СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ЗБОРНИК РАДОВА

Књ. LV

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. 6

Уредник
Академик РАДИВОЈЕ КАШАНИН
Управник Математичког института САН

БЕОГРАД
1957

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ЗБОРНИК РАДОВА

Књ. LV

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. 6

Уредник
Академик РАДИВОЈЕ КАШАНИН
Управник Математичког института САН

Примљено на VIII скупу Одељења природно-математичких наука САН
28 јуна 1957

Научно дело
ИЗДАВАЧКА УСТАНОВА САН
БЕОГРАД
1957

ACADÉMIE SERBE DES SCIENCES

RECUEIL DE TRAVAUX

T. LV

L'INSTITUT MATHÉMATIQUE

№ 6

Rédacteur:
RADIVOJE KAŠANIN
Membre de l'Académie
Directeur de l'Institut Mathématique

Présenté à la VIII Séance de la Section des Sciences Mathématiques et Naturelles de l'Académie Serbe des Sciences le 28 juin 1957

BEOGRAD
1957

САДРЖАЈ — TABLE DE MATIÈRES

Зборник радова С.А.Н. LV — Математички институт књ. 6, 1957
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LV
Institut Mathématique № 6, 1957

ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ

ИЗВОЂЕЊЕ BELTRAMI-MICHELL-ОВИХ ЈЕДНАЧИНА У ТЕНЗОРСКОМ ОБЛИКУ ИЗ SAINT-VENANT-ОВИХ УСЛОВА КОМПАТИБИЛНОСТИ

Ознаке:

ρ	— густина,
X_i	— коваријантне координате спољашње запреминске силе,
λ, μ	— Lamé-ови коефицијенти еластичности,
E, $\varkappa$	— Young-ов модул и Poisson-ова константа,
g_{ij}	— метрички тензор тродимензионог еуклидског простора у односу на генералисани систем координата x^i $(i = 1, 2, 3)$,
$\sigma = g^{ij}\sigma_{ij} = \sigma_i{}^i$	— скаларна инваријанта тензора деформације σ_{ij} (кубна дилатација),
$\theta = g^{ij}\vartheta_{ij} = \vartheta_i{}^i$	— скаларна инваријанта тензора напона ϑ_{ij},
u_i	— коваријантне координате вектора померања,
$R^l{}_{ijk}$	— Riemann-Christoffel-ов тензор,
ε_{ijk}	— Ricci-ев антисиметрични тензор,
$\Delta u_i = u_i{}^{,j}{}_{,j}$.	

У св. V „Publ. de l'Institut math.", стр. 1—4 [1], са исправкама и допунама у св. IX [2] истог часописа, показао сам како се могу извести Beltrami-Michell-ове једначине у општем тензорском облику, кад се пође од Lamé-ових једначина, напр. у облику

$$\rho X_i + (\lambda+\mu)\,\sigma_{,i} + \mu\,\Delta u_i = 0.$$

Овде ћу сад показати како се тај исти општи облик Beltrami-Michell-ових једначина може добити и полазећи од услова компатибилности тензора деформације у тензорском облику. На ову могућност указао је M. **Brdička** у једном свом раду [3], али је сам он извео једначине само за тзв. чисто Beltrami-ев случај, тј. у отсуству запреминских сила, а поврх тога и само за афине тензоре. Наредно извођење је у потпуности опште.

Ради постизања постављеног циља поћи ћемо од Saint-Venant-ових услова компатибилности у наредном облику (види мој „Тензорски рачун" [4])

$$\varepsilon_{irp}\,\varepsilon_{jsq}\,\sigma^{ij,\,rs}=0. \tag{1}$$

Кад се овде тензор деформације замени, према Hooke-овом закону

$$\sigma^{ij}=\frac{1}{E}\left\{(1+\varkappa)\,\vartheta^{ij}-\varkappa\,g^{ij}\,\theta\right\}, \tag{2}$$

тензором напона, добиће се

$$(1+\varkappa)\,\varepsilon_{irp}\,\varepsilon_{jsq}\,\vartheta^{ij,\,rs}-\varkappa\,\varepsilon_{irp}\,\varepsilon_{jsq}\,g^{ij}\,\theta^{,rs}=0. \tag{3}$$

Знамо да је

$$\varepsilon_{irp}\,\varepsilon_{jsq}=\begin{vmatrix} g_{ij} & g_{is} & g_{iq}\\ g_{rj} & g_{rs} & g_{rq}\\ g_{pj} & g_{ps} & g_{pq}\end{vmatrix}=$$

$$=g_{ij}\begin{vmatrix} g_{rs} & g_{rq}\\ g_{ps} & g_{pq}\end{vmatrix}-g_{is}\begin{vmatrix} g_{rj} & g_{rq}\\ g_{pj} & g_{pq}\end{vmatrix}+g_{iq}\begin{vmatrix} g_{rj} & g_{rs}\\ g_{pj} & g_{ps}\end{vmatrix}, \tag{4}$$

а осим тога је увек:

$$\varepsilon_{irp}\,\varepsilon_{jsq}\,g^{ij}=\varepsilon_{irp}\,\varepsilon^{i}{}_{sq}=g_{pq}\,g_{rs}-g_{ps}\,g_{rq}, \tag{5}$$

$$g_{ij}\,\vartheta^{ij,\,rs}=\theta_{i}{}^{i,\,rs}=\theta^{,rs}, \tag{6}$$

$$g^{ij}\,\theta_{,ij}=\theta_{,i}{}^{,i}=\Delta\theta=g_{ij}\,\theta^{,ij}=\theta^{,i}{}_{,i}. \tag{7}$$

Из Navier-ових једначина [4]

$$\rho\,X_{i}+\vartheta^{j}{}_{i,\,j}=0 \tag{8}$$

лако се изводе наредне везе

$$\vartheta^{j}{}_{i,\,jk}=-\rho\,X_{i,\,k}\ , \tag{9}$$

и

$$g_{is}\,g_{rj}\,\vartheta^{ij,rs}=\vartheta^{ij}{}_{,\,ij}=\vartheta_{rs}{}^{,rs}=\vartheta_{sr}{}^{,rs}=(\vartheta^{r}{}_{s,r})^{,s}=-\rho\,X_{s}{}^{,s}. \tag{10}$$

Ако сад у једначинама (3) подигнемо индекс p и извршимо контракцију $p=q$, добићемо

$$(1+\varkappa)\,\varepsilon_{ir}{}^{p}\,\varepsilon_{jsp}\,\vartheta^{ij,\,rs}-\varkappa\,\varepsilon_{ir}{}^{p}\,\varepsilon_{jsp}\,g^{ij}\,\theta^{,rs}=0. \tag{11}$$

Израчунавањем назначених израза налазимо

$$\varepsilon_{ir}{}^{p}\,\varepsilon_{jsp} = g_{ij}\,g_{rs} - g_{is}\,g_{rj},$$

$$(g_{ij}\,g_{rs} - g_{is}\,g_{rj})\,g^{ij} = 2\,g_{rs}.$$

На тај начин из (11), узимајући у обзир (10), добивамо прво

$$(1+\varkappa)\,(g_{rs}\,\theta^{,rs} + \rho\,X_{s}{}^{,s}) - 2\,\varkappa\,g_{rs}\,\theta^{,rs} = 0,$$

па затим

$$\rho\,(1+\varkappa)\,X_{i}{}^{,i} + (1-\varkappa)\,\Delta\,\theta = 0.$$

Одатле добивамо, још од раније [1] познату али на други начин изведену, везу

$$\Delta\,\theta = -\rho\,\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\,X_{i}{}^{,i} \tag{12}$$

и с обзиром на (10)

$$\vartheta_{rs}{}^{,rs} = \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\,\Delta\,\theta. \tag{13}$$

После ових помоћних излагања може се приступити развијању једначина (3). Наиме, с обзиром на низ претходних релација и на чињеницу да у еуклидском простору резултат два узастопна коваријантна извода не зависи од поретка у коме се они изводе, а према (4) за $\varepsilon_{irp}\,\varepsilon_{jsq}$, добиће се

$$\begin{aligned}(1+\varkappa)\,[(g_{pq}\,g_{rs} - g_{ps}\,g_{rq})\,\theta^{,rs} - (g_{pq}\,g_{rj} - g_{pj}\,g_{rq})\,g_{is}\,\vartheta^{ij,rs} + \\ + (g_{ps}\,g_{rj} - g_{pj}\,g_{rs})\,g_{iq}\,\vartheta^{ij,rs}] - \varkappa\,(g_{pq}\,g_{rs} - g_{ps}\,g_{rq})\,\theta^{,rs} = \\ = (1+\varkappa)\,\Big(g_{pq} + \Delta\,\theta - \theta_{,pq} - \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\,g_{pq}\,\Delta\,\theta - \rho\,X_{p,q} - \rho\,X_{q,p} - \Delta\,\vartheta_{pq}\Big) - \\ - \varkappa\,(g_{pq}\,\Delta\,\theta - \theta_{,pq}) = 0,\end{aligned}$$

одн. после промене знака, деобе са $1+\varkappa$ и свођења

$$\rho\,(X_{p,q} + X_{q,p}) + \frac{1}{1+\varkappa}\,\theta_{,pq} + \Delta\,\vartheta_{pq} - \frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,g_{pq}\,\Delta\,\theta = 0.$$

Најзад, кад се овде за $\Delta\theta$ унесе његова вредност према (12), добива се тражени најопштији тензорски облик Beltrami-Michell-ових једначина

$$\rho\,(X_{i,k} + X_{k,i}) + \frac{1}{1+\varkappa}\,\theta_{,ik} + \Delta\,\vartheta_{ik} + \frac{\rho\,\varkappa}{1-\varkappa}\,g_{ik}\,X_{j}{}^{,j} = 0, \tag{14}$$

где су слободни индекси i и k. Како је тензор напона ϑ_{ik} симетричан, са леве стране је симетрични тензор, па овој тензорској једначини за $i, k = 1, 2, 3$ одговара шест скаларних једначина.

Ако у тензорској једначини (14) подигнемо индекс i она се претвара у једначину

$$\rho\,(X^i{}_{,k}+X_k{}^{,i})+\frac{1}{1+\varkappa}\,\theta'^i{}_{,k}+\Delta\vartheta_k{}^i+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}\,\delta_k{}^i\,X_j{}^{,j}=0, \tag{15}$$

која у општем случају не мора бити симетрична. Међутим и она очигледно одређује само шест различитих скаларних једначина. Наиме, ако двапут коваријантни симетрични тензор на левој страни тензорске једначине (14) обележимо кратко T_{ik}, тада међу координатама тензора $T_k{}^i$ који је на левој страни једначине (15) постоји веза

$$g_{im}\,T_k{}^m=g_{km}\,T_i{}^m,$$

која одређује само три различите скаларне једначине.

(Саопштено на седници Мат. института САН)

ЛИТЕРАТУРА

[1] T. P. Angelitch — Eine Bemerkung zu den Gleichungen von Beltrami-Michell, *Publ. Inst. math. Acad. serbe sci.* 5 (1953), 1—4.

[2] ——————— Eine Bemerkung zu den Gleichungen von Beltrami-Michell, *ibid.* 9 (1956), 93—94.

[3] М. Брдичка — Уравнения совместности и функции напряжений в тензорном виде. *Čehosl. fiz. žurn.* 3 (1953), 1, 36—52.

[4] Т. П. Анђелић — Тензорски рачун. Београд, 1952.

THE BELTRAMI-MICHELL COMPATIBILITY EQUATIONS IN GENERAL TENSOR FORM OBTAINED FROM SAINT-VENANT'S COMPATIBILITY EQUATIONS

By

T. P. ANGELITCH

In a previous paper [1, p. 1—4 and 2, p. 93—94] the author has shown how the most general form (14) of the *Beltrami-Michell* compatibility equations can be obtained from the equations of equilibrium for an elastic solid (*Lamé*'s equations). Here he shows how the same result can be attained by starting from the compatibility equations in terms of strians (*Saint-Venant*'s compatibility equations). To this possibility pointed first *M. Brdička* [3], but his developments are restricted to the so-called pure *Beltrami*'s case, i. e. without body forces.

Зборник радова С.А.Н. LV — Математички институт књ. 6, 1957
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LV
Institut Mathématique № 6, 1957

МАНОЈЛО МАРАВИЋ

О ЈЕДНОМ ПОСТУПКУ ЗБИРЉИВОСТИ ДИВЕРГЕНТНИХ РЕДОВА

УВОД

Познато је да се сваком до сада употребљеном поступку збирљивости може придружити функција $T(t, \varepsilon)$, $(\varepsilon > 0)$ која одређује такозвани размак конвергенције $(t, t+T)$ уоченог поступка. Тако, например, поступку C одговара функција $T(t, \varepsilon) = \varepsilon t$, а Borel-овом поступку функција $T(t, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{t}$.

Према томе можемо извршити поделу поступака збирљивости на класе, тако да истој класи припадају сви они поступци који имају исту функцију $T(t, \varepsilon)$.

Функција $T(t, \varepsilon)$ стоји у вези са питањем инверзије посматраног поступка збирљивости. Инверзне теореме дају услове (услове конвергенције) које мора да задовољава функција да бисмо могли закључити њезину конвергенцију, знајући да је она збирљива дотичним поступком. У сваком случају ти услови зависе од самог поступка о коме је реч. Један врло општи облик услова конвергенције јесте

$$\liminf_{t\to\infty} \min_{t \leqslant \tau \leqslant t+T(t,\varepsilon)} \{A(\tau) - A(t)\} \geqslant -w(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Од нарочитог су интереса они поступци збирљивости који зависе од неког параметра θ, али тако да различитим вредностима параметра одговарају различите функције $T(t, \varepsilon)$, тј. различите дужине размака конвергенције. Такав је например Valiron-ов поступак [13] (специјалан случај) дефинисан са

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x^{\theta}}} \int_0^{\infty} exp\left\{-\left(\frac{t-x}{x^{\theta/2}}\right)^2\right\} A(t)\, dt$$

коме одговара функција $T(t, \varepsilon) = \varepsilon\, t^{\theta/2}$.

Valiron-ов поступак има, између осталог, примена у теорији збирљивости обичних Fourier-ових редова, али до сада није успело да се он примени у теорији збирљивости генералисаних Fourier-ових редова.

Овде ћемо специјално испитивати један поступак збирљивости који зависи од параметра θ, тако да једној вредности параметра одговара један размак конвергенције. Овај поступак може се са успехом примењивати на проблеме збирљивости генералисаних Fourier-ових редова [2]. Њему одговара једна троугласта матрица, а дефинисан је са

$$G_\theta^\varkappa(\mu, x) = \sum_{\mu_\nu \leqq x} \left(1 - e^{(\mu_\nu - x)\, x^{-\theta}}\right)^\varkappa a_\nu \tag{0.1}$$

$$(0 \leqslant \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_n \to \infty,\ n \to \infty),$$

где је $0 < \theta < 1$ и $\varkappa > 0$.

Дефиниција 1.— Ако $G_\theta^\varkappa(\mu, x) \to A$, $x \to \infty$, онда кажемо да је ред Σa_ν збирљив поступком $G_\theta^\varkappa$ ка суми A, што означавамо са

$$\sum a_\nu = A\ (G_\theta^\varkappa).$$

Општије овај поступак можемо дефинисати преко Stieltjes-ова интеграла са

$$G_\theta^\varkappa(x) = \int_0^x \left(1 - e^{(t-x)\, x^{-\theta}}\right)^\varkappa d\{A(t)\}, \tag{0.2}$$

при чему је $A(t)$ функција ограничене варијације у сваком коначном размаку. Не ограничавајући општост, можемо узети да је $A(0) = 0$ и у том случају израз (0.2) може се написати у облику

$$G_\theta^\varkappa(x) = \frac{\varkappa}{x^\theta} \int_0^x \left(1 - e^{(t-x)\, x^{-\theta}}\right)^{\varkappa - 1} e^{(t-x)\, x^{-\theta}} A(t)\, dt. \tag{0.2'}$$

Израз (0.1) је специјалан случај израза (0.2) кад у овом за $A(t)$ узмемо степенасту функцију.

Дефиниција 2.— Ако $G_\theta^\varkappa(x) \to A$, $x \to \infty$, онда кажемо да је функција $A(t)$ збирљива поступком $G_\theta^\varkappa$ ка суми A, што означавамо са

$$A(x) \to A\ (G_\theta^\varkappa), \quad x \to \infty.$$

Овај поступак, слично Valiron-овом, има особину да у односу на θ претставља један непрекидан низ међусобно битно различитих поступака, тако да сваком θ одговара услов конвергенције облика $a_\nu = o(\mu_\nu^{-\theta})$ и размак конвергенције облика $(t, T) \equiv (t, t + \varepsilon t^\theta)$, ма какав био позитивни број $\varkappa$. Међутим, поступак $G_\theta^\varkappa$ има једно преимућство над Valiron-овим, што је дефинисан троугластом матрицом.

У вези с овим поступком поставља се велики број питања од којих ћемо се у овом раду бавити следећим:

У глави I доказаћемо једну „директну“ теорему, или теорему Abel-ове природе, тј. такву теорему која даје гранична својства поступка збирљивости кад се знају одговарајућа гранична својства функције. Ту теорему доказаћемо под претпоставком да је

$$A(t) \sim t^{\beta} e^{\lambda t^{\alpha}}, \quad t \to \infty,$$

где је $\beta > -1$, $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$.

У глави II бавићемо се једном врстом интермедијерне теореме у којој се на основу тога, што Riesz ова средина $\sigma^k(x)$ тежи одређеном брзином граничној вредности, закључује да $G_\theta^\varkappa(x)$ тежи тој истој граници за све $\varkappa > k$, где је k позитиван цео број. У овој глави доказана је и лема 2.1 која ће нам заједно са овом теоремом бити потребна у глави VI при доказивању теореме 6.1.

У глави III бавићемо се упоређивањем збирљивости $G_\theta^\varkappa$ за разне вредности $\varkappa$. Наиме, ако функције $A(x)$ и $G_\theta^\varkappa(x)$ задовољавају извесне услове типа „O“ или „o“, онда и функција $G_\theta^r(x)$ $(0 < r < \varkappa)$ задовољава један такав услов о чему говори теорема 3.1, која је доказана под једном доста специјалном претпоставком.

У глави IV доказаћемо лему 4.1 у којој се из $A(x) \to A(G_\theta^\varkappa)$, $x \to \infty$, а уз претпоставку $A(t) = O(1)$, закључује да је $A(x^b)$ $(b = (1-\theta)^{-1})$ збирљиво ка A поступком $\bar{G}_\theta^\varkappa$ чије је језгро Wiener-ово. Ову лему користићемо у глави V при доказивању инверзне теореме поступка $G_\theta^\varkappa$. Користећи ову лему на основу Wiener-ове теореме доказаћемо теорему инклузије 4.1 која у ствари није теорема праве инклузије због учињене претпоставке о функцији $A(t)$ $(A(t) = O(1))$.

У глави V бавићемо се питањем инверзије поступка $G_\theta^\varkappa$. Наиме, из чињенице да $G_\theta^\varkappa(x) \to A$, $x \to \infty$, а уз претпоставку да функција $A(t)$ задовољава услов конвергенције

$$\liminf_{t\to\infty} \min_{t \leqq \tau \leqq t+\varepsilon t^{\theta}} \{A(\tau) - A(t)\} \geqslant -w(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0 \tag{0.3}$$

следи

$$A(t) \to A, \quad t \to \infty.$$

Овај доказ изведен је у три етапе. У првој етапи (теорема 5.2) доказује се да из услова

$$\min_{t \leqq \tau \leqq T} \{A(\tau) - A(t)\} > -m, \quad \alpha(T) = \lambda \alpha(t),$$

где је

$$\alpha(t) = e^{t^{1-\theta}}, \qquad \lambda > 1$$

(који је садржан у услову (0.3)) и из $G_\theta^\varkappa(x) = O(1)$, $x \to \infty$ следи $A(t) = O(1)$, $t \to \infty$. У другој етапи, користећи лему 4.1 и на основу Wiener-ове теореме бирајући једно специјално језгро, закључујемо да

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} A(t^b)\, dt \to A, \quad x \to \infty. \tag{0.4}$$

У трећој етапи из (0.3) и (0.4) закључујемо конвергенцију функције $A(t)$.

На крају, у глави VI бавићемо се применом поступка $G_\theta^\varkappa$ на проблеме збирљивости генералисаних Fourier-ових редова. Теорема 6.1, која је изложена у овој глави, претставља под извесним специјалним условима једно пооштрење теореме В. Г. Авакумовића [2]. Доказ те теореме изведен је применом теореме 2.1, леме 2.1 и једне од Левитанових процена [9] брзине којом Riesz-ове средине генералисаног Fourier-овог реда функције $f(\Pi)$ по ортонормираним сопственим функцијама једног диференцијалног задатка са граничним условом теже својој граничној вредности.

ГЛАВА I

У овој глави доказаћемо једну теорему Abel-ове природе за поступак $G_\theta^\varkappa$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Претпоставке:* (i) $0 < \alpha \leqslant 1 - \theta$, $\beta > -1$, $\lambda > 0$. (ii) $A(t)$ *је функција ограничене варијације у сваком коначном размаку и*

$$A(t) \sim \varphi(t) = t^\beta e^{\lambda t^\alpha}, \quad t \to \infty.$$

Тврђење:

$$\frac{G_\theta^\varkappa(x)}{\varphi(x)} \to C(\lambda, \alpha), \quad x \to \infty$$

где је

$$C(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \varkappa \displaystyle\int_0^\infty (1 - e^{-\xi})^{\varkappa - 1} e^{-(1+\lambda\alpha)\xi} d\xi, & \text{за} \quad \alpha = 1 - \theta \\ 1, & \text{за} \quad \alpha < 1 - \theta. \end{cases}$$

Доказ: Ставимо

$$\frac{G_\theta^\varkappa(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varkappa}{x^\theta} \int_0^x \left(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa - 1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{\varphi(t)}{\varphi(x)} \left\{\frac{A(t)}{\varphi(t)}\right\} dt,$$

при чему на основу претпоставке (ii)

$$\frac{A(t)}{\varphi(t)} \to 1, \quad t \to \infty.$$

Према томе, тврђење ове теореме биће доказано ако докажемо да је поступак

$$\frac{\varkappa}{x^{\theta}}\int_{0}^{x}\left(1-e^{(t-x)\,x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-1} e^{(t-x)\,x^{-\theta}}\,\frac{\varphi(t)}{\varphi(x)}\,B(t)\,dt,$$

примењен на функцију $B(t) = A(t)/\varphi(t)$, регуларан у смислу теорије збирљивости, тј. да овако дефинисан поступак задовољава услове Toeplitz-Schur-ове теореме*.

Ставимо ли

$$K(t,x)=\begin{cases}\dfrac{\varkappa}{x^{\theta}}\left(1-e^{(t-x)\,x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-1} e^{(t-x)\,x^{-\theta}}\left(\dfrac{t}{x}\right)^{\beta} e^{-\lambda(x^{\alpha}-t^{\alpha})}, & \text{за } 0\leqslant t\leqslant x\\[2ex] 0\ , & \text{за}\quad t>x\end{cases}$$

(тако да је

$$\frac{G_{\theta}^{\varkappa}(x)}{\varphi(x)}=\int_{0}^{\infty}K(t,x)\,B(t)\,dt),$$

---

* Као што је познато [5], та теорема гласи: Нека је

$$F(x)=\int_{0}^{\infty}K(t,x)\;B(t)\,dt.$$

Да би из

$$B(t)\to B,\quad t\to\infty,$$

следило

$$F(x)\to BC,\quad x\to\infty$$

за сваку функцију $B(t)$ ограничене варијације, довољно је да буде

$$\int_{0}^{\infty}|K(t,x)|\,dt<H,\ \text{где } H \text{ не зависи од } x,$$

затим да

$$\int_{0}^{T}|K(t,x)|\,dt\to 0,\quad x\to\infty,\quad \text{за свако коначно } T,$$

и да

$$\int_{0}^{\infty}K(t,x)\,dt\to \mathrm{C},\quad x\to\infty\,.$$

онда, будући да је језгро $K(t,x)\geqslant 0$, треба да докажемо да

$$\int_0^T K(t,x)\,dt \to 0,\quad x\to\infty,\ \text{за свако коначно } T \tag{1.1}$$

и да

$$\int_0^\infty K(t,x)\,dt \to C,\quad x\to\infty. \tag{1.2}$$

Услов (1.1) је очевидно испуњен, па треба само да покажемо да је испуњен и услов (1.2). Учинимо ли у интегралу

$$\int_0^\infty K(t,x)\,dt = \frac{\varkappa}{x^\theta}\int_0^x \left(1-e^{(t-x)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}\left(\frac{t}{x}\right)^\beta e^{-\lambda(x^\alpha-t^\alpha)}\,dt$$

смену $x^{-\theta}(t-x)=-\xi$, добићемо

$$\int_0^\infty k(\xi,x)\,d\xi = \varkappa\int_0^{x^{1-\theta}}\left(1-e^{-\xi}\right)^{\varkappa-1} e^{-\xi}\left(1-x^{\theta-1}\xi\right)^\beta e^{-\lambda E(\xi,x)}\,d\xi \tag{1.3}$$

где је

$$E(\xi,x)=x^\alpha\{1-(1-x^{\theta-1}\xi)^\alpha\}=\alpha x^{\alpha-(1-\theta)}\xi+O\left(x^{\alpha-2(1-\theta)}\xi^2\right)\geqslant 0.$$

1) Ако је $\beta\geqslant 0$, онда је $(1-x^{\theta-1}\xi)^\beta\leqslant 1$, па је

$$\varkappa\left(1-e^{-\xi}\right)^{\varkappa-1}e^{-\xi}\left(1-x^{\theta-1}\xi\right)^\beta e^{-\lambda E(\xi,x)}\leqslant \varkappa\left(1-e^{-\xi}\right)^{\varkappa-1}e^{-\xi}\in L(0,\infty).$$

На основу познате Lebesgue-ове теореме можемо тада у интегралу (1.3) прелаз $x\to\infty$ испред знака интеграла заменити истим прелазом иза знака интеграла, па тако у том случају добивамо

$$\lim_{x\to\infty}\varkappa\int_0^{x^{1-\theta}}\left(1-e^{-\xi}\right)^{\varkappa-1}e^{-\xi}\left(1-x^{\theta-1}\xi\right)^\beta e^{-\lambda\alpha x^{\alpha-(1-\theta)}\xi+O\left(x^{\alpha-2(1-\theta)}\xi^2\right)}\,d\xi$$

$$=\begin{cases}\varkappa\displaystyle\int_0^\infty\left(1-e^{-\xi}\right)^{\varkappa-1}e^{-(1+\lambda\alpha)\xi}\,d\xi, & \text{за } \alpha=1-\theta\\[2ex] \varkappa\displaystyle\int_0^\infty\left(1-e^{-\xi}\right)^{\varkappa-1}e^{-\xi}\,d\xi=1, & \text{за } \alpha<1-\theta.\end{cases}$$

2) Ако је $-1<\beta<0$, онда ћемо ставити

$$\int_0^{\infty} k(\xi, x)\, d\xi = \varkappa \int_0^{\delta x^{1-\theta}} + \varkappa \int_{\delta x^{1-\theta}}^{x^{1-\theta}} = J_1 + J_2 \tag{1.4}$$

где је $0<\delta<1$.

Најпре ћемо проценити интеграл

$$J_2 = \varkappa \int_{\delta x^{1-\theta}}^{x^{1-\theta}} \left(1-e^{-\xi}\right)^{\varkappa-1} e^{-\xi} \left(1-x^{\theta-1}\xi\right)^{\beta} e^{-\lambda E(\xi, x)}\, d\xi.$$

Како је овде $e^{-\lambda E(\xi, x)}<1$, то је

$$J_2 < \varkappa \int_{\delta x^{1-\theta}}^{x^{1-\theta}} \left(1-e^{-\xi}\right)^{\varkappa-1} e^{-\xi} \left(1-x^{\theta-1}\xi\right)^{\beta} d\xi.$$

Извршимо ли замену $\xi = x^{1-\theta} \cdot u$ у интегралу на десној страни ове неједначине, добићемо

$$J_2 < \varkappa x^{1-\theta} \int_{\delta}^{1} \left(1-e^{-ux^{1-\theta}}\right)^{\varkappa-1} e^{-ux^{1-\theta}} (1-u)^{\beta}\, du \leqslant$$

$$< \varkappa \frac{x^{1-\theta}}{e^{\delta x^{1-\theta}}} \int_{\delta}^{1} \left(1-e^{-ux^{1-\theta}}\right)^{\varkappa-1} (1-u)^{\beta}\, du.$$

Како је за $\varkappa \geqslant 1$, $\left(1-e^{-ux^{1-\theta}}\right)^{\varkappa-1} \leqslant 1$, а за $0<\varkappa<1$

$$\left(1-e^{-ux^{1-\theta}}\right)^{\varkappa-1} \leqslant \frac{1}{\left(1-e^{-\delta x^{1-\theta}}\right)^{1-\varkappa}} \leqslant K, \quad \text{за све} \quad x \geqslant x_0 > 0,$$

то је

$$0 < J_2 < \varkappa K \frac{x^{1-\theta}}{e^{\delta x^{1-\theta}}} \int_{\delta}^{1} (1-u)^{\beta}\, du = \varkappa K \frac{(1-\delta)^{1+\beta}}{1+\beta} \frac{x^{1-\theta}}{e^{\delta x^{1-\theta}}},$$

тј.

$$J_2 = o(1), \quad x \to \infty. \tag{1.5}$$

Посматрајмо сада интеграл

$$J_1 = \varkappa \int_0^{\delta x^{1-\theta}} \left(1-e^{-\xi}\right)^{\varkappa-1} e^{-\xi} \left(1-x^{\theta-1}\xi\right)^{\beta} e^{-\lambda E(\xi, x)}\, d\xi.$$

Пошто функција $(1-x^{\theta-1}\xi)^{\beta}$ монотоно расте, то је

$$(1-x^{\theta-1}\xi)^{\beta}\leqslant(1-\delta)^{\beta}, \text{ за све } 0\leqslant\xi\leqslant\delta x^{1-\theta}$$

и с обзиром на то да је

$$e^{-\lambda E(\xi, x)}\leqslant 1$$

следи

$$\varkappa(1-e^{-\xi})^{\varkappa-1}e^{-\xi}(1-x^{\theta-1}\xi)^{\beta}e^{-\lambda E(\xi x)}\leqslant$$

$$\leqslant\varkappa(1-\delta)^{\beta}(1-e^{-\xi})^{\varkappa-1}e^{-\xi}\in L(0,\infty). \tag{1.6}$$

На основу (1.4), (1.5) и (1.6), а применом Lebesgue-ове теореме добивамо

$$\lim_{x\to\infty}\varkappa\int_0^{x^{1-\theta}}(1-e^{-\xi})^{\varkappa-1}e^{-\xi}(1-x^{\theta-1}\xi)^{\beta}e^{-\lambda\alpha x^{\alpha-(1-\theta)}\xi+O(x^{\alpha-2(1-\theta)}\xi^2)}d\xi$$

$$=\lim_{x\to\infty}\varkappa\int_0^{\delta x^{1-\theta}}(1-e^{-\xi})^{\varkappa-1}e^{-\xi}(1-x^{\theta-1}\xi)^{\beta}\cdot$$

$$\cdot e^{-\lambda\alpha x^{\alpha-(1-\theta)}\xi+O(x^{\alpha-2(1-\theta)}\xi^2)}d\xi+o(1)$$

$$=\begin{cases}\varkappa\int_0^{\infty}(1-e^{-\xi})^{\varkappa-1}e^{-(1+\lambda\alpha)\xi}d\xi, & \text{за } \alpha=1-\theta,\\ \varkappa\int_0^{\infty}(1-e^{-\xi})^{\varkappa-1}e^{-\xi}d\xi=1, & \text{за } \alpha<1-\theta,\end{cases}$$

чиме је теорема 1.1 доказана.

ГЛАВА II

У овој глави изложићемо теорему која даје једну везу између Riesz-овог и $G_{\theta}^{\varkappa}$ поступка збирљивости. Показаћемо да из чињенице, кад Riesz-ова средина једне функције тежи граничној вредности одређеном брзином, следи да је та функција збирљива поступком $G_{\theta}^{\varkappa}$ ка истој тој вредности. У ту сврху са $\sigma^k(x)$ означимо Riesz-ову средину реда k. Riesz-ов збир реда k

$$x^k\sigma^k(x)=k\int_0^x(x-t)^{k-1}A(t)\,dt,\quad(A(0)=0) \tag{2.1}$$

је непрекидна функција, ако је $k > 0$, и диференцијабилна са непрекидним изводима, ако је $k > 1$ [4].

ТЕОРЕМА 2.1. *Из*

$$\sigma^k(x) = A + o\left(x^{k(\theta-1)}\right), \quad x \to \infty$$

следи

$$G_\theta^\varkappa(x) \to A, \quad x \to \infty$$

за свако $\varkappa > k$, *где је* k *цео позитиван број.*

Доказ. Без ограничења општости можемо узети да је $A = 0$. Диференцирањем израза (2.1) добивамо

$$\frac{d}{dx}\{x^k \sigma^k(x)\} = k(k-1)\int_0^x (x-t)^{k-2} A(t)\,dt,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\{x^k \sigma^k(x)\} = k!\int_0^x A(t)\,dt,$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\{x^k \sigma^k(x)\} = k!\,A(x).$$

Из ове последње једначине имамо да је

$$A(x) = \frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{dx^k}\{x^k \sigma^k(x)\}. \tag{2.2}$$

Применимо на ову функцију поступак $G_\theta^\varkappa$:

$$G_\theta^\varkappa(x) = \frac{\varkappa}{k!\,x^\theta}\int_0^x \left(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}\,\frac{d^k}{dt^k}\{t^k \sigma^k(t)\}\,dt. \tag{2.3}$$

Парцијалном интеграцијом добивамо

$$G_\theta^\varkappa(x) = \frac{\varkappa}{k!\,x^\theta}\left(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}\,\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\{t^k \sigma^k(t)\}\Big|_0^x -$$

$$-\frac{\varkappa}{k!\,x^\theta}\int_0^x \frac{d}{dt}\left\{\left(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}\right\}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\{t^k \sigma^k(t)\}\,dt.$$

С обзиром на то да је $\varkappa > k$ и да је

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\{t^k\sigma^k(t)\} = k!\int_0^t A(\tau)\,d\tau$$

следи

$$G_\theta^\varkappa(x) = -\frac{\varkappa}{k!\,x^\theta}\int_0^x \frac{d}{dt}\{(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1}e^{(t-x)x^{-\theta}}\}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\{t^k\sigma^k(t)\}\,dt.$$

Уопште, ако десну страну (2.3) k-пута парцијално интегришемо, добићемо

$$G_\theta^\varkappa(x) = \frac{(-1)^k\varkappa}{k!\,x^\theta}\int_0^x \frac{d^k}{dt^k}\{(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1}e^{(t-x)x^{-\theta}}\}\,t^k\sigma^k(t)\,dt. \tag{2.4}$$

Ставимо

$$\sigma^k(x) = \varepsilon(x)\cdot x^{-\alpha}, \quad (0<\alpha<k)$$

где

$$\varepsilon(x)\to 0, \quad x\to\infty.$$

Уврстимо ли овај израз за $\sigma^k(x)$ у (2.4), имаћемо

$$G_\theta^\varkappa(x) = \frac{(-1)^k\varkappa}{k!\,x^\theta}\int_0^x \frac{d^k}{dt^k}\{(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1}e^{(t-x)x^{-\theta}}\}\,\varepsilon(t)\,t^{k-\alpha}\,dt$$

$$=(-1)^k\cdot I \tag{2.5}$$

Сада ћемо испитати како се понаша интеграл I кад $x\to\infty$. Узастопни изводи функције

$$z = (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1}e^{(t-x)x^{-\theta}}$$

имају облик

$$\frac{d^\nu z}{dt^\nu} = \frac{1}{x^{\nu\theta}}(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-(\nu+1)}e^{(t-x)x^{-\theta}}P_\nu(e^{(t-x)x^{-\theta}}),$$

где је P_ν полином степена ν по аргументу $e^{(t-x)x^{-\theta}}$.

Нуле овог полинома по аргументу $e^{(t-x)x^{-\theta}}$ не зависе од x, већ само од $\varkappa$, а за оне вредности $t=t_\mu^{(\nu)}$ за које се он анулира, важи асимптотска релација

$$t_\mu^{(\nu)} = x - x^\theta K_\mu^{(\nu)}(\varkappa) \sim x, \quad x\to\infty. \tag{2.6}$$

Нека полином P_k има m нула $t_\mu^{(k)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ у размаку $(0, x)$. Према томе функција $z^k(t)$ имаће сталан знак у сваком размаку

$$t_\mu^{(k)} < t < t_{\mu+1}^{(k)}, \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, m), \text{ где је } t_0^{(k)} = 0 \text{ и } t_{m+1}^{(k)} = x.$$

Ту особину функције $z^{(k)}(t)$ и асимптотску релацију

$$t_\mu^{(k)} \sim x, \quad x \to \infty, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

користићемо при процени интеграла I који ћемо написати у облику

$$I = \frac{\varkappa}{k!\, x^\theta} \left(\int_0^N + \int_N^{t_1^{(k)}} + \int_{t_1^{(k)}}^{t_2^{(k)}} + \cdots + \int_{t_{\mu-1}^{(k)}}^{t_\mu^{(k)}} + \cdots + \int_{t_{m-1}^{(k)}}^{t_m^{(k)}} + \int_{t_m^{(k)}}^{x} \right)$$

$$= H_0 + H_1 + H_2 + \cdots + H_\mu + \cdots + H_m + H_{m+1}. \tag{2.7}$$

У размаку $(0, N)$ је $|\varepsilon(t)| \leqslant C_0$, па је

$$|H_0| \leqslant \frac{C_0 \varkappa}{k!\, x^\theta} \int_0^N \left| \frac{d^k}{dt^k} \left\{ \left(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \right\} \right| t^{k-\alpha}\, dt.$$

Ако је у овом размаку $z^{(k)}(t) > 0$, онда у њему функција $z^{(k-1)}(t)$ расте, па је

$$|H_0| \leqslant \frac{C_0 \varkappa N^{k-\alpha}}{k!\, x^\theta} \int_0^N \frac{d^k}{dt^k} \left\{ \left(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \right\} dt =$$

$$\leqslant \frac{C_0 \varkappa N^{k-\alpha}}{k!\, x^\theta} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left\{ \left(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \right\} \Big|_0^N =$$

$$\leqslant \frac{C_0 \varkappa N^{k-\alpha}}{k!\, x^\theta} \frac{1}{x^{(k-1)\theta}} \left(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-k} e^{(t-x)x^{-\theta}}.$$

$$\cdot P_{k-1}\left(e^{(t-x)x^{-\theta}}\right) \Big|_0^N \to 0, \quad x \to \infty. \tag{2.8}$$

Иста ствар је и у случају кад би у том размаку било $z^{(k)}(t) < 0$, тј. кад би у њему функција $z^{(k-1)}(t)$ опадала.

Посматрајмо сада интеграл H_1. У размаку $\left(N, t_1^{(k)}\right)$ је $|\varepsilon(t)| \leqslant \delta_1(N)$. Пошто смо у интегралу H_0 узели да је $z^{(k)}(t) > 0$, то је онда и овде $z^{(k)}(t) > 0$, јер је $t_1^{(k)}$ прва по реду тачка где $z^{(k)}(t)$ мења знак, па према томе имамо да је

$$|H_1| \leqslant \frac{\varkappa}{k!\,x^{\theta}} \int\limits_N^{t_1^{(k)}} \left| \frac{d^k}{dt^k} \{(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}\} \right| \cdot |\varepsilon(t)|\, t^{k-\alpha}\, dt$$

$$\leqslant \frac{\varkappa\delta_1(N)}{k!\,x^{\theta}} x^{k-\alpha} \int\limits_N^{t_1^{(k)}} \frac{d^k}{dt^k} \{(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}\}\, dt =$$

$$\leqslant \frac{\varkappa\delta_1(N)}{k!} x^{k-\alpha-k\theta} \left\{ \left(1-e^{(t_1^{(k)}-x)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-k} e^{(t_1^{(k)}-x)x^{-\theta}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot P_{k-1}\left(e^{(t_1^{(k)}-x)x^{-\theta}}\right) - \left(1-e^{(N-x)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-k} e^{(N-x)x^{-\theta}} P_{k-1}\left(e^{(N-x)x^{-\theta}}\right) \right\} =$$

$$\leqslant C_1(\varkappa, k)\,\delta_1(N)\, x^{k-\alpha-k\theta}, \tag{2.9}$$

јер $e^{(t_1^{(k)}-x)x^{-\theta}}$ не зависи од x.

Посматрајмо сада, уопште, интеграл H_μ. У размаку $(t_{\mu-1}^{(k)}, t_\mu^{(k)})$ је $|\varepsilon(t)| \leqslant \delta_\mu(N)$, и нека је у њему $z^{(k)}(t) > 0$, тј. нека ту функција $z^{(k-1)}(t)$ расте. Тада је

$$|H_\mu| \leqslant \frac{\varkappa\,\delta_\mu(N)}{k!\,x^{\theta}} x^{k-\alpha} \int\limits_{t_{\mu-1}^{(k)}}^{t_\mu^{(k)}} \left| \frac{d^k}{dt^k} \{(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}\} \right| dt =$$

$$\leqslant \frac{\varkappa\,\delta_\mu(N)}{k!} x^{k-\alpha-k\theta} \left\{ \left(1-e^{(t_\mu^{(k)}-x)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-1} e^{(t_\mu^{(k)}-x)x^{-\theta}} \cdot \right.$$

$$\cdot P_{k-1}\left(e^{(t_\mu^{(k)}-x)x^{-\theta}}\right) -$$

$$\left. - \left(1-e^{(t_{\mu-1}^{(k)}-x)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-1} e^{(t_{\mu-1}^{(k)}-x)x^{-\theta}} P_{k-1}\left(e^{(t_{\mu-1}^{(k)}-x)x^{-\theta}}\right) \right\}.$$

Пошто $e^{(t_\mu^{(k)}-x)x^{-\theta}}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ не зависи од x, то је

$$|H_\mu| \leqslant C_\mu(\varkappa, k)\,\delta_\mu(N)\, x^{k-\alpha-k\theta}, \quad (\mu = 2, 3, \ldots, m) \tag{2.10}$$

До истог закључка долазимо и у случају ако је у размаку $(t_{\mu-1}^{(k)}, t_\mu^{(k)})$ $z^{(k)}(t) < 0$.

На крају посматрајмо интеграл H_{m+1}. У размаку $(t_m^{(k)}, x)$ је $|\varepsilon(t)| \leqslant \delta_{m+1}(N)$, а $z^{(k)}(t)$ је сталног знака, рецимо да је $z^{(k)}(t) > 0$.

У том случају функција $z^{(k-1)}(t)$ расте у овом размаку, а како је $z^{(k-1)}(x)=0$, то је она у њему негативна. Према томе је

$$|H_{m+1}|\leqslant\frac{\varkappa}{k!\,x^{\theta}}\int_{t_m^{(k)}}^{x}\left|\frac{d^k}{dt^k}\left\{(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1}e^{(t-x)x^{-\theta}}\right\}\right||\varepsilon(t)|\,t^{k-\alpha}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varkappa}{k!\,x^{\theta}}\,\delta_{m+1}(N)\,x^{k-\alpha}\int_{t_m^{(k)}}^{x}\frac{d^k}{dt^k}\{(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1}e^{(t-x)x^{-\theta}}\}\,dt=$$

$$\leqslant\frac{\varkappa\,\delta_{m+1}(N)}{k!}\,x^{k-\alpha-k\theta}\,(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-k}\,e^{(t-x)x^{-\theta}}\cdot$$

$$\cdot P_{k-1}(e^{(t-x)x^{-\theta}})\Big|_{t_m^{(k)}}^{x}=-\frac{\varkappa\,\delta_{m+1}(N)}{k!}\,x^{k-\alpha-k\theta}$$

$$\left\{\left(1-e^{\left(t_m^{(k)}-x\right)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-k}e^{\left(t_m^{(k)}-x\right)x^{-\theta}}P_{k-1}\left(e^{\left(t_m^{(k)}-x\right)x^{-\theta}}\right)\right\}.$$

Израз у великој загради не зависи од x и негативан је, јер је у посматраном размаку $z^{(k-1)}(t)<0$. На основу тога добивамо

$$|H_{m+1}|\leqslant C_{m+1}(\varkappa,k)\,\delta_{m+1}(N)\,x^{k-\alpha-k\theta}\,. \tag{2.11}$$

До истог закључка долазимо и у случају кад је $z^{(k)}(t)<0$, у размаку $(t_m^{(k)},x)$.

Како је

$$G_{\theta}^{\varkappa}(x)=(-1)^k\,I$$

и пошто можемо изабрати N тако да буде

$$\delta_{\mu}(N)\leqslant\delta(N),\quad(\mu=1,2,\ldots,m+1),$$

то с обзиром на неједначине (2.8), (2.9), (2.10) и (2.11) добивамо

$$\left|\frac{G_{\theta}^{\varkappa}(x)}{x^{k-\alpha-k\theta}}\right|\leqslant\frac{o(1)}{x^{k-\alpha-k\theta}}+C(\varkappa,k)\,\delta(N)$$

где је

$$C(\varkappa,k)=\sum_{\mu=1}^{m+1}C_{\mu}(\varkappa,k).$$

Дакле, за $k-\alpha-k\theta\geqslant 0$ је

$$\limsup_{x\to\infty}\left|\frac{G_{\theta}^{\varkappa}(x)}{x^{k-\alpha-k\theta}}\right|\leqslant C(\varkappa,k)\,\delta(N).$$

Пошто је $t_\mu^{(k)} \sim x$, $x \to \infty$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$, то можемо бирати N произвољно велико, тако да $\delta(N) \to 0$, па је

$$\lim_{x\to\infty} \sup \left| \frac{G_\xi^\times(x)}{x^{k-\alpha-k\theta}} \right| = 0,$$

а одатле за $\alpha = k(1-\theta)$ излази

$$G_\theta^\times(x) \to 0, \quad x \to \infty,$$

чиме је теорема 2.1 доказана.

Б) Посматраћемо сада случај кад позитивно k није цео број. У ту сврху претходно ћемо доказати следећу лему:

ЛЕМА 2.1 — *Из*

$$\sigma^k(x) = o(x^{-\alpha}), \quad x \to \infty$$

следи

$$\sigma^{k'}(x) = o(x^{-\alpha}), \quad x \to \infty$$

где је $0 < k \leq k'$, $0 \leq \alpha < 1 + k$.

Доказ. Дакле, треба да докажемо да из

$$x^\alpha \sigma^k(x) = o(1), \quad x \to \infty$$

следи

$$x^\alpha \sigma^{k'}(x) = o(1), \quad x \to \infty$$

за $0 < k < k'$, $0 < \alpha < 1 + k$.

У ту сврху искористићемо везу између Riesz-ових збирова различитих редова [4]

$$A^{k+l}(x) = \frac{\Gamma(k+l+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(l)} \int_0^x (x-t)^{l-1} A^k(t)\,dt,$$

где је $k > 0$ и $l > 0$. За $k + l = k'$ имамо

$$A^{k'}(x) = x^{k'} \sigma^{k'}(x) = \frac{\Gamma(k'+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k'-k)} \int_0^x (x-t)^{k'-k-1} A^k(t)\,dt,$$

тј.

$$\sigma^{k'}(x) = \frac{\Gamma(k'+1)}{x^{k'}\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(k'-k)} \int_0^x (x-t)^{k'-k-1} A^k(t)\,dt$$

односно

$$x^{\alpha}\sigma^{k'}(x)=x^{\alpha}\frac{\Gamma(k'+1)}{x^{k'}\Gamma(k+1)\Gamma(k'-k)}\int_0^x (x-t)^{k'-k-1}t^k\sigma^k(t)\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma(k'+1)}{x^{k'-\alpha}\Gamma(k+1)\Gamma(k'-k)}\int_0^x (x-t)^{k'-k-1}t^{k-\alpha}\{t^{\alpha}\sigma^k(t)\}\,dt \quad (2.12)$$

Да бисмо доказали ову лему треба само да покажемо да је поступак збирљивости (2.12), примењен на функцију $t^{\alpha}\sigma^k(t)$, регуларан. Језгро овог поступка дефинисано је са

$$K(t,x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(k'+1)}{x^{k'-\alpha}\Gamma(k+1)\Gamma(k'-k)}(x-t)^{k'-k-1}t^{k-\alpha}, & \text{за } 0\leqslant t\leqslant x\\[2ex] 0, \quad \text{за} \quad t>x. & \end{cases}$$

Пошто је $K(t,x)\geqslant 0$, то треба само да видимо да ли је задовољен други и трећи услов Toeplitz-Schur-ове теореме [5]. Други је очевидно задовољен, па остаје само да проверимо да ли је задовољен и трећи, тј. да испитамо интеграл

$$\int_0^{\infty}K(t,x)\,dt=\frac{\Gamma(k'+1)}{x^{k'-\alpha}\Gamma(k+1)\Gamma(k'-k)}\int_0^x (x-t)^{k'-k-1}t^{k-\alpha}\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma(k'+1)}{x^{k'-\alpha}\Gamma(k+1)\Gamma(k'-k)}\,J.$$

У интегралу J извршићемо замену $t=xu$, па ћемо добити

$$J=x^{k'-\alpha}\int_0^1 u^{(k-\alpha+1)-1}(1-u)^{(k'-k)-1}\,du.$$

Пошто је $k'-k>0$ и $k-\alpha+1>0$ (јер је $0<\alpha<1+k$), то је

$$J=x^{k'-\alpha}B(k-\alpha+1,\ k'-k)=\frac{x^{k'-\alpha}\Gamma(k-\alpha+1)\Gamma(k'-k)}{\Gamma(k'-\alpha+1)},$$

па је

$$\int_0^{\infty}K(t,x)\,dt=\frac{\Gamma(k'+1)\Gamma(k-\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k'-\alpha+1)}=C(k,k',\alpha),$$

чиме је лема 2.1 доказана.

ТЕОРЕМА 2.2 — *Нека позитивно k није цео број и нека је*

$$\theta' = 1 + \frac{(\theta - 1)\,k}{[k] + 1}.$$

Из

$$\sigma^k(x) = o\{x^{k(\theta-1)}\},\quad x \to \infty$$

следи

$$G_{\theta'}^{\varkappa}(x) \to 0,\quad x \to \infty,\quad \text{за све } \varkappa > [k] + 1.$$

Доказ: На основу леме 2.1 из

$$\sigma^k(x) = o\{x^{k(\theta-1)}\},\quad x \to \infty$$

следи

$$\sigma^{[k]+1}(x) = o\{x^{k(\theta-1)}\} = o\{x^{([k]+1)(\theta'-1)}\}. \tag{2.13}$$

Пошто је $[k] + 1$ цео позитиван број, то из (2.13) на основу теореме 2.1 излази

$$G_{\theta'}^{\varkappa}(x) \to 0,\quad x \to \infty,\quad \text{за све } \varkappa > [k] + 1,$$

чиме је теорема 2.2 доказана.

ГЛАВА III

Као што је познато M. Riesz [4] је доказао једну тако звану „convexity“ теорему за свој поступак збирљивости. Наиме, ако Riesz-ов збир k-тог реда $A^k(x)$ и функција $A(x)$ задовољавају извесне услове типа „O“ или „o“, онда и Riesz-ов збир $A^r(x)$ $(0 < r < k)$ задовољава један такав услов који је повезан са условима које задовољавају $A^k(x)$ и $A(x)$.

Овде ћемо доказати једну „convexity“ теорему која се односи на $G_\theta^\varkappa$ поступак збирљивости. То је доста специјална теорема јер поред услова типа „O“ односно „o“ што их задовољавају функције $G_\theta^\varkappa(x)$ и $A(x)$, увели смо и претпоставку (3.1) која ограничава општост теореме.

У следећем излагању $G_\theta^\varkappa(A; x)$ значи да је поступак $G_\theta^\varkappa$ примењен на функцију A.

ТЕОРЕМА 3.1. *Нека су $U(x)$, $V(x)$ и $W(x)$ позитивне неопадајуће функције, дефинисане за $x > 0$. Нека је $U(x) < V(x)$, а*

$$G_\theta^\varkappa(U; x) \leqslant C_0 \,|\, G_\theta^\varkappa(A; x)\,|. \tag{3.1}$$

Тада

(i) *Из*

$$-U(x) \leqslant A(x) \leqslant V(x) \tag{3.2}$$

и

$$| G_\theta^\varkappa (A; x) | \leqslant W(x) \tag{3.3}$$

следи

$$| G_\theta^r (A; x) | \leqslant C \{ V(x) \}^{1-\frac{r}{\varkappa}} \{ W(x) \}^{\frac{r}{\varkappa}}, \text{ за свако } 0 < r < \varkappa.$$

(ii) *Из*

$$-U(x) \leqslant A(x) = o \{ V(x) \} \tag{3.4}$$

и

$$| G_\theta^\varkappa (A; x) | \leqslant W(x)$$

следи

$$G_\theta^r (A; x) = o \left(\{ V(x) \}^{1-\frac{r}{\varkappa}} \{ W(x) \}^{\frac{r}{\varkappa}} \right), \text{ за свако } 0 < r < \varkappa.$$

(iii) *Из*

$$-U(x) \leqslant A(x) \leqslant V(x)$$

и

$$G_\theta^\varkappa (A; x) = o \{ W(x) \} \tag{3.5}$$

следи

$$G_\theta^r (A; x) = o \left(\{ V(x) \}^{1-\frac{r}{\varkappa}} \{ W(x) \}^{\frac{r}{\varkappa}} \right), \text{ за свако } 0 < r < \varkappa.$$

Примедба: Претпоставка $-U(x) \leqslant A(x) \leqslant V(x)$, $U(x) < V(x)$, тј. $|A(x)| \leqslant V(x)$ имплицира $|G_\theta^r (A; x)| \leqslant V(x) \cdot (1 - e^{-x^{1-\theta}})^r$, јер је

$$| G_\theta^r (A; x) | \leqslant \frac{r}{x^\theta} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} | A(t) | \, dt \leqslant$$

$$\leqslant V(x) (1 - e^{-x^{1-\theta}})^r .$$

Доказ тврђења (i) — Ставимо

$$G_\theta^r (A; x) = \frac{r}{x^\theta} \int_0^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) \, dt +$$

$$+ \frac{r}{x^\theta} \int_\xi^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) \, dt =$$

$$= J_1 + J_2 \tag{3.6}$$

и

$$1 - e^{(\xi - x) x^{-\theta}} = \Phi(x). \tag{3.7}$$

Касније ћемо функцију $\Phi(x)$ погодно одредити помоћу $V(x)$ и $W(x)$, претпостављајући да увек можемо одредити $\xi > 0$ једначином (3.7).

Интеграл J_1 написаћемо у облику

$$J_1 = \frac{r}{x^\theta} \int_0^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-\varkappa} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t)\, dt.$$

Пошто је $0 < r < \varkappa$ и $0 \leqslant t \leqslant \xi < x$, то је функција $(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-\varkappa}$ позитивна и монотоно расте, па према другој теореми о средњој вредности интеграла имамо

$$J_1 = \frac{r}{x^\theta} \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \int_u^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t)\, dt, \qquad 0 \leqslant u \leqslant \xi.$$

Овај последњи интеграл написаћемо у облику

$$J_1 = \frac{r}{\varkappa} \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \frac{\varkappa}{x^\theta} \int_u^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \{A(t) + U(t)\}\, dt -$$

$$- \frac{r}{\varkappa} \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \frac{\varkappa}{x^\theta} \int_u^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} U(t)\, dt,$$

одакле излази

$$J_1 \leqslant \frac{r}{\varkappa} \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \frac{\varkappa}{x^\theta} \int_u^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \{A(t) + U(t)\}\, dt.$$

Пошто је $A(t) + U(t) \geqslant 0$, то је

$$J_1 \leqslant \frac{r}{\varkappa} \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \frac{\varkappa}{x^\theta} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \{A(t) + U(t)\}\, dt =$$

$$\leqslant \frac{r}{\varkappa} \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \frac{\varkappa}{x^\theta} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t)\, dt +$$

$$+ \frac{r}{\varkappa} \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \frac{\varkappa}{x^\theta} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} U(t)\, dt =$$

$$\leqslant \frac{r}{\varkappa} \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} G_\theta^\varkappa(A; x) + \frac{r}{\varkappa} \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} G_\theta^\varkappa(U; x).$$

С обзиром на претпоставку (3.1) имамо

$$J_1 \leqslant \frac{r}{\varkappa} \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \,|\, G_\theta^\varkappa(A;x) \,|\, + C_0 \frac{r}{\varkappa} \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \,|\, G_\theta^\varkappa(A;x) \,| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \,|\, G_\theta^\varkappa(A;x) \,|,$$

где је $C_1 = (1 + C_0) r/\varkappa$. На основу претпоставке (3.3) следи

$$J_1 \leqslant C_1 \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} W(x). \tag{3.8}$$

Са друге стране је

$$J_1 \geqslant -\frac{r}{\varkappa} \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \frac{\varkappa}{x^\theta} \int_u^\xi (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} U(t)\, dt =$$

$$\geqslant -\frac{r}{\varkappa} \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \frac{\varkappa}{x^\theta} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} U(t)\, dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{r}{\varkappa} \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} C_0 \,|\, G_\theta^\varkappa(A;x) \,|.$$

С обзиром на (3.3) добивамо

$$J_1 \geqslant -C_2 \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} W(x), \quad (C_2 = C_0\, r/\varkappa). \tag{3.9}$$

Пошто је $C_2 < C_1$, то на основу (3.8) и (3.9) излази

$$|J_1| \leqslant C_1 \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} W(x). \tag{3.10}$$

Сада ћемо проценити интеграл J_2.

$$|J_2| = \left| \frac{r}{x^\theta} \int_\xi^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{x^\theta} \int_\xi^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \,|\, A(t) \,|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant V(x) \frac{r}{x^\theta} \int_\xi^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} dt =$$

$$\leqslant \{\Phi(x)\}^r V(x). \tag{3.11}$$

На основу (3.6), (3.10) и (3.11) добивамо

$$|G_\theta^r(A;x)| \leqslant C_1 \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} W(x) + \{\Phi(x)\}^r V(x). \tag{3.12}$$

Функцију $\Phi(x)$ одредићемо тако да буде

$$\{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} W(x) = \{\Phi(x)\}^r V(x),$$

одакле излази

$$\Phi(x) = \left\{\frac{W(x)}{V(x)}\right\}^{1/\varkappa}, \tag{3.13}$$

Уврстимо ли (3.13) у (3.12), добићемо

$$|G_\theta^r(A;x)| \leqslant C\{V(x)\}^{1-\frac{r}{\varkappa}} \{W(x)\}^{\frac{r}{\varkappa}},\ (C = 1 + C_1), \text{ за све } 0 < r < \varkappa,$$

чиме је тврђење (i) доказано.

Доказ тврђења (ii): Пошто је $A(x) = o\{V(x)\}$, то датом броју $\varepsilon > 0$ можемо одредити одговарајући број x_0 такав да буде

$$|A(x)| < \varepsilon V(x), \text{ за све } x \geqslant x_0.$$

1) Претпоставимо најпре да је $0 < x_0 < \xi$. Израз за $G_\theta^r(A;x)$ писаћемо у облику

$$G_\theta^r(A;x) = \frac{r}{x^\theta}\int_0^\xi \left(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}}\right)^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t)\,dt +$$

$$+ \frac{r}{x^\theta}\int_\xi^x \left(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}}\right)^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t)\,dt =$$

$$= J_1 + J_2. \tag{3.14}$$

Овде је као и у случају (i)

$$|J_1| \leqslant C_1 \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} W(x), \quad \left(C_1 = (1 + C_0)\frac{r}{\varkappa}\right), \tag{3.15}$$

где је

$$1 - e^{(\xi - x)x^{-\theta}} = \Phi(x),$$

а касније ћемо погодно одредити функцију $\Phi(x)$.

Сада ћемо проценити интеграл J_2. Пошто је $\xi > x_0$, то је $|A(t)| < \varepsilon V(t)$ за $t \geqslant \xi$, па је

$$|J_2| < \varepsilon V(x) \frac{r}{x^{\theta}} \int_{\xi}^{x} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} dt = \varepsilon \{\Phi(x)\}^r V(x). \tag{3.16}$$

На основу (3.14), (3.15) и (3.16) добивамо

$$|G_{\theta}^{\varkappa}(A;x)| < C_1 \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} W(x) + \varepsilon \{\Phi(x)\}^r V(x). \tag{3.17}$$

Функцију $\Phi(x)$ одредићемо тако да буде

$$\{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} W(x) = \varepsilon \{\Phi(x)\}^r V(x),$$

а одавде је

$$\Phi(x) = \left\{\frac{W(x)}{\varepsilon V(x)}\right\}^{1/\varkappa}. \tag{3.18}$$

Уврстимо ли (3.18) у (3.17) добивамо

$$|G_{\theta}^{\varkappa}(A;x)| < (1 + C_1) \varepsilon^{1-\frac{r}{\varkappa}} \{V(x)\}^{1-\frac{r}{\varkappa}} \{W(x)\}^{r/\varkappa}.$$

Пошто је $1 - \dfrac{r}{\varkappa} > 0$, а ε можемо узети произвољно мало, то је

$$G_{\theta}^{r}(A;x) = o\left(\{V(x)\}^{1-\frac{r}{\varkappa}} \{W(x)\}^{r/\varkappa}\right), \text{ за све } 0 < r < \varkappa.$$

2) Посматрајмо сада случај кад је $\xi < x_0 < x$. Израз за $G_{\theta}^{r}(A;x)$ писаћемо у облику

$$\begin{aligned} G_{\theta}^{r}(A;x) &= \frac{r}{x^{\theta}} \int_{0}^{x_0} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t)\, dt + \\ &+ \frac{r}{x^{\theta}} \int_{x_0}^{x} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t)\, dt = \\ &= J_1^* + J_2^*. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Најпре ћемо проценити интеграл J_1^*. Како је $0 \leqslant t \leqslant x_0 < x$, то је за $r \geqslant 1$

$$(1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} < 1,$$

па је

$$|J_1^*| < \frac{r}{x^{\theta}} \int_{0}^{x_0} |A(t)|\, dt = o(1), \; x \to \infty. \tag{3.20'}$$

Ако је $0<r<1$, онда функција

$$(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1}\,e^{(t-x)x^{-\theta}}$$

монотоно расте, па је за $0\leqslant t\leqslant x_0<x$

$$(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1}\,e^{(t-x)x^{-\theta}}\leqslant(1-e^{(x_0-x)x^{-\theta}})^{r-1}\,e^{(x_0-x)x^{-\theta}}\to 0,\quad x\to\infty.$$

На основу тога је

$$|J_1^*|\leqslant\frac{r}{x^\theta}(1-e^{(x_0-x)x^{-\theta}})^{r-1}\,e^{(x_0-x)x^{-\theta}}\int\limits_0^{x_0}|A(t)|\,dt=o(1),\quad x\to\infty. \tag{3.20''}$$

Сада ћемо проценити интеграл J_2^*. Како је $|A(t)|<\varepsilon V(t)$ за $t\geqslant x_0$, то је

$$|J_2^*|<\varepsilon V(x)\frac{r}{x^\theta}\int\limits_{x_0}^{x}(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1}\,e^{(t-x)x^{-\theta}}\,dt=$$

$$<\varepsilon V(x)\,(1-e^{(x_0-x)x^{-\theta}})^{r}<$$

$$<\varepsilon V(x)\,(1-e^{(\xi-x)x^{-\theta}})^{r}=\varepsilon\{\Phi(x)\}^r\,V(x),$$

тј.

$$|J_2^*|<\varepsilon^{1-r/\varkappa}\{V(x)\}^{1-r/\varkappa}\{W(x)\}^{r/\varkappa}. \tag{3.21}$$

Пошто је $1-r/\varkappa>0$, а ε можемо учинити произвољно малим, то с обзиром на (3.19), (3.20′) односно (3.20″) и (3.21) добивамо

$$G_\theta^r(A;x)=o(\{V(x)\}^{1-r/\varkappa}\{W(x)\}^{r/\varkappa}),\quad \text{за све } 0<r<\varkappa,$$

чиме је тврђење (ii) доказано.

Доказ тврђења (iii): Пошто је $G_\theta^\varkappa(A;x)=o\{W(x)\}$, то датом броју $\varepsilon>0$ можемо одредити одговарајући број x_0, такав да је

$$|G_\theta^\varkappa(A;x)|<\varepsilon W(x),\quad \text{за све } x\geqslant x_0. \tag{3.22}$$

1) Претпоставимо најпре да је $0<x_0<\xi$, и ставимо

$$G_\theta^r(A;x)=\frac{r}{x^\theta}\int\limits_0^{\xi}(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1}\,e^{(t-x)x^{-\theta}}A(t)\,dt+$$

$$+\frac{r}{x^\theta}\int\limits_{\xi}^{x}(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1}\,e^{(t-x)x^{-\theta}}A(t)\,dt=$$

$$=K_1+K_2, \tag{3.23}$$

На исти начин као и у случају (i), узимајући само $x \geqslant x_0$, а с обзиром на (3.22) добивамо

$$|K_1| \leqslant C_1 \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \cdot \varepsilon W(x). \tag{3.24}$$

И овде је

$$|K_2| \leqslant \{\Phi(x)\}^r V(x). \tag{3.25}$$

Из (3.23), (3.24) и (3.25) следи

$$|G_\theta^r(A; x)| \leqslant C_1 \{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \varepsilon W(x) + \{\Phi(x)\}^r V(x). \tag{3.26}$$

Функцију $\Phi(x)$ одредићемо тако да буде

$$\{\Phi(x)\}^{r-\varkappa} \varepsilon W(x) = \{\Phi(x)\}^r V(x),$$

одакле излази

$$\Phi(x) = \left\{\frac{\varepsilon W(x)}{V(x)}\right\}^{1/\varkappa}. \tag{3.27}$$

Уврстимо ли (3.27) у (3.26) добивамо

$$|G_\theta^r(A; x)| \leqslant (1 + C_1) \varepsilon^{r/\varkappa} \{V(x)\}^{1-r/\varkappa} \{W(x)\}^{r/\varkappa}.$$

Пошто ε можемо учинити произвољно малим, то је

$$G_\theta^r(A; x) = o(\{V(x)\}^{1-r/\varkappa} \{W(x)\}^{r/\varkappa}), \quad \text{за све } 0 < r < \varkappa.$$

2) Претпоставимо сада да је $0 < \xi < x_0$, и ставимо

$$G_\theta^r(A; x) = \frac{r}{x^\theta} \int_0^{x_0} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t)\, dt +$$

$$+ \frac{r}{x^\theta} \int_{x_0}^{x} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t)\, dt =$$

$$= K_1^* + K_2^*. \tag{3.28}$$

С обзиром на претпоставку (3.2) имамо

$$|K_2^*| \leqslant \frac{r}{x^\theta} \int_{x_0}^{x} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{r-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} |A(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant V(x)\,(1 - e^{(x_0-x)x^{-\theta}})^r <$$

$$< V(x)\,(1 - e^{(\xi-x)x^{-\theta}})^r = \{\Phi(x)\}^r V(x). \tag{3.29}$$

Као и у случају (ii) и овде је

$$K_1^* = o(1), \quad x \to \infty. \tag{3.30}$$

Из (3.27), (3.28), (3.29) и (3.30) следи

$$G_\theta^r(A; x) = o\left(\{V(x)\}^{1-r/\varkappa}\{W(x)\}^{r/\varkappa}\right), \text{ за све } 0 < r < \varkappa,$$

чиме je тврђење (iii) доказано.

ГЛАВА IV

Сада ћемо доказати једну теорему инклузије за поступак $G_\theta^\varkappa$ у односу на $\varkappa$, али с обзиром на учињену претпоставку о функцији $A(t)$, то није теорема праве инклузије. Наиме, претпоставићемо да je $A(t)=O(1)$, $t\to\infty$, па ћемо на основу Wiener-ове теорије доказати споменуту теорему.

ТЕОРЕМА 4.1. *Из* $G_\theta^\varkappa(x)\to A$, $x\to\infty$, *уз претпоставку* $A(t)=O(1)$, $t\to\infty$, *следи*

$$G_\theta^{\varkappa'}(x)\to A, \quad x\to\infty,$$

за свако позитивно $\varkappa'$ *веће или мање од* $\varkappa$.

У сврху доказа ове теореме претходно ћемо доказати једну лему коју ћемо касније користити и у глави V при доказивању теореме Tauber-ове природе. Без ограничења општости ставимо $A=0$.

ЛЕМА 4.1. *Из* $G_\theta^\varkappa(y)\to 0$, $y\to\infty$, *уз претпоставку* $A(t)=O(1)$ $t\to\infty$, *следи*

$$\bar{G}_\theta^\varkappa(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} k(y-\eta)\,A(\eta^\beta)\,d\eta=$$

$$=\beta\varkappa\int_0^y \{1-e^{-\beta(y-\eta)}\}^{\varkappa-1}e^{-\beta(y-\eta)}A(\eta^\beta)\,d\eta\to 0, \quad y\to\infty$$

где je $\beta=(1-\theta)^{-1}$, *a* $k(y-\eta)$ *je једно Wiener-ово језгро.*

Доказ леме 4.1: Језгро нашег поступка

$$G_\theta^\varkappa(x)=\frac{\varkappa}{x^\theta}\int_0^x (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1}e^{(t-x)x^{-\theta}}A(t)\,dt \tag{4.1}$$

није Wiener-ово језгро, па ћемо зато са овог поступка прећи на један нови поступак са Wiener-овим језгром и на њему ћемо изводити закључке. Ради тога у интегралу (4.1) извршићемо замену

$$t=(x^{\alpha}-u)^{\beta}=x^{\alpha\beta}\left(1-\frac{u}{x^{\alpha}}\right)^{\beta}=x^{\alpha\beta}\left\{1-\binom{\beta}{1}\frac{u}{x^{\alpha}}+O\left(\frac{u^2}{x^{2\alpha}}\right)\right\}. \tag{4.2}$$

Одавде излази

$$\frac{t-x}{x^{\theta}}=\frac{x^{\alpha\beta}-\beta u x^{\alpha(\beta-1)}+O\left(u^2 x^{\alpha(\beta-2)}\right)-x}{x^{\theta}}.$$

Нека је $\alpha\beta=1$ и $\alpha(\beta-1)=\theta$, тј. $\alpha=1-\theta$, $\beta=(1-\theta)^{-1}$, па је

$$\frac{t-x}{x^{\theta}}=-\beta u+O\left(u^2 x^{\theta-1}\right). \tag{4.3}$$

На основу (4.2) и (4.3) интеграл (4.1) узима облик

$$G_{\theta}^{\varkappa}(x)=\beta\varkappa\int_{0}^{x^{1-\theta}}\{1-e^{-\beta u+O(u^2x^{\theta-1})}\}^{\varkappa-1}e^{-\beta u+O(u^2x^{\theta-1})}\cdot$$

$$\cdot A\{(x^{1-\theta}-u)^{\beta}\}\left(1-\frac{u}{x^{1-\theta}}\right)^{\beta-1}du.$$

Ставимо ли $x^{1-\theta}=y$, онда овај израз постаје

$$G_{\theta}^{\varkappa}(y)=\beta\varkappa\int_{0}^{y}\left\{1-e^{-\beta y+O\left(\frac{u^2}{y}\right)}\right\}^{\varkappa-1}e^{-\beta u+O\left(\frac{u^2}{y}\right)}\cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\beta-1}A\{(y-u)^{\beta}\}\,du. \tag{4.4}$$

Посматрајмо сада нови поступак збирљивости

$$\tilde{G}_{\theta}^{\varkappa}(y)=\beta\varkappa\int_{0}^{y}(1-e^{-\beta u})^{\varkappa-1}e^{-\beta u}A\{(y-u)^{\beta}\}\,du. \tag{4.5}$$

Ако у овом интегралу извршимо замену $y-u=\eta$, добићемо

$$\tilde{G}_{\theta}^{\varkappa}(y)=\beta\varkappa\int_{0}^{y}\{1-e^{-\beta(y-\eta)}\}^{\varkappa-1}e^{-\beta(y-\eta)}A(\eta^{\beta})\,d\eta=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}k(y-\eta)A(\eta^{\beta})\,d\eta, \tag{4.6}$$

где је

$$k(y,\eta)=k(y-\eta)=\begin{cases}\beta\varkappa\{1-e^{-\beta(y-\eta)}\}^{\varkappa-1}e^{-\beta(y-\eta)}, & \text{за } 0\leqslant\eta\leqslant y\\ 0 & \text{иначе}\end{cases}$$

Лако је видети да је $\tilde{G}_\theta^\varkappa$ регуларан поступак збирљивости.

Да бисмо доказали тврђење ове леме треба да покажемо да

$$G_\theta^\varkappa(y)-\tilde{G}_\theta^\varkappa(y)\to 0,\quad y\to\infty.$$

Одузмемо ли (4.5) од (4.4) добивамо

$$G_\theta^\varkappa(y)-\tilde{G}_\theta^\varkappa(y)=\beta\varkappa\int_0^y\left\{\left(1-e^{-\beta u+O\left(\frac{u^2}{y}\right)}\right)^{\varkappa-1}e^{-\beta u+O\left(\frac{u^2}{y}\right)}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\beta-1}-\right.$$

$$\left.-(1-e^{-\beta u})^{\varkappa-1}e^{-\beta u}\right\}A\{(y-u)^\beta\}\,du.$$

Ради краћег писања увешћемо функцију $\Phi_y(u)$ дефинисану на следећи начин:

$$\Phi_y(u)=\begin{cases}\beta\varkappa\left\{\left(1-e^{-\beta u+O\left(\frac{u^2}{y}\right)}\right)^{\varkappa-1}e^{-\beta u+O\left(\frac{u^2}{y}\right)}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\beta-1}-\right.\\ \qquad\left.-(1-e^{-\beta u})^{\varkappa-1}e^{-\beta u}\right\}A\{(y-u)^\beta\}, & \\ & \text{за } 0\leqslant u\leqslant y,\\ 0, & \text{за } u>y,\end{cases}$$

па је

$$G_\theta^\varkappa(y)-\tilde{G}_\theta^\varkappa(y)=\int_0^\infty\Phi_y(u)\,du. \tag{4.7}$$

Према нашим уведеним заменама је

$$\frac{t-x}{x^\theta}=\frac{(x^\alpha-u)^\beta-x}{x^\theta}=\frac{(y-u)^\beta-y^\beta}{y^{\beta\theta}}=-\beta u+O\left(\frac{u^2}{y}\right).$$

Посматрајмо функцију $g(u)=y^{-\beta\theta}\{(y-u)^\beta-y^\beta\}$, за $0\leqslant u\leqslant y$, где је $\beta=(1-\theta)^{-1}$. Како је

$$g'(u)=-\beta y^{-\beta\theta}(y-u)^{\beta-1}<0$$

и

$$g''(u)=\beta(\beta-1)y^{-\beta\theta}(y-u)^{\beta-2}=\theta(1-\theta)^{-2}y^{-\beta\theta}(y-u)^{\beta-2}>0,$$

то функција $g(u)$ монотоно опада у размаку $0 \leqslant u \leqslant y$ и у њему је конвексна према доле. С обзиром на то и на чињеницу да је $g(0)=0$ и $g(y)=-y$ следи

$$g(u) \leqslant -u, \quad (0 \leqslant u \leqslant y).$$

Пошто је права $-\beta u$ тангента криве $g(u)$, то је на основу напред реченог

$$g(u) \geqslant -\beta u, \quad (0 \leqslant u \leqslant y),$$

тј.

$$-\beta u \leqslant g(u) \leqslant -u \quad (0 \leqslant u \leqslant y). \tag{4.8}$$

Ставимо

$$\psi(u, y)=\left(1-e^{-\beta u+O(u^2/y)}\right)^{\varkappa-1} e^{-\beta u+O(u^2/y)}=\left(1-e^{g(u)}\right)^{\varkappa-1} e^{g(u)}.$$

Пошто функција $(1-e^{-v})^{\varkappa-1} \cdot e^{-v}$ монотоно опада кад је $0<\varkappa<1$, то је с обзиром на (4.8)

$$\psi(u, y) \leqslant (1-e^{-\beta u})^{\varkappa-1} e^{-\beta u} \in L^1(0, \infty), \text{ за } 0<\varkappa<1. \tag{4.9}$$

Ако је $\varkappa \geqslant 1$, онда је на основу (4.8)

$$\psi(u, y) \leqslant e^{-u} \in L^1(0, \infty). \tag{4.10}$$

Како је с обзиром на учињену претпоставку о функцији $A(t)$

$$|A\{(y-u)^\beta\}| \leqslant K, \quad K=\text{const.} \tag{4.11}$$

и пошто је

$$\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\beta-1} \leqslant 1, \text{ за све } 0 \leqslant u \leqslant y, \tag{4.12}$$

јер је $\beta-1=\theta(1-\theta)^{-1}>0$, то на основу (4.9), (4.10), (4.11) и (4.12) постоји функција $F(u)$, која не зависи од y, таква да је

$$|\Phi_y(u)| \leqslant F(u) \in L^1(0, \infty). \tag{4.13}$$

Како

$$e^{y-\beta\theta\{(y-u)^\beta-y^\beta\}}=e^{-\beta u+O(u^2/y)} \to e^{-\beta u}, \quad y \to \infty,$$

то је

$$\lim_{y \to \infty} \Phi_y(u)=0 \tag{4.14}$$

у сваком коначном размаку од u, па на основу (4.13) и (4.14) можемо применити Lebesgue-ову теорему. тј. у интегралу (4.7) можемо прелаз $y \to \infty$ испред знака интеграла заменити истим прелазом иза знака интеграла и тако добивамо

$$\lim_{y\to\infty} \{G_\theta^\varkappa(y) - \tilde{G}_\theta^\varkappa(y)\} = \lim_{y\to\infty} \int_0^\infty \Phi_y(u)\,du = \int_0^\infty \lim_{y\to\infty} \Phi_y(u)\,du = 0,$$

чиме је тврђење леме 4.1 доказано.

Још остаје да покажемо да је језгро

$$k(y, \eta) = k(y-\eta) = \beta\varkappa\,\{1 - e^{-\beta(y-\eta)}\}^{\varkappa-1}\, e^{-\beta(y-\eta)}$$

поступка $\tilde{G}_\xi^\varkappa$ Wiener-ово, тј. треба да покажемо да

(i) $$k(\tau) \in L^1(-\infty, \infty) \text{ и}$$

(ii) $$k^*(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\nu}\, k(\tau)\, d\tau \neq 0, \text{ за све } -\infty < \nu < \infty.$$

Пошто је $k(y-\eta) = 0$ за $\eta > y$ и $\eta < 0$, то је $k(\tau) = 0$ за $\tau < 0$ и $\tau > y$, па је услов (i) очевидно задовољен, те остаје само да покажемо да је

$$k^*(\nu) = \beta\varkappa \int_0^y e^{i\tau\nu}\,(1-e^{-\beta\tau})^{\varkappa-1}\, e^{-\beta\tau}\, d\tau \neq 0, \text{ за све } -\infty < \nu < \infty.$$

У ту сврху у горњем интегралу извршићемо замену $1 - e^{-\beta\tau} = z$, па ћемо добити

$$k^*(\nu) = \varkappa \int_0^{1-e^{-\beta y}} z^{\varkappa-1}\,(1-z)^{-i\nu/\beta}\, dz$$

$$= \varkappa \int_0^1 z^{\varkappa-1}\,(1-z)^{(1-i\nu/\beta)-1}\, dz - \varkappa \int_{1-e^{-\beta y}}^1 z^{\varkappa-1}\,(1-z)^{-i\nu/\beta}\, dz.$$

Пошто је $\varkappa > 0$ и $Rl\,\{1 - i\nu/\beta\} > 0$, то је

$$k^*(\nu) = \varkappa\,\frac{\Gamma(\varkappa)\,\Gamma\left(1 - \dfrac{i\nu}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\varkappa + 1 - \dfrac{i\nu}{\beta}\right)} - \varkappa \int_{1-e^{-\beta y}}^1 z^{\varkappa-1}\,(1-z)^{-i\nu/\beta}\, dz \neq 0$$

за све $-\infty < \nu < \infty$, пошто први члан десне стране ове једначине не може бити једнак другом, а први је различит од нуле за све $-\infty < \nu < \infty$, јер функција $\Gamma(\varkappa + 1 - i\nu/\beta)$ нема полова.

Доказ теореме 4.1: 1) На основу Wiener-ове теореме из

$$\bar{G}_{\theta}^{\varkappa}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} k(y-\eta) A(\eta^{\beta})\, d\eta \to 0, \quad y \to \infty,$$

при чему је $k(\tau) \in W$ (Wiener-ово језгро) и $A(t) = O(1)$, следи

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_1(y-\eta) A(\eta^{\beta})\, d\eta \to 0, \quad y \to \infty, \text{ за свако } k_1(\tau) \in L^1(-\infty, \infty).$$

Специјално можемо изабрати

$$k_1(\tau) = \bar{k}_1(\tau) = \beta \varkappa' (1 - e^{-\beta\tau})^{\varkappa'-1} e^{-\beta\tau}.$$

2) Из

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_1(y-\eta) A(\eta^{\beta})\, d\eta \to 0, \quad y \to \infty$$

и

$$A(t) = O(1)$$

следи

$$\bar{G}_{\theta}^{\varkappa'}(y) \to 0, \quad y \to \infty,$$

а одатле на основу леме 4.1 излази

$$G_{\theta}^{\varkappa'}(y) \to 0, \quad y \to \infty$$

за свако позитивно $\varkappa'$ веће или мање од $\varkappa$, чиме је теорема 4.1 доказана.

ГЛАВА V

Сада ћемо доказати инверзну теорему или такозвану теорему Tauber-ове природе за поступак $G_{\theta}^{\varkappa}$ која гласи:

ТЕОРЕМА 5.1 *Из збирљивости $G_{\theta}^{\varkappa}$ функције $A(x)$, тј. из*

$$G_{\theta}^{\varkappa}(x) = \frac{\varkappa}{x^{\theta}} \int_{0}^{x} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t)\, dt \to A, \quad x \to \infty$$

и услова конвергенције

$$\lim_{t\to\infty} \inf \min_{t \leqslant \tau \leqslant t+\varepsilon t^{\theta}} \{A(\tau) - A(t)\} \geqslant -w(\varepsilon) \to 0, \; \varepsilon \to 0 \tag{5.1}$$

следи

$$A(t) \to A, \quad t \to \infty.$$

Као што је напоменуто у уводу, доказ ове теореме извешћемо у три етапе [7].

ТЕОРЕМА 5.2. *Из*

$$G_\theta^\varkappa(x)=O(1), \quad x\to\infty$$

и услова

$$\min_{t\leqslant\tau\leqslant T}\{A(\tau)-A(t)\}>-m, \quad \alpha(T)=\lambda\alpha(t) \tag{5.2}$$

(који је садржан у услову (5.1)), *где је*

$$\alpha(t)=e^{t^{1-\theta}} \quad \text{и} \quad \lambda>1$$

следи

$$A(t)=O(1), \quad t\to\infty.$$

У сврху доказа ове теореме увешћемо функцију $A^*(x)$ дефинисану са

$$A^*(x)=\max_{0\leqslant t\leqslant x}\{-A(t)\}.$$

Из конструкције ове функције видимо:

(а) $A^*(x)$ не опада,

(б) $A^*(x)\geqslant -A(x)$,

(в) $A^*(x)$ је најмања неопадајућа функција која задовољава услов (*б*), тј. која је $\geqslant -A(x)$.

За доказ теореме 5.2 биће нам потребне следеће леме:

ЛЕМА 5.1. *Из услова* (5.2) *следи*

$$A(y)-A(x)>-m-m_1(y^{1-\theta}-x^{1-\theta}), \quad \text{за свако } y\geqslant x\geqslant 0,$$

где је $m_1=m/\log\lambda$.

ЛЕМА 5.2. *Постоји број* $M>0$ *такав да је*

$$A(x)<\frac{1-(1-e^{-1})^\varkappa}{(1-e^{-1})^\varkappa}A^*(x)+M.$$

ЛЕМА 5.3. *Постоји број* $0<\delta<1$ *и број* $C>0$ *такви да је*

$$-A(x)<\delta A^*(x)+C, \quad \text{за све } x\geqslant x_0.$$

Доказ леме 5.1: Означићемо са $\beta(t)$ инверзну функцију функције $\alpha(t)$, тј.

$$\beta(t)=(\log t)^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

Ставимо ли $t=\beta(x)$ и $\tau=\beta(\zeta)$, онда, будући да су $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ монотоно растуће функције, услов (5.2) можемо написати у облику

$$\min_{x\leqq\zeta\leqq\lambda x}\{A(\beta(\zeta))-A(\beta(x))\}>-m. \tag{5.2'}$$

Нека је $y>x$ неки број такав да је

$$\lambda^n x<y\leqslant\lambda^{n+1}x. \tag{5.3}$$

Према неједначини (5.2') имамо

$$\begin{aligned}
&A\{\beta(\lambda x)\}-A\{\beta(x)\}>-m\\
&A\{\beta(\lambda^2 x)\}-A\{\beta(\lambda x)\}>-m\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A\{\beta(\lambda^n x)\}-A\{\beta(\lambda^{n-1}x)\}>-m,\\
&A\{\beta(y)\}-A\{\beta(\lambda^n x)\}>-m,
\end{aligned}$$

одакле сабирањем добивамо

$$A\{\beta(y)\}-A\{\beta(x)\}>-m-mn.$$

Пошто је на основу (5.3)

$$-n>-\frac{1}{\log\lambda}\log\frac{y}{x}$$

то је

$$A\{\beta(y)\}-A\{\beta(x)\}>-m-m_1\log\frac{y}{x},\quad \text{где је}\quad m_1=m/\log\lambda.$$

Ако у овој последњој неједначини место $\beta(y)$ напишемо y, а место $\beta(x)$ напишемо x, добићемо

$$A(y)-A(x)>-m-m_1\log\frac{\alpha(y)}{\alpha(x)}=$$

$$=-m-m_1(y^{1-\theta}-x^{1-\theta}),\quad \text{за свако}\quad y\geqslant x\geqslant 0, \tag{5.4}$$

чиме је лема 2.1 доказана.

Доказ леме 5.2: Пођимо од израза

$$G_\theta^\varkappa(x)=\varkappa\int_0^x(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1}e^{(t-x)x^{-\theta}}A(t)\frac{dt}{x^\theta}=$$

$$=\varkappa\int_0^{x-x^\theta}+\varkappa\int_{x-x^\theta}^{x}=J_1+J_2. \tag{5.5}$$

У интегралу J_1 минорираћемо $A(t)$ помоћу $A^*(t)$, тј. са $A(t) \geqslant -A^*(t)$, а у интегралу J_2 минорираћемо $A(t)$ помоћу неједначине (5.4). Пошто смо узели да је $A(0)=0$, то је $A^*(t) \geqslant 0$, па је

$$J_1 = \varkappa \int_0^{x-x^\theta} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) \frac{dt}{x^\theta} \geqslant$$

$$\geqslant -\varkappa \int_0^{x-x^\theta} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A^*(t) \frac{dt}{x^\theta} \geqslant$$

$$\geqslant -A^*(x-x^\theta)\varkappa \int_0^{x-x^\theta} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{dt}{x^\theta} =$$

$$\geqslant -A^*(x-x^\theta)\{(1-e^{-x^{1-\theta}})^\varkappa - (1-e^{-1})^\varkappa\} \geqslant$$

$$\geqslant -A^*(x-x^\theta)\{1-(1-e^{-1})^\varkappa\}. \tag{5.6}$$

Сада ћемо минорирати интеграл J_2. Пошто је у њему $t \geqslant x - x^\theta$, то је према (5.4)

$$A(t) > A(x-x^\theta) - m - m_1\{t^{1-\theta} - (x-x^\theta)^{1-\theta}\},$$

па је

$$J_2 > \{A(x-x^\theta) - m\}\varkappa \int_{x-x^\theta}^{x} (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{dt}{x^\theta} -$$

$$- m_1 \varkappa \int_{x-x^\theta}^{x} (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \{t^{1-\theta} - (x-x^\theta)^{1-\theta}\} \frac{dt}{x^\theta}.$$

Посматрајмо најпре интеграл

$$J = \int_{x-x^\theta}^{x} (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \{t^{1-\theta} - (x-x^\theta)^{1-\theta}\} \frac{dt}{x^\theta}$$

који, заменом $x^{-\theta}(t-x) = -\xi$, постаје

$$J = \int_0^1 (1-e^{-\xi})^{\varkappa-1} e^{-\xi} \{(x-x^\theta\xi)^{1-\theta} - (x-x^\theta)^{1-\theta}\} \frac{dt}{x^\theta}.$$

Пошто је

$$(x-x^{\theta}\xi)^{1-\theta}-(x-x^{\theta})^{1-\theta}=x^{1-\theta}\{(1-x^{\theta-1}\xi)^{1-\theta}-(1-x^{\theta-1})^{1-\theta}\}=$$

$$=x^{1-\theta}\,O\,(x^{\theta-1})=O\,(1)$$

то је

$$J=O\,(1)\int_0^1(1-e^{-\xi})^{\varkappa-1}e^{-\xi}\,d\xi=O\,(1),\ \text{тј. } 0<J\leqslant M_1.$$

Према томе је

$$J_2>(1-e^{-1})^{\varkappa}A\,(x-x^{\theta})-M_2, \tag{5.7}$$

где је $M_2=m\,(1-e^{-1})^{\varkappa}+m_1M_1$.

На основу (5.5), (5.6) и (5.7) добивамо

$$G_{\theta}^{\varkappa}(x)>-\{1-(1-e^{-1})^{\varkappa}\}\,A^*\,(x-x^{\theta})+(1-e^{-1})\cdot A\,(x-x^{\theta})-M_2.$$

Како је према претпоставци $|\,G_{\theta}^{\varkappa}(x)\,|\leqslant M_3$, то је

$$M_3>-\{1-(1-e^{-1})^{\varkappa}\}\,A^*\,(x-x^{\theta})+(1-e^{-1})^{\varkappa}\,A\,(x-x^{\theta})-M_2,$$

а одатле је

$$A\,(x-x^{\theta})<\frac{1-(1-e^{-1})^{\varkappa}}{(1-e^{-1})^{\varkappa}}\,A^*\,(x-x^{\theta})+M_4,$$

где је

$$M_4=\frac{M_2+M_3}{(1-e^{-1})^{\varkappa}}\,.$$

Ако место $x-x^{\theta}$ напишемо x, добивамо

$$A(x)<\frac{1-(1-e^{-1})^{\varkappa}}{(1-e^{-1})^{\varkappa}}\,A^*\,(x)+M_4, \tag{5.8}$$

чиме је лема 5.2 доказана.

Доказ леме 5.3: Нека је $0<\gamma<1$. Ставимо

$$G_{\theta}^{\varkappa}(x)=\varkappa\int_0^x(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1}\,e^{(t-x)x^{-\theta}}\,A\,(t)\frac{dt}{x^{\theta}}=$$

$$=\varkappa\int_0^{x-\gamma x^{\theta}}+\varkappa\int_{x-\gamma x^{\theta}}^{x}=K_1+K_2. \tag{5.9}$$

Интеграл K_1 мајорираћемо помоћу неједначине (5.4), а интеграл K_2 помоћу неједначине (5.8). Како је у интегралу K_1 $0 \leqslant t \leqslant x - \gamma x^\theta < x$, то је према (5.4)

$$A(t) < A(x) + m + m_1 (x^{1-\theta} - t^{1-\theta}),$$

па је

$$K_1 < \{A(x) + m\} \varkappa \int_0^{x-\gamma x^\theta} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{dt}{x^\theta} +$$

$$+ m_1 \varkappa \int_0^{x-\gamma x^\theta} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} (x^{1-\theta} - t^{1-\theta}) \frac{dt}{x^\theta}.$$

Последњи интеграл на десној страни ове неједначине, заменом $x^{-\theta}(t-x) = -\xi$, постаје

$$K = \int_\gamma^{x^{1-\theta}} (1 - e^{-\xi})^{\varkappa-1} e^{-\xi} \{x^{1-\theta} - (x - x^\theta \xi)^{1-\theta}\} d\xi.$$

Како је

$$x^{1-\theta} - (x - x^\theta \xi)^{1-\theta} = x^{1-\theta} \{1 - (1 - x^{\theta-1} \xi)^{1-\theta}\} = x^{1-\theta} O(x^{\theta-1} \xi) = \xi O(1),$$

то је

$$K = O(1) \int_\gamma^{x^{1-\theta}} (1 - e^{-\xi})^{\varkappa-1} e^{-\xi} \xi \, d\xi = O(1), \quad \text{тј.} \quad 0 < K \leqslant M_5.$$

Према томе је

$$K_1 < \{A(x) + m\} \{(1 - e^{-x^{1-\theta}})^\varkappa - (1 - e^{-\gamma})^\varkappa\} + M_5. \tag{5.10}$$

На основу неједначине (5.8) следи

$$K_2 < \frac{1 - (1 - e^{-1})^\varkappa}{(1 - e^{-1})^\varkappa} \varkappa \int_{x-\gamma x^\theta}^{x} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A^*(t) \frac{dt}{x^\theta} +$$

$$+ M_4 \varkappa \int_{x-\gamma x^\theta}^{x} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{dt}{x^\theta} \leqslant$$

$$< \frac{1 - (1 - e^{-1})^\varkappa}{(1 - e^{-1})^\varkappa} A^*(x) \varkappa \int_{x-\gamma x^\theta}^{x} (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} \cdot e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{dt}{x^\theta} +$$

$$+ M_4 (1 - e^{-\gamma})^\varkappa =$$

$$< \left(\frac{1-e^{-\Upsilon}}{1-e^{-1}}\right)^{\varkappa} \{1-(1-e^{-1})^{\varkappa}\} A^{*}(x)+M_6, \tag{5.11}$$

где је $M_6 = M_4 (1-e^{-\Upsilon})^{\varkappa}$.

Како је по претпоставци $|G_\theta^{\varkappa}(x)| \leqslant M_3$, то је на основу (5.9), (5.10) и (5.11)

$$-M_3 \leqslant G_\theta^{\varkappa}(x) < \{A(x)+m\} \{(1-e^{-x^{1-\theta}})^{\varkappa} - (1-e^{-\Upsilon})^{\varkappa}\} +$$

$$+\left(\frac{1-e^{-\Upsilon}}{1-e^{-1}}\right)^{\varkappa} \{1-(1-e^{-1})^{\varkappa}\} A^{*}(x)+M_5+M_6,$$

тј.

$$-A(x) < \left(\frac{1-e^{-\Upsilon}}{1-e^{-1}}\right)^{\varkappa} \frac{1-(1-e^{-1})^{\varkappa}}{(1-e^{-x^{1-\theta}})^{\varkappa}-(1-e^{-\Upsilon})^{\varkappa}} A^{*}(x)+m+$$

$$+\frac{M_3+M_5+M_6}{(1-e^{-x^{1-\theta}})^{\varkappa}-(1-e^{-\Upsilon})^{\varkappa}}.$$

Како је $1-e^{-\Upsilon} < 1-e^{-1}$, а пошто x можемо узети довољно велико, рецимо $x \geqslant x_0$, то је онда и

$$\frac{1-(1-e^{-1})^{\varkappa}}{(1-e^{-x^{1-\theta}})^{\varkappa}-(1-e^{-\Upsilon})^{\varkappa}} \leqslant 1, \text{ за све } x \geqslant x_0.$$

Последњи члан ове неједначине мањи је од позитивне константе M_7 за све $x \geqslant x_0$. Према томе добивамо

$$-A(x) < \delta A^{*}(x)+M_7,\ 0<\delta<1, \text{ за све } x \geqslant x_0, \tag{5.12}$$

чиме је лема 5.3 доказана.

Доказ теореме 5.2: Најпре ћемо доказати да је функција $A^{*}(x)$ ограничена. На основу њезине особине (*б*), тј. да је она најмања неопадајућа функција која је $\geqslant -A(x)$ и на основу (5.12) добивамо

$$A^{*}(x) \leqslant \delta A^{*}(x)+M_7, \text{ за све } x \geqslant x_0,$$

одакле излази

$$A^{*}(x) \leqslant \frac{M_7}{1-\delta} = M_8, \text{ за све } x \geqslant x_0, \tag{5.13}$$

тј.

$$A^{*}(x) = O(1), \quad x \to \infty.$$

Из $-A(x)\leqslant A^*(x)$ и неједначине (5.13) следи

$$A(x)\geqslant -M_8,\ \text{за све}\ x\geqslant x_0, \tag{5.14}$$

а на основу неједначина (5.8) и (5.13) следи

$$A(x)\leqslant M_8\frac{1-(1-e^{-1})^{\varkappa}}{(1-e^{-1})^{\varkappa}}+M_4=M_9. \tag{5.15}$$

Из (5.14) и (5.15) закључујемо да је

$$A(x)=O(1),\ x\to\infty, \tag{5.16}$$

чиме је теорема 5.2 доказана.

В) У теореми 5.2 резоновали смо на језгру које није Wiener-ово и доказали смо да је $A(x)=O(1),\ x\to\infty$. При доказивању теореме 5.1 користићемо лему 4.1 која тврди да из

$$G_\theta^{\varkappa}(x)\to A,\ x\to\infty\ \text{ и }\ A(x)=O(1),\ x\to\infty$$

следи

$$\bar{G}_\theta^{\varkappa}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-t)\,A(t^b)\,dt\to A,\ x\to\infty \tag{5.17}$$

где је $k(x-t)$ једно Wiener-ово језгро дефинисано са:

$$k(x-t)=\begin{cases} b\varkappa\{1-e^{-b(x-t)}\}^{\varkappa-1}e^{-b(x-t)}, & \text{за } 0\leqslant t\leqslant x\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

и $b=(1-\theta)^{-1}$.

Из (5.17) на основу Wiener-ове теореме следи

$$\int_{-\infty}^{+\infty}k_1(x-t)\,A(t^b)\,dt\to A\int_{-\infty}^{+\infty}k_1(t)\,dt,\ x\to\infty$$

за сваку функцију $k_1(t)\in L^1(-\infty,+\infty)$. Према томе можемо за $k_1(t)$ изабрати специјалну функцију из класе L^1 дефинисану на следећи начин:

$$k_1(t)=\begin{cases}1, & \text{за } 0\leqslant t\leqslant\varepsilon\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases}$$

па је

$$\int_{-\infty}^{+\infty}k_1(x-t)\,A(t^b)\,dt=\int_{x-\varepsilon}^{x}A(t^b)\,dt\to A\int_0^{\varepsilon}dt=A\varepsilon,\ x\to\infty$$

тj.

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x} A\,(t^b)\,dt \to A,\ x\to\infty,$$

или што је исто,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x}^{x+\varepsilon} A\,(t^b)\,dt \to A,\ \ x\to\infty\,.$$

C) Доказ теореме 5.1. Из

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x}^{x+\varepsilon} A\,(t^b)\,dt \to A,\ \ x\to\infty$$

и услова конвергенције (5.1)

$$\lim_{u\to\infty}\ \inf\ \min_{u\leqslant v\leqslant u+\varepsilon' u^{\theta}} \{A\,(v)-A\,(u)\}\geqslant -\omega(\varepsilon')\to 0,\ \varepsilon'\to 0 \tag{5.18}$$

следи тврђење ове теореме тj. следи

$$A\,(x)\to A,\ \ x\to\infty\,.$$

Да бисмо то доказали, пре свега треба да видимо како гласи услов конвергенције за функцију $A\,(t^b)$. Тврдимо да је за њу размак конвергенције $(t^b,\ (t+\varepsilon)^b)$. Из

$$(t+\varepsilon)^b = t^b\left\{1+\binom{b}{1}\frac{\varepsilon}{t}+\binom{b}{2}\left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^2+\dots\right\}$$

видимо да можемо учинити да буде

$$(t+\varepsilon)^b < t^b+\varepsilon'\,t^{b-1}$$

ако само ε изаберемо довољно мало. Ставимо ли $t^b=u$, онда горња неједначина добива облик

$$(t+\varepsilon)^b < u+\varepsilon' u^{\theta}.$$

Дакле, размак $(t^b,(t+\varepsilon)^b)$ садржан је у размаку $(u,\,u+\varepsilon' u^{\theta})$, па је

$$\min_{t\leqslant\tau\leqslant t+\varepsilon}\ \{A\,(\tau^b)-A\,(t^b)\}\geqslant \min_{u\leqslant v\leqslant u+\varepsilon' u^{\theta}}\ \{A\,(v)-A\,(u)\}=W\,(\varepsilon',u)=W\,(\varepsilon',t^b).$$

С обзиром на услов (5.18) имамо

$$\lim_{t\to\infty}\ \inf W(\varepsilon',t^b)\geqslant -w\,(\varepsilon')\to 0,\ \ \varepsilon\to 0$$

(јер $\varepsilon'\to 0$, кад $\varepsilon\to 0$), а то значи да је

$$W(\varepsilon',t^b)\geqslant -w\,(\varepsilon')+o\,(1),$$

па је

$$\min_{t\leqslant\tau\leqslant t+\varepsilon}\{A(\tau^b)-A(t^b)\}\geqslant -w(\varepsilon')+o(1). \tag{5.19}$$

Ставимо

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} A(\tau^b)\,d\tau=\sigma_\varepsilon(x)$$

и образујмо разлику

$$\sigma_\varepsilon(x)-A(x^b)=\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon}\{A(\tau^b)-A(x^b)\}\,d\tau.$$

На основу (5.19) имамо

$$\sigma_\varepsilon(x)-A(x^b)\geqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon}\min_{x\leqslant\tau\leqslant x+\varepsilon}\{A(\tau^b)-A(x^b)\}\,d\tau\geqslant -w(\varepsilon')+o(1),$$

па је

$$A(x^b)\leqslant\limsup\sigma_\varepsilon(x)+w(\varepsilon')\leqslant$$

$$\leqslant A+w(\varepsilon').$$

Како, с обзиром на (5.18), $w(\varepsilon')\to 0$, $\varepsilon\to 0$, то је

$$\lim_{x\to\infty}\sup A(x^b)\leqslant A. \tag{5.20}$$

Посматрајмо сада разлику

$$\sigma_\varepsilon(x)-A((x+\varepsilon)^b)=\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon}\{A(\tau^b)-A((x+\varepsilon)^b)\}\,d\tau.$$

Како је

$$\max_{x\leqslant\tau\leqslant x+\varepsilon}\{A(\tau^b)-A((x+\varepsilon)^b)\}\leqslant w(\varepsilon')+o(1),$$

то је

$$\sigma_\varepsilon(x)-A((x+\varepsilon)^b)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon}\max_{x\leqslant\tau\leqslant x+\varepsilon}\{A(\tau^b)-A((x+\varepsilon)^b)\}\,d\tau\leqslant w(\varepsilon')+o(1),$$

а одавде је

$$A((x+\varepsilon)^b)\geqslant\sigma_\varepsilon(x)-w(\varepsilon')+o(1),$$

па је

$$\lim_{x\to\infty}\inf A((x+\varepsilon)^b)\geqslant\lim_{x\to\infty}\inf\sigma_\varepsilon(x)-w(\varepsilon')=A-w(\varepsilon').$$

Пошто $w(\varepsilon')\to 0$, $\varepsilon\to 0$, то је

$$\liminf_{x\to\infty} A(x^b)\geqslant A. \tag{5.21}$$

На основу (5.20) и (5.21) следи

$$A(x^b)\to A\,,\quad x\to\infty\,,$$

тј.

$$A(x)\to A\,,\quad x\to\infty,$$

чиме је теорема 5.1 доказана.

Глава VI

1°. Свакој функцији $f(x)$, интеграбилној у размаку $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, можемо придружити један Fourier-ов ред

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x).$$

Непрекидност функције $f(x)$ у тачки $x=x_0$ није довољна за конвергенцију овог реда у тој тачки, већ су за то потребни извесни суплементарни услови који намећу прилично ограничење посматраној функцији.

2° У вези с тим намеће се питање, постоје ли поступци збирљивости који могу успешно сумирати Fourier-ове редове, јасно, постављајући функцији $f(x)$ мање ограничење него што се то захтева у случају обичне конвергенције.

Такве природе је Fejér-ова теорема, која казује да је Fourier-ов ред функције $f(x)$ збирљив (C, 1) ка суми

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

за свако x за које овај израз има смисла. Специјално, Fourier-ов ред функције $f(x)$ је збирљив (C, 1) ка суми $f(x)$ у свакој тачки x у којој је функција $f(x)$ непрекидна.

Hardy и Littlewood [6] су доказали: Ако је

$$f(x_0+h)-f(x_0)=o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{|h|}}\right),\quad h\to\pm 0\,, \tag{6.1}$$

онда је Fourier-ов ред функције $f(x)$ збирљив B у тачки x_0 ка суми $f(x_0)$, тј.

$$e^{-y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n(x_0)}{n!}y^n\to f(x_0)\,,\quad y\to\infty$$

где је

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos \nu x_0 + b_\nu \sin \nu x_0).$$

Услов (6.1) захтева од функције више него непрекидност у тачки x_0.*

Morgan [12] је доказао једну општију теорему. Полазећи од претпоставке

$$f(x_0+h)-f(x_0)=o\left\{\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{h}\right)}\right\}, \quad h\to 0$$

која је општија од претпоставке (6.1), а где позитивна функција $\varphi(x)$ за велике вредности од x задовољава извесне суплементарне услове, он је доказао да је

$$S(u;x_0)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu\leqslant u}(a_\nu \cos \nu x_0+b_\nu \sin \nu x_0)$$

збирљиво V_θ ка суми $f(x_0)$, тј. да је

$$S(u;x_0)\to f(x_0)\ (V_\theta),\quad u\to\infty.$$

3°. Може се извршити једна природна генерализација обичних Fourier-ових редова и такви редови зову се генералисани Fourier-ови редови. Теорија ових редова много се разликује од теорије обичних Fourier-ових редова.

Нека је D нека коначна област m - димензионалног Еуклидовог простора, а $\overline{D}$ граница те области. Са D^* означимо затворену област, тј. $D^*=D+\overline{D}$.

Посматрајмо диференцијални задатак са граничним условом

$$\Delta U+\lambda U=0 \quad \text{у} \quad D$$
$$U=0 \quad \text{на} \quad \overline{D}. \tag{6.2}$$

Означимо са $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ сопствене вредности проблема (6.2), а са $\Phi_1(P)$, $\Phi_2(P)$, $\Phi_3(P), \ldots$ одговарајуће сопствене функције. Нека је функција $f(\Pi)$ интеграбилна у области D^* и нека $P\in D$. Ставимо

$$a_\nu=\int_{D^*} f(\Pi)\,\Phi_\nu(\Pi)\,d\,V_\Pi,$$

* Moore [11] је доказао да постоје непрекидне функције чији Fourier-ови редови нису збирљиви B у неким тачкама.

су a_ν коефицијенти генералисаног Fourier-овог реда по сопственим функцијама $\Phi_\nu(P)$, аташираног функцији $f(\Pi)$ у тачки $\Pi = P$, тј.

$$f(P) \sim \sum a_\nu \Phi_\nu(P). \tag{6.3}$$

4°. На проблеме збирљивости генералисаних Fourier-ових редова примењени су до сада Riesz-ов и G_0^χ – поступак. Применом Riesz-овог поступка бавили су се Bochner [3], Minakshisundaram [10], Левитан [9] и Avadhani [1], а применом G_0^χ поступка В. Г. Авакумовић [2].

Ако је $f(\Pi)$ апсолутно интеграбилна функција у области D, а равна нули на $\bar{D}$, S. Minakshisundaram [10] је доказао да је у свакој тачки, где је $f(\Pi)$ непрекидно, Fourier-ов ред $f(P) \sim \Sigma a_\nu \Phi_\nu(P)$ збирљив (R, λ, k), само ако је $k > {}^3/_2$.

Ако је $f^2(\Pi)$ интеграбилна функција у области D^*, Левитан [9] и Avadhani [1] су показали да исто важи за $k \geqslant 1/2$, док за $0 \leqslant k < 1/2$ збирљивост (R, λ, k) реда $\Sigma a_\nu \Phi_\nu(P)$, као што је познато, није локална особина функције $f(\Pi)$.

5°. Нека $f(\Pi) \in L^2(D^*)$, $P \in D$, $k \geqslant 0$. Riesz-ову средину реда k развитка (6.3) означимо са

$$\sigma_k(P; x) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \sum_{\lambda_\nu \leqq x} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{x}\right)^k a_\nu \Phi_\nu(P), \tag{6.4}$$

а Riesz-ову средину развитка у обични m-струки Fourier-ов интеграл функције, равне $f(\Pi)$ за $\Pi \in D^*$, а нули иначе, означимо са

$$\sigma_k^*(P; x) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d_t \{\sigma^*(P; \sqrt{t})\}, \tag{6.5}$$

где је

$$\sigma^*(P; \sqrt{t}) = \int_{D^*} f(\Pi) \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \frac{t^{m/4}}{r^{m/2}} J_{m/2}(r\sqrt{t})\, dV_\Pi.$$

Са r смо означили растојање тачака P и Π, а са $J_p(x)$ Bessel-ову функцију реда p. Означимо са ε произвољан позитиван број, а са D_ε множину тачака области D чије отстојање од $\bar{D}$ није мање од ε. Левитан [9] је доказао следећу теорему:

Нека је $k^* = (m-1)/2$, $k > k^*$, $k = l + \delta l \geqslant 0$ цео број, $0 \leqslant \delta < 1$, Постоји константа $C = C_\varepsilon$ таква, да ако $P \in D_\varepsilon$, онда за $x \to \infty$ важе следеће процене:

1) Ако је $l \geqslant k^* + 1$, онда је $|\sigma_k(P; x) - \sigma_k^*(P; x)| < \frac{C_\varepsilon}{\sqrt{x}}$; (6.6)

2) Ако је $l \leqslant k^*$, онда је $|\sigma_k(P;x) - \sigma_k^*(P;x)| < \dfrac{C_\varepsilon}{x^{(k-k^*)/2}}$; (6.7)

3) Ако је $k^* < l < k^*+1$, онда је $|\sigma_k(P;x) - \sigma_k^*(P;x) \leqslant \dfrac{C_\varepsilon}{x^{\delta/2}}$. (6.8)

Из процена (6.6), (6.7), (6.8) и једне Bochner-ове теореме [3] следи: Ако $f(\Pi) \in L^2(D^*)$, онда је развитак функције $f(\Pi)$ по сопственим функцијама диференцијалног задатка са граничним условом (6.2) збирљив Riesz-овим срединама реда већег од $(m-1)/2$ ка суми $f(P)$ у свакој унутрашњој тачки P области D^* у којој је функција $f(\Pi)$ непрекидна. Дакле, под овим условима збирљивост Riesz-овим срединама зависи од локалних особина функције $f(\Pi)$.

Сада се поставља питање за које вредности θ и $\varkappa$, $G_\theta^\varkappa$–збирљивост реда $\Sigma\, a_\nu \Phi_\nu(P)$ зависи само од локалних особина функције $f(\Pi)$. О томе говори теорема V. G. Avakumovića [2] која је један аналогон теореме Hardy-Littlewood-a [6] о B-збирљивости обичних Fourier-ових редова. Да бисмо је краће формулисали, означимо са D једну дводимензионалну област, са $\overline{D}$ њезин руб, а са $D^* = D + \overline{D}$ затворену област. Минимално отстојање тачке P од руба $\overline{D}$ означимо са l_P. Нека је

$$g(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{f(r,\varphi) - f(0,0)\}\, d\varphi,$$

где су r и φ поларне координате тачке Π, а пол је у тачку P, тј. $f(P) = f(0,0)$. Даље нека је

$$\alpha(t) = \sqrt{t}\int_0^{\rho} g(r)\, J_1(r\sqrt{t})\, dr, \quad 0 < \rho \leqslant l_P.$$

Та теорема гласи: Претпоставке: (i) Нека је функција $f(\Pi)$ апсолутно интеграбилна у области D^*. (ii) Нека је $1/2 < \theta < 1$ и $\varkappa > 3/4 \dfrac{1}{\theta - {}^1/_2}$.
Тврђење: Да би $\Sigma\, a_\nu \Phi_\nu(P)$ било збирљиво поступком $G_\theta^\varkappa$ ка суми $f(P)$, потребно је и довољно да $\alpha(t)$ буде збирљиво поступком $G_\theta^\varkappa$ ка суми нула (локални услов у тачки $\Pi = P$).

6°. Напишимо израз (6.4) у облику интеграла

$$\sigma_\kappa(P;x) = \frac{1}{\Gamma(k+1)}\int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d_t \left\{\sum_{\lambda_\nu \leqslant t} a_\nu \Phi_\nu(P)\right\} \tag{6.9}$$

и образујмо разлику између (6.9) и (6.5)

$$\sigma_k(P;x)-\sigma_k^*(P;x)=\frac{1}{\Gamma(k+1)}\int_0^x\left(1-\frac{t}{x}\right)^k d_t\{A(P;\sqrt{t})\}=\sigma^k(x) \tag{6.10}$$

где је

$$A(P;\sqrt{t})=\sum_{\lambda_\nu\leq t}a_\nu\Phi_\nu(P)-\sigma^*(P;\sqrt{t}).$$

Посматрајмо специјалан случај $m=2$, тј. $k^*=1/2$, $k=l+$ $+\delta>1/2$. Са тако дефинисаним k процена (6.7) узима овакав облик: Ако је $l<1/2$, тј. $l=0$, $1/2<\delta<1$ (јер је $k=0+\delta>1/2$), онда је

$$\sigma^k(x)=\sigma^\delta(x)=O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}\left(\delta-\frac{1}{2}\right)}}\right)=o\left(x^{-\left\{\frac{1}{2}\left(\delta-\frac{1}{2}\right)-\varepsilon\right\}}\right) \tag{6.11}$$

за свако $\varepsilon>0$.

На основу (6.11), леме 2.1 и теореме 2.1 можемо доћи до закључка о $G_\theta^\varkappa$ — збирљивости реда $\Sigma a_\nu\Phi_\nu(P)$. На овај начин, под специјалном претпоставком да $f(\Pi)\in L^2(D^*)$, а у случају кад је $3/4<\theta<1$, долазимо до следећег пооштрења теореме В. Г. Авакумовића [2].

ТЕОРЕМА 6.1. Претпоставке: (i) $f(\Pi)\in L^2(D^*)$, (ii) $3/4<\theta<1$ и $\varkappa>1$.

Тврђење: *Да би ред $\Sigma a_\nu\Phi_\nu(P)$ био збирљив $G_\theta^\varkappa$ ка суми $f(P)$, потребно је и довољно да $\alpha(t)$ буде збирљиво $G_\theta^\varkappa$ ка суми нула.*

Доказ: Из (6.11) на основу леме 2.1 следи

$$\sigma^1(x)=o\left(x^{-\left\{\frac{1}{2}\left(\delta-\frac{1}{2}\right)-\varepsilon\right\}}\right) \tag{6.12}$$

На (6.12) применимо сада теорему 2.1 која у овом случају гласи: Из

$$\sigma^1(x)=o\left(x^{-(1-\theta)}\right)$$

следи

$$G_\theta^\varkappa(x)=o(1),\quad x\to\infty,\ \text{за свако } \varkappa>1. \tag{6.13}$$

Према томе из (6.12) следиће тврђење (6.13), ако је

$$\frac{1}{2}\left(\delta-\frac{1}{2}\right)-\varepsilon=1-\theta.$$

Како је $1/2<\delta<1$, а ε можемо учинити произвољно малим, то је $3/4<\theta<1$ и за те θ важи (6.13), тј.

$$\int_0^x (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa}\, d_t \left\{\sum_{\lambda_\nu\leq t} a_\nu \Phi_\nu(P)-\sigma^*(P;\sqrt{t})\right\}=$$

$$=\sum_{\lambda_\nu\leq x}(1-e^{(\mu_\nu-x)x^{-\theta}})^{\varkappa} a_\nu \Phi_\nu(P)-\int_0^x (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa}\, d_t\{\sigma^*(P;\sqrt{t})\}=$$

$$=o(1),\quad x\to\infty. \tag{6.14}$$

Пошто је у нашем случају $m=2$, то је

$$\sigma^*(P;\sqrt{t})=\frac{1}{2\pi}\int_{D^*} f(\Pi)\sqrt{t}\, J_1(r\sqrt{t})\frac{dF_\Pi}{r}.$$

Ставимо ли ово у (6.14), добивамо

$$\sum_{\lambda_\nu\leq x}(1-e^{(\lambda_\nu-x)x^{-\theta}})^{\varkappa} a_\nu \Phi_\nu(P)=$$

$$=\int_0^x (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa}\, d_t\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{D^*} f(\Pi)\sqrt{t}\, J_1(r\sqrt{t})\frac{dF_\Pi}{r}\right\}+o(1)=$$

$$=\int_0^x (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa}\frac{1}{2\pi}\, d_t\left\{\left(\int_{K\rho}+\int_{D^*-K\rho}\right)\left(f(\Pi)\sqrt{t}\, J_1(r\sqrt{t})\frac{dF_\Pi}{r}\right)\right\}+o(1)=$$

$$=\int_0^x (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa}\frac{1}{2\pi}\, d_t\left\{\int_{K\rho} f(\Pi)\sqrt{t}\, J_1(r\sqrt{t})\frac{dF_\Pi}{r}\right\}+$$

$$+\int_0^x (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa}\frac{1}{2\pi}\, d_t\left\{\int_{D^*-K\rho} f(\Pi)\sqrt{t}\, J_1(r\sqrt{t})\frac{dF_\Pi}{r}\right\}+o(1)=$$

$$=J_1^*+J_2^*+o(1), \tag{6.15}$$

где смо са K_ρ означили круг полупречника ρ $(0<\rho\leqslant l_P)$ са центром у тачки P.

Сада ћемо проценити интеграле J_1^* и J_2^*. У сврху процене интеграла J_1^* ставимо

$$H=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{K_\rho} f(\Pi)\,\sqrt{t}\,J_1\,(r\sqrt{t})\,\frac{d\,F_\Pi}{r}=$$

$$=f(P)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{K_\rho}\sqrt{t}\,J_1\,(r\sqrt{t})\,\frac{d\,F_\Pi}{r}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{K_\rho}\{f(\Pi)-f(P)\}\,\sqrt{t}\,J_1\,(r\sqrt{t})\frac{d\,F_\Pi}{r}=$$

$$=H_1+H_2. \tag{6.16}$$

Увођењем поларних координата (r,φ) са полом у тачки P, добивамо

$$H_1=f\,(P)\,\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\rho}J_1\,(r\sqrt{t})\,d\,(r\sqrt{t})=f\,(P)\,\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\rho\sqrt{t}}J_1\,(u)\,du.$$

На основу познате релације $J_1\,(u)=-J_0{}'\,(u)$ имамо

$$H_1=-f\,(P)\,\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\rho\sqrt{t}}J_0{}'\,(u)\,du=$$

$$=-f\,(P)\,\{J_0\,(\rho\sqrt{t})-J_0\,(0)\}=f\,(P)+o\,(1),\quad t\to\infty. \tag{6.17}$$

Даље је

$$H_2=\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\,\varphi\int\limits_0^{\rho}\{f\,(r,\varphi)-f\,(0,0)\}\,\sqrt{t}\,J_1\,(r\sqrt{t})\,dr=$$

$$=\sqrt{t}\int\limits_0^{\rho}J_1\,(r\sqrt{t})\,dr\,\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{f\,(r,\varphi)-f\,(0,0)\}\,d\varphi=$$

$$=\sqrt{t}\int\limits_0^{\rho}J_1\,(r\sqrt{t})\,g\,(r)\,dr=\alpha\,(t). \tag{6.18}$$

Из (6.16), (6.17) и (6.18) излази

$$H=f\,(P)+o\,(1)+\alpha\,(t). \tag{6.19}$$

Пошто је $G_\theta^\varkappa$ регуларан поступак збирљивости, а с обзиром на претпоставку о функцији $\alpha(t)$ и с обзиром на (6.19) добивамо

$$J_1^* = f(P) + o(1), \quad x \to \infty. \tag{6.20}$$

Сада ћемо проценити интеграл

$$J_2^* = \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^\varkappa \frac{1}{2\pi} d_t \left\{ \int_{D^* - K_\rho} f(\Pi) \sqrt{t}\, J_1(r\sqrt{t}) \frac{dF_\Pi}{r} \right\} =$$

$$= \int_{D^* - K_\rho} f(\Pi)\, dF_\Pi \frac{1}{2\pi r} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^\varkappa d_t \{\sqrt{t}\, J_1(r\sqrt{t})\} =$$

$$= - \int_{D^* - K_\rho} f(\Pi)\, h(r; x)\, dF_\Pi,$$

где је

$$h(r; x) = -\frac{1}{2\pi r} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^\varkappa d_t \{\sqrt{t}\, J_1(r\sqrt{t})\}.$$

В. Г. Авакумовић [2] је доказао да је

$$h(r; x) = O\left(x^{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)\varkappa}\right), \quad x \to \infty.$$

Одавде излази

$$h(r; x) = o(1), \quad x \to \infty, \quad \text{за све} \quad \varkappa > \{2(2\theta - 1)\}^{-1}. \tag{6.21}$$

Како је $1 > \{2(2\theta - 1)\}^{-1}$ за свако $\theta > 3/4$, то за наше посматране вредности од θ и $\varkappa$ важи (6.21), па је према томе

$$J_2^* = o(1), \quad x \to \infty. \tag{6.22}$$

На основу (6.15), (6.20) и (6.22) излази

$$\sum_{\lambda_\nu \leq x} (1 - e^{(\lambda_\nu - x)x^{-\theta}})^\varkappa a_\nu \Phi_\nu(P) = f(P) + o(1), \quad x \to \infty,$$

чиме је теорема 6.1 доказана.

Упоређујући ову теорему са теоремом В. Г. Авакумовића [2] видимо да је у њој $\varkappa$ мање него што је у теореми В. Г. Авакумовића, јер је

$$\frac{3}{4}\,\frac{1}{\theta-1/2}>1, \quad (1/2<\theta<1),$$

али она важи само за $3/4<\theta<1$ уз претпоставку $f(\Pi)\in L^2(D^*)$, док споменута теорема В. Г. Авакумовића важи за $1/2<\theta<1$ уз општију претпоставку $f(\Pi)\in L^A(D^*)$.

(Саопштено на седници Мат. института 28-XI-56)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Avadhani T. V. – On the summability of eigenfunction expansions I, *J. Indian Math. Soc.* **XVIII**, 1 (1954), 9—18.

[2] Avakumović V. G. — Über die Eigenwerte der Schwingungsgleichung, *Math. Scand.* **4** (1956), 161—173.

[3] Bochner S. — Summation of multiple Fourier series by spherical means, *Trans. American Math. Soc.* **40** (1936), 175—207.

[4] Chandrasekharan K. — Minakshisundaram S. — Typical means Bombay 1952.

[5] Hardy G. H. — Divergent Series, Oxford at the Clarendon Press, 1949.

[6] Hardy and Littlewood — Some new convergence criteria for Fourier series, *Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa* (2) **3** (1934), 43–62.

[7] Карамата Ј. — О једном општем О-инверсном ставу, *Рад Југ. академије*, **261** (81), Загреб 1938.

[8] Knopp K. — Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen, IV Auflage, Berlin und Heidelberg, Springer-Verlag, 1947.

[9] Левитан Б. М. — О разложении по собственным функциям оператора Лапласа, *Доклады Академии наук СССР*, **XC** № 2 (1953), 133—135.

[10] Minakshisundaram S. — On expansion in eigenfunctions of boundary value problems III, *J. Indian Math. Soc.* **6** (1942), 153—167.

[11] Moore C. N. — On the application of Borel' s method to the summation of Fourier series, *Proc. Nat. Acad. Sc.* **11** (1925), 284—287.

[12] Morgan G. W. — On the new convergence criteria for Fourier series of Hardy and Littlewood, *Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa* (2) **4** (1935), 373—382.

[13] Valiron G. — Remarques sur la sommation des séries divergentes par les méthodes de M. Borel, *Rendic. Circ. Mat. Palermo*, 42 (1917), 267—

SUR UN PROCEDÉ DE SOMMATION DES SÈRIES DIVERGENTES

par

M. MARAVIĆ

Ce travail est consacré à l'étude d'un procédé de sommation ($G_\theta^\varkappa$) defini par (0.1) respectivement par (0.2). Ce procédé, ainsi que celui de Valiron, représente une suite continue de procédés essentiellement différents entre eux, de sorte qu'à chaque θ correspond un autre intervalle de convergence de la forme $(t, T) \equiv (t, t+\varepsilon)$, quelque soit le nombre positif $\varkappa$. Le procédé s'applique avec succès aux problèmes de sommation des séries de Fourier généralisées.

Entre de nombreuses questions que soulève ce procédé, l'auteur s'est borné aux questions suivantes:

Dans le premier chapitre il démontre un théorème de nature abelienne, c'est-à-dire un théorème donnant les propriétés limites du procédé de sommation lorsqu'on connaît les propriétés correspondants de la fonction.

Dans le deuxième chapitre on démontre le théoreme 2.1 dans lequel, du fait que la moyenne de Riesz $\sigma^k(x)$ tend vers la valeur limite avec une vitesse déterminée, on conclut que $G_\theta^\varkappa(x)$ tend vers cette même valeur limite pour tous les $\varkappa > k$, k étant un entier, positif.

Dans le troisième chapitre est donné un théorème ayant trait à la comparaison des sommabilités $G_\theta^\varkappa$ pour les différentes valeurs de $\varkappa$. La démonstration du théorème est donnée sous une supposition spéciale (3.1) qui limite sa généralité.

Dans le quatrième chapitre on donne le lemme 4.1 permettant de conclure que, de $A(x) \to A(G_\theta^\varkappa)$, $x \to \infty$, en supposant $A(t) = O(1)$, $A(x^b)(b = (1-\theta)^{-1})$ est sommable vers A par le procédé $G_\theta^\varkappa$ dont le noyau est celui de Wiener. A l'aide de ce lemme, s'appuyant sur le théorème de Wiener, on démontre le théorème d'inclusion 4.1, qui en réalité, n'est pas le théorème d'inclusion proprement dite à cause de la supposition faite sur la fonction $A(t)$.

Dans le cinquième chapitre on a traité le problème d'inversion du procédé $G_\theta^\varkappa$. On y démontre que de $G_\theta^\varkappa(x) \to A$ $x \to \infty$ et de la convergence (5.1) suit $A(t) \to A, t \to \infty$.

Enfin, dans le sixième chapitre on donne une application du procédé $G_\theta^\varkappa$ aux problèmes de sommation des séries de Fourier généralisées. On la trouve au théorème 6.1 qui est demontré en appliquant le théorème 2.1, le lemme 2. 1 et une évalaution de Levitan (6.7).

Зборник радова С.А.Н. LV — Математички институт књ. 6, 1957
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LV
Institut Mathématique № 6. 1957

ЧАСЛАВ В. СТАНОЈЕВИЋ

О ИНТЕГРАБИЛНОСТИ НЕКИХ ТРИГОНОМЕТРИСКИХ РЕДОВА

1. Јунг и Колмогоров (в. [1], стр. 108—111) испитивали су услове под којима ред

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \tag{1.1}$$

претставља Фуријеов ред.

Јунг је доказао да ред (1.1) претставља Фуријеов ред ако је низ $\{a_\nu\}$ ограничене варијације, $a_\nu = o(1)$, и ако је

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta a_\nu| \lg(\nu+1) < \infty . \tag{1.2}$$

Од Колмогорова потиче став: *Ако је низ* $\{a_\nu\}$ *квази-конвексан* $a_\nu = o(1)$, *тада је ред* (1.1) *Фуријеов ред.*

2. Оба та става садржи

СТАВ 1. *Нека је*

$$a_\nu = \alpha_\nu \beta_\nu = o(1),$$

где је $\{\alpha_\nu\}$ *ограничене варијације,* $\{\beta_\nu\}$ *квази-конвексан и* $|\beta_\nu| \leq M$.

Ако је

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta_\nu \Delta \alpha_\nu| \lg(\nu+1) < \infty \tag{2.1}$$

тада је ред (1.1) *Фуријеов ред.*

Доказ. Из

$$s_n(x) = \frac{1}{2} \alpha_0 \beta_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \beta_\nu \cos \nu x$$

применом Абелове трансформације, добићемо

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_\nu \Delta \alpha_\nu D_\nu(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{\nu+1} \Delta \beta_\nu D_\nu(x) + a_n D_n(x)$$

где је

$$D_\nu(x) = \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

Дирихлеово језгро.

Поновном применом Абелове трансформације, налазимо да је

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{\nu+1} \Delta \beta_\nu D_\nu(x) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1) \{\alpha_{\nu+1} \Delta^2 \beta_\nu + \Delta \alpha_{\nu+1} \Delta \beta_{\nu+1}\} K_\nu(x) + (n-1) \alpha_n \Delta \beta_{n-1} K_{n-1}(x)$$

где је

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\nu+1} \left(\frac{\sin(\nu+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

Фејерово језгро. Стога је

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_\nu \Delta \alpha_\nu D_\nu(x) + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1) \{\alpha_{\nu+1} \Delta^2 \beta_\nu + \Delta \alpha_{\nu+1} \Delta \beta_{\nu+1}\} K_\nu(x) + \\ &+ a_n D_n(x) + (n-1) \alpha_n \Delta \beta_{n-1} K_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ако је $x \neq 0$, последња два члана на десној страни у (2.2) теже 0, када $n \to \infty$, и стога

$$s_n(x) \to f(x),$$

где је

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \Delta \alpha_\nu D_\nu(x) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) \{\alpha_{\nu+1} \Delta^2 \beta_\nu + \Delta \alpha_{\nu+1} \Delta \beta_{\nu+1}\} K_\nu(x)$$

Интегришући у размаку $(0, \pi)$, лако се налази да је

$$\int_0^{\pi} |f(x)|\, dx \leqslant M \sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta_\nu \Delta \alpha_\nu| \lg(\nu+1) +$$

$$+ N \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) \{|\alpha_{\nu+1} \Delta^2 \beta_\nu| + |\Delta \alpha_{\nu+1} \Delta \beta_{+1}|\} = S_1 + S_2.$$

Збир S_1 је коначан према (2.1).

Пошто је низ $\{\beta_\nu\}$ квази-конвексан и $\beta_\nu = O(1)$, имамо

$$(\nu+1) |\Delta \beta_{\nu+1}| = o(1) = O(1)$$

а како је $\{\alpha_\nu\}$ ограничене варијације, то је

$$S_2 \leqslant N' \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) |\Delta^2 \beta_\nu| + N'' \sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta \alpha_\nu|$$

Према томе S_2 је такође коначно.

Применом става: *Ако један тригонометриски ред конвергира, изузев у једној тачки, ка једној интеграбилној функцији, тада је тај ред Фуријеов ред*, добивамо да је ред (1.1) са $a_\nu = \alpha_\nu \beta_\nu$, Фуријеов ред.

За $\alpha_\nu \equiv 1$ став 1 своди се на став Колмогорова, а за $\beta_\nu \equiv 1$. добија се Јунгов резултат.

3. Незнатном изменом услова за $\{\alpha_\nu\}$ и $\{\beta_\nu\}$, добиће се

СТАВ 2: *Нека је*

$$\frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \cos \nu x$$

Фуријеов ред једне $L(0, \pi)$ — интеграбилне функције $\varphi(x)$. Ако је низ $\{\beta_\nu\}$ квази-конвексан и $\beta_\nu = o(1)$ тада је ред (1.1) са $a_\nu = \alpha_\nu \beta_\nu$, Фуријеов ред.

Доказ. Двоструком применом Абелове трансформације добићемо

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1) \Delta^2 \beta_\nu \tau_\nu(x) + (n-1) \Delta \beta_n \tau_{n-1}(x) + \beta_n \varphi_n(x) \tag{3.1}$$

где је

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \cos \nu x$$

$$\tau_\nu(x) = \frac{1}{\nu+1} \sum_{k=0}^{\nu} \varphi_k(x)$$

Ако је $x \neq 0$, последња два члана у (3,1) теже ка 0, када $n \to \infty$, и стога $s_n(x)$ тежи ка

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\, \Delta^2 \beta_\nu \tau_\nu(x)$$

када $n \to \infty$.

Интегришући у размаку $(0, \pi)$, добићемо

$$\int_0^\pi |f(x)|\, dx \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\, |\Delta^2 \beta_\nu| \int_0^\pi |\tau_\nu(x)|\, dx. \tag{3.2}$$

Према Хардију и Литлвуду [2] имамо

$$\int_0^\pi |\tau_\nu(x)|\, dx \leq M \int_0^\pi |\varphi(x)|\, dx$$

а из (3.2) добијамо

$$\int_0^\pi |f(x)|\, dx \leq M \int_0^\pi |\varphi(x)|\, dx \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\, |\Delta^2 \beta_\nu|$$

Стога је функција $f(x)$ интеграбилна.

(Саопштено на седници Мат. института 29-II-1956)

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Zygmund — Trigonometrical Series, 2 ed., Chelsea, New York, (1952).

[2] G. Hardy and J. E. Littlewood — A Maximal Theorem with Function-theoretical Applications. *Acta Math.* **54**, (1930), 81–116.

ON INTEGRABILITY OF CERTAIN TRIGONOMETRICAL SERIES

by

Č. V. STANOJEVIĆ

1. The problem of

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \tag{1.1}$$

being a Fourier series, was considered by Young and Kolmogorov [1].

Young proved *that the series* (1.1) *is a Fourier series, if* $\{a_\nu\}$ *is of bounded variation,* $a_\nu = o(1)$, *and if*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta a_\nu| \lg (\nu+1) < \infty \tag{1.2}$$

The following theorem is due to Kolmogorov: *If* $\{a_\nu\}$ *is quasi-convex and* $a_\nu = o(1)$, *then the series* (1.1) *is a Fourier series.*

2. Both of these theorems are contained in the following theorems.

THEOREM 1. *Let*

$$a_\nu = \alpha_\nu \beta_\nu = o(1)$$

where $\{\alpha_\nu\}$ *is of bounded variation,* $\{\beta_\nu\}$ *quasi-convex, and* $|\beta_\nu| \leqslant M$.

If

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta_\nu \Delta \alpha_\nu| \lg (\nu+1) < \infty \tag{2.1}$$

then the series (1.1) *is a Fourier series.*

THEOREM 2. *Let*

$$\frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \cos \nu x$$

be a Fourier series of a $L(0, \pi)$ — *integrable function* $\varphi(x)$. *If* $\{\beta_\nu\}$ *is quasi-convex, and* $\beta_\nu = o(1)$, *then the series* (1.1), *with* $a_\nu = \alpha_\nu \beta_\nu$, *is a Fourier series.*

Зборник радова С.А.Н. LV — Математички институт књ. 6, 1957
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LV
Institut Mathématique № 6, 1957

АНТОН БИЛИМОВИЋ

О ГЕОМЕТРИСКИМ ПАРАМЕТРИМА

У другој половини деветнаестог века појмови променљиве величине и функције почели су улазити у програме средњих школа. У двадесетом веку у напредним земљама били су уведени чак и елементи више математике. Примена разноликих функционалних веза добила је широку популарност и дала значајне резултате у развитку не само математичког већ и општег људског знања. У средњу школу та примена је била уведена, а остаје и сада углавном у области анализе, у области квантитативних односа.

Насупрот анализи, која је почела да оперише не само сталним већ и променљивим величинама, елементарна геометрија се конзервативно придржавала старог, готово Еуклидовог, начина излагања средњошколског материјала. Еуклидова особина геометриских облика, њихова непроменљивост, чак њихова смрзнутост, остаје и даље на снази. Основе аналитичке геометрије, унесене заједно са основама више математике, нису утицале на карактер излагања и материјал елементарне геометрије. Логичка структура геометрије је доминирала у излагању тог предмета и остављала у сенци друге важне особине елементарне геометрије као школског материјала за развијање дубљих просторних претстава везаних са променљивошћу тих облика по форми, величини и положају. Еуклидова логичка основа излагања елементарне геометрије, сама по себи од капиталне важности, не само што није развијала просторне претставе, већ их је, обратно, сужавала и ограничавала природну људску фантазију у области тих претстава. Услед те логичке доминације у елементарну геометрију није ушла идеја променљивости, а нарочито недостаје чисто геометриска променљивост, не променљивост оних величина које сачињавају елементе неког геометриског објекта, рецимо, страна и углова троугла, већ променљивост самог облика у целини, троугла као облика који има своју форму, величину и положај и мења те особине било услед трансформације било услед неких других разлога.

Савремена виша геометрија са уопштеним просторима различитих особина бави се променљивошћу геометриских објеката у врло широкој и апстрактној форми, али те нове области нису још утицале на излагање и материјал елементарне геометрије.

При излагању елементарне геометрије узети у обзир нова достигнућа савремене математике врло је тежак задатак. Али баш на томе задатку сад се много ради. Тај задатак је нарочито тежак због тога што уношење нових идеја може оштетити толико важну, у васпитном односу, логичку структуру геометрије. Неки успех у тој области је ствар далеке будућности, али нека модификација излагања важних истина елементарне геометрије изводљива је и у данашње време, при садашњем броју часова математике и при садашњем положају тог предмета у савременом систему средњошколске наставе.

Први корак у том правцу било би оцењивање геометриског објекта у целини анализом оних битних геометриских особина које припадају свима геометриским објектима. То се оцењивање врши помоћу проучавања форме, величине и положаја и увођења нарочитих параметара: параметара форме, параметара величине и параметара положаја.[1] У савременој математичкој литератури појављују се чак нарочите гране геометрије: геометрија форме (geometry of form), геометрија величине (geometry of size) и геометрија положаја (geometry of position).[2]

Циљ овог чланка је показати у којој се форми може увести у наставу тај нови елемент проучавања геометриских објеката у целини.

Интуитивно увођење појмова форме, величине и положаја неког геометриског објекта не претставља тешкоће. Два геометриска објекта су исте форме, ако је један објект геометриски сличан другом. Два геометриска објекта исте форме су и исте величине, ако је растојање између две тачке првог објекта једнако растојању две одговарајуће тачке другог објекта и, најзад, два геометриска објекта су истог положаја, ако се све тачке првог објекта поклапају са одговарајућим тачкама другог објекта исте форме и исте величине.

За бројно оцењивање форме, величине и положаја уводе се било апстрактни било именовани бројеви, који се зову параметри. Означимо са f број параметара форме, са g број параметара величине и са p број параметара положаја неког геометриског објекта и проучимо на примерима те параметре. То проучавање се врши у току целокупне наставе како планиметрије тако и стереометрије.

Пре свега наведимо примере геометриских објеката без параметара форме ($f = 0$). За те објекте сам назив објекта потпуно одређује његову форму.

[1]) В. нашу књигу — Геометриске основе рачуна са диадама. I. Диада и афинор. Београд. 1930.

[2]) W. Reeve and C. Tuites — Practical Mathematics Refresher. 1955.

Права, полуправа, две паралелне праве, прав угао, круг, квадрат односно уопште правилан многоугао одређеног броја углова, коцка, уопште правилан полиједар одређеног броја страна, лопта.

Примери геометриских облика са једним параметром форме ($f = 1$).

Правоугаоник. Параметар форме је апстрактан број — однос једне димензије према другој ($a : b$).

Ромб. За параметар форме можемо узети, рецимо, однос дијагонала ромба, — апстрактан број.

Угао. Параметар форме овог геометриског облика је апстрактан број: однос одговарајућег лука према полупречнику ($\alpha = s : r$).

Елипса. Параметар форме је бројни ексцентрицитет елипсе, рецимо, $e = c : a$.

Учинимо важне примедбе.

Природно је оцењивати форму апстрактним бројем — неименованим бројем. Али иста форма може бити оцењена и именованим бројем са именовањем *sui generis*, изабраним за дату форму. И на тај начин, како изгледа, своди се оцена форме на оцену величине, што, у суштини није природно. Узмимо угао, као геометриски облик од две полуправе са заједничким почетком и наведеном облашћу равни на коју се односи тај геометриски облик. Јасно је да је сваки угао геометриски облик који има само одређену форму и, ако смо у стању да одредимо ту његову форму, угао је потпуно одређен. Апстрактни број $\alpha = s : r$ потпуно одређује угао и сваки други начин одређивања угла увек може бити сведен на одређивање угла апстрактним бројем, бројем без икаквог именовања. Изрази: „угао π“, „угао 1/3“, „угао 15“ потпуно одређују углове. На жалост, историски, ту се умешало именовање „радијан“ и може изгледати да је параметар форме угла именовани број мерен у радијанима. Израз „у радијанима“ и сам „радијан“ треба тумачити не као именовање, него као навођење начина којим се мери угао апстрактним бројем. Тако и оцењивање форме правоугаоника можемо вршити „у квадратима“, па чак и „у опекама“ и за јединицу узимати „квадрат“ односно „опеку“ и тада параметру форме правоугаоника $h : a$, неименованом броју, одговарао би именовани број „h квадрата“ при $a = 1$ или „k стандардних опека“ наслаганих једна на другу. Тај последњи начин описивања форме правоугаоника можда би био и најјаснији и најприроднији за једног примитивног зидара.

Како би изгледало тумачење једначине

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{3!} \alpha^3 + \dots$$

кад бисмо под α подразумевали именовани број чије именовање треба дизати на степене. Мерење угла степенима или градима и њиховим делима било би мерење нарочито изабраном јединицом, јединицом *sui generis*. Ово мерење има своје оправдање у погодности у практичкој примени, а не у теориском оперисању углом као геометриским обликом. Са савременог математичког гледишта сва таква мерења форме носе јасно вештачки карактер.

У општем случају за оцењивање форме једног истог геометриског објекта помоћу апстрактног броја постоји више начина. Узмимо, рецимо, правоугаоник. Сем односа страна $a:b=k_1$ форму истог правоугаоника можемо оценити и односом једне стране и дијагонале, рецимо, $a:d=k_2$, али између k_1 и k_2 треба да постоји веза; у овом случају је $k_2^2(1+k_1^2)=k_1^2$. Ако за одређивање форме правоугаоника узмемо угао α између дијагонале и стране a, између два параметра форме α и k_1 правоугаоника постоји веза: $k_1=\operatorname{cotg}\alpha$, а између α и k_2 ова: $k_2=\cos\alpha$.

Како смо навели, форма елипсе може бити одређена бројним ексцентрицитетом $e=c:a$, где је $c^2=a^2-b^2$, а a и b полуосе елипсе. Назовимо тај ексцентрицитет *основним*. За одређивање форме елипсе постоје још и друге величине[1], наиме још два ексцентрицитета: e' и e'' и три „спљоштења" α, α', α'' према дефиницијама:

$$e'^2=\frac{a^2-b^2}{b^2},\quad e''^2=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\quad \alpha=\frac{a-b}{a},\quad \alpha'=\frac{a-b}{b},\quad \alpha''=\frac{a-b}{a+b}.$$

Помоћу сваке од тих величина могу бити изражене све остале; напр. у зависности од основног ексцентрицитета e имамо:

$$e'^2=\frac{e^2}{1-e^2},\quad e''^2=\frac{e^2}{2-e^2},\quad \alpha=1-\sqrt{1-e^2},\quad \alpha'=1:(1-e^2)^{1/2}-1=$$

$$=[\sqrt{1-e^2}-1+e^2]:(1-e^2),\qquad \alpha''=(1-\sqrt{1-e^2})^2:e^2.$$

Као примери просторних објеката са једним параметром форме могу послужити: правоугли паралелепипед са квадратном основом, ваљак, купа.

Примери геометриских облика са $f=2$.

Троугао. Параметри форме — два угла или односи две стране према трећој. — Паралелограм. Параметри форме — два угла једне стране са дијагоналом и са другом страном или односи једне стране и дијагонале према другој страни. — Правоугли паралелепипед. Параметри форме — односи две димензије према трећој. — Елипсоид. Параметри — односи две полуосе према трећој.

[1] R. König und K. Weise. Mathematische Grundlagen des höheren Geodesie und Kartographie. I. B. 1951. S. 4.

Примери геометриских објеката за $f=1$ и $f=2$ у довољној мери разјашњавају суштину појма параметра форме и према томе навођење примера форме за $f=3, 4, 5, \ldots, n$ како у равни тако и у простору не претставља нарочите тешкоће у смислу разумевања питања, али решавање тих питања захтева извесну геометриску инвентивност за чије развијање баш ови примери претстављају погодан материјал.

Пређимо сад на појам параметра величине. Пре свега треба нагласити да је потребно разликовати појам параметра величине од појма величине уопште. И параметри форме су величине, апстрактне или специфичног именовања, или је њихова улога различита од улоге параметара величине.

Постоје два случаја. 1. Геометриски облик је у потпуности одређен само параметрима форме па чак и без таквих параметара, само називом. Такав геометриски облик нема параметра величине ($g=1$). Примери: права, полуправа, прав угао ($f=0$); произвољан угао ($f=0$) има своју такозвану *величину угла*, али та величина у суштини је природе параметра форме, а не параметра величине; косоугли триједар има три параметра форме ($f=3$), три угла, али нема параметра величине, ако за такав параметар не узимамо *глобални параметар форме* — однос површине одговарајућег сферног троугла закљученог у триједру и површине целокупне сфере. Косоугли триједар са једним правим углом има два параметра форме, са два права угла — један параметар форме и ортогонални триједар — ниједан. Ниједан од тих триједара нема параметра величине. Њихов глобални параметар форме је функција основних параметара форме.

2. Сами параметри форме не одређују геометриски облик у потпуности. Слични геометриски облици имају параметар величине и то само један ($g=1$).

За параметар величине можемо узети дужину a дужи која спаја две фиксиране тачке на геометриском облику.

За одређену вредност a_0 геометриски облик можемо сматрати као *модел* геометриског облика дате форме. Сваки други облик исте форме можемо одредити или непосредно величином a или односом $a:a_0$, апстрактним бројем, *размером* датог облика према моделу. Тај апстрактни број у овом случају такође игра улогу параметра величине.

Од параметра a може зависити нека површина S везана за геометриски облик. Та површина се изражава неким обрасцем

$$S = \lambda_1 a^2,$$

где је λ_1 коефицијент пропорционалности, апстрактни број, који зависи само од параметара форме геометриског облика. За случај запремине V имамо образац

$$V = \lambda_2 a^3,$$

где је λ_2 исто тако апстрактан број, функција параметара форме.

Ако геометриски облик нема параметара форме ($f=0$), коефицијенти λ_1 и λ_2 су аритметички бројеви. Тако например, за површину квадрата имамо $S=\lambda_1 a^2$, где је $\lambda_1=1$, а за запремину коцке $V=\lambda_2 a^3$ и $\lambda_2=1$. За сферу и лопту имамо: $S=\lambda_1 a^2$, $V=\lambda_2 a^3$, где су $\lambda_1=4\pi$ и $\lambda_2=\frac{4}{3}\pi$. За параметар величине је узет полупречник.

Ако геометриски облик има један параметар форме k_1, онда имамо

$$\lambda_1=\lambda_1(k_1), \quad \lambda_2=\lambda_2(k_1).$$

Примери: правоугаоник и квадар (правоугли паралелепипед са квадратном основом).

$$S=ab=\frac{b}{a}a^2=\lambda_1 a^2 \quad \text{са} \quad \lambda_1=b:a=k_1;$$

$$T=2a^2+4ah=2(1+2k_1)a^2=\lambda_1 a^2,$$

где су $k_1=h:a$, $\lambda_1=2(1+2k_1)=\lambda_1(k_1)$,

$$V=a^2h=k_1a^3=\lambda_2 a^3, \quad \text{где су} \quad \lambda_2=k_1=h:a.$$

Узмимо још случај облика са два параметра форме k_1 и k_2. Тада је

$$\lambda_1=\lambda_1(k_1, k), \quad \lambda_2=\lambda_2(k_1, k_2).$$

Пример. Правоугли паралелепипед са димензијама a, b, c а за $k_1=b/a$, $k_2=c/a$.

$$S=2(bc+ca+ab)=\lambda_1 a^2,$$

где је

$$\lambda_1=2(k_1k_2+k_2+k_1);$$

$$V=abc=\lambda_2 a^3,$$

где је

$$\lambda_2=k_1k_2.$$

Приметимо да за параметар величине можемо узети и величину неке површине односно величину неке запремине. Такав површински односно запремински параметар величине може бити изражен помоћу линиског параметра величине. Та веза зависи у општем случају од форме геометриског објекта и према томе од параметара форме.

Тако, например ако за површински параметар величине узмемо површину A великог круга лопте, површина S те лопте може се изразити као: $S=4A$, а запремини V одговара образац

$$V=\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{\pi}}A^{3/2}.$$

Као други пример узмимо ваљак полупречника основе R и висине h са параметром форме $k_1=h:R$. За параметар величине одредимо површину основе ваљка $A=\pi R^2$. Целокупна површина S ваљка се тада изражава са

$$S=2(1+k_1)A,$$

а запремина

$$V=\frac{k_1}{\sqrt{\pi}}A^{3/2}.$$

И сваки линиски елемент може се изразити помоћу параметра форме k_1 и површинског параметра величине A. За R и h имамо:

$$R=(A/\pi)1/2, \quad h=k_1(A/\pi)1/2.$$

Слична израчунавања се врше за случај запреминског параметра величине.

Пређимо сад на параметре положаја.

Решавање питања колико и каквих података треба да буде наведено да се одреди положај одређеног геометриског објекта, праволиниског, равног или просторног, може послужити како дубљем проучавању самих конкретних објеката, тако и уопште развитку просторних претстава.

Наведена питања одређивања и упоредног оцењивања положаја геометриских објеката и њихових елемената систематски се решавају у аналитичкој геометрији, али та иста питања у почетној фази могу бити обрађена употребом материјала само елементарне геометрије и треба да буду стављена у ту геометрију, ако се жели да се та геометрија ослободи од укалупљене непокретности геометриских објеката толико штетне за развијање просторних претстава.

Као основа за увођење параметара положаја служе основни задаци одређивања положаја тачке на правој, у равни и у простору. Сваки од тих задатака има и своју конкретну форму у такозваним геометриским задацима на терену. Из елементарне анализе тих задатака следује да се положај тачке на правој одређује једним параметром положаја, рецимо, растојањем једне од друге тачке узете за полазну (први колац). Положај тачке у равни одређује се са два параметра, рецимо са два растојања тачке од две тачке, крајева једне дужи која је узета за базу; та два растојања можемо заменити и са два угла. Најзад за одређивање положаја тачке у простору треба знати три параметра положаја тачке и то, рецимо, у односу на основни троугао ABC у простору — угао између равни ABC и равни ABM, која пролази кроз тачку M чији положај одређујемо, и два параметра положаја тачке M у равни ABM у односу на базу AB.

После одређивања параметара положаја тачке лако је прећи на одређивање параметара положаја појединих геометриских објеката.

За праволиниску слику — дуж или уопште дати праволиниски систем тачака, $p=1$, јер је довољно одредити положај само једне тачке слике на правој линији. То исто се односи и на одређивање положаја датог система тачака на датој кружној линији.

За слику у равни $p=3$, јер се положај такве слике одређује положајем две тачке од којих се друга налази на сталном растојању од прве.

Најзад за просторни објект, напр. за коцку, која је чврсто везана за било који просторни објект, па према томе за сваки просторни објект имамо $p=6$, јер се једно теме коцке одређује са три параметра, друго са два, јер је то тачка на сталном растојању од прве тачке, и треће са једним параметром као тачка на сталним растојањима од две дате тачке.

Тумачење појмова параметара форме, величине и положаја толико је лако и занимљиво да не претставља никакве тешкоће у настави, треба само уводити те појмове у некој узаступности у вези са третираним материјалом и развитком ученика. Усвајање тих појмова је врло корисно како у односу на знатно проширење просторних претстава тако и у погледу на примене.

Значај геометриских параметара знатно се проширује у вези са проучавањем промене геометриских облика у зависности од промене параметара. Најпростија је улога параметра величине, она је најјаснија ученицима и блиско је везана са проучавањем промена релативно простих алгебарских израза, често са аритметичком проценом у смислу већих и мањих величина.

Проучавање промене форме у вези са променом параметара форме спада у чисто геометриску област. Промена геометриског облика само са једним параметром форме већ даје огроман материјал за проучавање геометриске форме уопште. Узмимо најпростији пример — параметар форме правоугаоника. Тај параметар игра огромну улогу у оцењавању форме предмета који нас окружују — књига, свеска, табла стола, фасада зграде итд. Параметар $a:b$ је главни елемент који карактерише њихову форму. Тај параметар служи естетским циљевима (златан пресек и друге поделе), па и практичним циљевима (динформат и др.), за оцењивање развитка неке индустрије. Прогрес грађевинарства можемо оценити не само висином зграда, већ параметром $h:a$ који узима у обзир и смањење основе.

Није од мањег интереса проучавање форме елипсе односно елипсоида обртања као прве форме отступања од круга односно од сфере. Почев од небеских тела и наше Земље па до ћелијица биљака и животиња — све то има форму коју у приближном посматрању можемо математизирати у облику деформисане кружне односно сферне форме са различитим вредностима параметара форме.

Баш при проучавању променљивости облика јасно се истичу сасвим различите улоге параметара форме и параметра величине. Математичко описивање форме треба да уђе у сазнање истом снагом као што је ушло у сазнање и у праксу описивање величине помоћу мерења одговарајућих димензија. Већ одвајање проучавања форме од проучавања величине и могућност оцењивања само форме помоћу броја велики је добитак за што дубље проучавање Природе и за употпуњавање материјала као основе за инвентивну делатност људског духа. Према томе способност видети форму и свесно је оцењивати без обзира на величину исто тако треба да буде основни елемент у савременој геометриској настави.

Најзад променљивост параметара положаја је, можда, најбогатија храна за развитак просторних претстава, јер је та променљивост у вези са кретањем, природном допуном геометрије. Јасно је да се много дубље проучавање геометриског објекта постиже тиме што се објект проучава у различитим положајима. Еуклидово проучавање објекта увек готово у истом положају потпуно је довољно, а можда баш и најзгодније за логичку анализу геометриског материјала, али је оно штетно за проучавање геометриских објеката у целини, и то не само као индивидуалних облика, већ као чланова целих породица тих облика везаних општим особинама функционалног карактера.

Нама изгледа да допуна обичног материјала елементарне геометрије појмовима параметара форме, величине и положаја, чак узимајући у обзир и њихову променљивост, не претставља никакве тешкоће, занимљива је за ђаке и према томе је потпуно савладљива. У исто време она је и врло важна као увод у даља проучавања више геометрије, нарочито за пројективну и афину геометрију и за топологију, једном речи, за проучавање оних области геометрије и математике уопште, које су везане за трансформације, а анализа математичких објеката са гледишта трансформација и теорија самих трансформација главни је део садржаја савремене математике. Проучавање наведених параметара је први корак за продирање у ту математику.

На крају треба истаћи да нове форме геометрије — геометрија форме, величине и положаја јесу нови елементи, који све више дижу ауторитет математике као универзалног апарата не само формалистичког већ потпуно природног садржаја који обухвата појаве Природе са свих њихових страна.

(Саопштено на седници Мат. института 7-III-1956)

SUR LES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES

Résumé

La variabilité des figures géométriques. Les paramètres géométriques: 1. De la forme. 2. De la grandeur et 3. De la position. Exemples. Traitement des paramètres géométriques à l'étude de géométrie élémentaire.

Зборник радова С.А.Н. LV — Математички институт књ. 6, 1957
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LV
Institut Mathématique № 6. 1957

ШЕФКИЈА РАЉЕВИЋ

ПРИМЈЕДБА О ЈЕДНОМ MARDEN-ОВОМ СТАВУ

1. Нека је

$$f(z)=a_0+a_1 z+\ldots+a_n z^n=a_n \prod_{j=1}^{n}(z-z_j) \tag{1}$$

задани полином n-тог степена и нека је

$$f^*(z)=z^n \overline{f}(1/z)=\bar{a}_0 z^n+\bar{a}_1 z^{n-1}+\ldots+\bar{a}_n=\bar{a}_0 \prod_{j=1}^{n}(z-z_j^*) \tag{1*}$$

полином чије су нуле $z_j^*=1/\bar{z}_j$ симетричне нулама полинома (1) у односу на јединични круг $|z|=1$.

Нека је, даље, полиному (1) придружен низ полинома $f_j(z)=\sum_{k=0}^{n-j} a_k^{(j)} z^k$, дефинисаних релацијама

$$f_0(z)=f(z)$$

$$f_{j+1}(z)=\bar{a}_0^{(j)} f_j(z)-a_{n-j}^{(j)} f_j^*(z),\ \mathrm{j}=0,1,\ldots,\ n-1 \tag{2}$$

тј.

$$a_k^{(j+1)}=\bar{a}_0^{(j)} a_k^{(j)}-a_{n-j}^{(j)} \bar{a}_{n-j-k}^{(j)}$$

и нека је

$$P_k=\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_k,\quad k=1,2,\ldots,n, \tag{3}$$

низ производа у којима је

$$\delta_{j+1} \dot{a}_0^{(j+1)}=|a_0^{(j)}|^2-|a_{n-j}^{(j)}|^2,\ j=0,1,2,\ldots,n-1 .$$

Тада вриједи овај Marden-ов, [1; стр. 150, став (42, 1)],

СТАВ 1. *Ако у низу* (3) *има p негативних и $n-p$ позитивних производа P_k, тада полином* (1) *има p нула унутар и $n-p$ нула ван јединичног круга $|z|=1$, а нема ни једне нуле на томе кругу.*

2. У тежњи да низовима (2) и (3) обухвати и случај кад полином (1) има и нула на јединичном кругу, Marden је дао такођер [1; стр. 157, став (44, 1)].

СТАВ 2. *Ако је у низу производа* (3), *за неко* $k < n$, *производ* $P_k \neq 0$, *а у низу полинома* (2) *полином* $f_{k+1}(z) \equiv 0$, *тада се* $n-k$ *нула полинома* (1), *идентичних са нулама полинома* $f_k(z)$ *из низа* (2), *налази на јединичном кругу* $|z| = 1$. *Поред тога, ако је* p *број негативних производа* P_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, *полином* (1) *има* p *нула унутар и* $q = k - p$ *нула ван јединичног круга.*

Овај став, међутим, није тачан, јер је при извођењу његова доказа учињена једна омашка.

Наиме, полином облика ([1]; стр. 155, (44, 1))

$$\psi(z) = \prod_{j=1}^{n-k} (z - e^{i\theta_j}) \tag{4}$$

није једини полином, чији одговарајући полином облика (1*) има особину да је

$$\psi^*(z) = (-1)^{n-k} e^{-i\sigma} \psi(z) \tag{4*}$$

$$\sigma = \Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_{n-k}.$$

Ту особину има и полином

$$\varphi(z) = \prod_{\lambda=1}^{m} (z - e^{i\Theta_\lambda}) \prod_{\nu=1}^{s} \left[z^2 - \left(\rho_\nu + \frac{1}{\rho_\nu} \right) z e^{i\psi_\nu} + e^{2i\psi_\nu} \right] \tag{5}$$

$$\varphi^*(z) = (-1)^{n-k} e^{-i\sigma} \varphi(z) \tag{5'}$$

$$n - k = m + 2s, \quad \sigma = \Theta_1 + \Theta_2 + \ldots \Theta_m + 2(\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_s)$$

који, поред нула на јединичном кругу, има и парове симетрично распоређених нула у односу на тај круг.

Ако је, дакле, [1; стр. 156, (44,4)]

$$f(z) = \varphi(z)\, g(z) = \tag{6}$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{m} (z - e^{i\Theta_\lambda}) \prod_{\nu=1}^{s} \left[z^2 - \left(\rho_\nu + \frac{1}{\rho_\nu} \right) z e^{i\psi_\nu} + e^{2i\psi_\nu} \right] \sum_{j=0}^{k} b_j z^j,$$

$$m + k + 2s = n,$$

гдје је $g(z) = \sum_{j=0}^{k} b_j z^j$ полином који нема ни нула на јединичном кругу ни парова симетрично распоређених нула у односу на тај круг, биће

$$f^*(z) = \varphi^*(z)\, g^*(z) = (-1)^{n-k} e^{-i\sigma} \varphi(z)\, g^*(z) \tag{6*}$$

$$a_0 = (-1)^{n-k} e^{i\sigma} b_0, \; a_n = b_k$$

тј.

$$f_j(z)=\varphi^*(z)\, g_j(z); \quad f_j^*(z)=\varphi(z)\, g_j^*(z) \tag{7}$$

$$a_0^{(j)}=b_0^{(j)}; \quad a_{n-j}^{(j)}=(-1)^{n-k}\, e^{-i\sigma}\, b_{k-j}^{(j)} \qquad j=1,\ 2, \ldots, k$$

односно

$$f_k(z)=\varphi^*(z)\, b_0^{(k)}=(-1)^{n-k}\, e^{-i\sigma}\, \varphi(z)\, b_0^{(k)}; \quad f_k^*(z)=\varphi(z)\, \bar{b}_0^{(k)} \tag{8}$$

$$f_{k+1}(z)=\bar{a}_0^{(k)}\, f_k(z)-a_{n-k}^{(k)}\, f_k^*(z)\equiv 0.$$

Обрнуто, ако је $f_{k+1}(z)\equiv 0$, тада из (8) и (2) произлази да је полином $f_k(z)$ заједнички фактор и полинома $f(z)$ и полинома $f^*(z)$

Како у овом случају полином $f_k(z)$ нема обавезно све нуле на јединичном кругу, то је очигледно да став 2., онако како је формулисан, није тачан.

Примјер: $f(z)=-6-(9+5i)\,z+(9-15\,i)\,z^2+(4-10\,i)\,z^3+8\,z^5$

$$f_1(z)=-28+(54+30\,i)\,z-(86-10\,i)z^2-(96+60\,i)\,z^3+$$
$$+(72-40\,i)\,z^4$$

$$f_2(z)=3000\,i\,[2\,i-(3+i)\,z-(1+3\,i)\,z^2+2\,z^3]$$

$$f_3(z)\equiv 0$$

$$\varphi(z)=z^3-\frac{1}{2}(1+3i)\,z^2-\frac{1}{2}(3+i)\,z+i=$$

$$=(z-e^{\pi i})\left(z-\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}\right)\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)$$

Овдје је: $k=2$, $n-k=3$, $\delta_1=-28$, $\delta_2=-6000$, $p=1$, $q=1$, а полином $f(z)$ има двије нуле ($z_1=-1/2$, $z_2=1/2+i/2$) унутар јединичног круга, двије нуле ($z_3=-3i/2$, $z_4=1+i$) ван тога круга и само једну нулу ($z_5=-1$) на том кругу.

3. Напомињемо да у овом случају полином (8) има особине полинома $g(z)$ из става (45,2) [1; стр. 159], односно да је полином (8) идентичан са полиномом $f_k(z)$, о ком се говори у вјежби 2. [1; стр. 161].

У вези с тим видјети такође [2; стр. 8] и [3].

(Саопштено на седници Мат. института 5-VI-1957)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Marden M. — The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable, New-York, 1949.

[2] Dieudonné J. — La théorie analytique des polynômes d'une variable. *Mémorial des sciences mathématiques*, XCIII, Paris, 1938.

[3] Deaux R. — Sur les équations antiréciproques, *Mathesis*, LVIII, № 9—10 (1949), 281—284.

REMARQUE SUR UN THÉORÈME DE M. MARDEN

par

Š. RALJEVIĆ

L'auteur a remarqué que le polynôme (5) dont les coefficients satisfont à (5') a la propriété (4*) qui d'après M. Marden [1, p. 155] caractérise le polynôme (4) D'autre part, le polynôme (5) possède des zéros en dehors du cercle $|z|=1$, ce qui montre que le Th. (44, 1), [1, p. 157] n'est pas vrai.

Зборник радова С.А.Н. LV — Математички институт књ. 6, 1957
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LV
Institut Mathématique № 6, 1957

СТАНИМИР ФЕМПЛ

О ЈЕДНОЈ РЕДУКЦИЈИ ПОТПУНОГ НОРМАЛНОГ ЕЛИПТИЧКОГ ИНТЕГРАЛА ТРЕЋЕ ВРСТЕ

Нека је

$$L(k, \psi) \equiv FE(k, \psi) - EF(k, \psi), \tag{1}$$

где су $F(k, \psi)$ и $E(k, \psi)$ нормални елиптички интеграли I и II врсте модула k и амплитуде ψ, док су F и E одговарајући потпуни интеграли.

Израз $L(k, \psi)$ своди се на потпуни нормални елиптички интеграл III врсте Legendre-ова типа са параметром $-k^2 \sin\psi$ тј.

$$L(k, \psi) = \operatorname{ctg}\psi \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,[\Pi_0(-k^2\sin^2\psi) - F], \tag{2}$$

а у својој тези [1] показао сам да је

$$m\,L(k, \psi) = F k^2 \sin\psi \sin\psi_{m-1} + F k^2 \sin\psi \sum_{\nu=2}^{m-1} \sin\psi_{\nu-1} \sin\psi_\nu, \tag{3}$$

кадгод су задовољени услови

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_{\nu+1}+\psi_{\nu-1}}{2} = \operatorname{tg}\psi_\nu \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}, \tag{4}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots\, m-1,$$

и обрнуто. При томе је $\psi_0=0$, $\psi_1=\psi$, $\psi_m=\frac{\pi}{2}$; величина ψ се може изразити као функција од k.

Познато је да се потпуни нормални елиптички интеграл III врсте може изразити комбинацијама потпуних и непотпуних елиптичких интеграла I и II врсте. Горњи резултат омогућио ми је да изнађем један низ случајева у којима се овакво изражавање врши помоћу само п о т п у н и х интеграла. Према горњем је

$$\Pi_0(-k^2\sin^2\psi) = F + \frac{F k^2 \operatorname{tg}\psi \sin\psi}{m\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\left(\sin\psi_{m-1} + \sum_{\nu=2}^{m-1} \sin\psi_{\nu-1}\sin\psi_\nu\right), \tag{5}$$

уз услове (4), при чему се природни број $m>1$ може бирати произвољно. Тако например за $m=2$ добио сам образац

$$\Pi_0(-1+k')=\frac{1+k'}{2k'}F, \tag{6}$$

(други члан на десној страни обрасца (3) отпада) при чему је k' комплементаран модуо модулу k:

$$k'=\sqrt{1-k^2}.$$

Овај образац био је и раније познат, но он је дедуциран из опште методе која је изложена у тези. За остале вредности m добивају се потпуно нови резултати. Тако за $m=3$ добио сам

$$\Pi_0(-k^2\sin^2\psi)=\frac{F}{3}\left(1+\frac{1}{1-\sin\psi}\right), \tag{7}$$

где $\sin\psi$ мора задовољавати једначину

$$k^2\sin^4\psi-2k^2\sin^3\psi+2\sin\psi-1=0 \tag{8}$$

која даје једну једину вредност за $\sin\psi$ у размаку $(0,1)$ итд.

У овом раду показаћу да се може добити један низ нових вредности за потпуне нормалне елиптичке интеграле III врсте код којих за параметар n важи неједначина $-k^2<n<0$ и који се изражавају само потпуним интегралом I врсте истог модула. Доказаћу, наиме, следећи

СТАВ: *Кад год низ амплитуда ψ_ν, $(\nu=1, 2,..,m-1)$ задовољава $m-1$ једначину*

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_{\nu+1}+\psi_{\nu-1}}{2}=\operatorname{tg}\psi_\nu\sqrt{1-k^2\sin^2\psi_\nu}, \tag{9}$$

$$\nu=1,\ 2,\dots m-1;\quad \psi_0=0,\quad \psi_1=\psi,\quad \psi_m=\frac{\pi}{2},$$

тада је

$$\Pi_0\left(-\frac{k^2\cos^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi}\right)=\frac{(1-k^2\sin^2\psi)F}{k'^2}-$$

$$-\frac{Fk^2\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}{mk'^2}\left(\sin\psi_{m-1}+\sum_{\nu=2}^{m-1}\sin\psi_{\nu-1}\sin\psi_\nu\right), \tag{10}$$

и обрнуто.

Доказ овог става лако следи на основу једне Legendre-ове формуле [2]

$$\frac{\sin\psi\cos\psi}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\log\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}+k^2\sin\psi\cos\psi\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}-k^2\sin\psi\cos\psi\sin\theta\cos\theta}=$$

$$=F(k,\theta)-\cos^2\psi\,\Pi\,(-k^2\sin^2\psi,k,\theta)-$$

$$-\frac{k'^2\sin^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi}\,\Pi\left(-\frac{k^2\cos^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi},k,\Theta\right),$$

ако се у овој стави $\theta=\frac{\pi}{2}$. Тада интеграли Π и $F(k,\theta)$ постају потпуни интеграли Π_0 и F, па следи

$$F-\cos^2\psi\,\Pi_0\,(-k^2\sin^2\psi)-\frac{k'^2\sin^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi}\,\Pi_0\left(-\frac{k^2\cos^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi}\right)=0.$$

Ако се вредност $\Pi_0(-k^2\sin^2\psi)$ израчуна из ове једначине и стави у образац (5), добиће се једначина (10), што је требало показати.

За $m=2$ добива се један једини услов (9):

$$\mathrm{ctg}^2\psi=k',$$

а у једначини (10) отпада други члан у малој загради, тако да се опет добива образац (6). Међутим, за $m>2$ добива се потпуно нови низ вредности. Тако например за $m=3$ важи условна једначина (8), а образац (10) постаје

$$\Pi_0\left(-\frac{k^2\cos^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi}\right)=\frac{F\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}{3\,k'^2}\,[3\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}-$$

$$-k^2\sin\psi_2\cos\psi\,(1+\sin\psi)],$$

док из једначина (9) $\left(\nu=1,\ 2;\ \psi_3=\frac{\pi}{2}\right)$ за $\nu=1$ следи

$$\mathrm{tg}\frac{\psi_2}{2}=\mathrm{tg}\,\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi},$$

тј.

$$\sin\psi_2=\frac{2\sin\psi\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}{1-k^2\sin^4\psi},$$

односно

$$\sin\psi_2=\frac{\cos\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

јер је према (8) $1-k^2\sin^4\psi=2\sin\psi\,(1-k^2\sin^2\psi)$.

На основу тога је

$$\Pi_0\left(-\frac{k^2\cos^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi}\right)=\frac{F}{3\,k'^2}(3-2\,k^2\sin^2\psi-k^2-k^2\sin\psi+k^2\sin^3\psi),$$

а после проширивања разломка на десној страни са $\sin\psi$ и примене једначине (8),

$$\Pi_0\left(-\frac{k^2\cos^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi}\right)=\frac{F}{3\,k'^2\sin\psi}(1+\sin\psi)(1-k^2\sin\psi)\,.$$

При томе $\sin\psi$ има вредност из једначине (8). Због $n=-k^2\sin^2\psi$ горња једначина може се писати у облику

$$\Pi_0\left(-\frac{n+k^2}{n+1}\right)=\frac{(k+\sqrt{-n})\,(1-k\sqrt{-n})}{3\,k'^2\,\sqrt{-n}}F.$$

За веће вредности m, условне једначине ће се, разумљиво, компликовати, али се из изложенога види да су при оваквим редукцијама модуо и параметар увек везани алгебарским једначинама.

(Саопштено на седници Мат. института 27-VI-1956)

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Фемпл — О једној линеарној комбинацији нормалних елиптичких интеграла I и II врсте, *Зборник радова Математичког института САН* 5 (1956), 61—116.

[2] A. Enneper — Elliptische Functionen. У преради F. Müller-a. Halle a. S, 1890.

SUR UNE RÉDUCTION DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE NORMALE COMPLÈTE DE III ESPÈCE

par

S. FEMPL

On sait que les intégrales elliptiques normales complètes de III espèce se laissent exprimer par la combinaison des intégrales elliptiques normales complètes et incomplètes de I et II espèces.

Dans sa thèse [1], l'auteur a donné une suite de conditions (formule (9)) auxquelles doivent satisfaire le module et le paramètre de l'intégrale de III espèce pour qu'une telle intégrale puisse être exprimée à l'aide des seules intégrales complètes de I espèce avec le même module.

Dans cette note on donne, sous les mêmes conditions, une autre suite d'intégrales de III espèce (formule (10)) s'exprimant à la manière précédente.

Зборник радова С.А.Н. LV — Математички институт књ. 6, 1957
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LV
Institut Mathématique № 6, 1957

ДРАГОЉУБ ПАВЛОВИЋ

АРХИВСКА ГРАЂА О ЖИВОТУ МАРИНА ГЕТАЛДИЋА

О познатом дубровачком математичару и физичару XVII века Марину Геталдићу, чије су заслуге за развој математике и физике признате већ одавно у историји математичких наука, писано је до сада више пута и код нас и на страни, али и поред тога његов живот није довољно познат. Оно што се до сада о њему знало сводило се у главном на биографске податке које је о животу Геталдићеву дао дубровачки биограф XVIII века Саро Цријевић.[1]) Ти подаци, међутим, не само што нису били потпуни, већ нису ни увек тачни, пошто су стари дубровачки биографи писали, како је познато, биографије знаменитих Дубровчана делом по писаним изворима али најчешће по сећању и усменој традицији. Цријевићева податке понављали су затим сви они који су после тога писали о М. Геталдићу, почевши од Апендинија, па све до О. Кучере, чија расправа претставља и данас најобимнији и најпотпунију приказ живота и рада знаменитог дубровачког математичара.[2]) Изузетак од овога чине донекле чланци Н. Салтикова[3]) и М. Ванина[4]). Први од њих донео је неколико вести узетих из дубровачког Државног архива, док је други штампао једанаест Геталдићевих писама, значајних за познавање и његова живота и рада. Ипак, и поред свих тих радова, жеља О. Кучере, изражена још 1893 године, да се подацима из Државног архива у Дубровнику осветли потпуније нарочито последњи период Геталдићева живота, остала је још увек неостварена. Радећи више година на испитивању архивске грађе за познавање живота и рада дубровачких књижевника XVI и XVII, века ја сам узгред исписивао и

---

[1]) *Seraphinus Cerva*, Bibliotheca Ragusina M. S. Пре Цријевића о Геталдићеву животу и раду налазе се подаци и у делу Игњ. Ђурђевића Vitae et carmina (изд. Српске академије наука, Зборник за ист., јез. и књижевност срп. народа, II одељ. књига 7).

[2]) Досадашња литература о М. Геталдићу: *Appendini*, Notizie II, 1803, str. 44—48. *Barbieri*, Galleria dei Ragusei illustri. Dubrovnik 1841. *E. Gelčić*, Zeitschrift für Mathematik u. Physik XXVII, 1882. *M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Matematik 1899—1901. *Oton Kučera*, O Marinu Getaldiću. Rad. JAZU CXVII$_1$, 1893.

[3]) *N. Saltikov*, Souvenirs concernant le gèomètre Yougoslave Marinus Ghetaldi, Isis № 78, vol. XXIX july 1938.

[4]) *M. Vanino*, M. Getaldić i isusovci, Vrela i prinosi 12, Sarajevo 1941.

сва архивска документа која се тичу М. Геталдића и његове уже породице. Без претензија, дакле, да дам потпуну биографију М. Геталдића, ја ћу овде саопштити све оне архивске вести које могу бити корисне будућем писцу једне обимне и потпуне монографије о овом заслужном дубровачком научнику.

* * *

Како је већ истакао и стари Цријевић, Марин Геталдић је рођен у угледној властеоској породици Геталдића (Ghetaldi), чији народни облик, узгред буди речено, у старом Дубровнику није гласио Геталдић већ *Гетодовић*.[5] Датум и годину рођења Геталдића не знамо тачно, али се он може доста приближно одредити. Већ је Цријевић био нашао у познатом списку дубровачке властеле *Specchio* да је М. Геталдић био примљен у Велико вијеће као пунолетан члан 12-V-1588 године. Знајући да су дубровачка властела често била проглашавана пунолетним и пре навршене двадесете године и да су још уз то стари Дубровчани рачунали годину рођења не од самог рођења већ од зачећа („a concepcione"), Цријевић је одредио као приближну годину Геталдићева рођења 1566, и ту су годину понављали сви они који су касније писали о М. Геталдићу. Та година, неће бити тачна, пошто у књизи свадбених уговора налазимо да је отац Маринов начинио уговор о веридби са својом будућом женом Аницом тек 30 априла 1567 године[6]. У уговору, који није цео исписан, није означен рок за венчање, али како је тај уговор регистрован три месеца касније и у књизи *Registro maritaggi*[7], то је сигурно да је венчање обављено ускоро после тога. Када се при томе узме у обзир и чињеница да је Марин Геталдић био најстарији син својих родитеља[8], онда са може узети скоро као сигурно да је он рођен 1568 године. У браку са женом Аницом, Маринов отац је имао, поред Марина, још четири сина, и то: Андрију, Симона, Мартолицу и Јакова[9]. Шесто дете била је кћи Ника, која се због недовољног мираза није могла удати и завршила је свој живот као думна у мана-

[5]) У серији докумената Testamenta notariae 60 (1631) налази се на стр. 61 тестамент *Orae uxoris Andreae Mathaei de Ghetaldis*, који је писан српскохрв. језиком и који почиње: „Ја Ора кћи Лукше Кривошића и жена Андрије *Гетодовића*". Овај Андрија Геталдић је рођени брат Марина Геталдића; оженио се 1623 удовицом Ором Гучетић, која је пре тога била већ два пута удавана.

[6]) *Pacta matrimonialia* 9 f° 106 die 30 aprilis 1567 S. Matheus Mar. Jac. de Ghetaldis ex una parte et D. Aniza filia q. S. Andreae Marth. de Restis ex altera parte sponte... promisit se domum suam traducturum... уговор није завршен.

[7]) *Reggistro Maritaggi*, f° 49. D. Aniza filia q. S. Andrea Marth. de Restis desponsata. S. Matheo Mar. Jac. de Ghetaldis 30.IV.1567.

[8]) Треба напоменути да је крајем 16 и почетком 17 века постојала још једна грана породице Геталдића. Тако је поред оца нашег математичара који се звао Matheus Mar. Jac. de Ghetaldis. постојао и Matheus Marini de Ghetaldis који је сасвим друго лице.

[9]) *Specchio* 1500—1600. Андрија је ушао у В. Вијеће 27.X.1580, што значи да је био само годину дана млађи од млађи од Марина, Симон 11.VIII.1590, Мартолица 20.VII.1594, а Јаков 19.V.1597.

стиру[10]. Та жалосна судбина Нике Геталдић јасно показује да Ма ринов отац није био много имућан.

Своју младост Геталдић је провео у Дубровнику, завршивши ту основну школу и гимназију. То његово школовање трајало је од 1575, када му је било седам година па све до 1588 када је постао пунолетан. У основној школи прву писменост је добио од свештеника Ивана, који је тада био постављен за репетитора са задатком да „edocere debeat iuvenes et pueros grammaticam et humanas litteras"[11] док су му у гимназији наставници били су Марин Цупан, Трифун Которанин, Иван Кристифоровић, Ф. Сердонати. Доминик Тати и Виктор Басељи,[12] Прва знања из рачуна и математике Геталдић је најпра добио од Андрије Француза, који је од 1575—1577 био главни учитељ рачуна (abachista), а после 1577 од Николе Матејина који је ту дужност вршио све до краја XVI века.[13] По завршеној гимназији, из које је изнео сва знања која су била потребна ондашњем дубровачком властелину за вршење чиновничких дужности, Геталдић је одмах после ступања у Велико вијеће почео добијати разне дужности и звања која су обично додељивана младим племићима. Тако је већ године 1590 био постављен за капетана Јањине на Пељешцу. Ту дужност, која је била нека врста административног и судског управитеља места, Геталдић је морао обављати пуних шест месеци, уз плату од дванаест гроша дневно. Али као што је био случај са осталим младим дубровачким племићима, Геталдић ту дужност изгледа да није схватио много озбиљно, па је због тога 16 јуна исте године био кажњен новчаном глобом од двадесет и пет перпера што је и без одобрења био напустио за извесно време место свога службовања[14]. Идуће 1591 године он је већ један од двојице офичала у уреду за наоружање (Armamento de scritta) и ту ће дужност вршити повремено и касније.[15] Године 1593 налазимо га као претставника републике у уреду за продају соли на Неретви[16]. Идуће 1594 године, међутим, Геталдић је ради својих математичких студија изгледа већ напустио Дубровник, пошто га отада па све до

---

[10]) *Test.Not.* 49 (1592—96) *f*⁰ 110:... „Io ho una figliuola femina a nome *Nicha*, la quale perchè si e risoluta a farsi monaca e tale finira la sua vita al servito di Dio ... per cio ella potra elegarsi qual monastiere che più li placerá". Ника је вероватно рођена негде између 1575—1576, и у то време је већ била девојка за удају. Што је морала ићи у думне, главни разлог је био сигурно слабо имовно стање њенога оца.

[11]) *Cons. Rogatorum* 58 (1566—68) *f*⁰ 166; *Ibidem* 60 (1572) *f*⁰ 62.

[12]) *Cons. Rog.* 63 (1575—76) *f*⁰ 3, 5; *Ibid.* 64 (1577—78), *f*⁰ 105; *Ibid.* 65 (1579—80), *f*⁰ 57; *Ibid.* 66 (1581—82), *f*⁰ 89, 134, 195.

[13] *Cons. Rog.* 63 (1575—76), *f*⁰ 5; *Ibid.* 64 (1577—78), *f*⁰ 18.

[14]) *Cons. Minus* 60 (2589—90), *f*⁰ 220. Die 16. VII, 1690. Captum fuit de condemnando S. Marinum Math. de Ghetaldis, capitaneum Jagniae ad solvendum... ipp. viginti cinque... propterea quod redierit ex suo capitanato..., а после тога нови закључак: „captum fuit de precipiendo predicto S. Marino q. sub. paena ipp. centum debeat residere continno in suo capitanatu, et non discedere ex suo confinio.

[15]) *Cons. Minus.* 61 (1591—92) *f*⁰ 31.

[16]) *Cons. Rog.* 73 (1593—94) *f*⁰ 80, Die 15.XII.1593. Marinus Math. de Ghetaldis, venditor salis Narenti (XX q. VII, ex 1).

1603 године не налазимо у архивским књигама. То би се донекле слагало са оним што он у предговору свога дела „Variorum problematum collectio" (Млеци 1607) сам казује како је пуних шест година провео на путовању по западноевропским земљама[17]. По повратку са својих студија Геталдић је између 1600 и 1603 опет повремено боравио у Риму и у Венецији, где је припремао своје прве радове из математике и физике за штампу. У Риму он би вероватно остао још и дуже да му се средином 1603 није догодила једна незгода. У свом писму које је јуна 1603 упутио из Венеције своме професору Кристифору Клавију, он се жали како је изненада морао побећи из Рима да не би био кажњен за покушај убиства над неким непознатим човеком. Додуше, Геталдић се правда да није имао никако намере да тог човека убије, али да је мимо своје воље био увучен у свађу која га је тако разјарила да је у афекту истукао свога противника много теже него што је у први мах намеравао да учини[18]. Својим бекством, Геталдић се спасао затвора, али је зато био осуђен „in contumacio" да више година не сме долазити у папску државу.

Из Венеције, Геталдић се свакако већ ујесен 1603 вратио у Дубровник, пошто је већ октобра исте године почео поново добијати разне чиновничке и дипломатске службе. Тако је 27-X-1603 изабран за члана апелације (Collegio delle appelationi)[19]. Почетком идуће, 1604 године, међутим, Геталдићу је била додељена једна дужност која му сигурно није била много по вољи. Одлуком Сената од 13-I-1604 он је био одређен да оде на Стон и да отпочне са изградњом куле Позвизд, која се, како је познато, налази на брду изнад Стона и која је имала да штити Стон од ускочких напада са копна[20]. Два месеца касније, Геталдић је изабран у Сенату за једног од двојице капетана „creati pro custodii Stagni"[21]. Обе ове дужности биле су опасне и тешке, и оне су обично додељиване дубровачким племићима као нека врста казне пошто је боравак на Стону био опасан не само због борбе са ускоцима, већ услед маларије коју су Дубровчани називали „грозницом" (febre) и коју су приписивали рђавој клими. Додуше ми не знамо тачно разлог због чега су Геталдићу додељене обе ове дужности на Стону одмах после његовог повратка из Италије. Она прва дужност о зидању тврђаве могла је бити дата Геталдићу као тада већ познатом физичару и математичару, али

---

17) *M. Vanino*, нав. дело, стр. 73.

18) *Ibidem* стр. 80... „Non credevo mai dover partir di Roma senza far motto agli amici, ma intravengono al mondo cose che non si pensano ... Non dimeno ne anco in quella colera non hebbi animo d'ammazzarlo, s'e bene m'haveva dato una gran causa, ma cercavo bene di legnarlo. Ma perche non si mesurano i colpi, feci più che non volevo".

19) *Specchio* 1500—1600.

20) *Cons. Rog.* 79 (1603—1600) f° 59. Die 13. I. 1604. Marinus Math. de Ghetaldis ... electus pro mittendo Stagnum, qui dare debeat initium fabricare castri Posvisd (XXII q. XII).

21) *Ibidem* f° 87 Die 3. III. 1604 Marinus Mat. de Ghetaldis ... electus pro unus ex duobus capitaneos creandi pro custodii Stagni (XXII q. XII).

она друга била је чисто војничке природе, и она је могла уследити као нека врста блаже казне коју је судство папске државе могло захтевати од дубровачке владе[22]. На Стону Геталдић је провео све до средине маја 1604, када га је на тој дужности заменио његов млађи брат Мартолица[23]. Ускоро после доласка братовљевог, Геталдић је напустио Стон, пошто га је крајем јуна 1604 Сенат изабрао за изасланика код аустријског надвојводе Фердинанда[24]. Мисија је свакако била дипломатске природе и тицала се вероватно или сењских ускока, или буне на Ластову због које су Дубровчани у то време имали великих незгода.[25] Геталдић би сигурно и извршио с успехом ову мисију да га озбиљна и дуга болест, свакако маларија коју је био донео са Стона, није у томе спречила- Због тога је на седници Сената од 17 августа донета одлука да се Геталдић ослободи те дужности, и да се на његово место изабере други[26]. Пошто је преко четрдесет дана боловао лежећи у постељи, Геталдић се најзад опоравио од болести. У писму од 17 септембра исте године упућеном својим бившим професорима Клавију и Гринбергу, Геталдић им јавља да је оздравио и да је поново почео да се бави математичким студијама[28]. Истовремено он је наставио да врши и неке чиновничке дужности које су биле обавезне за све дубровачке племиће. Тако је године 1605 изабран за приватног адвоката (avocato del proprio), и ту дужност је вршио и 1608[29]. Од тих дужности, међутим, много је значајнија била једна која ће га опет за извесно време удаљити из Дубровника. Почетком 1606 године, наиме, у Сенату је извршен избор двојице дубровачких поклисара који су имали да носе султану уобичајени годишњи данак (oratores tributi), и да уз то сврше и разне друге дипломатске послове. На седници од 12 јануара 1606 изабран је за једног од тих

---

[22]) У записницима дубровачких већа, додуше, нема трага да су дубровачке власти водиле какаву истрагу поводом овог Геталдићевог изгреда у Риму, али се о томе сигурно у Дубровнику знало. Уз то, папска интервенција могла је доћи и усменим путем, преко дубр. надбискупије.

[23]) *Cons. Rog.* 79 (1603—1604), fº 125. Die 18 V. 1604. Martoliza Math. de Ghetaldis ... electus pro unum ex duobus capitaneos mittendi Stagnum parvum pro meliore custodia ... с тим да ноћу може спавати „in castro Coronae".

[24]) *Cons. Rog.* 79 (1603—4) fº 159. Die 27. VII· 1604. Prima pars est de committendo D. D. Provisoribus civitatis ut forment et referant commissionem dandum S. *Marino Math. de Ghetaldis*, mittendô ad serenissimum Ferdinandum Archiducem Austriae".

[25]) *В. А. Вучетић*, О млетачкој окупацији Ластова 1603—1604 Гласник дуб. ученог друштва св. Влахо I 1929, Дубровник.

[26] *Cons. Rog.* 79 (1603—4) fº 164. Die 16. X. 1604. Prima pars est de excusando S. Marimum Math. de Gletaldis, creatum ad Ser. Ferdinandum ... attenta aegritudine dicti S. Marini (omnes q. II].

[27]) Ову своју несуђену мисију и своју болест помиње и сам Геталдић у писму свом професору Клавију (4. IX. 1604): ... „Havendo dissegnato di del suo favore, perche ero destinato di miei Signori per alcuni loro negotii per esser mandato dal Archiduca Ferdinando in Gratz per alcuni loro negoti ... ma la glave e lunga malatia che mi sopravene che ancora mi tiene nel letto causo che io lasciassi far questo viaggio" ... (M. Vanino, нав. дело).

[28]) M. Vanino, нав. дело, стр. 82.

[29]) *Specchio* 1600—1700.

поклисара и наш Гeталдић[30]. Поред њега, као други поклисар био је изабран најпре Франо Марина Тудишевића, али како се овај извинио да му је жена пред порођајем, то је на седници од 18 априла исте године на место Тудишевића изабран Јаков Франа Бобаљевића[31]. У пролеће исте године оба поклисара су већ морали кренути на пут. Маја месеца они су свакако већ били у Цариграду, пошто су им крајем маја већ била од стране Сената послата прва писмена упутства за дипломатске послове које је требало да посвршавају на Порти. Слична упутства слао им је Сенат даље 7 и 8 јуна, 9, 21 јула, 11 септембра, 13 новембра исте године, затим 18, 19 и 20 јануара 1607 и најзад 21 марта и 10 априла исте године[32]. У последњем од њих, оном од 10 априла 1607, Сенат им већ наређује да се врате у Дубровник, што значи да је Гeталдић у Цариграду провео пуну годину дана[33]. Овај свој пут у Цариград Гeталдић помиње и у свом писму Клавију и Гринбергу извињавајући се у њему што им се, услед велике запослености, није раније јављао[34]. Занимљиво је да се Гeталдић за време свога боравка у Цариграду бавио узгред и својим научним студијама. Тако је — јавља он у поменутом писму својим професорима, — израчуаао да Цариград не лежи на географској ширини од 43 степена, већ тачно на 41 степену[35]. Истовремено је утврдио да се и Дубровник налази на географској ширини од 42 степена и 35 минута. У једном другом писму он се жали како се у Цариграду узалуд трудио да нађе арапски превод Аполонија. Тај његов интерес за превод дела овог познатог грчког геометричара свакако јо у вези са Гeталдићевом књигом „Appolonium redivivus“ коју је он 1607 штампао у Венецији[36].

По повратку из Цариграда, Гeталдић је остали део свога живота провео у Дубровнику, бавећи се истовремено и својим научним студијама, и обављајући разноврсне државне службе и послове. Тако је већ године 1608 био адвокат за приватне послове (avocato del proprio) а исту дужност обављао је и 1611 и 1618 године[37]. Године 1610, 1612, 1615 он је један од пет официјала за за трговачко судске послове (officiali cinque delle ragioni), а 1612 офичал уреда за вино. Од осталих послова и служби које је Гeталдић све до своје смрти обављао, поменућемо још следеће: 1623 цариник у великој царинарници (Dogana Grande), 1617, 1621, 1624 офичал уреда за прераду вуне (arte della lana), 1616, 1619,

[30]) *Cons. Rog.* 80 (1605—1606) fo 123 Die 12. I. 1606. Electio duorum oratorum tributi. Изабрани: S. Franciscus Marinchi de Tudisio (XXI q. XIV ex I), и *Marinus Mathei de Ghetaldis* (XVIII q. XVII, ex I).

[31]) *Ibidem* fo 126. Prima pars est de excusando S. Franciscum Mar. de Tudisio electi oratorum tributi ab onere obeundi dictam legationem, eo qui uxor eius est gravida et attenta etiam gravi corpore infirmitate sui soceri...

[32]) *Lettere e commissioni di levante* 41 (1604—1608), стр. 144, 153 и даље.

[33]) *Ibidem*, стр. 184, 185.

[34]) Vrela i prinosi 12, стр. 82, писмо од 20. II. 1608.

[35]) *Ibidem*, стр. 83.

[36]) *Ibidem*, стр. 83.

[37]) *Specchio* 1600—1700.

1623 „консул“ за грађанске парнице (console delle cause civili), 1611, 1614 апелациони судија (Collegio delle appelationi), 1620 судија за криминалне парнице (giudici criminali), 1615, 1618, 1620, 1621 члан Сената (Consilium rogatorum), 1625 члан Малога већа (Consilium minus)[38] и др. Занимљиво је да је 1615 као један од три члана Сената опет ишао на Стон ради неких државних послова[39]. У свим тим службама он је био савестан, што се види из чињенице да, изузев оне мале казне из младости, доцније није био никада кажњаван[40]. За кнеза републике није био биран, али сигурно само због тога што је умро пре навршене педесете године старости[41].

Као и већина дубровачке властеле, Геталдић се оженио тек у зрелијим годинама. У лето 1621 године, када му је било пуних четрдесет и три године, он је склопио брачни уговор са Маријом, ћерком Влаха Николе Соркочевића[42]. За имовно стање ондашње дубровачке властеле карактеристична је чињеница да Геталдић свој мираз није добио у готовом новцу, нећ искључиво у непокретном имању. Тако је Геталдић добио на име мираза поседе у Конављу, Ободу, Стону и Чесвиници, са свима приходима које су та имања доносила. Месец дана после склапања брачног уговора, Геталдић се венчао, после 9 августа 1621 године[43]. Све до тада, он је живео у заједници са својом браћом Андријом и Јаковом, пошто му је брат Симон био умро још 1604, а Мартолица, који је био ожењен још 1614, изгледа да се већ био издвојио из кућне заједнице. Становали су иначе заједно у великој очевој кући која се налазила близу цркве св. Влаха[44]. Идуће 1622 браћа су поделили једно заједничко наслеђе, које им је остало од рођака Мата Проданели, на пет делова. Од тог наслеђа, Марин је добио посед

---

[38]) *Specchio* 1600—1700.

[39]) *Consil. Rog.* 85 (1615—18) f° 21. Die 4. XII. 1615 S. Marinus Mathaei de Ghetaldis unum ex trium consilaiarum mittendi Punctum Stagni.

[40]) Изузетак чине тзв. „пунтатуре“ тј. новчане казне за недолазак на седнице разних већа. Тако налазимо да је 14. XI. 1615 Геталдић био ослобођен такве казне од 50 перпера којом га је казнило Велико вијеће, пошто га је за те прекршаје писмено оправдао ондашњи кнез у Конављу, песник И. Гундулић („attenta fide facta in scriptis per S. Joannem Franc. de Gondula, comitem Canalis“), *Cons. Rog.* 85, f° 6.

[41]) У Геталдићево време било је, додуше, случајева да се услед малог броја властеле, кандидују па чак и бирају кнезове и властела која нису навршила педесету годину старости, али су то ипак били изузеци.

[42]) *Pacta matrimonialia* 12 (1617—59) f° 16. Die 7.VII.1621. S. Marinus Matthei de Ghetaldis ex una parte D. Maria, filia, S. Blasii Nic. de Sorgo ex alia parte, asseverunt... inter se his diebus... contractum, verum et consumatum matrimonium. Pro cuius quidem dote et parchinio ipsae D. Mariae cum assensu et presentia. D. Franae suae matris... sponte et praedicte S. Marino eius marito presenti et dicto dotis nomine accepit..: omnes et singulas proprietates Canalis, Obod, Stagni et Cesvinizzae...“

[43]) *Reggistro maritaggi.* D. Miria filia q. S. Blasii Nic. de Sorgo desponsata Marino Math. de Ghetaldis die 9.VIII.1621.

[44]) *Diversa Not.* 138 (1638—59), f° 79. У уговору који је начињен 1645 и у коме је извршена подела имања између три Геталдићеве кћери, у делу који је припао најмлађој Марији помиње се „la casa grande posta qua in Ragusa appresso la chiesa di Santo Biaggie“, у којој је становао М. Геталдић са братом Јаковом.

на острву Шипану[45]. Како се идуће, 1623 оженио и други брат Андрија[46], то се и он издвојио од браће и са својом женом прешао у своју нову кућу која се налазила на Пустијерни, у непосредној близини некадашње цркве св. Стефана. О тој подели је 6 фебруара исте године био састављен и посебан уговор, али без арбитражних судија, што је сигуран знак да су се браћа лепо слагала међу собом[47]. По том уговору, Андрија Геталдић је добио, поред куће на Пустијерни, поседе у Височанима на Приморју, и поседе на Стону. Остало имање припало је Марину и Јакову, који су остали неподељени, пошто је најмлађи Јаков, као нежења, живео до смрти у братовљевој кући.

У браку, нажалост, Гетаддић је проживео свега непуних пет година. За то време он је са својом женом изродио три кћери: Аницу, Франу и Марију. Његова жена Марија изгледа да је умрла ускоро после рођења најмлађе кћери, пошто је Гeталдић, када је у пролеће 1626 састављао свој тестаменат, уопште не помиње. Тестамент је Геталдић написао 30 марта 1626, јер се тих дана, како он каже сам, није осећао најбоље са здрављем[48]. Како је тестаменат регистрован већ 11 априла исте године, то значи да је Геталдић умро дан два пре тога. Умро је, дакле, не навршивши ни пуних четрдесет и осам година старости, у време када је журио да заврши своје главно дело *De resolutione et compositione matematica*. Шест месеци уочи своје смрти, наиме, Геталдић је у писму своме пријатељу и професору Кристифору Гринбергу писао да, после дуже паузе, наставља да ради на решавању проблема о обиму земље, и да ће тај свој резултат унети у своје дело које смо горе навели[49]. Дело је, иначе, — каже он — већ готово, само га он није могао дати у штампу пошто није могао наћи човека који би му израдио цртеже за слике, којих је било много. Занимљиво је само да у свом тестаменту Геталдић ништа не говори о штампању овог свог главног научног рада. То је вероватно било због тога што је он те своје жеље поверио усмено својим пријатељима, исусовцима Марину Гундулићу и Игњату Тудишевићу. Овај последњи је — како је познато — четири године после смрти

[45]) *Diversa Cancel*. 202 (1622—24) f⁰ 4. Регистрована пресуда арбитражног суда, који је био одређен „a divider beni dal q. S. Mattheo Pietri de Prodenelli fra gli suoi heredi infrascritti che sono: Matheo Sim. de Ghetaldi, S. Marino, S. Andrea, S. Martolizza et S. Jacobo di Mattheo Ghetaldi..."

[46]) *Pacta matrim*. 12 (1617—59), f⁰ 25. Die 2.V.1623. S. Andrea Math de Ghetaldis ex una parte et D. Ora rel. in secundo matrimonio quon S. Marini Mar. de Bona ex alie parte... sponte... dedit et assignavit... omnia bona sua tam mobilia quam stabilia.

[47]) *Diver. cancel*. 202 (1622—24) f⁰ 135. Die 8.II.1624. S. Marinus, S. Anreas et S. Jacobus Math. de Ghetaldis concorditer et unanimi ter accedentes in Cancellariam tulerunt mihi cancellario divisionem seu parzognam infrascritta inter eos facta...

[48]) *Test. Not*. 58 (1525—28) f⁰ 44. Testamentum S. Marini Math. de Ghetaldis Jo Marino di Mat. Ghettaldi trovandomi alquanto indisposto, faccio questo mio testamento... Faccio miei heredi universali le mie tre figliuole a nome D. Aniza, D. Frana, e D. Marra... instituendole per loro tutori, senza che si possono crear altri S. Andrea, S. Giacomo, miei fratelli...

[49]) *Врела и Прилози* 12, стр. 85. Писмо од 15-XI-1625.

Геталдићеве штампао у Риму 1630 године ово Геталдићево дело, посветивши га у име малолетних Геталдићевих кћери кардиналу Франческу Барберинију[50].

У свом тестаменту иначе Геталдић се углавном побринуо да обезбеди своје три кћери, којима је за туторе оставио своју браћу Андрију и Јакова, нагласивши при томе да главни старалац наслеђеног имања буде најмлађи брат Јаков, пошто је и његова имовина све до његове смрти остала неподељена. Јаков је поживео све до 1640 године, а затим је бригу о Мариновим ћеркама преузео старији брат Андрија. У свом тестаменту од 18.I.1640 Јаков је целокупно своје имање оставио Мариновим кћерима, док је своме синовцу Јерониму, сину Мартолице Геталдића, оставио само суму од 150 дуката.[51] Као богате миражџике, Маринове кћери су касније лако нашле мужеве. Године 1645 већ су се почели јављати просиоци, па је због тога 21 јула исте године регистрован у дубровачкој канцеларији уговор о подели материјалних добара између три сестре.[52] Имање је било велико и састојало се из бројних поседа и окућница. Занимљиво је да је приликом поделе очева кућа у којој су дотада сви становали припала најмлађој Марији. Истога дана, када је регистрована ова подела, закључен је и брачни уговор између најстарије Маринове кћери Анице и Павла Сараке.[53] Своме мужу Аница је донела у мираз не само цело своје наслеђе, већ и суму од 400 шкуда коју јој је као свадбени дар поклонио стриц Андрија. Непуних месец дана после тога умро је и Андрија Геталдић. Како сам није имао своје деце, он је такође све своје имање оставио својим братаницама.[54] То његово имање састојало се из земљишних поседа и из готовог новца. Своју кућу на Пустијерни, у којој је сам становао, оставио је средњој сестри Франи. Занимљиво је да је он у посебном додатку свом тестаменту нарочито молио извршиоце тестамента (епитропе) да се постарају да што пре удоме „моје две братанице Франу и Марију," и то не само ради њихове личне среће, већ и због тога да имања која су наследиле не би пропало. Епитропи су ускоро и испунили ову завештачеву жељу, па се ускоро Франа Геталдић удала за Франу Кабогу, док је најмлађа Мара пошла за Николу Басељи.[55]

Како су пре Андрије Геталдића већ били помрли не само остала четири брата Геталдића (Марин, Мартолица, Симон и Јаков), већ и једини син Мартоличин Јероним, то се смрћу Андријином

50) *Ђ. Bašić*, Elogia Jesuitarum ragusinorum, стр. 137, Загреб 1933.

51) *Test. Not.* 62 (1638—42), f° 95: ... „Lascio a S. Geronimo Marth. Ghetaldi mio nepote ducatos 150". Непуних месец дана касније (14. II. 1640) овај Јероним Геталдић је и сам умро, без директних наследника *(Test. Not.* 52, f° 99).

52) *Diver. Not.* 138 (1638—49) f° 49.

53) *Pacta Matrim.* 12 (1617—59),, f° 90. Die 21.VII.1645. S. Paulus Natalis de Saraca ex una parte et D. Aniza filia q. S. Marini Mat. de Ghetaldis parte ex altera sponte ... eadem Aniza ... dedit ... a Paulo suo sponso et futuro merito ... поседе у Ободу, Конављима и др. као и 400 скуда у готову.

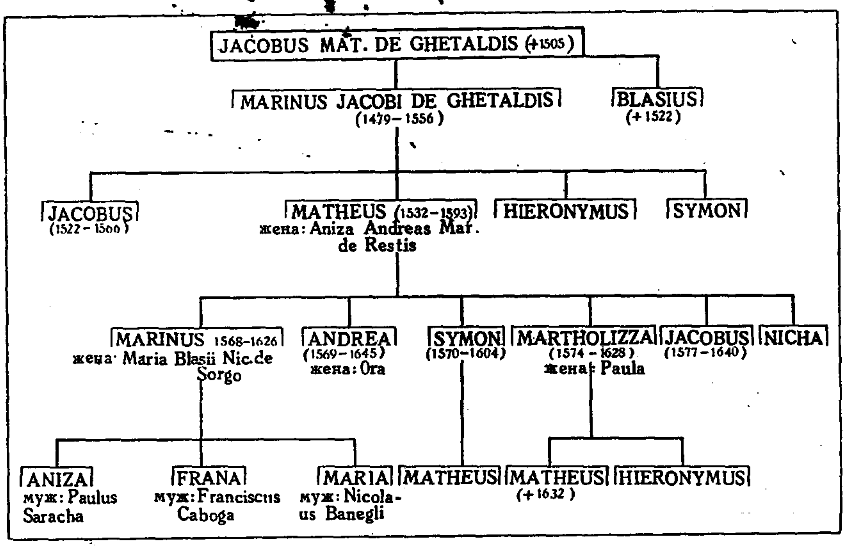
54) *Testamenta Not.* 64 (1645—50) f° 26. рег. 19.VIII.1645 (писан 12.VIII.1645).

55) *Reggistro maritaggi.*

угасила по мушкој линији ова, некада врло бројна грана, породице Геталдића. То нагло изумирање појединих дубровачких властеоских породица претстављало је у то време прави друштвени проблем ондашњег Дубровника, и у том погледу судбина породице Геталдића је врло карактеристична.

На крају, треба поменути још једну занимљиву појединост из живота М. Геталдића. Већ је из расправе О. Кучере, а и иначе позната традиција старих Дубровчана о тзв. „Бетиној шпиљи", која се налазила на Плочама (на обали преко пута Локрума), и у којој је Геталдић изводио своје физичке експерименте (топљење олова сунчевим зрацима и др.). Из пописа Геталдићевих поседа који се помињу у уговору о подели између његових кћери, налазимо да је средња кћи Франа добила том приликом и „giardino alle Ploce con di case e villani et altre terae appresso".[56] До сада се ово причање о Бетиној шпиљи могло узимати и као обична легенда, али овај архивски податак сведочи да у том причању старих Дубровчана има бар нешто истине.

ГЕНЕАЛОГИЈА ПОРОДИЦЕ ГЕТАЛДИЋ



[56]) Исто то имање на Плочама са кућама и баштом помиње се и 1624 у једном уговору између Марина Геталдића и његовог брата Јакова с једне, и Франа Бунића с друге стране (*Liber dotium notariale* 16, f° 144 a tergo). Из тог уговора види се, међутим, да су то имање браћа Геталдић наследила од своје мајке, односно од свог ујака Орсата Анд. Рестића.

CONTRIBUTION À LA BIOGRAPHIE DE MARIN GETALDIĆ

par

D. PAVLOVIĆ (Belgrade)

Dans les travaux parus jusqu'à présent sur le mathématicen ragusain du XVII[e] siècle Marin Getaldić (Ghetaldi), on ne trouve pas beaucoup de précision sur sa vie et son activité de gentilhomme ragusain. Se référant aux documents qu'il a decouverts dans les Archives d'Etat de Raguse, l'auteur de cette note communique des données biographiques nouvelles, relatives à M. Getaldić. Gràce à ces documents l'auteur a précisé d'abord la date de naissance de Getaldić et puis a donné de renseignements nouveaux et plus complets sur les différentes périodes de vie de Getaldić (son éducation, ses fonction dans le service de l'État, ses séjours à Rome et Constatinople, etc.). Ces documents, enfin, fournissent de données nouvelles relatives à la famile de Getaldić et à sa fortune.