proizvoljan krug k sa središtem O. Skup krugova pramena $\mathcal{K}$ preslikava se tom inverzijom u skup pravih koje sadrže P'. Skup svih (koncentričnih) krugova sa središtem P' istom inverzijom se preslikava na skup krugova pramena koji je upravan na pramenu $\mathcal{K}$. Kako je pramen $\mathcal{K}$ eliptički, na njemu upravan pramen biće hiperbolički. Dakle, ako su zadata dva kruga hiperboličkog pramena, tada postoji inverzija kojom se ta dva kruga preslikavaju na dva koncentrična kruga. Središte te inverzije je tačka koja pripada svakom krugu pramena koji je upravan na dvama zadatim krugovima. Odnos poluprečnika slika tih dvaju krugova u inverziji sa središtem O, ne zavisi od poluprečnika kruga inverzije. Zaista, proizvod dveju inverzija sa središtem O je homotetija (po teoremi 1.4.), pa je svaka inverzija sa središtem O proizvod zadate inverzije i neke homotetije. Stoga odnos poluprečnika slika dvaju disjunktnih krugova u inverziji sa središtem O ne zavisi od poluprečnika inverzije.



[2] *Jacob Steiner*, švajcarski matematičar (1796 - 1863).
[3] *Porizam* je matematički problem konstruktivne prirode za koji ili ne postoji rešenje, ili ih postoji beskonačno mnogo.

Ako su a, b, c $(a < b < c)$ poleprěcnici triju koncentričnih krugova koji su slike triju krugova nekog hiperoličkog pramena, tada je

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c},$$

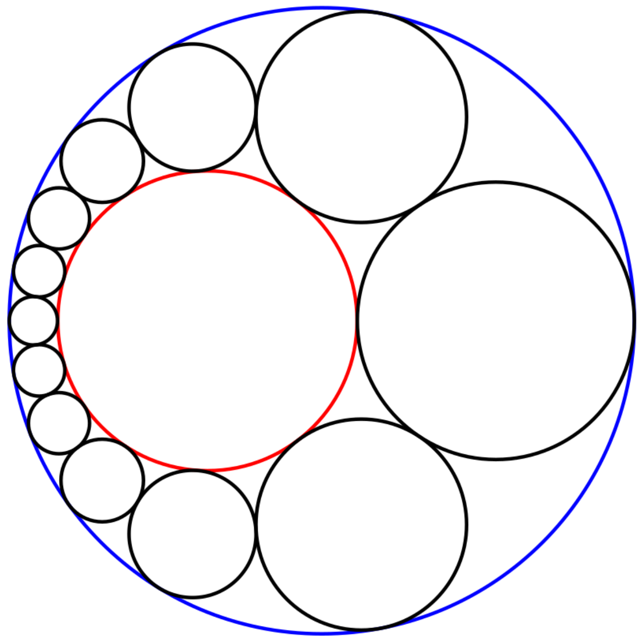
pa je, stoga,

$$\ln\frac{a}{b} + \ln\frac{b}{c} = \ln\frac{a}{c}.$$

Kako odnos ovih poluprečnika ne zavisi od inverzije kojom se krugovi hiperboličkog pramena preslikavaju na koncentrične krugove poluprečnika a, b, c, prirodni logaritam odnosa poluprečnika koncentričnih krugova u koje se preslikavaju krugovi nekog hiperboličkog pramena, zadovoljava sve uslove da bude rastojanje. To rastojanje naziva se *inverzivnim rastojanjem* disjunktnih krugova.

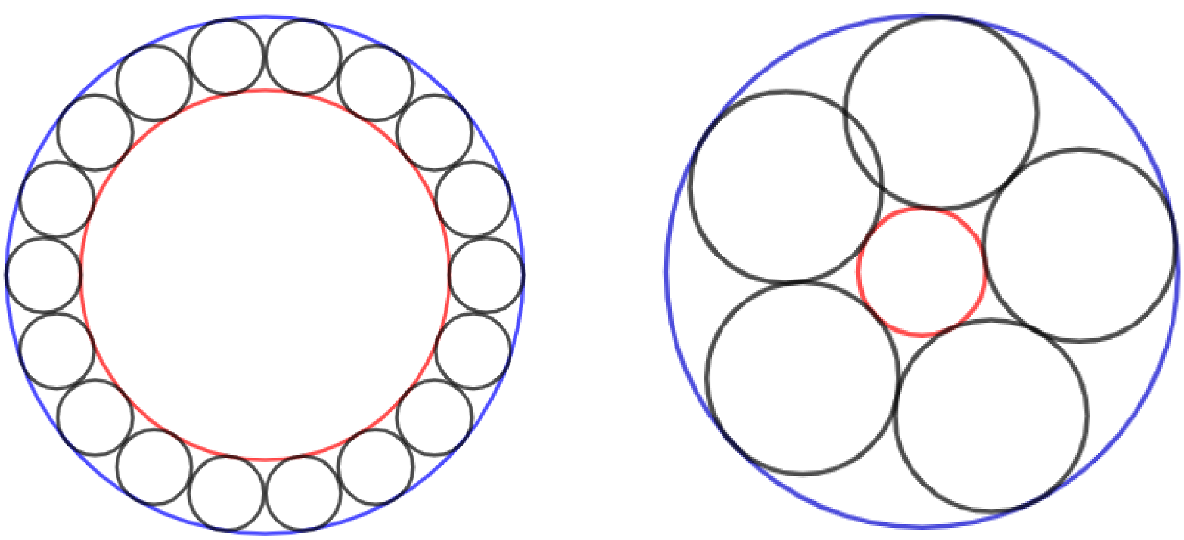
Štajnerov porizam. Neka je k_1 krug u unutrašnjosti kruga k_0, takav da postoji niz krugova $k_2, k_3, \dots, k_n$ koji dodiruju krugove k_0 i k_1, pri čemu se svaka dva susedna kruga u tom nizu, uključujući k_2 i k_n dodiruju. Neka je c_1 proizvoljni krug koji dodiruje krugove k_0 i k_1, i $c_2, \dots, c_n$ krugovi od kojih svaki dodiruje krugove k_0, k_1 i prethodni u nizu. Tada krug c_n dodiruje krug c_1.

Problem je opisan na slici 17. Neka je dat prizvoljan krug k_0 (plavi krug na slici 17) i u njemu takođe proizvoljan krug k_1 (crveni). Potrebno je konstruisati proizvoljan krug k_2 koji ima osobinu da dodiruje k_0 i k_1, zatim krug k_3 koji dodiruje k_0, k_1, k_2, zatim k_4 koji dodiruje k_0, k_1, k_3, itd. Postavlja se pitanje da li će za neko n krug k_n dodirnuti krug k_2.



Slika 17

Odgovor zavisi od toga kakvi su krugovi k_0 i k_1. Naime, krugove k_0, k_1, kao i početni k_2 ćemo preslikati inverzijom φ_k tako da su $k_0' = \varphi_k(k_0)$ i $k_1' = \varphi_k(k_1)$ koncentrični. Tada su svi $k_m' = \varphi_k(k_m), m = 2,3,4, \ldots$ podudarni, pa odgovor zavisi od poluprečnika krugova k_0' i k_1', tj. krugova k_0 i k_1. A ne zavisi od kruga u odnosu na koji vršimo inverziju. Primer takvog rešenja je prikazan na slici 18 levo. Slučaj kada se krugovi $k_2, k_3, \ldots, k_n$ ne dodiruju svi do jednog međusobno, prikazan je na slici 18 desno.



Slika 18

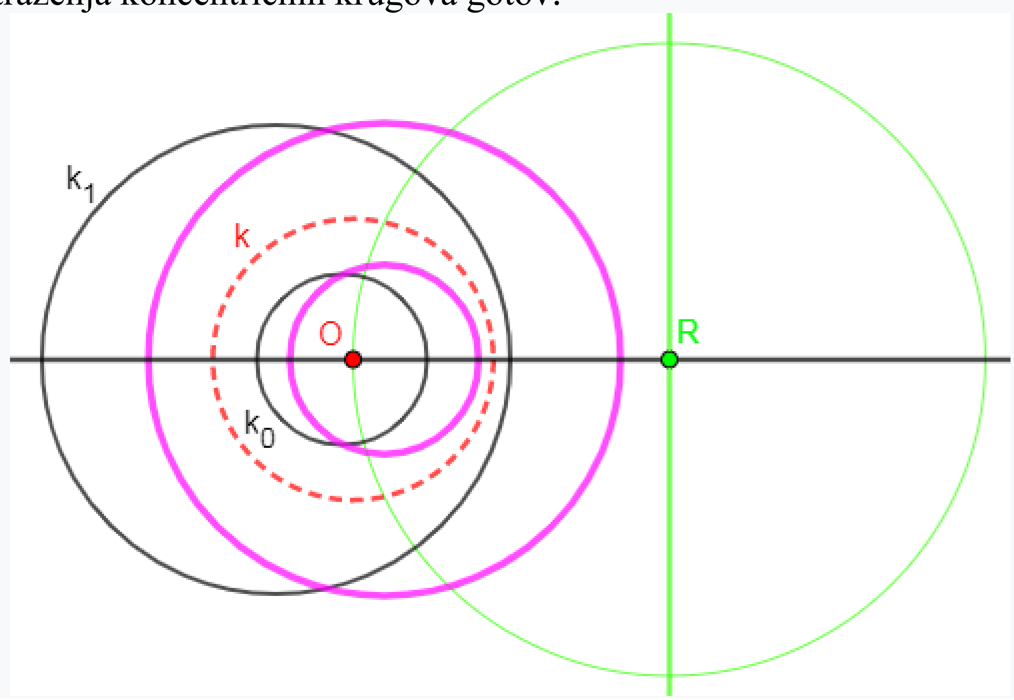
Postupak traženja koncentričnih krugova dajemo u nastavku teksta.

Napomena. Ova konstrukcija je ustvari samo detaljan opis konstrukcije iz Posledice 4.10.

Znamo da za bilo koja dva proizvoljna kruga postoji radikalna osa, takva da iz svake tačke na pravoj, tangente na dva kruga imaju jednaku dužinu. Radikalna osa je na slici 19 nacrtana zelenom bojom. Ona naravno mora biti normalna na pravu koja prolazi kroz centre krugova k_0 i k_1, i na slici je označena crnom bojom. Te dve prave se seku u tački R. Četiri spoljašnje tangente krugova k_0 i k_1 iz tačke R imaju istu dužinu, pa je zeleni krug sa centrom u tački R, koji sadrži dodirne tačke tih tangenti, normalan na krugove k_0 i k_1. Neka je tačka O presek zelenog kruga i crne prave. Označimo sa k bilo koji krug sa centrom u tački O. Na slici je nacrtan isprekidano, crvenom bojom.

Ako krugove k_0 i k_1 preslikamo inverzijom u odnosu na krug k, rezultat preslikavanja će biti krugovi (na slici su roze boje) ortogonalni na dve normalne prave: jedna je crna prava koja povezuje centre krugova k_0 i k_1, a druga inverzija zelenog kruga.

Krugovi istovremeno normalni na dve normalne prave su koncentrični. Time je proces traženja koncentričnih krugova gotov. ∎

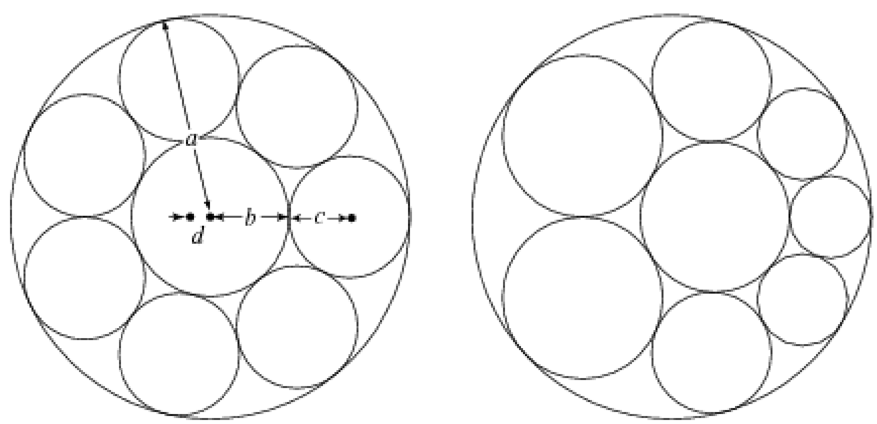


Slika 19. Preslikavanje krugova inverzijom u koncentrične krugove

Napomena. Ako se dva kruga seku, radikalna osa je prava koja prolazi kroz njihove presečne tačke.

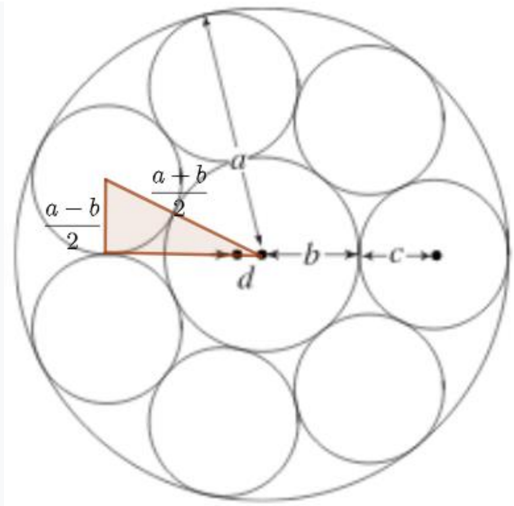
U nastavku dajemo konkretan primer za dobijanje rešenja našeg pitanja, odnosno dobijanje poluprečnika traženih tangentnih krugova.

Neka su data dva kruga, od kojih je jedan unutar drugog. Tražimo niz krugova koji dodiruju data dva kruga i međusobno se takođe dodiruju (Slika 20). Taj niz krugova čini lanac kojeg nazivamo *Štajnerov lanac.*
Najjednostavniji način za konstrukciju Štajnerovog lanca je, kao što smo već napomenuli, da inverzijom data dva kruga preslikamo na koncentrične krugove, pa će Štajnerov lanac činiti krugovi koji su međusobno podudarni. Označimo sa a poluprečnik većeg, i sa b poluprečnik manjeg koncentričnog kruga, koji je unutar njega.



Slika 20. Štajnerov lanac za $n = 7$

Za ovakav položaj krugova, gde je n broj krugova, koristeći trigonometrijsku funkciju primenjenu na trougao sa slike ispod, lako zaključujemo da važi (videti sliku 21)



Slika 21

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Odatle prostim računom dobijamo da je odnos poluprečnika manjeg i većeg kruga

$$\frac{b}{a} = \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Ako sa c označimo poluprečnik traženih krugova, imamo

$$\mathrm{c} = \frac{a-b}{2},$$

dok je centar traženih krugova od centra datih krugova udaljen za

$$\mathrm{r} = b + c = \frac{a+b}{2}.$$

Da bismo podudarne krugove pretvorili u proizvoljan Štajnerov lanac, uzećemo da je centar inverzije na udaljenosti d od centra koncentričnih krugova.

Tada se poluprečnici a i b inverzijom preslikaju u poluprečnike a' i b', i važi

$$a' = \left|\frac{a}{d^2-a^2}\right| = \frac{a}{a^2-d^2} \quad \text{i} \quad b' = \left|\frac{b}{d^2-a^2}\right| = \frac{a}{b^2-d^2}.$$

Ako sa δ označimo inverzivno rastojanje između centara dva originalna kruga, imamo

$$\delta = \log\left(\frac{a}{b}\right) \iff e^{\delta} = \frac{a}{b}$$

i važi

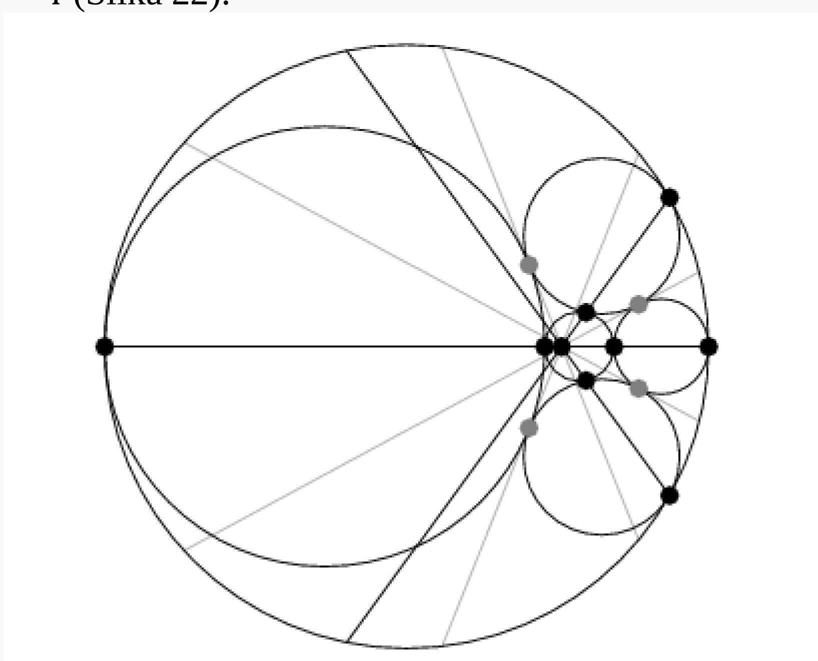
$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{a-b}{a+b} = \frac{e^{\delta}-1}{e^{\delta}+1} = \tanh\frac{\delta}{2},$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) = \coth\left(\frac{\delta}{2}\right) - \operatorname{csch}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \tanh\left(\frac{\delta}{4}\right),$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{n}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \cosh\left(\frac{\delta}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\delta}{2}\right) = e^{\frac{\delta}{2}},$$

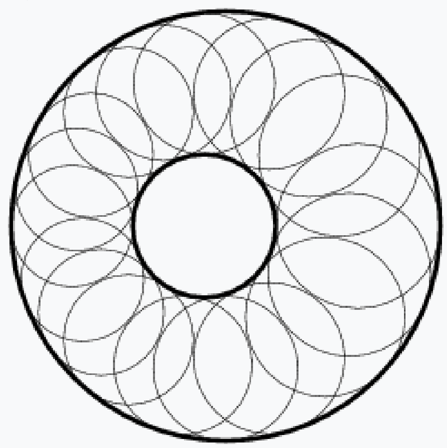
$$\delta = 2\ \ln\left[\sec\left(\frac{\pi}{n}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] = 2\ \ln\left[\sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n}\right)\right] = 2\ \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n}\right)\right].$$

Još jedno zanimljivo rešenje Štajnerovog porizma prikazano je na sledećoj slici, gde je $n = 4$ (Slika 22).



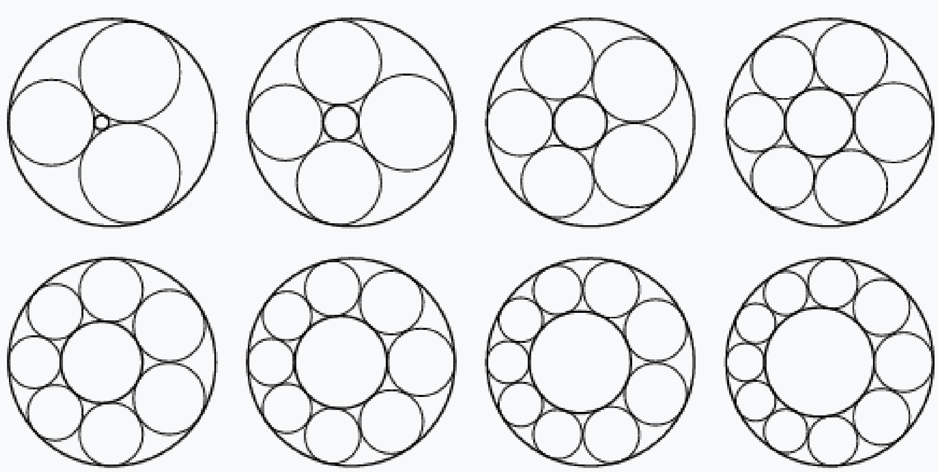
Slika 22

Ono što je fascinantno kod ovog slučaja je da se centri četiri kruga Štajnerovog lanca, svi nalaze na jednoj elipsi. Zatim, četiri tangente u tačkama dodira svaka dva susedna kruga Štajnerovog lanca (na slici su prikazane sivom bojom), seku se u jednoj tački. Dalje, imamo još četiri prave koje prolaze kroz tačke dodira sa manjim i većim krugom (na slici su prikazane crnom bojom). One se takođe sve četiri seku u malopre pomenutoj tački.
Štajnerov porizam kaže da ako nađemo Štajnerov lanac iz nekog početnog kruga, onda ćemo ga naći i iz bilo kojeg drugog početnog kruga. Štajnerov lanac takođe se može zatvoriti nakon nekoliko niza krugova oko centralnog kruga, i u tom slučaju se takođe može konstruisati drugi Štajnerov lanac sa istim brojem krugova iz bilo koje početne tačke (Slika 23).



Slika 23

I na kraju, na slici ispod, dajemo još nekoliko mogućih slučajeva Štajnerovog lanca ($n = 3, 4, \dots, 10$).



Ovako Štajnerov lanac izgleda u apletu [4].

6. Analitički pristup pramenovima krugova

S obzirom da krug predstavlja krivu drugog reda, odnosno koniku, tako pramen krugova možemo posmatrati kao pramen konike. Tako da će nam sledeća teorema vezana za pramen konika koristiti kako bi videli pramen krugova kroz analitičku projektivnu geometriju.

Teorema 6.1. Bilo koji pramen konika određen je linearnim kombinacijama jednačina ma koje dve konike tog pramena.

Dokaz ove teoreme može se pronaći u literaturi [9].

Napomena. Svaku koniku pa i krug u homogenim koordinatama ravni možemo predstaviti simetričnom 3×3 matricom. Linearnim kombinacijama dve simetrične matrice dobijaju se različite, opet simetrične matrice. Ako je pramen krugova zadat dvama krugovima kao osnovama, onda bilo koja dva kruga te familije mogu da posluže kao osnovna. Dakle, pramen krugova je određen dvema linearno nezavisnim simetričnim matricama $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{L}$ $\in \mathrm{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$). Isti pramen određuju bilo koje dve linearne kombinacije ovih matrica. Naravno, ako su te dve matrice linearno nezavisne. Uslov je lako izraziti algebarski: ako je skup matrica $\{\boldsymbol{K},\boldsymbol{L}\}$ linearno nezavisan, onda će skup $\{\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L}, \lambda'\boldsymbol{K} + \mu'\boldsymbol{L}\}$ takođe biti linearno nezavisan ako i samo ako je $\lambda\mu' - \lambda'\mu \neq 0$.

Neka su jednačine dva kruga date sa:

$$k_1:\ \ x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0 \ \text{ i} \tag{1}$$

$$k_2:\ \ x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0. \tag{2}$$

Pramen krugova k_1 i k_2 je familija linearnih kombinacija jednačina k_1 i k_2, tj.

$$\lambda k_1 + \mu k_2 = 0, \text{ pri čemu važi } \lambda^2 + \mu^2 \neq 0.$$

Radikalnu osu te familije dobićemo oduzimanjem jednačina (1) i (2).

Sledeći primer prikazan je na slici ispod.

Dati su krugovi k_1 i k_2:

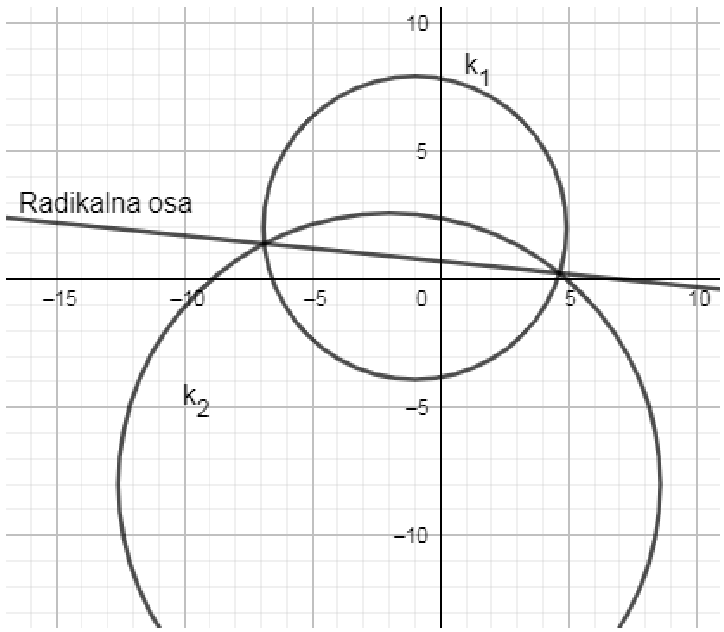
$$k_1:\ \ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 30 = 0,$$

$$k_2:\ \ x^2 + y^2 + 4x + 16y - 44 = 0.$$

Tada se radikalna osa dobija oduzimanjem jednačina tih krugova i data je jednačinom

$$r: \quad -2x - 20y + 14 = 0,$$

tj. $$r: \quad x + 10y - 7 = 0.$$



(Videti aplet [5])

Ako za pravu koja sadrži centre krugova nekog pramena, uzmemo x osu, a za radikalnu osu uzmemo y osu, dobijamo jednostavniji oblik jednačine sistema koaksijalnih krugova, dat sa $x^2 + y^2 - 2gx + c = 0$, gde je g promenljiva, a c konstanta.

Napomena. Ako je $g = \pm c$, onda imamo da je poluprečnik $g^2 - c = 0$, i krug postaje tačka.

Tačke $(\pm c, 0)$ nazivamo *graničnim tačkama* sistema koaksijalnih krugova.

Ravan se može posmatrati i kao deo projektivne ravni $P^2(\mathbb{R})$ koja se dobija uvođenjem homogenih koordinata. Takođe, i projektivna ravan $P^2(\mathbb{R})$ se na prirodan način može videti kao deo kompleksne projektivne ravni $P^2(\mathbb{C})$.

Naime, svaki krug euklidske ravni sadrži dve fiksne tačke

$$I_1 = (1 : i : 0) \text{ i } I_2 = (1 : -i : 0),$$

koje nazivamo *kružne tačke*. One pripadaju beskonačno dalekoj pravoj kompleksne projektivne ravni. Krug određuju još tri tačke koje mogu biti realne ili konjugovano kompleksne. Na taj način ma koji pramen krugova možemo da posmatramo kao pramen konika koje su određene sa 5 tačaka.

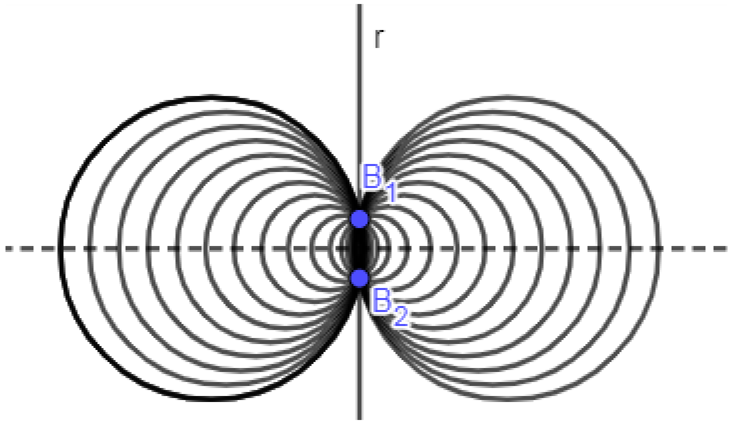
Napomena. Geometrijski objekti su određeni izvesnim brojem drugih objekata. Ako neki od tih definišućih objekata izostavimo, dobijamo pramen. Na primer, prava je određena sa dve tačke. Zato, skup svih pravih kroz jednu tačku nazivamo pramen pravih. Krug je određen sa tri tačke, pa je skup svih krugova kroz dve date tačke pramen krugova (znamo da hiperbolički pramen nije pramen krugova kroz dve tačke, tj. te tačke su kompleksne, o čemu će biti reči u nastavku). Konika je zadata sa pet tačaka, pa je pramen konika skup svih konika koje su zadate sa neke četiri tačke.
Kako je svaki pramen određen sa dva kruga, razlikovaćemo četiri vrste pramena krugova s obzirom na međusobni odnos ta dva kruga.

6.1. Eliptički pramen

Ako se svaka dva kruga seku u dve različite realne tačke, taj pramen nazivamo *eliptički pramen*. Neka su, primera radi, date tačke tačke $B_1(0,1) = (0 : 1 : 1)$ i $B_2(0,-1) = (0 : -1 : 1)$. Tada jednačina svih krugova u eliptičkom pramenu ima oblik

$$x^2 + y^2 - 2gx - 1 = 0,\ g \in \mathbb{R}.$$

Prava $p(B_1, B_2)$ naziva se osa pramena. Ona je takođe i radikalna osa r i osa simetrije (Slika 24).



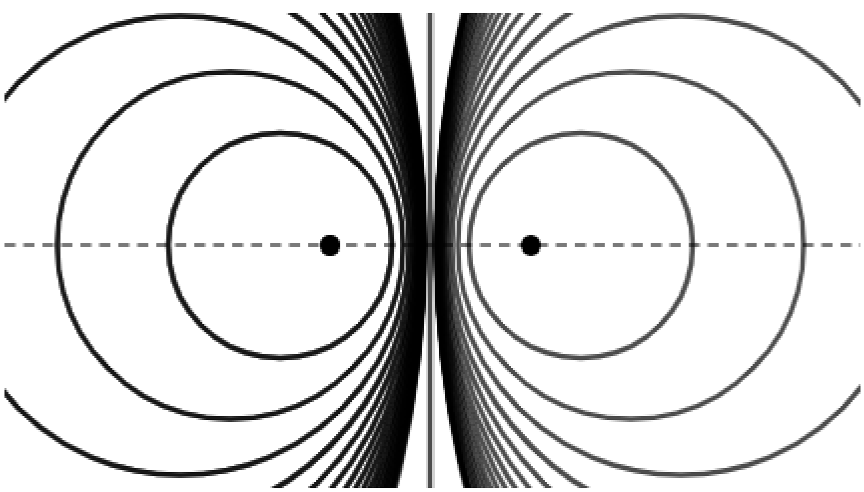
Slika 24

6.2. Hiperbolički pramen

Ako se svaka dva kruga seku u dve konjugovano kompleksne tačke, takav pramen nazivamo *hiperbolički pramen.* Pošto u hiperboličkom pramenu nemamo realne bazne tačke, pretpostavimo, primera radi, da su date kompleksno konjugovane tačke $B_1(0, i) = (0 : i : 1)$ i $B_2(0, -i) = (0 : -i : 1)$. Tada jednačina svih krugova u hiperboličkom pramenu ima oblik

$$x^2 + y^2 - 2gx + 1 = 0,\ g \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

U realnoj projektivnoj ravni vidimo samo pravu $p(B_1, B_2)$ koja je osa pramena, a takođe i radikalna osa i osa simetrije (Slika 25).



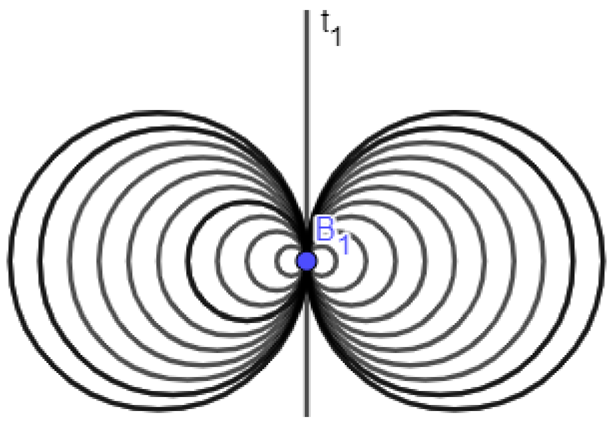
Slika 25

6.3. Parabolički pramen

Ako se svaka dva kruga pramena dodiruju u istoj tački, pramen nazivamo *parabolički pramen.* Svi krugovi u paraboličkom pramenu imaju zajedničku tačku – tangentu (B_1, t_1). Neka je, na primer, $B_1(0{,}0) = (0 : 0 : 1)$ i t_1 tangenta $x = 0$. Tada jednačina svih krugova u paraboličkom pramenu ima oblik

$$x^2 + y^2 - 2gx = 0,\ g \in \mathbb{R}.$$

U realnoj projektivnoj ravni vidimo samo tangentu t_1 koja je osa pramena, radikalna osa i osa simetrije (Slika 26).



Slika 26

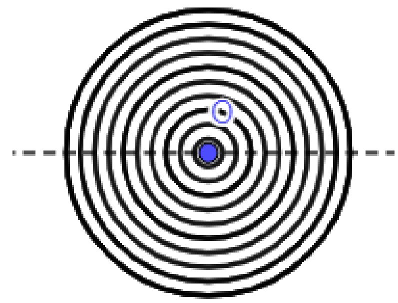
6.4. Koncentrični krugovi

Krugove čiji su centri isti nazivamo koncentričnim krugovima. Neka je centar krugova, na primer, tačka $O(0{,}0) = (0 : 0 : 1)$. Tada je jednačina krugova data sa

$$x^2 + y^2 = g^2,\ g \in \mathbb{R}.$$

U ovom pramenu imamo dve tačke – tangente, koje se u realnoj projektivnoj ravni ne vide.

Ipak, i koncentrični krugovi predstavljaju pramen krugova (Slika 27).



Slika 27

7. Primene pramenova krugova

U ovom poglavlju ćemo navesti tri područja gde možemo primeniti pramenove krugova. Prikazaćemo primenu u fizici, elektronici i matematici.

7.1. Ekvipotencijalne linije dva tačkasta naelektrisanja

U četvrtom poglavlju smo prikazali Apolonijeve krugove, a njihova primena se može koristiti pri rešavanju nekih opštih problema geometrije i matematičke fizike, optike i elektriciteta.

Pokazalo se da apolonske putanje u svom kretanju prate vrtložna jezgra ili druga definisana stanja u nekim fizičkim sistemima koji uključuju interferencijalna ili spregnuta polja, poput fotonskih ili spregnutih polaritonskih talasa. Putanje nastaju iz homeomorfnog mapiranja između Rabijeve rotacije funkcije punog talasa na Blohovoj sferi i apolonskih krugova u stvarnom prostoru u kome se vrši posmatranje.

U ovom delu, pokazaćemo kako se Apolonijevi krugovi mogu videti kroz dva tačkasta naelektrisanja i to na vrlo elegantan i intuitivan način.

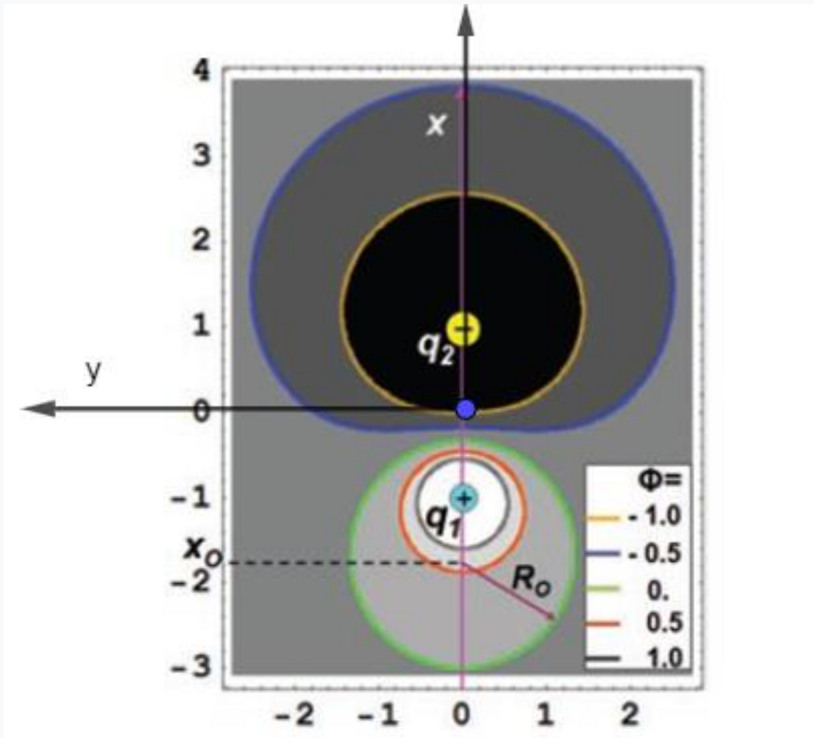
Pokazaćemo da je nulta ekvipotencijalna linija za dva različita naelektrisanja Apolonijev krug za ova dva naelektrisanja. Koristimo ovo otkriće da pronađemo električno polje naelektrisanja koje se nalazi blizu uzemljene provodne sfere.

Posmatraćemo dva različita tačkasta naelektrisanja q_1 i q_2, koja se nalaze na udaljenosti $2a$ jedno od drugog. Dokazaćemo da među površinama jednakog potencijala za ovaj sistem postoji sfera konačnog poluprečnika. Pronaći ćemo njegov poluprečnik i koordinate njegovog centra. Pronađimo prvo potencijal φ na površini ove sfere, uz pretpostavku da je $\varphi(\infty) = 0$.
Prema Kulonovom zakonu, potencijal tačkastog naelektrisanja je

$$\varphi(r) = k\frac{q}{r},$$

gde je r rastojanje do naelektrisanja, a k je numerički koeficijent - elektrostatička konstanta. Neka su naelektrisanja $q_1(> 0)$ i $q_2(< 0)$ u tačkama A i B, respektivno.

Neka x - osa prolazi kroz tačke A i B, i neka je $x = 0$ na sredini između njih. Posmatrajmo proizvoljnu xy ravan kroz ovu osu.



Slika 28

„Normalizovani" potencijal $\varphi_n = \varphi/k$ u proizvoljnoj tački $P(x, y)$ definisan je jednačinom

$$\varphi_n(x, y) = \frac{q_1}{|PA|} - \frac{|q_2|}{|PB|}, \qquad (1)$$

gde je

$$|PA| = \sqrt{(x + a)^2 + y^2} \qquad \text{i} \qquad |PB| = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

Jednačina ekvipotencijala u xy ravni je $\varphi_n(x, y) = \Phi$, gde je Φ fiksna vrednost normalizovanog potencijala. Uz pomoć jednačine (1), toga da je ekvipotencijal koji odgovara $\Phi = 0$ opisan pomoću jednačine $\frac{|PA|}{|PB|} = k$, iz teoreme 4.6 dobijamo $k = \left|\frac{q_1}{q_2}\right|$. Drugim rečima, nulti ekvipotencijal je Apolonijev krug za tačke A i B kojem odgovara $k = \left|\frac{q_1}{q_2}\right|$. Uz malo računanja dobijamo poluprečnik kruga

$$R_o = \frac{2a|q_1 q_2|}{|{q_1}^2 - {q_2}^2|} \qquad (2)$$

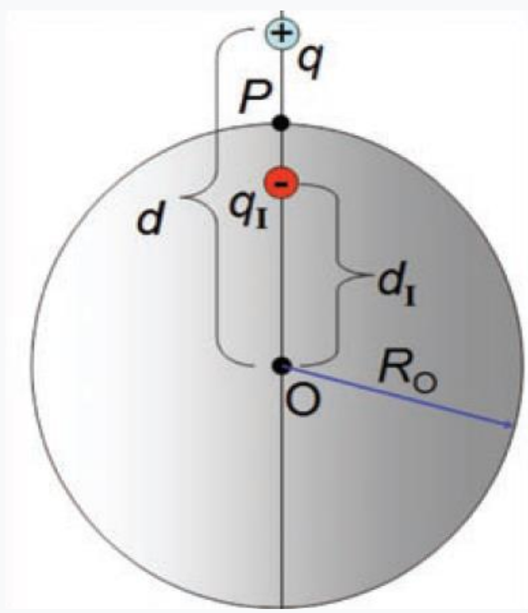
i koordinate njegovog centra

$$x_o = a\frac{{q_1}^2 + {q_2}^2}{{q_1}^2 - {q_2}^2} \qquad (3).$$

Zbog aksijalne simetrije zadatka, jednačine (2) i (3) važe za bilo koju ravan dobijenu rotacijom izabrane xy ravni oko x – ose. Prema tome, one takođe opisuju sfernu ekvipotencijalnu površinu koja odgovara Φ = 0. Ovo zapažanje konačno rešava problem.

Na slici 28 vidimo ekvipotencijal (u xy ravni) dva naelektrisanja, $q_1 = 1\ C$ i $q_2 = -2\ C$, pozicioniranih na $x_1 = -1\ m$ i $x_2 = 1\ m$. Zeleni krug je nulti ekvipotencijal, i to je baš Apolonijev krug. Njegov poluprečnik je $R_o = \frac{4}{3}\ m$, koordinata centra je $x_o = -\frac{5}{3}\ m$, i $k = \frac{1}{2}$.

Korišćenjem Apolonijevih krugova, takođe možemo pronaći i električno polje naelektrisanja. Dakle, naći ćemo električno polje naelektrisanja q koje se nalazi na udaljenosti d od centra uzemljene ($\varphi = 0$) provodne sfere poluprečnika R_o (vidi sliku).



Naelektrisanje q indukuje površinsku raspodelu naelektrisanja u uzemljenoj sferi, tako da je ukupan potencijal u svim tačkama sfere jednak nuli. Električno polje izvan sfere (nestaje svuda unutar sfere) može se zgodno opisati u terminima „naelektrisanja slike". U ovom pristupu problem je preformulisan tako da se pronađe slika (fiktivno) naelektrisanja q_1, tako da je nulti ekvipotencijal električnog polja stvorenog od strane q_1 i q sferna površina provodnika. Ovo će garantovati da kombinovani potencijal zadovoljava jednačine elektrostatike (Kulonov zakon) i granični uslov $\varphi = 0$ na provodniku.

Iz prethodne diskusije jasno je da naelektrisanje slike mora biti izabrano tako da presek sfernog provodnika bude Apolonijev krug za realno naelektrisanje i njegovu sliku. Zatim, odmah sledi iz jednačine (1) da q_1 treba da bude postavljen na pravu koja prolazi kroz q i centar sfere O, na rastojanju

$$d_1 = \frac{{R_o}^2}{d}$$

od centra. Zamenom u jednačinu (2) rastojanja između naelektrisanja,

$$2a = d - \frac{{R_o}^2}{d},$$

lako dobijamo da je

$$q_1 = q\frac{R_o}{d}.$$

Električno polje izvan sfere može se odrediti kao superpozicija polja koje stvaraju q i q_1, dok polje unutar provodnika nestaje. Treba imati na umu da je polje naelektrisanja q_1 u spoljašnjoj oblasti tačno ekvivalentno polju koje proizvodi indukovana raspodela naelektrisanja na površini sfere.

7.2. Izodinamičke tačke trougla

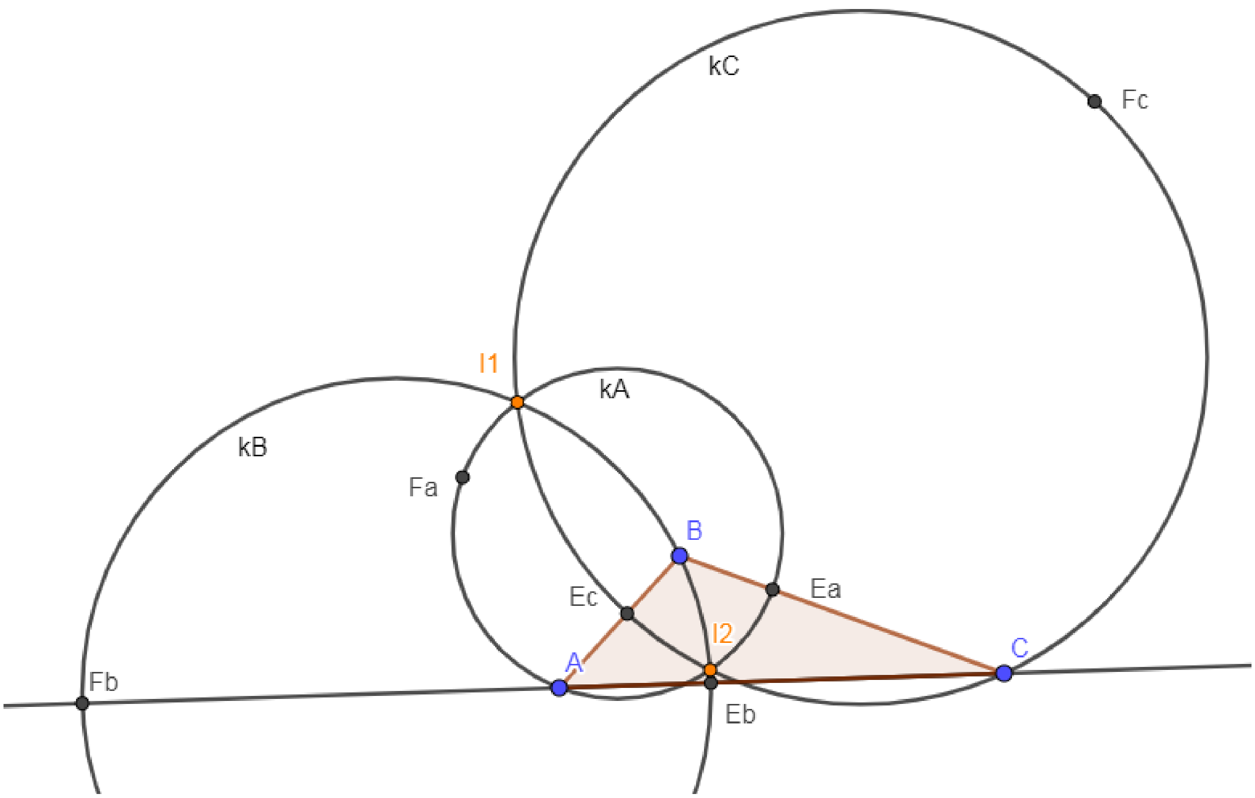
U ovom delu ćemo videti još jednu primenu Apolonijevih krugova, ovog puta na trougao, odnosno kroz zadatke i svojstva koja se javljaju na Međunarodnim matematičkim olimpijadama. U tu svrhu definisaćemo Apolonijev krug trougla, kao i izodinamičke tačke.

Definicija 7.2.1. Neka su E i F, redom, tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A trougla ABC seku pravu BC. Krug k_A kome je duž EF prečnik, nazivamo *Apolonijevim krugom* koji odgovara temenu A ili stranici BC trougla ABC. Analogno se konstruišu i Apolonijevi krugovi k_B i k_C, koji odgovaraju temenima B i C tog trougla.

S obzirom da je ugao $\sphericalangle EAF$ prav, teme A je na krugu k_A. Analogno važi i za temena B i C.

Definicija 7.2.2. Dve zajedničke tačke tri Apolonijeva kruga trougla nazivamo *izodinamičkim tačkama.* Na slici su označene sa I_1i I_2.

Prava I_1I_2 je radikalna osa Apolonijevih trouglova.



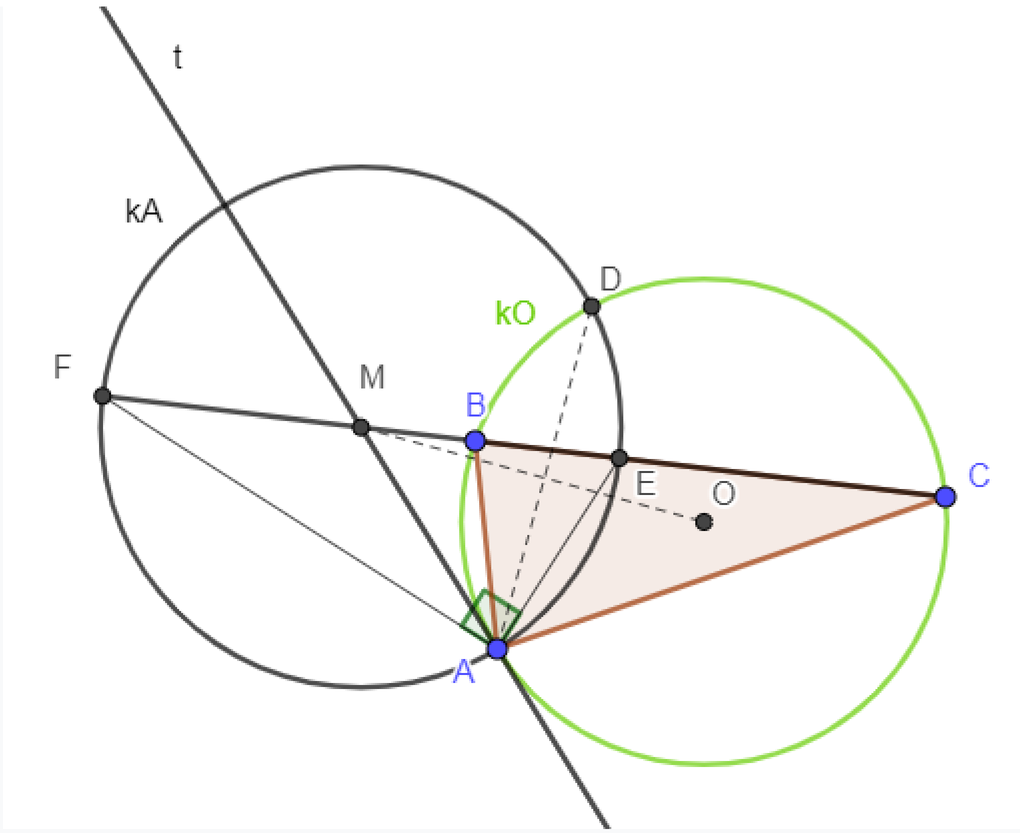
Teorema 7.2.3. Apolonijevi krugovi trougla ABC i opisani krug trougla su ortogonalni.

Dokaz. Teoremu ćemo dokazati za opisani krug k_O i Apolonijev krug k_A. Analogno važi za druga dva Apolonijeva kruga. Neka je tačka D (pored tačke A) druga tačka preseka krugova k_A i k_O. Dovoljno je pokazati da je $\sphericalangle ODM$ prav. Znamo da je duž

MO simetrala duži AD. Zbog simetrije, dovoljno je pokazati da je $\sphericalangle MAO$ prav, tj. da je prava $p(M, A)$ tangenta na krug k_O u tački A. Imamo

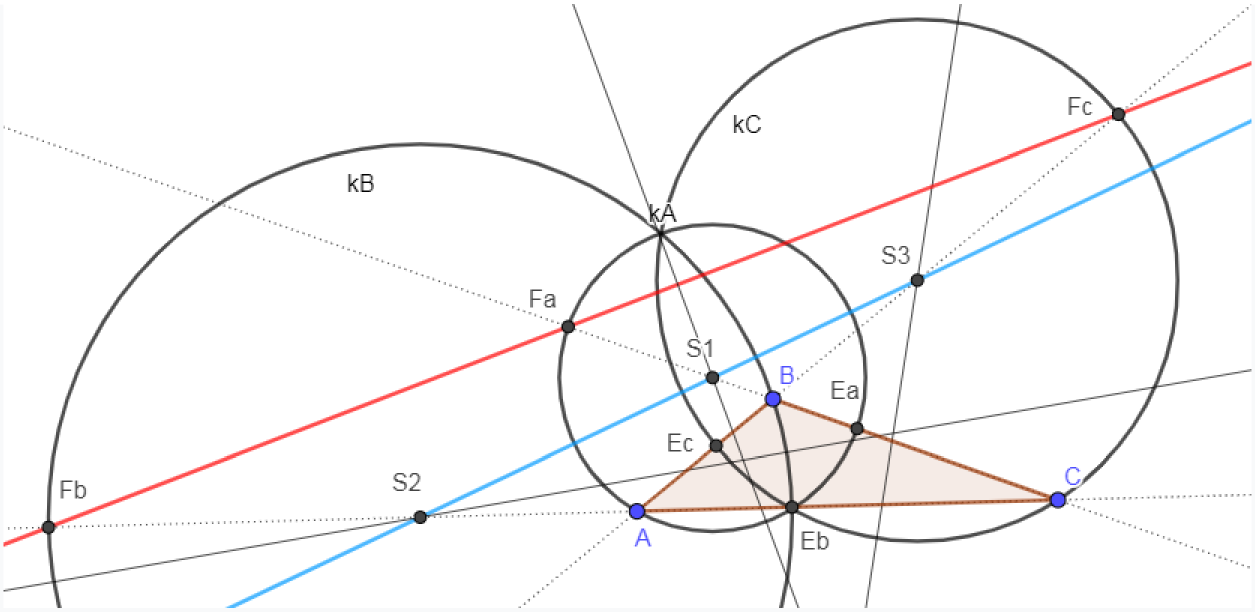
$$\sphericalangle MAB + \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \sphericalangle MAE = \sphericalangle MEA = \frac{\sphericalangle BAC}{2} + \sphericalangle BCA \iff \sphericalangle MAB = \sphericalangle BCA.$$

Na osnovu teoreme o alternativnom segmentu znamo da je ugao između tetive i tangente povučenih iz iste tačke kružnice jednak periferijskom uglu nad tom tetivom, pa imamo da je prava $p(M, A)$ tražena tangenta. ■



Sledi još jedna zanimljiva teorema, bez dokaza, a koji se može pronaći u literaturi [5].

Teorema 7.2.4. Centri Apolonijevih krugova trougla ABC su kolinearni.
Na slici 29, centri krugova k_A, k_B i k_C označeni su sa S_1, S_2 i S_3, redom.



Slika 29

Sledi par zadataka koji su se pojavili na različitim Olimpijadama, a za čije dokaze, između ostalog koristimo navedene osobine, na vrlo elegantan način.

Zadatak 1. Pokazati da su preseci simetrala duži, koje predstavljaju simetrale unutrašnjih uglova trougla, sa odgovarajućim stranicama trougla, tri kolinearne tačke.

Rešenje. Uvešćemo sledeće oznake, radi lakšeg razumevanja (vidi sliku 29).
Neka je $CE_c = sim \sphericalangle C$, $BE_b = sim \sphericalangle B$ i $AE_a = sim \sphericalangle A$. Lako je primetiti da važi:

1. simetrala duži CE_c seče stranicu AB u tački S_3,
2. simetrala duži AE_a seče stranicu BC u tački S_1 i
3. simetrala duži BE_b seče stranicu CA u tački S_2.

Po teoremi 7.2.4., te tri tačke su kolinearne.

Dokazaćemo da su i tačke F_a, F_b i F_c kolinearne. Imamo da važi:

$$\frac{BF_a}{F_a\mathrm{C}} = \frac{BA}{AC}, \qquad \frac{CF_b}{F_b\mathrm{A}} = \frac{CB}{BA}, \qquad \frac{AF_c}{F_c\mathrm{B}} = \frac{AC}{\mathrm{CB}}.$$

Množenjem navedenih jednakosti, i koristeći Menelajevu teoremu, dobijamo kolinearnost tačaka.

Zadatak 2. Neka je data tačka P u unutrašnjosti trougla ABC. Nacrtati Apolonijeve krugove za uglove $\measuredangle APB$, $\measuredangle APC$ i $\measuredangle CPB$. Dokazati da ove tri kružnice imaju još jednu zajedničku tačku, osim tačke P.

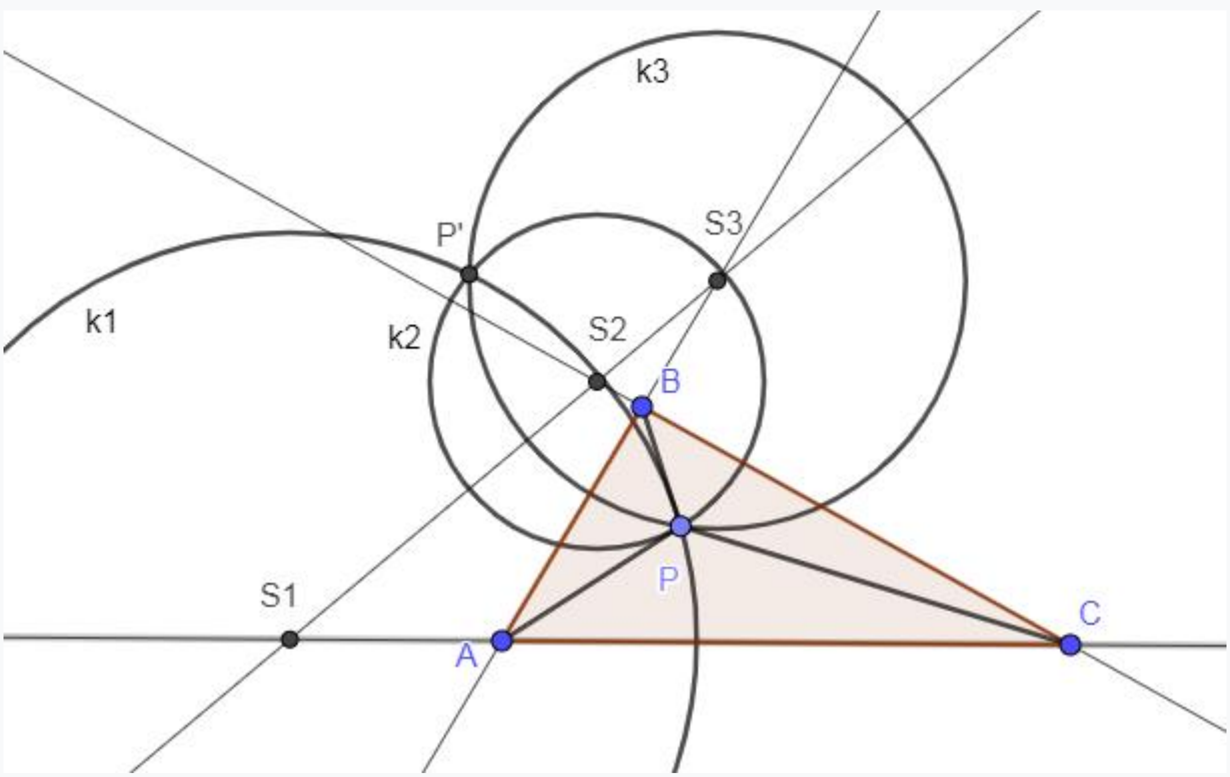
Rešenje. Neka su S_3, S_1 i S_2 centri Apolonijevih krugova, redom. Po teoremi 7.2.4., imamo

$$\frac{BS_2}{S_2\mathrm{C}} = \frac{BP^2}{P\mathrm{C}^2}, \qquad \frac{CS_3}{S_3\mathrm{A}} = \frac{CP^2}{PA^2}, \qquad \frac{AS_1}{S_1\mathrm{B}} = \frac{AP^2}{P\mathrm{B}^2}.$$

Množenjem jednakosti dobijamo

$$\frac{BS_2}{S_2\mathrm{C}} \cdot \frac{CS_3}{S_3\mathrm{A}} \cdot \frac{AS_1}{S_1\mathrm{B}} = \frac{BP^2}{P\mathrm{C}^2} \cdot \frac{CP^2}{PA^2} \cdot \frac{AP^2}{P\mathrm{B}^2} = 1.$$

Dakle, po Menelajevoj teoremi, tačke S_3, S_1 i S_2 su kolinearne. Kako ovi krugovi imaju jednu zajedničku tačku P, moraju imati još jednu zajedničku tačku, koja će biti na zajedničkoj radikalnoj osi ova tri kruga. Na slici 30 označena je sa P'.



Slika 30

Sledeći zadatak je sa 9. Iberoameričke olimpijade 1994.

Zadatak 3. Neka su A, B i C tačke na kružnici kruga K, takve da je trougao ABC oštrougli. Neka je P tačka u unutrašnjosti kruga K. Neka su X, Y i Z drugi preseci pravih AP, BP i CP sa krugom, redom. Odrediti položaj tačke P, tako da trougao XYZ bude jednakostraničan.

Rešenje. Dokazaćemo da je tačka P prva izodinamička tačka trougla ABC. Uradićemo inverziju trougla ABC u odnosu na krug $k(P, r)$. Sada imamo

$$A'B' = AB \cdot \frac{r^2}{\mathrm{PA} \cdot PB}, \quad B'C' = BC \cdot \frac{r^2}{\mathrm{PB} \cdot PC}, \quad C'A' = CA \cdot \frac{r^2}{\mathrm{PC} \cdot PA}.$$

Kako je P na Apolonijevom krugu, imamo

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PC} \qquad i \qquad \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{PB \cdot PC}{PA \cdot PB} = 1.$$

Dakle, $A'B' = B'C'$. Slično dobijemo i $B'C' = C'A'$. Sledi da je inverzan trougao $A'B'C'$ jednakostraničan.

Na osnovu sledeće dve leme, lako smo rešili zadatak.

Lema 7.2.5. Neka je P bilo koja tačka unutar trougla ABC, i neka su X, Y i Z drugi preseci pravih AP, BP i CP sa kružnicom opisanom oko tog trougla, redom. Tada je trougao LMN, trougao "pedale"[4] u tački P, sličan trouglu XYZ.

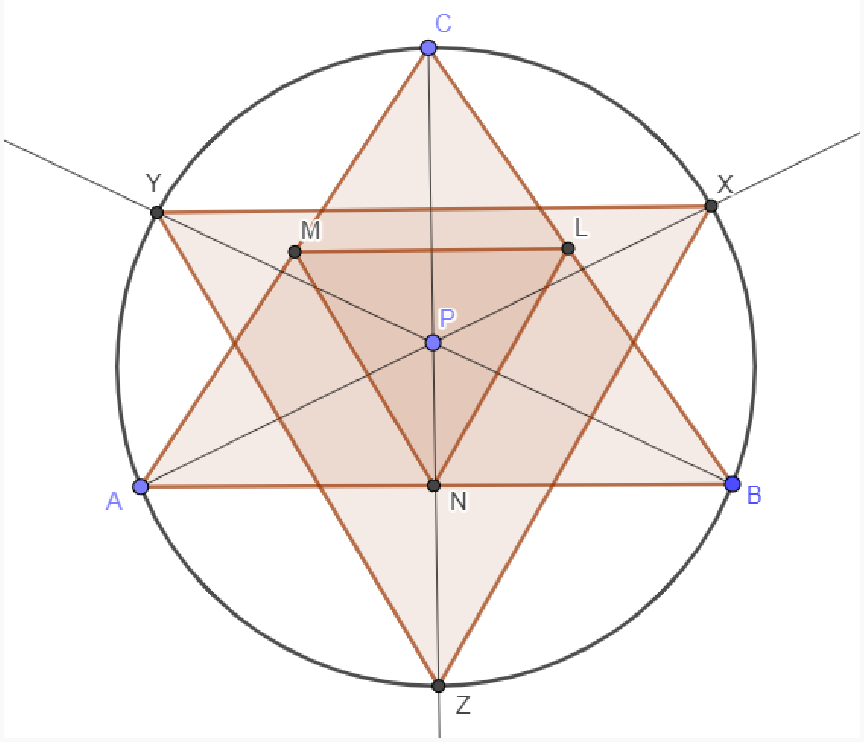
Dokaz. Znamo da je

$$\sphericalangle AXY = \sphericalangle ABP = \sphericalangle NLP \quad i \quad \sphericalangle AXZ = \sphericalangle ACP = \sphericalangle MLP.$$

Sabiranjem ove dve jednakosti, dobijamo $\sphericalangle YXZ = \sphericalangle MLN$. Slično dobijamo i za ostale uglove. Dakle, dati trouglovi su slični. ■

---

[4] Trougao „pedale“ je trougao koji se dobija projektovanjem tačke iz unutrašnjosti trougla na stranice trougla.



Lema 7.2.6. Neka su A, B i C tačke na kružnici kruga K, takve da je trougao ABC oštar. Neka je P tačka u unutrašnjosti kruga K. Neka su X, Y i Z drugi preseci pravih AP, BP i CP sa krugom, redom. Ako je trougao $A'B'C'$ dobijen inverzijom trougla ABC u odnosu na krug $k(P, r)$, tada važi $\Delta\, LMN \sim \Delta\, A'B'C' \sim \Delta\, XYZ$.

Dokaz. Za tačku P imamo da važi

$$AP \cdot XP = BP \cdot YP = CP \cdot ZP.$$

Zbog inverzije, znamo da važi

$$AP \cdot\ A'P = BP \cdot\ B'P = CP \cdot\ C'P =\ r^2,$$

i sledi

$$\frac{XP}{A'P} = \frac{YP}{B'P} = \frac{ZP}{C'P}.$$

Dakle, dobili smo sličnost traženih trouglova. ■

Napomena. Izodinamičke tačke trougla su jedine tačke u kojima možemo da preokrenemo trougao u jednakostranični trougao.

Naredni zadatak se nalazio na spisku zadataka za takmičenje u Singapuru 2004. godine, kao predlog.

Zadatak 4. Neka je tačka D u unutrašnjosti oštrouglog trougla koja zadovoljava:

$$AB = a \cdot b, \qquad AC = a \cdot c, \qquad AD = a \cdot d,$$
$$BC = b \cdot c, \qquad BD = b \cdot d, \qquad CD = c \cdot d.$$

Dokazati da je

$$\sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD = 60°.$$

Rešenje. Posmatrajmo sledeće jednakosti:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{a \cdot b}{a \cdot c} = \frac{b \cdot d}{c \cdot d} = \frac{BD}{CD},$$

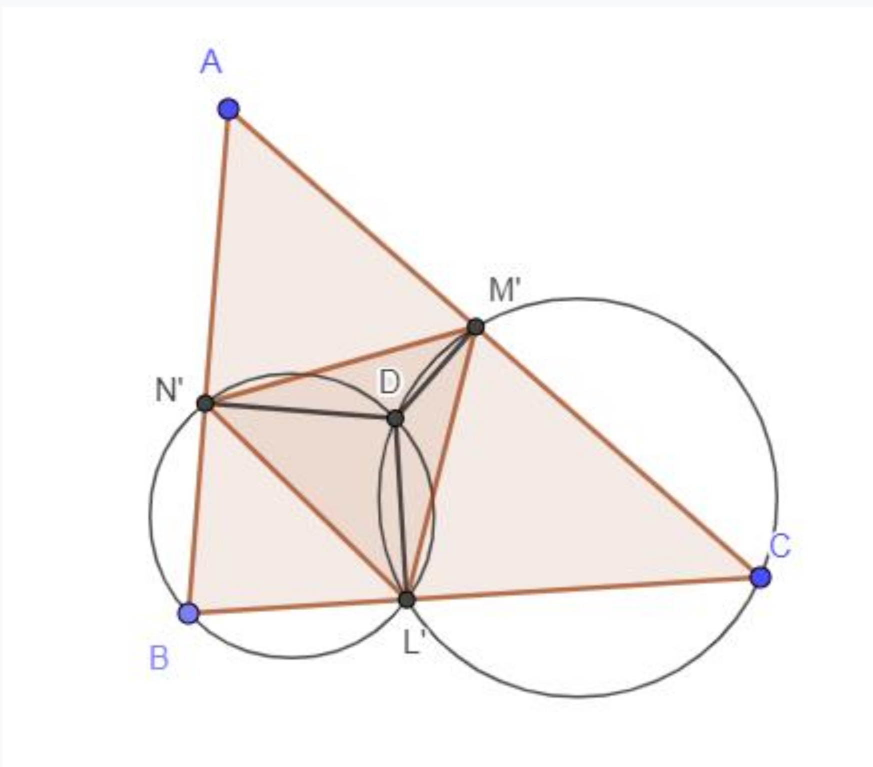
$$\frac{AC}{BC} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{AD}{BD},$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{b \cdot c}{a \cdot b} = \frac{c \cdot d}{a \cdot d} = \frac{CD}{AD}.$$

Zaključujemo da je D jedna izodinamička tačka trougla ABC. Neka je $L'M'N'$ trougao pedale u tački D. Po zadatku 1 imamo da je trougao $L'M'N'$ jednakostraničan. Pošto su četvorouglovi $BN'DL'$ i $CM'DL'$ tetivni, imamo

$$\sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD = \sphericalangle N'L'D + \sphericalangle M'L'D = \sphericalangle N'L'M' = 60°,$$

čime je zadatak završen.



Naredni zadatak se pojavio na spisku Olimpijskih zadataka koji su ušli u uži izbor 1993. godine. Ovaj problem bi bio prilično težak da ne poznajemo svojstva Apolonijevog kruga i izodinamičke tačke (ili Fermaove tačke), međutim rešenje ćemo izostaviti jer je malo kompleksnije. Za ovo rešenje zaslužan je Vladimir Zajić.

Zadatak 5. Tačke D, E i F su temena jednakostraničnog trougla koje leže na stranicama BC, CA i AB, respektivno, trougla ABC. Ako su a, b i c odgovarajuće dužine ovih stranica, a S površina trougla ABC, dokaži da je

$$DE \geq \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot S}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4 \cdot \sqrt{3} \cdot S}}.$$

U nastavku sledi još nekoliko zanimljivih zadataka u kojima se koriste navedena svojstva i često su ključni potez za rešavanje. Međutim, koriste se i druge ideje, koje nemaju veze sa temom ovog rada, pa će njihova rešenja izostati.

Zadatak 6. Apolonovijev krug trougla zaklapa ugao od $120°$ sa preostala dva kruga.

Zadatak 7. (Rumunska olimpijada) U ravni su date četiri tačke A_1, A_2, A_3, A_4 od kojih nikoje tri nisu kolinearne, tako da važi

$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 = A_1A_3 \cdot A_2A_4 = A_1A_4 \cdot A_2A_3.$$

Označimo sa O_i centar trougla $\Delta\, A_jA_kA_l$, gde su $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Ako je $\forall i, A_i \neq O_i$, dokazati da su četiri prave A_iO_i konkurentne ili paralelne.

Zadatak 8. Jednakostraničan trougao XYZ je upisan u kružnicu čije je centar tačka O. Neka je P proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla, takva da prave PX, PY, PZ seku kružnicu u tačkama A, B, C, redom. Neka su tačke D, E, F centri upisanih krugova trouglova PBC, PCA, PAB, redom. Dokazati da su AD, BE, CF konkurentne.

Zadatak 9. Dat je krug sa tetivom BC. Neka je A proizvoljna tačka na kružnici. Dokazati da:

1. Kada A varira, GMT izodinamičkih tačaka je par kružnica (aplet [6]).

2. Neka je R poluprečnik date kružnice, i R_1 i R_2 poluprečnici GMT krugova. Tada važi

$$\left|\frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2}\right| = \frac{1}{R}.$$

Zadatak 10. (USA MOSP 1996). Neka su trouglovi AB_1C_1, AB_2C_2 i AB_3C_3 podudarni i jednakostranični. Dokazati da parni preseci opisanih kružnica trouglova AB_1C_2, AB_2C_3 i AB_3C_1, formiraju jednakostranični trougao podudaran sa prva tri.

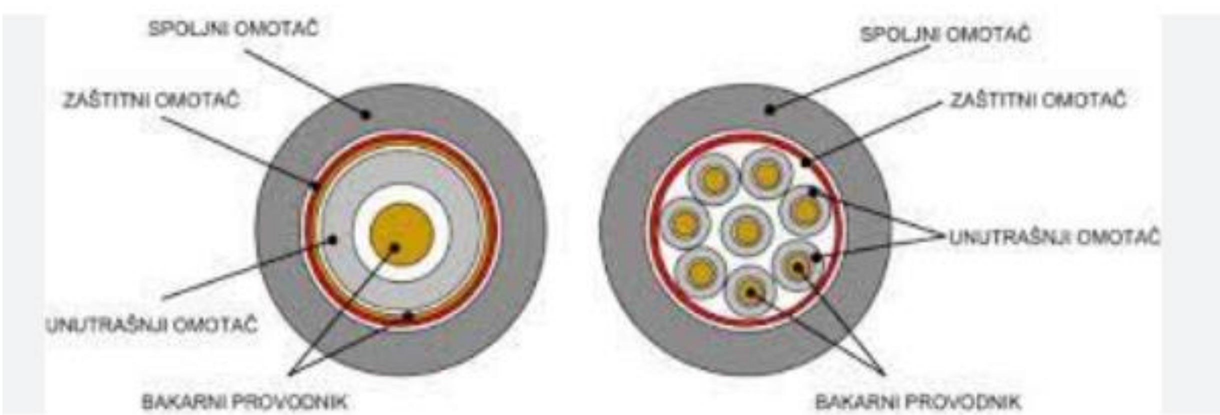
7.3. Koaksijalni kablovi

Pramenove krugova kao sistem koaksijalnih krugova možemo videti i u svetu elektronike i telekomunikacija, odnosno kroz koaksijalne kablove.

Glavna primena koaksijalnih krugova je u prenosu radio – frekvencijskih signala. Oni se često koriste u sistemima televizije, radija, video tehnici, bežičnih mreža, radara i drugih uređaja koji zahtevaju pouzdan prenos signala visokih frekvencija.

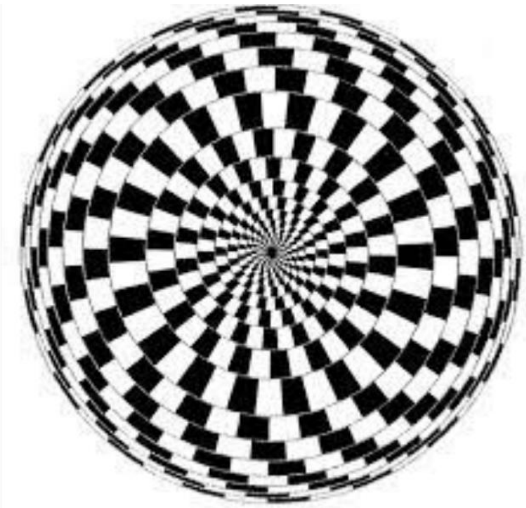
Koaksijalne kablove je izumeo 1880. godine inženjer i matematičar Oliver Heaviside. A naziv je dobio jer uključuje jedan fizički kanal koji nosi signal okružen - nakon sloja izolacije - drugim koncentričnim fizičkim kanalom, oba postavljena duž iste ose.

Na slici ispod se vidi poprečni presek koaksijalnog kabla.



Zaključak

Matematika je svuda oko nas. Krugovi su svuda oko nas. Kao simetrični geometrijski oblici imaju svoju posebnu lepotu.



Krugove koje smo proučavali u ovom radu, koriste se u različitim kontekstima, uključujući matematiku, fiziku, inženjering, dizajn i umetnost. Navodimo još nekoliko primera gde se koriste krugovi i njihovi pramenovi, kako bi se još jednom dočarala njihova potreba:

- Optika. U optici koncentrični krugovi se često koriste za dizajniranje i analizu optičkih sočiva, kao i za proučavanje interferencije svetlosti. Na primer, u Fresnelovim sočivima se koriste koncentrični krugovi za postizanje različitih optičkih efekata.

- Elektronika. Krugovi se koriste u elektronici za dizajniranje antenskih sistema. Antene poput dipola ili spiralnih antena imaju oblik koncentričnih krugova koji omogućavaju prijem ili slanje elektromagnetskih talasa.
- Grafika i dizajn. Koncentrični krugovi se često koriste u grafici i dizajnu za postizanje vizuelnih efekata. Mogu se koristiti u logotipima, simbolima, ilustracijama i drugim vizuelnim elementima, kako bi se postigla simetrija, ravnoteža ili estetski dojam.
- Arhitektura. Krugovi se koriste u arhitekturi za planiranje i dizajniranje prostora. Na primer, u urbanističkom planiranju se mogu koristiti krugovi za definisanje zona sa različitim funkcijama ili radijalne rasporede gradskih blokova.
- Umetnost. Koncentrični krugovi su čest motiv u umetnosti, posebno u slikarstvu. Kroz njihovu upotrebu, umetnici mogu stvarati različite iluzije dubine, pokreta ili ravnoteže.

Apleti

[1] Inverzija uopštenih krugova https://www.geogebra.org/m/r6vn8ygv

[2] Koncentrične kružnice https://www.geogebra.org/m/bxx7kxrj

[3] Pramen pravih https://www.geogebra.org/m/nfjpa3xt

[4] Štajnerov lanac https://www.geogebra.org/m/cbzcw6em

[5] Primer pramena krugova https://www.geogebra.org/m/wr8wkj4b

[6] Izodinamičke tačke prave kružnice https://www.geogebra.org/m/fpcuq6wc

Literatura

[1] J. Ilić, *Kružni pramenovi u inverzivnoj geometriji*, diplomski rad, Matematička gimnazija, Beograd 2019.

[2] P. Janičić, *Zbirka zadataka iz geometrije*, Matematički fakultet, Beograd 2007.

[3] D. Lopandić, *Geometrija za III razred matematičko-tehničkog usmerenja*, Prirodno-matematički fakultet, Beograd 1979.

[4] Z. Lučić, *Euklidska i hiperbolička geometrija*, drugo izdanje, Matematički fakultet, Beograd 1997.

[5] Tarik Adnan Moon, *The Apollonian Circles and Isodynamic Points*, Mathematical Reflections 6 (2010).

[6] Michael B. Partensky, *The Circle of Apollonius and Its Applications in Introductory Physics*, Phys. Teach. 1; February 2008; 46(2): 104-108.

[7] M. Stanković, *Euklidska geometrija*, Prirodno matematički fakultet, Niš 2014.

[8] S. Tomović, *Kružni snopovi i transformacije u euklidskom modelu inverzivnog prostora*, master rad, Matematički fakultet, Beograd 2013.

[9] J. Vidaković Mukić, *Pramenovi konika*, master rad, Matematički fakultet, Beograd 2020.