Jovo JARIĆ
Dragoslav KUZMANOVIĆ
Aleksandar SEDMAK

TENZORSKI RAČUN SA PRIMENAMA U DIFERENCIJALNOJ GEOMETRIJI I MEHANICI

Teorija i primeri sa rešenjima

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet

Uspomeni prof. dr Vladana Đorđevića, akademika SANU

Jovo JARIĆ,
Dragoslav KUZMANOVIĆ,
Aleksandar SEDMAK

TENZORSKI RAČUN SA PRIMENAMA

U DIFERENCIJALNOJ GEOMETRIJI I MEHANICI

Teorija i primeri sa rešenjima

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet

dr **Jovo Jarić**, penzionisani red. prof. Prirodno - matematičkog fakulteta
Univerziteta u Beogradu
dr **Dragoslav Kuzmanović**, penzionisani red. prof. Saobraćajnog fakulteta
Univerziteta u Beogradu
dr **Aleksandar Sedmak**, prof. emeritus Mašinskog fakulteta
Univerziteta u Beogradu
TENZORSKI RAČUN SA PRIMENAMA
U DIFERENCIJALNOJ GEOMETRIJI I MEHANICI - Teorija i primeri sa rešenjima
I izdanje

Recenzenti:

dr Borislav Gajić, naučni savetnik Matematičkog institute SANU
dr Milan Lečić, red. Prof. Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Izdavač: Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet,
Ul. Kraljice Marije br.16, Beograd
tel. (011) 3370-760, fax. (011) 3370-364, www.mas.bg.ac.rs.

Za izdavača: Dekan, dr Vladimir Popović, red. prof.

Urednik: dr Milan Lečić, red. prof.

Korice: Danica Nikolić, Nenad Pantić.

Štampa: ”Planeta-print”11000 Beograd, www.planeta-print.rs.

Tiraž: 200 primeraka

ISBN 978-86-6060-173-7

Štampanje i izdanja odobrila: Komisija za izdavačku delatnost Mašinskog fakulteta u Beogradu i Dekan Mašinskog fakulteta Odlukom br. 24/2023 od 09.10.2023. godine.

Sadržaj

Uvodna razmatranja

I	Tenzori

III Primena tenzorskog računa u mehanici

Predgovor

Kratak istorijat nastanka ove knjige

U periodu od Novembra 1998. god. do Januara 1999. god. boravio sam (J.J.) na Tokyo Institute of Technology u okviru naučnog programa Japan Society for Promotion od Science, verovatno, u to vreme, prvi naučnik iz Srbije. Bila je to veoma aktivna naučna saradnja (poseta) u okviru koje je došlo do dogovora da se napiše knjiga Tensor Calculus. Trebalo je da autori te knjige budu prof. Jovo Jarić, Matematički fakultet, Beograd, prof. Kikuo Kishimoto i asistent Masaki Omiya sa Tokyo Institute of Technology. Za poslednje dve nedelje boravka (J.J.) već prvih 80 strana teksta na engleskom bilo je napisano. Krajem Januara 1999. god. J.J. morao je da se vrati u Srbiju sa dogovorom da se saradnja nastavi. Neposredno pose toga došlo je do bombadovanja Srbije i naša saradnja je prekinuta. Dugo godina je sve mirovalo dok se moj mladji kolega prof. Dragoslav Kuzmanović nije pojavio sa predlogom da se ta knjiga napiše u daleko opširnijem obimu sa težištem na primeni Tenzorskog računa. Ova saradnja je počela 2018. god. Preliminarni naslov knjige trebalo je da bude

Tenzorski račun sa primenama u diferencijalnoj geometriji i mehanici kontinuuma, sa zadacima i rešenjima.

Zašto smo istakli deo Tenzorski račun sa primenama u mehanici kontinuuma?

Jer je sam naziv tenzor vezan, po svom poreklu, za mehaniku kotinuuma (Woldemar Voigt, po reči tension, napon). Njegov univerzalni karakter i primena sledi kasnije.

Navedimo samo neka polja njegove primene: mehanika kontinuuma, elastričnost, sve oblasti fizike, inženjerske nauke, elektromagnetizam, teorija relativiteta, kvantna teorija polja, medicina, ekonomija, statistika ....

Takođe, primena Tenzorskog računa je na velika vrata ušla, ne samo u okviru naučnih istraživanja, nego kao redovan kurs na studijama.

Bili smo svesni da je literetura, ne samo iz ovih naučnih oblasi, na engleskom jeziku, obimna i bogata. Ideja je bila da se literatura iz ovih oblasti upotpuni (obogati), barem u srpskom jeziku.

Pa šta je to što je novo u odnosu na već poznatu literaturu? Naše iskustvo pokazuje da je bitno razmatrati tenzore kao elemente multilinearne algebre, a ne samo kao veličine koje zadovoljavaju posebne uslove njihove komponentalne reprezentacije. Smatrali smo da se težište izlaganja i prestavljanja tenzora usmeri u dva pravca: invarijantost njegovog prestavljanja i podesnost za njegovo neposredno korišćenje u primeni na konkretnim problemima. Na čitaocu je da oceni i prosudi koliko smo u tome uspeli.

U delu konkretne primene, kao elemeni multilinearne algebre, tenzori su tesno povezani sa matricama drugog reda. To se prvenstveno odnosi na tenzore drugog reda. Zbog toga je poznavanje matričnog računa i linearne algebre od bitnog značaja. U literaturi te dve oblasti su, po pravilu, razmatrane odvojeno. Mislili smo da je uporedno izlaganje iz ovih oblasti vrlo korisno. Isticali smo to i u zadacima koje smo rešavali na oba načina. Time je čitaocu prezentirana razlika u pristupu i, ujedno, ilustrovana prednost tenzorskog računa. Takođe nam omogućuje da, uvek kada to nije neophodno, koristimo bezindeksnu notaciju, ili blok notaciju. To ima svoje prednosti prvenstveno u dva sličaja.

Prvi slučaj se odnosi na invarijatnost odgovarajućih tenzorskih veličina u odnosu na bilo koju koordinatnu transformaciju. Drugi slučaj je predstavljanje fižičkih zakona. Jasno je, da se pri razmatranju konkretnih problema, posebno kada su u pitanju diferncijalne jednačine, nužno koristiti indeksnu notaciju.

Knjiga je podeljena na sledeće delove:

1. **Uvodna razmatranja** koja obuhvataju: Skupove, Topološki prostor, Funkcije, Linearne prostor, Matrice, Karakteristični brojevi, Dijagonalizacija, Projektore, Diferenciranje, Generalisani karakteristični vektori.
2. Tenzorski račun,
3. Diferncijalna geometrija,
4. Primena tenzorskog računa u mehanici kontinuuma.

U Uvodnom delu razmatrani su pojmovi, koji su bitni za razumevanje izlaganja u ostalom delu knjige.

Svaki od tih pojmova predstavlja oblast za sebe. Ovde ih razmatramo, po pravilu, u obimu bitnom za izlaganje u ostalom delu knjige. Neki delovi su, po našem mišljenju, novijeg datuma, ili zaslužuju veću pažnju. Primera radi, navodimo deo koji se odnosi na Teoremu o implicitnim funkcijama, Zavisne funkcije, Projektore, Generalisane inverzne matrice,.... Neki od zadataka su rešavani na originalan način (nama nepoznat u literaturi). Neki zadaci su standardnog karaktera i kasnije su, u drugim delovima knjige, razmatrani metodama tenzorskog računa. Po pravilu, u literaturi, se najčešće ovaj deo razmatra na kraju knjige, kao njen dodatak. Za nas je to bitni deo celine.

2. Tenzorski račun počinjemo sa pitanjem: Zašto tenzorski račun?

Dajemo, po našem mišljenju, detaljno objašnjnje izdvajajući sledeće. Kako je svaki jezik više od gramatike, tako je jezik tenzorske analize više nego notacija. Ona ukazuje na suštinsko svojstvo veličina koje razmatra isto tako kao što govorom ljudi ukazuje na osnovne ideje svoga razmišljanja. U ovom slučaju ideja je da je ”fizički”ili ”geometrijski”entitet isti, iako se njegov matematički opis može razlikovati. To znači da mora postojati veza između bilo kojeg matematičkog opisa ako se odnose na isti entitet. Taj odnos predstavlja suštinu tenzorskog računa (Aris).

Tenzorska notacija je izuzetno kompaktna i eksplicitna, posebno pri diferenciranju. Veoma je praktična pri konkretnom računanju. Kada je reč o notaciji napominjemo sledeće: matice i tenzori su dva različita pojma. Matrice su sistemi drugog reda i matrični račun je sastavni deo tenzorskog računa. Svaki tenzor drugog reda ima svoje predstavljanje preko matrica dugog reda.

Međutim, tenzori su sistemi u opštem slučaju višeg reda. Normalno je da se ova razlika ogleda i u njihovom obeležavanju. Primera radi, tenzoru drugog reda $\boldsymbol{T}$ odgovara matrica $\mathbf{T}$. Mi ovde i nadalje odstupamo od takvog obeležavanja iz prostog razloga što želimo da izbegnemo prekomeran broj oznaka kao i da ukažemo da vezu izmedju kvadratnih matrica i tenzora drugog reda. Tako sa $\mathbf{T}$ obeležavamo **u ovom delu i nadalje knjige tenzor**, matricu sa (T^i_j), (T_{ij}), (T^{ij}) u zavisnosti od reprezentacije tenzora $\mathbf{T}$, a sa $\det\mathbf{T}$ njegovu determinantu. Isto važi i za tenzore višeg reda. U bilo kom drugom slučaju ta razlika će biti posebo naznačena.

Prvi deo se odnosi na tenzore u Euklidskom prostoru $\mathbb{E}_3$, kao prostoru naših opažaja. Na taj način izlaganje o tenzorima i operacijama nad njima je pristupačnije i očiglednije.

Generalizacija na Euklidske prostore većih dimenzija je skoro trivijalna.

Takođe sistem baznih vektora $\mathbf{g}_i$ $(\mathbf{g}^i)$ posmatramo kao sistem prvog reda koji ima tenzorski karakter. U tom slučaju lako je pokazati da je, primera radi, $\mathbf{g}_{i,j} = \mathbf{0}$. Takođe svaku tenzorsku veličinu koja se može predstaviti u blok obliku, bez indeksne notacije, tretiramo kao tenzor nultog reda. To nam znatno uprošćava odgovarajuće operacije nad tenzorskim poljima kao što je diferenciranje. Taj pristup se primenjuje u okviru cele knjige.

Nešto detaljnije smo se takodje zadržali na ∇ operatoru i integralnim teoremama.

Po prirodi stvari, posle Euklidkog porostora, nastavljamo razmatranje Rimanskog prostora. I u ovom delu, počinjemo sa dvodimenzionalnim površima $\mathbb{E}_3$ kao najjednostavnijim Rimanskim prostorima, koji su dostupni našim opažajima. Nastavljamo sa:

3. Primenom tenzorskog računa u diferncijalnoj geometriji.

Ovde Rimanska geometrija dolazi do punog izražaja kao i sve tenzorske veličine koje ga karakterišu kao što su: Hibridni tenzori, Kristofelov simbol, Diferenciranje vektorskih i tenzorskih polja na površi, Izvod hibridnih tenzora, Riman-Kristofelov tenzor, površinske integralne teoreme, ...Dosta detaljna analiza je data pri izvođenju i analizi osnovnih formi površi. Razmatrane su specijalne površi navodeći primere za njihovu reprezentaciju.

Poslednji deo:

4. Primena tenzorskog računa u mehanici kontinuuma je veoma detaljno razmatrana u delovima koji nisu uvek bili zastupljeni u standardnoj literaturi. Navodimo neke delove.

Mehanika kontinuuma u odnosu na neholonomnu bazu, Invarijantnost Lagranžeovih jednačina, Neterina teorema, Ležandrove transformacije, Ležandrove transforacije u mehanici kontinuuma, Ležandrove transformacije u termodinamici,....Veoma značajan deo zauzima deo koji se odnosi na Konstitutivne jednačine,...

Na više mesta i odeljaka pozivamo se na Lagranževe jednačine. Na kraju knjige, izvodimo Lagranževe jedanačine za neproste materijale, koje praktično obuhvataju sve navedene oblike.

Na kraju, skrećemo pažnju čitaocu da smo na više mesta koristili termin AKKO u smislu AKO I SAMO AKO, ili POTREBAN I DOVOLJAN USLOV što je uobičajeno u literaturi.

Takođe je termin REDOM uglavnom korišćen kao sinomim za termin RESPEKTIVNO..

N označava Napomenu.

Zahvalnost.

Pojedina poglavlja knjige trazmatrana sa na Seminari iz mehanike Matematičkog fakulteta u Beogradu. Kritičke primedbe učesnika su bile od velike koristi i stimulacija autorima pri pisanju knjige. Navodimo neka imene Prof. Vladan Đorđević, Prof. Borislav Gajić, Prof. Božidar Jovanović, Prof. Predrag Cvetković, Prof. Ivan Šestak, Prof Siniša Mesarević i drugi.

Posebnu zahvalnost dugujemo recenzentima prof. Borislavu Gajiću i prof. Milanu Lečiću, koji su svojim trudom znatno doprineli kvalitetu knjige.

Takođe dugujemo veliku zahvalnost Mr. Dobrici Nikoliću za izradu ilustracija i slika, kao i Danici Nikolić i Nenadu Pantiću oko theničke pripreme.

Opšte napomene. Svaka knjiga živi onoliko dugo koliko se koristi. Po njenom objavljivanju ona je prevazidjena, u svakom slučaju, u meri novih naučnih saznanja. To je neminovnost.

Naša nova saznanja su nastavak prethodnih saznanja koja su nam dostupna na osnovu postojećih, prvenstveno, sadržanih u literaturi. Nadamo se da smo, bar u maloj meri, ovom knjigom ukazali čitaocu na pravac novih saznanja.

U svakom slučaju, sve dobronamerne kritike su dobro došle.

U Beogradu, jula 2022. god.

Uvodna razmatranja

1. Skupovi

1.1 Skupovi

U ovom poglavlju navešćemo samo one pojmove i operacije nad skupovima, koji su bitni za naše dalje izlaganje.

Skup je osnovni pojam koji se ne definiše. Objekti skupa nazivaju se njegovim elementima. Uobičajeno je da se skupovi obeležavaju velikim slovima $A, B, C, \ldots$, a njihovi elementi malim slovima $a, b, c, \ldots$. Na primer pišemo

$$A = \{a, b, c\}$$

da naznačimo da je A kolekcija elemenata a, b, c. Ako element x pripada skupu A onda označavamo sa

$$x \in A.$$

Ako ne pripada skupu A tada pišemo

$$x \notin A.$$

Uobičajen način predstavljanja skupa je

$$\{x : x \text{ ima svojstvo } P\}$$

i čita se kao skup čiji elementi x imaju svojstvo P.

Po prirodi stvari, najčešće se koriste sledeći skupovi

- $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva,
- $\mathbb{Z}$ skup celih brojeva,
- $\mathbb{Q}$ skup racionalnih brojeva,
- $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva,
- $\mathbb{C}$ skup kompleksnih brojeva,

Sa F, u buduće ćemo označavati bilo koji od ovih skupova.

Skup je **konačan** ako ima konačno mnogo elemenata, u protivnom je beskonačan.

Skup koji nema elemenata naziva se **prazan skup** i obeležava sa $\emptyset$. Primera radi, takav je skup realnih brojeva x koji su rešenje jednačine $x^2+1=0$.

Treba praviti razliku a od skupa $\{a\}$.

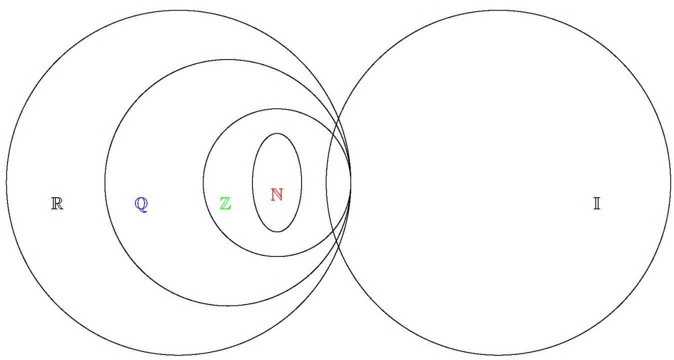
Kažemo da je A **podskup skupa** B i pišemo $A \subset B$, ako svaki element skupa A pripada istovremeno i skupu B

$$A \subset B = \{x \mid x \in A \Rightarrow x \in B\}.$$

Za svaki skup A je $\emptyset \subset A$.

Tako je

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$



Slika 1.1: Skupovi brojeva.

Dva skupa A i B su **jednaka**, ako imaju iste elemente. Drugačije rečeno, svaki element skupa A pripada i skupu B i svaki element skupa B istovremeno pripada i skupu A

$$A = B = \{x \mid x \in A \Leftrightarrow x \in B\}.$$

Partitivni skup PA datog skupa A, je skup svih podskupova datog skupa, tj.

$$PA = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Po definiciji

$$A \in PA, \quad \text{i} \quad \emptyset \in PA.$$

■ **Primer 1.1**

$$A = \{a,b,c\} \quad \Rightarrow \quad PA = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

■

1.1.1 Operacije sa skupovima

Definicija 1.1.1 **Unija** dva skupa je skup koji sadrži sve elemente koji pripadaju bar jednom od skupova A i B. Pišemo

$$A \cup B = \{x | x \in A \, \text{ili} \, x \in B\}.$$

Primer 1.2

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{a, c, d, e\} \quad \Rightarrow \quad A \cup B = \{a, b, c, d, e\}.$$

■

U opštem slučaju, kada imamo konačno mnogo skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$, njihova unija je:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Definicija 1.1.2 **Presek** $A \cap B$ skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji pripadaju i skupa A i skupu B. Pišemo

$$\{A \cap B = \{x | x \in A \quad \text{i} \quad x \in B\}.$$

Primer 1.3

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{a, c, d, e\} \quad \Rightarrow \quad A \cap B = \{a, c\}.$$

■

Ako je presek dva skupa A i B prazan, tj. $A \cap B = \emptyset$, tada za ta dva skupa kažemo da su **disjunktni**.

Ako je dato konačno mnogo skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$, njihov presek je

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Definicija 1.1.3 **Razlika** $A \backslash B$ skupova A i B je skup svih elemenata iz A koji ne pripadaju skupu B. Pišemo

$$A \backslash B = \{x | x \in A \quad \text{i} \quad x \notin B\}.$$

Napomenimo da ne mora biti $B \subset A$.

Primer 1.4

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{a, c, d, e\} \quad \Rightarrow \quad A \backslash B = \{b\}.$$

■

Definicija 1.1.4 **Simetrična razlika** skupova A i B je unija skupova $A \backslash B$ i $B \backslash A$, tj.

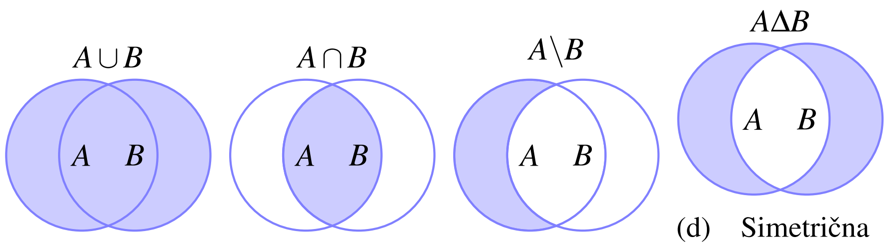
$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

■ **Primer 1.5**

$$A = \{a,b,c\}, \quad B = \{a,c,d,e\}, \quad \Rightarrow \quad A \triangle B = \{b\} \cup \{d,e\} = \{b,d,e\}.$$

■

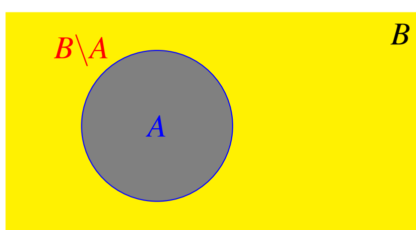
Za grafičko predstavljanje skupova i operacija sa skupovima koriste se Venovi dijagrami (sl. 1.2).



(a) Unija (b) Presek (c) Razlika (d) Simetrična razlika

Slika 1.2: Operacije sa skupovima.

Definicija 1.1.5 **Komplement skupa** A u odnosu na skup B (ili dopuna skupa A do skupa B), gde je $A \subset B$ je skup $\mathbf{C}_B A = B \backslash A$.



Slika 1.3: Komplement skupa.

■ **Primer 1.6**

$$A = \{a,b,c\}, \quad D = \{a,b,c,d,e\}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_D A = \{d,e\}.$$

■

Par elemenata (a,b) nazivamo **uređeni par** (ili uređena dvojka) ako je tačno određeno koji je element na prvom, a koji na drugom mestu.

Uređeni parovi (a,b) i (c,d) su jednaki ako i samo ako je $a=c$ i $b=d$.

Definicija 1.1.6 **Dekartov proizvod** skupova A i B naziva se skup $A\times B = \{(a,b) | a\in A \text{ i } b\in B\}$.

■ **Primer 1.7** Dati su skupovi $A=\{a,b,c\}$ i $B=\{x,y\}$.

$$A\times B = \{(a,x),(b,x),(c,x),(a,y),(b,y),(c,y)\},$$
$$B\times A = \{(x,a),(x,b),(x,c),(y,a),(y,b),(y,c)\}.$$

■

Očigledno da je $A\times B \neq B\times A$, što znači da za Dekartov proizvod skupova ne važi zakon komutacije.

Dekartov proizvod $A\times A$ se označava sa A^2. Dekartov proizvod $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ predstavlja realnu ravan.

Sa $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}$ označavamo Dekartov proizvod n kopija od $\mathbb{R}$. Drugačije rečeno, $\mathbb{R}^n$ je skup svih uređenih n-torki realnih brojeva, tj.

$$\mathbb{R}^n = \{(x^1,x^2,\ldots,x^i,\ldots,x^n),\ x^i\in\mathbb{R} \text{ za svako } i\}. \tag{1.1}$$

Pojedinačnu n-torku pogodno je obeležiti jednim slovom, npr. $\mathbf{x}=(x^1,x^2,\ldots,x^i,\ldots,x^n)$, koju nazivamo **tačka** iz $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.1.7 **Okolina tačke** $x\in X$ je bilo koji otvoren skup u X koji sadrži tačku x.

Definicija 1.1.8 **Okolina skupa** $A\subset U$ je svaki skup V koji sadrži jedan otvoren skup u kome leži skup A. Specijalno, ako se skup A svodi na jednu jedinu tačku x, govorimo o okolini tačke x. Ovo označavamo sa V_x.

Definicija 1.1.9 **Adherentna tačka** skupa $Y\subset X$ je tačka x tako da svaka njena okolina ima neprazan presek sa skupom Y. Skup svih adherentnih tačaka skupa Y naziva se **adherencija skupa** Y i označava se sa $\bar{Y}$.

Definicija 1.1.10 **Unutrašnja tačka skupa** Y je tačka $x\in Y$ koja leži u Y, zajedno sa nekom svojom okolinom.

Definicija 1.1.11 Skup svih unutrašnjih tačaka skupa Y naziva se **unutrašnjost skupa** Y i obelezava se sa $\mathrm{Int}Y$.

Definicija 1.1.12 Skup $Y \subset X$ je **zatvoren** (tj. njegov komplement je **otvoren**) akko je $Y = \bar{Y}$.

Adherencija $\bar{Y}$ proizvoljnog skupa topološkog prostora[1] X je zatvoren skup, tj. $\bar{\bar{Y}} = \bar{Y}$.

1.2 Relacija

Definicija 1.2.1 Neka su X i Y dva neprazna skupa. Bilo koji podskup $X \times Y$ se naziva **relacija** iz X u Y. Bilo koji podskup $X \times X$ naziva se relacija u X.

Definicija 1.2.2 Neka je ρ relacija X u Y. Podskup od X,

$$\{x \in X : (x,y) \in \rho, y \in Y\},$$

naziva se **domen** od ρ.

Definicija 1.2.3 Podskup od Y

$$\{y \in Y : (x,y) \in \rho, x \in X\}$$

naziva se **kodomen**.

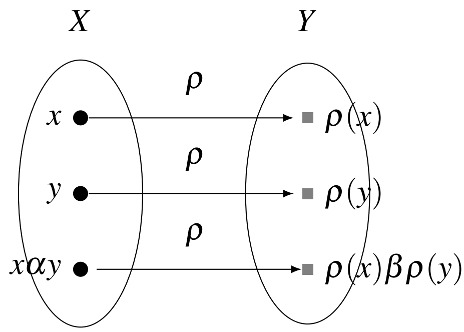
Definicija 1.2.4 Označimo sa $\{X;\alpha\}$ i $\{Y;\beta\}$ skupove X i Y (koji ne moraju biti različiti) u kojima su definisane operacije α i β. Preslikavanje ρ skupa X u skup Y naziva se **homomorfizam** $\{X;\alpha\}$ u $\{Y;\beta\}$ ako je

$$\rho(x\alpha y) = \rho(x)\beta\rho(y)$$

za svako $x,y \in X$.

Slika X, pri preslikavanju ρ, označava se $\rho(X)$ i naziva se **homomorfna slika** od X. Ako je $x \in X$ onda je $\rho(x)$ homomorfna slika od x.

[1] Topološkog prostor biće kasnije definisan.



Slika 1.4: Homomorfizam.

Ustaljena uprošćena oznaka za homomorfizam X u Y je

$$\rho(x \cdot y) = \rho(x) \cdot \rho(y)$$

za svako $x, y \in X$.

■ **Primer 1.8** Neka $\mathbb{R}$ označava skup realnih brojeva i neka $+$ i $\cdot$ označavaju uobičajene operacije sabiranja i množenja na $\mathbb{R}$. Onda je

$$\rho(x) = e^x$$

homomorfizam iz $\{\mathbb{R};+\}$ u $\{\mathbb{R};\cdot\}$. ■

Definicija 1.2.5
- Ako je ρ preslikavanje $1-1$ skupa X u skup Y onda se ρ naziva **izomorfizam** X u Y.
- Ako je $X = Y$ i ρ je homomorfizam, onda se ρ naziva **endomorfizam**.
- Ako je $X = Y$ i ρ je izomorfizam, onda se ρ naziva **automorfizam** od X.

Definicija 1.2.6 **Unutrašnja operacija** je preslikavanje $X \times X$ u X.

■ **Primer 1.9** Množenje realnih brojeva je unutrašnja operacija na skupu realnih brojeva. ■

Definicija 1.2.7 Neka su A i X skupovi. Preslikavanje $A \times X$ u X naziva se **spoljašnja operacija** na X. Elementi A nazivaju se operatori[2] na X.

■ **Primer 1.10** Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva, a $\mathbb{R}^n$ linearni vektorski prostor. Onda je $a \cdot \mathbf{x}$ spoljašnja operacija na $\mathbb{R}^n$, gde je $a \in A$, a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. ■

[2] U matematici se pod operatorom podrazumeva, u opštem slučaju, preslikavanje ili funkcija koja deluje na elemente prostora i proizvodi elemente drugog, ili istog prostora.

1.2.1 Semigrupa i Grupa

■ **Primer 1.11** **Binarna operacija** $*$ na M je preslikavanje $M \times M$ u M, tj.

$$* : M \times M \to M.$$

■

■ **Primer 1.12** Neka je $*$ operacija na skupu M. Nazivamo $(M,*)$ **semigrupom** ako je $*$ asocijativna operacija na M. ■

U tom slučaju za $x,y,z \in M$ je

$$x*(y*z) = (x*y)*z = u \in M.$$

Prema konvenciji jednostavno pišemo

$$u = x*y*z.$$

■ **Primer 1.13** **Grupa** $\mathscr{G}$ je semigrupa $(M,*)$ sa identitetom u kome svaki element ima inverzni. ■

Drugačije rečeno, skup M nazivamo **grupom** $\mathscr{G}$ ako je u njemu definisana binarna operacija $*$ tako da je za svako

$$x,y \in M \quad \Rightarrow \quad z = x*y \in M,$$

i ima sledeća svojstva:

1. $(x*y)*z = x*(y*z)$ - asocijativnost,
2. postoji jedinični element $e \in M$ takav da je $e*x = x*e = x$, za svako $x \in M$,
3. za svako $x \in M$ postoji inverzni element $x^{-1} \in M$ takav da je $x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$.

■ **Primer 1.14** Ako je binarna operacija grupe komutativna za grupu se kaže da je **komutativna** ili **Abelova grupa**. ■

Grupa mora da sadrži bar jedan element. Takva grupa $X = (e)$ naziva se **trivijalna grupa**. Po definiciji ona je i Abelova grupa.

1.2.2 Prsten

Definicija 1.2.8 **Prsten** je skup M u kome su definisane dve binarne operacije sabiranje $+ : M \times M \to M$ i množenje $\cdot : M \times M \to M$, tako da je:

1. M Abelova grupa u odnosu na operaciju sabiranja $+$,
2. operacija množenja $\cdot$ je asocijativna i distributivna u odnosu na množenje,

tj.

$$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z,$$
$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z,$$
$$(y+z)\cdot x = y\cdot x + z\cdot x, \quad \text{za svako } x,y,z \in M.$$

Ako M sadrži jedinični (identični) element e, tako da je $e\cdot x = x\cdot e = x$ za svako $x \in M$, onda se prsten naziva **prsten sa identitetom**. Ako je prsten Abelov, u odnosu na množenje, onda se on naziva **Abelov prsten**.

1.2.3 Polje

Definicija 1.2.9 Prsten sa identitetom naziva se **polje** F ako su svi njegovi elementi, izuzev nule (neutralni element sabiranja), regularni[3].

■ **Primer 1.15** Sledeći poznati sistemi su primeri polja, u odnosu na operacije običnog sabiranja i množenja:

1. Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$,
2. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$,
3. Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$,

■

■ **Primer 1.16** Sledeći poznati sistemi su prsteni, u odnosu na operacije običnog sabiranja i množenja:

1. Skup celih brojeva $\mathbb{Z}$,
2. Skup svih polinoma P, jedne nezavisno promenljive, sa realnim koeficijentima.

■

1.2.4 Moduli

Modul M nad prstenom R je Abelova grupa M zajedno sa spoljašnjim množenjem, koje se naziva skalarno množenje: $R\times M \to M$, tj. $(a,x) \to ax$, tako da je:

$$a(x+y) = ax + ay,$$
$$(a+b)x = ax + bx,$$
$$(ab)x = a(bx),$$

za svako $a,b \in R$ i $x,y \in M$.

Ako prsten R ima identični element e onda je

$$ex = x, \quad \text{za svako } x \in M.$$

[3] Ako elment $x \in M$ ima inverzni element onda se kaže da je x regularan ili nesingularan.

1.2.5 Algebra

Definicija 1.2.10 **Algebra** $\mathscr{A}$ je modul nad prstenom R sa identitetom zajedno sa unutrašnjom asocijativnom operacijom, koja se obično naziva množenjem, tako da je

1. $\mathscr{A}$ prsten i
2. spoljašnja operacija $(\alpha, x) \to \alpha x$ je takva da je

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

Najveći broj algebri su linearni prostori zajedno sa unutrašnjom operacijom, koja se naziva množenje. Opšta definicija, koja je ovde data, obuhvata takve algebre kao algebre tenzorskih polja nad prstenom funkcija.

2. Topološki prostor

Definicija 2.0.1 Neka je X neprazan skup i neka je τ familija podskupova skupa X. Par $(X;\tau)$ je **topološki prostor** ako je:

(i) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$

(ii) unija bilo koje kolekcje podskupova u τ je u τ,

(iii) presek konačne kolekcije podskupova u τ je u τ.

Podskupovi u τ nazivaju se **otvoreni podskupovi** od X. Familija τ za skup X naziva se **topologija** skupa X.

Definicija 2.0.2 Neka je (X,τ) topološki prosotor. Za potprostor S od X kažemo da je **zatvoren skup** u (X,τ) ako je njegov komplement u X, tj. $X\backslash S$ ($\mathbf{C}_X S$), otvoren u (X,τ).

Definicija 2.0.3 Neka je (X,τ) topološki prostor. Kolekcija $\mathscr{B}$ otvorenih podskupova od X naziva se **baza** topologije τ ako je svaki otvoreni skup unija članova $\mathscr{B}$.

N Uočimo da je i samo τ baza od τ.

■ **Primer 2.1** Neka je $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ i

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}.$$

Onda je $\mathscr{B} = \{\{a\}, \{c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$ baza za τ jer je $\mathscr{B} \subseteq \tau$ i svaki član τ može biti izražen kao unija članova $\mathscr{B}$. ■

■ **Primer 2.2** Neka je $X = \{a,b,c\}$ i $\mathscr{B} = \{\{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$. Onda $\mathscr{B}$ nije baza za bilo koju topologiju skupa X. Da bismo to pokazali, pretpostavimo da je $\mathscr{B}$ baza za neku topologiju τ. Onda se τ sastoji od unije skupova u $\mathscr{B}$, tj.

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}.$$

Međutim, τ nije topologija, jer skup $\{b\} = \{a,b\} \cap \{b,c\}$ nije u τ prema definiciji topologije. Kontradikcija, pa je pretpostavka pogrešna. Znači $\mathscr{B}$ nije baza bilo koje topologije od X. ∎

Definicija 2.0.4 Neka je (X,τ) topološki prostor, N podskup od X i p tačka u X. Onda se za N kaže da je **okolina tačke** p ako postoji otvoreni skup U takav da je $p \in U \subseteq N$.

U specijalnom slučaju, kada je posmatrani prostor prostor realnih brojeva $\mathbb{R}$, koristi se termin **interval** za okolinu tačke $p \in \mathbb{R}$.

■ **Primer 2.3** Zatvoreni interval $[0,1]$ u $\mathbb{R}$ je okolina tačke $\frac{1}{2}$, jer je $\frac{1}{2} \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \subseteq [0,1]$. ∎

■ **Primer 2.4** Interval $(0,1]$ u $\mathbb{R}$ je okolina tačke $\frac{1}{4}$, jer je $\frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2}) \subseteq (0,1]$. Međutim, $(0,1]$ nije okolina tačke 1, jer ne postoji otvoren skup U takav da je $1 \in U \subseteq (0,1]$. ∎

Definicija 2.0.5 Neka je A podskup topološkog prostora (X,τ). Tačka $x \in X$ je **granična tačka** A akko svaka okolina x sadrži tačku iz A različitu od x.

Kao posledica ove definicije sledi da je skup zatvoren akko sadrži svoje granične tačke.

Definicija 2.0.6 Neka je A podskup topološkog prostora (X,τ) i A' skup svih graničnih tačaka od A. Tada je $A \cup A'$ zatvoren skup. Skup $A \cup A'$ naziva se **zatvaranje** od A i oblelžava se sa $\bar{A}$.

Definicija 2.0.7 Neka je A podskup topološkog prostora (X,τ). Onda se za A kaže da je **gust** u X, ili **svuda gust** u X ako je $\bar{A} = X$.

Definicija 2.0.8 Za topološki prostor (X,τ) kaže se da zadovoljava **prvi aksiom prebrojivosti** ako za svako $x \in X$ postoji prebrojiva familija $\{U_i(x)\}$ otvorenih skupova koji sadrže x tako da svaki otvoreni skup V koji sadrži x ima bar jedan skup od $U_i(x)$ kao podskup. Prebrojiva familija $\{U_i(x)\}$ naziva se **prebrojiva baza** u x.

Definicija 2.0.9 Za topološki prostor (X,τ) kaže se da zadovoljava **drugi aksiom prebrojivosti** ako postoji baza $\mathscr{B}$ za τ tako da se baza $\mathscr{B}$ sastoji samo od prebrojivog broja skupova.

Definicija 2.0.10 Za topološki prostor (X,τ) kaže se da je **separabilan** ako ima gust podskup koji je prebrojiv.

Definicija 2.0.11 Neka su (X, τ_X) i (Y, τ_Y) topološki prostori. Onda se za funkciju preslikavanja $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ kaže da je **neprekidno preslikavanje** ako je za svako $U \in \tau_Y$ preslikavanje $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

Definicija 2.0.12 Funkcija $f : X \to Y$ između dva topološka prostora (X, τ_X) i (Y, τ_Y) je **homeomorfizam** ako je:
- bijekcija,
- neprekidna funkcija i
- njena inverzna funkcija f^{-1} neprekidna (f je otvoreno preslikavanje).

■ **Primer 2.5** Bilo koji otvoreni interval u $\mathbb{R}$ je homeomorfan bilo kojem drugom otvorenom intervalu. Npr. $(0,1)$ može biti preslikan na $(0,5)$ neprekidnim preslikavanjem $x \to 5x$. Prostor $[0,1]$ nije homeomorfan prostoru $(0,1)$ niti prostoru $[0,1)$. Granične tačke predstavljaju problem pri neprekidnom preslikavanju. ■

■ **Primer 2.6** Neka su topološki prostori

$$X = \{a, b, c, d, e\} \quad \text{i} \quad Y = \{g, h, i, j, k\},$$

a njihove topologije

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\} \quad \text{i}$$
$$\tau_1 = \{Y, \emptyset, \{g\}, \{i, j\}, \{g, i, j\}, \{h, i, j, k\}\}$$

redom. Funkcija $f : X \to Y$, definisana sa $f(a) = g$, $f(b) = h$, $f(c) = i$, $f(d) = j$ i $f(c) = k$, definiše homeomorfizam između (X, τ) i (Y, τ_1). ■

Definicija 2.0.13 Neka je I skup O_i $(i \in I)$ familija otvorenih skupova topološkog prostora (X, τ). Neka je A podskup (X, τ). Onda se za O_i $(i \in I)$ kaže da je **otvoreno prekrivanje** od A ako je $A \subseteq U_{i \in I} O_i$. Konačan broj skupova $O_{i_1}, \dots, O_{i_n}$ od O_i $(i \in I)$ naziva se **konačno prekrivanje** skupa A ako je $A \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}$.

Konačna podfamilija $O_{i_1}, O_{i_2}, \dots, O_{i_n}$ od O_{i_i} $(i \in I)$ se naziva **konačno potpokrivanje** od A ako je $A \subseteq O_{i_1}, O_{i_2}, \dots, O_{i_n}$.

Definicija 2.0.14 Za podskup A, topološkog prostora (X, τ) kaže se da je **kompaktan** ako svako otvoreno prekrivanje A ima konačno potpokrivanje.

Definicija 2.0.15 Za topološki prostor (X, τ) kaže se da je **povezan** ako su samo potprostori od X, koji su i povezani i zatvoreni, skupovi $\emptyset$ i X.

Definicija 2.0.16 Ako je $A \subset X$, a X ima topologiju τ, onda imamo **relativnu**

ili **indukovanu** topologiju τ_A definisanu sa

$$\tau_A = \{G \cap A | G \in \tau\}.$$

Definicija 2.0.17 Podskup A od X je **povezan** ako je A u odnosu na relativnu topologiju povezan.

2.1 Hausdorfov prostor

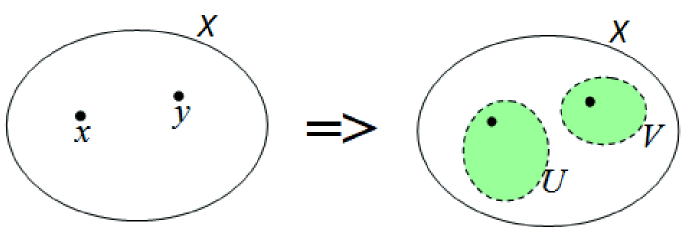
Definicija 2.1.1 Okolina tačke x u X je skup $N(x)$ koja sadrži otvoreni skup, a koja sadrži tačku x.

Podskup $A \subset X$ je otvoren akko je okolina svake svoje tačke.

Definicija 2.1.2 Topološki prostor je **Hausdorfov prostor** ako bilo koje dve tačke poseduju disjunktne okoline.

U Hausdorfovom prostoru tačke su zatvoreni podskupovi. Uobičajena topologija na $\mathbb{R}$ je Hausdorfova.

Primeri



Slika 2.1: Primer Hausdorfovog prostora.

3. Funkcije

Definicija 3.0.1 Neka su X i Y dva neprazna skupa. **Funkcija** f iz X u Y je podskup $X \times Y$ takav da za svako $x \in X$ postoji jedno i samo jedno $y \in Y$ tako da je $(x,y) \in f$. Skup X naziva se **domen** od f (ili **oblast definisanosti** f) i kažemo da je f definisano **na** X. Skup $\{y \in Y : (x,y) \in f \quad \text{za neko } x \in X\}$ naziva se **kodomen** f i označava se sa $\mathfrak{R}(f)$. Za svako $(x,y) \in f$ kažemo da je y vrednost f u x i označavamo je sa $y = f(x)$. U literaturi uobičajeni načnin označavanja funkcije f od X u Y je $f : X \to Y$.

Takođe termini: preslikavanje, operator transformacija se koriste za funkciju.

Ponekad je pogodno da se za domen funkcije koristi podskup $\mathfrak{D}$ skupa X. U svakom slučaju domen funkcije f označava se sa $\mathfrak{D}(f) \subset X$.

Definicija 3.0.2 Neka f preslikava X u Y.

(i) Ako je $\mathfrak{R}(f) = Y$ onda f preslikava X **na** Y i naziva se **surjekcija**.

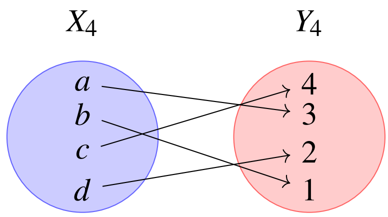
(ii) Ako je funkcija f takva da za svako $x_1, x_2 \in X$ iz $f(x_1) = f(x_2)$ sledi da je $x_1 = x_2$, onda je ovo preslikavanje **jedan-jedan** (**1-1**) ili **injektivno**. Takva funkcija f naziva se **injekcija**.

(iii) Ako je $f(x)$ i injektivno i surjektivno onda je preslikavanje f jedan-jedan i na i f se naziva **bijekcija**.

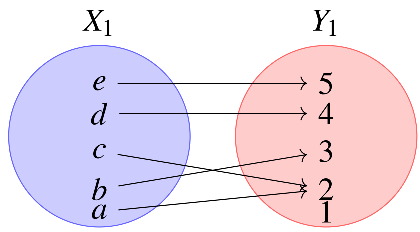
■ **Primer 3.1** Preslikavanje $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$:

- $y = x^3$ je bijekcija,
- $y = e^x$ je **1-1** - injekcija, ali nije **na**,
- $y = x^3 + x^2$ je **na** tj. surjekcija ali nije **1-1**,
- $y = \sin x$ nije ni **na** ni **1-1**.

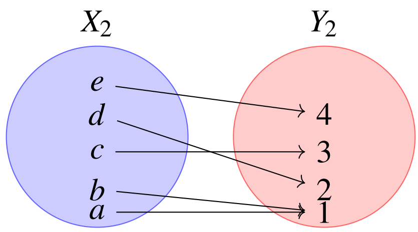
■



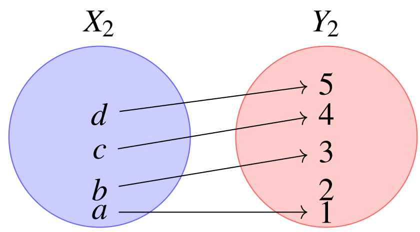
(a) $f_4 : X_4 \to Y_4$ - bijekcija.



(b) $f_1 : X_1 \to Y_1$ - u.



(c) $f_2 : X_2 \to Y_2$ - na.



(d) $f_3 : X_3 \to Y_3$ - 1-1.

Slika 3.1: Ilustracija različitih tipova preslikavanja.

Definicija 3.0.3 Neka je f funkcija iz skupa X u skup Y. Ako postoji funkcija g takva da je $g(f(x)) = x$ za svako $x \in X$ i $f(g(y)) = y$ za svako y u Y onda funkciju g nazivamo **inverzna funkcija** funkcije f. Nadalje ćemo je obeležavati sa f^{-1}.

■ **Primer 3.2** Neka je $X = Y = \mathbb{R}$, skup realnih brojeva. Neka je $f : X \to Y$ dato sa $f(x) = x^3$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Onda je f bijekcija i $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ za svako $y \in Y$. ■

Od značaja je pojam koji se odnosi na funkciju $f : X \to Y$, koja nije bijektivna. Taj pojam se uvodi sledećom definicijom.

Definicija 3.0.4 Neka funkcija f preslikava skup X u skup Y. Ako je S bilo koji podskup Y, onda skup $f^{-1}(S)$, definisan sa

$$f^{-1}(S) = \{x : x \in X \,\mathrm{i}\, f(x) \in S\}.$$

nazivamo **inverzna slika** skupa S.

■ **Primer 3.3** Neka je $f(z) = |z|$, za svako $z \in \mathbb{Z}$. Funkcija f nije $\mathbf{1-1}$ jer je $f(1) = f(-1)$. Nije ni **na** jer ne postoji $z \in \mathbb{Z}$ tako da je $f(z) = -1$. Dakle, f nije bijekcija. Prema tome, ne postoji inverzna funkcija funkcije f, prema definiciji 3.0.3.

Međutim, postoje inverzne slike. Na primer

$$f^{-1}(\{1,2,3\}) = \{-1,-2,-3,1,2,3\},$$
$$f^{-1}(\{-5,3,5,7,9\}) = \{-3,-5,-7,-9,3,5,7,9\}.$$

■

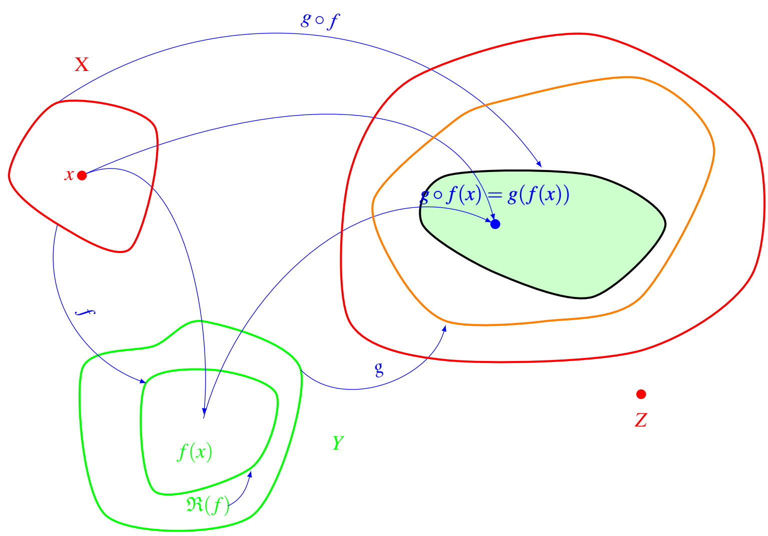
3.1 Kompozicija (složene) funkcija

Neka su X, Y i Z neprazni skupovi. Pretpostavimo da je $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$. Za svako $x \in X$ imamo da je $f(x) \in Y$ i $g(f(x)) \in Z$. Kako su f i g preslikavanja od X u Y i od Y u Z, redom, sledi da za svako $x \in X$ postoji jedan i samo jedan element $g(f(x)) \in Z$. Prema tome, skup

$$\{(x,z) \in X \times Z : z = g(f(x)),\ x \in X\} \tag{3.1}$$

je funkcija od X u Z. Takvu funkciju nazivamo **kompozitna funkcija**, ili **složena funkcija** od g i f i obeležavamo je sa $g \circ f$. Vrednost funkcije $g \circ f$ u x je

$$(g \circ f)(x) = g \circ f(x) \equiv g(f(x)).$$



Slika 3.2: Složena funkcija.

Teorema 3.1.1 Ako je f preslikavanje skupa X **na** skup Y i g preslikavanje skupa Y **na** skup Z, onda je $g \circ f$ preslikavanje X **na** Z.

Vežba 3.1 Dokazati Teoremu 3.1.1

Teorema 3.1.2 Ako je f preslikavanje $(\mathbf{1}-\mathbf{1})$ skupa X **na** skup Y i g je preslikavanje $(\mathbf{1}-\mathbf{1})$ skupa Y **na** skup Z, onda je $g \circ f$ preslikavanje $(\mathbf{1}-\mathbf{1})$ X **na** Z.

Vežba 3.2 Dokazati Teoremu 3.1.2

Teorema 3.1.3 Ako je f preslikavanje $(\mathbf{1}-\mathbf{1})$ skupa X **na** skup Y i g je preslikavanje $(\mathbf{1}-\mathbf{1})$ skupa Y **na** skup Z, onda je $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Dokaz

Neka je $z \in Z$. Onda postoji neko $x \in X$ tako da je $g \circ f(x) = z$, pa je $(g \circ f)^{-1}(z) = x$. Takođe, kako je $g \circ f(x) = g(f(x)) = z$, sledi da je $g^{-1}(z) = f(x)$, pa je $f^{-1}(g^{-1}(z)) = x$. Ali tada je $f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1} \circ g^{-1}(z) = x$. Prema tome, imamo $f^{-1} \circ g^{-1}(z) = (g \circ f)^{-1}(z)$. Kako je z proizvoljno tada je $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

N Važno je uočiti da, u Teoremi 3.1.3, f je preslikavanje X **na** Y. Ako bi ovo preslikavanje bilo samo injektivno onda kompozicija funkcija $(f^{-1}) \circ (g^{-1})$ ne bi bila definisana. Znači domen funkcije f^{-1} mora da obuhvata sliku od g^{-1} da bi kompozicija $(f^{-1}) \circ (g^{-1})$ bila definisana.

3.2 Implicitne funkcije

Očigledno je da jednačina krive, u ravni Oxy, izražena u eksplicitnom obliku $y = f(x)$, može uvek da se izrazi u implicitnom obliku $F(x,y) = y - f(x) = 0$. Obrnuto, ako je jednačina data u obliku $F(x,y) = 0$, ona ne predstavlja, u opštem slučaju, funkciju. Na primer

$$F(x,y) = y^2 - 2xy - x^5 = 0, \tag{3.2}$$

uvek predstavlja relaciju, tj. skup parova (x,y) koji zadovoljavaju jednačinu. Nameće se, prirodno, sledeće pitanje: kada je relacija, definisana sa $F(x,y) = 0$ takođe funkcija? Drugim rečima, kada se jednačina $F(x,y) = 0$ može eksplicitno rešiti po y u funkciji x, dajući jedinstveno rešenje.

U prethodnom primeru, jednačinu (3.2) možemo da rešimo po y tako da je

$$y = f(x) = x \pm x\left(1+x^3\right)^{1/2}. \tag{3.3}$$

Očigledno je da imamo dve eksplicitne funkcije, iz jedne implicitne relacije: jedna, koja odgovara znaku + i druga koja odgovara znaku -. Prema tome, moramo da ograničimo našu pažnju na okolinu posebne tačke.

Na primer, tačka: $x = 2$, $y = 8$ zadovoljava relaciju $F(x,y) = 0$ (3.2), ali samo jednu od eksplicitnih oblika (3.3). U opstem slučaju, ono što nam treba je tvrđenje da postoji funkcija $y = f(x)$, koja zadovoljava $F(x, f(x)) = 0$ i za koju je $f(2) = 8$, čak i kada ne bismo mogli dobiti njen eksplicitni oblik

$$f(x) = x + x(1+x^3)^{1/2}.$$

Ovo je korisno ako želimo da posmatramo x kao funkciju od y, recimo $g(y)$, za koju ovde ne postoji eksplicitna formula. U tački $x = -1$, $y = -1$ (ili $x = 0$, $y = 0$) smo u nevolji, jer obe formule su valjane. Odredimo kriterijum za takve tačke.

U tu svrhu, dokažimo nekoliko opštih teorema, koje su potrebne. Dokaz najprostijih teorema biće detaljno dat.

Sledeća Teorema nam određuje dovoljne uslove kada se ovaj problem može rešiti lokalno, u okoline neke tačke. Tvrđenje i dokaz ove teoreme prvo ćemo dati u najjednostavnijem slučaju funkcije dve promenljive $F(x,y)$ i u elementarnom obliku.

3.2.1 Teorema o implicitnim funkcijama

Teorema 3.2.1 Neka su $F(x,y)$ i njeni parcijalni izvodi neprekidne funkcije u otvorenoj okolini tačake (x_0, y_0). Ako je $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ onda, u opštem slučaju, u infinitezimalnoj okolina tačke (x_0, y_0):

i) postoji samo jedna funkcija $f(x)$ takva de je $F(x, f(x)) = 0$ i $y_0 = f(x_0)$,
ii) tako određena funkcija $f(x)$ je neprekidna i
iii) njeni izvodi su neprekidni.

Dokaz

i) Bez gubljenja u opštosti, pretpostavimo da je $F(x_0, y_0) = 0$. (Ako to nije slučaj, tj. ako je $F(x_0, y_0) = C$, gde je $C \neq 0$, onda možemo posmatrati funkciju $G(x,y) = F(x,y) - C$ za koju je očigledno $G(x_0, y_0) = 0$.)

Neka $\dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv F_y$ nije nula u (x_0, y_0), ili kraće $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Prema uslovu teoreme postoji otvorena okolina tačke (x_0, y_0) u kojoj su F, F_x i F_y neprekidne funkcije.Tada u uočenoj okolini postoji infinitezimalni pravougaonik

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$$

u kome $F_y(x, y)$ ima isti znak kao $F_y(x_0, y_0)$. Neka je, bez gubljenja u opštosti, $F_y(x_0, y_0) > 0$. (Ako je $F_y(x_0, y_0) < 0$ onda funkcija $H(x, y) = -F(x, y)$ zadovoljava traženi uslov.). To znači da je

$$F(x_0, y_0 + b) > 0 \quad \text{i} \quad F(x_0, y_0 - b) < 0.$$

Neka je (x_1, y_1) bilo koja tačka tako da je

$$|x_1 - x_0| \leq a, \quad |y_1 - y_0| \leq b.$$

Kako je $F(x_0, y_0 + b) > 0$ i $F(x, y)$ neprekidno onda je $F(x_1, y_0 + b) > 0$. Na isti način zaključujemo da je $F(x_1, y_0 - b) < 0$. Za fiksnu tačku x_1 uvedimo oznaku $K(y) = F(x_1, y)$. Onda je $K(y_0 + b) > 0$ i $K(y_0 - b) < 0$. Prema tome, postoji neko y između $y_0 - b$ i $y_0 + b$ tako da je $K(y) = 0$, tj. $F(x_1, y) = 0$. Ova vrednost y je jedistvena. Pošto ovo važi za svako (x, y) za koje je $|x - x_0| \leq a$ uočenog pravougaonika i pošto tako određeno y zavisi od x pišemo $y = f(x)$ tako da je $F(x, f(x)) = 0$.

ii) Na osnovu prethodnog izvođenja dokaza sledi da je $y = f(x)$ neprekidna funkcija. Naime, iz $x \to x_0$ sledi $y \to y_0 = f(x_0)$.

iii) Prema teoremi o srednjoj vrednosti funkcije $F(x, y)$ biće

$$\Delta F = F(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y,$$

gde su parcijalni izvodi izračunatu u tački $(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)$. Za funkciju $F(x, y) = 0$ je $\Delta F = 0$, pa je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

gde su parcijalni izvodi izračunatu u tački $(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)$. U graničnom slučaju, kada $\Delta x \to 0$, dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

N Uočimo da smo tako dobili, u opštem slučaju, mali deo funkcije unutar posmatranog intervala. Međutim, uslov teoreme je dovoljan za svako x_1 u tom intervalu. Onda možemo početi konstrukciju funkcije $f(x)$ počevši od tačke (x_1, y_1) u datom intevalu produžujući je sve do tačke u kojoj je $F_y = 0$, jer onda ne može da se nađe jednoznačno rešenje.

N U mnogim slučajevima nalaženje konačnog oblika funkcije $y = h(x)$ koja zadovoljava uslove teoreme je veoma teško i često nemoguće ili nepotrebno. Najčešće je dovoljno da se zna da takva funkcija postoji.

Neki primeri

■ **Primer 3.4** Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gde je $f(x,y) = y^2 - 2xy + 1$. Posmatrajmo skup $C = ((x,y)|f(x,y) = 0)$. Onda je $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x$ jednako nuli samo ako je $x = y$. Prema tome je $f(y,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad -y^2 + 1 = 0$ u tačkama $P(1,1)$, $Q(-1,-1) \in C$ u kojima je $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Na osnovu teoreme sledi da je $y = h(x)$ u okolini svih tačaka u C izuzev tačaka $P(1,1)$ i $Q(-1,-1)$.

S druge strane parcijalni izvod $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$ nije nikad nula u C i prema tome je $y = h(x)$ u oklolini svih njenih tačaka. Na kraju navedimo da je $f(x,y) = 0$ moguće rešiti i po y i x tako da je

$$y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}, \quad x = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right).$$

Samo jedna grana, prve jedanačine je važeća u okolini tačke $(x,y) \in C$ pod uslovom da je $|x| > 1$. Međutim, u tačkama $x = \pm 1$ ni jedna od dve grane ne definišu funkciju $y = h(x)$ u svojim okolinama, jer za $|x| < 1$ nije definisana realna vrednost od $\sqrt{x^2 - 1}$. Uočimo da su to baš te tačke u kojima je $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Lako je videti da je druga jednačina, $x = \frac{1}{2}\left(y + \dfrac{1}{y}\right)$, definisana za svako $y \in C$, $(y = 0 \notin C)$. ■

■ **Primer 3.5** Neka je

$$f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 \quad \text{i} \quad C = \{(x,y)|f(x,y) = 0\}.$$

Onda su

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

i jednake su nuli u tačkama (x,y), ako je: $P(0,0)$, $Q(\sqrt{1/2},0)$ i $R(-\sqrt{1/2},0)$. Samo je tačka $P(0,0) \in C$. ■

■ **Primer 3.6** $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gde je $f(x,y) = y^3 + x^2 - 3xy - 7$. Onda je $f(x,y) = 0$ u tački $P(4,3)$. Pretpostavimo da možemo naći fukciju $y = h(x)$ u okolini tačke P koja je rešenje jednačine $f(x,y) = 0$. U tim tačkama je

$$f(x,h(x)) = h^3(x) + x^2 - 3x\,h(x) - 7 = 0,$$

gde smo sa $(h(x))^3$ označili sa $h^3(x)$. Diferenciranjem ove jedančine po x dobijamo da je

$$3h^2(x)\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} + 2x - 3h(x) - 3x\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Onda je

$$\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3\left[h^2(x) - x\right]}\left[3h(x) - 2x\right].$$

U tački $P(4,3)$ je $\left.\dfrac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}\right|_P = \frac{1}{15}$. Prema tome, uslovi teoreme o egzistenciji funkcije $y = h(x)$ u okolini tačke $P(4,3)$ su zadovoljeni.

Uočimo da je to moguće samo ako je $h^2(x) - x \neq 0$. S druge strane je $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 - x)$ tako da je $h^2(x) - x \neq 0$ zadovoljeno u tački $P(4,3)$. ■

Teorema 3.2.1 može da se proširi na razne načine.

Na primer, na isti način se dokazuje da funkcija $F(x,y,z) = 0$ definiše jedinstvenu funciju $z = f(x,y)$ kroz tačku $(x_0, y_0.z_0)$ pod uslovom da

$$F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0.$$

Sledeća teorema je proširenje prethodne teoreme na dve simultane jednačine:

$$\varphi(x,y,z) = 0, \quad \psi(x,y,z) = 0. \tag{3.4}$$

Teorema 3.2.2 Neka je $\varphi(x_0,y_0,z_0) = 0$ i $\psi(x_0,y_0,z_0) = 0$. Neka su $\varphi(x,y,z)$ i $\psi(x,y,z)$ diferencijabilne u okolini R tačke (x_0,y_0,z_0) i neka je Jakobijan

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{3.5}$$

različit od nule. Tada, postoji jedan i samo jedan skup rešenja

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

koja su neprekidna i zadovoljavaju jednačine $\varphi(x,y,z) = 0$, $\psi(x,y,z) = 0$ a za koja je $y_0 = y(x_0)$, $z_0 = z(x_0)$. Štaviše, $y = y(x)$, $z = z(x)$ su diferencijabilne.

Dokaz

Kako je Jakobijan (3.5) različit od nule u tački (x_0, y_0, z_0) tada je najmanje jedan od parcijalnih izvoda $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ ili $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ različit od nule.

Pretpostavimo da je $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ različit od nule u (x_0, y_0, z_0). Tada, prema Teoremi 3.2.1 $\psi(x,y,z) = 0$ određuje jedinstvenu diferencijabilnu funkciju $z = \phi(x,y)$. Ako sada zamenimo ovu funkciju u $(3.4)_1$ dobijamo $F(x,y) = \varphi(x,y,\phi(x,y)) = 0$.

Dalje, da bismo dokazali Teoremu 3.2.2 dovoljno je pokazati da je

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0 \tag{3.6}$$

u (x_0, y_0). U tom cilju, eliminišimo $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ iz ovog izraza koristeći identičnost $\psi(x,y,\phi(x,y)) = 0$. Onda je

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \tag{3.7}$$

koja se može rešiti po $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ u okolini tačke (x_0, y_0, z_0). Tada iz (3.6) i (3.7) dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y,z)} \Big/ \frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{3.8}$$

Međutim, $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y,z)}$ i $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ u (x_0, y_0, z_0) su različiti od nule, prema hipotezi i našoj pretpostavci, redom. Stoga, isto važi i za $\frac{\partial F}{\partial y}$. Prema tome, (3.6) određuje jedinstvenu funkciju $y = y(x)$. Onda, zamenom ovog u $z = \phi(x,y)$ dobijamo $z = \phi(x, y(x))$, tj. $z = z(x)$.

Opštija teorema sledi.

Teorema 3.2.3 Neka je skup funkcija

$$F_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n$$

diferencijabilan u okolini tačke $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = (x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$. Dalje, neka je $F_i(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$ i neka je Jakobijan

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \tag{3.9}$$

različit od nule u $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$. Tada postoji okolina R od $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ i jedinstven skup funkcija

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_m) \tag{3.10}$$

koji je rešenje skupa jednačina

$$F_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0. \tag{3.11}$$

Osim toga funkcije f_i su diferencijabilne.

Dokaz

Dokaz izvodimo primenom metode matematičke indukcije.

Pretpostavimo da teorema važi za $(n-1)$ jednačina. Potrebno je dokazati da važi i za n jednačina. Teorema je dokazana za $n = 1, 2$ (Teoreme 3.2.1 i 3.2.2).

Kako je Jakobijan različit od nule, bar jedan od kofaktora njegovog poslednjeg reda je različit od nule. Pogodno je da pretpostavimo da je to

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_{n-1})}{\partial(y_1, \dots, y_{n-1})} \neq 0.$$

Kako Teorema važi za slučaj $(n-1)$, onda možemo da rešimo prvih $(n-1)$ jednačina u obliku

$$y_\alpha = \varphi_\alpha(x_1, \dots, x_m; y_n), \quad \alpha = 1, \dots, n-1,$$

gde su funkcije φ_α diferencijabilne. Njihovom zamenom u poslednjoj jednačini, dobijamo

$$\Phi(x_1, \dots, x_m; y_n) = F_n(x_1, \dots, x_m; \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}; y_n) = 0.$$

Ako su izvodi $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_n}$ različiti od nule, tada se mogu rešiti po $y_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_m)$ i tada zamenom dobijamo

$$\begin{aligned} y_\alpha &= f_\alpha(x_1, \dots, x_m) = \varphi_\alpha(x_1, \dots, x_m), \quad \alpha = 1, \dots, n-1, \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_m) \equiv \varphi_n(x_1, \dots, x_m) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Međutim,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \frac{\partial F_n}{\partial y_\alpha}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_n} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}.$$

Izvodi $\dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_n}$ se mogu izračunati iz prvih $(n-1)$ od (3.11):

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial y_\alpha}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_n} + \frac{\partial F_\beta}{\partial y_n} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n-1.$$

Odavde

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_n} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_{n-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{\alpha-1},y_n,y_{\alpha+1},\ldots,y_{n-1})}}{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_{n-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{n-1})}} =$$

$$= (-1)^{n-\alpha}\frac{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_{n-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{\alpha-1},y_{\alpha+1},\ldots,y_{n-1},y_n)}}{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_{n-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{n-1})}}$$

pa je

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{n-\alpha}\frac{\partial F_n}{\partial y_\alpha}\frac{\partial(F_1,\ldots,F_{n-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{\alpha-1},y_{\alpha+1},\ldots,y_{n-1},y_n)} +$$

$$+ \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_{n-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{\alpha-1},y_{\alpha+1},\ldots,y_{n-1},y_n)}}{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_{n-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{n-1})}} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{n-\alpha}\frac{\partial F_n}{\partial y_\alpha}\frac{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_{n-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{\alpha-1},y_{\alpha+1},\ldots,y_{n-1},y_n)}}{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_{n-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{n-1})}},$$

ili

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \frac{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}}{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_{n-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{n-1})}}. \tag{3.13}$$

Kako ni jedna član, na desnoj strani, nije jednak nuli, onda je $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_n} \neq 0$.

Primena ove teoreme je, od posebnog značaja, u određivanju inverzne funkcionalne treansformacije.

Ako je $m = n$ i F_i ima oblik

$$F_i = g_i(y_1, \ldots, y_n) - x_i,$$

gde su g_i neprekidno diferencijabilne funkcije, tada Teorema 3.2.3 ima slededeći oblik.

Teorema 3.2.4 Neko su

$$x_i = g_i(y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.14}$$

gde su g_i neprekidne funkcije promenljivih $y_1, \ldots, y_n$, čiji su prvi parcijalni izvodi neprekidne funkcije i neka je Jakobijan

$$J = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \neq 0. \tag{3.15}$$

Tada postoji jednoznačna inverzna transformacija $\mathbf{y}(y_1, \ldots, y_n)$ u $\mathbf{x}(x_1, \ldots, x_n)$:

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m). \tag{3.16}$$

Dokaz

Jednostavno, primenimo Teoremu 3.2.3. Imajući u vidu oblik funkcija F_i, dobijamo da je Jakobijan transformacije (3.9)

$$J = \frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}.$$

Onda (3.15) sledi iz (3.14).

3.3 Zavisnost funkcija

Neka je:
$\mathbf{x} = (x^i)$, $i = 1, \ldots, n$, tačka n-dimenzionalnog prostora X,
$\mathbf{y} = (y^\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, m$ tačka m-dimenzionalnog prostora Y i
$\mathbf{y}^* = (y^\sigma)$, $\sigma = 1, \ldots, m-1$ tačka $(m-1)$ – dimenzionalnog prostora $Y^* \subset Y$.
Neka je $G \subset X$ otvoren podskup i neka je

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{3.17}$$

neprekidna i diferncijabilna funkcija u $\mathbf{x} \in G$

ili

$$y^\alpha = f^\alpha(x^i), \qquad \alpha = 1,\dots,m; \quad i = 1,\dots,n. \tag{3.18}$$

Definicija 3.3.1 Ako među funkcijama sistema (3.18) postoji bar jedna funkcija koja zavisi od ostalih funkcija, na skupu $\mathbf{f}(G)$, onda je sistem funkcija (3.18) **zavisan na** $\mathbf{f}(G)$. U protivnom sistem funkcija je **nezavisan**.

Osnovnu ulogu pri razmatranju problema zavisnosti sistema funkcija (3.18) ima **Jakobijeva matrica** (**Jakobijan**) ovog sistema

$$\mathbf{J} = \left\| \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \right\|. \tag{3.19}$$

Teorema 3.3.1 Neka je $m \leq n$ i neka je sistem funkcija (3.18) zavisan na $\mathbf{f}(G)$. Tada je u svakoj tački skupa $\mathbf{f}(G)$

$$\operatorname{rang}\mathbf{J} = \operatorname{rang}\left\| \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \right\| < m. \tag{3.20}$$

Dokaz

Prema uslovu teoreme postoji bar jedna funkcija sistema (3.18) koja zavisi od ostalih. Neka je to funkcija y^m. Znači,

$$y^m = \varphi(y^1,\dots,y^{m-1}),$$

za svako $\mathbf{y}^* \in D \subset \mathbf{f}(G)$, gde je φ neprekidna i diferencijabilna funkcija svojih argumenata. Onda je

$$\frac{\partial y^m}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial y^\sigma}\frac{\partial y^\sigma}{\partial x^i},$$

odakle se vidi da je m-ta vrsta Jakobijeve matrice (3.19) je linearna kombinacija ostalih vrsta za svako $\mathbf{x} \in G$. Prema tome $\operatorname{rang}\mathbf{J} < m$ za svako $\mathbf{x} \in G$.

Posledica 3.3.2 Neka je $m = n$ i neka je sistem funkcija (3.18) zavisan na G. Tada je $\det\left\| \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \right\| = 0$ za svako $\mathbf{x} \in G$.

Posledica 3.3.3 Neka je $m \leq n$ i neka je $\operatorname{rang}\mathbf{J} = m$ bar u jednoj tački otvorenog skupa G. Tada je sistem funkcija (3.18) nezavisan na G.

Pri dokazu Posledice 3.3.3 polazi se od suprotne pretpostavke, koja dovodi do kontradikcije.

Napomenimo da se ovde i nadalje, podrazumeva sabiranje po ponovljenim indeksima u rasponu vrednosti koje odgovarajući indeks uzima.

Teorema 3.3.4 Neka je $m \leq n$ i neka rang Jakobijeve matrice (3.19), u svakoj tački otvorenog skupa G, nije veći od r, i neka je u nekoj tački $\mathbf{x}_0 \in G$ jednak r, tj.

$$\left|\frac{\partial y^{i_\alpha}}{\partial x_{j_\beta}}\right|_{\mathbf{x}_0} \equiv \left.\frac{\partial(y^{i_1},\ldots,y^{i_r})}{\partial(x^{j_1},\ldots,x^{j_r})}\right|_{\mathbf{x}_0} \neq 0, \quad \alpha,\beta = 1,\ldots,r. \tag{3.21}$$

Tada su r funkcija, za koje važi (3.21) funkcionalno nezavisne na skupu G i postoji okolina tačke $\mathbf{x}_0$ takva da su ostale $(n-r)$ funkcije zavisne od ovih r funkcija nad tom okolinom.

Dokaz

Pogodno je uslov (3.21) pisati u obliku

$$\left.\frac{\partial(y^1,\ldots,y^r)}{\partial(x^1,\ldots,x^r)}\right|_{\mathbf{x}_0} \neq 0, \quad \alpha,\beta = 1,\ldots,r. \tag{3.22}$$

(Ovo je uvek moguće realizovati, bez gubljenja u opštosti, pogodnom prenumeracijom funkcija i nezavisno promenljivih.)

Saglasno sa Posledicom 3.3.3, prethodne teoreme, funkcije $y^1,\ldots,y^r$ su nezavisne na G.

Pokazaćemo da bilo koja od preostalih funkcija zavisi od njih u okolini tačke $\mathbf{x}_0$. Neka je $y_0^i = y^i(\mathbf{x}_0)$, $i = 1,2,\ldots,m$. Posmatrajmo sistem prvih r funkcija sistema (3.18):

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1(x^1,\ldots,x^n), \\ \vdots &= \vdots, \\ y^r &= y^r(x^1,\ldots,x^n). \end{aligned} \tag{3.23}$$

S obzirom na (3.23) i teoremu 3.2.1 o implicitnim funkcijama, sistem (3.23) u nekoj okolini tačke $\mathbf{x}_0$ može biti rešen po promenljivima $x^1,\ldots,x^r$:

$$\begin{aligned} x^1 &= f^1(y^1,\ldots,y^r,x^{r+1},\ldots,x^n), \\ \vdots &= \vdots, \\ x^r &= f^r(y^1,\ldots,y^r,x^{r+1},\ldots,x^n). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Pri tome su funkcije $f^1,\ldots,f^r$ definisane u nekoj okolini neke tačke

$$\mathbf{z}_0 = (y_0^1,\ldots,y_0^r,x_0^{r+1},\ldots,x_0^n).$$

Smenom ovih funkcija u funkciji y^{r+1} dobijamo

$$y^{r+1} = y^{r+1}(f^1,\dots,f^r,x^{r+1},\dots,x^n) = \varphi(y^1,\dots,y^r,x^{r+1},\dots,x^n). \tag{3.25}$$

Ova složena funkcija definisana je u nekoj okolini $\mathbf{z}_0$. Pokazaćemo da je ona u toj okolini nezavisna od promenljivih $x^{r+1},\dots,x^n$, i da je, prema tome, samo funkcija promenljivih $y^1,\dots,y^r$. Zato je dovoljno pokazati da je u nekoj okolini tačke $\mathbf{z}_0$

$$\frac{\partial y^{r+1}}{\partial x^j} = 0, \qquad j = r+1,\dots,n. \tag{3.26}$$

U tom cilju neka je j jedna od vrednosti iz skupa $(r+1,\dots,n)$. Onda je preslikavanje okoline tačke $(y_0^1,\dots,y_0^r,x_0^j)$ zadato sa

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1,\\ \vdots &= \vdots\\ y^r &= y^r\\ y^{r+1} &= \varphi(y^1,\dots,y^r,x^{r+1},\dots,x^j,\dots,x^n),\\ x^k &= x_0^k, \qquad k = r+1,\dots,n, \quad k \neq j, \end{aligned}$$

neprekidno i diferencijabilno. Njegova Jakobijeva matrica preslikavanja

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ \frac{\partial y^{r+1}}{\partial y^1} & \frac{\partial y^{r+1}}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial y^{r+1}}{\partial y^r} & \frac{\partial y^{r+1}}{\partial x^j} \end{Vmatrix} \tag{3.27}$$

se može izraziti u nekoj okolini tačke $(y_0^1,\dots,y_0^r,x_0^j)$ pomoću proizvoda transformacija:

- transformacije

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1(x^1,\dots,x^n),\\ \vdots &= \vdots\\ y^r &= y^r(x^1,\dots,x^n)\\ y^{r+1} &= y^{r+1}(x^1,\dots,x^n),\\ x^k &= x_0^k, \qquad k = r+1,\dots,n, \quad k \neq j \end{aligned}$$

i

- transformacije

$$\begin{aligned} x^1 &= f^1(y^1,\dots,y^r,x^{r+1},\dots,x^n), \\ \vdots &= \vdots, \\ x^r &= f^r(y^1,\dots,y^r,x^{r+1},\dots,x^n), \\ x^j &= x^j, \\ x^k &= x_0^k, \qquad k = r+1,\dots,n, \quad k \neq j. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Prva od ovih transformacija je neprekidno diferencijabilna u nekoj okolini tačke $(x_0^1,\dots,x_0^r,x_0^j)$, a druga u okolini neke tačke $(y_0^1,\dots,y_0^r,x_0^j)$. Onda se determinanta Jakobijeve matrice (3.27) može napisati u obliku

$$\frac{\partial y^{r+1}}{\partial x^j} = \frac{\partial(y^1,\dots,y^r,y^{r+1})}{\partial(y^1,\dots,y^r,x^j)} = \frac{\partial(y^1,\dots,y^r,y^{r+1})}{\partial(x^1,\dots,x^r,x^j)}\frac{\partial(x^1,\dots,x^r,x^j)}{\partial(y^1,\dots,y^r,x^j)}. \tag{3.29}$$

Prema uslovu teoreme, rang Jakobijeve matrice na skupu G manji je ili jednak r. Prema tome,

$$\frac{\partial(y^1,\dots,y^r,y^{r+1})}{\partial(x^1,\dots,x^r,x^j)} = 0$$

na G, odakle sledi (3.26). Dakle, y^{r+1} nije funkcija od x^j. Na isti način se pokazuje da y^{r+1} nije funkcija od $x^{r+2},\dots,x^n$, pa je

$$y^{r+1} = \varphi(y^1,\dots,y^r)$$

u nekoj okolini tačke $(y_0^1,\dots,y_0^r)$. Dakle, funkcija y^{r+1} je funkcija od $y^1,\dots,y^r$ u okolini neke tačke $(y_0^1,\dots,y_0^r)$ (koja odgovara nekoj okolini tačke $\mathbf{x}_0$ s obzirom na neprekidnost posmatranog sistema funkcija).

Na isti način se pokazuje i zavisnost svake od funkcija $y^{r+2},\dots,y^m$ od funkcija $y^1,\dots,y^r$ u nekoj okolini tačke $\mathbf{x}_0$.

■ **Primer 3.7** Prethodna teorijska razmatranja ilustrovaćemo na jednom jednostavnom primeru.

Neka je dat sistem funkcija

$$\begin{aligned} u &= \sin(x+y), \\ v &= \cos(x+y). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Jakobijan ovog sistema jednak je nuli na celoj ravni

$$\begin{vmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \end{vmatrix} = 0.$$

Lako se vidi da je rang matrice Jakobija, ovog sistema, jednak 1 u svim tačkama ravni. Prema Teoremi 3.3.4, funkcije sistema (3.30) su zavisne u okolini svake tačke ravni. U ovom slučaju zavisnost ovih funkcija se lako nalazi u eksplicitnom obliku i može biti zadata formulom

$$v = \pm\sqrt{1-u^2}.$$

■

4. Linearni prostori

Definicija 4.0.1 Bilo koja recipročna (uzajamna) veza između tačaka $\mathbf{x}$ i uređenog skupa brojeva $(x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots, x^n)$ naziva se **koordinatni sistem**, a brojevi $x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots, x^n$ **koordinate tačke x**.

Elementi $\mathbb{R}^n$ se često u literaturi poistovećuju sa pojmom **vektora**. Takav vektor je n-torka realnih brojeva, i nije usmereni linijski element, ili njihova klasa ekvivalencija. Prezentacija vektora kao linijskog usmerenog elementa ima geometrijski karakter. Međutim, vektori se mogu interpretirati na potpuno drugačiji način. Primer toga je funkcija $f(x)$ definisana na konačnom skupu tačaka x_i koja može biti predstavljena nizom svojih vrenosti $f(x_i)$, a koje mogu biti posmatrane kao komponente vektora u nekom prostoru. Nadalje se podrazumeva da je reč o konačno dimenzionalnim prostorima, ako se drugačije ne naglasi.

U tom smislu, ovde ćemo tumačiti vektor sa algebarskog stanovišta, koji je element skupa $\mathbb{R}^n$, a u koji se uvode dve algebarske operacije: **sabiranje vektora** i **množenje vektora skalarom**.

Tada, za bilo koja dva vektora, $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ i $\mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^n)$ u $\mathbb{R}^n$ i bilo koje $a \in \mathbb{R}$, važi

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n)$$

i

$$a\mathbf{x} := (ax^1, \ldots, ax^n).$$

Onda se kaže da $\mathbb{R}^n$ određuje realni vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

To nas dovodi do pojma vektorskog prostora V, nad poljem F.

Definicija 4.0.2 **Vektorski prostor** V, nad poljem F, je skup elemenata $V(F)$, koje nazivamo vektorima, a koji zadovoljavaju sledeće aksiome:

a) postoji binarna operacija u V, koja se naziva **sabiranje** i označava sa $+$, takva da je:

1. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ - asocijativnost,
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ - komutativnost,
3. postoji element "nula"$\mathbf{0}\in V$ tako da je $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ za svako $\mathbf{u}\in V$. U literaturi ovaj element često se naziva "neutralni element".
4. Za svako $\mathbf{u}\in V$ postoji element $-\mathbf{u}\in V$ takav da je $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$.

b) za **množenje skalarom**, važi:

1. $a(b\mathbf{u})=(ab)\mathbf{u}$ – asocijativnost u odnosu na množenje skalarima,
2. $(a+b)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$ – distributivnost u odnosu na sabiranje skalarima,
3. $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$ – distributivnost u odnosu na sabiranje vektora,
4. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$,

za svako $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ i $a,b\in F$.

Ekvivalentna definicija prethodnoj definiciji, a koja se odnosi na skup V nad $\mathbb{R}$, u kompaktnijem obliku, glasi:

Definicija 4.0.3 Neka je $\{\mathbb{R};+,\cdot\}$ polje, a $\{V;+\}$ Abelova grupa. Ako je V $\mathbb{R}$-modul onda se V naziva **vektorski prostor** (**linearni prostor**) nad $\mathbb{R}$. Elemente (vektore) ovog prostora označavaćemo sa $\mathbf{v}$.

U cilju određivanja dimenzije prostora V, uvodimo pojam linearne nezavisnosti.

Definicija 4.0.4 Skup vektora $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ je **linearno nezavisan** ako ni jedan od njih nije linearna kombinacija ostalih; u protivnom takav skup vektora je **linearno zavisan**.

Teorema 4.0.1 Skup vektora $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ je linearno zavisan akko postoje brojevi $a^1,\ldots,a^k$ koji nisu svi jednaki nuli, tako da je

$$a^1\mathbf{v}_1+\cdots+a^k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}.$$

Dokaz

Pretpostavimo, bez gubljena u opštosti, da je $a^1 \neq 0$. Onda je

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{a^2}{a^1}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{a^k}{a^1}\mathbf{v}_k,$$

pa prema definiciji sledi da su $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ je linearno zavisni.

Obrnuto, ako je $\mathbf{v}_1 = b^2\mathbf{v}_2 \cdots + b^k\mathbf{v}_k$, onda je

$$a^1\mathbf{v}_1 + \cdots + a^k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

gde je $a^1 = -1 \neq 0$, $a^i = b^i$ za $i > 1$.

Teorema 4.0.2 Skup vektora, koji sadrži samo nula vektor, je linearno zavisan.

Dokaz je trivijalan.

Posledica ove teoreme: Svaki skup vektora, koji sadrži nula vektor, je linearno zavisan.

Definicija 4.0.5 Linearni vektorski prostor V ima dimenziju n ako V sadrži najmanje jedan skup n vektora, koji su linearno nezavisni, ali koji ne sadrži ni jedan skup on $n+1$ linearno nezavisnih vektora.

Definicija 4.0.6 Ako je V n-dimenzionalan prostor, onda se skup vektora $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, koji su linearno nezavisni, naziva **baza** vektorskog prostora V.

Ako je $\mathscr{B}$ baza linearnog vektorskog prostora V i $\mathscr{B}$ ima konačan broj elemenata onda je V konačno dimenzionalni prostor. U protivnom je beskonačno dimenzionalan.

Ako je V definisano nad poljem realnih brojeva onda je V **realan vektorski prostor**. Takođe, vektorski prostor može biti **kompleksan**, ako je polje nad kojim je definisan polje **kompleksnih brojeva** $\mathbb{C}$.

Nadalje, ako se drugačije ne kaže biće reči o realnim vektorskim prostorima.

Teorema 4.0.3 Bilo koji vektor $\mathbf{x} \in V$ se može predstaviti na jedinstven način linearnom kombinacijom baznih vektora

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i\mathbf{v}_i \equiv x^i\mathbf{v}_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dokaz

Pretpostavimo suprotno, da reprezentacija vektora $\mathbf{x}$ u odnosu na bazu nije jedinstvena, tj. da je

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{v}_i = \widehat{x}^i \mathbf{v}_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Odavde sledi da tada mora biti

$$\left(x^i - \widehat{x}^i\right) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Kako su vektori $\mathbf{v}_i$ linearno nezavisni sledi da je $x^i = \widehat{x}^i$, za svako $i = 1, \ldots, n$.

N Ovde i nadalje koristimo **Ajnštajnovu konvenciju o sabiranju**, po paru ponovljenih indeksa, po pravilu kad se indeks nalazi jednom gore, jednom dole u posmatranom izrazu.

Baza linearnog vektorskog prostora nije jedinstvena. Ono što je jedinstveno za svaku bazu daje

Teorema 4.0.4 Broj elemenata bilo koje baze konačno dimenzionalnog prostora V je isti.

Dokaz

Neka su $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ i $\widehat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{v}}_m$ dve baze konačno dimenzionalnog prostora V. Potrebno je dokazati da je $n = m$. Posmatrajmo prvo bazu $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Onda, prema definiciji 4.0.5 (str. 59), bilo koji sistem od $n+1$ ili više vektora mora biti linearno zavisan. Ali sistem vektora $\widehat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{v}}_m$ je baza prostora V i kao takav linearno nezavisan. Sledi da mora biti $m \leq n$.

Obrnuto, polazimo od baze $\widehat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{v}}_m$. Na isti način zaključujemo da je $n \leq m$. Iz ove dve nejednakosti sledi da mora biti $n = m$.

Teorema 4.0.5 Neka su $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ i $\widehat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{v}}_n$ dve baze prostora V i neka je razlaganje jedne baze u odnosu na drugu dato je izrazima:

$$\widehat{\mathbf{v}}_i = v_i^k \mathbf{v}_k, \qquad \mathbf{v}_k = \widehat{v}_k^j \widehat{\mathbf{v}}_j.$$

Neka je $\mathbf{x} = x^i \mathbf{v}_i = \widehat{x}^i \widehat{\mathbf{v}}_i$. Onda je

i)

$$v_i^k \widehat{v}_k^j = v_k^j \widehat{v}_i^k = \delta_i^j. \tag{4.1}$$

ii)
$$\widehat{x}^i = \widehat{v}^i_k x^k. \tag{4.2}$$

Dokaz

i) Smenom $\mathbf{v}_k$ u izraz za $\widehat{\mathbf{v}}_i$ dobijamo
$$\widehat{\mathbf{v}}_i = v^k_i \mathbf{v}_k = v^k_i \widehat{v}^j_k \widehat{\mathbf{v}}_j,$$
odakle sledi da je
$$v^k_i \widehat{v}^j_k = \delta^j_i.$$
Na isti način, smenom $\widehat{\mathbf{v}}_i$ u izraz za $\mathbf{v}_k$ dobijamo
$$v^j_k \widehat{v}^k_i = \delta^j_i.$$

ii) U izrazu za $\mathbf{x}$, smenom izraza za $\mathbf{v}_i$, dobijamo
$$\widehat{x}^i = \widehat{v}^i_k x^k.$$

Zadatak 4.1 Skup funkcija $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ definiše $n+1$-dimenzionalni linearni vektorski prostor V. Pokazati. ■

Rešenje

Potrebno je pokazati da je ovaj skup funkcija $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ linearno nezavisan. Posmatrajmo polinom $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. Ovaj polinom je nula polinom, tj.
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0,$$
ako i samo ako su svi koeficijenti a_i, $i = 1, \ldots, n$ jednaki nuli. Prema tome, funkcije $1, x, x^2, \ldots, x^n$ su linearno nezavisne.

■ **Primer 4.1** Posmatrajmo sledeće vektore, vektorskog prostora polinoma konačnog stepena, nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$:
$$P(x) = x^2 - 1, \quad Q(x) = x^2 + x - 2, \quad R(x) = x^2 + 3x + 2.$$
Ispitati linearnu zavisnost ovog skupa vektora. ■

Rešenje

Neka je linearna kombinacija ovih vektora nula vektor:

$$aP(x)+bQ(x)+cR(x)=0$$

tj.

$$a\left(x^2-1\right)+b\left(x^2+x-2\right)+c\left(x^2+3x+2\right)=0.$$

Grupišući uz iste stepene dobijamo

$$(-a-2b+2c)+(b+3c)x+(a+b+c)x^2=0.$$

Ova jednačina važi za svako x, samo ako su njeni koeficijenti jednaki nuli, tj.

$$-a-2b+2c=0, \quad 0+b+3c=0, \quad a+b+c=0,$$

i ima rešenje samo ako je $a=b=c=0$. Prema Definiciji 4.0.4 ovaj sistem vektora je linearno nezavisan.

■ **Primer 4.2** Neka je $\mathbf{x}=(x^1,\ldots,x^n)\in\mathbb{R}^n$. Onda je

$$\begin{aligned}\mathbf{x}&=(x^1,\ldots,x^n)=(x^1,0,\ldots,0)+(0,x^2,0,\ldots,0)+\cdots+(0,\ldots,0,x^n)=\\&=x^1(1,0,\ldots,0)+x^2(0,1,0,\ldots,0)+\cdots+x^n(0,\ldots,0,1)=x^i\,\mathbf{e}_i,\end{aligned} \tag{4.3}$$

gde je

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1&=(1,0,\ldots,0),\\\mathbf{e}_2&=(0,1,\ldots,0),\\\vdots\quad&\quad\vdots\\\mathbf{e}_n&=(0,0,\ldots,1).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Ovi vektori su očigledno linearno nezavisni i "razapinju" $\mathbb{R}^n$, tj. generišu $\mathbb{R}^n$. Nazivamo ih **standardna baza** u $\mathbb{R}^n$. ■

Teorema 4.0.6 Svaki n-dimenzionalni vektorski prostor $V_n(F)$ nad F je izomorfan prostoru F^n, gde je $F^n=\underbrace{F\times F\times\cdots\times F}_{n}$.

Dokaz

Neka je $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ baza u V. Svaki vektor $\mathbf{v}$ u V može biti napisan u obliku

$$\mathbf{v}=v^i\mathbf{v}_i, \qquad i=1,\ldots,n.$$

Poznato je da su koordinate v^i $(i = 1,\dots,n)$ jedinstvene. Definišimo sada 1-1 korespodenciju $\mathbf{v} \leftrightarrow (v^1,\dots,v^n)$ između V i F^n, tj.

$$f(\mathbf{v}) = (v^1,\dots,v^n),$$

izomorfizam između V i F^n. Ako je $\mathbf{w} = w^i\mathbf{v}_i$, onda je

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = av^i\mathbf{v}_i + bw^i\mathbf{v}_i = (av^i + bw^i)\mathbf{v}_i.$$

Prema tome,

$$f(a\mathbf{v}+b\mathbf{w}) = (av^1+bw^1,\dots,av^n+bw^n) =$$
$$= a(v^1,\dots,v^n) + b(w^1,\dots,w^n) = af(\mathbf{v}) + bf(\mathbf{w}),$$

tj. 1-1 korespodencija f je izomorfizam između V i F^n. Znači, V i F^n su izomorfni.

Posledica ove teoreme. Bilo koja dva vektorska prostora, istih dimenizja, nad istim poljem, su izomorfna, jer su oba izomorfna sa F^n, pa prema tome i međusobno izomorfna.

Na osnovu ove teoreme može da se zaključi, bez gubljenja u opštosti, da se uvek možemo ograničiti na vektorski prostor F^n, čiji su elementi vektori koji se predstavljaju uređenim skupom n-torki brojeva.

Ovakav izbor vektorskog prostora zahteva uvek i izbor baze u odnosu na koju se vektori porstora $\mathbb{R}^n$ predstavljaju. U tom slučaju se ne vide neposredno invarijantna svojstva vektora i vektorskog prostora, koja su nezavisna od izbora koordinatnog sistema. Prema tome, uvek kada je to moguće, posmatraćemo vektorske prostore bez uzimanja u obzir bilo koje baze.

4.0.1 Vektorski potprostor

Moguće je da je podskup W vektorskog prostora V nad $\mathbb{R}$ sam po sebi vektorski prostor.

Definicija 4.0.7 Podskup W, vektorskog prostora V nad R je **potprostor** od V ako je

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \in W \quad \text{za svako } \mathbf{u},\mathbf{w} \in W \text{ i } a,b \in \mathbb{R}.$$

Iz definicije sledi da ako je W potprostor V onda je $\mathbf{0} \in W$.

■ **Primer 4.3** Podskup vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, čiji su vektori definisani sa

$$(0, x_2, \dots, x_n)$$

je potprostor R^n.

Vektorski prostor $\mathbf{0}$ i V su **trivijalni** potprostori vektorskog prostora V. Ako W nije trivijalan potprostor onda se kaže da je on **pravi**[1] potprostor V. ■

■ **Primer 4.4** Neka je $(\mathbb{R};+,\cdot)$ polje. Onda je $\mathbb{R}^n$ pravi potprostor nad $\mathbb{R}$. ■

Teorema 4.0.7 Ako je W potprostor prostora V onda je $\dim(W) \leq \dim(V)$.

Dokaz

Ako je W pravi potprostor prostora V, onda postoji bar jedan vektor $\mathbf{v} \in V$ koji ne pripada potprostoru W. Znači, takav vektor $\mathbf{v}$ ne može da se razloži u odnosu na bazu potprostora W, pa je prema tome, $\dim(W) < \dim(V)$.

Ako je $W = V$ onda je očigledno $\dim(W) = \dim(V)$. Obrnuto, ako je $\dim(W) = \dim(V)$ onda je baza W takođe i baza V, tj. $\dim(W) = \dim(V)$.

Operacije, koje kombinuju vektorske prostore i dovode do drugih vektorskih prostora su prosta proširenja elementarnih operacija definisanih na skupovima.

Neka su U i W potprostori vektorskog prostora V.

Definicija 4.0.8 **Zbir** U i W, koji pišemo u obliku $U+W$, je skup

$$U+W = \{\mathbf{u}+\mathbf{v} | \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}.$$

Definicija 4.0.9 **Presek** U i W, koji označavamo sa $U \cap W$, je skup

$$U \cap W = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in U \text{ i } \mathbf{u} \in W\}.$$

Definicija 4.0.10 **Unija** dva podskupa U i W skupa V, koji označavamo sa $U \cup W$, je skup

$$U \cup W = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in U \text{ ili } \mathbf{u} \in W\}.$$

Neka od svojstava ovde definisanih operacija date su u obliku sledećih teorema.

Teorema 4.0.8 $U+W$ je potprostor V.

Dokaz

Potrebno je dokazati da je za svako $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U+W$, takođe $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in U+V$ i za $\mathbf{u} \in U+W$ je $a\mathbf{u} \in U+V$ za svako $a \in \mathbb{R}$.

Za prvi deo dokaza pretpostavimo da je $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U+W$. Kako je $\mathbf{u} \in U+W$, onda je $\mathbf{u} = \mathbf{x}+\mathbf{y}$ za neko $\mathbf{x} \in U$ i $\mathbf{y} \in W$. Na isti način sledi da je $\mathbf{v} = \mathbf{p}+\mathbf{q}$ za neko $\mathbf{p} \in U$

[1] eng. proper

i $\mathbf{q} \in W$. Onda je

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{p}+\mathbf{q} = (\mathbf{x}+\mathbf{p})+(\mathbf{y}+\mathbf{q}),$$

gde je $\mathbf{x}+\mathbf{p} \in U$ i $\mathbf{y}+\mathbf{q} \in W$. Znači $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in U+V$.

Za drugi deo dokaza polazimo od toga da je $\mathbf{u} \in U+W$. Onda je

$$a\mathbf{u} = a\mathbf{x}+a\mathbf{y} \quad \text{pa je} \quad a\mathbf{x} \in U \quad \text{i} \quad a\mathbf{y} \in W.$$

Znači $a\mathbf{u} \in U+W$ za svako $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.0.9 $U \cap W$ je potprostor V.

Dokaz

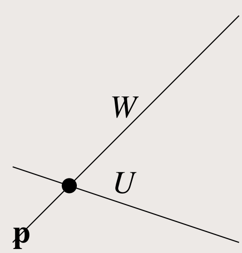
Neka su $\mathbf{u},\mathbf{w} \in U \cap W$. Tada je $\mathbf{u},\mathbf{w} \in U$ i $\mathbf{u},\mathbf{w} \in W$. Kako su U i W potprostori, onda je $a\mathbf{u}+b\mathbf{w} \in U$ i $a\mathbf{u}+b\mathbf{w} \in W$, što znači da je $a\mathbf{u}+b\mathbf{w} \in U \cap W$.

Lema 1

$U \bigcup W$ nije, u opštem slučaju, potprostor V.

Dokaz

Neka je $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{u}$ ne pripada W i neka je $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{w}$ ne pripada W. Znači, $\mathbf{u}+\mathbf{w}$ ne pripada $U \cup W$.



Slika 4.1

Pitanje glasi: kada je unija dva potprostora potprostor. Odgovor na to pitanje daje sledeća

Teorema 4.0.10 Unija $U \cup W$ dva potprostora U i W prostora V je potprostor akko se jedan sadrži u drugom, tj. $U \subset W$ (ili $W \subset U$).

Dokaz

Prvi deo dokaza izvodimo kontradikcijom.

Neka je $U \cup W$ potprostor od U i W. Pretpostavimo da je $U \not\subset W$. Neka je $\mathbf{u} \in U \backslash W$ i $\mathbf{w} \in W \backslash U$. Pošto je $U + W$ zatvoren u odnosu na operaciju sabiranja, onda je $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in U \cup W$. Znači $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in U$ ili $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in W$. Pretpostavimo da je $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in U$. Tačno je da je

$$\mathbf{w} = (\mathbf{u} + \mathbf{w}) - \mathbf{u}.$$

Kako su $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in U$ i $\mathbf{u}$ elementi potprostora U, onda je njihova razlika $\mathbf{w} = (\mathbf{u} + \mathbf{w}) - \mathbf{u}$ takođe u U. Međutim to je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $\mathbf{w} \in W \backslash U$. Znači mora biti $U \subset W$.

Drugi deo Teoreme je jednostavan. Polazimo od toga da je $U \subset W$ (ili $W \subset U$). Onda je $U \cup W = W$ potprostor od V.

Teorema 4.0.11 Neka je $\mathbf{v} \in U + W$. Razlaganje $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, gde je $\mathbf{u} \in U$ i $\mathbf{w} \in W$, je jedinstveno akko je $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Dokaz

Neka je $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Pretpostavimo da postoje dva različita razlaganja vektora $\mathbf{v}$, tj.

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2,$$

gde su $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ i $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$. Onda je očigledno $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$. Kako je $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in U$ i $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 \in W$ i kako je $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, sledi da je $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ i $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$, pa je $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ i $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$, tj. razlaganje je jednistveno.

Obrnuto, neka je $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ jednistveno razlaganje, gde je $\mathbf{u} \in U$, a $\mathbf{w} \in W$. Pretpostavimo da je $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$. Tada postoji vektor $\mathbf{z} \in U \cap W$ takav da je $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Onda je

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} + a\mathbf{z} - a\mathbf{z} = (\mathbf{u} + a\mathbf{z}) + (\mathbf{w} - a\mathbf{z})$$

za svako $a \in \mathbb{R}$. To znači da razlaganje $\mathbf{v}$ nije jedinstveno. Kontradikcija. Prema tome je $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Definicija 4.0.11 Zbir $U + W$, dva potprostora U i W od prostora V, naziva se **direktni zbir** i označava se sa $U \oplus W$ ako je $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Ova definicija motivisana je Teoremom 4.0.11.

Definicija 4.0.12 Ako je $U \oplus W = V$, onda se U naziva **direktni komplement** W u V.

Teorema 4.0.12 Ako su U i W potprostori prostora V onda je

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W.$$

Dokaz

Neka je $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ baza potprostora U, a $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q\}$ baza potprostora W. Onda je skup vektora $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q\}$ linearno nezavisan, jer je $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Ovaj skup vektora "rasteže"prostor $U \oplus W$, jer bilo koji vektor $\mathbf{v} \in U \oplus W$ može, na jednistven način, biti predstavljen u obliku

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w},$$

gde je $\mathbf{u} \in U$ i $\mathbf{w} \in W$. Kako je

$$\mathbf{u} = a^{\alpha}\mathbf{u}_{\alpha},\ \alpha = 1, \dots, p \quad \text{i} \quad \mathbf{w} = b^{\beta}\mathbf{w}_{\beta},\ \beta = 1, \dots, q,$$

onda je

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} = a^{\alpha}\mathbf{u}_{\alpha} + b^{\beta}\mathbf{w}_{\beta},$$

pa je prema tome

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W.$$

Operacija direktnog sabiranja može biti proširena na konačan broj potprostora prostora V.

4.1 Skalarni proizvod

Pretpostavljamo da je koncept skalarnog proizvoda vektora u $\mathbb{E}^n$ dobro poznat čitaocu. Navodimo ukratko osnovna svojstva skalarnog proizvoda u $\mathbb{R}^n$ u meri koja nam je potrebna za dalje izlaganje.

Definicija 4.1.1 **Skalarni proizvod** u $\mathbb{R}^n$ je funkcija $(\cdot, \cdot)$ definisana izrazom

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n, \quad \text{za} \quad \mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T,\ \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n. \tag{4.5}$$

Skalarni proizvod zadovoljava sledeća svojstva:

(1) linearnost - $(a\mathbf{u}+b\mathbf{v},\mathbf{w}) = a(\mathbf{u},\mathbf{w})+b(\mathbf{v},\mathbf{w})$,
(2) simetričnost - $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{v},\mathbf{u})$,
(3) pozitivna definitnost - za svako $\mathbf{u} \in V$, $(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq 0$, a $(\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0$ akko je $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Skalarni proizvod nam omogućuje geometrijsku interpretaciju dužine vektora kao i ugla između dva vektora. Ovaj koncept se proširuje na apstraktne vektorske prostore, tako da se njegov geometrijski koncept može primeniti i na apstraktne vektore.

4.2 Prostori sa unutrašnjim proizvodom

Sva dosadašnja razmatranja, vezana za linerni vektorski prostor, bila su opšteg karaktera i nisu sadržavali pojmove intenziteta (dužine) i relativnog položaja vektora. Uvođenjem pojma **unutrašnjeg** (ili **skalarnog**) **proizvoda**, ove veličine mogu biti definisane. Vektorski prostori, u kojima je definsan unutrašnji proizvod, nazivaju se **prostori sa unutrašnjim proizvodom**[2].

Definicija 4.2.1 **Unutrašnji proizvod** na kompleksnom vektorskom prostoru V je funkcija $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ sa svojstvima:

$\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \overline{\varphi(\mathbf{v},\mathbf{u})}$,
ii) $\varphi(\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v},\mathbf{w}) = \lambda\varphi(\mathbf{u},\mathbf{w})+\mu\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w})$,
iii) $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq 0$ i $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$,

za svako $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ i $\lambda \in \mathbb{C}$.

U i) nadvučena linija označava konjugovano kompleksnu veličinu.

Svojstvo i) obezbeđuje da je $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{u})$ realno i zajedno sa svojstvom iii) zahteva da je funkcija φ pozitivno definitna.

Uobičajeno je da se unutrašnji proizvod obeležava sa

$$\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

Koristeći ovaj način obeležavanja, definiciju unutrašnjeg proizvoda iskazujemo u ekvivalentnom obliku

Definicija 4.2.2

i) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}$ – **konjugovana simetrija**,
ii) $(\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v},\mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{u},\mathbf{w})+\mu(\mathbf{v},\mathbf{w})$ – **linearnost** po prvom vektoru,
iii) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \geq 0$ i $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ – **pozitivna definitnost**,

za svako $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ i $\lambda \in \mathbb{C}$.

Realni vektorski prostor, sa unutrašnjim proizvodom naziva se **Euklidski prostor**. Kompleksni vektorski prostor, sa unutrašnjim proizvodom naziva se **unitarni prostor**.

[2] eng. inner-product space

U realnom vektorskom prostoru ne postoji pojam konjugovano-kompleksan i u prethodnim izrazima izostavlja se crtica iznad veličina. Tada se (i) pojam konjugovana simetrija svodi na pojam simetrija.

Dužinu ili **intenzitet** vektora $\mathbf{v} \in V$ označavaćemo sa $v = \|\mathbf{v}\|$. To je pozitivan realan broj, definisan izrazom

$$v = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}. \tag{4.6}$$

Iz (iii) očigledno je da je dužina nula vektora jedanka 0.

Pri uvođenju oznake $v = \|\mathbf{v}\|$ za dužinu eksplicitno smo nagovestili da je unutrašnji proizvod norma[3]. Obrnuto ne važi.

Vektor čija je dužina jednaka 1 naziva se **jedinični vektor**. Svakom vektoru $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ odgovara jedinični vektor

$$\mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

Ovako uvedena definicija dužine predstavlja uopštenje pojma dužine u trodumenzionalnom realnom Euklidskom prostoru. Poznato je da je u tom slučaju $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i

$$v^2 = \sum_{i=1}^{3} v_i v_i.$$

U slučaju trodimenzionalnog kompleksnog prostora, ovaj izraz ne predstavlja realan broja. Primera radi, posmatrajmo "dužinu" jednodimenzionalnog vektora ix, gde je i imaginarna jedinica. Prema prethodnom izrazu, sledi da je

$$\sqrt{(ix) \cdot (ix)} = \sqrt{-x^2},$$

što je imaginarno u slučaju kada je x realno. Međutim, po definiciji, dužina je uvek nenegativan realan broj. To će biti zadovoljeno samo ako funkcija unutrašnjeg proizvoda zadovoljava svojstva koja su navedena u prethodnoj definiciji. U tom slučaju je

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i \bar{v}_i. \tag{4.7}$$

Specijalno, kada je $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, onda je

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2 = \sum_{i=1}^{3} v_i \bar{v}_i.$$

4.3 Norma

[3] Pojam definisan na str. 70

Definicija 4.3.1 **Norma** na linearnom vektroskom prostoru V definiše se kao realna funkcija čija se vrednost obeležava sa $\|\mathbf{v}\|$, a koja zadovoljava sledeće aksiome:

(i) Pozitivnost: $\|\mathbf{v}\| \geq 0 \quad \text{i} \quad \|\mathbf{v}\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}$,

(ii) Homogenost: $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$,

(iii) Nejednakost trougla: $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$,

za svako $\mathbf{u} \in V$ i $\mathbf{v} \in V$ i za svako $\lambda \in \mathbb{C}$.

Kao što nam je poznato, svaki unutrašnji proizvod daje normu. Zaista, pozitivnost norme je jedna od aksioma unutrašnjeg proizvoda. Svojstvo homogenosti sledi iz

$$\|c\,\mathbf{v}\| = \sqrt{(c\mathbf{v}, c\mathbf{v})} = \sqrt{|c|^2(\mathbf{v}, \mathbf{v})} = |c|\sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})} = |c|\,\|\mathbf{v}\|.$$

Konačno, nejednakost trougla za unutrašnji proizvod važi prema Teoremi 4.4.2, str. 70.

4.4 Švarcova nejednakost

Na osnovu svojstava unutrašnjeg proizvoda možemo dokazati sledeće nejednakosti, koje su bitne za dalje izlaganje.

Teorema 4.4.1 — Švarcova nejednakost.

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| = u\,v, \tag{4.8}$$

gde $|\cdot|$ označava modul kompleksnog (realnog) broja.

Dokaz

Ova nejednakost trivijalno važi ako je $\mathbf{u}$, ili $\mathbf{v}$ nula vektor. Pretpostavimo da su oni različiti od nule. Konstruišimo vektor $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$. Na osnovu svojstva i) dužina ovog vektora je nenegativna, tj.

$$\left[u^2 v^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\overline{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}\right] u^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u^2 v^2 \geq (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\overline{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})} = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2,$$

jer je $u > 0$.

Teorema 4.4.2 — nejednakost trougla. Norma asocirana unutrašnjim proizvodom zadovoljava nejednakost trougla

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \quad \text{za svako } \mathbf{v},\, \mathbf{w} \in V. \tag{4.9}$$

Jednakost važi ako su **v** i **w** paralelni vektori.

Dokaz

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 &= (\mathbf{v}+\mathbf{w},\, \mathbf{v}+\mathbf{w}) = \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2Re(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}),\end{aligned}$$

gde Re označava realni deo kompleksnog broja. Koristeći Švarcovu nejednakost, ovaj izraz može da se napiše u obliku

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| = (\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2$$

odakle sledi nejednakost trougla.

■ **Primer 4.5** Zbir vektora

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{je} \quad \mathbf{v}+\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Njihove Euklidske norme su:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6} \quad \|\mathbf{w}\| = \sqrt{13}, \quad \text{dok je norma zbira} \quad \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| = \sqrt{17}.$$

Prema nejednakosti trougla (4.9) je $\sqrt{17} \leq \sqrt{6} + \sqrt{13}$. ■

Svaki unutrašnji proizvod dovodi do norme, pa se može iskoristiti kao mera intenziteta ili dužine elemenata osnovnog vektorskog prostora. Međutim, ne može svaka norma u analizi i primeni nastati iz unutrašnjeg proizvoda.

Navedimo primere normi, koje ne slede iz unutrašnjih proizvoda.

■ **Primer 4.6** **1-norma** vektora $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ definiše se kao zbir apsolutnih vrednosti njenih članova

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + \cdots |v_n|. \tag{4.10}$$

■

■ **Primer 4.7** **max- norma** ili **∞-norma** je

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\}. \tag{4.11}$$

■

Potvrda svojstava pozitivnosti i homogenosti ove dve norme neposredno sledi; nejednakost trougla direktna je posledica elementarne nejednakosti

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

za apsolutne vrednosti.

Euklidska norma, 1-norma, kao i ∞-norma na $\mathbb{R}^n$ su tri primera opšte ***p*-norme**, definisane izrazom

$$\|\mathbf{v}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p}. \tag{4.12}$$

Ova veličina definiše normu za svako $1 \leq p < \infty$. ∞-norma je granični slučaj relacije (4.12), kada $p \to \infty$. Zapazimo da je Euklidska norma 2-norma i često se navodi kao p-norma koja dolazi (izvire) iz unutrašnjeg proizvoda. Svojstva pozitivnosti i homogenosti p-norme nije teško dokazati. Dokaz nejednakosti trougla, međutim, nije trivijalan. On se može zapisati kao

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |v_i + w_i|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |w_i|^p} \tag{4.13}$$

i poznata je kao nejednakost Minkovskog. Potpun dokaz može da se nađe u [Aljančić].

Za standardnu normu preko skalarnog proizvoda, koristimo uobičajenu oznaku za rastojanje između dve tačke u Euklidskom prostoru (vidi (4.20)).

■ **Primer 4.8** Sem standardnog proizvode u $\mathbb{R}^2$, na primer

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2,$$

moguće je definisati i druge skalarne proizvode. Na prostom primeru vidimo da se može uvesti i tzv. **težinski unutrašnji proizvod**

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 2 v_1 w_1 + 5 v_2 w_2, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Proverimo da ova formula zaista definiše unutrašnji proizvod. Aksiom simetričnosti sledi neposredno. Osim toga, važi

$$\begin{aligned} (c\mathbf{u} + d\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= 2(c u_1 + d v_1) w_1 + 5(c u_2 + d v_2) w_2 = \\ &= c(2u_1 w_1 + 5 u_2 w_2) + d(2v_1 w_1 + 5 v_2 w_2) = c(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \end{aligned}$$

što potvrđuje linearnost po prvom članu. Linearnost po drugom članu sledi na sličan način. Osim toga je, $(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0$, dok je

$$(\mathbf{v},\mathbf{v}) = 2\,v_1^2 + 5\,v_2^2 > 0, \quad \text{kada je } \mathbf{v} \neq \mathbf{0},$$

jer je najmanje jedan od sabiraka striktno pozitivan. Ovim se konstatuje da je (4.14) legitiman unutrašnji proizvod u $\mathbb{R}^2$. Pridružena **težinska norma** $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2v_1^2 + 5\,v_2^2}$ definiše alternativnu ”ne-Pitagorinu” oznaku dužine vektora i rastojanje između dve tačke u ravni.

Manje očevidan primer unutrašnjeg proizvoda u $\mathbb{R}^2$ uvodi se izrazom

$$(\mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}) = v_1\,w_1 - v_1\,w_2 - v_2\,w_1 + 4\,v_2\,w_2. \tag{4.15}$$

Bilinearnost se potvrđuje na isti način kao prethodno, a simetričnost direktno. Pozitivnost je osigurana zapazivši da je

$$(\mathbf{v}\,,\,\mathbf{v}) = v_1^2 - 2v_1\,v_2 + 4v_2^2 = (v_1 - v_2)^2 + 3v_2^2 \geq 0$$

uvek nenegativno i, čak, jednako nuli, akko $v_1 - v_2 = 0$, $v_2 = 0$, tj. samo kada je $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Smatramo da (4.15) definiše još jedan unutrašnji proizvod na $\mathbb{R}^2$, sa pridruženom normom

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}\,,\,\mathbf{v})} = \sqrt{v_1^2 - 2\,v_1\,v_2 + 4v_2^2}.$$

■

Drugi primer (4.14) je specijalan slučaj opšte klase unutrašnjih proizvoda.

■ **Primer 4.9** Neka je $c_1,\ldots,c_n > 0$ skup pozitivnih brojeva. Odgovarajući težinski proizvod i težinska norma u $\mathbb{R}^n$ definisane su sa:

$$(\mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} c_i\,v_i\,w_i, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v},\,\mathbf{v})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i\,v_i^2}. \tag{4.16}$$

Brojevi c_i nazivaju se **težine** (težinski koeficijenti). Napomenimo da veća težina c_i i-te koordinate vektora $\mathbf{v}$ više doprinosi normi. Možemo da preinačimo težinski unutrašnji proizvod preko korisnog vektorskog oblika

$$(\mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}) = \mathbf{v}^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{w}, \quad \text{gde je} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_n \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

gde je $\mathbf{C}$ dijagonalna **težinska matrica**. ■

4.5 Ortogonalni i ortonormirani skupovi vektora

Definicija 4.5.1 U slučaju prostora sa unutrašnjim proizvodom, **ugao** α između dva vektora **u** i **v** definiše se izrazom

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{uv}. \tag{4.18}$$

Ova definicija ima smisla, jer je na osnovu Švarcove nejednakosti

$$|\cos\alpha| \leq 1. \tag{4.19}$$

Definicija 4.5.2 Za vektore **u** i **v** za koje je $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, ili $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = 0$, kaže se da su **ortogonalni**.

Sa $\perp$ ćemo označavati ortogonalnost. Tako na primer, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ znači da su vektori **u** i **v** ortogonalni.

Ovi pojmovi su uopštenje pojmova u slučaju realnih prostora sa unutrašnjim proizvodom, jer je u slučaju ortogonalnosti $|\alpha| = \pi/2$.

■ **Primer 4.10** Skalarni proizvod vektora $\mathbf{v} = (1,0,1)^T$ i $\mathbf{w} = (0,1,1)^T$ u $\mathbb{R}^3$ je $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 1$. Njihova norma je $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = \sqrt{2}$. Ugao između njih

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

S druge strane, ako definišemo njihov težinski unutrašnji proizvod kao

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v_1w_1 + 2v_2w_2 + 3v_3w_3,$$

onda je $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 3$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{5}$, pa je njihov "težinski ugao"

$$\cos\vartheta = \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

U tom slučaju je $\vartheta > \theta$.

■

■ **Primer 4.11** Neka je V prostor neprekidnih kompleksnih funkcija na intervalu $[0,1]$. Lako je pokazati da je za $f,g \in V$

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

unutrašnji proizvod.

Neka je familija funkcija $\{f_n\}$ definisana izrazom

$$f_n = e^{2\pi nti}, \quad t \in [0,1], \quad n = 0, \pm 1, \ldots.$$

Jasno je da je $f_n \in V$ za svako n. Lako je pokazati da je $(f_n, f_m) = 0$, ako je $m \neq n$. Znači, $f_n \perp f_m$ ako je $m \neq n$. ■

Bitno je napomenuti da su prostori sa unutrašnjim proizvodom specijalni tipovi normiranih linearnih prostora.

Teorema 4.5.1 Dužina v vektora $\mathbf{v} \in V$ je norma $\|\mathbf{v}\|$.

Dokaz

Sledi neposredno iz Definicija 4.2.2 i 4.3.1 i Švarcove nejednakosti.

Definicija 4.5.3 **Metrički prostor** je neprazni skup $\mathscr{M}$ u kome je definisana realna funkcija $d : \mathscr{M} \times \mathscr{M} \to \mathbb{R}$, koja se naziva funkcija **rastojanja**, a zadovoljava sledeće aksiome:

(1) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \geq 0$ i $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ akko $\mathbf{u} = \mathbf{v}$,

(2) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = d(\mathbf{v},\mathbf{u})$, **simetrija**,

(3) $d(\mathbf{u},\mathbf{w}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{v}) + d(\mathbf{v},\mathbf{w})$ **nejednakost trougla**.

za svako $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w} \in \mathscr{M}$.

Lako je pokazati da je prostor sa unutrašnjim proizvodom **metrički prostor**.

Teorema 4.5.2 Svaka norma definiše **rastojanje** između elemenata vektorskog prostora u obliku

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \tag{4.20}$$

Dokaz

Neka je $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Onda iz uslova $\|\mathbf{w}\| \geq 0$ i $\|\mathbf{w}\| = 0$ akko $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ sledi

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geq 0 \quad \text{i} \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 0 \text{ akko } \mathbf{u} = \mathbf{v},$$

tj. svojstvo (1).

Dalje, iz uslova $\|\mathbf{w}\| = \|-\mathbf{w}\|$ sledi

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|,$$

tj. simetrija (2).

Konačno, iz (iii), zamenom $\mathbf{u}$ sa $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ i $\mathbf{v}$ sa $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, sledi

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|,$$

tj. nejednakost trougla (3).

Iskustvo je pokazalo da je lakše koristiti vektore koji su ortogonalni i jedinični nego proizvoljno izabrane vektore.

Definicija 4.5.4 Neprazan skup $\mathscr{O} = \{\mathbf{v}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ vektora prostora sa unutrašnjim proizvodom V naziva se **ortogonalni skup** ako je $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ za svako $i \neq j \in \mathbb{N}$. Ako je još i svaki vektor $\mathbf{v}_i$ jediničan vektor, onda je skup $\mathscr{O}$ **ortonormirani skup**. Prema tome, skup $\mathscr{O}$ je ortonormiran ako je

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij},$$

za svako $i, j \in \mathbb{N}$.

Ovde i nadalje, δ_{ij} označava **Kronekerov delta simbol** definisan sa

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{4.21}$$

Lako se iz ortogonalnog skupa vektora dobija ortonormirani skup. U tom slučaju je potrebno svaki vektor, ortogonalnog skupa, normirati, tj. podeliti njegovim intenzitetom i svesti ga na jediničin vektor.

Teorema 4.5.3 Bilo koji ortogonalni skup vektora različitih od nule u V je linearno nezavisan.

Dokaz

Naka je $\mathscr{O} = \{\mathbf{v}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ortogonalan skup vektora različitih od nule. Pretpostavimo da je $\sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$. Onda je $0 = \sum_i \lambda_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j) = \lambda_j$. Prema tome, $\mathscr{O}$ je linearno nezavisan skup.

Posledica 4.5.4 U konačno dimenzionalnom linearnom vektorskom prostoru V_n ortonormiran skup ne može da ima više linearno nezavisnih vektora od n - dimenzije prostora.

Za ortonormirani skup kaže se da je **kompletan** ako nije podskup nekog drugog ortonormirnog skupa istog prostora. Prema tome, svaki ortonormirani skup od n vektora je kompletan i maksimalan u smislu najvećeg broja linearno nezavisnih vektora. Znači, kompletan ortonormirani skup je baza linearnog vektorskog prostora sa unutrašnjim proizvodom.

Bilo koja baza prostora V_n može da se koristi za konstrukciju ortonormirane baze. Proces nalaženja takve baze poznat je pod imenom **Gram-Šmitov[4] postupak ortonormalizacije**.

[4]Gram-Schmidt

Teorema 4.5.5 Neka je $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ proizvoljna baza prostora V_n i neka je

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 && \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1/\|\mathbf{u}_1\|,\\
&\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 && \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2/\|\mathbf{u}_2\|,\\
&\ldots\ldots\ldots && \ldots \quad \ldots\\
&\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \sum_{j=1}^{n-1}(\mathbf{v}_n\cdot\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j && \mathbf{e}_n = \mathbf{u}_n/\|\mathbf{u}_n\|
\end{aligned}
$$

Onda $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ je ortonormirana baza prostora V_n.

Dokaz

Postupak za određivanje tražene baze sastoji se iz dva koraka:

1. nalaženje međusobno uprvnih vektora $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$,
2. njihovog normiranja.

Korake ćemo izvoditi sukcesivno.

Neka je prvi vektor ortogonalne baze $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$. Njegov jedinični vektor je $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1/\|\mathbf{u}_1\|$. Vektor $\mathbf{u}_2$ biramo u ravni koju određuju vektori $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{v}_2$, tako da je

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_1 \mathbf{e}_1.$$

Koeficijent α_1 određujemo iz uslova ortogonalnosti $\mathbf{u}_2$ i $\mathbf{e}_1$, tj. iz uslova $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$. Odavde dobijamo $\alpha_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1$, pa je

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 \quad \text{i} \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2/\|\mathbf{u}_2\|.$$

Vektor $\mathbf{u}_3$ određujemo u prostoru vektora $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$, pod uslovima da je $\mathbf{u}_3 \perp \mathbf{e}_1$ i $\mathbf{u}_3 \perp \mathbf{e}_2$. Njegov jedinični vektor je $\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_3/\|\mathbf{u}_3\|$.

Ovaj postupak ponavljamo, pa za k-ti vektor tražene baze, dobijamo

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{\alpha=1}^{k-1} (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{e}_\alpha)\mathbf{e}_\alpha \quad \text{i} \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{u}_k/\|\mathbf{u}_k\|,$$

gde je $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \dots, k-1$.

Ovako određeni vektor je upravan na sve vektore $\mathbf{e}_\alpha$ $(\alpha = 1, \dots, k-1)$. Iz prethodne relacije sledi da je

$$\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{e}_\beta = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{e}_\beta - \sum_{\alpha=1}^{k-1} (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{e}_\alpha)(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{e}_\beta - \sum_{\alpha=1}^{k-1} (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{e}_\alpha)\delta_{\alpha\beta} =$$
$$= \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{e}_\beta - \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{e}_\beta \equiv 0.$$

Ovako određenih, međusobno ortogonalnih, vektora $\mathbf{u}_k$ može biti najviše n, jer pripadaju vektorskom prostoru V_n. Na osnovu Teoreme 4.5.3 oni su linearno nezavisni i prema tome definišu ortonormiranu bazu prostora V_n.

Izraz

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{\alpha=1}^{k-1} (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{e}_\alpha)\mathbf{e}_\alpha \quad \text{i} \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{u}_k/\|\mathbf{u}_k\|, \quad k = 1, \dots, n, \tag{4.22}$$

predstavlja formulu za određivanje ortonormirane baze, prostora V_n, u postupku koji je ovde iznet. Za $k = 1$ suma u ovom izrazu ne postoji.

Napomenimo da prvi vektor baze biramo proizvoljno. Pri svakom izboru dobijamo drugu ortonormiranu bazu V_n.

■ **Primer 4.12** Pokazati da skup funkcija $\{1, x, x^2, x^3\}$ na $[-1, 1]$ nije ortogonalan.

■

■ **Primer 4.13** Za skup funkcija $f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x^3$ primenom Gram-Šmitovog postupka, (vidi (4.22)),

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= f_0(x),\\
\varphi_1(x) &= f_1(x) - \frac{(f_1,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)},\\
\varphi_2(x) &= f_2(x) - \frac{(f_2,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x) - \frac{(f_2,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x),\\
\varphi_3(x) &= f_3(x) - \frac{(f_3,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x) - \frac{(f_3,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x) - \frac{(f_3,\varphi_2)}{(\varphi_2,\varphi_2)}\varphi_2(x),
\end{aligned}$$

gde je unutrašnji proizvod definisan sa

$$(f(x),\varphi(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

dobijamo ortogonalan skup funkcija $\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1,\\
\varphi_1(x) &= x,\\
\varphi_2(x) &= x^2 - \frac{1}{3},\\
\varphi_3(x) &= x^3 - \frac{1}{5}x.
\end{aligned}$$

■

■ **Primer 4.14** Neka je baza E_3 određena vektorima: $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$ u odnosu na standardnu ortonormiranu baza: $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$.

Na osnovu formule (4.22) jedna od ortonormalnih baza određuje se prikazanim postupkom.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \quad \bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1);\\
&\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2\cdot\bar{\mathbf{e}}_1)\bar{\mathbf{e}}_1, \quad \mathbf{v}_2\cdot\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow\\
&\mathbf{u}_2 = \frac{1}{3}(-2,1,1), \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1);\\
&\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3\cdot\bar{\mathbf{e}}_1)\bar{\mathbf{e}}_1 - (\mathbf{v}_3\cdot\bar{\mathbf{e}}_2)\bar{\mathbf{e}}_2, \quad \mathbf{v}_3\cdot\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{v}_3\cdot\bar{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \Rightarrow\\
&\mathbf{u}_3 = \frac{1}{2}(0,-1,1), \quad \bar{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1).
\end{aligned}$$

■

4.5.1 Ortogonalni komplement

Neka je V linearni potprostor u kome je definisan unutrasnji (skalarni) proivod. Onda se koncept uzajamne ortogonalnosti vektora može proširiti na uzajamnu ortogonalnost potprostora.

Definicija 4.5.5 Dva potprostora U i W prostora V sa unutrašnjim proizvodom su ortogonalna, ako je svaki vektor $\mathbf{u} \in U$ upravan na svaki vektor $\mathbf{w} \in W$.

Definicija 4.5.6 Neka je U potprostor prostora V sa unutrašnjim proizvodom. Onda je **ortogonalni komplement** U podskup svih vektora skupa V, koji označavamao sa $U^{\perp}$, takvih da je

$$U^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V | \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{za svako } \mathbf{u} \in U\}.$$

Teorema 4.5.6 Neka je U linerani potprostor prostora V sa unutrašnjim proizvodom. Onda je
i) $U^{\perp}$ linearni potprostor od V,
ii) $V = U \oplus U^{\perp}$,
iii) $\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$,
iv) $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$.

Dokaz

i) Ako su $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2 \in U^{\perp}$ onda je $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_1 = 0$ i $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_2 = 0$ za svako $\mathbf{u} \in U$. Tada je

$$(\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u} = 0,$$

za svako α_1, $\alpha_2 \in R$. Znači $a_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 \in U^{\perp}$, tj. $U^{\perp}$ je potprostor prostora V.

ii) Posmatrajmo vektorski prostor $U + U^{\perp}$. Neka je $\mathbf{z} \in U \cap U^{\perp}$. Onda je $\mathbf{z} \in U$ i $\mathbf{z} \in U^{\perp}$ pa je, prema definiciji ortogonalnog komplementa, $\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{0}$. Prema tome je $U \cap U^{\perp} = \mathbf{0}$. Znači $U + U^{\perp} = U \oplus U^{\perp}$.
Potrebno je još pokazati da je $U \oplus U^{\perp} = V$. Uvek je moguće birati ortonormiranu bazu $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ u V, tako da je $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$, $k < n$, baza U. Onda je za svako $\mathbf{v} \in V$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Očigledno da se vektor $\mathbf{v}$ može predstaviti jedinstveno u obliku

$$\mathbf{v} = \sum_{\tau=k+1}^{n} v_\tau \mathbf{e}_\tau + \sum_{\lambda=1}^{k} v_\lambda \mathbf{e}_\lambda = \mathbf{w} + \mathbf{u},$$

gde je

$$\mathbf{u} = \sum_{\lambda=1}^{k} v_\lambda \, \mathbf{e}_\lambda, \quad \mathbf{w} = \sum_{\tau=k+1}^{n} v_\tau \, \mathbf{e}_\tau.$$

Jasno je da $\sum_{\lambda=1}^{k} v_\lambda \, \mathbf{e}_\lambda \in U$. Takođe je $\sum_{\tau=k+1}^{n} v_\tau \, \mathbf{e}_\tau \in U^\perp$, jer je $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ i

$$\left(\sum_{\tau=k+1}^{n} v_\tau \, \mathbf{e}_\tau \right) \cdot \mathbf{u} = \left(\sum_{\tau=k+1}^{n} v_\tau \, \mathbf{e}_\tau \right) \cdot \sum_{\lambda=1}^{k} u_\lambda \, \mathbf{e}_\lambda =$$
$$= \sum_{\tau=k+1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{k} v_\tau \, u_\lambda \, \mathbf{e}_\tau \cdot \mathbf{e}_\lambda = 0,$$

za svako $\mathbf{u} \in U$. Prema tome je $V = U \oplus U^\perp$.

iii) Kao posledica ovog jedinstvenog razlaganja $V = U \oplus U^\perp$ sledi da je

$$\dim V = \dim U + \dim U^\perp.$$

iv) Znamo da je $U^\perp$ linearni potprostor prostora V. Onda je njegov ortogonalni komplement $\left(U^\perp\right)^\perp$ i $V = U^\perp \oplus \left(U^\perp\right)^\perp$. Takođe je $V = U \oplus U^\perp$. Prema tome

$$U \oplus U^\perp = U^\perp \oplus \left(U^\perp\right)^\perp.$$

Kako je ovo razlaganje prostora jednoznačno i simetrično sledi da je $\left(U^\perp\right)^\perp = U$.

Posledica 4.5.7 Bilo koji vektor $\mathbf{v} \in V$ može biti jednoznačno predstavljen u obliku

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \tag{4.23}$$

gde je $\mathbf{u} \in U$, a $\mathbf{w} \in U^\perp$.

Lema 4.5.8 Pitagorina teorema
Neka je

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1,$$
$$\mathbf{u},\, \mathbf{u}_1 \in U, \quad \mathbf{w},\, \mathbf{w}_1 \in U^{\perp},$$

onda je

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1$$

i

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2.$$

❑

Dokaz je trivijalan.

4.6 Orijentacija i vektorski proizvod

Neka su $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ i $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ dve uređene baze prostora V. Onda je

$$\mathbf{v}_j = a^i_j \mathbf{u}_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Matrica $\mathbf{A} = \left(a^i_j\right)$ je regularna.

Definicija 4.6.1 **Uređene baze** $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ i $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ su **iste orijentacije** u V ako je $\det(\mathbf{A}) > 0$. One su **suprotne orijentacije** ako je $\det(\mathbf{A}) < 0$.

■ **Primer 4.15** Neka su $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ i $\{(1,1,0), (1,0,-1), (2,1,3)\}$ dve uređene baze u $\mathbb{R}^3$. Kako je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \det(\mathbf{A}) = -4,$$

ove uređene baze su suprotne orijentacije. ■

■ **Primer 4.16** Baze $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ i $\{(1,1,0), (2,1,3), (1,0,-1)\}$ su iste orijentacije. Dokazati. ■

Definicija 4.6.2 — Vektorski proizvod u $\mathbb{R}^3$. Neka su $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ i $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ vektori u $\mathbb{R}^3$. Vektorski proizvod vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ je vektor

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(u^2 v^3 - u^3 v^2\right) \mathbf{e}_1 + \left(u^3 v^1 - u^1 v^3\right) \mathbf{e}_2 + \left(u^1 v^2 - u^2 v^1\right) \mathbf{e}_3.$$

Korisno je ovaj proizvod napisti u obliku determinante

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ u^1 & u^2 & u^3\\ v^1 & v^2 & v^3\end{bmatrix},$$

u odnosu na standardnu bazu $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$.

N Pitanje određivanja vektorskog proizvoda u odnosu na krivolinijske koordinate, tj. u odnosu na nestandardnu bazu, razmatraćemo u delu Tenzoski račun.

Sledeća svojstva vektorskog proizvoda formulišemo u obliku Leme.

Lema 4.6.1 Neka su $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ i $c\in\mathbb{R}$. Onda je:

(a) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ - **anti komutativnost**;
(b) $(c\mathbf{u})\times\mathbf{v}=c(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ - **homogenost**;
(c) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$ akko su $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ linearno zavisni;
(d) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{w}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ - **distributivnost**;
(e) proizvod $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ je upravan na vektore $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$, tj. njegov skalarni proizvod sa vektorima $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ je nula;
(f) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\sin\theta$, gde je θ ugao između vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$;
(g) $\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v})>0$ definiše **pozitivnu orijentaciju**, pravilo desne ruke, ako su vektori $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ linearno nezavisni.
(h) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{0}$, svojstvo Jakobijana.

❑

Dokaz prepuštamo čitaocu. ❑

Koristeći ova svojstva vektorskog proizvoda dajemo tabelu njihovog proizvoda za ortonormirane vektore standardne baze u notaciji koja je uobičajena u prostoru $\mathbb{R}^3$.

$\times$	**i**	**j**	**k**
i	**0**	**k**	**-j**
j	**-k**	**0**	**i**
k	**j**	**-i**	**0**

Definicija 4.6.3 **Mešoviti proizvod vektora** $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ je skalar

$$[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}.$$

U odnosu na standarnu bazu $u_i\mathbf{e}_i$, $v_i\mathbf{e}_i$, $w_i\mathbf{e}_i$, lako je pokazati da je

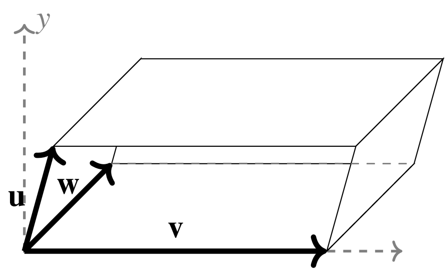
$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

Odavde sledi da je

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).$$

Geometrijska interpretacija mešovitog vektorskog proizvoda je zapremina $\mathscr{V}$ paralelepipeda definisanog nad tim vektorima kao stranama, tj.

$$\mathscr{V} = |\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|.$$



Slika 4.2: Paralelepiped.

N Uočimo da je matica $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ kvadratna i da je skalar $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$ poznat pod imenom **determinanta**.

$$\det(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3) = [\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3].$$

Vrlo važna veličina o kojoj će biti posebno reči.

Od značaja je da se odredi **dvostruki vektorski proizvod** $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ vektora $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ na standardan način. Znamo da je vektor $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ upravan na ravan vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$, jer je upravan na oba. Onda svaki vektor koji je upravan na $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ mora biti u ravni vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$. Kako je vektor $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ upravan na $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ on mora bitu u ravni vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$. Drugačije rečeno, $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ je linerna kombinacija vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$, tj.

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = a\mathbf{u}+b\mathbf{v}, \tag{4.25}$$

gde su $a,b,\in\mathbb{R}$. Skalarnim proizvodom ove jednačine sa $\mathbf{w}$ dobijamo

$$a(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})+b(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = 0.$$

Rešenje ove jednačine po nepoznatim a i b je

$$a = c(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) \quad \text{i} \quad b = -c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}),$$

gde je c neodređeni skalar. Zamenom ovih vrednosti za a i b u izrazu (4.25), dobijamo

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=c(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\,\mathbf{u}-c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\,\mathbf{v}.$$

Kako je ovo identitet po vektorima $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, onda mora biti nezavisno od njihovog izbora. Izborom $\mathbf{u}=\mathbf{w}=\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{v}=\mathbf{e}_2$ iz poslednje jednačine, dobijamo da je $c=-1$. Zamenom vrednosti za c u poslednjoj jednačini, dobijamo

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}. \tag{4.26}$$

Na sličan način se može pokazati da je

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}. \tag{4.27}$$

Iz ova dva izraza se vidi da vektorski proizvod nije asocijativan.

U specijanom slučaju kada je $\mathbf{w}=\mathbf{u}$ biće

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{u})=[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\mathbf{I}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}]\mathbf{v}.$$

(Vidi poglavlje 4.6.3, str. 89).

N Izrazi (4.24), (a) i (4.27) su jednostavni primeri, koji se jednostavnije i elegantnije mogu izvesti (prikazati) korišćenjem tenzorskog računa.

Zadatak 4.2 Pokazati da je

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2\cdot\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2=\begin{vmatrix}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\end{vmatrix}.$$

■

U delu Vektorski prostor, mešoviti vektorski proizvod (Def. 4.6.3, str. 83), uvodi se oznaka $[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]$ za determinantu matrice $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$, tj.

$$\det(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3].$$

U ovim oznkama mešoviti proizvod $\mathbf{v}_1\cdot(\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3)$ ekvivalentan je $[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]$, tj.

$$\mathbf{v}_1\cdot(\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3)=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3].$$

■ **Primer 4.17** Neka su $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ dva nekolinearna vektora data u tački $\mathbf{x}_0$ u $\mathbb{R}^3$. Odrediti jednačinu njihove ravni S koja prolazi kroz tačku $\mathbf{x}_0$. ■

Rešenje

Dajemo dva rešenja.

a) Neka je $\mathbf{x}$ prozvoljna tačka ravni S. Onda je vektor $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ u ravni S. Prema tome je $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ linearna kombinacija vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$. Tačnije

$$\mathbf{x}-\mathbf{x}_0 = \lambda\,\mathbf{u}+\mu\,\mathbf{v},$$

gde su $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ proizvoljni parametri. Ovaj izraz predstavlja jednačinu ravni S u parametarskom obliku.

b) Obeležimo sa $\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{n}$ je upravan na vektore $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$. Skalarni proizvod ovog vektora sa gornjom jednačinom dobijamo

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=0,$$

tj. jednačinu ravni S u obliku koji ne sadrži parametre λ i μ. Drugačije rečeno, ovo je jednostavan postupak eliminacije parametara površi S.

4.6.1 n-dimenzioni vektorski proizvod

Vektorski proizvod može biti uopšten na različite načine. Ovde samo navodimo primer vektorskog proizvoda u $\mathbb{R}^n$

Neka je $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n\}$ standardna baza u $\mathbb{R}^n$ i neka su

$$\mathbf{v}_\alpha = v^i_\alpha \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha = 1,2,\dots,n-1.$$

Po definiciji je

$$\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2\times\cdots\times\mathbf{v}_{n-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ v^1_1 & v^2_1 & \cdots & v^n_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^1_{n-1} & v^2_{n-1} & \cdots & v^n_{n-1} \end{vmatrix}$$

U specijalnom slučaju kada su $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$ onda je $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ regularan vektorski proizvod. Ovako definisani proizvod od $n-1$ vektora ima ista svojstva kao vektor koji je upravan na svaki od vektora proizvoda i geometrijski njegov intezitet predstavlja "zapreminu paralelopipeda" dimenzije $n-1$ konstruisanog nad ovim vektorima kao stranama.

4.6.2 Recipročna baza

Neka je $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ baza linearnog vektorskog prostor V sa unutrašnjim proizvodom. Pri praktičnom računanju pogodno je koristiti i tzv. **recipročnu bazu**, koja odgovara bazi $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$, a označavaćemo je sa $\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^n$. Definiše se izrazom

$$\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{v}^i = \delta^i_j. \tag{4.28}$$

Iz definicije sledi da je svaki pojedinačni vektor racipročne baze upravan na sve vektore polazne baze izuzev njemu odgovarajućeg vektora, koji je određen istom vrednošću indeksa. Njihov skalarni proizvod jednak je jedinici.

Teorema 4.6.2 Svaka baza ima recipročnu bazu i jedinstvena je.

Dokaz

Dokaz ćemo izvesti u dva koraka:

Postojanje recipročene baze. Neka je $\mathbf{v}_1,\dots,\hat{\mathbf{v}}_i,\dots,\mathbf{v}_n$, baza linearnog vektorskog potprostora U_i dimenzije $n-1$, za neko $i=1,\dots,n$. Oznaku $\hat{\mathbf{v}}_i$ koristimo da ukažemo da se ovaj vektor ne sadrži u bazi prostora U_i, tj. $\mathbf{v}_i \notin U_i$. Na osnovu Teoreme 4.5.6 postoji jednodimenzionalni prostor $U_i^{\perp}$, tako da je $V = U_i \oplus U_i^{\perp}$. Vektor $\mathbf{m}^i \in U_i^{\perp}$ je upravam na U_i, tj. $\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{m}^i = 0$ za $i \neq j$, pa je prema tome $\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{m}^i \neq 0$. Onda je traženi vektor $\mathbf{v}^i$ kolinearan sa $\mathbf{m}^i$, tj. $\mathbf{v}^i = \lambda\,\mathbf{m}^i$. Skalar λ određuje se iz uslova $\mathbf{v}_i\mathbf{v}^i = 1$. Tada je $\lambda = 1/(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{m}^i)$, pa je

$$\mathbf{v}^i = \frac{1}{(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{m}^i)}\mathbf{m}^i,$$

i-ti traženi vektor recipročne baze ($i=1,\dots,n$).

Recipročena baza je jedinstvena. Pretpostavimo da postoje dve recipročne baze, $\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^n$ i $\bar{\mathbf{v}}^1,\dots,\bar{\mathbf{v}}^n$. Onda je, prema definiciji recipročnih baza, $\mathbf{v}^i\cdot\mathbf{v}_j = \delta^i_j$ i $\bar{\mathbf{v}}^i\cdot\mathbf{v}_j = \delta^i_j$. Odavde sledi da je
$(\mathbf{v}^i - \bar{\mathbf{v}}^i)\cdot\mathbf{v}_j = 0$, ili $(\mathbf{v}^i - \bar{\mathbf{v}}^i)\cdot\mathbf{v} = 0$, gde je $\mathbf{v} = \lambda^i\mathbf{v}_i$ proizvoljan vektor iz V. Prema tome, mora biti $\mathbf{v}^i - \bar{\mathbf{v}}^i = \mathbf{0}$, tj. $\mathbf{v}^i = \bar{\mathbf{v}}^i$.

■ **Primer 4.18** U slučaju $\mathbb{E}_3$ recipročna baza $\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^3$ polazne baze $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$, data je sa

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^1 &= \frac{\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3}{[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]},\\
\mathbf{v}^2 &= \frac{\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1}{[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]},\\
\mathbf{v}^3 &= \frac{\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2}{[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]},
\end{aligned} \tag{4.29}$$

gde je " $\times$ " oznaka za vektorski proizvod, a $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ mešoviti proizvod vektora.

Određivanje ove baze je jednostavno. Na primer, vektor $\mathbf{v}^1$ je, prema definiciji recipročne baze, upravan na $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$. Takav je vektor $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$. Prema tome, $\mathbf{v}^1$ je kolinearno sa vektorom $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$, tj. $\mathbf{v}^1 = \lambda \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$. Konstanta λ određuje se iz uslova $\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}_1 = 1$, odakle sledi da je $\lambda = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$. Na sličan način se određuju vektori $\mathbf{v}^2$ i $\mathbf{v}^3$. ∎

Napomenimo da u slučaju Dekartovog koordinatnog sistema polazna baza $\mathbf{e}_i$ i recipročna baza $\mathbf{e}^i$ se poklapaju, tj.

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i,$$

što sledi iz $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ i, saglasno sa definicijom, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$. Nadalje ćemo koristiti samo oznaku $\mathbf{e}_i$ za obe baze.

Značaj recipročne baze ogleda se u njenoj primeni pri određivanju komponenata vektora datog u odnosu na polaznu bazu $\mathbf{v}_i$, $(i = 1, \ldots, n)$.

Lema 4.6.3 Neka je $\mathbf{v}$ bilo koji vektor u V. Onda je

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{v}^i = v^i \mathbf{v}_i, \qquad v^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i. \tag{4.30}$$

❑

Dokaz

Neka je $\mathbf{v} = v^i \mathbf{v}_i$. Množeći ovu relaciju sa $\mathbf{v}^j$, dobijamo

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^j &= v^i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}^j = v^i \left(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}^j \right) = \\ &= v^i \delta_i^j = v^j. \end{aligned}$$

Na isti način se može pokazati da je $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$, za $\mathbf{v} = v_i \mathbf{v}^i$.

■ **Primer 4.19** U slučaju $\mathbb{E}_2 \subset \mathbb{E}_2$ izrazi za recipročnu bazu $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ polazne baze $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, su znatno složeniji i glase

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^1 &= \frac{(\mathbf{v}_2)^2 \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_2}{(\mathbf{v}_2)^2 (\mathbf{v}_1)^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2}, \\ \mathbf{v}^2 &= \frac{(\mathbf{v}_1)^2 \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_1}{(\mathbf{v}_2)^2 (\mathbf{v}_1)^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Pokazaćemo jedan od postupaka za izvođenje $\mathbf{v}^1$. Proširimo sistem vektora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ na $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, gde je $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Ovaj sistem vektora je očigledno linearno nezavisan. Vektori $\mathbf{v}^1$ i $\mathbf{v}^2$ su upravni na $\mathbf{v}^3$, pa prema tome, leže u ravni vektora $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$. Koristeći izraz za $\mathbf{v}^1$, iz (4.29), pišemo

$$\mathbf{v}^1 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]} = \frac{\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}{[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)]}.$$

Zamenom izraza

$$\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_2)^2\mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2,$$
$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)] = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2 = (\mathbf{v}_2)^2(\mathbf{v}_1)^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2,$$

u prethodnoj relaciji, dobijamo $(4.31)_1$. Na sličan način određuje se i izraz $(4.31)_2$. ∎

Napomenimo da je ovde $\mathbf{v}_3$ korišćen kao pomoćni vektor pri određivanju recipročne baze vektora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. U nekim slučajevimo poželjo je odrediti i $\mathbf{v}^3$, koji zajedno sa $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ u $\mathbb{E}_2$ određuje recipročnu bazu vektora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ u $\mathbb{E}_3$. Njegov izraz dat je sa

$$\mathbf{v}^3 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]} = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{(\mathbf{v}_2)^2(\mathbf{v}_1)^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2}. \tag{4.32}$$

4.6.3 Tenzorski proizvod vektora

Neka je V linearni vektorski prostor sa unutrašnjim proizvodom i neka su $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$.

Definicija 4.6.4 **Tenzorski proizvod** dva vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ je **dijada** koju označavamo sa $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, a koja je definisana uslovom

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \tag{4.33}$$

za sve vektore $\mathbf{w}$.

Saglasno definiciji, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$ transformiše vektor $\mathbf{w}$ u vektor kolinearan sa $\mathbf{u}$, kada se na njega primeni sa leve strane. Prema tome dijada dva vektora je linearna transformacija.

Na isti način, primenjujući dijadski proizvod $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$ na vektor $\mathbf{w}$ sa desne strane, dobijamo

$$\mathbf{w}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}, \tag{4.34}$$

tj. vektor kolinearan sa vektorom $\mathbf{v}$. Odavde sledi da tenzorski proizvod nije komutativan, tj.

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}. \tag{4.35}$$

Teorema 4.6.4 Tenzorski proizvod zadovoljava sledeće uslove:

$$\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}, \tag{4.36}$$
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}, \tag{4.37}$$
$$\lambda(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\lambda \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes (\lambda \mathbf{v}), \tag{4.38}$$
$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes \mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{4.39}$$

Dokaz

Neka je $\mathbf{a}$ proizvoljan vektor iz V. Onda je

$$\begin{aligned}[\mathbf{u}\otimes(\mathbf{v}+\mathbf{w})]\,\mathbf{a} = \mathbf{u}\,[(\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot\mathbf{a}] &= \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{a}) = \\ &= (\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\cdot\mathbf{a}+(\mathbf{u}\otimes\mathbf{w})\cdot\mathbf{a} = \\ &= (\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}+\mathbf{u}\otimes\mathbf{w})\cdot\mathbf{a},\end{aligned}$$

odakle sledi relacija (4.36).

Dokaz ostalih relacija izvodi se na sličan način.

Uočimo da se $\mathbf{u}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$ može predstaviti na sledeće načine:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) &= (\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\mathbf{w}, \\ &= (\mathbf{u}\otimes\mathbf{w})\mathbf{v}, \\ &= \mathbf{w}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}), \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}),\end{aligned}$$

što nam omogućava, u datim slučajevima, njihov pogodan izbor.

■ **Primer 4.20** Naka je $\mathbf{v}$ proizvoljan vektor iz V. Onda je

$$\mathbf{v} = v^i\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}^i)\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(\mathbf{v}^i\otimes\mathbf{v}_i).$$

■

Dijada

$$\mathbf{I} = \mathbf{v}^i\otimes\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i\otimes\mathbf{v}^i \tag{4.40}$$

transformiše svaki vektor u samog sebe, tj.

$$\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{I} = \mathbf{v} \tag{4.41}$$

i naziva se **identička transformacija**.

■ **Primer 4.21** Dokaz jedinstvenosti recipročne baze (Teorema 4.6.2) daćemo, koristeći tenzorski proizvod.

Pretpostavimo da postoje dve recipročne baze, kao i u Teoremi 4.6.2, $\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^n$ i $\bar{\mathbf{v}}^1,\dots,\bar{\mathbf{v}}^n$. Onda je, prema definiciji recipročnih baza, $\mathbf{v}^i\cdot\mathbf{v}_j = \delta^i_j$ i $\bar{\mathbf{v}}^i\cdot\mathbf{v}_j = \delta^i_j$. Odavde sledi da je $(\mathbf{v}^i-\bar{\mathbf{v}}^i)\cdot\mathbf{v}_j = 0$. Množeći ovu jednakost sa $\mathbf{v}^j$, dobijamo

$$\mathbf{0} = \left[(\mathbf{v}^i-\bar{\mathbf{v}}^i)\cdot\mathbf{v}_j\right]\mathbf{v}^j = (\mathbf{v}^i-\bar{\mathbf{v}}^i)\left(\mathbf{v}_j\otimes\mathbf{v}^j\right) = (\mathbf{v}^i-\bar{\mathbf{v}}^i)\mathbf{I} = \mathbf{v}^i-\bar{\mathbf{v}}^i.$$

■

Lema 4.6.5 Elementi $\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ skupa svih dijadskih proizvoda baze $\mathbf{v}_i$ su linearno nezavisni.

❏

Dokaz

Naka je $\lambda^{ij}\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$. Onda je

$$\mathbf{0} = \lambda^{ij}(\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j)\mathbf{v}^k = \lambda^{ij}\mathbf{v}_i(\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}^k) = \lambda^{ij}\mathbf{v}_i \delta_j^k = \lambda^{ik}\mathbf{v}_i \quad \Rightarrow \quad \lambda^{ij} = 0,$$

jer su $\mathbf{v}_i$ bazni vektori.

Napomenimo da je ukupan broj dijada $\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j$ jednak n^2. Oni se mogu uzeti kao baza nekog V_{n^2} linearnog prostora.

Tenzorski proizvod tri vektora $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ je trijada $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$, za koju je

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w})\mathbf{z} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}), \tag{4.42}$$

za svako $\mathbf{z} \in V$.

Trijada zadovoljava sledeće uslove:

$$\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \quad \text{– asocijativnost,} \tag{4.43}$$

$$\lambda \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{u} \otimes (\lambda \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes (\lambda \mathbf{w}) \quad \text{– homogenost.} \tag{4.44}$$

Lako je pokazati da je skup svih trijada, baznih vektora $\mathbf{v}_i \in V$,

$$\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j \otimes \mathbf{v}_k, \quad i, j, k = 1, \ldots, n, \tag{4.45}$$

linearno nezavisan. Ima ih n^3 i mogu se uzeti kao baza V_{n^3} linearnog prostora.

Uopšte,

$$\mathbf{v}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_{i_k}, \tag{4.46}$$

baznih vektora $\mathbf{v}_i$, $i, j, k = 1, \ldots, n$ je k-jada. Oni su linearno nezavisni i ima ih ukupno n^k. Mogu se uzeti kao baza linearnog prostora V_{n^k}.

■ **Primer 4.22** Neka su $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektori u $\mathbb{E}_3$. Pokazati da važe sledeće identičnosti:

1. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$,
2. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d}))\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))\mathbf{d}$.

■

■ **Primer 4.23**

1. $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}\otimes\mathbf{d}$,
2. $\mathrm{tr}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.

■

■ **Primer 4.24**

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})(\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\mathbf{a}+\mu(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})\mathbf{a} = [\lambda(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})+\mu(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})]\mathbf{a}.$$

■

Zadatak 4.3

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = (\mathbf{A}\mathbf{a})\otimes\mathbf{b}.$$

■

Rešenje

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = [(\mathbf{A}\mathbf{a})\otimes\mathbf{b}]\cdot\mathbf{c}.$$

4.7 Linearne transformacije

Jedan od najvažnijih pojmova, koji se odnosi na preslikavanja vektorskih prostora, je **linearna transformacija**.

Definicija 4.7.1 Preslikavanje $\mathbf{T}$ linearnog prostora V u linearni prostor U, gde su V i U vektorski prostori nad istim poljem F, naziva se **linearna transformacija** ili **linearni operator**, ako je

$$\mathbf{T}(a\mathbf{v}+b\mathbf{z}) = a\mathbf{T}(\mathbf{v})+b\mathbf{T}(\mathbf{z}) \quad \text{za svako } \mathbf{v},\mathbf{z}\in V \text{ i svako } a,b\in F. \tag{4.47}$$

Važno je uočiti da simbol $+$ na levoj strani jed. (4.47) označava sabiranje u V, dok na desnoj strani ona označava sabiranje u U.

Transformacija koja nije linearna naziva se **nelinearna transformacija**.

Označimo sa $L(V,U)$ skup svih linearnih transformacija linearnog prostora V u linearni prostor U.

■ **Primer 4.25** Neka je prostor neprekidnih funkcija realne promenljive $x(t)$, na intervalu $[a,b]=V$, i $\mathbf{T}: V\to U$ definisano Rimanovim integralom

$$\mathbf{T}x(t) = \int_a^t x(s)\,\mathrm{d}s, \quad a\le t\le b.$$

Ovako definisana transformacija zadovoljava uslove linearne transformacije. ■

■ **Primer 4.26** Neka je V prostor kompleksne funkcija $x(t)$ realne promenljive t, definisane na intervalu $[0,\infty)$ tako da je $x(t)$ integrabilna, u smisu Rimana, i takva da je

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| < ke^{at},$$

gde je k pozitivna konstanta, a a realan broj.

Neka U označava linearni vektorski prostor kompleksnih funkcija, kompleksne promenljive $s\,(s=\sigma+i\omega)$, $i=\sqrt{-1}$. Preslikavanje $\mathbf{T}: V\to U$ definisano sa

$$\mathbf{T}x(s) = \mathscr{L}(s) = \int_0^\infty e^{-st}x(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.48}$$

je linearna transformacija. Ova transformacija naziva se **Laplasova transformacija**. ■

■ **Primer 4.27** Neka je $V = C^n(a,b)$ linearni vektorski prostor skupa funkcija $x(t)$ koje su neprekidne i n-puta diferencijabilne na intervalu (a,b). Onda je operacija diferenciranja $\mathbf{T}: C^n(a,b)\to C^{n-1}(a,b)$ definisana sa

$$\mathbf{T}x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}.$$

je linearna transformacija $C^n(a,b)\to C^{n-1}(a,b)$.

Vrlo često se u literaturi Definicija 4.7.1, jed. (4.47), prikazuje sa dva uslova:

(i) $\mathbf{T}(\mathbf{v}+\mathbf{z}) = \mathbf{T}(\mathbf{v})+\mathbf{T}(\mathbf{z})$ za svako $\mathbf{v},\mathbf{z}\in V$ i

(ii) $\mathbf{T}(a\mathbf{v}) = a\mathbf{T}(\mathbf{v})$ za svako $v\in V$ i za svako $a\in\mathbb{R}$.

Uslov (i) iskazuje **homomorfizam** linearne transformacije $\mathbf{T}$ u odnosu na operaciju sabiranja. Uslov (ii) zahteva da linearna transformacija $\mathbf{T}$ bude **homogena** u odnosu na operaciju množenja skalarom. Oba uslova mora zadovoljavati linearna transformacija $\mathbf{T}: V\to U$. ■

■ **Primer 4.28** Neka je $X=\mathbb{C}$ skup kompleksnih brojeva. Označimo sa $\bar{x}$ konjugovano kompleksan broj od $x\in\mathbb{C}$. Neka je $\mathbf{T}: X\to X$ definisano sa

$$\mathbf{T}(x) = \bar{x}.$$

Onda je

$$\mathbf{T}(x+y) = \overline{x+y} = \bar{x}+\bar{y} = \mathbf{T}(x)+\mathbf{T}(y).$$

Ako je $a\in C$ onda je

$$\mathbf{T}(ax) = \overline{ax} = \overline{a}\,\overline{x} \neq a\mathbf{T}(x),$$

tj. $\mathbf{T}$ nije linearna transformacija. ■

N Ovaj primer pokazuje da uslov (i), Definicija 4.7.1, ne povlači za sobom uslov (ii), iste definicije.

■ **Primer 4.29** Naka je $\mathbf{T}: V = \mathbb{R}^3 \to W = \mathbb{R}^2$ dato sa

$$\mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -4x_2 \end{bmatrix}.$$

Proveriti da li je $\mathbf{T}$ linearna transformacija. ■

Zadatak se svodi na proveru uslova (i) i (ii).
U slučaju uslova (i)

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2(x_1+y_1) + (x_3+y_3) \\ -4(x_2+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1+y_1) + (x_3+y_3) \\ -4x_2 + (-4)y_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -4x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y_1 + y_3 \\ -4y_1 \end{bmatrix} = \\
&= \mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) + \mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

U slučaju (ii)

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(\alpha\mathbf{x}) &= \mathbf{T}\left(\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \begin{bmatrix} 2(\alpha x_1) + (\alpha x_3) \\ -4(\alpha x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(2x_1 + x_3) \\ \alpha(-4x_2) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} (2x_1 + x_3) \\ (-4x_2) \end{bmatrix} = \\
&= \alpha\mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \alpha\mathbf{T}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Prema tome $\mathbf{T}$ je linearna transformacija. ❑

■ **Primer 4.30** Neka je $\mathbf{S} : V = \mathbb{R}^3 \to W = \mathbb{R}^3$ dato izrazom

$$\mathbf{S}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ 0 \\ x_1 + 3x_3 - 2 \end{bmatrix}.$$

Uslovi (i) i (ii) moraju da važe za sve vektore i skalare u $\mathbb{R}^3$. Tako je

$$3\mathbf{S}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix},$$

dok je

$$\mathbf{S}\left(3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{S}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 28 \end{bmatrix},$$

pa je

$$3\mathbf{S}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \neq \mathbf{S}\left(3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right).$$

Znači uslov (ii) nije zadovoljen, pa prema tome $\mathbf{S}$ nije linarna transformacija. ■

N U slučaju linearnih transformacija $\mathbf{T} : V \to V$ umesto oznake $\mathbf{T}(\mathbf{v})$ nadalje ćemo koristiti $\mathbf{Tv}$.

Definicija 4.7.2 Neka je $\mathbf{T} \in L(V,U)$. Skup

$$\mathfrak{N}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{Tv} = \mathbf{0}\}, \tag{4.49}$$

naziva se **nula prostor** od $\mathbf{T}$.

U literatuti često se koristi i termin **jezgro**[5] od $\mathbf{T}$ i obeležava se sa $\mathfrak{N}(\mathbf{T})$.

Definicija 4.7.3 Skup

$$\mathfrak{R}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{u} \in U : \mathbf{u} = \mathbf{Tv},\, \mathbf{v} \in V\}, \tag{4.50}$$

naziva se **prostor slika**[a] od $\mathbf{T}$.

[a] eng. range.

Na osnovu Definicije 4.7.1 **T0=0**, sledi da $\mathfrak{N}(\mathbf{T})$ i $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$ nikad nisu prazni skupovi.

[5] eng. kernel.

Teorema 4.7.1 Neka je $\mathbf{T} \in L(V,U)$. Onda je:
(i) $\mathfrak{N}(\mathbf{T})$ je linearni potprostor od V.
(ii) $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$ je linearni potprostor od U.

Dokaz

(i) Neka su $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, tako da je $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathfrak{N}(\mathbf{T})$, tj. $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$. Onda je, za svako $a, b \in C$

$$\mathbf{T}(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = a\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) + b\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \in \mathfrak{N}(\mathbf{T}),$$

tj. $\mathfrak{N}(\mathbf{T})$ je potprostor od V.
(ii) Neka su $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathfrak{R}(\mathbf{T})$. Onda postoje $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, tako da je $\mathbf{u}_1 = \mathbf{T}\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{u}_2 = \mathbf{T}\mathbf{v}_2$. Prema tome,

$$a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 = a\mathbf{T}\mathbf{v}_1 + b\mathbf{T}\mathbf{v}_2 = \mathbf{T}(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) \in \mathfrak{R}(\mathbf{T}),$$

tj. $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$ je potprostor od U.

Posledica 4.7.2 Neka je $\mathbf{T} \in L(V,U)$. Ako je U konačan n-dimenzionalan prostor onda je $\dim[\mathfrak{R}(\mathbf{T})] \leq n$.

Sledeća teorema uspostavlja vezu između $\dim[\mathfrak{R}(\mathbf{T})]$ i $\dim V$ i $\dim U$.

Teorema 4.7.3 $\dim[\mathfrak{R}(\mathbf{T})] \leq \min(\dim V, \dim U)$.

Dokaz

Dovoljno je da se dokaže da je $\dim[\mathfrak{R}(\mathbf{T})] \leq \dim V$, jer smo, prema prethodnoj teoremi, dokazali da je $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$ potprostor od U. Neka je $\dim V = n$, a $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ baza skupa V. Onda je za svako $\mathbf{v} \in V$ $\mathbf{v} = a^i \mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Prema tome, svaki vektor $\mathbf{T}\mathbf{v} \in \mathfrak{R}(\mathbf{T})$ može biti predstavljen u obliku

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{T}(a^i \mathbf{v}_i) = a^i \mathbf{T}\mathbf{v}_i.$$

Znači vektori $\mathbf{T}\mathbf{v}_i \in U$, $i = 1, \ldots, n$, rastežu prostor $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$, odakle sledi da je $\dim[\mathfrak{R}(\mathbf{T})] \leq \dim U$.

Od posebnog značaja je sledeća

Teorema 4.7.4 Ako je $\mathbf{T}: V \to U$ linearno preslikavanje, onda je

$$\dim V = \dim \mathfrak{R}(\mathbf{T}) + \dim \mathfrak{N}(\mathbf{T}).$$

Dokaz

Neka je $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ baza potprostora $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$. Izaberimo vektore $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ u V tako da je $\mathbf{T}\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, r$. Neka je $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k\}$ baza potprostora $\mathfrak{N}(\mathbf{T})$. Dovoljno je pokazati da skup vektora $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ i $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k\}$ čine bazu n-dimenzionalnog prostora V.

Posmatrajmo proizvoljan vektor $\mathbf{v} \in V$. Onda je sigurno $\mathbf{T}\mathbf{v} \in \mathfrak{R}(\mathbf{T})$, pa je

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = a^\alpha \mathbf{u}_\alpha = a^\alpha \mathbf{T}\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{T}(a^\alpha \mathbf{v}_\alpha), \quad \text{ili} \quad \mathbf{T}(\mathbf{v} - a^\alpha \mathbf{v}_\alpha) = \mathbf{0}, \qquad \alpha = 1, \ldots, r.$$

Odavde sledi da je $\mathbf{v} - a^\alpha \mathbf{v}_\alpha \in \mathfrak{N}(\mathbf{T})$. Prema tome,

$$\mathbf{v} - a^\alpha \mathbf{v}_\alpha = b^\beta \mathbf{z}_\beta, \qquad \beta = 1, \ldots, k,$$

ili

$$\mathbf{v} = a^\alpha \mathbf{v}_\alpha + b^\beta \mathbf{z}_\beta.$$

Potrebno je još pokazati da su vektori $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ i $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k\}$ linearno nezavisni.

Posmatrajmo linearnu kombinaciju

$$c^\alpha \mathbf{v}_\alpha + d^\beta \mathbf{z}_\beta = \mathbf{0}.$$

Onda je

$$\mathbf{T}(c^\alpha \mathbf{v}_\alpha + d^\beta \mathbf{z}_\beta) = \mathbf{T}(c^\alpha \mathbf{v}_\alpha) = c^\alpha \mathbf{T}(\mathbf{v}_\alpha) = c^\alpha \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{0},$$

jer je $\mathbf{T}\mathbf{z}_\beta = 0$, i $\mathbf{T}\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha$. Pošto su vektori $\mathbf{u}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, r$, linearno nezavisni, sledi da su svi $c^\alpha = 0$, $\alpha = 1, \ldots, r$. Onda je $d^\beta \mathbf{z}_\beta = \mathbf{0}$, odakle sledi da su svi $d^\beta = 0$, jer su vektori $\mathbf{z}_\beta$, $\beta = 1, \ldots, k$, linearno nezavisni. Znači $n = r + k$, tj. $\dim V = \dim \mathfrak{R}(\mathbf{T}) + \dim \mathfrak{N}(\mathbf{T})$.

Definicija 4.7.4 Preslikavanje $\mathbf{T}: V \to U$ je **na** ako je $\mathfrak{R}(\mathbf{T}) = U$.

U tom slučaju, svakom $\mathbf{u} \in U$ odgovara neko $\mathbf{v} \in V$ tako da je $\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{u}$.

Definicija 4.7.5 Preslikavanje $\mathbf{T}: V \to U$ je **1-1** ako iz $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{T}\mathbf{v}_2$.

Ekvivalentno tome, preslikavanje $\mathbf{T}: V \to U$ je **1-1** ako iz $\mathbf{T}\mathbf{v}_1 = \mathbf{T}\mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

Teorema 4.7.5 Preslikavanje $\mathbf{T} : V \to U$ je **1-1** akko je $\mathfrak{N}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{0}\}$.

Dokaz

Uslov je **dovoljan**.

Neka je $\mathbf{T}$ preslikavanje **1-1**. Pretpostavimo da je $\mathbf{T}\mathbf{v}_1 = \mathbf{T}\mathbf{v}_2$ za $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$. Onda je $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$ za $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$. Znači, $\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in \mathfrak{N}(\mathbf{T})$, pa preslikavanje $\mathbf{T}$ nije **1-1**. Kontradikcija. Prema tome, mora biti $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ i $\mathfrak{N}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{0}\}$.

Uslov je **potreban**.
Neka je $\mathfrak{N}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{0}\}$. Pretpostavimo da je $\mathbf{T}\mathbf{v}_1 = \mathbf{T}\mathbf{v}_2$. Onda je $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$, pa je $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in \mathfrak{N}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{0}\}$. Znači mora biti $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, tj. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. Prema tome, transformacija $\mathbf{T}$ je **1-1**.

Definicija 4.7.6 Za linearno preslikavanje $\mathbf{T} : V \to U$, koje je **1-1**, kaže se da je **regularno**.

Teorema 4.7.6 Ako je $\mathbf{T} : V \to U$ linearno preslikavanje i ako je $\dim V = \dim U$, onda je preslikavanje $\mathbf{T}$ na U akko je $\mathbf{T}$ regularno.

Dokaz

Uslov je **dovoljan**. Neka je $\mathbf{T} : V \to U$ na U i $\dim V = \dim U$. Onda je, prema Teoremi 4.7.4 i Definiciji 4.7.4

$$\dim V = \dim \mathfrak{N}(\mathbf{T}) + \dim \mathfrak{R}(\mathbf{T}) = \dim U + \dim \mathfrak{N}(\mathbf{T}) = \dim U.$$

Odavde je $\dim \mathfrak{N}(\mathbf{T}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{N}\{\mathbf{0}\}$. Znači $\mathbf{T}$ je **1-1**, tj. $\mathbf{T}$ je regularno.

Uslov je **potreban**. Neka je $\mathbf{T}$ regularno, tj. **1-1**. Na osnovu Teoreme 4.7.5 sledi $\mathfrak{N}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{0}\}$, pa je $\dim\mathfrak{N}(\mathbf{T}) = 0$. Onda je, prema Teoremi 4.7.4

$$\dim V = \dim\mathfrak{R}(\mathbf{T}) = \dim U.$$

Kako je $\mathfrak{R}(\mathbf{T}) = U$, na osnovu Teoreme 4.7.1, onda je $\mathbf{T}$ preslikavanje na.

Od posebnog značaja, za karakterisanje regularnog preslikavanja $\mathbf{T}$, je

Teorema 4.7.7 Linearno preslikavanje $\mathbf{T} : V \to U$ je regularno akko preslikava linearno nezavisan skup vektora iz V u linearno nezavisan skup vektora u U.

Dokaz

Uslov je **potreban**.

Neka je $\mathbf{T}: V \to U$ regularno preslikavanje i neka je $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ skup linearno nezavisnih vektora u V. Ispitajmo linearnu nezavisnost vektore $\mathbf{T}\mathbf{v}_\alpha$. Posmatrajmo

$$\mathbf{0} = a^\alpha(\mathbf{T}\mathbf{v}_\alpha) = \mathbf{T}(a^\alpha \mathbf{v}_\alpha), \qquad \alpha = 1, \ldots, r.$$

Na osnovu Teoreme 4.7.5 sledi da je $\mathfrak{N}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{0}\}$, pa je $a^\alpha \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{0}$. Dakle, $a^\alpha = 0$, $\alpha = 1, \ldots, r$, pa je, prema tome $\{\mathbf{T}\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{T}\mathbf{v}_r\}$ skup linearno nezavisnih vektora.

Uslov je **dovoljan**.

Neka $\mathbf{T}$ preslikava linearno nezavisne vektore iz V u linearno nezavisne vektore iz U. Onda se svako $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ preslikava $\mathbf{T}\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \in U$. Dakle, $\mathfrak{N}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{0}\}$, pa je prema tome preslikavanje $\mathbf{T}$ regularno.

4.7.1 Zbir i proizvod linearnih transformacija

Definicija 4.7.7 Skup $\mathscr{L}(V,U)$ svih linearnih transformacija $V \to U$ čini linearni vektorski prostor ako je za svako $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{L}(V,U)$.

- **zbir** $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ je linearna transformacija u $\mathscr{L}(V,U)$ tako da je

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \tag{4.51}$$

  za svako $\mathbf{v} \in V$;
- ako je $a\mathbf{A}$ linearna transformacija u $\mathscr{L}(V,U)$ takva da je

$$(a\mathbf{A})\mathbf{v} = a(\mathbf{A}\mathbf{v}), \tag{4.52}$$

  za svako $a \in \mathbb{R}$ i svako $\mathbf{v} \in V$.

Nula transformacija u $\mathscr{L}(V,U)$ je linearna transformacija $\mathbf{O}$, za koju je

$$\mathbf{O}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{4.53}$$

za svako $\mathbf{v} \in V$.

Teorema 4.7.8 Neka su U i V dva vektorska prostora. Onda je

$$\dim \mathscr{L}(U,V) = \dim U \cdot \dim V.$$

Dokaz

Neka je $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ baza od V, a $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ baza od U. Onda je za bilo koje

$\mathbf{T} \in \mathscr{L}(V,U)$ i $\mathbf{v} \in V$

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{w} \in U.$$

Specijalno,

$$\mathbf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i = w_i^{\alpha}\,\mathbf{u}_{\alpha}, \quad i = 1,\ldots,n,\ \alpha = 1,\ldots,m.$$

Koristeći tenzorski proizvod, recipročnu bazu $\mathbf{v}^i$ i izraz $\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}^i = \mathbf{I}$, dobijamo

$$\mathbf{T} = w_i^{\alpha}\,\mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{v}^i.$$

Sistem dijada $\mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{v}^i$ je linearno nezavisan, jer iz uslova

$$\lambda_i^{\alpha}\left(\mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{v}^i\right) = \mathbf{O},$$

sledi

$$\mathbf{0} = \lambda_i^{\alpha}\left(\mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{v}^i\right)\cdot\mathbf{v}_j = \lambda_i^{\alpha}\,\mathbf{u}_{\alpha}\left(\mathbf{v}^i\cdot\mathbf{v}_j\right) = \lambda_i^{\alpha}\,\mathbf{u}_{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \lambda_i^{\alpha} = 0.$$

Prema tome, dijade $\mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{v}^i$ su baza prostora $\dim\mathscr{L}(U,V)$ i ima ih

$$n\cdot m = \dim\mathscr{L}(U,V) = \dim U\cdot\dim V.$$

N Ova Teoreme ukazuje na relacije između lineranog preslikavanja i odgovarajućeg tenzora drugog reda, o čemu će biti više reči kasnije.

Definicija 4.7.8 Neka su $\mathbf{T}: V \to U$ i $\mathbf{S}: U \to W$ linearne transformacije. **Proizvod** ovih **transformacija** je linearna transformacija $V \to W$ koju obeležavamo sa $\mathbf{ST}$, a za koju važi

$$\mathbf{STv} = \mathbf{S}(\mathbf{Tv}), \tag{4.54}$$

za svako $\mathbf{v} \in V$.

Svojstva proizvoda linearnih transformacija daje

Teorema 4.7.9

$$\mathbf{R}(\mathbf{ST}) = (\mathbf{RS})\mathbf{T},$$
$$(a\mathbf{S} + b\mathbf{T})\mathbf{R} = a\mathbf{SR} + b\mathbf{TR},$$
$$\mathbf{R}(a\mathbf{S} + b\mathbf{T}) = a\mathbf{RS} + b\mathbf{RT},$$

za svko $a, b \in R$.

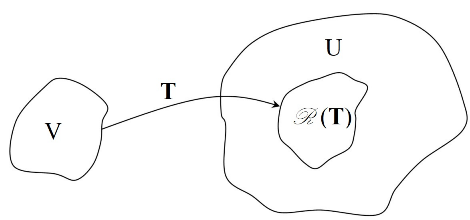
Dokaz je trivijalan. ❑

4.8 Specijalni tipovi linearnih transformacija

4.8.1 Rezime

Neka je $\mathbf{T} \in L(V,U)$, gde su V i U vektorski prostori definisani nad istim poljem F.

Korisno je dati sažet pregled uvedenih pojmova i karakteristika linearne transformacije $\mathbf{T}$.



Slika 4.3: Linearna transformacija $\mathbf{T} : V \to U$.

Pošto je linearna transformacija $\mathbf{T}$ linearnog prostora V u linearni prostor U preslikavanje, razlikujemo, kao i u Odeljku 3: **surjektivne** (tj. **na**), **injektivne** (tj. **1-1**) i **bijektivne** (**1-1** i **na**) transformacije.

Injektivne linearne transformacije

Sledeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) $\mathbf{T}$ je injektivni;
(ii) $\mathbf{T}$ ima inverznu transformaciju;
(iii) $\mathbf{Tv} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}$;
(iv) za svako $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}(\mathbf{T})$ postoji jedinstvano $\mathbf{v} \in V$, tako da je $\mathbf{Tv} = \mathbf{u}$;
(v) ako je $\mathbf{Tv}_1 = \mathbf{Tv}_2$ onda je $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$;
(vi) ako je $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ onda je $\mathbf{Tv}_1 \neq \mathbf{Tv}_2$.

Ako je V konačno dimenzionalni linearni vektorski prostor, onda su sledeće tvrdnje ekvivalentne.

(i) $\mathbf{T}$ je injektivno i
(ii) $\dim \mathfrak{R}(\mathbf{T}) = \dim V$.

Surjektivne linearne transformacije

Sledeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) $\mathbf{T}$ je surjektivno i

(ii) za svako $\mathbf{u} \in U$ postoji $\mathbf{v} \in V$, tako da je $\mathbf{Tv} = \mathbf{u}$.

Ako su V i U konačno dimenzionalni linearni vektorski prostori onda su sledeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) $\mathbf{T}$ je surjektivno i

(ii) $\dim U = \dim \mathfrak{R}(\mathbf{T})$.

Bijektivne linearne transformacije

Sledeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) $\mathbf{T}$ je bijektivno i

(ii) za svako $\mathbf{u} \in U$ postoji jedinstveno $\mathbf{v} \in V$, tako da je $\mathbf{Tv} = \mathbf{u}$.

Ako su V i U konačno dimenzionalni linearni vektorski prostori onda su sledeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) $\mathbf{T}$ je bijektivno i

(ii) $\dim V = \dim U = \dim \mathfrak{R}(\mathbf{T})$.

U literaturi se za linearnu transformaciju $\mathbf{T} : V \to U$ koriste sledeći termini:

1. **homomorfizam** za linearnu transformaciju,
2. **endomorfizam** za linearnu transformaciju $\mathbf{T} : V \to U$,
3. **monomorfizam** ili **embeding**[6] za injektivnu linearnu transformaciju,
4. **epimorfizam** za surjektivnu linearnu transformaciju,
5. **izomorfizam** za bijektivnu linearnu transformaciju $\mathbf{T} : V \to U$,
6. **automorfizam** za izomorfizam $\mathbf{T} : V \to V$

Od posebnog značaja je regularno linearno preslikavanje $\mathbf{T} : V \to U$, tj. preslikavanje koje je **1-1**. Posebno nas interesuje linearna transformacija $\mathbf{T}$ koja ima **inverznu transformaciju**, a koju ćemo označavati sa $\mathbf{T}^{-1}$. Za takve transformacije se kaže da su **regularne** ili **ne singularne**. Linearne trensformacije koje nisu regularne nazivaju se **singularne**.

Podsetimo sa da ako $\mathbf{T}$ ima inverznu transformaciju onda je

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{Tv}) = \mathbf{v}, \quad \text{za svako} \quad \mathbf{v} \in V, \tag{4.55}$$

i

$$\mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \quad \text{za svako} \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{R}(\mathbf{T}). \tag{4.56}$$

Sledeća teorema je fundamentalna u slučaju inverznih linearnih transformacija.

[6] eng. embedding = utiskivanje

Teorema 4.8.1 Neka je $\mathbf{T} \in L(V,U)$.
(i) Transformacija $\mathbf{T}$ ima inverznu transformaciju akko iz $\mathbf{Tv} = \mathbf{0}$ sledi $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, tj. akko je $\mathfrak{N}(\mathbf{T}) = (\mathbf{0})$.
(ii) Ako postoji $\mathbf{T}^{-1}$ onda je $\mathbf{T}^{-1}$ linearna trnsformacija $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$ na V.

Dokaz

(i) Pretpostavimo da iz $\mathbf{Tv} = \mathbf{0}$ sledi $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Neka su $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, tako da je $\mathbf{Tv}_1 = \mathbf{Tv}_2$. Tada iz $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$ sledi $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, tj. $\mathbf{T}$ ima inverznu transformaciju.

Obrnuto. Pretpostavimo da $\mathbf{T}$ ima inverznu transformaciju. Neka je $\mathbf{Tv} = \mathbf{0}$. Kako je $\mathbf{T0} = \mathbf{0}$ onda je $\mathbf{Tv} = \mathbf{T0}$. Znači, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, jer $\mathbf{T}$ ima inverznu transformaciju.

(ii) Pretpostavimo da $\mathbf{T}^{-1}$ postoji. Neka je $\mathbf{u}_1 = \mathbf{Tv}_1$ i $\mathbf{u}_2 = \mathbf{Tv}_2$, gde su $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathfrak{R}(\mathbf{T})$, a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. Tada je $\mathbf{v}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{v}_2 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{u}_2$, pa je

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{-1}(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) &= \mathbf{T}^{-1}(a\mathbf{Tv}_1 + b\mathbf{Tv}_2) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = \\ &= a\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u}_1) + b\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u}_2).\end{aligned}$$

Prema tome $\mathbf{T}^{-1}$ je linearna transformacija.

$\mathbf{T}^{-1}$ je takođe preslikavanje na V, jer svako $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}(\mathbf{T})$ je slika nekog $\mathbf{v} \in V$. Zaista, za svako $\mathbf{v} \in V$ postoji $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}(\mathbf{T})$, tako da je $\mathbf{Tv} = \mathbf{u}$. Znači, $\mathbf{v} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{u}$ pa prema tome je $\mathbf{v} \in \mathfrak{R}(\mathbf{T}^{-1})$.

■ **Primer 4.31** Neka je $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^\infty$. Za $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ pišemo $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Definišimo $\mathbf{T}$ sa $\mathbf{T}(x_1, x_2) = (0, x_1, 0, x_2, 0, 0, \ldots,)$. Preslikavanje $\mathbf{T}$ je očigledno linearna transformacija. Vektori $(0,1,0,0,\ldots,)$ i $(0,0,0,1,0,\ldots,)$ rastežu $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$ i $\dim[\mathfrak{R}(\mathbf{T})] = 2 = \dim[\mathbb{R}^2]$. Kako iz $\mathbf{Tx} = \mathbf{0}$ sledi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{T}$ ima inverznu transformaciju. Vidi se, na način kako je difinisano $\mathbf{T}$, da $\mathbf{T}$ nije preslikavanje $\mathbb{R}^2$ **na** $\mathbb{R}^\infty$. Međutim, jasno je da je $\mathbf{T}$ **1-1** preslikavanje $\mathbb{R}^2$ **na** $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$. ■

Za konačno dimenzionalne prostore važi sledeća

Teorema 4.8.2 Neka je $\mathbf{T} \in L(V,U)$. Ako je V konačno dimenzionalni prostor, onda $\mathbf{T}$ ima inverznu transformaciju akko je $\dim\mathfrak{R}(\mathbf{T}) = \dim V$.

Dokaz

Na osnovu Teoreme 4.7.4

$$\dim V = \dim \mathfrak{R}(\mathbf{T}) + \dim \mathfrak{N}(\mathbf{T}).$$

Kako $\mathbf{T}$ ima inverznu transformaciju akko je $\mathfrak{N}(\mathbf{T}) = (\mathbf{0})$ sledi da $\mathbf{T}$ ima inverznu transformaciju akko je $\dim V = \dim \mathfrak{R}(\mathbf{T})$.

Za konačno dimenzionalne linearne prostore takođe važi sledeća

Teorema 4.8.3 Neka su V i U konačno dimenzionalni vektorski prostori istih dimenzija, recimo $\dim V = \dim U = n$. Neka je $\mathbf{T} \in L(V,U)$, onda je $\mathfrak{R}(\mathbf{T}) = U$ akko $\mathbf{T}$ ima inverznu transformaciju.

Dokaz

Ako $\mathbf{T}$ ima inverznu transformaciju onda je, na osnovu prethodne teoreme, $\mathfrak{R}(\mathbf{T}) = n$, pa je $\dim \mathfrak{R}(\mathbf{T}) = \dim U$. Znači $\mathfrak{R}(\mathbf{T}) = U$, na osnovu Teoreme 4.7.1 (ii).

Obrnuto, neka je $\mathfrak{R}(\mathbf{T}) = U$. Dalje, neka je $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ baza $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$. Neka je $\mathbf{v}_i \in V$ tako da je $\mathbf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i$ za $i = 1, \ldots, n$. Onda su vektori $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, linearno nezavisni, pa prema tome, formiraju bazu linearnog vektorskog prostora V. Zaista, iz $\lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, \ldots, n$, sledi $\mathbf{0} = T(\lambda_i \mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{T}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0$, jer je $\{\mathbf{u}_1, \ldots,, \mathbf{u}_n\}$ baza prostora U. Neka je $\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ za neko $\mathbf{v} \in V$. Onda je $\mathbf{v} = a^i \mathbf{v}_i$ reprezentacija vektora $\mathbf{v}$ u odnosu na bazu $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, pa je

$$\mathbf{0} = \mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{T}(a_i \mathbf{v}_i) = a_i \mathbf{T}\mathbf{v}_i = a_i \mathbf{u}_i \quad \Rightarrow \quad a_i = 0, \qquad \text{tj. } \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Znači $\mathbf{T}$ ima inverznu transformaciju.

5. Matrice

5.1 Matrice

Pretpostavljamo da je čitalac upoznat sa elementarnim operacijama nad matricama. Zbog toga ovde se ne zadržavamo detaljnije izlaganju teorije matrica. Takođe ćemo razmatrati samo **realne matrice**.

Definicija 5.1.1 **Matrica** je kolekcija realnih skalara

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$$

uređena u obliku pravougaone tabele

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Ovako predstavljena matrica ima m **vrsta** i n **kolona**. Brojevi m i n se nazivaju **dimenzije matrice**. Skalar a_{ij} koji se nalazi na preseku i-te vrste i j-te kolone naziva se a_{ij}-ti **element matrice**.

Uobičajeno je da se koriste velika "masna" slova kao oznaka za matricu.

Tako se matrica (5.1) može obeleziti sa $\mathbf{A} = (a_{ij})$ i kaže se da je **tipa** $m \times n$. Ako su dimenzije m i n različite često se piše $\mathbf{A} = (a_{i\alpha})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ kako bi se ta razlika istakla.

Dve matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ istog tipa jednake su ako su im odgovarajući elementi jednaki, tj. $a_{i\alpha} = b_{i\alpha}$, za svako i i α. Tada pišemo $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. U svakom drugom slučaju $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

5.1.1 Osnovne operacije nad matricama

Množenje matrice skalarom

Ova operacija je definisana za svaki skalar λ i svaku matricu $\mathbf{A}$. Proizvod λ i $\mathbf{A}$ obeležavamo sa $\lambda\,\mathbf{A}$. To je matrica istog tipa kao imatrica $\mathbf{A}$ čiji su elementi $\lambda\, a_{i\alpha}$, tj. $\lambda\,\mathbf{A} = (\lambda\, a_{i\alpha})$. Uobičajeno je da se piše $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$ i $(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

Sabiranje i oduzimanje matrica

Samo matrice istog tipa mogu se sabirati i oduzimati. Neka su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ istog tipa. Onda je

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{C},$$

gde je

$$c_{i\alpha} = a_{i\alpha} + b_{i\alpha}.$$

tj. odgovarajući element zbira matrica jednak je zbiru njihovih odgovarajućih elemenata,

Važe sledeća svojstva za sabiranje matrica:

i. $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$ - **komutativnost**,
ii. $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$ - **asocijativnost**,
iii. $c(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$ - **distributivnost** u odnosu **na zbir matrica**,
iv. $(c+d)\mathbf{A} = c\mathbf{A}+d\mathbf{A}$ - **distributivnost** u odnosu **na zbir skalara**, za svaki skalar c i d.

Pišemo $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ za zbir $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$, a naziva se **razlika matrica A** i **B**.

Množenje matrica

Neka je matrica $\mathbf{A} = (a_{i\alpha})$ tipa $m \times n$ i matrica $\mathbf{B} = (b_{sj})$ tipa $p \times q$. Kada je $n = p$, tj. kada je broj kolona matrice $\mathbf{A}$ isti kao broj vrsta matrice $\mathbf{B}$, tada matrica $\mathbf{AB}$ tipa $m \times q$ definiše njihov proizvod, pri čemu je

$$\mathbf{AB} = \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}\, b_{\alpha j} \right).$$

■ **Primer 5.1**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 2+0\cdot(-1)+(-2)\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 0+(-2)\cdot 2 & 1\cdot 1+0\cdot 2+(-2)\cdot 1 & 1\cdot(-2)+0\cdot 3+(-2)\cdot 1 \\ 2\cdot 2+1\cdot(-1)+3\cdot 0 & 2\cdot 1+1\cdot 0+3\cdot 2 & 2\cdot 1+1\cdot 2+3\cdot 1 & 2\cdot(-2)+1\cdot 3+3\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & -4 \\ 3 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

■

Kada je $n \neq p$ proizvod matrica **A** i **B** nije definisan.

Svojstva matričnog proizvoda

i) Matrični proizvod je asocijativan. Tako je

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

S obzirom na to svojstvo jednostavno pišemo **ABC** za njihov proizvod.

ii) Matrični proizvod je distributivan u odnosu na sabiranje, tj.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC},$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC},$$

kada su u svakom izrazu dimenzije **A**, **B** i **C** takve da su operacije množenja i sabiranja definisane.

Nadalje pretpostavljamo da je ovaj uslov uvek zadovoljen, sem ako se drugačije ne kaže.

Onda je proširenje za proizvod i sabiranje konačnog broja matrica očigledno.

U opštem slučaju množenje matrica nije komutativno. To znači da **AB** ne mora biti jednako **BA**. Detaljnije. Ako je $n = p$, ali $m \neq q$, ili $m = q$, ali $n \neq p$, onda je jedan od matričnih proizvoda **AB** i **BA** definisan, ali drugi nije. Kada je $n = p$ i $m = q$, oba prozvoda su definisana. Tada je **AB** tipa $m \times m$, a **BA** tipa $n \times n$ i biće istih dimenzija samo ako je $m = n$. Čak i u slučaju kada je $n = p = m = q$, tj. kada su **A** i **B** tipa $n \times n$, i kada je njihov proizvod **AB** i **BA** tipa $n \times n$, u opštem slučaju ne mora biti $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

■ **Primer 5.2**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Dve matrice **A** i **B** su **komutativne** ako je $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Opštije, za kolekciju matrica $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$, svaka tipa $n \times n$, kaže se da su komutativne ako je $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j\mathbf{A}_i$ za svako $j > i = 1, 2, \dots, k$.

Za bilo koji skalar c važi

$$c\,\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\dots\,\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_1\,c\,\mathbf{A}_2\,\dots\,\mathbf{A}_k = \dots = \mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\dots\,c\,\mathbf{A}_k.$$

Transponovana matrica

Transponovana matrica

Definicija 5.1.2 Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$. Njoj **transponovana matrica** je matrica $\mathbf{A}^T$ tipa $n \times m$ čiji je $i\alpha$ element αi element matrice $\mathbf{A}$, tj.

$$a_{i\alpha}^T = a_{\alpha i}.$$

■ **Primer 5.3**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Lako je proveriti da je

$$(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T, \quad (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T.$$

Teorema 5.1.1 Transponovana matrica proizvoda matrica jednaka je proizvodu njihovih transponovanih matrica u obrnutom redu množenja, tj.

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$$

Dokaz

Zasniva se na identitu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{A}^T$ za proizvoljan vektor $\mathbf{x}$. Tada je

$$(\mathbf{AB})^T\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{xA})\mathbf{B} = (\mathbf{A}^T\mathbf{x})\mathbf{B} = \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{x}) = (\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)\mathbf{x}.$$

Ova teorema može se direktno primeniti na slučaj konačnog broja matrica. Tako je

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k)^T = \mathbf{A}_k^T\cdots\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_1^T,$$

za bilo koji proizvod k matrica odgovarajućih dimenzija koje zadovoljavaju definiciju njihovog mnozenja.

5.2 Neki osnovni tipovi matrica

5.2.1 Kvadratne matrice

Definicija 5.2.1 Matrica koja ima isti broj vrsta i kolona naziva se **kvadratna matrica**.

Za matricu tipa $n \times n$ kaze se da je **reda** n. Neka je $\mathbf{A} = (a_{ij})$ kvadratna matrica reda n. Za elemente a_{ij} za koje je $i = j$ kaže se da su **dijagonalni**, ili da se nalaze na **glavnoj dijagonali**.

Uočimo da je proizvod $\mathbf{A}\,\mathbf{A}$ matrice $\mathbf{A}$ sa sobom definisan samo ako je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica. U tom slučaju pišemo $\mathbf{A}\,\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^2$. Takođe je $\mathbf{A}\,\mathbf{A}\,\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^3$, $\underbrace{\mathbf{A}\,\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k} = \mathbf{A}^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

U opštem slučaju za nenegativne brojeve r i s važi uobičajeni eksponencijalni zakon

$$\mathbf{A}^r\,\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}, \quad (\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs}.$$

Primer 5.4 Odrediti $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2$! ■

Rešenje

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{A} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{B} = \\ &= \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{B}^2.\end{aligned}$$

N Pažnja. Treba imati u vidu da matrično množenje nije komutativno. Samo u slučaju kada je $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}$ biće

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{B}^2.$$

5.3 Simetrična matrica

Definicija 5.3.1 Kvadratna matrica $\mathbf{A} = (a_{ij})$ reda n je **simetrična** ako je $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, tj. ako je $a_{ij} = a_{ji}$.

Uslov $a_{ij} = a_{ji}$ određuje broj proizvoljnih elemenata simetrične matrice $\mathbf{A}$, i u opštem slučaju ih ima

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

■ **Primer 5.5** Očigledno da je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

simetrična matrica. ■

■ **Primer 5.6** Za svaku matricu $\mathbf{A}_{m\times n}$ proizvodi matrica $\mathbf{A}^T\,\mathbf{A}$, tipa $n\times n$ i $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T$, tipa $m\times m$ su simetrične matrice, jer je

$$(\mathbf{A}^T\,\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T\,(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T\,\mathbf{A} \quad \text{i} \quad \left(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T\right)^T = (\mathbf{A}^T)^T\,\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^T,$$

imajući u vidu da je $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$. ■

Definicija 5.3.2 Matrica **A** je **normalna matrica** ako je

$$\mathbf{A}^T\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^T.$$

Normalna matrica mora biti kvadratna.

5.3.1 Antisimetrična matrica

Definicija 5.3.3 Kvadratna matrica **A** je **antisimetrična** ako je $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, tj. ako je

$$a_{ij} = -a_{ji}.$$

Uslov $a_{ij} = -a_{ji}$ pokazuje da su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki 0, tj. $a_{ii} = 0$, $i = 1,2,\dots,n$.

Onda je ukupan broj proizvoljnih elementa antisimetrične matrice **A** jednak $\frac{n(n-1)}{2}$.

N U ovom odeljku po ponovljenim indeksima ne vrši se sabiranje!

■ **Primer 5.7** Svaka kvadratna matrica **A** može se jednoznačno predstaviti u obliku zbira simetrične i antisimetrične matrice. ■

Rešenje

Svaka matrica **A** može se predstaviti na više načina kao zbir dve matrice. Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{M} + \mathbf{N}$ jedno takvo predstavljanje. Onda je $\mathbf{A}^T = \mathbf{M}^T + \mathbf{N}^T$. Ako je **M** simetrična matrica, a **N** antisimetrična matrica, tj. ako je $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$ i $\mathbf{N}^T = -\mathbf{N}$ onda mora biti $\mathbf{A}^T = \mathbf{M} - \mathbf{N}$. Iz linearnih jednačina i $\mathbf{A}^T = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ dobijamo jedinstveno rešenje:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} \quad \text{i}$$
$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}.$$

Uobičajeno je da se ove matrice obeležavaju sa:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{A}^s, \\ \mathbf{N} &= \mathbf{A}^a. \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.4 Dekompozicija matrice na sferni i devijatoski deo

Od značaja je takođe dekompozicija matrice na sferni i devijatorski deo

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^c + \mathbf{A}^d, \tag{5.3}$$

gde je $\mathbf{A}^c = p\mathbf{I}$ i $\mathrm{tr}\mathbf{A}^d = 0$. Veličina p u fizici se identifikuje sa srednjim pritiskom tenzora $\mathbf{A}$ koji se sa fizičkog stanovišta tumači kao tenzor napona.

Eksplicitno je određen izrazom

$$p = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{A}. \tag{5.4}$$

Onda je

$$\mathbf{A}^d = \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\mathbf{A})\mathbf{I}. \tag{5.5}$$

■ **Primer 5.8** Pokazati da se svaki tenzor $\mathbf{A}$ može predstaviti jednoznačno u obliku

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^d + \mathbf{A}^a.$$

Skup tenzora $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}^a$ i $\mathbf{A}^d$, gde je $\mathbf{A}^d$ **devijatorski deo tenzora** $\mathbf{A}^s$ (vidi (5.2)). ■

■ **Primer 5.9** Neka je $\mathbf{A}$ antisimetrična matrica reda n i $\mathbf{B}$ matrica tipa $n \times m$. Onda je $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}$ antisimetrična matrica. ■

Rešenje

$$\left(\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}\right)^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{B}^T(-\mathbf{A})\mathbf{B} = -\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}.$$

■ **Primer 5.10** Specijalan primer antisimetrične matrice je matrica

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

koja je od posebnog značaja u mehanici (fizici) i zbog sledećeg svojstva

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{J}\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tj.

$$\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}.$$

■

Ovo svojstvo matrice **J** interesantno je i sa matematičkog stanovišta, jer pokazuje da kvadrat realne matrice može da bude negativna matrica, za razliku od realnih borjeva.

Dijagonalna matrica

Definicija 5.4.1 Kvadratna matrica **D** je **dijagonalna** ako su joj elementi izvan glavne dijagonale jednaki 0, tj. ako je

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = (d_i\delta_{ij}),$$

gde je δ_{ij} - Kronekerov delta simbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ako je} \quad i = j, \\ 0 & \text{ako je} \quad i \neq j. \end{cases}$$

■ **Primer 5.11** Neka je $\mathbf{A} = (a_{ij})$ kvadratna matrica, a $\mathbf{D} = (d_i\delta_{ij})$ dijagonalna matrica reda n, onda je

$$\mathbf{D}\,\mathbf{A} = \left(\sum_{k=1}^{n} d_i\,\delta_{ik}\,a_{kj}\right) = (d_i\,a_{ij}) \quad \text{i}$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{D} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,d_k\,\delta_{kj}\right) = (a_{ij}\,d_j).$$

■

Analiza ovih izraza pokazuje jednostavno množenje dijagonalne matrice **D** sa matricom **A**.

Ako se matrica **D** množi sa leve strane matricom **A**, onda se elementi proizvoda **DA** dobijaju množenjem njenih dijagonalnih elementa sa elementima odgovarajuće vrste matrice **A**, a u slučaju množenja **D** sa **A** sa desne strane, **AD**, množenjem elemenata matrice **D** sa odgovarajućom kolonom matrice **A**.

■ **Primer 5.12** Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$\mathbf{AD} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 3\cdot 1 & 0\cdot 3 \\ 4\cdot 2 & 5\cdot 1 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 2 & 1\cdot 1 & 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{DA} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 0 \\ 1\cdot 4 & 1\cdot 5 & 1\cdot 2 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

■

Definicija 5.4.2 Matrica **O** čiji su svi elementi jednaki nuli naziva se **nula matrica**.

Svaka matrica pomnožena sa **O** matricom je nula matrica.

Definicija 5.4.3 Ako su svi elementi kvadratne matice ispod glavne dijagonale jednaki nuli onda se ona naziva **gornja trougaona matrica**.

Konkretno, za matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ kaže se da je gornja trougaona ako je $a_{ij} = 0$ za $j > i = 1, 2, \ldots, n$.

Slično se definiše i **donja trougaona matrica**.

Transponovana gornja trougaona matrica postaje donja trougaona. Važi i obrnuto.

Primer gornje trougaone matrice je matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Lema 5.4.1 Neka su $\mathbf{A} = (a_{ij})$ i $\mathbf{B} = (b_{ij})$ matrice reda n. Ako su obe matrice gornje trougaone onda je i njihov proizvod **AB** gornja trougaona matrica. Element $(\mathbf{AB})_{ii}$ njihovog proizvoda jednak je proizvodu njihovih i-tih elemenata na glavnoj dijagonali, tj. $(\mathbf{AB})_{ii} = (a_{ii} b_{ii})$.

Dokaz

Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ gornje trougaone matrije. Onda je

$$a_{ik} = 0 \text{ za } k < i, \quad \text{i} \quad b_{kj} = 0 \text{ za } k > j.$$

i

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = \sum_{i \le k \le j}^{n} a_{ik}\, b_{kj}.$$

Za $j > i$ sledi da je $k \ge i > j$ i $b_{kj} = 0$, pa je

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = 0.$$

Znači, $\mathbf{AB}$ je gornja trougaona matrica.

Specijano kada je $i = j$ biće i $k = i$, pa je

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B})_{ii} = a_{ii}\, b_{ii}.$$

Koristeći ovu lemu razmotrićemo slučaj kada su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ obe donje trougaone.

U tom slučaju su $\mathbf{A}^T$ i $\mathbf{B}^T$ obe gornje trougaone. Onda su njihovi elemeti na dijagonali a_{ii} i b_{ii} redom. Znači da je $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ gornja trougaona matrica čiji su elementi na dijagonali $a_{ii}\, b_{ii}$. Prema tome $(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\right)^T$ je donja trougaona matrica, čiji su elementi na dijagonali $a_{ii}\, b_{ii}$.

Definicija 5.4.4 Gonja (donja) trougaona matrica naziva se **jedinična gornja (donja) trougaona matrica** ako su joj elementi na dijagonali jednaki jedinici.

Posledica 5.4.2 Proizvod dve jedinične trougaone matrice je jedinična trougaona matrica.

Uočimo da je matrica dijagonalna akko je i gornja i donja trougaona.

Definicija 5.4.5 Ako su svi elementi dijagonalne matrice jednaki jedinici onda se ona naziva **jedinična matrica**.

Obeležava se sa

$$\mathbf{I} = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Očigledno je da je

$$\mathbf{I}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{I} = \mathbf{A},$$

za svaku matricu $\mathbf{A}$. Takođe je $\mathbf{I}^k = \mathbf{I}$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

Druge tipove matrica razmatraćemo u kontekstu njihove primene. Zato su nam potrebni i drugi osnovni pojmovi.

5.4.1 Vektor vrste i vektor koline

Matrica koja ima samo jednu kolonu, npr.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

naziva se **vektor kolona**. Isto tako, matrica koja ima samo jednu vrstu naziva se **vektor vrsta**. Očigledno je da m - dimenzionalni transponovani vektor vrsta postaje m -dimenzionalni vektor kolona, i obrnuto. Uobičajeno je da se vektori predstavljaju u obliku kolone. Ako je gornji vektor kolone, recimo, vektor $\mathbf{a}$, njemu odgovarajući vektor vrsta biće

$$\mathbf{a}^T = (a_1\, a_2 \ldots a_n)\,.$$

Kao specijalan slučaj matričnog množenja navodimo primer vektora $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ koje posmatramo kao matrice tipa $n \times 1$. Onda je

$$\mathbf{u}^T\,\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

izraz koji daje vezu između skalarnog proizvoda vektora i njihovog matričnog množenja.

Lema 5.4.3 Matrica $\mathbf{A}$ reda n je antisimetrična akko je $\mathbf{x}^T\,\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ za svako n - dimenzionalni vektor kolone.

Dokaz

Pišemo

$$\mathbf{x}^T\,\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Ako je $a_{ij} = -a_{ji}$ onda je

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_j x_i = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j x_i = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad \Rightarrow$$

$$2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = 0,$$

tj. $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=0$.

Obrnuto, ako je $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=0$ ili $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j=0$ za svako x_i, onda diferenciranjem ove jednačine dva puta po x_i dobijamo da je $a_{ij}+a_{ji}=0$ ili $a_{ij}=-a_{ji}$.

5.4.2 Proizvod matrica u članovima njihovih vrsta i kolona

Često se pri množenju matrica koristi njihova reprezentacija preko vektora vrsta i kolona. Primera radi, neka je $\mathbf{A}$ matrica tipa $m\times p$, a $\mathbf{B}$ matrica tipa $p\times n$. Obeležimo i-ti vektor vrste matrice $\mathbf{A}$ sa $\mathbf{a}^i$, a k -ti vektor kolone matrice $\mathbf{B}$ sa $\mathbf{b}_k$, tj.

$$\mathbf{a}^i=\begin{pmatrix}a^{i1} & a^{i2} & \dots & a^{ip}\end{pmatrix}$$

i

$$\mathbf{b}_k=\begin{pmatrix}b_{1k}\\ b_{2k}\\ \vdots\\ b_{pk}\end{pmatrix}.$$

Onda je

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}^1\\ \mathbf{a}^2\\ \vdots\\ \mathbf{a}^m\end{pmatrix}\quad \text{i}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n\end{pmatrix}.$$

Tada je

$$\mathbf{A}\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}^1\\ \mathbf{a}^2\\ \vdots\\ \mathbf{a}^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}^1\cdot\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^1\cdot\mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}^1\cdot\mathbf{b}_n\\ \mathbf{a}^2\cdot\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^2\cdot\mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}^2\cdot\mathbf{b}_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{a}^m\cdot\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^m\cdot\mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}^m\cdot\mathbf{b}_n\end{pmatrix}.$$

Takođe je

$$\mathbf{A}\mathbf{B}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}\mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{b}_n\end{pmatrix},$$

i

$$\mathbf{A}\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}^1\\ \mathbf{a}^2\\ \vdots\\ \mathbf{a}^m\end{pmatrix}\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}^1\mathbf{B}\\ \mathbf{a}^2\mathbf{B}\\ \vdots\\ \mathbf{a}^m\mathbf{B}\end{pmatrix}.$$

5.5 Particija matrice

Često je neophodno da radimo sa matricama u blok formi. Na primer, neka su

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix},$$

dve matrice čiji su elementi $\mathbf{A}_{ij}$ i $\mathbf{B}_{ij}$ takođe matrice. Ako su ove matrice kompatibilne za matrično množenje (u tom slučaju kažemo da su **particije matrica konformalne**), onda je

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

U slučaju kada su pojedini blokovi na primer jedinične ili nula matrice znatno se uprošćava računanje proizvoda matrica.

■ **Primer 5.13** Neka su date particije matrica

$$\mathbf{A} = \left(\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \left(\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right|\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

gde je

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Koristeći proizvod blokova matrica lako se pokazuje da je

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{C} & \mathbf{C} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \left(\left|\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|\right).$$

■

Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \vdots & \mathbf{A}_{1c} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \vdots & \mathbf{A}_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{r1} & \mathbf{A}_{r2} & \vdots & \mathbf{A}_{rc} \end{pmatrix},$$

particija $m \times n$ matrice $\mathbf{A}$ čiji je ij blok matrica $\mathbf{A}_{ij}$ dimenzija $m_i \times n_j$. Onda je

$$\lambda\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda\,\mathbf{A}_{11} & \lambda\,\mathbf{A}_{12} & \vdots & \lambda\,\mathbf{A}_{1c} \\ \lambda\,\mathbf{A}_{21} & \lambda\,\mathbf{A}_{22} & \vdots & \lambda\,\mathbf{A}_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\,\mathbf{A}_{r1} & \lambda\,\mathbf{A}_{r2} & \vdots & \lambda\,\mathbf{A}_{rc} \end{pmatrix},$$

za svaki skalar λ.

Lako se pokazuje da je

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T & \vdots & \mathbf{A}_{r1}^T \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T & \vdots & \mathbf{A}_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{1c}^T & \mathbf{A}_{2c}^T & \vdots & \mathbf{A}_{rc}^T \end{pmatrix}.$$

Neka je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \vdots & \mathbf{B}_{1v} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \vdots & \mathbf{B}_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{u1} & \mathbf{B}_{u2} & \vdots & \mathbf{B}_{uv} \end{pmatrix}$$

particija matrice $\mathbf{B}$ tipa $p \times q$ čiji je blok $\mathbf{B}_{ij}$ dimenzija $p_i \times q_j$.

Matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ su **konformalne** (saglasne) za sabiranje pod uslovom da je $p = m$ i $q = n$. Ako je uz to i $u = r$, $v = c$, $p_i = m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ i $q_j = n_j$ $(j = 1, 2, \ldots, c)$, tj. ako je particija matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ ista, onda je njihova particija konformalna za sabiranje, tj.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12} & \vdots & \mathbf{A}_{1c} + \mathbf{B}_{1c} \\ \mathbf{A}_{21} + \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{22} & \vdots & \mathbf{A}_{2c} + \mathbf{B}_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{r1} + \mathbf{B}_{r1} & \mathbf{A}_{r2} + \mathbf{B}_{r2} & \vdots & \mathbf{A}_{rc} + \mathbf{B}_{rc} \end{pmatrix}.$$

Trivijalno sledi da je u tom slučaju

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_{12} & \vdots & \mathbf{A}_{1c} - \mathbf{B}_{1c} \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_{22} & \vdots & \mathbf{A}_{2c} - \mathbf{B}_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{r1} - \mathbf{B}_{r1} & \mathbf{A}_{r2} - \mathbf{B}_{r2} & \vdots & \mathbf{A}_{rc} - \mathbf{B}_{rc} \end{pmatrix}.$$

Proizvod matrica $\mathbf{A}\mathbf{B}$ je definisan za $n = p$. Ako je pored toga, $c = u$ i $n_k = p_k$ $(k = 1,2,\ldots,c)$, onda su svi proizvodi $\mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}$ $(i = 1,2,\ldots,r;\ j = 1,2,\ldots,v;\ k = 1,2,\ldots,c)$ definisani. Tada je particija matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ konformalna za njihovo matrično množenje, pa je

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \vdots & \mathbf{F}_{1v} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \vdots & \mathbf{F}_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}_{r1} & \mathbf{F}_{r2} & \vdots & \mathbf{F}_{rv} \end{pmatrix},$$

gde je $\mathbf{F}_{ij} = \sum_{k=1}^{c} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}$.

Primer koji je naveden na početku ovog odeljka je specijalan slučaj opšteg izraza i dobija se kada je $r = c = u = v = 2$.

5.6 Rang matrice

Definicija 5.6.1 Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$. Potprostor od $\mathbb{R}^n$ koji određuju vektori kolone matrice $\mathbf{A}$ naziva se **prostor kolona** i obelezavamo ga sa $\mathscr{C}(\mathbf{A})$. Slično tome, potprostor od $\mathbb{R}^m$ koji određuju vektori vrsta matrice $\mathbf{A}$ naziva se **prostor vrsta** i označava se sa $\mathscr{R}(\mathbf{A})$.

Jasno je da je $\mathscr{R}(\mathbf{A})$ izomorfno sa $\mathscr{C}(\mathbf{A}^T)$.

Definicija 5.6.2 Dimenzija prostora kolona matrice $\mathbf{A}$ naziva se **rang kolona**. Isto tako dimenzija prostora vrsta matrice naziva se **rang vrsta**.

Teorema 5.6.1 Rang kolona jednak je rangu vrsta.

Dokaz

Izvodimo ga detaljno u nekoliko koraka.

Po definiciji

$$\mathscr{C}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Neka je r dimenzija prostora $\mathscr{C}(\mathbf{A})$ i neka je $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_r\}$ njegova baza. Onda se svaki vetor kolone matrice $\mathbf{A}$ može izraziti kao njihova linearna kombinacija, tj.

$$\mathbf{A}_k = c_k^{\alpha}\mathbf{B}_{\alpha}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,r.$$

Kako je

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n),$$

onda je

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (c_1^{\alpha}\mathbf{B}_{\alpha}, c_2^{\alpha}\mathbf{B}_{\alpha}, \dots c_n^{\alpha}\mathbf{B}_{\alpha}) = \\ &= \left(c_1^1\mathbf{B}_1 + c_1^2\mathbf{B}_2 + \cdots + c_1^r\mathbf{B}_r, \dots, c_n^1\mathbf{B}_1 + c_n^2\mathbf{B}_2 + \cdots + c_n^r\mathbf{B}_r\right) \qquad = \\ &= (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_r)\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^r & c_2^r & \dots & c_n^r \end{pmatrix},\end{aligned}$$

tj.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\,\mathbf{C}, \tag{5.7}$$

gde je

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_r) = \left(b_{\alpha}^i\right)$$

matrica tipa $m \times r$, a

$$\mathbf{C} = \left(c_j^{\alpha}\right)$$

matrica tipa $r \times n$. Obeležimo sa

$$\mathbf{c}^{\alpha} = (c_1^{\alpha}, c_2^{\alpha}, \dots, c_n^{\alpha})$$

α-ti vektor vrste matrice

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \mathbf{c}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^r \end{pmatrix}.$$

Njih ima ukupno r. Prema tome može ih biti najviše $s \leq r$ linearno nezavisnih.

Kako je $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ onda je

$$\mathbf{a}^i = b_{\alpha}^i\mathbf{c}^{\alpha},$$

pa prema tome broj linarno nezavisnih vektora vrsta matrice može biti najviše $s \leq r$.

Ponavljajući isti postupak za vektore vrsta pokazuje se da mora biti $r \leq s$. Znači $s = r$.

S obzirom na to da su rang kolona i rang vrste matrice **A** jednaki, nadalje ćemo koristiti samo termin **rang matrice A** i do daljnjeg ga obelezavati sa $r_{\mathbf{A}}$.

Očigledno je da je $r_{\mathbf{A}} = r_{\mathbf{A}^T}$. Rang $r_{\mathbf{A}}$ je nula akko je **A** nula matrica, tj.

$$r_{\mathbf{A}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

N Izraz $\mathbf{a}^i = b^i_\alpha \mathbf{c}^\alpha$ daje nam važno geometrijsko tumačenje: vektori vrsta matrice $\mathbf{A}$, za svako $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, su linearna kombinacija vektora vrsta matrice $\mathbf{C}$. Na isti način se može pokazati da su vektori kolona matrice $\mathbf{A}$, linearna kombinacija vektora kolona matrice $\mathbf{B}$.

Teorema 5.6.2 Neka su matrice $\mathbf{A}$ tipa $m \times p$ i $\mathbf{B}$ tipa $p \times n$. Onda je

$$r_{\mathbf{AB}} \leq \min\{r_{\mathbf{A}}, r_{\mathbf{B}}\}.$$

Dokaz

Znamo da je $\mathscr{C}(\mathbf{AB}) = \{\mathbf{ABx} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ i $r_{\mathbf{AB}} = \dim \mathscr{C}(\mathbf{AB})$. Onda svaki vektor $\mathbf{ABx} \in \mathscr{C}(\mathbf{AB})$ pripada takođe $\mathscr{C}(\mathbf{A})$, jer je $\mathbf{ABx} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx})$. Znači, $\mathscr{C}(\mathbf{AB}) \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{A})$. Prema tome je

$$r_{\mathbf{AB}} = \dim \mathscr{C}(\mathbf{AB}) \leq \dim \mathscr{C}(\mathbf{A}) = r_{\mathbf{A}}.$$

Takođe je

$$r_{\mathbf{AB}} = r_{(\mathbf{AB})^T} = r_{\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T} \leq r_{\mathbf{B}^T} = r_{\mathbf{B}}.$$

Na osnovu ove dve teoreme sledi

Lema 5.6.3 Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$ i neka je $r_{\mathbf{A}} = r$. Onda postoje matrice $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ tipa $m \times r$ i $r \times n$, redom, tako da je $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ pri čemu je $r_{\mathbf{B}} = r_{\mathbf{C}} = r$. ❑

Ova dekompozicija se naziva **faktorizacija ranga matrice A**.

Dokaz

Dekompozicija $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ (5.7) važi na osnovu Teoreme 5.6.1.

Ostaje da se odrede rang matrice $\mathbf{B}$ i rang matrice $\mathbf{C}$. Na osnovu iste teoreme znamo da su vektori kolone matrice $\mathbf{B}$ linearno nezavisni, pa je prema tome $r_{\mathbf{B}} = r$. Takođe, matrica $\mathbf{C}$ ima r vrsta pa je prema tome $r_{\mathbf{C}} \leq r$. Međutim, na osnovu Teoreme 5.6.2 je $r = r_{\mathbf{A}} \leq r_{\mathbf{C}}$. Znači $r_{\mathbf{C}} = r$.

Teorema 5.6.4 Neka su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ tipa $m \times n$. Onda je

$$r_{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \leq r_{\mathbf{A}} + r_{\mathbf{B}}.$$

Dokaz

Neka su $\mathbf{A} = \mathbf{MN}$ i $\mathbf{B} = \mathbf{PQ}$ faktorizacije ranga matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, redom. Onda je

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{MN} + \mathbf{PQ} = [\mathbf{M}|\mathbf{P}] \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}.$$

Na osnovu Teoreme 5.6.2 sledi da je

$$r_{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \leq r_{[\mathbf{M}|\mathbf{P}]}.$$

Dalje, neka su $\{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \ldots, \mathbf{m}_g\}$ i $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_h\}$ baze $\mathscr{C}(\mathbf{M})$ i $\mathscr{C}(\mathbf{P})$, redom. Onda je bilo koji vektor kolone prostora $\mathscr{C}([\mathbf{M}|\mathbf{P}])$ linearna kombinacija $g+h$ vektora ovih baza. Prema tome je

$$r_{[\mathbf{M}|\mathbf{P}]} \leq r_{\mathbf{M}} + r_{\mathbf{P}} = r_{\mathbf{A}} + r_{\mathbf{B}}, \quad \text{tj.} \quad r_{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \leq r_{\mathbf{A}} + r_{\mathbf{B}}.$$

5.6.1 Nesingularna matrica i matrice ranga pune vrste i ranga pune kolone

Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$ **ranga pune vrste** ako je $r_{\mathbf{A}} = m$, tj. ako je njen rang jednak broju vrsta, a **ranga pune kolone** $r_{\mathbf{B}} = n$. Jasno je da matrica tipa $m \times n$ može biti ranga pune vrste samo ako je $m \leq n$, tj. kada broj vrsta nije veći od broja kolona, i može biti ranga kolone samo ako je $n \leq m$.

Za matricu se kaže da je **nesingularna** ako je i ranga pune vrste i ranga pune kolone. Jasno je da je bilo koja nesingularna matrica kvadratna. Prema definiciji matrica $\mathbf{A}$ tipa $n \times n$, ili reda n, je nesingularna akko je $r_{\mathbf{A}} = n$. Matrica tipa $n \times n$ ranga manjeg od n je **singularna**. Prema prethodnoj Lemi 5.6.3 svaka matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$ može biti izražena kao proizvod matrica koje su ranga pune vrste i ranga pune kolone.

5.6.2 Rang simetrične matrice

Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$. Pokazali smo da su matrice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ simetričene. One se često sreću u primenama i zato ih posebno razmatramo.

Za njih važi sledeća

Teorema 5.6.5

i) $\mathfrak{N}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathfrak{N}(\mathbf{A})$ i $\mathfrak{N}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \mathfrak{N}(\mathbf{A}^T)$,

ii) $r_{\mathbf{A}^T\mathbf{A}} = r_{\mathbf{A}} = r_{\mathbf{A}\mathbf{A}^T}$,

iii) $\mathfrak{R}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathfrak{R}(\mathbf{A}^T)$ i $\mathfrak{R}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \mathfrak{R}(\mathbf{A})$.

Dokaz

i) Pokazaćemo da matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ imaju isti nula prostor.
Za bilo koji vektor $\mathbf{x} \in \mathfrak{N}(\mathbf{A})$ je $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Množenjem ove jednačine sa $\mathbf{A}^T$ sa leve strane dobijamo $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Znači da je takođe $\mathbf{x} \in \mathfrak{N}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$, tj. $\mathfrak{N}(\mathbf{A}) \subseteq \mathfrak{N}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$. Obruno, ako je $\mathbf{x} \in \mathfrak{N}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ onda je $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Množenjem ove jednačine sa $\mathbf{x}$ sa leve strane dobijamo

$$\mathbf{0} = \mathbf{x}\cdot \mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{Ax}\cdot \mathbf{Ax} = \|\mathbf{Ax}\|^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{0},$$

odakle sledi da je $\mathfrak{N}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \subseteq \mathfrak{N}(\mathbf{A})$. Znači

$$\mathfrak{N}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathfrak{N}(\mathbf{A}).$$

ii) Polazimo od stava da je $r_{\mathbf{A}} = \dim\mathfrak{N}(\mathbf{A})$ za svaku matricu $\mathbf{A}$. Onda iz izraza

$$\mathfrak{N}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathfrak{N}(\mathbf{A})$$

sledi da je

$$\dim\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right) = \dim\mathbf{A},$$

ili

$$r_{\mathbf{A}^T\mathbf{A}} = r_{\mathbf{A}}.$$

Na isti način pokazuje se da je

$$\mathfrak{N}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \mathfrak{N}(\mathbf{A}) \quad \text{i} \quad r_{\mathbf{A}\mathbf{A}^T} = r_{\mathbf{A}},$$

kada se u prethodnim izrazima razmene matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^T$. Prema tome je

$$r_{\mathbf{A}^T\mathbf{A}} = r_{\mathbf{A}} = r_{\mathbf{A}\mathbf{A}^T}.$$

iii)
$$\dim\mathfrak{R}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = r_{\mathbf{A}^T\mathbf{A}} = r_{\mathbf{A}} = r_{\mathbf{A}^T} = \dim\mathfrak{R}(\mathbf{A}^T).$$

Kao i u prethodnom slučaju razmenom matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^T$ dobijamo da je

$$\mathfrak{R}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \mathfrak{R}(\mathbf{A}).$$

Teorema 5.6.6 Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$ i neka su njeni vektori kolona linearno nezavisni. Onda je $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ regularna matrica.

Dokaz

U tom slučaju je rang$\mathbf{A} = n$ i $n \leq m$. Kako je matrica $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ tipa $(n \times n)$ onda je njen rang, na osnovu prethodne teoreme, jednak rangu matrice $\mathbf{A}$, tj. n. Prema tome $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je regularna matrica.

Teorema 5.6.7 Neka su matrice $\mathbf{P}$ reda m i $\mathbf{Q}$ reda n nesingularne matrice i neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$. Onda je

$$r_{\mathbf{A}} = r_{\mathbf{PA}} = r_{\mathbf{AQ}} = r_{\mathbf{PAQ}}.$$

Dokaz

Prema Teoremi 5.6.2 je

$$r_{\mathbf{PA}} \leq r_{\mathbf{A}}.$$

Na osnovu iste teoreme je

$$r_{\mathbf{A}} = r_{\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{PA})} \leq r_{\mathbf{PA}}.$$

Onda je

$$r_{\mathbf{A}} = r_{\mathbf{PA}}.$$

Dalje, $\mathbf{Q}^T$ je nesingularna matrica, jer je $\mathbf{Q}$ nesingularna matrica, tj.

$$\mathbf{QQ}^{-1} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I} = \left(\mathbf{QQ}^{-1}\right)^T = (\mathbf{Q}^{-1})^T\mathbf{Q}^T,$$

pa je

$$r_{\mathbf{AQ}} = r_{(\mathbf{AQ})^{\mathbf{T}}} = r_{\mathbf{Q}^T\mathbf{A}^T} = r_{\mathbf{A}^T} = r_{\mathbf{A}}.$$

Konačno je

$$r_{\mathbf{PAQ}} = r_{\mathbf{P}(\mathbf{AQ})} = r_{\mathbf{AQ}} = r_{\mathbf{A}}.$$

5.7 Trag kvadratne matrice

Trag kvadratne matrice je jedna od njenih osnovnih karakteristika. Igra važnu ulogu u definisanju njenih invarijanata o čemu će posebno biti reči.

Definicija 5.7.1 Neka je matrica $\mathbf{A} = (a_{ij})$ reda n. Tada tr$\mathbf{A}$ dat zbirom njenih dijagonalnih elemenata, tj.

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Specijalno,

$$\mathrm{tr}\mathbf{I} = n.$$

Jasno je da za bilo koje matrice **A** i **B**, reda n, i bilo koji skalar c važi

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(c\,\mathbf{A}) &= c\,\mathrm{tr}\mathbf{A}, \\ \mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \mathrm{tr}\mathbf{A} + \mathrm{tr}\mathbf{B}, \\ \mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^T\right) &= \mathrm{tr}\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Opštije, za proizvoljnih r skalara $c_1, c_2, \dots, c_r$ i proizvoljnih r matrica $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\dots$, $\mathbf{A}_r$, reda n, važi

$$\mathrm{tr}\sum_{a=1}^{r} c_a\,\mathbf{A}_a = \sum_{a=1}^{r} c_a\,\mathrm{tr}\mathbf{A}_a.$$

Takođe za reprezentaciju matrice **A** u blok formi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{pmatrix},$$

važi

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(A_{ii}).$$

Uočimo da su matrice $\mathbf{A}_{ii}$, $i = 1, \dots, n$ na glavnoj dijagonali kvadratne matrice particije matrice **A**. Nazivamo ih **glavne submatrice** matrice **A**.

Glavna submatrica je kvadratna matrica formirana skupom vrsta i odgovarajućeg skupa kolona.

Glavni minor od **A** je determinanta **glavne submatrice**.

5.7.1 Trag proizvoda

Neka je matrica **A** tipa $m \times n$, a matrica **B** tipa $n \times m$. Onda je

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}\,b_{\alpha i} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha i}\,a_{i\alpha} = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\,\mathbf{A}).$$

Takođe je

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^T = \mathrm{tr}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T).$$

Objedinjeno, ova dva izraza glase:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\,\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T). \tag{5.8}$$

5.7.2 Slučaj kada su obe matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ tipa $m \times n$

Ako se u (5.8) izvrši striktna zamena $\mathbf{B}$ sa $\mathbf{B}^T$ onda dobijamo da je

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}\,\mathbf{B}^T) = \operatorname{tr}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}^T).$$

Specijalno,

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij})^2 .$$

Teorema 5.7.1 Realna matrica $\mathbf{A}$, reda n je nula matrica akko je

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T) = 0.$$

Dokaz

Ako je $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, onda je $a_{ij} = 0$, pa je, prema tome, i $\operatorname{tr}(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T) = 0$.
Obrnuto, ako je $\operatorname{tr}(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T) = 0$, onda je $a_{ij} = 0$ i $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Posmatrajmo sada slučaj tri matrice: $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$, matrica $\mathbf{B}$ tipa $n \times p$ i matrice $\mathbf{C}$ tipa $p \times m$. Onda je, na osnovu prethodnih rezultata, lako pokazati da je

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C}) = \operatorname{tr}(\mathbf{C}\,\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B}\,\mathbf{C}\,\mathbf{A}).$$

Uočimo cikličnu permutaciju proizvoda matrica $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$.

Opštije, za skup matrica $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_r$, za koje je matrični proizvod definisan, biće

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_r) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}_{j+1}\mathbf{A}_{j+2}\ldots\mathbf{A}_r\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_j),$$

$(j = 1, 2, \ldots, k-1)$.

Kao i u slučaju proizvoda tri matrice i ovde važi ovaj izraz pri cikličkoj permutaciji matrica proizoda $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_r$.

5.8 Inverzna matrica

Inverzne matrice su posebno značajne pri rešavanju sistema linearnih jedanačina.

Definicija 5.8.1 Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$. Njoj inverzna matrica je matrica tipa $n \times m$ čiji je prozvod sa matricom $\mathbf{A}$ jedinična matrica. Ako je

$$\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{I}_m,$$

gde je $\mathbf{I}_m$ jedininična matrica reda m, onda se matrica $\mathbf{R}$ tipa $n \times m$ naziva **desna inverzna matrica** matrice $\mathbf{A}$.

Ako je
$$\mathbf{LA} = \mathbf{I}_n,$$
gde je $\mathbf{I}_n$ jedinična matrica reda n, onda se matrica $\mathbf{L}$ tipa $m \times n$ naziva **leva inverzna matrica** matrice $\mathbf{A}$.

U tom kontekstu suštinsko pitanje je uopšte postojanje inverzne matrice matrice $\mathbf{A}$.

Postoje tri odovora na ovo pitanje zavisno od karakteristika matrice $\mathbf{A}$.

(i) U nekim slučajima postoji matrica $\mathbf{R}$ tipa $n \times m$, tako da je
$$\mathbf{AR} = \mathbf{I}_m,$$
gde je $\mathbf{I}_m$ jedinična matrica reda m. Onda se matrica $\mathbf{R}$ naziva desna inverzna matrica matrice $\mathbf{A}$.

(ii) U nekim slučajima postoji matrica $\mathbf{L}$ tipa $m \times n$, tako da je
$$\mathbf{LA} = \mathbf{I}_n,$$
gde je $\mathbf{I}_n$ jedinična matrica reda n. Onda se matrica $\mathbf{L}$ naziva leva inverzna matrica matrice $\mathbf{A}$.

(iii) I u slučaju kada takve matrice $\mathbf{R}$ i $\mathbf{L}$ postoje, one mogu biti jedinstvene, ili nisu jedinstvene. U nekim slučajevima uopšte ne postoje.

Navedimo neke elmentarne primere.

Zadatak 5.1 Neka je
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$
Onda je
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$
njena inverzna matrica takva da je $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. ■

Zadatak 5.2 Neka je
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$
Onda postoji beskonačan broj matrica $\mathbf{L}$ takvih da je $\mathbf{LA} = \mathbf{I}_2$, na primer
$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 4 \\ 7 & 25 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 5.3 Za matricu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

njena desna inverzna matrica je matrica

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

jer je $\mathbf{AR} = \mathbf{I}_2$.

Međutim, ne postoji matrica $\mathbf{L}$ takva da je $\mathbf{LA} = \mathbf{I}_3$, jer je za bilo koju matricu $\mathbf{L}$ element prve vrste i prve kolone matrice $\mathbf{LA}$ uvek jednak nuli, pa prema tome njihov proizvod nikad nije jedak matrici $\mathbf{I}_3$.

Logično je postaviti pitanje kada postoji leva (desna) inverzna matrica materice $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$. Odgovor na to pitanje daje sledeća Teorema.

Teorema 5.8.1 Materice $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$ ima levu inverznu matricu $\mathbf{L}$ samo ako je $m \geq n$.

Dokaz

Za $m \geq n$ postoji particija $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$, gde je matrica $\mathbf{X}$ kvadratna, i particija $\mathbf{L} = (\mathbf{M}\mathbf{N})$, koja je saglasna sa proizvodom $\mathbf{LA}$. Onda je $\mathbf{LA} = \mathbf{MX} + \mathbf{NY}$ i $\mathbf{L}$ je leva inverzna matrica matrice $\mathbf{A}$ kada su matrice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ takve da je $\mathbf{MX} + \mathbf{NY} = \mathbf{I}$. Primer toga je $\mathbf{MX} = \mathbf{I}$ i $\mathbf{N} = 0$.

Za $m < n$ postoje particije $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$ i $\mathbf{L} = (\mathbf{MN})$.

Pretpostavomo da je $\mathbf{L}$ leva inverzna matrica matrice $\mathbf{A}$, tj. da je $\mathbf{LA} = \mathbf{I}$. Onda je

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} (\mathbf{X}\,\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{MX} & \mathbf{MY} \\ \mathbf{NX} & \mathbf{NY} \end{pmatrix} = \mathbf{I},$$

ako je

$$\mathbf{MX} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{MY} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{NX} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{NY} = \mathbf{I}.$$

Uočimo da su matrice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{X}$ kvadratne i maksimalnog ranga. Iz druge jednačine sledi da je $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ što je u kontradikciji sa jednačinom $\mathbf{NY} = \mathbf{I}$. Prema tome, materice $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$ ima levu inverznu matricu $\mathbf{L}$ samo ako je $m \geq n$.

Obrnuto, matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$ ima desnu inverznu matricu $\mathbf{R}$ samo ako je $m \leq n$.

❑

Definicija 5.8.2 Ako za kvadratna matrica $\mathbf{A}$ reda n postoji matrica $\mathbf{B}$ takva da je

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I},$$

onda se kaze da je matrica $\mathbf{B}$ **inverzna matrica** matrice $\mathbf{A}$.

Inverzna matrica $\mathbf{B}$ matrice $\mathbf{A}$ obeležava se sa $\mathbf{A}^{-1}$ i očigledno je reda n. Onda se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ piše u obliku

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Definicija 5.8.3 Ako kvadratna materica $\mathbf{A}$ ima inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$ onda se kaže da je matrica $\mathbf{A}$ **regularna matrica**, u protivnom je **singularna matrica**.

Lema 5.8.2 Inverzna matrica matrice $\mathbf{A}$, ako postoji, je jedinstvena.

Dokaz

Pretpostavimo da su $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ inverzne matrice matrice $\mathbf{A}$, pa je

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}.$$

Tada je

$$\mathbf{BAC} = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{IC} = \mathbf{C}$$

i takođe

$$\mathbf{BAC} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = \mathbf{BI} = \mathbf{B}.$$

Prema tome $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, čime je teorema dokazana.

Teorema 5.8.3 Za regularne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ reda n i $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ važe sledeća svojstva:

i) $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$,

ii) $(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \alpha^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}$,

iii) $\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}$,

iv) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Dokaz

i) Kako je $\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{I}$, množenjem obe strane sa leve strane sa $\mathbf{A}$, i imjući u vidu da je $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$, dobijamo

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A}.$$

ii)

$$(\alpha\mathbf{A})^{-1}(\alpha\mathbf{A})=\mathbf{I} \quad\Rightarrow\quad (\alpha\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}=\frac{1}{\alpha}\mathbf{I} \quad\Rightarrow\quad (\alpha\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}.$$

iii)

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I} \quad\Rightarrow\quad \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}=\mathbf{I}^{T}=\mathbf{I} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{A}^{-1})^{T}\mathbf{A}^{T}=\mathbf{I} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}=\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1}.$$

iv) Iz

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)=\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

5.9 Idempotentne matrice

Definicija 5.9.1 Kvadratna matrica $\mathbf{A}$ je **idempotentna** ako je

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}^{2}.$$

Primeri idempotentnih matica su identična matrica $\mathbf{I}$, nula matrica $\mathbf{O}$ i matrica projekcije.

Lema 5.9.1 Jedina idemptentna matrica ranga n je identična matrica $\mathbf{I}$.

Dokaz

Neka je matrica $\mathbf{A}$ ranga n idemptentna. Onda je

$$\mathbf{A}=\mathbf{I}\mathbf{A}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}.$$

Ako je kvadrantna matica $\mathbf{A}$ idempotentna onda je

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{2}=\mathbf{I}-2\mathbf{A}+\mathbf{A}^{2}=\mathbf{I}-2\mathbf{A}+\mathbf{A}=\mathbf{I}-\mathbf{A}.$$

Prema tome na mestu je sledeća

Lema 5.9.2 Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica. Onda je:
- $\mathbf{A}^T$ idempotentna matrica akko je $\mathbf{A}$ idempotentna matrica,
- $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ idempotentna matrica akko je $\mathbf{A}$ idempotentna matrica.

Za bilo koju idempotentnu matricu $\mathbf{A}$ važi $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ za bilo koji prirodan broj $n \geq 2$.

Teorema 5.9.3 Za bilo koju kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ reda n takvu da je $\mathbf{A}^2 = c\mathbf{A}$, gde je c neki skalar,

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = c\,\mathrm{rang}\mathbf{A}.$$

Dokaz

Slučaj kada je $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ je trivijalan.

Nadalje pretpostavljamo da $\mathbf{A}$ nije nula matrica i da je $\mathrm{rang}\mathbf{A} = r$.

Već smo ranije pokazali (vidi (5.6.1 na str. 122), da u tom slučaju postoji matrica $\mathbf{B}$ tipa $n \times r$ i matrica $\mathbf{C}$ tipa $r \times n$, obe **punog ranga** r, tako da je $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$. Onda je

$$\mathbf{BCBC} = \mathbf{A}^2 = c\mathbf{A} = c\mathbf{BC} = \mathbf{B}(c\mathbf{I}_r)\mathbf{C}$$

odakle sledi da je

$$\mathbf{CB} = c\mathbf{I}_r,$$

gde je $\mathbf{I}_r$ jedinična matrica reda r. Tada je

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BC}) = \mathrm{tr}(\mathbf{CB}) = \mathrm{tr}(c\mathbf{I}_r) = cr = c\mathrm{rang}\mathbf{A}.$$

Posledica 5.9.4 Ako je matrica $\mathbf{A}$ idempotentna onda je

$$\mathrm{rang}\mathbf{A} = \mathrm{tr}\mathbf{A}.$$

Lema 5.9.5 Za bilo koju idemptentnu matricu $\mathbf{A}$,

$$\mathrm{rang}(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \mathrm{tg}(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = n - \mathrm{rang}\mathbf{A}.$$

5.10 Adjungovana matrica

Definicija 5.10.1 Neka je $\mathbf{A} : V \to U$ linearna transformcija. Transformacija $\mathbf{A}^* : U \to V$ je **adjungovana transformacija** od $\mathbf{A}$ ako je

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{A}^*\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}, \tag{5.9}$$

za svako $\mathbf{v} \in V$ i $\mathbf{u} \in U$.

Uočimo da je unutrašnji proizvod leve strane ovog izraza u U, dok je na desnoj strani u V.

Teorema 5.10.1 Svakoj linearnoj transformaciji $\mathbf{A} : V \to U$ odgovara jedinstvena adjungovana transformacija $\mathbf{A}^* : U \to V$ koja zadovoljava (5.9).

Dokaz

Radi jednostavnosti izođenja dokaza pišemo sve indekse na donjem mestu. Po ponovljenim indeksima vrši se sabiranje.

Tako je

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{A}\mathbf{v}) = u_i\overline{(\mathbf{A}\mathbf{v})_i} = u_i(\overline{A_{ij}v_j}) = u_i\bar{A}_{ij}\bar{v}_j = \\ = \bar{A}_{ij}u_i\bar{v}_j = (\bar{A})^T_{ji}u_i\bar{v}_j = A^*_{ji}u_i\bar{v}_j = (\mathbf{A}^*\mathbf{u})\cdot\mathbf{v},$$

gde je $\bar{A}^T_{ji} = A^*_{ji}$.

Odavde se vidi da je $\mathbf{A}^* = (\bar{\mathbf{A}})^T$, tj. da je adjungovana matrica $\mathbf{A}^*$ konjugovano kompleksna matrica matrice $\mathbf{A}$. U slučaju kada je matrica $\mathbf{A}$ realna, onda je njena adjungovana matrica njena transponovana matrica $(\mathbf{A})^T$, tj. $\mathbf{A}^* = (\mathbf{A})^T$.

Determinanta

Svakoj kvadratnoj matrici $\mathbf{A}$ odgovara na određen način skalar koji nazivamo **determinanta**, a koja se obeležava na razne načine: $\det\{\mathbf{A}\}$, $|\mathbf{A}|$, a. S obziom na njen značaj o njoj će biti posebno i detaljno reči u delu koji se odnosi na Tenzorski račun. Ovde navodimo primer njenog predstavljana za matricu trećeg reda

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Onda je, prema pravilima razvijanje po vrstama (ili kolonama), na klasičan način,

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

N Svojstva determinanti biće detaljno razmatrana u delu Tenzorski račun (vidi poglavlje 12.2 str. 310, jed. (12.1)).

Teorema 5.10.2 Neka je $\mathbf{A} \in L(V,V)$. Onda je determinanta od $\mathbf{A}$, det$\mathbf{A}$, skalar definisan sa

$$[\mathbf{Aa}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Ac}] = \det(\mathbf{A})[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}], \tag{5.10}$$

gde su $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ linearno nezavisni vektori u V.

Dokaz

$$[\mathbf{Aa}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Ac}] = \det(\mathbf{Aa}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Ac}) = \det(\mathbf{A})[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}],$$

za svako $\mathbf{A}$ i linearno nezavisne vektore $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.

N U delu Tenzori (str. 333) dat je drugi način Dokaza. Važnost ovog izraza sastoji se u njegovoj invarijantnosti u $\mathbb{E}_3$.

Teorema 5.10.3 Determinanta proizvoda matrica $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in L(V,V)$ jednaka je proizvodu njihovih determinanti, tj.

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det\mathbf{A})(\det\mathbf{B}). \tag{5.11}$$

Dokaz

Na osnovu Teoreme 5.10.2,

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{AB})[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= \det(\mathbf{ABa}, \mathbf{ABb}, \mathbf{ABc}) = \det(\mathbf{A})[\mathbf{Ba}, \mathbf{Bb}, \mathbf{Bc}] = \\ &= \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}],\end{aligned}$$

odakle sledi (5.11).

Zadatak 5.4 Pokazati da je za regularnu matricu $\mathbf{T}$

$$\mathbf{Tu} \times \mathbf{Tv} = (\det\mathbf{T})\mathbf{T}^{-T}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}). \tag{5.12}$$

■

Rešenje

Pišemo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}\cdot(\mathbf{Tu}\times\mathbf{Tv}) = \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w}\cdot(\mathbf{Tu}\times\mathbf{Tv}) = \\
&= [\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w},\mathbf{Tu},\mathbf{Tv}] = \det(\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w},\mathbf{Tu},\mathbf{Tv}) = \\
&= \det\mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w},\mathbf{Tu},\mathbf{Tv}) = (\det\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w},\mathbf{Tu},\mathbf{Tv}) = \\
&= (\det\mathbf{T})\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (\det\mathbf{T})\mathbf{w}\cdot\mathbf{T}^{-T}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).
\end{aligned}
$$

S obzirom na proizvoljnost vektora $\mathbf{w}$ sledi (5.12).

Specijalan slučaj. Za ortogonalnu matricu $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, sledi da je

$$\mathbf{Qu}\times\mathbf{Qv} = (\det\mathbf{Q})\mathbf{Q}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}). \tag{5.13}$$

Ako je $\mathbf{Q}$ matrica rotacije onda je $\det\{\mathbf{Q}\} = 1$ i

$$\mathbf{Qu}\times\mathbf{Qv} = \mathbf{Q}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}). \tag{5.14}$$

Definicija 5.10.2 Po definiciji, **kofaktor** $\mathbf{T}^\times$, matrice $\mathbf{T}$, je

$$\mathbf{T}^\times = \det(\mathbf{T})\mathbf{T}^{-T}.$$

Problem 1

Pokazati da je

$$
\begin{aligned}
\det\mathbf{T}^\times = (\det\mathbf{T})^2, \\
(\mathbf{T}^{-1})^\times &= (\mathbf{T}^\times)^{-1} = (\det\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^T, \\
(\mathbf{T}^\times)^\times &= (\det\mathbf{T})\mathbf{T}, \\
\mathbf{T}^\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= \mathbf{Tu}\times\mathbf{Tv}.
\end{aligned}
$$

Problem 2

Koristeći relaciju između kofaktora i njemu odgovarajuće adjungovane matrice $\mathbf{T}^*$, tj.

$$\mathbf{T}^* = (\mathbf{T}^\times)^T$$

izraziti relacije prethodnog problema za adjungovanu matricu $\mathbf{T}^*$.

Problem 3

Neka je $\boldsymbol{\Omega}$ antisimetrična matrica i neka je $\boldsymbol{\omega}$ njen karakterističan - aksijalni vektor. Pokazati da je

$$\boldsymbol{\Omega}\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}\mathbf{v} = (\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega})(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

Problem 4

Pokazati da je za antisimetrično $\boldsymbol{\Omega}$

$$\det(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega}) = 1 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Omega}\|^2.$$

Zaključiti da je za bilo koju matricu $\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega}$ regularna matrica.

Problem 5

Pokazati da je za bilo koju regularnu matricu $\mathbf{T}$ i bilo koje vektore $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$

$$\det(\mathbf{T} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}^{-1}\mathbf{u}) \det\{\mathbf{T}\}.$$

5.11 Minor. Kofaktor

Definicija 5.11.1 U linernoj Algebri **minor matrice A** je **determinanta kvadratne submatrice** dobijene izostavljanjem jedne ili više vrsta i kolona.

Neka je matrica $\mathbf{A}$ reda n. Neka je a_{ij} njen element.

i) Determinanta matrice $\mathbf{M}_{ij}$ reda $n-1$ dobijena precrtavanjem i-vrste i j-kolone od $\mathbf{A}$, naziva se **minor** elementa a_{ij}.

ii) $\mathrm{cof}_{ij}\mathbf{A} = (-1)^{i+j}\det\mathbf{M}$ naziva se **kofaktor** od a_{ij}.

iii) Marica čiji su elementi kofaktori naziva se **kofaktor matrica**, tj.

$$\mathrm{cof}\mathbf{A} = (\mathrm{cof}_{ij}\mathbf{A}).$$

iv) **Transponovana kofaktor** matrica je matrica

$$\mathbf{A}^* = (\mathrm{cof}\mathbf{A})^T,$$

i naziva se **adjungovana matrica** matrice $\mathbf{A}$.

v) Determinanta matrice $\mathbf{A}$, $\det(\mathbf{A})$, izračunava se koristeći adjungovanu matricu $\mathbf{A}^*$. Preciznije,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = (\det\mathbf{A})\mathbf{I}.$$

N Izrazi za izračunavanje determinnte, $\det\mathbf{A}$, i njenih svojstava izloženi su detaljno u delu knjige koji se odnosi na **Tenzorski račun**.

6. Karakteristični brojevi i karakteristični vektori

6.1 Kvadratne forme

Definicija 6.1.1 Neka je simetrična matrica $\mathbf{A} = (a_{ij})$ reda n i neka je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Onda je

$$Q = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

kvadratna forma.

Za kvadratnu formu kaže se da je:

1. **negativno definitna** ako je $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ za svako $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ u $\mathbb{R}^n$;
2. **negativno semidefinitna** ako je $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ za svako $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ u $\mathbb{R}^n$;
3. **pozitivno definitna** ako je $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ za svako $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
4. **pozitivno semidefdinitna** ako je $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ za svako $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ u $\mathbb{R}^n$;
5. **indefinitna** ako je $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ za neko $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ za neko $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ova klasifikacija se terminološki identifikuje sa definitnošću simetrične matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ reda n. Definitnost simetrične matrice igra veliku ulogu u matematici i njenim primenama. Na primer, za funkciju $y = f(x)$ jedne pomenljive drugi izvod y'' od f, uglavnom, daje potrebne i dovoljne uslove za određivanje minimum ili maksimuma od f u x_0 ili nijednog od njih.

U slučaju funkcije dve promenljive $z = f(x, y)$ na sličan način se određuje geometrijski oblik površi u tački (x_0, y_0). O tome će biti više reči u delu koji se odnosi na diferencijalnu geometriju.

Od interesa je da se ukaže na kriterijum o definitnosti simetrične matrice $\mathbf{A}$.

Teorema 6.1.1 Ako je $\mathbf{A}$ pozitivo definitna onda je ona regularna.

Dokaz

Ako je $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ onda je $\mathbf{x} \cdot \mathbf{Ax} = 0$. Kako je $\mathbf{A}$ pozitivno definitna onda je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Prema tome, $\mathbf{A}$ mora biti nesingularna.

Definicija 6.1.2 **Submatrica** matrice $\mathbf{A}$ je matrica dobijena brisanjem bilo kog broja vrsta i kolona matrice $\mathbf{A}$.

Teorema 6.1.2 Ako je $\mathbf{A}$ pozitvno definitna onda su njene glavne submatrice pozitivno definitne.

Dokaz

Prema uslovu teoreme, matrica $\mathbf{A}$ je pozitivno definita. Onda je $\mathbf{x} \cdot \mathbf{Ax} > 0$ za svako $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Primenimo ovaj uslov na skup vektora koji imaju nule po koordinatama $j_1, j_2, \ldots, j_s$. Za takav vektor $\mathbf{x}$ forma $\mathbf{x} \cdot \mathbf{Ax}$ se svodi na oblik $\mathbf{y} \cdot \mathbf{By}$, gde je $\mathbf{B}$ glavna submatrica od $\mathbf{A}$ formirana brisanjem $j_1, j_2, \ldots, j_s$ vrsta i kolona od $\mathbf{A}$. Odavde sledi da je $\mathbf{B}$ i svaka slična tome glavna submatrica od $\mathbf{A}$ pozitivno definitna.

Za dalje razmatranje uopšte svojstva matrica $\mathbf{A}$ potrebni su nam novi pojmovi koje uvodimo u sledećem odeljku.

6.2 Karakteristični brojevi i karakteristični vektori

Definicija 6.2.1 Neka je matrica $\mathbf{A}$ reda n i neka je $\lambda \in F$. Onda polinom stepena n po λ,

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_n\lambda^n,$$

nazivamo **karakterističan polinom** od $\mathbf{A}$.

Ako je $\mathbf{Ax} = \lambda\,\mathbf{x}$ za neko $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$, onda je λ **karakterističan broj** od $\mathbf{A}$, a $\mathbf{x}$ njegov **karakterističan vektor**.

Teorema 6.2.1 Skup svih vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ za koje je

$$\mathbf{Ax} = \lambda\,\mathbf{x}, \tag{6.1}$$

obrazuju linearni prostor u $\mathbb{R}^n$.

Dokaz

Očigledno je da je $\mathbf{Ax} = \lambda\,\mathbf{x}$ akko je $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Znači, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pripada **nula prostoru** matrice $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}$. Prema Teoremi 4.7.1 skup svih $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ koji zadovoljavaju jednačinu $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ čine linearni prostor u $\mathbb{R}^n$.

Uočimo da je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ trivijalno rešenje, jer je tada $\mathbf{Ax} = \lambda\,\mathbf{x}$ za svako λ.

Karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}$ reda n, $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, je stepena n.

Fundamentalna teorema algebre tvrdi da $\mathbf{A}$ ima n karakterističnih vrednosti koje ne moraju biti različite niti realne.

U razvijenom obliku, u opštem slučaju, karakteristični polinom glasi

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)\,(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)\,.$$

Za $\lambda = 0$ dobijamo da je

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1\,\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{6.2}$$

Znači, $\det\{\mathbf{A}\}$ jednaka je proizvodu karakterističnih brojeva. Prema tome, ako matrica $\mathbf{A}$ ima bar jedan karakteristični broj jednak nuli, onda je matrica $\mathbf{A}$ singularna.

Na sličan način se može pokazati da je koeficijent uz λ^{n-1} jednak

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n. \tag{6.3}$$

Za svako λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Prema tome, matrica je singularna i dimenzija njenog nula prostora je najmanje jedan.

Karakteristični brojevi ne moraju biti različiti. Onda je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}\cdot(\lambda_2 - \lambda)^{m_2}\cdots(\lambda_p - \lambda)^{m_p}\,, \qquad \sum_{k=1}^{p} m_k = n. \tag{6.4}$$

Lema 6.2.2

$$\det(\mathbf{A}) = (\lambda_1)^{m_1}\,(\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda_p)^{m_p} = \prod_{j=1}^{p}\lambda_j^{m_j}. \tag{6.5}$$

Dokaz

Sledi iz prethodnog izraza kada se stavi $\lambda = 0$.

Teorema 6.2.3 Matrica $\mathbf{A}$ je regularna akko je $\alpha_n \neq 0$.

Dokazati.

Definicija 6.2.2 Broj jednakih karakterističnih brojeva, npr. m_k, karakteristične jednačine naziva se **algebarski multiplicitet** karakterističnog broja.

Definicija 6.2.3 Skup svih karakterističnih vektora karakterističnog broja λ nazivamo **karakteristični potprostor** karakterističnog broja λ i obeležavamo sa

$$\aleph_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (\mathbf{Ax} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Dimenzija $\aleph_\lambda$ naziva se **geometrijski multiplicitet karakterističnog broja** λ.

Ako je $\aleph_\lambda$ dimenzije jedan, onda λ nazivamo **prost karakterističan broj**. Skup svih karakterističnih brojava od $\mathbf{A}$ nazivamo **spektar matrice** $\mathbf{A}$.

Uočimo da ako je $\mathbf{x} \in \aleph_\lambda$, onda je i $a\mathbf{x} \in \aleph_\lambda$ za svako $a \in F$, tj. karakteristični vektor je određen do na multiplikativnu konstantu.

Teorema 6.2.4 Neka je matrica $\mathbf{A}$ ranga n i neka je $\lambda \in F$. Onda je karakteristični polinom i spektar od $\mathbf{A}^T$ isti kao od $\mathbf{A}$.

Dokaz

Dovoljno je pokazati da $\mathbf{A}^T$ i $\mathbf{A}$ imaju isti karakteristični polinom. Za bilo koje λ je

$$\det\left(\mathbf{A}^T - \lambda \mathbf{I}\right) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^T = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}).$$

Teorema 6.2.5 Neka je λ karakteristični broj matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{x}$ njegov karakteristični vektor. Onda je:

(1) za bilo koji prirodan broj k, λ^k je karakteristični broj od $\mathbf{A}^k$ i $\mathbf{x}$ njegov karakterističan vektor;

(2) ako je $\mathbf{A}$ nesingularna (u tom slučaju je $\lambda \neq 0$) onda je $1/\lambda$ karakterističan broj od $\mathbf{A}^{-1}$ čiji je karakteristični vektor $\mathbf{x}$.

Dokaz

Dokaz izvodimo na osnovu matematičke indukcije.

(1) Neka je λ karakteristični broj matrice $\mathbf{A}$ kome odgovara karakteristični vektor $\mathbf{x}$. Pretpostavomo da je λ^{k-1} karakterističan broj matrice $\mathbf{A}^{k-1}$ i da je $\mathbf{x}$ njegov karakterističan vektor za $k \geq 2$. Onda je

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{k-1}(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda\,\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x} = \lambda\,\lambda^{k-1}\mathbf{x} = \lambda^k\,\mathbf{x}.$$

(2) Neka je $\mathbf{A}$ nesingularna matrica (λ je različito od nule). Onda je

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda\,\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x},$$

odakle sledi da je

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}.$$

N U gore navedenoj karakterističnoj jednačini (6.1) vektor $\mathbf{v}$ množi $\mathbf{A}$ sa desne strane. Zbog toga se u literaturi ovaj problem razmatra kao problem određivanje desnog karakterističnog vektora. Problem određivanja levog karakterističnog vektora $\mathbf{w}$ definisan je karakterističnom jednačinom

$$\mathbf{w}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \neq \mathbf{0}.$$

Imajući u vidu da je $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{A}^T$ za svaki vektor $\mathbf{u} \in V$ možemo zaključiti da je svaki desni karakteristični vektor od $\mathbf{A}$ levi karakteristični vektor od $\mathbf{A}^T$ i obrnuto, svaki levi karakteristični vektor od $\mathbf{A}$ je desni karakteristični vektor od $\mathbf{A}^T$.

Teorema 6.2.6 Desni i levi karakteristični vektori, koji odgovaraju različitim karakterističnim vrednostima, su uzajamno upravni.

Dokaz

Neka je $\mathbf{v}$ desni, a $\mathbf{w}$ levi karakteristični vektor od $\mathbf{A}$ koji odgovaraju različitim karakterističnim vrednostima λ i μ, redom. Onda je

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \text{ i } \mathbf{w}\mathbf{A} = \mu\mathbf{w}. \quad \text{Tada je } \mathbf{w}\cdot\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} \text{ i } \mathbf{w}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{A}\mathbf{v} = \mu\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}.$$

Njihova razlika je $(\lambda - \mu)\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = 0$. Kako je, prema pretpostavci $\lambda \neq \mu$ sledi da je

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = 0,$$

tj. oni su uzajamno upravni.

Ukoliko se drugačije ne kaže, nadalje razmatramo prvenstveno problem određivanja desnog karakterističnog vektora.

Teorema 6.2.7 Algebarski multiplicitet karakterističnog broja c je veći ili jedak njegovom geometrijskom multiplicitetu.

Dokaz

Neka je k geometrijski multiplicit karakterističnog broja c. Onda postoji skup linearno nezavisnih karakterističnih vektora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ koji odgovaraju karakterističnom broju c takvih da je $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = c\,\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Kompletirajmo skup $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ do baze $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+2}, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ od $\mathbb{R}^n$. Označimo matricu ovih baznih vektora od $\mathbb{R}^n$ sa $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \ldots, \mathbf{w}_n]$. Onda je

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P} &= \\
[(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_1, \ldots, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_k, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w}_{k+1}, \ldots, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w}_n] &= \\
[(c - \lambda)\mathbf{v}_1, \ldots, (c - \lambda)\mathbf{v}_k, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w}_{k+1}, \ldots, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w}_n]&.
\end{aligned}$$

Determinanta ovog izraza je

$$\begin{aligned}
\det[(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P}] &= \\
\det[(c - \lambda)\mathbf{v}_1, \ldots, (c - \lambda)\mathbf{v}_k, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w}_{k+1}, \ldots, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w}_n] &= \\
(c - \lambda)^k \det[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w}_{k+1}, \ldots, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w}_n] &= \\
&= (c - \lambda)^k q(\lambda),
\end{aligned}$$

gde je $q(\lambda)$ polinom stepena $n - k$. Kako je $\det\{\mathbf{P}\} \neq 0$ onda je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \frac{(c - \lambda)^k q(\lambda)}{\det(\mathbf{P})}.$$

Prema tome, algebarski multiplicitet od c nije manji od geometrijskog multipliciteta.

Teorema 6.2.8 Ako je λ karakteristični broj matrice $\mathbf{A}$ ranga n, onda je skup svih karakterističnih vektora koji odgovaraju λ, zajedno sa nula vektorom, potprostor od $\mathbb{R}^n$. Naziva se **karakteristični prostor** $\aleph_\lambda$ od λ.

Dokaz

Neka su m i k algebarski i geometrijski multipliciteti od λ, $k \leq m$, redom. Neka su $\mathbf{x}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, k$, linearno nezavisni karakteristični vektori od λ. Onda je $\mathbf{A}\mathbf{x}_\alpha = \lambda\mathbf{x}_\alpha$. Tvrdimo da oni predstavljaju bazu od $\aleph_\lambda$. To znači da bilo koja njihova linearna kombinacija $\mu^\alpha \mathbf{x}_\alpha$ pripada $\aleph_\lambda$. Zaista, onda je

$$\mathbf{A}(\mu^\alpha \mathbf{x}_\alpha) = \mu^\alpha (\mathbf{A}\mathbf{x}_\alpha) = \lambda(\mu^\alpha \mathbf{x}_\alpha).$$

Od posebnog interesa je sledeća

Teorema 6.2.9 Ako matrica $\mathbf{A}$ reda n ima n različitih kerakterističnih brojeva (multipliciteta 1), onda svakom od njih odgovara jednodimenzioni karakteristični prostor. Ako je $\mathbf{x}_i$ bilo koji karakterističan vektor u i-tom karakterističnom prostoru, za $i = 1, 2, \ldots, n$, onda su vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ linearno nezavisni i obrazuju bazu u $\mathbb{R}^n$.

Dokaz

Ako je λ_i karakterističan broj od $\mathbf{A}$, onda je, po definiciji,

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x}_i = \mathbf{0},$$

gde je $\mathbf{x}_i$ njeno netrivijalno rešenje koje predstavlja karakteristični prostor dimenzije 1. Vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ su linearno nezavisni ako je njihova linearna kombinacija

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

zadovoljena, samo ako su svi skalari $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jedaki nuli. Pokažimo to.

U tom cilju pomnožimo ovu jednačinu sa $\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}$. Onda se i-ti član ove jednačine anulira. Ako sada pomozimo $\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{I}$ onda anuliramo j-ti član, jer je

$$(\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{I})\,(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{x}_j = (\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\,(\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{I})\,\mathbf{x}_j = (\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Nastavljajući ovaj postupak možemo anulirati sve članove sem jednog, recimo k-tog člana. Onda nam ostaje član

$$\prod_{i=1, j\neq k}^{n} (\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\, c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

Kako je $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$ karakterističan vektor koji odgovara karakterističnom broju λ_k sledi da je

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\, c_k\mathbf{x}_k = c_k\,(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{x}_k =$$
$$= c_k\,(\mathbf{A}\mathbf{x}_k - \lambda_i\mathbf{I}\mathbf{x}_k) = c_k\,(\lambda_k - \lambda_i)\,\mathbf{x}_k.$$

Zameno ovog izraza u $\prod_{i=1,j\neq k}^{n}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\,c_k\mathbf{x}_k=\mathbf{0}$ dobijamo

$$c_k\prod_{i=1,j\neq k}^{n}(\lambda_k-\lambda_i)\,\mathbf{x}_k=\mathbf{0}.$$

Pretpostavka da je multiplicitet svakog kararakterističnog broja jedan povlači za sobom da je $\lambda_k-\lambda_i\neq 0$ za bilo koje $i\neq k$. Prema tome $c_k=0$ za svako $k=1,2,\dots,n$. Znači vektori $\mathbf{x}_k$, su linearno nezavisni i obrazuju bazu u $\mathbb{R}^n$.

■ **Primer 6.1** Neka je

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Njen karakteristični polinom je

$$p(\lambda)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)^2.$$

Spektar od $\mathbf{A}$ se sastoji samo od karakterističnog broja čiji je algebarski multiplicitet 2. Međutim

$$\det(\mathbf{A}-(1)\mathbf{I})=\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

čiji je

$$\operatorname{rang}(\mathbf{A}-(1)\mathbf{I})=1.$$

Prema tome geometrijski multiplicitet od $\mathbf{A}$ je 1. ■

■ **Primer 6.2** Neka je

$$\mathbf{A}=\det\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Onda je njena karakteristična jednačina

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\det\begin{pmatrix}3-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}=0,$$

ili u razvijenom obliku

$$(\lambda-1)(\lambda-3)^2=0.$$

Karakteristični broj $\lambda_1=1$ je prost, a karakterističan broj $\lambda_2=3$ je dvostruki karakterističan broj (čiji je algebarski multiplicitet 2). Smenom ovih vrednosti u jednačini $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$ dobijamo za $\lambda_1=1$ karakteristični vektor $\mathbf{x}_1(-1,0,2)^T$, a za $\lambda_2=3$ karakterističe vektore, koji su linearna kombinacija vektora $\mathbf{x}_2(1,0,0)^T$ i $\mathbf{x}_3(0,1,0)^T$, koji definišu dvodimezionalni karakterističan prostor. ■

■ **Primer 6.3** Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Njen karakteristični polinom

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

je drugog stepena. Ima dva imaginarna korena $\lambda_1 = i$ i $\lambda_2 = -i$ kojima ogovaraju karakteristični vektori čije su komponente kompleksni brojevi. Nema realnih karakterističnih brojeva niti realnih karakterističnih vektora. Slučaj kompleksnih rešenja je veoma važan u mnogim primenama.

Primera radi, matrica rotacije

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

ima kompleksne karakteristične brojeve $e^{i\theta}$ i $e^{-i\theta}$. Pokazati. ■

■ **Primer 6.4** Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 + 1.$$

Koreni ove jedančine su $\lambda_1 = 2+i$ i $\lambda_1 = 2-i$. Za nalaženje karakterističnih vektora za $\lambda_1 = 2+i$ rešavamo karakterističnu jednačinu

$$[\mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I}]\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{po} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)$$

pišemo

$$[\mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I}]\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -ix_1 & -x_2 \\ x_1 & -ix_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = ix_2.$$

Prema tome, svi karakteristični vektori, koji odgovaraju karakterističnom broju $\lambda_1 = 2+i$, su vektori koji se dobijaju množenjem vektora $\mathbf{x}_1 = (i, 1)$ sa proizvoljnim skalarom.

Na isti način se pokazuje da svi karakteristični vektori, koji odgovaraju karakterističnom broju $\lambda_2 = 2-i$, su vektori koji se dobijaju množenjem vektora $\mathbf{x}_2 = (-i, 1)$ sa proizvoljnim skalarom.

Uočimo da su karakteristični brojevi λ_1 i λ_2 konjugovano kompeksni i da su, njima ogovarajući, karakteristični vektori $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ takođe konjugovano kompleksni. ■

Teorema 6.2.10 Ako je λ karakteristični broj relane matrice $\mathbf{A}$ reda n i $\mathbf{x}$ karakteristični vektor od λ, onda je takođe $\bar{\lambda}$ karakteristični broj od $\mathbf{A}$ kojem odgovara karakteristični vektor $\bar{\mathbf{x}}$.

Dokaz

Kako je $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ sledi da je

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{A}\mathbf{x}} = \overline{\lambda\mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}.$$

Sledeća Teorema je jedna od najznačajnih teorema linearne algebra.[1]

Teorema 6.2.11 — Kejli-Hamiltonova. Neka je matrica $\mathbf{A}$ ranga n i neka je

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})$$

karaktristični polinom od $\mathbf{A}$. Onda je

$$p(\mathbf{A}) = 0.$$

Dokaz

Znamo da je

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda^1 + \cdots + \alpha_n\lambda^n.$$

Takođe znamo da je $(\mathrm{adj}\mathbf{A})\mathbf{A} = (\det\mathbf{A})\mathbf{I}$ za svaku matricu $\mathbf{A}$ reda n. Obeležimo sa $\mathbf{Q}(\lambda)$ adjungovanu matricu od matrice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. Onda je

$$\mathbf{Q}(\lambda)(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{I}\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = p(\lambda)\mathbf{I} = \left(\alpha_0 + \alpha_1\lambda^1 + \cdots + \alpha_n\lambda^n\right)\mathbf{I}.$$

Pretpostavimo da je

$$\mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1\lambda + \mathbf{Q}_2\lambda^2 + \cdots + \mathbf{Q}_k\lambda^k,$$

gde su $\mathbf{Q}_j$, $j = 0, 1, \ldots, k$, za sada neodređene matrice. Tada je

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(\lambda)(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= (\mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1\lambda + \mathbf{Q}_2\lambda^2 + \cdots + \mathbf{Q}_k\lambda^k)(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \\ &= \mathbf{Q}_0\mathbf{A} + (\mathbf{Q}_1\mathbf{A} - \mathbf{Q}_0)\lambda + (\mathbf{Q}_2\mathbf{A} - \mathbf{Q}_1)\lambda^2 + \cdots + (\mathbf{Q}_k\mathbf{A} - \mathbf{Q}_{k-1})\lambda^k - \mathbf{Q}_k\lambda^{k+1}.\end{aligned}$$

[1] Caylay-Hamilton

Upoređujući stepene po λ iz dva izraza za $\mathbf{Q}(\lambda)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ sledi da je $k+1=n$. I

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_0\mathbf{A} &= \mathbf{I}\alpha_0,\\ \mathbf{Q}_1\mathbf{A}-\mathbf{Q}_0 &= \mathbf{I}\alpha_1,\\ \mathbf{Q}_2\mathbf{A}-\mathbf{Q}_1 &= \mathbf{I}\alpha_2,\\ \vdots &= \vdots\\ \mathbf{Q}_{n-1}\mathbf{A}-\mathbf{Q}_{n-2} &= \mathbf{I}\alpha_{n-1},\\ -\mathbf{Q}_{n-1} &= \mathbf{I}\alpha_n.\end{aligned}$$

Sukcesivnim množenjem svake od ovih jednakosti sa $\mathbf{A}^i$, gde je stepen i određen indeksom koeficijenta a_i, dobijamo

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_0\mathbf{A} &= \mathbf{I}\alpha_0,\\ \mathbf{Q}_1\mathbf{A}^2-\mathbf{Q}_0\mathbf{A} &= \alpha_1\mathbf{A},\\ \mathbf{Q}_2\mathbf{A}^3-\mathbf{Q}_1\mathbf{A}^2 &= \alpha_2\mathbf{A}^2,\\ \vdots &= \vdots\\ \mathbf{Q}_{n-1}\mathbf{A}^n-\mathbf{Q}_{n-2}\mathbf{A}^{n-1} &= \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1},\\ -\mathbf{Q}_{n-1}\mathbf{A}^n &= \alpha_n\mathbf{A}^n.\end{aligned}$$

Sabiranjem svih jednakosti leva strana se potire. Tada dobijamo

$$\mathbf{0} = a_0\mathbf{I}+a_1\mathbf{A}+\cdots+a_n\mathbf{A}^n,$$

ili

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

Posledica 6.2.12 Neka je $p(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})=0$ karakteristična jednačina od $\mathbf{A}$. Onda je:

(i)

$$\mathbf{A}^n = (-1)^{n+1}\left(\alpha_0\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{A}+\cdots+\alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}\right);$$

(ii) ako je matrice $\mathbf{A}$ regularna onda je

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0}\left(\alpha_1\mathbf{I}+\alpha_2\mathbf{A}+\cdots+\alpha_n\mathbf{A}^{n-1}\right),$$

(iii) ako je

$$f(\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha \lambda^\alpha,$$

bilo koji polinom od λ i $\aleph_f = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$, onda je $\aleph_f$ invarijantni linearni potprostor od $\mathbb{R}^n$.

(iv) ako je $f(\lambda)$ bilo koji polinom od λ, onda postoje veličine $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \in F$ takve da je

$$f(\mathbf{A}) = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{A} + \cdots + \beta_{n-1} \mathbf{A}^{n-1}.$$

Dokaz

(i) sledi iz prethodne teoreme i činjenice da je koeficijent $\alpha_n = (-1)^n$.

(ii) Dokaz je trivijalan. Odavde se vidi da se i inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$ izražava preko polinoma matrice $\mathbf{A}$ do na stepen $n-1$, izraz koji je pogodan za direktno izračunavanje matrice $\mathbf{A}^{-1}$.

(iii) Dokaz da je $\aleph_f$ linearni potprostor od $\mathbb{R}^n$ prepušta se čitaocu kao vežba. Ostaje nam da dokažemo da je $\aleph_f$ invarijantno pod dejstvom $\mathbf{A}$. Neka je $\mathbf{x} \in \aleph_f$. Onda je $f(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Želimo da dokažemo da je $\mathbf{A}\mathbf{x} \in \aleph_f$. Iz

$$f(\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha \lambda^\alpha,$$

sledi

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha \mathbf{A}^\alpha \quad \Rightarrow$$

$$f(\mathbf{A})\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha \mathbf{A}^\alpha\right)\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\left(\sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha \mathbf{A}^\alpha\right)\mathbf{x} = \mathbf{A}f(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(iv) Dokaz se zasniva na poznatoj Teoremi koja se odnosi na polinomijalne funkcije. Neka su $f(t)$ i $g(t)$ polinomi i neka je $g(t) \neq 0$. Onda postoje jedinstveni polinomi $q(t)$ i $r(t)$, tako da je

$$f(t) = q(t)g(t) + r(t),$$

gde je $r(t) = 0$, ili $\deg r(t) < \deg g(t)$. Ovde je sa deg označen stepen polinoma.

U našem slučaju glasi: neka su $f(\lambda)$ bilo koji polinom i $p(\lambda)$ karakterističan polinom od $\mathbf{A}$. Onda postoje polinomi $g(\lambda)$ i $r(\lambda)$ takvi da je

$$f(\lambda) = p(\lambda)g(\lambda) + r(\lambda),$$

gde je $\deg r(\lambda) \leq n-1$. Kako je $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ onda sledi da je $f(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$.

Teorema 6.2.13 Neka $\mathbf{A}$ ima m međusobno različitih karakterističnih brojeva. Izaberimo za svaki karakteristični broj odgovarajući karakteristični vektor. Onda je skup ovih vektora linearno nezavisan.

Dokaz

Pretpostavimo da je skup m vektora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ linearno zavisan, gde je $\mathbf{A}\mathbf{v}_i =$

$\lambda_i \mathbf{v}_i$, za različite λ_i, $i = 1, 2, \dots, m$. Onda postoji

$$\mathbf{v}_j = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_{j-1} \mathbf{v}_{j-1}$$

za neko j, gde je $j \leq m$, i $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{j-1}\}$ je linearno nezavisan skup vektora. Tada je

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v}_j &= c_1 \mathbf{A}\mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{A}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{j-1} \mathbf{A}\mathbf{v}_{j-1} = \\ &= c_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_{j-1} \lambda_{j-1} \mathbf{v}_{j-1} \end{aligned}$$

i

$$\lambda_j \mathbf{v}_j = c_1 \lambda_j \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_j \mathbf{v}_2 + \cdots + c_{j-1} \lambda_j \mathbf{v}_{j-1},$$

odakle se dobija, oduzimanjem i imajući u vidu da je

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v}_j &= \lambda_j \mathbf{v}_j, \\ \mathbf{0} &= \mathbf{A}\mathbf{v}_j - \lambda_j \mathbf{v}_j = \\ &= c_1(\lambda_1 - \lambda_j)\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_j)\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{j-1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j)\mathbf{v}_{j-1}. \end{aligned}$$

Kako su, po pretpostavci, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{j-1}\}$ vektori skupa linearno nezavisni, sledi da je

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_j) = c_2(\lambda_2 - \lambda_j) = \cdots = c_{j-1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j) = 0,$$

pa je prema tome

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{j-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_j = \mathbf{0}.$$

Kontradikcija, jer je $\mathbf{v}_j$ karakterističan vektor. Znači skup vektora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_j\}$ je linearno nezavisan.

Teorema 6.2.14 Neka je matrica $\mathbf{A}$ ranga n i neka je $\lambda \in F$. Onda je karakteristični polonom i spektar od $\mathbf{A}^T$ isti kao od $\mathbf{A}$.

Dokaz

Dovoljno je pokazati da $\mathbf{A}^T$ i $\mathbf{A}$ imaju isti karakteristični polinom. Za bilo koje λ je

$$\det\left(\mathbf{A}^T - \lambda \mathbf{I}\right) = \det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right)^T = \det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right).$$

6.3 Minimalni polinom

Kao motivaciju posmatrajmo matricu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

čiji je karakteristični polinom

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Na osnovu Keli-Hamiltonove teoreme znamo da je

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

Posmatrajmo sada polinom

$$m(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) = 2 - 3\lambda + \lambda^2.$$

Onda je

$$m(\mathbf{A}) = 2\mathbf{I} - 3\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = \mathbf{0}.$$

Prema tome, matrica **A** zadovoljava polinom $m(\lambda)$, čiji je stenen manji od stepena njenog karakterističnog polinoma.

Za dalje razmatranje od interesa je sledeći pojam, koji daje sledeća

Definicija 6.3.1 Za polinom stepena n po λ se kaže da je **moničan** ako je koeficijent uz λ^n jedank jedan.

Teorema 6.3.1 Neka je **A** reda n. Onda postoji jedinstven polinom $m(\lambda)$ takav da je

(i) $m(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$;
(ii) $m(\lambda)$ je moničan;
(iii) $m(\lambda)$ je jedinstven polinom najmanjeg stepena za koji je $m(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Dokaz

(i) Znamo da je $p(\lambda)$ karakterističan polinom stepena n od matrice **A** takav da je $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Prema tome, postoji polinom, recimo $f(\lambda)$, stepena $m \leq n$, takav da je $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Biramo najmanji stepen m za koji je $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.
(ii) U opštem slučaju, kako je $f(\lambda)$ stepena m, možemo podeliti $f(\lambda)$ koeficijentom uz λ^m i tako dobiti moničan polinom, $m(\lambda)$, takav da je $m(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

(iii) Da bismo pokazali da je jedinstven pretpostavimo da postoji drugi polinom $m_1(\lambda)$ istog stepena takav $m_1(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Onda je $m(\lambda) - m_1(\lambda)$ polinom čiji je stepen manji od m. Takođe je $m(\mathbf{A}) - m_1(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, što je u kontradikciji sa našom pretpostavkom da je $m(\lambda)$ polinom najmanjeg stepena za koji je $m(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Definicija 6.3.2 Polinom $m(\lambda)$, definisan prema prethodnoj teoremi, naziva se **minimalni polinom** od $\mathbf{A}$.

Teorema 6.3.2 Neka je $f(\lambda)$ bilo koji polinom, takav da je $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Onda $m(\lambda)$ deli $f(\lambda)$.

Dokaz

Neka je ν stepen od $m(\lambda)$. Onda postoje polinomi $q(\lambda)$ i $r(\lambda)$, tako da je, na osnovu teorije linearne algebre,

$$f(\lambda) = q(\lambda)m(\lambda) + r(\lambda),$$

gde je $\deg[r(\lambda)] < \nu$ ili $r(\lambda) = 0$. Kako je $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, onda je

$$\mathbf{0} = q(\mathbf{A})m(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}),$$

odakle sledi da je $r(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. To znači da je $r(\lambda) = 0$, u protivnom bi bila kontradikcija činjenici da je $m(\lambda)$ minimalni polinom od $\mathbf{A}$. Prema tome je $f(\lambda) = q(\lambda)m(\lambda)$, tj. $m(\lambda)$ deli $f(\lambda)$.

Posledica 6.3.3 Minimalni polinom od $\mathbf{A}$, $m(\lambda)$, deli karakteristični polinom $p(\lambda)$ od $\mathbf{A}$.

Teorema 6.3.4 Ako je λ karakteristični broj od $\mathbf{A}$, onda je on karakteristični broj njenog minimalnog polinoma $m(\lambda)$. Drugačije rečeno, oba polinoma imaju iste karakteristične brojeve.

Dokaz

Ako je $p(\lambda) = 0$, onda je λ karakterističan broj kome odgovara karakterističan vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, tako da je $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$. Neka je minimalni polinom

$$m(\lambda) = a_m \lambda^m + \cdots + a_0 = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\lambda \lambda^\alpha.$$

Onda je

$$\mathbf{0} = m(\mathbf{A})\mathbf{x} = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha \mathbf{A}^\alpha \mathbf{x} = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha \lambda^\alpha \mathbf{x} = m(\lambda)\mathbf{x}.$$

Kako je $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sledi da je $m(\lambda) = 0$.

Teorema 6.3.5 Karakteristični polinom od $\mathbf{A}$ deli $[m(\lambda)]^n$.

Dokaz

Potrebno je pokazati da je $[m(\lambda)]^n = p(\lambda)q(\lambda)$ za neki polinom $q(\lambda)$.

Neka je $m(\lambda)$ polinom stepena ν dat izrazom

$$m(\lambda) = \lambda^\nu + \beta_1\lambda^{\nu-1} + \cdots + \beta_\nu.$$

Definišimo sledeće matrice: $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_{\nu-1}$:

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{A} + \beta_1\mathbf{I}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}^2 + \beta_1\mathbf{A} + \beta_2\mathbf{I}, \ldots,$$
$$\mathbf{B}_{\nu-1} = \mathbf{A}^{\nu-1} + \beta_1\mathbf{A}^{\nu-2} + \cdots + \beta_{\nu-1}\mathbf{I}.$$

Onda je

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}\mathbf{B}_0 = \beta_1\mathbf{I}, \quad \mathbf{B}_2 - \mathbf{A}\mathbf{B}_1 = \beta_2\mathbf{I}, \ldots, \mathbf{B}_{\nu-1} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{\nu-2} = \beta_{\nu-1}\mathbf{I},$$

i

$$-\mathbf{A}\mathbf{B}_{\nu-1} = \beta_\nu\mathbf{I} - (\mathbf{A}^n + \beta_1\mathbf{A}^{\nu-1} + \cdots + \beta_\nu\mathbf{I}).$$

Neka je

$$\mathbf{B}(\lambda) = -\lambda^{\nu-1}\mathbf{B}_0 - \lambda^{\nu-2}\mathbf{B}_1 - \cdots - \mathbf{B}_{\nu-1}.$$

Onda je

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{B}(\lambda) = \lambda^\nu\mathbf{B}_0 + \lambda^{\nu-1}\mathbf{B}_1 + \cdots + \lambda\mathbf{B}_{\nu-1} - (\lambda^{\nu-1}\mathbf{A}\mathbf{B}_0 + \lambda^{\nu-2}\mathbf{A}\mathbf{B}_1 - \cdots + \mathbf{A}\mathbf{B}_{\nu-1}) =$$
$$= \lambda^\nu\mathbf{B}_0 + \lambda^{\nu-1}(\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}\mathbf{B}_0) + \lambda^{\nu-2}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}\mathbf{B}_1) + \cdots + \lambda(\mathbf{B}_{\nu-1} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{\nu-2}) - \mathbf{A}\mathbf{B}_{\nu-1} =$$
$$= \lambda^\nu\mathbf{I} + \beta_1\lambda^{\nu-1}\mathbf{I} + \cdots + \beta_{\nu-1}\lambda\mathbf{I} + \beta_\nu\mathbf{I} = m(\lambda)\mathbf{I}.$$

Izračunajmo determinante obe strane ovog izraza. Tada je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\cdot\det(\mathbf{B}(\lambda)) = [m(\lambda)]^n.$$

Kako je $\mathbf{B}(\lambda)$ polinom po λ, recimo $\mathbf{B}(\lambda) = q(\lambda)$, sledi da je

$$p(\lambda)\cdot q(\lambda) = [m(\lambda)]^n.$$

Teorema 6.3.6 Neka je

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2}\cdots(\lambda_p - \lambda)^{m_p},$$

gde je $m_1, m_2, \ldots, m_p$ algebarski multiplicitet različitih karakterističnih brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, redom, od $\mathbf{A}$. Onda je

$$m(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\nu_1}(\lambda_2 - \lambda)^{\nu_2}\cdots(\lambda_p - \lambda)^{\nu_p},$$

gde je $1 \le \nu_i \le m_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Dokaz

Sledi na osnovu gornje Posledice i prethodne teoreme.

6.3.1 Određivanja minimalnog polinoma

U opštem slučaju nalaženje minimalnog polinoma nije jednostavno. U principu, prvo se nalazi karakteristični polinom. Vrši se analiza nula polinoma, jer minimalni polinom sadaži nule karakterističnog pilinoma.

■ **Primer 6.5** Za matricu

$$\begin{pmatrix} 17 & -8 & -12 & 14 \\ 46 & -22 & -35 & 41 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

naći minimalni polinom. ■

Rešenje

Karakterističan polinom matrice $\mathbf{A}$ je

$$\begin{pmatrix} 17-\lambda & -8 & -12 & 14 \\ 46 & -22-\lambda & -35 & 41 \\ -2 & 1 & 4-\lambda & -4 \\ 4 & -2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)^3(\lambda+1).$$

Sledeće su mogućnosti za minimalni polinom:

$$\begin{aligned} m_1(\lambda) &= (\lambda-1)(\lambda+1), \\ m_2(\lambda) &= (\lambda-1)^2(\lambda+1), \\ m_3(\lambda) &= (\lambda-1)^3(\lambda+1) = p(\lambda). \end{aligned}$$

Potrebno je računati polinome $m_1(\mathbf{A})$ i $m_2(\mathbf{A})$, jer je sigurno da je $m_3(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ kao karakterističan polinom od $\mathbf{A}$. Posle duže računice pokaže se da je $m_2(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, pa je, prema tome, $m_2(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$ traženi minimalni polinom od $\mathbf{A}$.

Očigledno da je problem određivanja minimalnog polinoma znatno složeniji za matrice višeg reda.

7. Dijagonalizacija

7.1 Ekvivalentne matrice

Definicija 7.1.1 Matrica $\mathbf{N}$ tipa $m \times n$ je **ekvivalentna matrici M**, tipa $m \times n$, ako postoje matrica $\mathbf{Q}$, tipa $m \times m$ i matrica $\mathbf{P}$, tipa $n \times n$, tako da je

$$\mathbf{N} = \mathbf{QMP}.$$

Sa geometrijskog stanovišta ekvivalentene matrice možemo interpretirati kao matrice iste linearne transformacije linearnog prostor $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$. O tome će biti više reči u delu koji se odnosi na Tenzorski račun. Dalje ćemo se zadržati na kvadratnim matricama.

7.2 Slične matrice

Definicija 7.2.1 Matrica $\mathbf{B}$ reda n **slična je matrici A** istog reda, ako postiji nesingularna matrica $\mathbf{C}$ takva da je $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$, ili ekvivalentno tome, ako je $\mathbf{CB} = \mathbf{AC}$.

Na osnovu ove definicije lako je dokazati da važi sledeća

Teorema 7.2.1 Slične marice su u relaciji ekvivalencije:
(i) $\mathbf{A}$ je slično sa $\mathbf{A}$;
(ii) ako je $\mathbf{A}$ slično sa $\mathbf{B}$, onda je $\mathbf{B}$ slično sa $\mathbf{A}$;

(iii) ako je $\mathbf{A}$ slično sa $\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}$ slično sa $\mathbf{C}$, onda je $\mathbf{A}$ slično sa $\mathbf{C}$.

Dokazati.

Teorema 7.2.2 Slične matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ imaju iste karakteristične polinome.

Dokaz

Podsetimo se da za slične matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ postoji regularna matrica $\mathbf{P}$ tako da je

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}.$$

Onda je

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) &= \det\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \lambda\,\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\right) = \\
&= \det\left(\mathbf{P}^{-1}\,(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\,\mathbf{P}\right) = \det\{\mathbf{P}\}^{-1}\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\det\{\mathbf{P}\} = \\
&= (\det\{\mathbf{P}\})^{-1}\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\det\{\mathbf{P}\} = \\
&= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}).
\end{aligned}$$

Teorema 7.2.3 Ako je λ karakterističan broj od $\mathbf{A}$ kome odgovara karakterističan vektor $\mathbf{x}$, onda je $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ karakterističan vektor od $\mathbf{B}$ koji odgovara λ.

Dokaz

Ako je $\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$, onda je

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\,(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}).$$

Od značaja je sledeća

Teorema 7.2.4 Neka je matrica $\mathbf{A}$ ranga n i neka je $\mathbf{C}$ nesingularna matrica reda n. Onda je:

(1) $\operatorname{rang}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \operatorname{rang}\mathbf{A}$;

(2) $\det\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \det\mathbf{A}$;

(3) $\operatorname{tr}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \operatorname{tr}\mathbf{A}$;

(4) $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ i $\mathbf{A}$ imaju isti karakteristični polinom i spektar;

(5) karakteristični brojevi sličnih matrica imaju isti algebarski i geometrijski multiplicitet;

(6) ako je $\mathbf{x}$ karakteristični vektor od $\mathbf{A}$, koji odgovara karakterističnom broju λ, onda je $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}$ karakteristični vektor matrice $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ koji odgovara istom broju λ; slično tome ako je $\mathbf{y}$ karakteristični vektor od $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ koji odgovara karakterističnom broju λ, onda je $\mathbf{Cy}$ karakteristični vektor od $\mathbf{A}$ koji odgovara broju λ.

(7) Karakteristični brojevi (ne moraju biti različiti) od $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ isti su i za $\mathbf{A}$.

Dokaz

(1) rang$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}=$ rang$\mathbf{A}$ sledi iz Teoreme 5.6.7.

(2) Na osnovu Teoreme: determinanta proizvoda dve matrice jednak je proizvodu njihovih determinanti (videti deo Tenzorski račun) sledi da je

$$\det\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}\right)=\det\mathbf{C}^{-1}\det\mathbf{A}\det\mathbf{C}=(\det\mathbf{C})^{-1}\det\mathbf{C}\det\mathbf{A}=\det\mathbf{A}.$$

(3) Na osnovu (5.8) sledi

$$\operatorname{tr}\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}\right)=\operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1})=\operatorname{tr}\mathbf{A}.$$

(4) Na osnovu (2)(zamenom $\mathbf{A}$ sa $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$) sledi da je

$$\det\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}-\lambda\mathbf{I}\right)=\det\left(\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{C}\right)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}).$$

Prema tome, $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ i $\mathbf{A}$ imaju isti karakteristični polinom odakle sledi da imaju isti spektar.

(5) Karakteristični polinom $p(\lambda)$ je isti za matrice $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ i $\mathbf{A}$, pa su i rešenja (karakteristični brojevi) $p(\lambda)=0$ karakteristične jednačine ista. Znači $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ i $\mathbf{A}$ imaji isti algebarski multiplicitet. S duge strane geometrijski multiplicitet od λ, kada se posmatra kao karakterističan broj $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ i $\mathbf{A}$ je isti, jer je

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}-\lambda\mathbf{I}\right)=\operatorname{rang}\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right).$$

(6) Ako je $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, onda je

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}\quad\Rightarrow\quad\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}\right)\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\,\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x},$$

odakle sledi da je $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}$ karakterističan vektor od $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ za karakterističan broj λ.
Obrnuto, ako je $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{y}=\lambda\,\mathbf{y}$, onda je

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{y}=\lambda\,\mathbf{y}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{y}=\lambda\,\mathbf{C}\mathbf{y},$$

odakle sledi da je $\mathbf{C}\mathbf{y}$ karakteristični vektor od $\mathbf{A}$ koji odgovara broju λ.

(7) Sledi kao posledica da $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ i $\mathbf{A}$ imaju isti karakteristični polinom $p(\lambda)$. ❑

■ **Primer 7.1** Matrica

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

ima karakteristični polinom

$$p(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Očigedno je da su karakteristični brojevi:

$$\lambda_1=1,\quad\lambda_2=2,\quad\lambda_3=3,$$

i prema tome različiti. Njima odgovaraju sledeći karakteristični vektori:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

koji su linearano nezavisni.

Formirajmo matricu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

čije su kolone karakteristični vektori matrice $\mathbf{A}$.

Ona je regularna i ima inverznu matricu

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i rezultujuća dijagonalna matrica je

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

N Matricu $\mathbf{Q}$ možemo formirati od karakterističnih vektora matrice $\mathbf{A}$ raznim redosledom. Uvek se dobija dijagonalna matrica istih karakterističnih brojeva matrice $\mathbf{A}$, čiji redosled na dijagonali zavisi od redosleda vektor kolana matrice $\mathbf{Q}$.

Međutim, matrice jednakih karakterističnih polinoma ne moraju biti slične. Tako, na primer,

Matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

imaju isti karakteristični polinom

$$p(\lambda) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 = (1-\lambda)^2.$$

Pretpostavimo da su slične. Onda, po definiciji, postoji nesingularna matrica $\mathbf{C}$ takva da je $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$. U našem primeru sledi da je

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I}.$$

Kontradikcija. Znači da naša pretpostavka nije tačna i da, prema tome, ne postoji nesingularna matrica $\mathbf{C}$ za koju je $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$. Kratko rečeno, matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ nisu slične.

Lema 7.2.5 $\mathbf{A}^k$ i $\mathbf{D}^k$, za bilo koji prirodan broj k, imaju istu sličnu transformaciju kao $\mathbf{A}$ i $\mathbf{D}$.

Dokaz

Sledi iz

$$\mathbf{D}^k = \left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\right)^k = \underbrace{\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\right)\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\right)\cdots\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\right)}_{k} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{S}.$$

Posledica 7.2.6 Stepen od $\mathbf{D}$ lako se računa, jer je

$$\mathbf{D}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Onda se iz $\mathbf{D}^k$ lako izračunava

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{S}\mathbf{D}^k\mathbf{S}^{-1}.$$

To je jedna od glavnih prednosti koja se koristi pri sličnim transformacijama.

Teorema 7.2.7 Neka je matrica $\mathbf{A}$ reda n slična matrici $\mathbf{B}$ istog reda. Ako je

$$f(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \ldots, \beta_n\lambda^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i\lambda^i,$$

gde su $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \in F$ onda je

$$f\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}\right) = \mathbf{C}^{-1} f(\mathbf{A})\,\mathbf{C}.$$

Drugačije rečeno, ako je $\mathbf{B}$ slično sa $\mathbf{A}$, onda je $f(\mathbf{B})$ slično sa $f(\mathbf{A})$.

Dokazati!
Kao posledica ove teoreme sledi da je $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, akko je $f(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$.

■ **Primer 7.2** Neka je

$$f(\mathbf{A}) = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{A} + \cdots + \beta_{n-1} \mathbf{A}^{n-1},$$

gde su $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \in F$. Neka je $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D}$. Onda je $\mathbf{S}^{-1} f(\mathbf{A})\mathbf{S} = f(\mathbf{D})$.
Dokazati. ■

7.3 Ortogonalne matrice

Definicija 7.3.1 **Kvadratna matrica $\mathbf{Q}$** je **ortogonalna** ako je $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$.

Stav 1 Sledeći uslovi su ekvivalentni:

1. $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$,
2. $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$,
3. Vektori kolone matrice $\mathbf{Q}$ formiraju ortonormiranu bazu $\mathbb{R}^n$,
4. Vektori vrste matrice $\mathbf{Q}$ formiraju ortonormiranu bazu $\mathbb{R}^n$,
5. Linearna transformacija $\mathbf{Q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ očuvava normu bilo kog vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tj. $\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$,
6. Linearna transformacija $\mathbf{Q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ očuvava rastojanje između bilo koja dva vektora $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, tj.
$$\|\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{Q}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$
7. Linearna transformacija $\mathbf{Q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ očuvava skalarni proizvod između bilo koja dva vektora $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, tj.
$$(\mathbf{Q}\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Dokaz

2. Iz 1. $\Rightarrow$ 2. trivijalno.
3. Iz 2. $\Rightarrow$ 3.
Pišemo $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n)$, gde su $\mathbf{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$ linearno nezavisni vektori kolone. Onda je

$$\mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{pmatrix}.$$

Prema tački 2. je

$$\mathbf{I}=\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{q}_1^T\\ \mathbf{q}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{q}_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{q}_1, & \mathbf{q}_2, & \ldots, & \mathbf{q}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_n\\ \mathbf{q}_2^T\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2^T\mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_2^T\mathbf{q}_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{q}_n^T\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_n^T\mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n^T\mathbf{q}_n\end{pmatrix}$$

$$=\left(\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j\right)=(\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{q}_j)=(\delta_{ij}),$$

odakle sledi

$$\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{q}_j=\delta_{ij}.$$

4. Na isti način kao za tačku 3.
5. Iz 2. $\Rightarrow$ 5.
   Prema 2. $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T=\mathbf{I}$. Takođe je za bilo koji vektor $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{Qx}\|^2=(\mathbf{Qx})\cdot(\mathbf{Qx})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{Q}^T\mathbf{Qx}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\|\mathbf{x}\|^2.$$

   Prema tome je $\|\mathbf{Qx}\|=\|\mathbf{x}\|$, za svako $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$.
6. Iz 5. $\Rightarrow$ 6. Za bilo koja dva vektora $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, iz 5. sledi da je

$$\|\mathbf{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|^2=\|\mathbf{Qx}-\mathbf{Qy}\|^2=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2,$$

   ili

$$\|\mathbf{Qx}-\mathbf{Qy}\|=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

7. Iz 2. $\Rightarrow$ 7. Za bilo koja dva vektora $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ je

$$(\mathbf{Qx})\cdot(\mathbf{Qy})=(\mathbf{Qy})\cdot(\mathbf{Qx})=\mathbf{x}\cdot\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right)\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}.$$

Stav 2 Ako je $\mathbf{Q}$ ortogonalno onda je $\det(\mathbf{Q})=\pm1$.

Dokaz

Sledi neposredno iz tačke 2.

Definicija 7.3.2 Za matricu $\mathbf{Q}$ kaže se da je **svojstvena ortogonalna matrica** ako je $\det(\mathbf{Q})=1$, a **nesvojstvena** ako je $\det(\mathbf{Q})=-1$.

Stav 3 Modul karakterističnih brojeva ortogonalne matrice $\mathbf{Q}$ je 1.

Dokaz

Prema tački 2. $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$. Takođe je za bilo koji vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2.$$

S druge strane, za karakteristični vektor $\mathbf{x}$ karakterističnog broja λ biće

$$\mathbf{Q}\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|^2 = \|\lambda\,\mathbf{x}\|^2 = |\lambda|^2\,\|\mathbf{x}\|^2.$$

Iz ove dve jednakosti sledi da je

$$\|\mathbf{x}\|^2 = |\lambda|^2\,\|\mathbf{x}\|^2 \quad \Rightarrow \quad |\lambda|^2 = 1.$$

tj. modul bilo kog karaktrističnog broja ortogonalne matrice je 1. Prema tome, karakteristični brojevi ortogonalne matrice mogu biti samo: 1, -1, $e^{i\theta}$ i $e^{-i\theta}$.

Posledica 7.3.1 Karakteristični brojevi ortogonalne matrice $\mathbf{Q}$, koji nisu realni, po paru su konjugovano kompleksni, čiji je prozvod 1.

Dokaz

Sledi iz stava da je karakteristični polinom $p(\lambda)$ ortogonalne matrice $\mathbf{Q}$ realan polinom n-tog stepena

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{Q} - \lambda\,\mathbf{I}) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i) = \lambda^n - I_1\,\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n I_n,$$

pri čemu je

$$I_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le i_n} \lambda_{i_1}\,\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k} = \pm 1.$$

Navodimo neke opšte (jednostavne ali važne) stavove koji važe za ortogonalne matrice.

Stav 4 Inverzna matrica ortogonalne matrice je ortogonalna matrica.

Dokaz

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{Q}^{-1}\right)^T = \mathbf{Q} = \left(\mathbf{Q}^{-1}\right)^{-1}.$$

Stav 5 Za bilo koju ortogonalnu matricu $\mathbf{Q}$ je

$$\left(\mathbf{Q}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{Q}^T\right)^{-1},$$

drugačije rečeno, transponovana inverzna ortogonalna matrica jednaka je svojoj inverznoj transponovanoj matrici.

Dokaz

S jedne strane je

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} = \left(\mathbf{Q}^{-1}\right)^T.$$

S druge strane je

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} = \left(\mathbf{Q}^T\right)^{-1}.$$

Iz ove dve jednakosti sledi

$$\left(\mathbf{Q}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{Q}^T\right)^{-1}.$$

Iz stava 5 sledi sledeći

Stav 6 Transponovana matrica ortogonalne matrice je ortogonalna matrica.

Dokaz

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{Q}^T\right)^T = \left(\mathbf{Q}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{Q}^T\right)^{-1}.$$

Stav 7 Matrica proizvoda ortogonalnih matrica je takođe ortogonalna matrica.

Dokaz

Dovoljno je da posmatramao dve proizvoljne ortogonalane matrice $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$, tj. matrice za koje je

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1} \quad \text{i} \quad \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}.$$

Onda je

$$(\mathbf{RQ})^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{R}^T = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{R}^{-1} = (\mathbf{RQ})^{-1}.$$

U primeni je od posebnog interesa svojstvena ortogonalna matrica $\mathbf{Q}$ u $\mathbb{R}^n$. Iz identiteta

$$\mathbf{Q}^T\left(\mathbf{Q}-\mathbf{I}\right) = \left(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^T\right) = -\left(\mathbf{Q}-\mathbf{I}\right)^T,$$

sledi da je

$$\det(\mathbf{Q}-\mathbf{I})=0,$$

za neparno n.

Podsetimo se da svojstvena ortogonalna matrica $\mathbf{Q}$ u $\mathbb{R}^n$ ima karakteristični broj jednak 1. Obeležimo njemu odgovarajući karakteristični vektor sa $\mathbf{p}$. Onda je

$$\mathbf{Q}\mathbf{p}=\mathbf{p}=\mathbf{Q}^T\mathbf{p}. \tag{7.1}$$

Posledica 7.3.2 Svakoj svojstvenoj ortogonalnoj matrici u $\mathbb{R}^3$ odgovara osa rotacije definisana vektorom $\mathbf{p}$.

Stav 8 — Rodrigov[1]. Za bilo koju svojstvenu ortogonalnu matricu rotacije $\mathbf{Q}$ u $\mathbb{R}^3$ je

$$\mathbf{Q}=\mathbf{I}+\sin\varphi\,\mathbf{W}+(1-\cos\varphi)\,\mathbf{W}^2, \tag{7.2}$$

gde je $\mathbf{W}$ antisimetrična matrica, a φ ugao rotacije oko ose rotacije definisane karakterističnim vektorom $\mathbf{p}$.

Dokaz

Neka su $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ i $\mathbf{r}$ ortonormirani sistem vektora koji definiše bazu u $\mathbb{R}^3$. Onda je

$$\mathbf{Q}\mathbf{p}=\mathbf{p}$$

i

$$\mathbf{Q}\mathbf{q}=\alpha\,\mathbf{p}+\beta\,\mathbf{q}+\gamma\mathbf{r},\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Tada je

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{q}=\alpha=\mathbf{q}\cdot\mathbf{Q}^T\mathbf{p}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}=0,$$

pa je

$$\mathbf{Q}\mathbf{q}=\beta\,\mathbf{q}+\gamma\mathbf{r}\quad \text{i}\quad \beta^2+\gamma^2=1.$$

Pogodno je uvesti oznake

$$\beta=\sin\varphi\quad \text{i}\quad \gamma=\cos\varphi.$$

Onda je

$$\mathbf{Q}\mathbf{q}=\sin\varphi\,\mathbf{q}+\cos\varphi\,\mathbf{r}.$$

Očigledno je da φ predstavlja rotaciju vektora $\mathbf{q}$ oko ose rotacije definisane jediničnim vektorom $\mathbf{p}$ u ravni upravnoj na $\mathbf{p}$. Na sličan način se pokazuje da je

$$\mathbf{Q}\mathbf{r}=-\sin\varphi\,\mathbf{q}+\cos\varphi\,\mathbf{r}.$$

[1] Rodrigues

Formirajmo izraze:

$$\begin{aligned}\mathbf{Qp}\otimes\mathbf{p} &= \mathbf{p}\otimes\mathbf{p},\\ \mathbf{Qq}\otimes\mathbf{q} &= \cos\varphi\,\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}+\sin\varphi\,\mathbf{r}\otimes\mathbf{q},\\ \mathbf{Qr}\otimes\mathbf{r} &= -\sin\varphi\,\mathbf{q}\otimes\mathbf{r}+\cos\varphi\,\mathbf{r}\otimes\mathbf{r},\end{aligned}$$

i saberimo ih. Onda je

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}\left(\mathbf{p}\otimes\mathbf{p}+\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}+\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\right) = \mathbf{p}\otimes\mathbf{p}+\sin\varphi\,\left(\mathbf{r}\otimes\mathbf{q}-\mathbf{q}\otimes\mathbf{r}\right)+\\ +\cos\varphi\,\left(\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}+\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\right).\end{aligned} \tag{7.3}$$

Znamo da je

$$\mathbf{p}\otimes\mathbf{p}+\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}+\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}=\mathbf{I}.$$

Takođe je evidentno da je tenzor

$$\mathbf{W}\equiv\mathbf{r}\otimes\mathbf{q}-\mathbf{q}\otimes\mathbf{r},$$

antisimetričan i da je

$$\mathbf{W}^2=-\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}-\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}=-\mathbf{I}+\mathbf{p}\otimes\mathbf{p}.$$

Smenom ovih izraza u prethodnoj jednačini (7.3), posle jednostavnog grupisanja odgovarajućih članova dobijamo

$$\mathbf{Q}=\mathbf{I}+\sin\varphi\,\mathbf{W}+(1-\cos\varphi)\,\mathbf{W}^2.$$

Drugi oblik Rodrigove formule se dobija kada se pomnoži sa $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$. Onda je

$$\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{Qx}=\mathbf{x}+\sin\varphi\,\mathbf{Wx}+(1-\cos\varphi)\,\mathbf{W}^2\mathbf{x}.$$

Kako je

$$\begin{aligned}\mathbf{Wx} &= \mathbf{p}\times\mathbf{x}\quad \text{i}\\ \mathbf{W}^2\mathbf{x} &= \mathbf{W}\left(\mathbf{Wx}\right)=\mathbf{W}\left(\mathbf{p}\times\mathbf{x}\right)=\mathbf{p}\times\left(\mathbf{p}\times\mathbf{x}\right),\end{aligned}$$

onda smenom ovih izraza u prethodnoj jednačini dobijamao standarani oblik Rodrigove formule

$$\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}+\sin\varphi(\mathbf{p}\times\mathbf{x})+(1-\cos\varphi)\mathbf{p}\times\left(\mathbf{p}\times\mathbf{x}\right).$$

Od interesa su sledeće ortogonalne matrice.

Stav 9 Martica refleksije u odnosu na ravan definisanu vektorom $\mathbf{p}$ je

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - 2\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}.$$

Dokaz

U tom slučaju je

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\mathbf{p} &= -\mathbf{p}, \\ \mathbf{Q}\mathbf{q} &= \mathbf{q}, \\ \mathbf{Q}\mathbf{r} &= \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Analogno prethodnom slučaju, onda je

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} = \mathbf{I} - 2\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}.$$

Stav 10 Matrica rotacije u odnosu na centar simetrije je

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{I}.$$

Dokaz

U tom slučaju je $\mathbf{Q}\mathbf{x} = -\mathbf{x}$, za svako $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, odakle sledi da mora biti $\mathbf{Q} = -\mathbf{I}$.

7.3.1 Teorema o polarnoj dekompoziciji

Teorema 7.3.3 Svaka regularna matrica trećeg reda $\mathbf{A}$ može biti predstavljena jednoznačno u obliku

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{Q}, \tag{7.4}$$

gde je $\mathbf{Q}$ ortogonalna matrica, a $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ pozitivno definitne simetrične matrice.

Dokaz

Kako je $\mathbf{A}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} > 0$ za svako $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ i $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ sledi da je $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pozitivno definitna i simetrična matrica. Tada je i $\mathbf{U}$ definisana kao njen kvadratni koren, tj.

$$\mathbf{U} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{1/2} \tag{7.5}$$

takođe simetrična i pozitivno definitna matrica. Ako sa $\mathbf{Q}$ definišemo matricu

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}, \tag{7.6}$$

onda je

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T &= \mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1})^T = \mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}(\mathbf{U}^2)^{-1}\mathbf{A}^T = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = \mathbf{I},\end{aligned}$$

tj. tako definisano $\mathbf{Q}$ je ortogonalna matrica. Iz (7.5) i (7.6) se vidi da su $\mathbf{U}$ i $\mathbf{Q}$ u potpunosti određene preko polazne matrice $\mathbf{A}$.

Da je $\mathbf{QU}$ jednoznačna desna dekompozicija matrice $\mathbf{A}$ pokazujemo na sledeći način. Pretpostavimo da se $\mathbf{A}$ može takođe izraziti u obliku $\overline{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{U}}$, gde je $\overline{\mathbf{Q}}$ ortogonalna, a $\overline{\mathbf{U}}$ simetrična i pozitivno definitna. Tada je $\mathbf{QU} = \overline{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{U}}$. Transponovanjem ovog izraza dobijamo $\mathbf{U}\mathbf{Q}^T = \overline{\mathbf{U}}\overline{\mathbf{Q}}^T$ i

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}\mathbf{Q}^T\mathbf{U}\mathbf{Q} = \overline{\mathbf{U}}\overline{\mathbf{Q}}^T\overline{\mathbf{U}}\overline{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{U}}^2,$$

odakle sledi da je $\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$, jer $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ima samo jedan pozitivno definitan simetričan koren, i

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{U}}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{Q}.$$

Na sličan način se može pokazati da je leva dekompozicije

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{R},$$

jednoznačna, gde je

$$\mathbf{V} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{1/2},$$

simetrična i pozitivno definitna matrica, a

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A},$$

ortogonalna matrica.

Preostalo je da se dokaže da je $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$. S obzirom na ortogonalnost $\mathbf{R}$ i pozitivnu definitnost $\mathbf{V}$ biće

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{U} = (\mathbf{R}\mathbf{R}^T)\mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R}) = \mathbf{R}\{(\mathbf{V}^{1/2}\mathbf{R})^T\,(\mathbf{V}^{1/2}\mathbf{R})^T\}.$$

Prema tome $\mathbf{QU}$ i $\mathbf{R}(\mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R})$ su alternativne leve dekompozicije matrice $\mathbf{A}$. Ali, s obzirom na jednoznačnost te dekompozicije (koju smo dokazali), sledi da je $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$ i

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T\mathbf{V}\mathbf{Q}. \tag{7.7}$$

N Napomenimo da je $\det(\mathbf{Q}) = 1$, ili $\det(\mathbf{Q}) = -1$ u zavisnosti od toga da li je $\det(\mathbf{A})$ pozitivna ili negativna.

Iz (7.7) se lako može pokazati da su karakteristične vrednosti matrica $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ iste, dok su njihovi karakteristični vektori $\mathbf{u}_i$ i $\mathbf{v}_i$, redom, povezani relacijom

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{Q}\mathbf{u}_i.$$

Dekompozicija (7.4) se naziva **polarna** zbog analogije sa polarnom reprezentacijom kompleksnog broja

$$z = r\,e^{i\theta}.$$

Poteg r je pozitivan realan broj i predstavlja modul broja z. Analogno tome $\mathbf{V}$ (ili $\mathbf{U}$) je pozitivno definitna matrica (realnih karakterističnih vrednosti) i određuje normu matrice $\mathbf{A}$.

Veličina $e^{i\theta}$ je kompleksan broj na jediničnom krugu rotiran u odnosu na realnu osu za ugao θ, dok ortogonalna matrica $\mathbf{Q}$ određuje rotaciju u $\mathbb{E}_3$ oko neke ose.

7.4 Dijagonalizacija

Definicija 7.4.1 Kvadratna matrica se može **dijagonalizovati** ako je slična dijagonalnoj matrici.

Teorema 7.4.1 Matrica $\mathbf{A}$ reda n se može dijagonalizovati akko ima n linearno nezavisnih karakterističnih vektora.

Dokaz

Ako se $\mathbf{A}$ može dijagonalizovati onda postoji regularna matrica $\mathbf{P}$, tako da je matrica $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ dijagonalna. Neka je $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n)$ i $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Onda je

$$\mathbf{P}\mathbf{D} = (\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1\mathbf{p}_1\,\lambda_2\mathbf{p}_2 \cdots \lambda_n\mathbf{p}_n).$$

Kako je $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}$, jer je $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, onda je

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n) = (\mathbf{A}\mathbf{p}_1\,\mathbf{A}\mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{A}\mathbf{p}_n) = (\lambda_1\mathbf{p}_1\,\lambda_2\mathbf{p}_2 \cdots \lambda_n\mathbf{p}_n).$$

Prema tome je

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Kako je matrica $\mathbf{P}$, po pretpostavci regularna, onda su karakteristični vektori $\mathbf{p}_i$ od karakterističnih brojeva λ_i linearno nezavisni.

Obrnuto, neka matrica $\mathbf{A}$ ima n linearno nezavisnih karakterističnih vektora $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ koji odgovaraju karakterističnim brojevima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ redom (ne moraju da budu različiti). Onda je

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Neka je $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n)$. Onda je

$$\begin{aligned}\mathbf{AP} &= \mathbf{A}(\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n) = (\mathbf{A}\mathbf{p}_1\,\mathbf{A}\mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{A}\mathbf{p}_n) = (\lambda_1\mathbf{p}_1\,\lambda_2\mathbf{p}_2 \cdots \lambda_n\mathbf{p}_n) = \\ &= (\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{PD}.\end{aligned}$$

Drugačije rečeno, matricu $\mathbf{A}$ reda n je moguće dijagonalizovati nesingularnom matricom $\mathbf{P}$ reda n akko su kolone matrice $\mathbf{P}$ linearno nezavisni karakteristični vektori od $\mathbf{A}$.

Posledica 7.4.2 Matrica $\mathbf{A}$ reda n se može dijagonalizovati akko je zbir geometrijskih multipliciteta karakterističnih vektorai od $\mathbf{A}$ jedak n.

■ **Primer 7.3** Pokazati da se matrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

može dijagonalizovati. ■

Rešenje

Karakteristična jednačina

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3.$$

Karakteristični vektori

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = 3$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1. \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

N Ako je

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{onda je} \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Iz ovog primera se vidi da je dijagonalizacija određena do na redosled karakterističnih vektora.

■ **Primer 7.4** Matrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se ne može dijagonalizovati.

Karakteristična jednačina

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1.$$

Postoji samo jedan karakteristični vektor, npr. $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ■

Sledeći primeri znatno doprinose ilustraciji problema dijagonalizacije matrice **A**.

■ **Primer 7.5** Karakteristični polinom matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

je

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3).$$

Njegove karakteristične vrednosti su $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -3$. Za nalaženje karakterističnih vektora $\mathbf{x}_1 = (\xi_1, \xi_2)$ za λ_1 potrebno je da rešimo jenačinu $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\,\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, ili

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Ona se svodi na dve linearne jedačine $-4\xi_1 + 4\xi_2 = 0$ i $\xi_1 - \xi_2 = 0$, čije je rešenje $\xi_1 = \xi_2$. Prema tome, svaki $\mathbf{x}_1 = (\xi, \xi)$, $\xi - \neq 0$, je karakterističan vektor od $\mathbf{A}$.

Pogodno je, nije obavezno, izabrati $\xi = 1$ kada je $(1,1)$.

Na sličan način se može odrediti karakteristični vektor $\mathbf{x}_2$ za $\lambda_2 = -3$, koji glasi $\mathbf{x}_2 = (4, -1)$.

Formirajmo matricu

$$\mathbf{S} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i njoj invreznu matricu

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & -0,2 \end{pmatrix}.$$

Onda je dijagonalna matrica data sa

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

■

Opštije, ako je algebarski multiplicitet karakterističnog broja kvadratne matrice $\mathbf{A}$ jednak njegovom geometrijskom multiplicitetu, onda se matrica $\mathbf{A}$ može dijagonalizovati. U tom clju navodimo sledeći primer.

■ **Primer 7.6** Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Istim postupkom kao u prethodnom primeru dobijamo da je karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}$ dat sa

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Onda su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$ karakteristični brojevi od $\mathbf{A}$. Algebarski multiplicitet λ_1 je dva. Njemu odgovarajući karakteristični vektori su $(1,2,3)$ i $(1,0,0)$. Karakteristični vektor od $\lambda_2 = 2$ je $(1,1,1)$.

Formirajmo

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i odredimo

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

■

U ovom primeru se vidi da je geometrijski multiciplitet od $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$ jednak algebarskom multiplicitetu od λ_1.

U tom slučaju mogli smo dijagonalizovati matricu **A**. Međutim, kada je algebarski multiplicitet jednog ili više karakaterističnih brojeva veći od jedan, onda nije uvek moguće matricu predstaviti u dijagonalnom obliku. Drugačije rečeno, ako kvadratna matrica ima ponovljne karakteristične brojeve, onda je nije uvek moguće dijagonalizovati.

Sledeći primer pokazuje da su algebarski i geometrijski multiplicite karakterističnog broja različiti. U tom slučaju ne možemo dijagonalizovati matricu.

■ **Primer 7.7** Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Njena karakteristična jednačina je

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0,$$

čiji su karakteristični brojevi $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$. Algebarski multiplicitet od λ_2 je dva. Karakteristični vektor koji odgovara λ_1 je $\mathbf{x}_1 = (1,1,1)$. Karakteristični vektor od λ_2 je $\mathbf{x}_1 = (\xi,0,0)$, $\xi \neq 0$ i $\dim\mathfrak{R}_{\lambda_2} = 1$. Prema tome, ne možemo da obrazujemo bazu prostora $\mathbb{R}^3$ od karakterističnih vektora matrice **A**. Znači **A** se ne može dijagonalizovati. ■

7.5 Ortogonalna dijagonalizacija

Definicija 7.5.1 Realna matrica **A** reda n je **ortogonalno dijagonalizovana** ako je $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^T$, gde je **P** ortogonalna matrica i **D** dijagonana matrica.

Teorema 7.5.1 Realna matrica **A** reda n je ortogonalno dijagonalizibilna akko je simetrična.

Dokaz

Ako je $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^T$, gde je $\mathbf{P}$ ortogonalna matrica i $\mathbf{D}$ dijagonalna matrica, onda je

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{PD}^T\mathbf{P}^T = \mathbf{PDP}^T = \mathbf{A}.$$

Obrnuto, neka je $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Onda postoji ortonormalan skup $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ karakterističnih vektora od $\mathbf{A}$, tj. $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$. Definišimo ortogonalnu matricu $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$ i dijagonalnu matricu $\mathbf{D} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Onda je

$$\mathbf{AP} = [\mathbf{Av}_1, \mathbf{Av}_2, \ldots, \mathbf{Av}_n] = [\lambda_1 \mathbf{v}_1, \lambda_2 \mathbf{v}_2, \ldots, \lambda_n \mathbf{v}_n] = \mathbf{PD}.$$

Posledica 7.5.2 Na mestu je da se istakne značaj i uloga jediničnog tenzora

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i,$$

gde su $\mathbf{n}_i$ ortonormirani vektori.

Jedan od najkraćih dokaza dekompozicije reanog simetričnog tenzora $\mathbf{A}$ se izvodi primeno jediničnog tenzora $\mathbf{I}$. Poznato je da uvek za takav tenzor važi

$$\mathbf{An}_i = \lambda_i \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gde su λ_i **karakteristični brojevi**, a $\mathbf{n}_i$ njima odgovarajući ortonormirani vektori.

Lema 2

Svaki realni simetrični tenzor $\mathbf{A}$ može da se predstavi u obliku

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i.$$

Dokaz

Onda je

$$\mathbf{A} = \mathbf{AI} = \mathbf{A} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{An}_i \otimes \mathbf{n}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i.$$

Sledi opšti primer.

■ **Primer 7.8** Neka je $\mathbf{T}$ bilo koji realan tenzor. Onda je

$$\mathbf{T} = \mathbf{TI} = \mathbf{T}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Tn}_i \otimes \mathbf{n}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{S}_i \otimes \mathbf{n}_i,$$

gde je $\mathbf{S}_i = \mathbf{Tn}_i$. Uočimo da ova dekompozicija nije jedinstvena, jer zavisi od izbora predstavljanja jediničnog tenzora $\mathbf{I}$, tj. ortonormiranog sistema vektora $\mathbf{n}_i$. ■

7.6 Postupak dijagonalizacije simetrične matrice

Simetrična matrica $\mathbf{A}$ reda n, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, ima bar jedan karakterističan broj, jer na osnovu Fundamentakne teoreme linearne algebre, karakteristična jednačina mora imati bar jedan koren.

Teorema 7.6.1 Karakteristični brojevi simetrične matrice su realni.

Dokaz

Prema uslovu teoreme je $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Onda iz karakteristične jednačine

$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v} \quad \text{sledi da je} \quad \mathbf{A}\bar{\mathbf{v}} = \overline{\lambda \mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}.$$

Onda je

$$\lambda \mathbf{v}\cdot \bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{Av})\cdot \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\cdot \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\cdot \mathbf{A}\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\mathbf{v}\cdot \bar{\mathbf{v}}.$$

Prema tome je $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.6.2 Karakteristični vektori realne simetrične matrice, koji odgovaraju različitim karakterističnim brojevim, su ortogonalni.

Dokaz

Neka je $\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$, $\mathbf{Au} = \mu \mathbf{u}$ i $\lambda - \mu \neq 0$, onda je

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{u}\cdot \mathbf{v} = \mathbf{Au}\cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot \mathbf{A}^T\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot \mathbf{Av} = \lambda \mathbf{u}\cdot \mathbf{v} \quad &\Rightarrow \\ \Rightarrow \quad (\lambda - \mu)\mathbf{u}\cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}\cdot \mathbf{v} = 0.& \end{aligned}$$

Teorema 7.6.3 Svaka realna simetrična matrica se može ortogonalno dijagonalizovati.

Dokaz

Neka je $\mathbf{A}$ realna simetrična matrica reda n i neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ različiti k karakteristični brojeva, čiji su algebarski multipliciteti m_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, redom.

Kako je λ_1 karakteristični broj od $\mathbf{A}$, onda postoji jedinični vektor $\mathbf{v}_1$ takav da je $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$. Obeležimo sa V_1 jednodimenzionalni potprostor prostora $\mathbb{R}^n$ koji odgovara vektoru $\mathbf{v}_1$, a sa V_{n-1} potprostor od $n-1$ dimenzija koji čine vektori u $\mathbb{R}^n$, a koji su ortogonalni na $\mathbf{v}_1$. Onda je $\mathbb{R}^n = V_1 \bigoplus V_{n-1}$.

Neka je $\mathbf{w} \in V_{n-1}$. Tada je $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} = 0$, pa je

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{v}_1 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Znači, i $\mathbf{A}\mathbf{w} \in V_{n-1}$. Prema tome $\mathbf{A}$ je linearni operator koji preslikava V_{n-1} u V_{n-1}.

Neka je $\mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ sistem baznih vektora od V_{n-1}. Onda je $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ baza od $\mathbb{R}^n$. U odnosu na tu bazu matrica $\mathbf{A}$ ima reprezentaciju

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \tag{7.8}$$

gde je $a_{11} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \lambda_1$ i $a_{12} = a_{21} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{A}\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = 0$.

Matrica $\mathbf{B} = (b_{\alpha\beta})$ je simetrična, jer je $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = \mathbf{w}_\alpha \cdot \mathbf{A}\mathbf{w}_\beta$, $\alpha, \beta = 2, 3, \ldots, n$. Onda je

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \det(\mathbf{B}).$$

Kako je λ_1 za tako definisanu matricu $\mathbf{A}$ ponovo karakteristični broj sledi da je on takođe i karakteristični broj simetrične matrice $\mathbf{B}$. Znači da postoji jedinični vektor $\mathbf{v}_2 \in V_{n-1}$ takav da je $\mathbf{B}\mathbf{v}_2 = \lambda_1 \mathbf{v}_2$. Obeležimo sa W_2 dvodimezionalni potprostor od $\mathbb{R}^n$ koji razapinju vektori $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$, a sa W_{n-2} potprostor dimenzije $n-2$ koji formiraju vektori u $\mathbb{R}^n$, a koji su upravni na potprostor W_2. Onda je $\mathbb{R}^n = W_2 \bigoplus W_{n-2}$. Neka je $\mathbf{z}_3, \mathbf{w}_4, \ldots, \mathbf{w}_n$ sistem baznih vektora od W_{n-2}. Onda je $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{w}_4, \ldots, \mathbf{w}_n$ baza od $\mathbb{R}^n$ u odnosu na koji je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}) = \lambda_1^2 \det\{\mathbf{C}\},$$

gde je simetrična matrica $\mathbf{C} = (c_{\lambda\mu})$, $c_{\lambda\mu} = \mathbf{z}_\lambda \cdot \mathbf{A}\mathbf{z}_\mu$. Nastavljajući ovaj postupak m_1 puta nalazimo m_1 linearno nezavisnih vektora koji odgovaraju karakterističnom broju λ_1 čiji je algebarski multiplicitet m_1. Prema tome, u slučaju

$$n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k,$$

ponavljajući ovaj postupak za svako m_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, dobijamo n linearno nezavisnih karakterističnih vektora koji formiraju bazu od $\mathbb{R}^n$ u odnosu na koju je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna, a čiji su elementi na glavnoj dijagonali njeni karakteristični brojevi. Time je ujedno pokazano da uvek postoji ortonormirani sistem vektora koji su karakteristični vektori simetrične realne matrice $\mathbf{A}$ koji čine bazu prostora $\mathbb{R}^n$.

Teorema 7.6.4 Simetrična matrica $\mathbf{A}$ reda n je pozitivno definitna akko su njeni karakteristični brojevi pozitivni.

Dokaz

Ako je $\mathbf{A}$ pozitivno definitno i λ njen karakterističan broj, onda je za bilo koji karakterističan vektor $\mathbf{x}$ koji odgovara λ

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \lambda\,\|\mathbf{x}\|^2,$$

pa je

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} > 0.$$

Obrnuto, pretpostavimo da su svi karakteristični brojevi od $\mathbf{A}$ pozitivni.

Neka je $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ skup ortonormiranih karakterističnih vektora od $\mathbf{A}$. Onda za bilo koji vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ možemo pisati

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbf{x}_i \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 > 0,$$

gde je $c_i = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada je

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\mathbf{x} &= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbf{x}_i\right)\cdot\mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbf{x}_i\right) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbf{x}_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbf{A}\mathbf{x}_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbf{x}_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\,\lambda_i\mathbf{x}_i\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_j c_i \lambda_i\,\mathbf{x}_j\cdot\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2 \geq (\max\,\lambda_i)\,\|\mathbf{x}\|^2 > 0.
\end{aligned}$$

Prema tome, matrica $\mathbf{A}$ je pozitivno definitna. (Pri ovom izvođenju imali smo u vidu da je $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ i $\mathbf{x}_j\cdot\mathbf{x}_i = \delta_{ji}$.)

7.6.1 Simultana dijagonalizacija

Definicija 7.6.1 Za dve kvadratne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ istog reda kaže se da su **simultano dijagonalizovane** ako postoji neka nesingularna matrica $\mathbf{R}$ koja ih dijagonalizuje.

Teorema 7.6.5 Simultano dijagonalizovane matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, su komutativne, tj. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Dokaz

Ako su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dijagonalizovane matricom $\mathbf{R}$ tada je, po definiciji,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1}\mathbf{AR} = \mathbf{D}_A \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{D}_A\mathbf{R}^{-1}, \\ \mathbf{R}^{-1}\mathbf{BR} = \mathbf{D}_B \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{D}_B\mathbf{R}^{-1}, \end{aligned}$$

pa je

$$\mathbf{AB} = \left(\mathbf{R}\mathbf{D}_A\mathbf{R}^{-1}\right)\left(\mathbf{R}\mathbf{D}_B\mathbf{R}^{-1}\right) = \mathbf{R}\mathbf{D}_A\mathbf{D}_B\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}\mathbf{D}_B\mathbf{D}_A\mathbf{R}^{-1},$$

jer je $\mathbf{D}_A\mathbf{D}_B = \mathbf{D}_B\mathbf{D}_A$. Onda je

$$\mathbf{AB} = \mathbf{R}\mathbf{D}_B\mathbf{I}\mathbf{D}_A\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{R}\mathbf{D}_B\mathbf{R}^{-1}\right)\left(\mathbf{R}\mathbf{D}_A\mathbf{R}^{-1}\right) = \mathbf{BA}.$$

Uočimo da obrnuto, u opštem slučaju, ne važi.

Kontra primer. Identična matrica $\mathbf{I}$ je komutativna sa svakom matricom istog reda. Tako je

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA},$$

gde je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Međutim, videli smo da se matrica $\mathbf{A}$ ne može dijagonalizovati, pa prema tome $\mathbf{A}$ i $\mathbf{I}$ se ne mogu simultano dijagonalizovati.

Slučaj kada su dve matrice komutativne zaslužuje posebnu pažnju.

Neka je $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ i $\mathbf{Ax} = \lambda\,\mathbf{x}$. Onda je

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{Bx}) = \mathbf{BAx} = \lambda\,\mathbf{Bx}.$$

Znači, ako je $\mathbf{x}$ karakterističan vektor matrice $\mathbf{A}$ koji odgovara karakterističnom broju λ, onda je i $\mathbf{Bx}$ njegov karakteristični vektor od $\mathbf{A}$. Kako su karakteristični vektori određeni do na skalarni proizvod onda je

$$\mathbf{Bx} = \mu\mathbf{x}.$$

Prema tome, matricama **A** i **B** odgovaraju isti karakteristični vektori.

Ako su karakteristični brojevi od **A** različiti, onda njima odgovaraju linearno nezavisni karakteristični vektori koji rastežu prostor $\mathbb{R}^n$. U tom slučaju matrica **R**, čiji su vektori kolone karakteristični vektori matrice **A**, određuje matricu koja simultano dijagonalizuje matrice **A** i **B**. (Vidi Teoremu 7.6.5, na str. 181).

U slučaju kada svi karakteristični brojevi matrice **A** nisu različiti postupak se svodi na nalaženja linearno nezavisnih karakterističnih vektora koji definišu zajedničku bazu koja rasteže $\mathbb{R}^n$. Primera radi, jedinična matrica **I** reda n ima samo karakteristični broj $\lambda = 1$ čiji je algebarski multiplicitet jedan n.

Svaki vektor u $\mathbb{R}^n$ je karakteristični vektor od **I**. Prema tome, svaki sistem od n linearno nezavisnih vektora definiše bazu karakterističnih vektora od **I** u $\mathbb{R}^n$. S duge strane matrica **I** je komutativana sa svakom matricom **A** reda n. Moguće je da i matrica **A** ima karakteristične vektora koji nisu svi različiti. Onda se, od svih mogućih baza linearno nezavisnih karakterističnih vektora matrice **A**, traži ona baza koja je zajednička za **I** i **A**.

Primer koji navodimo daje nam ilustraciju postupka nalaženja takve zajedničke baze u odnosu na koju se takve komutativne matrice simultano dijagonalizuju.

Matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

su komutativne. Njihovi karakteristični polinomi su:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2), \quad p_{\mathbf{B}}(\mu) = (\mu - 4)^2(\mu - 3).$$

U oba slučaja geometrijski multipliciteti odgovaraju algebarskim multiplicitetima.

Matrici **A** odgovaraju sledeći karakteristični prostori određeni karakterističnim vektorima

$$E_1(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_2(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E_4(\mathbf{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_3(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Naš zadatak je da nađemo bazu zajedničkih karakterističnih vektora; drugačije rečeno da nađemo vektore koji su u karakterističnim prostorima matrica **A** i **B**.

Evidentno je da su to vektori

$$\mathbf{B}s_1 = 4\mathbf{s}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}\mathbf{s}_2 = 4\mathbf{s}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}\mathbf{s}_3 = 3\mathbf{s}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Onda je matrica

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1\, \mathbf{s}_2\, \mathbf{s}_3] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{S}) = 1,$$

ona koja komutativne matrice **A** i **B** simultano dijagonalizuje. Konkretno,

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ovi vektori su linearno nezavisni i čine bazu $\mathbb{R}^3$ karakterističnih vektora matrica **A** i **B** u odnosu na koju se matrice **A** i **B** simultano dijagonalizuju.

■ **Primer 7.9** Matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

su komutativne i matrica

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

ih simultano dijagonalizuje.

Zaista,

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Odavde se vidi da su $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$ i $\mu_3 = 4$ karakteristični brojevi matrice $\mathbf{B}$. ■

Poseban slučaj je simultana dijagonalizacija simetričnih matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ i $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$.

Za njih važi sledeća

Teorema 7.6.6 Neka su realne komutativne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ ranga n simetrične. Onda se one mogu ortogonalno simultano dijagonalizovati.

Dokaz

Zasniva se na sledećim dokazanim stavovima:

1. Poznato je da se svaka od njih može ortogonalno dijagonalizovati, pri čemu ortogonalne matrice koje ih dijagonalizuju, čine njihovi ortonormirani karakteristični vektori. Ovi vektori čine baze prostora $\mathbb{R}^n$.
2. Njihovi odgovarajući karakteristični vektori definišu iste invarijantne prostore. Znači, uvek je moguće odrediti zajednički ortonormirani sistem vektora koji ih dijagonalizuje.
3. Konačno, iz uslova $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ sledi $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{AB})^T$, tj. matrica njihovog proizvoda je simetrična, što nam obezbeđuje njenu ortogonalnu dijagonalizaciju.

■ **Primer 7.10** U slučaju kada je $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ onda je $\mathbf{AA}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Takva matrica (normalna matrica) $\mathbf{A}$ se uvek može svesti na dijagonalan oblik - dijgonalizovati. ■

7.6.2 Specijalan slučaj

Od interesa je simultana dijagonalizacija koju iskazuje sledeća

Teorema 7.6.7 Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ realane simetrične matice istog reda i neka je $\mathbf{A}$ pozitivno definitna. Onda postoji nesingularna matrica $\mathbf{C}$, tako da je

$$\mathbf{C}^T\mathbf{AC} = \mathbf{I} \tag{7.9}$$

i

$$\mathbf{C}^T\mathbf{BC} = \mathbf{D}, \quad \text{gde je } \mathbf{D} \text{ dijagonalna matrica.} \tag{7.10}$$

Dokaz

Poznato je da se svaka realna simetrična matrica može ortogonalno dijagonalizovati. Prema tome je

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^T\mathbf{D_A}\mathbf{Q}, \tag{7.11}$$

gde su $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{D_A}$ ortogonalna i dijagonalna matrica, redom. Kako je $\mathbf{A}$ pozitivno definitno onda su njene karakteristične vrednosti λ_i, koje su elemeti dijagonalne matrice $\mathbf{D_A}$, pozitivne, tj.

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

(koje ne moraju biti međusobno različite). Onda postoje $\sqrt{\lambda_i}$ koji su elementi simetrične matrice, recimo $\mathbf{D}_1$, tako da je

$$\mathbf{D_A} = \mathbf{D}_1\mathbf{D}_1^T. \tag{7.12}$$

Iz (7.11) i (7.12) sledi da je $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1^T\mathbf{Q}^T$. Uvedimo oznaku $\mathbf{G} = \mathbf{Q}\mathbf{D}_1$. Onda je $\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$.

Kako je matrica $\mathbf{G}$ regularna sledi da je

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{G}^{-T} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{G}^{-T} = (\mathbf{G}^{-1})^T. \tag{7.13}$$

S duge strane, matrica

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G}^{-T}$$

je simetrična. Prema tome postoji ortogonalna matrica $\mathbf{R}$ takva da je

$$\mathbf{R}^T\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G}^{-T}\mathbf{R} = \mathbf{D}.$$

Neka je $\mathbf{C}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{G}^{-1}$. Onda je

$$\mathbf{C}^T\mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{D}. \tag{7.14}$$

Dalje, kako je $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$, (7.13) možemo pisati u obliku

$$\mathbf{R}^T\mathbf{G}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{G}^{-T}\mathbf{R} = \mathbf{R}^T\mathbf{I}\mathbf{R} = \mathbf{I}.$$

Imjući u vidu da je $\mathbf{C}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{G}^{-1}$ ova jednačina konačno postaje

$$\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{I}. \tag{7.15}$$

7.7 Ortogonalna triangularizacija

Kada se matrica $\mathbf{A}$ ne može dijagonalizovati tada tražimo njenu reprezentaciju koja je najpribližnija njenom dijagonalnom obliku.

Neka je $\mathbf{A}$ matrica reda n. Ako $\mathbf{A}$ nije simetrična, onda ne postoji ortogonalna matrica koja dijagonalizuje matricu $\mathbf{A}$. Međutim, može postojati ortogonalna matrica koja triangularizuje matricu $\mathbf{A}$.

Teorema 7.7.1 Neka je $\mathbf{A}$ matrica reda n čiji različiti karakteristični brojevi imaju algebarski multiplicitet zbira jednak n. Obeležimo sa $d_1, d_2, \ldots, d_n$ njene karakteristične brojeve (koji ne moraju biti različiti). Onda postoji ortogonalna matrica $\mathbf{Q}$ reda n tako da je

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{T},$$

gde je $\mathbf{T}$ gornja trougaona matrica reda n, čiji su dijagonalni elemeti $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Dokaz

Dokaz se izvodi matematičkom indukcijom. Jasno je da ovo važi za matricu reda 1. Pretpostavimo da ovo važi za svaku matricu reda $n-1$, gde je $n \geq 2$, čiji različiti karakteristični brojevi imaju algebarski multiplicitet zbira jednak $n-1$. Onda je dovoljno pokazati da se matrica $\mathbf{A}$ reda n, čiji različiti karakteristični brojevi imaju algebarski multiplicitet zbira jednak n, može ortogonalno trijagonalizovati.

Neka je d_1 karakterističan broj od $\mathbf{A}$ kome odgovara jedinični karakteristični vektor $\mathbf{u}$. U prostoru $\mathbb{R}^n$ uvek je moguće odrediti ortonormiranu matricu $(\mathbf{u}, \mathbf{V})$ reda n. Onda je

$$(\mathbf{u}, \mathbf{V})^T\ \mathbf{A}\ (\mathbf{u}, \mathbf{V}) = \text{diag}\begin{pmatrix} d_1 & \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{V} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V} \end{pmatrix}.$$

Na osnovu Fundamentalne teoreme algebre algebarski multiplicitet karakterističnih brojeva od $\mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V}$ (koji ne moraju biti različiti) ima zbir $n-1$.

Na osnovu iste Teoreme karakteristični brojevi od $\mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V}$ su $d_2, \ldots, d_n$. Preme našoj pretpostavci, onda postoji otogonalna matrica $\mathbf{R}$ tako da je $\mathbf{R}^T\mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{T}_*$, gde je $\mathbf{T}_*$ matrica reda $n-1$ gornja trouglasta matrica (vidi Poglavlje 7.7, str. 185) čiji su dijagonalni elementi $d_2, \ldots, d_n$.

Definišimo $\mathbf{S} = \text{diag}(1, \mathbf{R})$ i $\mathbf{Q} = (\mathbf{u}, \mathbf{V})\mathbf{S}$. Tada je

$$\mathbf{S}^T\mathbf{S} = \text{diag}(1, \mathbf{R}^T\mathbf{R}) = \text{diag}(1, \mathbf{I}_{n-1}) = \mathbf{I}_n.$$

Onda je i $\mathbf{Q} = (\mathbf{u}, \mathbf{V})\mathbf{S}$, kao proizvod dve ortogonalne matrice, ortogonalna matrica. Prema tome je

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{S}^T(\mathbf{u}, \mathbf{V})^T\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{V})\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & \mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{V} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d_1 & \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^T\mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_* \end{pmatrix}.$$

Odavde se vidi da je matrica, reda n, gornja trougaona matrica čiji su elementi na glavnoj dijagonali $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

N Ova Teorema se može primeniti na bilo koju simetričnu matricu. U tom slučaju matrica $\mathbf{T}_*$ je dijagonalna.

8. Projektor

Posebnu klasu linearnih transformacija čine **projektori**. Takve transformacije su tesno povezane sa direktnim zbirom transformacija.

Definicija 8.0.1 Neka je $V = U \oplus W$ i neka je $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ jedinstvena reprezentacija $\mathbf{v} \in V$, gde je $\mathbf{u} \in U$ i $\mathbf{w} \in W$.

Operator $\mathbf{P}$, koji preslikava vektor $\mathbf{v}$ u vektor $\mathbf{u}$ naziva se **projektor** na U duž W ako je

$$\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{u}.$$

Važno je uočiti da projektor $\mathbf{P}$ zavisi i od U i W.

Na primer, na slici 8.1 prikazan je vektor $\mathbf{v}$ u dvodimenzionalnom euklidskom prostoru ($V = \mathbb{E}^2$). Njegova projekcija na U, potprostor koji definiše x-osa, zavisi od toga da li je drugi potprostor W definisan osom y ili $\bar{y}$.

Teorema 8.0.1

i) Projektor $\mathbf{P}$ je linearni operator.

ii) $\mathfrak{R}(\mathbf{P}) = U$,

iii) $\mathfrak{N}(\mathbf{P}) = W$.

Dokaz

i) Neka je

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{u} \in U,\ \mathbf{w} \in W,$$

i

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1, \quad \mathbf{u}_1 \in U,\ \mathbf{w}_1 \in W.$$

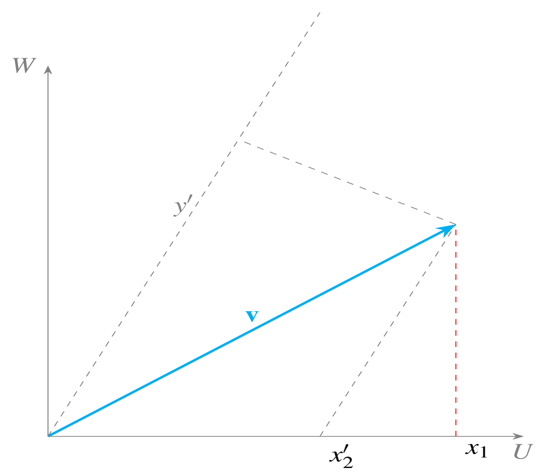
Onda je

$$\mathbf{P}(\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{v}_1)=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}_1=\alpha\,\mathbf{P}\mathbf{u}+\beta\,\mathbf{P}\mathbf{u}_1=\alpha\,\mathbf{P}\mathbf{v}+\beta\,\mathbf{P}\mathbf{v}_1$$

za svako $\alpha,\beta\in F$. Prema tome $\mathbf{P}$ je linearni operator.

ii) Na osnovu definicije sledi da je $\mathfrak{R}(\mathbf{P})\subset U$. Potrebno je pokazati da je $U\subset\mathfrak{R}(\mathbf{P})$. Neka je $\mathbf{u}\in U$. Onda je $\mathbf{P}\mathbf{u}=\mathbf{u}$, pa je $\mathbf{u}\in\mathfrak{R}(\mathbf{P})$. Znači da je $U\subset\mathfrak{R}(\mathbf{P})$. Prema tome je $\mathfrak{R}(\mathbf{P})=U$.

iii) Neka je $\mathbf{w}\in W$. Onda je $\mathbf{P}\mathbf{w}=\mathbf{0}$, pa je $W\subset\mathfrak{N}(\mathbf{P})$. S druge strane, ako je $\mathbf{v}\in\mathfrak{N}(\mathbf{P})$ onda je $\mathbf{P}\mathbf{v}=\mathbf{0}$. Kako je $\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$, gde je $\mathbf{u}\in U$ i $\mathbf{w}\in W$, sledi da je $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ i $\mathbf{v}\in W$. Prema tome, $W\subset\mathfrak{N}(\mathbf{P})$. Znači $\mathfrak{N}(\mathbf{P})=W$.



Slika 8.1: Projekcija vektora $\mathbf{u}$ na x duž W i y'.

Teorema 8.0.2 Linearni operator $\mathbf{P}$ je projekcija akko je idempotentan, tj. $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$.

Dokaz

Neka je $\mathbf{P}$ projektor na U duž W. Neka je $\mathbf{v}$ proizvoljan vektor u V. Onda je

$$\mathbf{P}\mathbf{v}=\mathbf{u}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{P}^2\mathbf{v}=\mathbf{P}\mathbf{u}=\mathbf{u}=\mathbf{P}\mathbf{v}$$

za svako $\mathbf{v}\in V$. Prema tome $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}$ je idempotentan operator.

Obrnuto, neka je $\mathbf{P}$ idempotentan. Neka je U skup svih vektora $\mathbf{u}$ za koje je

$$\mathbf{P}\mathbf{u}=\mathbf{u}$$

i W skup svih vektora $\mathbf{w}$ za koje je

$$\mathbf{Pw} = \mathbf{0}.$$

Očigledno je da su U i W potprostori. Potrebno je pokazati da oni čine ceo prostor V.

Pretpostavimo da postoji vektor $\mathbf{z} \in U \cap W$. Onda je $\mathbf{Pz} = \mathbf{z}$, jer pripada U, i $\mathbf{Pz} = \mathbf{0}$, pripada W. Prema tome, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ i $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Znači U i W su disjunktni.

Dalje. Neka je $\mathbf{x} \in V$ proizvoljan vektor. Onda je

$$\mathbf{x} = \mathbf{Px} + (\mathbf{I} - \mathbf{P})\,\mathbf{x}.$$

Uvedimo oznake $\mathbf{x}_1 = \mathbf{Px}$ i $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{x}$. Onda je $\mathbf{x}_1 \in U$, jer je

$$\mathbf{Px}_1 = \mathbf{P}^2\mathbf{x} = \mathbf{Px} = \mathbf{x}_1.$$

Takođe je $\mathbf{x}_2 \in W$, jer je

$$\mathbf{Px}_2 = (\mathbf{P} - \mathbf{P}^2)\mathbf{x} = \mathbf{Px} - \mathbf{Px} = \mathbf{0}.$$

Znači proizvoljan vektor $\mathbf{x} \in V$ može da se predstavi u obliku

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1 \in U,\ \mathbf{x}_2 \in W,$$

tj.

$$\mathbf{x} \in U + W.$$

Prema tome $V = U \oplus W$.

Ekvivalentna teoremi 8.0.1 je teorema

Teorema 8.0.3 Linearna transformacija $\mathbf{P}$ je projetor akko je $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ projektor.

To znači da ako je $\mathbf{P}$ projekcija na U duž W, onda je $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ projekcija na W duž U. Takođe važi

$$\mathfrak{R}(\mathbf{P}) = \mathfrak{N}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \quad \text{i obrnuto} \quad \mathfrak{R}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathfrak{N}(\mathbf{P}).$$

Lema 8.0.4 Reprezentacija $\mathbf{x} \in U \oplus W = V$ je jedinstvena.

Dokaz

Neka je

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1 \in U, \quad \mathbf{x}_2 \in W, \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in U, \quad \mathbf{y}_1 \in U, \quad \mathbf{y}_2 \in W.$$

Onda je

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0},$$

jer je $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 \in U$, $\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2 \in W$ i $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Prema tome je $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1$ i $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2$, čime je lema dokazana.

8.0.1 Posledica reprezentacije projektora $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$

Očigledno je da važi $\mathbf{P}(\mathbf{P}-\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ za bilo koji projektor i da je njegov minimalni polinom $\lambda(\lambda - 1) = 0$. Prema tome, karakteristične vrednosti projektora $\mathbf{P}$ su 1 i 0.

Sažeto rečeno. Ako je $V = U \oplus W$ i ako je $\mathbf{P}$ projetor na U duž W, onda on ima karakteristične vredosti 1 i 0. Potprostor U je određen karakterističnim vektorima čiji je karaktečni broj 1, a potprostor W karakterističnim vektorima čiji je karakteristični broj 0.

Važno je uočiti da dekompozicija $V = \mathfrak{R}(\mathbf{P}) \oplus \mathfrak{N}(\mathbf{P})$ prostora V ne važi za proizvoljni linearni opreator $\mathbf{T} \in L(V,V)$, jer u opštem slučaju $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$ i $\mathfrak{N}(\mathbf{T})$ ne moraju biti disjunktni. Na primer, ako postoji neki vektor $\mathbf{v} \in V$ takav da je $\mathbf{T}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ i takav da je $\mathbf{T}^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$ onda je $\mathbf{T}\mathbf{v} \in \mathfrak{R}(\mathbf{T})$ i $\mathbf{T}\mathbf{v} \in \mathfrak{N}(\mathbf{T})$, pa za takvo $\mathbf{T}$ očigledno $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$ i $\mathfrak{N}(\mathbf{T})$ nisu disjunkni.

■ **Primer 8.1**

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}^2\mathbf{v} = \mathbf{T}(\mathbf{T}\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

■

8.1 Neke operacije sa projektorima

Prethono razmatranje daje nam za pravo korišćenje sledeće notacije:
$\mathbf{P}_1$ je projektor na $\mathfrak{R}(\mathbf{P}_1) \doteq \mathfrak{R}_1$ duž $\mathfrak{N}(\mathbf{P}_1) \doteq \mathfrak{N}_1$, a $\mathbf{P}_2$ projektor na $\mathfrak{R}_2$ duž $\mathfrak{N}_2$.

Teorema 8.1.1 Zbir $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ je projektor akko je

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{0}. \tag{8.1}$$

U tom slučaju je $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ projektor na $\mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2$ duž $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$.

Dokaz

Ako je $\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2$ projektor, onda je $(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2)^2=\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2$. Tada je

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2=(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2)^2&=\mathbf{P}_1^2+\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2^2=\\&=\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2,\end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{0}.$$

Množenjem ovog izraza, prvo sa $\mathbf{P}_1$ sa leve strane, a zatim sa $\mathbf{P}_1$ sa desne strane, dobijamo

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{0},$$

i

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{0}.$$

Oduzimenjem ovih jednačina dobijamo

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{0}.$$

Kombinacijom ove jednačine sa $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{0}$ sledi da je

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{0}.$$

Obrnuto, neka važi (8.1). Onda iz

$$(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2)^2=\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2,$$

sledi da je

$$(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2)^2=\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2.$$

Prema tome, $\mathbf{P}\doteq\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2$ je projektor.

Potrebno je dalje odrediti $\mathfrak{R}(\mathbf{P})\doteq\mathfrak{R}$ i $\mathfrak{N}(\mathbf{P})\doteq\mathfrak{N}$ projektora $\mathbf{P}\doteq\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2$.

Neka je

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}_1+\mathbf{w}_1\in V=\mathfrak{R}\oplus\mathfrak{N},\quad \mathbf{u}_1\in\mathfrak{R}_1,\quad \mathbf{w}_1\in\mathfrak{N}_1$$

i

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}_2+\mathbf{w}_2\in V=\mathfrak{R}_2\oplus\mathfrak{N}_2,\quad \mathbf{u}_2\in\mathfrak{R}_2,\quad \mathbf{w}_2\in\mathfrak{N}_2.$$

Ako je $\mathbf{v}\in\mathfrak{R}$ tako da je $\mathbf{P}\mathbf{v}=\mathbf{v}$, onda je

$$\mathbf{v}=\mathbf{P}\mathbf{v}=(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2)\mathbf{v}=\mathbf{P}_1\mathbf{v}+\mathbf{P}_2\mathbf{v}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2.$$

Znači $\mathbf{v}\in\mathfrak{R}$ se predstavlja kao zbir vekrora iz $\mathfrak{R}_1$ i $\mathfrak{R}_2$.

Obrnuto, neka je $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ zbir bilo koja dva vektora, gde je $\mathbf{u}_1 \in \mathfrak{R}_1$ i $\mathbf{u}_2 \in \mathfrak{R}_2$. Onda je

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{P}_1\mathbf{v} + \mathbf{P}_2\mathbf{v} = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)\,\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{v},$$

tj.

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in \mathfrak{R}.$$

Prema tome

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$$

Konačno, ako je $\mathbf{v} \in \mathfrak{R}_1$ i $\mathbf{v} \in \mathfrak{R}_2$, tako da je

$$\mathbf{P}_1\mathbf{v} = \mathbf{P}_2\mathbf{v} = \mathbf{v},$$

onda je

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}_1\mathbf{v} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

na osnovu prvog dela teoreme. Prema tome $\mathfrak{R}_1$ i $\mathfrak{R}_2$ su disjunktni i

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2.$$

Ostaje nam da pokažemo da je $\mathfrak{N}(\mathbf{P}) \doteq \mathfrak{N}$, skup vektora za koje je $\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ u $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$. Ako je tako, onda je $\mathbf{P}\mathbf{v} = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ili $\mathbf{P}_1\mathbf{v} + \mathbf{P}_2\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Množenjem sa $\mathbf{P}_1$ i $\mathbf{P}_2$ dobijamo

$$\mathbf{P}_1^2\mathbf{v} + \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{v} = \mathbf{P}_1\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

i

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{v} + \mathbf{P}_2^2\mathbf{v} = \mathbf{P}_2\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

imajući u vidu da je $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{0}$. Znači $\mathbf{v}$ i u $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$, pa je, prema tome u $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$.

Teorema 8.1.2 Razlika $\mathbf{P} \doteq \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ je projektor akko je

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2.$$

Tada je

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \quad \text{i} \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{R}_2,$$

gde je $\mathfrak{R} \doteq \mathfrak{R}(\mathbf{P})$ i $\mathfrak{N} \doteq \mathfrak{N}(\mathbf{P})$.

Dokaz

$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ je projektor, prema Teoremi 8.0.3, akko je

$$\mathbf{I} - (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$$

projektor. Ovaj izraz možemo da napišemo u obliku zbira dva projektora

$$\mathbf{I} - (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_1) + \mathbf{P}_2.$$

Takođe, na osnovu Teoreme 8.1.1, to će biti akko je

$$\mathbf{P}_2(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_1)\mathbf{P}_2 = \mathbf{0},$$

odakle sledi da mora da važi

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2.$$

Potrebno je još odrediti $\mathfrak{R}(\mathbf{P})$ i $\mathfrak{N}(\mathbf{P})$. Pri tome znamo da je

$$\mathfrak{R}(\mathbf{P}) = \mathfrak{N}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathfrak{N}((\mathbf{I} - \mathbf{P}_1) + \mathbf{P}_2).$$

Onda, na osnovu Teoreme 8.1.1, sledi da je $\mathfrak{R}(\mathbf{P})$ određen presekom $\mathfrak{N}(\mathbf{P}_2)$ i $\mathfrak{N}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1)$, tj.

$$\mathfrak{R}(\mathbf{P}) = \mathfrak{N}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1) \cap \mathfrak{N}(\mathbf{P}_2) \quad \text{ili} \quad \mathfrak{R}(\mathbf{P}) = \mathfrak{R}(\mathbf{P}_1) \cap \mathfrak{N}(\mathbf{P}_2).$$

Na sličan način određujemo $\mathfrak{N}(\mathbf{P})$. Onda je $\mathfrak{N}(\mathbf{P}) = \mathfrak{R}(\mathbf{I} - \mathbf{P})$, ili

$$\mathfrak{N}(\mathbf{P}) = \mathfrak{R}(\mathbf{P}_2) \oplus \mathfrak{N}(\mathbf{P}_1),$$

što je trebalo dokazati.

Teorema 8.1.3 $\mathbf{P} \doteq \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ je projektor akko je

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1.$$

Tada je

$$\mathfrak{R}(\mathbf{P}) = \mathfrak{R}(\mathbf{P}_1) \cap \mathfrak{R}(\mathbf{P}_2) \quad \text{i} \quad \mathfrak{N}(\mathbf{P}) = \mathfrak{N}(\mathbf{P}_1) + \mathfrak{N}(\mathbf{P}_2).$$

Dokaz

Ako je $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ onda je

$$\mathbf{P} \doteq \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^2\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1^2\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}.$$

Prema tome $\mathbf{P}$ je projektor.

Ostaje da se za projektor $\mathbf{P}$ odredi $\mathfrak{R}(\mathbf{P})$ i $\mathfrak{N}(\mathbf{P})$.

Prvo odredimo $\mathfrak{R}(\mathbf{P})$. Neka je $\mathbf{v} \in \mathfrak{R}(\mathbf{P})$. Onda je $\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{v}$ i

$$\mathbf{P}_1\mathbf{v} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{P}_1^2\mathbf{P}_2\mathbf{v} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{v} = \mathbf{v},$$

tj. $\mathfrak{R}(\mathbf{P}) \subset \mathfrak{R}(\mathbf{P}_1)$. Na sličan način se pokazuje da je $\mathfrak{R}(\mathbf{P}) \subset \mathfrak{R}(\mathbf{P}_2)$. Znači $\mathfrak{R}(\mathbf{P}) \subset \mathfrak{R}(\mathbf{P}_2) \cap \mathfrak{R}(\mathbf{P}_1)$.

Obrnuto, ako je $\mathbf{v}$ u $\mathfrak{R}(\mathbf{P}_1)$ i $\mathfrak{R}(\mathbf{P}_2)$, onda je

$$\mathbf{P}_1\mathbf{v} = \mathbf{v} = \mathbf{P}_2\mathbf{v},$$

pa je

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}_1\mathbf{v} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{v}.$$

Znači, $\mathfrak{R}(\mathbf{P}_1) \cap \mathfrak{R}(\mathbf{P}_2) \subset \mathfrak{R}(\mathbf{P})$, pa je, prema tome

$$\mathfrak{R}(\mathbf{P}) = \mathfrak{R}(\mathbf{P}_1) \cap \mathfrak{R}(\mathbf{P}_2).$$

Drugo, ostaje nam da odredimo $\mathfrak{N}(\mathbf{P})$. Pretpostavimo da je $\mathbf{v} \in \mathfrak{N}(\mathbf{P})$. Onda je $\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{v} = \mathbf{0}$, pa je $\mathbf{P}_2\mathbf{v} \in \mathfrak{N}(\mathbf{P}_1)$. Na isti način se pokazuje da je $\mathbf{P}_1\mathbf{v} \in \mathfrak{N}(\mathbf{P}_2)$.

Nadalje, koristimo identitet

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}_2\mathbf{v} + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_2)\mathbf{v},$$

koji tumačimo kao razlaganje vektora $\mathbf{v}$ na dve komponente.

Već smo pokazali da ako je $\mathbf{v} \in \mathfrak{N}(\mathbf{P})$, onda je $\mathbf{P}_2\mathbf{v} \in \mathfrak{N}(\mathbf{P}_1)$.

Takođe, uvek je $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2)\mathbf{v} \in \mathfrak{N}(\mathbf{P}_2)$. Prema tome, svaki vektor $\mathbf{v} \in \mathfrak{N}(\mathbf{P})$ možemo rastaviti na zbir vektora iz $\mathfrak{N}(\mathbf{P_1})$ i $\mathfrak{N}(\mathbf{P_2})$.

Obrnuto, ako se vektor $\mathbf{v}$ može predstaviti u obliku

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{N}(\mathbf{P_1}), \quad \mathbf{w} \in \mathfrak{N}(\mathbf{P_2}),$$

onda je

$$\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{u} + \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{w} = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{u} + \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{w} = \mathbf{0},$$

pa je prema tome $\mathbf{v} \in \mathfrak{N}(\mathbf{P})$. Znači

$$\mathfrak{N}(\mathbf{P}) = \mathfrak{N}(\mathbf{P}_1) + \mathfrak{N}(\mathbf{P}_2),$$

što je trebalo dokazati.

8.2 Invarijantni potprostori

Definicija 8.2.1 Neka je $\mathbf{T} \in L(V,V)$. Za linearni potprostor U, vektorskog prostora V, se kaže da je **invarijantan** (u odnosu na) pri linearnoj transformaciji $\mathbf{T}$, ako je $\mathbf{Tu} \in U$ za svako $\mathbf{u} \in U$.

Lako je pokazati da su sledeći potprostori invarijantni za transformacu $\mathbf{T}$:

i) V,
ii) $\mathbf{0}$,
iii) $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$,
iv) $\mathfrak{N}(\mathbf{T})$.

Postoji tesna veza između invarijantnih potprostora i projektora.

Teorema 8.2.1 Linearni potprostor U, vektorskog prostora V, je invarijantan u odnosu na $\mathbf{T}$ akko je

$$\mathbf{PTP} = \mathbf{TP},$$

za svaki projektor $\mathbf{P}$ na U.

Dokaz

Neka je U invarijantan za $\mathbf{T}$. Neka je W bilo koji potprostor tako da je $V = U \oplus W$ i neka je $\mathbf{P}$ projektor na U duž W. Neka je $\mathbf{v} \in V$ bilo koji vektor. Onda je

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{u} \in U, \quad \mathbf{w} \in W.$$

Na osnovu definicije projektora sledi da je

$$\mathbf{Pv} = \mathbf{u}$$

i da je U invarijantno za $\mathbf{T}$, tako da je $\mathbf{Tu} \in U$. Onda je

$$\mathbf{PTPv} = \mathbf{PTu} = \mathbf{Tu} = \mathbf{TPv},$$

za svako $\mathbf{v} \in V$, odakle sledi da je

$$\mathbf{PTP} = \mathbf{TP}.$$

Obrnuto, neka je $\mathbf{PTP} = \mathbf{TP}$ za neki projektor $\mathbf{P}$ na U duž W, onda je U invarijantno za $\mathbf{T}$.

Neka je $\mathbf{v} \in U$. Onda je $\mathbf{Pv} = \mathbf{v}$ i

$$\mathbf{PTv} = \mathbf{PTPv} = \mathbf{TPv} = \mathbf{Tv}.$$

Znači $\mathbf{Tv} \in U$ i prema tome U je invarijantno za $\mathbf{T}$.

Teorema 8.2.2 Neka je $V = U \oplus W$. Linearna transformacija $\mathbf{T}$ rastavlja prostor V na invarijantne potprostore U i W akko je

$$\mathbf{TP} = \mathbf{PT},$$

gde je $\mathbf{P}$ projektor na U duž W.

Dokaz

Uslov "ako". Neka je $\mathbf{u}$ bilo koji vektor iz U. Onda je

$$\mathbf{Tu} = \mathbf{TPu} = \mathbf{PTu}.$$

Znači $\mathbf{Tu} \in U$ i U je invarijantno.

Ako je $\mathbf{w}$ bilo koji vektor iz W onda je

$$\mathbf{TPw} = \mathbf{PTw} = \mathbf{0}.$$

Znači $\mathbf{Tw} \in W$ i W je invarijantno.

Uslov "samo ako": U i W su invarijantni za transformaciju $\mathbf{T}$.
Kako je U invarijantno onda, na osnovu prethodne teoreme, sledi da je

$$\mathbf{PTP} = \mathbf{TP}.$$

Kako je $\mathbf{I}-\mathbf{P}$ projektor na W duž U i W invarijantno onda je

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{T}(\mathbf{I}-\mathbf{P}) = \mathbf{T}(\mathbf{I}-\mathbf{P}).$$

Iz ovih jednačina dobija se

$$\mathbf{TP} = \mathbf{PT},$$

što je trebalo dokazati.

8.3 Ortogonalni projektor

Definicija 8.3.1 Neka je V linearni prostor u kome je definisan unutrašnji (skalarni) proizvod i neka je $\mathbf{P}$ projekcija. Kažemo da je **projekcija P ortogonlna** ako je $\mathfrak{R}(\mathbf{P}) \perp \mathfrak{N}(\mathbf{P})$.

Lema 8.3.1 Neka je $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ortonormirana baza V. Ako je $\mathbf{P}$ ortogonalna projekcija na $\mathfrak{R}(\mathbf{P})$, dimenzije k, duž $\mathfrak{N}(\mathbf{P})$, dimenzije $n-k$, onda je njena matrica $\mathbf{P}$ u odnosu na ortonormiranu bazu $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ prostora V data sa

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

❑

Dokaz

Neka je $\mathbf{Pe}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, k$ i $\mathbf{Pe}_\tau = \mathbf{0}$, $\tau = k+1, \ldots, n$, ili sažeto napisano $\mathbf{Pe}_i = \delta_{i\alpha}\mathbf{e}_\alpha$, gde je $\delta_{i\alpha}$ - Kronekerov δ-simbol. Onda je, imajući u vidu da je $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{I}$, $\mathbf{P} = \delta_{i\alpha}\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_i$.

Posledica leme. U odnosu na ortonormiranu bazu V, $\mathbf{P}$ je simetrično, tj.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T.$$

Nezavisno od toga što se to vidi iz matrice $\mathbf{P}$ ortogonalne projekcije $\mathbf{P}$, pokazaćemo to i direktno.

Kako je $\mathfrak{R}(\mathbf{P}) \perp \mathfrak{N}(\mathbf{P})$, onda je

$$\mathbf{Pu}_1 \cdot (\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{u}_2 = 0,$$

za svako $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$, jer je $\mathbf{P}\mathbf{u}_1 \in \mathfrak{R}(\mathbf{P})$ i $(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{u}_2 \in \mathfrak{N}(\mathbf{P})$. Tada je

$$0 = \mathbf{P}\mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{I}-\mathbf{P}^T)\mathbf{P}\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{P} - \mathbf{P}^T\mathbf{P}\mathbf{u}_1 .$$

Prema tome, mora biti $\mathbf{P} - \mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Množenjem sa $\mathbf{P}$ sa desne strane i imajući u vidu da je $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, dobijamo da je

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T .$$

❏

8.3.1 Određivanje projektora

Neka je $V = U \oplus W$, $\dim V = n$, $\dim U = r$ i $\dim W = n - r$. Onda se svako $\mathbf{v} \in V$ može jedistveno predstaviti u obliku

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \text{gde je} \quad \mathbf{u} \in U \text{ i } \mathbf{w} \in W.$$

Jasno je da je $\mathbf{u}$ projekcija $\mathbf{v}$ na U duž W. Isto tako je $\mathbf{w}$ projekcija $\mathbf{v}$ na W duž U. Pitanje glasi: kako možemo odrediti, recimo, projekciju $\mathbf{v}$ na U duž W?

Jedan od načina je da odredimo matricu projektora $\mathbf{P}$ tipa $n \times n$ tako da je za svako $\mathbf{v} \in V$ vektor $\mathbf{P}\mathbf{v}$ projekcija $\mathbf{v}$ na U duž W.

Neka je $B_U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ baza potprostora U, a

$$B_W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-r}\},$$

baza potprostora W. Onda je

$$B_V = B_U \cup B_W = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-r}\},$$

baza prostora V. Formirajmo matricu kolona

$$\mathbf{B} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-r}] = [\mathbf{U}|\mathbf{W}] \quad \text{tipa } n \times n,$$

gde je matrica $\mathbf{U}$ tipa $n \times r$, a matrica $\mathbf{W}$ tipa $(n-r) \times n$.

Jasano je da je $\mathbf{B}$ regularna matrica. Ako je $\mathbf{P}$ matrica takva da je za svako $\mathbf{v} \in V$ vektor $\mathbf{P}\mathbf{v}$ projekcija $\mathbf{v}$ na $\mathbf{U}$ duž $\mathbf{W}$, onda je $\mathbf{P}\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, i $\mathbf{P}\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{0}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n - r$. Tada je

$$\mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{P}[\mathbf{U}|\mathbf{W}] = [\mathbf{P}\mathbf{U}|\mathbf{P}\mathbf{W}] = [\mathbf{U}|\mathbf{0}],$$

pa je

$$\mathbf{P} = [\mathbf{U}|\mathbf{0}]\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{B}^{-1},$$

gde je $\mathbf{I}_r$ jedinična matrica tipa $r\times r$. Tipovi matrica $\mathbf{0}$ su određeni njihovim mestom u matrici. Pogodno je matricu $\mathbf{P}$ pisati i u obliku

$$\mathbf{P} = [\mathbf{U}|\mathbf{0}]\;[\mathbf{U}|\mathbf{W}]^{-1} = [\mathbf{U}|\mathbf{W}] \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} [\mathbf{U}|\mathbf{W}]^{-1}.$$

Da je $\mathbf{P}\mathbf{v}$ zaista projekcija vektora $\mathbf{v}$ na U vidi se iz izraza

$$\mathbf{P}\mathbf{v} = [\mathbf{U}|\mathbf{0}]\;\mathbf{B}^{-1}\mathbf{v} \in \mathfrak{R}(\mathbf{U}) = U.$$

Na isti način se može pokazati da je $\mathbf{I}-\mathbf{P}$ projektor na W duž U određen sa

$$\mathbf{I}-\mathbf{P} = [\mathbf{0}|\mathbf{W}]\;\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-r} \end{pmatrix} \mathbf{B}^{-1},$$

ili

$$\mathbf{I}-\mathbf{P} = [\mathbf{0}|\mathbf{W}]\;[\mathbf{U}|\mathbf{W}]^{-1} = [\mathbf{U}|\mathbf{W}] \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-r} \end{pmatrix} [\mathbf{U}|\mathbf{W}]^{-1}.$$

8.3.2 Ortogonalna projekcija

Neka je M potprostor, $\dim M = r$, prostora V sa unutrašnjim proizvodom, a N, $N = M^{\perp}$ njegov ortogonalni komplement. Onda je $V = M \oplus N$. Za bilo koje $\mathbf{v}\in V$ postoji jedinstvena dekompozicija

$$\mathbf{v} = \mathbf{m}+\mathbf{n}, \quad \text{gde je} \quad \mathbf{m}\in M \text{ i } \mathbf{n}\in N; \quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 0.$$

Nazvaćemo **m ortogonalna projekcija v** na M, tj. $\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{m}$, gde je $\mathbf{P}$ ortogonalni projektor na M duž N. U tom slučaju prethodni izraz za projektor $\mathbf{P}$ glasi

$$\mathbf{P} = [\mathbf{M}|\mathbf{N}] \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} [\mathbf{M}|\mathbf{N}]^{-1} = [\mathbf{M}|\mathbf{0}]\;[\mathbf{M}|\mathbf{N}]^{-1},$$

gde su kolone od $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ baze potprostora M i N, redom.

Pitanje glasi: kako se ovaj izraz uprošćava kada je $N = M^{\perp}$?

Prvo uočimo da je u tom slučaju $\mathbf{N}^T\mathbf{M} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{M}^T\mathbf{N} = \mathbf{0}$. Takođe je simetrična matrica $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$, tipa $r\times r$. Onda je $\operatorname{rang}\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \operatorname{rang}\mathbf{M} = r$ tako da je matrica $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ regularna. Dalje, ako se izaberu vektori kolona matrice $\mathbf{N}$ tako da čine ortonormiranu bazu potprostora $\mathbf{M}^{\perp}$, tada je

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}^T \\ \mathbf{N}^T \end{pmatrix} [\mathbf{M}|\mathbf{N}] = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{M}|\mathbf{N}]^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}^T \\ \mathbf{N}^T \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$\mathbf{P} = [\mathbf{M}|\mathbf{0}] \begin{pmatrix} \mathbf{M}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}^T \\ \mathbf{N}^T \end{pmatrix} = \mathbf{M}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}^T \tag{8.2}$$

nezavisno od baze potprostora $\mathbf{M}$.

i) Ako se pak koriste ortonormalni vektori kolone matrice $\mathbf{M}$ onda je

$$\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \mathbf{I} \quad \text{i} \quad \mathbf{P} = \mathbf{M}\mathbf{M}^T.$$

ii) Ako su pak vektori kolona matrica $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ otonormirani i čine bazu potprostora M i $M^\perp$, onda je $\mathbf{D} = [\mathbf{M}|\mathbf{N}]$ ortogonalna matrica i tada je

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\mathbf{D}^T.$$

■ **Primer 8.2** Dat je vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ koji definiše pravu $\mathfrak{L}$. Odrediti ortogonalni projektor na $\mathfrak{L}$, a zatim ortogonalnu projekciju vektora $\mathbf{b}$ na $\mathfrak{L}$. ■

Rešenje

Vektor $\mathbf{u}$ je baza linearnog vektorskog prostora $\mathfrak{L}$.

Prema (8.2)

$$\mathbf{P}_{\mathfrak{L}} = \mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{u}^{-1}\mathbf{u}^T = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}},$$

je ortogonalni projektor na $\mathfrak{L}$.

Onda je ortogonalna projekcija vektora $\mathbf{b}$ na $\mathfrak{L}$ data sa

$$\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}\right)\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{u}^T\mathbf{b}}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}.$$

N Uočimo da je $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$ i da je $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ matrica. Ako je $\|\mathbf{u}\| = 1$, prethodni izrazi se znatno uprošćavaju. Tada je

$$\mathbf{P}_{\mathfrak{L}} = \mathbf{u}\mathbf{u}^T \quad \text{i} \quad \mathbf{P}_{\mathfrak{L}}\mathbf{b} = \mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{b} = \mathbf{u}^T\mathbf{b}\mathbf{u},$$

pa je

$$\|\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}\mathbf{b}\| = |\mathbf{u}^T\mathbf{b}|.$$

Kako je $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}^\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$ projektor na $\mathfrak{L}^\perp$ onda je $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}^\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ ortogonalan projektor na $\mathfrak{L}^\perp$.

Zadatak 8.1 Neka su U i W potprostori prostora $\mathbb{R}^3$ čije su baze

$$B_U = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\} \quad \text{i} \quad B_W = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

redom.

a) Objasniti zašto su U i W komplementarni potptostori od $\mathbb{R}^3$.
b) Odrediti projektor $\mathbf{P}$ na U duž W kao i njegov komplementarni projektor $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ na W duž U.
c) Odrediti projekciju $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ na W duž U.
d) Pokazati da su $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ idempotentni.
e) Pokazati da su $\mathfrak{R}(\mathbf{P}) = U = \mathfrak{N}(\mathbf{Q})$ i $\mathfrak{N}(\mathbf{P}) = W = \mathfrak{R}(\mathbf{Q})$.

Rešenje

a) Obeležimo sa $\mathbf{U}$ i $\mathbf{W}$, matrice baza porostora U i W, redom. Onda je

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Neka je $\mathbf{B}$ matrica baze $U \cup W$. Tada je

$$\mathbf{B} = [\mathbf{U}|\mathbf{W}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

pa je

$$\text{rang}\mathbf{B} = \text{rang}\,[\mathbf{U}|\mathbf{W}] = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3.$$

Znači baza $U \cup W$ je baza $\mathbb{R}^3$ što znači da su potprostori U i W komplementarni.

b) Koristimo izraz

$$\mathbf{P} = [\mathbf{U}|\mathbf{0}]\;[\mathbf{U}|\mathbf{W}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Kako je $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ sledi da je

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\mathbf{Qv} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

d) Direktnim računanjem pokazuje se da je $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}$.

e) Bazni vektori potprostora U su

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Očigledno je da definišu ravan u $\mathbb{R}^3$. Jednačina ove ravni biće $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$, gde je

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektor upravan na ovu ravan. Onda jednačina ravni koja definiše vektorski potprostor U je $-y + z = 0$. Po definiciji je $\mathbf{Qx} = \mathbf{0}$. Direknim računanjem pokazuje se da je

$$\mathbf{Qx} = (-y+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

odakle sledi da je $-y + z = 0$. Znači $\mathfrak{N}(\mathbf{Q}) = U$. Dalje, potrebno je pokazati da je $\mathfrak{R}(\mathbf{P}) = U$. To ćemo učiniti na drugi način, tj. pokazujući da vektori kolona $\mathbf{P}$ određuju isti prostor kao bazni vektori B_U potprostora U. Tada je

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Na sličan način se pokazuje da je $\mathfrak{N}(\mathbf{P}) = W = \mathfrak{R}(\mathbf{Q})$.

8.4 Spektralna dekompozicija (simetričnih matrica)

Posmatrajmo matricu

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odavde sledi da je

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{S}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} + 3\mathbf{S}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} + 4\mathbf{S}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} =$$
$$= 2\mathbf{P}_1 + 3\mathbf{P}_2 + 4\mathbf{P}_3.$$

Lako je pokazati da matrice $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ i $\mathbf{P}_3$ imaju sledeća svojstva:

(i) $\sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}_i = \mathbf{I}$,

(ii) $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{0}$ za $i \neq j$,

(iii) $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_i$.

Očigledno da, saglasno sa definicijom projektora, matrice $\mathbf{P}_i$ predstavljaju projekcije.

Sledeći korak je razmatranje matrica koje zadovoljavaju ova tri uslova.

Teorema 8.4.1 Neka je matrica $\mathbf{A}$ reda n takva da je

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{P}_i,$$

gde je $\sum_{i=1}^{r} \mathbf{P}_i = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{0}$ za $i \neq j$, i $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_i$. Neka je $p(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} a_k \lambda^k$ bilo koji polinom. Onda je

$$p(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{r} p(\lambda_i)\mathbf{P}_i.$$

Dokaz

Prema uslovu teoreme je

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{P}_i.$$

Lako je pokazati da je, koristeći metodu matematičke inducije,

$$\mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k \mathbf{P}_i$$

za bilo koji prirodan broj k. Onda je

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbf{A}^k = \sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k \mathbf{P}_i = \\ &= \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{m} a_k \lambda_i^k \right) \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{r} p(\lambda_i) \mathbf{P}_i. \end{aligned}$$

8.5 Generalisane inverzne matrice

Problem određivanja rešenja jednačine $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ konačno je rešen određivanjem inverzne matrice $\mathbf{G}$ matrice $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$.

Definicija 8.5.1 Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$. Matrica $\mathbf{G}$ tipa $n \times m$ se naziva **generalisana inverzna matrica** matrice $\mathbf{A}$ (ili g-inverzna), ako je $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$. Ako je $\mathbf{A}$ regularna matrica, onda je $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{A}$. U svakom drugom slučaju ima ih beskonačno mnogo.

■ **Primer 8.3** Svaka od ove dve matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -42 & -1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

je generalisana matrica matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proveri! ■

Teorema 8.5.1 Neka su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{G}$ tipa $m \times n$ i $n \times m$, redom. Onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $\mathbf{G}$ je g-inverzna od $\mathbf{A}$;

(ii) Za bilo koje $\mathbf{y} \in \mathscr{C}(\mathbf{A})$, $\mathbf{x} = \mathbf{Gy}$ je rešenje jednačine $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$.

Dokaz

(i) $\Rightarrow$ (ii) Bilo koje $\mathbf{y} \in \mathscr{C}(\mathbf{A})$ je oblika $\mathbf{y} = \mathbf{Az}$ za neko $\mathbf{z}$. Onda je

$$\mathbf{A}(\mathbf{Gy}) = \mathbf{AGAz} = \mathbf{Az} = \mathbf{y}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Pošto je $\mathbf{AGy} = \mathbf{y}$ za bilo koje $\mathbf{y} \in \mathscr{C}(\mathbf{A})$ sledi da je $\mathbf{AGAz} = \mathbf{Az}$ za svako $\mathbf{z}$. Specijalno, ako uzmemo da je i-ta kolona jedinične matrice, onda su i-te kolone matrica $\mathbf{AGA}$ i $\mathbf{A}$ iste. Prema tome je $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$.

Teorema 8.5.2 Ako je $\mathbf{G}$ g-inverzna od $\mathbf{A}$ onda je $\mathscr{R}(\mathbf{A}) = \mathscr{R}(\mathbf{AG}) = \mathscr{R}(\mathbf{GA})$.

Dokaz

$\mathscr{R}(\mathbf{A}) = \mathscr{R}(\mathbf{AGA}) \leq \mathscr{R}(\mathbf{AG}) \leq \mathscr{R}(\mathbf{A})$. Na isti način se pokazuje da je $\mathscr{R}(\mathbf{A}) = \mathscr{R}(\mathbf{AGA}) \leq \mathscr{R}(\mathbf{GA}) \leq \mathscr{R}(\mathbf{A})$.

Definicija 8.5.2 g-inverzna od $\mathbf{A}$ se naziva **refleksivna** g**-inverzna** ako je takođe $\mathbf{GAG} = \mathbf{G}$.

Teorema 8.5.3 Neka je g-inverzna $\mathbf{G}$ od $\mathbf{A}$. Onda je $\mathscr{R}(\mathbf{A}) \leq \mathscr{R}(\mathbf{G})$. $\mathscr{R}(\mathbf{A}) = \mathscr{R}(\mathbf{G})$ akko je $\mathbf{G}$ refleksivno.

Dokaz

Za bilo koje g-inverzno $\mathbf{G}$ imamo da je $\mathscr{R}(\mathbf{A}) = \mathscr{R}(\mathbf{AGA}) \leq \mathscr{R}(\mathbf{A})$. Ako je $\mathbf{G}$ refleksivno, onda je $\mathscr{R}(\mathbf{G}) = \mathscr{R}(\mathbf{GAG}) \leq \mathscr{R}(\mathbf{A})$. Prema tome je $\mathscr{R}(\mathbf{A}) = \mathscr{R}(\mathbf{G})$.

Obrnuto, neka je $\mathscr{R}(\mathbf{A}) = \mathscr{R}(\mathbf{G})$. Prvo uočimo da je $\mathscr{C}(\mathbf{GA}) \subset \mathscr{C}(\mathbf{G})$.

Na osnovu prethodne teoreme $\mathscr{R}(\mathbf{G}) = \mathscr{R}(\mathbf{GA})$, pa je prema tome $\mathscr{C}(\mathbf{G}) = \mathscr{C}(\mathbf{GA})$. Onda je $\mathbf{GAG} = \mathbf{GAGB}$ za neko $\mathbf{B}$. Sada je

$$\mathbf{GAG} = \mathbf{GAGAB} = \mathbf{GAB} = \mathbf{G}.$$

Znači $\mathbf{G}$ je refleksivno.

Kao posledica definicije g-inverzne matrice $\mathbf{A}$ sledi da je

$$\mathbf{AGAG} = \mathbf{AG} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{AG})^2 = \mathbf{AG} \quad \text{i} \quad \mathbf{GAGA} = \mathbf{GA} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{GA})^2 = \mathbf{GA}.$$

Prema tome, matrice $\mathbf{AG}$ reda m i $\mathbf{GA}$ reda n su projekcije.

Teorema 8.5.4 Neka je $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$ i neka je $\mathbf{G}$ njena generalisana inverzna matrica (tj. $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$). Onda, za bilo koje fiksno $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$:

(i) jednačina
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$
ima rešenje akko je $\mathbf{AGy} = \mathbf{y}$ (tj. akko je $\mathbf{y} \in \mathscr{C}(\mathbf{AG})$).

(ii) Ako $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ ima bilo koje rešenje, onda je $\mathbf{x}$ rešenje jednačine $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ akko je
$$\mathbf{x} = \mathbf{Gy} + (\mathbf{I} - \mathbf{GA})\mathbf{z} \quad \text{za neko} \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Dokaz

(i) Ako je $\mathbf{y} \in \mathscr{C}(\mathbf{AG})$, tj. $\mathbf{AGy} = \mathbf{y}$, onda je $\mathbf{A}(\mathbf{Gy}) = \mathbf{y}$ i $\mathbf{x} = \mathbf{Gy}$ je rešenje jednačine $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$.
Obrnuto, ako je $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, onda je $\mathbf{GAx} = \mathbf{Gy}$ i $\mathbf{AGAx} = \mathbf{AGy} = (\mathbf{AG})\mathbf{y}$. Koristeći uslov $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$, sledi $\mathbf{AGAx} = \mathbf{Ax} = \mathbf{y}$. Znači $(\mathbf{AG})\mathbf{y} = \mathbf{y}$.
Specijalno, ako $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ ima bilo koje rešenje za dato $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, onda je $\mathbf{x} = \mathbf{Gy}$ njeno partikularno rešenje.

(ii) Ako je $\mathbf{AGy} = \mathbf{y}$, onda je $\mathbf{x} = \mathbf{Gy} + (\mathbf{I} - \mathbf{GA})\mathbf{z}$ opšte rešenje jednačine $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ što se može direktno proveriti.

Definicija 8.5.3 Za g-inverzno $\mathbf{G}$ od $\mathbf{A}$ se kaže da je **g-inverzno minimalne norme** od $\mathbf{A}$ ako je

$$\mathbf{AGA} = \mathbf{A} \quad \text{i} \quad (\mathbf{GA})^T = \mathbf{GA}.$$

Opravdanje za ovaj naziv daje sledeća teorema

Teorema 8.5.5 Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$. Onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $\mathbf{G}$ je g-inverzno od $\mathbf{A}$ minimalne norme.

(ii) Za bilo koje $\mathbf{y} \in \mathscr{C}(\mathbf{A})$, $\mathbf{y} = \mathbf{Gy}$ je rešenje jednačine $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ sa minimalnom normom.

Dokaz

Iz (i) $\Rightarrow$ (ii). Na osnovu prethodne teoreme klasa rešenja $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ je data sa $\mathbf{Gy} + (\mathbf{I} - \mathbf{GA})\mathbf{z}$, gde je $\mathbf{z}$ proizvoljno. Moramo pokazati da je

$$\|\mathbf{Gy}\| \leq \|\mathbf{Gy} + (\mathbf{I} - \mathbf{GA})\mathbf{z}\|$$

za bilo koje $\mathbf{y} \in \mathscr{C}(\mathbf{A})$ i bilo koje $\mathbf{z}$.

Znamo da je

$$\|\mathbf{Gy} + (\mathbf{I} - \mathbf{GA})\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{Gy}\|^2 + \|(\mathbf{I} - \mathbf{GA})\mathbf{z}\|^2 + 2(\mathbf{Gy}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{GA})\mathbf{z}.$$

Kako je $\mathbf{y} \in \mathscr{C}(\mathbf{A})$, onda je $\mathbf{y} = \mathbf{Au}$ za neko $\mathbf{u}$. Poslednji član ovog izraza je nula što sledi iz izraza

$$\begin{aligned}(\mathbf{Gy}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{GA})\mathbf{z} &= (\mathbf{GAu}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{GA})\mathbf{z} = \mathbf{GAu} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{GAu} \cdot \mathbf{GAz} = \\ &= \mathbf{GAu} \cdot \mathbf{z} - (\mathbf{GA})^T \mathbf{GAu} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

jer je $(\mathbf{GA})^T = \mathbf{GA}$ i $(\mathbf{GA})^2 = \mathbf{GA}$. Takođe, drugi član je uvek pozitivan, tj. $\|(\mathbf{I} - \mathbf{GA})\mathbf{z}\|^2 \geq 0$. Prema tome je $\|\mathbf{Gy}\| \leq \|\mathbf{Gy} + (\mathbf{I} - \mathbf{GA})\mathbf{z}\|$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Kako je, za bilo koje $\mathbf{y} \in \mathscr{C}(\mathbf{A})$, $\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{y}$ rešenje jednačine $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. $\mathbf{G}$ je g-inverzno od $\mathbf{A}$. Takođe je $\|\mathbf{G}\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{G}\mathbf{y} + (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{A})\mathbf{z}\|$ za bilo koje $\mathbf{z}$, na osnovu (i) $\Rightarrow$ (ii). Prema tome je

$$0 \leq \|(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{A})\mathbf{z}\|^2 + 2(\mathbf{G}\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{A})\mathbf{z} =$$
$$= \|(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{A})\mathbf{z}\|^2 + 2(\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{A})\mathbf{z},$$

za svako $\mathbf{u}$, $\mathbf{z}$. Onda važi i za $\alpha\mathbf{u}$, gde je α skalar. Ako je

$$(\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{A})\mathbf{z} < 0,$$

onda izborom dovoljno velike vrednosti α, prethodnu nejednakost dovodimo do kontradikcije. Na isti način, ako je

$$(\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{A})\mathbf{z} > 0,$$

izborom dovoljno velikim i negativnim, ponovo prethodnu nejednakost dovodimo do kontradikcije. Prema tome, mora biti

$$(\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{A})\mathbf{z} = 0,$$

za svako $\mathbf{u}$, tj.

$$(\mathbf{G}\mathbf{A})^T (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{A}) = \mathbf{0},$$

odakle sledi da je $(\mathbf{G}\mathbf{A})^T = \mathbf{G}\mathbf{A}$, jer je $(\mathbf{G}\mathbf{A})^T\mathbf{G}\mathbf{A}$ normalna (simetrična) matrica.

Definicija 8.5.4 Za g-inverzno $\mathbf{G}$ od $\mathbf{A}$ se kaže da je **g-inverzno najmanjeg kvadrata** od $\mathbf{A}$ ako je $\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ i $(\mathbf{A}\mathbf{G})^T = \mathbf{A}\mathbf{G}$.

Teorema 8.5.6 Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$. Onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $\mathbf{G}$ je **g-inverzno najmanjeg kvadrata** od $\mathbf{A}$.

(ii) Za bilo koje $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, $\|\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{y} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Dokaz

Iz (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka je $\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{y} = \mathbf{w}$. Onda moramo pokazati da je

$$\|\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{y} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{y} - \mathbf{y} + \mathbf{A}\mathbf{w}\|.$$

Polazimo od izraza

$$\|\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{y} - \mathbf{y} + \mathbf{A}\mathbf{w}\|^2 = \|(\mathbf{A}\mathbf{G} - \mathbf{I})\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{A}\mathbf{w}\|^2 + 2(\mathbf{A}\mathbf{w}) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{G} - \mathbf{I})\mathbf{y}.$$

Međutim,

$$(\mathbf{Aw})\cdot(\mathbf{AG}-\mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot(\mathbf{AG})^T - \mathbf{I}\,\mathbf{Aw} = \mathbf{y}\cdot\left((\mathbf{AG}-\mathbf{I})^T - \mathbf{I}\right)\mathbf{Aw} =$$
$$= \mathbf{y}\cdot(\mathbf{AGA}-\mathbf{A})\,\mathbf{w} = 0,$$

jer je $(\mathbf{AG})^T = \mathbf{AG}$. Smenom ovog izraza u prethodni i imajući u vidu da je uvek $\|\mathbf{Aw}\|^2 \geq 0$ sledi da je

$$\|\mathbf{AGy}-\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{AGy}-\mathbf{y}+\mathbf{Aw}\|.$$

Iz (ii) $\Rightarrow$ (i). Za bilo koji vektor $\mathbf{x}$ stavimo $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ u (ii). Onda je

$$\|\mathbf{AGAx}-\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{Ax}-\mathbf{Ax}\| = 0,$$

odakle sledi da je $\mathbf{AGAx} = \mathbf{Ax}$. Kako je $\mathbf{x}$ proizvoljno onda mora biti $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$, pa je prema tome $\mathbf{G}$ g-inverzno od $\mathbf{A}$. Ostatak dela teoreme dokazuje se na isti način kao u prethodnoj teoremi.

8.6 Rešavanje linearne jednačine $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Definicija 8.6.1 Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$, vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Ako jednačina

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{8.3}$$

ima rešenje onda se kaže da je **saglasna**; ako nema onda je **nesaglasna**.

Korisno je elamente ove jednačine napisati u razvijenom obliku:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Vrlo često se koristi predstavljanje matrica preko svojih vektora kolona

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n], \quad \text{gde je} \quad \mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8.5}$$

ili svojih vektora vrsta

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}, \quad \text{gde je} \quad \boldsymbol{\alpha}_\lambda = (a_{\lambda 1}\, a_{\lambda 2} \cdots a_{\lambda n}), \quad \lambda = 1, 2, \ldots, m. \tag{8.6}$$

Uočimo da je

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T & \boldsymbol{\alpha}_2^T & \vdots & \boldsymbol{\alpha}_m^T \end{pmatrix}, \quad \text{gde je} \quad \boldsymbol{\alpha}_\lambda^T = \begin{pmatrix} a_{\lambda 1} \\ a_{\lambda 2} \\ \vdots \\ a_{\lambda n} \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

Predstavljanja jednačine $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ u razvijenom obliku glasi

$$a_{\lambda i} x_i = b_\lambda. \tag{8.8}$$

Ekvivalentno tome je

$$x_i\, \mathbf{a}_i = \mathbf{b}, \tag{8.9}$$

ili

$$\boldsymbol{\alpha}_\lambda \cdot \mathbf{x} = b_\lambda. \tag{8.10}$$

Napominjemo da se u ovim izrazima vrši sabiranje po ponovljenim indeksima.

Svaki od ovih vidova predstavljanja jednačine i nalaženja rešenja ima svoje pogodnosti.

Jednačina $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je saglasna

Uočimo da je homogena jednačina $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ uvek saglasna, jer je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ uvek njeno rešenje. Nas interesuje skup svih rešenja.

Definicija 8.6.2 **Nula prostor** $\mathfrak{N}(\mathbf{A})$ matrice $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$ je skup

$$\mathfrak{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Iz (8.9), za $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, sledi $x_i\, \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$, pa je dimenzija prostora $\mathfrak{N}(\mathbf{A})$ određena brojem linearno nezavisnih vektora skupa $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$. Neka je to skup vektora $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$. Onda su vektori $\mathbf{a}_\tau, \tau = r+1, \ldots, n$, njihova linearna kombinacija, tj. $\mathbf{a}_\tau = b_{\tau c}\, \mathbf{a}_c$, $c = 1, 2, \ldots, r$. Smenom ovog izraza $x_i\, \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ dobijamo

$$\mathbf{0} = x_i\, \mathbf{a}_i = x_c\, \mathbf{a}_c + x_\tau\, \mathbf{a}_\tau = x_c\, \mathbf{a}_c + x_\tau\, b_{\tau c}\, \mathbf{a}_c = (x_c + x_\tau\, b_{\tau c})\mathbf{a}_c.$$

S obzirom na linearnu nezavisnost vektora $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ sledi da je

$$x_c = -x_\tau\, b_{\tau c}, \quad c = 1, 2, \ldots, r, \;\; \tau = r+1, \ldots, n.$$

Prema tome, homogeni sistem $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ima beskonačno mnogo rešenja, jer x_τ mogu uzimati proizvoljne vrednosti u $\mathbb{R}^n$. Broj njihovih nezavisnih rešenja je $n - r$.

U slučaju nehomogene jednačine iz (8.9) se vidi da $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ može da ima rešenja samo ako je $\mathbf{b}$ u prostoru vektora kolona

$$\mathscr{C}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}, \quad \text{tj. } \mathbf{b} \in \mathscr{C}(\mathbf{A}).$$

Pokazaćemo da postoji tesna veza između opšteg rešenja jednačine $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ i nula prostora $\mathfrak{N}(\mathbf{A})$ matrice $\mathbf{A}$.

Teorema 8.6.1 Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$, vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_0$ bilo koje rešenje jednačine $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Onda se skup svih rešenja jednačine $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sastoji od vektora $\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}$ za $\mathbf{z} \in \mathfrak{N}(\mathbf{A})$, tj.

$$\{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\} = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{z} |\ \mathbf{z} \in \mathfrak{N}(\mathbf{A})\}.$$

Dokaz

Koristimo stav: dva skupa su jednaka ako je svaki skup podskup drugog skupa.

Prvo pretpostavimo da je $\mathbf{x}$ neko rešenje jednačine $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Kako je i $\mathbf{x}_0$ njeno rešenje onda sledi da je

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{Ax} - \mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Prema tome $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ je rešenje homogene jednačine $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$. Drugačije rečeno, $\mathbf{z} \in \mathfrak{N}(\mathbf{A})$. Ali onda je $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}$, gde je $\mathbf{z} \in \mathfrak{N}(\mathbf{A})$, odakle sledi da je

$$\{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\} \subseteq \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{z} |\ \mathbf{z} \in \mathfrak{N}(\mathbf{A})\}.$$

Obrnuto, neka je $\mathbf{z} \in \mathfrak{N}(\mathbf{A})$. Onda je

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) = \mathbf{Ax}_0 + \mathbf{Az} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

Prema tome $\mathbf{x}_0 + \mathbf{z} \in \{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$. Znači

$$\{\mathbf{x}_0 + \mathbf{z} \,|\, \mathbf{z} \in \mathfrak{N}(\mathbf{A})\} \subseteq \{\mathbf{x} |\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}.$$

8.6.1 Metod najmanjeg kvadrata i singularne vrednosti

Kao što smo videli sistem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

može da ima jedno rešenje, beskonačno mnogo rešenja ili nema rešenja. Slučaj kada je

$$\mathbf{b} \notin \mathfrak{R}(\mathbf{A}),$$

spada u klasu problema za koji sistem jednačina $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nema rešenja. Međutitm u mnogim problemima ne traži se egzaktno resenje nego njegova najbolja aproksimacija.

Definicija 8.6.3 Kažemo da je $\hat{\mathbf{x}}$, gde je $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, **aproksimacija najmanjeg kvadrata** ako je

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\| \quad \text{za svako } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Na osnovu ove definicije sledi da je $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ ortogonalna projekcija na $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$.

Teorema 8.6.2 Neka je $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ ortogonalna projekcija $\mathbf{b}$ na $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$. Onda je $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ jedinstveno određeno i $\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ je upravno na $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$.

Dokaz

Neka je bilo koje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ različito od $\hat{\mathbf{x}}$, tj. $\mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}}$. Sledi da je

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|^2 &= \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{Ax}\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})\|^2 = \\
&= \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|^2 - 2\,(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{A}\,(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + \|\mathbf{A}\,(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})\,\|^2 = \\
&= \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|^2 + \|\mathbf{A}\,(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})\,\|^2 \geq \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|^2,
\end{aligned}$$

imajući u vidu da je $\|\mathbf{A}\,(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})\,\|^2 > 0$ i da je $\mathbf{A}\,(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \in \mathfrak{R}(\mathbf{A})$, pa je prema tome upravno na $(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{A}\,(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = 0$.

Neka je $\mathbf{Pb}$ ortogonalna projekcija $\mathbf{b}$ na $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$. Onda je sistem

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Pb},$$

saglasan, jer je $\mathbf{Pb} \in \mathfrak{R}(\mathbf{A})$. Mi ćemo razmotriti ovaj slučaj detaljnije.

Ovaj sistem ima jedinstveno rešenje akko je rang$\mathbf{A} = n$, ili drugačije rečeno kada dim$\mathfrak{R}(\mathbf{A}) = n$. Onda je sistem vektora kolona $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_n\}$ lenearno nezavisan i predstavlja bazu linearnog prostora $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$. Potrebno je izraziti projektor $\mathbf{P}$ u odnosu na sistem baznih vektora $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_n\}$ koristeći njegovu reprezentaciju u odnosu na neki sistem ortonormiranih vektora u $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$, koji je trivijalan. Primera radi, neka je

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots \mathbf{w}_n\},$$

ortonormirana baza u $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$. Onda je

$$\mathbf{P} = \delta_{ij}\, \mathbf{w}_i \otimes \mathbf{w}_j, \quad \text{sabirati po indeksima } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

U matričnoj notaciji je

$$\mathbf{Pb} = (\mathbf{b}\cdot \mathbf{w}_i)\,\mathbf{w}_i,$$

gde je

$$\mathbf{P} = \mathbf{W}\mathbf{W}^T,$$

a

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{w}_n \end{pmatrix}.$$

Kako su $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_n\}$ i $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots \mathbf{w}_n\}$ dve baze prostora $\Re(\mathbf{A})$ onda je

$$\mathbf{a}_i = c_{ij}\,\mathbf{w}_j,$$

tako da je

$$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_n\} = \{c_{1j}\,\mathbf{w}_j, c_{2j}\,\mathbf{w}_j, \dots c_{nj}\,\mathbf{w}_j\}.$$

Matrica koeficijenata $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ je regularna.

Uočimo da je npr.

$$c_{1j}\,\mathbf{w}_j = c_{11}\,\mathbf{w}_1 + c_{12}\,\mathbf{w}_2 + \dots + c_{1n}\,\mathbf{w}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{w}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{pmatrix}.$$

Koristići matričnu reprezentaciju i za ostale članove u $\{c_{1j}\,\mathbf{w}_j, c_{2j}\,\mathbf{w}_j, \dots c_{nj}\,\mathbf{w}_j\}$ možemo pisati da je

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{w}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

ili

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\,\mathbf{C}^T,$$

i

$$\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Onda je $\mathbf{W} = \mathbf{A}\left(\mathbf{C}^{-1}\right)^T$, pa je

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\left(\mathbf{C}^{-1}\right)^T \mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\left(\mathbf{C}\mathbf{C}^T\right)^{-1} \mathbf{A}^T.$$

S duge strane

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{W}^T\mathbf{W}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{C}^T,$$

je simetrična regularna matrica. Koristići ovaj izraz u prethodnom dobijamo da je konačno

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T.$$

Smenom ovog izraza u $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{b}$ dobijamo

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b},$$

odakle sledi

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ se naziva **aproksimacija najmanjeg kvadrata** za sistem jednačina $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

8.6.2 Opšti problem najmanjih kvadrata

Teorema 8.6.3 Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$, vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Neka je

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}.$$

Naći vektor $\mathbf{x}$ koji minimizira veličinu (funkciju)

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2,$$

ili ekvivalentno tome

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}).$$

Bilo koji vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ koji je rešenje ovog problema naziva se **rešenje najmanjeg kvadrata**.

- Skup svih rešenja najmanjeg kvadrata je skup svih rešenja sistema normalnih jednačina
$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$
- Postoji jedinstveno rešenja akko je $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$. U tom slučaju rešenje glasi
$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$
- Ako je $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ saglasno, onda je skup rešenja za $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ isti kao skup rešenja najmanjeg kvadrata.

Dokaz

Pišemo u razvijenom obliku

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = \|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{Ax}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{Ax}-\mathbf{b}) =$$
$$= \mathbf{Ax}\cdot\mathbf{Ax} - 2\mathbf{Ax}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}^T\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}.$$

Poznato je da ova fukcija ima ekstrem za vrednosti $\mathbf{x}$ za koje je

$$\frac{\partial\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{0},$$

ili za koje je

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

Pitanje glasi, da li za te vrednosti $\mathbf{x}$ fukcija $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2$ ima minimum?

Pretpostavimo da je $\mathbf{z}$ rešenje normalne jednačine $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$. Onda je

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z})\|^2 = \mathbf{z}\cdot\mathbf{A}^T\mathbf{Az} - \mathbf{z}\cdot\mathbf{A}^T\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}.$$

Za bilo koje $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{n+1}$ neka je $\mathbf{u} = \mathbf{y}-\mathbf{z}$ i $\mathbf{y} = \mathbf{z}+\mathbf{u}$, pa je

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})\|^2 = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z})\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2,$$

gde je $\mathbf{v} = \mathbf{Au}$. Kako je $\|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$, sledi da je $\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})\|^2 \geq \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z})\|^2$ za svako $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{n+1}$.

Sledeći korak zahteva analizu proizvoda matrica $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ i $\mathbf{AA}^T$.

Za matricu $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m+n}$ sledeća tvđenja su tačna:

- $\operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}\mathbf{A}^T = \operatorname{rang}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right) = \operatorname{rang}\left(\mathbf{AA}^T\right)$,
- $\mathbb{R}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right) = \mathbb{R}(\mathbf{A}^T)$ i $\mathbb{R}\left(\mathbf{AA}^T\right) = \mathbb{R}(\mathbf{A})$,
- $\mathbb{N}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right) = \mathbb{N}(\mathbf{A})$ i $\mathbb{N}\left(\mathbf{AA}^T\right) = \mathbb{N}(\mathbf{A}^T)$

Dokazati.

8.6.3 Normalne jednačine

- Za bilo koji $m\times n$ sistem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ njemu asocirani sistem normalnih jednačina je definisan sa $n\times n$ sistemom $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$.
- $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ je uvek saglasan sistem, čak i kada $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nije saglasan.
- Kada je $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ saglasan njegova rešenja se slažu sa rešenjima sistema $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$. Kao što je napred navedeno, normalne jednačine daju rešenja najmanjeg kvadrata sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, koji nije saglasan.
- $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ ima jedinstveno rešenje akko je $\mathfrak{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{n}$. Ono tada glasi

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

- Kada je $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ saglasno i ima jedinstveno rešenje, onda je to tačno i za normalan sistem $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ i za oba slučaja je dato sa $\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$.

N Kada $\mathbf{A}$ nije kvadratna matrica, onda ne postoji njoj inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$. Onda ne postoji ni operacija inverznog prozvoda matrica u obrnutom redu, tj. ne postoji

$$\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}.$$

8.7 Mur-Penrozova inverzna matrica od $\mathbf{A}$

Pretpostavimo da nam je data jednačina $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ koja ne mora biti saglasna. Pretpostavimo da želimo da nađemo $\mathbf{x}$ koje minimizira $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|$. Onda je $\mathbf{x} = \mathbf{Gy}$ za bilo koje g-inverzno najmanjeg kvadrata $\mathbf{G}$ od $\mathbf{A}$.

Definicija 8.7.1 Ako je je $\mathbf{G}$ refleksivno g-inverzno od $\mathbf{A}$, minimalne norme i najmanjeg kvadrata, onda se $\mathbf{G}$ naziva **Mur-Penroz inverzna matrica**[a] od $\mathbf{A}$.

[a] Moore-Penrose

Drugim rečima, inverzna matrica $\mathbf{G}$ od $\mathbf{A}$ zadovoljava sledeće uslove:

$$\begin{aligned} &1. \quad \mathbf{AGA} = \mathbf{A}, \\ &2. \quad \mathbf{GAG} = \mathbf{G}, \quad \text{refleksivnost po} \quad \mathbf{G} \\ &3. \quad (\mathbf{AG})^T = \mathbf{AG}, \quad \text{simetričnost} \quad \mathbf{AG} \\ &4. \quad (\mathbf{GA})^T = \mathbf{GA} \quad \text{simetričnost} \quad \mathbf{GA}. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Može se pokazati da takva matrica postoji i da je jedinstvena.

Teorema 8.7.1 Za matricu $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$ postoji jedinstvena generalisana (pseudo) matrica $\mathbf{G}$.

Dokaz

Neka su $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ dve pseudo matrice matrice $\mathbf{A}$, koje zadovoljavaju gore naveden uslove. Onda je:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} &= \mathbf{GAG} && (2.),\\
&= \mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{A}^T) && (3.),\\
&= \mathbf{G}\mathbf{G}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{H}^T\mathbf{A}^T) && (1.),\\
&= (\mathbf{GA})\mathbf{H} && (3.),\\
&= \mathbf{GAH} && (2.),
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \mathbf{HAH} && (1.),\\
&= \mathbf{A}^T\mathbf{H}^T\mathbf{H} && (4.),\\
&= (\mathbf{A}^T(\mathbf{G}^T\mathbf{A}^T))\mathbf{H}^T\mathbf{H} && (1.),\\
&= \mathbf{GA}(\mathbf{A}^T\mathbf{H}^T\mathbf{H}) && (4.),\\
&= \mathbf{GAH} && (2.),
\end{aligned}$$

odkle sledi da je $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

Brojevi koje navodimo istovetni su brojevima u (8.11) na koje se pozivamo.

■ **Primer 8.4** Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Odrediti njoj generalisanu inverznu Mur-Penrosovu matricu $\mathbf{A}^+$. ■

Rešenje

Neka je

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Određujemo njene elmente iz uslova (8.11).

Računamo redom

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 6a+3b \\ 2c+d & 6c+3d \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad 6a+3b = 2c+d \quad \Rightarrow \quad 6a+3b-2c = d$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+6c & 2b+6d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^{+})^{T} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+} \quad \Rightarrow \quad a+3c = 2b+6d \quad \Rightarrow \quad a-2b+3c = 6d.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+6c & 2b+6d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 4a+12c+2b+6d & 12a+36c+6b+18d \\ 2a+6c+b+3d & 6a+18c+3b+9d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ovaj sistem od četiri jednačine svodi se na samo jednu jednačinu

$$\left.\begin{aligned} 4a+12c+2b+6d &= 2 \\ 12a+36c+6b+18d &= 6 \\ 2a+6c+b+3d &= 1 \\ 6a+18c+3b+9d &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 2a+b+6c = 1-3d.$$

Ostaje nam da nađemo rešenje sledećeg sistema jednačina u funkciji elementa d:

$$2a+b+6c = 1-3d, \qquad (*)$$
$$a-2b+3c = 6d, \qquad (**)$$
$$6a+3b-2c = d. \qquad (***)$$

Iz (*) i (**) sledi da je

$$5b = 1-15d \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1-15d}{5}.$$

Iz (*) i (***) sledi da je

$$20c = 3-10d \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3-10d}{20}.$$

Iz (**) sledi da je

$$a = \frac{-1+30d}{20}.$$

Za određivanje vrednosti elementa d ostaje nam uslov $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$, vrlo komplikovan sistem kvadratnih jednačina po d. Međutim, kako je $\det(\mathbf{A}) = 0$ sledi da je i

$$\det(\mathbf{A})^+ = 0 \quad \text{ili} \quad ad = bc.$$

Detaljno

$$\begin{aligned} \frac{-1+30d}{20} d &= \frac{1-15d}{5} \frac{3-10d}{20} \\ -5d + 150d^2 &= 3 - 45d - 10d + 150d^2 \\ d &= \frac{3}{50}. \end{aligned}$$

Dalje je

$$\begin{aligned} a &= \frac{-1+30d}{20} = \frac{-1+30\cdot\frac{3}{50}}{20} = \frac{4}{100} = \frac{2}{50}, \\ b &= \frac{1-15d}{5} = \frac{1-15\cdot\frac{3}{50}}{5} = \frac{1}{50}, \\ c &= \frac{3-10d}{20} = \frac{3-10\cdot\frac{3}{50}}{20} = \frac{12}{100} = \frac{6}{50}. \end{aligned}$$

Znači

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

N Uporediti sa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Primer (8.4) nam sugeriše postupak pri određivanju generalisane matrice $\mathbf{A}^+$ koja odgovara singularnoj realnoj matrici $\mathbf{A}$ drugog reda.

Neka je

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \qquad \det\{\mathbf{A}\} = 0.$$

Onda je $ad - bc = 0$. Jedna od mogućnosti je

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = k \quad \Rightarrow \quad c = ak, \quad d = bk,$$

pa je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix}.$$

U drugom slučaju je

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = l$$

ili

$$c = la, \quad d = lc.$$

Onda je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ la & lc \end{pmatrix}.$$

Razmotrićemo prvi slučaj.

Lema 8.7.2 Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix}.$$

Onda njoj ogovara Mur-Penrozova matrica oblika

$$\mathbf{A}^+ = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix} = \alpha \mathbf{A}^T,$$

gde je α neki skalar.

Dokaz

Ovako postulirana matrica mora zadovoljavati uslove (8.11).

Trivijalno sledi

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^+\right)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+,$$
$$\left(\mathbf{A}^+\mathbf{A}\right)^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$$

jer su matrice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ i $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ simetrične.

Vrednost parametra α određujemo iz uslova

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \alpha\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Množenjem sa $\mathbf{A}^T$, postaje

$$\alpha\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T \quad \Rightarrow \quad \alpha\mathbf{C}^2 = \mathbf{C},$$

gde je $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Odavde je

$$\alpha = \frac{\mathrm{tr}\mathbf{C}}{\mathrm{tr}\mathbf{C}^2}.$$

Lako je pokazati da je

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix} = (1+k^2) \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

i

$$\mathbf{C}^2 = (1+k^2) \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} = (1+k^2)(a^2+b^2) \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\mathbf{C} &= (1+k^2)(a^2+b^2), \\ \mathrm{tr}\mathbf{C}^2 &= (1+k^2)^2(a^2+b^2)^2. \end{aligned}$$

Prema tome

$$\alpha = \frac{1}{(1+k^2)(a^2+b^2)},$$

ili, konačno,

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{(1+k^2)(a^2+b^2)} \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}.$$

Potrebno je pokazati da je

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$$

identitet za tako određeno $\mathbf{A}^+$. Direktnim računanjem dobijamo

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= \alpha^2 \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix} = \\ &= \alpha^2(1+k^2)(a^2+b^2) \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix} = \mathbf{A}^+. \end{aligned}$$

N Uslov $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$ ovde ima funkciju kontrole postupka.

Posledica leme. Neka je

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$\mathbf{B}^+ = \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{A},$$

gde je

$$\alpha = \frac{1}{(1+k^2)(a^2+b^2)},$$

Dokazati !!!

Kontrolni primer, primenom postupka u Primeru 8.4

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 2, b = 1, k = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{50}$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

■ **Primer 8.5**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = b = 1, \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Primer 8.6**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 1, b = 2, k = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{25}$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Primer 8.7**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = b = k = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Primer 8.8**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 1, b = 2, k = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Primer 8.9**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 1, b = -1, k = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Primer 8.10** Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokazat da je

a)

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$(\mathbf{AB})^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B}^+\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

odakle zaključujemo da je, u opštem slučaju, $(\mathbf{AB})^+ \neq \mathbf{B}^+\mathbf{A}^+$. ■

■ **Primer 8.11** Za datu matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

izračunati $\mathbf{A}^+$. ■

Dokaz

Neka je

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}.$$

Formalnu računicu, koja sledi, prepuštamo čitaocu.

Iz uslova $(\mathbf{AA}^+)^T = \mathbf{AA}^+$, sledi da je

$$b + c = d + e.$$

Iz uslova $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$, je

$$b = a + d, \quad c = d, \quad c + f = e.$$

Iz uslova $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} a+b&=1, & a+d+b+e&=1, & d+e&=0,\\ b+c&=0, & b+e+c+f&=1, & e+f&=1. \end{aligned}$$

Iz ovog sistema jednačina dobijamo

$$b = \frac{1}{3} = e = -d = -c, \quad a = \frac{2}{3}, \quad f = \frac{2}{3}.$$

Prema tome je

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ostaje nam uslov $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$. Lako je pokazati da je

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{I}_2,$$

gde je $\mathbf{I}_2$ jedinična matrica u dvodimenzionalnom prostoru. Onda je, trivijalno,

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{I}_2 = \mathbf{A}^+.$$

Praktično uslov $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$ je kontrolni.

Zadatak 8.2 Izračunati Mur-Penrozovu matricu za sledeće matrice

a)

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 1+i & 0 \end{pmatrix},$$

b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Primer 8.12** Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pokazati da je

$$\mathbf{A}^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^{T}$$

■

■ **Primer 8.13** Pokazati da je za

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{+} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{I}_1.$$

■

■ **Primer 8.14** Neka je matirca

$$\mathbf{A} = (a), \quad a \neq 0.$$

Odrediti $\mathbf{A}^{+}$. ■

Zadatak 8.3 Dokazati da je

a)

$$(\mathbf{A}^{+})^{+} = \mathbf{A},$$

b)

$$(\mathbf{A}^{T})^{+} = (\mathbf{A}^{+})^{T}.$$

■

Zadatak 8.4 Dokazati da je

$$(c\mathbf{A})^{+} = \begin{cases} \frac{1}{c}\mathbf{A}^{+}, & c \neq 0, \\ 0, & c = 0. \end{cases}$$

■

9. Diferenciranje

9.0.1 Vertikalni i horizontalni dvotačkasti proizvodi

U slučaju tenzora drugog reda postoje samo dve mogućnosti kontrakcije po dva indeksa - prema položaju indeksa po kojima se vrši kontrakcija. Nazivaju se **vertikalna** i **horizontalna kontrakcija**.

Najjednostavniji primer je proizvod tenzora $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}$:

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}):(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}),$$
$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot\cdot(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}).$$

Po tom pravilu lako je definisati ove proizvode za proizvoljne tenzore drugog reda.

Radi jednostavnosti dajemo ih u prostoru $\mathbb{E}_3$ u odnosu na bazu $\mathbf{g}_i$, $i = 1,2,3$:

$$\mathbf{A} = A^{ij}\,\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}_j, \quad \mathbf{B} = B_{ij}\,\mathbf{g}^i\otimes\mathbf{g}^j.$$

Onda je

$$\mathbf{A}:\mathbf{B} = A^{ij}B_{ij} = A^i{}_jB_i{}^j = A_i{}^jB^i{}_j = A_{ij}B^{ij} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T),$$
$$\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{B} = A^{ij}B_{ji} = A^i{}_jB^j{}_i = A_i{}^jB_j{}^i = A_{ij}B^{ji} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}),$$
$$\|\mathbf{A}\| := (\mathbf{A}:\mathbf{A})^{1/2},$$
$$\mathbf{A}:(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{B}^T\mathbf{A}):\mathbf{C} = (\mathbf{A}\mathbf{C}^T):\mathbf{B},$$
$$\mathbf{A}:(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}):\mathbf{A}.$$

Lako je pokazati da je

$$\mathbf{A}:\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T\cdot\cdot\mathbf{B}.$$

Generalizacija na proizvode više tenzora drugog reda je očigledna.

9.1 Diferenciranje skalarnih funkcija

Pretpostavimo da je $\varphi(\mathbf{u})$ neprekidna i diferencijabilna skalarna funkcija vektora $\mathbf{u}$. Onda je

$$\varphi(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\varphi(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{v})\Big|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} O(\varepsilon^2) = 0.$$

odakle sledi da je

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{v})-\varphi(\mathbf{u})}{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\varphi(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{v})\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Prema tome, izvod funkcije $\varphi(\mathbf{u})$ u odnosu na $\mathbf{u}$ u pravcu $\mathbf{v}$ je definisan kao linearni operator $\mathrm{D}\varphi(\mathbf{u})[\mathbf{v}]$

$$\varphi(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varepsilon\mathrm{D}\varphi(\mathbf{u})[\mathbf{v}] + O(\varepsilon^2),$$

gde je $O(\varepsilon^2)$ infinitezimala višeg reda, koja isčezava brže nego ε

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon} = 0.$$

Napominjemo da koristimo zagradu $[\cdot]$ da bi istakli linearnost po $\mathbf{v}$. Prema tome, izvod funkcije $\varphi(\mathbf{u})$ u pravcu $\mathbf{v}$ je

$$D\varphi(\mathbf{u})[\mathbf{v}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\varphi(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{v})\Big|_{\varepsilon=0}$$

U literaturi se često koristi i oznaka

$$D\varphi(\mathbf{u}) = \partial_{\mathbf{u}}\varphi(\mathbf{u}).$$

Ova definicija se može proširiti i na izvode tenzorskih funkcija zavisnih od tenzora proizvoljnog reda. To ćemo ilustrovati na sledećim primerima.

N Uobičajeno je u diferencijalnoj geometriji da se za $f(\mathbf{x})$ piše

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}f(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{v})\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} f(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}f = \mathbf{v}(f).$$

Na sledećim funkcijama dajemo postupak izračunavanja njihovih izvoda.

■ **Primer 9.1** Neka je $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$. Njen izvod je

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\varphi(\mathbf{u})[\mathbf{v}] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\varphi(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{v})\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{v})\right]\Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+2\varepsilon\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\varepsilon^2\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)\Big|_{\varepsilon=0} = 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v},\end{aligned}$$

ili, s obzirom na proizvoljnosti vektora $\mathbf{v}$,

$$D\varphi(\mathbf{u}) = 2\mathbf{u}. \tag{9.1}$$

■

■ **Primer 9.2** Izvod od $\det(\mathbf{A})$.

Neka je $\varphi(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$, gde je $\mathbf{A}$ regularan tenzor. Onda je

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{B}) &= \det\varepsilon\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}+\varepsilon^{-1}\mathbf{I}) = \varepsilon^3\det(\mathbf{A})\det\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}+\varepsilon^{-1}\mathbf{I}\right) = \\ &= \varepsilon^3\det(\mathbf{A})\left(\varepsilon^{-3}+\varepsilon^{-2}I_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}}+\varepsilon^{-1}II_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}}+III_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}}\right) = \\ &= \det(\mathbf{A})\left(1+\varepsilon I_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}}+O(\varepsilon^2)\right).\end{aligned}$$

Prema tome je

$$\mathrm{D}\varphi(\mathbf{A})[\mathbf{B}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\varphi(\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{B})\Big|_{\varepsilon=0} = \det(\mathbf{A})\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right).$$

Kako je $D\varphi(\mathbf{A}) = \varphi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$, sledi da je

$$\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) : \mathbf{B} = (\det\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T} : \mathbf{B},$$

ili, s obzirom na proizvoljnost tenzora $\mathbf{B}$,

$$\det{}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \frac{\partial\det\mathbf{A}}{\partial\mathbf{A}} = (\det\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}. \tag{9.2}$$

■

■ **Primer 9.3** Izvod od $\mathrm{tr}\mathbf{A}$.

Neka je $I_{|\mathbf{A}}$. Onda je

$$DI_{|\mathbf{A}}[\mathbf{B}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[I_{\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{B}}\right]_{\varepsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\mathrm{tr}\mathbf{A}+\varepsilon\mathrm{tr}\mathbf{B}\right)_{\varepsilon=0} = \mathrm{tr}\mathbf{B} = \mathbf{I} : \mathbf{B}.$$

■

■ **Primer 9.4** Izvod $II_{|\mathbf{A}} = \mathrm{tr}\mathbf{A}^2$.

$$\begin{aligned}DI_{|\mathbf{A}^2}[\mathbf{B}] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}I_{(\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{B})^2}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[\mathbf{A}:\mathbf{A}+\varepsilon(\mathbf{A}:\mathbf{B}+\mathbf{B}:\mathbf{A})+O(\varepsilon^2)\right]_{\varepsilon=0} = \\ &= 2\mathbf{A}:\mathbf{B}\end{aligned}$$

■

Zadatak 9.2

Glavne invarijante tenzora drugog reda su:

$$I_1(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}\mathbf{A},$$
$$I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\mathbf{A}) - \mathrm{tr}\mathbf{A}^2\right],$$
$$I_3(\mathbf{A}) = \det\mathbf{A}.$$

Pokazati da je:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{I},$$
$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{A}} = I_1\mathbf{I} - \mathbf{A}^T,$$
$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{A}} = (\det\mathbf{A})\left[\mathbf{A}^{-1}\right]^T = \left(\mathbf{A}^2 - I_1\mathbf{A} + I_2\mathbf{I}\right)^T.$$

Zadatak 9.3

Pokazati da je

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbb{I}$$

gde je $\mathbb{I} = \delta_{ik}\delta_{jl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_\otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$.

Sva dosadašnja razmatranja odnosila su se na skalarne funkcije tenzorske promenljive. Od interesa je da se razmotri problem

9.3.1 Izvod tenzorske funkcije tenzorske promenljive

Zadržavamo se na Tenzorskoj funkciji koja zavisi od tenzora drugog reda.

Neka je $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ tenzor drugog reda koji zavisi od tenzora drugog reda $\mathbf{A}$. Onda je, po definiciji

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{A}} : \mathbf{B} = D\mathbf{F}(\mathbf{A})[\mathbf{B}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathbf{F}(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{B})\bigg|_{\varepsilon=0}$$

izvod funkcije $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ u pravcu $\mathbf{B}$.

■ **Primer 9.5** Data je tenzorska funkcija $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$. Njen izvod u pravcu $\mathbf{B}$ je

$$
\begin{aligned}
D\mathbf{G}(\mathbf{A})[\mathbf{B}] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[\mathbf{G}(\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{B})\right]\Big|_{\varepsilon=0} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[\mathbf{A}^2+\varepsilon(\mathbf{AB}+\mathbf{BA})+\varepsilon^2\mathbf{B}^2\right]\Big|_{\varepsilon=0} = \mathbf{AB}+\mathbf{BA}.
\end{aligned}
$$

■

Pitanje glasi kako glasi izraz za $D\mathbf{G}(\mathbf{A})$? Može se pokazati da je to tenzor četvrtog reda. Računamo ga iz izraza

$$
\frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial A_{ij}A_{jk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k}{\partial A_{pq}} \otimes \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q = \frac{\partial A_{ij}A_{jk}}{\partial A_{pq}}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q,
$$

gde je

$$
\frac{\partial A_{ij}A_{jk}}{\partial A_{pq}} = \delta_{ip}\delta_{jq}A_{jk} + A_{ij}\delta_{jp}\delta_{kq} = \delta_{ip}A_{qk} + A_{ip}\delta_{kq}.
$$

Znači

$$
D\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \mathbf{A}} = (\delta_{ip}A_{qk} + A_{ip}\delta_{kq})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q
$$

Na isti način se određuju izvodi tenzorskih funkcija bilo kog reda.

9.4 Razvijanje u Tejlorov red

Matrice, posebno invertibilne, igraju glavnu ulogu u najvećem delu diferencijalne geometrije. To prvenstveno proizilazi iz Tejlorove[1] teoreme: glatko preslikavanje između dva Euklidska prostora može biti dobro aproksimirano u okolini bilo koje tačke linearnim preslikavanjem, diferencijalom u toj tački. Teoreme o inverznim i implicitnim funkcijama zasnivaju se na ovakvim razmatranjima. U svakom slučaju matrice i pojmovi iz linearne algebra se pojavljuju u svim narednim poglavljima.

9.4.1 Razvijanje u Tejlorov red skalarne funkcije

Neka je $f(\mathbf{x})$ neprekidna i diferencijabilna funkcija u $\mathbb{R}^n$. Onda je

$$f(\mathbf{x}+t\,\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{x}+t\,\mathbf{v})\bigg|_{t=0} + O(t^2), \quad \lim_{t\to 0} O(t^2) = 0, \tag{9.3}$$

pa je

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{x}+t\,\mathbf{v})\bigg|_{t=0}. \tag{9.4}$$

Uobičajeno je da se u diferencijalnoj geometriji piše

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{x}+t\,\mathbf{v})\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(\mathbf{x}+t\,\mathbf{v}). \tag{9.5}$$

Isti izraz se može napisati i u sledećim oblicima

$$\mathrm{d}f\,[\mathbf{v}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{x}+t\,\mathbf{v})\bigg|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, v^i = \mathbf{v}(f). \tag{9.6}$$

9.4.2 Razvijanje u Tejlorov red vektorske funkcije

Neka je $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ regularno, neprekidno i diferencijabilno vektorsko polje u $\mathbb{R}^n$. Onda je autonomni sistem diferencijalnih jednačina definisan sa

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{9.7}$$

Skup njenih rešenja određuju kongruenciju krivih $\mathbf{x}(t)$ u $\mathbb{R}^n$. U slučaju $t=0$ kriva $\mathbf{x}(t)$ kongruencije prolazi kroz tačku $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ u $\mathbb{R}^n$. Pod datim uslovima rešenja autonomnog sistema su jedinstvena.

[1] Taylor

U oklini tačke $\mathbf{x}_0$ ono se može predstaviti u obliku Tejlorovog reda

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}|_{t=0} + t\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} + \frac{t^2}{2!}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}\bigg|_{t=0} + \cdots = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!}\,\frac{\mathrm{d}^n\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^n}\bigg|_{t=0}, \tag{9.8}$$

ili u sažetom obliku

$$\mathbf{x}(t) = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!}\,\frac{\mathrm{d}^n\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^n}\bigg|_{t=0} = e^{t\frac{d}{dt}}\,\mathbf{x}_0. \tag{9.9}$$

N U ovom izrazu $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ je operator diferenciranja. On prirodno sledi iz jednačine $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$. U tom slučaju možemo da pišemo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^i = v^i = v^j\,\delta_i^j = v^j\,\frac{\partial}{\partial x^j}x^i,$$

odakle sledi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = v^j\,\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

U ovoj reprezentaciji $\mathbf{v} = v^j\,\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ je predstavljen kao operator, za razliku od njegove geometrijske reprezentacije $\mathbf{v} = v^i\,\mathbf{e}_i$. Imajući to u vidu pogodno je takođe pisati

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{v}}\,\mathbf{x}_0. \tag{9.10}$$

Ovaj izraz je primer jednoparametarske grupe transformacija. Zaista, za $t = 0$ sledi identitet transformacije $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{v}}\,\mathbf{x}_0 :\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Takođe je

$$e^{s\mathbf{v}}\,\mathbf{x}(t) = e^{s\mathbf{v}}\,e^{t\mathbf{v}}\,\mathbf{x}_0 = e^{(t+s)\mathbf{v}}\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t+s).$$

Geometrijska interpretacija ovog izraza je sledeća. Tačka $\mathbf{x}_0$, se preslikava u tačku $\mathbf{x}(t)$, koja se nalazi na krivoj $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{v}}\,\mathbf{x}_0$, a koja je određena vrednošću parametra t. Ova tačka se preslikava u tačku $\mathbf{x}(t+s)$ na istoj krivoj $e^{(t+s)\mathbf{v}}\,\mathbf{x}_0$ i koja je određena vrednošću zbira parametara $(t+s)$.

Očigledno je $e^{-t\mathbf{v}}\,e^{t\mathbf{v}}\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$, što znači da su $e^{-t\mathbf{v}}$ i $e^{t\mathbf{v}}$ inverzne transformacije.

U literaturi, posebno difercijalnoj geometriji, opšte rešenje jednačine $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, piše se u obliku

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(\mathbf{x}_0, t) = \varphi_t(\mathbf{x}_0),$$

kada se želi istaći ponašanje funkcije $\varphi(\mathbf{x}_0, t)$, pri određenoj vrednosti parametra t.

U slučaju neautonomnog sistema

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}, \tag{9.11}$$

pravilo koje određuje trajektoriju kao funkciju jednog parametra (vreme) na skupu stanja (fazni prostor) definiše dinamički sistem.

9.5 Matrične funkcije

Podsećamo čitaoce na sledeće stavove iz teorije redova i nizova.

Ako su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ nizovi skalara onda:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (ili $\{a_n\} \to a$), znači da za svaki pozitivan broj ε može da se nađe ceo broj $m(\varepsilon)$, tako da je $|a_n - a| < \varepsilon$ uvek kada je $n > m(\varepsilon)$.
2. Ako $\{a_n\} \to a$ i $\{b_n\} \to b$ onda $\{c\,a_n + d\,b_n\} \to c\,a + d\,b$ za svaki skalar c i d.
3. Ako $\{a_n\} \to a$ i $\{b_n\} \to b$ onda $\{a_n b_n\} \to ab$.
4. $\{a^n\} \to 0$ akko je $|a| < 1$.

Konvergencija beskonačnih redova je definisana preko niza parcijalnih suma koji konvergiraju:

5. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, znači da $\{p_r\} \to s$ gde je $p_r = \sum_{n=0}^{r} a_n$.
6. Stepeni red kompleksnog broja z $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergira za $|z| < r$, gde je

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Za niz $\{\mathbf{A}_m\}$ kompleksnih matrica reda n, gde je $\mathbf{A}_m = \left[a_{(m)ij}\right]$, definisaćemo konvergenciju u članovima niza njihovih elemenata.

Definicija 9.5.1 Neka je $\{\mathbf{A}_m\}$ niz matrica reda n. Kažemo da je $\lim_{m\to\infty} \mathbf{A}_m = \mathbf{A}$ ($\mathbf{A}_m \to \mathbf{A}$), ako svaki od n^2 nizova komponenti konvergira, tj.

$$\lim_{m\to\infty} a_{(m)ij} = a_{ij}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Teorema 9.5.1 Ako niz matrica $\{\mathbf{A}_m\}$ i $\{\mathbf{B}_m\}$ konvergira ka $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, redom, onda $\{\mathbf{A}_m \mathbf{B}_m\} \to \mathbf{AB}$ i $\{a\mathbf{A}_m + b\mathbf{B}_m\} \to a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$, za svako $a,b \in F$.

Dokaz

Na osnovu definicije množenja matrica sledi

$$\mathbf{A}_m \mathbf{B}_m = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{(m)ij} b_{(m)jk} \right].$$

Onda, na osnovu navedenih svojstava nizova skalara biće

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{A}_m \mathbf{B}_m = \lim_{m\to\infty} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{(m)ij} b_{(m)jk}\right] = \left[\sum_{j=1}^{n} \lim_{m\to\infty} a_{(m)ij} \lim_{m\to\infty} b_{(m)jk}\right] =$$
$$= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right] = \mathbf{A}\mathbf{B}.$$

Na isti način se dokazuje drugi deo teoreme.

Teorema 9.5.2 Neka je $f(z)$ dato stepenim redom

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m, \quad |z| < r. \tag{9.12}$$

Neka elementi matrice $\mathbf{A}$ zadovoljavaju relaciju (9.12). Onda je

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \mathbf{A}^m.$$

Posledica 9.5.3 Neka je $\mathbf{A}$ neka nesingularna matrica. Onda je

$$f\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}\right) = \mathbf{C}^{-1} f(\mathbf{A})\mathbf{C}.$$

Dokazati. Uočimo sličnost sa Teoremom 7.2.7, na str. 162.
Neka je $\mathbf{A}(t)$ matrica reda n čiji su elementi funcije od t.

Definicija 9.5.2 Ako je $\mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)]$ onda je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a_{ij}(t)\right] \quad \text{i} \quad \int_a^b \mathbf{A}(t)\,\mathrm{d}t = \left[\int_a^b a_{ij}(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

■ **Primer 9.6**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} 2t^2 & \sin 3t \\ e^{-5t^2} & \mathrm{th}^{-1} 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t & 3\cos 3t \\ -10t\, e^{-5t^2} & \dfrac{1}{1+9t^2} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t \begin{pmatrix} e^{5t} & \dfrac{1}{t+1} \\ \sin 3t & 7t - t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\left(e^{5t}-1\right) & \ln(t+1) \\ -\frac{1}{3}(\cos 3t - 1) & \dfrac{7t^3}{2} - \dfrac{t^4}{4} \end{pmatrix}.$$

Lako je pokazati da su ovde definsani operatori linearni. ■

Teorema 9.5.4 Ako su $\mathbf{A}(t)$ i $\mathbf{B}(t)$ matrice reda n čije su komponente diferencijabilne, onda je za svako a, b

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\mathbf{A}(t)+b\mathbf{B}(t)\right)=a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)+b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{B}(t),$$

i

$$\int\limits_a^b \left(a\mathbf{A}(t)+b\mathbf{B}(t)\right)\,\mathrm{d}t=a\int\limits_a^b \mathbf{A}(t)\,\mathrm{d}t+b\int\limits_a^b \mathbf{B}(t)\,\mathrm{d}t$$

pod uslovom da su komponente integrala definisane i integrabilne.

Teorema 9.5.5

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\right)=\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{B}(t)+\mathbf{A}(t)\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Dokaz prepuštamo čitaocu. ❑

Specijalan i veoma važan slučaj je funkcija

$$f(z)=e^z=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!},$$

pri čemu ovaj red konvergira za svako kompleksno z. Onda je matrična funkcija

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}=\mathbf{I}+t\,\mathbf{A}+\frac{(t\,\mathbf{A})^2}{2!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\,\mathbf{A})^k}{k!}.$$

Teorema 9.5.6 Za bilo koju matricu $\mathbf{A}$ je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{A}\,\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}.$$

Dokaz

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\,\mathbf{A}^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\,t^{k-1}\,\mathbf{A}^k}{k!}=\mathbf{A}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\,t^{k-1}\,\mathbf{A}^{k-1}}{(k-1)!}=\mathbf{A}\,\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}.$$

Navedimo sledeće jednostave primere koji su bitni za dalje izlaganje.

Neka je

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}. \tag{9.13}$$

Onda je

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Očigledno je da je $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, tj. matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ nisu komutativne.

Zadatak 9.1 Za matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, definisane jednačinama (9.13), izračunati:

$$e^{\mathbf{A}},\ e^{\mathbf{B}},\ e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}},\ e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}.$$

■

Lako je pokazati da je

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{B}^k = \mathbf{0} \quad \text{za} \quad k \geq 2.$$

Tada je $e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + t\mathbf{A}$. Za $t = 1$ biće

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na isti način se pokazuje da je

$$e^{\mathbf{B}} = \mathbf{I} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

U slučaju $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ biće

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{2k} = \mathbf{I} \quad \text{i} \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^{2k+1} = \mathbf{A}+\mathbf{B}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Iz $e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}$, za $t = 1$ dobijamo da je

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 1 & \operatorname{sh} 1 \\ \operatorname{sh} 1 & \operatorname{ch} 1 \end{pmatrix}.$$

Direktnim množenjem sledi da je

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odavde se takođe vidi da je

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}.$$

Ovaj primer nas dovodi do sledećeg opšteg zaključka.

Teorema 9.5.7 Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutativne matrice. Onda je $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$.

Dokaz

Prvo ćemo pokazati da je za bilo koju matricu $\mathbf{A}$

$$\left(e^{t\mathbf{A}}\right)^{-1} = e^{-t\mathbf{A}}.$$

U tom cilju posmatrajmo matricu

$$\mathbf{H}(t) = e^{t\mathbf{A}}\, e^{-t\mathbf{A}}.$$

Onda je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{H}(t) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{t\mathbf{A}}\, e^{-t\mathbf{A}}\right] = \mathbf{A}\, e^{t\mathbf{A}}\, e^{-t\mathbf{A}} + e^{t\mathbf{A}}\,(-\mathbf{A})\, e^{-t\mathbf{A}} = \mathbf{0},$$

jer su matrice $\mathbf{A}$ i $e^{t\mathbf{A}}$ komutativne. Znači matrica $\mathbf{H}(t) = \mathbf{C}$, gde je $\mathbf{C}$ neka konstantna matrica. Određujemeo je iz uslova

$$\mathbf{C} = \mathbf{H}(0) = e^{0\mathbf{A}}\, e^{-0\mathbf{A}} = \mathbf{I}.$$

Ali tada je $\mathbf{H}(t) = e^{t\mathbf{A}}\, e^{-t\mathbf{A}} = \mathbf{I}$ za svako t, odakle sledi da je $\left(e^{t\mathbf{A}}\right)^{-1} = e^{-t\mathbf{A}}$.

Dokaz Teoreme izvodimo na isti način.

Definišemo matricu

$$\mathbf{K}(t) = e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}\, e^{-t\mathbf{B}}\, e^{-t\mathbf{A}}.$$

Onda je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{K}(t) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\, e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}\, e^{-t\mathbf{B}}\, e^{-t\mathbf{A}} + \\ + e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}\,(-\mathbf{B})\, e^{-t\mathbf{B}}\, e^{-t\mathbf{A}} + e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}\, e^{-t\mathbf{B}}\,(-\mathbf{A})\, e^{-t\mathbf{A}}.$$

Prema uslovu teoreme je $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, odakle sledi da je $\mathbf{A}$ komutativno sa $e^{-\mathbf{B}}$. Takođe je $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ komutativno sa $e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}$, pa je $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}$, tj. $\mathbf{K}(t) = \mathbf{D}$, gde je $\mathbf{D}$ konstantna marica. Određujemo je iz uslova $\mathbf{D} = \mathbf{K}(0) = \mathbf{I}$. Onda je

$$\mathbf{K}(t) = e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}\, e^{-t\mathbf{B}}\, e^{-t\mathbf{A}} = \mathbf{I},$$

za svako t. Koristeći izraz $\left(e^{t\mathbf{A}}\right)^{-1} = e^{-t\mathbf{A}}$ dobijamo da je $e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}\, e^{-t\mathbf{B}} = e^{t\mathbf{A}}$. Na isti nači sledi da je $e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})} = e^{t\mathbf{A}}\, e^{t\mathbf{B}}$. Za $t = 1$ konačno dobijamo da je

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}\, e^{\mathbf{B}}.$$

Ova teorema je primer opšteg principa da funkcionalni identiteti jedne skalarne promenljive zadžavaju svoju vrednost za matrice, kao na primer

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\mathbf{A} + \cos^2\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

dok matrični analogoni funkcionalnih identiteta po jednoj ili više promenljivih važe samo za komutativne matrice.

Na primer, za svaku matricu $\mathbf{A}$, reda n, pišemo

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{A}) &= \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\mathbf{A}^{2k}}{(2k)!}, \\ \sin(\mathbf{A}) &= \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{\mathbf{A}^{2k-1}}{(2k-1)!}. \end{aligned} \tag{9.14}$$

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1+x^2}{1-x} \quad &\Rightarrow \quad f(\mathbf{A}) = (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}^2\right), \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad |x| < 1, \\ \log(\mathbf{I}+\mathbf{A}) &= \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^3}{3} - \frac{\mathbf{A}^4}{4} + \cdots, \quad \rho(\mathbf{A}) < 1, \end{aligned}$$

gde je

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_t|\}$$

spektralni radijus matrice $\mathbf{A}$.

Pri tome pretpostavljamo da su $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ različiti karakteristični koreni matrice $\mathbf{A} \in \mathscr{C}_{n\times n}$.

Napomenimo da je $\rho(\mathbf{A})$ poluprečnik najmanjeg kruga u kompleksnoj ravni sa centrom u koordinatnom početku, koji sadrži sve karakteristične vrednosti matrice $\mathbf{A}$. Pomoću spektralnog poluprečnika definišemo kriterijum konvegrencije za važne matrične nizove.

N Koristeći funkciju

$$\log z = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1)^m}{n},$$

koja je analitička za $|z| < 1$, definiše se kompleksna matrica reda n izrazom

$$\log \mathbf{A} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(\mathbf{A}-\mathbf{I})^m}{n}$$

u oblasti konvergencije ovog reda $\|\mathbf{A}-\mathbf{I}\|$.

Ako se matrica $\mathbf{A}$ može dijagonalizovati, onda postoji regularna matrica $\mathbf{M}$, tako da je
$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1},$$
gde je
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
Onda je
$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\right)^k}{k!} = \mathbf{M}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{D})^k}{k!}\right)\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}\mathbf{M}^{-1}$$
tj.
$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}\mathbf{M}^{-1}. \tag{9.15}$$
Iz (9.15) sledi da je
$$\det e^{\mathbf{A}} = \det\left(\mathbf{M}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}\mathbf{M}^{-1}\right) = \det\left\{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}\right\} =$$
$$= e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2} \cdots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n},$$
tj.
$$\det e^{\mathbf{A}} = e^{\operatorname{tr}\mathbf{A}}. \tag{9.16}$$
Postavlja se pitanje da li ovaj izraz važi u opštem slučaju, tj. u slučaju kada se matrica $\mathbf{A}$ ne može dijagonalizovati. U tom slučju koristimo Žordanovu normalanu formu

$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{S}$, gde je $\mathbf{S}$ neka regularna matrica, i činjenicu da je determinanta trougaone matrice jednaka prozvodu elementa na dijagonali. Onda je
$$\det e^{\mathbf{A}} = \det e^{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{S}} = \det\left(\mathbf{S}^{-1}e^{\mathbf{J}}\mathbf{S}\right) = \det e^{\mathbf{J}} = \prod_{i=1}^{n} e^{j_{ii}} = e^{\sum_{i=1}^{n} j_{jj}},$$
tj.
$$\det e^{\mathbf{A}} = e^{\operatorname{tr}\mathbf{J}} = e^{\operatorname{tr}\mathbf{A}}, \tag{9.17}$$
jer je $\operatorname{tr}\mathbf{J} = \operatorname{tr}\mathbf{A}$.

9.6 Lagranževa polinomijalna interpolacija

U matematici postoje razne metode i postupci koji se koriste pri razmatranju ponašanja funkcija. U najvećem broju slučajeva neophodno je da ove funkcije budu neprekidne ili diferencijabilne. To predstavlja, u velikom broju slučajeva, problem u realnim primenama u slučajevima kada se za funkcije znaju njene diskretne vrednosti koje se dobijaju, na primer, iz eksperimenata. Tada je potrebno da konstruišemo neprekidne funkcije na osnovi diskretnih podataka. Problem određivanja takvih funkcija u literaturi je poznat pod imenom **data fiting** - **fitovanje**. U ovom delu se zadržavamo na specijalnom slučaju poznatom pod nazivom **polinomijalna interpolacija**.

S obzirom na specifičnost problema uvodimo sledeće oznake:

$\mathfrak{F}$ - proizvoljno polje,
$\mathfrak{F}(x)$ - polje racionalnih funkcija,
$\mathfrak{F}[x]$ - vektorski prostor svih polinoma konačnog stepena po x sa koeficijentima na $\mathfrak{F}$,
$\mathfrak{F}_{m\times n}$ - sve $m\times n$ matrice na $\mathfrak{F}$,
$\mathfrak{F}[x]_{m\times n}$ - sve $m\times n$ matrice na $\mathfrak{F}$,
$\mathfrak{V}$ - proizvoljni vektorski prostor.

9.6.1 Uvod

Za svako $p(x)\in\mathfrak{F}[x]$ postoje jednoznačni koeficijenti $a_i\in\mathfrak{F}$, tako da je

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i.$$

Ako je $a_n\neq 0$, onda je stepen polinoma $p(x)$ jednak n; kratko step$p(x)=n$. Ako je $a_n=1$ za polinom se kaze da je **moničan**.

Konstantni polinom različit od nule je stepena nula. Stepen nula polinoma $O(X)$ je nedefinisan.

Za bilo koje $x=b\in\mathfrak{F}$ i za bilo koji polinom $p(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$, vrednost polinoma je data sa

$$p(b)=\sum_{i=0}^{n}a_ib^i.$$

Sledeće teoreme navodimo bez dokaza. Mogu se naći u svakoj knjizi iz Linearne algebre.

Teorema 9.6.1 Neka su $f(x)$ i $d(x)$ bilo koja dva elementa iz $\mathfrak{F}[x]$, gde je $d(x)\neq 0$. Onda postoji jednoznačno određen količnik $q(x)$ i ostatak $r(x)$, tako da je

$$f(x) = q(x)d(x) + r(x),$$

gde je stepen $r(x) <$ stepen $d(x)$ ili $r(x) = 0$.

Ako je $f(x) = q(x)d(x)$ onda kažemo da su $d(x)$ i $q(x)$ **faktori** od $f(x)$. Faktorizacija je netrivijalna, ako oba faktora imaju pozitivne stepene.

Ako polinom $f(x)$ nema takve faktore (netrivijalne faktore) u $\mathfrak{F}[x]$, onda kažemo da je nesvodljiv u $\mathfrak{F}[x]$.

Teorema 9.6.2 — Teorema ostatka. Ako je $f(x) \in \mathfrak{F}[x]$ deljivo sa $x - a$, onda je $f(a) = 0$.

Teorema 9.6.3 — Faktor teorema. Ako je $f(x) \in \mathfrak{F}[x]$ takvo da je $f(a) = 0$ za $a \in \mathfrak{F}$, onda je $x - a$ faktor od $f(x)$, tj. postoji $q(x) \in \mathfrak{F}[x]$, tako da je $f(x) = (x - a)q(x)$.

9.6.2 Lagranževa interpolacija

Neka je

$$\mathfrak{V} = \{p(x) \in \mathfrak{F}[x],\ \text{stepen}\, p(x) < n\} = \text{rasteže}(1, x, \ldots, x^{n-1}).$$

Neka su $t_1, t_2, \ldots, t_n$ proizvoljni elementi od $\mathfrak{F}$. Pokazaćemo da postoji jednoznačna baza $\{h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x)\}$ za $\mathfrak{F}$ za koju važi

$$h_i(t_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Na osnovu Faktor teoreme 9.6.3 sledi da

$$s_i(x) = (x - t_1)(x - t_2) \cdots (x - t_{i-1})(x - t_{i+1}) \cdots (x - t_n),$$

mora biti faktor $h_i(x)$. Očigledno je da je stepen $s_i(x) = n - 1$. Prema tome, ako je $h_i(x)$ u $\mathfrak{V}$, onda je $h_i(x) = cs_i(x)$. Specijalno, $1 = h_i(t_i) = cs_i(t_i)$, odakle sledi da je

$$c = \frac{1}{s_i(t_i)}.$$

Znači,

$$h_i(x) = \frac{(x - t_1)(x - t_2) \cdots (x - t_{i-1})(x - t_{i+1}) \cdots (x - t_n)}{(t_i - t_1)(t_i - t_2) \cdots (t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1}) \cdots (t_i - t_n)} = \prod_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} \frac{(x - t_j)}{(t_i - t_j)}.$$

Polinomi $h_i(x)$ nazivaju se **interpolacioni Lagranževi polinomi**. Lako je proveriti da je

$$h_i(t_j) = \delta_{ij}.$$

Ovako određeni interpolacioni Lagranževi polinomi su linearno nezavisni. Polazimo od nula polinoma $O(x)$ u $\mathfrak{V}$. Onda je

$$O(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i h_i(x).$$

S druge strane je $O(x) = 0$ za svako $x \in \mathfrak{F}$. Onda, iz

$$0 = O(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i h_i(x) \quad \Rightarrow \quad c_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Prema tome $h_i(x)$ su linearno nezavisni polinomi i formiraju bazu u $\mathfrak{V}$.

Neki primeri primene interpolacionih Lagranževih polinomi

■ **Primer 9.7** Za bilo koje $p(x) \in \mathfrak{V}$ biće

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i h_i(x).$$

Koeficijente razlaganja po $h_i(x)$ određujemo iz uslova $h_i(a_j) = \delta_{ij}$, odakle sledi da je $p(a_i) = c_i$. Znači

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} p(t_i) h_i(x). \tag{9.18}$$

■

Ovaj izraz (9.18) se naziva **Lagranževa interpolaciona formula**.

■ **Primer 9.8** Neka je $f(x)$ bilo koja funkcija i neka su $f(t_i)$ njene vrednosti u tačkama $t_i \in \mathfrak{F}$. Formirajmo polinom

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) h_i(x).$$

Ovaj polinom stepena manjeg od n ima iste vrednosti kao i $f(x)$ u $t_i \in \mathfrak{F}$. Nazivamo ga interpolacionim polinomom za $f(x)$. ■

■ **Primer 9.9** Drugi način inerpretacije polinoma $p(x) = \sum_{i=1}^{n} p(t_i) h_i(x)$, stepena manjeg od n, je jednoznačni polinom čiji grafik sadrži tačke

$$(t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots, (t_n, y_n),$$

tako da je

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i h_i(x).$$

■

Konkretan primer

■ **Primer 9.10** Neka je $f(x) \in \mathfrak{V} \subset \mathfrak{F}[x]$. Neka je $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3 \in \mathfrak{F}$. Lagranževi interpolacioni polinomi su

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 6), \\ h_2(x) &= \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x^2 - 4x + 3), \\ h_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2). \end{aligned}$$

Za bilo koje $f(x) \in \mathfrak{V}$ mora biti

$$f(x) = f(1)h_1(x) + f(2)h_2(x) + f(3)h_3(x).$$

Specijalno za

$$g(x) = 3x^2 - 5x + 4 \in \mathfrak{V},$$

pošto je $g(1) = 2$, $g(2) = 6$ i $g(3) = 16$, sledi da je

$$g(x) = 2h_1(x) + 6h_2(x) + 16h_3(x).$$

■

■ **Primer 9.11** Neka je $f(x) = x^k$. Onda je

$$x^k = \sum_{i=1}^{n} t_i^k h_i(x), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Promena baze $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ u $\mathfrak{V}$ na bazu $\{h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x)\}$ u $\mathfrak{V}$ je određena matricom

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Matrica $\mathbf{V}$ se naziva **Vanermondova matrica**[2]. Činjenica da ona određuje promenu baza, sugeriše da je ona nesingularna. To se može dokazati i ekplicitno. ■

[2] Vandermonde

U prethodnom problemu lako je pokazati da je

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$\begin{aligned} h_1(x) &= 3 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x^2, \\ h_2(x) &= -3 + 4x - x^2, \\ h_2(x) &= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

što smo već pokazali.

■ **Primer 9.12** Neka je $f(t)$ prozvoljan polinom konačnog stepena. Neka je $\mathbf{T}$ prozvoljna kvadratna matrica reda 3. Onda je $f(\mathbf{T})$ odgovarajući polnom po $\mathbf{T}$.

Sukcesivnom primenom Kejli-Hamiltonove teoreme svaki takav polinom je kvadratni polinom po $\mathbf{T}$. Pišemo ga u obliku

$$f(\mathbf{T}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{T} + a_2\mathbf{T}^2,$$

gde su koeficijenti funkcije a_0, a_1, a_2, polinomijalne funkcije invarijanata $I_{\mathbf{T}}$, $II_{\mathbf{T}}$, $III_{\mathbf{T}}$ matrice $\mathbf{T}$. Ako je matrica $\mathbf{T}$ realna i simetrična, onda se ona može dijagonalizovati.

Elementi na glavnoj dijagonali su realni karakteristični brojevi t_i, $i = 1,2,3$. Tada su:

$$I_{\mathbf{T}} = t_1 + t_2 + t_3, \quad II_{\mathbf{T}} = t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3, \quad III_{\mathbf{T}} = t_1t_2t_3,$$

realne funkcije karakterističnih brojeva $\mathbf{T}$. Takođe je

$$f(t_i) = a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2, \quad i = 1,2,3.$$

U tom slučaju je

$$h_i(t) = \prod_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{3} f(t_i)a_i,$$

gde su a_i rešenja prethodnog sistema jednačina.

Znači

$$\begin{aligned} f(\mathbf{T}) = f(t_1)\frac{(\mathbf{T}-t_2\mathbf{I})(\mathbf{T}-t_3\mathbf{I})}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + f(t_2)\frac{(\mathbf{T}-t_3\mathbf{I})(\mathbf{T}-t_1\mathbf{I})}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)} + \\ + f(t_3)\frac{(\mathbf{T}-t_1\mathbf{I})(\mathbf{T}-t_2\mathbf{I})}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}, \end{aligned}$$

gde se pozivamo na Primer 9.9. ■

Ova reprezentacija funkcije $f(\mathbf{T})$ je od velikog značaja u mehanici kontinuuma.

Teorema 9.6.4 Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ različiti karakteristični brojevi matrica $\mathbf{A}$ reda n, koja je slična dijagonalnoj matrici. Onda postoje matrice $\mathbf{P}_i$ tako da je:

(1) $\mathbf{A} = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{P}_i$,

(2) $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{0}$ za $i \neq j$, $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_i$,

(3) $\sum\limits_{i=1}^{r} \mathbf{P}_i = \mathbf{I}$.

Dokaz

Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ različiti karakteristični brojevi matrice $\mathbf{A}$ reda n. Neka su $h_1(\lambda), h_2(\lambda), \ldots, h_r(\lambda)$ asocirani Lagranžeovi polinomi i $\mathbf{P}_i = h_i(\mathbf{A})$. Lagranževa interpolaciona formula tvrdi da je

$$1 = \sum_{i=1}^{r} h_i(\lambda) \quad \text{i} \quad x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i h_i(\lambda).$$

Onda je $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{P}_i$ i $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i h_i(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{P}_i$. Minimalni polinom od $\mathbf{A}$ je $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_r)$. Kako $m(x)$ deli $h_i(x) h_j(x)$ za $i \neq j$, sledi da je $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{0}$ za $i \neq j$. Poslednja relacija sledi iz $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{P}_i$ kada se pomnoži sa $\mathbf{P}_j$, jer je tada

$$\mathbf{P}_j = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{P}_j \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_j^2.$$

10. Generalisani karakteristični vektori

U linearnoj algebri **generalisani karakteristični vektor matrice A** reda n je vektor koji zadovoljava neke kriterijume koji su relaksiraniji od onih za obične karakteristične vektore.

Neka je $\mathbb{R}^n$ vektorski prostor i neka je matrica $\mathbf{A}$ data u odnosu na neku bazu u $\mathbb{R}^n$. Može se desiti da $\mathbf{A}$ nema n linearno nezavisnih karakterističnih vektora koji formiraju bazu u $\mathbb{R}^n$. To je, kao što smo videli, slučaj kada se $\mathbf{A}$ ne može dijagonalizovati. Dešava se kada je algebarski multiplicitet bar jednog karakterističnog broja λ_i veći od njegovog geometrijskog multipliciteta (tj. od nulosti matrice $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}$, ili dimezije nula prostora $\aleph(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$). U tom slučaju λ_i se naziva **defektni karakterističan broj**, a matrica **A defektna matrica**.

Uloga i značaj generalisanih karakterističnih vektora $\mathbf{x}_i$, koji odgovaraju λ_i, zajedno sa matricom $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}$, je da generišu Žordanov[1] lanac linearno nezavisnih generalisanih karakterističnih vektora koji formiraju bazu za invarijantni prostor od $\mathbb{R}^n$. Koristeći generalisane karakteristične vektore, skup linearno nezavisnih vektora može se proširiti, ako je potrebno, kako bi se kompletirala baza od $\mathbb{R}^n$. Ova se baza može koristiti za određivanje skoro potpuno dijagonalne matrice $\mathbf{J}$ u Žordanovom normanom obliku, sličnoj matrici $\mathbf{A}$. Ovo nam onda omogućava, između ostalog, da jednostavije izračunavamo neke matrične funkcije od $\mathbf{A}$.

[1] Jordan

Matrica $\mathbf{J}$ je veoma korisna za rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

kada $\mathbf{A}$ ne može biti dijagonalizovano. Ovde se prvenstveno na tome zadržavamo.

Definicija 10.0.1 Za dati karakterističan broj λ, vektor $\mathbf{u}$ je **generalisani karakteristični vektor** ranga r, ako je

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^r\mathbf{u} = \mathbf{0},$$
$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{r-1}\mathbf{u} \neq \mathbf{0}.$$

N Karakteristični vektor je generalisani karakteristični vektor ranga 1, jer je tada $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Prelazimo na opšti prilaz.

Svaka matrica $\mathbf{A}$ reda n ima n linearno nezavisnih generalisanih vektora. Može se pokazati da je u tom smislu slična skoro dijagonalnoj matrici $\mathbf{J}$ u Žordanovom normalnom obliku. Drugačije rečeno, postoji regularna matrica, recimo $\mathbf{M}$, tako da je

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}.$$

U tom slučaju se matrica $\mathbf{M}$ naziva **generalisana modalna matrica** za matricu $\mathbf{A}$. Ako je λ algebarskog multipliciteta μ, onda $\mathbf{A}$ ima μ generalisanih karakterističnih vektore koji odgovaraju karakterističnom broju λ.

Definicija 10.0.2 Skup koji rastežu generalisani karakteristični vektori nazivamo **generalisani karakteristični prostor** od λ.

Kao motivaciju navodimo klasičan i jednostavan

■ **Primer 10.1** Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ovaj jednostvan primer već smo razmatrali u delu koji se odnosi na Karakteristične brojeve i karakteristične vektore (vidi primer 6.1, na str. 144). Tada smo pokazali da ova matrica $\mathbf{A}$ ima karakteristični broj $\lambda = 1$, čiji je algebarski multiplicitet 2 i samo jedan karakterističnan vektor $\mathbf{v}_1 = (1,0)^T$, čiji je geometrijski multiplicitet 1.

Prema tome, ova matrica se ne može dijagonalizovati. Pošto postoji samo jedan superdijagonalan element (element na dijagonali koja je susedna glavnoj dijagonali), onda će postojati samo jedan generalisani karakteristični vektor ranga većeg od 1. Drugačije rečeno, pošto je reč o prostoru $\mathbb{R}^2$, znači dimenzije 2, postojaće samo jedan generalisani karakteristični vektor čiji je rang veći od 1. Koristeći $\mathbf{v}_1 = (1,0)^T$ određujemo generalisani karakteristični vektor $\mathbf{v}_2$ iz jednačine

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = 1.$$

Komponenta x ne podleže nikakvim restrikcijama. Prema tome, generalisani vektor je

$$\mathbf{v}_2 = (a, 1)^T.$$

Obično se uzima da je $a = 0$. Kako je $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, onda je $\mathbf{v}_1$ običan karakterističan vektor. Pošto su $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ linearno nezavisni onda oni formiraju bazu od $\mathbb{R}^2$. ■

Sledi detaljniji pristup ovom veoma značajnom problemu.

Neka je matrica $\mathbf{A}$ reda n. Videli smo da njen karakteristični polinom

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

dopušta m različitih korena $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, gde je $m \leq n$.

Svaki koren ima multiplicitet k_i, tako da se $p(\lambda)$ može napisati u obliku

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{k_i}, \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = n.$$

Označimo sa E_i potprostor karakterističnih vektora koji odgovaraju karakterističnom broju λ_i, tj.

$$E_i = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{u}\}.$$

Dokazali smo da u opštem slučaju važi sledeća

Teorema 10.0.1 Dimenzija E_i nije veća od multipliciteta λ_i, tj.

$$\dim E_i \leq k_i.$$

Ako je

$$\dim E_i = k_i, \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

onda možemo naći bazu od k_i linearno nezavisnih karakterističnih vektora za svako λ_i, koje ćemo označiti sa

$$\mathbf{u}_1^i, \mathbf{u}_2^i, \ldots, \mathbf{u}_k^i.$$

Pošto je $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$, možemo onda naći n linearno nezavisnih karakterističnih vektora. (Podsetimo se da su vektori koji odgovaraju različitim karakterističnim brojevima svakako linearno nezavisni). U tom slučaju matrica $\mathbf{A}$ može biti dijagonalizovana. To nam značajno koristi u rešavanju sistema jedančine

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Opšte rešenje ove jednačine je onda

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda_i t} \left(a_{1,i} \mathbf{u}_1^i + a_{2,i} \mathbf{u}_2^i + \cdots + a_{k_i,i} \mathbf{u}_{k_1}^i \right).$$

■ **Primer 10.2** Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Njen karakteristični polinom je $p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$.

Karakteristični brojevi su: $\lambda_1 = 2$ (multipliciteta 1) i $\lambda_2 = 1$ (multipliciteta 2).

Za $\lambda_1 = 2$, iz jednačine

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dobijamo dve nezavisne jednačine (2 uslova)

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y + z &= 0. \end{aligned}$$

Karakteristični vektor za $\lambda_1 = 2$ je $\mathbf{u} = (0, 1, -1)$. Prema tome dimenzija $E_1 = n - 2 = 3 - 2 = 1$.

U slučaju $\lambda_2 = 1$ odgovarajuća jednačina je

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

koje daju jednu nezavisnu jednačinu (jedan uslov)

$$2y + z = 0.$$

Onda je $\dim E_2 = n - 1 = 3 - 1 = 2$. Dva nezavisna vektora

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2^1 &= (1, 0, 0), \\ \mathbf{u}_2^2 &= (0, 1, -2), \end{aligned}$$

formiraju bazu od E_2. Na kraju opšte rešenje jednačine $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ glasi

$$\mathbf{x} = a_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

■

Ako je za neko i, $\dim E_i < k_i$, onda ne možemo naći k_i linearno nezavisnih karakterističnih vektora u E_i. Tada kažemo da je karakteristični broj λ_i **nekompletan** (defektan). U tom slučaju ne možemo naći opšte rešenje jedančine $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ u obliku prethodnog primera (koji je dat za slučaj karakterističnih brojeva λ_i koji su kompletirani). Zato su nam potrebni generalisani karakteristični vektori.

■ **Primer 10.3** Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Njen karakteristični polinom je $p(\lambda) = (\lambda + 2)^2$. Postoji samo jedan karakterističan broj: $\lambda_1 = -2$ (multipliciteta 2). Za $\lambda_1 = -2$, iz jednačine

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{u} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dobijamo jednu jednačinu,

$$y = 0.$$

Karakteristični vektor je $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$.

Prema tome, $E_1 = n - 1 = 2 - 1 = 1$ i matrica $\mathbf{A}$ se ne može dijagonalizovati.

Znamo da je $\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\,\mathbf{u}_1$ jedno rešenje jednačine $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Potražimo rešenje u obliku

$$\mathbf{x}(t) = t\, e^{\lambda t}\,\mathbf{u} + e^{\lambda t}\,\mathbf{v},$$

za nepoznate vektore $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ različite od nule. Ovako $\mathbf{x}(t)$ će biti rešenje akko je

$$e^{\lambda t}\,\mathbf{u} + \lambda\, t\, e^{\lambda t}\,\mathbf{u} + \lambda\, e^{\lambda t}\,\mathbf{v} = t\, e^{\lambda t}\,\mathbf{A}\mathbf{u} + e^{\lambda t}\,\mathbf{A}\mathbf{v},$$

za svako t. Onda sledi da mora biti

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{u} &= \lambda \mathbf{u}, \\ \mathbf{A}\mathbf{v} &= \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Prva jednačina tvrdi da je $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ karakterističan vektor, a λ njegov karakterističan broj. Ostaje da se izračuna $\mathbf{v}$ iz jednačine

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$y = 1.$$

Nemamo nikakvih ograničenja na x. Pogodno je uzeti da je $\mathbf{v} = (0,1)$, tako da je drugo rešenje dato sa

$$\mathbf{x}_2(t) = te^{\lambda_1 t}\mathbf{u} + e^{\lambda_1 t}\mathbf{v} = te^{-2t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Pošto su $\mathbf{u}(0)$ i $\mathbf{v}(0)$ linearno nezavisni, onda opšte rešenje glasi

$$\mathbf{x} = a e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\left(te^{-2t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}ae^{-2t}+bte^{-2t}\\ be^{-2t}\end{pmatrix},$$

gde su konstante $a, b \in \mathbb{R}$. ■

N Uočimo da je u ovom primeru

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Vektori koji zadovoljavaju ove jednačine su primer generalisanih karakterističnih vektora.

Neka je dat generalisani karakteristični vektor $\mathbf{u}$ ranga r.
Definišimo vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ na sledeći način

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_r &= (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^0\mathbf{u} = \mathbf{u},\\
\mathbf{v}_{r-1} &= (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^1\mathbf{u},\\
\vdots &= \vdots\\
\mathbf{v}_1 &= (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{r-1}\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Očigledno da je karakterističan vektor $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, jer je

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^r\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Vektori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ formiraju **lanac generalisanih karakterističnih vektora dužine** r.

Definicija 10.0.3 Neka je λ karakterističan broj. Kažemo da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$

formiraju lanac generalisanih karakterističnih vektora dužine r, ako je $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ i

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{r-1} &= (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_r, \\ \mathbf{v}_{r-2} &= (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_{r-1}, \\ \vdots &= \vdots \\ \mathbf{v}_1 &= (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_2, \\ \mathbf{0} &= (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_1. \end{aligned} \tag{10.1}$$

N Prvi elemenat, $\mathbf{v}_1$, je uvek karakterističan vektor.

Korišćenjem (10.1) lako je pokazati da je

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{i-1} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_1.$$

Prema tome, element $\mathbf{v}_i$ je generalisani karakteristični vektor ranga i.

Teorema 10.0.2 Vektori u lancu generalisanih vektora su linearno nezavisni.

Dokaz

Posmatrajmo linearnu kombinaciju

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Na osnovu napred definisanih vektora imamo da je

$$\mathbf{v}_i = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{r-i} \mathbf{v}_r,$$

tako da je

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} c_i (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{r-i} \mathbf{v}_r = \mathbf{0}.$$

Pokazaćemo da su svi c_i jednaki nuli. Pri tome ćemo koristiti činjenicu da je

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^m \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{za sve} \quad m \geq r.$$

Zaista,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^m \mathbf{v}_r &= (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{m-r} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^r \mathbf{v}_r = \\ &= (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{m-r} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ako sada pomnožimo $\sum_{i=1}^{r} c_i(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{r-i}\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ sa $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{r-1}$, dobićemo da je

$$\sum_{i=1}^{r} c_i(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{2r-i-1}\mathbf{v}_r = \mathbf{0}. \tag{10.2}$$

Pošto je $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{2r-i-1}\mathbf{v}_r = 0$ za $i \leq r-1$, jednačina (10.2) se svodi na

$$c_r(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{r-1}\,\mathbf{v}_r = c_r\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}. \tag{10.3}$$

Prema tome $c_r = 0$, jer je $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

Imajući to u vidu, izraz $\sum_{i=1}^{r} c_i(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{r-1}\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ postaje

$$\sum_{i=1}^{r-1} c_i(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{r-i}\mathbf{v}_r = \mathbf{0}.$$

Množeći ovaj izraz sa $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{r-2}$, dobijamo da je

$$\sum_{i=1}^{r-1} c_i(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{2r-i-2}\mathbf{v}_r = c_{r-1}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{r-1}\mathbf{v}_r = c_{r-1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0},$$

jer je $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{2r-i-2}\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ za $i \leq r-2$. Prema tome je

$$c_{r-1} = 0.$$

Nastavljajući ovaj rekurentni proces, na isti način pokazijemo da su svi c_i jednaki nuli. Znači vektori $\mathbf{v}_i$ su linearno nezavisni.

Lanac generalisanih karakterističnih vektora omogućuje nam konstrukciju rešenja sistema običnih diferencijalnih jednačina.

Teorema 10.0.3 Neka je dat lanac generalisanih karakterističnih vektora dužine

r. Definišemo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{v}_1\, e^{\lambda t}, \\
\mathbf{x}_2(t) &= (t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\, e^{\lambda t}, \\
\mathbf{x}_3(t) &= \left(\frac{t^2}{2}\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\right) e^{\lambda t}, \\
\vdots &= \vdots \\
\mathbf{x}_r(t) &= \left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\mathbf{v}_1 + \cdots + \frac{t^2}{2!}\mathbf{v}_{r-2} + t\mathbf{v}_{r-1} + \mathbf{v}_r\right) e^{\lambda t}.
\end{aligned}
$$

Funkcije $\{\mathbf{x}_i(t)\}_{i=1}^{r}$ formiraju r linearno nezavisnih rešenja jednačine

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}.
$$

Dokaz

Imamo

$$\mathbf{x}_j(t) = e^{\lambda t}\left(\sum_{i=1}^{j} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!}\mathbf{v}_i.\right).$$

Prema konvenciji $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$. Imajući to u vidu, može se iz (10.1) zaključiti da je

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \lambda\mathbf{v}_i,$$

za $i = 1, 2, \ldots, r$. S jedne strane imamo da je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_j(t)}{\mathrm{d}t} = e^{\lambda t}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{t^{j-i-1}}{(j-i-1)!}\mathbf{v}_i + \lambda e^{\lambda t}\sum_{i=1}^{j}\frac{t^{j-i}}{(j-i)!}\mathbf{v}_i,$$

a s duge da je

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x}_j = e^{\lambda t}\sum_{i=1}^{j}\frac{t^{j-i}}{(j-i)!}\mathbf{A}\mathbf{v}_i = e^{\lambda t}\sum_{i=1}^{j}\frac{t^{j-i}}{(j-i)!}(\mathbf{v}_{i-1}+\lambda\mathbf{v}_i) = \\ = e^{\lambda t}\sum_{i=1}^{j}\frac{t^{j-i}}{(j-i)!}\mathbf{v}_{i-1} + \lambda e^{\lambda t}\sum_{i=1}^{j}\frac{t^{j-i}}{(j-i)!}\mathbf{v}_i = \\ = e^{\lambda t}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{t^{j-i-1}}{(j-i-1)!}\mathbf{v}_i + \lambda e^{\lambda t}\sum_{i=1}^{j}\frac{t^{j-i}}{(j-i)!}\mathbf{v}_i.\end{aligned}$$

Prema tome $\mathbf{x}_j(t)$ je rešenje. Za dokaz da su nezavisni dovoljno je dokazati da su $\mathbf{x}_j(0) = \mathbf{v}_j$ nezavisni. To sledi na osnovu Teoreme 10.0.2.

Kratko rečeno, lanac generalisanih karakterističnih vektora dužine r daje nam r nezavisnih rešenje.

Sledeća Teorema tvrdi da imamo dovoljno lanaca generalisanih karakterističnih vektora za dobijanje kompletnog skupa nezavisnih rešenja.

Teorema 10.0.4 Za karakteristični broj λ multipliciteta k postoji p lanaca koje označavamo sa

$$\begin{array}{cccc}\mathbf{v}_1^1 & \mathbf{v}_1^2 & \cdots & \mathbf{v}_1^p \\ \mathbf{v}_2^1 & \mathbf{v}_2^2 & \cdots & \mathbf{v}_2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{v}_{r_2}^2 & & \\ & & & \mathbf{v}_{r_p}^p \\ \mathbf{v}_{r_1}^1 & & & \end{array}$$

tako da su $\{\mathbf{v}_i^j\}$ linearno nezavisni i $\sum_i^p r_i = k$, gde i označava dužinu i-og lanca.

Zaključak. Neka matrica $\mathbf{A}$ reda n ima p karakterističnih vrednosti, $\{\lambda_i\}_{i=1}^p$, gde svaki od njih ima multiplicitet k_i. Zbir svih multipliciteta jednak je n, redu matruce **A**, tj. $\sum_{i=1}^{k} k_i = n$. Za svaki karakteristični broj λ_i računamo k_i nezavisnih rešenja koristeći prethodne Teoreme. Tako konačno dobijamo n nezavisnih rešenja koja su rešenja obične diferencijalne jednačine $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Kriterijum koji je koristan pri odgovoru na pitanje da li se skup lanaca sastoji iz nezavisnih vektora daje sledeća

Teorema 10.0.5 Neka je dato p lanaca koje označavamo na isti način kao u Teoremi 10.0.4. Vektori $\{\mathbf{v}_i^j\}$ su nezavisni akko su

$$\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2, \ldots, \mathbf{v}_1^p$$

nezavisni. Ovo tvrđenje takođe važi za lance koji odgovaraju drugim karakterističnim brojevima.

Dokaz

Izvodi se na isti način kao u Teoremi 10.0.2.

Teorema 10.0.4 tvrdi da postoji baza u odnosu na koju se matrica može napisati u obliku

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \ddots & 1 & & & \\ & & \lambda_1 & \ddots & & \\ & & & \lambda_q & & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda_q \end{pmatrix}$$

U ovoj matrici jedini elementi koji su različiti od nule su na glavnoj dijagonali i elementi neposredno iznad glavne dijagonale. Elementi dijagonale su karakteristične vrednosti, a iznad glavne dijagonale su nule ili jedinice.

Prema tome, za bilo koju kvadratnu matricu postoji matrica **J**, gornjeg oblika, takva da je

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{P},$$

gde je **P** matrica promene baze.

Dekompozicija proizvoljne matrice u matricu skoro dijagonalnog oblika se naziva **Žordanova dekompozicija**. Za matricu **A** onda se kaže da je data u **Žordanovom kanonskom obliku**.

Uočimo da se svaka $\mathbf{J}$ može predstaviti u obliku

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & & & & \\ & \mathbf{J}_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{J}_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{J}_q \end{pmatrix}$$

Matrica

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & & \\ & \lambda_i & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & 1 & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, q$$

se naziva **Žordanov blok** reda k_i koji je definisan algebarskim multiplicitetom karakterističnog broja λ_i, pri čemu je $\sum_{i=1}^{q} k_i = n$. Navedimo neke karakteristike matrice $\mathbf{J}$:

- $\mathbf{J}$ je gornja dijagonalna,
- $\mathbf{J}$ je dijagonalna ako je red svakog od n blokova $k_i = 1$,
- Žordanova forma je jedinstvena (do na permutaciju blokova),
- može imati više blokova istog krakterističnog broja.

■ **Primer 10.4** Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Njen karakeristični polinom je $p(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. Prema tome $\lambda_1 = 1$ je karaktristični broj čiji je algebarski multiplicitet 3.

Odredimo karakteristični vektor iz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dobijamo $x = -y$, pa je prema tome dimenzija $E_1 = n - 1 = 2$. Imamo

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dva karakteristična nezavisna vektora. Sada se naša kolekcija lanca ε sastoji od karakterističnih vektora $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$, a koju obelažavamo sa $\varepsilon = \{\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{u}_2\}\}$.

Računamo $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^2$ i dobijamo $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$. Znači za bilo koji vektor $\mathbf{u}$ biće $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$. Na primer, biramo $\mathbf{u} = (1,0,0)$ tako da je $\mathbf{u}$ linearno nezavisan od $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$.

Računamo

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

i dobijamo lanac $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$. Iz $\varepsilon = \{\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{u}_2\}\}$ odstranjujemo lanac $\{\mathbf{u}_2\}$ kao vektor koji čini lanac koji je linearno zavisan od lanca $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Onda je

$$\varepsilon = \{\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}\}.$$

Time je određena baza $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ od $\mathbb{R}^3$, koju čine vektori lanca. Primenjujući Teoremu 10.0.3, dobijamo opšte rešenje diferencijalne jednačine $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}i} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ u obliku

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= a_1 e^t \mathbf{u}_1 + a_2 e^t \mathbf{v}_1 + a_3 e^t (t\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) = \\
&= a_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} a_2 + a_3(t+1) \\ -a_2 - a_3 t \\ a_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

■

Možda je od interesa da se ukaže na opšti postupak određivanja generalisanih vektora. Radi jednostavnosti, ilustrovaćemo to nekim jenostavnim primerima.

■ **Primer 10.5** Neka je $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ baza od $\mathbb{R}^3$ i neka je data matrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

u odnosu na tu bazu. Onda je

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{e}_1 &= 3\mathbf{e}_1, \\
\mathbf{A}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \\
\mathbf{A}\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Napišimo ove jednačine u obliku

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{e}_1 &= \mathbf{0}, \\
(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1, \\
(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

Sledeći koraci su:

i) naći sve karakteristične vektore koji odgovaraju nekom karakterističnom broju,
ii) broj linearno nezavisnih karakterističnih vektora koje nađemo daje nam broj Žordanovih blokova (u ovom primeru samo jedan karakterističan vektor, samo jedan Žordanov blok).
iii) za jednom nađen karakterističan vektor, rešiti

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \text{taj karakteristični vektor},$$

i nastaviti.

■

■ **Primer 10.6** Izraziti matricu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

u Žordanovom kanonskom obliku.

i) Odredimo karakteristične brojeve. Lako je pokazati da postoje dva: $\lambda = 5$ i $\lambda = 3$.

ii) Odredimo $\aleph(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ za karakteristične brojeve λ_i:

$$\aleph(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) = \text{koji razapinje karakterističan vektor} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\aleph(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \text{koji razapinje karakterističan vektor} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Uočimo da su ovi vektori linearno nezavisni i da predstavljaju bazu u $\mathbb{R}^3$.

U ovom slučaju Žordanova kanonska baza u $\mathbb{R}^3$ čini skup vektora

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

U ovom slučaju modularna matrica

$$\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sada je lako odrediti matricu $\mathbf{A}$ u Žordanovom kanonskom obliku. Zaista, tada je

$$\begin{aligned}
\mathbf{AP} &= \mathbf{A}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \mathbf{A}\mathbf{v}_2, \mathbf{A}\mathbf{v}_3) = (5\mathbf{v}_1, 3\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_3) = \\
&= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{AJ} \quad \Rightarrow \\
\mathbf{AP} &= \mathbf{PJ} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP},
\end{aligned}$$

gde je

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

traženi oblik matrice $\mathbf{A}$ u Žordanovom kanonskom obliku.

Ovde trivijalno imamo tri Žordanova bloka: [5], [3], [3]. ■

Uvek treba imati na umu da je Žordanova matrica $\mathbf{J}$ određena brojem i dužinom generalisanih karakterističnih vektora lanca matrice $\mathbf{A}$.

■ **Primer 10.7** Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Karakteristični polinom je

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^3.$$

Nađimo karakteristične vektore iz izraza

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Neka je $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ jedan karakterističan vektor. Onda je njegov lanac:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{v}_1 &= 2\mathbf{v}_1, \\
\mathbf{A}\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2, \\
\mathbf{A}\mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3.
\end{aligned}$$

Pišemo

$$\begin{aligned}
\mathbf{AP} &= \mathbf{A}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \mathbf{A}\mathbf{v}_2, \mathbf{A}\mathbf{v}_3) = (2\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) = \\
&= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{PJ},
\end{aligned}$$

gde je

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

traženi oblik matrice **A** u Žordanovom kanonskom obliku. ■

■ **Primer 10.8** Redukovati matricu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

na Žordanov kanonski oblik. ■

Rešenje

Karakteristični polinom je $p(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-4)^2$. Znači $\lambda_1 = -2$ i $\lambda_2 = 4$ su karakteristični brojevi, pri čemu je λ_2 dvostruki karakterustičan broj.

Njima odgovaraju sledeći kararakteristicni vektori:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ za } \lambda_1, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ za } \lambda_2.$$

Treći vektor dobijamo rešavanjem jednačine

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2.$$

Rešenje ove jedančine je, znamo, do na proizvod skalara sa $\mathbf{v}_2$. Dobijamo

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k\mathbf{v}_2,$$

gde je k proizvoljna konstanta, a koja ima posebno značenje za problem koji razmatramo. Neka je $k = 0$. Onda je

$$\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

pa je

$$\mathbf{PAP}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{J}.$$

Jasno je da matrica $\mathbf{P}$ nije jednoznačna.

10.0.1 Žordanov blok

Neka je

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda_0 & 1 & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Žordanov blok reda n. Onda je

$$\mathbf{J} = \lambda_0 \mathbf{I} + \mathbf{H},$$

gde je

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

matrica reda n. Ako se $\mathbf{J} = \lambda_0 \mathbf{I} + \mathbf{H}$ napiše u obliku

$$\mathbf{J} - \lambda_0 \mathbf{I} = \mathbf{H},$$

onda je minimalni polinom od $\mathbf{J}$ jedanak $(\lambda - \lambda_0)^n$.

Lako je pokazati da je

$$\mathbf{H}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & 1 & \\ & 0 & 0 & & & 1 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

gde se jedinični elemeni nalaze na $k+1$ gornjoj dijagonali (iznad glavne dijagonale). Očigledno je da je

$$\mathbf{H}^k \equiv \mathbf{O}, \quad \text{za} \quad k \geq n.$$

Neka je dat polinom $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\lambda - \lambda_0)^k$. Kako je $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda_0)$, onda ga pišemo u obliku

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^k.$$

Njegov matrični polinom, u odnosu na Žordanov blok, dat je sa

$$f(\mathbf{J}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda_0)(\mathbf{J} - \lambda_0 \mathbf{I})^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda_0)\mathbf{H}^k =$$

$$= \begin{pmatrix} f(\lambda_0) & \frac{1}{1!}f^{(1)}(\lambda_0) & & & & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda_0) \\ & f(\lambda_0) & \frac{1}{1!}f^{(1)}(\lambda_0) & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & f(\lambda_0) & \frac{1}{1!}f^{(1)}(\lambda_0) & \\ & & & & \ddots & \frac{1}{1!}f^{(1)}(\lambda_0) \\ & & & & & f(\lambda_0) \end{pmatrix}.$$

10.1 Dualni prostori

Neka je V konačno dimenzionalni realni vektorski prostor dimenzije n. Posmatrajmo prostor linearnih funkcija $\mathscr{L}(V,\mathbb{R})$ koje preslikavaju V u $\mathbb{R}$. Na osnovu Teoreme 4.7.8 $\dim \mathscr{L}(V,\mathbb{R}) = \dim V = n$. Onda su V i $\mathscr{L}(V,\mathbb{R})$ izomorfni. Prostor $\mathscr{L}(V,\mathbb{R})$ nazivamo **dualni prostor** od V i nadalje ga obeležavamo sa V^*, tj. $V^* = \mathscr{L}(V,\mathbb{R})$. Da bismo razlikovali elemente prostora V i V^*, uvodimo sledeću terminologiju: elemente prostora V nazivaćemo vektori, a elemente prostora V^* **dualni vektori**. Alternativna terminologija je **linearna forma**, **linearni funkcional**, ili **tenzor tipa** $(0,1)$.

Elemente prostora V obeležavaćemo sa $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, ... Analogno tome, sa $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{v}^*$, $\mathbf{w}^*$, ... obeležavaćemo elemente V^* uvek kada je to pogodno.

Odstupićemo od ovog načina obeležavanja kada se novim obeležavanjem izrazi uprošćavaju i kada takav način obeležavanjane ne dovodi do dvosmislenosti i zabune.

Primera radi, za nula kovektor $\mathbf{0}^*$ i nula vektor $\mathbf{0}$, koristićemo istu oznaku $\mathbf{0}$ bez ikakve opasnosti od zabune.

Definicija 10.1.1 **Dualni prostor** je vektorski prostor linearnih funkcionala na V; $V^* = \mathscr{L}(V,\mathbb{R})$.

Drugačije rečeno $\mathbf{v}^* =: V \to \mathbb{R}$ je linearni funkcional, ako je za svako $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ i svako $a,b \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{v}^*(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\mathbf{v}^*(\mathbf{u}) + b\mathbf{v}^*(\mathbf{v}).$$

Definicija 10.1.2 Skup V^* koji se sastoji od svih linearnih funkcionala na V je linearni vektorski prostor, ako je za svako $\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \in V^*$ i $a,b \in \mathbb{R}$

$$(a\mathbf{u}^* + b\mathbf{v}^*)(\mathbf{v}) = a\mathbf{u}^*(\mathbf{v}) + b\mathbf{v}^*(\mathbf{v}),$$

za vako $\mathbf{v} \in V$.

Svaka baza $\{\mathbf{v}_i\}$ od V indukuje bazu $\{\mathbf{v}^i\}$ od V^* na sledeći način:

Ako je $\mathbf{v} = v^i \mathbf{v}_i$, onda je $\mathbf{v}^i(\mathbf{v}) = v^i$. Ovako definisano $\mathbf{v}^i$ je linearni funkcional, jer je

$$\mathbf{v}^i(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = au^i + bv^i = a\mathbf{v}^i(\mathbf{u}) + b\mathbf{v}^i(\mathbf{v}).$$

N Skrećemo pažnju čitaocu na oznaku dualne baze od V^*. Umesto $\mathbf{v}^{*i}$ pišemo $\mathbf{v}^i$, radi pogodnosti.

Lema 10.1.1 Dualna baza $\{\mathbf{v}^i\}$ od V^* je jednoznačno određena relacijom

$$\mathbf{v}^i(\mathbf{v}_j) = \delta^i_j.$$

❑

Dokaz

Neka je $\mathbf{f} \in V^*$. Onda je za bilo koje $\mathbf{v} = v^i \mathbf{v}_i \in V$

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(v^i \mathbf{v}_i) = \mathbf{f}(\mathbf{v}_i)v^i = \mathbf{f}(\mathbf{v}_i)\mathbf{v}^i(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}(\mathbf{v}_i)\mathbf{v}^i)(\mathbf{v}) = (f_i \mathbf{v}^i)(\mathbf{v}),$$

gde je $f_i = \mathbf{f}(\mathbf{v}_i)$. Prema tome je $\mathbf{f} = f_i \mathbf{v}^i$.

Pokazaćemo da je $\{\mathbf{v}^i\}$ baza od V^*. Pretpostavimo da je

$$\alpha_j \mathbf{v}^j = \mathbf{0} \in V^*.$$

Onda je

$$\alpha_j = \alpha_i \delta^i_j = \alpha_i \mathbf{v}^i(\mathbf{v}_j) = (\alpha_i \mathbf{v}^i)(\mathbf{v}_j) = 0.$$

Prema tome $\{\mathbf{v}^i\}$ je skup linearno nezavisnih vektora koji rastežu V^*.

Posledica Leme. Dualni prostor V^* prostora V je iste dimenzije kao i V.

Svakom $\mathbf{h} \in V^*$ odgovara jednoznačno kolekcija realnih brojeva $\{h_i\}$, tako da je $\mathbf{h} = h_i \mathbf{v}^i$. Realni brojevi h_i se nazivaju **kovarijantne komponente kovektora** $\mathbf{h} \in V^*$. ❑

N Uočiti razliku u obeležavanju baznih vektora prostora V i njemu dualnog prostora V^*; bazni vektori $\{\mathbf{v}^i\}$ dualnog prostora V^* obeleženi sa gornjim indeksom za razliku od baznih vektora $\{\mathbf{v}_i\}$ prostora V koji su obeleženi sa donjim indeksom.

Obrnuta oznaka se odnosi na komponente njihovih vektora.

10.1.1 Promena baza

Teorema 10.1.2 Promena baze $\{\mathbf{v}_i\}$ u bazu $\{\bar{\mathbf{v}}_i\}$ u V:

$$\bar{\mathbf{v}}_i = A_i^j \mathbf{v}_j,$$

povlači za sobom promenu baze $\{\mathbf{v}^i\}$ u bazu $\{\bar{\mathbf{v}}^i\}$ u V^*:

$$\bar{\mathbf{v}}^i = B^i_j \mathbf{v}^j,$$

pri čemu je $A^i_k B^k_j = \delta^i_j$ ili $\delta^i_j = B^i_k A^k_j$.

Dokaz

Neka je $\bar{\mathbf{v}}_i = A_i^j \mathbf{v}_j$ i $\bar{\mathbf{v}}^i = B^i_j \mathbf{v}^j$. Onda je

$$\delta^i_j = \bar{\mathbf{v}}^i(\bar{\mathbf{v}}_j) = B^i_k \mathbf{v}^k(A^l_j \mathbf{v}_l) = B^i_k A^l_j \mathbf{v}^k(\mathbf{v}_l) = B^i_k A^l_j \delta^k_l = B^i_k A^k_j.$$

N Daleko je preglednije pisati ovu relaciju u matričnom obliku

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \quad \text{ili} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Takođe, ako je $v_i \mathbf{v}^i = \bar{v}_i \bar{\mathbf{v}}^i$, onda je $\bar{v}_i \bar{\mathbf{v}}^i = \bar{v}_i B^i_j \mathbf{v}^j$, pa je $v_i = B^j_i \bar{v}_j$, ili ekvivalentno tome $\bar{v}_i = A^j_i v_j$.

10.2 Kronekerov tenzor

U literaturi se često umesto oznake $\mathbf{v}^*(\mathbf{v})$, sparivanja vektora prostora V i njemu dualnog prostora, V^*, koristi oznaka uglaste zagrade $\langle \mathbf{v}^*, \mathbf{v} \rangle$. Znači

$$\langle \mathbf{v}^*, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^*(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}.$$

Spacijalno je

$$\langle \mathbf{v}^i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta^i_j.$$

Definicija 10.2.1 Bilinaearna forma

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V^* \times V \rightarrowtail \mathbb{R} : (\mathbf{v}^*, \mathbf{v}) \rightarrowtail \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}^* \rangle,$$

naziva se **Kronekerov tenzor**.

Znači:

i) $\langle a\mathbf{u}^* + b\mathbf{v}^* \rangle(\mathbf{v}) = a\langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v}\rangle + b\langle \mathbf{v}^* \mathbf{v}\rangle$,

ii) $\mathbf{v}^*(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\langle \mathbf{v}^*, \mathbf{u}\rangle + b\langle \mathbf{v}^*, \mathbf{v}\rangle$, za svako $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^* \in V^*$ i $a, b \in \mathbb{R}$.

iii) Neka je $\mathbf{f} = f_i \mathbf{v}^i \in V^*$ i $\mathbf{v} = v^i \mathbf{v}_i$. Na osnovu bilinearnosti Kronekerovog tenzora sledi da je

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle = f_i v^j \langle \mathbf{v}^i, \mathbf{v}_j\rangle = f_i v^j \delta^i_j = f_i v^i.$$

Odavde se vidi da su Kronekerov tenzor i kontrakcija po indeksima tesno povezani.

N Ova oznaka se ne sme poistovetiti sa oznakom za unutrašnji proizvod, jer unutrašnji proizvod podrazumeva dva vektora istog vektorskog prostora.

Teorema 10.2.1 Neka je definisan unutrašnji proizvod u realnom vektorskom prostoru V. Onda postoji jedinstven izomorfizam

$$\mathbf{G} : V \to V^*,$$

koji je indukovan unutrašnjim proizvodom, tako da je

$$\langle \mathbf{G}\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Pri ovom izomorfizmu, slika recipročne baze $\{\bar{\mathbf{g}}^1, \ldots, \bar{\mathbf{g}}^n\}$, baze $\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n\}$ od V, je njoj dualna baza $\{\mathbf{g}^1, \ldots, \mathbf{g}^n\}$ od V^*, tj,

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{g}}^i = \mathbf{g}^i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Pri primeni izomorfizma $\mathbf{G}$ koristimo sledeće sinonime $\mathbf{G}(\mathbf{v}) \equiv \mathbf{v}^* \equiv \langle \mathbf{G}, \cdot\rangle \equiv (\mathbf{v}, \cdot)$, koji asociraju na skalarni proizvod.

Dokaz

Sastoji se iz sledećih koraka:

(i) $\mathbf{G}$ je linearna tranformacija. Sledi iz $\langle \mathbf{G}\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$, čija je desna strana linearna funkcija od $\mathbf{w}$ za svako $\mathbf{v} \in V$. Onda je

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{G}(\mathbf{v}+\mathbf{u}),\mathbf{w}\rangle &= ((\mathbf{v}+\mathbf{u}),\mathbf{w}) = (\mathbf{v},\mathbf{w}) + (\mathbf{u},\mathbf{w}) = \\ &= \langle \mathbf{G}\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{G}\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle,\end{aligned}$$

za svako $\mathbf{v},\mathbf{u} \in V$.

(ii) **G** je **1-1** transformacija, jer ako je

$$\langle \mathbf{G}\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{G}\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle,$$

onda je

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = 0,$$

za svako $\mathbf{w}$, pa je $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

(iii) **G** je linearna transformacija V **na** V^*, jer je $\dim V = \dim V^*$ i **G** je 1-1. Znači, imajući u vidu da je $\dim V = \dim V^*$ i da je **G** je linearna, 1-1 transformacija, sledi da je **G** je izomorfizam.

(iv) Ostaje nam da dokažemo da je $\mathbf{G}\bar{\mathbf{g}}^i = \mathbf{g}^i$. Po definiciji za recipročnu bazu je

$$\bar{\mathbf{g}}^i\cdot\mathbf{g}_j = \delta^i_j, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

a za dualnu bazu

$$\langle \mathbf{g}^i,\mathbf{g}_j\rangle = \delta^i_j. \tag{10.4}$$

Upoređujući ove definicije sa definicijom $\langle \mathbf{G}\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$, dobijamo da je

$$\langle \mathbf{G}\bar{\mathbf{g}}^i,\mathbf{g}_j\rangle = \langle \mathbf{g}^i,\mathbf{g}_j\rangle,$$

odakle sledi da je

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{g}}^i = \mathbf{g}^i.$$

Znači, u tom slučaju možemo zaključiti da recipročnu bazu možemo identifikovati sa dualnom bazom, ali ne i poistovetiti, a unutrašnji proizvod sa dualnim proizvodom.

Na osnovu ove Teoreme, za dati unutrašnji proizvod u V, možemo identifikovati V sa V^*. Drugačije rečeno, vektor $\mathbf{v}$ može biti posmatran kao linearna funkcija na V

$$\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}.$$

Neka su $\mathbf{v} \in V$ i $\mathbf{v}^* \in V^*$ proizvoljni vektori. Onda je $\mathbf{v} = v^i\mathbf{g}_i$ i $\mathbf{v}^* = v_i\mathbf{g}^i$. Njihov skalarni proizvod u komponentalnom obliku glasi

$$\langle \mathbf{v}^*,\mathbf{v}\rangle = \langle v_i\mathbf{g}^i, v^j\mathbf{g}_j\rangle = v_iv^j\langle \mathbf{g}^i,\mathbf{g}_j\rangle = v_iv^i,$$

jer je $\langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j \rangle = \delta^i_j$.

Ovaj izraz predstavlja generalizaciju unutrašnjeg proizvoda za vektorski prostor. Takođe je

$$\langle \mathbf{v}^i, \mathbf{w} \rangle = w^i \quad \text{i} \quad \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{v}_i \rangle = w_i,$$

što sa geometrijskog stanovišta to znači da linearna forma baznih vektora $\mathbf{g}^i$ od V^* primenjena na vektor $\mathbf{v}$ vektorskog prostora V, daje samo brojnu vrednost komponente v^i koja odgovara vektoru $\mathbf{g}^i$. Otuda se $\mathbf{g}^i$ naziva **koordinatna forma**.

Na potpuno analogan način se tumači izraz

$$(\mathbf{v}^*, \mathbf{g}_i) = v_i.$$

10.2.1 Određivanje dualne baze

Izlažemo jedan opšti postupak pri određivanju dualne baze. Pri tome koristimo oznake date u Teoremi 10.2.1

$$\mathbf{v}^i(\mathbf{v}_j) = \delta^i_j. \tag{10.5}$$

Uočimo da su vektori $\mathbf{v}_j \in V$ vektori kolone, a $\mathbf{v}^i \in V^*$ vektori vrste, pa se (10.5) može predsaviti u matričnom obliku

$$\mathbf{v}^i(\mathbf{v}_j) = \delta^i_j \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{v}^1 \\ \mathbf{v}^2 \\ \mathbf{v}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \left(\delta^i_j\right).$$

Matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{v}^1 \\ \mathbf{v}^2 \\ \mathbf{v}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

su regularne, pa su, prema tome, invertibilne. Onda se prethodna matrična jednačina može napisati u obliku

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I},$$

gde je $\mathbf{I} = \left(\delta^i_j\right)$ jedinična matrica. Prema tome, vektori vrste matrice

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

su traženi vektori dualne baze.

■ **Primer 10.9** Neka je u $\mathbb{R}^2$ dat sistem linearno nezavisnih vektora u odnosu na standardnu bazu $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Odrediti njima dualnu bazu $\mathbf{v}^1$ i $\mathbf{v}^2$. ■

Rešenje

U ovom slučaju je

$$\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

pa je

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Prema tome, traženi vektori dualne baze su:

$$\mathbf{v}^1 = (-1, 3) \quad \text{i} \quad \mathbf{v}^2 = (1, -2).$$

Kako oni predstavljaju i bazu dualnog prostora, korisno je pokazati njihovo dejstvo na proizvoljan vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ u $\mathbb{R}^2$. Tako je

$$\mathbf{v}^1(\mathbf{x}) = -x + 3y, \quad \mathbf{v}^2(\mathbf{x}) = \quad x - 2y.$$

N Ako se posmatra $\mathbb{R}^2$ kao Euklidski prostor, onda je recipročna baza ovih vektora data sa

$$\mathbf{v}^i = v^{ij}\,\mathbf{v}_j.$$

Koeficijenti v^{ij} se određuju iz uslova $v_{ik}v^{kj} = \delta_i^j$, gde je $v_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$. Kako je

$$(v_{ij}) = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j) = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix},$$

onda je

$$[v^{ij}] = [v_{ij}]^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix},$$

pa je

$$\mathbf{v}^1 = v^{1j}\,\mathbf{v}_j = 10\mathbf{v}_1 - 7\mathbf{v}_2 = 10\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}^2 = v^{2j}\,\mathbf{v}_j = -7\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 = -7\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ovaj zadatak je ilustracija geometrijske razlike između recipročne i dualne baze. U prvom delu zadatka dualna baza je u dualnom prostoru

V^*, za razliku od recipročne baze koja je u prostoru V. U slučaju metričkog prostora polazna baza i recipročna baza pripadaju istom prostoru.

Primer 10.10 Neka je baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ data vektorima

$$\mathbf{u}_1 = (1,0,1)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (1,-1,0)^T, \quad \mathbf{u}_3 = (2,0,-1)^T,$$

u odnosu na standardnu bazu $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1,2,3$. Odrediti njoj dualnu bazu $\{\mathbf{u}_i^*\}$. ■

Rešenje

Onda je

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pa je

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Odavde sledi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^* &= \frac{1}{3}\mathbf{e}_1^* + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2^* + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3^*, \\ \mathbf{u}_2^* &= -\mathbf{e}_2^*, \\ \mathbf{u}_3^* &= \frac{1}{3}\mathbf{e}_1^* + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2^* - \frac{1}{3}\mathbf{e}_3^*, \end{aligned}$$

gde je $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$ standardna baza dualnog prostora.

Neka je

$$\mathbf{v} = v_i\,\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^3.$$

Onda je

$$\mathbf{u}_i^*(\mathbf{v}) = \mathbf{u}_i^*(v_j\mathbf{e}_j) = v_j\,\mathbf{u}_i^*(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + 2v_3) \\ -v_3 \\ \frac{1}{3}(v_1 + v_2 - v_3) \end{cases}, \quad i = 1,2,3.$$

10.3 Kovarijantne i kontravarijantne komponente vektora (tenzora)

Uočimo da je $\bar{v}_i^* = A^j{}_i v_j^*$ i $\bar{\mathbf{v}}_i = A^j{}_i \mathbf{v}_j$, tj. pri promeni baze komponente kovektora se transformišu kao vektori baze. Takođe je

$$\bar{v}^i = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^i{}_j v^j \quad \text{i} \quad \bar{\mathbf{v}}^{*i} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^i{}_j v^{*j},$$

pa se prema tome komponente vektora transformišu kao kovektori baze dualnog prostora.

Nadalje ćemo koristiti sledeću terminologiju.

Kažemo da se komponente kovektora **transformišu kovarijantno** (kao bazni vektori), dok se komponte vektora **transformišu kontravarijantno** (suprotno od transformacije baznih vektora).

Saglasno sa ovom terminologijom, bazne vektore uvek ćemo obeležavati sa donjim indeksom, tj. kao $\mathbf{v}_i$, dok ćemo bazu kovektora obeležavati sa gornjim indeksom, tj. kao $\mathbf{v}^i$. Onda se komponete vektora $\mathbf{v} \in V$ obeležavaju sa v^i, a komponete kovektora $\mathbf{v}^* \in V^*$ sa v_i. To je ujedno opravdanje, objašnjenje i prednosti ovakvog obeležavanja koje smo do sada koristili. Između ostalog, to je omogućilo korišćenje Ajnšajnove konvecije o sabiranju po paru ponovljenih indeksa, od kojih je jedan na gornjem, a drugi na donjem mestu u tenzorskim izrazima.

N Napomenimo da se za određivanje dualne baze ne zahteva postojanje unutrašnjeg proizvoda, dok je za recipročnu bazu neophodno.

10.4 Dualna transformacija od A

Podsetimo se da smo za prostore sa unutrašnjim proizvodom V i U definisali adjugovanu transformaciju $\mathbf{A}^*$ linearne transformacije $\mathbf{A} : V \to U$, koja je linearna transformacija $\mathbf{A}^* : U \to V$ i koja zadovoljava uslov

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{A}^*\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \in U,\ \mathbf{v} \in V.$$

U slučaju dualnih prostora (kada ne postoji unutrašnji proizvod) u izrazu (5.10.1) jednostavno zamenjujemo $\mathbf{u}$ sa $\mathbf{u}^*$. Time je dat i dokaz sledeće teoreme.

Teorema 10.4.1 Svakoj linearnoj transformaciji $\mathbf{A} : V \to U$ odgovara jedinstvena transformacija $\mathbf{A}^* : V^* \to U^*$, tako da je

$$(\mathbf{u}^*, \mathbf{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{A}^*\mathbf{u}^*, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}^* \in U^*, \quad \mathbf{v} \in V. \tag{10.6}$$

Transformacija $\mathbf{A}^*$ naziva se **dualna transformacija** od $\mathbf{A}$.

10.5 Multilinearne funkcije. Tenzori

Koncept linearnih funkcija može se jednostavno uopštiti na koncept multilinearnih funkcija ako se posmatra, umesto jednog linearnog vektorskog prostora V, kolekcija linearnih vektorskih prostora $V_1, \ldots, V_s$.

Definicija 10.5.1 s-**linearna funkcija** je funkcija

$$\boldsymbol{T} : V_1 \times \cdots \times V_s \to \mathbb{R}$$

linearna po svakoj od promenljivih.

Definicija 10.5.2 Ako su vektorski prostori $V_1, \ldots, V_s$ vektorski prostori V, ili dualni prostori V^*, onda se $\boldsymbol{T}$ naziva **tenzor** na V. Preciznije, tenzor reda (p,q) na V, gde su p i q pozitivni celi brojevi, je $(p+q)$ - **linearna funkcija**

$$\boldsymbol{T} : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{q} \to \mathbb{R}.$$

To znači da je

$$\boldsymbol{T}\left(\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^q\right) = \lambda\boldsymbol{T}\left(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^q\right)$$

za neko $\lambda \in \mathbb{R}$, i

$$\boldsymbol{T}\left(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{x}+\mathbf{y}, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^q\right) =$$
$$\boldsymbol{T}\left(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^q\right) + \boldsymbol{T}\left(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^q\right)$$

za $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}_1, \ldots, \ldots, \mathbf{v}_p \in V$ i $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^q \in V^*$.

Uočimo da smo ovde tenzore obeležili **italik** kako bi istakli razliku između matrica i tenzora. O tome će biti detaljnije reču u odeljku **Tenzori**.

10.5.1 Terminologija

Skup svih tenzora (p,q) obeležavaćemo sa $\mathfrak{T}_q^p(V)$. Saglasno sa tim, skup svih kontravarijantnih tenzora obeležavamo sa $\mathfrak{T}^p(V)$, a kovarijantnih sa $\mathfrak{T}_q(V)$. Specijalno je

$$\mathfrak{T}^1(V) = V, \quad \text{a} \quad \mathfrak{T}_1(V) = V^*.$$

Definicija 10.5.3 Tenzor reda $(0,0)$ nazivamo **skalar**, reda $(p,0)$ **kontravarijantni tenzor**, reda $(0,q)$ **kovarijantni tenzor**.

Vektor $\mathbf{v} \in V$ je reda $(1,0)$ i predstavlja kontravarijantni tenzor reda jedan. **Kovektor** $\mathbf{v}^* \in V^*$ tenzor je reda $(0,1)$. Ako je red tenzora (p,q), $p,q \neq 0$, onda se kaže da je **tenzor mešovitog tipa**, p puta kontravarijantan i q puta kovarijantan.

Od posebnog intersa je uopštenje tenzorskog proizvoda vektora i kovektora.

Definicija 10.5.4 Neka je $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \in V$ i $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^q \in V^*$. Onda za funkciju

$$\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_p \otimes \mathbf{v}^1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}^q : V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$$

važi da je

$$\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_p \otimes \mathbf{v}^1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}^q \left(\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^p, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q\right) = \\ \left(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}_1\right) \cdots \left(\mathbf{u}^p, \mathbf{v}_p\right) \left(\mathbf{v}^1, \mathbf{u}_1\right) \cdots \left(\mathbf{v}^q, \mathbf{u}_q\right)$$

za svako $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q \in V$ i $\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^p \in V^*$.

Očigledno je da je funkcija

$$\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_p \otimes \mathbf{v}^1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}^q \in \mathfrak{T}_q^p(V)$$

$(p+q)$ - linearna. Naziva se **tenzorski proizvod** od $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ i $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^q$.

Definicija 10.5.5 Prostor $\mathfrak{T}_q^p(V)$ je **vektorski prostor**, ako za bilo koje elemente $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{S} \in \mathfrak{T}_q^p(V)$ važi:

i) svojstvo linearnosti u odnosu na operaciju sabiranja

$$(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S})\left(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\right) = \\ \boldsymbol{T}\left(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\right) + \boldsymbol{S}\left(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\right),$$

i

ii) svojstvo proizvoda skalarom

$$(\alpha \boldsymbol{T})\left(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\right) = \alpha \boldsymbol{T}\left(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\right),$$

za svako $\alpha \in \mathbb{R}$, i sve $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^p \in V^*$ i $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q \in V$.

Za nula element $\boldsymbol{O} \in \mathfrak{T}_q^p(V)$ je

$$\boldsymbol{O}\left(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\right) = 0,$$

za sve p-torke kovektora $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^p \in V^*$ i sve q-torke vektora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q \in V$.

10.6 Baza vektorskog prostora $\mathfrak{T}_q^p(V)$

Teorema 10.6.1 Neka je $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ baza od V, a $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n\}$ baza od V^*. Onda skup tenzorskih proizvoda

$$\{\mathbf{v}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_{i_p} \otimes \mathbf{v}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}^{j_q}\}, \quad i_1, \ldots, i_p; \, j_1, \ldots, j_q = 1, \ldots, n$$

formira bazu od $\mathfrak{T}_q^p(V)$ koja se naziva **proizvod baza**, a njegova dimenzija je

$$\dim \mathfrak{T}_q^p(V) = n^{p+q}.$$

Dokaz

i) Prvo ćemo pokazati da je skup tenzorskih proizvoda linearno nezavisan. Neka je

$$\lambda_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \mathbf{v}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_{i_p} \otimes \mathbf{v}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}^{j_q} = \boldsymbol{O}.$$

Onda je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{O} &= \lambda_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \mathbf{v}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_{i_p} \otimes \mathbf{v}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}^{j_q}(\mathbf{v}^{k_1}, \ldots, \mathbf{v}^{k_p}, \mathbf{v}_{l_1}, \ldots, \mathbf{v}_{l_q}) = \\ &= \lambda_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \left(\mathbf{v}^{k_1}, \mathbf{v}_{i_1}\right) \cdots \left(\mathbf{v}^{k_p}, \mathbf{v}_{i_p}\right) \left(\mathbf{v}^{j_1}, \mathbf{v}_{l_1}\right) \cdots \left(\mathbf{v}^{j_q}, \mathbf{v}_{l_q}\right) = \\ &= \lambda_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \delta_{i_1}^{k_1} \cdots \delta_{i_p}^{k_p} \delta_{l_1}^{j_1} \ldots \delta_{l_q}^{j_q} = \lambda_{l_1 \ldots l_q}^{k_1 \ldots k_p}, \end{aligned}$$

odakle sledi da je skup tenzoskih proizvoda linearno nezavisan.

ii) Pokažimo da se svaki element $\boldsymbol{T} \in \mathfrak{T}_q^p(V)$ može izraziti kao linearna konbinacija ovog skupa. Obeležimo sa

$$\boldsymbol{T}\left(\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^p, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q\right)$$

dejstvo $\boldsymbol{T}$ na proivoljne elemente $\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^p \in V^*$ i $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q \in V$. Kako je $\mathbf{u}^i = u_j^i \mathbf{v}^j$ i $\mathbf{w}_i = w_i^j \mathbf{v}_j$, gde je $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n\}$ baza od V^* i $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ baza od

V, onda je

$$\boldsymbol{T}\left(\mathbf{u}^1,\ldots,\mathbf{u}^p,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_q\right)=u^1_{i_1}\cdots u^p_{i_p}w^{j_1}_1\cdots w^{j_q}_q\,\boldsymbol{T}\left(\mathbf{v}^{i_1},\ldots,\mathbf{v}^{i_p},\mathbf{v}_{j_1},\ldots,\mathbf{v}_{j_q}\right)=$$
$$\boldsymbol{T}\left(\mathbf{v}^{i_1},\ldots,\mathbf{v}^{i_p},\mathbf{v}_{j_1},\ldots,\mathbf{v}_{j_q}\right)\left(\mathbf{u}^1,\mathbf{v}_{i_1}\right)\cdots\left(\mathbf{u}^p,\mathbf{v}_{i_p}\right)\left(\mathbf{w}_1,\mathbf{v}^{j_1}\right)\cdots\left(\mathbf{w}_q,\mathbf{v}^{j_q}\right)=$$
$$=\boldsymbol{T}\left(\mathbf{v}^{i_1},\ldots,\mathbf{v}^{i_p},\mathbf{v}_{j_1},\ldots,\mathbf{v}_{j_q}\right)\left(\mathbf{v}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{v}_{i_p}\otimes\mathbf{v}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{v}^{j_q}\right)\left(\mathbf{u}^1,\ldots,\mathbf{u}^p,\mathbf{w}_1,\ldots\mathbf{w}_q\right),$$

odakle sledi da je

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\left(\mathbf{v}^{i_1},\ldots,\mathbf{v}^{i_p},\mathbf{v}_{j_1},\ldots,\mathbf{v}_{j_q}\right)\left(\mathbf{v}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{v}_{i_p}\otimes\mathbf{v}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{v}^{j_q}\right).$$

Prema tome, skup

$$\{\mathbf{v}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{v}_{i_p}\otimes\mathbf{v}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{v}^{j_q}\},\quad i_1,\ldots,i_p;\,j_1,\ldots,j_q=1,\ldots,n$$

je baza linearnog prostora $\mathfrak{T}_q^p(V)$. Obeležimo sa

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}=\boldsymbol{T}\left(\mathbf{v}^{i_1},\ldots,\mathbf{v}^{i_p},\mathbf{v}_{j_1},\ldots,\mathbf{v}_{j_q}\right).$$

Onda je

$$\boldsymbol{T}=T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\mathbf{v}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{v}_{i_p}\otimes\mathbf{v}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{v}^{j_q}$$

reprezentacija $\boldsymbol{T}$ u odnosu na bazu linearnog prostora $\mathfrak{T}_q^p(V)$.

Lema 10.6.2 Pri promeni baza date sa

$$\mathbf{v}_i=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^i_j\bar{\mathbf{v}}_j\quad\text{i}\quad\mathbf{v}^i=A^i_j\bar{\mathbf{v}}^j,$$

tenzor $\boldsymbol{T}$ u odnosu na nove baze je

$$\boldsymbol{T}=\bar{T}^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}\bar{\mathbf{v}}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\bar{\mathbf{v}}_{k_p}\otimes\bar{\mathbf{v}}^{l_1}\otimes\cdots\otimes\bar{\mathbf{v}}^{l_q},$$

gde je

$$\bar{T}^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}=T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{k_1}_{i_1}\cdots\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{k_p}_{i_p}A^{j_1}_{l_1}\cdots A^{j_q}_{l_q}.$$

❑

Dokaz

Sledi iz

$$\boldsymbol{T}=T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\mathbf{v}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{v}_{i_p}\mathbf{v}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{v}^{j_q}$$

kada se izvrši zamena baza

$$\mathbf{v}_i=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^i_j\bar{\mathbf{v}}_j\quad\text{i}\quad\mathbf{v}^i=A^i_j\bar{\mathbf{v}}^j.$$

N Važno je uočiti da tenzorski proizvod definisan sa

$$\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_p \otimes \mathbf{v}^1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}^q : V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V \to \mathbb{R},$$

možemo tumačiti kao preslikavanje

$$\otimes : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{q} \to \mathfrak{T}^p_q(V),$$

za sve $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p \in V$ i $\mathbf{v}^1, \cdots, \mathbf{v}^q \in V^*$. Lako je pokazati da je ono multilinearno, tj. da je

$$\otimes(\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{v}^q) = \lambda \otimes (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{v}^q) + \mu\, (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{v}^q)$$

i

$$(\lambda\, \mathbf{v}_1) \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_p \otimes \mathbf{v}^1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}^q = \mathbf{v}_1 \otimes (\lambda\, \mathbf{v}_2) \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_p \otimes \mathbf{v}^1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}^q.$$

N Na osnovu svega iznetog vidi se da je tenzor realna funkcija određenog broja vektora i (ili) linearnih formi, koja je linearna po svojim argumentima.

Rang tenzora je određen brojem argumenata. Ako su svi njegovi argumenti vektori, onda se kaže da je reč o kovarijantnom tenzoru.

Ako su njegovi argumenti forme, onda se kaže da je reč o kontravarijantnom tenzoru. U svakom drugom slučaju je reč o mešovitom tenzoru. Tenzor ranga nula, tj. funkcija bez argumenta, naziva se skalar.

Specijalno, kontravarijantni tenzor ranga jedan je vektor. Kontravarijantni vektor je 1-forma.

S obzirom na značaj i primenu tenzora, posebno u fizici, tenzori predstavljaju fizičke i druge veličine, na primer vektor brzine, tenzor napona, ...

Otuda i Definicija 10.5.3. Međutim, sa čisto matematičkog gledišta, koncept kovarijantni, ili kontravarijantni tenzori ne postoji. Postoje samo kovarijantne, i/ili kontravarijantne komponente. Tenzori se kao veličine bilo geometriske, ili fizičke ne menjaju. Menja se samo njihova reprezentacija pri koordinatnoj tranformaciji. Slično tenzorima, matrice su linearno preslikavanje. Razlika je u tome što matrice preslikavaju vektorski prostor u vektorski prostor, dok tenzori preslikavaju vektorski prostor u skalar.

Striktno govoreći, matrica nije tenzor. Međutim, svakoj komponentalnoj reprezentaciji tenzora drugog reda odgovara matrica. Pri tome njegova matrična reprezentacija zavisi od izbora koordinatnog sistema u odnosu na koju se tenzor predstavlja.

Sledeći korak je uopštenje tenzorskog proizvoda primenjenog na vektore i kovektore na tenzore bilo kog reda.

Ako je $\boldsymbol{T} \in \mathfrak{T}_q^p(V)$ i $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{T}_s^r(V)$, onda je njihov tenzorski proizvod tenzor reda $(p+r, q+s)$ defiisan sa

$$\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S}\left(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{p+r}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{q+s}\right) =$$
$$\boldsymbol{T}\left(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\right) \boldsymbol{S}\left(\mathbf{v}^{p+1}, \ldots, \mathbf{v}^{p+r}, \mathbf{v}_{q+1}, \ldots, \mathbf{v}_{q+s}\right),$$

gde su $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{p+r} \in V^*$, a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{q+s} \in V$.

Odavde se vidi da oblik $\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S}$ glasi

$$(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S})^{i_1 \ldots i_{p+r}}_{j_1 \ldots j_s} = \boldsymbol{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_s} \boldsymbol{S}^{i_{p+1} \ldots i_{p+r}}_{j_{q+1} \ldots j_{q+s}}.$$

Na očigledan način ova operacija može biti proširena na proizvoljan broj tenzorskih prostora. Na primer,

$$\otimes : \mathfrak{T}_{q_1}^{p_1}(V) \times \mathfrak{T}_{q_2}^{p_2}(V) \times \cdots \times \mathfrak{T}_{q_r}^{p_r}(V) = \mathfrak{T}_{q+s}^{p+r}(V),$$

tako da je

$$\otimes(\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_k) = \boldsymbol{T}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{T}_k,$$

gde je $\boldsymbol{T}_i \in \mathfrak{T}_{q_i}^{p_i}(V)$. Lako je pokazati da je ovaj tenzor produkt operacija takođe multilinearna.

Tenzori

Tenzori

11. Tenzorski račun

11.1 Uvod

”Matematika je jezik”. To je bio odgovor poznatog američkog naučnika J. Vilard Gibs-a[1] na sastanku profesora Yale univerziteta na pitanje da li je matematika isto tako važna u okviru nastavnog plana i programa studija kao klasični jezici.

Tenzorski račun je specifičan jezik među ostalim jezicima matematike. Koristi se kao jezik više nezavino promenljivih i primenjuje u raznim disciplinama kao što su: linearna algebra, diferencijalna geometrija, varijacioni račun, analitička mehanika, mehanika kontinuuma, statistika, medicina,...

Albert Ajnštajn[2] je bio od prvog dana pobornik tenzorskog računa i njegove primene. U pismu Tulio Levi-Čiviti[3], jednom od začetnika tenzorskog računa, piše ”...divim se eleganciji vaše metode; mora da je lepo jahati kroz ova polja ...dok se mi drugi kroz njih teško krećemo peške ...”

Tenzorski račun nije jedini jezik više nezavino promenljivih. Njemu popularna alternativa je takozvani moderni jezik diferencijalne geometrije. Cilj oba jezika je geometrijski opis nezavisan od koordinatnog sistema. Ipak, ova dva jezika su sasvim različita i svaki od njih ima svoje prednosti i slabosti.

Dva velika geometričara dvadesetog veka, Eli Kartan[4] i Herman Vajl[5], skrenuli su pažnju na ekstreme ova dva pristupa. Kartan preporučuje ”...da se, koliko je god moguće, izbegne formalna računica u kojoj orgija tenzorskih indeksa zaklanja geometrijsku sliku koja je često veoma jednostavna ...”. Weyl, pak, ”...smatra neophodnim da upozori na prekomernu privrženost pristupu bez koordinata. U pokušaju da se izbegne neprekidno pozivanje na komponente, koristeći ovaj pristup

[1] J. Willard Gibbs
[2] Albert Einstein
[3] Tullio Levi-Civita
[4] Elie Cartan
[5] Hermann Weyl

obavezni smo da usvojimo beskrajnu listu imena i simbola, (pored složenog skupa pravila za obavljanje proračuna), što predstavlja njenu negativnu stranu. . . ”

Zbog toga je važno ovladati sa oba jezika, kako bi bili svesni njihove prednosti i slabosti.

U pisanju ove knjige imali smo u vidu ove stavove i trudili se da, na uravnotežen način, izložimo osnovne elemente tenzorskog računa. Snaga tenzorskog računa počiva na kompromisu: počinje sa uvođenjem koordinatnog sistema, ali ne specifirajući koji je to koordinatni sistem i nikad se u teorijskom prilazu ne zasniva na specifičnom koordinatnom sistemu.

Tenzorska notacija je izuzetno kompaktna i eksplicitna, posebno pri diferenciranju. Veoma je praktična pri konkretnom računanju. Kada je reč o notaciji napominjemo sledeće: matrice i tenzori su dva različita pojma. Matrice su sistemi drugog reda i matrični račun je sastavni deo tenzorskog računa. Svaki tenzor drugog reda ima svoje predstavljanje preko matrica dugog reda.

Međutim, tenzori su sistemi u opštem slučaju višeg reda. Normalno je da se ova razlika ogleda i u njihovom obeležavanju. Primera radi, tenzoru drugog reda $\boldsymbol{T}$ odgovara matrica $\mathbf{T}$. Mi ovde odstupamo od takvog obeležavanja iz prostog razloga što želimo da izbegnemo prekomeran broj oznaka. Tako sa $\mathbf{T}$ obeležavamo, u ovom delu knjige, tenzor, matricu sa (T^i_j), (T_{ij}), (T^{ij}) u zavisnosti od reprezentacije tenzora $\mathbf{T}$, a sa $\det(\mathbf{T})$ njegovu determinantu. U bilo kom drugom slučaju ta razlika će biti posebo naznačena. Razlog više, što će u najvećem broju slučajeva, biti reči o tenzorima drugog reda.

Kako je svaki jezik više od gramatike, tako je jezik tenzorske analize više nego notacija. Ona ukazuje na suštinsko svojstvo veličina koje razmatra isto tako kao što govorom ljudi ukazuju na osnovne ideje svoga razmišljanja. U ovom slučaju ideja je da je ”fizički”ili ”geometrijski”entitet isti, iako se njegov matematički zapis može razlikovati. To znači da mora postojati veza između bilo kog matematičkog opisa ako se odnose na isti entitet. Taj odnos prestavlja suštinu tenzorskog računa.

Interesantno je da je tenzorski račun matematička disciplina čije je ime vezano za osnovni pojam u mehanici kontinuuma - napon (eng. tension) Foigt[6]. Tenzorski račun se smatra prirodnim jezikom mehanike kontinuuma i šire teorije polja.

[6]Voigt

11.2 Tenzori u Euklidskom prostoru

Linearna algebra čini osnovu tenzorskog računa i diferencijalne geometrije. U prvom delu knjige izložene su njene osnove, koje su nam potrebne za dalje izlaganje. Pri tome smo se zadržali detaljnije na konačno dimenzionalnim vektorskim prostorima, s obzirmo na njihovu primenu.

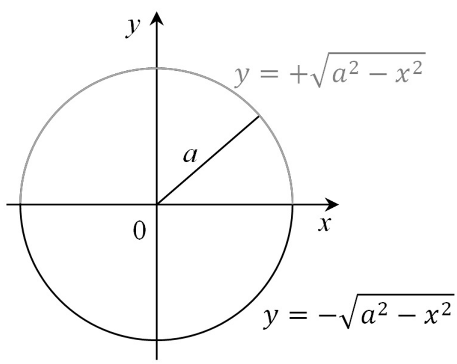
Polaznu osnovu, ovde i nadalje, čini realni Euklidski n-dimenzionalni prostor. Pri tome ćemo se, kao ilustraciju našeg izlaganja prvenstveno zadržati na 2-dimenizionalnim i 3-dimenzionalnim Euklidskim prostorima. Njihovo uopštenje na n-dimenzionalne Euklidske prostore je direktno.

Osnovna karakteristika Euklidskog prostora je postojanje Dekartovog koordinatnog sistema, koji ćemo ovde obeležavati sa z^k, a njihove jedinične vektore sa $\mathbf{i}^k$. Uobičajeni način obeležavanja Dekartovih koordinata u $\mathbb{E}_3$ je x, y, z, a njihovih jedničnih vektora $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, odnosno u $\mathbb{E}_2$ sa x, y, a njihove jednične vektore sa $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$.

I pored svih prednosti, koje ima Dekartov koordinatni sistem, on nije uvek najpogodniji.

■ **Primer 11.1** U Dekartovom koordinatnom sistemu (x, y), u E_2, jednačina kruga, poluprečnika a, je

$$x^2 + y^2 = a^2.$$



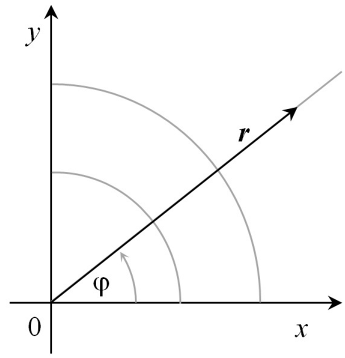
Slika 11.1

Tada je $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$. Tako definisano y nije funkcija. Međutim, u polarnim koordinatama (r, φ), je

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$

pa je jednačina za isti krug

$$r = a.$$

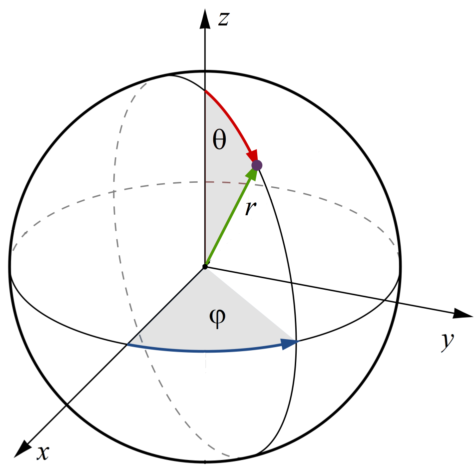


Slika 11.2

■

Kao i u prethodnom primeru, jednačina sfere, poluprečnika a je

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$



Slika 11.3: Sferne koordinate.

■ **Primer 11.2** U odnosu na sferne koordinate (r, θ, φ), date u odnosu na Dekartove koordinate:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta,$$

ista jednačina sfere je

$$r = a.$$

■

U opštem slučaju, krivolinijske koordinate x^i izražene preko Dekartovog sistema z^i date su relacijama:

$$x^i = x^i(z^1, z^2, \ldots, z^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{11.1}$$

pri čemu pretpostavljamo da je Jakobijan transformacije različit od nule, tj.

$$\left| \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \right| \neq 0, \tag{11.2}$$

u posmatrajnoj oblasti $\mathbb{E}_n$. Često se u literaturi koristi i oznaka $\dfrac{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial(z^1, z^2, \ldots, z^n)}$.

Uslov da je Jakobijan transformacije (11.2) različit od nule, u posmatranoj oblasti, na osnovu teoreme o inverznim funkcijama, omogućava postojanje relacije

$$z^i = z^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.3}$$

Skup jednačina (11.1) ili (11.3) predstavlja jednačine **koordinatne transformacije**. Ove transformacije su uzajamno recipročne – inverzne.

■ **Primer 11.3** Za polarne koordinate (r, φ) je:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r > 0.$$

U tački $O(0,0)$ polarni koordinatni sistem nije definisan. ■

■ **Primer 11.4** Za sferine koordinate (r, θ, φ) je:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\sin\theta \neq 0.$$

Dakle

$$r > 0,$$
$$0 < \theta < \pi,$$
$$0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Prema tome, duž z-ose, sferne koordinate nisu definisane. ■

11.3 Bazni vektori

Položaj tačke **x** u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru određuje se, u odnosu na jednu unapred određenu tačku O, koju nazivamo **pol**, ili **koordinatni početak**. Vektor **r**, koji određuje položaj tačke **x**, na takav način, naziva se **vektor položaja**. U odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata $Oxyz$, sa početkom u polu O, položaj tačke se određuje **koordinatama tačke** (x, y, z). **Ortogonalne projekcije** kraja vektora položaja na ose ovog koordinatnog sistema poklapaju se sa koordinatama tačke **x**, pa se komponente vektora položaja **r** poklapaju sa ovim koordinatama x, y, z:

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \text{ili} \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{11.4}$$

U opštem slučaju vektor položaja u $\mathbb{E}_n$, u odnosu na Dekartove koordinate z^k, obeležavaćemo sa

$$\mathbf{r} = z^k \mathbf{i}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{11.5}$$

gde vektori $\mathbf{i}_k$ ne zavise od z^k. Dakle, vektori

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^k} = \mathbf{i}_k = \mathbf{const}. \tag{11.6}$$

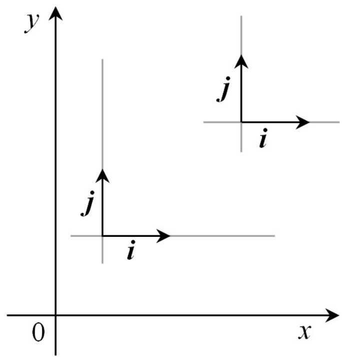
su ortonormirani i linearno nezavisni.

N Napomenimo da je samo u slučaju Dekartovih koordinata nevažan položaj indeksa, tj. $\mathbf{r} = z^k \mathbf{i}_k = z_k \mathbf{i}_k$.

Očigledno je da je:

$$\mathbf{i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}. \tag{11.7}$$

Dakle, jedinični vektori (ortovi) **i**, **j** i **k** mogu da se dobiju kao parcijalni izvodi vektora položaja po koordinati tačke.



Slika 11.4

11.4 Koordinatne linije i koordinatne površi

Sva razmatranja u tenzorskom računu zasnivaju se na korišćenju proizvoljnog, dopustivog koordinatnog sistema.

U bilo kom krivolinijskom sistemu

$$x^i = x^i(z^k), \qquad \left| \frac{\partial x^i}{\partial z^k} \right| \neq 0, \quad i,k = 1,2 \tag{11.8}$$

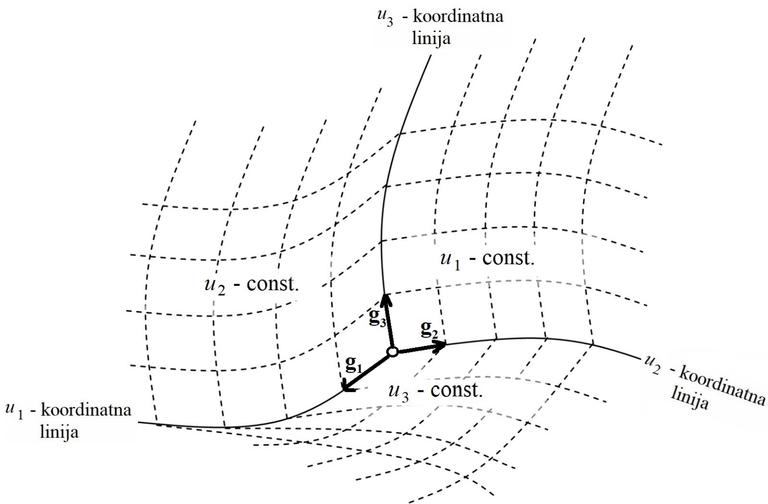
biće

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i) = z^k(x^i)\mathbf{i}_k. \tag{11.9}$$

U tom smislu definišimo sledeće pojmove.

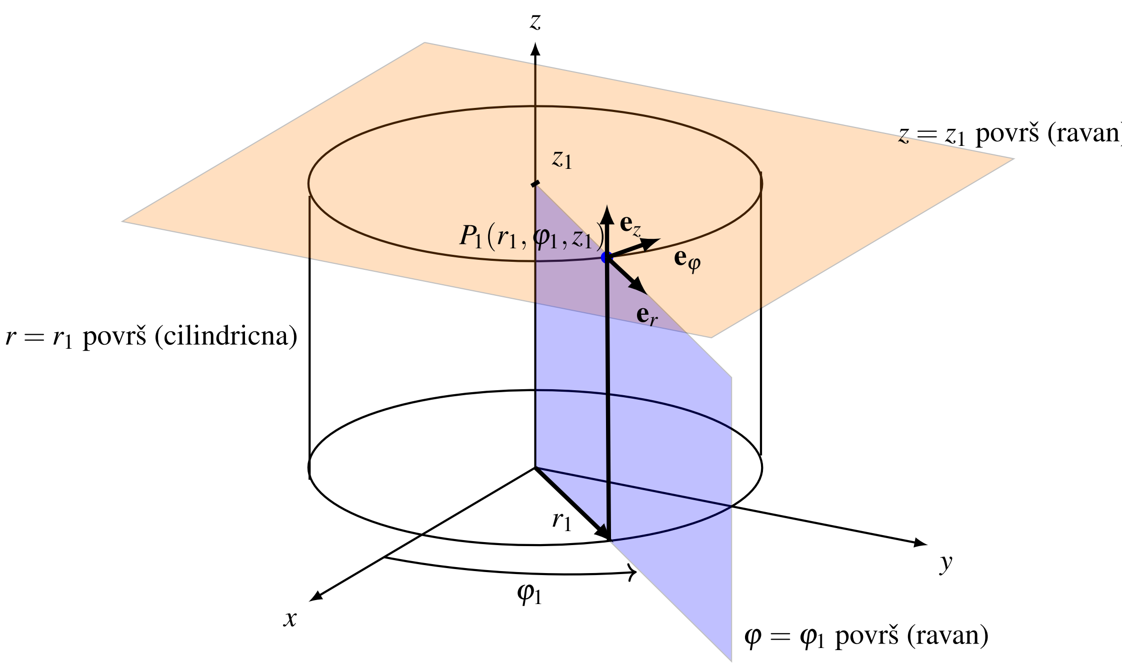
Definicija 11.4.1 **Koordinatne linije** – predstavljaju geometrijsko mesto tačaka koje se dobijaju, u datoj tački, ako se jedna menja, a preostalih $n-1$ koordinata su konstantne.

Koordinatne linije mogu da budu prave ili krive u zavisnosti od njihove geometrije (slika 11.5).



Slika 11.5: Koordinatne linije.

Definicija 11.4.2 Kordinatne površi – predstavljaju geometrijsko mesto tačaka koje se, u posmatranoj tački, dobijaju ako se sve koordinate menjaju, sem jedne.



Slika 11.6: Koordinatne površi.

Primera radi, svakoj tački prostora $\mathbb{E}_3$ odgovaraju tri koordinatne površi, tj. tačka predstavlja presek tri koordinatne površi. Koordinatna linija se nalazi u preseku dve koordinatne površi (sl. 11.6). Kada kroz svaku tačku, posmatrane oblasti, prolaze po tri ovakve, u opštem slučaju krive linije, onda kažemo da je u $\mathbb{E}_3$ definisan **krivolinijski koordinatni sistem**. Uopštenje na prostor $\mathbb{E}_n$ je neposredno.

Bazni vektori ovog sistema koordinata su njihovi tangentni vektori, orijentisani, po pravilu, prema smeru u kome rastu vrednosti x^i.

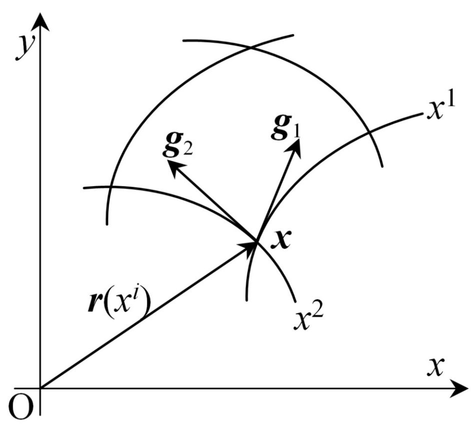
Koordinatni sistemi, u odnosu na koje se određuje položaj tačaka u prostoru, nazivaju se i **sistemi referencije**.

Ako su koordinatne površi, odnosno koordinatne linije međusobno upravne u nekoj oblasti prostora, onda je sistem koordinata **ortogonalan**.

U slučaju krivolinijiskih koordinata položaj iste tačke je određen istim vektorom položaja $\mathbf{r}$, ali izraženog u odnosu na krivolinijske koordinate x^i (vidi 11.7).

Onda su vektori tog sistema koordinata određeni (kao i u slučaju Dekartovih koordinata (11.7)) sa

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{11.10}$$



Slika 11.7

Lema 11.4.1 Vektori

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial z^k}{\partial x^i}\mathbf{i}_k, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{11.11}$$

su linearno nezavisni, i prema tome predstavljaju **kovarijantnu bazu** u $\mathbb{E}_n$. ❑

Dokaz

Iz uslova

$$\begin{aligned} 0 = \lambda^i \mathbf{g}_i &= \lambda^i \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \mathbf{i}_k \\ &\Rightarrow \lambda^i \frac{\partial z^k}{\partial x^i} = 0 \Big| \frac{\partial x^j}{\partial z^k} \\ &\Rightarrow 0 = \lambda^i \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial z^k} = \lambda^i \delta_i^j = \lambda^j. \end{aligned}$$

Istaknimo da, u opštem slučaju, $\mathbf{g}_i$ zavisi od x^k, tj. $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i(x^k)$; nisu jedinični niti ortogonalni vektori.

■ **Primer 11.5** Polarni koordinatni sistem (r, φ):

$$\begin{aligned} & x^1 = r,\ x^2 = \varphi, \\ & \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = r\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\varphi\mathbf{j} = \mathbf{r}(r, \varphi). \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} & \mathbf{g}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j} && ; |\mathbf{g}_r| = 1, \\ & \mathbf{g}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\mathbf{i} + r\cos\varphi\mathbf{j} && ; |\mathbf{g}_\varphi| = r, \\ & \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_\varphi = 0. \end{aligned}$$

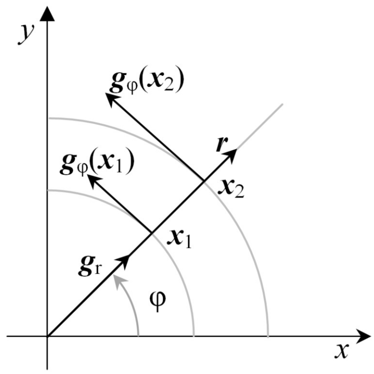
■

Dakle, $\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_\varphi$ formira bazu u $\mathbb{E}_2$ koja je ortogonalna ali nije ortonormirana (jer $\mathbf{g}_\varphi$ nisu jedinični vektori). Takođe je:

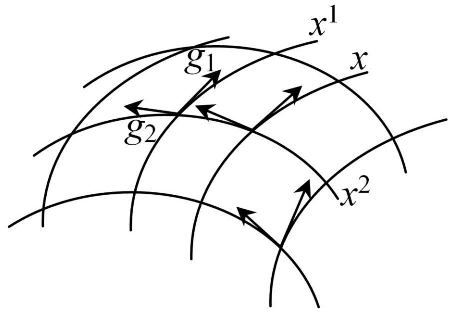
$$\begin{aligned} \mathbf{g}_r &= \mathbf{g}_r(\varphi), \\ \mathbf{g}_\varphi &= \mathbf{g}_\varphi(r, \varphi). \end{aligned}$$

Prema tome, oni se menjaju od tačke do tačke u $\mathbb{E}_2$ (vidi sl. 11.8a)

Za generalisane koordinate x^i bazni vektori $\mathbf{g}_i$ prikazani su na 11.8b.



(a)



(b)

Slika 11.8

11.5 Koordinatna transformacija

Ako pređemo na neki drugi krivolinijski koordinatni sistem $x \to \bar{x}$, tj.:

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j), \qquad \left|\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right| \neq 0 \tag{11.12}$$

onda je

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\bar{x}^i). \tag{11.13}$$

Prema tome je

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{x}^i}. \tag{11.14}$$

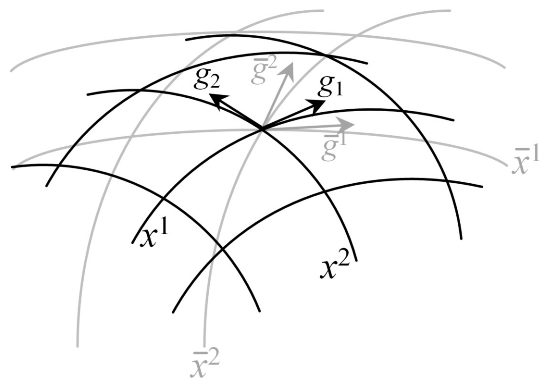
Lako je videti da je

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \mathbf{g}_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}, \tag{11.15}$$

jer je

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}.$$

Vidi sliku (sl. 11.9).



Slika 11.9

Nezavisno od geometrijske prirode baznih vektora $\mathbf{g}_i$, nadalje ćemo ih tretirati kao sistem prvog reda koji se transformiše po zakonu (11.15)

Definicija 11.5.1 Svaki sistem prvog reda u^i, koji se transformiše, kao sistem (11.12), po zakonu (11.15), tj.

$$\bar{u}_i = u_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \tag{11.16}$$

naziva se **kovarijantni tenzor** (vektor) prvog reda.

■ **Primer 11.6** Skalarna funkcija.

$$f(x^i) \quad \underset{x \to \bar{x}}{\to} \quad \bar{f}(\bar{x}^i) = f(x^j(\bar{x}^i))$$

Tada je

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}.$$

■

Kovarijantne komponente $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ nazivamo **gradijent skalarne funkcije** f.

Neka su data dva kovarijantna vektora prvog reda u_i i v_i

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= u_p \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}, \\ \bar{v}_j &= v_q \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}. \end{aligned}$$

Neka je sistem drugog reda njihova kompozicija

$$w_{ij} = u_i v_j.$$

Tada je

$$\bar{w}_{ij} = \bar{u}_i \bar{v}_j = u_p v_q \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} = w_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}.$$

Definicija 11.5.2 Bilo koji sistem $u_{i_1 \dots i_k}$ k-tog reda, koji se transformiše koordinatnom transformacijom $x \to \bar{x}$, po zakonu

$$\bar{u}_{i_1 \dots i_k} = u_{p_1 \dots p_k} \frac{\partial x^{p_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{p_k}}{\partial \bar{x}^{i_k}}, \tag{11.17}$$

naziva se **kovarijantni tenzor** k-tog reda.

11.6 Kontravarijantni bazni vektori $\mathbf{g}^i$

Definicija 11.6.1 Skup vektora $\mathbf{g}^i$, definisanih sa

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j, \tag{11.18}$$

naziva se **dualna baza**, ili **recipročna baza** prirodne baze $\mathbf{g}_i$, – ili **kontravarijantni bazni vektori**.

U odnosnu na koordinatni sistem $\bar{x}^i$ relacija (11.18) postaje

$$\bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}^j = \delta_i^j. \tag{11.19}$$

Kakva je relacija između dve baze $\mathbf{g}^i$ i $\bar{\mathbf{g}}^i$?

Jasno, kako su oni baze, možemo da pišemo

$$\bar{\mathbf{g}}^i = A^i_j \mathbf{g}^j,$$

gde su A^i_j koeficijenti dekompozicije $\bar{\mathbf{g}}^i$ u odnosu na bazu određenu sa $\mathbf{g}^i$. Odatle i prema (11.18) imamo

$$\bar{\mathbf{g}}^i \cdot \mathbf{g}_j = A^i_j.$$

Ali iz

$$\mathbf{g}_j = \bar{\mathbf{g}}_k \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j},$$

što sledi iz (11.19), imamo

$$\bar{\mathbf{g}}^i \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j},$$

pa je

$$A^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}.$$

Dakle,

$$\bar{\mathbf{g}}^i = \mathbf{g}^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}. \tag{11.20}$$

Definicija 11.6.2 Svaki sistem u^i prvog reda, koji se transformiše po zakonu (11.20), tj.

$$\bar{u}^i = u^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}, \tag{11.21}$$

naziva se **kontravarijantni vektor prvog reda**.

Definicija 11.6.3 Svaki sistem $u^{i_1 \dots i_k}$ koji se transformiše po zakonu

$$\bar{u}^{i_1 \dots i_k} = u^{p_1 \dots p_k} \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}}, \tag{11.22}$$

naziva se **kontravarijantni tenzor k-tog reda**.

Primer 11.7

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j).$$

Ovo je sistem prvog reda. U opštem slučaju nije tenzor. Ali je

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j = dx^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$$

kontravarijantni tenzor prvog reda! ■

Tako je

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{dx^j}{dt} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j},$$

i, prema tome,

$$\bar{v}^i = v^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}.$$

11.7 Tenzori mešovitog tipa

Definicija 11.7.1 Bilo koji mešoviti sistem $u^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}$ $k+l$-tog reda, koji se transformiše kao

$$\bar{u}^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = u^{p_1\dots p_k}_{q_1\dots q_l} \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}} \frac{\partial x^{q_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{q_l}}{\partial \bar{x}^{j_l}}, \tag{11.23}$$

naziva se **tenzor** $k+l$**-tog reda**, k puta kontravarijantni i l puta kovarijantni.

11.8 Metrički tenzor

Pođimo od

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{g}_i \mathrm{d}x^i. \tag{11.24}$$

Tada, kako je $|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{d}s$, odakle je

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = (\mathbf{g}_i \mathrm{d}x^i)\cdot(\mathbf{g}_j \mathrm{d}x^j) = \mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j,$$

tj.

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j, \tag{11.25}$$

gde je, po definiciji,

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j. \tag{11.26}$$

Skalarna invarijanta $\mathrm{d}s^2$ naziva se **metrika prostora**.

U nekom Euklidskom prostoru $\mathbb{E}_n$, g_{ij} je simetrični tenzor drugog reda. Zaista,

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij} = \bar{\mathbf{g}}_i\cdot\bar{\mathbf{g}}_j \quad &= \quad \left(\mathbf{g}_p \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\right)\cdot\left(\mathbf{g}_q \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\right) \\ &\Rightarrow \quad \bar{g}_{ij} = g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}. \end{aligned} \tag{11.27}$$

Takođe je

$$|g_{ij}| \neq 0, \tag{11.28}$$

i

$$\mathbf{g}_i = g_{ij}\mathbf{g}^j.$$

Odavde sledi

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k,$$

pa je

$$|g_{ij}| \cdot |g^{jk}| = 1.$$

Dakle i $|g_{ij}|$ i $|g^{ij}|$ su različiti od nule i recipročni!

Bitno je da naglasimo, da je u opštem slučaju

$$g_{ij} = g_{ij}(x^k), \tag{11.29}$$

jer je

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i(x^j).$$

Lema 11.8.1 Koordinatni sistem x^i je ortogonalan akko

$$g_{ij} = 0, \quad i \neq j. \tag{11.30}$$

❑

Dokaz

Ovo sledi iz relacije (11.26) i definicije ortogonalnosti dva vektora.

▪ **Primer 11.8** Cilindrične koordinate (r, φ, z):

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{g}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) & |\mathbf{g}_r| = 1 \\ \mathbf{g}_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0) & |\mathbf{g}_\varphi| = r \\ \mathbf{g}_z = (0,0,1) = \vec{k} & |\mathbf{g}_z| = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_\varphi &= 0 \\ \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_z &= 0 \\ \mathbf{g}_\varphi \cdot \mathbf{g}_z &= 0 \end{aligned}$$

ortogonalne, ali ne i ortonormalne.

$$\{g_{ij}\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}.$$

▪

▪ **Primer 11.9** Sferne koordinate (r, θ, φ)

$$\{g_{ij}\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\varphi \end{array} \right\}.$$

▪

11.9 Geometrijska interpretacija kontravarijantnih i kovarijantnih tenzora prvog reda

Neka su date x^i u $\mathbb{E}_2$. Tada je u tački P

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i = v^1 \mathbf{g}_1 + v^2 \mathbf{g}_2.$$

N Ako je $v^i = c^i$ dato, ali ne i tačka u kojoj je $\mathbf{v}$ definisano, imaćete polje vektora $\mathbf{v}$ konstanti v^i u tačkama x^i.

■ **Primer 11.10** Za polarne koordinate (r, φ), $\mathbf{v}$ je

$$|v^2 \mathbf{g}_2| = v^2 \sqrt{g_{22}} \neq v^2,$$
$$\text{ako je } \; g_{22} \neq 1, \;\; \text{tj. ako je } \;\; |\mathbf{g}_2| \neq 1.$$

Intenzitet vektora $\mathbf{v}$ je:

$$\begin{aligned} |v|^2 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (v^i \mathbf{g}_i) \cdot (v^j \mathbf{g}_j) = g_{ij} v^i v^j, \\ |v| &= \sqrt{g_{ij} v^i v^j}. \end{aligned} \tag{11.31}$$

Možemo da prikažemo vektor $\mathbf{v}$ i preko kontravarijantne baze:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_i \mathbf{g}^i = v_1 \mathbf{g}^1 + v_2 \mathbf{g}^2, \\ \mathbf{v} &= v^i \mathbf{g}_i = v_k \mathbf{g}^k. \end{aligned} \tag{11.32}$$

Kakva je veza između v_i i v^i istog vektora $\mathbf{v}$?
Iz (11.32) imamo

$$v^i = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j v_j = g^{ij} v_j, \tag{11.33}$$

i

$$v_i = g_{ij} v^j, \tag{11.34}$$

gde je

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j, \quad g^{ij} = g^{ji} \text{ i } |g^{ij}| = \frac{1}{|g_{ij}|} \neq 0. \tag{11.35}$$

Kako je

$$|v|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = g^{ij} v_i v_j, \tag{11.36}$$

sledi da je

$$g^{ij} \text{– takođe metrički tenzor kontravarijantnog tipa.}$$

Da je g^{ij} tenzor može se lako proveriti:

$$\bar{\mathbf{g}}^{ij} = \bar{\mathbf{g}}^i \cdot \bar{\mathbf{g}}^j = \left(\mathbf{g}^p \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\right) \cdot \left(\mathbf{g}^q \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q}\right) = (\mathbf{g}^p \cdot \mathbf{g}^q) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} = g^{pq} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q}.$$

■

■ **Primer 11.11** Cilindrične koordinate (r, φ, z)

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Primer 11.12** Sverne koordinate (r, θ, φ)

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}.$$

■

■ **Primer 11.13** Kontravarijantna baza u cilindričnim koordinatama (r, φ, z).
Polazimo od

$$\mathbf{g}^i = g^{ij}\mathbf{g}_j.$$

U opštem slučaju, u ortogonalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{g}^i = g^{ii}\mathbf{g}_i \quad \text{(ne sumirati po } i\text{)}.$$

U ovom slučaju je:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^r &= \mathbf{g}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \\
\mathbf{g}^\varphi &= \frac{1}{r^2}\mathbf{g}_\varphi = \left(-\frac{1}{r}\sin\varphi, \frac{1}{r}\cos\varphi, 0\right), \\
\mathbf{g}^z &= \mathbf{g}_z = (0, 0, 1).
\end{aligned}$$

■

■ **Primer 11.14** Kontravarijantna baza u sfernim koordinatama (r,θ,φ):

$$\mathbf{g}^r = \mathbf{g}_r = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$
$$\mathbf{g}^\theta = \frac{1}{r^2}\mathbf{g}_\theta = \left(\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi, \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi, -\frac{1}{r}\sin\theta\right),$$
$$\mathbf{g}^\varphi = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\mathbf{g}_\varphi = \left(-\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi, \frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi, 0\right).$$

■

Ako pređemo na drugi koordinatni sistem: $x \to \bar{x}$, onda je

$$\mathbf{v} = v^j\mathbf{g}_j = \bar{v}^i\bar{\mathbf{g}}_i \tag{11.37}$$

i

$$\bar{v}^i = v^j\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}. \tag{11.38}$$

Ovo je relacija između dve reprezentacije vektora $\mathbf{v}$ u dva koordinatna sistema. Obrnuto, ako je

$$\bar{u}^i = u^j\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j},$$

tada u^i ili $\bar{u}^j$ predstavlja isti entitet u dva koordinatna sistema.

Ista interpretacija važi za tenzore višeg reda, tj.

$$\mathbf{T} = T^{ij}\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}_j = \bar{T}^{pq}\bar{\mathbf{g}}_p\otimes\bar{\mathbf{g}}_q. \tag{11.39}$$

Prema tome, imamo

$$\bar{T}^{pq} = T^{ij}\frac{\partial\bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial\bar{x}^q}{\partial x^j}. \tag{11.40}$$

12. Sistemi veličina. Osnovne operacije. Primena

12.1 Sistemi veličina

Do sada smo se susretali sa problemom obeležavanja nekog skupa veličina. Primera radi, koordinate neke tačke smo definisali kao uređen skup brojeva $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$. Kraći i praktičniji način obeležavanja je $\mathbf{x} = (x^i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Drugi primer, koji ćemo detaljnije razmatrati je obeležavanje elemenata matrice $\mathbf{A} = (a^i_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pri tom, skraćenom obeležavanju precizirali smo vrednosti koje indeksi i i j mogu da uzimaju.

Pri takvom obeležavanju, položaj i mesto indeksa u skupu veličina, ima posebno značenje.

Definicija 12.1.1 Bilo koji skup veličina definisan **skupom indeksa**, u odnosu na koordinatni sistem, recimo x^i, naziva se **sistem**. Broj indeksa definiše **red** sistema.

Indeksi mogu da budu gornji i/ili donji. Položaj indeksa definiše **tip sistema**. Ako sistem ima bar dva indeksa u različitim položajima sistem je **mešovitog tipa**. Naravno, mešoviti sistem mora da bude bar drugog reda. Tip sistema, kao i položaj indeksa, su, u opštem slučaju, vrlo važni u tenzorskom računu.

Primer 12.1

a_{ijk} — sistem trećeg reda,
$a^{i}_{\cdot jk}$ — sistem trećeg reda, mešovitog tipa,
$a^{ij\cdot}_{\ \ k}$ — sistem trećeg reda, mešovitog tipa,
a^{ijk} — sistem trećeg reda.

Dakle, u opštem slučaju, sistemi n-tog reda mogu da budu $n+1$ prvog tipa. Uočimo da je položaj (mesto) indeksa u skupu indeksa označen tačkom. ■

Definicija 12.1.2 Sistem bez indeksa je **sistem nultog reda**.

Primer 12.2

T – temperatura,
ρ – gustina,
p – pritisak.

■

12.2 Neki važni sistemi

Svakoj kvadratnoj matrici **A** odgovara skalar koji nazivamo **determinanta matrice A**. Red matrice određuje red njene determinante. Obeležava se sa

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}. \tag{12.1}$$

Uobičajena oznaka je takođe $|\mathbf{A}|$ za razliku od oznaka $(\mathbf{A})$ i $\|\mathbf{A}\|$ kojima se obeležavaju matrica **A** i njena norma, redom. Često ćemo koristiti i oznaku a za determinantu matrice $\left(a^i_j\right)$, tj. $\det(\mathbf{A}) = a$.

Determinata drugog reda je

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2.$$

Za determinantu trećeg reda pišemo

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} =$$
$$= a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_1^3 a_2^1 a_1^2 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^3.$$

Razvijanje determinanti višeg reda u ekplicitnom obliku je veoma složeno. Postavlja se pitanje: da li ih je moguće izraziti u sažetom obliku koji bi bio daleko praktičniji za analitičko računanje?

Kao polazna tačka za takav način pisanja poslužiće nam $\det(\mathbf{A})$ trećeg reda. Uvodeći oznaku e_{ijk}, $i,j,k = 1,2,3$, za potpuno antisimetrični brojni sistem takav da je $e_{123} = 1$

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{za parnu permutaciju indeksa 1,2,3,} \\ -1 & \text{za neparnu permutaciju indeksa 1,2,3,} \\ 0 & \text{u svakom drugom slučaju,} \end{cases}$$

tj.

$$\begin{aligned} e_{123} &= e_{231} = e_{312} = 1, \\ e_{132} &= e_{213} = e_{321} = -1, \end{aligned}$$

onda se $\det(\mathbf{A})$ trećeg reda može napisati u obliku

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) = {} & e_{123}\, a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 + e_{231}\, a_1^2\, a_2^3\, a_3^1 + e_{312} a_1^3\, a_2^1\, a_1^2 + \\ & + e_{321}\, a_1^3\, a_2^2\, a_3^1 + e_{132}\, a_1^1\, a_2^3\, a_3^2 + e_{213}\, a_1^2\, a_2^1\, a_3^3 = \\ & = e_{ijk}\, a_1^i\, a_2^j\, a_3^k. \end{aligned}$$

Uočimo da se po ponovljenim indeksima vrši sabiranje saglasno sa Ajnštajnovom konvencijom. Ista $\det(\mathbf{A})$ se može pretstaviti i u obliku

$$a = \det(\mathbf{A}) = e^{ijk}\, a_i^1\, a_j^2\, a_k^3, \tag{12.2}$$

gde je e^{ijk}, analogon sistemu e_{ijk}, potpuno antisimetrični brojni sistem, takav da je $e^{123} = 1$.

Ovako pogodan sistem nas motiviše da se sistemima, uopšte, više zadržimo i razmatramo ih u n - dimenzionalnim prostorima. Na više primera pokazaćemo pogodnosti njihove primene.

Zadatak 12.1 Neka je

$$A_{ijk} = e_{pqr} a_i^p a_j^q a_k^r.$$

Pokazati da je A_{ijk} antisimetrično (vidi def. 12.4.1, na str. 314). ■

Rešenje

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_{jik} &= e_{qpr} a_j^q a_i^p a_k^r = \\ &= -e_{pqr} a_i^p a_j^q a_k^r = -A_{ijk}. \end{aligned}$$

Odavde sledi i da je

$$A_{ijk} = A_{123} e_{ijk} = e_{qpr} a^q_j a^p_i a^r_k, \tag{12.3}$$

jer ima samo jednu nezavisnu komponentu, recimo A_{123}.

Lema 12.2.1

$$A_{123} = a. \tag{12.4}$$

❑

Dokaz

Neposredno sledi iz (12.2) i (12.3).

Onda se (12.3) može napisati u obliku

$$\begin{aligned} a\, e_{ijk} = e_{pqr} a^p_i a^q_j a^r_k |\, e^{ijk} \quad &\Rightarrow \\ \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3!} \delta^{ijk}_{pqr} a^p_i a^q_j a^r_k, \end{aligned} \tag{12.5}$$

gde je $\delta^{ijk}_{pqr} = e_{pqr} e^{ijk}$, $\delta^{ijk}_{ijk} = 3!$ (o čemu će kasnije biti reči).

12.3 Algebra sistema

Prethodno ćemo da definišemo osnovne algebarske operacije nad sistemima.

Definicija 12.3.1 Dva **sistema** su **jednaka** ako su istog reda, istog tipa i opsega odgovarajućih indeksa, i odgovarajuće komponente su iste.

Dakle,

$$a_i = b_i \qquad i = 1, \ldots, n \;.$$

Ali,

$$a_i \neq b_\alpha, \quad \text{ako je} \quad i = 1, \ldots n, \quad \alpha = 1, \ldots, m \neq n.$$

Takođe je

$$a^i_{\cdot j} \neq b_{ij}.$$

N Napomenimo da kad god je moguće, koristićemo različite vrste slova, ako oni imaju različite opsege (vrednosti). Tako je

$$a^i_{\cdot \alpha j \Sigma}$$

mešoviti sistem 4-tog reda sa različitim vrednostima opsega indeksa i, α, j, Σ.

Definicija 12.3.2 Dva **sistema** se mogu **sabrati** (oduzeti) ako su istog reda i tipa. Kao rezultat ove operacije dobijamo sistem istog reda i tipa. Sabiraju se (oduzimaju) samo odgovarajuće komponente sistema.

■ **Primer 12.3**

$$a_i + b_i = c_i,$$
$$a_i - b_i = d_i,$$
$$b^i_{\cdot\alpha} + c^i_{\cdot\alpha} = d^i_{\cdot\alpha}.$$

■

12.3.1 Množenje (spoljašnji proizvod)

Možemo da množimo sisteme različitog reda i različitog tipe. Red i tip rezultujućeg (dobijenog) sistema je definisan redom i tipom pomnoženih sistema: red dobijenog sistema jednak je zbiru redova množenih sistema.

Tako, na primer, množimo svaku komponentu sistema a_i sa svakom komponentom sistema $b^j_{\cdot\alpha}$, tj.

$$a_i,\ b^j_{\cdot\alpha} \Rightarrow a_i b^j_{\cdot\alpha}.$$

Definicija 12.3.3 **Kontrakcija**: U mešovitim sistemima možemo da koristimo konvenciju o sabiranju za par indeksa na različitim mestima sistema. Red rezultujućeg sistema je za dva manji od originalnog (polaznog) sistema.

■ **Primer 12.4** $a^i_{\cdot jkl}$

$$\left.\begin{array}{ll} \Rightarrow & a^i_{\cdot ikl} \\ \Rightarrow & a^i_{\cdot jil} \\ \Rightarrow & a^i_{\cdot jki} \end{array}\right\} \text{su u opštem slučaju različiti.}$$

Indeksi, po kojima se vrši kontrakcija, nazivaju se **nemi indeks**. Kaže se da se sabira po njima! Dakle $a^i_{\cdot i} = a^j_{\cdot j}$. Ostali indeksi se nazivaju **slobodni indeksi**. Oni definišu red i tip sistema.

$a^{ij}_{\cdot\cdot kl} \Rightarrow a^{ij}_{\cdot\cdot ij}$ sistem nultog reda.

■

Definicija 12.3.4 **Kompozicija**: Spoljašnji proizvodi mogu imati mešoviti sistemi u odnosu na indekse sistema koji se množe. Na primer, u sistemu

$$a^i b_{jk\cdot}{}^l$$

sabiranjem po indeksima i i j dobijamo sistem

$$a^i b_{ik\cdot}{}^l.$$

Takva operacija se naziva **kompozicija**. Međutim,

$$a^i b_{jk\cdot}{}^k$$

nije kompozicija, već **kontrakcija**.

12.4 Simetrični i antisimetrični sistemi

Definicija 12.4.1 Za sistem veličina $a^{i_1,\ldots,i_k}$ (ili $a_{i_1,\ldots,i_k}$) koji zavisi od k-indeksa, kaže se da je **potpuno simetričan** ako se vrednost sistema ne menja pri promeni mesta indeksa, tj.

$$a^{i_1\ldots i_p\ldots i_q\ldots i_k} = a^{i_1\ldots i_q\ldots i_p\ldots i_k}$$
$$(i_1,\ldots,i_k = 1,2,\ldots,n, \ \ 1 \le p < q \le k).$$

Drugačije rečeno,

$$a^{i_1\ldots i_k} = a^{i_{\sigma_1}\ldots i_{\sigma_k}}$$

za svaku permutaciju σ. Broj nezavisnih komponenti N dat je formulom

$$N = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix}.$$

■ **Primer 12.5** Najprostiji slučaj je sistem drugog reda

$$a^{ij} = a^{ji}.$$

■

Definicija 12.4.2 Ako vrednost sistema $a^{i_1\cdots i_k}$ (ili $a_{i_1\ldots i_k}$) menja znak pri promeni bilo kog para indeksa, kažemo da je $a^{i_1\cdots i_k}$ (ili $a_{i_1\cdots_k}$) **potpuno antisimetričan**,

tj.

$$a_{i_1 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_k} = -a_{i_1 \ldots i_q \ldots i_p \ldots i_k}$$
$$(i_1, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, n, \quad 1 \le p < q \le k).$$

Broj različitih komponenti je

$$N = \binom{n}{k}.$$

Specijalno, kada je $k = n \Rightarrow N = 1$.

Posledica 12.4.1 Vrednost potpuno antisimetričnog sistema $a^{i_1 \cdots i_k}$ se ne menja sa parnom permutacijom indeksa. Specijalno, ako je $k > n$, onda je antisimetrični sistem identički jednak nuli.

Zadatak 12.2 Posmatrajmo sistem trećeg reda a_{ijk}. Pokazati da je $a_{ijk} = 0$ ako je simetričan u odnosu na prva dva indeksa i antisimetričan u odnosu na poslednja dva indeksa. ■

Rešenje

$$a_{ijk} = a_{jik} = -a_{jki} = -a_{kji} = a_{kij} = a_{ikj} = -a_{ijk}$$
$$\Rightarrow a_{ijk} = 0.$$

■ **Primer 12.6** Podsetimo se da se bilo koji sistem drugog reda može prikazati kao zbir simetričnog i antisimetričnog sistema drugog reda:

$$a_{ij} = a^S_{ij} + a^A_{ij}$$
$$\Rightarrow a^S_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}),$$
$$a^A_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}).$$

■

Uočimo da ovo ne važi za sistem trećeg ili viših redova, o čemu će dalje biti više reči.

12.5 e-sistem

Opštije, sistem definisan relacijom

$$e_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \begin{cases} 1 & \text{za parnu permutaciju indeksa 1,2,\ldots,n,} \\ -1 & \text{za neparnu permutaciju indeksa 1,2,\ldots,n,} \\ 0 & \text{u svakom drugom slučaju,} \end{cases}$$

naziva se e-**sistem** ili **permutacioni sistem**.

N Vrednosti koje indeksi uzimaju jednake su redu sistema. Specijalno, za $n = 1 \quad \Rightarrow \quad e = 1$.

■ **Primer 12.7**

$$(\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_e) \cdot \mathbf{i}_m = e_{kem}$$

■

12.6 δ - sistem, generalisani Kronekerov delta sistem

Evidentna je prednost uvođenja e-sistema, što inicira uvođenje i drugih sistema, posebno δ-sistema, što je od značaja u tenzorskom računu.

Definicija 12.6.1 **Delta sistem** je

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{12.6}$$

■ **Primer 12.8**

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j.$$

Važnost δ - sistema je u zameni indeksa u sistemu. Na primer

$$a_i \delta^i_j = a_j.$$

■

U literaturi je poznat pod imenom **substitucioni simbol**.
Neka je

$$\delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} = \frac{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_k})}{\partial(x^{j_1}, \ldots, x^{j_k})} = \begin{vmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \delta^{i_1}_{j_2} & \cdots & \delta^{i_1}_{j_k} \\ \delta^{i_2}_{j_1} & \delta^{i_2}_{j_2} & \cdots & \delta^{i_2}_{j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{i_k}_{j_1} & \delta^{i_k}_{j_2} & \cdots & \delta^{i_k}_{j_k} \end{vmatrix}, \quad i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k = 1, 2, \ldots, \; n \geq k.$$

Ovako definisani sistem naziva se **generalisani Kronekerov**[1] **delta sistem** koji ima sledeća svojstva:

$$\delta^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k} = \begin{cases} +1, & (j_1 \ldots j_k) \text{ parna permutacija indeksa } (i_1 \ldots i_k), \\ -1, & (j_1 \ldots j_k) \text{ neparna permutacija indeksa } (i_1 \ldots i_k), \\ 0, & \text{u svim ostalim slučajevima.} \end{cases} \tag{12.7}$$

Ovaj sistem je potpuno antisimetričan i po donjim i po gornjim indeksima.

Primer 12.9

$$\delta^{125}_{512} = 1,$$
$$\delta^{134}_{315} = 0,$$
$$\delta^{215}_{512} = -1.$$

■

12.6.1 Neki korisni izrazi

$$\delta^{ij}_{kl} = \begin{vmatrix} \delta^i_k & \delta^i_l \\ \delta^j_k & \delta^j_l \end{vmatrix} = \delta^i_k\delta^j_l - \delta^i_l\delta^j_k. \tag{12.8}$$

$$\delta^{i_1\ldots i_b k_1\ldots k_{n-b}}_{j_1\ldots j_b k_1\ldots k_{n-b}} = (n-b)!\delta^{i_1\ldots i_b}_{j_1\ldots j_b} \tag{12.9}$$

$$\delta^{i_1\ldots i_a k_1\ldots k_{b-a}}_{j_1\ldots j_a k_1\ldots k_{b-a}} = \binom{n-a}{b-a}(b-a)!\delta^{i_1\ldots i_a}_{j_1\ldots j_a} = \frac{(n-a)!}{(n-b)!}\delta^{i_1\ldots i_a}_{j_1\ldots j_a} \tag{12.10}$$

Iz (12.10) sledi

$$a = 0 \Rightarrow \delta^{j_1\ldots j_b}_{j_1\ldots j_b} = \frac{n!}{(n-b)!}. \tag{12.11}$$

Iz (12.11) sledi

$$\text{za } b = n \Rightarrow \delta^{j_1\ldots j_n}_{j_1\ldots j_n} = n!, \tag{12.12}$$

$$\delta^{h_1\ldots h_s h_{s+1}\ldots h_r}_{j_1\ldots j_s j_{s+1}\ldots j_r}\delta^{k_{s+1}\ldots k_r}_{h_{s+1}\ldots h_r} = (r-s)!\delta^{h_1\ldots h_s k_{s+1}\ldots k_r}_{j_1\ldots j_s j_{s+1}\ldots j_r}. \tag{12.13}$$

Na osnovu svojstava e-sistma i δ-sistema moguće je ustanoviti vezu između njih. Tako je

$$e^{i_1\ldots i_n}e_{j_1\ldots j_n} = \delta^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n} \tag{12.14}$$

$$e^{j_1\ldots j_r j_{r+1}\ldots j_n}\delta^{h_{r+1}\ldots h_n}_{j_{r+1}\ldots j_n} = (n-r)!e^{j_1\ldots j_r h_{r+1}\ldots h_n}. \tag{12.15}$$

[1] Kronecker

N Važno je istaći da red e-sistema određuje raspon vrednosti njegovih indeksa, što nije slučaj sa δ-sistemom. To je evidentno u izrazu (12.15).

Ako je skup veličina $a_{i_1\dots i_n}$ antisimetričan po donjim indeksima, tada je

$$\delta^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_n} a_{i_1\dots i_n} = n! a_{j_1\dots j_n}. \tag{12.16}$$

Isto tako za potpuno antisimetričan sistem $B^{i_1 i_2 \dots i_r}$ važi

$$\delta^{j_1 j_2 \dots j_r}_{i_1 i_2 \dots i_r} B^{i_1 i_2 \dots i_r} = r! B^{j_1 j_2 \dots j_r}.$$

N U ovom primeru (12.16) ilustrujemo generalisani $\delta^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_n} a_{i_1\dots i_n}$ kao **supsticioni operator**.

Ako sistem $a_{i_1\dots i_n}$ nije potpuno antisimetričan, onda njegov antisimetričan deo obeležavasmo sa $a_{[i_1\dots i_n]}$ i dat je izrazom

$$a_{[i_1\dots i_n]} = \frac{1}{k!} \delta^{j_1\dots j_n}_{i_1\dots i_n} a_{j_1\dots j_n}. \tag{12.17}$$

12.7 Primena e-sistema i δ-sistema na determinante

Pokazali smo da je determinanta matrice trećeg reda, (12.5),

$$\begin{aligned} a\, e_{ijk} &= e_{pqr} a^b_i a^q_j a^r_k | \;\; e^{ijk} \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{3!} \delta^{ijk}_{pqr} a^p_i a^q_j a^r_k, \end{aligned}$$

Na isti način, u opštem slučaju, za $a = \det\left(a^j_i\right)$, $\;i, j = 1, 2, \dots, n$, može se pokazati da je

$$a = \frac{1}{n!} \delta^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_n} a^{j_1}_{i_1} \cdots a^{j_n}_{i_n}. \tag{12.18}$$

12.7.1 Kofaktor kvadratne matrice

Koristeći e-sistem **kofaktor kvadratne matrice** može da se elegantno izvede. Kao i do sada, razmotrimo prvo njegovo izvođenje u trodimenzionalnom prostoru. Tako je

$$\begin{aligned} a &= e_{ijk}a_1^i a_2^j a_3^k = a_1^i e_{ijk} a_2^j a_3^k = \\ &= a_1^i e_{ijk}\frac{1}{2}e^{1qr}a_q^j a_r^k = a_1^i\left(\frac{1}{2!}\delta_{ijk}^{1qr}a_q^j a_r^k\right) = \\ &= a_1^i A_i^1, \end{aligned}$$

gde je $A_i^1 = \frac{1}{2!}\delta_{ijk}^{1qr}a_q^j a_r^k$ kofaktor od a_1^i.

Prema tome

$$a_p^i \to A_i^p = \frac{\partial a}{\partial a_p^i} = \frac{1}{2!}\delta_{ijk}^{pqr}a_q^j a_r^k. \tag{12.19}$$

Opštije

$$\begin{aligned} a_p^i A_m^p &= \frac{1}{2!}\delta_{mjk}^{pqr}a_q^j a_r^k a_p^i = \frac{1}{2!}e^{pqr}a_p^i a_q^j a_r^k e_{mjk} \\ &= \frac{1}{2!}ae^{ijk}e_{mjk} = \frac{1}{2!}a\delta_{mjk}^{ijk} = \frac{1}{2!}2!a\delta_m^i = a\delta_m^i, \end{aligned} \tag{12.20}$$

tj.

$\mathbf{AA}^* = |\det A|\mathbf{I}$, $\mathbf{A}^*$ - adjungovana matrica matrice $\mathbf{A}$, (uporediti sa izrazom v) u Definiciji 5.11.1, na str.135)

Na isti način se može pokazati da je

$$a_j^i \to A_i^j = \frac{1}{(n-1)!}\delta_{ii_2\ldots i_n}^{jj_2\ldots j_n}a_{j_2}^{i_2}\ldots a_{j_n}^{i_n}. \tag{12.21}$$

Ovo važi u opštem slučaju.

Od funamentalnog značaja su sledeći izrazi koji važe za n-dimenzionalne prostore.

Minor k-tog reda determinante

$$a = |a_j^i| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

definiše se formulom

$$a_{j_1 j_2\cdots j_k}^{i_1 i_2\cdots i_k} = \delta_{p_1 p_2\cdots p_k}^{i_1 i_2\cdots i_k}a_{j_1}^{p_1}a_{j_2}^{p_2}\cdots a_{j_k}^{p_k} = \delta_{j_1 j_2\cdots j_k}^{p_1 p_2\cdots p_k}a_{p_1}^{i_1}a_{p_2}^{i_2}\cdots a_{p_k}^{i_k}. \tag{12.22}$$

Primera radi, minori prvog reda su elementi a_j^i, minori drugog reda su determinante

$$\begin{vmatrix} a_{j_1}^{i_1} & a_{j_2}^{i_1} \\ a_{j_1}^{i_2} & a_{j_2}^{i_2} \end{vmatrix} = a_{j_1}^{i_1}a_{j_2}^{i_2} - a_{j_1}^{i_2}a_{j_2}^{i_1} = \delta_{p_1 p_2}^{i_1 i_2}a_{j_1}^{p_1}a_{j_2}^{p_2},$$

itd.

Iz $(12.22)_1$, za $k=n$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
a^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_n} &= \delta^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{p_1 p_2 \cdots p_n} a^{p_1}_{j_1} a^{p_2}_{j_2} \cdots a^{p_n}_{j_n} = \\
&= e_{p_1 p_2 \cdots p_n} e^{i_1 i_2 \cdots i_n} a^{p_1}_{j_1} a^{p_2}_{j_2} \cdots a^{p_n}_{j_n} = \\
&= a\delta^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_n}
\end{aligned} \tag{12.23}
$$

Odavde sledi da je

$$
\begin{aligned}
a^{i_1 i_2 \cdots i_k i_{k+1} \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_k i_{k+1} \cdots i_n} &= a\delta^{i_1 i_2 \cdots i_k i_{k+1} \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_k i_{k+1} \cdots i_n} = \\
&= (n-k)! a\delta^{i_1 i_2 \cdots i_k}_{j_1 j_2 \cdots j_k},
\end{aligned} \tag{12.24}
$$

ili

$$
a\delta^{i_1 i_2 \cdots i_k}_{j_1 j_2 \cdots j_k} = \frac{1}{(n-k)!} a^{i_1 i_2 \cdots i_k i_{k+1} \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_k i_{k+1} \cdots i_n}. \tag{12.25}
$$

Specijalno za $k=n$ je

$$
a\delta^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_n} = a^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_n}, \tag{12.26}
$$

odakle sledi

$$
a = \frac{1}{n!} a^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{i_1 i_2 \cdots i_n}. \tag{12.27}
$$

Kofaktor minora k-tog reda (12.22) naziva se determinanta

$$
\begin{aligned}
A^{j_1 j_2 \cdots j_k}_{i_1 i_2 \cdots i_k} &= \frac{1}{(n-k)!} \delta^{j_1 j_2 \cdots j_n}_{i_1 i_2 \cdots i_n} a^{i_{k+1}}_{j_{k+1}} \cdots a^{i_n}_{j_n} = \\
&= \frac{1}{((n-k)!)^2} \delta^{j_1 j_2 \cdots j_n}_{i_1 i_2 \cdots i_n} a^{i_{k+1} \cdots i_n}_{j_{k+1} \cdots j_n}.
\end{aligned} \tag{12.28}
$$

Specijalno, za $k=1$ dobija se dobro poznati izraz za kofaktor elementa a^i_j, tj.

$$
A^j_i = \frac{1}{(n-1)!} \delta^{j j_2 \dots j_n}_{i i_2 \dots i_n} a^{i_2}_{j_2} \cdots a^{i_n}_{j_n}. \tag{12.29}
$$

Od interesa je izvesti izraz za

$$
a^{i_1 i_2 \cdots i_k}_{j_1 j_2 \cdots j_k} A^{j_1 j_2 \cdots j_k}_{q_1 q_2 \cdots q_k} \tag{12.30}
$$

koji predstavlja generalizaciju izraza (12.20).

Koristeći (12.22) i (12.28), dobijamo

$$
\begin{aligned}
& a^{i_1 i_2 \cdots i_k}_{j_1 j_2 \cdots j_k} A^{j_1 j_2 \cdots j_k}_{q_1 q_2 \cdots q_k} = \\
&= \delta^{p_1 p_2 \cdots p_k}_{j_1 j_2 \cdots j_k} a^{i_1}_{p_1} \cdots a^{i_k}_{p_k} \frac{1}{(n-k)!} \delta^{j_1 j_2 \cdots j_k \cdots j_n}_{q_1 q_2 \cdots q_k \cdots q_n} a^{q_{k+1}}_{j_{k+1}} \cdots a^{q_n}_{j_n} = \\
&= \frac{k!}{(n-k)!} \delta^{p_1 p_2 \cdots p_k j_{k+1} \cdots j_n}_{q_1 q_2 \cdots q_k q_{k+1} \cdots q_n} a^{i_1}_{p_1} \cdots a^{i_k}_{p_k} a^{q_{k+1}}_{j_{k+1}} \cdots a^{q_n}_{j_n} = \\
&= \frac{k!}{(n-k)!} a^{i_1 i_2 \cdots i_k q_{k+1} \cdots q_n}_{q_1 q_2 \cdots q_k q_{k+1} \cdots q_n} = k! a\delta^{i_1 i_2 \cdots i_k}_{q_1 q_2 \cdots q_k},
\end{aligned}
$$

tj.

$$a^{i_1 i_2 \cdots i_k}_{j_1 j_2 \cdots j_k} A^{j_1 j_2 \cdots j_k}_{q_1 q_2 \cdots q_k} = k! a \delta^{i_1 i_2 \cdots i_k}_{q_1 q_2 \cdots q_k}. \tag{12.31}$$

Ova formula poznata je u literaturi kao **Laplasovo razlaganje determinante**, ili **razlaganje determinante po blok sistemu**.

Kao specijalni slučaj, dobija se (12.19), str. 319.

Navedimo još jedan vid razlaganja determinante, koji u sebi sadrži Laplasovo razlaganje

$$\delta^{j_1 \cdots j_n}_{s_1 \cdots s_n} a^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_k} a^{i_{k+1} \cdots i_n}_{j_{k+1} \cdots j_n} = k!(n-k)! a^{i_1 \cdots i_n}_{s_1 \cdots s_n}. \tag{12.32}$$

Iz (12.19), str. 319, dobija se

$$\frac{\partial a}{\partial a^i_p} = A^p_i. \tag{12.33}$$

Izvedimo sledeću formulu za **parcijalne izvode determinante**, čiji su elementi a^i_j funkcije promenljivih $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Iz (12.5) i (12.33)

$$\frac{\partial a}{\partial x^m} = \frac{\partial a}{\partial a^i_j} \frac{\partial a^i_j}{\partial a^m} = A^j_i \frac{\partial a^i_j}{\partial x^m}. \tag{12.34}$$

13. Invarijante kvadratne matrice

Od posebnog interesa je određivanje invarijanata matrice $\mathbf{A} = \left(a^i_j\right)$ tipa $n \times n$. One su definisane preko zbira njenih glavnih minora.

Najjednostavnija invarijanta je određena zbirom glavnih minora prvog reda koji nisu ništa drugo do elelementi matrice $\mathbf{A}$ na glavnoj dijagonali. Ako je obeležimo sa $a_{(1)}$, onda je

$$a_{(1)} = a^i_i = \delta^j_i\, a^i_j.$$

Druga po redu je invarijanta $a_{(2)}$ određena zbirom glavnih minora drugog reda koja glasi

$$a_{(2)} = \frac{1}{2!}\delta^{lm}_{hk} a^h_l\, a^k_m.$$

Računajući redom ostale invarijante moguće je pokazati da je invarijanta $a_{(p)}$ data izrazom

$$a_{(p)} = \frac{1}{p!}\delta^{j_1 j_2 \ldots j_p}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, a^{i_1}_{j_1} a^{i_2}_{j_2} \cdots a^{i_p}_{j_p}, \quad p = 1, 2, \ldots, n.$$

Ovi izrazi imaju važnu primenu u određivanju determinante c matrice $\mathbf{C}$ date u obliku

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I} = \left(a^i_j + \lambda\, \delta^i_j\right).$$

U literaturi, s obzirom na svoj značaj, ovaj tip matrica naziva se λ matrice.

Determinante c ove matrice glasi

$$c = \frac{1}{n!}\delta^{j_1 j_2 \ldots j_n}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \left(a^{i_1}_{j_1} + \lambda\, \delta^{i_1}_{j_1}\right)\left(a^{i_2}_{j_2} + \lambda\, \delta^{i_2}_{j_2}\right) \cdots \left(a^{i_n}_{j_n} + \lambda\, \delta^{i_n}_{j_n}\right).$$

Očigledno ona predstavlja polinom n-og stepena po λ i glasi

$$\det\left(a^i_j + \lambda\, \delta^i_j\right) = \lambda^n + \sum_{s=1}^{n} \lambda^{n-s} a_{(s)}.$$

Razvijajući je i grupišući članove po odgovatrajućem stepenu λ dobijamo koeficijente ovog polinoma.

Koeficijent uz λ^{n-s} (za $s \geq 1$) sastoji se od zbira $\binom{n}{s}$ članova tipa

$$\delta^{j_1 j_2 \cdots j_s j_{s+1} \cdots j_n}_{i_1 i_2 \ldots i_s i_{s+1} \ldots i_n} a^{i_1}_{j_1} \cdots a^{i_s}_{j_s} \delta^{i_{s+1}}_{j_{s+1}} \cdots \delta^{i_n}_{j_n} =$$
$$= \delta^{j_1 j_2 \cdots j_s j_{s+1} \cdots j_n}_{i_1 i_2 \ldots i_s j_{s+1} \cdots j_n} a^{i_1}_{j_1} \cdots a^{i_s}_{j_s} = (n-s)!\, \delta^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_s} a^{i_1}_{j_1} \cdots a^{i_s}_{j_s},$$

gde smo u drugoj jednakosti koristili (12.9) za $r = n$.

Kako je $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-s)!s!}$, sledi da je koeficijent $a_{(s)}$ uz λ^{n-s} dat sa

$$a_{(s)} = \frac{1}{s!} \delta^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_s} a^{i_1}_{j_1} \cdots a^{i_s}_{j_s}.$$

Prema tome, **karakteristična determinanta** c može biti izražena u obliku

$$c = \det\left(a^i_j + \lambda\, \delta^i_j\right) = \lambda^n + \sum_{s=1}^{n} \frac{\lambda^{n-s}}{s!} \delta^{j_1 j_2 \cdots j_s}_{i_1 i_2 \cdots i_s} a^{i_1}_{j_1} \cdots a^{i_s}_{j_s}.$$

Vrlo često se u literaturi i primenama susrećemo sa **karakterističnim polinomom** matrice $\mathbf{A}$ u obliku

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det\left(a^i_j - \lambda\, \delta^i_j\right).$$

Očigledno je da u razvijenom obliku glasi

$$\det\left(a^i_j - \lambda\, \delta^i_j\right) = \lambda^n + \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \lambda^{n-s} a_{(s)}.$$

Zadatak 13.1 Pokazati da, razvijanjem determinante po vrsti, je

$$\delta^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_p} = \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r+1} \delta^{i_r}_{j_1} \delta^{i_1 \ldots \hat{i}_r \ldots i_p}_{j_2 \ldots j_p}.$$

■

13.1 Neka osnovna svojstva determinanti

Dokazaćemo sledeća svojstva determinanti. U tom cilju pogodno je pisati $\det(\mathbf{A}) = \det\left(a^i_j\right)$ izraze preko vektora kolona (vrsta) u obliku

$$\det(\mathbf{A}) = \det\left(a^i_j\right) = e_{i_1 i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n} a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \cdots a^{i_p}_p \cdots a^{i_q}_q \cdots a^{i_n}_n.$$

1. Vrednost determinante se ne menja ako se vrste zamene kolonama, ne menjajući poredak.

2. Ako dve kolone zamene mesta determinanta menja znak.

Dokaz

1.

$$\det(\mathbf{A}) = \det\big(\mathbf{A}^T\big).$$

2.

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_p^{i_p} \cdots a_q^{i_q} \cdots a_n^{i_n} = \\ &= e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_q^{i_q} \cdots a_p^{i_p} \cdots a_n^{i_n},\end{aligned}$$

(jer je $a_p^{i_p} a_q^{i_q} = a_q^{i_q} a_p^{i_p}$ - komutativnost proizvoda brojeva)

$$\det(\mathbf{A}) = e_{i_1\, i_2 \ldots i_q \ldots i_p \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_q^{i_p} \cdots a_p^{i_q} \cdots a_n^{i_n} =$$

(jer su su i_p i i_q nemi indeksi)

$$\det(\mathbf{A}) = -e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_q^{i_p} \cdots a_p^{i_q} \cdots a_n^{i_n} = -\det(\mathbf{A}),$$

jer je $e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}$ antisimetrično po bilo kom paru indeksa, pa prema tome

$$e_{i_1\, i_2 \ldots i_q \ldots i_p \ldots i_n} = -e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}.$$

3. Determinanta se množi nekim brojem tako što se elementi jedne kolone (ili vrste) množe tim brojem.

Dokaz

$$\begin{aligned}\lambda \det(\mathbf{A}) &= \lambda\, e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_p^{i_p} \cdots a_q^{i_q} \cdots a_n^{i_n} = \\ &= e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots (\lambda\, a_p^{i_p}) \cdots a_q^{i_q} \cdots a_n^{i_n} = \\ &= e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_p^{i_p} \cdots (\lambda\, a_q^{i_q}) \cdots a_n^{i_n},\end{aligned}$$

na osnovu svojstva asocijativnosti proizvoda brojeva.

4. Vrednost determinante je jednaka nuli, ako su bilo koje dve kolone proporcionalne.

Dokaz

Ako se $a_p^{i_p}$ zameni sa $\lambda\, a_q^{i_p}$, onda je

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_p^{i_p} \cdots a_q^{i_q} \cdots a_n^{i_n} = \\ &= e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots (\lambda\, a_q^{i_p}) \cdots a_q^{i_q} \cdots a_n^{i_n} = \\ &= \lambda\, e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_q^{i_p} \cdots a_q^{i_q} \cdots a_n^{i_n} =\end{aligned}$$

(na osnovu svojstva pod 3.)

$$\det(\mathbf{A}) = -\lambda\, e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_q^{i_p} \cdots a_q^{i_q} \cdots a_n^{i_n} =$$

(na osnovu svojstva 1.)

$$\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}) = 0.$$

Specijalno, vrednost determinante je jednaka nuli, ako su bilo koje dve kolone jednake.

5. Ako je vektor p-ti vektor kolone

$$a_p^i = b_p^i + c_p^i,$$

onda je

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})_{(b)} + \det(\mathbf{A})_{(c)},$$

gde je

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A})_{(b)} &= e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots b_p^{i_p} \cdots a_n^{i_n} = \\ \det(\mathbf{A})_{(c)} &= e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots c_p^{i_p} \cdots a_n^{i_n}.\end{aligned}$$

Dokaz

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_p^{i_p} \cdots a_n^{i_n} = \\ &= e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots (b_p^{i_p} + c_p^{i_p}) \cdots a_n^{i_n} = \\ &= e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots b_p^{i_p} \cdots a_n^{i_n} + e_{i_1\, i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots c_p^{i_p} \cdots a_n^{i_n} = \\ &= \det(\mathbf{A})_{(b)} + \det(\mathbf{A})_{(c)}.\end{aligned}$$

6. Vrednost determinante se ne menja ako se elementima jedne njene kolone, dodaju odgovarajući elementi druge kolone, prethodno pomnoženi nekim brojem.

Dokaz

Neka je vektor p-ti vektor kolone a_p^i dodat vektor q-te kolone, tj. $a_p^i \quad \Rightarrow \quad a_p^i + \lambda\, a_q^i$ onda je

$$
\begin{aligned}
& e_{i_1 i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots (a_p^{i_p} + \lambda\, a_q^{i_p}) \cdots a_q^{i_q} \cdots a_n^{i_n} = \\
& = e_{i_1 i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_p^{i_p} \cdots a_q^{i_q} \cdots a_n^{i_n} + e_{i_1 i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots (\lambda\, a_q^{i_p}) \cdots a_q^{i_q} \cdots a_n^{i_n} = \\
& = e_{i_1 i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_p^{i_p} \cdots a_q^{i_q} \cdots a_n^{i_n} + \lambda e_{i_1 i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_q^{i_p} \cdots a_q^{i_q} \cdots a_n^{i_n} = \\
& = e_{i_1 i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_p^{i_p} \cdots a_q^{i_q} \cdots a_n^{i_n} = \\
& = \det(\mathbf{A}),
\end{aligned}
$$

jer je $e_{i_1 i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_q^{i_p} \cdots a_q^{i_q} \cdots a_n^{i_n} = 0$, s obzirom na antisimetricnost sistema $e_{i_1 i_2 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n}$.

Sva ova svojstva važe i u odnosu na vrste matrice **A**.

7. Determinanta proizvoda dve matrice jednaka je proizvodu njihovih determinanti

$$|c_j^i| = |a_k^i||b_j^k|. \tag{13.1}$$

Dokaz

$$
\begin{aligned}
c = \det\left(c_j^i\right) &= e_{ijk} c_1^i c_2^j c_3^k = e_{ijk}(a_p^i b_1^p)(a_q^j b_2^q)(a_r^k b_3^r) = \\
&= e_{ijk} a_p^i a_q^j a_r^k b_1^p b_2^q b_3^r = a e_{pqr} b_1^p b_2^q b_3^r = a \cdot b,
\end{aligned}
$$

gde je

$$a = \det\left(a_j^i\right), \quad b = \det\left(b_j^i\right).$$

8.

Teorema 13.1.1 Determinanta trougaone matrice jednaka je proizvodu svojih dijagonalnih elemenata.

Dokaz

Dajemo dokaz za gornu dijagonalnu matricu. Dokaz za donju dijagonalnu matricu je identičan.

Neka je $\mathbf{A} = \left(a^i_j\right)$ gornja trougaona matrica, $a^i_j = 0$ za $i > j$. Onda je

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= e_{i_1 i_2 \dots i_n} a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \dots a^{i_n}_n = e_{1 i_2 \dots i_n} a^1_1 a^{i_2}_2 \dots a^{i_n}_n = \\ &= e_{12 \dots i_n} a^1_1 a^2_2 \dots a^{i_n}_n = \dots = e_{12\dots n} a^1_1 a^2_2 \dots a^n_n = a^1_1 a^2_2 \dots a^n_n,\end{aligned}$$

jer je $e_{12\dots n} = 1$.

Zadatak 13.2 Pokazati da je

$$e_{ijk} e_{pqr} \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} & a_{ir} \\ a_{jp} & a_{jq} & a_{jr} \\ a_{kp} & a_{kq} & a_{kr} \end{vmatrix}.$$

■

Rešenje

Dokaz se zasniva na svojstvu potpune antisimetričnosti sistema A_{ijk}, $i, j, k = 1, 2, 3$.

Poznato je da takav sistem ima samo jednu komponentu različitu od nule. Onda je $A_{ijk} = A e_{ijk}$. Jasno je da je $A = A_{123}$, pa je $A_{ijk} = A_{123} e_{ijk}$. Determinanta

$$\begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} & a_{ir} \\ a_{jp} & a_{jq} & a_{jr} \\ a_{kp} & a_{kq} & a_{kr} \end{vmatrix}$$

je potpuno antisimetrična po vrstama i kolonama, gde je $i, j, k, p, q, r = 1, 2, 3$. To znači da je antisimetrična po indeksima i, j, k i posebno po indeksima p, q, r. Onda je

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} & a_{ir} \\ a_{jp} & a_{jq} & a_{jr} \\ a_{kp} & a_{kq} & a_{kr} \end{vmatrix} = e_{ijk} \begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix} = e_{ijk} e_{pqr} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = e_{ijk} e_{pqr} \det(\mathbf{A}),\end{aligned}$$

gde je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det(\mathbf{A}).$$

Specijalno, ako je $a_{ij} = \delta_{ij}$, onda je $\det(\mathbf{A}) = 1$ i

$$e_{ijk}e_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}.$$

Isti postupak se može primeniti i na

$$e_{i_1 i_2 \ldots i_n} e_{j_1 j_2 \ldots j_n} \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_n} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_n j_1} & a_{i_n j_2} & \ldots & a_{i_n j_n} \end{vmatrix}.$$

13.2 Izotropne matrice

U Mehanici kontinuuma posebnu ulogu imaju izotropne matrice (tenzori).

Definicija 13.2.1 **Izotropna matrica** drugog reda $\mathbf{T}$ je matrica za koju je

$$\mathbf{QTQ}^T = \mathbf{T},$$

za svaku ortogonalnu matricu $\mathbf{Q}$.

Teorema 13.2.1 Jedina izotropna matrica drugog reda je

$$\mathbf{T} = \lambda \mathbf{I}. \tag{13.2}$$

Postoji više načina da se ova teorema dokaže. Mi ćemo to pokazati na dva načina. U oba slučaja dovoljno je to pokazati za slučaj svojstvene ortogonalne matrice $\mathbf{Q}$ (vidi str. 163), matrice rotacije.

Po definiciji je

$$\mathbf{QTQ}^T = \mathbf{T} \quad \text{ili} \quad \mathbf{QT} = \mathbf{TQ}, \tag{13.3}$$

za svaku ortogonalnu matricu $\mathbf{Q}$.

Prvi način.

Dokaz

Specijalno za matricu rotacije $\mathbf{Q}$ u $\mathbb{R}^3$ jedini realan karakteristični broj je jedan (vidi jed. (7.1), 167), kome odgovara karakteristični vektor $\mathbf{p}$.

Sa geometrijskog stanovišta vektor $\mathbf{p}$ ordređuje osu rotacije matrice $\mathbf{Q}$. Iz (13.3) sledi da je

$$\mathbf{QTp} = \mathbf{TQp} = \mathbf{Tp}.$$

Znači vektor $\mathbf{Tp}$ je karakteristični vektor matrice rotacije $\mathbf{Q}$ i kao takav je kolinearan sa $\mathbf{p}$, tj.

$$\mathbf{Tp} = \lambda \mathbf{p}.$$

Kako ovo važi za svaku matricu rotacije $\mathbf{Q}$ i za njima odgovarajuće $\mathbf{p}$ mora biti

$$\mathbf{T} = \lambda \mathbf{I}.$$

Drugi način.

Dokaz

Polazimo od Rodrigovovog obrazca (jed. (7.2), str. 167).

Specijalno za matricu rotacije $\mathbf{Q}$ u $\mathbb{R}^3$ biće

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \sin\varphi \mathbf{W} + (1-\cos\varphi)\mathbf{W}^2, \tag{13.4}$$

gde je $\mathbf{W}$ antisimetrična matrica, čiji karakteristični vektor, koji odgovara njenom krakterističnom broju $u_i = 0$, obaležavamo sa $\mathbf{p}$. Uočimo da je $\mathbf{p}$ takođe karakteristični vektor matrice $\mathbf{Q}$. Onda iz (13.3) sledi da je

$$\mathbf{WT} = \mathbf{TW} \quad \text{i} \quad \mathbf{W}^2\mathbf{T} = \mathbf{TW}^2,$$

imajući u vidu da su $1, \sin\varphi, \cos\varphi$ linearno nezavisni. Kako je $\mathbf{Wp} = \mathbf{0}$, onda se prva jedačina svodi na

$$\mathbf{WTp} = \mathbf{0}. \tag{13.5}$$

Druga jedačina $\mathbf{W}^2\mathbf{Tp} = \mathbf{0}$ je identički zadovoljena kao njena posledica. Iz (13.5) sledi da je $\mathbf{Tp}$ karakteristični vektor matrice $\mathbf{W}$ koji odgovara njenom karakterističnom broju $\mu = 0$. Prema tome je

$$\mathbf{Tp} = \lambda \mathbf{p},$$

za neko λ. Kako je ortogonalna matrica $\mathbf{Q}$ proizvoljna, onda je i $\mathbf{p}$ proizvoljno. Prema tome, mora biti $\mathbf{T} = \lambda \mathbf{p}$ ili, u komponentalnom obliku, $T_{ij} = \lambda \delta_{ij}$.

Može se pokazati da se izotropni tenzori bilo kog parnog reda, po pravilu, mogu predstaviti preko δ_{ij} sistema.

Dalje, posmatrajmo izotropnu matricu (tenzora) četvrtog reda C_{ijkl}. Moguće su sledeće kombinacije δ-sistema:

$$\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad \delta_{il}\delta_{jk}.$$

Prema tome, najopštiji oblik C_{ijkl} je njihova linearna kombinacija

$$C_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{13.6}$$

Razmotrićemo neke specijalne slučajeve.

i) Ako je C_{ijkl} simetrično po paru prvih indeksa, $C_{ijkl} = C_{jikl}$, onda je $b = c$ i

$$C_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \tag{13.7}$$

Lako je pokazati da je u tom slučaju

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}. \tag{13.8}$$

ii) Izotropna matrica

$$I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}, \tag{13.9}$$

ima svojstvo da očuvava bilo koju matricu drugog reda

$$I_{ijkl}T_{kl} = T_{ij}. \tag{13.10}$$

iii) Izotropna matrica

$$S_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{13.11}$$

prevodi bilo koju matricu T_{ij} u njen simetričan deo

$$S_{ijkl}T_{kl} = T_{(ij)}. \tag{13.12}$$

iv) Izotropna matrica

$$A_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{13.13}$$

prevodi bilo koju matricu T_{ij} u njen antisimetričan deo

$$A_{ijkl}T_{kl} = T_{[ij]}. \tag{13.14}$$

v) Izotropna matrica

$$s_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}, \tag{13.15}$$

prevodi bilo koju matricu T_{ij} u njen sferni deo

$$s_{ijkl}T_{kl} = \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij}. \tag{13.16}$$

Radi kompletnosti ponavljamo.

vi) Svaka matrica drugog reda M_{ij} može se jednoznačno predstavi u obliku

$$M_{ij} = \frac{1}{3} M_{kk} \delta_{ij} + M^d_{ij} + M_{[ij]}, \tag{13.17}$$

gde je $\frac{1}{3} M_{kk} \delta_{ij}$ - njen sferni deo, a M^d_{ij} devijatorski deo. Devijatorski deo, po definiciji, zadovoljava uslov $M^d_{kk} = 0$.
Ako je matrica M_{ij} simetrična onda je

$$M_{ij} = \frac{1}{3} M_{kk} \delta_{ij} + M^d_{ij} \tag{13.18}$$

ili

$$M^d_{ij} = M_{ij} - \frac{1}{3} M_{kk} \delta_{ij}. \tag{13.19}$$

Po tom analogonu

$$d_{ijkl} = S_{ijkl} - s_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl},$$

predstavlja devijatorski deo matrice S_{ijkl}.

vii) Lako je pokazati da se svaka izotropna matrica

$$C_{ijkl} = a \delta_{ij} \delta_{kl} + b(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

može predstaviti u obliku

$$C_{ijkl} = \frac{a+b}{2} d_{ijkl} + \frac{a+b}{2} A_{ijkl} + \left(3c + \frac{a+b}{2}\right) s_{ijkl}. \tag{13.20}$$

Uopšte, za proizvoljne tenzore $T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ važi

Definicija 13.2.2 Tenzor $T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ je **izotropan** ako je

$$T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = Q^{i_1}_{k_1} \cdots Q^{i_p}_{k_p} Q^{l_1}_{j_1} \cdots Q^{l_q}_{j_q} T^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q},$$

za svako ortogonalno Q^i_j.

Zadatak 13.3 Pokazati:

a) da ne postoji izotropan vektor - tenzor prvog reda.

b) tenzor $e_{i_1 \ldots i_n}$ je izotropan pod dejstvom svojstvenih ortogonalnih transformacija Q^i_j, $\det\left(Q^i_j\right) = 1$.

■

Problem 6

Teorema 5.10.2 (str. 133) daje izraz za determinantu matrice $\mathbf{A}$ u invarijantnom obliku, tj. bez pozivanja na njenu reprezentaciju. Pokazaćemo da se do tog rezultata dolazi i na sledeći način.

Po definiciji je

$$[\mathbf{Aa},\mathbf{Ab},\mathbf{Ac}] = e^{ijk}(\mathbf{Aa})_i(\mathbf{Ab})_j(\mathbf{Ac})_k = e^{ijk}(A_i^p\, a_p)(A_j^q\, b_q)(A_k^r\, c_r) =$$
$$= e^{ijk}A_i^p A_j^q A_k^r a_p b_q c_r = (\det\mathbf{A})e^{pqr}a_p b_q c_r = (\det\mathbf{A})[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}].$$

Onda je

$$[\mathbf{Aa},\mathbf{Ab},\mathbf{Ac}] = \det(\mathbf{A})[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}],$$

za svako $\mathbf{A}$ i linearno nezavisne vektore $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$.

14. Tenzorske operacije

Već je bilo reči u Linearnoj algebri o nizu pojmova i definicija, koje imaju dublji smisao u Tenzorskom računu. Prvenstveno se to odnosi na tenzore drugog reda. Ovde razmatramo neke.

14.1 Dizanje i spuštanje indeksa

Definicija 14.1.1 Proces koji predstavlja linearnu transformaciju pomoću tenzora g_{ij} oblika

$$v^i = g^{ij} v_j \quad \text{ili} \quad T^{ij} = g^{ip} g^{jq} T_{pq},$$

itd. naziva se **dizanje indeksa**.

Obrnut proces koji predstavlja linearnu transformaciju pomoću tenzora g^{ij} oblika

$$v_i = g_{ij} v^j,$$
$$T_{ij} = g_{ip} g_{jq} T^{pq},$$

itd. naziva se **spuštanje indeksa**.

N Naglasimo da je $v_i a^{ij} \neq v^j$ za bilo koje $a^{ij} \neq g^{ij}$. Isto važi za tenzore bilo kog reda.

Primer 1

$$T^{ijk} = g^{ip} T_p^{\cdot jk} = g^{ip} g^{jq} T_{pq\cdot}{}^{k} = g^{ip} g^{jq} g^{kr} T_{pqr}.$$

Primer 2

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= g_{ij}\mathbf{g}^j \quad \text{spuštanje indeksa,} \\ \mathbf{g}^i &= g^{ij}\mathbf{g}_j \quad \text{dizanje indeksa,} \\ g_{ij}g^{jk} &= \delta_i^k \quad \text{metrički tenzor.} \end{aligned}$$

Primer 3

Takođe

$$\mathbf{T} = T^{ij}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = T^{ij} g_{ip}\mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}_j = T_{p\cdot}{}^{j}\mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}_j = T_{pq}\mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q,$$

gde je

$$\begin{aligned} T_{p\cdot}{}^{j} &= g_{pi}T^{ij}, \\ T_{pq} &= g_{qj}T_{p\cdot}{}^{j} = g_{ip}g_{jq}T^{ij}. \end{aligned}$$

14.2 Skalarni proizvod

Neka su data dva proizvoljna vektora $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$ u odnosu na x^i-koordinatni sistem. Onda je

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i = u_i \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i = v_i \mathbf{g}^i.$$

Tada je

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u^i \mathbf{g}_i) \cdot (v^j \mathbf{g}_j) = g_{ij} u^i v^j = u_j v^j = u^i v_i = g^{ij} u_i v_j. \tag{14.1}$$

Skalarni proizvod vektora **u** i **v** je primer tenzorske invarijante. Zaista, na osnovu prethodnih izraza, sledi da je

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v^i = \bar{u}_i \bar{v}^i = \overline{u_i v^i}. \tag{14.2}$$

U standardnom $\mathbb{E}_n$ definišemo skalarni proizvod kao

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = uv\cos\theta, \tag{14.3}$$

gde je θ ugao između $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$. Onda je

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{uv} = \frac{g_{ij}u^i v^j}{\sqrt{g_{pq}u^p u^q}\sqrt{g_{kl}v^k v^l}}. \tag{14.4}$$

Ako je $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, odakle sledi da je u tom slučaju

$$g_{ij}u^i v^j = 0. \tag{14.5}$$

14.3 Algebra Tenzora

Sve što je rečeno o algebri sistema važi i za algebru tenzora. Pored toga je i:

1) bilo koja linearna kombinacija tenzora je tenzor istog tipa i reda;
2) proizvod bilo koja dva tenzora je tenzor, a tip i red definisan tipom i redom tenzora koji se množe;
3) kontrakcija para indeksa tenzora je tenzor reda za dva manje od originalnog tenzora.

14.4 Kriterijum za određivanje tenzorskog karaktera sistema

Sledeća teorema nam omogućuje da utvrdimo tenzorski karakter sistema funkcija ne proveravajući direktno njegov zakon transformacije. Pri tome koristimo **unutrašnji proizvod**

$$A_{\{\alpha,i_2,\ldots,i_r\}}A_\alpha \quad \text{ili} \quad A_{\{\alpha,i_2,\ldots,i_r\}}A^\alpha,$$

između skupa funkcija $A_{\{\alpha,i_2,\ldots,i_r\}}$ i vektora A^α.

Teorema 14.4.1 Neka je $\{A_{\{\alpha,i_2,\ldots,i_r\}}\}$ skup funkcija od x^i, i neka je unutrašnji proizvod $A_{\{\alpha,i_2,\ldots,i_r\}}\xi^\alpha$ sa proizvoljnim vektorom ξ, tenzor tipa (p,q)

$$A^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}(x).$$

Onda skup $A_{\{\alpha,i_2,\ldots,i_r\}}$ predstavlja tenzor tipa

$$A^{j_1,\ldots,j_q}_{\alpha,i_2,\ldots,i_p}(x).$$

Dokaz

Radi jednostavnosti i preglednosti dokazujemo teoremu za sistem $A_{\{ijk\}}$. Za sisteme višeg reda postupak je isti.

Prema uslovu Teoreme

$$A_{\{r,jk\}}\xi^r = A^{j\cdot}{}_k(x),$$

za proizvoljan vektor $\boldsymbol{\xi}$. Onda je

$$\bar{\xi}^r = \xi^i \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i}$$

i

$$\bar{A}_{\{r,jk\}}\bar{\xi}^r = \bar{A}^{j\cdot}_k(\bar{x}),$$

tako da je

$$\begin{aligned}
&\bar{A}_{\{r,jk\}}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i}\xi^i = A^p_q(x)\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} = A_{\{i,pq\}}(x)\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\xi^i\\
&\left(\bar{A}_{\{r,jk\}}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} - A_{\{i,pq\}}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\right)\xi^i = 0\\
&\Rightarrow \bar{A}_{\{r,jk\}} = A_{\{i,pq\}}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\\
&\Rightarrow A_{\{i,pq\}} = A_{iq}{}^p!
\end{aligned}$$

Ali to je tačno zakon transformacije tenzora tipa $A_{iq}{}^p$.

14.5 Relativni tenzori

Videli smo da je g_{ij} metrički kovarijantni tenzor, tako da je

$$\bar{g}_{ij} = g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}.$$

Neka je

$$g = |g_{ij}| \tag{14.6}$$

i

$$\Delta = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right|. \tag{14.7}$$

Onda je

$$\bar{g} = \Delta^{+2} g. \tag{14.8}$$

Prema tome g nije tenzor u smislu Definicije 11.7.1, str. 303.

Definicija 14.5.1 Skup veličina

$$A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(x), \tag{14.9}$$

koji se transformiše po zakonu

$$\bar{A}^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(\bar{x}) = \Delta^w A^{q_1 \dots q_s}_{p_1 \dots p_r}(x) \frac{\partial x^{p_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{p_r}}{\partial \bar{x}^{i_r}} \frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{q_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{j_s}}{\partial x^{q_s}},$$

naziva se **relativni tenzor težine w.**

Navodimo sledeća pravila koja važe za relativne tenzore.

a) Relativni tenzori istog tipa i težine mogu se sabirati, pri čemu je njihov zbir tenzor istog tipa i težine.
b) Relativni tenzori se mogu množiti, pri čemu je težina tenzora proizvoda zbir težina množilaca.
c) Operacija kontrakcije na relativnom tenzoru je relativni tenzor iste težine kao originalni tenzor.

Definicija 14.5.2

Relativni tenzor težine nula je **apsolutni tenzor**.
Relativni tenzor težine $+1$ naziva se **tenzorska gustina**.
Relativni skalar težine $+1$ naziva se **skalarna gustina**.

Motivacija za ovu terminologiju sledi iz izraza za gustinu mase deformabilnog tela

$$\bar{\rho}(z) = \Delta\rho(Z),$$

gde je $\Delta = \left|\frac{\partial Z^k}{\partial z^k}\right|$.

Ovde smo sa z^k i Z^K obeležili Dekartove koordinate u $\mathbb{E}_3$.

Navodimo najčešće korišćene relativne tenzore.

1) Iz

$$\begin{aligned} \bar{g} = \Delta^2 g \quad &\Rightarrow \quad g \text{ je relativni skalar težine dva.} \\ \sqrt{\bar{g}} = \Delta\sqrt{g} \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{g} \text{ je relativni tenzor težine jedan.} \end{aligned} \tag{14.10}$$

2) Kofaktor G^{ij} tenzora g_{ij} je relativni tenzor težine 2.

Zaista, iz

$$\bar{g} = \Delta^2 g$$

i

$$G^{ij} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}, \tag{14.11}$$

sledi

$$\bar{G}^{ij} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{g}_{ij}} = \Delta^2 \frac{\partial g}{\partial g_{pq}} \frac{\partial g_{pq}}{\partial \bar{g}_{ij}} = \Delta^2 G^{pq} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q}.$$

Poslednji član sledi iz

$$g_{pq} = \bar{g}_{ij} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q},$$

tako da je

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial \bar{g}_{ij}} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q}.^*$$

N U razlomku kovarijantna (kontravarijantna) veličina, koja se nalazi u imeniocu, se posmatra kao kontravarujantna (kovarijantna) kada je u broiocu.

e-sistem

Pretpostavljamo da su e_{ijk} komponente relativnog tenzora težine W u sistemu x^i. Onda pri koordinatnoj transformciji $x^i \to \bar{x}^i$ imamo $\bar{e}_{ijk}$, u sistemu $\bar{x}^i$, tako da je

$$\bar{e}_{ijk} = \Delta^W e_{pqr} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}.$$

Ali kako je

$$e_{pqr}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} = \Delta e_{ijk},$$

onda je

$$\bar{e}_{ijk} = \Delta^W \Delta e_{ijk} = \Delta^{W+1} e_{ijk}.$$

Odavde se vidi da je za

$$W+1=0 \Rightarrow W=-1,$$
$$\bar{e}_{ijk} = e_{ijk},$$

tj. pod uslovom da je sistem e_{ijk} relativni tenzor težine -1, vrednosti njegovih komponenti su nepromenjene pri koordinatnoj transformaciji. Na isti način se pokazuje da e^{ijk} ne menja svoje vrednosti ako se pretpostavi da predstavlja komponente relativnog tenzora težine $+1$.

Prema tome, permutacioni simboli $e^{i_1\dots i_n}$ i $e_{i_1\dots i_n}$ su relativni tenzori težina $+1$ i -1, redom.

ε-sistem

Definicija 14.5.3

$$\varepsilon^{i_1\dots i_n} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{i_1\dots i_n}$$

i

$$\varepsilon_{i_1\dots i_n} = \sqrt{g}\, e_{i_1\dots i_n}.$$

Lema 14.5.1 ε-sistemi su apsolutni tenzori, tj. tenzori težine nula. To sledi direkto iz primera 1) i 2).

❑

Primer 4

$$\delta^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_n} = \varepsilon^{i_1\dots i_n}\varepsilon_{j_1\dots j_n} = e^{i_1\dots i_n} e_{j_1\dots j_n}$$

je apsolutni tenzor.

Ovo važi za svako

$$\delta^{i_1\dots i_a}_{j_1\dots j_a}, \quad a \le n,$$

pri čemu je δ-sistem **invarijantan** u odnosu na koordinatne transformacije.

14.6 Vektorski proizvod u $\mathbb{E}_3$

i) Znamo da je u $\mathbb{E}^3$, u odnosu na Dekartov koordinatni sistem,

$$e_{ijk} = (\mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_j) \cdot \mathbf{i}_k.$$

Takođe je

$$\mathbf{g}_p = \mathbf{i}_k \frac{\partial z^k}{\partial x^p}, \quad \mathbf{i}_k = \mathbf{g}_p \frac{\partial x^p}{\partial z^k}.$$

Prema tome je

$$(\mathbf{g}_p \times \mathbf{g}_q) \cdot \mathbf{g}_r = (\mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_j) \cdot \mathbf{i}_k \frac{\partial z^i}{\partial x^p} \frac{\partial z^j}{\partial x^q} \frac{\partial z^k}{\partial x^r} = e_{ijk} \frac{\partial z^i}{\partial x^p} \frac{\partial z^j}{\partial x^q} \frac{\partial z^k}{\partial x^r} = \left| \frac{\partial z^i}{\partial x^t} \right| e_{pqr}.$$

Kako je

$$g_{pq}(x) = \delta_{ij} \frac{\partial z^i}{\partial x^p} \frac{\partial z^j}{\partial x^q},$$

onda je

$$g = \left| \frac{\partial z^i}{\partial x^j} \right|^2 \Rightarrow \left| \frac{\partial z^i}{\partial x^j} \right| = \sqrt{g},$$

tako da je

$$(\mathbf{g}_p \times \mathbf{g}_q) \cdot \mathbf{g}_r = \varepsilon_{pqr}, \tag{14.12}$$

u bilo kom dopustivom koordinatnom sistemu u E_3.

ii) Iz

$$\mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_j = e_{ijk} \mathbf{i}^k,$$

(Uočimo da je $\mathbf{i}_k = \mathbf{i}^k$ u odnosu na Dekartov koordinatni sistem, jer je $g_{ij} = \delta_{ij}$ u tom sistemu), sledi da je

$$\mathbf{g}_p \times \mathbf{g}_q = (\mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_j) \frac{\partial z^i}{\partial x^p} \frac{\partial z^j}{\partial x^q} = e_{ijk} \mathbf{i}^k \frac{\partial z^i}{\partial x^p} \frac{\partial z^j}{\partial x^q} = e_{ijk} \frac{\partial z^i}{\partial x^p} \frac{\partial z^j}{\partial x^q} \frac{\partial z^k}{\partial x^r} \mathbf{g}^r,$$

jer je $\mathbf{i}^k = \mathbf{g}^r \dfrac{\partial z^k}{\partial x^r}$. Znači

$$\mathbf{g}_p \times \mathbf{g}_q = \varepsilon_{pqr} \mathbf{g}^r, \tag{14.13}$$

u bilo kom dopustivom koordinatnbom sistemu u $\mathbb{E}_3$.

iii) Iz

$$\mathbf{g}_p \times \mathbf{g}_q = \varepsilon_{pqr} \mathbf{g}^r$$

dobijamo, množeći obe strane ovog izraza s ε^{pqr}

$$\mathbf{g}^r = \frac{1}{2} \varepsilon^{pqr} \mathbf{g}_p \times \mathbf{g}_q. \tag{14.14}$$

Jasno je da smo ovde takođe koristili δ-sistem.
iv) Na isti način mogu se dobiti sledeće identičnosti:

$$(\mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q) \cdot \mathbf{g}^r = \varepsilon^{pqr}, \tag{14.15}$$

$$\mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q = \varepsilon^{pqr} \mathbf{g}_r, \tag{14.16}$$

$$\mathbf{g}_p = \frac{1}{2} \varepsilon_{pqr} \mathbf{g}^q \times \mathbf{g}^r. \tag{14.17}$$

14.7 Vektorski proizvod bilo koja dva vektora u $\mathbb{E}_3$.

v) Neka su $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_3$ proizvoljni vektori. Onda je

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{v} = v^j \mathbf{g}_j,$$

tako da je

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u^i \mathbf{g}_i) \times (v^j \mathbf{g}_j) = (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j) u^i v^j = \varepsilon_{ijk} u^i v^j \mathbf{g}^k.$$

Onda je

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} u^j v^k,$$

$$\text{ili}$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^i = \varepsilon^{ijk} u_j v_k.$$

vi)

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \varepsilon_{ijk} u^i v^j w^k = \varepsilon^{ijk} u_i v_j w_k. \tag{14.18}$$

Zaista

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \varepsilon_{ijk} u^i v^j (\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{w}) = \varepsilon_{ijk} u^i v^j w^k = \varepsilon^{ijk} u_i v_j w_k,$$

pri dizanju i spuštanju indeksa.
vii)

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{w}. \tag{14.19}$$

Onda je

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= \varepsilon_{ijk} (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^j w^k \mathbf{g}^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{jpq} u_p v_q w^k \mathbf{g}^i = -\varepsilon_{jik} \varepsilon^{jpq} u_p v_q w^k \mathbf{g}^i \\
&= -\delta^{pq}_{ik} u_p v_q w^k \mathbf{g}^i = -(\delta^p_i \delta^q_k - \delta^p_k \delta^q_i) u_p v_q w^k \mathbf{g}^i \\
&= (u_p w^p) v_i \mathbf{g}^i - (v_p w^p) u_i \mathbf{g}^i = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Korišćenjem svojstva tenzorskog proizvoda pišemo ga i u obliku

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{w}.$$

Kako je

$$\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w},$$

onda direktno sledi da je

$$\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{w}\,(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}, \tag{14.20}$$

takođe vrlo koristan rezultat.

Zadatak 14.1 Pokazati da je

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2 .$$

■

Rešenje

Radi jednostavnosti koristićemo Dekartove koordinate. Onda je

$$\begin{aligned}
e_{ijk}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_j(\mathbf{c} \times \mathbf{a})_k &= e_{ijk}e_{ilm}e_{jrs}e_{kpq}a_l b_m b_r c_s c_p a_q = \\
&= \delta_{jk}\delta_{lm}e_{jrs}e_{kpq}a_l b_m b_r c_s c_p a_q = \\
&= \left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right) e_{jrs}e_{kpq}a_l b_m b_r c_s c_p a_q = \\
&= e_{jrs}e_{kpq}a_j b_k b_r c_s c_p a_q - e_{jrs}e_{kpq}a_k b_j b_r c_s c_p a_q = \\
&= e_{jrs}e_{kpq}a_j b_k b_r c_s c_p a_q = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2 .
\end{aligned}$$

Zadatak 14.2

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

■

Rešenje

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \mathbf{c} \cdot [\mathbf{d} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] = \\
&= \mathbf{c} \cdot [\mathbf{d}\,(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{b})] = \mathbf{c} \cdot [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})\mathbf{b}] = \\
&= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Zadatak 14.3 Pokazati da je:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = [\mathbf{cda}]\mathbf{b} - [\mathbf{cdb}]\mathbf{a} \quad \text{ili} \quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = [\mathbf{abd}]\mathbf{c} - [\mathbf{abc}]\mathbf{d}$$

Objasniti ove rezultate! ■

Rešenje

Neka je $\mathbf{u}$ proizvoljan vektor. Onda je

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})] &= (\mathbf{c}\times\mathbf{d})[\mathbf{u}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})] = (\mathbf{c}\times\mathbf{d})\cdot[\mathbf{u}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a}-\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})] = \\
&= (\mathbf{c}\times\mathbf{d})\cdot[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}] = (\mathbf{c}\times\mathbf{d})\cdot\mathbf{a}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{c}\times\mathbf{d})\cdot\mathbf{b}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}) = \\
&= [\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{a}](\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}) - [\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{b}](\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}) = \{[\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{a}]\mathbf{b} - [\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{b}]\mathbf{a}\}\cdot\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Kako je $\mathbf{u}$ proizvoljan vektor, sledi da je

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = [\mathbf{cda}]\mathbf{b} - [\mathbf{cdb}]\mathbf{a}.$$

Analizirajući ovaj rezultat sledi da je

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = [\mathbf{abd}]\mathbf{c} - [\mathbf{abc}]\mathbf{d}.$$

Objasniti.

Zadatak 14.4 Ako je

$$\mathbf{x}+\mathbf{x}\times\mathbf{a} = \mathbf{b},$$

tada je

$$\mathbf{x} = \frac{1}{1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}[\mathbf{b}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}].$$

■

Rešenje

$$\mathbf{x}+\mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\,|\times\mathbf{a} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x}\times\mathbf{a}+(\mathbf{x}\times\mathbf{a})\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \mathbf{b}-\mathbf{x}+(\mathbf{a}\otimes\mathbf{x}-\mathbf{x}\otimes\mathbf{a})\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{b}-\mathbf{x}+(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\mathbf{x}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$
$$\Rightarrow\quad (1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\mathbf{x}=\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}+(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}.$$

Kako je $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$, sledi da je

$$\mathbf{x}=\frac{1}{1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}[\mathbf{b}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}].$$

14.8 Vektorski proizvod vektora i tenzora

Neka su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ u $\mathbb{E}_3$. Onda je njihov vektorski proizvod, vektor $\mathbf{c}$, definisan izrazom

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

Pitanje glasi: da li i kako definisati vektorski prozvod vektora i tenzora drugog reda?

Takav problem se javlja u mehanici kontinuuma u slučaju momenta vektora napona

$$\mathbf{x}\times\mathbf{t}_n,$$

gde je $\mathbf{t}_n=\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}$. Onda je

$$\mathbf{x}\times\mathbf{t}_n=\mathbf{x}\times(\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}).$$

U razvijenom obliku, u odnosu na standardnu bazu $(\mathbf{e}_i)\in\mathbb{E}_3$, biće

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\times(\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}) &= x_i\mathbf{e}_i\times(T_{jk}n_k\mathbf{e}_j)=\\ &= x_iT_{jk}(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j)n_k=x_iT_{jk}(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{n})=\\ &= x_iT_{jk}\,[(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j)\otimes\mathbf{e}_k]\cdot\mathbf{n}.\end{aligned}$$

Po analogonu dijadskog proizvoda vektora

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{c})\overset{\text{def}}{=}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c},$$

definišemo

$$(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j)\otimes\mathbf{e}_k\overset{\text{def}}{=}\mathbf{e}_i\times(\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k)=\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k. \tag{14.21}$$

Onda je

$$\begin{aligned}x_i\,T_{jk}\,[(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j)\otimes\mathbf{e}_k]\cdot\mathbf{n} &= x_i\,T_{jk}\,[\mathbf{e}_i\times(\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k)]\cdot\mathbf{n}=\\ &= \left[x_i\,\mathbf{e}_i\times(T_{jk}\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k)\right]\cdot\mathbf{n}=(\mathbf{x}\times\mathbf{T})\cdot\mathbf{n}.\end{aligned}$$

Prema tome, na osnovu definicije (14.21) sledi da je

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n}, \tag{14.22}$$

ili

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{x} \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}. \tag{14.23}$$

Ovo nam služi kao polazna osnova za definisanje traženog vektorskog proizvoda. Primera radi, lako je pokazati da je

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}. \tag{14.24}$$

Definicija 14.8.1 Dejstvo vektorskog proizvoda

$$\mathbf{v} \times \mathbf{T},$$

vektora $\mathbf{v}$ i tenzora $\mathbf{T}$ na prozvoljan vektor $\mathbf{w}$ je definisano izrazom

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}), \tag{14.25}$$

ili

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{w}. \tag{14.26}$$

Lako je pokazati da je u razvijenom obliku

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}) &= v_i T_{jk} w_k \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \\
&= v_i T_{jk} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{w}) = v_i T_{jk} \left[(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \otimes \mathbf{e}_k\right] \cdot \mathbf{w} = \\
&= v_i T_{jk} \left[\mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)\right] \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w},
\end{aligned}$$

odakle sledi, s obzirom na proizvoljnost vektora $\mathbf{w}$ i (14.21) da je

$$\mathbf{v} \times \mathbf{T} = v_i T_{jk} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \times \mathbf{e}_k, \tag{14.27}$$

tenzor drugog reda. Na sličan način se može pokazati da je

$$\mathbf{T} \times \mathbf{v} = T_{ij} v_k \mathbf{e}_i \otimes (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k). \tag{14.28}$$

Interesantno je da je

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{T} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}, \tag{14.29}$$

što odgovara njihovom mešovitom proizvodu. Zaista,

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = T_{ij} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_j \mathbf{e}_i &= T_{ij} e_{jpq} a_p b_q \mathbf{e}_i = \\
&= e_{jpq} (T_{ij} \mathbf{e}_i) a_p b_q = (\mathbf{T} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Na isti način se pokazuje da je

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{T}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{T}). \tag{14.30}$$

U specijalnom slučaju kada za tenzor $\mathbf{T}$ biramo identični tenzor $\mathbf{I}$ sledi da je

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}\times\mathbf{I})\cdot\mathbf{w}&=\mathbf{v}\times(\mathbf{I}\cdot\mathbf{w})=\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\\&=\mathbf{I}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{I}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w},\end{aligned}$$

pa je

$$\mathbf{v}\times\mathbf{I}=\mathbf{I}\times\mathbf{v}. \tag{14.31}$$

Videli smo da je $\mathbf{v}\times\mathbf{T}$ tenzor drugog reda. Nas interesuje njegov transponovani tenzor $(\mathbf{v}\times\mathbf{T})^T$. Ponovo ćemo razmotriti najprostiji slučaj $\mathbf{v}\times(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})$. Onda je

$$\begin{aligned}[\mathbf{v}\times(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})]^T&=[(\mathbf{v}\times\mathbf{a})\otimes\mathbf{b}]^T=\mathbf{b}\otimes(\mathbf{v}\times\mathbf{a})=\\&=-\mathbf{b}\otimes(\mathbf{a}\times\mathbf{v})=-(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})\times\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Znači

$$[\mathbf{v}\times(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})]^T=-(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^T\times\mathbf{v}. \tag{14.32}$$

Na isti način se pokazuje da je

$$[(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\times\mathbf{v}]^T=-\mathbf{v}\times(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^T. \tag{14.33}$$

Sledi opšti slučaj

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{T})^T=-\mathbf{T}^T\times\mathbf{v} \tag{14.34}$$

i

$$(\mathbf{T}\times\mathbf{v})^T=-\mathbf{v}\times\mathbf{T}^T. \tag{14.35}$$

Specijalno

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{I})^T=-\mathbf{I}^T\times\mathbf{v}=-\mathbf{I}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{I}. \tag{14.36}$$

Prema tome, tenzor $\mathbf{v}\times\mathbf{I}$ je antisimetričan.

Kako je

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{I})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\times\mathbf{v}=\mathbf{0},$$

sledi da je $\mathbf{v}$ karakteristični vektor tenzora $\mathbf{v}\times\mathbf{I}$, čiji je karakterističan broj 0.

Uopšte, neka je

$$\mathbf{A}=A_{i_1i_2\ldots i_n}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_n}\quad \text{i}\quad \mathbf{B}=B_{j_1j_2\ldots j_m}\mathbf{e}_{j_1}\otimes\mathbf{e}_{j_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{j_m}.$$

Uopšte, neka je

$$\mathbf{A}=A_{i_1i_2\cdots i_n}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_n}\quad \text{i}\quad \mathbf{B}=B_{j_1j_2\cdots j_m}\mathbf{e}_{j_1}\otimes\mathbf{e}_{j_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{j_m},$$

onda je za $n > m$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= A_{i_1 i_2\cdots i_n}(\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_n})\times B_{j_1 j_2\cdots j_m}(\mathbf{e}_{j_1}\otimes\mathbf{e}_{j_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{j_m}) = \\ &= A_{i_1 i_2\cdots i_n}B_{j_1 j_2\cdots j_m}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_m}\otimes(\mathbf{e}_{i_{m+1}}\times\mathbf{e}_{j_1})\otimes(\mathbf{e}_{i_{m+2}}\times\mathbf{e}_{j_2})\otimes\cdots\otimes(\mathbf{e}_{i_n}\times\mathbf{e}_{j_m})\end{aligned}$$

i za $n < m$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= A_{i_1 i_2\cdots i_n}(\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_n})\times B_{j_1 j_2\cdots j_m}(\mathbf{e}_{j_1}\otimes\mathbf{e}_{j_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{j_m}) = \\ &= A_{i_1 i_2\cdots i_n}B_{j_1 j_2\cdots j_m}(\mathbf{e}_{i_1}\times\mathbf{e}_{j_1})\otimes(\mathbf{e}_{i_2}\times\mathbf{e}_{j_2})\otimes\cdots\otimes(\mathbf{e}_{i_n}\times\mathbf{e}_{j_n})\otimes\mathbf{e}_{j_{n+1}}\otimes\mathbf{e}_{j_{n+2}}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{j_m}.\end{aligned}$$

Zadatak 14.9

Pokazati da je za tenzore drugog reda **A** i **B**:

(a)
$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_{pq} = e_{ikp}e_{jlq}A_{ij}B_{kl} = e_{pik}e_{qjl}A_{ij}B_{kl};$$

(b)
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{B}\times\mathbf{A},$$

(c)
$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T\times\mathbf{B}^T;$$

(d)
$$\mathbf{A}\times\mathbf{I} = (\mathrm{tr}\mathbf{A})\mathbf{I} - \mathbf{A}^T;$$

(e)
$$\mathbf{I}\times\mathbf{I} = 2\mathbf{I},$$

(f)
$$(\mathbf{A}\times\mathbf{A}) : \mathbf{A} = 3!\det\mathbf{A};$$

(g)
$$\mathbf{v}\times\mathbf{A}\times\mathbf{w} = (\mathbf{v}\times\mathbf{A})\times\mathbf{w} = \mathbf{v}\times\mathbf{A}\times\mathbf{w};$$

(h)
$$\mathbf{A}\times(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}) = -\mathbf{v}\times\mathbf{A}\times\mathbf{w}.$$

Problem 7

Odrediti $\mathbf{v}\times\mathbf{T}\times\mathbf{v}$ za vektor $\mathbf{v}$ i tenzor $\mathbf{T}$ u $\mathbb{E}_3$.

Rešenje

U odnosu na ortonormiranu bazu $\mathbf{e}_i$, u $\mathbb{E}_3$, biće

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}\times\mathbf{T}\times\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i \times T_{jk}\,\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k \times v_l\mathbf{e}_l = v_iT_{jk}v_l(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j)\otimes(\mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_l) = \\
&= e_{ijp}e_{klq}\,v_i\,T_{jk}\,v_l\,\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q = \\
&= \left(\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{pq}+\delta_{il}\delta_{jq}\delta_{pk}+\delta_{iq}\delta_{jk}\delta_{pl}-\delta_{ik}\delta_{jq}\delta_{pl}-\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{pq}-\delta_{iq}\delta_{jl}\delta_{pk}\right)v_iT_{jk}v_j\,\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q = \\
&= \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{pq}\,v_iT_{jk}v_j\,\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q+\delta_{il}\delta_{jq}\delta_{pk}\,v_iT_{jk}v_j\,\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q+\delta_{iq}\delta_{jk}\delta_{pl}\,v_iT_{jk}v_j\,\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q- \\
&- \delta_{ik}\delta_{jq}\delta_{pl}\,v_iT_{jk}v_j\,\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q-\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{pq}\,v_iT_{jk}v_j\,\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q-\delta_{iq}\delta_{jl}\delta_{pk}\,v_iT_{jk}v_j\,\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q = \\
&= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{v})\mathbf{I}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{T}^T+\mathrm{tr}(\mathbf{T})\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes(\mathbf{T}\cdot\mathbf{v})-\mathrm{tr}(\mathbf{T})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{I}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{T})\otimes\mathbf{v}.
\end{aligned}
$$

14.10 Transponovani tenzor

Prostor u kome se ovde razmatraju tenzori je $\mathbb{E}_3$.

Njihovo predstavljanje se pojednostavljuje korišćenjem Dekartovog sistem z_i u odnsu na prirodnu bazu $\mathbf{e}_i$. Tako je reprezentacija tenzora drugog reda $\mathbf{T}$ data izrazom

$$\mathbf{T} = T_{ij}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j. \tag{14.37}$$

Njegov transponovani tenzor $\mathbf{T}^T$ je

$$\mathbf{T}^T = (T^T)_{ij}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j. \tag{14.38}$$

Po definiciji je $T = (T_{ij})^T = T = T_{ji}$. Onda je

$$\mathbf{T}^T = (T^T)_{ij}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j = T_{ji}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j = T_{ij}\,\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_i. \tag{14.39}$$

Svako od ovih predstavljanja je međusobno **ekvivalentno**.

■ **Primer 14.1**

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^T = \mathbf{b}\otimes\mathbf{a}.$$

■

14.11 Antisimetričan tenzor

Ako je

$$\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}, \tag{14.40}$$

onda se za **tenzor W** kaže da je **antisimetričan**. Komponentalna reprezentacija ove relacije je

$$W_{ji} = -W_{ij}, \tag{14.41}$$

odakle sledi da je

$$W_{ij} = 0 \quad \text{za} \quad i = j. \tag{14.42}$$

Drugačije rečeno njegovi elementi na glavnoj dijagonali su jednaki nuli.

Elementi različiti od nule se nalaze izvan dijagonale i ukupno ih ima tri.

To je takođe i broj komponenata bilo kog vektora u $\mathbb{E}_3$, što nas dovodi do zaključka da mora postojati odgovarajuća relacija između antisimetričnih tenzora i vektora u $\mathbb{E}_3$. Vektor $\boldsymbol{\omega}$ koji odgovara tenzoru $\boldsymbol{W}$ naziva se **asocirani** ili **aksijalni vektor**. Onda je

$$W_{ij} = e_{ikj}\,\omega_k, \tag{14.43}$$

ili, radi lakšeg pamćenja, što je uobičejeno u literaturi,

$$W_{ij} = -e_{ijk}\omega_k. \tag{14.44}$$

Odavde je lako pokazati da je

$$\omega_i = -\frac{1}{2}e_{ijk}W_{jk} \tag{14.45}$$

i

$$|\boldsymbol{\omega}| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|\mathbf{W}\|. \tag{14.46}$$

Lema 14.11.1 Aksijalni vektor $\boldsymbol{\omega}$ je karakteristični vektor tenzora $\mathbf{W}$, čiji je karakteristični broj nula.

❑

Dokaz

Dokaz sledi neposredno iz (14.43), jer je tada

$$W_{ij}\omega_j = e_{ikj}\omega_k\omega_j = 0, \quad \text{ili} \quad \mathbf{W}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}.$$

Lema 14.11.2

$$\mathbf{W}\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

za svaki vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{E}_3$.

❑

Dokaz

Dokaz takođe sledi iz (14.43), jer je tada

$$W_{ij}v_j = e_{ikj}\omega_k v_j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Problem 8

Pokazati da se svaki antisimetričan tenzor $\mathbf{W}$ može predstaviti u obliku

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I},$$

gde je $\boldsymbol{\omega}$ negov karakteristični vektor.

Rešenje

Polazimo od izvedenog izraza

$$\mathbf{W}\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

U specijalnom slučaju kada je $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$, biće

$$\mathbf{W}\mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i.$$

Onda je

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{I} = \mathbf{W}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}.$$

S druge strane je

$$\mathbf{W} = \mathbf{I}\mathbf{W} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i\mathbf{W} = -\mathbf{e}_i \otimes (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \otimes (\mathbf{e}_i \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Prema tome je

$$\mathbf{W} = \mathbf{I} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}.$$

N Ako se zna da se svaki antisimetričan tenzor $\mathbf{W}$ može predstaviti u obliku $\mathbf{W} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}$, onda se odmah vidi da je

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{a} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}) \cdot \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}, \tag{14.47}$$

gde je $\mathbf{a}$ proizvoljan vektor. Trivijalno sledi da je $\boldsymbol{\omega}$ njegov karakterističan vektor, čija je karakterisatična vrednost nula.

Zadatak 14.5 Pokazati da je

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} &= \mathbf{A}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \quad \text{za} \quad \forall\mathbf{b}\in V,\\
(\mathbf{a}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{b} &= \mathbf{a}\times(\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}) \quad \text{za} \quad \forall\mathbf{b}\in V,\\
\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{A}) &= (\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})\cdot\mathbf{A}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{A}.
\end{aligned}
$$

Specijalno

$$
\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{I}) = (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\mathbf{I}.
$$

■

14.12 Fizičke komponente vektora i tenzora

Kontravarijantne i kovarijantne komponente vektora nemaju istu vrstu fizičkog značenja u krivolinijskom koordinatnom sistemu, kakav imaju u pravougaonom Dekartovom sistemu. U opštem slučaju imaju različite dimenzije. Razlog za to su bazni vektori $\mathbf{g}_i$ koji ne moraju biti jedinični.

Primer 5

a)

Vektor brzine $\mathbf{v}$ ima sledeću reprezentaciju

$$
\mathbf{v} = v^i\mathbf{g}_i = v_i\mathbf{g}^i.
$$

Kako je

$$
\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = \dot{x}^i\mathbf{g}_i,
$$

gde je $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$, dobijamo da je

$$
v^i = \dot{x}^i.
$$

Očigledno, $v = |\mathbf{v}|$ ima dimenziju

$$
[v] = LT^{-1}.
$$

b) U polarnom koordinatnom sistemu (r,φ)

$$
v^r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \Rightarrow [v^r] = LT^{-1},
$$

dok je

$$
v^\varphi = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow [v^\varphi] = L^{-1},
$$

jer je ugao φ bezdimenzionalna veličina.

c) U sfernim koordinatama (r, θ, φ)

$$[v^r] = \left[\frac{dr}{dt}\right] = LT^{-1}, \quad \left[v^\theta\right] = \left[\frac{d\theta}{dt}\right] = T^{-1}, \quad [v^\varphi] = \left[\frac{d\varphi}{dt}\right] = T^{-1}.$$

Neka je

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i \tag{14.48}$$

i

$$\mathbf{g}_i = |\mathbf{g}_i|\mathbf{e}_i, \quad (\text{ne sabira se po } i),$$

gde je $\mathbf{e}_i$ jedinični vektor, a

$$|\mathbf{g}_i| = \sqrt{\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i} = \sqrt{g_{ii}}. \tag{14.49}$$

Onda je

$$\mathbf{g}_i = \sqrt{g_{ii}}\mathbf{e}_i, \quad (\text{ne sabira se po } i) \tag{14.50}$$

i

$$\mathbf{u} = \Sigma_i u^i \sqrt{g_{ii}}\mathbf{e}_i = u^{<i>}\mathbf{e}_i, \tag{14.51}$$

gde je

$$u^{<i>} = u^i \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{ne sabira se po } i). \tag{14.52}$$

Tako definisano $u^{<i>}$, iako predstavlja sistem prvog reda, **nije tenzor**. Međutim, dimenzije $u^{<i>}$ su iste kao $\mathbf{u}$, pošto su $\mathbf{e}_i$ jedinični bezdimezijski vektori. Dakle, $u^{<i>}$ su primer **fizičkih komponenata vektora u**, u koorinatnom sistemu x^i.

U odnosu na kontravarijantnu bazu

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i,$$

dobićemo, na isti način,

$$\mathbf{u} = \sum_i u_i \sqrt{g^{ii}}\mathbf{e}^i = u_{<i>}\mathbf{e}^i,$$

gde je

$$u_{<i>} = u_i \sqrt{g^{ii}} \quad (\text{ne sabira se po } i) \tag{14.53}$$

drugi primer fizičkih komponenata vektora **u**. U opštem slučaju $u_{<k>}$ i $u^{<k>}$ se razlikuju. U stvari, iz (14.53) i (14.52), sledi da je

$$u_{<i>} = u_i \sqrt{g^{ii}} = g_{ij}\sqrt{g^{ii}}u^j, \quad (\text{ne sabira se po } i),$$

tako da je

$$u_{<i>} = \sum_j g_{ij}\sqrt{\frac{g^{ii}}{g_{jj}}}u^{<j>} \quad \text{(ne sabira se po } i\text{)}.$$

U spacijalnom slučaju, ako je x^i ortogonalan koordinatni sistem biće

$$u_{<i>} = u^{<i>}. \tag{14.54}$$

S obzirom na važnost fizičkih komponenti u inženjerskim problemima, dalje imamo u vidu da je skalarni proizvod $\mathbf{u}$ sa jediničnim vektorima $\mathbf{e}_i$, ili $\mathbf{e}^i$ istih dimenzija kao $\mathbf{u}$. Znači

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_k = u_{<k>} \tag{14.55}$$

i

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}^k = u^{<k>}, \tag{14.56}$$

su skupovi fizičkih koordinata vektora $\mathbf{u}$. Sa geometrijskog stanovišta (14.55) (ili (14.56)) predstavljaju ortogonalnu projekciju $\mathbf{u}$ na $\mathbf{e}_k$ (ili $\mathbf{e}^k$). Napomenimo da se često u literaturi umesto $<\cdot>$ zagrade koristi i $(\cdot)$. Pri tom označavanju važi da je $u_{<k>} = u_{(k)}$, kao i $u^{<k>} = u^{(k)}$. Takođe napomenimo da, u opštem slučaju, fizičke koordinate nemaju tenzorski karakter.

Iz

$$\mathbf{e}_k = \lambda^i_{(k)}\mathbf{g}_i,$$

sledi da je

$$\lambda^i_{(k)} = \mathbf{e}_k\cdot\mathbf{g}^i = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}}\mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}^i \quad \text{(ne sabira se po k)},$$

tako da je

$$\lambda^i_{(k)} = \frac{\delta^i_k}{\sqrt{g_{kk}}}, \quad \text{(ne sabira se po } k\text{)}.$$

Prema tome

$$u_{(k)} = g_{ij}u^i\lambda^j_{(k)},$$

pa je

$$u_{(k)} = \frac{u_k}{\sqrt{g_{kk}}} = \frac{g_{jk}u^j}{\sqrt{g_{kk}}} \quad \text{(ne sabira se po } k\text{)}. \tag{14.57}$$

Na isti način imamo da je

$$\mathbf{e}^k = \lambda^{(k)}_i\mathbf{g}^i,$$

tako da je

$$\lambda^{(k)}_i = \frac{\delta^k_i}{\sqrt{g^{kk}}}, \quad \text{(ne sabira se po } k\text{)}$$

i

$$u^{(k)} = \frac{u^k}{\sqrt{g^{kk}}}. \tag{14.58}$$

Uporedite (14.58) i (14.52) sa (14.57) i (14.53), redom.

Ponovo, ako je x^i ortogonalan koordinatni sistem, onda je $u_{(k)} = u^{(k)}$. U stvari,

$$u^{(k)} = \frac{g^{kl}u_l}{\sqrt{g^{kk}}} = \frac{g^{kk}u_k}{\sqrt{g^{kk}}} = \sqrt{g^{kk}}u_k = \frac{u_k}{\sqrt{g_{kk}}} = u_{(k)} \quad \text{(ne sabira se po k).}$$

Koristeći ovaj postupak možemo definisati **fizičke komponente** bilo kog **tenzora**. Tako je

$$T_{(ij)} = g_{pa}g_{qb}T^{pq}\lambda^a_{(i)}\lambda^b_{(j)} = T_{ab}\lambda^q_{(i)}\lambda^b_{(j)} = T_{ab}\frac{\delta^a_i\delta^b_j}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} \quad \text{(ne sabira se po } i, j)$$

Znači

$$T_{(ij)} = \frac{T_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \quad \text{(ne sabira se po } i, j). \tag{14.59}$$

N Iz(14.59) vidimo da ako je T_{ij} simetričan tenzor onda su njegove fizičke komponente takođe simetrične.

Za tenzor mešovitog tipa $T^i{}_{\cdot j}$ biće

$$T^{(i)}_{\cdot(j)} = \frac{T^i_{\cdot j}}{\sqrt{g^{ii}}\sqrt{g_{jj}}} \quad \text{(ne sabira se po } i, j) \tag{14.60}$$

Zaključujemo ovaj odeljak sa napomenom da se fizičke komponente tenzorskih veličina mogu definisati na razne načine.

U praksi uglavnom koristimo postupak koji dovodi do formula (14.53) i (14.58).

Na kraju navedimo neke konkretne izraze.

Osim Dekartovih koordinata, u praksi se najčešće koriste cilindrične i sferne koordinate.

Za predstavljanje vektora i tenzora u odnosu na njihove fizičke koordinate, kao što smo pokazali, dominantnu ulogu imaju jedinični vektori koordinata. Uobičajno je da se ovi vekrtori obeležavaju indeksom koordinata. Isto važi i za fizičke komponente vektora i tenzora. Navodimo ih za sledeće koordinatne sisteme i vektor **v**.

Cilindrične koordinate (r, θ, z)

$$\mathbf{x} = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \quad \Rightarrow \quad x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z:$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_r &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \quad |\mathbf{g}_r| = 1,\\
\mathbf{e}_r &= \frac{\mathbf{g}_r}{|\mathbf{g}_r|} = \mathbf{g}_r,\\
\mathbf{g}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0), \quad |\mathbf{g}_\theta| = r,\\
\mathbf{e}_\theta &= \frac{\mathbf{g}_\theta}{|\mathbf{g}_\theta|} = \frac{\mathbf{g}_\theta}{r} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0),\\
\mathbf{g}_z &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = (0, 0, 1),\\
\mathbf{e}_z &= \mathbf{g}_z.
\end{aligned}$$

Onda je za vektor

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_z\mathbf{e}_z = v_r\mathbf{g}_r + v_\theta\frac{\mathbf{g}_\theta}{r} + v_z\mathbf{g}_z.$$

Sferne koordinate (r, θ, φ)

$$\mathbf{x} = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta:$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_r &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \quad |\mathbf{g}_r| = 1,\\
\mathbf{e}_r &= \frac{\mathbf{g}_r}{|\mathbf{g}_r|} = \mathbf{g}_r,\\
\mathbf{g}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta), \quad |\mathbf{g}_\theta| = r,\\
\mathbf{e}_\theta &= \frac{\mathbf{g}_\theta}{|\mathbf{g}_\theta|} = \frac{\mathbf{g}_\theta}{r} = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta),\\
\mathbf{g}_\varphi &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0), \quad |\mathbf{g}_\varphi| = r\sin\theta,\\
\mathbf{e}_\varphi &= \frac{\mathbf{g}_\varphi}{|\mathbf{g}_\varphi|} = \frac{\mathbf{g}_\varphi}{r\sin\theta} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0).
\end{aligned}$$

Tada je

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi = v_r\mathbf{g}_r + v_\theta\frac{\mathbf{g}_\theta}{r} + v_\varphi\frac{\mathbf{g}_\varphi}{r\sin\theta}.$$

Na isti način se predstavljaju tenzori bilo kog reda i tipa.

Primer 6

a) U polarnom koordinatnom sistemu (r,φ): $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$. Iz (14.53), za bilo koji ortogonalan koordinatni sistem, imamo

$$u_{(k)} = \frac{u_k}{\sqrt{g_{kk}}} = \sqrt{g_{kk}}u^k \quad \text{(ne sabira se po k).}$$

Onda je

$$\begin{aligned} u_{(r)} &= u_r = u^r, \\ u_{(\varphi)} &= \frac{u_\varphi}{r} = ru^\varphi. \end{aligned}$$

b) U sfernom koordinatnom sistemu (r,θ,φ) je

$$\begin{aligned} u_{(r)} &= u_r = u^r, \\ u_{(\theta)} &= \frac{u_\theta}{r} = ru^\theta, \\ u_{(\varphi)} &= \frac{u_\varphi}{r\sin\varphi} = r\sin\varphi u^\varphi. \end{aligned}$$

15. Kovarijantni i apsolutni izvod tenzorskog polja

15.1 Kovarijantni i apsolutni izvod tenzorskog polja

Definicija 15.1.1 Za tenzore koji su zadati neprekidno u svakoj tački oblasti U kažemo da čine **tenzorska polja**.

Već smo se susretali sa dva vektorska (tenzorska) polja $\mathbf{g}_i$ i $\mathbf{g}^i$ u $\mathbb{E}_n$. Prirodno je onda da prvo razmotrimo detaljno ova tenzorska poja. Pre svega želimo da znamo kako se menjanju duž koordinatnih linija x^j, tj.

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = ?$$

Očigledno je da za bilo koje posebno $i, j = 1, 2, \ldots, n$, dobijamo vektor u $\mathbb{E}_n$. Bilo koji od njih može biti predstavljen u odnosu na bazne vektore $\mathbf{g}_k$, tj.

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = A^k_{ij}\mathbf{g}_k, \tag{15.1}$$

gde su

$$A^k_{ij} = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{g}^k = g^{kl}\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{g}_l$$

koeficijenti reprezentacije skupa vektora $\dfrac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}$.

Uočimo da su oni simetrični u odnosu na indekse i, j, jer je

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i}.$$

Takođe znamo da je

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j,$$

pa je

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^k}. \tag{15.2}$$

Slično tome, permutujući ciklički indekse i, j, k nalazimo da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} &= \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i} \cdot \mathbf{g}_k + \mathbf{g}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^i}, \\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} &= \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^j} \cdot \mathbf{g}_i + \mathbf{g}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}. \end{aligned} \tag{15.3}$$

Ako onda saberemo izraze u (15.3) i od toga oduzmemo (15.2), dobijamo

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{g}_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{15.4}$$

U tenzorskom računu leva strana (15.4) se označava sa $[ij,k]$, tj.

$$[ij,k] = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{g}_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \tag{15.5}$$

i naziva se **Kristofelov simbol prve vrste**.

Dalje, iz (15.1) i (15.5), sledi da je

$$A_{ij}^k = g^{lk}[ij,k].$$

U literaturi je uobičajeno da se A_{ij}^k obeležava sa $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ i naziva se **Kristofelov simbol druge vrste**. Prema tome je

$$\left\{ {l \atop ij} \right\} = g^{lk}[ij,k]. \tag{15.6}$$

Sada se (15.1) može napisati u obliku

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = \left\{ {k \atop ij} \right\} \mathbf{g}_k. \tag{15.7}$$

Jasno je da su $\left\{ {k \atop ij} \right\}$, sa geometrijskog stanovišta, koeficijenti reprezentacije $\dfrac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}$, u odnosu na kovarijantnu bazu $\mathbf{g}_k$ koordinata x^k u $\mathbb{E}_n$.

S obzirom na značaj **Kristofelovih simbola**, od bitnog je značaja razmotriti njihova **svojstva**.

1) Iz (15.6) se vidi da se $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ izražava preko $[ij,k]$. Obrnuto, iz (15.6) takođe imamo da je

$$[ij,k] = g_{kl} \left\{ {l \atop ij} \right\}. \tag{15.8}$$

Znači relacija između $[ij,k]$ i $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ je **1-1**.

2) Izraz (15.5) daje $[ij,k]$ preko članova $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$. Međutim , iz

$$[ik,j] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right),$$
$$[jk,i] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right),$$

sabirajući ih, dobijamo

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = [ik,j] + [jk,i]. \tag{15.9}$$

Znači, $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ je takođe dato preko $[ij,k]$.

3) Sledeća formula

$$\left\{ {i \atop ij} \right\} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^j}, \tag{15.10}$$

je vrlo korisna i važna u tenzorskom računu.

Izvodimo je:

Dokaz

$$\begin{aligned}\left\{ {i \atop ij} \right\} &= g^{ik}[ij,k] = \frac{1}{2}g^{ik}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = \\ &= \frac{1}{2}g^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{1}{2g}G^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial g_{ik}}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^j},\end{aligned}$$

gde je G^{ik} kofaktor tenzora g_{ik} (vidi (12.33), str. 321).

Primetimo da je

$$g^{ik}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = 0,$$

jer je g^{ik} simetrično, a $\left(\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$ je antisimetrično u odnosu na indekse i,k.

4) Ako je koordinatni sistem x^i ortogonalan, tj. $g_{ij} = 0, i \neq j$, onda je

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} i \\ ii \end{matrix} \right\} &= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \log g_{ii} \right) = \frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}, \\
\left\{ \begin{matrix} i \\ ij \end{matrix} \right\} &= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} \log g_{ii} \right) = \frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}, \\
\left\{ \begin{matrix} i \\ jj \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i},
\end{aligned}$$

(ne sabira se po i i j, $i \neq j$). Takođe je

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = 0,$$

uvek kada su i, j, k različiti.

Ovi izrazi su od praktičnog značaja pri računanju $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}$ u ortogonalnom koordinatnom sistemu x^i.

Zaključujemo ovaj odeljak slećim napomenama.

a) Iz (15.7) sledi da je

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = 0$$

akko $\mathbf{g}_k$ ne zavisi od x^i, tj.

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = 0.$$

U takvom koordinatnom sistemu je

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{c}_i = \text{const.}$$

To je ekvivalnetno tvrđenju da je

$$g_{ij} = c_{ij},$$

jer je

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j.$$

Specijalno, to je uvek tačno za Dekartove koordinate z^i.

Navedimo Kristofelove simbole za najčešće korišćene koordinatne sisteme.

■ **Primer 15.1** Cilindrične koordinate: (r, φ, z)

$$\begin{aligned}
\{g_{ij}\} &= \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\} \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -r.
\end{aligned}$$

Ostale komponente $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ su jednake nuli. ∎

Primer 15.2 Sferne koordinate: (r, θ, φ)

$$\begin{aligned}
\{g_{ij}\} &= \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{Bmatrix} \\
&\Rightarrow \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {3 \atop 31} \right\} = \left\{ {3 \atop 13} \right\} = \frac{1}{r}, \\
&\left\{ {3 \atop 32} \right\} = \left\{ {3 \atop 23} \right\} = \mathrm{tg}^{-1}\theta, \\
&\left\{ {1 \atop 22} \right\} = -r, \quad \left\{ {1 \atop 33} \right\} = -r\sin^2\theta, \quad \left\{ {2 \atop 33} \right\} = -\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned}$$

Ostale komponente od $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ su jednake nuli. ∎

U nekim slučajevima pogodno je koristiti (15.7) za računanje $\left\{ {k \atop ij} \right\}$. Ilustrovaćemo to na prethodnim primerima.

Primer 15.3 a) (r, φ, z)

$$\mathbf{g}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \quad \mathbf{g}_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0), \quad \mathbf{g}_z = (0, 0, 1).$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{g}_r}{\partial \varphi} &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = \frac{1}{r}\mathbf{g}_\varphi \\
&\Rightarrow \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \frac{1}{r}, \\
\frac{\partial \mathbf{g}_\varphi}{\partial \varphi} &= (-r\cos\varphi, -r\sin\varphi, 0) = -r\mathbf{g}_r \\
&\Rightarrow \left\{ {1 \atop 22} \right\} = -r.
\end{aligned}$$

∎

Primer 15.4 b) (r, θ, φ)

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_r &= (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \\
\mathbf{g}_\theta &= (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta), \\
\mathbf{g}_\varphi &= (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{g}_r}{\partial \theta} &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) = \frac{1}{r}\mathbf{g}_\theta \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \\
\frac{\partial \mathbf{g}_r}{\partial \varphi} &= (-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0) = \frac{1}{r}\mathbf{g}_\varphi \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 13 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 31 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \\
\frac{\partial \mathbf{g}_\theta}{\partial \theta} &= (-r\sin\theta\cos\varphi, -r\sin\theta\sin\varphi, -r\cos\theta) = -r\mathbf{g}_r \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -r, \\
\frac{\partial \mathbf{g}_\theta}{\partial \varphi} &= (-r\cos\theta\sin\varphi, r\cos\theta\cos\varphi, 0) \\
&= \cos\theta(-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0) = \frac{1}{\mathrm{tg}\theta}\mathbf{g}_\varphi \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 23 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\mathrm{tg}\theta} = \mathrm{tg}^{-1}\theta.
\end{aligned}$$

Ali,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{g}_\varphi}{\partial \varphi} &= (-r\sin\theta\cos\varphi, -r\sin\theta\sin\varphi, 0) = \\
&= (-r\sin\theta\cos\varphi, -r\sin\theta\sin\varphi, -r\cos\theta + r\cos\theta) = -r\mathbf{g}_r + r\cos\theta\mathbf{k}
\end{aligned}$$

i moramo izračunati $\mathbf{k}$ u odnosu na $\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_\theta, \mathbf{g}_\varphi$.

Primetimo da je

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{g}_r \\ \frac{1}{r}\mathbf{g}_\theta \\ \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{g}_\varphi \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{matrix} \right\}$$

i kako su ova dva sistema ortogonalna, matrica je ortogonalna, tako da je

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{g}_r \\ \frac{1}{r}\mathbf{g}_\theta \\ \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{g}_\varphi \end{matrix} \right\}.$$

Tada je

$$\mathbf{k} = \cos\theta\mathbf{g}_r - \frac{1}{r}\sin\theta\mathbf{g}_\theta$$

i odatle

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{g}_\varphi}{\partial \varphi} &= -r\mathbf{g}_r + r\cos\theta(\cos\theta\mathbf{g}_r - \frac{1}{r}\sin\theta\mathbf{g}_\theta) = \\
&= -r(1-\cos^2\theta)\mathbf{g}_r - \sin\theta\cos\theta\mathbf{g}_\theta = -r\sin^2\theta\mathbf{g}_r - \sin\theta\cos\theta\mathbf{g}_\theta. \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 33 \end{array} \right\} = -r\sin^2\theta, \\
&\quad\ \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 33 \end{array} \right\} = -\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned}$$

Ostale komponente $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}$ su jednake nuli. ■

Kontravarijantna baza

Nastavljamo računajući promenu vektora kontravarijantne baze

$$\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}.$$

Na isti način sledi da je

$$\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j} = \beta^i_{jk}\mathbf{g}^k,$$

gde je

$$\beta^i_{jk} = \frac{\mathbf{g}^i}{\partial x^j}\cdot\mathbf{g}_k.$$

Međutim,

$$\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}\cdot\mathbf{g}_k = -\mathbf{g}^i\cdot\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^j} = -\left\{ \begin{array}{c} i \\ jk \end{array} \right\},$$

gde smo koristili (15.7), pa je

$$\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j} = -\left\{ \begin{array}{c} i \\ jk \end{array} \right\}\mathbf{g}^k. \tag{15.11}$$

Sada, iz

$$g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i,$$

dobijamo

$$\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^l} = -g^{jp}g^{kq}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^l} = -g^{jp}g^{kq}([pl,q]+[ql,p]).$$

Prema tome je

$$\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^l} = -g^{jp}\left\{ \begin{array}{c} k \\ pl \end{array} \right\} - g^{kp}\left\{ \begin{array}{c} j \\ pl \end{array} \right\}. \tag{15.12}$$

Uporediti ovo sa (15.9).

15.2 Transformacija Kristofelovih simbola

Postoji mnogo načina za određivanje zakona transformacije za skup funkcija $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ pri koordinatnoj transformaciji

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j).$$

Jedan od načina, koji ovde izlažemo, se poziva na (15.7) i $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$. Onda je

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{g}^k, \tag{15.13}$$

u koordinatnom sistemu x^i. U koordinatnom sistemu $\bar{x}^i$ glasi

$$\overline{\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_i}{\partial \bar{x}^j} \cdot \bar{\mathbf{g}}^k. \tag{15.14}$$

Sledeći korak je izračunavanje $\dfrac{\partial \bar{\mathbf{g}}_i}{\partial \bar{x}^j}$ u $\bar{x}^i$ - sistemu. Onda je

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\left(\mathbf{g}_p \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\right) = \frac{\partial \mathbf{g}_p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} + \mathbf{g}_p \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \bar{x}^j} = \frac{\partial \mathbf{g}_p}{\partial x^q}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + \mathbf{g}_p \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \bar{x}^j}.$$

Kako je

$$\bar{\mathbf{g}}^k = \mathbf{g}^r \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r},$$

onda množenjem odgovarajućih strana, ova dva izraza, dobijamo

$$\overline{\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}} = \left\{ \begin{matrix} r \\ pq \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^p}, \tag{15.15}$$

pri čemu smo koristili (15.13) i (15.14).

Ovaj izraz predstavlja **zakon transformacije Kristofelovog simbola druge vrste**.

Zakon transformacije Kristofelovog simbola prve vrste može se dobiti lako iz (15.15) i glasi:

$$\overline{[ij,k]} = [pq,r]\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} + g_{pq}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}. \tag{15.16}$$

Iz (15.15) i (15.16) se može zaključiti, da u opštem slučaju, Kristofelovi simboli nisu tenzori.

Ako analiziramo, na primer (15.15), zaključujemo da $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ može biti tenzor samo u slučaju kada je

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^p} = 0 \\ \Rightarrow\ &\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \bar{x}^j} = 0 \Rightarrow x^p = a_i^p \bar{x}^i + a^p, \end{aligned} \tag{15.17}$$

gde su a_i^p i a^p konstante, i gde je $\det(a_i^p) \neq 0$. Transformacija (15.17) je poznata pod imenom **afina transformacija**. Prema tome, Kristofelovi simboli nisu tenzori ako transformacija nije afina. Očigledno, ako razmenimo x^i i $\bar{x}^i$ u (15.16), dobijamo

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = \overline{\left\{ \begin{matrix} r \\ pq \end{matrix} \right\}} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} + \frac{\partial^2 \bar{x}^p}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p},$$

a odavde

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^p}{\partial x^i \partial x^j} = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k} - \overline{\left\{ \begin{matrix} p \\ qr \end{matrix} \right\}} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j}. \tag{15.18}$$

Ako ponovo razmenimo x^i i $\bar{x}^i$, iz (15.18) dobijamo

$$\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} = \overline{\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} - \left\{ \begin{matrix} p \\ qr \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j}. \tag{15.19}$$

Ove formule su od suštinskog značaja pri definisanju izvoda tenzorskih polja.

15.3 Kovarijantni izvod tenzora

Počećemo sa tenzorima prvog reda, tj. vektorima. Neka je

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i.$$

Onda je

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \mathbf{g}_i + u^i \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \mathbf{g}_i + u^i \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \mathbf{g}_k = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + u^k \left\{ \begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right\} \right) \mathbf{g}_i = u^i_{,j} \mathbf{g}_i, \tag{15.20}$$

gde je

$$u^i_{,j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + u^k \left\{ \begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right\}. \tag{15.21}$$

Ovaj izraz predstavlja **kovarijantni izvod** po x^j (u odnosu na g_{ij}) kovarijantnog tenzora u^i.

Lema 15.3.1 Ovako definisana veličina $u^i_{,j}$ ima tenzorski karakter, tj.

$$\bar{u}^i_{,j} = u^p_{,q} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}. \tag{15.22}$$

❑

Od značaja je da dokažemo to na dva načina.

Dokaz

I način

Neka je data veličina

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^p} \otimes \mathbf{g}^p = u^p_{,q} \mathbf{g}_p \otimes \mathbf{g}^q$$

u koordinatnom sistemu x^i. Onda je

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{x}^j} \otimes \bar{\mathbf{g}}^j = \bar{u}^i_{,j} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}^j,$$

njena reprezentacija u koordinatnom sistemu $\bar{x}^i$. Ali onda je

$$\bar{u}^i_{,j} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}^j = u^p_{,q} \mathbf{g}_p \otimes \mathbf{g}^q = u^p_{,q} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}^j,$$

odakle dobijamo (15.21).

II način

Polazimo od zakona transformacije komponenata kontravarijantnog vektora

$$\bar{u}^i = u^p \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}. \tag{15.23}$$

$$\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial u^p}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + u^r \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^r \partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}.$$

Odavde se vidi da izvod vektora nije tenzor ako transformacija $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j)$ nije afina. Ako u ovom izrazu zamenimo $\dfrac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^r \partial x^q}$, korišćenjenjem (15.18), dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \bar{x}^j} &= \frac{\partial u^p}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + u^r \left(\left\{ \begin{matrix} p \\ rq \end{matrix} \right\} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} - \overline{\left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \right) \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} = \\
&= \left(\frac{\partial u^p}{\partial x^q} + u^r \left\{ \begin{matrix} p \\ rq \end{matrix} \right\} \right) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} - u^r \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r} \overline{\left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} = \\
&= \cdots - \bar{u}^k \overline{\left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}} \delta^l_j = \\
&= \cdots - \bar{u}^k \overline{\left\{ \begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right\}},
\end{aligned}$$

gde smo koristili $u^r \dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r} = \bar{u}^k$ i $\dfrac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} = \delta^l_j$.

Onda je

$$\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \bar{x}^j} + \bar{u}^k \overline{\begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix}} = \left(\frac{\partial u^p}{\partial x^q} + u^r \begin{Bmatrix} p \\ rq \end{Bmatrix} \right) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j},$$

ili, iz (15.19),

$$\bar{u}^i_{,j} = u^p_{,q} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}.$$

$\square$

Ovaj postupak je formalan i može se primeniti na bilo koji tenzor bilo kog reda i tipa. Polazni izraz je zakon transformacije, kao (15.23), i formula (15.18).

Pri tome nema nikakvog značaja priroda komponenata tenzora.

Na isti način dokazujemo za kovarijantni vektor, recimo u_i. Ponovo ćemo izložiti oba postupka da bi istakli razliku između geometrijskog i formalnog postupka.

3) Tako za

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i,$$

dobijamo da je

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \mathbf{g}^i + u_i \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \mathbf{g}^i - u_i \begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix} \mathbf{g}^k = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - u_k \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} \right) \mathbf{g}^i = u_{i,j} \mathbf{g}^i,$$

gde je

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - u_k \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}. \tag{15.24}$$

Ovaj izraz predstavlja **kovarijantni izvod kovarijantnog vektora** u_i. Ovako definisana veličina je tenzor, što se može pokazati na isti način kao što smo učinili u (15.21). Čitalac bi tebalo da uoči da je znak minus u (15.24) posledica promene vektora $\mathbf{g}^i$, tj. formule (15.11).

4) Prelazimo na formalnu proceduru. Onda iz

$$\bar{u}_i = u_p \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i},$$

imamo da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}^j} &= \frac{\partial u_p}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} + u_p \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} = \\ &= \cdots + u_r \left(\overline{\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} - \begin{Bmatrix} r \\ pq \end{Bmatrix} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial u_p}{\partial x^q} - u_r \begin{Bmatrix} r \\ pq \end{Bmatrix} \right) \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + \bar{u}_k \overline{\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}}, \end{aligned}$$

pa je

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}^j} - \bar{u}_k \overline{\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}} = \left(\frac{\partial u_p}{\partial x^q} - u_r \left\{ \begin{matrix} r \\ pq \end{matrix} \right\} \right) \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}.$$

Ovaj izraz se, prema (15.25) može napisati kao

$$\bar{u}_{i,j} = u_{p,q} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}. \tag{15.25}$$

Primer sistema koji zadovoljavaju zakon transformacije za kovarijatne i kontravarijantne tenzore prvog reda su sistemi baznih vektora $\mathbf{g}_i$ i $\mathbf{g}^i$, (vidi (15.10) i (15.15) prethodnog odeljka).

Onda je, po definiciji (15.24),

$$\mathbf{g}_{i,j} = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} - \mathbf{g}_k \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\},$$

pa je, saglasno sa (15.7),

$$\mathbf{g}_{i,j} = 0. \tag{15.26}$$

Na isti način, iz

$$\mathbf{g}^i_{,j} = \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x_j} + \mathbf{g}_k \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$$

i (15.11), dobijamo da je

$$\mathbf{g}^i_{,j} = 0. \tag{15.27}$$

Znači, u $\mathbb{E}_n$ kovarijantni izvodi $\mathbf{g}_i$ i $\mathbf{g}^i$ su nula. Takve veličine, uopšte, nazvaćemo **kovarijantno konstantim**. U tenzorskom računu imaju važnu ulogu, jer omogućuju jednostavnije izračunavanje kovarijantnih izvoda tenzora.

Prema tome, za tenzore nultog reda, parcijalni i kovarijantni izvodi su isti. Onda možemo razmatrati $\mathbf{u}$ kao veličinu nultog reda, a

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} = \mathbf{u}_{,i},$$

kao njegov kovarijantni izvod. Znači, korišćenjem (15.26) (ili (15.27)), dolazimo odmah do formule

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} = \mathbf{u}_{,j} = (u_i \mathbf{g}^i)_{,j} = u_{i,j} \mathbf{g}^i = (u^i \mathbf{g}_i)_{,j} = u^i_{,j} \mathbf{g}_i, \tag{15.28}$$

odavde sledi da su $u_{i,j}$ i $u^i_{,j}$ tenzori drugog reda.

Uopšte, iz

$$\mathbf{u} = u^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\mathbf{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{g}_{i_k}\otimes\mathbf{g}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{g}^{j_l}, \tag{15.29}$$

dobijamo

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^m} = \mathbf{u}_{,m} = u^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l,m}\mathbf{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{g}^{j_l}, \tag{15.30}$$

gde je

$$u^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l,m} = \frac{\partial u^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}}{\partial x^m} + \sum_{p=1}^{k} u^{i_1\dots r\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\left\{\begin{matrix} i_p \\ rm \end{matrix}\right\} - \sum_{q=1}^{l} u^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots s\dots j_l}\left\{\begin{matrix} s \\ j_q m \end{matrix}\right\}, \tag{15.31}$$

kovarijantni izvod $k+l$ reda tenzora $u^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}$.

15.3.1 Pravila kovarijantnog izvoda

Sada je lako pokazati, na osnovu strukture formule (15.31), da su pravila kovarijantnog diferenciranja zbira i proizvoda tenzora identična, kao i pri običnom diferncIranju.

$$\left(A^i_{jk}+B^i_{jk}\right)_{,l} = A^i_{jk,l}+B^i_{jk,l}, \quad \left(A^i_{jk}C^k_l\right)_{,m} = A^i_{jk,m}C^k_l + A^i_{jk}C^k_{l,m}.$$

Zaključujemo ovaj odeljak navodeći neke primere u vezi sa operacijom kovarijantnog diferenciranja.

■ **Primer 15.5** Metrički tenzori g_{ij}, g^{ij}, g^i_j kovarijantno konstantni, tj.

$$g_{ij,k} = g^{ij}_{,k} = \delta^i_{j,k} = 0. \tag{15.32}$$

■

Dokaz

Iz

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j$$

sledi

$$g_{ij,k} = \mathbf{g}_{i,k}\cdot\mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_{j,k} = 0.$$

Takođe

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}^j,$$

i odavde

$$g^{ij}_{,k} = \mathbf{g}^i_{,k} \cdot \mathbf{g}^j + \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j_{,k} = 0.$$

Dalje,

$$\delta^i_j = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j,$$

tako da je

$$\delta^i_{j,k} = \mathbf{g}^i_{,k} \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_{j,k} = 0.$$

■ **Primer 15.6** Operacija dizanja i spuštanja indeksa je komutativna sa operacijom kovarijantnog diferenciranja. ■

Dokaz

$$(u^i_{\cdot j} g^{jk})_{,l} = u^i_{\cdot j,l} g^{jk} + u^i_{\cdot j} g^{jk}_{,l},$$

tj.

$$(u^i_{\cdot j} g^{jk})_{,l} = u^i_{\cdot j,l} g^{jk}! \tag{15.33}$$

jer je metrički tenzor kovarijantno konstantan.

■ **Primer 15.7** Operacija kontrakcije je komutativna sa operacijom kovarijantnog diferenciranja. ■

Dokaz

$$(u^i_{\cdot ik})_{,l} = (u^i_{\cdot jk} \delta^j_i)_{,l} = u^i_{\cdot jk} \delta^j_i. \tag{15.34}$$

■ **Primer 15.8** Kako su kovarijantni izvodi tenzori, indeks kovarijantnog diferenciranja može biti podignut, ili spušten, kao i bilo koji indeks tenzorske veličine. ■

15.4 Kovarijantni izvod relativnih tenzora

Počećemo sa najjednostavnijim slučajem

$$\bar{\varphi} = \Delta^W \varphi. \tag{15.35}$$

Onda je

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^i} = W \Delta^{W-1} \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}^i} \varphi + \Delta^W \frac{\partial \varphi}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}.$$

Izračunajmo

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}^i}.$$

Po definiciji je

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}} \cdot \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} = \Delta \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} = \Delta \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \left(\overline{\left\{ \begin{matrix} k \\ i\,j \end{matrix} \right\}} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} - \left\{ \begin{matrix} p \\ qr \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j} \right).$$

pri čemu smo koristili (15.18). Prema tome je,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}^i} = \Delta \left(\overline{\left\{ \begin{matrix} j \\ ji \end{matrix} \right\}} - \left\{ \begin{matrix} q \\ qp \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \right), \tag{15.36}$$

tako da je

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^i} = W \Delta^W \varphi \left(\overline{\left\{ \begin{matrix} j \\ ji \end{matrix} \right\}} - \left\{ \begin{matrix} q \\ qp \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \right) + \Delta^W \frac{\partial \varphi}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}.$$

Odavde iz (15.35) dobijamo

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^i} - W \bar{\varphi} \overline{\left\{ \begin{matrix} j \\ ji \end{matrix} \right\}} = \Delta^W \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^p} - W \varphi \left\{ \begin{matrix} q \\ qp \end{matrix} \right\} \right) \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}. \tag{15.37}$$

Očigledno je

$$\varphi_{|i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - W \varphi \left\{ \begin{matrix} j \\ ji \end{matrix} \right\}, \tag{15.38}$$

relativni kovarijantni tenzor težine W, tj.

$$\bar{\varphi}_{|i} = \Delta^W \varphi_{|p} \frac{\partial x^p}{\partial x^i}. \tag{15.39}$$

Podvlačimo da ovde i nadalje uvodimo oznaku "$|$"koja označava kovarijantni izvod relativnih tenzora.

■ **Primer 15.9**

$$\bar{g} = \Delta^2 g, \quad W = 2.$$

Onda je

$$g_{|i} = \frac{\partial g}{\partial x^i} - 2g \begin{Bmatrix} j \\ ji \end{Bmatrix}.$$

Ali, iz (15.10), tj.

$$\begin{Bmatrix} j \\ ji \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^i} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^i},$$

neposredno dobijamo da je

$$g_{|i} = 0, \tag{15.40}$$

tj. determinanta metričkog tenzora je kovarijantna konstanta (kao relativni skalar težine $+2$.) ■

■ **Primer 15.10** Iz (15.40), sledi takođe, da je

$$(\sqrt{g})_{|i} = 0. \tag{15.41}$$

Ova dva izraza, (15.40) i (15.41), su veoma korisna pri izvođenju formula za kovarijantni izvod bilo kog relativnog tenzora bilo koje težine.

Pre nego što nastavimo dalje, primetimo da, u (15.38) za $W = 0$, tj. za apsolutni skalar, imamo

$$\varphi_{|i} = \varphi_{,i}, \tag{15.42}$$

tj. relativni kovarijantni izvod i obični izvod apsolutnog skalara su isti. Ovo svojstvo važi uopšte. ■

Neka je dat relativni tenzor $A^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}$ težine W. Tada je

$$g^{-\frac{W}{2}} A^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}$$

apsolutni tenzor, pa je

$$(g^{-\frac{W}{2}} A^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l})_{|m} = (g^{-\frac{w}{2}} A^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l})_{,m}.$$

Onda je

$$\begin{aligned} g^{-\frac{W}{2}} A^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l|m} &= \frac{\partial g^{-\frac{W}{2}} A^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}}{\partial x^m} + g^{-\frac{W}{2}} \left(\sum_{p=1}^{k} A^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} \begin{Bmatrix} i_p \\ rm \end{Bmatrix} - \sum_{q=1}^{l} A^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots s \ldots j_l} \begin{Bmatrix} s \\ j_q m \end{Bmatrix} \right) \\ &= g^{-\frac{W}{2}} A^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l, m} + A^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} \frac{\partial g^{-\frac{W}{2}}}{\partial x^m}, \end{aligned}$$

a, odavde

$$A^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l|m} = A^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l,m} + A^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} g^{\frac{W}{2}} \frac{\partial g^{-\frac{W}{2}}}{\partial x^m}.$$

Ali

$$g^{\frac{W}{2}} \frac{\partial g^{-\frac{W}{2}}}{\partial x^m} = \frac{\partial \log g^{-\frac{W}{2}}}{\partial x^m} = -W \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^m} = -W \left\{ \begin{matrix} p \\ pm \end{matrix} \right\},$$

tako da, konačno, dobijamo

$$A^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l|m} = A^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l,m} - W A^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} \left\{ \begin{matrix} p \\ pm \end{matrix} \right\}. \tag{15.43}$$

Ovo je opšti izraz za kovarijantni izvod relativnog tenzora reda $k+l$ težine W. Opet, ako je $W = 0$, onda se on svodi na kovarijantni izvod apsolutnog tenzora.

■ **Primer 15.11**

$$e^{i_1\dots i_n}{}_{|m} = e^{i_1\dots i_n}{}_{,m} - e^{i_1\dots i_n} \left\{ \begin{matrix} p \\ pm \end{matrix} \right\},$$

jer je $W = 1$. Međutim

$$e^{i_1\dots i_n}{}_{,m} = \frac{\partial e^{i_1\dots i_n}}{\partial x^m} + \sum_{s=1}^{n} e^{i_1\dots i_s\dots i_n} \left\{ \begin{matrix} i_s \\ pm \end{matrix} \right\} = e^{i_1\dots i_n} \left\{ \begin{matrix} p \\ pm \end{matrix} \right\},$$

pa je

$$e^{i_1\dots i_n}{}_{|m} = 0. \tag{15.44}$$

Takođe je

$$\varepsilon^{i_1\dots i_n}{}_{|m} = \varepsilon^{i_1\dots i_n}{}_{,m} = 0, \tag{15.45}$$

prema (15.44) i (15.41). ■

■ **Primer 15.12** Na isti način možemo pokazati da je

$$e_{i_1\dots i_n|m} = 0 \tag{15.46}$$

i

$$\varepsilon_{i_1\dots i_n|m} = \varepsilon_{i_1\dots i_n,m} = 0. \tag{15.47}$$

Iz primera 15.11 i 15.12 odmah dobijamo da je

$$\delta^{i_1\dots i_k}_{j^1\dots j^k,m} = 0. \tag{15.48}$$

■

Sve ove formule su od izuzetnog teorijskog i praktičnog značaja u tenzorskom računu.

Nadalje ćemo se baviti apsolutnim tenzorima, ako se drugačije ne kaže.

15.5 Izvod relativnog tenzora

Od interesa je da razmotrimo drugi prilaz koji, radi jednostavnosti, ilustrujemo na relativnom vektoru

$$\bar{v}_j = \Delta^w v_q \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}.$$

Onda je, koristeći (15.36) i (15.19)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}^i} &= w\Delta^{w-1}\frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}^i} v_q \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + \Delta^w \frac{\partial v_q}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + \Delta^w v_q \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i} = \\
&= w\Delta^{w-1}\Delta\left(\overline{\begin{Bmatrix} k \\ ki \end{Bmatrix}} - \begin{Bmatrix} r \\ rp \end{Bmatrix}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\right) v_q \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + \Delta^w \frac{\partial v_q}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + \\
&+ \Delta^w v_r \left(\overline{\begin{Bmatrix} k \\ ji \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} - \begin{Bmatrix} r \\ qp \end{Bmatrix}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\right) = \\
&= w\Delta^w \left(\overline{\begin{Bmatrix} k \\ ki \end{Bmatrix}} - \begin{Bmatrix} r \\ rp \end{Bmatrix}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\right) v_q \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + \Delta^w \frac{\partial v_q}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} - \\
&+ \Delta^w v_r \overline{\begin{Bmatrix} k \\ ji \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} - \Delta^w v_r \begin{Bmatrix} r \\ qp \end{Bmatrix}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} = \\
&= w\overline{\begin{Bmatrix} k \\ ki \end{Bmatrix}}\bar{v}_j - w\Delta^w v_q \begin{Bmatrix} r \\ rp \end{Bmatrix}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} + \Delta^w\left(\frac{\partial v_q}{\partial x^p} - v_r\begin{Bmatrix} r \\ qp \end{Bmatrix}\right)\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + \bar{v}_k \overline{\begin{Bmatrix} k \\ ji \end{Bmatrix}}.
\end{aligned}$$

Sređivanjem članova poslednje jednakosti dobijamo da je

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}^i} - \bar{v}_k \overline{\begin{Bmatrix} k \\ ji \end{Bmatrix}} - w\overline{\begin{Bmatrix} k \\ ki \end{Bmatrix}}\bar{v}_j = \Delta^w\left(\frac{\partial v_q}{\partial x^p} - v_r\begin{Bmatrix} r \\ qp \end{Bmatrix} - wv_q\begin{Bmatrix} r \\ rp \end{Bmatrix}\right)\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j},$$

ili

$$\bar{v}_{j,i} - w\bar{v}_j \overline{\begin{Bmatrix} k \\ ki \end{Bmatrix}} = \Delta^w\left(v_{q,p} - wv_q\begin{Bmatrix} r \\ rp \end{Bmatrix}\right)\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}.$$

Definišemo sa vertikalnom linijom ”|” izraz

$$v_{q|p} = v_{q,p} - wv_q\begin{Bmatrix} r \\ rp \end{Bmatrix}.$$

Onda je

$$\bar{v}_{j|i} = \Delta^w v_{q|p}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}.$$

Analizom ovog izraza može se zaključiti da je ”|” proširenje oznake za kovarijantni izvod relatinog hibridnbog tenzora.

U tom kontekstu ostaje nam da razmotrimo veličinu Δ. Pišemo

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\bar{x}^i}=\Delta\left(\overline{\left\{\begin{array}{c} j\\ ji\end{array}\right\}}-\left\{\begin{array}{c} q\\ qp\end{array}\right\}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial\Delta}{\partial\bar{x}^i}-\Delta\overline{\left\{\begin{array}{c} j\\ ji\end{array}\right\}}=-\Delta\left\{\begin{array}{c} q\\ qp\end{array}\right\}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}.$$

Podrazumeva se da je $\Delta=\left|\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^j}\right|$ funkcija od $\bar{x}^i$. Onda je

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\bar{x}^i}-\Delta\overline{\left\{\begin{array}{c} j\\ ji\end{array}\right\}}=\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x^p}-\Delta\left\{\begin{array}{c} q\\ qp\end{array}\right\}\right)\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}=-\Delta\left\{\begin{array}{c} q\\ qp\end{array}\right\}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}.$$

Prema tome je

$$\Delta_{|i}=\Delta_{|p}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}=-\Delta\left\{\begin{array}{c} q\\ qp\end{array}\right\}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}.$$

Takođe je

$$\Delta^W_{|i}=W\Delta^{W-1}\Delta_{|i}=W\Delta^{W-1}\Delta_{|p}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}=-W\Delta^{W-1}\Delta\left\{\begin{array}{c} q\\ qp\end{array}\right\}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}=-W\Delta^W\left\{\begin{array}{c} q\\ qp\end{array}\right\}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}.$$

Kakva je korist od toga?

Razmotrimo relativni tenzor

$$\bar{A}^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}(\bar{x})=\Delta^W A^{p_1\cdots p_k}_{q_1\cdots q_l}(x)\frac{\partial\bar{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}}\frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{q_l}}{\partial x^{j_l}}.$$

Onda je

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}(\bar{x})_{|m}&=\left(\Delta^W A^{p_1\cdots p_k}_{q_1\cdots q_l}(x)\frac{\partial\bar{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}}\frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{q_l}}{\partial x^{j_l}}\right)_{|m}=\\
&=\Delta^W_{|m}A^{p_1\cdots p_k}_{q_1\cdots q_l}(x)\frac{\partial\bar{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}}\frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{q_l}}{\partial x^{j_l}}+\\
&+\Delta^W\left(A^{p_1\cdots p_k}_{q_1\cdots q_l}(x)\frac{\partial\bar{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}}\frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{q_l}}{\partial x^{j_l}}\right)_{|m}=\\
&=-W\Delta^W\left\{\begin{array}{c} q\\ qp\end{array}\right\}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^m}\frac{\partial\bar{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}}\frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{q_l}}{\partial x^{j_l}}+\\
&+\Delta^W\left(A^{p_1\cdots p_k}_{q_1\cdots q_l}(x)\frac{\partial\bar{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}}\frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{q_l}}{\partial x^{j_l}}\right)_{|m}=\\
&=-W\Delta^W\left\{\begin{array}{c} q\\ qp\end{array}\right\}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^m}\frac{\partial\bar{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}}\frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{q_l}}{\partial x^{j_l}}+\\
&+\Delta^W A^{p_1\cdots p_k}_{q_1\cdots q_l}(x)_{,p}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^m}\frac{\partial\bar{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}}\frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{q_l}}{\partial x^{j_l}}=\\
&=\Delta^W\left(A^{p_1\cdots p_k}_{q_1\cdots q_l}(x)_{,p}-WA^{p_1\cdots p_k}_{q_1\cdots q_l}\left\{\begin{array}{c} q\\ qp\end{array}\right\}\right)\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^m}\frac{\partial\bar{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}}\frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{q_l}}{\partial x^{j_l}}=\\
&=\Delta^W A^{p_1\cdots p_k}_{q_1\cdots q_l}(x)_{|p}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^m}\frac{\partial\bar{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}}\frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{q_l}}{\partial x^{j_l}}.
\end{aligned}$$

Znači

$$\bar{A}^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}(\bar{x})_{|m} = \Delta^W A^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}(x)_{|p}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}}\frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{q_l}}{\partial x^{j_l}},$$

gde je

$$A^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}(x)_{|p} = A^{p_1\cdots p_k}_{q_1\cdots q_l}(x)_{,p} - WA^{p_1\cdots p_k}_{q_1\cdots q_l}\left\{\begin{matrix} q \\ qp \end{matrix}\right\}.$$

15.5.1 Kovarijanti izvod višeg reda

Kao što smo videli kovarijantni izvod tenzora je takođe tenzor reda za jedan veći od polaznog tenzora. Onda možemo početi sa ovim tenzorom i potražiti njegov kovarijantni izvod. Opet ćemo dobiti tenzor, ali reda za dva veći od polaznog tenzora. Nazvaćemo ga kovarijantni izvod drugog reda u odnosu na polazni tenzor. Produžavajući ovaj postupak dobićemo kovarijantni izvod proizvoljnog reda (ako komponente polaznog tenzora pripadaju skupu C^∞ funkcija).

15.6 Apsolutni (Bjankijev) izvod

Do sada smo razmatrali promenu tenzorskih polja duž koordinatnih linija. Prirodno je da razmatramo njihovu promenu duž bilo koje linije u $\mathbb{E}_3$ ($\mathbb{E}_n$).

Kao i do sada počinjemo sa vektorskim poljima. Neka je vektorsko polje $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ definisano u nekoj oblasti $\mathbb{E}_3$ i neka je

$$\mathscr{C} : x^k = x^k(t), \quad t_1 \le t \le t_2,$$

kriva u toj oblasti. Onda su vektori $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ definisani na jednodimenzionalnoj mnogostrukosti $\mathscr{C}$ u funkciji parametra t. Ako je $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ diferencijabilno i ako $x^k(t)$ pripada klasi funkcija C^1 onda je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t},$$

ili

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = u^i_{,k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\mathbf{g}_i = \left(\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} + \left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\} u^j \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\right)\mathbf{g}_i,$$

gde smo koristili (15.21).

Vektor

$$\frac{\delta u^i}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} + \left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\} u^j \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = u^i_{,k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}, \tag{15.49}$$

naziva se **apsolutni** (**unutrašnji** ili **Bjankijev**) **izvod** vektora $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t))$ po parametru t. Onda je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta u^i}{\delta t}\mathbf{g}_i. \tag{15.50}$$

Specijalno, kada je reč o skalarnoj veličini φ, gornji izraz se svodi na

$$\frac{\delta\varphi}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}. \tag{15.51}$$

Prema tome, apsolutni i običan totalni izvod skalara su isti. To važi za svaki tenzor predstavljen u obliku nultog reda.

Na isti način se može izvesti apsolutni izvod za tenzor bilo kog reda. Tako apsolutni izvod tenzora $T^{i_1\dots i_\alpha}_{j_1\dots j_\beta}$ glasi

$$\frac{\delta T^{i_1\dots i_\alpha}_{j_1\dots j_\beta}}{\delta t} = T^{i_1\dots i_\alpha}_{j_1\dots j_\beta,l}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}, \tag{15.52}$$

ili u razvijenom obliku

$$\begin{aligned}\frac{\delta T^{i_1\dots i_\alpha}_{j_1\dots j_\beta}}{\delta t} &= \frac{\mathrm{d}T^{i_1\dots i_\alpha}_{j_1\dots j_\beta}}{\mathrm{d}t} + \\ &+ \sum_{r=1}^{\alpha}\left\{\begin{matrix} i_r \\ ml \end{matrix}\right\} T^{i_1\dots i_{r-1} m i_{r+1}\dots i_\alpha}_{j_1\dots j_\beta}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t} - \sum_{s=1}^{\beta}\left\{\begin{matrix} m \\ j_s l \end{matrix}\right\} T^{i_1\dots i_\alpha}_{j_1\dots j_{s-1} m j_{s+1}\dots j_\beta}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}.\end{aligned} \tag{15.53}$$

Uobičajena pravila diferenciranja zbira i proizvoda važe i za apsolutni izvod, što neposredno sledi iz (15.53).

Takođe je očigledno da je

$$\frac{\delta g_{ij}}{\delta t} = \frac{\delta g^{ij}}{\delta t} = \frac{\delta \delta^i_j}{\delta t} = 0, \tag{15.54}$$

što je od bitnog značaja u daljoj primeni apsolutnog izvoda.

N Predstavljajući vektorsko polje $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t))$ na krivoj $\mathscr{C}$ u komponentalnom obliku $\mathbf{u} = u^i\mathbf{g}_i$ pišemo, na osnovu (15.51),

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\mathbf{u}}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\left(u^i\mathbf{g}_i\right) = \frac{\delta u^i}{\delta t}\mathbf{g}_i + u^i\frac{\delta\mathbf{g}_i}{\delta t}.$$

Upoređujući ovaj izraz sa (15.50) zaključujemo da je

$$u^i\frac{\delta\mathbf{g}_i}{\delta t} = \mathbf{0}.$$

S obzirom na proizvoljnost vektorskog polja $\mathbf{u}$ sledi da je

$$\frac{\delta\mathbf{g}_i}{\delta t} = \mathbf{0}. \tag{15.55}$$

Na isti način se pokazuje da je

$$\frac{\delta\mathbf{g}^i}{\delta t} = \mathbf{0}. \tag{15.56}$$

Ovi izrazi nam znatno uprošćuju određivanje apsolutnog izvoda tenzorskih veličina. Primera radi za tenzor

$$\mathbf{T} = T^k_{\ ij}\, \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \tag{15.57}$$

dobijamo, na osnovu (15.51), da je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\left(T^k_{\ ij}\, \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j\right) = \frac{\delta T^k_{\ ij}}{\delta t}\, \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j, \tag{15.58}$$

gde je

$$\frac{\delta T^k_{\ ij}}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}T^k_{\ ij}}{\mathrm{d}t} + \begin{Bmatrix} k \\ ml \end{Bmatrix} T^m_{\ ij} \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t} - \begin{Bmatrix} m \\ il \end{Bmatrix} T^k_{\ mj} \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t} - \begin{Bmatrix} m \\ jl \end{Bmatrix} T^k_{\ im} \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}. \tag{15.59}$$

Apsolutni izvod za tenzor bilo kog reda može se izvesti na isti način. Primera radi, apsolutni izvod tenzora $T^k_{\ ij}$ je

$$\frac{\delta T^k_{\ ij}}{\delta t} = T^k_{\ ij,l} \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}. \tag{15.60}$$

Specijalno,

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}. \tag{15.61}$$

Lako je pokazati da uobičajena pravila diferenciranja zbira i proizvoda tenzora važe i za apsolutni izvod.

15.7 Paralelna vektorska polja

Ako se vektorsko polje $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ne menja duž krive $\mathscr{C}$, onda ono formira paralelno vektorsko polje duž krive $\mathscr{C}$. Tada je $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}$.

Lema 15.7.1 Potreban i dovoljan uslov da je vektorsko polje $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{E}_3$, duž krive $\mathscr{C}$, polje paralelnih vektora je

$$\frac{\delta u^i}{\delta t} = 0. \tag{15.62}$$

❑

Dokaz.

Sledi iz (15.50). ❑

Specijalan slučaj. Razmotrimo ovaj uslov u odnosu na Dekartove koordinate koje su karakteristika Euklidskog prostora. Ovde ih obeležavamo sa Z^k. Njima ogovarjući ortonormirani sistem baznih vektora $\mathbf{I}_k$ je isti u svakoj tački prostora $\mathbb{E}_3$. U odnosu na ovu bazu Kristofelovi simboli isčezavaju, nula su. Onda je vektor $\mathbf{u}$ u odnosu na Z^k dat izrazom

$$\mathbf{u} = U^k \mathbf{I}_k.$$

U odnosu na ovu bazu Kristofelovi simboli iščezavjaju. U tom slučaju $\dfrac{\delta u^i}{\delta t} = 0$ postaje $\dfrac{\mathrm{d}U^k}{\mathrm{d}t} = 0$.

Od posebnog značaja je analiza uslova (15.62).

Kako (15.49) važi za svaku krivu $\mathscr{C} : x^k = x^k(t)$ u $\mathbb{E}_3$, onda iz (15.62) sledi da je

$$\frac{\delta u^i}{\delta t} = u^i_{,k} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0,$$

za svako $\dfrac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$. Tada mora biti

$$u^i_{,k} = 0. \tag{15.63}$$

U tom slučaju kažemo za vektorsko polje $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{E}_3$ da je **polje apsolutnog paralelizma**.

■ **Primer 15.13** Interesantno je razmotriti specijalan slučaj kada je prava linija $\mathscr{C}$ data u odnosu na Dekartove koordinate $Z^k = Z^k(s)$, gde je s element luka. Njen tangentni jedinični vektor $T^k = \dfrac{\mathrm{d}Z^k}{\mathrm{d}s}$ je konstantan duž prave, pa je

$$\frac{\mathrm{d}T^k}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}^2 Z^k}{\mathrm{d}s^2} = 0$$

jednačina prave linije.

U odnosu na krivolinijske koordinate x^k, isto vektorsko polje dato je transformacijom

$$t^k = \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial x^k}{\partial Z^l} T^l.$$

Kako (15.62) važi za svako paralelno polje, onda iz (15.49) i (15.62), prostom smenom

$$u^i = T^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s},$$

dobijamo jednačine prave linije $\mathscr{C}$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = 0$$

u odnosu na krivolinijske koordinate x^k. ■

N Sva ova dosadašnja razmatranja važe za bilo koji konačno dimzionalni Euklidski prostor $\mathbb{E}_n$.

16. Riman-Kristofelov tenzor

Neka je $f(x^i) \in C^k$, $k \geq 2$, $i = 1,2,\ldots,n$. Onda je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$$

nezavisno od prirode prostora i koordinatnog sistema x^i dopustivog u posmatranom prostoru. Isto važi za skup funkcija u_i.

Posmatrajući kovarijantne izvode kao uopštenje parcijalnih izvoda u proizvoljnom koordinatnom sistemu x^i postavlja se pitanje, između ostalog: da li komutativnost $u_{i,jk}$ po indeksima j i k i dalje važi? Kada važi i kada ne važi? Odgovor na ova pitanja dovelo je do pojma tenzora krivine, poznatog pod imanom **Riman-Kristofelov tenzor**. Razmotrimo ovaj pojam detaljnije, u n-dimenzionalnom prostoru.

Po definiciji je

$$u_{i,jk} = (u_{i,j}),k = \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x^k} - u_{l,j} \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\} - u_{i,l} \left\{ \begin{matrix} l \\ jk \end{matrix} \right\},$$

za bilo koje tenzorsko polje u_i.

Kako je

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - u_m \left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\},$$

sledi da je

$$\begin{aligned} u_{i,jk} &= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - u_m \left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\}\right) - \left(\frac{\partial u_l}{\partial x^j} - u_m \left\{ \begin{matrix} m \\ lj \end{matrix} \right\}\right) \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\} - \\ &- \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^l} - u_m \left\{ \begin{matrix} m \\ il \end{matrix} \right\}\right) \left\{ \begin{matrix} l \\ jk \end{matrix} \right\}, \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} u_{i,jk} &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial u_m}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\} - u_m \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\} - \frac{\partial u_l}{\partial x^j} \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\} + \\ &+ u_m \left\{ \begin{matrix} m \\ lj \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\} - \frac{\partial u_i}{\partial x^l} \left\{ \begin{matrix} l \\ jk \end{matrix} \right\} + u_m \left\{ \begin{matrix} m \\ il \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l \\ jk \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \tag{16.1}$$

Izračunajmo

$$u_{i,jk} - u_{i,kj}.$$

Grupisanjem odgovarajućih članova dobijamo da je

$$u_{i,jk} - u_{i,kj} = u_m R^m_{\cdot ijk}, \tag{16.2}$$

gde je

$$R^l_{\cdot ijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left\{ {l \atop ik} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{ {l \atop ij} \right\} + \left\{ {m \atop ik} \right\}\left\{ {l \atop mj} \right\} - \left\{ {m \atop ij} \right\}\left\{ {l \atop mk} \right\}. \tag{16.3}$$

Kako je u_i proizvoljan vektor, reda jedan i pošto je razlika dva tenzora

$$u_{i,jk} - u_{i,kj}$$

kovarijantni tenzor trećeg reda, na osnovu teoreme o tenzorskom karakteru sistema, znamo da je R^l_{ijk}, dat sa (16.3), mešoviti tenzor četvrtog reda. Tenzor R^l_{iji} naziva se **mešoviti Riman - Kristofelov tenzor** , ili **Riman - Kristofelov tenzor druge vrste**.

Njemu asocirani tenzor

$$R_{ijkl} = g_{lm} R^m_{\cdot ijk} \tag{16.4}$$

je poznat pod imenom **kovrijantni Riman-Kristofelov tenzor prve vrste**.

Zajedničko ime za oba tipa je **tenzor krivine**.

Napisaćemo ga u simetričnom obliku koji je lakši za pamćenje:

$$R^l_{\cdot ijk} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^j} & \dfrac{\partial}{\partial x^k} \\ \left\{ {l \atop ij} \right\} & \left\{ {l \atop ik} \right\} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left\{ {l \atop mj} \right\} & \left\{ {l \atop mk} \right\} \\ \left\{ {m \atop ij} \right\} & \left\{ {m \atop ik} \right\} \end{vmatrix}, \tag{16.5}$$

$$R_{lijk} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^j} & \dfrac{\partial}{\partial x^k} \\ [ij,l] & [ik,l] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left\{ {m \atop ij} \right\} & \left\{ {m \atop ik} \right\} \\ [lj,m] & [lk,m] \end{vmatrix}, \tag{16.6}$$

ili

$$R^l_{\cdot ijk} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\left\{ {l \atop ik} \right\} + \left\{ {m \atop ik} \right\}\left\{ {l \atop mj} \right\} \right)_{[j,k]}, \tag{16.7}$$

$$R_{lijk} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^j}[ik,l] - \left\{ {m \atop ik} \right\}[lj,m] \right)_{[j,k]}. \tag{16.8}$$

Na isti način može se pokazati da je u opštem slučaju za tenzor reda m

$$u_{i_1\ldots i_m,jk} - u_{i_1\ldots i_m,kj} = \sum_{\alpha=1}^{m} u_{i_1\ldots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1}\ldots i_m} R^{l}{}_{i_\alpha jk}.$$

Primera radi za tenzora drugog reda u_{ij} biće

$$u_{ij,kl} - u_{ij,lk} = u_{mj} R^{m}{}_{ikl} + u_{im} R^{m}{}_{jkl}.$$

16.0.1 Svojstva Riman-Kristofelovih tenzora

Iz (16.8), posle duže računice, može se pokazati da je

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k}\right) + \\ &+ g^{pq}\left([jk,p][il,q] - [jl,p][ik,q]\right). \end{aligned} \tag{16.9}$$

Onda iz (16.8) zaključujemo da R_{ijkl} ima sledeća simetrična svojstva:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= -R_{jikl}, \\ R_{ijkl} &= -R_{ijlk}, \\ R_{ijkl} &= R_{klij}, \\ R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} &= 0. \end{aligned} \tag{16.10}$$

Slične relacije se mogu dobiti za $R^{l}_{\cdot ijk}$ dizanjem odgovarajućeg indeksa u (16.10).

16.0.2 Broj nezavisnih komponenata Rimanovog tenzora

Na mestu je sledeća

Lema 16.0.1 Broj neizčezavajućih komponenata R_{ijkl} dat formulom

$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12}. \tag{16.11}$$

❏

Dokaz

Uslovi (16.10) nameću odgovarajuća ograničenja na broj nezavisnih komponenata tenzora R_{ijkl}.

Saglasno Fojgtovoj[1] notaciji obeležavamo parove indeksa sa $\alpha = (ij)$ i $\beta = (kl)$. Onda R_{ijkl} označavamo sa $R_{\alpha\beta}$. S obzirom na antisimetrična svojstva tenzora R_{ijkl}

po parovima indeksa (ij) i (kl), sledi da je ukupan broj komponenata tenzora $R_{\alpha\beta}$ po svakom od indeksa

$$L = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Imajući u vidu da je $R_{\alpha\beta}$ simetričan tenzor po α, β, onda je ukupan broj njegovih različitih komponenata

$$\begin{aligned} M &= \frac{L(L+1)}{2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)}{2} = \\ &= \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}. \end{aligned}$$

Tenzor R_{ijkl} takođe zadovoljava jednačine

$$R_{lijk} + R_{ljki} + R_{likj} = 0.$$

Pitanje glasi koliki je broj nezavisnih jednačina, jer one određuju dodatni broj uslova koje mora zadovoljavati R_{ijkl}?

Neka je

$$\mathscr{R}_{lijk} = R_{lijk} + R_{ljki} + R_{likj}.$$

Ovaj tenzor je potpuno antisimetričan. Npr.

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_{iljk} &= R_{iljk} + R_{ijkl} + R_{iklj} = -R_{lijk} + R_{klij} + R_{ljik} = \\ &= -R_{lijk} - R_{lkij} - R_{ljki} = -\mathscr{R}_{lijk}. \end{aligned}$$

Na isti način se pokazuje antisimetričnost po bilo kom drugom paru indeksa. Prema tome, ovaj tenzor ima $\binom{n}{4}$ nezavisnih komponenata. Kako je

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!},$$

ujedno i broj uslova koje mora zadovoljavati R_{ijkl}, sledi da je broj N njegovih nezavisnih komponenata

$$N = M - \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!},$$

odakle sledi

$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Riman-Kristofelove komponente, u Mehanici kontinuuma, najčešće se koriste u dvodimenzionalnim i trodimenzionalnim prostorima. Tako, u trodimenzionalnom slučaju $n = 3$, a $N = 6$, pa su različite neizčezavajuće komponent:

$$R_{1212},\ R_{1213},\ R_{1223},\ R_{1313},\ R_{1323},\ R_{2323}. \tag{16.12}$$

U dvodimenzionalnom prostoru je $n = 2$ i $N = 1$, pa postoji samo jedna neizčezavajuća komponenta

$$R_{1212}.$$

Teorema 16.0.2 Ako je prostor Euklidski, onda je

$$R_{ijkl} = 0. \tag{16.13}$$

Dokaz

U Euklidskom prostoru je

$$\mathbf{u}_{,jk} = u_{i,jk}\mathbf{g}^i,$$

pri čemu $u_{i,jk}$ su simetrični u odnosu na par indeksa j,k. Znači

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = \mathbf{u}_{,jk} - \mathbf{u}_{,kj} &= (u_{i,jk} - u_{i,kj})\mathbf{g}^i = u_l R^l_{\cdot ijk}\mathbf{g}^i. \\ &\Rightarrow u_l R^l_{\cdot ijk} = 0. \end{aligned}$$

Kako ovo važi za svako vektorsko poje u_l, zaključujemo da je

$$R^l_{\cdot ijk} = 0. \tag{16.14}$$

Uopšte, bilo koji prostor u kome važi (16.14), naziva se **ravanski prostor**. Prema tome svaki Euklidski prostor je ravanski prostor. Takvog prostor je i cilindar.

16.1 Značaj Riman-Kristofelovog tenzora

Riman-Kristofelov tenzor, u (16.7) i (16.8), je od fundamentalnog značaja u diferencijalnoj geometriji. Da bismo to pokazali, dovoljno je da se analizira sistem jednačina

$$A_{j,np} - A_{j,pn} = A_l R^l{}_{jnp}.$$

Očigleno da je kovarijantni izvod vektora A_l komutativan ako je

$$A_l R^l{}_{jnp} = 0,$$

što predstavlja potreban, ali ne i dovoljan, uslov da bi sisatem jednačina

$$A_{i,j} = 0$$

bio konzistentan - rešiv. Samo u slučaju kada je $R^l{}_{jnp} = 0$, biće uslov $A_l R^l{}_{jnp} = 0$ identički zadovoljen za proizvoljna vektorska polja A_l. U protivnom on nameće ograničenja koja vektorsko polje A_l mora zadovoljavati.

Primera radi, u slučaju kada je proizvoljno vektorsko polje $A_l \in \mathbb{R}^2$, onda iz

$$0 = A_l R^l{}_{jnp} = A^l R_{ljnp}$$

sledi da je

$$A^1 R_{1212} = 0 \quad \text{i} \quad A^2 R_{1212} = 0.$$

Prema tome, mora biti $R_{1212} = 0$.

Ovaj problem ćemo razmatrati, nadalje, u opštem slučaju.

16.2 Rimanova krivina

Za bilo koja dva vektora A^i i B^i u tački prostora V_N, možemo konstruisati invarijantu $R_{ijkl}A^i A^k B^j B^l$. Pitanje glasi: šta se dešava ako vektore A^i i B^i zamenimo linearnim kombinacijama

$$C^i = \lambda A^i + \mu B^i, \quad D^i = \rho A^i + \tau B^i,$$

gde su λ, μ, ρ i τ invarijante? Direktna računica pokazuje da je

$$R_{rjnp} C^r C^n D^j D^p = (\lambda\tau - \rho\mu)^2 R_{rjnp} A^r A^n B^j B^p,$$

pri čemu smo koristili simetrična svojstva tenzora R_{ijkl}.

Izraz $R_{rjnp} A^r A^n B^j B^p$ je invarijantan u odnosu na koordinatnu transformaciju. Isti izraz je skoro invarijantan u odnosu na linearnu transformaciju vektora. Naš cilj je da se dobije izraz koji bi bio takođe invarijantan u odnosu na linearnu transformaciju vektora.

Posmatrajmo izraz

$$\left(g_{rn} g_{jp} - g_{rp} g_{jn}\right) C^r C^n D^j D^p.$$

Smenom gornjih izraza za C^i i D^i preko A^i i B^i, posle duže računice, dobijamo

$$\left(g_{rn} g_{jp} - g_{rp} g_{jn}\right) C^r C^n D^j D^p = (\lambda\tau - \rho\mu)^2 \left(g_{rn} g_{jp} - g_{rp} g_{jn}\right) A^r A^n B^j B^p.$$

Onda sledi da je

$$K \equiv \frac{R_{rjnp} A^r A^n B^j B^p}{\left(g_{rn} g_{jp} - g_{rp} g_{jn}\right) A^r A^n B^j B^p} \tag{16.15}$$

invarijnata koja se ne menja, kada se vektori A^i i B^i zamene bilo kojom linearnom kombinacijom vektora. Ovako definisana invarijanta naziva se **Rimanova krivina** prostora V_N asocirana vektorima A^i i B^i. Uočimo da je u specijalnom slučaju, kada su vektori A^i i B^i ortonormirani, imenilac od K jednak jedinici.

Jasno je da u svakoj tački dvodimenzionalnog prostora postoje samo dva linearno nezavisna vektora. Prema tome, Rimanova krivina prostora V_2 je jednoznačno određena u svakoj njegovoj tački. Izborom vektora $(1,0)$ i $(0,1)$, dobijamo da je

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{R_{1212}}{g}.$$

16.3 Ravanski prostor

Po definiciji, kažemo da je **prostor ravan**[2], ako je $K = 0$ u svakoj tački prostora.

Teorema 16.3.1 Prostor je ravan akko je

$$R_{rjnp} = 0.$$

Dokaz

Iz (16.15) sledi da je prostor ravan akko je

$$R_{rjnp}A^r A^n B^j B^p = 0$$

za svako A^i i B^i. Odavde sledi, imajući u vidu simetričnost $A^r A^n$ i $B^j B^p$ po svojim indeksima, da je taj uslov zadovoljen akko je

$$R_{rjnp} + R_{njrp} + R_{rpnj} + R_{nprj} = 0.$$

Koristeći simetrična svojstva tenzora R_{rjnp}, ovaj izraz se svodi na

$$R_{rjnp} + R_{rpnj} = 0,$$

ili

$$R_{rjnp} = R_{rpjn}.$$

Cikličkom permutacijom indeksa j, n i p, sledi da je

$$R_{rjnp} = R_{rpjn} = R_{rnpj}.$$

[2] eng. flat

Zamenom ovog izraza u $R_{rjnp}+R_{rnpj}+R_{rpjn}=0$ (vidi (16.10), str. 385), neposredno sledi da je

$$R_{rjnp}=0.$$

Obrnuto, ako je $R_{rjnp}=0$, onda je očigledno da je $K=0$.

S obzirom na tenzorski karakter Riman-Kristofelovog tenzora, isti uslov se može izratiti kao

$$R^{r}{}_{jnp}=0.$$

Posledica 16.3.2 Ako je prostor ravan, tj. ako je $R^{r}{}_{jnp}=0$, onda su jednačine

$$A_{i,j}=0$$

konzistentne. Množeći ove jedančine sa proizvoljnim $\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$, ove jedanačine se mogu napisati kao

$$\frac{\delta A^i}{\delta t}=0.$$

Odavde sledi veoma važan zaključak: U ravnim prostorima paralelno pomeranje je nezavisno od izbora krive paralelnog pomeranja. Kratko rečeno: paralelizam je apsolutno svojstvo ravnih prostora.

Tipičan primer ravnog prostora je Euklidska ravan.

16.4 Prostor konstantne krivine

Posmatrajmo prostore u kojima je Rimanova krivina K u svakoj tački nezavisna od izbora vektora A^i i B^i. Onda iz (16.15) sledi da jednačina

$$\left(K\left(g_{rn}\,g_{jp}-g_{rp}\,g_{jn}\right)-R_{rjnp}\right)A^r A^n B^j B^p=0$$

mora biti zadovoljena za sve vektore A^i i B^i.

Na sličan način, kao u prethodnom odeljku, sledi da mora biti

$$R_{rjnp}=K\left(g_{rn}\,g_{jp}-g_{rp}\,g_{jn}\right).$$

Kovarijantni izvod ovog izraza glasi

$$R_{rjnp,i}=K_{,i}\left(g_{rn}\,g_{jp}-g_{rp}\,g_{jn}\right).$$

Njegovom zamenom u Bjankijevu identičnost dobijamo

$$K_{,r}\left(g_{mn}\,g_{jp}-g_{mp}\,g_{jn}\right)+K_{,n}\left(g_{mp}\,g_{jr}-g_{mr}\,g_{jp}\right)+K_{,p}\left(g_{mr}\,g_{jn}-g_{mn}\,g_{jr}\right)=0.$$

Množeći ovaj izraz sa $g^{mn}g^{jp}$, dobijamo

$$(N-1)(N-2)K_{,r}=0.$$

Prema tome, za $N>2$, sledi da je K konstantno. Time je dokazana **Šurova teorema**.

Ako je u svakoj tački V_N $(N>2)$ Rimanova krivina K funkcija samo koordinata, onda je ona konstanta u V_N. Za takvo V_N se kaže da je **prostor konstantne krivine**.

Primer takvog prostora je sfera poluprečnika a u $\mathbb{R}^3$. Tada je $K=\frac{1}{a^2}$ u svim njenim tačkama.

16.5 Ričijev tenzor

Postoje tri različita načina kontrakcije Riman-Kristofelovog tenzora $R^l{}_{ijk}$:

$R^l{}_{ijk}=g^{li}R_{lijk}=0$, jer je R_{lijk} antisimetrično po i i l,

$R^l{}_{ijl}=g^{lj}R_{lijk}$, $R^l{}_{ijl}=g^{lk}R_{lijk}$.

Kako je $R^l{}_{ljk}=-R^l{}_{lkj}$ dovoljno je razmatrati samo $R^l{}_{ijl}=g^{lk}R_{lijk}$. Tako dobijeni tenzor

$$R_{ij}=R^l{}_{ijl}=g^{lk}R_{lijk}=g^{lk}R_{ilkj}$$

naziva se **Ričijev**[3] **tenzor**. Iz (16.3) i $\left\{ {m \atop im} \right\}=\dfrac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial x^i}$ dobijamo

$$R_{ij}=\frac{\partial^2\ln\sqrt{g}}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial\left\{ {m \atop ij} \right\}}{\partial x^m}+\left\{ {n \atop im} \right\}\left\{ {m \atop jn} \right\}-\left\{ {m \atop ij} \right\}\frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial x^m}.$$

Iz ovog izraza se vidi da je $R_{ij}=R_{ji}$, tj. da je Ričijev tenzor simetričan, i ima $\frac{N(N+1)}{2}$ nezavisnih komponenti.

Prostor u kome je $R_{ij}=\rho\, g_{ji}$, gde je ρ invarijanta, u svim tačkama naziva se **Ajnštajnov prostor**. Odavde je $\rho=\frac{R}{N}$, gde je

$$R=g^{ij}R_{ij}=R^i_i$$

invarijanta krivine. Prema tome u Ajnštajnovom prostoru je

$$R_{ij}=\frac{R}{N}g_{ij}.$$

Ako je u četvorodimenzionalnom prostoru, $N=4$, $R_{ij}=0$, onda imamo deset parcijalnih diferencijalnij jednačina. Ajnštajn ih tumači kao jednačine gravitacionog polja u opštoj teoriji relativenosti.

[3] Ricci

16.6 Bjankijeva identičnost

Najjednostavnije se izvodi korišćenjem sistema geodezijskih koordinata (Poglavlje 25.1, str. 517). Onda je

$$R^{l}{}_{ijk,m} = \frac{\partial R^{l}{}_{ijk}}{\partial x^{m}} = \frac{\partial^{2}\left\{ {l \atop ik} \right\}}{\partial x^{m}\partial x^{j}} - \frac{\partial^{2}\left\{ {l \atop ij} \right\}}{\partial x^{k}\partial x^{m}}$$

u polu. Cikličkom permutacijom indeksa j, k i m dobijamo

$$R^{l}{}_{ijk,m} + R^{l}{}_{ikm,j} + R^{l}{}_{imj,k} = 0.$$

Ovo je tenzorska jednačina u polu geodezijskih koordinata. Ona važi i za svaki koordinatni sistem u tom polu. Međutim, svaka tačka se može uzeti za pol geodezijskog koordinatnog sistema. Prema tome, ova jednačina važi za sve tačke prostora.

Kako je metrički tenzor g_{ij} kovarijantno konstantan, gornji sistem jednačina može se napisati u obliku

$$R_{lijk,m} + R_{likm,j} + R_{limj,k} = 0.$$

Ako se ova jednačina pomnoži sa $g^{ij}\,g^{lk}$, onda se dobija jednačina

$$g^{ij}\,R_{ij,m} - g^{ij}\,R_{im,j} - g^{lk}\,R_{lm,k} = 0,$$

koja se može napisati u obliku

$$R_{,m} - 2R^{k}_{m,k} = 0.$$

Njen pogodniji oblik je

$$\left(R^{k}_{m} - \frac{1}{2}\delta^{k}_{m}R\right)_{,k} = 0.$$

Tenzor

$$G^{k}_{m} \equiv R^{k}_{m} - \frac{1}{2}\delta^{k}_{m}R$$

naziva se **Ajnštajnov tenzor**. Jednačina

$$G^{k}_{m,k} = 0$$

je dobro poznata u teoriji relativnosti.

17. Holonomna i neholonomna baza

Uvod

U primeni Tenzorskog računa koriste se razni dopustivi koordinatni sistemi. Izbor koordinatnog sistema zavisi prvenstveno od prirode problema koji razmatramo. Po definiciji, parcijalni izvodi vektora položaja, duž koordinatnih linija sistema, određuju bazne vektore - kraće bazu. Za takvu bazu se kaže da je **holonomna**. U opšem slučaju bilo koji sistem nezavisnih vektora definisanih u svakoj tački prostora može da se koristi kao baza prostora. Takva baza ne mora biti holonomna. Ako to nije, onda je nazivamo **neholonomnom**. Pitanje glasi, kada je takva proizvoljno definisana baza holonomna. O tome će biti detaljno reči nadalje.

17.1 Potreban i dovoljan uslov da sistem linearno nezavisnih vektora određuje holonomnu bazu

Neka je data n-dimenzionalna mnogostrukost M. Neka su x^i, $i = 1, 2, \dots, n$, dopustive koordinate na M. Obeležimo sa $\mathbf{g}_i = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} = \boldsymbol{\partial}_i$ bazne vektore u tački $\mathbf{x}(x^i)$, koji se nazivaju **koordinatna** ili **holonomna** (**cela**) **baza**. Neka su $\mathbf{v}_\alpha = v^i_\alpha\, \mathbf{g}_i$, $i, \alpha = 1, 2, \dots, n$, linearno nezavisna vektorska polja na M. Onda je $\det\left(v^\gamma_k\right) \neq 0$. Njima recipročan sistem vektora je $\mathbf{v}^\alpha = v^\alpha_i\, \mathbf{g}^i$, pri čemu je $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta^i_j$, $v^i_\alpha\, v^\alpha_j = \delta^i_j$ i $v^i_\alpha\, v^\beta_i = \delta^\beta_\alpha$.

Komutator

$$[\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b],$$

igra veome značajnu ulogu u diferncijalnoj geometriji. Imajući to u vidu dajemo ga u razvijenom obliku

$$\begin{aligned}
[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta] &= \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{v}_\beta) - \mathbf{v}_\beta(\mathbf{v}_\alpha) = v^i_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial x^i} - v^i_\beta \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial x^i} = \\
&= v^i_\alpha \frac{\partial v^j_\beta \mathbf{g}_j}{\partial x^i} - v^i_\beta \frac{\partial v^j_\alpha \mathbf{g}_j}{\partial x^i} = v^i_\alpha \frac{\partial v^j_\beta}{\partial x^i} \mathbf{g}_j + v^i_\alpha v^j_\beta \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i} - v^i_\beta \frac{\partial v^j_\alpha}{\partial x^j} \mathbf{g}_j - v^i_\beta v^j_\alpha \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i} = \\
&= \left[v^i_\alpha \frac{\partial v^j_\beta}{\partial x^i} - v^i_\beta \frac{\partial v^j_\alpha}{\partial x^i} \right] \mathbf{g}_j + \left(v^i_\alpha v^j_\beta - v^i_\beta v^j_\alpha \right) \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i}.
\end{aligned}$$

Kako je $\left(v^i_\alpha v^j_\beta - v^i_\beta v^j_\alpha \right) \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i} = 0$, jer je $\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial x^j \partial x^i}$ simetrično, a $\left(v^i_\alpha v^j_\beta - v^i_\beta v^j_\alpha \right)$ antisimetrično po indeksima i i j, onda je

$$[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta] = \left(v^i_\alpha \frac{\partial v^j_\beta}{\partial x^i} - v^i_\beta \frac{\partial v^j_\alpha}{\partial x^i} \right) v^\gamma_j \mathbf{v}_\gamma.$$

Uvodeći oznaku

$$c^\gamma_{\alpha\beta} = \left(v^i_\alpha \frac{\partial v^j_\beta}{\partial x^i} - v^i_\beta \frac{\partial v^j_\alpha}{\partial x^i} \right) v^\gamma_j = \left(\frac{\partial v^\gamma_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^\gamma_j}{\partial x^i} \right) v^i_\alpha v^j_\beta,$$

komutator se može sažeto napisati u standardnom obliku

$$[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta} \mathbf{v}_\gamma.$$

Uočimo da je $[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta]$ vektorsko polje i pripada linearnom vektorskom prostoru u tački $\mathbf{v}_\alpha$. Veličine $c^\gamma_{\alpha\beta}$ su, u opštem slučaju, funkcije od $\mathbf{x}$ i antisimetrične su po indeksima α i β, tj. $c^\gamma_{\alpha\beta} = -c^\gamma_{\beta\alpha}$. Nazivaju se **Ričijevi koeficijenti**, ili **koeficijenti neholonomije**. Opravdanje za taj naziv daje sledeća teorema.

Teorema 17.1.1

a)

$$[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta] = \mathbf{0},$$

ili

aa)

$$v^i_\alpha \frac{\partial v^j_\beta}{\partial x^i} - v^i_\beta \frac{\partial v^j_\alpha}{\partial x^i} = 0$$

predstavlja potreban i dovoljan uslov da $\mathbf{v}_\alpha$ određuju holonomni koordinatni siststem na M.

Dokaz

i) Uslov je dovoljan.

Zaista, ako su $\mathbf{v}_\alpha$ bazni vektori koordinatnog sistema u^α, onda je $\mathbf{v}_\alpha = \dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\mathbf{g}_i$ i $v^i_\alpha = \dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$. Tada je

$$v^i_\alpha \frac{\partial v^j_\beta}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial^2 x^j}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}\frac{\partial u^\gamma}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = v^i_\beta \frac{\partial v^j_\alpha}{\partial x^i}, \quad (17.1)$$

pa je uslov teoreme identički zadovoljen.

ii) Uslov je potreban.

Tada, po pretpostavci, sistem vektora $\mathbf{v}_\alpha$ zadovoljava uslov aa).

Potrebno je pokazati da se onda uvek može naći koordinatni sitem, recimo y^α, za koje su vektori $\mathbf{v}_\alpha$ bazni.

Uslov aa) je ekvivalentan uslovu

$$\frac{\partial v^\gamma_k}{\partial x^l} = \frac{\partial v^\gamma_l}{\partial x^k}.$$

On predstavlja uslov integrabilnosti sistema jednačina

$$\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} = v^\gamma_k.$$

Imajući u vidu da je $\det\left(v^\gamma_k\right) \neq 0$ iz sistema jednačina $\dfrac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} = v^\gamma_k$, dobija se sistem njima recipročnih jednačina

$$v^k_\gamma = \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}.$$

Množeći ovaj sistem sa $\mathbf{g}_k$, dobijamo

$$v^k_\gamma \mathbf{g}_k = \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}\mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^\gamma},$$

koji se konačno može napisati u obliku

$$\mathbf{v}_\gamma = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^\gamma}.$$

N Ista Teorema se može kratko iskazati na više načina.

Teorema 17.1.2 Potreban i dovoljan uslov da bi sistem vektora $\mathbf{v}_\alpha$ definisao holonomnu bazu, je

$$c^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0.$$

Otuda i naziv koeficijente neholonomije za koeficinete $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$.

■ **Primer 17.1** Pri konkretnom izračunavanju komutatora oblika

$$\left[\mathbf{v}_\alpha, f\mathbf{v}_\beta\right],$$

gde je, u opštem slučaju $f = f(x^i)$, lako je pokazati da je

$$\left[\mathbf{v}_\alpha, f\mathbf{v}_\beta\right] = \mathbf{v}_\alpha(f)\mathbf{v}_\beta + f\left[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta\right].$$

Zaista, po definiciji je,

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{v}_\alpha, f\mathbf{v}_\beta\right] &= \mathbf{v}_\alpha(f\mathbf{v}_\beta) - f\mathbf{v}_\beta(\mathbf{v}_\alpha) = \mathbf{v}_\alpha(f)\mathbf{v}_\beta + f\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{v}_\beta) - f\mathbf{v}_\beta(\mathbf{v}_\alpha) = \\ &= \mathbf{v}_\alpha(f)\mathbf{v}_\beta + f\left[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta\right].\end{aligned}$$

Uočimo da je, po definiciji, $\mathbf{v}_\alpha(f) = v^i_\alpha \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ skalarna veličina. ■

■ **Primer 17.2** Neka su r i q polarne koordinate u $M = \mathbb{R}^2$. Onda je

$$\mathbf{r} = r(\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta),$$

odakle se dobija baza:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_r &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta,\\ \mathbf{g}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r(-\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta).\end{aligned}$$

U odnosu na bazu $(\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_\theta)$, ovi vektori se mogu predstaviti u komponentalnom obliku:

$$\mathbf{g}_r = (1,0), \quad \mathbf{g}_\theta = (0,1).$$

Lako je proveriti da je $[\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_\theta] = \mathbf{0}$ i, saglasno sa definicijom formiraju koordinatnu bazu.

Njihovi jedinični vektori su:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \mathbf{g}_r = (1,0),\\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r}\mathbf{g}_\theta = \left(0, \frac{1}{r}\right),\end{aligned}$$

izraženi u odnosu na bazu $(\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_\theta)$.

Izračunajmo komutator $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta]$. Prema definiciji je

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta] = \mathbf{e}_r(\mathbf{e}_\theta) - \mathbf{e}_\theta(\mathbf{e}_r) = 1\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} + 0\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} - 0\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} =$$
$$= -\frac{1}{r^2}\mathbf{g}_\theta = -\frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta.$$

Znači,

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_q] \neq \mathbf{0}$$

i sistem baznih vektora $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_q)$ ne formira koordinatnu bazu.

Za njih kažemo da definišu neholonomnu bazu. ■

Drugi način izvođenja

Uporedimo izvođenje komutatora u odnosu na Dekartovu koordinatnu bazu $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Onda su:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta,$$
$$\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta,$$

jedinični vektori duž koordinata r i θ, redom. U odnosu na ovu bazu biće:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta] &= \mathbf{e}_r(\mathbf{e}_\theta) - \mathbf{e}_\theta(\mathbf{e}_r) = \\
&= \cos\theta\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial y} + \sin\theta\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial x} - \cos\theta\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial y} = \\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x}(-\sin\theta, \cos\theta) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}(-\sin\theta, \cos\theta) + \\
&+ \sin\theta\frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta, \sin\theta) - \cos\theta\frac{\partial}{\partial y}(\cos\theta, \sin\theta).
\end{aligned}$$

Sledeći korak je izračunavanje izraza, redom:

$$\begin{aligned}
\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x}(-\sin\theta, \cos\theta) &= \left(-\cos^2\theta, -\sin\theta\cos\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}, \\
\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta, \sin\theta) &= \left(-\sin^2\theta, \sin\theta\cos\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}, \\
\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}(-\sin\theta, \cos\theta) &= \left(-\sin\theta\cos\theta, -\sin^2\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial y}, \\
\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial y}(\cos\theta, \sin\theta) &= \left(-\sin\theta\cos\theta, \cos^2\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Onda je

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta] = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}\right).$$

Imajući u vidu da je $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, dobijamo, posle jednostavne računice, da je

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{r}\sin\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r}\cos\theta,$$

onda je

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta] = \left(\frac{1}{r}\sin\theta, -\frac{1}{r}\cos\theta\right) = -\frac{1}{r}(-\sin\theta, \cos\theta) = -\frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta.$$

Isti rezultat

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_q] \neq \mathbf{0},$$

i zaključak da sistem baznih vektora $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_q)$ formira neholonomnu bazu.

Očigledno je da je u ovom slučaju pogodniji sistem polarnih koordinata, duž kojih su vektori $\mathbf{e}_r$ i $\mathbf{e}_q$ tangentni tako da je njihova komponentalna reprezentacija jednostavnija.

Treći način izvođenja

Koristimo $[\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_\theta] = \mathbf{0}$. Onda je

$$\mathbf{0} = [\mathbf{e}_r, r\,\mathbf{e}_\theta] = \mathbf{e}_r(r)\mathbf{e}_\theta + r\,[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta].$$

Kako je $\mathbf{e}_r(r) = 1 \cdot \dfrac{\partial r}{\partial r} = 1$, sledi, iz gornje jednačine, da je

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta] = -\frac{1}{r}\,\mathbf{e}_\theta.$$

N Može se pokazati da je $\mathbf{e}_r(r) = 1$, računanjem i u odnosu na Dekartove koordinate. Tada je

$$\mathbf{e}_r(r) = \cos\theta\,\frac{\partial r}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial r}{\partial y} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

■ **Primer 17.3** Neka su

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

sistem vektora u $\mathbb{R}^2$ u odnosu na Dekartove koordinate x^i, $i = 1, 2$. Pokazati da je za ovaj sistem vektora $c^\gamma_{\alpha\beta} = 0$, a zatim naći glatke kordinate y^α u okolini tačke $(0,0)$ tako da je $\mathbf{v}_\alpha = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^\alpha}$. ■

Rešenje

Očigledno je da je

$$(v^i_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$c^\gamma_{\alpha\beta} = \left(v^i_\alpha \frac{\partial v^j_\beta}{\partial x^i} - v^i_\beta \frac{\partial v^j_\alpha}{\partial x^i} \right) v^\gamma_j = 0.$$

Prema tome, uslovi integrabilnosti sistema jednačina

$$v^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}$$

su zadovoljeni. To znači da postoji koordinatni sistem y^α za koje su vektori $\mathbf{v}_\alpha$, $\alpha = 1,2$ koordinatna baza, tj.

$$\mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\mathbf{e}_i.$$

Tada je

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^1} = \frac{\partial x^i}{\partial y^1}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1$$

i

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^2} = \frac{\partial x^i}{\partial y^2}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

Odavde se dobija sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$\frac{\partial x^1}{\partial y^1} = 1, \quad \frac{\partial x^2}{\partial y^1} = 0, \quad \frac{\partial x^1}{\partial y^2} = 1, \quad \frac{\partial x^2}{\partial y^2} = 1.$$

Rešenje ovog sistema jednačina je:

$$x^1 = y^1 + y^2 + a,$$
$$x^2 = y^2 + b,$$

gde su a i b integralne konstante. Prema tome,

$$y^1 = x^1 - x^2 - a + b,$$
$$y^2 = x^2 - b.$$

■ **Primer 17.4**

$$\mathbf{v}_1 = x\mathbf{e}_2 - y\mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{v}_2 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2.$$

$$c_{12}^{\gamma} = \left(v_1^i \frac{\partial v_2^j}{\partial x^i} - v_2^i \frac{\partial v_1^j}{\partial x^i}\right) v_j^{\gamma},$$
$$c_{12}^{1} = \left(v_1^i \frac{\partial v_2^j}{\partial x^i} - v_2^i \frac{\partial v_1^j}{\partial x^i}\right) v_j^{1},$$
$$c_{12}^{2} = \left(v_1^i \frac{\partial v_2^j}{\partial x^i} - v_2^i \frac{\partial v_1^j}{\partial x^i}\right) v_j^{2}.$$

$$\left[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta\right] = \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{v}_\beta) - \mathbf{v}_\beta(\mathbf{v}_\alpha) = v_\alpha^i \frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial x^i} - v_\beta^i \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial x^i} \quad \Rightarrow$$
$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = v_1^i \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x^i} - v_2^i \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x^i}.$$

$$\mathbf{v}_1 = x^1\,\mathbf{e}_2 - x^2\,\mathbf{e}_1 = \left(-x^2, x^1\right),$$
$$\mathbf{v}_2 = x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 = \left(x^1, x^2\right).$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x^i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x^1} = (1,0), \quad \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x^2} = (0,1).$$

$$\begin{aligned} v_1^i \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x^i} &= v_1^1 \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x^1} + v_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x^2} = \\ &= -x^2 \frac{\partial (x^1, x^2)}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial (x^1, x^2)}{\partial x^2} = \\ &= -x^2(1,0) + x^1(0,1) = (-x^2, x^1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2^i \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x^i} &= v_2^1 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x^1} + v_2^2 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x^2} = \\ &= x^1 \frac{\partial (-x^2, x^1)}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial (-x^2, x^1)}{\partial x^2} = \\ &= x^1(0,1) + x^2(-1,0) = (-x^2, x^1). \end{aligned}$$

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = v_1^i \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x^i} - v_2^i \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x^i} =$$
$$= (-x^2, x^1) - (-x^2, x^1) = 0.$$

$$\mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \mathbf{e}_i.$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial x^i}{\partial y^1} \mathbf{e}_i = x^1 \mathbf{e}_2 - x^2 \mathbf{e}_1.$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial y^1} = -x^2,$$
$$\frac{\partial x^2}{\partial y^1} = x^1.$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\partial x^i}{\partial y^2} \mathbf{e}_i = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2.$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial y^2} = x^1,$$
$$\frac{\partial x^2}{\partial y^2} = x^2.$$

■

Za data vektorska polja ispitati da li predstavljaju holonomnu bazu i ako je holonomna, odrediti odgovarajući holonomni sistem koordinata.

■ Primer 17.5

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= -x^2\mathbf{e}_1 + x^1\mathbf{e}_2,\\ \mathbf{v}_2 &= x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2.\end{aligned} \tag{17.2}$$

U matričnom obliku biće

$$\left(v_\alpha^i\right) = \begin{pmatrix} -x^2 & x^1 \\ x^1 & x^2 \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$\left(\frac{\partial v_\alpha^j}{\partial x^i}\right) = \begin{pmatrix} -\delta_i^2 & \delta_i^1 \\ \delta_i^1 & \delta_i^2 \end{pmatrix}.$$

Koristeći ove izraze potrebno je izračunati

$$c^{\gamma}_{\alpha\beta} = \left(\mathbf{v}^i_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{v}^j_{\beta}}{\partial x^i} - \mathbf{v}^i_{\beta} \frac{\partial \mathbf{v}^j_{\alpha}}{\partial x^i} \right) \mathbf{v}^{\gamma}_j$$

za vrednosti indensa $\alpha, \beta, \gamma = 1,2$. Kako je $c^{\gamma}_{\alpha\beta} = -c^{\gamma}_{\beta\alpha}$, naš zadatak se svodi na izračunavanje

$$c^{\gamma}_{12} = \left(\mathbf{v}^i_1 \frac{\partial \mathbf{v}^j_2}{\partial x^i} - \mathbf{v}^i_2 \frac{\partial \mathbf{v}^j_1}{\partial x^i} \right) \mathbf{v}^{\gamma}_j.$$

Pažljivom zamenom odgovarajućih članova pokazalo se da je $c^{\gamma}_{12} = 0$. Znači $c^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$, pa prema tome, vektori $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ definišu holonomnu bazu.

Njima odgovarajući koordinatni sistem y^{α} određujemo iz sistema parcijalnih jednačina

$$(v^i_{\alpha}) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^{\alpha}} \right) = \begin{pmatrix} -x^2 & x^1 \\ x^1 & x^2 \end{pmatrix},$$

koji je integrabilan u funkciji koordinatnog sisatema x^i.

Prema tome, odgovarajući sistem jednačina je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} &= -x^2, \quad \frac{\partial x^1}{\partial y^2} = x^1, \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} &= x^1, \quad \frac{\partial x^2}{\partial y^2} = x^2. \end{aligned} \tag{17.3}$$

$$\frac{\partial^2 x^1}{\partial (y^1)^2} = -\frac{\partial x^2}{\partial y^1} = -x^1 \quad \Rightarrow \quad x^{1''} + x^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^1 = c_1 \cos y^1 + c_2 \sin y^1,$$

gde su: $c_i = c_i(y^2)$, $i = 1,2$, a sa $(\cdot)'$ smo naznačili izvod po y^1. Iz $\dfrac{\partial x^1}{\partial y^2} = x^1$ sledi

$$\frac{\partial x^1}{\partial y^2} = \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}y^2} \cos y^1 + \frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}y^2} \sin y^1 = c_1 \cos y^1 + c_2 \sin y^1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}c_i}{\mathrm{d}y^2} = c_i \quad \Rightarrow \quad c_i = a_i e^{y^2},$$

pa je

$$x^1 = e^{y^2} (a_1 \sin y^1 + a_2 \cos y^1).$$

Kako je

$$\frac{\partial x^1}{\partial y^1} = -x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = e^{y^2} (a_2 \sin y^1 - a_1 \cos y^1).$$

Dakle

$$x^1 = e^{y^2}(a_1 \sin y^1 + a_2 \cos y^1),$$
$$x^2 = e^{y^2}(a_2 \sin y^1 - a_1 \cos y^1).$$

Iz ovog sistema jednačina dobija se:

$$y^1 = \operatorname{arctg} \frac{a_1 x^1 + a_2 x^2}{a_2 x^1 - a_1 x^2},$$

$$y^2 = \ln \sqrt{\frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{(a_1)^2 + (a_2)^2}}.$$

■

N Isti problem se može razmatrati, ne određujući vrednosti koeficijenata $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$ već ispitivanjem uslova integrabilnosti sistema parcijalnih jednačina (17.3).

■ **Primer 17.6**

$$\mathbf{v}_1 = x^1\,\mathbf{e}_2 - x^2\,\mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{v}_2 = x^2\,\mathbf{e}_3 - x^3\,\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{v}_3 = x^3\,\mathbf{e}_1 - x^1\,\mathbf{e}_3.$$

Determinanta ovog sistema je

$$\det \begin{vmatrix} -x^2 & x^1 & 0 \\ 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \end{vmatrix} = 0.$$

Prema tome, sistem vektora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ je linearno zavisan i ne predstavlja bazu u $\mathbb{R}^3$.

■

Videli smo, da je u opštem slučaju proizvoljan sistem linearno nezavisnih vektorskih polja $\mathbf{v}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, definišu neholonomnu bazu. To znači da je tada $c^{\gamma}_{\alpha\beta} \neq 0$ i da se tada ne mogu odrediti koordinane linije, recimo y^α, za koje bi bilo $\mathbf{v}_\alpha = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^\alpha}$. To je suštinska razlika između holonomne i neholonomne baze. Ova razlika postoji samo kada se posmatra neka oblast, a ne jedna tački u M. Ona je posledica izvoda komponenata vektora, a ne njenih vrednosti u jednoj tački. Drugačije rečeno, irelevanta je u problemima koji se odnose na tangentni prostor u jednoj tački mogosrtrukosti M.

Nadalje, pretpostavimo da su $\mathbf{v}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ neholonomna baza, tj. da je $c^\gamma_{\alpha\beta} \neq 0$.

Takođe je

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}x^i \, \mathbf{g}_i = \delta u^\alpha \, \mathbf{v}_\alpha.$$

Sa δu^α smo označili razlaganje $\mathrm{d}\mathbf{x}$ u odnosu na neholonomnu bazu $\mathbf{v}_\alpha$ naglašavajući time da δu^α nisu diferncijali nekakvih funkcija u^α, u literaturi poznate pod nazivom **kvazi koordinate**. Iz istog razloga često se koristi i oznaka $(\mathrm{d}u)^a$, za razliku od stvarnog diferencijala $\mathrm{d}u^\alpha$. Imajući u vidu da je $\mathbf{v}_\alpha = v^i_\alpha \, \mathbf{g}_i$ i $\mathbf{g}_i = v^\alpha_i \, \mathbf{v}_\alpha$, lako se pokazuje da je

$$\mathrm{d}x^i = v^i_\alpha \, \delta u^\alpha \quad \text{i} \quad \delta u^\alpha = v^\alpha_i \, \mathrm{d}x^i.$$

Formalno pretpostavljamo da su parcijalni izvodi "funkcija" u^α po x^i definisani sa

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = v^\alpha_i$$

i obrnuto

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = v^i_\alpha.$$

Koristeći ove izraze, pišemo za njihove parcijalne izvode

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i} = v^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{i} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = v^\alpha_i \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

U kontekstu ovog načina obeležavanja od interesa je da se ponovo razmotri izraz $\left[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta\right]$. Onda je

$$\left[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta\right] = \mathbf{v}_\alpha\left(\mathbf{v}_\beta\right) - \mathbf{v}_\beta\left(\mathbf{v}_\alpha\right) = v^i_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial x^i} - v^i_\beta \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial u^\beta},$$

ili

$$\left[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta\right] = \partial_{[\alpha}\mathbf{v}_{\beta]} = \partial_\alpha \mathbf{v}_\beta - \partial_\beta \mathbf{v}_\alpha, \quad \left(\partial_\alpha \mathbf{v}_\beta = \frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial u^\alpha}\right).$$

Na osnovu ovog izraza može se prethodna teorema izraziti takođe u obliku

Teorema 17.1.3 Potreban i dovoljan uslov da bi sistem vektora $\mathbf{v}_a$ definisao holonomnu bazu je

$$\partial_{[\alpha}\mathbf{v}_{\beta]} = \mathbf{0}.$$

Ako se bilo koji izraz, u odnosu na holonomne kordinate, transformiše u odnosu na neholonomni sistem, uvek se pojavljuje član koji sadrži koeficijente neholonomije.

■ **Primer 17.7** Najprostiji slučaj je skalarna funkcija $f(\mathbf{x})$. Onda je

$$\partial_{[\alpha}\partial_{\beta]}f = -v^j_\beta v^i_\alpha \partial_{[j} v^\gamma_{i]} \partial_\gamma f = c^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma f = c^\gamma_{\alpha\beta} v^i_\gamma \partial_i f.$$

■

■ **Primer 17.8** Lagranževe jednačine druge vrste za nekonzervativno polje sile pri odsustvu neholonomnih veza

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = Q_i,$$

gde je $T = T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ kinetička energija, a $Q_i(\mathbf{x})$ generalisana sila.

Sledeći korak je: izraziti sve ostale veličine ove jednačine u odnosu na neholonomne koordinate. Pri tome koristimo sledeće izraze:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{x}^i \mathbf{g}_i = \dot{x}^i v_i^\alpha \mathbf{v}_\alpha = v^\alpha \mathbf{v}_a,$$

gde je:

$$v^\alpha = v_i^\alpha \dot{x}^i \quad \text{i} \quad \dot{x}^i v_\alpha^i v^\alpha,$$

koji daju vezu između **generalisanih brzina** u odnosu na holonomne i neholonomne koordinate. Uočimo da je pojam ”generalisana brzina” u neholonomnim kordintama uslovan, jer se veličine v^α ne javljaju kao izvodi po vremenu nekih koordinata u^α. Koristeći ove relacije moguće je kinetričku enegiju izraziti preko generalisanih brzina v^α, koju ćemo sada obeležiti sa $\mathscr{T}$. Onda je:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} &= \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha}\frac{\partial v^\alpha}{\partial \dot{x}^i} = v_i^\alpha \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha},\\ \frac{\partial T}{\partial x^i} &= \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha}\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

Član $\dfrac{\partial v^\alpha}{\partial x^i}$ određujemo iz izraza $v^\alpha = v_i^\alpha \dot{x}^i$ na sledeći način:

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial\left(v_j^\alpha \dot{x}^j\right)}{\partial x^i} = \frac{\partial v_j^\alpha}{\partial x^i}\dot{x}^j = v_\alpha^j \frac{\partial v_j^\alpha}{\partial x^i} v^\beta.$$

Tada je:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial x^i} &= \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = v_i^\alpha \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial u^\alpha},\\ \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha}\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i} &= v_\beta^i \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha} v^\beta,\end{aligned}$$

pa je

$$\frac{\partial T}{\partial x^i} = v_i^\alpha \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial u^\alpha} + v_\beta^j \frac{\partial v_j^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha} v^\beta.$$

Takođe je

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_i^\alpha \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha}\right) = \frac{\mathrm{d}v_i^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha} + v_i^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha}\right) =\\ &= v_i^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha}\right) + v_\beta^j \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x^j} v^\beta \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha},\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili izraz

$$\frac{\mathrm{d}v_i^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x^j}\dot{x}^j = v_\beta^j \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x^j} v^\beta.$$

Onda je, u odnosu na neholonomnu bazu,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} &= v_i^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha}\right) + v_\beta^j \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x^j} v^\beta \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha} - v_i^\alpha \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial u^\alpha} - v_\beta^j \frac{\partial v_j^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha} v^\beta = \\ &= v_i^\alpha \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha} - \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial u^\alpha}\right) + \left(v_\beta^j \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x^j} - v_\beta^j \frac{\partial v_j^\alpha}{\partial x^i}\right)\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha} v^\beta.\end{aligned}$$

Ostaje da se generalisane sile Q_i izraze u odnosu na neholonomnu bazu. Pišemo

$$\mathbf{Q} = Q_i\,\mathbf{g}^i = v_\alpha^i\, Q_i\,\mathbf{v}^\alpha = X_\alpha\,\mathbf{v}^\alpha,$$

gde je

$$X_\alpha = V_\alpha^i\, Q_i \quad \text{i} \quad Q_i = V_i^\alpha X_\alpha.$$

Smenom ovih izraza u

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = Q_i,$$

posle izvesnog sređivanja članova, dobijamo da je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha}\right) - \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial u^\alpha} + v_\alpha^i\, v_\beta^j \left(\frac{\partial v_i^\gamma}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j^\gamma}{\partial x^i}\right)\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\gamma} v^\beta = X_\alpha.$$

Imajući u vidu da je

$$v_\alpha^i\, v_\beta^j \left(\frac{\partial v_i^\gamma}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j^\gamma}{\partial x^i}\right) = c_{\alpha\beta}^\gamma,$$

ove jedančine se kompaktno mogu napisati u obliku

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\alpha}\right) - \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial u^\alpha} + c_{\alpha\beta}^\gamma v^\beta \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial v^\gamma} = X_\alpha.$$

Ovo su tražene jednačine Lagranža izražene u odnosu na neholonomnu bazu.

Uočimo postojanje koeficijenata neholonomije $c_{\alpha\beta}^\gamma$. Takođe u slučaju kada je $c_{\alpha\beta}^\gamma = 0$, one se svode na Lagranževe jednačine druge vrste izražene u odnosu na holonomnu bazu. ■

17.1.1 Metrički tenzor u odnosu na neholonomnu bazu

Metrički tenzor mnogostrukosti M je $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$. Onda je

$$v_{\alpha\beta} = \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\beta = g_{ij}\, v_\alpha^i\, v_\beta^j.$$

metrički tenzor u odnosu na neholomnu bazu $\mathbf{v}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \cdots, n$.

17.2 Kristofelovi simboli u odnosu na neholonomnu bazu

Kristofelovi simboli $\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$, u odnosu na neholonomnu bazu $\mathbf{v}_\alpha$, izvode se po analogoiji izvođenja Kristofelovih simbola $\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}$ za holonomni koordinatni sistem x^i. Tako je

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\, \mathbf{v}_\gamma,$$

odakle se dobija da je Kristofelov simbol druge vrste

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = v^\gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial u^\beta}.$$

Potrebno ih je izraziti u odnosu na x^i. Sada je

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial u^\alpha} = \partial_\alpha \mathbf{v}_\beta = v^i_\alpha \partial_i \mathbf{v}_\beta = v^i_\alpha\, v^j_{\beta,i}\, \mathbf{g}_j,$$

gde je

$$v^j_{\beta,i} = \frac{\partial v^j_\beta}{\partial x^i} + v^k_\beta \left\{ {j \atop ki} \right\},$$

pa je

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = \mathbf{v}^\gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial u^\beta} = v^i_\alpha \left(\frac{\partial v^j_\beta}{\partial x^i} + v^k_\beta \left\{ {j \atop ki} \right\} \right) v^\gamma_j.$$

Lako je pokazati da je

$$\frac{\partial v^j_\beta}{\partial x^i} v^\gamma_j = -v^j_\beta \frac{\partial v^\gamma_j}{\partial x^i} = -v^j_\beta\, \partial_i v^\gamma_j \quad \text{i} \quad v^\gamma_j v^i_\alpha v^k_\beta \left\{ {j \atop ki} \right\} = v^\gamma_k v^i_\alpha v^j_\beta \left\{ {k \atop ij} \right\}.$$

Onda je

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = v^\gamma_k v^i_\alpha v^j_\beta \left\{ {k \atop ij} \right\} - v^i_\alpha v^j_\beta\, \partial_j v^\gamma_i.$$

Iz ovo dva izraza slede sledeća dva:

i) $\Gamma^{\gamma}{}_{[\alpha\beta]} = -v^i_\alpha v^j_\beta\, \partial_{[j} v^\gamma_{i]} = -c^\gamma_{\alpha\beta}$ i

ii) $\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta} = v^i_\alpha \left\{ {j \atop ij} \right\} = v^i_\alpha \dfrac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial x^i} = \dfrac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial u^\alpha}$.

Iz i) se vidi da Kristofelovi simboli druge vraste $\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$, u odnosu na neholonomne koordinate u^α, nije simetričan po indeksima α i β za razliku od Kristofeovoh simbola $\left\{ {j \atop ij} \right\}$ koji je simetričan u odnosu na holonomne koordinate x^i. To je posledica postojanja koeficijenata neholonomije c^c_{ab}. Postojanje koeficijenata neholonomije c^c_{ab} je opšta karakteristika neholonomnih koordinata.

Od intesesa je da se analizira izraz

$$\mathbf{v}_\gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial u^\beta} = -\mathbf{v}^\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\gamma}{\partial u^\beta} = -\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}.$$

Kako je $\mathbf{v}_\gamma \otimes \mathbf{v}^\gamma = \mathbf{I}$, sledi da je

$$\frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial u^\beta} = -\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}\,\mathbf{v}^\gamma.$$

Sledeći Stav se odnosi na određivanje kovarijantnog izvoda vektora $\mathbf{w} = w_\alpha\,\mathbf{v}^\alpha$ u odnosu na neholonomne koorinate.

Stav 1

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u^\beta} = w_{\alpha,\beta}\mathbf{v}^\alpha, \quad w_{\alpha,\beta} = \frac{\partial w_\alpha}{\partial u^\beta} - w_\gamma \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}.$$

Dokaz

Izvodimo ga u celosti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u^\beta} &= \frac{\partial w_\alpha\,\mathbf{v}^\alpha}{\partial u^\beta} = \frac{\partial w_\alpha}{\partial u^\beta}\,\mathbf{v}^\alpha + w_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial u^\beta} = \\
&= \frac{\partial w_\alpha}{\partial u^\beta}\,\mathbf{v}^\alpha - w_\alpha\,\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}\,\mathbf{v}^\gamma = \frac{\partial w_\alpha}{\partial u^\beta}\,\mathbf{v}^\alpha - w_\gamma \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\,\mathbf{v}^\alpha = \\
&= \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial u^\beta} - w_\gamma \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\right)\mathbf{v}^\alpha = w_{\alpha,\beta}\,\mathbf{v}^\alpha.
\end{aligned}$$

Posledica 1

Posledica stava. Sledi neposredno iz i).

$$w_{[\alpha,\beta]} = \frac{\partial w_{[\alpha}}{\partial u^{\beta]}} + w_\gamma c^\gamma_{\alpha\beta}.$$

Uočimo postojanje **koeficijenta neholonomije** $c^\gamma_{\alpha\beta}$.

Na sličan način se pokazuje da je

$$w^\alpha_{,\beta} = \frac{\partial w^\alpha}{\partial u^\beta} + w^\gamma \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}.$$

17.2.1 Riman-Kristofelov tenzor u neholonomnim koordinatama

Jedan od načina njegovog izvođenja svodi se na transformaciju Riman-Kristofelovog tenzora u holonomnim kordinatama

$$R^l{}_{ijk} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\left\{ {l \atop ik} \right\} + \left\{ {m \atop ik} \right\}\left\{ {l \atop mj} \right\}\right)_{[j,k]},$$

u neholonomne koordinate. Onda je

$$R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma} = v^\delta_l v^i_\alpha v^j_\beta v^k_\gamma R^l{}_{ijk}.$$

Smenom

$$\left\{ {k \atop ij} \right\} = v^k_\gamma v^\alpha_i v^\beta_j \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - v^\alpha_i v^\beta_j \partial_\beta v^i_\gamma$$

u ovom izrazu, posle duge računice, dobijamo da je

$$R^b{}_{\alpha\beta\gamma} = 2\left(\partial_\beta \Gamma^\delta{}_{\alpha\gamma} + \Gamma^\delta{}_{\mu\beta}\Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma}\right)_{[\beta,\gamma]} + 2c^\mu_{\beta\gamma}\Gamma^\delta{}_{\mu\alpha}.$$

N Fizičke koordinate su primer najčešće korišćenih neholonomnih koordinata.

17.3 Tenzor krivine (geometrijska interpretacija)

Neka je $\mathfrak{M}$ glatka n-dimenzionalna diferencijabilna mnogostrukost. Neka je x^i $(i = 1,\dots,n)$ dopustivi koordinatni sistem na $\mathfrak{M}$. Sa g_{ij} $(i,j = 1,\dots,n)$ označimo osnovni metrički tenzor, definisan u odnosu na x^i. Uočimo glatku krivu

$$C : x^i = x^i(t),$$

duž koje se vektorsko polje $\mathbf{V}$ paralelno pomera. Onda je

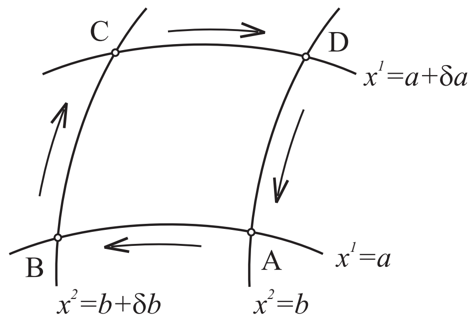
$$\delta V^i = \mathrm{d}V^i + V^j \left\{ {i \atop jk} \right\} \mathrm{d}x^k = 0, \tag{17.4}$$

odakle sledi

$$V^i(Q) = V^i(P) - \int\limits_{C(P,Q)} V^j \left\{ {i \atop jk} \right\} \mathrm{d}x^k, \tag{17.5}$$

gde su P i Q tačke na krivoj C.

Radi jednostavnosti geometrijske interpretacije tenzora krivine, posmatraćemo **dvodimenzionalnu mnogostrukost** $\mathfrak{M}$ i na njoj infinitezimalni element koji definišu koordinatne linije x^1 i x^2. Temena ovog elementa određena su tačkama $A(a,b)$, $B(a,b+\delta b)$, $C(a+\delta a,b+\delta b)$ i $D(a+\delta a,b)$ (vidi sl. 17.1).



Slika 17.1: Paralelno pomeranje oko zatvorenog prstena (petlje) *ABCD*.

Primenom formule (17.5) duž linija $x^1=a$, u intervalu (A,B), ili kraće $C_{x^1=a}(A,B)$, infinitezimalnog elementa, sledi:

$$C_{x^1=a}(A,B): \quad V^i(B)=V^i(A)-\int_b^{b+\delta b}\left\{ {i \atop j2} \right\}(a,x^2)V^j(a,x^2)\,\mathrm{d}x^2. \tag{17.6}$$

Na isti način se pokazuje da je:

$$\begin{aligned}
C_{x^2=b+\delta b}(B,C): \quad & V^i(C)=V^i(B)-\int_a^{a+\delta a}\left\{ {i \atop j1} \right\}(x^1,b+\delta b)V^j(x^1,b+\delta b)\,\mathrm{d}x^1,\\
C_{x^1=a+\delta a}(C,D): \quad & V^i(D)=V^i(C)-\int_{b+\delta b}^{b}\left\{ {i \atop j2} \right\}(a+\delta a,x^2)V^j(a+\delta a,x^2)\,\mathrm{d}x^2,\\
& \qquad =V^i(C)+\int_b^{b+\delta b}\left\{ {i \atop j2} \right\}(a+\delta a,x^2)V^j(a+\delta a,x^2)\,\mathrm{d}x^2,\\
C_{x^2=b}(D,A): \quad & V^i(A_f)=V^i(D)-\int_{a+\delta a}^{a}\left\{ {i \atop j1} \right\}(x^1,b)V^j(x^1,b)\,\mathrm{d}x^1=\\
& \qquad =V^i(D)+\int_a^{a+\delta a}\left\{ {i \atop j1} \right\}(x^1,b)V^j(x^1,b)\,\mathrm{d}x^1,
\end{aligned} \tag{17.7}$$

gde je A_f krajnja tačka, pri kretanju u naznačenom smeru (vidi sliku 17.1).

Ukupna promena $\delta V^i(A)$ vektorskog polja $\mathbf{V}$ pri njegovom paralelnom pomeranju duž linija infinitezimalnog elementa, prema (17.6) i (17.7), je

$$\begin{aligned}\delta V^i &= V^i(A_f) - V^i(A_i) = \\ &= \int\limits_b^{b+\delta b} \left[\left\{ \begin{matrix} i \\ j2 \end{matrix} \right\} (a+\delta a, x^2)\, V^j(a+\delta a, x^2) - \left\{ \begin{matrix} i \\ j2 \end{matrix} \right\} (a, x^2)\, V^j(a, x^2) \right] \mathrm{d}x^2 - \\ &- \int\limits_a^{a+\delta a} \left[\left\{ \begin{matrix} i \\ j1 \end{matrix} \right\} (x^1, b+\delta b)\, V^j(x^1, b+\delta b) - \left\{ \begin{matrix} i \\ j1 \end{matrix} \right\} (x^1, b)\, V^j(x^1, b) \right] \mathrm{d}x^1\end{aligned} \tag{17.8}$$

$$\delta V^i = \int\limits_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial \left[\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j2 \end{smallmatrix} \right\} (a, x^2)\, V^j(a, x^2) \right]}{\partial a} \mathrm{d}x^2 - \int\limits_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial \left[\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j1 \end{smallmatrix} \right\} (x^1, b)\, V^j(x^1, b) + \ldots \right]}{\partial b} \mathrm{d}x^1 \tag{17.9}$$

Koristeći teoremu o srednjoj vrednosti integrala

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\,f(c), \quad c = a - \theta(b-a), \quad 0 \le \theta \le 1,$$

možemo pisati

$$\begin{aligned}\int\limits_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial \left[\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j2 \end{smallmatrix} \right\} (a, x^2)\, V^j(a, x^2) \right]}{\partial a} \mathrm{d}x^2 &= \delta b \delta a \left. \frac{\partial \left[\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j2 \end{smallmatrix} \right\} (x^1, x^2)\, V^j(x^1, x^2) \right]}{\partial x^1} \right|_{x^2 = b+\theta\,\delta b} \approx \\ &\approx \delta b \delta a \frac{\partial \left[\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j2 \end{smallmatrix} \right\} (x^1, x^2)\, V^j(x^1, x^2) \right]}{\partial x^1}\end{aligned} \tag{17.10}$$

do na infinitezimalni član prvog reda, po x^2.

Dalje je

$$\frac{\partial \left[\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j2 \end{smallmatrix} \right\} (x^1, x^2)\, V^j(x^1, x^2) \right]}{\partial x^1} = V^j(x^1, x^2) \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j2 \end{smallmatrix} \right\} (x^1, x^2)}{\partial x^1} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j2 \end{matrix} \right\} (x^1, x^2)\, \frac{\partial V^j(x^1, x^2)}{\partial x^1}.$$

Koristeći (17.4) pišemo

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial V^j}{\partial x^1} \delta a = - \left\{ \begin{matrix} i \\ j2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i \\ j2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j \\ k1 \end{matrix} \right\} V^k\, \delta a,$$

pri čemu se podrazumeva funkcionalna zavisnost ove relacije od (x^1, x^2).

Smenom ovog izraza u (17.10) dobijamao

$$\int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial \left[\left\{ {i \atop j2} \right\} (x^1, x^2) V^j (x^1, x^2) \right]}{\partial x^1} \mathrm{d}x^2 \approx$$
$$\approx \delta b \, \delta a \left(\frac{\partial \left\{ {i \atop k2} \right\}}{\partial x^1} - \left\{ {i \atop j2} \right\} \left\{ {j \atop k1} \right\} \right) V^k .$$

Na isti način se može pokazati da je

$$\int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial \left[\left\{ {i \atop j2} \right\} (x^1, x^2) V^j (x^1, x^2) \right]}{\partial x^2} \mathrm{d}x^1 \approx$$
$$\approx \delta b \, \delta a \left(\frac{\partial \left\{ {i \atop j1} \right\}}{\partial x^2} - \left\{ {i \atop j1} \right\} \left\{ {j \atop k2} \right\} \right) V^k .$$

Onda je

$$\delta V^i \approx \delta b \, \delta a \left(\frac{\partial \left\{ {i \atop k2} \right\}}{\partial x^1} - \left\{ {i \atop j2} \right\} \left\{ {j \atop k1} \right\} - \frac{\partial \left\{ {i \atop k1} \right\}}{\partial x^2} + \left\{ {i \atop j1} \right\} \left\{ {j \atop k2} \right\} \right) V^k =$$
$$= \delta b \, \delta a \left(\frac{\partial \left\{ {i \atop k2} \right\}}{\partial x^1} - \frac{\partial \left\{ {i \atop k1} \right\}}{\partial x^2} + \left\{ {i \atop j1} \right\} \left\{ {j \atop k2} \right\} - \left\{ {i \atop j2} \right\} \left\{ {j \atop k1} \right\} \right) V^k$$

U slučaju generalisanih koordinata x^k i x^l, ovaj izraz možemo pisati u obliku

$$\delta V^i = \delta x^k \, \delta x^m \left(\frac{\partial \left\{ {i \atop km} \right\}}{\partial x^l} - \frac{\partial \left\{ {i \atop kl} \right\}}{\partial x^m} + \left\{ {i \atop jl} \right\} \left\{ {j \atop km} \right\} - \left\{ {i \atop jm} \right\} \left\{ {j \atop kl} \right\} \right) V^k ,$$

ili u sažetom obliku

$$\delta V^i \approx R^i_{klm} \, \delta x^k \, \delta x^m ,$$
$$R^i_{klm} = \frac{\partial \left\{ {i \atop km} \right\}}{\partial x^l} - \frac{\partial \left\{ {i \atop kl} \right\}}{\partial x^m} + \left\{ {i \atop jl} \right\} \left\{ {j \atop km} \right\} - \left\{ {i \atop jm} \right\} \left\{ {j \atop kl} \right\}$$

ima sva svojstva Rimanovog tenzora krivine.

18. Diferencijalni operatori. Nabla

Pri izvođenju izraza za kovarijantni izvod tenzora, kao i njihovo obeležavanje, pokazalo se da su izrazi veoma dugi i sa puno indeksa. Postojala je potreba da se uvede nova oznaka - ∇, koju ovde navodimo.

Nabla operator se prvenstveno koristi u vektorskom računu kao sastavni deo imena različitih diferencijalnih operatora: gradijenta ($\nabla\otimes$), divregencije ($\nabla\cdot$) i rotora ($\nabla\times$). Poslednji se koristi kao vektorski proizvod i ima smisla samo u trodimezionalnom prostoru. Prva dva su opšteg karaktera. Korišćenje ∇ u vektorskoj analizi predložena je njegova primena od strane Gibsa[1] na sledeći način:

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} &= \nabla\otimes \quad \text{(ili grad} = \nabla \text{ kada se primenjuje na skalarna polja),} \\ \mathrm{div} &= \nabla\cdot\,, \\ \mathrm{rot} &= \nabla\times\,. \end{aligned}$$

Ove oznake ćemo nadalje ravnopravno koristiti.

Neki autori koriste ∇ **na mestu** indeksa diferenciranja, dok ga drugi koriste kao **operator** diferenciranja primenjenog na tenzorska polja.

Navodimo jednostavan primer primene oznake nabla u slučaju vektorskog polja $\mathbf{v} = v_i\mathbf{i}_i = v_i\mathbf{i}^i$ datog u odnosu na Dekartove koordinate. Tada je

$$\mathrm{grad}\mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial z^j}\,\mathbf{i}_i\otimes\mathbf{i}_j.$$

[1] Gibbs

U slučaju kada je $\nabla = \frac{\partial}{\partial z^j}\mathbf{i}_j = \frac{\partial}{\partial z^j}\mathbf{i}^j$ biće, po standardnoj definiciji,

$$\mathrm{grad}\mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial z^j}\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j = \frac{\partial}{\partial z^j}\mathbf{v}\otimes\mathbf{i}_j = \mathbf{v}\otimes\frac{\partial}{\partial z^j}\mathbf{i}_j = \mathbf{v}\otimes\nabla.$$

U slučaju primene nabla $\nabla = \mathbf{i}_j\frac{\partial}{\partial z^j} = \mathbf{i}^j\frac{\partial}{\partial z^j}$ kao operatora biće

$$\mathrm{grad}\mathbf{v} = \nabla\otimes\mathbf{v} = \mathbf{i}_i\frac{\partial}{\partial z^i}\otimes\mathbf{v} = \mathbf{i}_i\frac{\partial}{\partial z^i}\otimes v_j\mathbf{i}_j = \frac{\partial v_j}{\partial z^i}\mathbf{i}_i\otimes\mathbf{i}_j.$$

Uočimo razliku u rezultatima ova dva izraza.

Jedostavno je izraziti ∇ u odnosu na dopustive krivolinjske koordinate x^i koristeći izraz

$$\mathbf{g}^l\frac{\partial}{\partial x^l} = \mathbf{i}^j\frac{\partial x^l}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial x^l} = \mathbf{i}^j\frac{\partial}{\partial z^j}.$$

Onda je $\nabla = \mathbf{g}^l\frac{\partial}{\partial x^l}$ ili $\nabla = \frac{\partial}{\partial x^l}\mathbf{g}^l$, u zavisnosti od njegove primene. Tako je

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\mathbf{v} = \nabla\otimes\mathbf{v} = \mathbf{g}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\otimes\mathbf{v} = \mathbf{g}^k\otimes\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x^k} = \\ = \mathbf{g}^k\otimes\mathbf{v}_{,k} = \mathbf{g}^k\otimes v_{l,k}\mathbf{g}^l = v_{l,k}\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}^l.\end{aligned} \tag{18.1}$$

Skrećemo pažnju čitaocu da pri izvođenju izraza $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x^k} = \mathbf{v}_{,k}$, koristili smo formule (15.26), (15.27), (15.28). Jasno je da je (15.28) specijalan slučaj (15.30) i (15.31).

Na isti način se pokazuje da je

$$\mathrm{grad}\mathbf{v} = \mathbf{v}\otimes\nabla = v_{k,l}\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}^l.$$

Očigledo je da se razlika očuvava. Međutim, u slučaju divergencije ovi izrazi se poklapaju

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\nabla = \nabla\cdot\mathbf{v} = v^k_{,k}. \tag{18.2}$$

18.0.1 div**T** tenzora drugog reda definisan na dva načina

1)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{T} = \mathbf{g}^i\cdot\mathbf{T}_{,i} = \mathbf{g}^i\cdot\left(T^{jk}\mathbf{g}_j\otimes\mathbf{g}_k\right)_{,i} = \mathbf{g}^i\cdot\left(T^{jk}_{,i}\mathbf{g}_j\otimes\mathbf{g}_k\right) = \\ = T^{jk}_{,i}\left(\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}_j\right)\mathbf{g}_k = T^{jk}_{,i}\delta^i_j\mathbf{g}_k = T^{jk}_{,j}\mathbf{g}_k.\end{aligned}$$

2)

$$\mathbf{T}\cdot\nabla = \mathbf{T}_{,i}\cdot\mathbf{g}^i = \left(T^{jk}\mathbf{g}_j\otimes\mathbf{g}_k\right)_{,i}\cdot\mathbf{g}^i = T^{jk}_{,i}(\mathbf{g}_j\otimes\mathbf{g}_k)\cdot\mathbf{g}^i =$$
$$= T^{jk}_{,i}\mathbf{g}_j\delta^i_k = T^{jk}_{,k}\mathbf{g}_j.$$

Samo ako je tenzor $\mathbf{T}$ simetričan, tj. ako je $T^{jk} = T^{kj}$, onda su ovi izrazi identični.

S obzirom da su ovi izrazi, imajući u vidu razliku u njhovoj komponentalnoj reprezentaciji, invarijantni, tj. nezavisni od koordinatnog sistema, korišćenje nabla je naišlo na veliku primenu u tenzorskom računu.

Mi ćemo se opredeliti na primenu nabla $\nabla = \mathbf{g}^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ oznake kao operatora u odnosu na krivolinijske koordinate, što je pravilo kada su u pitanju Rimanski prostori. Podvlačimo, da u opštem slučaju, Dekartov koordinatni sistem ne postoji u Rimanskim prostorima.

18.1 Gradijent

Poznato je da je **gradijent** bilo koje skalarne funkcije $\varphi(z^i)$, u Dekartovom koordinatnom sistemu z^i, definisan kao

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z^k}\mathbf{i}^k. \tag{18.3}$$

U opštem slučaju, koristeći ∇ operator $\nabla = \mathbf{g}^k\dfrac{\partial}{\partial x^k}$, datog u odnosu na krivolinijske koordinate x^i, pišemo

$$\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\mathbf{g}^k = \varphi_{,k}\mathbf{g}^k. \tag{18.4}$$

Ovaj postupak može da se primeni na određivanje gradijenta tenzorskog polja bilo kog reda.

■ **Primer 18.1** Neka je data koordinatna transformacija $x^i = x^i(z^k)$. Za bilo koje fiksno $i = 1,2,\ldots,n$, recimo, M, imamo površ $x^M = x^M(z^k) = c^M(const.)$. Onda je

$$\mathrm{grad}x^M = \frac{\partial x^M}{\partial z^k}\mathbf{i}^k = \mathbf{g}^M. \tag{18.5}$$

Prema tome, kontravarijantni bazni vektori su gradijenti odgovarajućih koordinatnih površi! Sa geometrijskog stanovišta upravni su na odgovarajuće koordinatne površi.
■

18.2 Divergencija

Na isti način dolazimo do geneze nabla za **divergenciju vektorskog polja**. Za vektorsko polje $\mathbf{v}$ pogodno je koristiti (18.1), kada se znak tenzorskog proizvoda $\otimes$ zameni sa $\cdot$. Onda je

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = v^k_{,k}. \tag{18.6}$$

Korisno je ovaj izraz predstaviti u komponentalnom obliku. Prema (15.21) i (15.10) biće

$$v^k_{,k} = \frac{\partial v^k}{\partial x^k} + v^l \left\{ \begin{matrix} k \\ kl \end{matrix} \right\} = \frac{\partial v^k}{\partial x^k} + \frac{1}{\sqrt{g}} v^l \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^l} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g} \frac{\partial v^k}{\partial x^k} + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} v^k \right) \tag{18.7}$$

tj.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, v^j}{\partial x^j}. \tag{18.8}$$

U slučaju kada je vektorsko polje dato u odnosu na kovarijantne kordinate v_j moramo koristiti relaciju podizanja indeksa $v^i = g^{ij} v_j$, tako da (18.6) pišemo kao

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} g^{kl} v_l}{\partial x^k}. \tag{18.9}$$

N Na osnovu poslednjeg stava zaključujemo da se operacija divergencije može primeniti samo kada je vektorsko polje dato preko kontravarijantnih komponenata. Uočimo da se ovaj postupak može uvek primeniti ako je prostor metrički (korišćenjem metričkog tenzora).

Ako je

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi,$$

onda iz (18.8) sledi da je

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = \Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} g^{kl} \varphi_{,l}}{\partial x^k}, \tag{18.10}$$

gde je

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta \tag{18.11}$$

Laplasov diferencijalni operator.

Ako je koordinatni sistem x^k ortogonalan, onda je

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \frac{\partial \sqrt{g} g^{kk} \varphi_{,k}}{\partial x^k}. \tag{18.12}$$

18.3 Rotor

Poznato je da vektorski proizvod dva vektora dat u standarnom obliku $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ važi samo u $\mathbb{E}_3$. Uobičajeno ga pišemo u obliku

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{18.13}$$

Potrebno je da odgovorimo na dva pitanja:

1. Kako izraziti rot$\mathbf{u}$ u $\mathbb{E}_3$ u odnosu na krivolinijske koordinate x^i, i
2. Kako ga napisati u kompaktnom obliku kao (18.13)? Nastavljamo tim redosledom.

Odgovor:

1.

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}. \tag{18.14}$$

Onda je, koristeći ovde i nadalje (15.28),

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{g}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \times \mathbf{v} = \mathbf{g}^i \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} = \mathbf{g}^i \times \mathbf{v}_{,i} = \\ = \mathbf{g}^i \times v_{j,i}\mathbf{g}^j = \mathbf{g}^i \times \mathbf{g}^j v_{j,i} = \varepsilon^{ijk} v_{j,i}\mathbf{g}_k. \end{aligned} \tag{18.15}$$

Znači

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \varepsilon^{ijk} v_{k,j}\mathbf{g}_i = \varepsilon_{ijk} v^{k,j}\mathbf{g}^i.$$

Do istog rezultata se dolazi kada se u (18.1) zameni $\otimes$ sa $\times$.
Prema tome je

$$(\nabla \times \mathbf{v})^i = \varepsilon^{ijk} v_{k,j}, \tag{18.16}$$

ili

$$(\nabla \times \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} v^{k,j}. \tag{18.17}$$

2. Iz (18.13) imamo

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk} v_{k,j}\mathbf{g}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk} \nabla_j v_k \mathbf{g}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \mathbf{g}^1 & \mathbf{g}^2 & \mathbf{g}^3 \\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \tag{18.18}$$

gde "∇_j"oznaka za ","u tom redosledu!

U specijalnom slučaju, ako su x^i koordinate z^i, onda je

$$\mathbf{g}^i = \mathbf{i}^i = \mathbf{i}_i, \quad g = 1, \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial z^i}$$

i iz (18.18) dobijamo standardne izraze

$$\nabla\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}. \tag{18.19}$$

Obično se (18.16) piše preko fizičkih komponenata $\mathbf{v}$ i jediničnih vektora kordinatnog sistema, tj. jediničnih vektora $\mathbf{g}^i$ (vidi L. Malvern [60]).

18.4 Neki specijalni slučajevi

Neka su φ i $\mathbf{v}$ diferencijabilno skalarno i vektorsko polje, redom, u $\mathbb{E}_3$. Onda je

1.
$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi)=\nabla\times\nabla\varphi=\mathbf{0},$$

2.
$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{v})=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{v})=0.$$

Dokaz

Znamo da je

$$\nabla\varphi=\varphi_{,j}\,\mathbf{g}^j \quad \text{i} \quad \nabla\times\mathbf{v}=\mathbf{g}^j\times\mathbf{v}_{,j}.$$

Onda je

1.
$$\nabla\times\nabla\varphi=\mathbf{g}^i\times(\varphi_{,j}\,\mathbf{g}^j)_{,i}=\mathbf{g}^i\times\mathbf{g}^j\,\varphi_{,ji}=\mathbf{0}.$$

2.
$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{v})=\mathbf{g}^i\cdot(\nabla\times\mathbf{v})_{,i}=\mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{g}^j\times\mathbf{v}_{,j})_{,i}=\mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{g}^j\times\mathbf{v}_{,ji})=\mathbf{v}_{,ji}(\mathbf{g}^i\times\mathbf{g}^j)=0.$$

Navedimo neke primere ovih operatora: za cilindrični i sferni koordinatni sistem.

1. Neka su φ i $\mathbf{v}$ skalarna funkcija i vektorsko polje definisani u odnosu na cilindrične koordinate $r,\varphi,z: x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z$. Onda je

$$\mathrm{grad}\phi=\nabla\varphi=\frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z,$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v}=\nabla\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{v}=\nabla\times\mathbf{v}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r+\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\varphi+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi)=\Delta\varphi=\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2},$$

gde smo sa indeksima kordinatnog sistema označili fizičke koordinate vektora **v** i jedinične vektore sistema koordinata r, φ, z.

2. Isto za sferni kordinatni sistem

$$r, \theta, \varphi : x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta;$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\phi &= \nabla\varphi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi,\\
\operatorname{div}\mathbf{v} &= \nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi},\\
\operatorname{rot}\mathbf{v} &= \nabla\times\mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(v_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}(r v_\varphi)\right)\mathbf{e}_\theta +\\
&+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi,\\
\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) &= \Delta\varphi = \nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}.
\end{aligned}$$

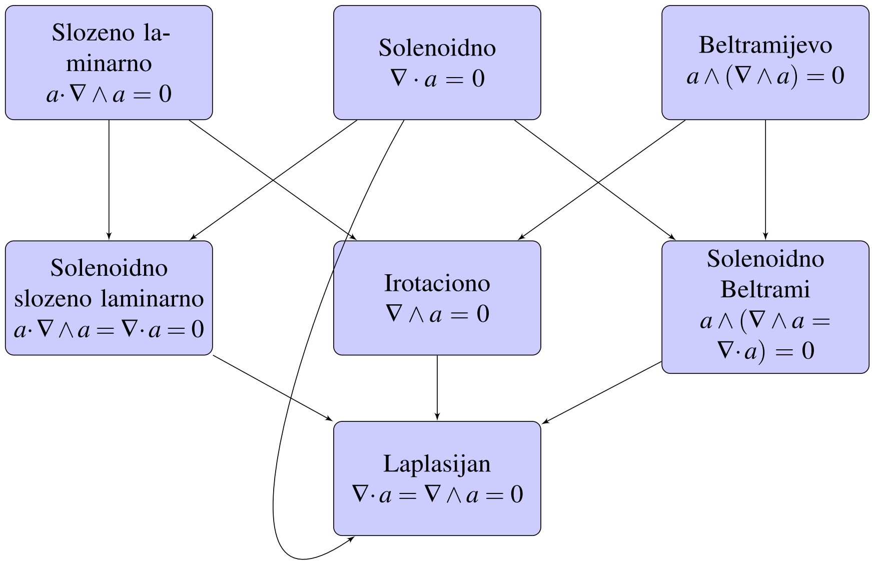
Pokazati.

18.5 Klasifikacija vektorskih polja

Vektorsko polje **v** je:

1. **potencijalno**, ako je $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\operatorname{div}\mathbf{v} \neq 0$. $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi$ je potencial datog polja,
2. **solenoidno**, ako je $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$,
3. **laminarno** ili **irotaciono** ako je $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
4. **kompleksno laminarno**, ako je $\mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$,
5. **Laplasovo**, ako je $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ i $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$,
6. **Beltramijevo**[2], ako je $\nabla\times\nabla\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
7. **solenoidno kompleksno laminarno**,
8. **solenoidno Beltramijevo**.

[2] Beltram



Slika 18.1: Klasifikacija vektorskih polja. Sa $\wedge$ je označen vektorski proizvod.

Bitna je razlika između laminarnog i kompleksno laminarnog vektorskog polja. Za razliku od polja $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, koje je uvek laminarno, i koje je uvek u pravcu normale na površ $\varphi(\mathbf{x}) = \text{const.}$, polje

$$\mathbf{v} \neq \nabla\varphi$$

to nije. Međutim, u slučaju kada je moguće naći funkciju ψ, tako da je $\psi\mathbf{v} = \nabla\varphi$, onda je takvo polje $\psi\mathbf{v}$ u pravcu normale $\varphi(\mathbf{v}) = \text{const.}$, ali je laminarno, jer je

$$\mathbf{0} = \nabla\times\nabla\varphi = \nabla\times(\psi\mathbf{v}) = \nabla\psi\times\mathbf{v} + \psi\nabla\times\mathbf{v}.$$

Kako je $\psi\mathbf{v}\cdot(\nabla\times\mathbf{v}) = 0$, za svako $\psi \neq 0$, onda mora biti

$$\mathbf{v}\cdot(\nabla\times\mathbf{v}) = 0,$$

što predstavlja **potreban uslov** egzistencije kompleksnog laminarnog vektorskog polja $\mathbf{v}$. Moguće je pokazati da je to i **dovoljan uslov** egzistencije takve funkcije $\psi(\mathbf{v})$.

Zadatak 18.1 Pokazati da je $\mathbf{v}$ ortogonalno na rot$\mathbf{v}$ akko je $\mathbf{v} = \varphi\nabla\psi$ za neke funkcije φ i ψ. ■

Rešenje

Ako je $\mathbf{v} = \varphi\nabla\psi$, onda je

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} = \nabla\varphi \times \nabla\psi \quad \text{(Dokazati)}.$$

Prema tome je

$$\mathbf{v}\cdot \mathrm{rot}\mathbf{v} = \varphi\nabla\psi\cdot(\nabla\varphi \times \nabla\psi) = 0,$$

odakle zaključujemo da je $\mathbf{v}$ ortogonalno na rot$\mathbf{v}$.

Obrnuto. Neka je $\mathbf{v}$ ortogonalno na rot$\mathbf{v}$, tj. $\mathbf{v}\cdot \mathrm{rot}\mathbf{v} = 0$. Onda je diferencijalna jednačina

$$\mathbf{v}\cdot d\mathbf{x} = 0$$

integrabilna. Prema tome postoje funkcije α i ψ, tako da je

$$\alpha\mathbf{v}\cdot d\mathbf{x} = d\psi.$$

Smenom $\alpha = \frac{1}{\varphi}$ pišemo

$$\mathbf{v}\cdot d\mathbf{x} = \varphi\, d\psi = \varphi\nabla\psi\cdot d\mathbf{x},$$

odakle sledi da je $\mathbf{v} = \varphi\nabla\psi$, što je trebalo dokazati.

Definicija 18.5.1 Za **vektorsko polje v** kaže se da je **Beltramijevo**, ako je rot$\mathbf{v} = \omega\mathbf{v}$ za neku funkciju ω. Takva funkcija ω se naziva **faktor abnormalnosti vektorskog polja v**.

Zadatak 18.2 Pokazati da je za takvo polje:

(i)

$$\omega = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}\cdot \mathrm{rot}\mathbf{v} = \frac{\mathrm{rot}\mathbf{v}\cdot \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{v})}{|\mathrm{rot}\mathbf{v}|^2}.$$

(ii) Ako je $\mathbf{v} = \nabla\varphi + \psi\nabla\chi$, onda je

$$\omega = \frac{\nabla\varphi\cdot(\nabla\psi \times \nabla\chi)}{(\nabla\varphi)^2 - \psi^2(\nabla\chi)^2}.$$

Rešenje

(i) Ako je rot$\mathbf{v} = \omega\mathbf{v}$, onda je

$$\mathbf{v}\cdot \mathrm{rot}\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot(\omega\mathbf{v}) = \omega|\mathbf{v}|^2,$$

odakle sledi traženi izraz. Takođe je

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{v}) = \mathrm{rot}(\omega\mathbf{v}) = \omega\mathrm{rot}\mathbf{v} + \nabla\omega \times \mathbf{v}. \quad \text{(Dokazati!)}.$$

Onda je

$$\mathrm{rot}\mathbf{v}\cdot\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{v}) = \omega\,|\mathrm{rot}\mathbf{v}|^2 + \mathrm{rot}\mathbf{v}\cdot(\nabla\omega \times \mathbf{v}) = \omega|\mathrm{rot}\mathbf{v}|^2,$$

jer je $\mathrm{rot}\mathbf{v}\cdot(\nabla\omega \times \mathbf{v}) = \omega\mathbf{v}\cdot(\nabla\omega \times \mathbf{v}) = 0$. Znači

$$\omega = \frac{\mathrm{rot}\mathbf{v}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{v}(\mathrm{rot}\mathbf{v})}{|\mathrm{rot}\mathbf{v}|^2}.$$

(ii) Polazimo od

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi + \psi\mathrm{grad}\chi) = \mathrm{grad}\psi \times \mathrm{grad}\chi,$$

jer je $\mathrm{rotgrad}\varphi = \mathrm{rotgrad}\chi = 0$. Tada je

$$\begin{aligned}\nabla\varphi\cdot(\nabla\psi \times \nabla\chi) &= (\nabla\varphi - \psi\nabla\chi)\cdot(\nabla\psi \times \nabla\chi) = (\nabla\varphi - \psi\nabla\chi)\cdot\mathrm{rot}\mathbf{v} = \\ &= (\nabla\varphi - \psi\nabla\chi)\cdot\omega\mathbf{v} = \omega(\nabla\varphi - \psi\nabla\chi)\cdot(\nabla\varphi + \psi\nabla\chi) = \omega\left[(\nabla\varphi)^2 - \psi^2(\nabla\chi)^2\right],\end{aligned}$$

odakle sledi traženi rezultat.

18.6 Zadaci sa rešenjima

Rešenja dajemo u odnosu na generalisane koordinate.

Neka su f i φ skalarna polja, $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ vektorska polja i $\mathbf{A}$ tenzorsko polje u $\mathbb{E}_3$. Pokazati da je:

■ **Primer 18.2** a) $\nabla(f\varphi) = \varphi\nabla f + f\nabla\varphi$.

$$\nabla(f\varphi) = \mathbf{g}^i(f\varphi)_{,i} = \mathbf{g}^i(f_{,i}\varphi + f\varphi_{,i}) = \varphi\nabla f + f\nabla\varphi.$$

b) $\nabla\otimes(f\mathbf{v}) = \nabla f\otimes\mathbf{v} + f\nabla\otimes\mathbf{v}$.

$$\begin{aligned}\nabla\otimes(f\mathbf{v}) = \mathbf{g}^i\otimes(f\mathbf{v})_{,i} = \mathbf{g}^i\otimes(f_{,i}\mathbf{v} + f\,\mathbf{v}_{,i}) = \mathbf{g}^i f_{,i}\otimes\mathbf{v} + f\,\mathbf{g}^i\otimes\mathbf{v}_{,i} = \\ = \nabla f\otimes\mathbf{v} + f\nabla\otimes\mathbf{v},\end{aligned}$$

ili

$$\nabla(f\mathbf{v}) = \nabla f\otimes\mathbf{v} + f\nabla\mathbf{v}.$$

c) $\nabla\cdot(\nabla f\times\nabla\varphi)=0.$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla f\times\nabla\varphi) &= \mathbf{g}^i\cdot(\nabla f\times\nabla\varphi)_{,i}=\mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{g}^j f_{,j}\times\mathbf{g}^k\varphi_{,k})_{,i}=\\ &= \mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{g}^j f_{,ji}\times\mathbf{g}^k\varphi_{,k}+\mathbf{g}^j f_{,j}\times\mathbf{g}^k\varphi_{,ki})=\\ &= \mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{g}^j\times\mathbf{g}^k)(f_{,ji}\varphi_{,k}+f_{,j}\varphi_{,ki})=\\ &= \varepsilon^{ijk}(f_{,ji}\varphi_{,k}+f_{,j}\varphi_{,ki})=0.\end{aligned}$$

■

■ Primer 18.3

$$\nabla\cdot(f\mathbf{v})=\nabla f\cdot\mathbf{v}+f\nabla\cdot\mathbf{v}.$$

■

■ Primer 18.4

$$\nabla\times(f\mathbf{v})=\nabla f\times\mathbf{v}+f\nabla\times\mathbf{v}.$$

■

■ Primer 18.5

$$\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=(\nabla\mathbf{u})\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})\mathbf{u}.$$

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= \mathbf{g}^i(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_{,i}=\mathbf{g}^i(\mathbf{u}_{,i}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_{,i})=(\mathbf{g}^i\otimes\mathbf{u}_{,i})\mathbf{v}+(\mathbf{g}^i\otimes\mathbf{v}_{,i})\mathbf{u}=\\ &= (\nabla\mathbf{u})\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})\mathbf{u}.\end{aligned}$$

■

■ Primer 18.6

$$\nabla\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=(\nabla\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}-\mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{v}).$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= \mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_{,i}=\mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{u}_{,i}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{v}_{,i})=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{g}^i\times\mathbf{u}_{,i})-\mathbf{u}\cdot(\mathbf{g}^i\times\mathbf{v}_{,i})=\\ &= \mathbf{v}\cdot(\nabla\times\mathbf{u})-\mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{v})=(\nabla\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}-\mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{v}).\end{aligned}$$

■

■ Primer 18.7

$$\nabla\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})=(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v}).$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) &= \mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})_{,i}=\mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{u}_{,i}\otimes\mathbf{v}+\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}_{,i})=\\ &= (\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{u}_{,i})\mathbf{v}+(\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}_{,i}=(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot(\mathbf{g}^i\otimes\mathbf{v}_{,i})=\\ &= (\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v}).\end{aligned}$$

■

■ Primer 18.8

$$\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\operatorname{div}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})=\mathbf{v}(\nabla\mathbf{u})-\mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{u})+\mathbf{u}(\nabla\cdot\mathbf{v})-\mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v}).$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})&=\mathbf{g}^i\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_{,i}=\\&=\left[\mathbf{g}^i(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\right]_{,i}=\mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})_{,i}=\operatorname{div}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Na osnovu Primera 18.7 sledi druga jednakost. ■

■ Primer 18.9

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{v}=\nabla\nabla\cdot\mathbf{v}-\Delta\mathbf{v}.$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\mathbf{v}&=\mathbf{g}^i\times(\nabla\times\mathbf{v})_{,i}=\mathbf{g}^i\times(\mathbf{g}^j\times\mathbf{v}_{,j})_{,i}=\mathbf{g}^i\times(\mathbf{g}^j\times\mathbf{v}_{,ji})=\mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{v}_{,ji}\otimes\mathbf{g}^j-\mathbf{g}^j\otimes\mathbf{v}_{,ji})=\\&=(\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{v}_{,ji})\mathbf{g}^j-(\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}^j)\mathbf{v}_{,ji}=\mathbf{g}^j(\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{v}_{,i})_{,j}-g^{ij}\mathbf{v}_{,ji}=\nabla\nabla\cdot\mathbf{v}-\Delta\mathbf{v}.\end{aligned}$$

■

■ Primer 18.10 Neka je $\mathbf{r}$ vektor položaja u $\mathbb{E}_3$. Pokazati da je:

a) $\nabla\mathbf{r}=\mathbf{I}$.

$$\nabla\mathbf{r}=\mathbf{g}^i\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\mathbf{r}=\mathbf{g}^i\otimes\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}=\mathbf{g}^i\otimes\mathbf{g}_i=\mathbf{I}.$$

b) $\nabla\cdot\mathbf{r}=3$.

$$\nabla\cdot\mathbf{r}=\operatorname{tr}\mathbf{I}=3.$$

c) $\nabla\times\mathbf{r}=\mathbf{0}$.

$$\nabla\times\mathbf{r}=\mathbf{g}^i\frac{\partial}{\partial x^i}\times\mathbf{r}=\mathbf{g}^i\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}=\mathbf{g}^i\times\mathbf{g}_i=g_{ij}\mathbf{g}^i\times\mathbf{g}^j=0.$$

d) $\nabla\times(\mathbf{c}\times\mathbf{r})=2\mathbf{c}$, gde je $\mathbf{c}$ konstantan vektor.

Sledi neposredno iz Primera 18.8_1, smenom $\mathbf{u}=\mathbf{c}$ i $\mathbf{v}=\mathbf{r}$ korišćenjem izraza ovog Primera pod a) i b). Pri tome imamo u vidu da je $\mathbf{c}$ konstantan vektor i da je svaka njegova promena jednaka nuli.

e) $(\nabla\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{c}=\nabla\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{c})$.

$$\begin{aligned}(\nabla\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{c}&=(\mathbf{g}^i\times\mathbf{v}_{,i})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{v}_{,i}\times\mathbf{c})=\mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{c})_{,i}=\\&=\nabla\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{c}).\end{aligned}$$

■

18.6.1 Izvodi drugog reda - način obeležavanja

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f).$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla f).$$

$$\Delta f = \nabla^2 f.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}), \\ \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{v}) &= \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}). \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}).$$

$$\Delta \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v}.$$

N Bilo bi korisno da čitalac izvede ove izraze koristeći operator $\nabla = \frac{\partial}{\partial x^i} \mathbf{g}^i$ i uporedi sa ovde dobijenim izrazima. Radi jednostavnijeg izvođenja dokaza preporučuje se korišćenje Dekartovih koordinata.

19. Integralne teoreme

Transformacija površinskog integrala po graničnoj površi ∂v oblasti $v \subset \mathbb{E}_3$ u zapreminski integral po v, fundamentalna je u izvođenju jednačina polja u fizici, posebno u mehanici kontinuuma.

19.1 Element zapremine i površi u $\mathbb{E}_3$

19.1.1 Element zapremine

Pokazali smo da je sistem baznih vektora $\mathbf{g}_i$, $i = 1,2,3$, linearno nezavisan. Oni u svakoj tački $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_3$, određenu vektorom položaja $\mathbf{r}(\mathbf{x})$, definišu paralelogram. Onda, za fiksno $I = 1,2,3$,

$$\mathrm{d}_I\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^I}\,\mathrm{d}x^I = \mathbf{g}_I\,\mathrm{d}x^I$$

definiše infinitezimalni vektor u pravcu koordinatne linije $\mathrm{d}x^I$. Na taj način se u svakoj tački $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_3$ formira elementarni paralelopiped, čiju zapreminu ćemo obeležavati sa $\mathrm{d}v$. Po definici je

$$\mathrm{d}v = [\mathrm{d}_1\mathbf{r}, \mathrm{d}_2\mathbf{r}, \mathrm{d}_3\mathbf{r}]\,.$$

Onda je

$$\mathrm{d}v = \left[\mathbf{g}_1\mathrm{d}x^1, \mathbf{g}_2\mathrm{d}x^2, \mathbf{g}_3\mathrm{d}x^3\right] = \mathbf{g}_1\cdot(\mathbf{g}_2\times\mathbf{g}_3)\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3.$$

Poznato je da je $\mathbf{g}_i\cdot(\mathbf{g}_j\times\mathbf{g}_k) = \varepsilon_{ijk} = \sqrt{g}\,e_{ijk}$. Onda je $\mathbf{g}_1\cdot(\mathbf{g}_2\times\mathbf{g}_3) = \sqrt{g}$. Prema tome je

$$\mathrm{d}v = \sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3.$$

To je relativna skalarna invarijanta težine $+1$.

N Postupak koji smo primenili ne zavisi od dimenzije Euklidskog prostora.

19.1.2 Neki korisni primeri

Dekartov koordinatni sistem - (x,y,z), $g=1$

Element zapremine
$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{19.1}$$

Cilindrični koordinatni sistem - (r,φ,z), $g=r^2$

Element zapremine
$$\mathrm{d}v = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z. \tag{19.2}$$

Sferni koordinatni sistem - (r,θ,φ), $g=r^4\sin^2\theta$

Element zapremine
$$\mathrm{d}v = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{19.3}$$

19.1.3 Površinski element

Površinski elemet je vektorska veličina definisana infinitezimalnim vektorima

$$\mathrm{d}_I\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^I}\,\mathrm{d}u^I = \mathbf{a}_I\,\mathrm{d}u^I,$$

gde su u_1, u_2 koordinate na površi; i indeks I je fiksan, $I=1,2$. Po definiciji je

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2,$$

i geometrijski predstavlja orijentisani infinitezimalni paralelogram definisan na vektorima $\mathrm{d}_I\mathbf{r}$, $I=1,2$, kao stranama. Kako je $\mathbf{a}_\alpha\times\mathbf{a}_\beta=\sqrt{a}\,e_{\alpha\beta}\,\mathbf{n}$, onda je $\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2=\sqrt{a}\,\mathbf{n}$. Znači,
$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \sqrt{a}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2\,\mathbf{n}.$$

Kao i svaki vektor predstavljamo ga u obliku

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}a,$$

gde je da intezitet vektora d**a**, dat sa

$$\mathrm{d}a = \sqrt{a}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2.$$

N Formula za površinski element nas podseća na zapreminski element, jer se element površi može posmatrati kao zapreminski element u dvodimenzionalnom prostoru.

19.1.4 Primeri

Dekartov koordinatni sistem u ravni - (x,y), $a=1$

Element površi

$$\mathrm{d}a = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{19.4}$$

Polarni koordinatni sisten u ravni - (r,φ)

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad a = r^2.$$

Element površi

$$\mathrm{d}a = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi. \tag{19.5}$$

Element površi cilindra poluprečnika R - (φ,z)

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = z, \quad a = R^2.$$

Element površi

$$\mathrm{d}a = R\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z. \tag{19.6}$$

Element površi sfere poluprečnika R - (θ,φ)

$$x = R\sin\theta\,\cos\varphi, \quad y = R\sin\theta\,\sin\varphi, \quad z = R\cos\theta.$$

Element površi

$$\mathrm{d}a = R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{19.7}$$

19.2 Grinova teorema. Teorema o divergenciji

Dajemo bez dokaza osnovne Integralne teoreme vektorskog polja u $\mathbb{E}_3$ smatrajući da se čitalac susretao sa njima u okviru redovnih kurseva iz matematike. Naš cilj je da se zadržimo na fizičkoj interpretaciji s obzirom na njihovu primenu.

Teorema 19.2.1 — Grinova teorema. Neka je v regularna oblast u $\mathbb{E}_3$, a ∂v njena dovoljno glatka granična površ. Neka je $\mathbf{v} \in \mathbb{E}_3$ glatko vektorsko polje. Onda je

$$\int\limits_{\partial v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}a = \int\limits_{v} \nabla \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}v, \tag{19.8}$$

ili u komponentalnom obliku

$$\int\limits_{\partial v} v^i n_i \, \mathrm{d}a = \int\limits_{v} v^i_{,i} \, \mathrm{d}v, \tag{19.9}$$

gde je $\mathbf{n}$ jedinični vektor spoljašnje normale na ∂v. Integral $\int\limits_{\partial v} v^i n_i \, \mathrm{d}a$ se naziva **fluks** od $\mathbf{v}$ kroz orijentisanu površ ∂v.

Teorema o divergenciji nam omogućuje da sagledamo fizičko značenje divergencije vektorskog polja. U tom cilju posmatrajmo proizvoljnu tačku $\mathbf{y} \in \mathbb{E}_3$. Neka je Ω_δ lopta sa centrom u $\mathbf{y}$, poluprečnika δ ograničena sa površi $\partial\Omega_\delta$. Onda je, prema Teorema o dirergenciji,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\Omega_\delta} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \mathrm{d}a &= \int\limits_{\Omega_\delta} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}v = \\
&= \int\limits_{\Omega_\delta} [(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{y}) + O(\delta)] \, \mathrm{d}v = \mathrm{vol}(\Omega_\delta) \, [(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{y}) + O(\delta)] \, .
\end{aligned}$$

U graničnom slučaju biće

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{y}) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega_\delta)} \int\limits_{\partial\Omega_\delta} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}a. \tag{19.10}$$

Znači, za male vrednosti δ biće $(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{y})$ fluks $\mathbf{v}$ kroz $\partial\Omega_\delta$ po jedinici zapremine v_δ.

Ako vektor $\mathbf{v}$ interpretiramo kao polje brzine, onda je fluks $\mathbf{v}$ kroz $\partial\Omega_\delta$ jednak promeni zapremine po jedinici vremena kojom fluid ističe iz $\mathbf{y} \in \Omega_\delta$. Tačke $\mathbf{y} \in \Omega_\delta$ pozitivne divergencije nazivamo **izvor**, negativne **ponor**. Od interesa je generalizacija ove teoreme na tenzorska polja.

Zadržaćemo se na tenzoru drugog reda.

Teorema o divergenciji tenzora drugog reda

Teorema 19.2.2 Neka je $\mathbf{T}$ tenzorsko polje u $v \subset \mathbb{E}_3$. Onda je

$$\int_{\partial v} \mathbf{n}\mathbf{T}\,\mathrm{d}a = \int_{v} \nabla\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}v, \tag{19.11}$$

ili, u komponentalnom obliku (u Dekartovom koordinatnom sistemu)

$$\int_{\partial v} n_i T^{ij}\,\mathrm{d}a = \int_{v} T^{ij}{}_{,i}\,\mathrm{d}v. \tag{19.12}$$

Dokaz

Neka je $\mathbf{c} \in \mathbb{E}_3$ proizvoljan konstantan vektor i $\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{c}$. Onda je

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{T}\mathbf{c} = \mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{T}\mathbf{c})_{,i} = \mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{T}_{,i}\mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{T}^T_{,i}\mathbf{g}^i) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{T}_{,i}) = \mathbf{c}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{T})$$

i

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = (\mathbf{T}\mathbf{c})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{T}^T\mathbf{n}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{n}\mathbf{T}).$$

Prema tome je

$$\int_{\partial v} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a = \int_{v} \nabla\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}v \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}\cdot\int_{\partial v} \mathbf{n}\mathbf{T}\,\mathrm{d}a = \mathbf{c}\cdot\int_{v} \nabla\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}v,$$

ili

$$\int_{\partial v} \mathbf{n}\mathbf{T}\,\mathrm{d}a = \int_{v} \nabla\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}v$$

s obzirom na proizvoljnost vektora $\mathbf{c}$.

N Često se susrećemo u literaturi kada je $\mathbf{T}$ simetričan tenzor, tj. $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$, ili $T^{ij} = T^{ji}$. Onda je

$$\int_{\partial v} T^{ji} n_i\,\mathrm{d}a = \int_{v} T^{ji}\ ,i\,\mathrm{d}v.$$

Lako je pokazati, kao i u prethodnom slučaju, da je

$$(\nabla\cdot\mathbf{T})(\mathbf{y}) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\mathrm{vol}\Omega_\delta} \int_{\partial\Omega_\delta} \mathbf{n}\mathbf{T}\,\mathrm{d}a. \tag{19.13}$$

Zadaci

Neka su $\varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ skalarna, vektorska i tenzorska polja. Onda važe sledeće integralne teoreme. Dokazati.

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial v} \varphi \mathbf{n}\, \mathrm{d}a &= \int_{v} \nabla \varphi\, \mathrm{d}v, \\
\int_{\partial v} \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}\, \mathrm{d}a &= \int_{v} \nabla \otimes \mathbf{v}\, \mathrm{d}v, \\
\oint_{\partial v} \mathbf{n}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})\, \mathrm{d}a &= \int_{v} [(\nabla \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} + \mathbf{w}(\nabla \otimes \mathbf{v})]\, \mathrm{d}v, \\
\int_{\partial v} \mathbf{n} \otimes \mathbf{T}\, \mathrm{d}a &= \int_{v} \nabla \otimes \mathbf{T}\, \mathrm{d}v, \\
\int_{\partial v} \mathbf{n} \times \mathbf{T}\, \mathrm{d}a &= \int_{v} \nabla \times \mathbf{T}\, \mathrm{d}v, \\
\oint_{\partial v} (\mathbf{n}\mathbf{T}) \otimes \mathbf{w}\, \mathrm{d}a &= \int_{v} \left[\mathrm{div}\mathbf{T} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{T}^{T} \cdot (\nabla \mathbf{w})^{T}\right] \mathrm{d}v, \\
\oint_{\partial v} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{n}\mathbf{T})\, \mathrm{d}a &= \int_{v} (\mathbf{T} + \mathbf{r} \otimes \mathrm{div}\mathbf{T})\, \mathrm{d}v.
\end{aligned}
\tag{19.14}
$$

U slučaju kada je $\mathbf{T} = \mathbf{I}$, $\mathrm{div}\,\mathbf{T} = \mathrm{div}\,\mathbf{I} = 0$, izrazi $(19.14)_{4-7}$ se znatno uprošćavaju. Specijalno, $(19.14)_7$ postaje [48]

$$
\int_{\partial v} \mathbf{r} \otimes \mathbf{n}\, \mathrm{d}a = v\mathbf{I}.
$$

Specijalan slučaj. U mehanici kontinuuma od značaja je sledeći integral koji precizira sledeća

Lema 19.2.3

$$
\int_{\partial v} \mathbf{r} \times \mathbf{T}\mathbf{n}\, \mathrm{d}a = \int_{v} \left(\mathbf{r} \times \mathrm{div}\,\mathbf{T} - \mathbf{t}^{A}\right) \mathrm{d}v,
$$

gde je $\mathbf{t}^{A}$ definisano preko tenzora $\mathbf{T}^{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{T} - \mathbf{T}^{T}\right)$, antisimetričnog dela tenzora $\mathbf{T}$, tako da je $\mathbf{T}^{A}\,\mathbf{v} = \mathbf{t}^{A} \times \mathbf{v}$, za svaki vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{E}_3$.

❑

Dokaz

Neka je $\mathbf{c} \in \mathbb{E}_3$ proizvoljan konstantan vektor. Onda je

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}\cdot \oint_{\partial v} \mathbf{r}\times \mathbf{T}\mathbf{n}\, \mathrm{d}a &= \oint_{\partial v} \mathbf{c}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{T}\mathbf{n})\, \mathrm{d}a = \oint_{\partial v} \mathbf{T}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\, \mathrm{d}a = \\
&= \oint_{\partial v} \mathbf{T}^T(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}\, \mathrm{d}a = \int_v \mathrm{div}\left[\mathbf{T}^T(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\right] \mathrm{d}v = \\
&= \int_v \left[T^{ij}(\mathbf{c}\times\mathbf{r})_i\right]_{,j} \mathrm{d}v = \int_v \left[T^{ij}_{,j}(\mathbf{c}\times\mathbf{r})_i + T^{ij}(\mathbf{c}\times\mathbf{r})_{i,j}\right] \mathrm{d}v = \\
&= \int_v \left[\varepsilon_{ipq}\, c^p z^q\, T^{ij}_{,j} + \varepsilon_{ipq}\, c^p\, T^{ij}\, \delta^q_j\right] \mathrm{d}v = \int_v \left[\varepsilon_{ipq}\, c^p z^q\, T^{ij}_{,j} + \varepsilon_{ipj}\, c^p\, T^{ij}\right] \mathrm{d}v = \\
&= \mathbf{c}\cdot \int_v \left(\mathbf{r}\times \mathrm{div}\mathbf{T} - \mathbf{t}^A\right) \mathrm{d}v,
\end{aligned}
$$

gde je $\mathbf{t}^A = \varepsilon_{ijp}\, T^{ij}\, \mathbf{g}^p$.

Ovde smo iskoristili rezultat Primera 18.10a.

19.3 Prva Grinova identičnost

$$
\int_v (\nabla\psi\cdot\nabla\varphi + \psi\Delta\varphi)\, \mathrm{d}v = \oint_s \psi\nabla\varphi\cdot\mathbf{n}\, \mathrm{d}a = \oint_s \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, \mathrm{d}a, \tag{19.15}
$$

gde je v zapremina ograničena sa površi s.

Dokaz

Neka je $\mathbf{v} = \psi\nabla\varphi$. Onda je

$$
\nabla\cdot\mathbf{v} = \nabla\psi\cdot\nabla\varphi + \psi\nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla\psi\cdot\nabla\varphi + \psi\nabla^2\varphi.
$$

U nekim slučajevima pogodnije je pisati

$$
\nabla\cdot\mathbf{v} = \nabla\psi\cdot\nabla\varphi + \psi\Delta\varphi,
$$

gde je

$$
\Delta = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2.
$$

Primenom Gausove teoreme o divergenciji

$$
\int_v \nabla\cdot\mathbf{v}\, \mathrm{d}v = \oint_s \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, \mathrm{d}a,
$$

sledi da je

$$\int\limits_{v}(\nabla\psi\cdot\nabla\varphi+\psi\Delta\varphi)\,\mathrm{d}v=\oint\limits_{s}\psi\nabla\varphi\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a=\oint\limits_{s}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}a.$$

19.3.1 Druga Grinova identičnost

$$\int\limits_{\partial v}(\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a=\int\limits_{v}\left(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi\right)\,\mathrm{d}v. \tag{19.16}$$

Dokaz

Neka je

$$\mathbf{v}=\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi.$$

Onda je

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{v}&=\nabla\cdot(\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi)=\\&=\nabla\psi\cdot\nabla\varphi+\psi\nabla^2\varphi-\nabla\varphi\cdot\nabla\psi-\varphi\nabla^2\psi=\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi.\end{aligned}$$

Primenom Grinove teoreme sledi da je

$$\int\limits_{v}(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)\,\mathrm{d}v=\oint\limits_{s}(\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\varphi)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a=\oint\limits_{s}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}a.$$

19.3.2 Stoksova Teorema

Odnosi se na relaciju linijskog integrala vektorskog polja duž proste zatvorene krive linije i površinskog integrala polja na glatkoj površi S čija je granica $C=\partial S$. Pozitivna orijentacija jediničnih vektora $\mathbf{t}$ krive C i spoljašnje normale $\mathbf{n}$ površi S se pretropostavlja.

Teorema 19.3.1 — Stoksova teorema. Neka je $\mathbf{v}$ glatko vektorsko polje. Onda je

$$\int\limits_{S}(\nabla\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a=\int\limits_{C}\mathbf{v}\cdot\mathbf{t}\,\mathrm{d}s. \tag{19.17}$$

Integral $\int\limits_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{t}\,\mathrm{d}s$ se naziva **cirkulacija vektorskog polja** duž krive C.

Teorema se može koristiti za sticanje određenog uvida u fizičko značenje rotora vektorskog polja. U tom cilju posmatrajmo proizvoljnu tačku $\mathbf{y}\in\mathbb{E}_3$. Neka je S_δ disk sa centrom u $\mathbf{y}$ poluprečnika δ ograničen sa C_δ. Onda je, prema Stoksovoj teoremi,

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_\delta}\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{t}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s &= \int\limits_{S_\delta}(\nabla\times\mathbf{v})(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}a = \int\limits_{S_\delta}\left[(\nabla\times\mathbf{v})(\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y})+O_\delta\right]\mathrm{d}a = \\ &= \mathrm{pov}S_\delta\left[(\nabla\times\mathbf{v})(\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y})+O_\delta\right].\end{aligned} \tag{19.18}$$

U graničnom slučaju je

$$(\nabla\times\mathbf{v})(\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y}) = \lim_{\delta\to0}\frac{1}{\mathrm{pov}S_\delta}\int\limits_{C_\delta}\mathbf{v}\cdot\mathbf{t}\,\mathrm{d}s. \tag{19.19}$$

Pri izboru vektora $\mathbf{n}$ možemo zaključiti da $\mathrm{rot}\mathbf{v}=\nabla\times\mathbf{v}$ leži u ravni upravno na ravan za koju je cirkulacija najveća, pri čemu je njegova veličina jednaka cirkulaciji po jedinici površine u toj ravni.

Ako interpretiramo $\mathbf{v}$ kao vektor brzine fluida onda se $(\nabla\times\mathbf{v})(\mathbf{y})$ može interpretirati kao ugaona brzina fluida u $\mathbf{y}$.

19.4 Zadaci sa rešenjima Integralne teoreme

Po pretpostavci, skalarna, vektorska i tenzorska polja, koja se razmatraju, su neprekidna i diferencijabilna.

Zadatak 19.1

$$\oint\limits_{\partial v} f\mathbf{n}\,\mathrm{d}a = \int\limits_v \nabla f\,\mathrm{d}v.$$

■

Rešenje

Koristimo

$$\oint\limits_{\partial v}\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}a = \int\limits_v \mathrm{div}\mathbf{w}\,\mathrm{d}v,$$

za vektorsko polje $\mathbf{w}=f\mathbf{c}$, gde je $\mathbf{c}$ proizvoljan konstantan vektor:

$$\oint\limits_{\partial v}\mathbf{n}\cdot(f\mathbf{c})\,\mathrm{d}a = \int\limits_v \mathrm{div}(f\mathbf{c})\,\mathrm{d}v,$$

ili

$$\mathbf{c}\cdot \oint\limits_{\partial v} f\mathbf{n}\,\mathrm{d}a = \mathbf{c}\cdot \int\limits_{v} \operatorname{grad} f\,\mathrm{d}v,$$

odakle sledi integralna identičnost.

Zadatak 19.2

$$\oint\limits_{\partial v} \mathbf{n}\times\mathbf{w}\,\mathrm{d}a = \int\limits_{v} \operatorname{rot}\mathbf{w}\,\mathrm{d}v.$$

Rešenje

$$\left(\oint\limits_{\partial v} \mathbf{n}\times\mathbf{w}\,\mathrm{d}a\right)\cdot\mathbf{c} = \oint\limits_{\partial v} (\mathbf{n}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{c}\,\mathrm{d}a = \oint\limits_{\partial v} (\mathbf{w}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a = \int\limits_{v} \operatorname{div}(\mathbf{w}\times\mathbf{c})\,\mathrm{d}v =$$
$$= \left(\int\limits_{v} \operatorname{rot}\mathbf{w}\,\mathrm{d}v\right)\cdot\mathbf{c}.$$

Zadatak 19.3

$$\oint\limits_{\partial v} \mathbf{n}\times\mathbf{w}\,\mathrm{d}a = \int\limits_{v} \nabla\times\mathbf{w}\,\mathrm{d}v.$$

Rešenje

$$\left(\oint\limits_{\partial v} \mathbf{n}\times\mathbf{w}\,\mathrm{d}a\right)\cdot\mathbf{c} = \oint\limits_{\partial v} (\mathbf{n}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{c}\,\mathrm{d}a = \oint\limits_{\partial v} (\mathbf{w}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a = \int\limits_{v} \nabla\times\mathbf{w}\,\mathrm{d}v.$$

Zadatak 19.4

$$\oint\limits_{\partial v} \mathbf{w}\times\mathbf{n}\,\mathrm{d}a = \int\limits_{v} (\nabla\times\mathbf{w})^T\,\mathrm{d}v.$$

Rešenje

Sledi iz Zadatka 19.3 korišćenjem transpozicije.

Zadatak 19.5

$$\oint_{\partial v} \mathbf{n}(\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})\,\mathrm{d}a = \int_{v} [(\nabla\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} + \mathbf{w}(\nabla\otimes\mathbf{v})]\,\mathrm{d}v.$$

■

Rešenje

$$\oint_{\partial v} \mathbf{v}(\mathbf{w}\otimes\mathbf{n})\,\mathrm{d}a = \oint_{\partial v} \mathbf{n}(\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})\,\mathrm{d}a = \int_{v} \nabla\cdot(\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})\,\mathrm{d}v.$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{w}\otimes\mathbf{v}) &= \mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})_{,i} = \mathbf{g}^i\cdot(\mathbf{w}_{,i}\otimes\mathbf{v} + \mathbf{w}\otimes\mathbf{v}_{,i}) = (\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{w}_{,i})\mathbf{v} + (\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}_{,i} = \\ &= (\nabla\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} + \mathbf{w}(\mathbf{g}^i\otimes\mathbf{v}_{,i}) = (\nabla\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} + \mathbf{w}(\nabla\otimes\mathbf{v}).\end{aligned}$$

U sledećim zadacima koristimo, radi jednostavnosti, Dekartov koordinatni sistem koordinata.

Zadatak 19.6

$$\oint_{\partial v} (\mathbf{n}\mathbf{T})\otimes\mathbf{w}\,\mathrm{d}a = \int_{v} \left[\mathrm{div}\mathbf{T}\otimes\mathbf{w} + \mathbf{T}^T\cdot(\nabla\mathbf{w})^T\right]\mathrm{d}v.$$

■

Rešenje

$$\begin{aligned}(\mathbf{n}\mathbf{T})\otimes\mathbf{w} &= T_{ji}n_j\mathbf{e}_i\otimes w_k\mathbf{e}_k = T_{ji}w_kn_j\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_k \\ \Rightarrow \quad T_{ji}w_kn_j \quad &\Rightarrow \quad (T_{ji}w_k)_{,j} = T_{ji,j}w_k + T_{ji}w_{k,j} \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{div}\mathbf{T}\otimes\mathbf{w} + \mathbf{T}^T\cdot(\nabla\mathbf{w})^T.\end{aligned}$$

Zadatak 19.7

$$\oint_{\partial v} (\mathbf{nT})\cdot \mathbf{w}\,\mathrm{d}a = \int_v [\mathrm{div}\mathbf{T}\cdot \mathbf{w} + \mathrm{tr}\mathbf{T}(\nabla \mathbf{w})]\,\mathrm{d}v.$$

Rešenje

$$\begin{aligned}(\mathbf{nT})\otimes \mathbf{w} \quad &\Rightarrow \quad T_{ji}w_k n_j \quad \Rightarrow \quad (T_{ji}w_k)_{,j} = T_{ji,j}w_k + T_{ji}w_{k,j}\\ &\Rightarrow \quad (\mathrm{div}\mathbf{T})\otimes \mathbf{w} + \mathbf{T}^T\cdot(\nabla \mathbf{w})^T\\ &\Rightarrow \quad \oint_{\partial v} (\mathbf{nT})\cdot \mathbf{w}\,\mathrm{d}a = \int_v [\mathrm{div}\mathbf{T}\cdot \mathbf{w} + \mathrm{tr}\mathbf{T}(\nabla \mathbf{w})]\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Zadatak 19.8

$$\oint_{\partial v} (\mathbf{r}\otimes \mathbf{nT})\,\mathrm{d}a = \int_v (\mathbf{T} + \mathbf{r}\otimes \mathrm{div}\mathbf{T})\,\mathrm{d}v.$$

Rešenje

$$\begin{aligned}&\mathbf{r}\otimes \mathbf{nT} \quad \Rightarrow \quad z_i n_k T_{kj} \quad \Rightarrow \quad (z_i T_{kj})_{,k} = \delta_{ik}T_{kj} + z_i T_{kj,k} \quad \Rightarrow\\ &\qquad \mathbf{T} + \mathbf{r}\otimes \mathrm{div}\mathbf{T}.\end{aligned}$$

II Diferencijalna geo

II

Diferencijalna geo

Diferencijalna geo

20. Primena tenzorskog računa u diferencijalnoj geometriji

20.1 Uvod

Diferencijalna geometrija je grana matematike koja u velikoj meri koristi metode drugih grana matematike kao što su diferencijalni i integralni račun, topologija i tenzorska analiza za istraživanje geometrijskih problema vezanih za apstraktne objekte, kao što su prostorne krive i površi, i njihova svojstva gde su ova istraživanja uglavnom fokusirana na ovim svojstvima u malim skalama. Diferencijalna geometrija može biti upoređena sa ”algebarskom geometrijom”koja je druga grana geometrije, a koja koristi algebarske metode za istraživanje geometrijskih problema uglavnom globalne prirode.

Istraživanja svojstava krivih i površi u diferencijalnoj geometriji su usko povezana. Na primer, izučavanje svojstva prostornih krivih je ekstenzivno u istraživanju površi, jer se opšta svojstva površi mogu definisati pomoću svojstava krive na tim površima. Tako se nekoliko svojstava krivine površi u određenoj tački definiše u funkciji parametara površinskih krivih koje prolaze kroz tu tačku.

20.2 Opšte napomene, konvencije i notacije

Odmah napomenimo da se ovde naša istraživanja uglavnom zasnivaju na izučavanju krivih i površi u prostoru $\mathbb{E}_3$. U većini slučajeva, ”površ”i ”prostor”u ovoj knjizi znače mnogostrukost dimenzija $2D$ i $3D$.

Pri tome se ima u vidu da se u većini slučajeva jedna kriva može nalaziti na više od jedne mnogostrukosti. Na primer, kriva na površi u $\mathbb{E}_3$ je istovremeno površinska i prostorna kriva.

Shodno tome, u ovoj knjizi ovi termini se tumače u zavisnosti od mnogostrukosti koja se posmatra. Mnogi stavovi formulisani za određeni tip mnogostrukosti mogu se pravilno i lako proširiti na drugi tip uz minimalna prilagođavanja dimenzionalnosti i simbolike. To znači da ”prostor”u nekim stavovima treba shvatiti u njegovom širem značenju kao mnogostrukost koja sadrži krivu, a koja u specijalnom slučaju može biti i površ $2D$.

Kratko o konvenciji obeležavanja: u literaturi je uobičajeno, kada je reč o prostorima $2D$ i $3D$, da se koriste grčki indeksi koji uzimaju vrednosti 1,2, a latinski indeksi za vrednosti 1,2,3, ako se drugačije ne naglasi. Njihovo korišćenje ukazuje na dimenzije prostostora koji se koristi. Takođe je uobičajeno da se sa u^α obeležavaju koordinate prostora $2D$, a sa x^i koorinate u $3D$. U opštem slučaju su i u^α i x^i krivolinijske koordinate. U svakom drugom slučaju biće dato dodatno objašnjenje.

Radi pogodnosti, kao i u cilju upoznavanja čitaoca sa različitim notacijama koje su u upotrebi u literaturi tenzorskog računa i diferencijalne geometrije, ponekad je neizbežno korišćenje različitih oznaka i za iste koncepte. U nekim slučajevima upotreba jedne ili druge, od ovih notacija, zavisi od konkretnog poglavlja. U kontekstu je uvek jasno o kojoj notaciji je reč.

21. Teorija krivih linija u $\mathbb{E}_3$

21.1 Uvod

Počinjemo naša razmatranja u $\mathbb{E}_3$ kao osnov svih naših daljih izučavanja. Napominjemo, između ostalog, da je to prostor naših opažaja i prostor fizičkih događanja i kao takav najčešće se koristi. Prirodno je da započnemo sa razmatranjem krivih linija u $\mathbb{E}_3$ kao najprostijeg jednodimenzionalnog prostora koji nam je dostupan. Sva ostala razmatranja predstavljaju geometrijsko proširenje pojmova koji se odnose na krive linije. Odmah da napomenemo da se ovde zadržavamo na izučavanju realnih krivih.

Kao i do sada, pretpostavljamo da su u $\mathbb{E}_3$ definisane dopustive krivolinijske koordinate x^i, $i = 1,2,3$. Prema tome, svaka tačka $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_3$ je definisana skupom svojih koorinata, tj. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^i)$.

21.2 Razni načini predstavljanja krive

1. Parametarska reprezentacija

Pretpostavimo da su $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ koordinate tačke u trenutku t koja se kreće u prostoru $\mathbb{R}^3$. Položaja tačke $\mathbf{x}$ u posmatranom trenutku t je

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Neka $I \subset \mathbb{R}$ označava interval u kome ćemo posmatrati kretanje tačke tako da $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R}^3$, sa geometrijskog stanovišta, takvo preslikavanje $\mathbf{x}$ određuje krivu u prostoru $\mathbb{R}^3$. Opravdano je pretpostaviti da je kretanje tačke $\mathbf{x}$ glatko. Drugačije rečeno, $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ su klase C^k[1].

Preciziramo.

Definicija

C^k $(k > 0)$ **parametarska kriva** u prostoru $\mathbb{R}^3$ je C^k preslikavanje

$$\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R}^3,\ t \to (x(t), y(t), z(t)). \tag{21.1}$$

Promenljiva t se naziva **parametar**.

Primer 7

Parametarski oblik spirale (helikoida) $\mathbf{x} : |\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ je

$$\mathbf{x}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \quad a > 0, b > 0. \tag{21.2}$$

Kaže se da se kriva obavija oko cilindra $x^2 + y^2 = a^2$ udesno. Ako je $b < 0$, uvijanje je ulevo.

N Napomena. Uobičajeno je da se parametrizovana kriva obeležava sa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ili $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, kada je interval $I \subset \mathbb{R}$ poznat.

Definicija

Parametarska kriva je **regularna** u t_0 ako je $\left.\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} \neq 0$ i regularna ako je regularna za svaki $t \in I$.

Posebno će se naglasiti kada to nije slučaj.

Parametrizacija (21.1) nije jedinstvena. Bilo koja druga parametrizacija

$$t = t(w), \ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}w} \neq 0, \quad I_w : c \leq w \leq d$$

[1]Za funkciju f se kaže da je klase C^k ako je diferncijabilna k puta, a k-ti izvod neprekidan

je moguća pod uslovom da je $t = t(w)$ diferencijabilno r puta u intervalu $I_w : c \leq w \leq d$. Pri tome se skup tačaka krive C ne menja.

Transformacije koje zadovoljavaju ove uslove nazivaju se **dopustive parametarske transforamcije**.

2. Kriva C može biti predstavljena pomoću dve implicitne funkcije

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0, \quad G(x^1, x^2, x^3) = 0. \tag{21.3}$$

U problemima kada nije bitna relacija izmđu tačaka krive $C \in I$ i vrednosti parametra t, ovaj način predstavljanja može da ima svoje prednosti.

3. Takođe, u tačkama C u kojma je $\dfrac{\mathrm{d}x^1(t)}{\mathrm{d}t} \neq 0$, moguće je x^1 koristiti kao nezavisnu promenljivu i predstaviti C u obliku

$$x^2 = x^2(x^1), \quad x^3 = x^3(x^1). \tag{21.4}$$

21.3 Luk krive. Prirodna parametrizacija

Parametar, koji se najčešće koristi, posebno u teorijskim razmatranjima, je luk krive. Intuitivni prilaz je sledeći: ako se $C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ posmatra kao putanja čestice u prostoru, onda je $\left\| \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} \right\|$ brzina čestice kao funkcija vremena. Integral brzine je onda rastojanje koje čestica pređe u toku vremena.

Definicija

Dužina segmenta s regularne krive, ili **luk krive**, $C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $a \leq t \leq b$, je

$$s = \int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t. \tag{21.5}$$

Pogodnost izbora s, kao parmatera krive, sastoji se, između ostalog, u tome što on predstavlja geometrijsko svojstvo krive i ne zavisi od izbora drugih parametara.

Definicija

Parametrizacija krive preko luka s

$$C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s), \quad I : a \leq s \leq b,$$

naziva se **prirodna parametrizacija**.

Primer 8

Odrediti prirodnu parametrizaciju krive

$$C : \mathbf{x} = e^t (\cos t, \sin t, 1). \tag{a}$$

Rešenje

Računamo
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1).$$
Onda je
$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right\| = e^t\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1} = e^t\sqrt{3}.$$
Saglasno sa (21.5) biće
$$s = \int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right\| \mathrm{d}t = \sqrt{3}(e^t - 1),$$
odakle je
$$t = \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right).$$
Zamenom t, u jednačinu (a), dobijamo njenu prirodnu parametrizaciju. Kao što se vidi na ovom jednostavnom primeru, prirodna parametrizacija nije uvek najjednostavnija.

U nekim slučajevima ne može se odrediti.
$$C : \mathbf{x} = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}, \frac{\sin t}{\sqrt{15}}, \frac{\sin 2t}{6\sqrt{5}}\right). \tag{b}$$
Onda je
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{3}}, \frac{\cos t}{\sqrt{15}}, \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{3\sqrt{5}}\right),$$
$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right\| = \sqrt{\frac{15\sin^2 t + 3\cos^2 t + (\cos^2 t - \sin^2 t)^2}{45}} = \frac{3 - \cos 2t}{3\sqrt{5}}$$
i
$$s = \int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right\| \mathrm{d}t = \frac{6t - \sin 2t}{6\sqrt{5}}.$$

22. Freneove formule

Neka je prostorna kriva C data jednačinom

$$C:\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(s), \tag{22.1}$$

gde je s luk krive C. Pretpostavljamo da je kriva C glatka do reda koji nam treba.

Tangentni vektor $\mathbf{T}$ krive C je definisan izrazom

$$\mathbf{T} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\mathbf{g}_i. \tag{22.2}$$

Polazeći od metričke forme $\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$, vidi se da je

$$1 = g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} = g_{ij}T^iT^j$$

i da je $\mathbf{T}$ jedinični vektor. Diferenciranjem izraza $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$ dobijamo da je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{T} = 0, \tag{22.3}$$

odakle sledi da je vektor $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}$ upravan na $\mathbf{T}$. Možemo ga predstaviti u obliku

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = k\mathbf{N}, \tag{22.4}$$

gde je **N** jedinični vektor, a k njegov intezitet. Vektor **N** nazivamo **glavna normala**, a k **krivina krive** C.

Iz (22.3) se vidi da su vektori **T** i **N** ortogonalni, pa prema tome i linearno nezavisni. Onda je, po definiciji, njima upravan vektor

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

jediničan. Prema tome, vektori **T**, **N** i **B** su ortonormiran sistem vektora, koji predstavlja **prirodan tijedar** duž tačaka krive. Svaki vektor, definisan na krivoj, kao i njegova promena, mogu biti predstavljeni u odnosu na ovaj trijedar. To važi i za vektore trijedra. Tako je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}.$$

Koeficijenti razlaganja a, b i c određuju se iz uslova, ortonormiranosti vektora **T**, **N** i **B**. Onda je $a = -\kappa$ i $b = 0$. U literaturi je uobičajena oznaka $c = \tau$. Prema tome je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = -k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}. \tag{22.5}$$

Uvodimo terminologiju: vektor **B** se naziva **binormala**, a skalarna invarijanta, τ **torzija** krive C.

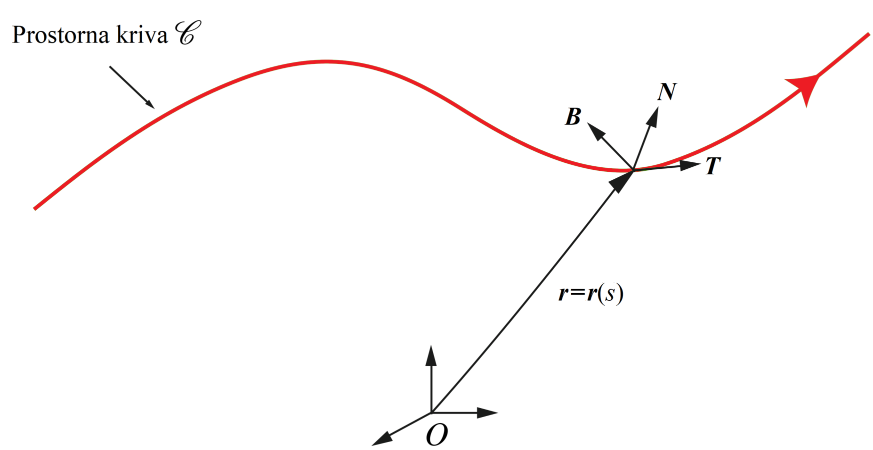
Njegovim diferenciranjem dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}.$$

Kako je $\mathbf{T} \times \mathbf{B} = -\mathbf{N}$, sledi da je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau\mathbf{N}. \tag{22.6}$$

Jednačine (22.4), (22.5) i (22.6) su **Freneove formule**.



Slika 22.1: Frene-formule.

Zbog njihove važnosti u teoriji krivih linija u $\mathbb{E}_3$ grupišemo ih i pišemo. U literaturi se često sreće matrični način obeležavnja Freneovih formula

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{T}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{B}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \tag{22.7}$$

ili

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

U komponentalnom obliku biće

$$\frac{\delta T^i}{\delta s} = kN^i, \qquad \frac{\delta N^i}{\delta s} = -kT^i + \tau B^i, \qquad \frac{\delta B^i}{\delta s} = -\tau N^i, \tag{22.8}$$

gde je $\frac{\delta}{\delta s}$ Bjankijev izvod po parametru s.

Navedimo još sledeće izraze:

$$\tau = \varepsilon_{ijk} T^i N^j \frac{\delta N^k}{\delta s}, \quad k^2 = g_{ij} \frac{\delta T^i}{\delta s} \frac{\delta T^j}{\delta s}, \tag{22.9}$$

odakle se eksplicitno vidi zavisnost znaka τ od orijentacije trijedra, za razliku od k koja predstavlja intezitet vektora $\mathbf{T}$.

Primer primene ovih pojmova ilustruje sledeća teorema

Teorema 22.0.1 Jedinični tangentni vektor $\mathbf{T}(s)$ krive $\mathbf{x}(s)$, za koju je $k > 0$, zaklapa konstantan ugao sa fiksnim jediničnim vektorom $\mathbf{a}$ akko je $\frac{\tau}{k} = \text{const.}$.

Dokaz

Ako je $\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{a} = \text{const.}$ za svako s, onda je

$$\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} \cdot \mathbf{a} = 0 = k\mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{a}.$$

Prema tome, vektor $\mathbf{a}$ leži u ravni vektora $\mathbf{T}(s)$ i $\mathbf{B}(s)$. Kao jedinični vektor može da se predstavi u obliki $\mathbf{a} = \mathbf{T}(s)\cos\alpha + \mathbf{B}(s)\sin\alpha$, gde je α neki konstantan ugao, što se vidi iz uslova $\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{a} = \text{const.} = \cos\alpha$. Onda je

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} \cos\alpha + \frac{d\mathbf{B}(s)}{ds} \sin\alpha = k(s)\cos\alpha \mathbf{N}(s) - \tau(s)\sin\alpha \mathbf{N}(s) = \\ &= (k(s)\cos\alpha - \tau(s)\sin\alpha)\, \mathbf{N}(s). \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\frac{\tau}{k} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha = \text{const.}$$

Obrnuto, ako je $\frac{\tau}{k} = \text{const.}$, onda uvek postoji ugao, recimo φ, tako da je

$$\frac{\tau}{k} = \operatorname{ctg}\varphi = \text{const.} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Difrenciranjem vektora $\mathbf{T}(s)\cos\varphi + \mathbf{B}(s)\sin\varphi$, sledi da je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}(s)}{\mathrm{d}s}\cos\varphi + \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}(s)}{\mathrm{d}s}\sin\varphi = (k(s)\cos\varphi - \tau(s)\sin\varphi)\,\mathbf{N}(s) = \mathbf{0}.$$

Odakle zaključujemo da je tako definisani vektor konstantan jedinični vektor. Ugao koji taj vektor zaklapa sa $\mathbf{T}(s)$ je φ.

22.1 Krivina i torzija

Neka je u svakoj tački krive $C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, gde je s luk krive C, definisan trijedar vektora **T**, **N** i **B**. Za dalje istraživanje važna je sledeća definicija:

Definicija 22.1.1 - Ravan upravna na vektor normale **T** određuje **normalnu ravan**

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{T}(s) = 0, \tag{22.10}$$

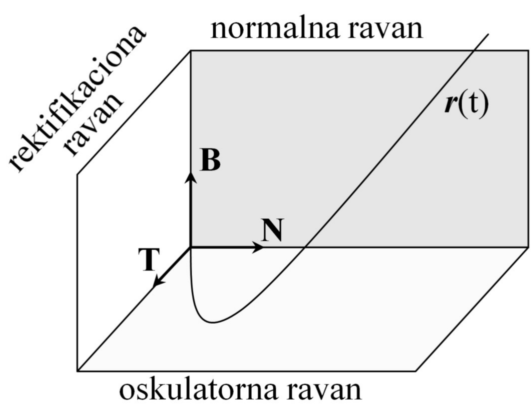
- ravan upravna na vektor normale **N**, određuje **rektifikacionu ravan**

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{N}(s) = 0, \tag{22.11}$$

- ravan upravna na vektor binormale **B**, određuje **oskulatornu ravan**

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{B}(s) = 0, \tag{22.12}$$

gde je $\mathbf{x}$ bilo koja tačka ravni koja prolazi kroz tačku $\mathbf{x}(s)$ krive C.



Slika 22.2: Pirodni trijedar.

Torzija τ ima sasvim određeno geometrijsko značenje. Kao što je krivina mera odstupanja krive linije od prave (tangentne) linije, isto tako je torzija mera odstupanja krive linije od oskulatorne ravni.

Krivina je jedna od najprostijih, ali takođe jedna od najvažnijih svojstava krive. To nam potvrđuje sledeća lema:

Lema 22.1.1 Ako je $k = 0$ za sve vrednosti paramtra s kriva leži na pravoj liniji.

Dokaz

Prema uslovu Leme sledi da je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \mathbf{a},$$

gde je **a** konstantan jedinični vektor. Onda je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{T} = \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{a}\,s + \mathbf{b},$$

gde je **b** integraciona konstanta. Prema tome $\mathbf{x}(s)$ je prava linija koja prolazi kroz **b** u pravcu vektora **a**. Znači krivina

$$k(s) = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \right\| = \left\| \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2} \right\| \tag{22.13}$$

je mera odstupanja krive linije od prave linije. Takođe je

$$\mathbf{T} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = k\,\mathbf{T} \times \mathbf{N} = k\,\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad k = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2} \right\|.$$

Analogno krivini k, torzija τ je mera odstupanja krive linije od oskulatorne ravni. Njena veličina je određena izrazom

$$\tau = \mathbf{B} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}.$$

Kako je

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2},$$

onda je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^3} - \frac{1}{k^2}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2},$$

pa je

$$\tau = \frac{1}{k}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^3} - \frac{1}{k^2}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2} \right).$$

Prema tome pri prirodnoj parametrizaciji (preko luka krive) sledi da je

$$\tau = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2} \right) \cdot \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^3} = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2} \right) \cdot \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^3}}{\left\| \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2} \right\|^2}. \tag{22.14}$$

U slučaju proizvoljne parametrizacije, recimo parametra $t = t(s)$, koja je često data u analitičkom obliku pogodnijem za računanje, potrebno je odrediti krivinu i torziju u odnosu na takvu parametrizaciju. Prvo ćemo odrediti krivinu polazeći od izraza (22.13). Dajemo jedan od načina. Polazimo od izraza

$$C: x = x(t) = x(s(t)), \tag{22.15}$$

Onda je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2},$$

pa je

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3 = k\mathbf{N} \times \mathbf{T}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3.$$

Odavde je

$$k(t) = \frac{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right\|}{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3} = \frac{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right\|}{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right\|^3}. \tag{22.16}$$

Očigledno je da se (22.4) svodi na (22.13) u slučaju kada je $t = s$.

Potpuno analogno određujemo troziju $\tau(t)$ pri proizvoljnoj parametrizaciji $t = t(s)$. Onda je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2}$$

i

$$\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^3} = \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^3}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3 + 3\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^3 t}{\mathrm{d}s^3}.$$

Smenom ovih izraza u gornjem izrazu u (22.22) dobijamo

$$\tau(t) = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^3}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^6 = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^3}}{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}\right\|^2}. \tag{22.17}$$

Specijalan slučaj ovog izraza je (22.22) kada je $t = s$.

Primer 9

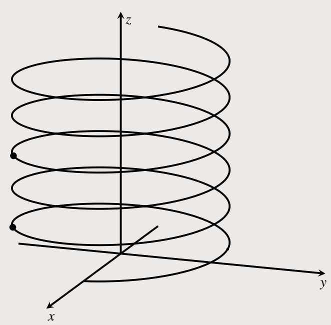
Odrediti krivinu i torziju kružne helikoide

$$\mathbf{x}(t) = (r\cos t, r\sin t, ct).$$

Rešenje

Pišemo
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (-r\sin t, r\cos t, c), \quad \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = (-r\cos t, -r\sin t, 0).$$
Kako je
$$\left\|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right\| = \sqrt{r^2+c^2} \quad \text{i} \quad \left\|\frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right\| = r\sqrt{r^2+c^2},$$
onda je, prema (22.4),
$$k = \frac{r}{r^2+c^2}.$$

Na isti način se pokazuje da je, prema (22.17)
$$\tau = \frac{c}{r^2+c^2}.$$
Znači, za kružnu helikoidu i krivina i torzija su konstante. Trivijalno sledi
$$\frac{\tau}{k} = \frac{c}{r} = \text{const.}$$



Slika 22.3: Kružnu helikoida.

Na isti način se pokazuje da je, prema (22.17)
$$\tau = \frac{c}{r^2+c^2}.$$
Znači, za kružnu helikoidu i krivina i torzija su konstante. Trivijalno sledi
$$\frac{\tau}{k} = \frac{c}{r} = \text{const.}$$

22.2 Prirodne jednačine krive

Do sada smo uvek predstavljali krivu u obliku
$$C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \quad \text{ili kao} \quad C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s),$$
kada je za parametar krive korišćen luk s. Jasno je da analitički oblik takve reprezentacije krive C zavisi od izbora koordinatnog sistema u $\mathbb{E}_3$. Onda se postavlja pitanje da li postoji karakterizacija krive nezavisno od koordinata, izuzev od njenog

položaja u prostoru? U pokušaju da nađemo takvu reprezentaciju prirodno je da se posmatraju one veličine krive koje su nezavisne od koordinata i parametra, tj. takve veličine koje zavise samo od prirode krive. Takve veličine su krivina k i torzija τ. Dve nezavisne funkcionalne relacije krivine k i torzija τ u funkciji luka s nazivamo **prirodne jednačine krive** C u E_3.

Mi ćemo koristiti jednačine

$$k = k(s), \quad \tau = \tau(s),$$

u daljem istraživanju.

Može se pokazati da ako su $k = k(s)$ i $\tau = \tau(s)$ neprekidne u nekom intervalu, onda one jednoznačno određuju krivu do na položaj u prostoru.

Pokazalo se da je rešenje našeg problema jednostavno, ako su $k = k(s)$ i $\tau = \tau(s)$ analitičke funkcije, jer koeficijenti Tejlorovog reda funkcije $\mathbf{x}(s)$ sadrže samo funkcije $k = k(s)$ i $\tau = \tau(s)$ i njihove izvode. To znači da ako pretpostavimo da je kriva $\mathbf{x}(s)$ klase $r \geq 3$, onda njen Tejlorov red do na treći stepen glasi

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \sum_{k=1}^{3} \frac{s^k}{k!} \frac{\mathrm{d}^k \mathbf{x}}{\mathrm{d}s^k} + O(s^4).$$

Smenom

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} (= \mathbf{T}), \quad \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2} \left(= \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \right) \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^3} \left(= \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{T}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\mathbf{N} - k^2\mathbf{T} + k\tau\mathbf{B} \right)$$

i koristeći Freneove formule, dobijamo da je

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \left(s - \frac{s^3 k^2(0)}{6} \right) \mathbf{T}(0) + \left(\frac{s^2 k^2(0)}{2} + \frac{s^3 \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}(0)}{6} \right) \mathbf{N}(0) +$$
$$+ \left(\frac{s^3 k(0)\tau(0)}{6} \right) \mathbf{B}(0) + O(s^4).$$

22.2.1 Podudarnost krivih

U klasičnoj Euklidskoj geometriji interesuju nas geometrijska tela koja imaju iste geometrijske karakteristike. Za takva tela kaže sa da su **podudarna**, ili **kongruentna**.

Grubo govoreći, dve krive u prostoru C i $\bar{C}$ su podudarne, ako se krutim kretanjem mogu dovesti do poklapanja. Kruto kretanja se sastoji iz dva nezavisna kretanja: **translacija** i **rotacija**. Translacijom možemo dovesti do poklapanja odgovarajućih dveju tačaka krivih C i $\bar{C}$. Onda se rotacijom, ako su kongruentne, dovodi do poklapanja. Takva kombinacija translacije i rotacije naziva se **Euklidsko kretanje**. Kako je reč o kretanju obično se kao parametar krive uzima parametar t koji se posmatra kao vreme, tj. $C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Onda je Euklidsko kretanje kompozicija dveju operacija.

Definicija 22.2.1 — Translacija.

$$\mathbf{x}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t)+\mathbf{v},$$

gde je $\mathbf{v}$ konstantan vektor.

Definicija 22.2.2 — Rotacija.

$$\mathbf{x}(t)+\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}(t)+\mathbf{v}),$$

gde je $\mathbf{Q}$ **matrica rotacije**.

Ispitajmo kako se to odražava na Freneove formule.

Odmah se vidi da su Freneove formule krive $\mathbf{x}(t)$ iste kao i za krivu $\mathbf{x}(t)+\mathbf{v}$.

Ostaje nam da razmotrimo rotaciju. Za očekivanje je, da primena rotacije $\mathbf{Q}$ na krivu $\mathbf{x}(t)$ rotira takođe i trijedar vektora $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ i $\mathbf{B}$. U tom cilju sa

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix},$$

obeležavamo ortogonalnu matricu koju ovaj trijedar vektora formira, a sa

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix},$$

antisimetričnu matricu u formuli (22.7) u odnosu na standarnu bazu u $\mathbb{E}_3$. Onda se (22.7) može izraziti u obliku

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}(t)}{\mathrm{d}t}=\mathbf{F}(t)\mathbf{R}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{R}^T(t)=\mathbf{F}(t).$$

Primenom rotacije $\mathbf{Q}$ na $\mathbf{x}(t)$ prevodimo $\mathbf{R}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(t)\mathbf{Q}$. Onda je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}(t)\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{RQ})^T(t)=\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T\mathbf{R}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{R}^T(t)=\mathbf{F},$$

jer je $\mathbf{Q}$ matrica rotacije.

Znači, matrica $\mathbf{F}$, matrica krivine $k=k(t)$ i torzije $\tau=\tau(t)$, je invarijantna pri rotaciji $\mathbf{Q}$ kojoj je podvrgnuta kriva $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$.

Koristeći Freneove formule, pokazaćemo da važi i obrnuto:

Bilo koje dve krive, koje imaju istu krivinu i torziju, su podudarne (kongruentne) pri Euklidskom kretanju.

Fundamentalna teorema krivih u prostoru

Teorema 22.2.1 Kriva je jednoznačno određena, izuzev položaja u prostoru, kada su njena krivina i torzija date u funkciji luka s.

Dokaz

Neka krive C i C_1 imaju jednake krivine k i torziju τ za iste vrednosti s. Neka se $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ odnose na krivu C, a $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{B}_1$ na krivu C_1. Onda, u tačkama krivih određene istom vrednošću s, imamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}_1) = \mathbf{T}\cdot(k\mathbf{N}_1) + k\mathbf{N}\cdot\mathbf{T}_1,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}_1) = \mathbf{N}\cdot(-k\mathbf{T}_1+\tau\mathbf{B}_1) + (-k\mathbf{T}_1+\tau\mathbf{B}_1)\cdot\mathbf{N}_1,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}_1) = \mathbf{B}\cdot(-\tau\mathbf{N}_1) + (-\tau\mathbf{N})\cdot\mathbf{B}_1.
\end{aligned}$$

Očigledno je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}_1+\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}_1+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}_1) = 0,$$

odakle sledi da je

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}_1+\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}_1+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}_1 = \text{const}.$$

Pretpostavimo da su inicijalne tačke krivih C i C_1, od kojih se meri s, dovedene do poklapanja i da su krive rotirane tako da se njihovi trijedri $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{B}_1$ takođe poklapaju. U toj tački $\mathbf{T}=\mathbf{T}_1$, $\mathbf{N}=\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{B}=\mathbf{B}_1$ i vrednost konstante u poslednjoj jednačini je 3. Međutim, zbir kosinusa uglova $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}_1$, $\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}_1$, može biti jednak 3, ako su ovi uglovi jednaki 0, ili 2π. To znači da je $\mathbf{T}=\mathbf{T}_1$, $\mathbf{N}=\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{B}=\mathbf{B}_1$ u svim tačkama dveju krivih. Takođe, relaciju $\mathbf{T}=\mathbf{T}_1$ možemo pisati u obliku

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{T}-\mathbf{T}_1) = 0,$$

odakle sledi da je

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_1(s) + \mathbf{c},$$

gde je $\mathbf{c}$ konstanta integracije. Ova razlika iščezava u inicijalnoj tački, pa prema tome i u svim ostalim tačkama. Znači, $\mathbf{r}(s)=\mathbf{r}_1(s)$ i u svim odgovarajućim začkama, tj. dve krive se poklapaju.

22.3 Freneove formule u N-dimenzionalnom prostoru

Od interesa je problem određivanja Frenovih formula u N-dimenzionalnom prostoru. Jedan od postupaka za njihovo izvođenje predstavlja nastavak postupka koji smo koristili za prostor $\mathbb{E}_3$. Ovde ilustrujemo drugi, sažet, pristup.

Neka je $C : \mathbf{x}(s)$ glatka diferencijabilna kriva (do reda koji nam treba) u $\mathbb{E}_N$, s je dužina luka krive. Pretpostavimo da su vektori

$$\mathbf{X}_k = \frac{\mathrm{d}^k\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^k}, \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

linearno nezavisni. Koristeći Gram-Šmitov postupak odredimo ortonormirani sistem od N -vektora $\{\mathbf{e}_k\}$. Vektor $\mathbf{X}_1 = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s}$ je jedinični. Pogodno je njega uzeti kao vektor $\mathbf{e}_1 = \mathbf{X}_1$. Odredimo jedinični vektor $\mathbf{e}_2$ u ravni vektora $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$ tako da je $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$. Na isti način odredimo jedinični vektor $\mathbf{e}_3$ kao linearnu kombinaciju vektora $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ i $\mathbf{X}_3$, tako da je $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$. Ponavljajući ovaj postupak određujemo sistem od N linearno nezavisnih vektora $\mathbf{e}_k$, $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \delta_{kl}$, $(k, l = 1, 2, \dots, N)$. Očigledno je da sistem vektora $\{\mathbf{e}_k\}$ definiše bazu prostora $\mathbb{E}_N$. Njihova promena po s takođe definiše vektore u $\mathbb{E}_N$. U odnosu na bazu $\{\mathbf{e}_k\}$ mogu se predstaviti kao njihova linearna kombinacija , tj.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_k}{\mathrm{d}s} = \sum_{k=1}^{N} a_{kl}\mathbf{e}_l. \tag{22.18}$$

Koristeći relaciju $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \delta_{kl}$ sledi da je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_k}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{e}_l = a_{kl}.$$

Onda je

$$\frac{\mathrm{d}(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l)}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_k}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_k \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_l}{\mathrm{d}s} \quad \Rightarrow \quad a_{kl} + a_{lk} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{kl} = -a_{lk}.$$

Prema tome, sistem koeficijenta a_{kl} je antisimetričan. Pogodno je (22.18) predstaviti u matričnom obliku

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1N} & -a_{2N} & -a_{3N} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_N \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je izvod $\mathbf{X}_k$ baš $\mathbf{X}_{k+1}$, jer je $\mathbf{X}_k = \dfrac{\mathrm{d}^k\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^k}$. Prema tome, izvod od $\mathbf{X}_1$ je $\mathbf{X}_2$ i kao takav predstavlja linearnu kombinaciju $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$.

Kako je $\mathbf{e}_1 = \mathbf{X}_1$, zaključujemo da je izvod od $\mathbf{e}_1$ linearna kombinacija od $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$. Ali to znači da su svi koeficijenti $a_{13} = a_{14} = \cdots = a_{1N} = 0$, osim koeficijanta

$k_1 = a_{12}$. Takođe je $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{X}_2}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^3} = \mathbf{X}_3$ i predstavlja linearnu kombinaciju vektora $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$. S druge strane, $\mathbf{X}_2$ je linearna kombinacija vektora $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$, npr. $\mathbf{X}_2 = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{X}_3$ linearna kombinacija vektora $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$. Onda iz

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}_2}{\mathrm{d}s} = a\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}s} + b\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}s}$$

i

$$\mathbf{X}_3 = d\mathbf{e}_1 + g\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3,$$

sledi da je $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}s}$ linearna kombinacija vektora $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$. Osim $a_{12} = k_1$ i $a_{23} = k_2$, svi ostali koeficijenti su $a_{24} = a_{25} = \cdots = a_{2N} = 0$.

Na isti način se pokazuje da je $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_k}{\mathrm{d}s}$ linearna kombinacija vektora $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{k+1}$. Uvodeći oznaku $a_{kk+1} = k_k$ može se gornja matrica predstaviti u obliku

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \vdots\\ \mathbf{e}_N\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0\\ -k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0\\ 0 & -k_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \vdots\\ \mathbf{e}_N\end{pmatrix}.$$

Koeficijenti $k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}$ predstavljaju redom prvu, drugu, treću, i $N-1$ krivinu krive $C \subset \mathbb{E}_N$. Napisana u razvijenom obluku dobijamo izraze

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_k}{\mathrm{d}s} &= -k_{k-1}\mathbf{e}_{k-1} + k_k\mathbf{e}_{k+1}, \\ k_k &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_k}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{e}_{k+1}, \quad k_0 = k_N = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \end{aligned} \tag{22.19}$$

koji predstavljaju **Freneove formule** krive $C \subset \mathbb{E}_N$.

U slučaju krive $C \subset \mathbb{E}_N$ koeficijenti k_1 i k_2 obeležavaju se sa κ i τ, redom, i nazivaju se **krivina** i **torzija krive** C.

Na analogan način se određuje geometrijski smisao ostalih koeficijenata u gornjem izrazu, zbog čega se nazivaju **generalisane krivine krive** $C \subset \mathbb{E}_N$.

Važno je uočiti da se prećutno pretpostavlja da su svi koeficijenti $k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}$ krive $C : \mathbf{x}(s)$ različiti od nule, što nije uvek slučaj. To nije uvek slučaj ni za krive $C \subset \mathbb{E}_N$. Primera radi, $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}s} = k_1\mathbf{e}_2$. Ako je $k_1 = 0$ u svim tačkama krive C, onda je reč o pravoj, geodezijskoj, liniji. Njena tangenta se naziva **stacionarna**. Očigledno je da je u tom slučaju $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}s} = 0\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$. Vektor $\mathbf{e}_2$ nije određen i postupak se prekida. U slučaju kada je $k_1 \neq 0$, ali $k_2 = 0$ u nekoj tački krive, dalji postupak se prekida. Oskulatorna ravan u toj tački se naziva **stacionarna**.

U opštem slučaju je

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_k}{\mathrm{d}s} = -\kappa_{k-1}\mathbf{e}_{k-1} + \kappa_k\mathbf{e}_{k+1}, \quad k = 1,2,\ldots,N, \\
&k_0 = k_m = k_{m+1} = \cdots = k_N = 0.
\end{aligned}
\tag{22.20}
$$

22.4 Darbuov vektor

Kada se tačka kreće duž krive C, onda njeno kretanje prati kretanje trijedra ortonormiranih vektora $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ i $\mathbf{B}$. Kako trijedar ovih vektora, u toku kretanja, ne menjaju svoje intezitete (jedinični su) i uzajamne položaje (međusobno su upravni), onda se njegovo kretanje može poistovetiti sa kretanjem krutog tela u koji je trijedar kruto utisnut. Drugačije rečeno, kretanje trijedra vektora $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ i $\mathbf{B}$, možemo posmatrati kao kinematiku krutog tela, koje ovaj trijedar reprezentuje.

Teorema 1 (Mozzi, Cauchy)
Kretanje krutog tela u prostoru predstavlja (infinitezimalno) zavojno kretanje.

Prema definiciji, zavojno kretanje se sastoji iz translacije, duž prave linije, i rotacije, oko te linije. Uočimo da svaka tačka krutog tela, koja nije na osi rotacije, opisuje kružnu helkoidu.

Mi ćemo dalje isključiti iz našeg razmatranja translaciju posmatranog trijedra (koja je određena vektorom $\mathbf{T}$).

Obelezimo sa $\boldsymbol{\omega}$ ugaonu brzinu krutog tela oko ose rotacije. Vektor $\boldsymbol{\omega}$ je isti za sve tačke krutog tela i kao takav funkcija je samo vremena. U odnosu na trijedar $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ i $\mathbf{B}$, ovaj vektor dat je izrazom

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{T} + \omega_2 \mathbf{N} + \omega_3 \mathbf{B}. \tag{22.21}$$

Primer 10

Naka su $\mathbf{X}$ i $\mathbf{x}$ položaji neke materijalne tačke krutog tela u trentku t_0 i t, redom, u odnosu na tačku O. Dobro je poznato da je

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{X},$$

jednačina kretanja krutog tela, kada se rotira oko tačke O, gde je ortogonalan tenzor $\mathbf{Q}$ funkcija samo t. Znači $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Pri tome je brzina promene položaja uočene tačke $\mathbf{x}$ data izrazom

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{X} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{x} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{x},$$

$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = \boldsymbol{\Omega}$ je antisimetričan tenzor. U $\mathbb{E}_3$ ima tri komponete različite od nule, pa prema tome njemu odgovara jednoznačno neki vektor $\boldsymbol{\omega}$. Preciznije,

$$\Omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\,\omega^k.$$

Onda je
$$\mathbf{v} = \mathbf{\Omega}\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$
za svako $\mathbf{x}$ krutog tela. To važi i za vektore trijedra $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ i $\mathbf{B}$.

Onda je

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t} &= \qquad \omega_3\,\mathbf{N} \quad - \omega_2\,\mathbf{B},\\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}t} &= -\omega_3\,\mathbf{T} \qquad + \omega_1\,\mathbf{B},\\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} &= \omega_2\,\mathbf{T} \quad - \omega_1\,\mathbf{N},
\end{aligned}$$

gde smo koristili (22.21), ili u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}t} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Imajući u vidu da je $s = s(t)$, ovaj izraz pišemo u ekvivalentnom obliku

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}. \tag{22.22}$$

Iz (22.7) i (22.22) dobijamo da je

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$\omega_1 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\tau, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}k,$$

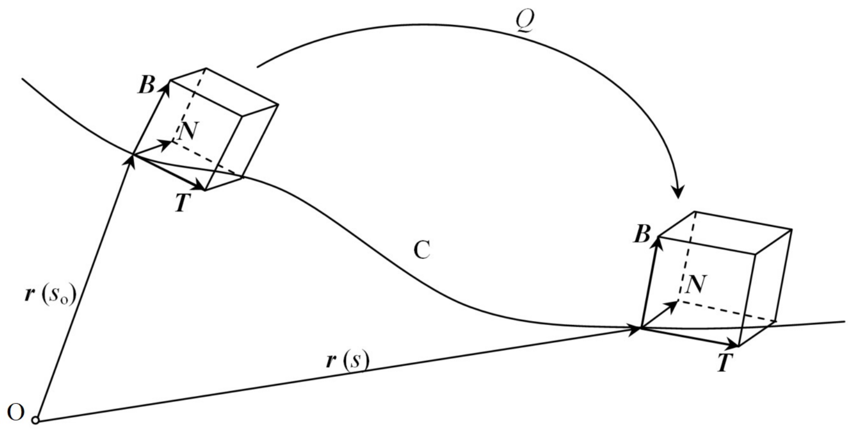
pa je

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(\tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\delta}.$$

Vektor

$$\boldsymbol{\delta} = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B} \tag{22.23}$$

naziva se **Darbuov vektor**[1].



Slika 22.4: Kruto kretanje baznih vektora prirodnog trijedra, duž krive C.

Pod uslovom da se element luk s inerpretira kao vreme, vektor $\boldsymbol{\omega}$ postaje Darbuov vektor $\boldsymbol{\delta}$, što nam omogućuje sledeću interpretaciju Freneovih formula: torzija τ određuje brzinu kojom se oskulatorna ravan obrće oko tangente krive, dok kivina κ određuje brzinu kojom se normalna ravan obrće oko binormale.

Trijedar vektora $\mathbf{TNB}$, poznat pod imenom **Freneov sistem vektora**, je pozitivne orijentacije kada je $\mathbf{T}\times\mathbf{N} = \mathbf{B}$, $\mathbf{N}\times\mathbf{B} = \mathbf{T}$, $\mathbf{B}\times\mathbf{T} = \mathbf{N}$. Specijalno je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = (\tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}) \times \mathbf{N}.$$

Lako je pokazati da je:

$$\boldsymbol{\delta}\times\mathbf{T} = \kappa\mathbf{N}, \quad \boldsymbol{\delta}\times\mathbf{B} = -\tau\mathbf{N}. \tag{22.24}$$

Interesantno je da se onda Freneovi obrasci mogu pisati u simetričnom obliku:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\delta}\times\mathbf{T}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\delta}\times\mathbf{N}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\delta}\times\mathbf{B}. \tag{22.25}$$

Kako je $\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{N} = 0$, možemo Darbuov vektor da napišemo u sažetom obliku

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{N}\times(\boldsymbol{\delta}\times\mathbf{N}) = \mathbf{N}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}. \tag{22.26}$$

[1] Darboux

22.5 Zavojnica - Spirala

Ovde dajemo detaljnu analizu zavojnice s obzirom na njenu važnost, prvenstveno u biologiji DNK i mehanici kretanja krutog tela.

Definicija

Zavojnica je kriva čija tangenta zaklapa konstantan ugao sa fiksnim pravcem.

Analizu vršimo u nekoliko koraka.

I - Neka je $\mathbf{e}$ jedinični vektor fiksnog pravca i neka je α konstantni ugao. Onda je, prema definiciji 22.5

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{T} = \cos\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \tag{22.27}$$

Diferencirajući dva puta ovu jedančinu po s dobijamo

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{e} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = 0.$$

Prema tome, Darbuov vektor $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{N} \times \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}$ je paralelan sa $\mathbf{e}$.

Obrnuto, ako je $\boldsymbol{\delta}$ za neku kivu paralelno nekom fiksnom vektoru $\mathbf{e}$, tj. $\boldsymbol{\delta} = f(t)\mathbf{e}$, iz $\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{N} = 0$, sledi

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{T} = \cos\alpha,$$

gde je $\cos\alpha$ konstanta integracije; kriva je zavojnica.

Znači, **jedine zavojne krive čiji Darbuov vektor ima fiksni pravac su zavojnice**.

Prema tome, zavojnice se karakterišu sa

$$\boldsymbol{\delta} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{0}, \tag{22.28}$$

jer je

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \dot{f}\mathbf{e} = \frac{\dot{f}}{f}\boldsymbol{\delta}.$$

II Fiksni pravac Darbuovog vektora

$$\boldsymbol{\delta} = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$$

je duž **ose zavojnice e**. Odavde je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}\mathbf{T} + \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\mathbf{B}, \tag{22.29}$$

jer je

$$\tau\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} + \kappa\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{0},$$

pa je

$$\boldsymbol{\delta} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}}{\mathrm{d}s} = \left(\kappa\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} - \tau\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\right), \quad \mathbf{N} = -\tau^2\mathbf{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right).$$

Iz jednačine (22.28) sledi da je

$$\frac{\kappa}{\tau} = \text{const}; \tag{22.30}$$

spirale su jedine zavojne krive čiji odnos krivine i torzije je konstanan.

III Smenom $\mathbf{T} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}$ u $\mathbf{e}\cdot\mathbf{T} = \cos\alpha$, integracijom dobijamo

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{r} = s\cos\alpha + c.$$

Ako sa $\mathbf{r}_1$ označimo projekciju $\mathbf{r}$ na ravan upravnu na $\mathbf{e}$, onda je

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + (s\cos\alpha + c)\mathbf{e}. \tag{22.31}$$

To znači:

svaka zavojnica leži na cilindru čiji su generatrise paralelne sa e.

Ravna kriva Γ_1, trag od $\mathbf{r}_1$, je normalan presek cilindra.

IV Neka je $s = P_0P$ luk helikoide $s_1 = P_0P_1$, luk duž normalnog preseka Γ_1 kroz P_0. Difernciranjem (22.31) dva puta po s dobijamo da je

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}s} + \mathbf{e}\cos\alpha \tag{22.32}$$

i

$$\kappa\mathbf{N} = \kappa_1\mathbf{N}_1\left(\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}s}\right)^2. \tag{22.33}$$

Iz prve jednačine sledi da je

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}s}\right)^2 &= (\mathbf{T} - \mathbf{e}\cos\alpha)\cdot(\mathbf{T} - \mathbf{e}\cos\alpha) = \\ &= 1 - 2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.\end{aligned}$$

Ako definišemo pozitivan smer na Γ_1 tako da s_1 raste sa s, onda je

$$\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha. \tag{22.34}$$

Podsetimo se da su κ i κ_1 pozitivne veličine, pa je, iz (22.33) i (22.34), $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1$ i

$$\kappa = \kappa_1 \sin^2 \alpha. \tag{22.35}$$

Kako je $\mathbf{e}\cdot\mathbf{N} = 0$, sledi da je vektor $\mathbf{e}$ u ravni vektora $\mathbf{T}$ i $\mathbf{B}$, pa je $\mathbf{e} = \mathbf{T}\cos\alpha + \mathbf{B}\sin\alpha$. Iz $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s} = 0$ dobijamo da je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\cos\alpha + \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}\sin\alpha = \mathbf{0},$$

pa je

$$\frac{\kappa}{\tau} = \mathrm{tg}\alpha \quad \text{i} \quad \tau = \kappa_1 \sin\alpha\cos\alpha. \tag{22.36}$$

Integracijom (22.34) sledi da je

$$s_1 = s\sin\alpha, \tag{22.37}$$

gde je konstanta integracije jednaka nuli, jer s i s_1 merimo iz iste tačke P_0.

V. **Jedina zavojna kriva konstantne krivine i torzije je cilindrična zavojnica.**

Zaista, onda je $\frac{\kappa}{\tau} = \text{const.}$ i krive su zavojnice.

Takođe iz (22.35) sledi da je $\kappa_1 = \text{const}$, tj. normalni presek je krug.

Kružna zavojnica je jedina zavojna kriva za koju je Darbuov vektor konstantan.

To se vidi iz (22.29), jer je evidentno da je $\boldsymbol{\delta} = \text{const}$, akko su κ i τ konstante.

Primer 11

Kriva

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$$

je kružna zavojnica. Kriva leži na cilindru $x^2 + y^2 = a^2$. Takođe je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}} = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

i

$$\cos(\mathbf{k},\mathbf{T}) = \mathbf{k}\cdot\frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Dalje koristimo

$$\ddot{\mathbf{r}} = (-a\cos t, -a\sin t, 0),$$
$$\dddot{\mathbf{r}} = (a\sin t, -a\cos t, 0).$$

Onda je

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|}{|\dddot{\mathbf{r}}|} = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad \tau = \frac{(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}})\cdot\dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

i
$$\frac{\kappa}{\tau}=\frac{a}{b}.$$
Kako je $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, lako je pokazati da je
$$\mathbf{N}=(-\cos t,\,-\sin t,\,0),\qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,(\sin t,-\cos t,0)\,.$$
Onda je Darbuov vektor
$$\boldsymbol{\delta}=\mathbf{N}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathbf{k}}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
odakle se vidi da je konstantan po intezitetu i pravcu.

Primer 12

Dokazati da za proizvoljnu neprekidnu glatku krivu $C:\ \mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$ važi:

a)
$$\varepsilon_{ijk}\frac{\delta T^i}{\delta s}\frac{\delta^2 T^j}{\delta s^2}\frac{\delta^3 T^k}{\delta s^3}=k^5\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\tau}{k}\right).$$
b) Potreban i dovoljan uslov da kriva $C:\ \mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$ bude zavojnica je
$$\varepsilon_{ijk}\frac{\delta T^i}{\delta s}\frac{\delta^2 T^j}{\delta s^2}\frac{\delta^3 T^k}{\delta s^3}=0.$$

Dokaz

a) U odnosu na prirodni trijedar **T**, **N** i **B**, biće:

$$\frac{\delta T^i}{\delta s} = aN^i,$$
$$\frac{\delta^2 T^i}{\delta s^2} = xT^i + yN^i + zB^i,$$
$$\frac{\delta^3 T^k}{\delta s^3} = uT^i + vN^i + wB^i,$$

gde su a, x, y, z, u, v, i w, koeficijenti razlaganja. Onda je

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\delta T^i}{\delta s}\frac{\delta^2 T^j}{\delta s^2}\frac{\delta^3 T^k}{\delta s^3} = a(zu - xw).$$

Koeficijente razlaganja određujemo iz sledećih uslova:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta T^i}{\delta s} &= kN^i,\\
\frac{\delta^2 T^i}{\delta s^2} &= -k^2 T^i + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}N^i + \kappa\tau B^i,\\
\frac{\delta^3 T^i}{\delta s^3} &= -2k\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}T^i - k^3 N^i + \frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}s^2}N^i + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\left(-kT^i + \tau B^i\right) + \frac{\mathrm{d}(k\tau)}{\mathrm{d}s}B^i - k\tau^2 N^i =\\
&= -3k\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}T^i + \left(-k^3 + \frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}s^2} - k\tau^2\right)N^i + \left(\tau\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}(k\tau)}{\mathrm{d}s}\right)B^i.
\end{aligned}$$

Njihove vrednosti su:

$$\begin{aligned}
&a = k,\\
&x = -k^2, \quad y = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}, \quad z = \kappa\tau,\\
&u = -3k\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}, \quad v = -k^3 + \frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}s^2} - k\tau^2, \quad w = \tau\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}(k\tau)}{\mathrm{d}s}.
\end{aligned}$$

Smenom ovih izraza u $zu - xw$, dobijamo

$$\begin{aligned}
(zu - xw) &= -3k^2\tau\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s} + 2k^2\tau\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s} + k^3\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} =\\
&= -k^2\tau\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s} + k^3\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = k^2\left(k\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} - \tau\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\right) =\\
&= k^4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\tau}{k}\right).
\end{aligned}$$

Onda je konačno

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\delta T^i}{\delta s}\frac{\delta^2 T^j}{\delta s^2}\frac{\delta^3 T^k}{\delta s^3} = a(zu - xw) = k^5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\left(\frac{\tau}{k}\right).$$

b) Prema tome, ako je $\tau/k = \text{const.}$, onda je

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\delta T^i}{\delta s}\frac{\delta^2 T^j}{\delta s^2}\frac{\delta^3 T^k}{\delta s^3} = 0.$$

Obrnuto, ako je

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\delta T^i}{\delta s}\frac{\delta^2 T^j}{\delta s^2}\frac{\delta^3 T^k}{\delta s^3} = 0,$$

onda je $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\tau}{k}\right) = 0$, pa je $\tau/k = \text{const.}$.

23. Površ S kao dvodimenzionalni Rimanski prostor u $\mathbb{E}_3$

23.1 Predstavljanje površi u $\mathbb{R}_3$

Površ S je potprostor prostora $\mathbb{R}_3$.
Postoje tri glavna načina predstavljanja površi:
- **parametarski**,
- **implicitni** i
- **eksplicitni**.

Svaki od ovih oblika predstavljanja površi ima svoje prednosti.
i) Parametarski način predstavljanja

Definicija 23.1.1 **Površ** u $\mathbb{R}_3$ je potskup $S \subset \mathbb{R}^3$, takav da za svaku tačku $\mathbf{x} \in S$ postoji okolina V u $\mathbb{R}^3$ i preslikavanje $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2) : U \to V \cap S$ oblika

$$\mathbf{x} = (x(u^1, u^2), y(x(u^1, u^2)), z(x(u^1, u^2))) \tag{23.1}$$

otvorenog skupa $(u^1, u^2) \in U \subset \mathbb{R}^2$ na $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, a koje zadovoljava sledeće uslove:

$\mathbf{x}$ je iz klase C^3,

x je homeomorfizam,
x je regularno u svakoj tački $\mathbf{y} \in U$.

Definicija 23.1.2 Par $(U, \mathbf{x})$ se naziva **lokalna parametrizacija**, ili **karta**, ili **lokalni koordinatni sistem** za $\mathbf{x} \in S$.

Poslednji uslov kaže da je u svakoj tački $(u^1, u^2) \in U$ vektorski proizvod

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \neq 0. \tag{23.2}$$

To znači da $\mathbf{x}$ nije konstanta, niti funkcija, samo od u^1 ili u^2, tj. da S nije ni tačka niti kriva linija. Takođe to znači da su vektori $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}$ i $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}$ linerano nezavisni u svakoj tački $(u^1, u^2) \in U$.

Za reprezentaciju (23.1), koja zadovoljava uslove Definicije, kaže se da je **dopustiva reprezentacija**. Tačke u kojima je taj uslov zadovoljen nazivaju se **regularne tačke**, za razliku od **singularnih tačaka** u kojima taj uslov nije zadovoljen.

U komponentalnom obliku, u odnosu na Dekartove koorinate $z^i(z^1 = x, z^2 = y, z^3 = z)$, jednačina površi je data izrazom

$$S : z^i = z^i(u^1, u^2). \tag{23.3}$$

Uvodeći krivolinijske koordinate x^i, $i = (1, 2, 3)$, umesto Dekartovih koordinata z^j, transformacijom $x^i = x^i(z^j)$, $i, j = 1, 2, 3$, dobijamo $x^i = x^i(z^j(u^1, u^2))$, ili

$$x^i = x^i(u^\alpha), \quad (\alpha = 1, 2), \tag{23.4}$$

što predstavlja najopštiji oblik površi S pod uslovom da je rang Jakobijana

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \right),$$

saglasno sa (23.2), u tačkama $u^1, u^2 \in U$, jednak dva.

Dve glavne teoreme koje se odnose na površ: Stoksova teorema i Teorema o divergenciji su najčešće date u parametarskom obliku. Krivina, luk krive na površi, površina povši, invarijante diferencijalne geometrije, kao što su prva i druga fundamentalna forma, Gausova srednja krivina i glavne krivine, izračunavaju se korišćenjem parametrizacije površi.

Za dopustivu parametrizaciju $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2)$ i fiksnu vrednost $u^2 = c$, funkcija $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, c)$ određuje krivu liniju na površi. Nazivamo je u^1-kriva. Na isti način za fiksno $u^1 = d$, funkcija $\mathbf{x} = \mathbf{x}(d, u^2)$ određuje u^2-krivu. Za neprekidnu promenu vrednosti u^1 i u^2 u U dobijamo dve familije funkcionalno nezavisnih krivih linija na površi S. One određuju površinske koordinate tačaka površi S. Nazivaju se **Gausovi parametri površi**.

N Često se umesto parametara u^1 i u^2 koriste oznake u i v. To je najčešće slučaj kada je reč o konkretnim zadacima. To je analogon oznaka $z^1 = x$, $z^2 = y$, $z^3 = z$, koji je uobičajen kada je reč o $\mathbb{E}_3$. Ilustovaćemo to na sledećim primerima.

■ **Primer 23.1** Parametrizacija sfere poluprečnika r:

$$\mathbf{x}(u,v) = (r\cos v\cos u,\ r\cos v\sin u,\ r\sin v)\,,$$

$$(u,v) : U \to V \cap S, \quad 0 \le u < 2\pi, \quad -\frac{1}{2}\pi \le v < \frac{1}{2}\pi,$$

je dopustiva parametrizacija.

Rang Jakobijana

$$J = \begin{pmatrix} -r\cos v\sin u & -r\sin v\cos u \\ r\cos v\sin u & -r\sin v\sin u \\ 0 & r\cos v \end{pmatrix}$$

je dva u posmatranoj oblasti U. ■

Koordinatne krive $u = \text{const.}$ i $v = \text{const.}$ su ”meridijani (longitudinale)”i ”paralele (latitude)”, redom. ”Ekvator”je definisan sa $v = 0$, a polovi sa $v = \pm\frac{\pi}{2}$. U polovima rang matrice J jednak je jedan, tj. ove tačke su singularne za datu reprezentaciju sfere. Svaka koordinatna kriva $u = \text{const.}$ prolazi kroz ove tačke, a krive $v = \pm\frac{\pi}{2}$ degenerišu u te tačke.

■ **Primer 23.2** Parametrizacija

$$\mathbf{x}(u,v) = (u+v,\ (u+v)^2,\ (u+v)^3)$$

nije dopustiva, jer je rang njenog Jakobijana najviše 1 u tačkama $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Pokazati! ■

ii) Implicitni način predstavljanja.

Onda je površ oblika

$$F(x,y,z) = 0. \tag{23.5}$$

Implicitni način predstavljanja površi je invarijantan u odnosu na bilo koju dopustivu parametrizaciju. Suprotno od (23.5), parametarska reprezentacija površi u obliku (23.4) nije jedinstvena. U stvari, postoji beskonačno mnogo krivolinijskih koordinatnih sistema koji se mogu koristiri za lociranje tačaka na datoj površi. Tako, bilo koja koordinatna transformacija

$$\bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(u^\beta) \quad \alpha, \beta = 1, 2, \tag{23.6}$$

$$\left| \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} \right| \neq 0, \tag{23.7}$$

gde $\bar{u}^\alpha(u^\beta) \in C^1$ daje različite skupove parametarskih jednačina

$$z^i = f^i(\bar{u}^\alpha)$$

koji definišu istu površ S.

■ **Primer 23.3** Ista sfera poluprečnika r

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

■

iii) Eksplicitan oblik. Ako se jednačina površi, data u implicitnom obliku, može rešiti po jednoj od promeljivih, recimo z, kao funkcija ostalih promenljivih x, y, dobijamo eksplicitan oblik jednačine povši u $\mathbb{E}_3$

$$z = f(x, y). \tag{23.8}$$

Eksplicitan način predstavljanja, kada je to moguće, je posebno pogodan pri geometrijskoj reprezentaciji površi.

Od interesa je predstavljanje tako definisane površi, smenom $x = u$, $y = v$, u sledećem parametarskom obliku

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v),) \tag{23.9}$$

poznat je pod imenom **Monžova**[1] **parametrizacija**.

■ **Primer 23.4**

$$z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

reprezentuje jedan od dva dela sfere $z \geq 0$ ili $z \leq 0$. ■

Zadatak 23.1 Data je površ

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = (a \cos u^1, a \sin u^1, u^2).$$

Ispitati matricu J i površ predstaviti u implicitnom obliku. ■

[1] Monge

23.2 Prirodna i dualna baza vektora na S

Definišući unutrašnji proizvod u $\mathbb{R}^3$, dobijamo Euklidski proizvod $\mathbb{E}_3$. Prema tome, nadalje pretpostavljamo da je $S \subset \mathbb{E}_3$ i kao takav metrički prostor.

Striktno ćemo praviti razliku između tačke $\mathbf{x}$ na S i njenog vektora položaja $\mathbf{r}$. Za razliku od $\mathbf{x}$, koja je na S, pa prema tome i u $\mathbb{E}_3$, njen vektor položaja pripada samo $\mathbb{E}_3$ i ima smisla samo u Euklidskim prostorima. To se mora imati u vidu pri njihovom korišćenju u odgovarajućim izrazima. Takav izraz je i jednačina površi S data preko vektora položaja

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i(u^\alpha)). \tag{23.10}$$

Time se naglašava da se površ S razmatra sa stanovišta prostora $\mathbb{E}_3$.

Iz (23.35) sledi da

$$\mathbf{a}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} \quad (\alpha = 1,2) \tag{23.11}$$

definišu prirodne bazne vektore na S. Za svako $\alpha = 1,2$, vektor $\mathbf{a}_\alpha$ predstavlja tangentni vektor koji odgovara koordinatnoj krivoj liniji u^α. Da tako određeni vektori $\mathbf{a}_\alpha$ definišu bazu, sledi iz činjenice da su linearno nezavisni:

$$\lambda^\alpha \mathbf{a}_\alpha = 0 \Rightarrow \lambda^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \mathbf{g}_i = 0 \Rightarrow \lambda^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = 0 \Rightarrow \lambda^\alpha = 0,$$

jer je rang $\left| \dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \right| = 2.$

Kako S pripada $\mathbb{E}_3$, tj. $S \subset \mathbb{E}_3$ bilo koji vektor na S pripada $\mathbb{E}_3$, ali ne i obrnuto.

U datoj taćki P, na S, vektori $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$ definišu tangentnu ravan na S u P. Onda bilo koja njihova linearna kombinacija

$$\lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_2, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

je vektor koji pripada toj tangentnoj ravni. Drugačije rečeno, kažemo da ti vektori pripadaju S u P. Generalno, tangentne ravni u različitim tačkama P i Q na S, nemaju ni jedne zajedničke tačke. To nije slučaj sa tangentnim ravnima u $\mathbb{E}_2$: sve se one podudaraju. Ovo svojstvo površi (potopljene u $\mathbb{E}_3$) je jedan od razloga zašto izučavamo lokalna svojstva površi, tj. zašto se bavimo diferencijalnom geometrijom Rimanskih prostora.

23.3 Metrički tenzor

Linijski element u $\mathbb{E}_3$ je dat izrazom

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}, \tag{23.12}$$

gde je

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i = \mathbf{g}_i dx^i, \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}. \tag{23.13}$$

Onda je

$$ds^2 = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j, \tag{23.14}$$

gde je

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \tag{23.15}$$

osnovni metrički tenzor u $\mathbb{E}_3$.

Ako je linijski element ds u S onda, koristeći (23.35), pišemo

$$\begin{aligned} ds^2 = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j dx^i dx^j = \left(\mathbf{g}_i \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right) \cdot \left(\mathbf{g}_j \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\right) du^\alpha du^\beta = \\ = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta du^\alpha du^\beta = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \end{aligned}$$

gde je

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{g}_i \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \tag{23.16}$$

i

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}. \tag{23.17}$$

Površinski tenzor $a_{\alpha\beta}$ je simetričan, pozitivno definitan i nazivamo ga **fundamentalni površinski metrički tenzor** od S. Prema tome, kažemo da je **metrika** na S **indukovana metrikom** iz $\mathbb{E}_3$.

Kvadratna forma

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \tag{23.18}$$

naziva se **prva kvadratna forma površi**.

Na način kako je izvedena kvadratna forma (23.18) je indukovana metrikom $\mathbb{E}_3$.

N U literaturi se često vrši sledeća identifikacija:

$$u^1 = u, \quad u^2 = v, \quad g_{11} = E, \quad g_{12} = F, \quad g_{22} = G. \tag{23.19}$$

Onda se kvadratna forma (23.18) piše u razvijenom obliku kao

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F du dv + G dv^2. \tag{23.20}$$

Euklidska geometrija izučava ravne prostore. Već smo napomenuli da je egzistencija Dekartovog koordinatnog sistema njihova karakteristika. Između ostalog, svaka prava linija proteže se u beskonačnost. Takođe, duž koja spaja bilo koje dve tačke na pravoj liniji je njihovo najkraće rastojanje i jedinstveno je. Takve linije ne postoje, primera radi, na sferi koja je potprostor Euklidskog prostora. On je takođe metrički ali linije najkraćeg rastojanja između polova, nisu ni prave ni jedinstvene. Sve to ukazuje na postojanje prostora koji nisu Euklidski. Nas nadalje interesuju takvi prostori koje izučava Rimanska geometrija koristeći tenzorski račun kao adekvatan matematički aparat. Ovi prostori imaju daleko bogatiju geometriju i od velikog značaja su u primeni u drugim naučnim disciplinama kao što su, primera radi, mehanika i fizika.

Metrika koja je definisana kvadratnom diferencijalnom formom naziva se **Rimanova metrika**. Odgovarajuća geometrija se naziva **Rimanova geometrija**, a prostor takve matrike se naziva **Rimanski prostor**. Prema tome, površi su dvodimenzionalni Rimanski prostori, a njihova gemetrija je Rimanska geometrija.

Prednost izučavanja diferencijane geometrije površi metodama tenzorskog računa je mogućnost neposredne generalizacije Rimanskih prostora većih dimenzija. Pored toga, teorija površi se znatno uprošćava korišćenjem tenzorskog računa, što nam omogućava bolje i dublje sagledavanje niza problema diferencijalne geometrije. U opštem slučaju, u prostor od n-dimenzija uvodimo realne koordinate u^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, i metriku definisanu kvadratnom formom

$$\mathrm{d}s^2 = a_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta \tag{23.21}$$

istog oblika kao u slučaju dvodimenzionalnog prostora. Pretpostavljamo da su koeficijenti $a_{\alpha\beta}$ simetrični i pozitivno definitni. U teoriji relativnosti pretpostavka pozitivne definitnosti se izostavlja.

Nadalje se zadržavamo na izučavanju diferencijalne geometrije dvodimenzionalnog prostora - površi u najopštijem obliku.

Uobičajeno je, u cilju pojednostavljivanja zapisa, da pišemo

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = x^i_{,\alpha}. \tag{23.22}$$

Tada je

$$\mathbf{a}_\alpha = x^i_{,\alpha}\mathbf{g}_i. \tag{23.23}$$

Onda, za bilo koje $\mathbf{v}$ na S možemo pisati

$$\mathbf{v} = v^i\mathbf{g}_i = v^\alpha\mathbf{a}_\alpha. \tag{23.24}$$

Odavde i iz (23.23) dobijamo

$$v^i = v^\alpha x^i_{,\alpha}. \tag{23.25}$$

Očigledno, kako je $\mathbf{v}$ na S, imamo da je

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = g_{ij} v^i v^j.$$

Ali, iz (23.24) i (23.17) za $\mathbf{v}$ na S sledi

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (v^\alpha \mathbf{a}_\alpha) \cdot (v^\beta \mathbf{a}_\beta) = a_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta. \tag{23.26}$$

Nastavljamo dalje sa ciljem da odredimo **recipročnu (dualnu) bazu $\mathbf{a}^\alpha$** baze $\mathbf{a}_\alpha$ kao u $\mathbb{E}_3$. Po definiciji je

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta. \tag{23.27}$$

Prema tome je

$$\mathbf{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta$$

gde su $a^{\alpha\beta}$ **koeficijenti razlaganja vektora $\mathbf{a}^\alpha$** u odnosu na bazne vektore $\mathbf{a}_\alpha$.

Koeficijenti razlaganja vektora recipročne baze $\mathbf{a}^\alpha$ su komponente inverznog konjugovanog tenzora

$$a^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta, \tag{23.28}$$

tj.

$$a_{\alpha\gamma} a^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta, \tag{23.29}$$

gde je δ_α^β dvodimenezionalni Kronekerov simbol.

Lako je pokazati da postoje sledeće relacije između njihovih komponenti:

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{a}, \quad a^{12} = a^{21} = -\frac{a_{12}}{a}, \quad a^{22} = \frac{a_{11}}{a}, \tag{23.30}$$

gde je

$$a = \det(a_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - (a_{12})^2. \tag{23.31}$$

N Koristeći uobičajene oznake, navedene u prethodnoj Napomeni (vidi (23.19) i (23.20)), izraz (23.31) pišemo takođe u obliku

$$a = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2. \tag{iii}$$

Uočimo, da u bilo kojoj tački P na S $\{\mathbf{a}^\alpha\}$ pripada istoj tangentnoj ravni koja je definisana prirodnom bazom vektora $\mathbf{a}_\alpha$ u P.

Na isti način, kao u $\mathbb{E}_3$, pri koordinatnoj transformaciji

$$\bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(u^\beta), \quad \det\left(\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}\right) \neq 0, \tag{23.32}$$

imamo

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \mathbf{a}_\beta \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha}, \tag{23.33}$$

$$\bar{\mathbf{a}}^\alpha = \mathbf{a}^\beta \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}. \tag{23.34}$$

Onda je, saglasno sa (23.17),

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = a_{\gamma\delta} \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta} \tag{23.35}$$

zakon transformacije osnovnog metričkog tenzora.

Lako je pokazati da je

$$\bar{a}^{\alpha\beta} = a^{\gamma\delta} \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\gamma} \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\delta} \tag{23.36}$$

zakon transformacije tenzora $a^{\alpha\beta}$.

23.4 Hibridni tenzor

Veličina $x^i_{,\alpha}$ predstavlja komponente razlaganja baznih vektora $\mathbf{a}_\alpha$ povši S u odnosu na bazne vektore $\mathbf{g}_i$ prostora $\mathbb{E}_3$. Veličine $x^i_{,\alpha}$ imaju tenzorski karakter u odnosu na transformacije koordinatnog sistema x^i i sistema u^α nezavisno. Tako je pri prostornoj transformaciji sistema

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j), \quad \det\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right) \neq 0,$$

biće

$$\bar{x}^i_{,\alpha} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} x^j_{,\alpha}. \tag{23.37}$$

Na isti način, pri povšinskoj transformaciji (23.32), biće

$$x^i_{,\bar{\alpha}} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} = \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} x^i_{,\beta}. \tag{23.38}$$

Tenzor $x^i_{,\alpha}$ uspostavlja vezu između dva koordinatna sistema. On pridružuje prostorne i povšinske tenzore. Primera radi, neka je A^α kontravarijantni površinski vektor. Onda je

$$A^i = x^i_{,\alpha} A^\alpha$$

njemu asocirani prostorni vektor. Kako je vektor A^α u povši S, onda je A^i tangentan na površ.

Na sličan način, ako je A_i kovarijantni prostorni vektor, onda je

$$A_\alpha = x^i_{,\alpha} A_i$$

njemu pridruženi kovarijanti površinski vektor.

Definicija 23.4.1 Uopšte, tenzor

$$A^{i\dots j\alpha\dots\beta}_{k\dots l\chi\dots\delta}$$

koji se transformiše kao prostorni tenzor po latiničnim indeksima i površinski po grčkim indeksima nazivamo **hibridni tenzor**. U literaturi se koristi i termin **dvostruka tenzorska polja**.

23.5 Permutacioni površinski tenzor

Već smo se ranije susretali sa permutacionim tenzorom u Rimanskom prostoru. Njegov analogon na povši obeležavamo sa

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{a}\, e_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\alpha\beta}. \tag{23.39}$$

Kao što smo ranije pokazali (vidi Lema 14.5.1, na str. 341) $\varepsilon_{\alpha\beta}$ i $\varepsilon^{\alpha\beta}$ su apsolutni tenzori. Između njih postoji relacija

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} \varepsilon^{\gamma\delta}$$

koja ujedno predstavlja primer operacije spuštanja indeksa pomoću osnovnog tenzora $a_{\alpha\beta}$. Važi i obrnuto

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}.$$

Kao još jedan primer korišćenja površinskih permutacionih tenzora zadržaćemo se na određivanju $\sin\varphi$, gde je φ ugao između površinskih jediničnih vektora **A** i **B**.

Problem 9

Pokazati da je

$$\sin\varphi = \varepsilon_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta.$$

Rešenje

Znamo da je

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sin\varphi\, \mathbf{n}.$$

S druge strane je

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = A^\alpha \mathbf{a}_\alpha \times B^\beta \mathbf{a}_\beta = \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta A^\alpha B^\beta = \varepsilon_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta\, \mathbf{n}.$$

Iz ove dve jednakosti sledi
$$\sin\varphi = \varepsilon_{\alpha\beta}A^{\alpha}B^{\beta}.$$
Analizirajmo vektor $\varepsilon_{\alpha\beta}A^{\alpha} = C_{\beta}$. Iz relacije
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = \varepsilon_{\alpha\beta}A^{\alpha}A^{\beta} = 0$$
sledi da su vektori A^{α} i $C_{\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}A^{\alpha}$ ortogonalni.

Intezitet vektora $\mathbf{C}$ jednak je jedan. Zaista,
$$C_{\beta}C^{\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}A^{\alpha}C^{\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}A^{\alpha}\varepsilon^{\gamma\beta}A_{\gamma} = \delta^{\gamma}_{\alpha}A^{\alpha}A_{\gamma} = A^{\alpha}A_{\alpha} = 1.$$
Znači, vektor $C_{\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}A^{\alpha}$ se dobija rotacijom vektora A^{α} za ugao $\pi/2$ u pozitivom smeru.

23.6 Vektor normale na S

Iz
$$\mathbf{a}_{\alpha} = x^{i}_{;\alpha}\mathbf{g}_{i}$$
vidimo da $\mathbf{g}_i$ ne može biti izraženo preko $\mathbf{a}_{\alpha}$, jer $\mathbf{g}_i$ pripada $\mathbb{E}_3$, a ne S. Za takvu reprezentaciju $\mathbf{g}_i$ potreban je još vektor linearno nezavisan od $\mathbf{a}_{\alpha}$. Takav vektor može biti definisan vektorskim proizvodom
$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2.$$
Lako je pokazati da su $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ i $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ linearno nezavisni
$$\begin{aligned} &\lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2 + \nu\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = 0 \quad |\cdot\mathbf{a}_1 \quad |\cdot\mathbf{a}_2 \\ \Rightarrow \quad &\left.\begin{aligned} \lambda a_{11} + \mu a_{12} = 0 \\ \lambda a_{21} + \mu a_{22} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \mu = 0, \end{aligned}$$
jer je
$$\begin{aligned} &\det a_{\alpha\beta} \neq 0 \\ \Rightarrow \quad &\mu\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \Rightarrow \mu = 0. \end{aligned}$$
Pogodno je dalje da se koristi jedinični vektor $\mathbf{n}$ vektora $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$, tj.
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}. \tag{23.40}$$
Sa geometrijskog stanovišta jedinični vektor $\mathbf{n}$ je vektor normale S u P.

Dalje je

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^2 = \mathbf{a}_1^2 \cdot \mathbf{a}_2^2 - (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \det a_{\alpha\beta} = a,$$

tako da je

$$|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2| = \sqrt{a}.$$

Onda je

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta,$$

pa je

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2} \frac{e^{\alpha\beta}}{\sqrt{a}} \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta. \tag{23.41}$$

Takođe je

$$\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{n}.$$

Iz (23.41) i (23.23) sledi da je

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j x^i_{;\alpha} x^j_{;\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{ijk} x^i_{;\alpha} x^j_{;\beta} \mathbf{g}^k,$$

pri čemu smo koristili $\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j = \varepsilon_{ijk} \mathbf{g}^k$. Znači,

$$n_i = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{ijk} x^j_{;\alpha} x^k_{;\beta}. \tag{23.42}$$

Tako definisani skup vektora $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n}$, sada čini bazu $\mathbb{E}_3$ u tačkama S. Onda bilo koja veličina definisana na S može biti jednoznačno predstavljena u toj bazi. To se odnosi i na skup $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{n}$, koji čine drugu bazu $\mathbb{E}_3$ u tačkama S.

Zadatak 23.7

Pokazati da je

$$\mathbf{a}^1 = \sqrt{a}\, \mathbf{a}_2 \times \mathbf{n} \quad \text{i} \quad \mathbf{a}^2 = -\sqrt{a}\, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{n}.$$

Rešenje

Polazimo od

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta = 2\mathbf{n}.$$

Onda je

$$\mathbf{a}_\gamma \times \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{a}^\beta) = 2\mathbf{a}_\gamma \times \mathbf{n}.$$

U razvijenom obliku je

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\gamma \times (\mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{a}^\beta) &= \varepsilon_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\gamma(\mathbf{a}^\beta \otimes \mathbf{a}^\alpha - \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{a}_\gamma \cdot \mathbf{a}^\beta)\mathbf{a}^\alpha - \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{a}_\gamma \cdot \mathbf{a}^\alpha)\mathbf{a}^\beta = \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta}\delta_\gamma^\beta \mathbf{a}^\alpha - \varepsilon_{\alpha\beta}\delta_\gamma^\alpha \mathbf{a}^\beta = 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\mathbf{a}^\alpha = 2\mathbf{a}_\gamma \times \mathbf{n},\end{aligned}$$

gde smo koristili $\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta$. Prema tome je

$$\varepsilon_{\alpha\gamma}\mathbf{a}^\alpha = \mathbf{a}_\gamma \times \mathbf{n},$$

odakle sledi da je za $\gamma = 1$

$$\sqrt{a}\,\mathbf{a}^2 = -\mathbf{a}_1 \times \mathbf{n},$$

a za $\gamma = 2$

$$\sqrt{a}\,\mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{n}.$$

■ **Primer 23.5**

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^i &= A^i_\alpha \mathbf{a}^\alpha + A^i \mathbf{n} \\ &\Rightarrow A^i_\alpha = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{a}_\alpha = x^i_{;\alpha} \\ &\Rightarrow A^i = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{n} = n^i \\ &\Rightarrow \mathbf{g}^i = x^i_{;\alpha}\mathbf{a}^\alpha + n^i \mathbf{n}.\end{aligned} \tag{23.43}$$

■

Ovo je veoma korisna formula. Tako je

■ **Primer 23.6**

$$\begin{aligned}& g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = (x^i_{;\alpha}\mathbf{a}^\alpha + n^i\mathbf{n}) \cdot (x^j_{;\beta}\mathbf{a}^\beta + n^j\mathbf{n}) \\ \Rightarrow\ & g^{ij} = a^{\alpha\beta}x^i_{;\alpha}x^j_{;\beta} + n^i n^j.\end{aligned} \tag{23.44}$$

■

Njegova geometrijska reprezentacija je jasnija ako se napiše u dijadskom obliku

$$\mathbf{g} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha$$

gde je $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ ortogonalni projektor na S (duž vektora normale $\mathbf{n}$), a $\mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha$ projektor u tangentnoj ravni na površi S. Sada je lako predstaviti bilo koji vektor $\mathbf{V}$ u $\mathbb{E}_3$ u tačkama površi S. Tako je

$$\mathbf{V} = V_i \mathbf{g}^i = V_i\left(n^i \mathbf{n} + x^i_{,\alpha}\mathbf{a}^\alpha\right) = V_n \mathbf{n} + V_\alpha \mathbf{a}^\alpha, \tag{23.45}$$

gde je $V_n = V_i n^i$, $V_\alpha = V_i x^i_{,\alpha}$. Vrlo često se koristi njegovo predstavljanje u komponentalnom obliku

$$V^i = V_n n^i + V^\alpha x^i_{,\alpha}. \tag{23.46}$$

Sledeći primer je tenzor drugog reda $\mathbf{T} = T_{ij}\,\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$. Onda je

$$\begin{aligned}\mathbf{T} = T_{ij}\,\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = T_{ij}\left(n^i\,\mathbf{n} + x^i_{,\beta}\,\mathbf{a}^\alpha\right) \otimes \left(n^j\,\mathbf{n} + x^j_{,\alpha}\,\mathbf{a}^\beta\right) = \\ = T_{nn}\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + T_\alpha\,\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{n} + S_\alpha\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{a}^\alpha + S_{\alpha\beta}\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta,\end{aligned} \tag{23.47}$$

gde su:

$$T_{nn} = T_{ij}n^i n^j, \quad T_\alpha = T_{ij}x^i_{,\alpha}n^j, \quad S_\alpha = T_{ij}n^i x^j_{,\alpha}, \quad S_{\alpha\beta} = T_{ij}x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}. \tag{23.48}$$

Pišemo ga u komponentalnom obliku

$$T^{ij} = T_{nn}n^i n^j + T^\alpha x^i_{,\alpha}n^j + S^\alpha n^i x^j_{,\alpha} + S^{\alpha\beta}x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}. \tag{23.49}$$

U slučaju kada je tenzor $\mathbf{T}$ simetričan, biće $T_\alpha = S_\alpha$ i $S^{\alpha\beta} = S^{\beta\alpha}$. Tada se (23.49) svodi na oblik

$$T^{ij} = T_{nn}n^i n^j + T^\alpha\left(x^i_{,\alpha}n^j + n^i x^j_{,\alpha}\right) + S^{\alpha\beta}x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}. \tag{23.50}$$

Na isti način se može izvesti predstavljanje tenzora trećeg i viših redova. Predstavljanje tih tenzora je veoma složeno i kao takve od manje koristi u njihovoj primeni.

23.7.1 Promena baznih vektora. Drugi fundamentalni tenzor

Izračunavanje promena bilo kog tenzorskog polja na S, pretpostavlja se poznavanje promena vektora $\mathbf{a}_\alpha$ i $\mathbf{n}$, tj.

$$\frac{\partial\mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} \quad \text{i} \quad \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial u^\alpha}.$$

Počećemo od $\dfrac{\partial\mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}$.

Iz (23.23) imamo

$$\frac{\partial\mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}\mathbf{g}_i + \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial\mathbf{g}_i}{\partial u^\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha u^\beta}\mathbf{g}_i + \frac{\partial\mathbf{g}_i}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta},$$

tj.

$$\frac{\partial\mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial u^\alpha u^\beta} + \left\{ {k \atop ij} \right\}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\right)\mathbf{g}_k. \tag{23.51}$$

Prema tome, u opštem slučaju $\dfrac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}$ ne pripada S. Znači

$$\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u_\beta} = A^\gamma_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\gamma + b_{\alpha\beta}\mathbf{n},$$

gde su $A^\gamma_{\alpha\beta}$ i $b_{\alpha\beta}$ koeficijenti razlaganja $\dfrac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}$. Međutim,

$$A^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u_\beta}\cdot \mathbf{a}^\gamma = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}.$$

Postupak je ista kao i za $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\} = \dfrac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}\cdot \mathbf{g}^k$, tako da je

$$\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u_\beta} = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}\mathbf{a}_\gamma + b_{\alpha\beta}\mathbf{n}. \tag{23.52}$$

Takođe, iz

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \mathbf{a}_\beta \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha},$$

zaključujemo da je

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} - \mathbf{a}_\gamma \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}. \tag{23.53}$$

Onda, iz (23.52) i (23.53), imamo da je

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = b_{\alpha\beta}\mathbf{n}, \tag{23.54}$$

gde je

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta}\cdot \mathbf{n}. \tag{23.55}$$

Kako je $\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \mathbf{a}_{\beta,\alpha}$ (vidi (23.53)), sledi da je

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}, \tag{23.56}$$

tj. $b_{\alpha\beta}$ je simetričan tenzor.

Tako definisani tenzor se naziva **drugi fundamentalni tenzor** (i zajedno sa $a_{\alpha\beta}$ — **prvim fundamentalnim tenzorom**) je zaista fundamentalan, kao što ćemo videti, pri izučavanju geometriskih svojstava S.

Njegov eksplicitan oblik može se lako dobiti iz (23.55), (23.53), (23.51) i (23.43).

Druga mogućnost određivanja $b_{\alpha\beta}$ dobija se iz izraza

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{n}_{;\beta} \tag{23.57}$$

koji sledi iz (23.55) i $\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$.

Ako pođemo od $\mathbf{a}^\alpha$ onda je lako dokazati da je

$$\frac{\partial \mathbf{a}^\alpha}{\partial u^\beta} = -\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} \mathbf{a}^\gamma + b^\alpha_\beta \mathbf{n}, \tag{23.58}$$

gde je

$$b^\alpha_\gamma = a^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma}, \tag{23.59}$$

a odavde

$$\mathbf{a}^\alpha_{,\beta} = b^\alpha_\beta \mathbf{n}. \tag{23.60}$$

U konkretnim problemima često nam je potreban eksplicitan izraz za tenzor krivine $b_{\alpha\beta}$ kao relacija između Kristofelovih simbola $\left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\}$ i $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\}$, redom, površi i obvojnog Euklidkog postora $\mathbb{E}_3$.

Tako množeći skalrno (23.51) sa $\mathbf{n}$, dobijamo da

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \right) n_k.$$

Takođe, množeći skalarno (23.51) sa $\mathbf{a}^\gamma$, sledi da je

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}^\gamma = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \right) a^{\gamma\delta} g_{kl} x^l_{,\delta}.$$

Teorema 23.7.1 Neka je S ravan u E_3.

a) Pokazati da je njena druga fundamentalna forma jednaka nuli.
b) Obrnuto, ako je druga fundamentalna forma površi S u E_3 jednaka nuli, onda je površ ravan.

Dokaz

a) Jednačina ravnu u E_3 je

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = \text{const}.$$

gde je $\mathbf{c}$ konstantan vektor. Onda je

$$0 = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})_{,\alpha} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha} \quad \Rightarrow \quad 0 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha\beta} = \mathbf{c} \cdot b_{\alpha\beta}\mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad b_{\alpha\beta} = 0.$$

jer je $\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ (Zašto?).

b) Neka je $b_{\alpha\beta} = 0$ u svim tačkama glatke površi

$$S : \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^\alpha), \quad \alpha = 1, 2$$

u E_3. Neka je $\mathbf{n}$ jedinični vektor normale, dok su $\mathbf{a}_\alpha = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}$ bazni vektori na S. Onda je

$$\mathbf{n}\cdot \mathbf{a}_\alpha = 0.$$

Takođe je, pod uslovom teoreme,

$$\mathbf{n}_{,\alpha} = -b_{\alpha\beta}\,\mathbf{a}^\alpha = \mathbf{0}.$$

Znači $\mathbf{n} = \text{const.}$
Tada je

$$(\mathbf{x}\cdot \mathbf{n})_{,\alpha} = \mathbf{x}_{,\alpha}\cdot \mathbf{n} + \mathbf{x}\cdot \mathbf{n}_{,\alpha} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0,$$

odakle sledi da je

$$\mathbf{x}\cdot \mathbf{n} = \text{const.}$$

što prestavlja jednačinu ravni u E_3.

23.8 Kristofelovi simboli na površi S

Izvode se na isti način kao i u slučaju E_3 u odnosu na krivolinijske koordinate x^i (videti formule (15.5)-(15.10), str. 360).

Tako je **Kristofelov simbol prve vrste**

$$[\alpha\beta,\gamma] = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}\cdot \mathbf{a}_\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\right). \tag{23.61}$$

Na isti način nalazimo da je **Kristofelov simbol druge vrste**

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}\cdot \mathbf{a}^\gamma = a^{\gamma\delta}\,[\alpha\beta,\delta]\,. \tag{23.62}$$

Od interesa je sledeći izraz

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial \log\sqrt{a}}{\partial u^\beta}, \tag{23.63}$$

kao i relacija između Kristofelovih simbola

$$[\alpha\beta,\gamma] = a_{\gamma\delta}\left\{ \begin{matrix} \delta \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}. \tag{23.64}$$

Pri koordinatnoj transformaciji $\bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(u^\beta)$ Kristofelovi simboli se transformišu na sledeći način

$$\overline{\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma\tau \end{matrix} \right\} \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\rho}\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\alpha}\frac{\partial u^\tau}{\partial \bar{u}^\beta} + \frac{\partial^2 u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta}\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\rho}, \tag{23.65}$$

odakle se lako dobija

$$\frac{\partial^2 u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha \partial \bar{u}^\beta} = \overline{\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}} \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\gamma} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma\tau \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\tau}{\partial \bar{u}^\beta}. \tag{23.66}$$

Zadatak 23.2 Odrediti Kristofelove simbole za jediničnu sferu

$$\mathbf{r}(u^1, u^2) = (\sin u^1 \cos u^2, \sin u^1 \sin u^2, \cos u^1).$$

■

Rešenje

Određujemo ih prema formuli

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}^\gamma.$$

Podsetimo se da je

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}, \quad \mathbf{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta.$$

Onda je

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} = (\cos u^1 \cos u^2, \cos u^1 \sin u^2, -\sin u^1), \\
\mathbf{a}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} = (-\sin u^1 \sin u^2, \sin u^1 \cos u^2, 0),
\end{aligned}$$

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 u^1 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{\alpha\beta}) = \sin^2 u^1, \quad a^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sin^2 u^1} \begin{pmatrix} \sin^2 u^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

U našem slučaju je

$$\mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{\sin^2 u^1} \mathbf{a}_2.$$

Takođe je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial u^1} &= \left(-\sin u^1 \cos u^2, -\sin u^1 \sin u^2, -\cos u^1\right), \\
\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial u^2} &= \left(-\cos u^1 \sin u^2, \cos u^1 \cos u^2, 0\right), \\
\frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial u^2} &= \left(-\sin u^1 \cos u^2, -\sin u^1 \sin u^2, 0\right).
\end{aligned}$$

Onda je

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}^\gamma = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}_\delta \, a^{\delta\gamma} = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}_\gamma a^{\gamma\gamma}.$$

Redom:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} &= \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial u^1} \cdot \mathbf{a}^1 = \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial u^1} \cdot \mathbf{a}_1 = 0, \\
\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} &= \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial u^2} \cdot \mathbf{a}_1 = 0, \\
\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} &= \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial u^2} \cdot \mathbf{a}_1 = -\sin u^1 \cos u^1, \\
\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} &= \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial u^1} \cdot \mathbf{a}^2 = \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial u^1} \cdot \mathbf{a}_2 \, a^{22} = \frac{1}{\sin^2 u^1} \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial u^1} \cdot \mathbf{a}_2 = 0, \\
\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{\sin^2 u^1} \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial u^2} \cdot \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sin^2 u^1} \sin u^1 \cos u^1 = \mathrm{ctg} u^1.
\end{aligned}$$

Prema tome neiščezavajući Kristofelovi simboli su samo

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} &= -\sin u^1 \cos u^1, \\
\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} &= \mathrm{ctg} u^1.
\end{aligned}$$

23.9 Izvod hibridnih tenzora

U opštem slučaju tenzorska polja mogu biti simultano definisana u S i $\mathbb{E}_3$. Zadržavamo se na prostom slučaju

$$\mathbf{T} = T^i_\alpha(x^k, u^\alpha) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{a}^\alpha. \tag{23.67}$$

Na $S: x^k = x^k(u^\alpha)$ je

$$\mathbf{T}(x^k(u^\alpha), u^\alpha) = T^i_\alpha(x^k(u^\alpha), u^\beta) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{a}^\alpha.$$

Želimo da nađemo $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}u^\alpha}$. Onda je

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}u^\alpha} &= \left(\left.\frac{\partial T^i_\beta}{\partial u^\alpha}\right|_x + \left.\frac{\partial T^i_\beta}{\partial x^j}\right|_u \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\right)\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{a}^\beta + T^i_\beta \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\otimes\mathbf{a}^\beta + T^i_\beta\mathbf{g}_i\otimes\frac{\partial \mathbf{a}^\beta}{\partial u^\alpha} = \\
&= \left(\frac{\partial T^i_\beta}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial T^i_\beta}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\right)\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{a}^\beta + T^i_\beta\left\{\begin{matrix} k \\ ij\end{matrix}\right\}\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{a}^\beta + \\
&+ T^i_\beta\mathbf{g}_i\otimes\left(-\left\{\begin{matrix} \beta \\ \alpha\gamma\end{matrix}\right\}\mathbf{a}^\gamma + b^\beta_\alpha\mathbf{n}\right) = \\
&= \left(\frac{\partial T^i_\beta}{\partial u^\alpha} - T^i_\gamma\left\{\begin{matrix} \gamma \\ \beta\alpha\end{matrix}\right\}\right)\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{a}^\beta + \\
&+ \left(\frac{\partial T^i_\beta}{\partial x^j} + T^k_\beta\left\{\begin{matrix} i \\ kj\end{matrix}\right\}\right)\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{a}^\alpha + T^i_\beta b^\beta_\alpha\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{n},
\end{aligned}
$$

gde je tenzor $b^\beta_\alpha\,\mathbf{n}$ dat sa (23.60).

Grupisanjem članova dobijamo

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}u^\alpha} &= \left(T^i_{\beta,\alpha} + T^i_{\beta,j}x^j_{,\alpha}\right)\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{a}^\alpha + T^i_\beta\, b^\beta_\alpha\,\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{n} = \\
&= T^i_{\beta;\alpha}\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{a}^\alpha + T^i_\beta b^\beta_\alpha\,\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{n},
\end{aligned}
\tag{23.68}
$$

gde je, po definiciji

$$
T^i_{\beta;\alpha} = T^i_{\beta,\alpha} + T^i_{\beta,j}x^j_{,\alpha}. \tag{23.69}
$$

Nazivamo ga **totalni izvod** od $T^i_\beta(x(u),u)$ u odnosu na u^α.

Uočimo njegov način obeležavanja ";" za razliku od oznake "," za parcijalni kovarijantni izvod.

Izraz (23.69) predstavlja generalizaciju totalnog i parcijalnog izvoda funkcije $f(x,y(x))$:

$$
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.
$$

Očigledno je $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, tj. totalni i parcijalni izvod se poklapaju, ako je f samo funkcija od x. U opšem slučaju to ne važi za hibridne tenzore. Na primer za tenzor $S^i_\alpha(u^\delta)$, koji ne zavisi od $x^i(u^\delta)$, biće

$$
S^i_{\alpha,j} = \frac{\partial S^i_\alpha}{\partial x^j} + \left\{\begin{matrix} i \\ jk\end{matrix}\right\} S^k_\alpha = \left\{\begin{matrix} i \\ jk\end{matrix}\right\} S^k_\alpha
$$

i ne mora biti nula, bez obzira što tenzor S^i_α zavisi samo od u^α.

Izvod $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}u^\alpha}$ može da se lako izvede na sledeći način

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}u^\alpha} = \mathbf{T}_{;\alpha} = (T^i_\beta \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{a}^\beta)_{;\alpha} = T^i_{\beta;\alpha}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{a}^\beta + T^i_\beta \mathbf{g}_{i;\alpha} \otimes \mathbf{a}^\beta + T^i_\beta \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{a}^\beta_{;\alpha}.$$

Ali

$$\mathbf{g}_{i;\alpha} = \mathbf{g}_{i,j} x^j_{;\alpha} = 0,$$

jer je

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i(x),$$

i

$$\mathbf{a}^\beta_{;\alpha} = \mathbf{a}^\beta_{,\alpha}$$

jer je

$$\mathbf{a}^\beta = \mathbf{a}^\beta(u).$$

Prema tome

$$\mathbf{T}_{;\alpha} = T^i_{\beta;\alpha}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{a}^\beta + T^i_\beta \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{a}^\beta_{,\alpha} = T^i_{\beta;\alpha}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{a}^\alpha + T^i_\beta b^\beta_\alpha \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{n}. \tag{23.70}$$

Primer 13

$$x^i = x^i(u^\alpha) \Rightarrow x^i_{;\alpha} = x^i_{,\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}. \tag{23.71}$$

Važan zaključak. Sve navedene oznake za ovaj hibridni tenzor ravnopravno se koriste.

■ Primer 23.7

$$\begin{aligned} x^i_{;\alpha\beta} &= (x^i_{;\alpha})_{,\beta} + (x^i_{;\alpha})_{,j} x^j_{;\beta} = (x^i_{,\alpha})_{,\beta} + (x^i_{,\alpha})_{,j} x^j_{,\beta} = \\ &= \frac{\partial}{\partial u^\beta} x^i_{,\alpha} - x^i_{,\gamma}\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} + \left(\frac{\partial}{\partial x^j} x^i_{,\alpha} + x^k_{,\alpha} \left\{ \begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right\} \right) x^j_{,\beta}, \end{aligned}$$

$$x^i_{;\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} - x^i_{,\gamma}\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} x^j_{,\alpha} x^k_{,\beta}. \tag{23.72}$$

■

Primer 23.8

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\alpha &= x^i_{;\alpha}\mathbf{g}_i, \\ \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \mathbf{a}_{\alpha;\beta} &= x^i_{;\alpha\beta}\mathbf{g}_i. \end{aligned} \tag{23.73}$$

Onda iz ovog izraza i (23.54) dobijamo

$$x^i_{;\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} n^i \tag{23.74}$$

i

$$b_{\alpha\beta} = x^i_{;\alpha\beta} n_i = -x^i_{;\alpha} n_{i;\beta} \tag{23.75}$$

■

23.9.1 Vajgartenova formula

Vajgartenova[2] daje izraz za promenu $\mathbf{n}$, tj. za $\mathbf{n}_{,\alpha}$. Pišemo

$$\mathbf{n}_{,\alpha} = A^\beta_\alpha \mathbf{a}_\beta + A_\alpha \mathbf{n}.$$

Ali

$$A^\beta_\alpha = \mathbf{a}^\beta \cdot \mathbf{n}_{,\alpha} = -\mathbf{a}^\beta_{,\alpha} \cdot \mathbf{n} = -b^\beta_\alpha$$

i

$$A_\alpha = \mathbf{n}_{,\alpha} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

jer je $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$. Prema tome je

$$\mathbf{n}_{,\alpha} = -b^\beta_\alpha \mathbf{a}_\beta, \tag{23.76}$$

ili

$$n^i_{;\alpha} = -b^\beta_\alpha x^i_{,\beta}. \tag{23.77}$$

23.9.2 Kodacijeva jednačna

Iz

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{n}_{,\beta},$$

sledi da je

$$b_{\alpha\beta,\gamma} = -\mathbf{a}_{\alpha,\gamma} \cdot \mathbf{n}_{,\beta} - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{n}_{,\beta\gamma}.$$

[2] Weigarten formula

Međutim,

$$\mathbf{a}_{\alpha,\gamma}\cdot\mathbf{n}_{,\beta}=(b_{\alpha\gamma}\mathbf{n})\cdot(-b^{\delta}_{\beta}\mathbf{a}_{\delta})=0.$$

Znači

$$b_{\alpha\beta,\gamma}=-\mathbf{a}_{\alpha}\cdot\mathbf{n}_{,\beta\gamma},$$

gde je

$$\mathbf{n}_{,\beta\gamma}=\mathbf{n}_{,\gamma\beta}.$$

Onda je

$$b_{\alpha\beta,\gamma}-b_{\alpha\gamma,\beta}=0. \tag{23.78}$$

Ova jednačina je poznata pod imenom **Kodacijeva jedačina**[3]. Uočimo da je

$$b_{\alpha\beta,\gamma}=\mathbf{a}_{\alpha,\beta\gamma}\cdot\mathbf{n}. \tag{23.79}$$

23.9.3 Gausova jednačina

Očigledno je da su

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta\gamma}$$

vektori. Onda su i $\mathbf{a}_{\alpha,\beta\gamma}-\mathbf{a}_{\alpha,\gamma\beta}$ takođe vektori, pa je

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta\gamma}-\mathbf{a}_{\alpha,\gamma\beta}=R^{\delta}_{\cdot\alpha\beta\gamma}\mathbf{a}_{\delta}+R_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{n},$$

gde su $R^{\delta}_{\cdot\alpha\beta\gamma}$ i $R_{\alpha\beta\gamma}$ **koeficijenti dekompozicije**. Ali

$$R_{\alpha\beta\gamma}=(\mathbf{a}_{\alpha,\beta\gamma}-\mathbf{a}_{\alpha,\gamma\beta})\cdot\mathbf{n}=b_{\alpha\beta,\gamma}-b_{\alpha\gamma,\beta}=0,$$

prema (23.77), pa je

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta\gamma}-\mathbf{a}_{\alpha,\gamma\beta}=R_{\delta\alpha\beta\gamma}\mathbf{a}^{\delta}, \tag{23.80}$$

gde je

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=a_{\delta\omega}R^{\omega}_{\cdot\alpha\beta\gamma}. \tag{23.81}$$

Sada, iz (23.79), imamo

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=(\mathbf{a}_{\alpha,\beta\gamma}-\mathbf{a}_{\alpha,\gamma\beta})\cdot\mathbf{a}_{\delta}.$$

[3] Codazzi

Ali

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta\gamma} \cdot \mathbf{a}_\delta = (\mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}_\delta)_{,\gamma} - \mathbf{a}_{\alpha,\beta}\mathbf{a}_{\delta,\gamma} = -b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta},$$

jer je

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}_\delta = b_{\alpha\beta}\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_\delta = 0.$$

Znači

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta} - b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta}. \tag{23.82}$$

Ove jednačine su poznate pod imenom **jednačine Gausa**.

Iz ovih jednačina se odmah vidi da je $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ tenzor kao i $R^{\delta}_{\cdot\alpha\beta\gamma}$. Poznat je pod imenom **Riman-Kristofelov tenzor**. Razmotrićemo ga detaljno.

23.10 Riman-Kristofelov tenzor krivine za površ

Eksplicitan izraz za **Riman-Kristofelov tenzor za površ** može da se izvede na razne načine.

Polazimo od izraza (23.52) koji pišemo u obliku

$$\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u_\beta} = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \mathbf{a}_\gamma + b_{\alpha\beta}\mathbf{n}.$$

Onda je

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} &= \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\} \mathbf{a}_\sigma + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\} \frac{\partial \mathbf{a}_\sigma}{\partial u^\beta} + \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}\mathbf{n} + b_{\alpha\gamma}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\beta} = \\ &= \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\} \mathbf{a}_\sigma + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\} \left(\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \tau\beta \end{matrix} \right\} \mathbf{a}_\sigma + b_{\tau\beta}\mathbf{n} \right) + \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}\mathbf{n} - b_{\alpha\gamma}b^{\sigma}_{\beta}\,\mathbf{a}_\sigma, \end{aligned}$$

gde smo koristili (23.52). U sređenom obliku ovaj izraz glasi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} = &\left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \tau\beta \end{matrix} \right\} \right) \mathbf{a}_\sigma - b_{\alpha\gamma}b^{\sigma}_{\beta}\,\mathbf{a}_\sigma + \\ &+ \left(\left\{ \begin{matrix} \tau \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\} b_{\tau\beta} + \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} \right) \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Striktnom zamenom indeksa β i γ u ovom izrazu dobijamo izraz za $\dfrac{\partial^2 \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}$. Prema tome je

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} - \frac{\partial^2 \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\gamma \partial u^\beta} = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \alpha\gamma \end{array} \right\} - \frac{\partial}{\partial u^\gamma} \left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \alpha\beta \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \tau \\ \alpha\gamma \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \tau\beta \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \tau \\ \alpha\beta \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \tau\gamma \end{array} \right\} \right) \mathbf{a}_\sigma - \\
&- \left(b_{\alpha\gamma} b^\sigma_\beta - b_{\alpha\beta} b^\sigma_\gamma \right) \mathbf{a}_\sigma + \left(\left\{ \begin{array}{c} \tau \\ \alpha\gamma \end{array} \right\} b_{\tau\beta} - \left\{ \begin{array}{c} \tau \\ \alpha\beta \end{array} \right\} b_{\tau\gamma} + \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \right) \mathbf{n} = \mathbf{0},
\end{aligned}
$$

jer je $\dfrac{\partial^2 \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}$. Odavde sledi da je

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u^\beta} \left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \alpha\gamma \end{array} \right\} - \frac{\partial}{\partial u^\gamma} \left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \alpha\beta \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \tau \\ \alpha\gamma \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \tau\beta \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \tau \\ \alpha\beta \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \tau\gamma \end{array} \right\} = \\
&\qquad\qquad b_{\alpha\gamma} b^\sigma_\beta - b_{\alpha\beta} b^\sigma_\gamma = R^\sigma_{\alpha\beta\gamma}
\end{aligned} \tag{23.83}
$$

i

$$
\left\{ \begin{array}{c} \tau \\ \alpha\gamma \end{array} \right\} b_{\tau\beta} - \left\{ \begin{array}{c} \tau \\ \alpha\beta \end{array} \right\} b_{\tau\gamma} + \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = 0 \tag{23.84}
$$

jer su vektori $\mathbf{a}_\sigma$ i $\mathbf{n}$ linarno nezavisni.

Uočimo da relacija (23.83) definiše Rimanov tenzor na dva načina: preko tenzora krivine $b_{\alpha\beta}$ i Kristofelovih simbola. Kako je tenzor $b_{\alpha\beta}$ tenzor krivine to nam daje za pravo da Riman-Kristofelov tenzor nazivamo i **tenzor krivine**.

Ova relacija je od fundamantalnog značaja u Diferencijalnoj geometriji imajući u vidu da se Kristofelovi simboli izražavaju preko osnovnog metričkog tenzora $a_{\alpha\beta}$ i njegovih izvoda.

Relacije (23.84) su poznate pod imanom **formule Mainardi-Kodaci**

Zadatak 23.3 Pokazati da iz (23.80) sledi da je

$$
x^i_{,\alpha\beta\gamma} - x^i_{,\alpha\gamma\beta} = x^i_{,\sigma} R^\delta_{\alpha\beta\gamma}. \tag{23.85}
$$

■

Zadatak 23.4

$$
\begin{aligned}
R_{\lambda\alpha\beta\gamma} = a_{\lambda\sigma} R^\sigma_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{\partial}{\partial u^\beta} [\alpha\gamma, \lambda] - \frac{\partial}{\partial u^\gamma} [\alpha\beta, \lambda] + \\
&+ \left\{ \begin{array}{c} \delta \\ \alpha\beta \end{array} \right\} [\lambda\gamma, \delta] - \left\{ \begin{array}{c} \delta \\ \alpha\gamma \end{array} \right\} [\lambda\beta, \delta].
\end{aligned}
$$

■

Zadatak 23.5

$$R_{\lambda\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 a_{\lambda\gamma}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}+\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial u^\lambda \partial u^\gamma}-\frac{\partial^2 a_{\lambda\beta}}{\partial u^\alpha \partial u^\gamma}-\frac{\partial^2 a_{\alpha\gamma}}{\partial u^\lambda \partial u^\beta}\right]+$$
$$+a^{\mu\nu}\left\{[\alpha\beta,\mu][\lambda\gamma,\nu]-[\lambda\beta,\mu][\alpha\gamma,\nu]\right\}.$$

■

Koristeći rezultate Zadataka 23.4 i 23.5, izvesti sledeća **svojstva Riman-Kristofelovog tenzora za površ** (23.86):

$$\begin{aligned}
&R_{\delta\alpha\beta\gamma}=-R_{\alpha\delta\beta\gamma},\\
&R_{\delta\alpha\beta\gamma}=-R_{\delta\alpha\gamma\beta},\\
&R_{\delta\alpha\beta\gamma}=R_{\beta\gamma\delta\alpha},\\
&R_{\delta\alpha\beta\gamma}+R_{\delta\beta\gamma\alpha}+R_{\delta\gamma\alpha\beta}=0.
\end{aligned}\tag{23.86}$$

Kako $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ ima samo jednu komponetu različitu od nule, tj. R_{1212}, iz (23.82) se vidi da je

$$R_{1212}=b_{11}b_{22}-b_{12}^2=\det\left(b_{\alpha\beta}\right)=b. \tag{23.87}$$

Onda mora postojati neka relacija između $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ i ovog skalara. Lako je pokazati da je

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{1212}\,e_{\alpha\beta}\,e_{\gamma\delta},$$

jer zadovoljava sve uslove (23.86).

Međutim, $e_{\alpha\beta}$ je relativni tenzor težine (-1), a $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ je apsolutni tenzor. Onda je R_{1212}, kao tenzorska veličina, relativni skalar težine $+2$. Ako sada iskoristimo $\varepsilon_{\alpha\beta}=\sqrt{a}e_{\alpha\beta}$, onda je

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{R_{1212}}{a}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}.$$

Veličina

$$K=\frac{R_{1212}}{a}=\frac{b}{a} \tag{23.88}$$

je apsolutni skalar. Naziva se **Gausova krivina** ili **totalna krivina površi** S.

Sada je

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=K\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}, \tag{23.89}$$

odakle sledi da je

$$K=\frac{1}{4}R_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\delta}. \tag{23.90}$$

Na mestu je sledeća definicija.

Definicija 23.10.1 **Geometrijske veličine**, koje su funkcije osnovnog metričkog tenzora površi $a_{\alpha\beta}$ i njegovih izvoda, su njeno **unutrašnje svojstvo**.

Teorema 23.10.1 [Gausova izvanredna teorema - Egregium] Gausova krivina K površi je njeno unutrašnje svojstvo.

Dokaz

Postoje razni dokazi ove teoreme. Neki su dugi. Mi se ovde oslanjamo na definiciju (23.10.1). To je polazna osnova našeg dokaza. Iz (23.83) se vidi da je Riman-Kristofelov tenzor $R_{\lambda\alpha\beta\gamma}$ funkcija osnovnog metričkog tenzora $a_{\alpha\beta}$ i Kristofelovih simbola $\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}$, koji su sa svoje strane funkcije izvoda metričkog tenzor $a_{\alpha\beta}$ (vidi takođe Zadatke 23.4 i 23.5). Prema tome, Kristofelov tenzor $R_{\lambda\alpha\beta\gamma}$ je unutrašnje svojstvo površi, što važi i za jedinu njegovu komponentu R_{1212}. Znači, Gausova krivina

$$K = \frac{R_{1212}}{a}$$

je unutrašnje svojstvo površi.

23.11 Diferenciranje vektorskih i tenzorskih polja na površi

Do sada smo razmatrali promenu prirodne baze $\{\mathbf{a}^\alpha, \mathbf{n}\}$, $(\alpha = 1, 2)$, na površi S i veličina koje su posedica njihovih promena. Prelazimo na izučavanje promena vektorskih i tenzorskih polja na S, posebno njihovog površinskog gradijenta, divergencije i rotora, kao i njihovo predstavljanje u odnosu na prirodni trijedar vektora $\{\mathbf{a}^\alpha, \mathbf{n}\}$.

Prirodno je da počnemo sa vektorskim poljem $\mathbf{w}$. Predstavljamo ga u obliku

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_s + w_n \mathbf{n}, \tag{23.91}$$

gde je $\mathbf{w}_s = w_{s\alpha}\mathbf{a}^\alpha$ glatko tangentno vektorsko polje, a $w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$ normalna projekcija vektora $\mathbf{w}$ definisana na površi. Kako je

$$\nabla = \mathbf{g}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{i} \quad \mathbf{g}^i = n^i \mathbf{n} + x^i_{,\alpha}\mathbf{a}^\alpha,$$

onda je

$$\nabla = \left(n^i \mathbf{n} + x^i_{,\alpha}\mathbf{a}^\alpha\right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial n} + \mathbf{a}^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{23.92}$$

gde je $\dfrac{\partial}{\partial n} = n^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\dfrac{\partial}{\partial u^\alpha} = x^i_{,\alpha} \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Član $\mathbf{a}^\alpha \dfrac{\partial}{\partial u^\alpha}$ određuje operator diferenciranja na površi, analogno operatoru $\nabla = \mathbf{g}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ u prostoru $\mathbb{E}_3$. Nazivamo ga **površinska nabla** i obeležavamo sa

$$\nabla_s = \mathbf{a}^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{23.93}$$

Tada je

$$\nabla_s \mathbf{w} = \nabla_s \mathbf{w}_s + (\nabla_s w_n) \otimes \mathbf{n} + w_n \nabla_s \mathbf{n},$$

gde je, **po definiciji**,

$$\mathrm{grad}_s \mathbf{w} = \nabla_s \mathbf{w} = \mathbf{a}^\alpha \otimes \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u^\alpha}. \tag{23.94}$$

Lako je pokazati da je:

$$\begin{aligned}
\nabla_s \mathbf{w}_s &= \mathbf{a}^\alpha \otimes \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial u^\alpha} = \mathbf{a}^\alpha \otimes \left(w_{s\beta} \mathbf{a}^\beta \right)_{,\alpha} = w_{s\beta,\alpha} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta + w_{s\beta} b^\beta_\alpha \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{n}, \\
\nabla_s w_n &= \frac{\partial w_n}{\partial u^\alpha} \mathbf{a}^\alpha, \\
\nabla_s \mathbf{n} &= \mathbf{a}^\alpha \otimes \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha} = -b_{\beta\alpha} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta.
\end{aligned}$$

Nas posebno interesuje $\mathrm{div}_s \mathbf{w} = \nabla_s \cdot \mathbf{w}$. Onda je

$$\nabla_s \cdot \mathbf{w} = \nabla_s \cdot \mathbf{w}_s + (\nabla_s w_n) \cdot \mathbf{n} + w_n \nabla_s \cdot \mathbf{n}.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
(\nabla_s w_n) \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial w_n}{\partial u^\alpha} \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{n} = 0, \\
\nabla_s \cdot \mathbf{n} &= -b_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta} = -2H,
\end{aligned} \tag{23.95}$$

gde je $H = \frac{1}{2} b^\alpha_\alpha$ srednja krivina površi, sledi da je

$$\nabla_s \cdot \mathbf{w} = \nabla_s \cdot \mathbf{w}_s - 2H w_n. \tag{23.96}$$

Na sličan način se nalazi $\nabla_s \times \mathbf{w}$ (**površinski rotor**) vektorskog polja na S. Onda je

$$\nabla_s \times \mathbf{w} = \nabla_s \times \mathbf{w}_s + \nabla_s \times (w_n \mathbf{n}).$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\nabla_s \times \mathbf{w}_s &= \mathbf{a}^\alpha \times (w_{s\beta} \mathbf{a}^\beta)_{,\alpha} = \mathbf{a}^\alpha \times \left(w_{s\beta,\alpha} \mathbf{a}^\beta + w_{s\beta} b^\beta_\alpha \mathbf{n} \right) = \\
&= \mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{a}^\beta w_{S\beta,\alpha} + w_{s\beta} b^\beta_\alpha \mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{n}.
\end{aligned}$$

Takođe je

$$\nabla_s \times (w_n \mathbf{n}) = \mathbf{a}^\alpha \times (w_n \mathbf{n})_{,\alpha} = w_{n,\alpha}\mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{n} + w_n \mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{n}_{,\alpha} =$$
$$= w_{n,\alpha}\mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{n} - w_n b_{\alpha\beta}\mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{a}^\beta = w_{n,\alpha}\mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{n},$$

imajući u vidu da je $b_{\alpha\beta}\mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{a}^\beta = 0$. Prema tome je

$$\nabla_s \times \mathbf{w} = \mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{a}^\beta w_{s\beta,\alpha} + \left(w_{s\beta} b^\beta_\alpha + w_{n,\alpha}\right)\mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{n},$$

jer je $\mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{a}^\beta = \varepsilon^{\alpha\beta}\mathbf{n}$, odakle sledi da je

$$\nabla_s \times \mathbf{w} = \varepsilon^{\alpha\beta} w_{s\beta,\alpha}\mathbf{n} + \left(w_{s\beta} b^\beta_\alpha + w_{n,\alpha}\right)\mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{n}.$$

Skalarnim množenjem ovog izraza sa $\mathbf{n}$ dobijamo da je

$$(\nabla_s \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = \varepsilon^{\alpha\beta} w_{s\beta,\alpha}, \tag{23.97}$$

izraz koji je značajan pri površinskoj integraciji. Uočimo da je samo funkcija površinskih koordinata u^α.

N Od značaja je da se $\mathrm{div}_s \cdot \mathbf{w} = \nabla_s \cdot \mathbf{w}$ izrazi u odnosu na bazne vektore $\{\mathbf{g}_i\}$ ili $\{\mathbf{g}^i\}$.

Polazimo od $\mathbf{w} = w^i \mathbf{g}_i$. Onda je

$$\mathrm{div}_s \mathbf{w} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{w}_{,\alpha} = a^{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta \cdot w_{i,\alpha}\mathbf{g}^i,$$

pa je **površinska divergencija prostornog vektora**

$$\mathrm{div}_s \mathbf{w} = a^{\alpha\beta} x^i_{,\beta} w_{i,\alpha}. \tag{23.98}$$

N Kao i u slučaju divergencije izrazićemo $\mathrm{rot}_s \mathbf{w} = \nabla_s \times \mathbf{w}$ u odnosi na bazu vektora $\{\mathbf{g}_i\}$. Onda je

$$\mathrm{rot}_s \mathbf{w} = \mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{w}_{,\alpha} = a^{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta \times w_{j,\alpha}\mathbf{g}^j = x^i_{,\beta}\mathbf{g}_i \times a^{\alpha\beta} w^j_{,\alpha}\mathbf{g}_j =$$
$$= \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j a^{\alpha\beta} x^i_{,\beta} w^j_{,\alpha}.$$

Prema tome **površinski rotor prostornog vektora** je

$$\mathrm{rot}_s \mathbf{w} = \varepsilon_{ijk} a^{\alpha\beta} x^i_{,\alpha} w^j_{,\beta}\mathbf{g}^k. \tag{23.99}$$

23.12 Zadaci sa rešenjima

Zadatak 23.6 Pokazati da je

$$\nabla_s(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = (\nabla_s\otimes\mathbf{v})\mathbf{w} + (\nabla_s\otimes\mathbf{w})\mathbf{v}.$$

■

Rešenje

$$\nabla_s(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})_{,\alpha} = \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{v}_{,\alpha}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_{,\alpha}) = (\mathbf{a}^\alpha\otimes\mathbf{v}_{,\alpha})\mathbf{w} + (\mathbf{a}^\alpha\otimes\mathbf{w}_{,\alpha})\mathbf{v} =$$
$$= (\nabla_s\otimes\mathbf{v})\mathbf{w} + (\nabla_s\otimes\mathbf{w})\mathbf{v}.$$

Zadatak 23.7 Pokazati da je

$$\nabla_s\otimes(\varphi\mathbf{w}) = (\nabla_s\varphi)\otimes\mathbf{w} + \varphi(\nabla_s\otimes\mathbf{w}).$$

■

Rešenje

$$\nabla_s\otimes(\varphi\mathbf{w}) = \mathbf{a}^\alpha\otimes(\varphi\mathbf{w})_{,\alpha} = \mathbf{a}^\alpha\otimes(\varphi_{,\alpha}\mathbf{w} + \varphi\mathbf{w}_{,\alpha}) = (\nabla_s\varphi)\otimes\mathbf{w} + \varphi(\nabla_s\otimes\mathbf{w}).$$

Zadatak 23.8 Pokazati da je

$$\mathrm{div}_s(\varphi\mathbf{w}) = (\nabla_s\varphi)\cdot\mathbf{w} + \varphi(\nabla_s\cdot\mathbf{w}) = (\mathrm{grad}_s\varphi)\cdot\mathbf{w} + \varphi\,\mathrm{div}_s\mathbf{w}.$$

■

Zadatak 23.9 Pokazati da je

$$\mathrm{div}_s(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}) = \mathbf{w}\,\mathrm{div}_s\mathbf{v} + (\mathrm{grad}_s\mathbf{w})\mathbf{v}.$$

■

Rešenje

$$\mathrm{div}_s(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}) = \mathbf{a}^\alpha\cdot(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{,\alpha} = \mathbf{a}^\alpha\cdot(\mathbf{v}_{,\alpha}\otimes\mathbf{w} + \mathbf{v}\otimes\mathbf{w}_{,\alpha}) = (\mathbf{a}^\alpha\cdot\mathbf{v}_{,\alpha})\mathbf{w} + (\mathbf{a}^\alpha\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}_{,\alpha} =$$
$$= \mathbf{w}\,\mathrm{div}_s\mathbf{v} + (\mathbf{a}^\alpha\otimes\mathbf{w}_{,\alpha})\mathbf{v} = \mathbf{w}\,\mathrm{div}_s\mathbf{v} + (\mathrm{grad}_s\mathbf{w})\mathbf{v}.$$

Zadatak 23.10 Ako je $\mathbf{S} = S^{\alpha i}\mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{g}_i$ pokazati da je

$$\mathrm{div}_s(\varphi\mathbf{S}) = (\mathrm{grad}_s\varphi)\cdot\mathbf{S} + \varphi\,\mathrm{div}_s\mathbf{S}.$$

Rešenje

$$\mathrm{div}_s(\varphi\mathbf{S}) = \mathbf{a}^\alpha\cdot(\varphi\mathbf{S})_{,\alpha} = \mathbf{a}^\alpha\cdot(\varphi_{,\alpha}\mathbf{S} + \varphi\mathbf{S}_{,\alpha}) = (\mathrm{grad}_s\varphi)\cdot\mathbf{S} + \varphi\,\mathrm{div}_s\mathbf{S}.$$

Zadatak 23.11 Pokazati da je

$$\mathrm{div}_s(\mathbf{S}\mathbf{w}) = (\mathrm{div}_s\mathbf{S})\mathbf{w} + \mathrm{tr}[\mathbf{S}(\mathrm{grad}_s\mathbf{w})].$$

Rešenje

$$\mathrm{div}_s(\mathbf{S}\mathbf{w}) = \mathbf{a}^\alpha\cdot(\mathbf{S}\mathbf{w})_{,\alpha} = \mathbf{a}^\alpha\cdot(\mathbf{S}_{,\alpha}\mathbf{w} + \mathbf{S}\mathbf{w}_{,\alpha}) = (\mathrm{div}_s\mathbf{S})\mathbf{w} + \mathrm{tr}[\mathbf{S}(\mathrm{grad}_s\mathbf{w})].$$

23.13 Površinske integralne teoreme

Polazimo od Stoksove teoreme

$$\int_S \nabla\times\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a = \oint_{\partial S}\mathbf{w}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{23.100}$$

u slučaju kada je $\mathbf{w}$ tangentno vektorsko polje na S. Onda je $\mathbf{w} = \mathbf{w}_s$ i $\mathrm{d}\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s$, gde je $\boldsymbol{\tau}$ površinski jedinični vektor tangentan na ∂S. Tada je

$$\nabla\times\mathbf{w} = \mathbf{n}\times\frac{\partial\mathbf{w}_s}{\partial n} + \mathbf{a}^\alpha\times\frac{\partial\mathbf{w}_s}{\partial u^\alpha} = \mathbf{n}\times\frac{\partial\mathbf{w}_s}{\partial n} + \nabla_s\times\mathbf{w}_s$$

i

$$(\nabla\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{n} = (\nabla_s\times\mathbf{w}_s)\cdot\mathbf{n}.$$

Smenom ovih izraza u (23.100) dobijamo **Stoksovu teoremu**

$$\int_S (\nabla_s \times \mathbf{w}_s) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}a = \oint_{\partial S} \mathbf{w}_s \cdot \boldsymbol{\tau}\, \mathrm{d}s \tag{23.101}$$

za površinska vektorska polja. Koristeći (23.97) možemo je predstaviti u komponentalnom obliku

$$\int_S \varepsilon_{\alpha\beta} w_s^{\beta,\alpha}\, \mathrm{d}a = \oint_{\partial S} w_{s\alpha} \tau^\alpha\, \mathrm{d}s. \tag{23.102}$$

Dalje, neka je

$$v_{s\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta} w_s^\beta. \tag{23.103}$$

Onda je

$$\varepsilon^{\alpha\beta} w_{s\beta,\alpha} = v_{s,\alpha}^\alpha. \tag{23.104}$$

Definišimo vektor $\mu_\gamma = \varepsilon_{\gamma\beta}\tau^\beta$. To je jedinični vektor upravan na τ^β i kao takav predstavlja spoljnu normalu krive ∂S na površi S. Smenom (23.103) i (23.104) u (23.102) dobijamo identitet

$$\int_S v_{s,\alpha}^\alpha\, \mathrm{d}a = \oint_{\partial S} v_s^\alpha \mu_\alpha\, \mathrm{d}s \tag{23.105}$$

kojim se iskazuje površinska **Grinova teorema za površ**. U kompaktnom obliku glasi

$$\int_S \mathrm{div}_s\, \mathbf{v}_s\, \mathrm{d}a = \oint_{\partial S} \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\mu}\, \mathrm{d}s. \tag{23.106}$$

Iz (23.96) sledi da je

$$\mathrm{div}_s \mathbf{v}_s = \mathrm{div}_s \mathbf{v} + 2Hv_n.$$

Takođe je $\mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\mu}$. Onda je (23.106) oblika

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\mu} = \int_S (\mathrm{div}_s\, \mathbf{v} + 2Hv_n)\, \mathrm{d}a, \tag{23.107}$$

što predstavlja **generalizaciju Teoreme o divergenciji**.

N Kada je jasno da je reč o vektorskim (tangentnim) poljima na S, izostavljaćemo oznaku S za takva polja.

24. Fundamentalne forme površi

24.1 Prva fundamentalna forma površi

Prva fundamentalna forma I_S je, kao što je prethodno navedeno, definisana metrikom

$$I_S = \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = a_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}u^\alpha\, \mathrm{d}u^\beta . \tag{24.1}$$

Pozitivno je definitna u regularnim tačkama površi S, što nameće ograničenja na vrednosti komponenata tenzora $a_{\alpha\beta}$: $\det\left(a_{\alpha\beta}\right) > 0$. Uslovi $a_{11} > 0$ i $a_{22} > 0$ su zadovoljeni, što neposredno sledi iz izraza $a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$.

Prva fundamentalna forma ne karakteriše površ na jedinstven način. To znači da dve geometrijski različite površi posmatrano iz obvojnog prostora $\mathbb{E}_3$, kao na primer ravan i cilindar, mogu imati istu prvu fundamentalnu formu.

24.2 Druga fundamentalna forma površi

Geometrijska veličina, koja karakteriše spoljašnju geometriju površi S, je vektor normale na površ. Pripada prostoru $\mathbb{E}_3$, nije u površi i kao takav, literalno kažemo, da nije uočljiv za dvodimenzionalnog posmatrača u površi. Za njega postoje samo unutrašnje veličine koje pripadaju njegovom prostoru, tj. površi. Takve veličine su: linijski element, ugao između dve krive linije na povši, površinski element površi i Gausova krivina površi.

Promena vektora normale, u tačkama površi, daje nam potpuniju sliku o promeni oblika porši u tim tačkama koji vizualno uočava posmatrač u obvojnom prostoru $\mathbb{E}_3$.

Sledeći izraz definiše **drugu fundamentalnu formu**

$$II_S = -\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{n}. \tag{24.2}$$

Poznato je da je

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{a}_\alpha \, \mathrm{d}u^\alpha, \quad \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}\cdot \mathbf{n} = b_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Onda je

$$II_S = -\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}\mathrm{d}u^\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\beta}\mathrm{d}u^\beta = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\beta}\mathrm{d}u^\alpha \, \mathrm{d}u^\beta = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}\cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}u^\alpha \, \mathrm{d}u^\beta, \tag{24.3}$$

ili končno

$$II_S = b_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}u^\alpha \, \mathrm{d}u^\beta. \tag{24.4}$$

Uočimo da je, takođe

$$II_S = \mathrm{d}^2(\mathbf{r}\cdot \mathbf{n}), \tag{24.5}$$

jer je

$$\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot \mathbf{n}) - \mathrm{d}^2(\mathbf{r}\cdot \mathbf{n}) = -\mathrm{d}^2(\mathbf{r}\cdot \mathbf{n}),$$

imajući u vidu da je $\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot \mathbf{n} = 0$.

N Koristeći sledeću identifikaciju:

$$u^1 = u, \quad u^2 = v, \quad b_{11} = e, \quad b_{12} = f, \quad b_{22} = g,$$

drugu kvadrtanu formu (24.4) pišemo u obliku

$$II_s = e\mathrm{d}u^2 + 2f\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g\mathrm{d}v^2. \tag{iv}$$

Takođe je

$$b = \det\big(b_{\alpha\beta}\big) = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = eg - f^2. \tag{24.6}$$

Za razliku od prve fundamentalne forme, druga fundamentalna forma nije nužno pozitivno definitna. Posebno naglašavamo da su dve invarijante tenzora $b_{\alpha\beta}$ zaista od fundametnog značaja pri razmatranju geometrije površi. To su:

$$H = \frac{1}{2} b^\alpha_\alpha - \quad \text{srednja krivina površi} \tag{24.7}$$

i

$$K = \det\left(b^\alpha_\beta\right) - \quad \text{Gausova krivina.} \tag{24.8}$$

Tenzor $b_{\alpha\beta}$ se naziva i **površinski tenzor krivine**.

O tome će biti više reči nadalje. Ovde dajemo jedan od načina njihovog izvođenja.

24.2.1 Određivanje srednje i Gausove krivine površi $S \subset \mathbb{E}_3$

Neka je površ $S \subset \mathbb{E}_3$ data eksplicitno sa $z^3 = f(z^1, z^2)$ u odnosu na Dekartove koordinate z^i, $i = 1,2,3$. Njena Monžova reprezentacija je

$$\mathbf{r} = \left(z^1, z^2, f(z^1, z^2)\right).$$

Bazni vektori površi su

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^\alpha} = (\delta^1_\alpha,\, \delta^2_\alpha,\, f_{,\alpha}), \quad \alpha = 1,2.$$

Takođe je

$$\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial z^\beta} = (0,0,f_{,\alpha\beta}), \quad f_{,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}.$$

Onda je

$$[\alpha\beta, \gamma] = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial z^\beta} \cdot \mathbf{a}_\gamma = (0,0,f_{,\alpha\beta} f_{,\gamma}).$$

Lako je pokazati da osnovni metrički tenzor glasi

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad \Rightarrow \quad (a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1+f_{,1}^2 & f_{,1}f_{,2} \\ f_{,1}f_{,2} & 1+f_{,2}^2 \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$a = \det\left(a_{\alpha\beta}\right) = 1 + f_{,1}^2 + f_{,2}^2.$$

Takođe je

$$(a_{\alpha\beta})^{-1} = (a^{\alpha\beta}) = \frac{1}{1+f_{,1}^2+f_{,2}^2} \begin{pmatrix} 1+f_{,2}^2 & -f_{,1}f_{,2} \\ -f_{,1}f_{,2} & 1+f_{,1}^2 \end{pmatrix}.$$

Iz

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = (-f_{,1},\, -f_{,2},\, 1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} = \frac{1}{1+f_{,1}^2+f_{,2}^2}(-f_{,1},\, -f_{,2},\, 1),$$

pa je

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} \cdot \mathbf{n} = \frac{f_{,\alpha\beta}}{\sqrt{1+f_{,1}^2+f_{,2}^2}}, \tag{24.9}$$

$$b = \det\left(b_{\alpha\beta}\right) = \frac{f_{,11}\, f_{,22} - (f_{,12})^2}{1+f_{,1}^2+f_{,2}^2}. \tag{24.10}$$

Računamo

$$b^\alpha_\beta = a^{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} \quad \Rightarrow \quad (b^\alpha_\beta) = \frac{1}{\sqrt{(1+f_{,1}^2+f_{,2}^2)^3}} \begin{pmatrix} 1+f_{,2}^2 & -f_{,1}f_{,2} \\ -f_{,1}f_{,2} & 1+f_{,1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{,11} & f_{,12} \\ f_{,12} & f_{,22} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+f_{,1}^2+f_{,2}^2)^3}} \begin{pmatrix} (1+f_{,2}^2)\, f_{,11} - f_{,12}\, f_{,1}\, f_{,2} & (1+f_{,2}^2)\, f_{,12} - f_{,22}\, f_{,1}\, f_{,2} \\ (1+f_{,1}^2)\, f_{,12} - f_{,11}\, f_{,1}\, f_{,2} & (1+f_{,1}^2)\, f_{,22} - f_{,12}\, f_{,1}\, f_{,2} \end{pmatrix}.$$

Onda su srednaja i Gausova krivina dati izrazima:

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(b^\alpha_\beta) = \frac{(1+f_{,2}^2)\, f_{,11} - 2 f_{,12}\, f_{,1}\, f_{,2} + (1+f_{,1}^2)\, f_{,22}}{2(1+f_{,1}^2+f_{,2}^2)^{3/2}}, \tag{24.11}$$

$$K = \frac{\det\big(b_{\alpha\beta}\big)}{\det\big(a_{\alpha\beta}\big)} = \frac{f_{,11}\, f_{,22} - (f_{,12})^2}{(1+f_{,1}^2+f_{,2}^2)^2}. \tag{24.12}$$

U specijalnom slučaju, kada je $H=0$ i/ili $K=0$, dobijaju se diferencijalne jednačine koje su od fundamentalnog značaja u diferencijalnoj geometriji površi. O njima će nadalje biti više reči.

24.3 Treća fundamentalna forma površi

Treća fundamentalna forma je definisana izrazom

$$III_S = \mathrm{d}\mathbf{n} \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}, \tag{24.13}$$

gde je

$$\mathrm{d}\mathbf{n} = \mathrm{d}(n^i\, \mathbf{g}_i) = (\mathrm{d}n^i)\, \mathbf{g}_i = n^i_{,\alpha}\, \mathrm{d}u^\alpha\, \mathbf{g}_i.$$

Tada je

$$III_S = c_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}u^\alpha\, \mathrm{d}u^\beta, \tag{24.14}$$

i

$$c_{\alpha\beta} = g_{ij}\, n^i_{,\alpha}\, n^j_{,\beta}. \tag{24.15}$$

Kako je $n^i_{,\alpha} = -b^\beta_\alpha\, x^i_{,\beta}$, onda je

$$c_{\alpha\beta} = g_{ij}\, x^i_{,\gamma} x^j_{,\delta}\, b^\gamma_\alpha\, g^\delta_\beta = a_{\gamma\delta}\, b^\gamma_\alpha\, b^\delta_\beta, \tag{24.16}$$

simetričan tenzor. Pokazati! Pogodno ga je napisati u obliku

$$c^\alpha_\beta = b^\alpha_\gamma\, b^\gamma_\beta. \tag{24.17}$$

24.4 Relacija između prve, druge i treće fundamentalne forme

Obeležimo sa $\mathbf{I}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$, matrice tenzora δ^α_β, b^α_β i c^α_β, redom. Onda je $\mathbf{C} = \mathbf{B}^2$. Kvadratna matrica $\mathbf{B}$, saglasno sa Kejli - Hamiltonovoj teoremi, zadovoljava sledeću jednačinu

$$\mathbf{B}^2 - I_B\,\mathbf{B} + II_B\,\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

gde je $I_B = b^\alpha_\alpha = \mathrm{tr}\mathbf{B}$, $II_B = \det\left(b^\alpha_\beta\right) = \det(\mathbf{B})$. Koristeći $\mathbf{C} = \mathbf{B}^2$ u ovoj jednačini pišemo

$$\mathbf{C} - I_B\,\mathbf{B} + II_B\,\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

ili

$$\mathbf{C} - 2H\,\mathbf{B} + K\,\mathbf{I} = 0.$$

U komponentalnom obliku glasi

$$c^\alpha_\beta - 2H\,b^\alpha_\beta + K\,\delta^\alpha_\beta = 0.$$

Odavde neposredno sledi da je

$$\mathrm{tr}\mathbf{C} = 4H^2 - 2K.$$

Kao i svaki tenzor drugog reda i tenzor $\mathbf{B}$ zadovoljava svoju karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0.$$

Njena karakteristična rešenja

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K} \tag{24.18}$$

su realna, jer je $\mathbf{B}$ realan i simetričan tenzor. Jasno je da je

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad K = k_1 \cdot k_2.$$

Otuda i naziv **srednja krivina** za veličinu $\mathbf{H}$. Ove veličine su od bitnog značaja za dalju analizu geometrije površi i o njima će nadalje biti više reči.

25. Krive na površi

Neka je na površi

$$S:\mathbf{x}=\mathbf{x}(u^\alpha), \tag{25.1}$$

zadata kriva linija

$$C:u^\alpha=u^\alpha(s), \tag{25.2}$$

gde je parametar s luk krive. U odnosu na prostor $\mathbb{E}_3$ kriva C je data jednačinom

$$C:\mathbf{x}=\mathbf{x}(u^\alpha(s))=\mathbf{x}(s). \tag{25.3}$$

Prema tome, krivu C možemo razmatrati na dva načina: kao prostornu krivu $C:\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$, ili krivu $C:u^\alpha=u^\alpha(s)$ na površi S. Problem krive u prostoru smo razmatrali. Ovde ćemo prvenstveno razmatrati C kao krivu na povši S. Specifičnost ovog prilaza se zasniva na činjenici da svaka veličina, koja pripada krivoj na povši, pripada takođe i prostoru $\mathbb{E}_3$. Obrnuto ne važi. Podsetimo se da se tangentni vektor, na S, $\mathbf{A}=A^i\,\mathbf{g}_i=a^\alpha\,\mathbf{a}_\alpha$, može da se predstavi kao

$$\mathbf{A}=A^i\,\mathbf{g}_i=a^\alpha\,\mathbf{a}_\alpha, \tag{25.4}$$

gde je

$$A^i=x^i_{,\alpha}a^\alpha, \tag{25.5}$$

imajući u vidu da je

$$\mathbf{a}_\alpha=x^i_{,\alpha}\,\mathbf{g}_i. \tag{25.6}$$

Isto važi za tangentni vektor

$$\mathbf{T}=T^i\,\mathbf{g}_i=t^\alpha\,\mathbf{a}_\alpha,\quad T^i=x^i_{,\alpha}t^\alpha, \tag{25.7}$$

gde je $T^i = \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}$ i $t^\alpha = \dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}$.

Kako je $\mathbf{T} = t^\alpha \mathbf{a}_\alpha$ jedinični vektor, onda je $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$ i $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{T} = 0$. Znači vektori $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}$ i $\mathbf{T}$ su ortogonalni.

Ovde odstupamo od uobičajenog načina predstavljanja vektora $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}$, jer u opštem slučaju $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}$ vektor izlazi izvan površi S. Tada je

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\delta(t^\alpha \mathbf{a}_\alpha)}{\delta s} = \frac{\delta t^\alpha}{\delta s}\mathbf{a}_\alpha + t^\alpha \frac{\delta \mathbf{a}_\alpha}{\delta s} = \\ &= \frac{\delta t^\alpha}{\delta s}\mathbf{a}_\alpha + t^\alpha \mathbf{a}_{\alpha,\beta}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} = \frac{\delta t^\alpha}{\delta s}\mathbf{a}_\alpha + b_{\alpha\beta}\, t^\alpha t^\beta\, \mathbf{n}.\end{aligned}$$

Prema tome ukupna promena vektora $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}$ je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\delta t^\alpha}{\delta s}\,\mathbf{a}_\alpha + b_{\alpha\beta}\, t^\alpha t^\beta\, \mathbf{n}. \tag{25.8}$$

Odavde sledi, skalarnim množenjem obe strane sa $\mathbf{T}$, da je

$$\frac{\delta t^\alpha}{\delta s}\, t_\alpha = 0,$$

imajući u vidu da je $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{T} = 0$ i $\mathbf{n}\cdot\mathbf{T} = 0$. Prema tome, ortogonalni vektori $\dfrac{\delta t^\alpha}{\delta s}$ i t_α su na površi S. Vektor $\dfrac{\delta t^\alpha}{\delta s}$ predstavljamo u obliku

$$\frac{\delta t^\alpha}{\delta s} = k_g\, \nu^\alpha, \tag{25.9}$$

gde je jedinični vektor $\boldsymbol{\nu} = \nu^\alpha \mathbf{a}_\alpha$, ortogonalan na $\mathbf{T}$. Naziva se **jedinični normalni vektor krive** C, a invarijanta k_g **površinska**, ili **geodezijsaka krivina krive** C.

Izbor orijentacije vektora $\boldsymbol{\nu}$ vrši se u saglasnosti sa vektorom $\mathbf{T}$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} t^\alpha \nu^\beta = 1. \tag{25.10}$$

Sa geometrijskog stanovišta to znači da vektor $\mathbf{T}$ rotira ka vektoru $\boldsymbol{\nu}$ do poklapanja u smeru suprotnom kretanja kazaljke na satu. Za takvu orijentaciju kažemo da je **pozitivna**.

Izrazi

$$t^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\, \nu_\beta, \quad \nu^\alpha = \varepsilon^{\beta\alpha}\, t_\beta,$$

određuju njihove uzajamne veze. Koristeći ove izraze lako je pokazati da je

$$k_g = \varepsilon_{\alpha\beta} t^\alpha \frac{\delta t^\beta}{\delta s}, \tag{25.11}$$

i

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = k_g \boldsymbol{\nu} + b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta \mathbf{n}. \tag{25.12}$$

Vektor $\boldsymbol{\nu}$ pripada površi S, pa ga prema tome $\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{n} = 0$, možemo predstaviti u obliku $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n}\times\mathbf{T}$. Onda iz poslednjeg izraza dobijamo da je

$$k_g = \left(\mathbf{T}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right)\cdot\mathbf{n}. \tag{25.13}$$

Odavde se vidi da k_g zavisi ne samo od krive C, nego i od površi S na kojoj leži. Jasno je da je $k_g = 0$ u slučaju kada su vektori $\mathbf{T}$, $\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}$ i $\mathbf{n}$ komplanarni. Tipičan primer toga je veliki krug na sferi.

Sledeći korak je da se odredi $\frac{\delta \nu^\alpha}{\delta s}$. Polazimo od izraza $\nu^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} t_\beta$. Pišemo

$$\frac{\delta \nu^\alpha}{\delta s} = \varepsilon^{\beta\alpha}\frac{\delta t_\beta}{\delta s} = k_g \varepsilon^{\beta\alpha} \nu_\beta = -k_g t^\alpha.$$

Korisno je imati u vidu da je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\nu}}{\mathrm{d}s} = -k_g \mathbf{T} + b_{\alpha\beta} t^\alpha \nu^\beta \mathbf{n}.$$

Pokazati!

Izrazi:

$$\begin{aligned} \frac{\delta t^\alpha}{\delta s} &= k_g \nu^\alpha, \\ \frac{\delta \nu^\alpha}{\delta s} &= -k_g t^\alpha, \end{aligned} \tag{25.14}$$

nazivaju se **Freneove formule** krive C **u odnosu na površ** S.

25.1 Geodezijske koordinate

Videli smo da u Euklidskom prostoru postoji koordinatni sistem u kome su sve koordinate tenzora g_{ij} konstantne. Tada je $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ u svim tačkama prostora jednak nuli. Isčezavanje ovih parcijalnih izvoda je ekvivalentno isčezavanju Kristofelovog simbola, jer je

$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Važi i obrnuto, jer je
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = [ik,j] + [jk,i].$$
Ako prostor nije Euklidski, onda Kristofelovi simboli ne iščezavaju u svim tačkama prostora.

Pokazaćemo da je u tom slučaju uvek moguće izabrati koordinatni sistem tako da su Kristofelovi simboli nula u izabranoj tački. Takav koordinatni sistem se naziva **geodezijski sistem** za izabranu tačku.

Neka je x^i dopustivi koordinatni sistem u $\mathbb{R}_n$. Neka je $\mathbf{p}(x_0^i)$ izabrana tačka u $\mathbb{R}_n$. Uvedimo novi koordinatni sistem
$$\bar{x}^i = x^i - x_0^i + \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\}\Bigg|_{(0)} (x^j - x_0^j)(x^k - x_0^k). \tag{25.15}$$
Odavde je
$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \delta_j^i + \left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\}\Bigg|_{(0)} (x^k - x_0^k). \tag{25.16}$$
U tački $\mathbf{p}(x_0^i)$ biće
$$\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)\Bigg|_{(0)} = \delta_j^i,$$
pa je Jakobijeva determinanta
$$\det\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)\Bigg|_{(0)} = 1.$$
Znači da je tako izabrani sistem koordinata $\bar{x}^i$, u okolini tačke $\mathbf{p}(x_0^i)$, dopustiv. Takođ iz (25.16), množenjem obe strane sa $\dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}$ dobijamo
$$\delta_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} + \left\{\begin{matrix} i \\ jl \end{matrix}\right\}\Bigg|_{(0)} (x^j - x_0^j)\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}.$$
Diferenciranjem ovog izraza po $\bar{x}^m$ sledi da je
$$0 = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^m} + \left\{\begin{matrix} i \\ jl \end{matrix}\right\}\Bigg|_{(0)} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} - \left\{\begin{matrix} i \\ jl \end{matrix}\right\}\Bigg|_{(0)} (x^l - x_0^l)\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^m}.$$
Onda je u $\mathbf{p}(x_0^i)$
$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\right)\Bigg|_{(0)} = \delta_k^i, \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^m}\Bigg|_{(0)} = -\left\{\begin{matrix} i \\ km \end{matrix}\right\}\Bigg|_{(0)}.$$

Smenom ovih izraza u

$$\overline{\left\{ \begin{matrix} p \\ qr \end{matrix} \right\}} = \left\{ \begin{matrix} j \\ km \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^q \partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j},$$

imamo

$$\overline{\left\{ \begin{matrix} p \\ qr \end{matrix} \right\}}\Bigg|_{(0)} = \left\{ \begin{matrix} j \\ km \end{matrix} \right\}\Bigg|_{(0)} \delta_q^k \delta_r^m \delta_j^p + \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^q \partial \bar{x}^r}\Bigg|_{(0)} \delta_j^p,$$

ili, konačno,

$$\overline{\left\{ \begin{matrix} p \\ qr \end{matrix} \right\}}\Bigg|_{(0)} = 0.$$

Prema tome, uvek je moguće izabranti sistem koordinata $\bar{x}^i$, koje se nazivaju **geodezijske koordinate**, tako da su Kristofelovi simboli nula u izabranoj tački $\mathbf{p}(x_0^i)$, koju nazivamo **pol**.

Uočimo da su koordinate pola **p** u odnosu na geodezijske koordinate $\bar{x}_0^i = 0$, što znači da je pol takođe koordinatni početak geodezijskih koordinata.

Vrlo važno svojstvo ovih koordinata sastoji se u tome da se kovarijantni izvod svodi na parcijalni izvod u polu, jer su u polu Kristifelovi simboli jednaki nuli. To nam u velikom broju problema uprošćava računicu, ako je dovoljno da ga razmatramao u okolini neke tačke.

Primer 14

Poznato je da je, u opštem slučaju,

$$v^i_{,j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^k \left\{ \begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right\}.$$

U odnosu na geodezijske koordinate je

$$v^i_{,j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j},$$

tj. kovarijantni izvod vektora se svodi na parcijalni izvod.

26. Geodezijska linija na površi

Prava linija je linija najkraćeg rastojanja između njenih dveju tačaka u Euklidskom prostoru. U prostorima koji nisu Euklidski u opštem slučaju, ne postoje prave linije. Primer toga je dvodimenzionalna sfera na kojoj ne postoji ni jedna prava linija. Međutim, pojam linije najkraćeg rastojanja ima smisla. Onda pitanje glasi: kako odrediti linije najkraćeg rastojanja u Rimanskom prostoru?

Ovde se zadržavamo na razmatranju tog problema na površi kao najjedostavnijeg Rimanskog prostora zbog svoje očiglednosti i bliskosti našim opažajima. Sam postupak i rezultati mogu se bez ikakve promene uopštiti na Rimanske prostore proizvoljne konačne dimenzije.

Bilo koja kriva na površi S može se predstaviti preko površinskih koordinata kao funkcija jednog parametra t, tj. $u^\alpha = u^\alpha(t)$ ili $\mathbf{u} = \mathbf{u}(u^\alpha(t))$. Onda je

$$s = \int_a^b \sqrt{a_{\alpha\beta}(t)\, \dot{u}^\alpha(t)\, \dot{u}^\beta(t)}\, \mathrm{d}t \tag{26.1}$$

dužina luka krive između dve tačke $t = a$ i $t = b$, gde je $\dot{u}^\alpha(t) = \dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}t}$.

Uvodeći smenu

$$\varphi(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \sqrt{a_{\alpha\beta}(t)\, \dot{u}^\alpha(t)\, \dot{u}^\beta(t)},$$

prethodni izraz postaje

$$s = \int_a^b \varphi(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})\,\mathrm{d}t.$$

Naš cilje je: naći krivu na S koja između fiksnih tačaka $u^\alpha(a)$ i $u^\alpha(b)$ ima ekstramalu luka.

Pretpostavimo da je to baš kriva

$$C : u^\alpha = u^\alpha(t).$$

Ako su $w^\alpha(t)$ neprekidne i diferencijabilne funkcije koje isčezavaju za $t = a$ i $t = b$, tj. $w^\alpha(a) = w^\alpha(b) = 0$, onda

$$C_\varepsilon : \bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(t, \varepsilon) = u^\alpha(t) + \varepsilon w^\alpha(t)$$

predstavlja familiju krivih na S koje prolaze kroz tačke $u^\alpha(a)$ i $u^\alpha(b)$. Za $\varepsilon = 0$ biće $C_0 = C$.

Izborom malih vrednosti ε moguće je odstupanje (variranje) krivih C_ε od C učiniti malim koliko želimo. Dužina luka krivih C_ε je data izrazom

$$s(\varepsilon) = \int_a^b \varphi\,(\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{w}, \dot{\mathbf{u}} + \varepsilon\dot{\mathbf{w}})\,\mathrm{d}t.$$

Po pretpostavci $s(\varepsilon)$ je minimalno za $\varepsilon = 0$. Onda je $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varepsilon} = 0$ za $\varepsilon = 0$, tako da je

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}\,w^\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^\alpha}\,\dot{w}^\alpha\right)\mathrm{d}t = 0.$$

Parcijalnom integracijom sledi da je

$$\int_a^b \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}\,w^\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^\alpha}\,\dot{w}^\alpha\right)\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^\alpha}\right) w^\alpha\,\mathrm{d}t + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^\alpha}w^\alpha\right)\bigg|_a^b = 0.$$

Član $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^\alpha}w^\alpha\right)\bigg|_a^b = 0$, jer je $w^\alpha(a) = w^\alpha(b) = 0$. Prema tome je

$$\int_a^b \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^\alpha}\right) w^\alpha\,\mathrm{d}t = 0.$$

Ovaj integral je nula za proizvoljne vrednosti funkcija $w^\alpha(t)$, odakle sledi da je integrand jednak nuli. To znači da funkcija φ mora zadovoljavati jednačine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^\alpha}-\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}=0. \tag{26.2}$$

Ovo su dobro poznate **Ojler-Lagranževe jednačine** varijacionog problema koji razmatramo.

Koristeći $\varphi(\mathbf{u},\dot{\mathbf{u}})=\sqrt{a_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta}$, ove jedačine se mogu izraziti preko promenljivih u^α. Iz

$$\varphi^2=\left(a_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta\right)$$

dobijamo da je

$$\begin{aligned}2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}&=\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}\dot{u}^\beta\dot{u}^\gamma,\\ \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^\alpha}&=a_{\alpha\beta}\dot{u}^\beta.\end{aligned}$$

Računamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{a_{\alpha\beta}\dot{u}^\beta}{\varphi}\right)=\frac{1}{\varphi}\left(a_{\alpha\beta}\ddot{u}^\beta+\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\dot{u}^\beta\dot{u}^\gamma\right)-\frac{a_{\alpha\beta}\dot{u}^\beta}{\varphi^2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Smenom ovih izraza u (26.2) biće

$$a_{\alpha\beta}\ddot{u}^\beta+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}+\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}-\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}\right)\dot{u}^\beta\dot{u}^\gamma=\frac{a_{\alpha\beta}\dot{u}^\beta}{\varphi^2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

ili

$$a_{\alpha\beta}\ddot{u}^\beta+[\beta\gamma,\alpha]\,\dot{u}^\beta\dot{u}^\gamma=\frac{a_{\alpha\beta}\dot{u}^\beta}{\varphi^2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Dizanjem indeksa i smenom $\varphi=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, sledi da je

$$\ddot{u}^\alpha+\left\{\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\gamma\end{array}\right\}\dot{u}^\beta\dot{u}^\gamma=\dot{u}^\alpha\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}},\quad \text{ili}\quad \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}t}\right)=\dot{u}^\alpha\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}.$$

U slučaju kada se za parametar t uzme luk s krive, tj. kada je $t=s$, gornja jednačina (26) geodezijske linije se znatno uprošćava. Tada je $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=0$, $\dot{u}^\alpha=\dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}$, $\ddot{u}^\alpha=\dfrac{\mathrm{d}^2u^\alpha}{\mathrm{d}s^2}$, pa je

$$\frac{\mathrm{d}^2u^\alpha}{\mathrm{d}s^2}+\left\{\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\gamma\end{array}\right\}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}=0, \tag{26.3}$$

ili

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\mathrm{d}u^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right)=\left(\frac{\mathrm{d}u^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right)_{,\beta}\frac{\mathrm{d}u^{\beta}}{\mathrm{d}s}=0. \tag{26.4}$$

Prema tome, rešenja sistem običnih diferencijalnih jednačina (26.3) predstavljaju geodezijske linije. Na osnovu teorije običnih diferencijalnih jednačina, rešenje $u^{\alpha}(s)$ je određeno jednoznačno, ako su početne vrednosti u^{α} i $\frac{du^{\alpha}}{ds}$ zadate u bilo kojoj tački. Geometrijski to znači da je geodezijska linija jednoznačno određena za zadati pravac u zadatoj tački. Međutim, mi definišemo geodezijsku liniju kao krivu koja prolazi kroz dve tačke. Ali tada geodezijska linija ne mora biti jednoznačna, sem ako su te dve tačke dovoljno bliske. Na primer, postoji jednoznačna geodezijska linija na sferi koja prolazi kroz dve tačke, izuzev ako su te sve tačke na krajevima prečnika sfere. U tom slučaju svi veliki krugovu su geodezijske linije. Prema tome, Ojler-Lagranževe jednačine predstavljaju, u opštem slučaju, potreban, ali ne i dovoljan uslov minimuma dužine luka na geodeziskoj liniji. Drugačije rečeno, ovako izvedene jednačine geodezijske linije imaju lokalni minimum.

Teorema 26.0.1 Kriva linija C je geodezijska akko je njena geodezijska krivina $k_g=0$.

Dokaz

Znamo da je u opštem slučaju

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\mathrm{d}u^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right)=k_g\,v^{\alpha}.$$

Ako je kriva C geodezijska, tj. $\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\mathrm{d}u^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right)=0$, onda je $k_g=0$. Obrnuto, ako je $k_g=0$, onda je $\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\mathrm{d}u^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right)=0$ i kriva C je geodezijska.

Ekvivalentno ovoj Teoremi 26.0.1 je sledeća lema:

Lema 26.0.2 Kriva linija C je geodezijska linija akko je $\frac{\delta v^{\alpha}}{\delta s}$, tj. ako je vektor v^{α} kovarijantno konstantan.

❑

Dokaz

Sledi iz 25.14.

N Jednačine (26.3) su unutrašnja geometrija površi. To znači da geodezijska linija jedne povši je odgovarajuća geodezijska linije druge njoj izometrične površi.

Specijalan slučaj. U $\mathbb{E}_2$ prava linija je geodezijska linija. Zaista, u tom slučaju je, birajući za koordinatne linije Dekatove koordinate z^α, Kristofelov simbol $\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\gamma \end{array} \right\} = 0$, pa se jednačine geodezijske linije svode na $\dfrac{\mathrm{d}^2 z^\alpha}{\mathrm{d}s^2} = 0$. Rešenja ove jednačine su prave linije $z^\alpha = a^\alpha s + b^\alpha$, gde su a^α i b^α proizvoljni vektori.

Lema 26.0.3 Geodezijske krivine koordinatnih linija na površi $S : \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, su:

$$k_1 = \sqrt{\frac{a}{(a_{11})^3}} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 11 \end{array} \right\} \quad \text{i} \quad k_2 = \sqrt{\frac{a}{(a_{22})^3}} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 22 \end{array} \right\}.$$

❏

Dokaz

Koordinatne linije na S su zadate jednačinama $u^\alpha = c^\alpha$.

Za kordinatnu liniju u^1, $u^2 = c^2$, biće $\mathrm{d}s_1 = \sqrt{a_{11}}\,\mathrm{d}u^1$, $(t_1^\alpha) = \left(\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s^1}, 0\right)$, gde je $\mathrm{d}s_1 = \sqrt{a_{11}}\,\mathrm{d}u^1$. Onda je $t_1^\alpha = \frac{\delta_1^\alpha}{\sqrt{a_{11}}}$. U tom slučaju je

$$k_1 = \sqrt{a}\,e_{12}t_1^1\frac{\delta t_1^2}{\delta s} = \sqrt{\frac{a}{a_{11}}}\frac{\delta t_1^2}{\delta s}.$$

Iz izraza

$$\frac{\delta t^\beta}{\delta s} = \frac{\mathrm{d}t^\beta}{\mathrm{d}s} + \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ \gamma\delta \end{array} \right\} t^\gamma t^\delta$$

nalazimo da je

$$\frac{\delta t_1^2}{\delta s} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 11 \end{array} \right\} \frac{1}{a_{11}}.$$

Onda je

$$k_1 = \sqrt{a}\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 11 \end{array} \right\} \frac{1}{a_{11}} = \sqrt{\frac{a}{(a_{11})^3}}\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 11 \end{array} \right\}.$$

Na isti način se dokazuje da je za koordinatnu krivu u^2, $u^1 = c^1$,

$$k_2 = \sqrt{\frac{a}{(a_{22})^3}}\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 22 \end{array} \right\}.$$

Posledica leme. Koordinatne linije $u^\alpha = c^\alpha$ su geodezijske ako je $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 22 \end{smallmatrix} \right\} = 0$ i $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 11 \end{smallmatrix} \right\} = 0$. ❑

Primer 15

Koordinate u^α, $\alpha = 1,2$, sfere

$$\mathbf{r} = \left(r\cos u^2\cos u^1, r\cos u^2 \sigma u^1, r\sin u^2\right),$$

su ortogonalne i

$$(a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} r^2\cos^2 u^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Onda je

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1} = 0 \quad \text{i} \quad \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 22 \end{array} \right\} = 0.$$

Znači krive $u^1 = c$ su geodezijske. Takođe je

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial u^2} = -2r^2\cos u^2\sin u^2.$$

Ovaj izraz je nula za $u^2 = 0$. Tada je

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} = 0$$

duž ekvatora. To je jedina geodezijska linija $u^2 = c$. (U polovima $u^2 = \pm\pi/2$ takođe je $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 11 \end{smallmatrix} \right\} = 0$, ali je matrica $(a_{\alpha\beta})$ singularna, jer je $\det\big(a_{\alpha\beta}\big) = 0$ u tim tačkama.).

N Moguće je odrediti izraze za glavnu krivinu, geodezijsku krivinu i normalnu krivinu i na drugi način. To ćemo ovde prikazati.

Uočimo da vektor $\mathbf{N}$ leži u ravni međusobno upravnih i jediničnih vektora $\mathbf{n}$ i $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n} \times \mathbf{T}$. Lako je pokazati da je

$$\mathbf{N} = (\mathbf{N}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{T}))\,\mathbf{n}\times\mathbf{T} + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Za $k > 0$ biće

$$\begin{aligned} k\mathbf{N} &= (k\mathbf{N}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{T}))\,\mathbf{n}\times\mathbf{T} + (k\mathbf{N}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} = \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{T})\right)\mathbf{n}\times\mathbf{T} + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{n}\right)\mathbf{n}, \end{aligned}$$

odkle se vidi da je

$$k_g = \left(\mathbf{T}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right)\cdot\mathbf{n} \quad \text{i} \quad k_n = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{n}\right).$$

Prema tome je

$$k\mathbf{N} = k_s\,\mathbf{n}\times\mathbf{T} + k_n\,\mathbf{n}.$$

Korisno je, takođe, imati u vidu da je

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2. \tag{26.5}$$

26.0.1 Gaus-Boneova teorema

Teorema 26.0.4 — Gaus-Bone. Neka je S prosto povezana oblast površi koja je predstavljena sa $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ klase $r \geq 3$ i čija granica C je prosta zatvorena kriva $\mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$ klase $r^* \geq 2$, gde je s luk krive C. Neka je k_g geodezijska krivina od C i neka je K Gausova krivina S. Onda je

$$\int\limits_C k_g\,\mathrm{d}s + \iint\limits_S K\,\mathrm{d}a = 2\pi, \tag{26.6}$$

gde je da element površi C. Integracija duž C se izvodu u smeru tako da S ostaje sa njene leve strane.

Integral

$$\iint_S K\,\mathrm{d}a,$$

koji se pojavljuje u Gaus-Boneovoj teoremi, naziva se **integral krivine povši** koju razmatramo.

Dokaz Teoreme može se naći u svakoj dobroj knjizi iz diferencijalne geometrije. Postoje različiti dokazi teoreme. U nekim slučajevima dokaz se uprošćava korišćenjem specijalnih koorinatnih sistema u^α, $\alpha = 1,2$, na površi S. Onda se gubi njen invarijantni karakter. Prem tome, poželjno je da se teorema dokaže nezavisno od izbora koordinatnog sistema. To Teoremi daje njen invarijantni karakter. Ovde prezentiramo takav prilaz.

Za dokaz teoreme na taj način pozivamo se na sledeće relacije.

I. Neka su λ^α i λ_α kontravarijantne i kovarijantne komponente jediničnog vektora. Onda je $\lambda^\alpha_{,\beta}\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha,\beta}\lambda^\alpha = 0$, odakle sledi da je

$$\lambda^\alpha_{,\beta} = \mu^\alpha \nu_\beta, \qquad \lambda_{\alpha,\beta} = \mu_\alpha \nu_\beta, \tag{26.7}$$

gde je μ^α vektor upravan na dati vektor i ν_β je neki vektor. Lako je pokazati da je

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}\lambda^\gamma_{,\alpha}\lambda^\delta_{,\beta} = 0. \tag{26.8}$$

II. Takođe nam je potrebna relacija

$$m_{\alpha,\beta\gamma} - m_{\alpha,\gamma\beta} = m_\delta R^\delta_{\alpha\beta\gamma}, \tag{26.9}$$

gde je

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta} \tag{26.10}$$

Riman-Kristofelov tenzor. Onda iz (26.9) i (26.10) sledi da je

$$\varepsilon^{\beta\gamma} m_{\alpha,\beta\gamma} = K m^\gamma \varepsilon_{\gamma\alpha}. \tag{26.11}$$

III. Dalje koristimo Grinovu teoremu

$$\oint A_\alpha \lambda^\alpha\,\mathrm{d}s = \iint_S \varepsilon^{\alpha\beta} A_{\beta,\alpha}\,\mathrm{d}a. \tag{26.12}$$

IV. Neka je $C:\ u^\alpha = u^\alpha(s)$ i $C_\alpha:\ \varphi(u^1,u^2) = a$ familija krivih na S; s je dužina luka krive C, i a - proizvoljna konstanta.

Dalje, $\lambda^\alpha = \dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}$ označava jedinični tangentni vektor C, a $m_\alpha = \dfrac{\varphi_{,\alpha}}{|\mathrm{grad}\varphi|}$ jedinični vektor normale na C_α; $|\mathrm{grad}\varphi| = \sqrt{a^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}}$. Pretpostavljamo da se C

preseca sa familijom krivih C_α. Ugao θ između C i C_α u tački preseka označićemo sa θ.

Želimo da odredimo promene ugla θ u odnosu na s duž C. Pri tome koristimo $\theta = \frac{\pi}{2} - \vartheta$, gde je ϑ ugao između jediničnih vektora λ^α i m_α u tački preseka, jer je onda $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}$. Očigledno je,

$$\mathrm{tg}\vartheta = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha m^\beta}{a_{\gamma\delta}\lambda^\gamma m^\delta},$$

tako da je

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\vartheta}{\delta s} &= \varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta s}\left(\lambda^\alpha m^\beta\right)a_{\gamma\delta}\lambda^\gamma m^\delta - \varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha m^\beta\frac{\delta}{\delta s}\left(a_{\gamma\delta}\lambda^\gamma m^\delta\right) = \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta}\left(\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s}\lambda^\gamma - \lambda^\alpha\frac{\delta\lambda^\gamma}{\delta s}\right)m^\beta m^\delta + \varepsilon_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta}\left(\frac{\delta m^\beta}{\delta s}m^\delta - m^\beta\frac{\delta m^\delta}{\delta s}\right)\lambda^\alpha\lambda^\gamma = \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta}\delta^{\alpha\gamma}_{\sigma\tau}\frac{\delta\lambda^\sigma}{\delta s}\lambda^\tau m^\beta m^\delta + \varepsilon_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta}\delta^{\beta\delta}_{\sigma\tau}\frac{\delta m^\sigma}{\delta s}m^\tau\lambda^\alpha\lambda^\gamma = \\ &= a_{\beta\delta}m^\beta m^\delta\varepsilon_{\sigma\tau}\frac{\delta\lambda^\sigma}{\delta s}\lambda^\tau - a_{\gamma\alpha}\lambda^\alpha\lambda^\gamma\varepsilon_{\sigma\tau}\frac{\delta m^\sigma}{\delta s}m^\tau.\end{aligned}$$

Prema tome je

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}s} = \varepsilon_{\sigma\tau}\frac{\delta\lambda^\sigma}{\delta s}\lambda^\tau - \varepsilon_{\sigma\tau}\frac{\delta m^\sigma}{\delta s}m^\tau,$$

odakle sledi

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}s} = k_g - \varepsilon_{\sigma\tau}\frac{\delta m^\sigma}{\delta s}m^\tau,$$

jer je $\frac{\delta\lambda^\sigma}{\delta s} = k_g\upsilon^\sigma$ i $\varepsilon_{\sigma\tau}\upsilon^\sigma\lambda^\tau = -1$. Znači,

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = k_g + \varepsilon_{\sigma\tau}\frac{\delta m^\sigma}{\delta s}m^\tau. \tag{26.13}$$

Sledi Dokaz Teoreme Gaus-Bonea.

Dokaz

Iz (26.13) imamo

$$\oint \mathrm{d}\theta - \oint k_g\,\mathrm{d}s = \oint \varepsilon_{\sigma\tau}\delta m^\sigma m^\tau = \oint \varepsilon_\sigma m^\sigma_{,\alpha}m^\tau\lambda^\alpha\,\mathrm{d}s,$$

gde smo koristili

$$\frac{\delta m^\alpha}{\delta s} = m^\alpha_{,\rho}\lambda^\rho.$$

Ali, imajući u vidu (26.8), (26.11) i Grinovu teoremu (26.12),

$$\oint \varepsilon_{\sigma\tau} m^{\sigma}_{,\alpha} m^{\tau} \lambda^{\alpha}\, \mathrm{d}s = \iint\limits_S \varepsilon^{\beta\alpha} \left(\varepsilon_{\sigma\tau} m^{\sigma}_{,\alpha} m^{\tau}\right)_{,\beta} \mathrm{d}a = \iint\limits_S \varepsilon^{\beta\alpha} \varepsilon_{\sigma\tau} \left(m^{\sigma}_{,\alpha\beta} m^{\tau} + m^{\sigma}_{,\alpha} m^{\tau}_{,\beta}\right)_{,\beta} \mathrm{d}a =$$

$$= - \iint\limits_S K m_{\gamma} \varepsilon^{\gamma\sigma} \varepsilon_{\sigma\tau} m^{\tau}\, \mathrm{d}a = \iint\limits_S K\, \mathrm{d}a.$$

Onda je

$$\oint \mathrm{d}\theta - \oint k_g\, \mathrm{d}s = \iint\limits_S K\, \mathrm{d}a,$$

odakle sledi (26.6).

Jasno je da se Gaus-Bone-ova teorema može formulisati za opštije slučajeve, na primer za prosto povezane delove površi koja je ograničena sa delovima regularnih krivih. Postupak je isti. Onda umesto (26.6) imamo

$$\oint k_g\, \mathrm{d}s + \iint\limits_S K\, \mathrm{d}a = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} (\pi - \theta_i)\,, \tag{26.14}$$

gde je θ_i odgovarajući spoljašnji ugao od C u tačkama gde se delovi krivih spajaju.

Obično koristimo unutrašnje uglove α_i, tj. relaciju $\alpha_i = \pi - \theta_i$, tako da je

$$(n-2)\pi + \oint k_g\, \mathrm{d}s + \iint\limits_S K, \mathrm{d}a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i. \tag{26.15}$$

Primedba. Pristup je sasvim opšti. Na primer, pretpostavimo da je $\varphi = u^{\alpha} = const.$, $\alpha =$ fiksno (obično je $\alpha = 2$). Onda je $\varphi_{,\sigma} = \delta^{\alpha}_{\sigma}$, $|\mathrm{grad}\varphi| = \sqrt{a^{\alpha\alpha}}$, $m_{\sigma} = \dfrac{1}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}}\delta^{\alpha}_{\sigma} = \sqrt{\dfrac{a}{a^{\beta\beta}}}\delta^{\alpha}_{\sigma}$, (ne sabira se po $\alpha, \beta \neq \alpha$). Prema tome, iz (26.13) imamo

$$\frac{\mathrm{d}\theta_{\alpha}}{\mathrm{d}s} = k_{g_{\alpha}} + \varepsilon^{\sigma\tau} \frac{\delta m_{\sigma}}{\delta s} m_{\tau} = k_{g_{\alpha}} + \varepsilon^{\beta\alpha} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\delta m_{\beta}}{\delta s} m_{\alpha}, \quad \text{(ne sabira se po } \alpha, \beta).$$

Ali

$$\frac{\delta m_{\beta}}{\delta s} = \frac{\mathrm{d}m_{\beta}}{\mathrm{d}s} - m_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\delta}\frac{\mathrm{d}u^{\delta}}{\mathrm{d}s} = -m_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\delta}\frac{\mathrm{d}u^{\delta}}{\mathrm{d}s} = -\sqrt{\frac{a}{a_{\beta\beta}}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\frac{\mathrm{d}u^{\delta}}{\mathrm{d}s},$$

pa je

$$\frac{\mathrm{d}\theta_{\alpha}}{\mathrm{d}s} = k_{g_{\alpha}} - \varepsilon^{\beta\alpha} \frac{\sqrt{a}}{a_{\beta\beta}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} \frac{\mathrm{d}u^{\delta}}{\mathrm{d}s}. \tag{26.16}$$

Specijalno, za $\varphi = u^2 = const.$, iz (26.16) dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}s} = k_{g_2} - \frac{\sqrt{a}}{a_{11}} \Gamma^{2}_{1\delta} \frac{\mathrm{d}u^{\delta}}{\mathrm{d}s}. \tag{26.17}$$

Ako je $\varphi = u^2 = const.$ geodezijska linija, onda je $k_{g_2} = 0$ i

$$\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}s} + \frac{\sqrt{a}}{a_{11}}\Gamma^2_{1\delta}\frac{\mathrm{d}u^\delta}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{26.18}$$

27. Uloga druge fundamentalne forme

Korisno je da se izraz

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = k_g\,\boldsymbol{\nu} + b_{\alpha\beta}\,t^\alpha\,t^\beta\,\mathbf{n}, \tag{27.1}$$

koristeći Freneovu formulu

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = k\mathbf{N},$$

napiše u obliku

$$k\mathbf{N} = k_g\,\boldsymbol{\nu} + b_{\alpha\beta}\,t^\alpha\,t^\beta\,\mathbf{n}. \tag{27.2}$$

Skalarnim proizvodom (27.2) sa $\mathbf{n}$ dobija se

$$k\cos\gamma = b_{\alpha\beta}\,t^\alpha\,t^\beta, \quad (k > 0), \tag{27.3}$$

gde je $\cos\gamma = \mathbf{N}\cdot\mathbf{n}$, a γ ugao koji čine jedinični vektori $\mathbf{N}$ i $\mathbf{n}$ i koji se menja duž krive C. Uočimo da je takođe

$$k\cos\gamma = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{n}. \tag{27.4}$$

Prvo ćemo gornji izraz napisati u obliku

$$k\cos\gamma = \frac{b_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s^2} = \frac{b_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta}{a_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta}, \tag{27.5}$$

tj. u obliku

$$k\cos\gamma = b_{\alpha\beta}\, t^\alpha\, t^\beta,$$

imajući u vidu da je $a_{\alpha\beta}\, t^\alpha\, t^\beta = 1$.

Odavde se vidi da krivina k zavisi od pravca jediničnog vektora tangente i jediničnog vektora glavne normale krive u tački **p**. Za neku fiksiranu tačku **p**, na površi S kroz koju prolazi kriva, vrednosti tenzora $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ i jediničnog vektora normale **n** povši S su potpuno određene i ne zavise od izbora krive koja prolazi kroz tu tačku.

Teorema 27.0.1 Za sve krive $r \geq 2$ na površi S, koje prolaze kroz fiksnu tačku **p**, a koje imaju isti tangentni vektor, $k\cos\gamma$ ima istu vrednost.

Drugačije rečeno, sve krive klase $r \geq 2$ na površi S, koje prolaze kroz fiksnu tačku **p** i koje leže u oskulatornoj ravni (koja se ne poklapa sa tangentom ravni), imaju istu krivinu k.

Ako pak posmatramo krive čiji je pravac fiksiran, onda je $b_{\alpha\beta}\, t^\alpha\, t^\beta$ fiksirano i krivina k zavisi samo od ugla γ koji glavna normala zaklapa sa normalom **n** površi S. Za ove krive, koje imaju isti pravac u fiksnoj tački **p**, uvodimo oznaku

$$k_n = k\cos\gamma, \tag{27.6}$$

gde je k_n konstantno. Specijalno za $\gamma = 0, \pi$ biće $k = \pm k_n$, ovim redom. Prema tome, $|k_n|$ je krivina krive koja se dobija u presesku površi S i ravni koju čine tangenta krive i normala površi S u toj fisnoj tački **p**. Ove krive se nazivaju **krive normalnog preseka površi** S. Prema tome, vrednost k_n zavisi samo od pravca tangente normalnog preeska u **p**. Zbog toga

$$k_n = \frac{b_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}u^\alpha\, \mathrm{d}u^\beta}{a_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}u^\alpha\, \mathrm{d}u^\beta} \tag{27.7}$$

nazivamo **normalna krivina površi** S u **p** za taj pravac. Bitno je uočiti da je normalna krivina k_n funkcija obe fundamentalne forme. Njen znak određuje forma $b_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}u^\alpha\, \mathrm{d}u^\beta$, jer je metrička forma $\mathrm{d}s^2 = a_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}u^\alpha\, \mathrm{d}u^\beta$ uvek pozitivna.

Po prirodi stvari, imajući u vidu izraz

$$k\mathbf{N} = k_g\, \boldsymbol{\nu} + b_{\alpha\beta}\, t^\alpha\, t^\beta\, \mathbf{n} = k_g\, \boldsymbol{\nu} + k_n\, \mathbf{n}, \tag{27.8}$$

definišemo **vektor normalne krivine**

$$\mathbf{k} = k_n\, \mathbf{n}. \tag{27.9}$$

Onda prethodni izraz postaje (27.8)

$$k\mathbf{N} = k_g\, \boldsymbol{\nu} + k_n\, \mathbf{n}, \tag{27.10}$$

odakle sledi (26.5), tj.

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

Iz (27.6) i (26.5) dobijamo da je

$$|k_g| = k \sin \gamma, \tag{27.11}$$

što određuje vezu između krivine k i geodezijske krivine $|k_g|$ krive C na površi S.

Jedna od geometrijskih interpretacija značenja normalne i geodezijske krivine dobija se iz izraza

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = k_g \boldsymbol{\nu} + k_n \mathbf{n}.$$

Onda je

$$k_n = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{n},$$

tj. normalna krivina k_n je projekcija vektora $\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}$ krive na vektor normale $\mathbf{n}$ površi u toj tački krive i

$$k_g = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{\nu},$$

tj. geodezijska krivina k_g je projekcija vektora $\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}$ krive na tangentnu ravan površi u toj tački krive.

Geometrijska interpretacija veze između krivina očiglednija je, ako se koristi relacija između krivine i poluprečnika krivine. Tako je

$$k_n = \frac{1}{R}, \quad k_n \neq 0,$$

gde je R poluprečnik krivine odgovarajućeg normalog preseka, u posmatranoj tački $\mathbf{p}$ na S.

Slučaj kada je $k_n = 0$ biće posebno razmatran.

Takođe, pišemo $k = \frac{1}{\rho}$. Onda (27.6) postaje

$$\rho = R \cos \gamma. \tag{27.12}$$

Interpretacija ovog izraza daje sledeća

Teorema 27.0.2 — Meusnier. Centar krivine svih krivih na površi S koje prolaze kroz proizvoljnu fiksnu tačku $\mathbf{p}$ i čije tangente imaju isti pravac, izuzev pravca za koje je $k_n = 0$, leže na krugu K poluprečnika $1/R$ koji leži u normaloj ravni i ima bar kontakt (dodir) prve vrste sa S u $\mathbf{p}$.

27.1 Asimptotske linije

Pravci u **p**, za koje je $k_n = 0$, nazivaju se **asimptotski pravci**. Kriva čija tangenta u svakoj svojoj tački ima asimptotski pravac naziva se **asimptotska kriva**. Diferencijalna jednačina asimptotske krive je

$$b_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^{\alpha}\,\mathrm{d}u^{\beta} = 0, \tag{27.13}$$

što neposredno sledi iz (27.7).

Integralne krive, ove jednačine, dobijaju se iz jednačina

$$\left(b_{12} \pm \sqrt{b_{12}^2 - b_{11}\,b_{22}}\right)\mathrm{d}u^1 + b_{22}\,\mathrm{d}u^2 = 0. \tag{27.14}$$

Ove integralne krive su konjugovano imaginarne, realne, različite, ili se poklapaju u zavisnosti od toga dali je $\det\left(b_{\alpha\beta}\right) = b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2$ pozitivna, negativna, ili jednaka nuli.

Dalja analiza se zasniva na izrazu (27.10) koji sada glasi

$$k\mathbf{N} = k_g\,\boldsymbol{\nu}. \tag{27.15}$$

Kako su $\mathbf{N}$ i $\boldsymbol{\nu}$ jedinični vektori onda je:

i) $k = k_g = 0$, ili

ii) krivina i geodijska krivina, asimptotske linije, su jednake po veličini i njena glavna normala leži u površi S.

U slčaju i) važi

Teorema 27.1.1 Svaka prava linija na površi S klase $r \geq 2$ je asimptotska linija. U tom slučaju je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{a}\,s + \mathbf{b}.$$

Tipičan primer toga su izvodnice cilindra i konusa.

U slučaju ii) važi

Teorema 27.1.2 U bilo kojoj tački asimptotske linije oskulatorna ravan i tangentna ravan se poklapaju.

Dokaz sledi neposredno iz (27.15). ❑

Kao posledica ove Teoreme sledi da je u svim tačkama asimptotske linije

$$\mathbf{B} = \pm\mathbf{n}.$$

Onda je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = \pm\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s} \quad \Rightarrow \quad -\tau\mathbf{N} = \pm\mathbf{n}_{,\alpha}\frac{\mathrm{d}u^{\alpha}}{\mathrm{d}s} = \pm b_{\alpha\beta}\,t^{\alpha}\,\mathbf{a}^{\beta}.$$

Tada je

$$\tau^2 = b_{\alpha\beta}\, t^\alpha\, b_{\gamma\delta}\, t^\delta\, (\mathbf{a}^\beta \cdot \mathbf{a}^\gamma) = b_{\alpha\beta}\, b_{\gamma\delta}\, a^{\beta\delta}\, t^\alpha\, t^\gamma = b_{\alpha\beta}\, b^\beta_\gamma\, t^\alpha\, t^\gamma.$$

Prema tome, kvadrat torzija asimptotske linije dobija se iz izraza

$$\tau^2 = c_{\alpha\beta}\, t^\alpha\, t^\beta,$$

gde je

$$c_{\alpha\beta} = b_{\alpha\gamma} b^\gamma_\beta.$$

Kako je

$$c_{\alpha\beta} - 2H\, b_{\alpha\beta} + K\, a_{\alpha\beta} = 0,$$

onda je

$$c_{\alpha\beta}\, t^\alpha\, t^\beta - 2H\, b_{\alpha\beta}\, t^\alpha\, t^\beta + K = 0,$$

pa je, za asimptotsku liniju

$$c_{\alpha\beta}\, t^\alpha\, t^\beta = -K.$$

Znači, torzija τ asimptotske linije je funkciji njene totalne krivine K, koja je data formulom

$$\tau = \pm\sqrt{-K}.$$

Lema 27.1.3 Koordinatne linije $u^\alpha = c^\alpha$, $\alpha = 1, 2$, na površi S su asimptotske linije akko su, u odnosu na te koordinate, $b_{11} = 0$ i $b_{22} = 0$.

❑

Dokaz sledi iz (27.13). ❑

27.2 Geodezijska torzija krive na površi

Polazimo od

$$\mathbf{N} = \mathbf{n} \cos\gamma + \boldsymbol{\nu} \sin\gamma.$$

Diferenciranjem dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s} \cos\gamma - \sin\gamma \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s} \mathbf{n} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\nu}}{\mathrm{d}s} \sin\gamma + \boldsymbol{\nu} \cos\gamma \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}.$$

Onda je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{n} = -\sin\gamma \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\nu}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{n} \sin\gamma,$$

gde smo koristili sledeće izraze:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Smenom

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} - k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\nu}}{\mathrm{d}s} = -k_g\mathbf{T} + b_{\alpha\beta}t^{\alpha}\nu^{\beta}\mathbf{n},$$

a imajući u vidu da je

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{n} = \sin\gamma,$$

dobijamo

$$\sin\gamma\left(\tau + \frac{\gamma}{s}\right) = b_{\alpha\beta}\sin\gamma t^{\alpha}\nu^{\beta}.$$

Novom smenom

$$\nu^{\beta} = -\varepsilon^{\beta\gamma}t_{\gamma} \quad \text{i} \quad h_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\gamma\delta}a_{\gamma\alpha}b_{\delta\beta},$$

biće

$$\tau + \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s} = b_{\alpha\beta}t^{\alpha}\nu^{\beta} = h_{\alpha\beta}t^{\alpha}t^{\beta}.$$

Odavde se vidi da je $\tau + \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}$ isto za sve krive koje imaju isti tangentni vektor t^{α} u tački krive. U specijalnom slučaju kada se posmatraju geodezijaske linije u tom pravcu, onda je $\gamma = 0$, ili $\gamma = \pi$ i $\tau + \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}$ se svodi na torziju geodezijska linije.

Definicija 27.2.1 **Geodezijska torzija krive** u bilo kojoj njenoj tački je torzija gedezijske linije koja dodiruje krivu u toj tački.

Ako geodezijsku torziju obeležimo sa τ_g, onda je

$$\tau_g = \tau + \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s} = h_{\alpha\beta}t^{\alpha}t^{\beta}.$$

28. Glavna krivina. Linija krivine. Gausova i glavna krivina

Normalna krivina površi S u tački **p** za pravac t^{α} je

$$k_n = b_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}\, t^{\beta}.$$

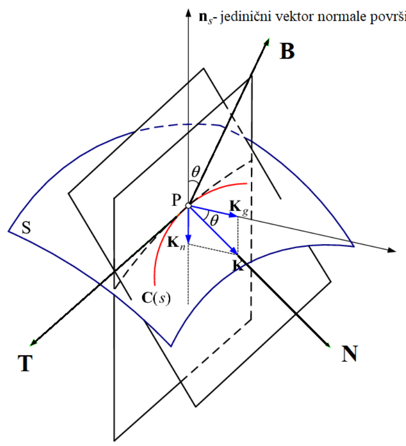
Možemo postaviti pitanje za koji pravac k_n ima stacionarnu vrednost, pod uslovom da je $a_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}\, t^{\beta} = 1$. Fomalno matematički to je dobro poznat problem određivanja uslovnog ekstema, koji se u ovom slučaju svodi na nalaženje rešenja jednačina

$$\left(b_{\alpha\beta} - \lambda\, a_{\alpha\beta}\right) t^{\beta} = 0.$$

Prema tome, tražene vrednosti k_n moraju biti koreni determinante

$$|b_{\alpha\beta} - \lambda\, a_{\alpha\beta}| = 0.$$

Ova jednačina, u opštem slučaju ima dva korena k_1 i k_2. Oni predstavljaju minimalnu i maksimalnu vrednost normalne krivine k_n i nazivaju se **glavne krivine površi** S u tački. Njima odgovarajući pravci, određeni vektorima, nazivaju se **glavni pravci krivine**. Kriva koja u svakoj svojoj tački ima tangentu, koja je u pravcu glavne krivine, naziva se **linija krivine**.



Slika 28.1: Prirodni Trijedar.

Kako su tenzori $b_{\alpha\beta}$ i $a_{\alpha\beta}$ simetrični, sledi da su koreni k_1 i k_2, ove jednačine, realni. Onda različitim korenima $k_1 \neq k_2$, odgovaraju međusobno upravni pravci t_1^α i t_2^α, tj. takvi da je $a_{\alpha\beta}t_1^\alpha t_2^\beta = 0$ (slučaj kada je $k_1 = k_2$ u tački **p** biće posebno razmatran).

Kada se ova jednačina napiše u razvijenom obliku postaje

$$\lambda^2 - a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}\lambda + \frac{b}{a} = 0,$$

gde je $b = \det(b_{\alpha\beta})$, a $a = \det(a_{\alpha\beta})$.

Koristeći oznake

$$H = \frac{1}{2}a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \quad \text{i} \quad K = \frac{b}{a},$$

pišemo

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0.$$

Rešenja ove jednačine su:

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Odakle sledi da je

$$2H = k_1 + k_2, \quad K = k_1 \cdot k_2.$$

Veličina H se naziva **srednja krivina**, a veličina K **Gausova krivina**, ili **totalna krivina površi** u tački **p** površi S.

Uočimo da je

$$H^2 - K = \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 \geq 0,$$

pri čemu znak jednakosti važi samo kada je $k_1 = k_2$.

Od značaja je

Teorema 28.0.1 — Ojlera. Ako pravac t^α zaklapa ugao θ sa glavni pravcem t_1^α, onda je normalna krivina

$$k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta,$$

za taj pravac.

Dokaz

Znamo da je

$$t^\alpha = t_1^\alpha \cos\theta + t_2^\alpha \sin\theta.$$

Onda je

$$\begin{aligned} k_n = b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta &= b_{\alpha\beta} (t_1^\alpha \cos\theta + t_2^\alpha \sin\theta)\left(t_1^\beta \cos\theta + t_2^\beta \sin\theta\right) = \\ &= b_{\alpha\beta} t_1^\alpha t_1^\beta \cos^2\theta + 2b_{\alpha\beta} t_1^\alpha t_2^\beta \cos\theta \sin\theta + b_{\alpha\beta} t_2^\alpha t_2^\beta \sin^2\theta = \\ &= k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta, \end{aligned}$$

jer je

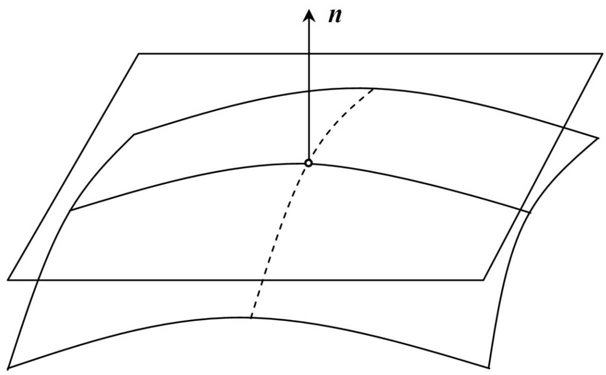
$$b_{\alpha\beta} t_1^\alpha t_1^\beta = k_1 \quad \text{i} \quad b_{\alpha\beta} t_1^\alpha t_2^\beta = k_1 a_{\alpha\beta} t_1^\alpha t_2^\beta = 0.$$

28.1 Klasifikacija tačaka površi. Eliptičke, paraboličke i hiperboličke tačke površi

Glavna krivina, srednja krivina i Gausova krivina su skalarne funkcije na parametrizovanoj površi S. Igraju važnu ulogu u opisu geometrijskih svojstava površi.

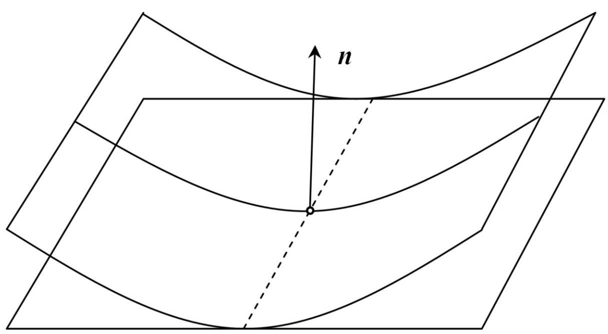
Gausova krivina nam daje mogućnost da razlikujemo tri vrste tačaka na površi. Neka je $\mathbf{p}$ tačka regularne površi S.

1. Neka je $K(\mathbf{p}) > 0$. Tada su $k_1(\mathbf{p})$ i $k_2(\mathbf{p})$ istog znaka. Onda je druga fundamentalna forma u toj tački pozitivna, ili negativna i normalna krivina $k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$ ne menja znak za bilo koje $t^\alpha(\theta)$. Sa geometrijskog stanovišta to znači da površ S, u okolini tačke $\mathbf{p}$, leži u celosti sa jedne strane tangentne ravni u $\mathbf{p}$. U tom slučaju kažemo da je **p eliptička tačka**.
   Primeri takvih tačaka su tačke sfere i elipsoida.



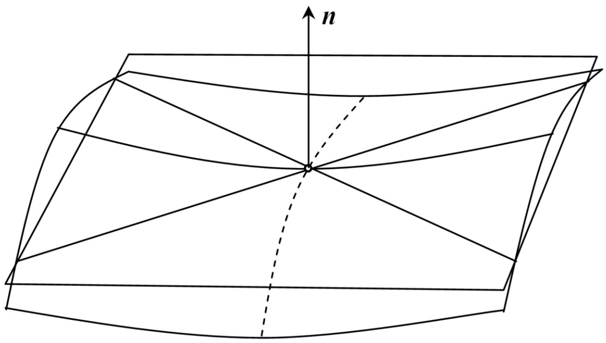
Slika 28.2: Eliptička tačka.

2. $K(\mathbf{p}) < 0$. Onda su $k_1(\mathbf{p})$ i $k_2(\mathbf{p})$ suprotnog znaka. U tom slučaju površ S, u okolini tačke **p**, leži sa obe strane tangentne ravni u **p**. Pravci u tangentnoj ravni, koji razdvajaju ovu okolinu tačke **p**, nazivaju se **asimptotski pravci**. Za takve tačke **p** se kaže sa su **hiperboličke**.



Slika 28.3: Paraboličko-cilindrična tačka.

3. Tačka **p** u kojoj je $K(\mathbf{p}) = 0$ naziva se **parabolička** (ili **cilindrična**).
U tom slučaju jedna od glavnih krivina je nula, što važi za bilo koju tačku cilindra.

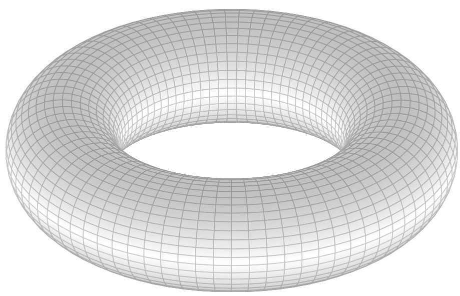


Slika 28.4: Hiprbolička tačka.

■ **Primer 28.1** **Torus**. Jednačina torusa u odnosu na standardnu ortonormiranu bazu $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ u $\mathbb{E}_3$ je

$$\mathbf{x}(u^\alpha) = \left[\left(R_0 + R\cos u^2\right)\cos u^1, \left(R_0 + R\cos u^2\right)\sin u^1, R\sin u^2\right],$$

gde je R poluprečnik kruga i $R < R_0$. Dobija se rotacijom kruga poluprečnika R, čiji se centar nalazi na rastojanju R_0 od komplanarne ose rotacije $\mathbf{e}_3$.



Slika 28.5: Torus.

Torus je pogodan za ilustrovanje svih tipova tačaka: eliptičke, hipreboličke i paraboličke.

Prvo računamo bazne vekrtore torusa $\mathbf{a}_\alpha = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}$, $\alpha = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \left(R_0 + R\cos u^1\right)\left(-\sin u^1, \cos u^1, 0\right), \\
\mathbf{a}_2 &= -R\left(\sin u^2 \cos u^1, \sin u^2 \sin u^1, -\cos u^2\right).
\end{aligned}$$

Uočimo da je $a_{12} = 0$.

Onda je

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} = \left(\cos u^1 \cos u^2, \sin u^1 \cos u^2, \sin u^2\right).$$

Dalje je

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial u^1} = \left(R_0 + R\cos u^2\right)\left(-\cos u^1, -\sin u^1, 0\right),$$
$$\frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial u^2} = -R\left(\cos u^2 \cos u^1, \cos u^2 \sin u^1, \sin u^2\right).$$

Izračunavamo $b_{\alpha\beta}$ iz izraza

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{n}.$$

Onda je

$$b_{11} = -\left(R_0 + R\cos u^2\right)\cos u^2,$$
$$b_{12} = 0,$$
$$b_{22} = -R.$$

Kako je $a_{12} = 0$ i $b_{12} = 0$, sledi da su koordinatne linije linije krivina, pa je

$$k_1 = \frac{b_{11}}{a_{11}} = -\frac{\cos u^2}{R_0 + R\cos u^2},$$
$$k_2 = \frac{b_{22}}{a_{22}} = -\frac{1}{R}.$$

Tada je

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{\cos u^2}{R(R_0 + R\cos u^2)}.$$

■

Diskusija.

1. Tačke torusa za koje je $-\frac{\pi}{2} < u^2 < \frac{\pi}{2}$ su eliptičke, jer je $K > 0$;
2. Tačke torusa za koje je $\frac{\pi}{2} < u^2 < \frac{3\pi}{2}$ su hiperboličke, jer je $K < 0$;
3. Tačke kordinatnih linija $u^2 = -\frac{\pi}{2}$ i $u^2 = \frac{\pi}{2}$ su paraboličke, jer je onda $K = 0$.

Često se u literaturi klasifikacija tačaka na površi razmatra analitički.
Postupak je sledeći.
U okolini tačke $\mathbf{x}(u^\alpha)$ na S funkcija $\mathbf{x}(u^\alpha)$ se razvija u Tajlorov red. Onda je

$$\mathbf{x}(u^\alpha + \mathrm{d}u^\alpha) = \mathbf{x}(u^\alpha) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}\mathrm{d}u^\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\mathrm{d}u^\alpha \mathrm{d}u^\beta + \cdots =$$
$$= \mathbf{x}(u^\alpha) + \mathbf{a}_\alpha \mathrm{d}u^\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}\mathrm{d}u^\alpha \mathrm{d}u^\beta + \cdots =$$

Koristeći izraze

$$\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} = \begin{Bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \mathbf{a}_\gamma + b_{\alpha\beta}\,\mathbf{n}, \quad \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0,$$

sledi da je

$$\mathbf{x}(u^\alpha + \mathrm{d}u^\alpha) - \mathbf{x}(u^\alpha) = \mathbf{a}_\alpha \,\mathrm{d}u^\alpha + \frac{1}{2}\left(\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \mathbf{a}_\gamma + b_{\alpha\beta}\,\mathbf{n}\right) \mathrm{d}u^\alpha \,\mathrm{d}u^\beta + \cdots$$

Rastojanje vektora $\mathbf{x}(u^\alpha + \mathrm{d}u^\alpha) - \mathbf{x}(u^\alpha)$ od tangentne ravni na S definišemo kao njegovu projekciju u pravcu normale $\mathbf{n}$ u $\mathbf{x}(u^\alpha)$. Onda je

$$d = [\mathbf{x}(u^\alpha + \mathrm{d}u^\alpha) - \mathbf{x}(u^\alpha)] \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha \,\mathrm{d}u^\beta,$$

kada se zadržimo u dovoljno bliskoj okolini tačke $\mathbf{x}(u^\alpha)$.

U razvijenom obliku biće

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}\left[b_{11}(\mathrm{d}u^1)^2 + 2b_{12}\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2 + b_{22}(\mathrm{d}u^2)^2\right] = \\ &= \frac{1}{2} b_{11}(\mathrm{d}u^2)^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}u^2}\right)^2 + 2\frac{b_{12}}{b_{11}\dfrac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}u^2}} + \frac{b_{22}}{b_{11}}\right], \end{aligned}$$

koji se, posle duže računice, može predstaviti u obliku

$$d = \frac{1}{2b_{11}}\left[b_{11}\mathrm{d}u^1 + (b_{12} + \sqrt{-b})\mathrm{d}u^2\right]\left[b_{11}\mathrm{d}u^1 + (b_{12} - \sqrt{-b})\mathrm{d}u^2\right],$$

gde je $b = \det(b_{\alpha\beta})$.

Diskusija

$$d = 0: \; b_{11}\,\mathrm{d}u^1 + \left(b_{12} \pm \sqrt{b_{12}^2 - b_{11}\,b_{22}}\right)\mathrm{d}u^2 = 0,$$

ili

$$b_{11}\,\mathrm{d}u^1 + \left(b_{12} \pm \sqrt{-b}\right)\mathrm{d}u^2 = 0.$$

1. $b > 0$ eliptička tačka, nema preseka između površi i tangentne ravni.
2. $b < 0$ hiperbolička, dve asimptotske linije, obrtni hiprboloid.
3. $b = 0$ parabolička, jedna asimptotska linija:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u^1 &= -\frac{b_{12}}{b_{11}}\,\mathrm{d}u^2, \quad b_{11} \neq 0, \quad \text{ili}, \\ \mathrm{d}u^2 &= -\frac{b_{12}}{b_{11}}\,\mathrm{d}u^1, \quad b_{22} \neq 0, \quad \text{dvostruki koren}. \end{aligned}$$

Kružni cilindar

4. $b_{\alpha\beta} = 0$, tačka u ravni, dodir višeg reda.
5. Drugi slučajevi

$$b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12} \neq 0, \quad \Rightarrow$$
$$b_{12}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^1 = c^1, \quad u^2 = c^2, \quad \text{dve linije preseka}.$$

28.2 Umbolične tačke

U slučaju kada je $k_1 = k_2$ u tački $\mathbf{p}$, normalna krivina je ista za sve pravce. Onda je

$$\left(b_{\alpha\beta} - \lambda\, a_{\alpha\beta}\right) t^{\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(b_{\alpha\beta} - \lambda\, a_{\alpha\beta}\right) \mathrm{d}u^{\alpha} = 0$$

za proizvoljno $\mathrm{d}u^{\alpha}$, odakle sledi da mora biti

$$b_{\alpha\beta} = \lambda(u^{\gamma})\, a_{\alpha\beta}.$$

Tačke površi S ovog tipa se nazivaju **umbolične tačke**.

U tom slučaju je $b = \lambda^2 a$, $a > 0$.

Ako je $\lambda \neq 0$, onda je $b > 0$ i za tačku $\mathbf{p}$ se kaže da je **eliptično umbolična**. Tipičan primer takve površi su tačke sfere.

Ako je $\lambda = 0$, onda je $b = 0$, i za tačku $\mathbf{p}$ se kaže da je **paraboličko umbolična**, ili ravna tačka.

Od interesa su površi čije su sve tačke umbolične.

Teorema 28.2.1 Površ S, reprezentacija klase $r \geq 3$, čije su sve tačke umbolične je ravan ili sfera.

Dokaz

i) Slučaj kada je $\lambda = 0$ u svim tačkama površi S. Onda iz

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad b_{\alpha\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}_{,\alpha} = -b_{\alpha\beta}\,\mathbf{a}^{\beta} = -\lambda a_{\alpha\beta}\,\mathbf{a}^{\beta} = -\lambda \mathbf{a}_{\alpha} = \mathbf{0},$$

sledi

$$\mathbf{n}_{,\alpha} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \text{const}.$$

Znači površ S je ravan.

ii) Slučaj kada je $\lambda \neq 0$ u svim tačkama površi S. Onda iz

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{,\alpha} = -b_{\alpha\beta}\,\mathbf{a}^{\beta} = -\lambda a_{\alpha\beta}\,\mathbf{a}^{\beta} = -\lambda \mathbf{a}_{\alpha} \quad &\Rightarrow \\ \mathbf{n}_{,\alpha\beta} = -\lambda_{,\beta}\,\mathbf{a}_{\alpha} - \lambda\,\mathbf{a}_{\alpha,\beta}, & \end{aligned}$$

sledi da je

$$\lambda_{[,\beta}\,\mathbf{a}_{\beta]} = \mathbf{0},$$

jer je

$$\mathbf{n}_{,[\alpha\beta]} = \mathbf{a}_{,[\alpha\beta]} = \mathbf{0}.$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \lambda_{,[\beta}\,\mathbf{a}_{\beta]} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{,1}\mathbf{a}_2 = \lambda_{,2}\mathbf{a}_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{,1} = \lambda_{,2} = 0 \\ \Rightarrow \quad \lambda = \text{const}. \end{aligned}$$

Prema tome je

$$\mathbf{n}_{,\alpha} = -\lambda\, \mathbf{a}_\alpha | \mathrm{d}u^\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\mathbf{n} = -\lambda\, \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = -\lambda\, \mathbf{x} + \mathbf{c}.$$

Kako je $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$, onda je

$$(-\lambda\, \mathbf{x} + \mathbf{c}) \cdot (-\lambda\, \mathbf{x} + \mathbf{c}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{x} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{c}\right) \cdot \left(\mathbf{x} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{c}\right) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2.$$

Uvodeći smenu $\frac{1}{\lambda}\mathbf{c} = \mathbf{x}_0$ i $\frac{1}{\lambda} = R$ konačno pišemo

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = R^2.$$

Prema tome površ je sfera.

Kriva koja u svakoj svojoj tački ima tangentu koja je u pravcu glavne krivine naziva se **linija krivine**.

Za određivanje njenih jednačina pišemo

$$\left(b_{\alpha\beta} - \lambda\, a_{\alpha\beta}\right) t^\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad a^{\gamma\alpha} b_{\alpha\beta}\, t^\beta = \lambda\, t^\gamma \Big|\, t^\delta \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\gamma\delta} a^{\alpha\gamma} b_{\alpha\beta}\, t^\beta\, t^\delta = 0.$$

Označimo sa

$$h_{\beta\delta} = \varepsilon_{\gamma\delta} a^{\alpha\gamma} b_{\alpha\beta}.$$

Onda je

$$h_{\beta\delta}\, t^\beta\, t^\delta = 0,$$

jednačine linije krivine.

29. Specijalne površi

29.1 Izometrija

Videli smo da se geometrijska svojstva površi (npr. dužine krivih, ugao imeđu krivih koje se presecaju) izražavaju preko osnovnog metričkog tenzora $a_{\alpha\beta}$ površi. Za sva svojstva površi, koje se izražavaju preko osnovnog metričkog tenzora $a_{\alpha\beta}$, kažemo da definišu **unutrašnju geometriju površi**. Međutim, metrika je lokalno svojstvo površi i može se desiti da dve površi imaju istu metriku.

Definicija 29.1.1 Ako za dve površi S_1 i S_2 postoji koordinatni sistem u odnosu na koji se prva kvadrtana forma izražava preko istog metričkog tenzora $a_{\alpha\beta}$, onda se kaže da su **izometrične**.

Na primer, površi cilindara i konusa su izometrične, jer su obe izometrične sa ravni. Obe se mogu razviti u ravan bez promene dužina njihovih linijskih elementa, veličine uglova i povšina.

Uopšte, problem određivanaja površi izometrične sa ravni je od posebnog značaja.

Teorema 2

Potreban i dovoljan uslov da je površ izometrična sa ravnom površi jeste da je Gausova krivina jednaka nuli.

Dokaz

Gausova krivina K površi S data je izrazom

$$K = \frac{R_{1212}}{a}, \quad a = \det\big(a_{\alpha\beta}\big).$$

Uočimo da je komponenta R_{1212} jedina komponeta tenzora krivine koja ne mora biti jedaka nuli.

Ako je S izometrična sa (Euklidskom) ravni, onda na S postoji koordinatni sistem u odnosu na koji je

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

U tom slučaju je

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{1212} = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 0.$$

Međutim, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ je tenzor i kao takav isčezava u bilo kom drugom dopustivom sistemu. Tada je i $K = 0$ za bilo koji koordinatni sistem na S.

Obnuto, ako je $K = 0$, onda je $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ u svim tačkama površi S. To znači da površ S dopušta apsolutni paralelizam vektorskog polja $v_\alpha(u^\beta)$, tj. da je

$$v_{\alpha,\beta} = 0. \tag{29.1}$$

Odavde sledi da je

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial v_\beta}{\partial x^\alpha},$$

jer je $\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}$ simetrično po indeksima α, β. Prema tome, postoji funkcija $\varphi(u^\alpha)$ za koju je $\mathrm{d}\varphi = v_\alpha \, \mathrm{d}u^\alpha$. Izaberimo početne vrednosti vektorskog polja tako da je $v_\alpha^{(\lambda)}(0)$, $\alpha, \lambda = 1, 2$, ortonormiran sistem vektora. U odnosu na metrički tenzor $a^{\alpha\beta}$ površi S. Kratko rečeno,

$$(a^{\alpha\beta} v_\alpha^{(\lambda)} v_\beta^{(\mu)})(0) = \delta^{\lambda\mu}.$$

Tada postoje funkcije z^α za koje je $\mathrm{d}z^\lambda = v_\alpha^{(\lambda)} \, \mathrm{d}x^\alpha$, gde je $v_\alpha^{(\lambda)} = \dfrac{\partial z^\lambda}{\partial u^\alpha}$. Pri tome imamo na umu da je $v_\alpha^{(\lambda)}$ polje paralelnih vektora, tj. da je $v_{\alpha,\beta}^{(\lambda)} = 0$. Onda je z^α traženi koordanatni sitem za koji je

$$\delta^{\lambda\mu} = a^{\alpha\beta} \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial z^\mu}{\partial x^\beta}. \tag{29.2}$$

Zaista, pod pretpostavkom da je $\mathrm{d}z^\lambda = v_\alpha^{(\lambda)}\,\mathrm{d}u^\alpha$, funkcije z^α zadovoljavaju sistem jednačina

$$\frac{\partial^2 z^\lambda}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^\gamma}\left\{\begin{matrix}\gamma\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}. \tag{29.3}$$

U tom slučaju difernciranjem desne strane izraza (29.2), dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\left(a^{\alpha\beta}\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial z^\mu}{\partial x^\beta}\right) =$$

$$\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial z^\mu}{\partial x^\beta} + a^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 z^\lambda}{\partial x^\alpha \partial u^\gamma}\frac{\partial z^\mu}{\partial x^\beta} + a^{\alpha\beta}\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 z^\mu}{\partial x^\beta \partial u^\gamma}.$$

Zamenom (29.3) u ovom izrazu dobijamo, posle grupisanja članova, da je

$$\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\left(a^{\alpha\beta}\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial z^\mu}{\partial x^\beta}\right) = \left(\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - a^{\nu\beta}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \nu\gamma\end{matrix}\right\} - a^{\alpha\nu}\left\{\begin{matrix}\beta\\ \nu\gamma\end{matrix}\right\}\right)\frac{\partial z^\lambda}{\partial u^\alpha}\frac{\partial z^\mu}{\partial u^\beta} = 0.$$

Znači

$$a^{\alpha\beta}\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial z^\mu}{\partial x^\beta} = c^{\lambda\mu}.$$

Konstante integracije $c^{\lambda\mu}$ određujemo iz uslova

$$c^{\lambda\mu} = \left(a^{\alpha\beta}\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial z^\mu}{\partial x^\beta}\right)(0) = \delta^{\lambda\mu}.$$

Prema tome, u svim tačkama površi S je

$$a^{\alpha\beta}\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial z^\mu}{\partial x^\beta} = \delta^{\lambda\mu}.$$

Očigledno je da je u tako određenom koorinatnom sistemu z^α

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = 0.$$

Prema tome, površ S je izometrična sa Euklidskom ravni.

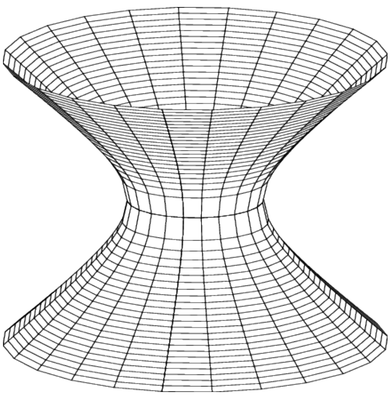
U slučaju n-dimenzionalne mnogostrukosti M važi sledeća

Teorema 3

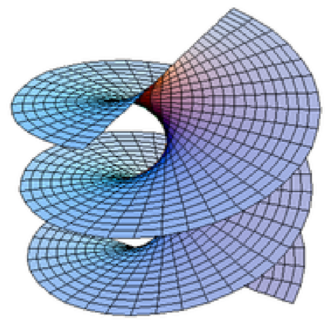
Ako je tenzor krivine R_{ijkl} n-dimenzionalne mnogostrukosti M jednak nuli, onda je M izometrična sa $\mathbb{E}_n$.

Dokaz teoreme je potpuno identičan dokazu prethodne teoreme, bez pozivanja na Gausovu krivinu. ❑

Navodimo sledeće primere kao ilustraciju.



Slika 29.1: Katenoida.



Slika 29.2: Helikoida.

■ **Primer 29.1** **Katenoida**:

$$S_1: \quad \begin{aligned} z^1 &= v^1 \cos v^2, \\ z^2 &= v^1 \sin v^2, \\ z^3 &= v^1 ach^{-1} \frac{v^1}{a}, \end{aligned}$$

i **Helikoida**:

$$S_2: \quad \begin{aligned} z^1 &= u^1 \cos u^2, \\ z^2 &= u^1 \sin u^2, \\ z^3 &= au^2, \end{aligned}$$

su izometrične površi. ■

Dokaz

Prva fundamentalna forma je

$$ds^2 = \delta_{ij} dz^i dz^j.$$

Za S_1:

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} dv^\alpha dv^\beta = \frac{(v^1)^2}{(v^1)^2 - a^2}(dv^1)^2 + (v^1)^2(dv^2)^2 \tag{29.4}$$

tako da je

$$a_{11} = \frac{(v^1)^2}{(v^1)^2 - a^2} \quad a_{12} = 0 \quad a_{22} = (v^1)^2 = a^2 + \left[(v^1)^2 - a^2\right].$$

Za površ S_2:

$$ds^2 = A_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = (du^1)^2 + \left[a^2 + (u^1)^2\right](du^2)^2, \tag{29.5}$$

tako da je

$$A_{11} = 1 \quad A_{12} = 0, \quad A_{22} = a^2 + (u^1)^2.$$

Sada, ako stavimo

$$\begin{aligned} &(v^1)^2 - a^2 = (u^1)^2, \\ &v^2 = u^2, \end{aligned}$$

dobijamo za S_1:

$$ds^2 = (du^1)^2 + \left[(u^1)^2 + a^2\right](du^2)^2.$$

Pošto je to identično sa (29.5), površi S_1 i S_2 su izometrične.

29.2 Pravolinijske površi

Uopšte, problem određivanaja površi izometrične sa ravni je od posebnog značaja. Zbog toga ovde uvodimo koncepte pravolinijske površi, kao i razvojne površi.

Definicija 29.2.1 Neka je data prava linija

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} + t\,\mathbf{w}. \tag{29.6}$$

Pretpostavimo da su $\boldsymbol{\alpha}$ i $\mathbf{w}$ funkcije nezavisnog parametra, recimo, s. Površ

$$S : \mathbf{x}(t,s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + t\,\mathbf{w}(s), \quad t \in I,\ s \in \mathbb{R}, \tag{29.7}$$

koja se formira na taj način, naziva se **pravolinijska površ**.

Njena geometrijska interprtacija je očigledna: formira se neprekidnim kretanjem prave linije (29.6) duž krive $\boldsymbol{\alpha}(s)$. Kriva $\boldsymbol{\alpha}(s)$ se naziva **direktrisa površi**, ili **osnovna kriva** S.

Prava linija

$$\mathbf{x}(t,s_0) = \boldsymbol{\alpha}(s_0) + t\,\mathbf{w}(s_0) \tag{29.8}$$

definisana fiksnim parametarom s_0, naziva se **izvodnica pravolinijske površi** čji pravac određuje vektor $\mathbf{w}(s_0)$.

Alternativno, površ može biti predstavljena kao pravolinijska površ spajanjem odgovarajućih tačaka dveju krivih u prostoru. U tom slučaju je

$$\mathbf{x}(t,s) = (1-t)\,\mathbf{x}_1 + t\,\mathbf{x}_2, \quad 0 \le t,s \le 1,$$

gde su $\mathbf{x}_1(s)$ i $\mathbf{x}_2(s)$ direktrise. Dva predstavljanja su identična ako je

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \mathbf{x}_1(s) \quad \text{i} \quad \mathbf{w}(s) = \mathbf{x}_2(s) - \mathbf{x}_1(s).$$

Vektor upravan na površ (29.7) je

$$\mathbf{N}(t,s) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \mathbf{w} \times \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s} + t\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}s} \right) = \mathbf{w} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s} + t\,\mathbf{w} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}s}. \tag{29.9}$$

Za fiksnu vrednost parametra s_0 normala $\mathbf{N}(t,s_0)$ duž izvodnice (29.8) se menja. Međutim, tangentna ravan u svakoj tački izvodnice sadrži izvodnicu. To znači da tangentene ravni u svakoj tački izvodnice $\mathbf{x}(t,s_0)$ obrazuju jednoparametarsku familiju ravni koje sadrže tu izvodnicu.

U specijalnom slučaju, kada su vektori $\mathbf{w} \times \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}$ i $\mathbf{w} \times \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}s}$ kolinearni, vektor normale $\mathbf{N}(t,s_0)$ duž izvodnice $\mathbf{x}(t,s_0)$ menja samo svoj intezitet, ali ne i pravac. U tom slučaju tangentna ravan ostaje ista duž izvodnice $\mathbf{x}(t,s_0)$. Drugačije rečeno, tangentne ravni na površi $\mathbf{x}(t,s)$ zavise samo od parametra s.

Ove pravolinijske površi se nazivaju **razvojne površi**.

Navodimo neke primere

Navodimo neke primere koji ilustruju direktrisu $\boldsymbol{\alpha}(s)$ i direktora krive $\mathbf{w}(s)$ pravolinijske površi

$$S: \mathbf{x}(t,s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + t\,\mathbf{w}(s).$$

i) Kružni cilindar:

$$\begin{aligned} S: x^2 + y^2 &= a^2, \\ \mathbf{x}(t,s) &= \boldsymbol{\alpha}(s) + t\,\mathbf{w}(s), \\ \boldsymbol{\alpha}(s) &= (a\cos s,\, a\sin s,\, 0), \\ \mathbf{w}(s) &= (0,0,1). \end{aligned}$$

ii) Kružni konus:

$$\begin{aligned} S : x^2 + y^2 &= z^2, \\ \boldsymbol{\alpha}(s) &= (\cos s, \sin s, 1), \\ \mathbf{w}(s) &= (\cos s, \sin s, 1). \end{aligned}$$

iii) Helikoida:

$$\begin{aligned} S : \mathbf{x}(t,s) &= (t\cos s, t\sin s, kt), \\ \boldsymbol{\alpha}(s) &= (0, 0, ks), \\ \mathbf{w}(s) &= (\cos s, \sin s, 0). \end{aligned}$$

iv) Mebijusova traka:

$$\begin{aligned} x &= \cos 2s + t\cos s\cos 2s, \\ y &= \sin 2s + t\cos s\sin 2s, \\ z &= t\sin s, \quad 0 \le s < \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}(s) &= (\cos 2s, \sin 2s, 0), \\ \mathbf{w}(s) &= (\cos s\cos 2s, \cos s\sin 2s, \sin s). \end{aligned}$$

Odavde se vidi da je

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s} &= (-2\sin 2s, 2\cos 2s, 0), \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}s} &= (-\sin s\cos 2s - 2\cos s\sin 2s, -\sin s\sin 2s + 2\cos s\cos 2s, \cos s,) \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} &= (0,2,0), \\ \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} &= (0,2,1), \\ \mathbf{w}|_{s=0} &= (1,0,0). \end{aligned}$$

Onda je

$$\det\left(\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}, \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}, \mathbf{w}|_{s=0}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Tako definisana Mebijusova traka, mada je pravolinijska površ, nije razvojna.

29.3 Razvojne površi

Definicija 29.3.1 **Razvojna površ** je regularna površ čija je Gausova krivina K identički jednaka nuli.

Razvojne površi su od posebnog interesa, jer su to jedine površi koje su izometrične sa ravni.

Nas ovde interesuju uslovi pod kojima bi pravolinijska površ (29.7) bila razvojna.

Teorema 4

Pravolinijske površi su razvojne akko je

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}, \mathbf{w}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}s}\right] = 0. \tag{29.10}$$

Geometrijska interpretacija definicije proizilazi iz izraza za **Gausovu krivinu**

$$K = \frac{b}{a}.$$

Za njeno izračunavanje dovoljno je odrediti

$$b = \det(b_{ij}) = b_{11}b_{22} - b_{12}^2.$$

Lako je pokazati da je

$$b_{11} = \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t^2}\cdot\mathbf{n}, \quad \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t\partial s}\cdot\mathbf{n}, \quad b_{22} = \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial s^2}\cdot\mathbf{n},$$

gde je $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{||\mathbf{N}||}$ jedinični vektor normale na S.

Specijalno iz $\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{w}(s)$ sledi da je $\dfrac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t^2} = 0$, pa je $b_{11} = 0$.

Takođe je $\dfrac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t\partial s} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}s}$. Onda je $b = -b_{12}^2 = -\left(\dfrac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t\partial s}\cdot\mathbf{n}\right)^2$. Kako je

$$\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t\partial s}\cdot\mathbf{n} = \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t\partial s}\cdot\frac{\mathbf{N}}{||\mathbf{N}||} = \frac{1}{||\mathbf{N}||}\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}s}\cdot\left(\mathbf{w}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right),$$

ili kraće

$$\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t\partial s}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{||\mathbf{N}||}\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}, \mathbf{w}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}s}\right],$$

znači

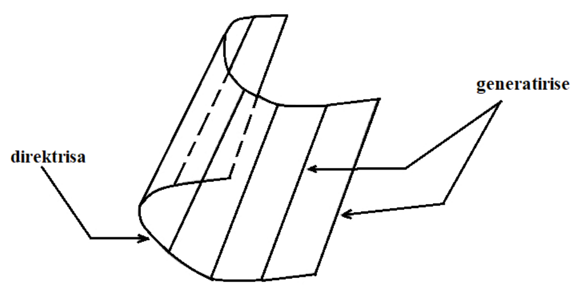
$$K = 0 \leftrightarrow b = 0,$$

jer je uvek $a \neq 0$. Prema tome, pravolinijska površ je razvojna akko je

$$\left[\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}, \mathbf{w}, \frac{d\mathbf{w}}{ds}\right] = \det\left(\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}, \mathbf{w}, \frac{d\mathbf{w}}{ds}\right) = 0.$$

Na osnovu determinate (29.10) možemo izvršiti klasifikaciju razvojnih povrsi.

1. Ako je
$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{c},$$
gde je **c** kostantan vektor, onda je
$$\mathbf{x}(t,s) = \mathbf{c} + t\,\mathbf{w}(s). \tag{29.11}$$
Tada pravolinijska površ prolazi kroz fiknu tačku **c**. Ove površi su **konusi**.



Slika 29.3: Razvijna površ.

2. Ako je
$$\frac{d\mathbf{w}}{ds} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = \mathbf{d},$$
gde je **d** konstantan vektor, onda je površ
$$\mathbf{x}(t,s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + t\,\mathbf{d} \tag{29.12}$$
definisana fiksnim pravcem **d**. To je slučaj **cilindričnih površi**.
3. Ako je
$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds} = \mathbf{w},$$
tada je pravac izvodnice uvek paralelan tangentnom vektoru direktrise. Ova razvojna povš je onda **unija tangenti direktrise**.

Za ovaj slučaj ilustrativan je sledeći zadatak:

Zadatak 29.1 Data je kriva $\boldsymbol{\xi}(s)$. Tangente krive definišu površ

$$\mathbf{x}(s,t) = \boldsymbol{\xi}(s) + (t-s)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(s)}{\mathrm{d}s}.$$

Odrediti:
a) osnovni metrički tenzor $a_{\alpha\beta}$ površi;
b) drugi metrički tenzor $b_{\alpha\beta}$ površi;
c) Gausovu krivinu K;
d) srednju krivinu H.

Rešenje

Uvedimo oznake: $u^1 = s$, $u^2 = t$. Takođe označimo sa $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(s)}{\mathrm{d}s}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ jedinične vektore tangente, normale i binormale, redom, krive $\mathbf{x}(s,t)|_{t=c} \doteq \mathbf{x}(s,c)$. Za ovu krivu Freneovi obrasci su:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = k\,\boldsymbol{\nu},$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\nu}}{\mathrm{d}s} = -k\,\boldsymbol{\tau} + \mu\,\boldsymbol{\beta},$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s} = -\mu\,\boldsymbol{\nu}.$$

Pogodno je predstaviti površ u obliku

$$\mathbf{x}(u^1,u^2) = \boldsymbol{\xi}(u^1) + (u^2 - u^1)\,\boldsymbol{\tau}(u^1).$$

Onda je

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = k\left(u^2 - u^1\right)\boldsymbol{\nu},$$
$$\mathbf{a}_2 = \boldsymbol{\tau}.$$

Kako je $a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$, sledi da je:

a)

$$a_{11} = k^2\left(u^2 - u^1\right)^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1.$$

Označimo sa $\mathbf{n}$ jedinični vektor normale na površ. Znamo da je

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}.$$

Lako se pokazuje da je $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = k(u^2 - u^1)\,\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau} = -k(u^2 - u^1)\,\boldsymbol{\beta}$, jer je $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}$. Onda je $\mathbf{n} = -\boldsymbol{\beta}$. Potrebno je odrediti

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha} = -b_{\alpha\beta}\,\mathbf{a}^\beta, \quad \text{a odatle} \quad b_{\alpha\beta} = -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha}\cdot \mathbf{a}_\beta.$$

Trivijalno sledi da je

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha} = -\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial u^\alpha} = \mu\,\boldsymbol{\nu}\,\delta_{\alpha 1}.$$

b) Onda je $b_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha 1}\,\mu\,\boldsymbol{\nu}\cdot \mathbf{a}_\beta$, ili u razvijenom obliku

$$b_{11} = -\mu\,\boldsymbol{\nu}\cdot \mathbf{a}_1 = -\mu\,k(u^2 - u^1)\,\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu} = -\mu\,k(u^2 - u^1),$$
$$b_{12} = b_{21} = b_{22} = 0.$$

c) Sada je lako izračunati da je

$$K = \frac{b}{a} = 0,$$

jer je

$$b = R_{1212} = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 = 0.$$

d) Ostaje da se izračuna

$$2H = b_{\alpha\beta}\,a^{\alpha\beta} = b_{11}\,a^{11}.$$

Sledi da je

$$H = \frac{-\mu}{2k(u^2 - u^1)}.$$

■ Primer 29.2 — Obvojnica familije tangentnih ravni duž krive na površi. Neka je S regularna površ i $\boldsymbol{\alpha}(s)$ kriva na površi S parametrizovana lukom s. Pretpostavimo da $\boldsymbol{\alpha}(s)$ nije ni u jednoj tački tangentna na asimptotski pravac. Posmatrajmo pravolinijsku površ

$$\mathbf{x}(s,t) = \boldsymbol{\alpha}(s) + t\,\frac{\mathbf{n}(s) \times \overset{*}{\mathbf{n}}(s)}{\left|\overset{*}{\mathbf{n}}(s)\right|},$$

gde je $\mathbf{n}(s)$ jedinični vektor normale na S definisan duž krive $\boldsymbol{\alpha}(s)$.

Kako $\overset{*}{\boldsymbol{\alpha}}(s)\left(= \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right)$ nije u pravcu asimptote, sledi da je $\overset{*}{\mathbf{n}}(s) \neq \mathbf{0}$, $\overset{*}{\mathbf{n}}\left(= \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s}\right)$, za svako s.

Pokazaćemo da je $\mathbf{x}(s,v)$ razvojna površ. Zaista, tada je

$$\left(\frac{\mathbf{n}\times\overset{*}{\mathbf{n}}}{|\overset{*}{\mathbf{n}}|} \times \overset{*}{\left(\frac{\mathbf{n}\times\overset{*}{\mathbf{n}}}{|\overset{*}{\mathbf{n}}|} \right)}, \overset{*}{\boldsymbol{\alpha}} \right) = \frac{1}{|\overset{*}{\mathbf{n}}|^2} \left(\left(\mathbf{n}\times\overset{*}{\mathbf{n}} \right) \cdot \overset{**}{\mathbf{n}} \right) (\mathbf{n}\cdot\overset{*}{\boldsymbol{\alpha}}) = 0$$

što je trebalo pokazati. ■

Definicija 29.3.2 Razvojne površi se nazivaju **prosto zakrivljene površi**, jer je jedna od glavnih krivina nula.

■ **Primer 29.3** Dokazati da su površi:

$$S_1 : x^1 = v^1\cos v^2, \quad x^2 = v^1 \sin v^2, \quad x^3 = \operatorname{arcctg}\frac{v^1}{a},$$
$$S_2 : x^1 = u^1\cos u^2, \quad x^2 = u^1 \sin u^2, \quad x^3 = a u^2$$

izometrične, ali ne i razvojne. ■

Zadatak 29.4

Pokazati da je površ S data sa

$$x = f_1(u^1), \quad y = f_2(u^2), \quad z = a u^2$$

razvojna, gde su f_1, f_2 diferencijabilne funkcije.

30. Minimalne površi

Uočimo na površi $S: \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^\alpha)$ prosto povezanu oblast R i krivu C koja je kontura te oblasti. Neka je

$$\mathscr{L} = \iint\limits_R L \, \mathrm{d}u^1 \, \mathrm{d}u^2, \tag{30.1}$$

gde je L funkcija od x^i i $\dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$. Neka su $\omega^i(u^\alpha)$ proizvoljne funkcije, takve da je na

$$C: \; \omega^i(u^\alpha) = 0.$$

Onda je

$$S_\varepsilon : \bar{x}^i = x^i + \varepsilon \, \omega^i \tag{30.2}$$

druga površ koja sadrži krivu C i koja je za male vrednosti ε bliska površi S. Vrednost integrala (30.1) na S_ε postaje

$$\mathscr{L} = \iint\limits_{R(C)} L \left(x^i + \varepsilon \, \omega^i, \, \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} + \varepsilon \frac{\partial \omega^i}{\partial u^\alpha} \right) \mathrm{d}u^1 \, \mathrm{d}u^2, \tag{30.3}$$

gde smo sa $R(C)$ označili domen promenljivih integracije u^α.

Ovaj integral će imati minimum za sve površi koje prolaze kroz C, ako je

$$\left. \frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}\varepsilon} \right|_\varepsilon = 0. \tag{30.4}$$

U razvijenom obliku ovaj uslov glasi

$$\iint\limits_R \omega^i \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \frac{\partial L}{\partial x^i_{,\alpha}} \right) \mathrm{d}u^1 \, \mathrm{d}u^2 + \iint\limits_R \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\omega^i \frac{\partial L}{\partial x^i_{,\alpha}} \right) \mathrm{d}u^1 \, \mathrm{d}u^2 = 0.$$

Razmotrimo drugi integral u ovom izrazu tj.

$$\iint\limits_R \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\omega^i \frac{\partial L}{\partial x^i_{,\alpha}} \right) \mathrm{d}u^1 \, \mathrm{d}u^2.$$

Izraz $\dfrac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\omega^i \dfrac{\partial L}{\partial x^i_{,\alpha}} \right)$, u ovom obliku, nije površinska divergencija (vidi jed. (18.8), str. 416).

Međutim, očigledno je

$$A^\alpha = \omega^i \left. \frac{\partial L}{\partial x^i_{,\alpha}} \right|_S$$

površinski vektor na S. Uvedimo smenu

$$S = \sqrt{a}\,\mathrm{d}u^1 \, \mathrm{d}u^2 \quad \text{i} \quad A^\alpha = \sqrt{a} B^\alpha.$$

Onda je

$$\begin{aligned} \iint\limits_R \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\omega^i \frac{\partial L}{\partial x^i_{,\alpha}} \right) \mathrm{d}u^1 \, \mathrm{d}u^2 &= \iint\limits_R \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a} B^\alpha}{\partial u^\alpha} \, \mathrm{d}S = \iint\limits_R B^\alpha_{,\alpha} \, \mathrm{d}S = \\ &= \int\limits_C B^\alpha \nu_\alpha \, \mathrm{d}s = \int\limits_C \frac{1}{\sqrt{a}} \omega^i \frac{\partial L}{\partial x^i_{,\alpha}} \nu_\alpha \, \mathrm{d}s = 0, \end{aligned}$$

jer je $\omega^i\big|_C = 0$ (vidi (23.105), str. 508). Prema tome je

$$\iint\limits_R \omega^i \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \omega^i - \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \frac{\partial L}{\partial x^i_{,\alpha}} \right) \mathrm{d}u^1 \, \mathrm{d}u^2 = 0,$$

odakle sledi da mora biti

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \frac{\partial L}{\partial x^i_{,\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \tag{30.5}$$

jer je $\omega^i\big|_R$ proizvoljno. Ove jednačine su poznate pod imenom **generalisane jednačine Ojler - Lagranža**. Kada su ovi uslovi zadovoljeni, za površ S se kaže da je **ekstremala** za integral (30.1).

Od posebnog interesa je slučaj kada je integral (30.1) površinski, tj. kada je

$$\mathscr{L} = \iint\limits_R \mathrm{d}S = \iint\limits_R \sqrt{a}\,\mathrm{d}u^1 \, \mathrm{d}u^2. \tag{30.6}$$

U tom slučaju jednačine (30.5) glase

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\frac{\partial\sqrt{a}}{\partial x^i_{,\alpha}}-\frac{\partial\sqrt{a}}{\partial x^i}=0. \tag{30.7}$$

Uočimo da $a=\det\big(a_{\alpha\beta}\big)$ ne zavisi eksplicitno od x^i $\left(a_{\alpha\beta}=\mathbf{a}_\alpha\cdot\mathbf{a}_\beta,\quad \mathbf{a}_\alpha=\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^\alpha}\right)$.
Onda se (30.7) svodi, smenom

$$\frac{\partial\sqrt{a}}{\partial x^i_{,\alpha}}=\sqrt{a}\,g_{ij}\,a^{\alpha\beta}x^i_{,\beta}$$

na jednačinu

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\sqrt{a}g_{ij}\,a^{\alpha\beta}\,x^i_{,\beta}\right)=0.$$

Ova jednačina je tenzorskog oblika, jer su Ojler - Lagranževe jednačine tenzorskog karaktera. Prema tome, pišemo ih u obliku

$$\left(\sqrt{a}\,g_{ij}\,a^{\alpha\beta}\,x^i_{,\beta}\right)_{;\alpha}=0,$$

gde $()_{;\alpha}$ označava **kovarijantni izvod** hibridnog tenzora.

Veličine a, g_{ij} i $a^{\alpha\beta}$ su kovarijantno konstantne, tako da se gornji izraz svodi na

$$\sqrt{a}\,g_{ij}\,a^{\alpha\beta}\,x^i_{,\beta\alpha}=0,\quad \text{ili}\quad g_{ij}\,a^{\alpha\beta}\,x^i_{,\beta\alpha}=0,$$

jer je $a>0$. Znači, imajući u vidu da je $x^i_{\beta\alpha}=b_{\alpha\beta}n^i$, $g_{ij}n^j=n_i$, $a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}=2H$, dobijamo da je

$$g_{ij}a^{\alpha\beta}\,x^j_{,\beta\alpha}=a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}n_i=2H\,n_i=0,$$

ili konačno

$$H=0. \tag{30.8}$$

Za površi za koje važi (30.8) kaže se da su **minimalne površi**.

Smisao uslova (30.8) iskazan sažeto glasi:

Minimalna površ je ekstremala integrala površine.

■ **Primer 30.1 Katenoida**

Neka je

$$\mathbf{r}(u,v)=(\operatorname{ch}u\cos v,\,\operatorname{ch}u\sin v,\,u)\,.$$

Onda je:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_u&=(\operatorname{sh}u\cos v,\,\operatorname{sh}u\sin v,\,1)\,,\\
\mathbf{a}_v&=(-\operatorname{ch}u\sin v,\,\operatorname{ch}u\cos v,\,0)\,,\\
\mathbf{a}_u\times\mathbf{a}_v&=(-\operatorname{ch}u\cos v,\,-\operatorname{ch}u\sin v,\,\operatorname{sh}u\,\operatorname{ch}u)\,,\\
\|\mathbf{a}_u\times\mathbf{a}_v\|&=\operatorname{ch}^2u,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \left(-\frac{\cos v}{\operatorname{ch} u}, -\frac{\sin v}{\operatorname{ch} u}, \operatorname{th} u\right), \\
E &= \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_u = \operatorname{ch}^2 u, \\
G &= \mathbf{a}_v \cdot \mathbf{a}_v = \operatorname{ch}^2 u, \\
F &= \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_v = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_{uu} = -1, \\
f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_{uv} = 0, \\
g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_{vv} = 1, \\
H &= \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} = 0,
\end{aligned}
$$

za svako u i v. Prema tome katenoida je minimalna površ. ■

■ **Primer 30.2 Eneper površ**[1]

$$
\mathbf{r}(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - u^2 v, u^2 - v^2\right)
$$

je minimalna površ.

Postrupak je isti kao u Primeru za Katenoidu. ■

■ **Primer 30.3 Helikoida**

$$
\mathbf{r}(u,v) = (av\cos u, av\sin u, bu), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad a > 0, b \neq 0
$$

je minimalna površ. Pokazati! ■

■ **Primer 30.4** Pokazati da je desna helikoida, data sa

$$
\mathbf{x} = \left(u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, cu^2\right),
$$

minimalna površ. ■

Rešenje

Potrebno je da dokažemo da je

$$
H = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = 0.
$$

Znamo da je

$$
a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta, \quad b_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}.
$$

[1] Enneper (eng.) -Površ koja se preseca sama sa sobom

Iz

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} = \begin{cases} (\cos u^2, \sin u^2, 0), & \alpha = 1 \\ (-u^1 \sin u^2, u^1 \cos u^2, c), & \alpha = 2. \end{cases}$$

i

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos u^2 & \sin u^2 & 0 \\ -u^1 \sin u^2 & u^1 \cos u^2 & c \end{bmatrix},$$

dobijamo

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{(u^1)^2 + (c)^2}} \left(c \sin u^2, -c \cos u^2, u^1 \right).$$

Takođe je

$$\left(a_{\alpha\beta}\right) = \left(\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u^1)^2 + c^2 \end{pmatrix},$$

$$\left(a^{\alpha\beta}\right) = \left(a_{\alpha\beta}\right)^{-1} = \frac{1}{(u^1)^2 + c^2} \begin{pmatrix} (u^1)^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i, simbolično napisano,

$$\left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & (-\sin u^2, \cos u^2, 0) \\ (-\sin u^2, \cos u^2, 0) & (-u^1 \cos u^2, -u^1 \sin u^2, 0) \end{matrix} . \right\}$$

Onda je

$$\left(b_{\alpha\beta}\right) = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \cdot \mathbf{n} \right) = \frac{1}{\sqrt{(u^1)^2 + c^2}} \begin{pmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Prema tome je

$$\begin{aligned} \left(a^{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta}\right) &= \frac{1}{(u^1)^2 + c^2} \begin{pmatrix} (u^1)^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(u^1)^2 + c^2}} \begin{pmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-c}{[(u^1)^2 + (c)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 & (u^1)^2 + (c)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

odakle sledi da je $H = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = 0$, što je trebalo dokazati.

31. Tenzorski račun na mnogostrukostima

31.1 Diferenciranje tenzorskih polja na M

Do sada smo razmatrali tenzorske veličine u $\mathbb{E}_3$ i njegovim potprostorima.

Nas interesuju tenzorske veličine u prostoru konačnih dimenzija, koje poistovećujemo sa diferencijabilnom mnogostrukošću.

Posmatrajmo tenzorsko polje $\mathbf{T}(x^k)$ na mnogostrukosti M dimenzije n. Za tenzorsko polje $\mathbf{T}(x^k)$ se kaže da je **klase** C^p u oblasti $\mathbb{R}^n \subset M$, ako su njegove komponente funkcije klase C^p po koordinatama x^k. Ovaj zahtev je invarijanatan od izbora koordinatnog sistema.

U cilju uspostavljanja veze između tenzora istog polja u raznim tačkama nužno dolazimo do procesa diferenciranja. Za ovakva tenzorska polja moguće je odrediti parcijalne izvode njihovih komponenti. Pitanje glasi: da li tako dobijeni sistem ima tenzorski karakter, pri koordinatnoj transformaciji

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^k)?$$

Slučaj skalarnog polja je trivijalan. Zaiste, za skalrano polje $\varphi(x^k)$ je

$$\varphi(x^k) = \varphi\left(x^k(\bar{x}^l)\right) = \bar{\varphi}(\bar{x}^k)$$

odavde sledi da je

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\bar{\varphi}.$$

Prema tome $\mathrm{d}\varphi$ je takođe skalar.

Slučaj tenzorskih polja koja nisu skalarna zahteva posebnu pažnju. Radi jednostavnijeg sagledavanja ovog problema posmatrajmo C^1 vektorsko polje $\mathbf{v}(x^k)$. Pri koordinatnoj transformaciji $\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^l)$ njegove komponente zadovoljavaju zakon transformacije

$$\bar{v}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} v^l. \tag{31.1}$$

Onda je

$$\mathrm{d}\bar{v}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l}\,\mathrm{d}v^l + \frac{\partial^2 \bar{x}^k}{\partial x^l \partial x^m}\, v^l\,\mathrm{d}x^m, \tag{31.2}$$

gde je

$$\mathrm{d}v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^l}\,\mathrm{d}x^l$$

linearno po $\mathrm{d}x^l$. Prema tome, $\mathrm{d}v^k$ nisu komponente vektora. U slučaju Euklidskog prostora odgovarajuća promena vektorskog polja u odnosu na krivolinijske koordinate je definisana izrazom

$$\mathrm{D}v^k = \mathrm{d}v^k + v^l \left\{ \begin{matrix} k \\ lm \end{matrix} \right\} \mathrm{d}x^m. \tag{31.3}$$

U opštem slučaju, neprekidna glatka mnogostrukost M ne poseduje Dekartov koordinatni sistem. Primer je sfera kao glatka dvodimenzionalna diferncijabilna mnogostrukost M u $\mathbb{E}_3$. Ona ne poseduje pravolinijske koordinate i bilo koji dopustivi kordinatni sistem na njoj je krivolinijski.

U analogiji sa ovim izrazom u $\mathbb{E}_n$ pretpostavljamo da je traženi diferencijal u M oblika

$$\mathrm{D}v^k = \mathrm{d}v^k + p^k\left(x^l, v^l, \mathrm{d}x^l\right), \tag{31.4}$$

kao posledica zakrivljenosti kordinatnog sistema.

Funkcije p^k ćemo odrediti iz sledećih uslova. Pri tome sledimo poznata pravila. Primera radi, obični diferencijali vektorskih polja $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ zadovoljavaju uslov

$$\mathrm{d}\left(v^k + w^k\right) = \mathrm{d}v^k + \mathrm{d}w^k. \tag{31.5}$$

To nam sugeriše da:

i) Za bilo koja dva vektorska polja $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ na M važi

$$\mathrm{D}\left(v^k + w^k\right) = \mathrm{D}v^k + \mathrm{D}w^k,$$

ii) $\mathrm{D}v^k$ je linearano po $\mathrm{d}x^k$,

iii) $\mathrm{D}v^k$ je kontravarijantni tenzor.

Analizom ovih uslova zaključujemo:
- iz (31.4) i (31.5) sledi da je:

$$\mathrm{D}\left(v^k+w^k\right)=\mathrm{d}\left(v^k+w^k\right)+p^k\left(x^l,\,v^l+w^l,\,\mathrm{d}x^l\right)=\mathrm{d}v^k+\mathrm{d}w^k+p^k\left(x^l,\,v^l+w^l,\,\mathrm{d}x^l\right).$$

Onda je, prema i),

$$\mathrm{D}v^k+\mathrm{D}w^k=\mathrm{d}v^k+\mathrm{d}w^k+p^k\left(x^l,\,v^l+w^l,\,\mathrm{d}x^l\right).$$

Smenom $\mathrm{D}v^k$ i $\mathrm{D}w^k$ u ovom izrazu, dobijamo

$$p^k\left(x^l,\,v^l+w^l,\,\mathrm{d}x^l\right)=p^k\left(x^l,\,v^l,\,\mathrm{d}x^l\right)+p^k\left(x^l,\,w^l,\,\mathrm{d}x^l\right),$$

odakle sledi da je $p^k\left(x^l,\,v^l,\,\mathrm{d}x^l\right)$ linerno po v^l. Dalje, koristeći ii) zaključujemo da je

$$p^k\left(x^l,\,v^l,\,\mathrm{d}x^l\right)=\Gamma^k{}_{ij}(x^l)\,v^i\,\mathrm{d}x^j, \tag{31.6}$$

gde su $\Gamma^k{}_{ij}(x^l)$ proizvoljne funkcije kordinata. Znači,

$$\mathrm{D}v^k=\mathrm{d}v^k+\Gamma^k{}_{ij}(x^l)\,v^i\,\mathrm{d}x^j. \tag{31.7}$$

Prema iii) ovako definisano $\mathrm{D}v^k$ je tenzor i pri koordinatnoj transformaciji $\bar{x}^k=\bar{x}^k(x^l)$ mora da zadovoljava zakon transforamcije

$$\mathrm{D}\bar{v}^k=\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^p}\,\mathrm{D}v^p,$$

ili

$$\mathrm{d}\bar{v}^k+\bar{p}^k\left(\bar{x}^l,\,\bar{v}^l\,\mathrm{d}\bar{x}^l\right)=\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^r}\left(\mathrm{d}v^r+p^r\left(x^a,\,v^a,\,\mathrm{d}x^a\right)\right).$$

Smenom (31.2), (31.3) u ovom izrazu dobijamo da je

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^k{}_{ij}(\bar{x}^i)\,\bar{v}^i\,\mathrm{d}\bar{x}^j&=\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^r}\,\Gamma^r{}_{st}(x^a)\,v^s\,\mathrm{d}x^t-\frac{\partial^2\bar{x}^k}{\partial x^r\partial x^s}\,v^r\,\mathrm{d}x^s=\\&=\left(\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^r}\,\Gamma^r{}_{st}(x^a)\,\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^i}\,\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^j}-\frac{\partial^2\bar{x}^k}{\partial x^r\partial x^s}\,\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^i}\,\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^j}\right)\bar{v}^i\,\mathrm{d}\bar{x}^j.\end{aligned}$$

Kako ovaj izraz važi za proivoljno $\bar{v}^i$ i $\mathrm{d}\bar{x}^j$, mora biti

$$\bar{\Gamma}^k{}_{ij}=\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^r}\,\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^i}\,\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^j}\,\Gamma^r{}_{st}(x^a)-\frac{\partial^2\bar{x}^k}{\partial x^r\partial x^s}\,\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^i}\,\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^j}. \tag{31.8}$$

Time je definisan **zakon transformacije funkcija** $\Gamma^k{}_{ij}(x^l)$, koji je posledica uslova iii). Uočimo da je

$$\frac{\partial^2\bar{x}^k}{\partial x^r\partial x^s}\,\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^i}\,\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^j}=-\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^s}\,\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^j}\right)\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^i}=-\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^s}\,\frac{\partial^2 x^s}{\partial\bar{x}^i\partial\bar{x}^j},$$

što nam omogućuje da se (31.8) piše u ekvivalentnom obliku

$$\bar{\Gamma}^k{}_{ij} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}\Gamma^r{}_{st}(x^a) + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}. \tag{31.9}$$

Važno je uočiti da ova transformacija ne određuje u potpunosti funkcije $\Gamma^k{}_{ij}(x^l)$. Za bilo koji sistem funkcija $\Gamma^k{}_{ij}(x^l)$, koji se transformiše po ovom zakonu, kaže se da određuje komponente **afine koneksije**, ili **koeficijente koneksije** na diferencijabilnoj mnogostrukosti M. Onda se za (31.7)

$$\mathrm{D}v^k = \mathrm{d}v^k + \Gamma^k{}_{ij}(x^l)\, v^i\, \mathrm{d}x^j$$

kaže da definiše **apsolutni diferencijal**, ili **kovarijantni diferencijal** vektorskog polja $\mathbf{v}(x^k)$ na diferencijabilnoj mnogostrukosti M.

Lako je pokazati da se (31.8) može napisati u ekvivalentnom obliku

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^k}{\partial x^s \partial x^t} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\Gamma^r{}_{st} - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^t}\bar{\Gamma}^k{}_{ij} \tag{31.10}$$

koji predstavlja sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina po $\dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}$.

Problem njihove integrabilnosti je od posebnog značaja u diferencijanoj geometriji mnogostrukosti.

Njima inverzni sistem jedanačina se dobija prostom zamenom koordinatnih sistema. Tada je

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^s \partial \bar{x}^t} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r}\bar{\Gamma}^r{}_{st} - \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^s}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^t}\Gamma^k{}_{ij}. \tag{31.11}$$

Na ovom mestu navodimo sledeće veoma značajne napomene:

a) Iz (31.8) se vidi da $\Gamma^k{}_{ij}(x^l)$, u opštem slučaju, nema tenzorski karakter.

b) $\Gamma^k{}_{ij}(x^l)$ u opštem slučaju nije simetričan, tj. $\Gamma^k{}_{ij} \neq \Gamma^k{}_{ji}$.

c) Evidentno je da njegov antisimetričan deo

$$S^k_{ij} = \Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^k{}_{ji} \tag{31.12}$$

ima tenzorski karakter. Naziva se **tenzor torzije**. Ako tenzor torzije isčezava u jednom koordinatnom sistemu, on isčezava u svakom drugom koordinatnom sistemu. Tada je $\Gamma^k{}_{ij}$ simetrično, tj. $\Gamma^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ji}$, nezavisno od izbora koordinatnog sistema.

Lako je pokazati, istim postupkom, da je u slučaju kovarijantnog vektora w_k apsolutni diferencijal

$$\mathrm{D}w_i = \mathrm{d}w_i - \Gamma^k{}_{ij}\, w_k\, \mathrm{d}x^j. \tag{31.13}$$

U slučaju skalane funkcije $\varphi(x^k)$ apsolutni diferencijal postaje običan diferencijal, tj.

$$\mathrm{D}\varphi(x^k) = \mathrm{d}\varphi(x^k). \tag{31.14}$$

Pitanje glasi šta je apsolutni diferencijal skalara $\varphi = v^k w_k$?

Koristeći (31.14), (31.7) i (31.13), pišemo

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(v^k w_k) &= \mathrm{d}(v^k w_k) = (\mathrm{d}v^k)\, w_k + v^k\, (\mathrm{d}w_k) = \\
&= \left(\mathrm{D}v^k - \Gamma^k{}_{ij}\, v^i\, \mathrm{d}x^j\right) w_k + v^k \left(\mathrm{D}w_k + \Gamma^i{}_{kj}\, w_i\, \mathrm{d}x^j\right) = \\
&= \left(\mathrm{D}v^k\right) w_k + v^k\, (\mathrm{D}w_k)\,,
\end{aligned}$$

jer je

$$-\Gamma^k{}_{ij}\, v^i\, w_k + \Gamma^i{}_{kj}\, v^k\, w_i = -\Gamma^k{}_{ij}\, v^i\, w_k + \Gamma^k{}_{ij}\, v^i\, w_k \equiv 0.$$

Prema tome, odgovor na postavljeno pitanje daje izraz

$$\mathrm{D}(v^k w_k) = \left(\mathrm{D}v^k\right) w_k + v^k\, (\mathrm{D}w_k)\,, \tag{31.15}$$

odakle zaključujemo da pri apsolutnom diferenciranju proizvoda važi uobičajeno **Lajbnicovo pravilo diferenciranja**.

U slučaju tenzora drugog reda $T^i_j(x^k)$, polazeći od zakona transformacije

$$\bar{T}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\, \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\, T^r_s\,, \tag{31.16}$$

istim postupkom kao i slučaju tenzora prvog reda - vektora, pišemo

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\bar{T}^i_j &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\right) \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\, T^r_s + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\, \mathrm{d}\left(\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\right) T^r_s + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\, \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\, (\mathrm{d}T^r_s) = \\
&= \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^r \partial x^t}\, \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\, T^r_s\, \mathrm{d}x^t + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\, \frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\, \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t}\, T^r_s\, \mathrm{d}x^t + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\, \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\, \frac{\partial T^r_s}{\partial x^t}\, \mathrm{d}x^t.
\end{aligned} \tag{31.17}$$

Prema (31.10)

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^r \partial x^t} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s} \Gamma^s{}_{rt} - \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\, \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^t}\, \bar{\Gamma}^i{}_{kj},$$

tako da je

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^r \partial x^t}\, \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\, T^r_s\, \mathrm{d}x^t = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s} \Gamma^s{}_{rt} - \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\, \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^t}\, \bar{\Gamma}^i{}_{kj}\right) \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\, T^r_m\, \mathrm{d}x^t.$$

Onda je

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s} \Gamma^s{}_{rt}\, \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\, T^r_m\, \mathrm{d}x^t = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}\, \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\, T^r_m\, \Gamma^s{}_{rt}\, \mathrm{d}x^t = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\, \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\, T^h_s\, \Gamma^r{}_{ht}\, \mathrm{d}x^t$$

i

$$\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\, \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^t}\, \bar{\Gamma}^i{}_{kl}\, \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\, T^r_s\, \mathrm{d}x^t = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\, \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\, T^r_s\, \bar{\Gamma}^i{}_{kl}\, \mathrm{d}\bar{x}^l = \bar{T}^k_j\, \bar{\Gamma}^i{}_{kl}\, \mathrm{d}\bar{x}^l,$$

gde smo koristili (31.16). Prema tome biće

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^r \partial x^t}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}T^r_s\,\mathrm{d}x^t = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}T^h_s\,\Gamma^h{}_{st}\,\mathrm{d}x^t - \bar{T}^k_j\,\bar{\Gamma}^i{}_{kl}\,\mathrm{d}\bar{x}^l.$$

Na isti način može se pokazati da je

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}T^r_s\,\mathrm{d}\bar{x}^k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}T^r_h\,\Gamma^h{}_{st}\,\mathrm{d}x^t + \bar{T}^i_k\,\bar{\Gamma}^k{}_{jl}\,\mathrm{d}\bar{x}^l.$$

Smenom ovih izraza u (31.16) i sređivanjem dobijamo da je

$$\mathrm{d}\bar{T}^i_j + \bar{T}^k_j\,\bar{\Gamma}^i{}_{kl}\,\mathrm{d}\bar{x}^l - \bar{T}^i_k\,\bar{\Gamma}^k{}_{jl}\,\mathrm{d}\bar{x}^l = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\left(\mathrm{d}T^r_s + T^h_s\,\Gamma^r{}_{ht}\,\mathrm{d}x^t - T^r_h\,\Gamma^h{}_{st}\,\mathrm{d}x^t\right).$$

Prema tome mešoviti sistem drugog reda

$$\mathrm{D}T^i_j = \mathrm{d}T^i_j + \left(T^k_j\,\Gamma^i{}_{kl} - T^i_k\,\Gamma^k{}_{jl}\right)\mathrm{d}x^l \tag{31.18}$$

je tenzor i kao takav definiše apsolutni diferencijal tenzoskog polja $T^i_j(x^k)$.

Isti postupak možemo primeniti na tenzorsko polje $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ reda $p+q$. Onda je

$$\begin{aligned}\mathrm{D}T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} &= \mathrm{d}T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{p} T^{i_1\cdots k\cdots i_p}_{j_1\dots j_q}\,\Gamma^{i_\alpha}{}_{kl}\,\mathrm{d}x^l - \sum_{\beta=1}^{q} T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots m\cdots j_q}\,\Gamma^m{}_{j_\beta l}\,\mathrm{d}x^l.\end{aligned} \tag{31.19}$$

Navodimo instruktivan primer za tenzorsko polje $\mathbf{T} = \mathbf{v}\otimes\mathbf{w}$, $T^i_j = v^i w_j$. Prema (31.19)

$$\begin{aligned}\mathrm{D}T^i_j &= \mathrm{d}T^i_j + T^k_j\,\Gamma^i{}_{kl}\,\mathrm{d}x^l - T^i_k\,\Gamma^k{}_{jl}\,\mathrm{d}x^l = \mathrm{d}\left(v^i w_j\right) + v^k w_j\,\Gamma^i{}_{kl}\,\mathrm{d}x^l - v^i w_k\,\Gamma^k{}_{jl}\,\mathrm{d}x^l = \\ &= \left(\mathrm{d}v^i + v^k\,\Gamma^i{}_{kl}\,\mathrm{d}x^l\right)w_j + v^i\left(\mathrm{d}w_j - w_k\,\Gamma^k{}_{jl}\,\mathrm{d}x^l\right) = \left(\mathrm{D}v^i\right)w_j + v^j\,\mathrm{D}w_j.\end{aligned}$$

Znači

$$\mathrm{D}\left(v^i w_j\right) = \left(\mathrm{D}v^i\right)w_j + v^j\,\mathrm{D}w_j. \tag{31.20}$$

Na osnovu svega iznetog, navodimo osnovne zakone apsolutnog diferenciranja tenzorskih polja:

1. Apsolutni diferencijal tenzora reda $p+q$ je tenzor istog reda. U specijalnom slučaju apsolutni diferencijal skalara je običan diferencijal.
2. Apsolutni diferencijal zbira dva tenzora istog reda je zbir njihovih apsolutnih diferencijala.
3. Za apsolutni diferencijal proizvoda dva tenzora važi Lajbnicovo pravilo diferenciranja.

31.2 Parcijalni kovarijantni izvod

Pokazali smo da je za vektorsko polje $\mathbf{v}(x^k)$ njegov apsolutni diferencijal (31.7) tenzor

$$\mathrm{D}v^k = \mathrm{d}v^k + \Gamma^k{}_{ij}\, v^i\, \mathrm{d}x^j.$$

Kako je $\mathrm{d}v^k = \dfrac{\partial v^k}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j$ možemo ga napisati u obliku

$$\mathrm{D}v^k = \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + v^i\,\Gamma^k{}_{ij}\right)\mathrm{d}x^j = v^k_{,j}\,\mathrm{d}x^j, \tag{31.21}$$

gde je

$$v^k_{,j} = \frac{\partial v^k}{\partial x^j} + v^i\,\Gamma^k{}_{ij}. \tag{31.22}$$

Znamo da su $\mathrm{D}v^k$ i $\mathrm{d}x^j$ tenzori prvog reda. Onda je na osnovu kriterijuma o tenzorskom karakteru sistema i sistem $v^k_{,j}$ mešoviti tenzor drugog reda. Nazivamo ga **kovarijantni izvod vektorskog polja $\mathbf{v}(x^k)$** .

Na isti način, iz (31.19), zaključujemo da je

$$\mathrm{D}T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q,l}\,\mathrm{d}x^j, \tag{31.23}$$

gde je

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q,l} = \frac{\partial T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{\partial x^l} + \sum_{\alpha=1}^{p} T^{i_1\cdots k\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\,\Gamma^{i_\alpha}{}_{kl} - \sum_{\beta=1}^{q} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots m\cdots j_q}\,\Gamma^m{}_{j_\beta l} \tag{31.24}$$

kovarijantni izvod tenzorskog polja $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$.

Kao i u slučaju apsolutnog diferencijala navodimo opšta pravila parcijalnog kovarijantnog izvoda tenzorskih polja:

1. Kovarijantni izvod tenzora reda $p+q$ je tenzor reda $p+q+1$. Kovarijantni izvod skalara je običan parcijalni izvod.
2. Kovarijantni izvod zbira dva tenzora istog reda je zbir njihovih kovarijantnih izvoda.
3. Za kovarijantni izvod proizvoda dva tenzora važi Lajbnicovo pravilo diferenciranja.

Podvlačimo da ovde uvedene definicije apsolutnog diferencijala i parcijalnog kovarijantnog izvoda važe za bilo koji skup koeficijenata koneksije $\Gamma^k{}_{ij}(x^l)$ pod uslovom da zadovoljavaju zakon transformacije (31.8). Jasno je da takvim različitim funkcijama $\Gamma^k{}_{ij}(x^l)$ odgovaraju različite numeričke vrednosti apsolutnog diferencijala i kovarijantnog izvoda posmatranog tenzorskog polja.

Ekvivalentan uslov koji $\Gamma^k{}_{ij}(x^l)$ mora zadovoljavati, zasniva se na integrabilnosti sistema parcijalnih diferencijalnih jedačina (31.10) ili (31.11). Leva strana posmatranog sistema može da se odredi iz bilo kojeg simetričnog tenzora $a_{ij}(x^k)$. Pri koordinatnoj transformacije $\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^l)$ glasi

$$\bar{a}_{ij}(\bar{x}^k) = a_{pq}(x^r)\,\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}. \tag{31.25}$$

Parcijalnim diferenciranjem dobijamo

$$\frac{\partial \bar{a}_{ij}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial a_{pq}}{\partial x^r}\,\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} + a_{pq}\,\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + a_{pq}\,\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}.$$

Ovo je linearan sistem od $\dfrac{n(n+1)}{2}$ jednačina po $\dfrac{n(n+1)}{2}$ funkcija $\dfrac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}$. Cikličkom permutacijom indeksa i, j, k, strogo vodeći računa o indeksima, dobijamo da je

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{a}_{ij}}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial \bar{a}_{jk}}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial \bar{a}_{ki}}{\partial \bar{x}^j}\right) = a_{pq}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{pq}}{\partial x^r} + \frac{\partial a_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial a_{rp}}{\partial x^q}\right)\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}.$$

Označimo sa

$$\overset{(a)}{\Gamma}_{rpq} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{pq}}{\partial x^r} + \frac{\partial a_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial a_{rp}}{\partial x^q}\right), \tag{31.26}$$

pri čemu sa (a) ističemo da je ova veličina definisana preko tenzora a_{ij}. Onda gornji izraz postaje

$$\overset{(a)}{\bar{\Gamma}}_{kij} = a_{pq}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + \overset{(a)}{\Gamma}_{rpq}\,\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}, \tag{31.27}$$

koji podseća na (31.9). Veličinu $\overset{(a)}{\bar{\Gamma}}_{kij}$ nazivamo **Kristofelov simbol prvog reda u odnosu na proizvoljan simetričan tenzor** a_{ij}. Iz (31.27) se vidi da $\overset{(a)}{\bar{\Gamma}}_{kij}$ nema tenzorski karakter.

U slučaju kada je tenzor a_{ij} regularan $\overset{(a)}{\bar{\Gamma}}_{kij}$ možemo transformisati koristeći inverzan tenzor a^{ij}, tačnije njegov zakon transformacije

$$\bar{a}^{ij} = a^{rs}\,\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\,\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}. \tag{31.28}$$

Pomnožimo (31.27) sa $\bar{a}^{mj}$. Onda je

$$\bar{a}^{mj}\,\overset{(a)}{\bar{\Gamma}}_{kij} = a_{pq}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\bar{a}^{mj} + \overset{(a)}{\Gamma}_{rpq}\,\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\bar{a}^{mj}. \tag{31.29}$$

Uvedimo oznaku

$$\overset{(a)}{\bar{\Gamma}}{}^m{}_{ki} = \bar{a}^{mj}\,\overset{(a)}{\bar{\Gamma}}_{kij}. \tag{31.30}$$

Iz (31.28) sledi da je

$$\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\,\bar{a}^{mj} = a^{rq}\,\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^r},$$

pa je

$$a_{pq}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}\bar{a}^{mj} = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^p}.$$

Koristeći ove izraze u (31.29) dobijamo da je

$$\overset{(a)}{\bar{\Gamma}}{}^m{}_{ki} = \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^p} + \overset{(a)}{\Gamma}{}^s{}_{rp}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i},$$

ili

$$\overset{(a)}{\bar{\Gamma}}{}^m{}_{ki} = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\overset{(a)}{\Gamma}{}^s{}_{rp} + \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^p}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i}, \tag{31.31}$$

koji je istog oblika kao i (31.9). Veličine $\overset{(a)}{\Gamma}{}^k{}_{ij}$ nazivamo **Kristofelovi simboli druge vrste u odnosu na proizvoljan regularan simetričan tenzor** a_{ij}. On predstavlja **afinu koneksiju** na mnogostrukosti M. Veza između Kristofelovih simbola prve i druge vrste data je relacijom

$$\overset{(a)}{\Gamma}{}^k{}_{ij} = a^{kl}\overset{(a)}{\Gamma}{}_{ijl}. \tag{31.32}$$

Iz (31.27) se vidi da je $\overset{(a)}{\Gamma}{}^k{}_{ij}$ simetričan po indeksima i i j, tj.

$$\overset{(a)}{\Gamma}{}_{ijk} = \overset{(a)}{\Gamma}{}_{jik}. \tag{31.33}$$

Onda, iz (31.32) sledi da je

$$\overset{(a)}{\Gamma}{}^k{}_{ij} = \overset{(a)}{\Gamma}{}^k{}_{ji}. \tag{31.34}$$

Prema tome, ovde definisani Kristofelovi simboli određuju **simetričnu koneksiju**. Ovo njihovo svojstvo je nezavisno od koordinatnog sistema, bez obzira na to što nemaju tenzorski karakter.

Do sada smo određivali Kristofelove simbole preko tenzora a_{ij}. Pokazaćemo da postoji i obrnuta relacija. Tako, polazeći od izraza

$$\overset{(a)}{\Gamma}{}_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

i

$$\overset{(a)}{\Gamma}{}_{ikj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j}\right),$$

dobijamo identičnost

$$\overset{(a)}{\Gamma}_{ijk} + \overset{(a)}{\Gamma}_{ikj} = \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}. \tag{31.35}$$

Od značaja je, primera radi, pri kovarijantnom difereciranju tenzora a_{ij}, jer je, po definiciji,

$$a_{jk,i} = \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} - a_{ik}\overset{(a)}{\Gamma^l}_{ji} - a_{jl}\overset{(a)}{\Gamma^l}_{ki} = \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} - \overset{(a)}{\Gamma}_{jik} - \overset{(a)}{\Gamma}_{kij} = \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} - \overset{(a)}{\Gamma}_{ijk} - \overset{(a)}{\Gamma}_{ikj}.$$

Onda je, prema (31.35), identički

$$a_{kj,i} = 0. \tag{31.36}$$

Drugačije rečeno, kovarijantni izvod nesingularnog simetričnog tenzora a_{ij} identički je jednak nuli, uvek kada je kovarijantni izvod definisan preko koneksije čiji su koeficijenti Kristofelovi simboli definisani u odnosu na tenzorsko polje $a_{ij}(x^k)$.

Na sličan način se pokazuje da je

$$a^{jk}{}_{,i} = 0. \tag{31.37}$$

Podvlačimo, (31.36) i (31.37) važe samo za koneksiju koja je definisana ovde u odnosu na posmatrano tenzorsko polje $a_{ij}(x^k)$.

31.3 Kovarijantni izvod drugog reda

Već smo videli da kovarijantni izvod tenzora, bilo kog reda, je tenzor reda za jedan veći od posmatranog tenzora. Tako je kovarijantni izvod vektorskog polja $v^i(x^j)$ tenzor drugog reda

$$v^k_{,i} = \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + v^l\,\Gamma^k{}_{li}. \tag{31.38}$$

Pri tome se pretpostavlja da je diferncijabilna mnogostrukost M poznata koneksija data Kristofelovim simbolom $\Gamma^k{}_{ij}$. Pretpostavljajući da je tenzorsko polje $v^k_{,i}$ diferencijabilno, moguće je odrediti njegov kovarijantni izvod, ili kovarijantni izvod drugog reda vektora v^i. Po definiciji je onda

$$v^k_{,ij} = \left(v^k_{,i}\right)_{,j} = \frac{\partial v^k_{,i}}{\partial x^j} + v^l_{,i}\,\Gamma^k{}_{lj} - v^k_{,l}\,\Gamma^l{}_{ij}.$$

Smenom (31.38) u ovom izrazu dobijamo da je

$$v^k_{,ij} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial v^k}{\partial x^i} + v^l\,\Gamma^k{}_{li}\right) + \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^i} + v^m\,\Gamma^l{}_{mi}\right)\Gamma^k{}_{lj} - v^k_{,l}\,\Gamma^l{}_{ij},$$

ili

$$v^k_{,ij} = \frac{\partial^2 v^k}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial v^l}{\partial x^j}\Gamma^k{}_{li} + v^l\,\frac{\partial \Gamma^k{}_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial v^l}{\partial x^j}\Gamma^k{}_{li} + v^m\,\Gamma^l{}_{mi}\Gamma^k{}_{lj} - v^k_{,l}\,\Gamma^l{}_{ij}.$$

Član $\dfrac{\partial^2 v^k}{\partial x^i \partial x^j}$ možemo eliminisati imajući u vidu da je

$$\frac{\partial^2 v^k}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 v^k}{\partial x^j \partial x^i}.$$

Striktnom razmenom indeksa i i j, u gornjem izrazu, dobijamo

$$v^k_{,ji} = \frac{\partial^2 v^k}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial v^l}{\partial x^i}\Gamma^k{}_{lj} + v^l\,\frac{\partial \Gamma^k{}_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial v^l}{\partial x^i}\Gamma^k{}_{lj} + v^m\,\Gamma^l{}_{mj}\Gamma^k{}_{li} - v^k_{,l}\,\Gamma^l{}_{ji}.$$

Onda je

$$v^k_{,ij} - v^k_{,ji} = \left(\frac{\partial \Gamma^k{}_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^k{}_{mj}}{\partial x^i} + \Gamma^l{}_{mi}\Gamma^k{}_{lj} - \Gamma^l{}_{mj}\Gamma^k{}_{li}\right) v^m + \left(\Gamma^l{}_{ji} - \Gamma^l{}_{ij}\right) v^k_{,l}. \tag{31.39}$$

Uvodeći oznaku

$$K_m{}^k{}_{ij} \equiv \frac{\partial \Gamma^k{}_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^k{}_{mj}}{\partial x^i} + \Gamma^l{}_{mi}\Gamma^k{}_{lj} - \Gamma^l{}_{mj}\Gamma^k{}_{li} \tag{31.40}$$

pišemo (31.39) u sažetom obliku

$$v^k{}_{,ij} - v^k{}_{,ji} = K_m{}^k{}_{ij}\,v^m - S^l_{ij}\,v^k_{,l}. \tag{31.41}$$

Veličina $K_m{}^k{}_{ij}$ je tenzor četvtog reda. Njegov tenzorski karakter proizilazi iz kriterijuma o tenzorskom karakteru sistema: $v^k{}_{,ij} - v^k{}_{,ji}$, S^l_{ij} i v^m su tenzori. Onda je i $K_m{}^k{}_{ij}$ tenzor i naziva se **tenzor krivine** mnogostrukosti M. Uprošćeno govoreći, u slučju kada je tenzor a_{ij} metrički tenzor g_{ij} i S^l_{ij} iščezava, onda se $K_m{}^k{}_{ij}$ svodi na Rimanov tenzor krivine $R_m{}^k{}_{ij}$. Otuda i naziv za tenzor $K_m{}^k{}_{ij}$. Suštinski on je generalizacija Rimanovog tenzora na mnogostrukosti M.

Na sličan način se može pokazati da je za kovarijantno vektorsko polje $w_k(x^l)$

$$w_{k,ij} - w_{k,ji} = -K_k{}^l{}_{ij}\,w_l - S^l_{ij}\,w_{k,l}. \tag{31.42}$$

Radi kompletnosti, navodimo odgovarajući izraz za tenzorsko polje $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$. Onda je

$$\begin{aligned} &T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q,kl} - T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q,lk} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{p} K_m{}^{i_\alpha}{}_{kl}\,T^{i_1\cdots i_{\alpha-1} m i_{\alpha+1}\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} - \sum_{\beta=1}^{q} K_{j_\beta}{}^m{}_{kl}\,T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{\beta-1} m j_{\beta+1}\cdots j_q} - S^m_{kl}\,T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q,m}. \end{aligned} \tag{31.43}$$

Izrazi (31.41)-(31.43) nazivaju se **Ričijevi identiteti**.

Jasno je da u slučaju metričkog tenzora g_{ij} ovaj izraz se svodi na

$$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q,kl} - T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q,lk} =$$
$$\sum_{\alpha=1}^{p} R_m{}^{i_\alpha}{}_{kl} T^{i_1\cdots i_{\alpha-1} m i_{\alpha+1}\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} - \sum_{\beta=1}^{q} R_{j_\beta}{}^{m}{}_{kl} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{\beta-1} m j_{\beta+1}\cdots j_q}. \tag{31.44}$$

31.4 Tenzor torzije

Od interesa je da se detaljnije razmotri Tenzor torzije $S^k_{ij} = \Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^k{}_{ji}$ sa drugog aspekta. Poznato je da je

$$v^i{}_{,j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k \Gamma^i{}_{kj}$$

kovarijantni izvod vektorskog polja $\mathbf{v}$ na mnogostrukosti M. Onda je

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = u^j \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{kj} v^k \right) \mathbf{g}_i$$

promena polja $\mathbf{v}$ u pravcu vektora $\mathbf{u}$. Na isti način se definiše

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = v^j \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{kj} u^k \right) \mathbf{g}_i.$$

Razlika njihovih promena u istoj tački M je

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \left(u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right) \mathbf{g}_i + \left(\Gamma^i{}_{kj} - \Gamma^i{}_{jk} \right) v^k u^j \mathbf{g}_i.$$

Po definiciji je

$$\left(\Gamma^i{}_{kj} - \Gamma^i{}_{jk} \right) v^k u^j \mathbf{g}_i = S^k_{ij} v^k u^j \mathbf{g}_i = \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

tenzor torzije u invarijantnom obliku i

$$\left(u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right) \mathbf{g}_i = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$$

komutator vektorskih polja u i **v**. Onda je

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}].$$

Iz definicije Tenzora torzije vidi se da je

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

za simetričnu koneksiju, tj. za

$$\Gamma^l{}_{ij} = \Gamma^l{}_{ji}.$$

To je uvek zadovoljeno za koneksiju $\left\{ {l \atop ij} \right\}$ Rimanskog prostora.

U odnosu na takvu koneksiju osnovni metrički tenzor je kovarijantno konstantan. To je u potpunoj saglasnostu sa Levi-Čivita koneksijom.

31.5 Paralelna vektorska polja

Videli smo da je

$$\frac{\delta u^i}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} u^j \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{31.45}$$

potreban i dovoljan uslov da je vektorsko polje $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{E}_3$ duž krive $\mathscr{C} : x^k = x^k(t)$ **polje paralelnih vektora**, izraženo u odnosu na krivolinijske koordinate x^i. U istom prostoru jednačine

$$u^i_{,k} = 0 \tag{31.46}$$

kazuju da je vektorsko polje $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{E}_3$ paralelno u svakoj tački prostora. Pitanje glasi: kako odrediti paralelno vektorsko polje na mnogostrukosti M?

Odgovor na ovo pitanje tražimo u analogiji sa napred navedenim uslovima paralelnog pomeranja vektora u Euklidskom prostoru. Pri tome imamo u vidu da je koneksija na M obeležena sa $\Gamma^k{}_{ij}$, za razliku od koneksije $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}$ date u $\mathbb{E}_n$. Ova razlika u koneksijama se iskazuje i u oznakama apsolutnih diferencijala

$$\delta u^i = \mathrm{d}u^i + u^j \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \mathrm{d}x^k$$

i

$$\mathrm{D}v^k = \mathrm{d}v^k + v^i \Gamma^k{}_{ij} \, \mathrm{d}x^j.$$

Jedan od bitnih razloga koji nas motivišu da koristimo analogiju jesu i izrazi

$$\overset{(a)}{\Gamma}{}^k{}_{ij} = a^{kl} \overset{(a)}{\Gamma}{}_{ijl} \quad \text{i} \quad \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = g^{il} \, [jk,l] \, ,$$

pri čemu je $\overset{(a)}{\Gamma}{}_{ijl}$ definisano pomoću proizvoljnog regularnog simetričnog tenzora a_{ij}, a $[jk,l]$ preko osnovnog metričkog tenzora g_{ij}.

Jednačine (31.45) i (31.46) sugerišu dva načina generalizacije koncepta paralelnog pomeranja vektora na M. Analiziraćemo oba.

Prvi slučaj

U slučaju generalizacuje (31.45), odgovarajući izraz je

$$\mathrm{D}v^k = \mathrm{d}v^k + v^i \Gamma^k{}_{ij} \, \mathrm{d}x^j = 0,$$

ili

$$\mathrm{d}v^k = -v^i \Gamma^k{}_{ij} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t \tag{31.47}$$

i odnosi se na paralelno pomeranje vektora duž krive $\mathscr{C}: x^k = x^k(t)$. To znači da je član $v^i \Gamma^k{}_{ij} \dfrac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$ definisan samo duž krive $\mathscr{C}$ i prema tome je funkcija parametra t. Integracijom (31.47) dobijamo

$$v^k(t_2) - v^k(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} v^i \Gamma^k{}_{ij} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t, \tag{31.48}$$

gde je $v^k(t_2)$ vektor u tački $P_2(x^k(t_2))$ krive $\mathscr{C}$, koji se dobija paralelnim pomeranje vektora $v^k(t_1)$ u tački $P_1(x^k(t_1))$ duž krive $\mathscr{C}$.

Odavde se vidi da vrednost integrala $\int_{t_1}^{t_2} v^i \Gamma^k{}_{ij} \dfrac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$ zavisi od krive $\mathscr{C}$. Biće nezavisna samo ako je $v^i \Gamma^k{}_{ij} \dfrac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}$ totalni diferencijal, što u opštem slučaju to nije. To znači da za neku drugu krivu C na M, koja spaja iste prostorne tačke P_1 i P_2, vrednost vektora $v^k(P_2)$ paralelno pomerenog vektora $v^k(P_1)$ iz tačke P_1 u tačku P_2 neće biti ista kao $v^k(t_2)$, tj. $v^k(P_2) \neq v^k(t_2)$. Prema tome, paralelno pomeranje vektora duž zatvorene krive linije u M ne dovodi do istog vektora u početnoj tački.

To je u potpunoj suprotnosti sa paralelnim pomeranjem vektora u Euklidskom prostoru, koje ne zavisi od krive duž koje se paralelno pomeranje vrši. Drugačije rečeno, paralelno pomeranje u Euklidskom prostoru je jednoznačno definisano. To nas dovodi do zaključka da na mnogostrukosti M u opštem slučaju ne postoji **apsolutni paralelizam**.

Ovaj zaključak ne važi samo u slučaju veoma bliskih tačaka. Primera radi, neka je zadat vektor w^k u tački $P(x^k)$. U tački $Q(x^k + \mathrm{d}x^k)$ jednoznačno definišemo vektor $w^k + \mathrm{d}w^k$ pod uslovom da je

$$\mathrm{d}w^k = -w^i \Gamma^k{}_{ij} \mathrm{d}x^j.$$

Za tako određeni vektor $w^k + \mathrm{d}w^k$ u Q kažemo da je paralelan vekroru w^k u tački $P(x^k)$. Na taj način uvedeni pralelizam nazivamo **lokalni paralelizam**.

Drugi slučaj

U slučaju generalizacije (31.46b) na M, pišemo

$$v^i_{,j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{kj} v^k = 0,$$

ili

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = -v^k \Gamma^i{}_{kj}. \tag{31.49}$$

Ovaj sistem parcijalnih jednačina prvog reda ima rešenja samo ako su zadovoljeni uslovi integrabilnosti

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial v^i}{\partial x^k} = 0.$$

Kako je

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = -\Gamma^i{}_{lj}\frac{\partial v^l}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{lj}}{\partial x^k}v^l = \left(\Gamma^l{}_{mk}\Gamma^i{}_{lj} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{mj}}{\partial x^k}\right)v^m,$$

gde smo koristili (31.49), onda je

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial v^i}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial \Gamma^i{}_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{mj}}{\partial x^k} + \Gamma^l{}_{mk}\Gamma^i{}_{lj} - \Gamma^l{}_{mj}\Gamma^i{}_{mj}\right)v^m = 0.$$

Koristeći (31.40) ovaj sistem jednačina postaje

$$K_m{}^k{}_{ij}\,v^m = 0. \tag{31.50}$$

On predstavlja potrebne uslove koje vektorsko polje v^m mora zadovoljavati pri paralelnom pomeranju. Generalno, to nije slučaj. Zaista, iz (31.40) se vidi da je tenzor $K_m{}^k{}_{ij}$ jednoznačno određen kao funkcija koordinata x^k nezavisno od vektorskog polja v^m.

Kao posledica toga za proizvoljne vrednosti vektora v^m u početnoj tački P (31.50) neće biti zadovoljeno.

Imajući u vidu neprekidnost funkcija $K_m{}^k{}_{ij}$ sledi da (31.50) neće biti zadovoljeno ni u konančnoj okolini na M koja sadrži tačku P. Od interesa je da razmotrimo specijalan slučaj kada se može konstruisati koneksija u odnosu na koju tenzor krivine identički iščezava, tj. $K_m{}^k{}_{ij} = 0$. Onda je $K_m{}^k{}_{ij} = 0$ nezavisno od koordinatnog sistema u M. Radi definisanosti za takve mnogostrukosti, za koje je $K\,{}_{k}{}^{i}{}_{j} = 0$, kažemo da su **ravanski**[1] **prostori**. Takav je, primera radi, Euklidski prostor $\mathbb{E}_n$.

U slučaju takvih prostora (31.50) identički je zadovoljeno. Onda (31.50) nisu samo potrebni nego i dovoljni uslovi inegrabilnosti sistema parcijalnih jednačina (31.48). Tada je podintegralna funkcija $v^i\,\Gamma^k{}_{ij}\,\dfrac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$ u (31.48) totalni diferencijal i vrednost integrala $\int_{t_1}^{t_2} v^i\,\Gamma^k{}_{ij}\,\dfrac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$ zavisi od graničnih tačaka, ali ne i od krive inegracije.

Ne upuštajući se dalje u svojstva tenzora krivine $K_m{}^k{}_{ij}$ na M, razmotrimo jedan veoma važan slučaj.

Ponovo posmatramo krivu $\mathscr{C} : x^k = x^k(t)$ i njeno tangentno polje $\dfrac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}$ klase C^1. Apsolutni diferencijal ovog vektorskog polja je

$$\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\Gamma^i{}_{kj}\,\mathrm{d}x^j. \tag{31.51}$$

[1] eng.=flat

Ovo vektorsko polje biće polje paralenih vektora duž krive $\mathscr{C}$, ako je $\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right)=0$, tj. ako funkcije $\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}$ predstavljaju rešenja sistema diferencijanih jednačina

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^l{}_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}=0. \tag{31.52}$$

Za krive ovog tipa tangentni vektori se dobijaju paralelnim pomeranjem. Očigledno je da one predstavljaju generalizaciju pravih linija u Euklidskom prostoru. Formalno imaju isti oblik kao prave linije u $\mathbb{E}_n$ u odnosu na krivolinijske koordinate x^i.

U diferencijalnoj geometriji mnogostrukosti M koneksije $\Gamma^i{}_{lj}$ krive koje zadovoljavaju jedančine (31.52) igraju važnu ulogu. U literaturi se nazivaju **autoparalele**. Za takve prostore se kaže da su **nerimanski prostori**.

31.6 Liov izvod

Izložili smo u Odeljku 15 jedan od načina određivanja kovarijantnog izvoda. Pri tome smo koristili (15.18), ili (15.19), str. 367, koji su dati preko Kristofelovoh simbola - Rimanove koneksije izražene preko osnovnog metričkog tenzora. Njihovim korišćenjem zamenjujemo

$$\frac{\partial^2x^i}{\partial\bar{x}^p\partial\bar{x}^q}\quad\text{ili}\quad\frac{\partial^2\bar{x}^p}{\partial x^i\partial x^j}, \tag{31.53}$$

u uzrazima pri običnom diferenciranju tenzorskih polja. Primera radi za tenzor prvog reda važi

$$\bar{u}^i=u^p\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}, \tag{31.54}$$

i

$$\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial\bar{x}^j}=\frac{\partial u^p}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^j}+u^r\frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^r\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^j}.$$

Lako je pokazati da je

$$u^r\frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^r\partial x^q}=\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^q}-\frac{\partial u^p}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}. \tag{31.55}$$

Na taj način je moguće izvršiti smenu $u^r\frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^r\partial x^q}$ ne pozivajući se na koneksiju.

Radi jednostavnosti primenjujemo postupak na relativnom mešovitom tenzoru drugog reda $T^i_j(\mathbf{x})$ težine w, koji se pri koordinatnoj transformaciji

$$\bar{x}^k=\bar{x}^k(x^j) \tag{31.56}$$

transformiše po zakonu

$$\bar{T}^p_q(\bar{\mathbf{x}}) = J^w \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} T^i_j(\mathbf{x}), \tag{31.57}$$

gde je

$$J = \det\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\right). \tag{31.58}$$

Posmatraćemo promenu tenzora $T^i_j(\mathbf{x})$ duž krive

$$C : x^k = x^k(t).$$

Ista kriva u odnosu na kordinatni sistem $\bar{x}^k$ je data izrazom

$$C : \bar{x}^k = \bar{x}^k(x^l(t)) = \bar{x}^k(t).$$

Promena posmatranog tenzora duž krive C u odnosu na koordinatni sistem x^k je definisana izrazom

$$\frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} v^k,$$

gde je $v^k = \dfrac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$. U odnosu na koordinatni sistem $\bar{x}^k$ ona će glasiti

$$\frac{\partial \bar{T}^p_q}{\partial \bar{x}^r},$$

gde je $\bar{v}^r = \dfrac{\mathrm{d}\bar{x}^r}{\mathrm{d}t}$. Pri tome je poznato da je

$$\bar{v}^r = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} v^k.$$

Kako je

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{T}^p_q}{\partial \bar{x}^r} &= J^w \frac{\partial^2 \bar{x}^p}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} T^i_j + J^w \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^q \partial \bar{x}^r} T^i_j + J^w \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + \\ &+ wJ^{w-1} \frac{\partial J}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} T^i_j,\end{aligned}$$

onda je

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{T}^p_q}{\partial \bar{x}^r} \bar{v}^r &= J^w \frac{\partial^2 \bar{x}^p}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} \bar{v}^r \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} T^i_j + J^w \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^q \partial \bar{x}^r} \bar{v}^r T^i_j + \\ &+ J^w \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} \bar{v}^r \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + wJ^{w-1} \frac{\partial J}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \bar{v}^r T^i_j\end{aligned}$$

ili

$$\frac{\partial \bar{T}^p_q}{\partial \bar{x}^r}\bar{v}^r = J^w \frac{\partial^2 \bar{x}^p}{\partial x^i \partial x^k} v^k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} T^i_j + J^w \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^q \partial \bar{x}^r} \bar{v}^r T^i_j + \\ + J^w \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} v^k \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + wJ^{w-1} \frac{\partial J}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \bar{v}^r T^i_j, \tag{31.59}$$

gde je

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{x}^r} = \frac{\partial J}{\partial \left(\dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^s}\right)} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^s \partial \bar{x}^r} = J \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^s \partial \bar{x}^r}. \tag{31.60}$$

Očigledno je da u ovom obliku ovaj izraz nema tenzorski karakter, jer postoje članovi koji su izvodi drugog reda. Za njihovu eleiminaciju koristimo

$$v^l = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^r} \bar{v}^r. \tag{31.61}$$

Primenjujući postupak u (31.54) dobijamo da je

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^r \partial \bar{x}^s} \bar{v}^r = -\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial \bar{v}^r}{\partial \bar{x}^s} + \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial v^l}{\partial x^m}. \tag{31.62}$$

Takođe

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^l}{\partial x^r \partial x^s} v^r = -\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^r} \frac{\partial v^r}{\partial x^s} + \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial \bar{v}^l}{\partial \bar{x}^m}. \tag{31.63}$$

Ovi izrazi su od bitnog značaja za određivanje sledećih članova. Tako je

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{x}^r} \bar{v}^r = J \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^s \partial \bar{x}^r} \bar{v}^r = J \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^l} \left(-\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial \bar{v}^r}{\partial \bar{x}^s} + \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial v^l}{\partial x^m} \right) = J \left(-\frac{\partial \bar{v}^r}{\partial \bar{x}^r} + \frac{\partial v^l}{\partial x^l} \right), \tag{31.64}$$

pa je

$$wJ^{w-1} \frac{\partial J}{\partial \bar{x}^r} \bar{v}^r \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} T^i_j = \\ = wJ^w \left(-\frac{\partial \bar{v}^r}{\partial \bar{x}^r} + \frac{\partial v^l}{\partial x^l} \right) \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} T^i_j = \\ -w\bar{T}^p_q \frac{\partial \bar{v}^r}{\partial \bar{x}^r} + wJ^w \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} T^i_j \frac{\partial v^l}{\partial x^l}. \tag{31.65}$$

Na isti način se dobija

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^p}{\partial x^i \partial x^k} v^k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} T^i_j = \\ = -\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k} \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} T^i_j + \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{v}^p}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} T^i_j = \\ = -\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial v^k}{\partial x^i} T^i_j + \frac{\partial \bar{v}^p}{\partial \bar{x}^m} \bar{T}^m_q \tag{31.66}$$

i

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^q \partial \bar{x}^r} \bar{v}^r \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} T^i_j =$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \left(- \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial \bar{v}^r}{\partial \bar{x}^q} + \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial v^j}{\partial x^m} \right) T^i_j = \tag{31.67}$$

$$= - \frac{\partial \bar{v}^r}{\partial \bar{x}^q} \bar{T}^p_r + \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial v^k}{\partial x^j} T^i_k .$$

Zamena ovih izraza u (31.55) i grupisanjem članova dobijamo

$$\frac{\partial \bar{T}^p_q}{\partial \bar{x}^r} \bar{v}^r - \frac{\partial \bar{v}^p}{\partial \bar{x}^r} \bar{T}^r_q + \frac{\partial \bar{v}^r}{\partial \bar{x}^q} \bar{T}^p_r + w \frac{\partial \bar{v}^r}{\partial \bar{x}^r} \bar{T}^p_q =$$

$$= J^w \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q} \left(\frac{\partial T^l_m}{\partial x^n} v^n - \frac{\partial v^l}{\partial x^n} T^n_m + \frac{\partial v^n}{\partial x^m} T^l_n + w \frac{\partial v^n}{\partial x^n T^l_m} \right) .$$

Očigledno da je sistem

$$\mathfrak{L}_v T^i_j = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} v^k - \frac{\partial v^i}{\partial x^k} T^k_j + \frac{\partial v^k}{\partial x^j} T^i_k + w \frac{\partial v^k}{\partial x^k} T^i_j \tag{31.68}$$

relativna tenzorska veličina. Definise se kao **Liov izvod relativnog tenzora** T^l_m **težine** w.

Na potpuno istovetan način nalazi se Liov izvod relativnog tenzora $T^{i_1 i_2 \dots i_\alpha}{}_{j_1 j_2 \dots j_\beta}$ težine w. Onda je

$$\mathfrak{L}_v T^{i_1 i_2 \dots i_\alpha}{}_{j_1 j_2 \dots j_\beta} = \frac{\partial T^{i_1 i_2 \dots i_\alpha}{}_{j_1 j_2 \dots j_\beta}}{\partial x^n} v^n - \sum_{\rho=1}^{\alpha} T^{i_1 i_2 \dots k_{\rho-1} l k_{\rho+1} \dots i_\alpha}{}_{j_1 j_2 \dots j_\beta} \frac{\partial v^{k_\rho}}{\partial x^l} +$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{\beta} T^{i_1 i_2 \dots i_\alpha}{}_{j_1 j_2 \dots j_{\sigma-1} m \sigma_{\sigma+1} \dots j_\beta} \frac{\partial v^m}{\partial x^{j_\sigma}} + w \frac{\partial v^n}{\partial x^n} T^{i_1 i_2 \dots i_\alpha}{}_{j_1 j_2 \dots j_\beta} . \tag{31.69}$$

Navedimo neke primere.

Primer 16

Slučaj relativnog skalara φ:

$$\mathfrak{L}_v \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} v^k + w \frac{\partial v^k}{\partial x^k} \varphi . \tag{31.70}$$

Primer 17

Relativni vektor u^i:

$$\mathfrak{L}_v u^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} v^k - \frac{\partial v^i}{\partial x^k} u^k + w \frac{\partial v^k}{\partial x^k} u^i. \tag{31.71}$$

Očigledno je da se u slučaju apsolutnog skalara φ i apsolutnog vektora u^i, tj. kada je $w = 0$, dobija da je

$$\mathfrak{L}_v \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} v^k \quad \text{i} \quad \mathfrak{L}_v u^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} v^k - \frac{\partial v^i}{\partial x^k} u^k. \tag{31.72}$$

31.6.1 Slučaj kada je tenzorsko polje nestacionarno

Bez gubljenja u opštosti ponovo razmatramo tenzorsko polje $\mathbf{T}$, ali sada u slučaju kada je $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$. Pretpostavljamo da i dalje važi (31.57) i da je

$$\frac{\delta T^i_j}{\delta t} = \frac{\partial T^i_j}{\partial t} + T^i_{j,k} v^k. \tag{31.73}$$

Jasno je da je $\dfrac{\partial T^i_j}{\partial t}$ tenzor i da je

$$\frac{\mathrm{d} T^i_j}{\mathrm{d} t} = \frac{\partial T^i_j}{\partial t} + \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} v^k. \tag{31.74}$$

Iz (31.57) sledi da je

$$\frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} v^k = \mathfrak{L}_v T^i_j + \frac{\partial v^i}{\partial x^k} T^k_j - \frac{\partial v^k}{\partial x^j} T^i_k - w \frac{\partial v^k}{\partial x^k} T^i_j.$$

Smenom ovog izraz u (31.74) dobijamo da je

$$\frac{\mathrm{d} T^i_j}{\mathrm{d} t} - \frac{\partial v^i}{\partial x^k} T^k_j + \frac{\partial v^k}{\partial x^j} T^i_k + w \frac{\partial v^k}{\partial x^k} T^i_j = \frac{\partial T^i_j}{\partial t} + \mathfrak{L}_v T^i_j.$$

Tenzor koji je definisan levom stranom ovog izraza obeležavamo sa $L_v T^i_j$. Znači

$$L_v T^i_j = \frac{\mathrm{d} T^i_j}{\mathrm{d} t} - \frac{\partial v^i}{\partial x^k} T^k_j + \frac{\partial v^k}{\partial x^j} T^i_k + w \frac{\partial v^k}{\partial x^k} T^i_j = \frac{\partial T^i_j}{\partial t} + \mathfrak{L}_v T^i_j. \tag{31.75}$$

Očigledno je da se u slučaju stacinarnog polja svodi na Liov izvod, tj.

$$L_v T^i_j = \mathfrak{L}_v T^i_j. \tag{31.76}$$

Na isti način se pokazuje da je

$$L_v T^{i_1 i_2 \dots i_\alpha}{}_{j_1 j_2 \dots j_\beta} = \frac{\partial T^{i_1 i_2 \dots i_\alpha}{}_{j_1 j_2 \dots j_\beta}}{\partial t} + \mathfrak{L}_v T^{i_1 i_2 \dots i_\alpha}{}_{j_1 j_2 \dots j_\beta}.$$

Očigledno je da se u slučaju stacionarnih polja svodi na Liov izvod

$$L_v T^{i_1 i_2 \dots i_\alpha}{}_{j_1 j_2 \dots j_\beta} = \mathfrak{L}_v T^{i_1 i_2 \dots i_\alpha}{}_{j_1 j_2 \dots j_\beta}.$$

32. Potprostori Rimanove mnogostrukosti

Do sada smo razmatrali površ $S:\mathbf{x}=\mathbf{x}(u^{\alpha})$, $(\alpha=1,2)$, kao potprostor $\mathbb{E}_3$. To je specijalan slučaj Rimanovog prostora V_M kao potprostora Rimanovog prostora V_N. Po pravilu trebalo bi da redosled izlaganja bude obrnut: znači prvo izložiti opšti slučaj, a specijalan slučaj izvesti iz opšteg. Ima više opravdanja za ovaj naš pristup. Navedimo neka:

a) $S:\mathbf{x}=\mathbf{x}(u^{\alpha})$ je dostupan našim opažajima,
b) slučaj $S:\mathbf{x}=\mathbf{x}(u^{\alpha})$ je daleko prisutniji u primeni,
c) odgovarajući izrazi se jednostavije izvode,
d) najvećim delom imaju isti oblik u V_M i predstavljaju njihovo uopštenje i
e) naša opšta saznanja predstavljaju proširenje naših pojedinačnih saznanja i daju nam mogućnost njihovog uopštavanja.

Sa ovim uvodom pretpostavljamo da je: Rimanski prostor V_N poznat, x^i, $(i=1,2,\ldots,N)$, njegov dopustivi koordinatni sistem, $\mathbf{x}(x^i)$ tipična tačka u V_N i

$$\mathbf{g}_i=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial x^i},\quad (i=1,2,\ldots,N) \tag{32.1}$$

sistem baznih vektora. Zadržavamo se na slučaju kada je osnovni metrički tenzor $g_{ij}=\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j$ pozitivno definitan. Onda je $\det(g_{ij})\neq 0$. Takođe je

$$\mathrm{d}s^2=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$$

osnovna metrička forma u V_N.

Recipročna baza $\mathbf{g}^i$ definisana je na standaran način: $\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^i = \delta^i_j$.

Potprostor V_M definišemo jednačinama

$$V_M : x^i = x^i(u^\alpha). \tag{32.2}$$

Pogodno ih je izraziti u obliku

$$V_M : \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^\alpha) = \mathbf{x}(x^i(u^\alpha)). \tag{32.3}$$

Radi jedostavnijeg izlaganje ovde će svi latinski indeksi uzimati vrednosti od 1 do N, a grčki od 1 do $M < N$. Osnovni geometrijski pojmovi ostaju nepromenjeni.

Tako je

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} \tag{32.4}$$

sistem baznih vektora na V_M.

Recipročna baza $\mathbf{a}^\alpha$ data je sa $\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = \delta^\beta_\alpha$.

Veza između baznih vektora prostora V_N i V_M glasi

$$\mathbf{a}_\alpha = x^i_{,\alpha}\mathbf{g}_i, \quad x^i_{,\alpha} \equiv \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{g}^i. \tag{32.5}$$

Onda je osnovni metrički tenzor $a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$ od V_M dat izrazom

$$a_{\alpha\beta} = g_{ij}x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}. \tag{32.6}$$

Simetrični tenzor $a_{\alpha\beta}$ je indukovan metrikom prostora V_N. Pozitivno definitan je i definiše metričku formu od V_M u obliku

$$\mathrm{d}s^2 = a_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta, \quad \det(a_{\alpha\beta}) \neq 0. \tag{32.7}$$

U literaturi $a_{\alpha\beta}$ se nazivaju **koeficijenti prve fundamentalne forme**.

N Uočimo da se (32.7) dobija iz $\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$, kada se izvrši zamena $\mathrm{d}x^i = x^i_{,\alpha}\,\mathrm{d}u^\alpha$. Onda se kaže da je (32.7) **indukovana kvadratna forma** V_M kvadratnom formom $\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$ od V_N. U slučaju kada se (32.7) uvodi nezavisno od V_N, za formu (32.7) se kaže da je **unutrašnja**.[1]

Tenzoru $a_{\alpha\beta}$ odgovara recipročni tenzor $a^{\alpha\beta}$ dat sa

$$a_{\alpha\gamma}a^{\gamma\beta} = \delta^\beta_\alpha. \tag{32.8}$$

[1] eng. intrinsic

Za svaki vektor $\mathbf{w}$ na V_N, za koji važi $\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{w} = 0$ u tački $\mathbf{x}$ od V_M, kažemo da je upravan na V_M u toj tački. Kako je

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_\alpha \cdot w_i \,\mathbf{g}^i = x^i_{,\alpha} w_i = 0,$$

$\operatorname{rang}(x^i_{,\alpha}) = M$, sledi da ova jednačina dopušta $N-M$ linearno nezavisnih rešenja $\mathbf{w}_a$, $a = 1,2,\ldots,N-M$. Uočimo da, izuzev u slučaju kada je $M = N-1$, rešenja $\mathbf{w}_a$ nisu jednoznačno određena. Prema tome u svakoj tački $\mathbf{x}$ od V_M definisan je prostor od $N-M$ dimenzija, V_{N-M}.

Teorema 5

Skup vektora $\mathbf{a}_\alpha$ i $\mathbf{w}_a$ je linearno nezavisan.

Dokaz

Iz uslova

$$\lambda^\alpha \mathbf{a}_\alpha + \mu^a \mathbf{w}_a = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda^\alpha \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta + \mu^a \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{a}_\beta = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \lambda^\alpha \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda^\alpha = 0,$$

jer je $\det\big(a_{\alpha\beta}\big) \neq 0$. Onda je

$$\mu^a \mathbf{w}_a = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mu^a = 0.$$

Teorema 6

Prostor V_{N-M} je komplementaran prostoru V_M, tj.

$$V_N = V_M \oplus V_{N-M}$$

u tačkama $V_M : \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^\alpha)$.

Dokaz

Neka je $\boldsymbol{\omega}$ proizvoljan vektor u V_{N-M}. Onda je $\boldsymbol{\omega} = \omega^a \mathbf{w}_a$, pa je

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_\alpha \cdot \omega^a \mathbf{w}_a = \omega^a \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{w}_a = 0.$$

Znači V_{N-M} je upravan na V_M u svakoj tački $\mathbf{x}$ od V_M i $V_M \cap V_{N-M} = \{0\}$.

N Tenzor

$$v^{k_1\dots k_M} = \varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_M} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_M}}{\partial u^{\alpha_M}}$$

predstavlja generalizaciju tangentnog vektora krive linije u $\mathbb{E}_3$. Onda je tenzor

$$\begin{aligned} n_{j_1\dots j_{N-M}} &= \frac{1}{M!}\varepsilon_{j_1\dots j_{N-M}k_1\dots k_M}\, v^{k_1\dots k_M} = \\ &= \frac{1}{M!}\varepsilon_{j_1\dots j_{N-M}k_1\dots k_M}\, \varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_M} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_M}}{\partial u^{\alpha_M}} \end{aligned} \tag{32.9}$$

upravan na svaki vektor $\mathbf{a}_\alpha = x^i_{,\alpha}\mathbf{g}_i$, jer je

$$\begin{aligned} n_{j_1\dots j_{N-M}} \frac{\partial x^{k_{K-M}}}{\partial u^\alpha} &= \frac{1}{M!}\varepsilon_{j_1\dots j_{N-M}k_1\dots k_M}\, \varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_M} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_M}}{\partial u^{\alpha_M}} \cdots \frac{\partial x^{k_{N=M}}}{\partial u^\alpha} = \\ &= \frac{1}{M!}\varepsilon_{j_1\dots j_{N-M}k_1\dots k_M}\, \varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_M} \left.\frac{\partial x^{k_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_M}}{\partial u^{\alpha_M}} \cdots \frac{\partial x^{k_{N=M}}}{\partial u^\alpha}\right|_{[k_1\dots k_M\, k_{N-M}]} = \\ &= \frac{1}{M!}\varepsilon_{j_1\dots j_{N-M}k_1\dots k_M}\, \varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_M} \left.\frac{\partial x^{k_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_M}}{\partial u^{\alpha_M}} \cdots \frac{\partial x^{k_{N=M}}}{\partial u^\alpha}\right|_{[\alpha_1\dots\alpha_M\alpha]} = 0. \end{aligned}$$

Pri tome imamo u vidu da je svaki potpuno antisimetričan tenzor u V_M, recimo, uvek jednak nuli kada je $K > M$.

Tenzor (32.9) se može tumačiti kao generalizacija jediničnog normalnog vektora $\mathbf{n}$ na $S: \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^\alpha)$.

Kristofelovi simboli se definišu na isti način kao i ranije

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}\cdot\mathbf{a}^\gamma = a^{\alpha\beta}\,[\alpha\beta,\delta] = \frac{1}{2}a^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial a_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial a_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta}\right). \tag{32.10}$$

Relacija između Kristofelovih simbola prostora V_M i V_N može da se odredi na više načina.

Mi ćemo koristiti (32.5). Onda je

$$\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\mathbf{g}_i + x^i_{,\alpha}\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}x^j_{,\beta} = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}\right)\mathbf{g}_k,$$

odakle sledi da je

$$[\alpha\beta,\delta] = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}\cdot\mathbf{a}_\delta = a_{\delta\sigma}\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = g_{kl}x^l_{,\delta}\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}\right),$$

ili, množenjem sa $a^{\lambda\delta}$,

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = g_{kl}a^{\lambda\delta}x^l_{,\delta}\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}\right). \tag{32.11}$$

Bez ikakvih izmena u načinu izvođenja koje smo imali u slučaju $S:\mathbf{x}=\mathbf{x}(u^\alpha)$, navodimo sledeće izraze za odgovarajuće veličine u V_M i V_N

$$a_{\alpha\beta,\gamma}=0. \tag{32.12}$$

Za hibridni tenzor $T^{i\ldots\alpha\ldots}_{j\ldots\beta\ldots;\gamma}$ važi

$$T^{i\ldots\alpha\ldots}_{j\ldots\beta\ldots;\gamma}=T^{i\ldots\alpha\ldots}_{j\ldots\beta\ldots,\gamma}+T^{i\ldots\alpha\ldots}_{j\ldots\beta\ldots,k}x^k_{,\gamma}. \tag{32.13}$$

Tako je

$$g_{ij;\alpha}=g_{ij,\alpha}+g_{ij,k}x^k_{,\alpha}=0. \tag{32.14}$$

Takođe je

$$x^i_{;\alpha\beta}=(x^i_{;\alpha})_{,\beta}+(x^i_{;\alpha})_{,j}x^j_{;\beta}=\frac{\partial^2x^i}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}-x^i_{;\gamma}\left\{\begin{matrix}\gamma\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}+x^k_{;\alpha}\left\{\begin{matrix}i\\ kj\end{matrix}\right\}x^j_{;\beta}. \tag{32.15}$$

Od posebnog interesa je promena vektora $\dfrac{\partial\mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}$. To je vektor koji, u opštem slučaju, izlazi iz prostora V_M. Razlažući ga u odnosu na bazne vektore $\mathbf{a}_\alpha$ i $\mathbf{w}_a$ koji razapinju prostor V_N u tačkama $V_M:\ \mathbf{x}=\mathbf{x}(u^\alpha)$, dobijamo

$$\frac{\partial\mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}=A^\gamma_{\alpha\beta}\,\mathbf{a}_\gamma+B^a_{\alpha\beta}\,\mathbf{w}_a.$$

Koeficijente razlaganja određujemo iz uslova (32.11) i $\mathbf{a}_\alpha\cdot\mathbf{w}_b=0$. Onda je

$$A^\gamma_{\alpha\beta}=\left\{\begin{matrix}\gamma\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}.$$

Za koeficijente $B^a_{\alpha\beta}$ zaključujemo da su simetrični po indeksima α i β, jer su $\dfrac{\partial\mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}$ i $\left\{\begin{smallmatrix}\gamma\\ \alpha\beta\end{smallmatrix}\right\}$ simetrični po tim indeksima. Znači

$$\frac{\partial\mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}=\left\{\begin{matrix}\gamma\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}\mathbf{a}_\gamma+B^a_{\alpha\beta}\,\mathbf{w}_a. \tag{32.16}$$

Jedan korak dalje. Ako obeležimo sa

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta}=\frac{\partial\mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}-\left\{\begin{matrix}\gamma\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}\mathbf{a}_\gamma, \tag{32.17}$$

onda je

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta}=B^a_{\alpha\beta}\,\mathbf{w}_a. \tag{32.18}$$

U literaturi koeficijenti $B^a_{\alpha\beta}$, u slučaju $a=1$, određuju **koeficijente druge metričke forme**. Prema tome $B^a_{\alpha\beta}$ predstavljaju njihovu generalizaciju u prostoru V_M.

Od intersa je odrediti eksplicitan izraz za $B^a_{\alpha\beta}$. U tom slučaju je najjednostavije koristiti sistem recipročnih vektora $\mathbf{w}^a$ sistema $\mathbf{w}_a$. Određuju se iz uslova $\mathbf{w}_a \cdot \mathbf{w}^b = \delta^b_a$.

Na isti način kao i do sada pokazuje se da je:

$$\mathbf{w}^a = w^{ab}\,\mathbf{w}_b, \quad \mathbf{w}_a = w_{ab}\,\mathbf{w}^b, \tag{32.19}$$

gde je

$$w_{ab} = \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{w}_b, \quad w^{ab} = \mathbf{w}^a \cdot \mathbf{w}^b, \quad w_{ab}w^{bc} = \delta^c_a. \tag{32.20}$$

Očigleno je da su veličine w_{ab}, w^{ab} simetrične i međusobno recipročne. Mogu da se tumače kao neholonomne koordinate tenzora u prostoru V_{N-M} u odnosu na sistem vektora $\mathbf{w}_a$ i njima recipročnog sistema $\mathbf{w}^a$. Veličine w_{ab} i w^{ab} mogu da se koriste kao osnovni metrički tenzori prostora V_{N-M} u neholomnim bazama $\mathbf{w}_a$ i $\mathbf{w}^a$, redom. Onda je

$$B^a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{w}^a.$$

Na isti način dobijamo da je

$$\mathbf{w}^a_{,\alpha} = D^a_{\alpha\beta}\mathbf{a}^\beta + D^a_{b\alpha}\mathbf{w}^b.$$

Odavde je

$$D^a_{\alpha\beta} = \mathbf{w}^a_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta = -\mathbf{w}^a \cdot \mathbf{a}_{\beta,\alpha} = -\mathbf{w}^a \cdot \left(\begin{Bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \mathbf{a}_\gamma + B^a_{\alpha\beta}\,\mathbf{w}_a \right) = -B^a_{\alpha\beta}$$

i

$$D^a_{b\alpha} = \mathbf{w}^a_{,\alpha} \cdot \mathbf{w}_b = -\mathbf{w}^a \cdot \mathbf{w}_{b,\alpha}.$$

Pogodno je koeficijente napisati u obliku

$$D_{ab\alpha} = -\mathbf{w}_a \cdot \mathbf{w}_{b,\alpha}.$$

Uočimo da je

$$D_{ab\alpha} + D_{ba\alpha} = -w_{ab,\alpha}.$$

Imajući u vidu ove izraze pišemo

$$\mathbf{w}^a_{,\alpha} = -B^a_{\alpha\beta}\,\mathbf{a}^\beta + D^a_{b\alpha}\,\mathbf{w}^b. \tag{32.21}$$

32.1 Kriva linija u V_M

Prethodno je detaljno razmatrana kriva linija na površi $S : \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^\alpha)$ u $\mathbb{E}_3$. Uopštenje ovog problema je kriva linija

$$\mathscr{L} : u^\alpha = u^\alpha(t) \tag{32.22}$$

na V_M, gde je t proizvoljan parametar. Obeležimo sa $\mathbf{u}$ tipičnu tačku u V_M. Onda se (32.22) može napisati u obliku

$$\mathscr{L} : \mathbf{u} = \mathbf{u}(t). \tag{32.23}$$

Jednačina krive $\mathscr{L}$ u prostoru V_N je

$$\mathscr{L} : x^i = x^i(u^\alpha(t)), \tag{32.24}$$

ili

$$\mathscr{L} : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{u}(t)). \tag{32.25}$$

Uvedimo sledeće oznake:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}^i\,\mathbf{g}_i, \quad \dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \dot{u}^\alpha\,\mathbf{a}_\alpha.$$

Onda je $\dot{x}^i = x^i_{,\alpha}\,\dot{u}^\alpha$.

Neka je $\mathbf{V}$ na V_M diferencijabilno vektorsko polje definisano na $\mathscr{L}$. Onda je

$$\mathbf{V} = V^i\,\mathbf{g}_i = v^\alpha\,\mathbf{a}_\alpha, \quad V^i = x^i_{,\alpha}\,v^\alpha. \tag{32.26}$$

Lako je pokazati da je

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{\delta V^i}{\delta t}\,\mathbf{g}_i = \frac{\delta v^\alpha}{\delta t}\,\mathbf{a}_\alpha + B^a_{\alpha\beta}\,v^\alpha\,\dot{u}^\beta\,\mathbf{w}_a, \tag{32.27}$$

gde je sa $\dfrac{\delta}{\delta t}$ obeležen Bjankijev izvod. Pri izvođenju ovog izraza koristili smo (32.16) i definiciju Bjankijevog izvoda.

Analiza ovog izraza pokazuje da se ukupna promena vektora $\mathbf{V} \in V_M$ duž krive $\mathscr{L}$ sastoji iz dva dela: $\dfrac{\delta v^\alpha}{\delta t}\,\mathbf{a}_\alpha$ koji je u V_M i $B^a_{\alpha\beta}\,v^\alpha\,\dot{u}^\beta\,\mathbf{w}_a$ koji je u V_{N-M}. Oni su međusobno upravni i kao takvi predstavljaju ortogonalne projekcije od $\dot{\mathbf{V}}$ na V_M i V_{N-M}. Kratko rečeno: apsolutni izvod tangentnog vektorskog polja $\mathbf{V} \in V_M$, u odnosu na obvojni prostor V_N, predstavlja njegovu dekompoziciju na tangentnu komponetu $\dfrac{\delta v^\alpha}{\delta t}\,\mathbf{a}_\alpha$ i normalnu komponetu $B^a_{\alpha\beta}\,v^\alpha\,\dot{u}^\beta\,\mathbf{w}_a$.

Uočimo da je tangentna komponenta $\dfrac{\delta v^\alpha}{\delta t}\,\mathbf{a}_\alpha$ u potpunosti definisana osnovnim metričkim tenzorom $a_{\alpha\beta}$ od V_M. Prema tome, $\dfrac{\delta v^\alpha}{\delta t}\,\mathbf{a}_\alpha$ je unutrašnja veličina u V_M. S druge strane, iz (32.27) se vidi da $\dfrac{\delta v^\alpha}{\delta t}\,\mathbf{a}_\alpha$ predstavlja indukovanu veličinu. Odavde sledi zaključak:

- za bilo koji potprostor Rimanskog prostora unutrašnja i indukovana koneksija su iste.

Iz (32.27) sledi takođe sledeći zaključak:

- ako je vektorsko polje $\mathbf{V} \in V_M$ paralelno duž krive $\mathscr{L}$, tj. ako je $\dfrac{\delta v^\alpha}{\delta t} = 0$ duž krive $\mathscr{L}$, onda je apsolutni izvod vektorskog polja $\mathbf{V}$ u odnosu na V_N uvek upravan na V_M.

Od interesa je slučaj kada je $t = s$, gde je s luk krive $\mathscr{L}$. Onda je

$$\dot{x}^i = x^i_{,\alpha}\,\dot{u}^\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = x^i_{,\alpha}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}$$

i tangentni vektor $\dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}$ (ili $\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}$) je jedinični vektor.

Specijalno za vektorsko polje $\mathbf{V} \in V_M$ duž krive $\mathscr{L}$, kada je $v^\alpha = \dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}$, biće

$$V^i = x^i_{,\alpha}\,v^\alpha = x^i_{,\alpha}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}, \quad \mathbf{V} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{T}.$$

Tada (32.27) postaje

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}s} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right)\mathbf{g}_i = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\right)\mathbf{a}_\alpha + B^a_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\mathbf{w}_a. \tag{32.28}$$

Član $B^a_{\alpha\beta}\dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}$ je isti za sve krive koje prolaze kroz tačku $\mathbf{u}$ krive $\mathscr{L} : \mathbf{u} = \mathbf{u}(s)$, a koje imaju istu tangentu u toj tački. To važi i za geodezijsku liniju G koja prolazi kroz tu tačku. Kako je za geodezijsku liniju

$$G : \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\right) = 0,$$

onda (32.28) postaje

$$\left.\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}s}\right)\right|_G = \frac{\delta}{\delta t}\left.\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right)\right|_G \mathbf{g}_i = B^a_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\mathbf{w}_a. \tag{32.29}$$

Značaj ovog rezultata se sastoji u sledećem: $\dfrac{\delta}{\delta t}\left.\left(\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right)\right|_G$ određuje glavnu normalu geodezijske linije G posmatrane kao krive u V_N. Onda sledi zaključak:

- glavna normala, bilo koje geodezijske krive G, posmatrane kao krive u V_N, je uvek upravna na V_M.

Glavna krivina krive G, posmatrane kao krive u V_N, data je sa

$$k_G^2 = g_{ij}\,\frac{\delta}{\delta t}\left.\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right)\right|_G \frac{\delta}{\delta t}\left.\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\right)\right|_G = g_{ij}\left(B^a_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\mathbf{w}_a\right)\left(B^b_{\gamma\delta}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\delta}{\mathrm{d}s}\mathbf{w}_b\right),$$

ili

$$k_G^2 = g_{ij} w_{ab} \left(B^a_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} \right) \left(B^b_{\gamma\delta} \frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^\delta}{\mathrm{d}s} \right). \tag{32.30}$$

Analizom ovog izraza vidi se:

- k_G^2, pa prema tome i k_G, zavisi samo od tačke $\mathbf{u}$ krive i pravca $\dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}$ u toj tački za dato V_M: time je kompletno određena.

U slučaju kada se kriva $\mathscr{L}$ posmatra kao kriva u V_M, tj, kada je $\mathscr{L} : \mathbf{u} = \mathbf{u}(s)$, uvodimo pojam **geodezijske krivine** k_g po analogonu krive u $S : \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^\alpha)$. Onda je njen kvadrat dat izrazom

$$k_g^2 = a_{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \right) \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} \right). \tag{32.31}$$

Kada se ista kriva $\mathscr{L} : \mathbf{u} = \mathbf{u}(s)$ u V_M posmatra kao prostorna kriva

$$\mathscr{L} : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s) \quad \text{u} \quad V_N,$$

onda po analogonu prostornih krivih definišemo **glavnu krivinu** k čiji je kvadrat dat sa

$$k^2 = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \right\|^2 = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}s} \right\|^2. \tag{32.32}$$

Smenom (32.28) u (32.31) biće

$$\begin{aligned} k^2 &= \left\| \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \right) \mathbf{a}_\alpha + B^a_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} \mathbf{w}_a \right\|^2 = \\ &= \left\| \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \right) \mathbf{a}_\alpha \right\|^2 + \left\| B^a_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} \mathbf{w}_a \right\|^2. \end{aligned}$$

Ponovnom smenom (32.30) i (32.31) u ovom izrazu konačno dobijamo

$$k^2 = k_g^2 + k_G^2 \tag{32.33}$$

još jedan rezultat koji predstavlja generalizaciju odgovarajućeg izraza za krivu na $S : \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^\alpha)$.

32.2 Tenzori krivina prostora V_M i V_N

Za određivanje relacije između tenzora krivina prostora V_M i V_N potrebno je odrediti izraz

$$x^i_{;\alpha\beta\gamma} - x^i_{;\alpha\gamma\beta}.$$

U tu svrhu koristimo (32.15). Posle duge računice i grupisanja članova dobija se

$$x^i_{;\alpha\beta\gamma} - x^i_{;\alpha\gamma\beta} = \mathscr{R}^{\ i}_{j\ kl}\, x^j_{;\alpha}\, x^k_{;\beta}\, x^l_{;\gamma} - x^i_{;\delta}\mathscr{R}_{\alpha\ \ \beta\gamma}^{\ \ \delta}, \tag{32.34}$$

gde je tenzor krivine prostora V_M istog oblika kao i tenzor krivine $\mathscr{R}^{\ i}_{j\ kl}$ prostora V_N, tj.

$$\mathscr{R}_{\alpha\ \ \beta\gamma}^{\ \ \delta} = \frac{\partial \left\{ {\delta \atop \alpha\beta} \right\}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial \left\{ {\delta \atop \alpha\gamma} \right\}}{\partial u^\beta} + \left\{ {\sigma \atop \alpha\beta} \right\}\left\{ {\delta \atop \sigma\gamma} \right\} - \left\{ {\sigma \atop \alpha\gamma} \right\}\left\{ {\delta \atop \sigma\beta} \right\}. \tag{32.35}$$

Isti izraz možemo rešiti po tenzoru krivine prostora V_M polazeći od izraza

$$x^i_{;\delta}\mathscr{R}_{\alpha\ \ \beta\gamma}^{\ \ \delta} = \mathscr{R}^{\ i}_{j\ kl}\, x^j_{;\alpha}\, x^k_{;\beta}\, x^l_{;\gamma} - \left(x^i_{;\alpha\beta\gamma} - x^i_{;\alpha\gamma\beta} \right).$$

Množenjem sa $g_{im}\, x^m_{;\sigma}$, dobijamo

$$g_{im}\, x^i_{;\delta}\, x^m_{;\sigma}\mathscr{R}_{\alpha\ \ \beta\gamma}^{\ \ \delta} = \mathscr{R}_{\alpha\delta\beta\gamma} = g_{im}\, x^m_{;\sigma}\mathscr{R}^{\ i}_{j\ kl}\, x^j_{;\alpha}\, x^k_{;\beta}\, x^l_{;\gamma} - g_{im}\, x^m_{;\sigma} \left(x^i_{;\alpha\beta\gamma} - x^i_{;\alpha\gamma\beta} \right). \tag{32.36}$$

Onda je

$$g_{im}\, x^i_{;\delta}\, x^m_{;\sigma}\mathscr{R}_{\alpha\ \ \beta\gamma}^{\ \ \delta} = a_{\delta\sigma}\,\mathscr{R}_{\alpha\ \ \beta\gamma}^{\ \ \delta} = \mathscr{R}_{\alpha\delta\beta\gamma}$$

i

$$g_{im}\, x^m_{;\sigma}\, x^i_{;\alpha\beta\gamma} = \left(g_{im}\, x^m_{;\sigma}\, x^i_{;\alpha\beta} \right)_{;\gamma} - g_{im}\, x^m_{;\sigma\gamma} x^i_{;\alpha\beta} = -g_{im}\, x^m_{;\sigma\gamma} x^i_{;\alpha\beta},$$

jer je

$$g_{im}\, x^m_{;\sigma}\, x^i_{;\alpha\beta} = 0 \quad \text{(Dokazati!)}.$$

Koristeći ove izraze konačno dobijamo da je

$$\mathscr{R}_{\alpha\delta\beta\gamma} = \mathscr{R}_{jmkl}\, x^j_{;\alpha} x^m_{;\sigma} x^k_{;\beta} x^l_{;\gamma}. \tag{32.37}$$

Ovaj izraz se naziva **jednačina Gausa** i predstavlja generalizaciju Gausove formule diferencijalne geometrije površi u $\mathbb{E}_3$.

32.3 Hiperpovrš Rimanovog prostora

Definicija 32.3.1 Potprostor prostora V_N, čija je dimezija $N-1$, naziva se **hiperpovrš**.

Po definiciji V_{N-1} je hiperpovrš prostora V_N. Predstavlja, s jedne strane, generalizaciju površi $S: \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^\alpha)$ u $\mathbb{E}_3$, a sa duge, specijalan slučaj V_M (kada je $M = N-1$). Onda u ovom odeljku indeks α uzima vrednosti od 1 do $N-1$. Kao posledica toga sledi da jednačina

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{w} = 0$$

ima samo jedno rešenje za **w**. Normalizujući ga, dalje ga obeležavamo sa **n**, prema tome **n** je jedinični vektor hiperpovrši V_{N-1}. Njegov komponentalni oblik dobijamo iz (32.9):

$$n_i = \frac{1}{(N-1)!}\,\varepsilon_{ik_1\ldots k_{N-1}}\,\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_{N-1}}\,\frac{\partial x^{k_1}}{\partial u^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial x^{k_{N-1}}}{\partial u^{\alpha_{N-1}}},\quad g_{ij}n^i n^j = 1. \tag{32.38}$$

Takođe (32.18) postaje

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = B_{\alpha\beta}\,\mathbf{n},\quad x^i_{;\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}\,n^i. \tag{32.39}$$

Isto tako je

$$D^a_{b\alpha} = \mathbf{w}^a\cdot\mathbf{w}_b \quad\Rightarrow\quad D_{b\alpha} = \mathbf{n}_{,\alpha}\cdot\mathbf{n} = 0,$$

pa je

$$\mathbf{w}^a_{,\alpha} = -B^a_{\alpha\beta}\,\mathbf{a}^\beta + D^a_{b\alpha}\,\mathbf{w}^b \quad\Rightarrow\quad \mathbf{n}_{,\alpha} = -B_{\alpha\beta}\,\mathbf{a}^\beta \quad\Rightarrow\quad n^i_{,\alpha} = -B^\beta_\alpha\,x^i_{;\beta}. \tag{32.40}$$

Svaki od ovih izraza predstavlja generalizaciju odgovarajućih izraza $S:\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^\alpha)$ u $\mathbb{E}_3$.

U cilju njihovog prepoznavanja koristili smo i odgovarajuće oznake.

Na isti način se pokazuje, koristeći (32.37), (32.39) i (32.38), da je

$$\mathscr{R}_{\alpha\sigma\beta\gamma} = \mathscr{R}_{jmkl}\,x^j_{;\alpha}\,x^m_{;\sigma}\,x^k_{;\beta}\,x^l_{;\gamma} - \left(B_{;\sigma\gamma}B_{;\alpha\beta} - B_{;\sigma\beta}B_{;\alpha\gamma}\right)$$

Gausova jednačina za hiperpovrš V_{N-1}.

Ako pak pođemo od (32.39), onda dobijamo da je

$$x^i_{;\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}\,n^i \quad\Rightarrow\quad x^i_{;\alpha\beta\gamma} = B_{\alpha\beta,\gamma}n^i - B_{\alpha\beta}\,B^\delta_\gamma\,x^i_{;\delta},$$

tako da je

$$x^i_{,\alpha\beta\gamma} - x^i_{,\alpha\gamma\beta} = \left(B_{\alpha\beta,\gamma} - B_{\alpha\gamma,\beta}\right)\,n^i - \left(B_{\alpha\beta}B^\delta_\gamma - B_{\alpha\gamma}B^\delta_\gamma\right)\,x^i_{;\delta}.$$

Koristeći (32.34), sledi da je

$$\mathscr{R}^{\ i}_{j\ kl}\,x^j_{;\alpha}\,x^k_{;\beta}\,x^l_{;\gamma} - x^i_{;\delta}\mathscr{R}_{\alpha\ \ \beta\gamma}^{\ \delta} = \left(B_{\alpha\beta,\gamma} - B_{\alpha\gamma,\beta}\right)\,n^i - \left(B_{\alpha\beta}B^\delta_\gamma - B_{\alpha\gamma}B^\delta_\gamma\right)\,x^i_{;\delta}. \tag{32.41}$$

Množeći ovu relaciju sa n_i, imajući u vidu da je $n_i n^i = 1$ i $n_i x^i_{,\alpha} = 0$, dobijamo

$$B_{\alpha\beta,\gamma} - B_{\alpha\gamma,\beta} = \mathscr{R}^{\ i}_{j\ kl}\,n_i\,x^j_{;\alpha}\,x^k_{;\beta}\,x^l_{;\gamma} \tag{32.42}$$

što predstavlja **generalisane Kodačijeve jednačine za hiperpovrš** V_{N-1} u V_N. One predstavljaju uslove integrabilnosti na $B_{\alpha\beta}$, koje $B_{\alpha\beta}$ moraju zadovoljavati, ako predstavljaju komponente druge metričke forme hiperpovrši V_{N-1}.

U specijalnom slučaju kada je obvojni prostor V_N Euklidski proctor $\mathbb{E}_N$ biće

$$\mathscr{R}^{\,i}_{j\,kl}=0.$$

Onda iz (32.41) i (32.42) sledi da je

$$\mathscr{R}_{\alpha\delta\beta\gamma}=B_{\alpha\beta}B_{\delta\gamma}-B_{\alpha\gamma}B_{\delta\beta} \tag{32.43}$$

i

$$B_{\alpha\beta,\gamma}-B_{\alpha\gamma,\beta}=0. \tag{32.44}$$

Od posebnog značaja je relacija (32.43). Ona povezuje dva tenzora: tenzor krivine $\mathscr{R}_{\alpha}{}^{\delta}{}_{\beta\gamma}$ i koeficijente druge funamantale forme $B_{\alpha\beta}$. Videli smo da je tenzor $\mathscr{R}_{\alpha}{}^{\delta}{}_{\beta\gamma}$ određen u potpunosti osnovnim metričkim tenzorom $a_{\alpha\beta}$ (i njegovim izvodima) i da, prema tome, predstavlja unutrašnju veličinu. Tenzor $B_{\alpha\beta}$ se ne može odrediti preko tenzora $a_{\alpha\beta}$ i prema tome, nije unutrašnja veličina. To nas dovodi do zaključka da moraju postojati neke unutrašnje funkcije za veličine koje nisu unutrašnje. U slučaju (32.43) to predstavlja njena desna strana. Na primer, u slučaju $s:\mathbf{x}=\mathbf{x}(u^{\alpha})$ u $\mathbb{E}_3$

$$\mathscr{R}_{1212}=B_{11}B_{22}-B_{12}B_{12}=\det\bigl(B_{\alpha\beta}\bigr).$$

Međutim, poznato je da je krivina površi

$$K=\frac{b}{a}, \tag{32.45}$$

gde je $b=\det\bigl(B_{\alpha\beta}\bigr)$ i $a=\det\bigl(a_{\alpha\beta}\bigr)$. Onda je

$$K=\frac{\mathscr{R}_{1212}}{a} \tag{32.46}$$

unutrašnja veličina nezavisno od toga što se u $K=\frac{b}{a}$ pojavljuje veličina koja nije unurtašnja. Na ovo je prvi ukazao Gaus u Egregium teoremi (str. 503, Teorema 23.10.1).

32.4 Kriva linija u V_{N-1}

U ovom delu koristićemo, najvećim delom, oznake kao i u slučaju krive C u prostoru $\mathbb{E}_3$ radi jednostavnijeg izvođenja, s jedne strane, i lakšeg sagledavanja generalizacije izvedenih izraza.

Neka je $\mathbf{x}(u^{\alpha})$ tačka u V_{N-1} i neka je

$$\mathscr{C}:\mathbf{u}=\mathbf{u}(s) \tag{32.47}$$

diferencijabilna kriva koja prolazi kroz tu tačku. Sa s obeležavamo luk krive $\mathscr{C}$. Onda je

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}s} = \dot{u}^{\alpha}\,\mathbf{a}_{\alpha} \tag{32.48}$$

jedinični vektor tangente krive. Jednačina krive $\mathscr{C}$ u prostoru V_N je

$$\mathscr{C}:\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(\mathbf{u}(s)). \tag{32.49}$$

Onda je

$$\mathbf{T} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\,\mathbf{g}_i, \tag{32.50}$$

njen jedinični vektor. Odmah se vidi da je

$$\dot{x}^i = x^i_{,\alpha}\,\dot{u}^{\alpha} \tag{32.51}$$

relacija koja uspostavlja vezu između reprezentacija jediničnog vektora krive $\mathscr{C}$ posmatranog sa stanovišta prostora V_N ili V_{N-1}. Onda je

$$\mathbf{T} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = \dot{u}^{\alpha}\,\mathbf{a}_{\alpha}. \tag{32.52}$$

Na isti način kao i u slučaju prostorne reprezentacije krive C u $\mathbb{E}_3$ pokazuje se da je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = k\mathbf{N}, \tag{32.53}$$

gde je jedinični vektor $\mathbf{N}$ **glavna normala**, a k **krivina prostorne krive** $\mathscr{C}$ u V_N. Koristeći (32.52) dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = k\mathbf{N} = \frac{\delta\dot{u}^{\alpha}}{\delta s}\,\mathbf{a}_{\alpha} + \dot{u}^{\alpha}\,\mathbf{a}_{\alpha,\beta}\,\dot{u}^{\beta} = \frac{\delta\dot{u}^{\alpha}}{\delta s}\,\mathbf{a}_{\alpha} + b_{\alpha\beta}\dot{u}^{\alpha}\,\dot{u}^{\beta}\,\mathbf{n}. \tag{32.54}$$

Specijalno za geodezijsku liniju Γ koja prolazi kroz tačku $\mathbf{x}(u^{\alpha})$ je $\dfrac{\delta\dot{u}^{\alpha}}{\delta s} = 0$. Onda je

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right)_{\Gamma} = b_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}\dot{u}^{\alpha}\,\dot{u}^{\beta}\,\mathbf{n} = k_{\Gamma}\,\mathbf{N}_{\Gamma},$$

gde su: k_{Γ} krivina, a $\mathbf{N}_{\Gamma}$ glavna normala geodezijske linije Γ posmatrane kao prostorne krive u V_N. Onda je $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}_{\Gamma}$, pa je

$$|k_{\Gamma}| = \frac{b_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^{\alpha}\,\mathrm{d}u^{\beta}}{g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^{\alpha}\,\mathrm{d}u^{\beta}}. \tag{32.55}$$

Član $b_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^{\alpha}\,\mathrm{d}u^{\beta}$ se naziva **druga fundamentalna forma** od V_{N-1}. Ovi izrazi predstavljaju direktnu generalizaciju odgovarajućih članova geometrije površi S : $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^{\alpha})$ u $\mathbb{E}_3$.

Ako se (32.54) skalarno pomnoži sa **n**, dobijamo

$$k\cos\varphi = \frac{b_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^{\alpha}\,\mathrm{d}u^{\beta}}{g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^{\alpha}\,\mathrm{d}u^{\beta}}, \tag{32.56}$$

gde je $\cos\varphi = \mathbf{n}\cdot\mathbf{N}$. Veličina

$$k_n = k\cos\varphi \tag{32.57}$$

naziva se **normalna krivina** V_{N-1} u tački $\mathbf{x}(u^{\alpha})$.

Odavde sledi

Teorema 7 (Generalisana Mojsner[2] teorema)

Sve krive na V_{N-1} koje prolaze kroz istu tačku $\mathbf{x}(u^{\alpha})$ od V_{N-1} i koje imaju zajedničku tangentu $\dot{u}^{\alpha}$, imaju istu normalnu krivinu.

Iz (32.56) i (32.57) možemo zaključiti da se normalna krivina krive $\mathscr{C} : \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^{\alpha}) = \mathbf{x}(\mathbf{u}(s))$ može identifikovati sa geodezijskom krivinom koja prolazi kroz tačku $\mathbf{x}(u^{\alpha})$ u pravcu jediničnog vektora $\dot{u}^{\alpha}$.

Normalna krivina k_n je funkcija tačke $\mathbf{x}(u^{\alpha})$ i pravca $\dot{u}^{\alpha}$ krive $\mathscr{C}$, tj. $k_n = k_n(u^{\alpha}, \dot{u}^{\alpha})$.

Od posebnog značaja je odrediti one pravce za koje k_n ima ekstremne vrednosti.

Njihovo određivanje svodi se na problem određivanja ekstrema funkcije $k_n = b_{\alpha\beta}\,\dot{u}^{\alpha}\,\dot{u}^{\beta}$ po $\dot{u}^{\alpha}$ koje moraju zadovoljavati uslov $g_{\alpha\beta}\,\dot{u}^{\alpha}\,\dot{u}^{\beta} = 1$. Drugačije rečeno, problem se svodi na određivanje uslovnog ekstremuma funkcije

$$\Phi(u^{\alpha}, \dot{u}^{\alpha}) = b_{\alpha\beta}\,\dot{u}^{\alpha}\,\dot{u}^{\beta} - \lambda\left(g_{\alpha\beta}\,\dot{u}^{\alpha}\,\dot{u}^{\beta} - 1\right),$$

gde je λ neodređeni Lagražev množilac veze. Za određivanje ekstrema funkcije $\Phi(u^{\alpha}, \dot{u}^{\alpha})$ potrebno je da je $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\dot{u}^{\alpha}} = 0$. Imajući u vidu da je $b_{\alpha\beta}$ simetričan tenzor i $g_{\alpha\beta}$ pozitivo definitan tenzor, problem se svodi na rešavanje sistema

$$\left(b_{\alpha\beta} - \lambda\,g_{\alpha\beta}\right)\dot{u}^{\alpha} = 0. \tag{32.58}$$

Ovaj sistem od $N-1$ linearnih jednačina po $\dot{u}^{\alpha}$ ima netrivijalna rešenja kada je jednačina

$$\det\left(b_{\alpha\beta} - \lambda\,g_{\alpha\beta}\right) = 0. \tag{32.59}$$

Rešenja $\lambda_{(r)}$ ovog sistema, kojih ima $N-1$, (a koji ne moraju svi biti međusobno različiti) nazivaju se **karakteristični brojevi**. Realni su. U našem slučaju, s obzirom na značenje $\lambda_{(r)}$, nazivamo ih **glavne krivine** od V_{N-1} u tački $\mathbf{x}(u^{\alpha})$.

Njima odgovarajuće vektore obeležavamo sa $\dot{u}^{\alpha}_{(r)}$. Različitim karakterističnim brojevima odgovaraju međusobno upravni vektori. Međutim, poznato je da se uvek može odrediti sistem od $N-1$ međusobno upravnih vektora i u slučaju kada svi karakteristični brojevi nisu različiti. Napominjujemo da u tom slučaju sistem takvih vektora nije jednoznačno određen.

Pogodno je (32.59) napisati u obliku

$$\det\left(b^{\alpha}_{\beta}-\lambda\,\delta^{\alpha}_{\beta}\right)=0. \tag{32.60}$$

Onda se fundamentalne invarijante tenzora b^{α}_{β} mogu izraziti direktno preko simetričnih funkcija glavnih krivina u obliku:

$$\begin{aligned}
I_1 &= b^{\alpha}_{\alpha}=\sum_{r=1}^{N-1}\lambda_{(r)},\\
I_2 &= \frac{1}{2!}\delta^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2}b^{\beta_1}_{\alpha_1}b^{\beta_2}_{\alpha_2}=\sum_{r<s}^{N-1}\lambda_{(r)}\,\lambda_{(s)},\\
\vdots &= \vdots\\
I_{N-1} &= \det\left(b^{\alpha}_{\beta}\right)=\frac{\det\left(b_{\alpha\beta}\right)}{\det\left(g_{\alpha\beta}\right)}=\lambda_{(1)}\,\lambda_{(1)}\ldots\lambda_{(N-1)}.
\end{aligned}$$

Primena tenzorskog raču

Primena tenzorskog raču

33. Primena tenzorskog računa u mehanici

Poznato je da je Tenzorski račun matematički jezik mehanike. Dokaz toga je postojanje obimne literature iz ove oblasti, koja je dostupna čitaocu. Zbog toga se ovde uglavnom zadržavamo na primeni tenzorskog računa u mehanici, koji nije izlagan u standardnoj literarturi.

Polazimo od toga da su čitaocu poznati osnovni pojmovi koji se koriste u mehanici: prostor, vreme t, sila $\mathbf{F}$ i masa m.

Celokupna klasična mehanika zasniva se na tri Njutnova zakona. Oni opisuju odnos između tela i sila koje deluju na njega i njegovo kretanje kao odgovor na te sile.

Važe u inercijalnim sistemima reference i glase:

1. **Zakon inercije**. Svako telo ostaje u stanju mirovanja, ili pravolinijskog kretanja sa konstantnom brzinom $\mathbf{v} = \mathbf{const}$., ako na njega ne deluje sila. Kretanje po ovom zakonu se naziva **kretanje po inerciji**.
2. **Drugi Njutnov zakon**. Promena količine kretanja po vremenu t proporcionalna je rezultujućoj sili $\mathbf{F}$ koja na telo deluje. Za materijalnu tačku, geometrijsku tačku $\mathbf{x}$ kojoj se pripisuje masa m, iskazuje se u obliku vektorske jednačine

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t},$$

gde je $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ njena količina kretanja, a $\mathbf{v}$ brzina. Za tela konstantne mase

Drugi Njutnov zakon glasi

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}.$$

3. **Zakon akcije i reakcije**. Dejstvo jednog tela na drugo jednako je po veličini dejstvu drugog tela ali suprotnog smera, tj.

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21},$$

gde ineks 1 označava prvo, a 2 drugo telo.

Sa matematičkog stanovišta ovi zakoni se koriste isključivo za izučavanje odgovarajućih matematičkih modela realnih tela. Najpostiji model od koga počinjemo jeste **materijalna tačka**. Koristi se i termin **čestica** da bi se naglasila razlika između geometrijske i materijalne tačke. Proširenje ovog modela predstavlja sistem materijalnih tačaka. Kvalitetno novi model je materijalni kontinuum, materijalno telo, i kruto telo kao specijalan slučaj.

Ako se drugačije ne kaže prostor fizičkih događaja biće $\mathbb{E}_3$.

33.1 Kretanje čestice M u $\mathbb{E}_3$

Položaj čestice M definiše položaj njene tačke $\mathbf{x}$ u kojoj se nalazi nezavisno od dopustivog koordinatnog sistema x^i, $i = 1,2,3$ u $\mathbb{E}_3$.

Jasno je da se pri tome ima u vidu da koordinate tačke $\mathbf{x}$ zavise od izbora koordinatnog sistema.

Po pravilu, položaj tačke $\mathbf{x}$ određuje se njenim vektorom položaja $\mathbf{r}(x^1,x^2,x^3)$, ili sažeto $\mathbf{r}(x^i)$.

Specijalno, u odnosu na Dekartove koordinate z^i biće $\mathbf{r} = z^i\mathbf{e}_i$, odakle se vidi da se koordinate z^i tačke $\mathbf{x}$ i komponente z^i njenog vektora položaja poklapaju.

Drugačije rečeno, Dekartov sitem je specijalan slučaj dopustivog krivolinijskog sitema u $\mathbb{E}_3$.

Pod dejstvom sile $\mathbf{F}$ čestica M menja svoj položaj u prostoru u toku vremena t opisujući krivu

$$\mathscr{S} : x^i = x^i(t). \tag{33.1}$$

Onda je

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i(t)), \tag{33.2}$$

tako da je brzina $\mathbf{v}$ - promene položaja čestice $\mathbf{x}$ - data izrazom

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(x^i(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\mathbf{g}_i, \tag{33.3}$$

ili

$$\mathbf{v} = v^i\mathbf{g}_i, \quad v^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}. \tag{33.4}$$

Po definiciji, ubrzanje je promena brzine u jedinici vremena

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta v^i}{\delta t}\mathbf{g}_i,$$

ili

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i, \tag{33.5}$$

gde je

$$a^i = \frac{\delta v^i}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} v^j \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}. \tag{33.6}$$

Sažeto napisano

$$a^i = \frac{\delta^2 x^i}{\delta t^2}. \tag{33.7}$$

Ovde i nadalje sa $\frac{\delta}{\delta t}$ označavamo **Bjankijev operator**. Uočimo da je $\frac{\delta x^i}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$.

Ako izrazimo silu $\mathbf{F}$ u odnosu na generalisane koordinate x^i onda je Njutnov zakon kretanja dat izrazom

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad m\frac{\delta^2 x^i}{\delta t^2}\mathbf{g}_i = \mathbf{F}, \tag{33.8}$$

ili u komponentalnom obliku

$$\frac{\delta^2 x^i}{\delta t^2} = Q^i, \tag{33.9}$$

gde je veličina

$$Q^i = \mathbf{F}\cdot\mathbf{g}^i \tag{33.10}$$

poznata pod imenom **generalisana sila**.

Iz navedenih izraza vidi se da su v^i, a^i i Q^i kontravarijantni tenzori (prvog reda).

Uočimo da se, u odnosu na Dekartove koordinate z^i, ovi izrazi znatno uproščavaju i svode na standardni oblik

$$v^i = \frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}t}, \quad a^i = \frac{\mathrm{d}^2 z^i}{\mathrm{d}t^2}, \quad m\frac{\mathrm{d}^2 z^i}{\mathrm{d}t^2} = F^i. \tag{33.11}$$

33.2 Lagranževe jednačine kretanja

Od suštinskog značaja pri kretanju čestice, ili tela, uopšte, je **kinetička energija** T. Po definicije je

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}mv^2, \tag{33.12}$$

gde je $v = |\mathbf{v}|$, tj. intezitet vektora brzine $\mathbf{v}$. Iz same definicije kinetičke enegije se vidi da pri svakom kretanju, tj. postojanju $\mathbf{v}$, postoji i T i obnuto, postojanje T podrazumeva kretanje.

Izražena u odnosu na generalisane koorinate x^i glasi

$$T = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j, \tag{33.13}$$

gde radi pogodnosti pišemo $\dot{x}^i \equiv \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Veličina $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ je **osnovni metrički tenzor**.

Za dalje izlaganje koristimo sledeće izraze:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = m g_{ij} \dot{x}^j, \quad \frac{\partial T}{\partial x^i} = m \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k.$$

Kako je

$$\frac{\partial T}{\partial x^i} = m \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial x^i} = m \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k + m g_{ij} \ddot{x}^j,$$

sledi da je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = m \left[g_{ij} \ddot{x}^j + \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k \right].$$

S obzirom na simetrična svojstva izraza $\left(\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k$ po $\dot{x}^j \dot{x}^k$, moguće ga je napisati u obliku

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k =$$
$$= [jk, i] \dot{x}^j \dot{x}^k = g_{ij} \begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix} \dot{x}^k \dot{x}^l,$$

gde su $[jk, i]$ i $\begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix}$ **Kristofelovi simboli** prve i druge vrste, redom.

Sada je lako pokazati da je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = m g_{ij} \left(\ddot{x}^j + \begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix} \dot{x}^k \dot{x}^l \right) = m g_{ij} \frac{\delta^2 x^j}{\delta t^2} = m a_i. \tag{33.14}$$

Smenom ovog izraza u (33.9) konačno dobijama

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = Q_i. \tag{33.15}$$

Ove jedančine su poznate pod imenom **Lagranževe jednačine kretanja**.

U slučaju kada na česticu deluje **konzervativna sila**, tj. kada je

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}, \tag{33.16}$$

gde je $V(x^i)$ **potencijal sile** Q_i, Lagraževe jednačine glase

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \tag{33.17}$$

Funkcija

$$L = T - V \tag{33.18}$$

naziva se **Lagranževa funkcija**.

Od interesa je razmotriti Lagranžev način izvođenja jednačina (33.15).

On polazi od principa virtualnog pomeranja primenjenog na jednačinu kretanja (poznatog pod imenom D'Alamberov princip)

$$\left(m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} - \mathbf{F}\right)\cdot\delta\mathbf{r} = 0. \tag{33.19}$$

Kako je $\delta\mathbf{r} = \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}\,\delta x^i$, gde je varijacija δx^i proizvoljna, sledi da je

$$\left(m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} - \mathbf{F}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i} = 0,$$

ili

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i} = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}. \tag{33.20}$$

Onda je

$$\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{g}_i = Q_i. \tag{33.21}$$

Član $m\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}$ zahteva dužu računicu. Pišemo

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}\right) - m\mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}. \tag{33.22}$$

Pri tome imamo u vidu da je

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}.$$

Odavde se neposredno dobija da je

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{x}^i} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}.$$

Takođe je

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x^i} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^i\partial x^j}\dot{x}^j + \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}\right)\dot{x}^j + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}. \tag{33.23}$$

Smenom ovih izraza u (33.22) dobijamo da je

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{x}^i}\right)-m\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x^i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)}{\partial\dot{x}^i}-\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)}{\partial x^i},$$

ili

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}^i}-\frac{\partial T}{\partial x^i},\tag{33.24}$$

gde je kao i dosada $T=\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ kinetička energija čestice. Iz (33.20), (33.21) i (33.24) slede Lagranževe jednačine kretanja (33.15).

33.3 Kretanje čestice po zadatoj krivoj u $\mathbb{E}_3$

Neka je čestica M prinuđena da se kreće po datoj krivoj $\mathscr{S}\in\mathbb{E}_3$. Pogodno je pisati u funkciji s luka krive

$$\mathscr{S}:x^i=x^i(s),\tag{33.25}$$

ili

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(x^i(s)).\tag{33.26}$$

Onda je njen vektor brzine

$$\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathbf{T}=v\mathbf{T},\tag{33.27}$$

gde je $\mathbf{T}$ jedinični vektor tangente krive $\mathscr{S}$. Veličina $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ - brzina čestice M predstavlja intenzitet vektora $\mathbf{v}$.

Predstavljajući brzinu u ovom obliku omogućuje nam drugi prilaz određivanja njenog ubrzanja. Tada je

$$\mathbf{a}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{T}+\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{T}+\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\kappa\mathbf{N}.$$

Uočimo da je

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(v)^2}{\mathrm{d}s},$$

pa je

$$\mathbf{a}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(v)^2}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}+v^2\kappa\mathbf{N}.\tag{33.28}$$

Odavde se vidi da je vektor ubrzanja uvek u oskulatornoj ravni, upravnoj na binormalu $\mathbf{B}$, nezavisno od sila pod kojim se čestica M kreće.

U slučaju prinudnog kretanja, osim aktivne sile **F**, mora se uzeti u obzir i sila **R**, kojom se ostvaruje prinuda. U tom slučaju jednačina kretanja glasi

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}+\mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}+2T\kappa\mathbf{N} = \mathbf{F}+\mathbf{R}. \tag{33.29}$$

Skalarnim množenjem ove jednačine sa **T**, **N** i **B**, dobijamo da je

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= F_T + R_T, \\ 2T\kappa &= F_n + R_N, \\ F_B + R_B &= 0, \end{aligned} \tag{33.30}$$

imajući u vidu da je $\mathbf{F} = F_T\mathbf{T}+F_N\mathbf{N}+F_B\mathbf{B}$, $\mathbf{R} = R_T\mathbf{T}+R_N\mathbf{N}+R_B\mathbf{B}$.

Ako je kretanje slobodno, bez prinude, onda je $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ i jednačine kretanja se znatno uprošćavaju

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= F_T, \\ 2T\kappa &= F_n. \end{aligned} \tag{33.31}$$

Takođe je $F_B = 0$ kao posledica kolinearnosti sile **F** i ubrzanja **a**, koje je u oskulatornoj ravni.

Specijalno kada je sila konzervativna $\mathbf{F} = -\mathrm{grad}V$ biće $F_T = -\mathrm{grad}U\cdot\mathbf{T} = -\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}$, sledi da je $\mathrm{d}T = -\mathrm{d}U$. Onda je **jednačina energije** konstantna, tj.

$$T+U = h, \tag{33.32}$$

gde je $h = const$.

33.4 Kretanje čestice po površi S

Neka je data površ

$$S:\ f(\mathbf{x},t) = 0. \tag{33.33}$$

Neka je čestica M za sve vreme t prinuđena da se kretće na površi. Onda je

$$\mathrm{grad}f\cdot\dot{\mathbf{x}}+\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{33.34}$$

gde je $\mathrm{grad}f$ vektor upravan na površ S. Očigledno je da ova jednačina nameće ograničenja na vektor brzine $\dot{\mathbf{x}}$ čestice M. Ako sa **n** označimo jedinični vektor normale na S onda je

$$\mathrm{grad}f = |\mathrm{grad}f|\mathbf{n},$$

pa se prethodna jednačina može napisati u obliku

$$|\mathrm{grad} f|\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{x}}+\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

odakle sledi da je

$$u_n=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial t}}{|\mathrm{grad} f|}, \tag{33.35}$$

gde je $u_n=\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{x}}$ normalna komponenta vektora brzine $\dot{\mathbf{x}}$. Prema tome čestica M ostaje za sve vreme svoga kretanja na površi S, ako se kreće normalnom komponentom u_n. Njene tangentne komponente mogu biti proizvoljne. Sada je jednačina kretanja

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{F}+\mathbf{R}, \tag{33.36}$$

gde je $\mathbf{R}$ sila koja prinuđuje česticu M da se nalazi na površi S.

Pogodno ju je predstaviti u obliku

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}_n+\mathbf{R}_T, \tag{33.37}$$

gde su $\mathbf{R}_n$ i $\mathbf{R}_T$ njene komponente u pravcu normale $\mathbf{n}$ i tangentne ravni površi S u tački $\mathbf{x}$. Ako se $\mathbf{R}_n$ piše u obliku $\mathbf{R}_n=\lambda\mathrm{grad} f$, onda prethodna jednačina kretanja glasi

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{F}+\lambda\mathrm{grad} f+\mathbf{R}_T, \tag{33.38}$$

gde je λ za sada **neodređeni množilac veze**.

Sila $\mathbf{R}_T$ nije zadata i mora se definisati u zavisnosti od prirode veze $f(\mathbf{x},t)=0$. Najprostiji slučaj je kada je **veza glatka** i ne pruža nikakav otpor kretanju čestice $\mathbf{x}$ na površi. Onda je $\mathbf{R}_T=\mathbf{0}$. Za takve veze se kaže da su **idealne**. U tom slučaju sistem jednačina

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}&=\mathbf{F}+\lambda\mathrm{grad} f,\\ f(\mathbf{x},t)&=0\end{aligned} \tag{33.39}$$

je kompletan po promenljivim x^i, $i=1,2,3$, i λ. Na isti način kao i do sada, koristeći kinetričku energiju T, dolazimo do Lagranžeovih jednačina kretanja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}^i}-\frac{\partial T}{\partial x^i}=Q_i+\lambda f_{,i}, \tag{33.40}$$

koje zajedno sa $f(\mathbf{x},t)=0$, čine kompletan sistem.

Isti problem razmotrićemo koristeći parametarsku reprezentaciju površi S. Neka je

$$x^i=x^i(u^\alpha,t),\quad \alpha=1,2, \tag{33.41}$$

jedna takva parametrizacija. Onda je njena brzina

$$v^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = x^i_{,\alpha}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial x^i}{\partial t}, \tag{33.42}$$

gde je $x^i_{,\alpha} \equiv \dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$. Njena normalna komponenta je $v^i n_i = \dfrac{\partial x^i}{\partial t} n_i$.

N Pokazaćemo da je jednaka u_n. Pišemo

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} n_i = \frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{f_{,i}}{|\mathrm{grad} f|} = \left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} - x^i_{,\alpha}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}t}\right)\frac{f_{,i}}{|\mathrm{grad} f|} = \frac{f_{,i}\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}}{|\mathrm{grad} f|} =$$
$$= -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial t}}{|\mathrm{grad} f|} = u_n.$$

Znači

$$u_n = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial t}}{|\mathrm{grad} f|} = \frac{\partial x^i}{\partial t} n_i,$$

pri svakoj parametrizaciji S, jer $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial t}}{|\mathrm{grad} f|}$ ne zavisi od parametrizacije.

Ako je površ S stacioarna, tj. $x^i = x^i(u^\alpha)$, onda je $\dfrac{\partial x^i}{\partial t} = 0$ i $u_n = 0$.

U tom slučaju brzina čestica $\mathbf{x}$ ne podleže nikakvom ograničenje, jer se za sve vreme kretanja nalazi na površi S. Dalje pretpostavljamo da je to naš slučaj.

Ako je uz to i površ S glatka, onda je tangentna komponenta $\mathbf{R}_T = \mathbf{0}$ i jednačine kretanja se svode na

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \lambda \,\mathrm{grad} f = \mathbf{F} + \lambda\, |\mathrm{grad} f| \mathbf{n}, \tag{33.43}$$

koje izražavamo u odnosu na trijedar vektora $\mathbf{a}_\alpha = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}$, $\mathbf{n}$. Tako je

$$a^i = \frac{\delta v^i}{\delta t} = x^i_{,\alpha\beta} w^\alpha w^\beta + x^i_{,\alpha}\frac{\delta w^\alpha}{\delta t}, \tag{33.44}$$

gde smo, radi jednostavnijeg pisanja, uveli oznaku $w^\alpha = \dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}t}$. Sa fizičkog stanovišta predstavlja vektor brzine čestice $\mathbf{x}$ na površi S. Kako je $x^i_{,\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} n^i$ i $w^\alpha = w t^\alpha$, gde je t^{α} jedinični vektor duž trajektorije čestice **x** na površi, onda jednačine kretanja glase

$$mw^2 b_{\alpha\beta} t^{\alpha} t^{\beta} n^i + mx^i_{,\alpha} \frac{\delta w^{\alpha}}{\delta t} = Q^i + \lambda |\mathrm{grad} f| n^i. \tag{33.45}$$

Množeći skalarno ovu jednačinu sa n_i, imajući u vidu da je $n_i n^i = 1$ i $n_i x^i_{,\alpha} = 0$, dobijamo

$$2T\, b_{\alpha\beta} t^{\alpha} t^{\beta} = Q^i n_i + \lambda |\mathrm{grad} f|. \tag{33.46}$$

Množeći je pak, sa $x_{i,\alpha}$ sledi da je

$$m a_{\alpha\beta} \frac{\delta w^{\alpha}}{\delta t} = Q_{\beta},$$

gde je $a_{\alpha\beta} = x^i_{,\alpha} x_{i,\beta}$ **osnovni metrički tenzor** površi, a $Q_{\beta} = Q^i x_{i,\beta}$ komponenta aktivne sile **F** na površi. Koncizno napisana, jednačina kretanja glasi

$$m \frac{\delta w^{\alpha}}{\delta t} = Q^{\alpha}. \tag{33.47}$$

Definišući kinetičku energiju čestice M na površi sa

$$T = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} w^{\alpha} w^{\beta}, \tag{33.48}$$

standardnim postupkom ove jedančine kretanja postaju Lagranževe jednačine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{w}^{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial w^{\alpha}} = Q_{\alpha}. \tag{33.49}$$

U slučaju kada je

$$Q_{\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial u^{\alpha}}, \tag{33.50}$$

gde je površinski potencijal sile Q_{α}, jednačine (33.49) se svode na

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}^{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial w^{\alpha}} = 0, \tag{33.51}$$

gde je $L = T - V$ Lagraževa funkcija.

33.5 Prinude

Po definiciji, **prinude** su kinematički, ili geometrijski uslovi koji ograničavaju slobodu kretanja mehaničkog sistema. Zbog toga zaslužuju posebnu pažnju pri izučavanju njegovog kretanja. Polazimo od najprostijeg materijalnog sistema koji se satoji iz jedne materijalne čestice M u $\mathbb{E}_3$. Obeležićemo sa $\mathbf{r}$ i $\mathbf{v}$ njen položaj i brzinu u nekom trenutku t, redom. Onda relacija

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = 0 \tag{33.52}$$

nameće odgovarajuće ograničenje na vrednosti sistema veličina $(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$, koji određuje kretanje čestice M. Kratko rečeno, (33.52) predstavlja matematički izraz kojim se karakteriše prinuda na kretanje materijalne čestice M.

U opštem slučaju, prinudu možemo klasificirati prema tri kriterijuma:

(a) Prinuda može biti iskazana **jednakošću**

$$f(\mathbf{r},t) = 0, \tag{33.53}$$

ili **nejednakošću**

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) \leq 0, \quad f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) \geq 0. \tag{33.54}$$

Prvi tip prinude se naziva **bilateralan**, a drugi **unilateralan**.
Uobičajeno je da se prvi tip naziva **zadržavajuća** i **konačna**, a drugi **nezadržavajuća prinuda**, nazivi koji su potpuno opravdani. Za oba tipa prinude koristi se i termin **geometrijske**.

(b) Ako vreme t ne figuriše ekplicitno u relaciji kojom se izražava prinuda onda se kaže da je **prinuda skleronomna**, ili **stacionarna**, u protivnom je **reonomna**, ili **nestacionarna**.

(c) Ako realcija kojom se izražava prinuda zavisi eksplicitno od brzine $\mathbf{v}\left(=\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\mathbf{r}}\right)$ onda se za prinudu kaže da je **kinematička**, ili **diferencijalna**. Svaka geometrijska prinuda $f(\mathbf{r},t) = 0$, pri diferenciranju postaje linearna diferncijalna jednačina, oblika

$$\mathrm{grad} f \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \text{ili} \quad \frac{\partial f}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Obrnuto ne važi, tj. svaka diferencijalna prinuda se ne može predstaviti u obliku geometrijske prinude.

One diferencijalne prinude koje se mogu predstaviti u konačnom obliku nazivamo **integrabilne prinude**. Konačne gemetrijske prinude, zajedno sa integrabilnim prinudama, nazivamo **holonomne**.

Neintegrabilne prinude, zajedno sa prinudama, koje se iskazujuju nejednakošću, nazivamo **neholonomne**. U daljem delu izlaganja bavićemo se uglavnom holonomnim prinudama.

Ista terminologija važi i u slučaju materijalnog sistema koji čini konačan broj materijalnih čestica.

33.6 Konfiguracioni prostor

Posmatrajmo mehanički sistem od N čestica u E_3 na koje deluje p holonomnih veza (prinuda)

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{33.55}$$

Od ukupno $3N$ koordinata (x^a, y^a, z^a), $a = 1, 2, \ldots, N$, samo $n = 3N - p$ njih je nezavisno. Za takav sistem se kaže da poseduje n **stepeni slobode**. Takve n nezavisne koordinate ne moraju biti Dekartove. Moguće je uvesti n **generalisanih koordinata** x^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tako da je

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(x^i, t) \tag{33.56}$$

sistem jednačina (33.56) identički zadovoljen. Sa geometrijskog stanovišta sistem jednačina (33.56) definiše n-dimenzionalnu površ u prostoru od $3N$ dimenzija. Drugačije rečeno, (33.56) predstavlja njenu parametarsku reprezentaciju. Svaki skup vrednosti generalisanih koordinata definiše konfiguraciju sistema, tj. položaj čestica u svakom trenutku vremena t. Prostor čije koordinatne linije odgovaraju generalisanim koordinatama naziva se **konfiguracioni prostor sistema**.

Foramalno matematički, konfiguracioni prostor ima strukturu diferencijabilne mnogostrukosti, što opravdava takođe naziv **diferencijabilna mnogostrukost**. Ovde ćemo uglavnom koristiti termin konfiguracioni prostor.

33.7 Lagraževe jednačine za sistem materijalnih čestica

Postupak za njihovo određivanje je istovetan određivanju Lagranžeovih jednačina (33.15). Polazimo od D'Alamberovog principa (33.19), pimenjenog za sistem od N četica u E_3 na koji deluju sile $\mathbf{F}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, N$, čije kretanje je saglasno sa vezama

$$\delta W = \sum_{\alpha}^{N} (\mathbf{F}_\alpha - m_\alpha \mathbf{a}_\alpha)\, \delta \mathbf{r}_\alpha = 0, \tag{33.57}$$

gde je:

δW - vitrualni rad;
m_α - masa čestica sistema;
$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(x^i, t)$ - vektor položaja materijalne čestice mase m_α, $i = 1, \ldots, n$,
n - stepen slobode sistema koji definiše ukupan broj generalisanih koordinata;
$\mathbf{v}_\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_\alpha}{\mathrm{d}t}$ - brzina čestice sistema;
$\mathbf{a}_\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\alpha}{\mathrm{d}t}$ - ubrzanje čestice sistema;
$m_\alpha \mathbf{a}_\alpha$ - inercijalna sila.

Izraz

$$\delta \mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i}\,\delta x^i$$

predstavlja virtualno pomeranje, diferencijal $\mathbf{r}_\alpha(x^i,t)$ pri konstantnom t.

Jasno je da je

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i}$$

ukupna sila koja deluje na sistem izražena u odnosu na generalisane koordinate x^i. Naziva se **generalisana sila** posmatranog sistema. Onda (33.57) postaje

$$\delta W = Q_i\,\delta x^i - \sum_{\alpha}^{N} m_\alpha \mathbf{a}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i}\,\delta x^i = 0. \tag{33.58}$$

Član $m_\alpha \mathbf{a}_\alpha \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i}$, po analogonu sa (33.22), pišemo u obliku

$$m_\alpha \mathbf{a}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i} = m_\alpha \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\alpha}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i}\right) - m\mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i}. \tag{33.59}$$

Transformacija ovog izraza je formalnog karaktera kada se u delu koji se odnosi na Lagranževe jednačine materijalne čestice izvrši striktna zamena $\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}_\alpha$ i $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r}_\alpha$. Pokažimo to.

Tako, iz

$$\mathbf{v}_\alpha = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t},$$

sledi da je

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i}.$$

Takođe je

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i + \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i}\right)\dot{x}^j + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i}.$$

Smenom ovih izraza u (33.59) dobijamo

$$\begin{aligned} m_\alpha \mathbf{a}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i} &= m_\alpha \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\alpha}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial x^i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial \dot{x}^i}\right) - m\mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial x^i} = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha\right)}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha\right)}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Nas interesuje (33.58) u konačnom obliku. Po definiciji je

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha \tag{33.60}$$

kinetička energija sistema i jednačina (33.58) postaje

$$\delta W = Q_i\,\delta x^i - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i}\right)\delta x^i = 0.$$

Onda je, s obzirom na proizvoljnost δx^i,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = Q_i. \qquad (33.61)$$

Ove jednačine su tražene **Lagranževe jednačine druge vrste**.

33.8 Potencijalna i irotaciona sila

Definicija

Za vektorsko **polje** $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ kaže se da je **potencijalno**, ako je gradijent skalarne funkcije U, tj.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathrm{grad} U = \nabla U, \tag{33.62}$$

a skalarna funkcija U **potencijal** od $\mathbf{F}$.

Očigledno da je U određeno do na aditivnu konstantu. Značaj potencijlnog polja se vidi iz činjenice da je polje u potpunosti određeno preko jedne skalarne funkcije, potencijala. Ako je $\mathbf{F}$ sila i ako ima potencijal, onda se kaže da je **konzervativna**.

Teorema 8

Ako je polje $\mathbf{F}$ određeno u jednostruko povezanoj oblasi D preko jedne funcije potencijala, onda njen integeral

$$\int_{M_0}^{M_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

ne zavisi od puta integracije i zavisi samo od krajnjih tačaka M_0 i M_1 integracije.

Dokaz

$$\int_{M_0}^{M_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{M_0}^{M_1} \nabla U \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{M_0}^{M_1} \mathrm{d}U = U(M_1) - U(M_0). \tag{33.63}$$

Teorema 9

Vektorsko polje $\mathbf{F}$, definisano u jednostruko povezanoj oblasi D, je potencijalno akko je **irotaciono**, tj,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \tag{33.64}$$

Dokaz

Ako je $\mathbf{F}$ potencijalno polje i $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla U$, onda je

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla U = \mathbf{0}.$$

Obrnuto, ako je $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, onda je, na osnovu Stoksove teoreme,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}a = 0,$$

za proizvoljnu zatvorenu krivu liniju ∂S na S. Prema tome, mora biti

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Kratka analiza jednačina (33.61)

Ako su $\mathbf{F}_\alpha$ konzervativne sile, tj. ako se izražavaju preko funkcije potencijala $U(\mathbf{r}_\alpha(x^i,t),t) = V(x^i,t)$, biće

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}. \tag{33.65}$$

Definišimo **Lagranžijan** $L = T + V$. Onda Lagranževe jednačine (33.60) glase

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \tag{33.66}$$

Međutim, u opštem slučaju, generalisane sile nisu potencijalne. Drugačije rečeno,

$$Q_i = Q_i^p + Q_i^d, \tag{33.67}$$

gde je Q_i^p njen potencijalni deo, za koji važi (33.65), i Q_i^d njen disipativni deo. Onda (33.61) postaje

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = Q_i^d. \tag{33.68}$$

Uočimo da je u svakom slučaju Lagranžijan L funkcija skupa promenljivih x^i, $\dot{x}^i$ i t, tj.

$$L = L(x^i, \dot{x}^i, t). \tag{33.69}$$

33.9 Invarijantnost Ojler-Lagranževih jednačina

Već smo se susretali sa sledećim problemom.

Neka je data *Lagranževa funkcija* $L(x^i, \dot{x}^i)$ klase C^2 od $2N$ nezavisno promenljivih. Neka su na krivoj $C : x^i = x^i(t)$ tačke P i Q koje odgovaraju vrednostima paramatera t_1 i t_2. Definišimo Lagranžijan

$$J(C) = \int_{t_1}^{t_2} L(x^i(t), \dot{x}^i(t))\, \mathrm{d}t. \tag{33.70}$$

Očigledno je da vrednost integrala $J(C)$ zavisi od izbora krive C koja prolazi kroz tačke P i Q. Problem varijacionog računa se odnosi na određivanje uslova koje kriva mora zadovoljavati kako bi integral $J(C)$ imao ekstremnu vrednost, u odnosu na sve druge krive koje prolaze kroz tačke P i Q. Varijacioni problem ovog tipa često se javlja u mnogim oblastima matematike, fizike, a posebno mehanike.

Mi smo ovde naveli dva problema: određivanje geodezijske linije i minimalne površi.

Nas sada interesuje isti problem u odnosu na koordinatnu transformaciju

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j), \tag{33.71}$$

pod pretpostavkom da je integral (33.70) invarijantan pri toj transformaciji.

Kao i do sada važe sledeći izrazi:

$$\dot{x}^k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p}\dot{\bar{x}}^p = \dot{x}^k(\bar{x}^p, \dot{\bar{x}}^p), \quad \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{\bar{x}}^p} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p}, \quad \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \bar{x}^p} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q}\dot{\bar{x}}^q. \tag{33.72}$$

Pretpostavka da je integral (33.70) invarijantan pri transformaciji (33.71) je ekvivalentan zahtevu da je L skalar u odnosu na istu transformaciju. Ako označimo sa $\bar{L}(\bar{x}^i, \dot{\bar{x}}^i)$ Lagranžijan $L(x^i, \dot{x}^i)$ u odnosu na koordinate $\bar{x}^p$, onda je

$$\bar{L}(\bar{x}^i, \dot{\bar{x}}^i) = L(x^i(\bar{x}^p), \dot{x}^i(\bar{x}^p, \dot{\bar{x}}^p)). \tag{33.73}$$

Jasno je da (33.73) mora da važi za sve vrednosti $(\bar{x}^i, \dot{\bar{x}}^i)$.

Diferenciranjem (33.73) po $\dot{\bar{x}}^p$, nalazimo da je

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{x}}^p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{\bar{x}}^p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}, \tag{33.74}$$

gde smo koristili $(33.72)_2$. Odavde se vidi da je $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$ kovarijantni vektor.

Diferenciranjem (33.72) po $\bar{x}^p$, dobijamo da je

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}^p} = \frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \bar{x}^p} = \frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^p} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q}\dot{\bar{x}}^q.$$

Odavde se vidi da $\frac{\partial L}{\partial x^i}$ nema tenzorski karakter, nije tenzor. To je posledica zavisnosti $L(x^i, \dot{x}^i)$ od $\dot{x}^i$. Njegov tenzorski karakter remeti član $\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q}$.

Takav član se pojavljuje kada se $\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{x}}^p}$ diferencira po t. Onda je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{x}}^p}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^p}\dot{\bar{x}}^q.$$

Oduzimanjem od prethodnog izraza dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{x}}^p}\right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}^p} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i}\right]\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}. \tag{33.75}$$

Prema tome, sistem prvog reda

$$E_i(L) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} \tag{33.76}$$

je kovarijantni vektor. Može se interpretirati kao generalisani gradijent Lagranžijana L. U literaturi je poznat pod imenom **Ojler-Lagranžev vektor** od L. U razvijenom obliku glasi

$$E_i(L) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\ddot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j}\dot{x}^j - \frac{\partial L}{\partial x^i}. \tag{33.77}$$

N Pod datim uslovima Ojler - Lagranžove jednačine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \tag{33.78}$$

ostaju očuvane pri koordinatnoj transformaciji (33.71), što se vidi iz (33.74).

Znači, imaju tenzorski karakter. Iz (33.77) se dobijuju u razvijenom obliku

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\ddot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j}\dot{x}^j - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \tag{33.79}$$

kao sistem diferencijalnih jednačina drugog reda.

33.10 Teorema Neterove

Pokazali smo da su Ojler-Lagranževe jedančine invarijantne pri koordinatnoj transformaciji $\bar{x}^i \quad \Rightarrow \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j)$. Pri tome smo polazili od invarijantnosti integrala

$$J(C) = \int_{t_1}^{t_2} L(x^i(t), \dot{x}^i(t))\, \mathrm{d}t. \tag{33.80}$$

Od interesa je razmatrati invarijantnost integrala

$$J(C) = \int_C L(t, x^i(t), \dot{x}^i(t))\, \mathrm{d}t \tag{33.81}$$

pri opštoj neprekidnoj transformaciji koordinata x^j i vremena t oblika

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= \bar{x}^i(t, x^j, w^\alpha), \\ \bar{t} &= \bar{t}^i(t, x^j, w^\alpha), \end{aligned} \tag{33.82}$$

$i, j = 1, \ldots, n$, $\alpha = 1, \ldots, r$. Pretpostavlja se da su parametri w^α međusobno nezavisni i da za $w^\alpha = 0$ izrazi u (33.82) prestacljaju identičnu transformaciju, $\bar{x}^i = x^i$ i $\bar{t} = t$. Pod tim uslovom razvijanjem u red transformacija (33.82) glase

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= x^i + \zeta^i_\alpha(t, x^j) w^\alpha + \frac{1}{2}\zeta^i_{\alpha\beta}(t, x^i) w^\alpha w^\beta + \cdots, \\ \bar{t} &= t + \xi_\alpha(t, x^j) w^\alpha + \frac{1}{2}\xi_{\alpha\beta}(t, x^i) w^\alpha w^\beta + \cdots \end{aligned} \tag{33.83}$$

Jasno je da je

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial w^\alpha}\right)_{w^\alpha = 0} = \zeta^i_\alpha, \quad \left(\frac{\partial t}{\partial w^\alpha}\right)_{w^\alpha = 0} = \xi_\alpha, \tag{33.84}$$

gde se zavisnost koeficijente razlaganja od x^i i t podrazumeva.

Iz (33.82) slede sledeci izrazi na koje se pozivamo

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_{w^\alpha=0} = \delta^i_j, \quad \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial t}\right)_{w^\alpha=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x^j}\right)_{w^\alpha=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)_{w^\alpha=0} = 1, \\ &\left(\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial w^\alpha \partial x^j}\right)_{w^\alpha=0} = \frac{\partial \zeta^i_\alpha}{\partial x^j} \quad \left(\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial w^\alpha \partial t}\right)_{w^\alpha=0} = \frac{\partial \zeta^i_\alpha}{\partial t} \\ &\left(\frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial w^\alpha \partial x^j}\right)_{w^\alpha=0} = \frac{\partial \xi^i_\alpha}{\partial x^j} \quad \left(\frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial w^\alpha \partial t}\right)_{w^\alpha=0} = \frac{\partial \xi^i_\alpha}{\partial t}. \end{aligned} \tag{33.85}$$

Zahtevamo da je integral (33.81) invarijantan pri transformacijama (33.82) duž proizvoljne krive C, tj. da je

$$\int_C L\left(\bar{t},\bar{x}^i,\frac{\mathrm{d}\bar{x}^i}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)\mathrm{d}\bar{t} = \int_C L(t,x^i(t),\dot{x}^i(t))\,\mathrm{d}t.$$

Potreban i dovoljan uslov za to je da je

$$L\left(\bar{t},\bar{x}^i,\frac{\mathrm{d}\bar{x}^i}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t} = L(t,x^i(t),\dot{x}^i(t)) \tag{33.86}$$

za bilo koji skup parametara w^α pa prema tome i za $w^\alpha = 0$. Uočimo da je desna strana ovog izraza nezavsna od w^α, pa je

$$\frac{\partial}{\partial w^\alpha}\left[L\left(\bar{t},\bar{x}^i,\frac{\mathrm{d}\bar{x}^i}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t}\right] = 0.$$

U razvijenom obliku u slučaju kada je $w^\alpha = 0$, svodi se na izraz

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial L}{\partial t}\left(\frac{\partial\bar{t}}{\partial w^\alpha}\right)_{w^\alpha=0}\frac{\partial L}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial w^\alpha}\right)_{w^\alpha=0}+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}\frac{\partial}{\partial w^\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}^i}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)_{w^\alpha=0}\right]+&\\ +L\frac{\partial}{\partial w^\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t}\right)_{w^\alpha=0}&\end{aligned} \tag{33.87}$$

Ostaje nam da odredimo još članove

$$\frac{\partial}{\partial w^\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}^i}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)_{w^\alpha=0} \quad \text{i} \quad \frac{\partial}{\partial w^\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)_{w^\alpha=0}.$$

Računica se znatno uprošćava ako se iz (33.82) izrazi t u funkciji $\bar{t}$ i ima u vidu da je w^α nezavisna promeljiva (Videti D. Lovelock, Hanno Rund, str. 203-204). Onda je

$$\frac{\partial}{\partial w^\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}^i}{\mathrm{d}\bar{t}}\right) = ...$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial w^\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}} - \frac{\mathrm{d}\bar{x}^i}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t}\right)^{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\bar{t}}{\partial w^\alpha}.$$

Koristeći odgovarajuće izraze iz (33.85) sledi da je

$$\frac{\partial}{\partial w^\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}^i}{\mathrm{d}t}\right)_{w^\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial w^\alpha}\right)_{w^\alpha=0} - \left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}^i}{\mathrm{d}t}\right)_{w^\alpha=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\bar{t}}{\partial w^\alpha}\right)_{w^\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}\zeta^i_\alpha}{\mathrm{d}t} - \dot{x}^i\frac{\mathrm{d}\xi_\alpha}{\mathrm{d}t}. \tag{33.88}$$

Na isti način se pokazuje da je

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}w^\alpha}\right)_{w^\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\bar{t}}{\partial w^\alpha}\right)_{w^\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}\xi_\alpha}{\mathrm{d}t}. \tag{33.89}$$

Senom ovih izraza i

$$\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial w^\alpha}\right)_{w^\alpha=0} \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial w^\alpha}\right)_{w^\alpha=0}$$

u (33.87) dobijamo da je

$$\frac{\partial L}{\partial t}\,\xi_\alpha + \frac{\partial L}{\partial x^i}\,\zeta^i_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\left(\frac{\mathrm{d}\zeta^i_\alpha}{\mathrm{d}t} - \dot{x}^i\,\frac{\mathrm{d}\xi_\alpha}{\mathrm{d}t}\right) + L\,\frac{\mathrm{d}\xi_\alpha}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{33.90}$$

koji izražava neophodan uslov zahteva invarijantnosti integrala (33.81).

U literaturi se ovaj izraz naziva **identitet invarijantnosti** (invariance identity).

33.10.1 Neterina teorema

Znamo da je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(t,x^i(t),\dot{x}^i(t)) = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial x^i}\,\dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\ddot{x}^i,$$

odnosno

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\ddot{x}^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(t,x^i(t),\dot{x}^i(t)) - \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial x^i}\,\dot{x}^i.$$

Onda se (33.90) može svesti na pogodniji oblik. Pri tome koristimo i sledeće izraze

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{\mathrm{d}\zeta^i_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\zeta^i_\alpha\right) - \zeta^i_\alpha\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\left(\dot{x}^i\,\frac{\mathrm{d}\xi_\alpha}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}^i\,\xi_\alpha\right) - \xi_\alpha\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\dot{x}^i\,\xi_\alpha\right) - \dot{x}^i\,\xi_\alpha\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \xi_\alpha\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i.$$

Smenom ovih izraza u (33.90), i posle sredjivanja tako dobijenih članova, dobija se

$$\left[\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\right]\,\zeta^i_\alpha - \left[\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\right]\,\dot{x}^i\,\xi_\alpha + + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\xi_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\zeta^i_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\dot{x}^i\,\xi_\alpha\right] = 0$$

ili , kompaktnije,

$$\left[\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\right]\,\zeta^i_\alpha - \dot{x}^i\,\xi_\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\xi_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\zeta^i_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\dot{x}^i\,\xi_\alpha\right] = 0.$$

Ako se iskoristi izraz za Ojler-Lagranžeov vektor

$$E_i(L) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i}$$

onda je

$$E_i(L)\left(\zeta^i_\alpha - \dot{x}^i\xi_\alpha\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\xi_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\zeta^i_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\dot{x}^i\,\xi_\alpha\right]. \tag{33.91}$$

Time smo praktično dokazali jedno od veoma bitnih teorema.

Teorema 10 (Teorema Neterove.)

Ako je integral (33.81) invarijantan pri dejstvu r parametraske familije transformacija (33.83) onda postoji r različitih kombinacija Ojler-Lagranžeovih jedanačina i $E_i(L)$ koje su totalni diferencijali. Ako funkcija Lagražijana prestavlja rešenje Ojler-Lagranžeovih jedanačina, onda su

$$L\xi_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\zeta^i_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\dot{x}^i\,\xi_\alpha = \text{const.}$$

i prestavljaju **zakone konzervacije**.

34. Ležandrova transformacija

34.1 Ležandrova transformacija

Ležandrova[1] **transformacija** se uglavnom koristi u dve oblasti fizike:

1. u klasičnoj mehanici, kada se prelazi iz Lagranževe dinamike u Hamiltonovu dinamiku, i
2. u termodinamici, kada se uspostavlja veza između unutrašnje energije, entalpije i Gibsove i Helmoholčeve slobodne energije.

Vrlo često se zanemaruje, ili predstavlja na komplikovan matematički način. Pokušaćemo ovde da je damo na jedan relativno jednostavan i elegantan način.

Definicija

Ležandrova transformacija prevodi funkciju jednog skupa promenljivih u drugu funkciju konjugovanog skupa promenljivih. Obe funkcije imaju iste merne jedinice.

[1] Legendre

34.2 Kako se Ležandrova transormacija određuje

Osnovna ideja je pravilo proizvoda. Ako su x, y konjugovani par promeljivih onda

$$\mathrm{d}(\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}) = \mathrm{x}\mathrm{d}\mathrm{y} + \mathrm{y}\,\mathrm{d}\mathrm{x}$$

povezuje varijaciju dy (uz promenljivu x) sa varijacijom dx (uz promenljivu y).

34.3 Matematički formalizam

Posmatrajmo funkciju dveju promeljivih, npr. $f(x, y)$. Onda je

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Uvedimo oznake

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{i} \quad w = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Sada je

$$\mathrm{d}f = u\,\mathrm{d}x + w\,\mathrm{d}y. \tag{34.1}$$

Veličine u i x nazvaćemo **konjugovani par** promenljivih. Isto važi i za par w i y.
Formirajmo

$$\mathrm{d}(wy) = w\mathrm{d}y + y\mathrm{d}w$$

i oduzmimo ga od (34.1). Onda je

$$\mathrm{d}(wy) - \mathrm{d}f = \mathrm{d}(wy - f) = -u\mathrm{d}x + y\mathrm{d}w,$$

ili

$$\mathrm{d}g = -u\mathrm{d}x + y\mathrm{d}w, \tag{34.2}$$

gde je

$$g = wy - f, \tag{34.3}$$

ili

$$g(x, w) = w \cdot y(x, w) - f(x, y(x, w)),$$

pod uslovom da iz

$$w = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad y = y(x, w).$$

Očigledno je da je ovako uvedena funkcija g funkcija od x i w, što se vidi iz njenog diferencijala.

Rezime. Formirali smo Ležandrovu transformaciju od originalne funkcije $f(x, y)$ na funkciju $g(x, w)$ prelaskom sa promenljive y na promeljivu w. Takođe smo mogli da pređemo sa x na u i tako dobili funkciju $h(u,y)$, ili prelaskom obe promeljive i dobili funkciju $k(u,w)$. Za funkciju dve promenljive postoje 4 moguće varijante. U slučaju kada imamo 3 nezavisno promenljive veličine, postoje 8 potencijala, ili u opstem slučaju 2^n za funkciju od n nezavisno promenljivuh, pošto svaka promenljiva može biti član konjugovanog para.

34.3.1 Ležandrova transformacija Lagranžijana L i Hamiltonijan H

Posmatrajmo mehanički sistem koji je određen generalisanim koordinatama $\mathbf{q}$ i generalisanim brzinama $\dot{\mathbf{q}}$. Njegov Lagranžijan $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ je definisan razlikom kinetičke i potencijalne energije

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = K - U,$$

gde je $K = K(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$, a $U(\mathbf{q})$. Onda je

$$\mathrm{d}L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\cdot \mathrm{d}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\mathrm{d}\mathbf{q}.$$

Uvedimo oznaku

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}},$$

tako da je

$$\mathrm{d}L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{p}\cdot \mathrm{d}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\mathrm{d}\mathbf{q}. \tag{34.4}$$

Dalje, pretpostvljamo da je

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}\otimes\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) \neq 0,$$

jer je samo tada moguće odrediti $\dot{\mathbf{q}}$ u funkciji $\mathbf{p}$, tj. $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}(\mathbf{q},\mathbf{p})$. Veličina $\mathbf{p}$ je tada konjugovana veličini $\dot{\mathbf{q}}$. Drukčije rečeno $\dot{\mathbf{q}},\mathbf{p}$, je konjugovani par.

Odredimo $\mathrm{d}(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{p})$. Sledi

$$\mathrm{d}(\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{p}) = \mathrm{d}\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{p} + \dot{\mathbf{q}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{p}.$$

Iz ovog izraza i (34.4) dobijamo

$$\mathrm{d}(\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{p}) - \mathrm{d}L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathrm{d}(\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{p} - L) = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{p}.$$

Uvedimo funkciju

$$H = \dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{p} - L.$$

Onda je

$$\mathrm{d}H = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}}\mathrm{d}\mathbf{p},$$

odakle se vidi da je H funkcija promrnljivih $\mathbf{q}$ i $\mathbf{p}$.

Ležandrova transformacija

$$H = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - L, \quad \dot{\mathbf{q}} = h(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{34.5}$$

je poznata **Hamiltonova funkcija**.

34.3.2 Ležandrova transformacija u Termodinamici

I) Po pravilu Ležandrove transformacije se koriste u Termodinamici za određivanje raznih fizičkih veličina koje se nazivaju **termodinamički potencijali**.

Pretpostavimo da nam je dat termodinamički sistem za koji biramo nezavisno promenljive: entropiju S i zapreminu V. Onda važi termodinamički identitet

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V, \tag{34.6}$$

gde su T i P temperatura i pritisak, redom. Iz ovog izraza se vidi da je $U = U(S,V)$. Onda je

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{\partial U}{\partial V}\mathrm{d}V,$$

odakle, i iz (34.6), sledi da je

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad \text{i} \quad P = -\frac{\partial U}{\partial V}$$

i da su (T,S) i par (P,V) konjugovani parovi.

II) Želimo da transformišemo $U(S,V)$, koristeći konjugovani par (P,V), u novi termodinamički potencijal - entalpiju $H(S,P)$. Trivijalno je

$$\mathrm{d}(PV) = V\,\mathrm{d}P + P\,\mathrm{d}V.$$

Odavde, i iz (34.6), sledi da je

$$\mathrm{d}U + \mathrm{d}(PV) = \mathrm{d}(U + PV) = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}P,$$

ili

$$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}P,$$

gde je

$$H = U + PV, \tag{34.7}$$

ili potpunije

$$H(S,P) = U(S,P) + PV(S,P).$$

III) U slučaju konjugovanog para (T, S) imamo da je

$$\mathrm{d}(TS) = T\mathrm{d}S + S\mathrm{d}T.$$

Onda je, imajući u vidu (34.6),

$$\mathrm{d}U - \mathrm{d}(TS) = \mathrm{d}(U - TS) = -S\mathrm{d}T - P\mathrm{d}V,$$

ili

$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - P\mathrm{d}V,$$

gde je

$$F = U - TS. \tag{34.8}$$

Helmholcova slobodna energija.

Kompletnije

$$F(T,V) = U(T,V) - TS(T,V).$$

IV) U slučaju konjugovanog para (P,V) biće

$$\mathrm{d}F + \mathrm{d}(PV) = \mathrm{d}(F + PV) = -S\mathrm{d}T + P\mathrm{d}V,$$

gde je

$$G = F + PV \tag{34.9}$$

Gibsova slobodna energija.

Kompletnije,

$$G(T,P) = F(T,P) + PV(T,P).$$

Izražena preko unutrašnje energije glasi

$$G(T,P) = U - TS + PV.$$

34.4 Hamiltonov formalizam

Lagranžeov formalizam dovodi do diferencijalnih jednačina drugog reda (ODE). Nasuprot tome, **Hamiltonov formalizam** daje jednacine kretanja prvog reda i prema tome daje mogućnost uvođenja tečenja (flows) u faznom prostoru (Uvodimo ga kasnije). Još važnije, može da se koristi simplekstična struktura u Hamiltonovom formalizmu.

Pretpostavimo da je dat Lagranžijan $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, u odnosu na koji su jednačine kretanja materijalnog sistema date sa Ojler-Lagranžeovim jednačinama:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \tag{34.10}$$

Njemu odgovarajući Hamiltonian glasi

$$H(q,p) = p_k \dot{q}^k - L(q^i, \dot{q}^i) \tag{34.11}$$

gde se $\dot{q}^k$ zamenjuje sa p_k (moment količina kretanja), korišćenjem Ležandrove transforamcije (po definiciji)

$$p_i \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \tag{34.12}$$

Ova transformacija $p \rightleftarrows \dot{q}$ moguća je samo ako je Jakobijan transformacije

$$\det\left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^i}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) \neq 0. \tag{34.13}$$

Prostor sa koordinatama q^k, p_k, naziva se **fazni prostor**.

Posmatrajmo infinetizimalnu promenu u Hamiltonijanu izazvanu sa $\mathrm{d}q^k$ i $\mathrm{d}p_k$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \mathrm{d}p_k \dot{q}^k + p_k \,\mathrm{d}\dot{q}^k - = \\ &= \frac{\partial H}{\partial q^k}\mathrm{d}q^k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\mathrm{d}p_k. \end{aligned}$$

Onda je

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}^k, \quad \frac{\partial H}{\partial q^k} = -\frac{\partial L}{\partial q^k}, \tag{34.14}$$

što ne prestavlja ništa drugo nego zamenu promenljivih (q^k, p_k) sa $(q^i, \dot{q}^i)$.

Hamiltonove jednačine kretanja se dobijaju iz ovih jednačina, ako se drugi sistem jedančina zameni korišćenjem Ojler-Lagranžovih jednačina:

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k}. \tag{34.15}$$

■ Primer 34.1 ■

Posmatrajmo jednodimenzionalni harmonijski oscilator, čiji je Lagranžijan dat sa

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}w^2 q^2,$$

gde je $w^2 = \frac{k}{m}$.

Količina kretanja koja odgovatra (conjugate) koordinati q je

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q},$$

koja može da se reši po $\dot{q}$. Tačnije, $\dot{q} = \frac{p}{m}$. Onda je Hamiltonova funkcija data sa

$$H(q,p) = p\dot{q} - L(q,\dot{q}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2 q^2,$$

a njoj odgovarajuće jednačine kretanja sa

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -mw^2 q.$$

(Odgovarajuća jedančina harmonijskog oscilatora sada glasi $\ddot{q}^2 + \omega^2 q = 0$.)

Poason[2] posmatra dve funkcije $A(q,p)$ i $B(q,p)$ definisane na faznom prostoru Hamiltonijana $H(q,p)$ i definiše **Hamiltonovu zagradu** $[A,B]$ sa

$$[A,B] = \frac{\partial A}{\partial q^k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q^k}. \tag{34.16}$$

Lako je pokazati da je Poasonova zagrada Liova zagrada koja ima sledeća svojstva:

$$[A, c_1B_1 + c_2B_2] = c_1[A,B_1] + c_2[A,B_2], \tag{a}$$
$$[A,B] = -[B,A], \tag{b}$$
$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0. \tag{c}$$

Fundamentalne Poasonove zagrade su:

$$[p_i, p_j] = 0, \quad [q^i, q^j] = 0, \quad [q^i, p_j] = \delta^i_j. \tag{d}$$

Važno je uočiti da se izvod po vremenu f-je $A(q,p)$ izražava preko Poasonove zagrade:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial A}{\partial p_k}\dot{p}_k = \frac{\partial A}{\partial q^k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q^k} = [A,H]. \tag{34.17}$$

Specijalno, ako je $[A,H] = 0$, onda je $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0$. Tada se za veličinu A kaže da je **konzervativna**. Interesantno je da se Hamiltonove jednačine takođe izrazavaju preko Poasonove zagrade:

$$\dot{q}^k = \left[q^k, H\right], \quad \dot{p}_k = [p_k, H]. \tag{34.18}$$

Teorema 34.4.1 — (Neterina teorema). Klasičan prilaz

Neka je $L(q^i, \dot{q}^i)$ i funkcija koja ne zavisi ekpicitno od vremena, tj. invarijantna u odnosu na vreme. Onda je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(q^i,\dot{q}^i) = \frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i = \frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\dot{q}^i =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\dot{q}^i.$$

[2] Poissaon

Pod pretpostavkom da funkcija $L(q^i, \dot{q}^i)$ zadovoljava Lagražove jednačine, ova jednakost se svodi na izraz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L\right) = 0,$$

odakla sledi da je

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L = \text{const.}$$

Njegovo fizičko tumačenje je: predstavlja **zakon konzervacije**.

Sa matematičkog stanovišta prestavlja prvi integral Lagranžeove jedančine.

■ **Primer 34.2** Posmatrajmo kretanje čestice u ravni pod dejstvom aksijalno simetričnog potencijala $V(r)$. Onda je Lagranžeova fukcija data izrazom

$$L(q^i, \dot{q}^i) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2\right) - V(r),$$

gde je $q^i(r, \theta)$ i $\dot{q}^i(\dot{r}, \dot{\theta})$. Tada je

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2\right) + V(r) = \text{const.}$$

traženi zakon konzervacije. ■

Teorema 11

Neka je $H(q^k, p_k)$ Hamiltonijan invarijantan pri infenititezimalnoj koordinatnoj transformaciji

$$q^k \to q'^k = q^k + \varepsilon f^k(q). \tag{34.19}$$

Onda je

$$Q = p_k f^k \tag{34.20}$$

konzervativno.

Dokaz.

Jakobijan transformacije je

$$\frac{\partial q'^k}{\partial q^l} \approx \delta^k_l + \varepsilon\frac{\partial f^k}{\partial q^l},$$

odakle sledi da je

$$\frac{\partial q^l}{\partial q'^k} \approx \delta^l_k - \varepsilon\frac{\partial f^l}{\partial q^k}$$

do na $0(\varepsilon)$. Količina kretanja p_k (vektorska veličina za razliku od kordinata q^k) se transformise po zakonu

$$p'_k = \frac{\partial q^l}{\partial q'^k} p_l \approx \left(\delta^l_k - \varepsilon \frac{\partial f^l}{\partial q^k}\right) p_l = p_k - \varepsilon \frac{\partial f^l}{\partial q^k} p_l.$$

Onda je

$$\begin{aligned} H\left(q'^k, p'_k\right) &= H\left(q^k + \varepsilon f^k(q) p_k - \varepsilon \frac{\partial f^l}{\partial q^k} p_l\right) \approx H(q^k, p_k) + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial q^k} f^k(q) - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f^l}{\partial q^k} p_l = \\ &= H\left(q^k, p_k\right) + \varepsilon \left(\frac{\partial H}{\partial q^k} f^k(q) - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f^l}{\partial q^k} p_l\right). \end{aligned}$$

Iz (34.20) sledi da je $f^k = \dfrac{\partial Q}{\partial p_k}$ i da je $\dfrac{\partial f^i}{\partial q^k} p_i = \dfrac{\partial Q}{\partial q^k}$. Onda je

$$H\left(q'^k, p'_k\right) \approx H(q^k, p_k) + \varepsilon \left(\frac{\partial H}{\partial q^k} \frac{\partial Q}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial Q}{\partial q^k}\right) = H(q^k, p_k) + \varepsilon [H, Q] = H(q^k, p_k) + \varepsilon \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

Prema uslovu teoreme $H\left(q'^k, p'_k\right) = H\left(q^k, p_k\right)$, pri (34.19). Prema tome je

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0,$$

tj. $Q = p_k f^k$ je konzervativno.

Važan zaključak. Ova teorema pokazuje da nalaženje konzervativne veličine je ekvivalentno nalaženju transformacije koja ostavlja Hamiltonijan invarijantnim. S druge strane konzervisana veličina Q je "generator"transformacije koju smo u ovom primeru koristili. U stvari,

$$\left[q^i, Q\right] = \left(\frac{\partial q^l}{\partial q^k} \frac{\partial Q}{\partial p_k} - \frac{\partial q^i}{\partial p_k} \frac{\partial Q}{\partial q^k}\right) = \frac{\partial Q}{\partial p_i} = f^i,$$

što pokazuje da je $\delta q^i = \varepsilon f^i(q) = \varepsilon \left[f^i(q)\right]$.

Navedimo neke primere.

■ **Primer 34.3** Neka je $H = \frac{p^2}{2m}$ slobodne čestice. Kako H ne zavisi od q, onda je H invarijantno pri $q \to q + \varepsilon$. Prema $Q = p \cdot 1 = p$ je konzevisano. Ona se u ovom slučaju identifikuje sa količinom kretanja. ■

■ **Primer 34.4** Posmatramo Lagrange-ovu fukcija iz Primera 34.2:

$$L(r, \theta) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right) - V(r).$$

Onda je

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \text{i} \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{r}^2 \dot{\theta}.$$

Hamiltonijan je sada

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r).$$

Očigledo je da je ovaj Hamiltonijan nezvisan od q i invarijantan je pri transformaciji

$$\theta \to \theta + \varepsilon, \quad p_\theta \to p_\theta.$$

Prema tome

$$Q = p_\theta \cdot 1 = mr^2\dot{\theta}$$

je konzervativna veličina. Njeno fizičko značenje je količina kretanja. ■

34.4.1 Nestandardna Ležandrova transformacija

Do sada smo razmatrali standardnu Ležandrovu transformaciju, koja prevodi Lagranževu funkciju $L(q^i, \dot{q}^i)$ u Hamiltonovu funkciju $H(q^k, p_k)$. Cilj nam je da konstruišemo ne standardne funkcije koje će zavisiti od $p_k, \dot{p}_k$.

1. U tom cilu pogodno je poći od Hamiltonove jedančine

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k}.$$

Pretpostavljamo da je $H(q^k, p_k)$, regularna funkcija i invertibilna po q^k.

Istim postupkom kao do sada formiramo izraze:

$$\mathrm{d}\left(q^k\dot{p}_k\right) = q^k\,\mathrm{d}\dot{p}_k + \dot{p}_k\,\mathrm{d}q^k,$$

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial q^k}\,\mathrm{d}q^k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\,\mathrm{d}p_k = -\dot{p}_k\,\mathrm{d}q^k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\,\mathrm{d}p_k.$$

Onda je

$$\mathrm{d}(H + q^k\,\dot{p}_k) = \frac{\partial H}{\partial p_k}\,\mathrm{d}p_k + q^k\,\mathrm{d}\dot{p}_k.$$

Uvedimo oznaku

$$Q = H + q^k\dot{p}_k.$$

Očigledno je $Q = Q(p_k, \dot{p}_k)$ novi potencijal.

Lako je pokazati da je

$$\mathrm{d}Q = \dot{q}^k\,\mathrm{d}p_k + q^k\,\mathrm{d}\dot{p}_k,$$

pa je prema tome

$$q^k = \frac{\partial Q}{\partial \dot{p}_k},$$

$$\dot{q}^k = \frac{\partial Q}{\partial p_k}.$$

Odavde se dobija sistem Lagranžeovih jednačina

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q}{\partial \dot{p}_k} - \frac{\partial Q}{\partial p_k} = 0.$$

Prema tome funkcije $H(q^k, p_k)$ i $Q = Q(p_k, \dot{p}_k)$ su, što se tiče Lagranžeovih jednačina, dualne.

2. Ovog puta koristimo $\dot{q}^k = -\dfrac{\partial Q}{\partial p_k}$. Onda je

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\dot{q}^k p_k) &= p_k\,\mathrm{d}\dot{q}^k + \dot{q}^k\,\mathrm{d}p_k,\\ \mathrm{d}Q = \mathrm{d}(H + q^k\,\dot{p}_k) &= \frac{\partial H}{\partial p_k}\,\mathrm{d}p_k + q^k\,\mathrm{d}\dot{p}_k = \dot{q}^k\,\mathrm{d}p_k + q^k\,\mathrm{d}\dot{p}_k,\end{aligned}$$

pa je

$$\mathrm{d}(H + q^k\,\dot{p}_k - \dot{q}^k\,p_k) = q^k\,\mathrm{d}\dot{p}_k - p_k\,\mathrm{d}\dot{q}^k.$$

Funkcija

$$J = q^k\dot{p}_k - \dot{q}^k p_k + H$$

je novi potencijal. Očigledno je $J = J(\dot{q}^k, \dot{p}_k)$.

Sada je

$$\mathrm{d}J = q^k\,\mathrm{d}\dot{p}_k - p_k\,\mathrm{d}\dot{q}^k,$$

pa je

$$\begin{aligned} q^k &= \frac{\partial J}{\partial \dot{p}_k},\\ p_k &= -\frac{\partial J}{\partial \dot{q}^k}.\end{aligned}$$

34.4.2 Neterina teorema i simetrična svojstva J i Q

Neterina teorema tvrdi da bilo kojoj simetriji Lagranžijana odgovara konzervisana veličina. U specijalnom slučaju, kada Lagranžijan ne zavisi ekslicitno od vremena standardna Ležandrove transformacija, tj, Hamiltonijan $H(q^k, p_k)$, je konstantna. Pokazaćemo da ovo važi za ovde uvedene potencijale. Tako je

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial Q}{\partial \dot{p}_k}\ddot{p}_k + \frac{\partial Q}{\partial p_k}\dot{p}_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{p}_k}\dot{p}_k\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{p}_k}\right)\dot{p}_k + \frac{\partial Q}{\partial p_k}\dot{p}_k = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{p}_k}\dot{p}_k\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial p_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{p}_k}\right)\right)\dot{p}_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{p}_k}\dot{p}_k\right),\end{aligned}$$

jer je $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial Q}{\partial \dot{p}_k} - \dfrac{\partial Q}{\partial p_k} = 0$. Prema tome je $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Q - \dfrac{\partial Q}{\partial \dot{p}_k}\dot{p}_k\right) = 0$.

Na isti način sledi da je

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial J}{\partial \dot{q}^k}\ddot{q}^k + \frac{\partial J}{\partial \dot{p}_k}\ddot{p}_k = q^k\ddot{p}_k - p_k\ddot{q}^k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(q^k\dot{p}_k - p_k\dot{q}^k\right),$$

ili

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J - \left(q^k\dot{p}_k - p_k\dot{q}^k\right)\right) = 0.$$

35. Mehanika kontinuuma

35.1 Uvod

Mehanika kontinuuma, s obzirom na predmet svog izučavanja, predstavlja nadgradnju racionalne mehanike, ili mehanike konačnog sistema materijalnih tačaka i krutih tela. Mehanika kontinuuma je deo mehanike koji izučava deformabilna tela, tj. tela kod kojih se, u opštem slučaju, rastojanja između čestica tela menjaju; ona izučava deformaciju, naponsko stanje i tečenje realnih tela, tj. čvrstih tela, tečnosti i gasova.

Osnovna pretpostavka, od koje se polazi u mehanici kontinuuma, je da je materija neprekidno raspoređena u telu. Ova pretpostavka je sadržana i u nazivu predmeta. Kako su realna tela, sa flzičkog stanovišta, korpuskularne prirode, onda mehanika kontinuuma ne izučava realna tela neposredno, nego njihove modele, kojima se pripisuju određena frzička svojstva realnih tela.

Pretpostavka o neprekidnom rasporedu materije u telu čini, sa teorijskog stanovišta, mehaniku kontinuuma teorijom polja, u smislu da su veličine koje karakterišu telo neprekidne funkcije položaja i vremena. Polja mogu biti pomeranje, gustina, sila, energija itd. Kao teorija polja, mehanika kontinuuma ima svoj jezik izražavanja

- tenzorski račun. Zaista, tenzorski račun je prirodni jezik teorije mehanike kontinuuma.

Posebno naglašavamo: kao što je bilo koji jezik više nego njegova gramatika, tako je isto i jezik tenzorske analize više od samog obeležavanja, i kao što govor čoveka odiše njegovim načinom mišljenja, tako isto tenzorski račun otelotvoruje misao, ideju. U našem slučaju to je ideja da ”fizička” suština ostaje ista, mada njen matematički opis može da se menja. Odatle sledi da mora postojati relacija između dva matematička opisa koja se odnose na istu bit, na istu suštinu, i ta relacija određuje jeziku njegov karakter. Zbog toga se mora imati uvek na umu razlika između tenzora, kao matematičkog objekta koji predstavlja fizičku suštinu, i komponenata tenzora koje imaju puni smisao samo onda kada se zna o kom koordinatnom sistemu je reč.

U najvećem delu mehanike kontinuuma, pored neprekidnosti, uvode se još dve dodatne pretpostavke o prirodi materijala: homogenost i izotropnost. Jasno je da su ove tri pretpostavke međusobno nezavisne.

Za **materijal** kažemo da je **homogen** ako poseduje identička svojstva u svim česticama. Za materijale koji nisu homogeni kažemo da su **nehomogeni**.

Materijal je izotropan u odnosu na neko svoje svojstvo ako je ono isto u svim pravcima. Za mateijale koji nisu izotropni kažemo da su **anizotropni**.

Teorija mehanike kontinuuma se logički može podeliti na tri dela:

1. **Opšti principi** primenljivi na sve vrste neprekidnih sredina. To su opšti zakoni konzervacije i balansa pojedinih fizičkih veličina koji važe za sva tela. Ti zakoni su:

a) zakon konzervacije mase,
b) balans količine kretanja,
c) balans momenta količine kretanja,
d) prvi zakon termodinamike, ili zakon balansa energije i
e) drugi zakon termodinamike, ili princip entropije.

2. **Konstitutivne jednačine** koje karakterišu pojedine materijale i njihova reagovanja na spoljne efekte sa stanovišta strukture materijala. Osnovni principi važe za sve materijale, nezavisno od njihove strukture. Zbog toga njihovi matematički izrazi nisu dovoljni da bi bilo jednoznačno određeno ponašanje materijala pri dejstvu spoljnih efekata koji se matematički definišu kao granični i početni uslovi. U cilju uzimanja u obzir strukture (konstitucije) raznih materijala, koja karakteriše ponašanje materijala, dužni smo da odredimo dodatne jednačine koje nazivamo konstitutivnim. Drugačije rečeno, svojstva materijala se uzimaju u obzir preko odgovarajućih konstitutivrih jednačina za svaki materijal sa konstitutivnim promenljivim ograničenim na domen njihove deflnisanosti. I dok su osnovni principi zajednički za čvrsta tela, fluide, viskoelastične materijale i materijale drugih fizičkih svojstava, njihove konstitutivne jednačine se bitno razlikuju. Domen definisanosti konstitutivnih promenljivih određen je odgovarajućim fizičkim svojstima materijala. Teorija konstitutivnih jednačina zasnovana je na odgovarajućim fizičkim istinama i zahtevima. Na

toj osnovi ona se dalje razvija kao matematička teorija. S obzirom da su materijali, za koje se određuju konstitutivne jednačine, predstavljeni svojim matematičkim modelima, konstitutivne jednačine definišu idealan materijal.

3. Specijalne teorije svakog idealnog materijala su zasnovane na opštim principima i konstitutivnim jednačinama tog materijala. Takve teorije su: teorija elastičnosti, mehanika fluida, teorija plastičnosti i druge. Svaki od njih, s obzirom na značaj i primenu, predstavlja oblast od zasebnog interesa.

U daljem izlaganju držaćemo se ove podele, kojoj prethode geometrijska i kinematička osnova mehanike deformabilnih tela. Fenomeni koje ćemo izučavati su nerelativistički, a prostor fizičkih događaja je trodimenzionalni Euklidski prostor $\mathbb{E}_3$.

Napominjemo da se mehanika kontinuuma oslanja na rezultate drugih grana fizike, prvenstveno statističke mehanike, s obzirom da najveći deo instrumenata meri srednje statističke vrednosti, koje karakterišu fizičke pojave. Njen pristup je direktan pri ispitivanju fizičkih pojava, pri čemu na svoj način uzima u obzir uticaj mikrostrukture materijala na makroskopske pojave. Ovo mehaniku kontinuuma čini posebnom naučnom disciplinom, koja zajedno sa drugim disciplinama, kao što su kvantna fizika, atomska flzika, termodinamika, kristalograflja itd., dovodi do potpunijeg sagledavanja suštine procesa u materiji.

35.2 Telo. Konfiguracija

Mehanika kontinuuma ne proučava realna tela neposredno. Ona razmatra matematičke modele realnih tela (koje ćemo dalje nazivati **tela**), a kojima se pripisuju određena flzička svojstva realnih tela. Jedno od svojstava realnih tela je da zauzimaju oblast prostora $\mathbb{E}_3$. Radi definisanosti kažemo:

Telo $\mathscr{B}$ je skup elemenata, koje nazivamo čestice, a koje se nalaze u obostrano jednoznačnoj korespodenciji sa tačkama $\mathbf{x}$ u oblasti $\mathbb{R}$ prostora $\mathbb{E}_3$.

Čestica X **tela** $\mathscr{B}$ je osnovni pojam u mehanici kontinuuma kojim se ističe da je materija neprekidno raspoređena u telu, pa prema tome nema značenje materijalne tačke u smislu Njutnove mehanike.

Obostrano jednoznačna korespodencija između čestica X tela $\mathscr{B}$ i tačka $\mathbf{x}$ oblasti $\mathbb{R}$ u $\mathbb{E}_3$, ostvaruje se preslikavanjem $\boldsymbol{\chi}$, tako da je

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(X), \quad X = \chi^{-1}(\mathbf{x}), \tag{35.1}$$

gde je χ^{-1} inverzno preslikavanje od $\boldsymbol{\chi}$. Tačka $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(X)$ se naziva **položaj čestice** X, koji ona zauzima u $\mathbb{R}$; $X = \chi^{-1}(\mathbf{x})$ je čestica tela $\mathscr{B}$ koja zauzima položaj $\mathbf{x}$.

Za preslikavanje $\boldsymbol{\chi}$, kojim se precizira položaj svake čestice tela $\mathscr{B}$ u $\mathbb{R}$ kažemo da određuje **konfigraciju tela** $\boldsymbol{\chi}(\mathscr{B})$. Očigledno je $\boldsymbol{\chi}(\mathscr{B}) = \mathbb{R}$.

Konfiguracija tela se menja pri kretanju tela. Iako nijedna od mogućih konfiguracija tela ne predstavlja njegovo bitno svojstvo, fizička razmatranja tela se mogu vršiti samo u odnosu na neku njegovu konfiguraciju. Za mnoge naše potrebe pogodno je da se izabere jedna potpuno određena konfiguracija, recimo $\mathbf{k}(\mathscr{B}) = B$ u $\mathbb{E}_3$, identifikujući čestice tela $\mathscr{B}$ sa njihovim položajem u B, tako da je

$$\mathbf{X} = \mathbf{k}(X), \quad X = \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{X}), \quad X \in \mathscr{B}, \quad \mathbf{X} \in B. \tag{35.2}$$

Tako izabranu konfiguraciju nazivamo **referentna konfiguracija**.

Za neku drugu referentnu konfiguraciju $\bar{\mathbf{k}}(\mathscr{B})$ biće

$$\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{k}}(X), \quad X = \bar{\mathbf{k}}^{-1}(\bar{\mathbf{X}}). \tag{35.3}$$

Iz (35.2) i (35.3) sledi da je

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{k}}(X) = \bar{\mathbf{k}}\left[\mathbf{k}^{-1}(\mathbf{X})\right] \equiv \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{X}), \\ \mathbf{X} = \mathbf{X}(\bar{\mathbf{X}}), \end{aligned} \tag{35.4}$$

čime je određena veza između dve konfiguracije pri preslikavanju $\mathbf{k} \to \bar{\mathbf{k}}$.

Referentna konfiguracija može biti bilo koja konfiguracija tela u odnosu na koju posmatramo njegovo ponašanje. U slučaju da se za referentnu konfiguraciju bira konfiguracija tela u početnom trenutku, kažemo da je reč o **početnoj konfiguraciji**.

Konfiguracija tela u posmatranom trenutku naziva se **trenutna konfiguracija**.

Vrlo često ćemo dalje, u slučaju kada se zna o kom telu je reč, umesto njegove konfiguracije $\boldsymbol{\chi}(\mathscr{B})$ pisati samo $\boldsymbol{\chi}$ i u tom slučaju se pod $\mathbf{k}$ podrazumeva njegova referentna konfiguracija $\mathbf{k}(\mathscr{B})$.

Kretanje tela $\mathscr{B}$ je jednoparametarska familija konfiguracija $\boldsymbol{\chi}_t$. Realni parametar t je vreme. Tada je

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_t(X) = \boldsymbol{\chi}(X,t). \tag{35.5}$$

Saglasno sa usvojenom terminologijom $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(X,t)$ je položaj čestice X tela u trenutku t. U odnosu na referentnu konfiguraciju $\mathbf{k}$, biće

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(X,t) = \boldsymbol{\chi}\left[\mathbf{k}^{-1}(\mathbf{X}),t\right] \equiv \mathbf{x}(\mathbf{X},t). \tag{35.6}$$

Kada želimo da naglasimo konfiguraciju $\mathbf{k}$, u odnosu na koju se posmatra kretanje, pišemo

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_k(\mathbf{X},t). \tag{35.7}$$

Prema tome jednačina (35.7) predstavlja punktualnu (tačkastu) transformaciju, referentnu konfiguraciju i trenutnu konfiguraciju. Ovu transformaciju nazivamo i **deformacija**.

35.3 Analiza deformacije i kretanja

Kada se zna o kojoj je konfiguraciji κ reč, pišemo jednostavno

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \tag{35.8}$$

ili u komponentalnoj reprezentaciji

$$x^k = x^k(X^K, t). \tag{35.9}$$

Često se u litreraturi koordinate x^k nazivaju **prostorne**, a X^K **materijalne koordinate** čestice X. Za lokalnu analizu deformacije tela u okolini čestice X dovoljno je posmatrati promenu rastojanja čestica u njenoj okolini. Formalno matematički iz (35.9) sledi da je ta promena data sa

$$\mathrm{d}x^k = \frac{\partial x^k}{\partial X^K}\,\mathrm{d}X^K = x^k_{;K}\,\mathrm{d}X^K, \tag{35.10}$$

ili

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{X}. \tag{35.11}$$

Na osnovu fizičkog **principa neprobojnosti tela**, tj. pri deformaciji tela ne dolazi do preklapanja njegovih delova, sledi da je

$$j = \det\left(x^k_{;K}\right) \neq 0. \tag{35.12}$$

Znači tenzor

$$\mathbf{F} = x^k_{;K}\,\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{G}^K, \tag{35.13}$$

gde su $\{\mathbf{g}_k\}$ i $\{\mathbf{G}_K\}$ ogovarajuće baze duž koordinatnih linija x^k i X^K, redom, je dvostruko regularno tenzorsko polje. Naziva se **gradijent deformacije**.

35.3.1 Elementi površi i zapremine

Neka su $\mathrm{d}\mathbf{X}^\alpha$, $\alpha = 1,2,3$, tri nekomplanarna linijska elementa u $\mathbf{X}$. Onda je

$$\mathrm{d}\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{X}^\alpha. \tag{35.14}$$

Po definiciji je

$$\mathrm{d}V = (\mathrm{d}\mathbf{X}^1, \mathrm{d}\mathbf{X}^2, \mathrm{d}\mathbf{X}^3) \quad \text{i} \quad \mathrm{d}v = (\mathrm{d}\mathbf{x}^1, \mathrm{d}\mathbf{x}^2, \mathrm{d}\mathbf{x}^3). \tag{35.15}$$

Onda je (videti Teoremu 5.10.2, jed. 5.10, na str. 133)

$$\mathrm{d}v = (\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{X}^1, \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{X}^2, \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{X}^3) = (\det(\mathbf{F}))(\mathrm{d}\mathbf{X}^1, \mathrm{d}\mathbf{X}^2, \mathrm{d}\mathbf{X}^3),$$

ili

$$\mathrm{d}v = J\mathrm{d}V, \tag{35.16}$$

gde je

$$J = \det(\mathbf{F}). \tag{35.17}$$

U specijalom slučaju, kada je $J = 1$, biće $\mathrm{d}v = \mathrm{d}V$. To je uvek slučaj kada je u pitanju nestišljiv fluid.

Polazeći od (35.16) izvešćemo izraz za deformaciju površinskog elementa. Pišemo ga u sledećem obliku

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = J\mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X},$$

gde su d**s** i d**S** odgovarajući površinski elementi, a d**x** i d**X** ogovarajući linijski elementi.

Koristeći (35.11) u ovom izrazu dobijamo

$$(\mathbf{F}^T\,\mathrm{d}\mathbf{s} - J\mathrm{d}\mathbf{S})\cdot\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{0},$$

odakle sledi **Natansonova formula**

$$\mathrm{d}\mathbf{s} = J\mathbf{F}^{-T}\,\mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{35.18}$$

Od posebnog interesa je materijalni izvod zapremine v. Pišemo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V,$$

ili

$$\dot{\overline{\mathrm{d}v}} = \dot{J}\,\mathrm{d}V. \tag{35.19}$$

Onda je

$$\dot{J} = \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}}.$$

Prema (9.2), str. 231,

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = J\,\mathbf{F}^{-T}, \tag{35.20}$$

pa je

$$\dot{J} = J\,\mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}}.$$

Prema (35.13) i $x^k_{;K}X^K_{;l} = \delta^k_l$, sledi da je

$$\mathbf{F}^{-1} = X^K_{;k}\,\mathbf{G}_K \otimes \mathbf{g}^k$$

i

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{x}^k_{;K}\,\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{G}^K = v^k_{,K}\,\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{G}^K.$$

Uočimo da kada je reč o materijanom izvodu po vremenu t materijalne koordinate X^K se shvataju kao konstante. Veličina $v^k = \dot{x}^k$ je brzina čestice X

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X},t).$$

Onda je, vidi Odeljak 9.0.1, str. 229,

$$\dot{J} = J\mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} = J X^K_{;k} v^k_{,K},$$

ili

$$\dot{J} = J v^k_{,k} = J \operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{35.21}$$

Smenom (35.21) u (35.19), i korišćenjem (35.16), konačno dobijamo da je

$$\dot{\overline{\mathrm{d}v}} = J \operatorname{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}V = J\,\mathrm{d}v. \tag{35.22}$$

Specijalno, za nestišljive fluide je $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

35.3.2 Rejnoldsova teorema

Neka je v stacionarna zapremina. Tada je

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v \psi\,\mathrm{d}v = \int_v \frac{\partial \psi}{\partial t}\,\mathrm{d}v. \tag{35.23}$$

U slučaju materijalne zapremine V biće

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_v \psi\,\mathrm{d}v &= \int_V \dot{\overline{\psi\,\mathrm{d}v}} = \int_V (\dot{\psi} + \psi\dot{x}^k_{,k})\,\mathrm{d}V = \\ &= \int_V \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi\dot{x}^k)_{,k}\right]\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial \psi}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \oint_S \psi\dot{x}^k\,\mathrm{d}a_k,\end{aligned} \tag{35.24}$$

s obzirom na teoremu o divergeniciji (19.9).

Sada smo u stanju da dokažemo Rejnoldsovu[1] teoremu, u literaturi poznatu pod imenom

Teorema 35.3.1 — Transportna teorema. Brzina promene ukupnog ψ u materijalnoj zapremini V, jednaka je zbiru promene ukupnog ψ u prostornoj zapremini v, koja određuje trenutni položaj V, ili položaj V u trenutku t i fluksa $\dot{x}^k$ kroz graničnu površ $\mathscr{S}(t)$ od v.

[1] Reynolds

Dokaz

Dokaz teoreme sledi iz (35.24), kada se za v izabere položaj V u trenutku t, tj.

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{v}\psi\,\mathrm{d}v=\frac{\partial}{\partial t}\int_{v}\psi\,\mathrm{d}v+\int_{\mathscr{S}(t)}\psi\dot{x}^{k}\,\mathrm{d}a_{k}=\int_{v}\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\mathrm{d}v+\oint_{\mathscr{S}}\dot{x}_{n}\,\mathrm{d}a, \tag{35.25}$$

gde $\dot{x}^k$ označava brzinu kretanja granične površi $\mathscr{S}(t)$. Ako posmatramo zapreminu $v(t)$ ograničenu sa $\mathscr{S}(t)$, koja se kreće drugom brzinom $u^k(t)$, važiće i dalje (35.25). U tom slučaju se (35.25) piše u obliku

$$\frac{\mathrm{D}_u}{\mathrm{D}t}\int_{v(t)}\psi\,\mathrm{d}v=\int_{v}\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\mathrm{d}v+\oint_{\mathscr{S}}\psi u^{k}\,\mathrm{d}a_{k}, \tag{35.26}$$

čime želimo da naglasimo da je zapremina integracije $v(t)$ materijalna u odnosu na brzinu u^k. Za $u^k=0$ dobijamo (35.23), a za $u^k=\dot{x}^k$ dobijamo (35.25). Zbog toga (35.26) predstavlja **generalisanu Rejnoldsovu teoremu**, ili **generalisanu transportnu teoremu**.

Kao ilustraciju generalisane Rejnoldsove teoreme, navodimo sledeći primer.

Posmatrajmo promenu zapremine balona po vremenu kada se naduvava. Ovako uočena zapremina nije materijalna, jer ne sadrži nepromenjen sistem materijalnih čestica, tj. vazduh. Uduvavanjem vazduha menja se materijalni sistem kao i zapremina balona koji ga obuhvata. Zbog toga promena zapremine balona ne može biti razmatrana kao materijalni izvod po vremenu. Međutim, ništa nas ne sprečava da definišemo neki fiktivan sistem čestica čije kretanje izaziva promenu zapremine balona. Jedino ograničenje, koje namećemo kretanju ovog sistema, a koje je fizički opravdano, odnosi se na brzine čestica na balonu kao granici sistema. Po definiciji, granica tela je površ kroz koju materijal ne prolazi. Zbog toga normalne komponente brzina čestica na granici moraju biti jednake normalnoj komponenti brzine granice sistema. Jasno je da je zapremina balona $v(t)$ sada zapremina fiktivnog sistema čestica ograničenog sa $\mathscr{S}(t)$, koja se kreće nekom brzinom u^k, u opštem slučaju različitom od brzine kretanja materijalnih čestica $\dot{x}^k$. U odnosu na takav fiktivni sistem, promena zapremine balona je materijalni izvod i naznačen je sa $\dfrac{\mathrm{D}_u}{\mathrm{D}t}$ u (35.26)

35.4 Transportna teorema za oblast koja sadrži singularnu površ

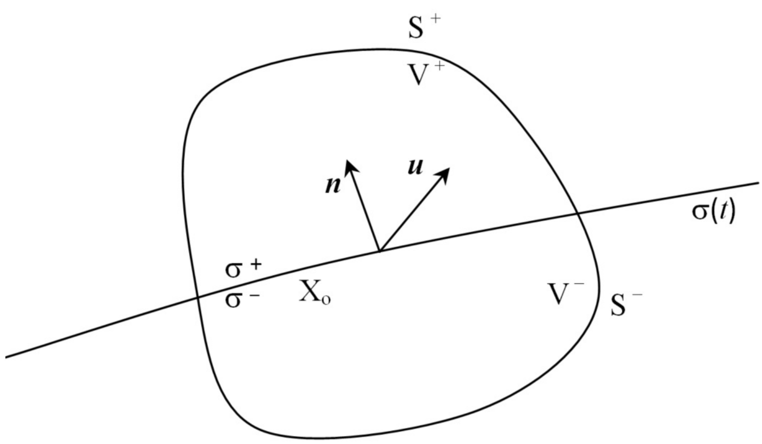
Od fundamentalnog značaja u daljim razmatranjima, ne samo u mehanici kontinuuma, nego i fizici uopšte, je **Transportna teorema**, koju izvodimo u slučaju postojanja površi diskontinuteta.

Neka je V konačna materijalna zapremina i neka je $\sigma(t)$ glatka površ koja deli V na dve oblasti V^+ i V^-. Površ $\sigma(t)$ se može kretati proizvoljnom brzinom $\mathbf{u}$, tako da u svakom trenutku deli graničnu površ S od V na dva dela S^+ i S^- (sl. 35.1). U opštem slučaju oblasti V^+ i V^-, kao i površi S^+ i S^-, nisu materijalne, jer $\sigma(t)$ je front talasa.

Neka je $\psi(x)$ tenzorska funkcija, neprekidna i diferencijabilna u unutrašnjosti V^+ i V^-, i neka teži konačnoj vrednosti ψ^+ (ψ^-) kada $\mathbf{x} \in V^+$ (V^-) teži ka $\mathbf{x}_0$ na $\sigma(t)$. U $\mathbf{x}_0$, ψ ne mora biti definisano. Skok ψ kroz $\sigma(t)$ u $\mathbf{x}_0$ obeležavamo sa

$$[\![\psi]\!] = \psi^+ - \psi^-. \tag{35.27}$$

Definicija 35.4.1 Ako je $[\![\psi]\!] \neq 0$, **površ** $\sigma(t)$ je **singularna** u odnosu na ψ.



Slika 35.1: Singularna površ.

Definišimo polje brzina

$$\mathbf{v}^+ = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}, & \text{na } S^+, \\ \mathbf{u}, & \text{na } \sigma. \end{cases} \quad \mathbf{v}^- = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}, & \text{na } S^-, \\ \mathbf{u}, & \text{na } \sigma. \end{cases} \tag{35.28}$$

Kako je površ $\sigma(t)$ u V zajednička granica V^+ i V^-, saglasno sa (35.26) možemo pisati

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int\limits_V \psi\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{D}^+_{\mathbf{v}}}{\mathrm{D}t}\int\limits_{v^+} \psi\,\mathrm{d}v + \frac{\mathrm{D}^-_{\mathbf{v}}}{\mathrm{D}t}\int\limits_{v^-} \psi\,\mathrm{d}v. \tag{35.29}$$

Koristeći (35.28) i (35.26), može se svaki član desne strane izraza (35.29) napisati u razvijenom obliku

$$\frac{\mathrm{D}^+_{\mathbf{v}}}{\mathrm{D}t}\int\limits_{v^+}\psi\,\mathrm{d}v.$$

Smenom ovih izraza u (35.29) dobijamo formulu kojom se izražava transportna teorema u obliku koja sadrži singularnu površ

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int\limits_V\psi\,\mathrm{d}v=\int\limits_V\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\mathrm{d}v+\oint\limits_S\psi\dot{x}^k\,\mathrm{d}a_k-\int\limits_\sigma[\![\psi u^k]\!]\,\mathrm{d}a_k.\tag{35.30}$$

Ovaj izraz se može napisati i u kompaktnijem obliku pomoću teoreme o divergenciji, ili Grinove teoreme. Za neko polje $\mathbf{V}$ u oblasti V, koja ne sadrži singularnu površ, glasi

$$\int\limits_V\mathrm{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}v=\oint\limits_S\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}.\tag{35.31}$$

Za oblast V sa singularnom površi σ važi Grinova teorema

$$\int\limits_V\mathrm{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}v=\oint\limits_S\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}-\int\limits_\sigma[\![\mathbf{v}]\!]\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}.\tag{35.32}$$

Da bismo dokazali (35.32), primenimo Grinovu teoremu (35.31) na V^+ i V^- za koje je singularna površ σ oblasti V granična površ, tj.

$$\int\limits_{V^+}\mathrm{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}v=\oint\limits_{S^++\sigma^+}\mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{a}=\int\limits_{S^+}\mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{a}-\int\limits_\sigma\mathbf{v}^+\,\mathrm{d}\mathbf{a},$$
$$\int\limits_{V^-}\mathrm{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}v=\oint\limits_{S^++\sigma^-}\mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{a}=\int\limits_{S^-}\mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{a}-\int\limits_\sigma\mathbf{v}^-\,\mathrm{d}\mathbf{a}.$$

Napomenimo da smo sa σ^+ i σ^- označili suprotne orijentacije površi σ, što je prikazano na sl. 35.1. Sabirajući ove izraze i uzimajući u obzir da je

$$\int\limits_V\mathrm{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}v=\int\limits_{V^++V^-}\mathrm{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}v,$$

kao i (35.27), dobijamo (35.32).

U slučaju kada je $\mathbf{v}=v^k\times\mathbf{g}_k$, pogodno je pisati (35.32) u obliku

$$\int\limits_V\mathrm{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}v=\int\limits_V\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,v^k}{\partial x^k}=\int\limits_S v^k\,\mathrm{d}a_k-\int\limits_\sigma[\![v^k]\!]\,\mathrm{d}a_k.\tag{35.33}$$

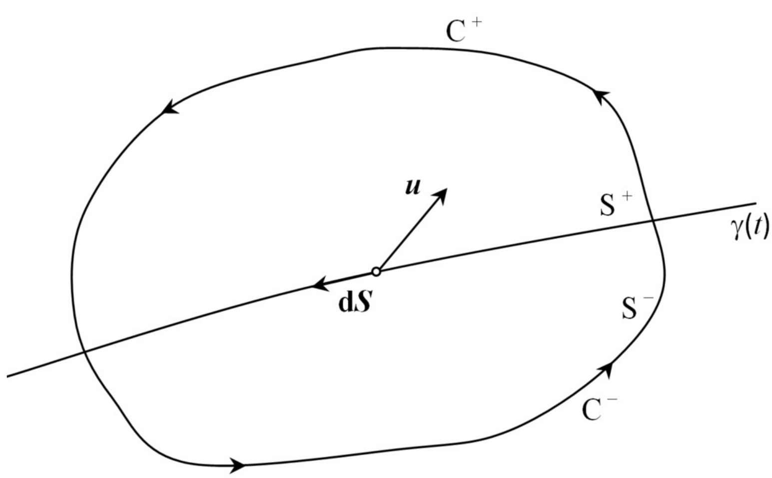
Pomoću (35.32) može se transportna teorema, u oblasti koja sadrži singularnu površ (35.30), napisati u obliku

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int\limits_V \psi\,\mathrm{d}v &= \int\limits_V \left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathrm{div}(\psi\dot{\mathbf{x}})\right]\mathrm{d}v + \int\limits_\sigma [\![\psi(\dot{\mathbf{x}}-\mathbf{u})]\!]\,\mathrm{d}\mathbf{a} = \\
&= \int\limits_V \left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + \left(\psi\dot{x}^k\right)_{,k}\right]\mathrm{d}v + \int\limits_\sigma [\![\dot{x}^k - u^k]\!]\,\mathrm{d}a_k = \\
&= \int\limits_V \left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + \left(\psi\dot{x}^k\right)_{,k}\right]\mathrm{d}v + \int\limits_\sigma [\![\dot{x}_n - u_n]\!]\,\mathrm{d}a,
\end{aligned}
\tag{35.34}
$$

gde su $\dot{x}_n = \dot{x}^k n_k$ i $u_n = u^k n_k$ brzina materijalne čestice koja je trenutno na σ u pravcu njenog jediničnog vektora normale $\mathbf{n}$, i brzina pomeranja površi σ, redom.

N Na analogan način može biti razmatran problem konačne materijalne površi S u kojoj se kreće neka singularna kriva linija $\gamma(t)$ nekom brzinom $\mathbf{u}$ (sl. 35.2). U tom slučaju, primenom Stoksove teoreme za površ koja sadrži singularnu krivu

$$
\int\limits_S \mathrm{rot}\mathbf{q}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \int\limits_C \mathbf{q}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} - \int\limits_\gamma [\![\mathbf{q}]\!]\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}, \tag{35.35}
$$



Slika 35.2: Singularna površ.

može se pisati u obliku

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_S \mathbf{q}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \int_S \left[\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathrm{rot}(\mathbf{q}\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\mathrm{div}\mathbf{q}\right]\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \\
+ \int_\gamma [\![\mathbf{q}\times(\mathbf{v}-\mathbf{u})]\!]\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}
\end{aligned}
\tag{35.36}
$$

koji se primenjuje u elektromagnetnoj teoriji kontinuuma i teoriji ljuski.

N Vrlo često je pogodno za analizu izraziti transportnu teoremu u odnosu na referentnu konfiguraciju tela.

Tada površi diskontinuiteta $\sigma(t)$, definisanoj κ_t u implicitnom obliku

$$f(x^k,t) = 0 \tag{35.37}$$

odgovara, s obzirom na jednačine kretanja $x^k = x^k(X^K,t)$, površ $\Sigma(t)$ u κ definisana sa

$$F(X^K,t) = f\left[x^k(X^K,t),t\right] = 0. \tag{35.38}$$

S obzirom na eksplicitnu zavisnost $\Sigma(t)$ od t, ona menja svoj položaj u κ u njenu komponentu U_N u pravcu jediničnog vektora spoljašnje normale $\mathbf{N}$ površi $\Sigma(t)$ nazivamo **brzina prostiranja površi** $\Sigma(t)$. Ona je dualna brzini pomeranja u_n površi $\sigma(t)$ i kao takva glasi

$$U_N = -\frac{1}{\sqrt{F_{,K}F^{,K}}}\frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{(vidi jed. (33.35))}. \tag{35.39}$$

Površi $\sigma(t)$ i $\Sigma(t)$, definisane sa (35.37) i (35.38), redom, su, sa geometrijskog stanovišta, u opštem slučaju, potpuno različite:

$\sigma(t)$ je u oblasti b - trenutnog položaja čestice tela $\mathscr{B}$;
$\Sigma(t)$ je u oblasti B - referentnog položaja čestice tela $\mathscr{B}$.

S obzirom da se B ne menja u zavisnosti od vremena za razliku od b, $\Sigma(t)$ u B, u opštem slučaju, u različitim trenucima vremena sadrži različite čestice $\mathscr{B}$, tj. $\Sigma(t)$ u opštem slučaju nije materijalna površ. Površ Σ je materijalna akko je nezavisna od vremena. Kao posledica toga iz (35.39) sledi:

$U_N = 0$ predstavlja potreban i dovoljan uslov da bi površ Σ bila materijalna.

Ponavljajući ceo postupak, kao i u slučaju $\sigma(t)$, ali sada pod uslovom da (35.28) glasi:

$$\mathbf{V}^{+} = \begin{cases} \mathbf{O} & S^{+}, \\ \mathbf{U}, & \text{ostalo}, \end{cases}$$

$$\mathbf{V}^{-} = \begin{cases} \mathbf{O} & S^{-}, \\ \mathbf{U}, & \text{ostalo}. \end{cases}$$

Lako je pokazati da je, za neku funkciju Ψ

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int\limits_{V} \Psi \,\mathrm{d}V = \int\limits_{V} \frac{\partial \Psi}{\partial t}\,\mathrm{d}V - \int\limits_{\Sigma} [\![\Psi U^{K}]\!] \,\mathrm{d}A_{K}, \tag{35.40}$$

što neposredno sledi iz (35.30) kada se pravilno primeni na $\Sigma(t)$. U tom smislu sada sa $\mathrm{d}V$ označavamo element materijalne zapremine V u κ, koji deformacijom prelazi u $\mathrm{d}v$ i v, redom, u κ_t.

U cilju poređenja rezultata izraza datih sa (35.30) i (35.40) iskoristimo (35.16). Tada je

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int\limits_{V} \Psi \,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int\limits_{V} \Psi J^{-1}\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int\limits_{v} \psi \,\mathrm{d}v, \tag{35.41}$$

$$\Psi \equiv J\,\psi.$$

Iz (35.41) i (35.40) dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int\limits_{v} \psi \,\mathrm{d}v &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int\limits_{V} \Psi \,\mathrm{d}V = \\ &= \int\limits_{V} \frac{\partial J\,\psi}{\partial t}\,\mathrm{d}V - \int\limits_{\Sigma} [\![J\,\psi U^{K}]\!] \,A_{K}, \end{aligned} \tag{35.42}$$

što predstavlja traženi oblik transportne teoreme u odnosu na referentnu konfiguraciju κ.

Ova teorema, kao i modifikovani oblik Grinove teoreme (35.33) koja u odnosu na referentnu konfiguraciju κ za neko polje $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{K} \otimes \mathbf{G}_{K}$ glasi

$$\int\limits_{V} \mathrm{div}\mathbf{V}\,\mathrm{d}V = \int\limits_{V} \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{G}\,\mathbf{V}^{K}}{\partial X^{K}}\,\mathrm{d}V = \int\limits_{S} \mathbf{V}^{K}\,\mathrm{d}A_{K} - \int\limits_{\Sigma} [\![\mathbf{V}^{K}]\!] \,\mathrm{d}A_{K}, \tag{35.43}$$

biće dalje često korišćena.

Naglasimo još da nije teško pokazati da (35.43) direktno sledi iz (35.33) pod uslovom da je

$$\mathbf{V}^K = J X^K_{;k} \mathbf{v}^k. \tag{35.44}$$

Uopšte, kada za polja $\mathbf{v}^k$ i $\mathbf{V}^K$ važi relacija oblika (35.44) kažemo:

$\mathbf{V}^K$ *je reprezentacija* $\mathbf{v}^k$ *u odnosu na referentnu konfiguraciju* κ, *ili kratko*;
$\mathbf{V}^K$ *je materijalna reprezentacija* $\mathbf{v}^k$.

35.5 Masa

Masa je osnovno svojstvo materije. Obeležavamo je sa m i pripisujemo je svakom materijalnom telu. To je veličina kojom se izražava količina materije u telu i zadovoljava sledeće zahteve:

1. masa tela je jednaka zbiru masa njegovih delova,
2. ne menja se pri kretanju tela, i
3. ne zavisi od dimenzija tela.

Prevedeno na matematički jezik, to znači:

1. da je masa mera,
2. da je invarijantnog karaktera pri kretanju i
3. da njena fizička dimenzija $[M]$ nije zavisna od vremena $[T]$ i dužine $[L]$.

U mehanici kontinuuma materija je neprekidno raspoređena u nekoj oblasti prostora. Takva tela, konačna po svojim dimenzijama, imaju konačnu masu. Zbog toga se konačna masa u kontinuumu pripisuje, ne individualnim česticama, već skupu čestica koje imaju zapreminu. Šta više, masa tela čija zapremina teži nuli takođe teži nuli.

U protivnom, na osnovu zahteva 1., i konačna tela bi imala beskonačnu masu ako bi se ona pripisala svakoj materijalnoj čestici tela.

Drugačije rečeno, za kontinuum pretpostavljamo da je masa, odnosno mera m, neprekidna funkcija zapremine. Tada se može definisati veličina ρ, koja se naziva **gustina mase** i koja predstavlja graničnu vrednost izraza

$$\rho = \lim_{v \to 0} \frac{m(\mathscr{B})}{v(\mathscr{B})}, \quad \dim \rho \, [ML^{-3}] \tag{35.45}$$

gde je $m(\mathscr{B})$ masa tela $\mathscr{B}$ čija je zapremina $v(\mathscr{B})$.

Izraz (35.45) se piše u poznatom matematičkom obliku

$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}v}. \tag{35.46}$$

Po definiciji, ρ je apsolutan skalar, takav da je

$$0 \leq \rho < \infty. \tag{35.47}$$

Tačke u kojima $\rho \to \infty$ smatramo singularnim i isključujemo iz daljeg razmatranja.

35.6 Zakon konzervacije mase

Već smo naglasili da je masa aditivna nenegativna veričina, invarijantna pri kretanju. Za neko telo zapremine v ukupna masa m određena, prema (35.46), izrazom

$$m = \int_v \rho \, \mathrm{d}v \tag{35.48}$$

i ima istu vrednost u svakom trenutku vremena i u svakoj konfiguraciji koju telo zauzima u prostoru.

Prema tome, **zakon konzevacije mase** tvrdi:

ukupna masa tela se ne menja pri kretanju.

Izražen u obliku $m = \mathrm{const.}$, zakon konzervacije mase se naziva **globalni zakon konzervacije** i u ekvivalentnom obliku glasi

$$\int_V \rho_0 \, \mathrm{d}V = \int_v \rho \, \mathrm{d}v, \tag{35.49}$$

gde su ρ_0 i ρ gustina u početnoj i trenutnoj konfiguraciji, redom. Ako se zapreminski integrali u (35.49) oba izraze u prostornom ili materijalnom opisu, biće

$$\int_V (\rho_0 - J\rho) \, \mathrm{d}V = 0, \qquad \int_v (\rho - J^{-1}\rho_0) \, \mathrm{d}v = 0, \tag{35.50}$$

s obzirom na (35.16).

Ako globalni zakon konzervacije važi za svaki delić tela dobijamo lokalni zakon konzervacije. Prema (35.50) **lokalni zakon konzervacije mase** glasi

$$\rho_0 = \rho J, \quad \text{ili} \quad \rho = \rho_0 J^{-1} \tag{35.51}$$

i nazivaju se **materijalne jednačine neprekidnosti**.

Za izohorično kretanje je $\rho = \rho_0$, tj. gustina svake čestice ostaje nepromenjena za sve vreme kretanja. Uža klasa kretanja je **homohorično kretanje**. Kažemo: homohorično kretanje, definisano sa $\rho_0 = \mathrm{const.}$, je izohorično, kod koga je gustima uniformna u prostoru i po vremenu.

Prostorne jednačine neprekidnosti, ili jednačine kontinuiteta, možemo dobiti na više načina. Na primer: materijalni izvod daje

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{v}\rho\,\mathrm{d}v = 0, \tag{35.52}$$

gde je v materijalna zapremina. U lokalnom obliku (35.52), s obzirom na (35.24), glasi

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho\dot{x}^{k})_{,k} = 0, \quad \text{ili} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{35.53}$$

Ova jednačina je u literaturi poznata i pod imenom **jednačina kontinuiteta**. Isti izraz se mogao dobiti kao materijalni izvod (35.48), odakle sledi da je

$$\dot{\overline{\rho\,\mathrm{d}v}} = 0. \tag{35.54}$$

Na isti način iz (35.51) dobijamo

$$\dot{\overline{\rho J}} = 0. \tag{35.55}$$

Takođe je moguće (35.53) izraziti u sledećim ekvivalentnim oblicima:

$$\dot{\overline{\log\rho}} + \rho I_d = 0, \quad \dot{\rho} + \rho\dot{x}^{k}_{,k} = 0, \quad \dot{\rho} + \rho\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{35.56}$$

Kao posledica (35.54) sledi vrlo važna identičnost za materijalnu zapreminu v i funkciju f neprekidnu i diferencijabilnu na v

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{v}\rho f\,\mathrm{d}v = \int_{v}\rho\dot{f}\,\mathrm{d}v, \quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{v} f\,\mathrm{d}m = \int_{v}\dot{f}\,\mathrm{d}m, \tag{35.57}$$

koju ćemo vrlo često koristiti.

35.7 Opšti zakoni balansa

Neka je v materijalna oblast i neka je ψ bilo koja definisana veličina, neprekidna i diferencijabilna u v. Tada izraz

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{v}\rho\,\psi\,\mathrm{d}v = \oint_{\mathscr{S}}\mathbf{\Phi}\,\mathbf{da} + \int_{v}\rho\,p\,\mathrm{d}v \tag{35.58}$$

nazivamo **opšti zakon balansa**. Veličine $\mathbf{\Phi}[\psi]$ i $p[\psi]$ nazivamo fluks ψ kroz granicu $\mathscr{S}$ materijalne oblasti v i specifična proizvodnja ψ u v, redom. Sve veličine u (35.58) su ravnopravne među sobom, tako da opšti zakon balansa može poslužiti kao definicija bilo koje od tri veličine ψ, $\mathbf{\Phi}[\psi]$ i $p[\psi]$, preko dve preostale. Takođe, za bilo koje ψ uvek možemo izabrati veličine $\mathbf{\Phi}$ i p, tako da (35.58) važi. Prema tome, možemo reći da se svaka veličina ψ može uravnotežiti.

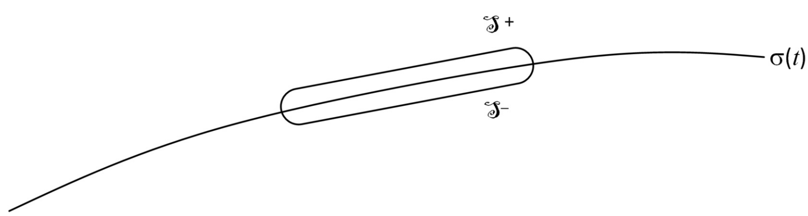
Pomoću (35.32) i (35.34) možemo (35.58) napisati u ekvivalentnom obliku

$$\int_v \left\{ \frac{\partial(\rho\,\psi)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\,\psi\mathbf{v}) - \mathrm{div}\mathbf{\Phi} - \rho\,p \right\} \mathrm{d}v + \oint_{\sigma(t)} [\![\rho\,\psi(\mathbf{v}-\mathbf{u}) - \mathbf{\Phi}]\!]\,\mathrm{d}\mathbf{a} = 0,$$

ili

$$\int_v \{\rho\,\dot{\psi} + \psi(\dot{\rho} + \rho\mathrm{div}\mathbf{v}) - \mathrm{div}\mathbf{\Phi} - \rho\,p\}\,\mathrm{d}v + \oint_{\sigma(t)} [\![\rho\,\psi(\mathbf{v}-\mathbf{u}) - \mathbf{\Phi}]\!]\,\mathrm{d}\mathbf{a} = 0. \tag{35.59}$$

Pretpostavimo da su podintegralne veličine u zapreminskom integralu u okolini $\sigma(t)$ ograničene i da $\rho\,\psi$, $\mathbf{v}$ i $\mathbf{\Phi}$, teže graničnim vrednostima, koje su neprekidne funkcije položaja na svakoj strani $\sigma(t)$. Pretpostavimo dalje da opšti zakon balansa važi za svaki deo tela $\mathscr{B}$. Pod tim pretpostavkama neka $\mathscr{S}^+$ i $\mathscr{S}^-$ teže ka $\sigma(t)$, tako da zapremina v^+ i v^- teže nuli, dok površina σ ostaje konačna u tom graničnom procesu (vidi sl. 35.1 i sl. 35.3).



Slika 35.3: Singularna površ.

Zapreminski integral u (35.59) tada iščezava i dobijamo da je

$$\int_\sigma [\![\rho\,\psi(\mathbf{v}-\mathbf{u}-\mathbf{\Phi})]\!]\,\mathrm{d}\mathbf{a} = 0,$$

ili u lokalnom obliku

$$[\![\rho\,\psi(\mathbf{v}-\mathbf{u}-\mathbf{\Phi})]\!]\,\mathbf{n} = 0 \quad \text{na } \sigma(t), \tag{35.60}$$

gde je $\mathbf{n}$ jedinični vektor normale na σ. Ovaj izraz se naziva **uslov skoka** na $\sigma(t)$.

U oblasti koja ne sadrži singularnu površ σ iz (35.59) sledi da je

$$\int_v \{\rho\,\dot{\psi} + \psi(\dot{\rho} + \rho\mathrm{div})\mathbf{v} - \mathrm{div}\mathbf{\Phi} - \rho\,p\}\,\mathrm{d}v = 0,$$

ili u lokalnom obliku

$$\rho\dot{\psi}+\psi(\dot{\rho}+\rho\operatorname{div}\mathbf{v})-\operatorname{div}\mathbf{\Phi}-\rho\, p=0 \quad \text{u} \quad V, \tag{35.61}$$

gde smo sa $V-\sigma$ naznačili oblast tela koja ne sadrži singularnu površ σ.

U specijalnom slučaju kada je $\psi=1$, $\mathbf{\Phi}=0$ i $p=0$, iz (35.58) dobijamo lokalni **zakon konzervacije mase**

$$\dot{\rho}+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}=0 \quad \text{na} \quad v. \tag{35.62}$$

Koristeći $(35.62)_1$ u (35.61), dobijamo

$$\rho\dot{\psi}-\operatorname{div}\mathbf{\Phi}-\rho p=0. \tag{35.63}$$

Za $\mathbf{\Phi}=\mathbf{\Phi}^k\otimes\mathbf{g}_k$ relacije (35.63) možemo pisati u ekvivalentnom obliku

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,\mathbf{\Phi}^k}{\partial x^k}+\rho(p-\dot{\psi})=0, \quad \text{u} \quad v. \tag{35.64}$$

Kada je za neko ψ, $\mathbf{\Phi}[\psi]=0$ i $p[\psi]=0$ biće, prema (35.58) i (35.63)

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_v \rho\psi\,\mathrm{d}v=0, \tag{35.65}$$

ili u lokalnom obliku

$$\dot{\psi}=0 \quad u \quad v. \tag{35.66}$$

Za takvo ψ kažemo da važi **zakon konzervacije** i da je ukupno $\rho\psi$ u v očuvano, ili konzervisano u toku kretanja. Primer takvog zakona je zakon konzervacije mase. Prema tome možemo kazati: da bi ukupno $\rho\psi$ bilo konzervisano za svako materijalno v potrebno i dovoljno da važi (35.65).

Lokalni i globalni zakoni balansa još se u literaturi nazivaju i **diferencijalni** i **integralni zakoni balansa**, redom.

35.8 Količina kretanja. Moment količine kretanja

Definicija 35.8.1 **Količina kretanja** materijalnog kontinuuma (tela) sadržanog u oblasti v definisana je sa

$$\mathbf{K}=\int_v \mathbf{v}\,\mathrm{d}m=\int_v \dot{x}^k\mathbf{g}_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}m. \tag{35.67}$$

Definicija 35.8.2 **Moment količine kretanja L**, u odnosu na koordinatni početak opšteg sistema definisana je sa

$$\mathbf{L} = \int_v \mathbf{p} \times \mathbf{v}\, \mathrm{d}m = \int_v e_{klm} p^l \dot{x}^k \mathbf{g}^k(\mathbf{x})\, \mathrm{d}m, \tag{35.68}$$

u odnosu na sistem koordinata x^k dopustiv u $\mathbb{E}_3$.

$$\begin{aligned} K^K(\mathbf{X},t) &= \int_v \rho\, g_k^K(\mathbf{X},\mathbf{x})\, \dot{x}^k\, \mathrm{d}v, \\ L_K(\mathbf{X},t) &= \int_v \rho\, g_K^k(\mathbf{X},\mathbf{x})\, e_{klm}\, p^l\, \dot{x}^k\, \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{35.69}$$

Ovako dobijene veličine K^K i L_K imaju tenzorski karakter, što je lako pokazati. U odnosu na Dekartov sistem koordinata, s obzirom na konstantnost baznih vektora, može se (35.67) i (35.68) odmah napisati u komponentalnom obliku

$$\begin{aligned} K_k &= \int_v \rho\, \dot{z}_k\, \mathrm{d}v, \\ L_k &= \int_v \rho\, e_{klm}\, z_l\, \dot{z}_m\, \mathrm{d}v, \end{aligned} \tag{35.70}$$

za bilo koju tačku u $\mathbb{E}_3$. Isti rezultat sledi iz (35.69), kada je $g_k^K = \delta_k^K$ Kronekerov δ simbol.

Ovde i nadalje sa ρ obeležavamo **gustinu** materijalnog tela koja je definisana izrazom

$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}v}. \tag{35.71}$$

Jasno je da je

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$$

brzina materijalne tačke tela određena vektorom položaja **p**.

Tada zakoni nerelativističke mehanike tvrde da postoji sistem u kome je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}, \tag{35.72}$$

koji predstavlja **zakon količine kretanja**, i

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}, \tag{35.73}$$

koji predstavlja **zakon momenta količine kretanja**. Sistem referencije u odnosu na koji važe ovi zakoni naziva se **inercijalni** (vidi 35.8).

Ovi zakoni važe ne samo za telo kao celinu, nego i za svaki njegov merljivi deo, jer je svaki njegov deo takođe telo. Prema tome, izborom koordinatnog početka za momentnu tačku ne gubi se ništa u opštosti. Poznati pod imenom **Ojlerovi zakoni**, oni važe za sve inercijalne sisteme.

35.9 Zapreminske i površinske sile

Sile, koje deluju na telo, možemo podeliti na **spoljašnje** i **unutrašnje**. Spoljašnje sile su mera dejstva na telo drugih tela, spoljnih u odnosu na posmatrano. Unutrašnje sile su sile uzajamnog dejstva čestica, ili delova uočenog tela. Ova podela je opšta i zajednička za sve sile nezavisno od njihove fizičke prirode, tj. nezavisno od toga da li su mehaničkog, električnog, hemijskog, ili nekog drugog porekla.

Spoljašnje sile, koje deluju na izabrano telo, se u mehanici kontinuuma dele na **zapreminske** i **površinske**.

Zapreminske sile deluju na svaki element zapremine i kao takve predstavljaju sile na rastojanju. Pod istim nazivom koristi se i sila po jedinici mase $\mathbf{f}$, tako da je ukupna sila određena sa

$$\int_v \mathbf{f}\,\mathrm{d}m = \int_v \rho\mathbf{f}\,\mathrm{d}v, \tag{35.74}$$

gde je v zapremina uočenog tela. Primeri ovih sila su gravitaciona i elektrostatička sila.

Površinske sile su kontaktne sile i deluju na telo u tačkama njegove granične površi. Neprekidno raspoređena površinska sila po jedinici površine naziva se **povšinski napon**. Obeležavaćemo ga sa $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ čime želimo da naglasimo njegovu zavisnost od orijentacije površi na koju deluje.

Uočimo površinu Δa, na koju deluje sila $\Delta\mathbf{b}$ u tački A. Površinska sila $\Delta\mathbf{b}$ u A je rezultanta svih neprekidno raspoređenih sila na Δa. Tako svakom elementu Δa, niza površina, odgovara različita sila $\Delta\mathbf{b}$, koja deluje na tu površ. Granična vrednost

$$\lim_{\Delta a\to 0}\frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}a} = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}. \tag{35.75}$$

Ukupna neprekidno raspoređena površinska sila je

$$\oint_{\mathscr{S}} \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\,\mathrm{d}a. \tag{35.76}$$

Primer takve sile je sila hidrostatičkog pritiska koja deluje na graničnu površ tela potopljenog u tečnost.

Unutrašnje sile za bilo koje dve čestice tela su, na osnovu trećeg Njutnovog zakona - zakona akcije i reakcije - suprotne. Prema tome, rezultanta unutrašnjih sila je nula sila ili, kratko rečeno, unutrašnje sile su u ravnoteži.

U mehanici kontinuuma površinske sile između čestica se pojavljuju kao sile površinskog napona dela tela, zamišljeno izdvojenog od tela. One predstavljaju interakciju ostatka tela na zamišljeno izdvojen njegov deo, a u tačkama granične površi toga dela. O njima će kasnije biti više reči.

Sila koja deluje u tački naziva se **koncentrisana sila**. Prisustvo ovih sila dovodi do teškoća u određivanju lokalnih, ili diferencijalnih oblika zakona balansa u napadnoj tački njihovog dejstva. Nadalje pretpostavljamo da se lokalni zakoni balansa odnose na tačke u kojima ne deluju koncentrisane sile.

Prema tome, rezultujuća sila **F**, koja deluje na telo, je

$$\mathbf{F} = \oint_{\mathscr{S}} \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\, \mathrm{d}a + \int_{v} \mathbf{f}\, \mathrm{d}m, \tag{35.77}$$

gde smo izostavili koncentrisane sile iz napred navedenih razloga.

35.10 Moment zapreminske i površinske sile. Površinski i zapreminski spreg

Moment sile je vektorska veličina i zavisi od izbora momentne tačke. Rezultujući moment nekog sistema sila jednak je vektorskom zbiru momenata svih sila uočenog sistema za istu momentnu tačku.

Za neprekidno telo ovaj sistem sila čine zapreminske i površinske sile. Koncentrisane sile se ne uzimaju u obzir zbog prethodno navedenih razloga.

U odnosu na koordinatni početak, kao momentnu tačku, rezultujući moment ovih sila glasi

$$\oint_{\mathscr{S}} \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\, \mathrm{d}a + \int_{v} \mathbf{p} \times \mathbf{f}\, \mathrm{d}m \tag{35.78}$$

gde je v zapremina tela, a $\mathscr{S}$ njegova granična površ u $\mathbb{E}_3$. Nadalje se podrazumeva da se moment računa u odnosu na koordinatni početak, jer se svaka tačka u $\mathbb{E}_3$ može uzeti za koordinatni početak nekog zajedničkog sistema.

Analogno zapreminskim i površinskirn silama, u mehanici kontinuuma se razmatra dejstvo zapreminskih i površinskih spregova neprekidno raspoređenih po zapremini i površini tela, redom. Zapreminski spreg po jedinici mase obeležavaćemo sa **l**, a površinski spreg po jedinici površine sa $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$, čime smo naznačili njegovu zavisnost od orijentacije površi na koju deluje. Koncentrisani spreg, tj. spreg koji deluje u jednoj tački tela, isključujemo iz razmatranja iz istih razloga kao i koncentrisanu silu.

Prema tome, rezultujući spreg, koji deluje na telo, je određen sa

$$\mathbf{M} = \oint_{\mathscr{S}} (\mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} + \mathbf{m}_{(\mathbf{n})})\, \mathrm{d}a + \int_{v} (\mathbf{p} \times \mathbf{f} + \mathbf{l})\, \mathrm{d}m. \tag{35.79}$$

Mehanika kontinuuma koja ne uzima u obzir egzistenciju površinskih i zapreminskih spregova se naziva mehanika nepolarnog kontinuuma, za razliku od mehanike polarnog kontinuunta. U mehanici polarnog kontinuuma rezultujući moment je dat sa (35.79), a u nepolarnoj sa (35.78). Mi ćemo se nadalje baviti problemima mehanike nepolarnog kontinuuma.

35.11 Vektor napona

Postojanje vektora napona nam omogućuje da, u nepolarnoj mehanici kontinuuma Ojlerove zakone (35.72), (35.73) i (35.71) napišemo u obliku

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{v}\rho\mathbf{v}\,\mathrm{d}v=\oint\limits_{\mathscr{S}}\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\,\mathrm{d}a+\int\limits_{v}\rho\mathbf{f}\,\mathrm{d}v, \tag{35.80}$$

i

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{v}\rho\,\mathbf{p}\times\mathbf{v}\,\mathrm{d}v=\oint\limits_{\mathscr{S}}\mathbf{p}\times\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\,\mathrm{d}a+\int\limits_{v}\rho\,\mathbf{p}\times\mathbf{f}\,\mathrm{d}v. \tag{35.81}$$

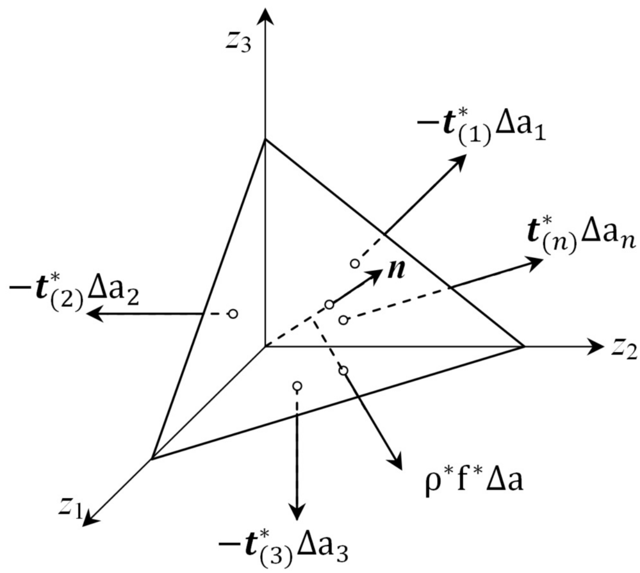
35.12 Tenzor napona

Već smo pokazali da vektor napona $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ u nekoj tački $\mathbf{x}$ zavisi od orijentacije površi kroz tu računu, koja je određena njenim jediničnim vektorom spoljne normale $\mathbf{n}$ u toj tački.

Kako skup svih jediničnih vektora $\mathbf{n}$ u $\mathbf{x}$ svojim krajem određuje jediničnu sferu, tj. dvodimenzionalnu površ, zaključujemo da kroz $\mathbf{x}$ prolazi beskonačno mnogo površi raznih orijentacija. U opštem slučaju, raznim površima ovog skupa površi kroz $\mathbf{x}$ odgovaraju razni vektori napona. Mi ćemo kazati da skup svih $\mathbf{t}_{\mathbf{n}}$ u $\mathbf{x}$ određuje naponsko stanje čestice X u $\mathbf{x}$. Raznim česticama X odgovaraju razna naponska stanja. Naponsko stanje tela $\mathscr{B}$ je, prema tome, određeno naponskim stanjem svih njegovih čestica. Na osnovu toga pišemo

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}=\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{n}). \tag{35.82}$$

Zavisnost vektora napona u tački $\mathbf{x}$ od spoljašne normale $\mathbf{n}$ novrši koja kroz nju prolazi može biti određena primenom Ojlerovih zakona kretanja (35.80) i (35.81), na mali tetraedar čiji je vrh u tački $\mathbf{x}$. Tri strane ovog tetraedra čine koordinatne ravni u $\mathbf{x}$, a četvrta strana je neka površ $\mathscr{S}$. Radi preglednijeg izlaganja, neka koordinatne linije u $\mathbf{x}$ budu Dekartove ose i neka presečna površ $\mathscr{S}$ bude ravan A, kao što je na sl. 35.4.



Slika 35.4

Za tako određen tetraedar zapremine Δv, h je njegova visina iz $\mathbf{x}$, Δa površina strane čija je spoljna normala $\mathbf{n}_k$ $(k = 1,2,3)$, Δa_n tri preostale strane koje leže u koordinatnim ravnima i čije su spoljašne normale određene sa $-\mathbf{e}_k$, gde su jedinični vektori pravaca koordinatnih linija z_k u $\mathbf{x}$. Tada (35.81) možemo pisati u obliku

$$\int_{\Delta v} \rho\,\dot{\mathbf{v}}\,\mathrm{d}v = \int_{\Delta a} \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\,\mathrm{d}a - \int_{\Delta a_k} \mathbf{t}_k\,\mathrm{d}a_k + \int_{v} \rho\mathbf{f}\,\mathrm{d}v. \tag{35.83}$$

Sa $-\mathbf{t}_k$ smo označili vektor napona u tačkama površi Δa_k, vodeći računa da je njena spoljna normala određena sa $-\mathbf{e}_k$.

Pretpostavljajući da su $\rho\dot{\mathbf{v}}$ i $\rho\mathbf{f}$ pograničene veličine, da je $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ neprekidna funkcija $\mathbf{x} \to \mathbf{x}$ i $\mathbf{n}$, možemo primeniti teoremu o srednjoj vrednosti na (35.83), tako da je

$$\mathbf{t}^*_{(\mathbf{n})}\,\Delta a - \mathbf{t}^*_k\,\Delta a_k + K\,\Delta\mathbf{v} = 0, \tag{35.84}$$

gde su $\mathbf{t}^*_{(\mathbf{n})}$ i $\mathbf{t}^*_k$ vektori napona koji deluju u nekim tačkama odgovarajućih strana tetraedra, a K ograničena veličina. Kako je

$$\Delta a_k = n_k\,\Delta a, \quad \Delta v = \frac{1}{3} h\,\Delta a,$$

može se (35.84) napisati kao

$$(\mathbf{t}^*_{(\mathbf{n})} - \mathbf{t}^*_k\,n_k)\,\Delta a - \frac{1}{3} h K\,\Delta a = 0. \tag{35.85}$$

Ako se (35.85) podeli sa Δa i pusti da $h \to 0$, tj. ako površ jedinične normale $\mathbf{n}$ teži ka $\mathbf{x}$ ne menjajući svoju orijentaciju, onda poslednji član u (35.85) teži nuli, dok vektori u maloj zagradi teže ka svojim vrednostima u $\mathbf{x}$, tj.

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_k n_k. \tag{35.86}$$

Vektori napona $\mathbf{t}_k$ po definiciji, ne zavise od $\mathbf{n}(n^k)$, te prema tome (35.86) daje konačan oblik funkcionalnih zavisnosti $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ od $\mathbf{n}$. U odnosu na bilo koji sistem koordinata, s obzirom na to da je $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ za datu tačku određene površi invarijantno u odnosu na izbor koordinatnog sistema, (35.86) glasi

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_k n^k. \tag{35.87}$$

Time se podrazumeva da su $\mathbf{t}_k$ vektori napona u tački $\mathbf{x}$ odgovarajućih koordinatnih površi proizvoljnih dopustivih koordinatnih linija.

Na taj način smo dokazali **Košijevu fundamentalnu teoremu**:

Teorema 35.12.1 Vektor napona u tački površi spoljne normale $\mathbf{n}$ je linearna funkcija vektora napona koji deluje na koordinatne površi u istoj tački, čiji su koeficijenti komponente jediničnog vektora $\mathbf{n}$.

Na osnovu nezavisnosti $\mathbf{t}_k$ od $\mathbf{n}$ sledi da je

$$\mathbf{t}_{(-\mathbf{n})} = -\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}, \tag{35.88}$$

ili

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = -\mathbf{t}_{(-\mathbf{n})}, \tag{35.89}$$

čime je dokazan stav:

Stav 2

Vektori napona koji deluju na suprotnim stranama iste površi u datoj tački su suprotni.

Vektor $\mathbf{t}_k$ može se napisati u komponentalnom obiku

$$\mathbf{t}_k = t_{lk}\,\mathbf{g}^l, \tag{35.90}$$

gde smo sa t_{lk} označili njegovu l-tu komponentu. Tada su komponente vektora napona $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ prema (35.87) date sa

$$t_{(\mathbf{n})l} = t_{lk}\,n^k. \tag{35.91}$$

S obzirom na tenzorski karakter $t_{(\mathbf{n})l}$ i n^k, kao i to da (35.91) važi za svako n^k, prema kriterijumu o tenzorskom karakteru sistema zaključujemo da je t_{kl} kovarijantni tenzor drugog reda. Ovaj tenzor nazivamo **tenzor napona**. Njegove komponente na glavnoj dijagonali, tj. t_{kk} (ne sabirati po k) nazivamo **normalni napon**. Komponente izvan glavne dijagonale, t_{kl} ($k \neq l$) nazivamo **smičući naponi**.

Utvrđujući tenzorski karakter t_{kl} i koristeći (35.91) dokazujemo u drugom vidu **Košijevu fundamentalnu teoremu**:

Teorema 35.12.2 Vektor napona za bilo koju površ u tački je u potpunosti određen kao linearna funkcija tenzora napona u tački.

Tenzor napona je, na osnovu (35.90), funkcija samo položaja $\mathbf{x}$ i ne zavisi od pravaca $\mathbf{n}$ u $\mathbf{x}$. Tada, analizom izraza (35.91) možemo kazati:

- Naponsko stanje za česticu tela je određeno tenzorom napona t_{kl} za tu česticu, a naponsko stanje tela tenzorom napona za svaku česticu tela.

U dosadašnjoj analizi tačka $\mathbf{x}$ je bila razmatrana kao unutrašnja tačka oblasti b. Međutim, istim postupkom možemo doći do odgovarajućih zaključaka i u slučaju kada je $\mathbf{x}$ granična tačka, tj. tačka na graničnoj površi oblasti b u kojoj ova ima tangentnu ravan. Tada za telo koje je opterećeno na svojoj graničnoj površi, granični uslovi glase

$$t^k_{(\mathbf{n})} = t^{kl} n_l = p^k, \tag{35.92}$$

gde je p^k zadata funkcija na granici tela. Time je ustanovljen značaj Košijeve fundamentalne teoreme u svim slučajevima koji nas interesuju.

Tenzor napona se često obeležava samo sa $\mathbf{T}$, tj.

$$\mathbf{T} = t_{kl}\, \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l. \tag{35.93}$$

Tada se (35.91) može napisati u obliku

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{T}\,\mathbf{n}. \tag{35.94}$$

35.13 Košijevi zakoni kretanja

U cilju opštosti dalje pretpostavljamo da u posmatranom telu, u toku njegovog kretanja, postoji površ diskontinuiteta σ koja može, ali ne mora biti materijalne prirode, sa fizičkog stanovišta, takva površ može biti npr. talas koji se u telu prostire brzinom u_n.

Tada se, u odsustvu zapreminskih i površinskih spregova, Ojlerovi zakoni (35.80) i (35.81) mogu napisati u obliku

Zakoni balansa količine kreranja i momenta količine kretanja (35.80) i (35.81)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{v}\rho\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}v=\int\limits_{\mathscr{S}}\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\,\mathrm{d}a+\int\limits_{v}\rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}v, \tag{35.95}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v}\rho\,\mathbf{p}\times\mathbf{v}\,\mathrm{d}v=\int\limits_{\mathscr{S}}\mathbf{p}\times\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\,\mathrm{d}a+\int\limits_{v}\rho\,\mathbf{p}\times\mathbf{f}\,\mathrm{d}v, \tag{35.96}$$

nam omogućuje da izvedemo njihove lokalne oblike koji su od fundamentalnog značaja pri razmatranju konkretnih fizičkih problema. Uočimo da su v i $\mathscr{S}$, materijalna zapremina i granična površ posmatranog tela. Ovi izrazi su oblika opšteg zakona balansa (35.58), koji ćemo dalje koristiti za izvođenje njihovih lokalnih zakona balansa. U tom cilju pretpostavljamo da važi lokalni zakon balansa mase (35.62), koji povlači za sobom lokalni zakon balansa (35.64). Identifikacijom veličina ψ, $\mathbf{\Phi}$ i $\mathbf{p}$ u (35.95) i (35.96) odmah dobijamo njihove lokalne oblike.

Ovaj postupak ćemo primeniti prvo na (35.95). Poređenjem ovog izraza sa (35.58) identifikujemo: ψ sa $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$ sa $\mathbf{f}$ i $\mathbf{\Phi}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}$ sa $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\,\mathrm{d}a$.

Koristeći (35.87) i izraz $\mathrm{d}\mathbf{a}=\mathbf{n}\mathrm{d}a$ možemo pisati

$$\mathbf{\Phi}\mathrm{d}\mathbf{a}=\mathbf{\Phi}\mathbf{n}\,\mathrm{d}a=\mathbf{\Phi}^k\,n_k\,\mathrm{d}a=\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\,\mathrm{d}a,$$

odakle vidimo da je $\mathbf{\Phi}\mathbf{n}=\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ i $\mathbf{\Phi}^k=\mathbf{t}^k=g^{kl}\,\mathbf{t}_l$, tj.

$$\mathbf{\Phi}^k=\mathbf{t}^k,\quad \mathbf{\Phi}\mathbf{n}=\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}. \tag{35.97}$$

Smenom ovih veličina u (35.64), gde su v i $\mathscr{S}$, materijalna zapremina i granična površ posmatranog tela. Ovi izrazi su oblika opšteg zakona balansa datog sa (35.58), koji ćemo dalje koristiti za izvođenje lokalnih oblika ovih zakona balansa. U tom cilju pretpostavljamo da važi lokalni zakon balansa mase (35.62), koji povlači za sobom lokalni zakon balansa (35.64). Identifikacijom veličina ψ, $\mathbf{\Phi}$ i $\mathbf{p}$ u (35.95) i (35.96) odmah dobijamo njihove lokalne oblike.

Smenom tako identifikovanih veličina u (35.64) dobijamo

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\mathbf{t}^k)}{\partial x^k}+\rho(\mathbf{f}-\dot{\mathbf{v}})=0\quad \text{u } v. \tag{35.98}$$

Jednačinu (35.98), nazivamo **prvi Košijev zakon kretanja**.

Poređenjem (35.96) sa (35.58) identifikujemo: ψ sa $\mathbf{p}\times\mathbf{v}$, p sa $\mathbf{p}\times\mathbf{f}$ i $\mathbf{\Phi}\mathrm{d}\mathbf{a}$ sa $\mathbf{p}\times\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\,\mathrm{d}a$. Kao i u prethodnom slučaju lako je videti da je

$$\mathbf{\Phi}\mathrm{d}\mathbf{a}=\mathbf{\Phi}\mathbf{n}\,\mathrm{d}a=\mathbf{\Phi}^k\,n_k\,\mathrm{d}a=\mathbf{p}\times\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\,\mathrm{d}a,$$

tj.

$$\mathbf{\Phi}\,\mathbf{n}=\mathbf{p}\times\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\quad \text{i}\quad \mathbf{\Phi}^k=\mathbf{p}\times\mathbf{t}^k. \tag{35.99}$$

Smenom tako identifikovanih veličina u (35.64) dobijamo

$$\mathbf{p}\times\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\mathbf{t}^k)}{\partial x^k}+\rho(\mathbf{f}-\dot{\mathbf{v}})=0 \quad \text{u}\ v\right]+\mathbf{g}_k\times\mathbf{t}^k=\mathbf{0} \quad \text{u} \quad v,$$

pri čemu pretpostavljamo da na površi diskontinuiteta kretanje materijalnih čestica ne trpi diskontinuitet, tj. te površi nisu, na primer, prskotine i na njima je $[\![\mathbf{p}]\!]=0$. Pretpostavljajući da važi prvi Košijev zakon kretanja (35.98), prva od ovih jednakosti se svodi na

$$\mathbf{g}_k\times\mathbf{t}^k=\mathbf{0} \quad \text{u} \quad v \tag{35.100}$$

i naziva se **drugi Košijev zakon kretanja**. Druga jednakost je, na osnovu (35.98), identički zadovoljena. Time smo dokazali stav:

> **Stav 3**
>
> Prvi i drugi Košijev zakon kretanja predstavljaju potrebne i dovoljne uslove za lokalne zakone balansa količine kretanja i momenta količine kretanja.

Ako se koriste relacije

$$\begin{gathered}\mathbf{t}^k=t^{lk}\mathbf{g}_l, \quad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}=\left\{\begin{matrix} l\\ kl\end{matrix}\right\},\\ \frac{\partial\mathbf{g}_l}{\partial x^k}=\left\{\begin{matrix} m\\ kl\end{matrix}\right\}\mathbf{g}_m, \quad \mathbf{g}_k\times\mathbf{g}_l=\varepsilon_{klm}\,\mathbf{g}^m,\end{gathered} \tag{35.101}$$

onda se prvi i drugi Košijev zakon kretanja, (35.98), i (35.100) mogu napisati u komponentalnom obliku

$$t^{lk}_{,k}+\rho(f^l-v^l)=0, \quad \varepsilon_{klm}t^{kl}=0 \quad \text{u} \quad v. \tag{35.102}$$

Izražen na ovaj način, prvi Košijev zakon predstavlja sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina koje nazivamo **Košijeve jednačine kretanja**.

Drugi Košijev zakon kretanja (35.102) nam kaže da je antisimetričan deo tenzora napona jednak nuli, $t^{[kl]}=0$, što je ekvivalentno tvrđenju da je tenzor napona simetričan, tj.

$$t^{kl}=t^{lk}. \tag{35.103}$$

Za dalju analizu Košijevih zakona kretanja pogodniji je njihov sledeći oblik

$$\operatorname{div}\mathbf{T}+\rho(\mathbf{f}-\mathbf{a})=\mathbf{0}, \quad \text{ili} \quad \nabla\cdot\mathbf{T}+\rho(\mathbf{f}-\mathbf{a})=\mathbf{0}, \tag{35.104}$$

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}^T, \tag{35.105}$$

gde je ∇ operator gradijenta.

35.14 Jednačine kretanja u odnosu na referentnu konfiguraciju

Košijeve jednačine kretanja $(35.102)_1$, kao i sve veličine koje se u njoj pojavljuju:

ρ - gustina,
t^{kl} - tenzor napona,
v^k - brzina,
f^k - zapreminska sila,

izražene su u odnosu na nezavisne promenljive:

x^k - prostorne koordinate i
t - vreme.

Sa matematičkog stanovišta, kao što je već rečeno, one predstavljaju nelinearni sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina po navedenim promenljivim, za čije je rešavanje potebno poznavanje i uslova koje odgovarajuće veličine zadovoljavaju na graničnoj površi tela u svakom trenutku. Za poznavanje ovih uslova prethodno je potrebno znati graničnu površ, koja se kod deformabilnog tela menja i po obliku i položaju i zavisi od nepoznatog polja pomeranja, što predstavlja problem za sebe.

S druge strane, početni položaj tela, pa prema tome i njegove granične površi, je poznat. Zbog toga je granične uslove pogodno izraziti u odnosu na referentnu konfiguraciju tela, konfiguraciju u kojoj znamo graničnu površ tela, a koju možemo uzeti za početnu. To posebno važi za elastična tela koja poseduju privilegovanu konfiguraciju u kojoj je telo nenapregnuto i u koje se vraća po prestanku dejstva sila i koje definišemo kao njegovo prirodno stanje. To znači da se granični uslovi izražavaju u odnosu na materijalne koordinate X^K, dopustive u referentnoj konfiguraciji. Da bi se ovako izraženi granični uslovi mogli koristiti, nužno je izraziti i jednačine kretanja u odnosu na referentno stanje. Međutim, to nije samo izražavanje funkcionalne zavisnosti veličina, koje figurišu u jednačinama kretanja, od promenljivih X^K, zamenom x^k sa $x^k = x^k(X^K, t)$, (kao što smo videli u Glavi 35.7) nego i prevođenja odgovarajućih veličina u referentnu konfiguraciju. Tako za gustinu ρ imamo, saglasno materijalnim jednačinama neprekidnosti, (35.61).

U suštini, potrebno je da nađemo odgovarajuće lokalne zakone balansa u referentnoj konfiguraciji Ojlerovih zakona (35.95) i (35.96). Postupajući na način izložen u prethodnom odeljku i koristeći sada (35.64) u (35.95), kada se uzme u obzir da je

$$\psi = \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}[(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)], \quad p = \mathbf{f}, \quad \mathbf{\Phi}^k = \mathbf{t}^k, \quad \mathbf{\Phi}^K = \mathbf{T}^K,$$

lako je videti da prvi Košijev zakon kretanja u referentnoj konfiguraciji, glasi

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial(\sqrt{G}\mathbf{T}^K)}{\partial X^K} + \rho_0(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) = 0 \quad \text{u} \quad V - \Sigma, \tag{35.106}$$

gde je

$$\mathbf{T}^K = J X^K_{;k}\,\mathbf{t}^k. \tag{35.107}$$

Koristeći pak (35.64) u (35.96), (35.106), kao i činjenicu da je sada

$$\psi = \mathbf{p}\times\mathbf{v}, \quad p = \mathbf{p}\times\mathbf{f}, \quad \mathbf{\Phi}^k = \mathbf{p}\times\mathbf{t}^k, \quad \mathbf{\Phi}^K = \mathbf{p}\times\mathbf{T}^K,$$

dobija se **drugi Košijev zakon**

$$\mathbf{g}_k \times \mathbf{T}^K x^k_{;K} = 0. \tag{35.108}$$

Pisanje ovih izraza u komponentalnom obliku bitno je vezano za $\mathbf{T}^K$, datog sa (35.107), zbog čega se zadržavamo na njegovoj analizi. Ako se uzme u obzir da je $\mathrm{d}A_K = N_K\,\mathrm{d}A$, tada možemo pisati, analogno sa (35.87), da je

$$\mathbf{T}^K\,\mathrm{d}A_K = \mathbf{T}^K N_K\,\mathrm{d}A = \tilde{\mathbf{T}}_{(N)}\,\mathrm{d}A. \tag{35.109}$$

Smisao ove jednačine se može odrediti iz (35.107), kada se ova relacija pomnoži sa $\mathrm{d}A_K$ i iskoristi (35.18), (35.87) i (35.75). Tada se vidi da je

$$\tilde{\mathbf{T}}_{(N)}\,\mathrm{d}A = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\,\mathrm{d}a = \mathrm{d}\mathbf{b}, \tag{35.110}$$

tj. tako definisana veličina $\tilde{\mathbf{T}}_{(N)}$ predstavlja silu koja deluje na element definisane površi računate po jedinici površine.

Takođe je

$$\mathrm{d}b^k = \tilde{T}^k_{(N)}\,\mathrm{d}A \quad \text{i} \quad \tilde{\mathbf{T}}_{(N)} = \mathbf{T}^K N_K, \tag{35.111}$$

s obzirom na (35.110) i (35.109) redom, gde je

$$\mathbf{T}^K = T^{kK}\mathbf{g}_k \tag{35.112}$$

u odnosu na prostorni sistem koordinata. Tako definisani tenzor T^{kK} se naziva **prvi Piola-Kirhofov tenzor**[2] i predstavlja napon u $\mathbf{x}$ meren po jedinici površine u $\mathbf{X}$; sa tenzorskog stanovišta on predstavlja dvostruko tenzorsko polje. Iz (35.112) i $(35.111)_2$ se vidi da je drugi indeks tenzora T^{kK} indeks normale presečne ravni, za razliku od tenzora t^{kl} kod koga tu ulogu obično ima (s obzirom na inženjerski praksu) prvi indeks.

Veza između Piola-Kirhofovog tenzora, koji ćemo dalje obeležavati sa $\mathbf{T}_R$ (koji se ponekad naziva **Lagranžev tenzor napona**) i tenzora $\mathbf{T}$ (ili **Košijev tenzor napona**) sledi neposredno iz (35.112) i (35.107) i glasi

$$T^{kK} = J\,t^{kl} X^K_{;l}, \quad t^{kl} = J^{-1}\,T^{kL} x^l_{;L}, \tag{35.113}$$

ili

$$\mathbf{T}_R = J\,\mathbf{T}\,(\mathbf{F}^{-1})^T, \quad \mathbf{T} = J^{-1}\,\mathbf{T}_R\mathbf{F}^T. \tag{35.114}$$

[2] Piola-Kirchhoff

Koristeći $(35.101)_3$ dualni izraz za (35.101) u odnosu na materijalne koordinate lako je pokazati da je

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial(\sqrt{G} T^{kK} \mathbf{g}_k)}{\partial X^K} = \left(\frac{\partial T^{kK}}{\partial X^K} + T^{kL} \left\{ \begin{matrix} K \\ LK \end{matrix} \right\} + T^{lK} \left\{ \begin{matrix} k \\ lm \end{matrix} \right\} x^m_{;K} \right) \mathbf{g}_k = T^{kK}_{;K} \mathbf{g}_k. \tag{35.115}$$

Smenom ovih izraza i (35.112) i (35.106), kao i $(35.101)_4$ u (35.108), dobijamo Košijeve zakone kretanja u referentnoj konfiguraciji

$$\begin{aligned} T^{kK}_{;K} + \rho_0 (f^k - \dot{v}^k) &= 0, \\ \text{u} \quad V - \Sigma & \\ \varepsilon_{klm} x^k_{;K} T^{lK} &= 0, \end{aligned} \tag{35.116}$$

Iz $(35.116)_2$ se vidi da je

$$x^{[k}_{;K} T^{l]K} = 0, \tag{35.117}$$

tj. Piola-Kirhofov tenzor napona nije simetričan.

Uvođenjem tenzora

$$T^{KL} = X^K_{;k} T^{kL} = J X^K_{;k} X^L_{;l} t^{kl}, \tag{35.118}$$

koji se naziva **drugi Piola-Kirhofov tenzor**, ovaj nedostatak se eliminiše. Zaista, iz (35.118) ili, još jednostavnije, iz $(35.102)_2$ sledi da je

$$T^{KL} = T^{LK}, \tag{35.119}$$

tj. drugi Piola-Kirhofov tenzor napona je simetričan. Međutim, u tom slučaju su jednačine kretanja $(35.116)_1$ komplikovanije. To se najbolje vidi iz njihovog razvijenog oblika

$$\frac{\partial T^{kK}}{\partial X^K} + T^{mK} \left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} x^l_{;K} + T^{kL} \left\{ \begin{matrix} L \\ LK \end{matrix} \right\} + \rho_0 \left(f^k - \dot{v}^k \right) = 0, \tag{35.120}$$

kada se izraze preko prvog Piola-Kirhofovog tenzora napona, odnosno

$$\frac{\partial (T^{LK} x^k_{;L})}{\partial X^K} + \left(\left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} x^m_{;L} x^l_{;K} + \left\{ \begin{matrix} M \\ MK \end{matrix} \right\} x^k_{;L} \right) T^{LK} + r_0 \left(f^k - \dot{v}^k \right) = 0, \tag{35.121}$$

kada se izraze preko drugog Piola-Kirhofovog tenzora napona.

Iz (35.118), koristeći (35.113), lako je pokazati da je

$$T^{kK} = x^k_{;L} T^{LK}, \tag{35.122}$$

i

$$t^{kl} = J^{-1} x^k_{;K} x^l_{;L} T^{KL}. \tag{35.123}$$

Upoređujući (35.123) i $(35.118)_2$, uzimajući u obzir da su J i J^{-1} dualne veličine, možemo zaključiti da su Košijev tenzor t^{kl} i drugi Piola-Kirhofov tenzor T^{KL} dualne veličine. Na osnovu principa dualnosti tada možemo posmatrati T^{KL} u referentnoj konfiguraciji na isti način kao i u trenutnoj konfiguraciji tela. Tako se vektor napona $\mathbf{T}_{(\mathbf{N})}$, dat sa

$$T^L_{(\mathbf{N})} = T^{KL} N_K, \tag{35.124}$$

koji je dualan sa $t^l_{(\mathbf{n})} = t^{lk} n_k$, definiše kao neka za sada napoznata sila $\mathrm{d}\mathbf{B}$ po jedinici površine $\mathrm{d}A$, tj.

$$T^L_{(\mathbf{N})} = \frac{\mathrm{d}B^L}{\mathrm{d}A}, \tag{35.125}$$

što je očigledno dualno sa (35.75). Množeći (35.122) sa $\mathrm{d}a_k$ i koristeći (35.18), (35.87), (35.75), (35.124) i (35.125), dobija se da je

$$\mathrm{d}b^k = x^k_{;K} \, \mathrm{d}B^K, \tag{35.126}$$

tj. sile $\mathrm{d}\mathbf{b}$ i $\mathrm{d}\mathbf{B}$ se nalaze u istom odnosu kao i prostorni element $\mathrm{d}\mathbf{x}$ prema njegovom materijalnom elementu $\mathrm{d}\mathbf{X}$, s obzirom na relaciju $\mathrm{d}x^k = x^k_{;K} \, \mathrm{d}X^K$. Time je određena sila $\mathrm{d}\mathbf{B}$ kao i njen smisao.

Sa fizičkog stanovišta Piola-Kirhofovi tenzori nisu stvarne veličine zbog čega se nazivaju **pseudo-tenzori napona**. Pogodni su za teorijska razmatranja zbog čega se (35.116) često koristi u obliku

$$\begin{aligned} \mathrm{Div}\mathbf{T}_R + \rho_0(\mathbf{f} - \mathbf{a}) &= 0, \\ \mathbf{F}\mathbf{T}^T_R &= \mathbf{T}_R \mathbf{F}^T. \end{aligned} \tag{35.127}$$

36. Konstitutivne jednačine

36.1 Dinamički procesi

Već smo u uvodnom delu rekli da osnovni principi važe za sva materijalna tela. To su opšti zakoni konzervacije i balansa koje smo ovde izveli, a koje, u cilju preglednosti i dalje analize, ponovo navodimo:

Zakon konzervacije mase (str. 658)

$$\dot{\overline{\log\rho}} + I_d = 0, \quad \dot{\rho} + \rho \dot{x}^k_{,k} = 0, \quad \dot{\rho} + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{36.1}$$

Zakon balansa količine kretanja (str. 669)

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \rho(\mathbf{f} - \mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad \text{ili} \quad \nabla\cdot\mathbf{T} + \rho(\mathbf{f} - \mathbf{a}) = \mathbf{0}, \tag{36.2}$$

Zakon balansa momenta količine kretanja (str. 669)

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T, \tag{36.3}$$

Ove jednačine dalje nazivamo **jednačine polja**.

Analizom ovih izraza može se zaključiti da se proces u neprekidnom materijalnom telu može opisati sledećim funkcijama po promenjivim $\mathbf{X}$ i t, a predstavljaju sledeće fizičke veličine:

1. kretanje tela $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X},t)$;
2. gustinu ρ;
3. tenzor napona $\mathbf{T}\,(t^{kl})$;
4. zapreminsku silu $\mathbf{f}\,(f^k)$ kojom se ispoljava dejstvo okoline na telo.

Ovaj skup veličina, definisan za svaku česticu tela $\mathscr{B}$ i za svako t, se naziva **dinamički proces** akko je saglasan sa: **zakonom konzervacije mase**, **zakonom balansa količine kretanja** i **zakonom balansa momenta količine kretanja**.

Za preciziranje dinamičkog procesa dovoljno je poznavati skup $\{\rho, \mathbf{x}, \mathbf{T}\}$ imajući u vidu da je $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ i $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}$. Veličina $\mathbf{f}$ je onda određena pomoću (36.2). Pri tome se ima na umu pretpostavka da je početna raspodela gustine ρ_0 poznata. Kao posledica toga sledi, na osnovu (36.1) da je, za poznato kretanje $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X},t)$, poznata gustina $\rho = \rho(\mathbf{X},t)$.

Radi definisanosti kažemo:

Definicija 36.1.1 Uređen par $(\mathbf{x}, \mathbf{T})$ nazivamo **dinamičkim procesom** za telo $\mathscr{B}$, ako zadovoljava prvi i drugi Košijev zakon kretanja.

Ustvari, kada je zakon balansa momenta količine kretanja zadovoljen (koji nameće uslov simetričnosti tenzora napona $\mathbf{T}$, što je kod nas slučaj), zakon balansa količine kretanja ne nameće nikakva ograničenja na vrednost uređenog para $(\mathbf{x}, \mathbf{T})$, što nije teško pokazati.

Prvi Košijev zakon kretanja uspostavlja vezu između polja napona $\mathbf{T}$ i ubrzanja $\ddot{\mathbf{x}}(\equiv \mathbf{a})$ pod uslovom da je $\mathbf{f}$ poznato. Mada se u svakodnevnom životu i problemima u laboratorijama susrećemo samo sa nekoliko konkretnih sila ove vrste, npr. silom Zemljine teže, u principu ne postoji način na osnovu koga bi se mogle naznačiti sve moguće zapreminske sile. Zbog toga smo u razmatranjima, koja se odnose na sveukupnost svih mogućih kretanja tela, prinuđeni da smatramo da $\mathbf{f}$ nije podvrgnuto nikakvim ograničenjima. To znači da za proizvoljna dovoljno glatka polja $\mathbf{x}$ i $\mathbf{T}$ i određenu raspodelu gustine ρ iz jednačina kretanja, uvek možemo odrediti raspodelu zapreminskih sila $\mathbf{f}$ koje čine uređeni par $(\mathbf{x}, \mathbf{T})$ **dopustivim dinamičkim procesom**. Tako određene sile $\mathbf{f}$ mogu imati teorijskog, ali ne i praktičnog smisla.

U svakom slučaju možemo zaključiti da prvi Košijev zakon kretanja ne nameće nikakva ograničenja na $\mathbf{x}$ i $\mathbf{T}$. Saglasno tome svaki uređen par $(\mathbf{x}, \mathbf{T})$ koji se sastoji iz glatkog kretanja tela $\mathscr{B}$ i simetričnog tenzorskog polja u svakom trenutku t predstavlja dinamički proces.

36.2 Potreba za konstitutivnim jednačinama. Idealni materijali

Zakonomernost ponašanja pojedinih tela i njihovog reagovanja na spoljne uticaje, koje je uslovljeno prirodom materijala od koga je telo sačinjeno, određena je relacijama između veličina koje karakterišu njegova materijalna svojstva. Te relacije sa matematičkog stanovišta iskazuju se u obliku jednačina. Sa fizičkog stanovišta one predstavljaju **jednačine stanja** - termin uobičajen u termodinamici - ili **konstitutivne jednačine** - termin uobičajen u mehanici kontinuuma.

Očigledno je da jednačine polja, pošto važe za sva neprekidna tela, ne definišu svojsva i ponašanje pojedinih tela.

To znači da za svaki konkretan skup $(\mathbf{x}, \mathbf{T})$ uvek postoji potpuno određeno $\mathbf{f}$ koje $(\mathbf{x}, \mathbf{T})$ čini dopustivim dinamičkim procesom. Međutim, u obrnutom slučaju, tj. u slučaju potpuno određenog $\mathbf{f}$, iz (36.2) nije moguće jednoznačno odrediti skup $(\mathbf{x}, \mathbf{T})$, čak ni kada su u pitanju inkompresibilni materijali. Sa matematičkog stanovišta to je potpuno razumljivo, jer se iz sistema od tri jednačine (36.2) ne može, u opštem slučaju, jednoznačno odrediti devet funkcija x^i i t^{ij} $(t^{ij} = t^{ji})$. Za to je potrebno još šest jednačina po x^i i t^{ij}.

Razumljivo je to i sa fizičkog stanovišta. Zaista, poznato je da dva različita tela iste geometrije i raspodela masa različito reaguju - različito odgovaraju - različito se ponašaju pod dejstvom istih spoljnih uticaja. Primera radi: najveći broj čvrstih tela pod dejstvom spoljnog pritiska se slabo deformiše, dok fluidi teku i uzimaju oblik suda. Ovo ukazuje na značaj prirode tela. Zbog toga se, bez preciziranja materijala od koga je telo sačinjeno, ne može ni poznavati njegovo reagovanje na spoljne uticaje.

Prema tome, dopunski skup od šest jednačina, koji je potreban da bi proces $(\mathbf{x}, \mathbf{T})$ bio moguće jednoznačno odrediti, nije proizvoljan nego je onaj koji karakteriše materijal od koga je telo sačinjeno. Kratko rečeno: taj potreban skup jednačina jesu konstitutivne jednačine.

Očigledno je da konstitutivne jednačine nameću ograničenja na sile, ili kretanja, ili i na jedno i na drugo istovremeno. U tom smislu neke od konstitutivnih jednačina su trivijalne. Takav je slučaj sa spoljašnjim zapreminskim silama koje se, u skupu svih zapreminskih sila, karakterišu svojstvom da ne zavise od kretanja posmatranog tela koje može da zauzima deo prostora u kome te sile deluju. ”Ograničenja”na sile takve vrste ne potpadaju pod domen teorije konstitutivnih jednačina u mehanici kontinuuma i nadalje, takve sile smatramo poznatim $(\mathbf{f})$. Ali se zato konstitutivnim jednačinama detaljno analizira reagovanje materijala, koje se ispoljava preko kontaktnih sila, kada se telo nalazi pod dejstvom tih trivijalnih zapreminskih sila.

Zapravo, od svih sila kontaktne sile su jedine od interesa u mehanici kontinuuma. U odeljku (35.12), str. 664, videli smo da su one određene tenzorom napona $\mathbf{T}$.

Na osnovu ovih razmatranja može se zaključiti da je sada u teoriji konstitutivnih jednačina od posebnog interesa $\mathbf{T}$, koji je očigledno definisan sa šest funkcija. Tada je moguće, poznavanjem $\mathbf{T}$ u funkciji ρ, $\mathbf{x}$ za poznate veličine $\mathbf{f}$ jednoznačno odrediti četiri funkcionalne relacije

$$\rho = \rho(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \tag{36.4}$$

iz sistema od četiri jednačine (36.1), (36.2) i (36.3). [Zbog simetričnosti tenzora napona $\mathbf{T}$, jednačine (36.3) su identički zadovoljene.]

Ovo nam sugeriše prirodan put formiranja datih šest jednačina koje bi sa jednačinama polja činile potpun sistem jednačina. Na taj način dolazimo do **osnovnog konstitutivnog stava**.

Stav 4

U tački $\mathbf{x}$, koja određuje položaj neke materijalne čestice tela $\mathscr{B}$ u nekom trenutku t, tenzor napona $\mathbf{T}$ je jednoznačno određen kretanjem tela $\mathscr{B}$.

36.2.1 Idealni materijali

Teorija konstitutivnih jednačina zasnovana je na odgovarajućim fizičkim istinama i zahtevima. Na toj osnovi se dalje razvija kao matematička teorija i predstavlja izuzetno značajan deo mehanike kontinuuma. Materijali, za koje se na taj način određuju konstitutivne jednačine, predstavljeni su svojim matematičkim modelima. Takvi modeli predstavljaju idealna tela, pa prema tome konstitutivne jednačine definišu **idealan materijal**.

Broj i domen promena veličina u konstitutivnim jednačinama, ili kratko konstitutivnih promenljivih, određen je odgovarajućim fizičkim svojstvima materijala. Za nas će od posebnog značaja biti svojstva: elastičnosti, viskoznosti i plastičnosti kao i toplotna provodljivost neprekidnih tela. Ova svojstva poseduje svako telo. Kod nekih tela neka od svojstava su znatno izraženija. Koja od ovih svojstava će biti dominantna zavisi ne samo od unutrašnje strukture tela, nego i od spoljnih uticaja. Npr.: fluid se razlikuje od čvrstog tela po svojim svojstvom da ne može podneti dejstvo smičućeg napona. Fluid se pod njegovim dejstom deformiše neprekidno i neograničeno, ili kratko rečeno, fluid teče. Po prestanku dejstva sile na fluid, on se ne vraća u svoju nedeformisanu konfiguraciju.

Tečenje čvrstih tela nastaje samo u slučaju kada sile, koje na njega deluju, pređu neku granicu koja se naziva **granicom tečenja** za dati materijal. Tada se kaže da je reč o svojstvu plastičnosti čvrstog tela, čija se deformacija, po tom svojstvu, naziva **plastična deformacija**, ili **plastično tečenje tela**. U matematičkoj teoriji plastičnosti, plastično stanje, ili plastična deformacija su nezavisne od vremena. I u ovom slučaju po prestanku dejstva sila telo se ne vraća u celosti u svoju nedeformisanu konfiguraciju.

Za razliku od plastičnog tečenja, viskozno tečenje može da nastane pod dejstvom bilo kojih sila, ma koliko one bile male. Međutim, brzina deformacije se umanjuje kada dejstvo sila opada i pri njihovom iščezavanju postaje jednaka nuli.

Kada se čvrsto telo nalazi pod dejstvom sila, koje ne prelaze granicu tečenji, telo se elastično deformiše. Elastična tela se, po prestanku dejstva sila, vraćaju u svoju prvobitnu nedeformisanu konfiguraciju.

Za svaki od matematičkih modela kojima se predstavljaju realni materijali, sa ovde navedenim svojstvima, fotmulišu se odgovarajuće konstitutivne jednačine. Zbog toga ćemo dalje govoriti o konstitutivnim jednačinama realnih tela imajući u vidu da se, sa stanovišta teorije konstitutivnih jednačina, njihovo izvođenje odnosi na njima odgovarajuće matematičke modele. Takvi modeli su **idealno elastično čvrsto**, ili **Hukovo telo**, **idealni Njutnov fluid**, itd.

Realna tela u suštini poseduju složena, ili spregnuta svojstva, kao što su elasto-plastičnost, visko-elastičnost, visko-plastičnost i drugo, svojstva na koja nesumnjivo utiču i svojstva toplotnog provođenja. Posebna svojstva konkretnog tela karakterišu se njegovim konstitutivnim jednačinama. Prema tome, telima različitih fizičkih karakteristika odgovaraju i različite konstitutivne jednačine.

37. Opšti principi konstitutivnih jednačina

Veoma je bitno naglasiti da je Kostitutivna teorija mehanike kontinuuma tačka razgraničenje klasične mehanike sistema materijalnih tačaka i mehanike kontinuuma. Konstitutivna teorija tvrdi da neprekidana materijalna tela poseduju unutrašnja svojstava koja diskretni materijalni sistemi ne poseduju. Drugačije rečeno, diskretni materijalni sistemi su svi isti, sa stanovišta Konstitutivne teorije.

Istorijski gledano, matematičke osnove Konstituvne teorije mehanike kontinuuma naglo se razvijala u drugoj polovini 20. veka. Bez sumnje, tome su veliki doprinos dali Trusdel, Nol, Rivlin, Gurtin, Eringen, Podio Guidugli, Ogden i drugi. Njihovi radovi iz te oblasti Mehanike kontinuuma su temelj ove teorije koju ovde izlažemo.

Konstitutivne jednačine realnih tela moraju zadovoljavati i određene opšte principe. Zbog toga se u modernoj mehanici kontinuuma pristupa izvođenju konstitutivnih jednačina sa stanovišta tih opših principa koji važe za sva materijalna tela. Ovi principi nameću određena ograničenja na opšti oblik konstitutivnih jednačina. Dalja ograničenja su uslovljena zajedničkim svojstvima određene vrste, ili klase materijala, kao što su elastična, visko-elastična, plastična tela itd. U okviru te klase poseban materijal se karakteriše svojim posebnim fizičkim svojstvima koja imaju odraza na konačan oblik njemu odgovarajuće konstitutivne jednačine. Ovakav pristup izvođenju konstitutivnih jednačina nam omogućuje opšti uvid u ponašanje i reagovanje materijala, čime se isključuje mogućnost previda, posebno kada su u pitanju spregnuta svojstva materijala. Kratko rečeno: ovakav pristup izvođenju konstitutivnih jednačina se svodi na princip od opšteg ka pojedinačnom.

Sa matematičkog stanovišta osnovni principi koje moraju da zadovoljavaju konstitutivne jednačine predstavljaju polazni skup aksioma u teoriji konstitutivnih jednačina. I bez obzira što do sada ne postoji jedinstven prilaz teoriji konstitutivnih jednačina, moraju biti zadovoljeni sledeći principi (vidi R.W.Ogden):

- Princip determinizma za napon,
- Princip lokalnog dejstva,
- Princip materijalne objektivnosti,
- Princip materijalne invarijantnosti.

Definicija 37.0.1 Ako je Košijev napon $\mathbf{T}$ u svakoj tački materijala, u trenutku t, poznat za svako kretanje do trenutka t, onda relacija između napona $\mathbf{T}$ i istorije kretanja, do na trenutak t, opisuje reagovanje materijala na kretanje. Ova relacija se naziva **konstitutivna jednačina**.

Stav da se ponašanje materijala karakteriše poznavanjem napona $\mathbf{T}$ je pretpostavka i iskazuje se kao **Princip determinizma** (Trusdel i Nol). Određena modifikacija ovog principa se zahteva u slučaju kada je materijal podvrgnut dejstvu unutrašnjih veza. Uvode se i druge pretpostavke koje dovode do ograničenja oblika konstitutivnih jednačina. Ove pretpostavke se zasnivaju na fizičkim svojstvima materijala.

Tako pretpostavka da dva posmatrača u relativnom kretanju dolaze do ekvivalentnog (matematičkog i fizičkog) zaključka o makroskopskim svojstvima materijala, predstavlja osnov u razmatranju konstitutivne teorije u mehanici kontinuuma. Ona se zasniva na tvrđenju da materijalna svojstva ne zavise od superponiranog krutog kretanja. Kao njena posledica sledi zaključak da relacije između napona i kretanja imaju isti oblik za sve posmatrače. Iskazuje se kao **Princip materijalne objektivnosti**. Jasno je da Princip materijalne objektivnosti nameće izvesna ograničenja na oblik kontitutivne jednačine. Međutim, njen oblik je i dalje dovoljno opšt. Zbog toga je pitanje adekvatnog izbora dopustivih oblika konstitutivne jednačine, pri razmatranju realnih materijala, i dalje otvoreno i vrlo teško. Pri tom izboru rukovodimo se dodatnim, fizički zasnovanim, pretpostavkama. Tako npr. za materijale koji poseduju strukturnu simetriju (kristali) u jednoj, ili više referentnih konfiguracija dodatna ograničenja na oblik konstitutivnih jednačina su neophodna. Ova ograničenja su posledica principa poznatog pod imenom **Princip materijalne invarijantnosti**. Dalja ograničenja (matematička) se pojavljuju pri rešavanju graničnih problema. Ova ograničenja obično imaju oblik nejednakosti i po pravilu se odnose na problem egzistencije i jednoznačnosti rešenja posmatranog sistema diferencijalnih jednačina i graničnih uslova. Pri analizi ovih rešenja ograničavamo se na ona koja imaju fizičkog smisla, npr. sa stanovišta eksperimentalnih istraživanja. Ona dovode do određivanja uže klase konstitutivnih jednačina.

37.1 Opšta konstitutivna jednačina

Konstitutivna jednačina definiše matematički model realnog tela. Ona je osnov konstitutivne teorije koja se zasniva na određenim principima. Među njima najvažniji su napred navedeni: princip determinizma, lokalnog dejstva, materijalne objektivnosti i materijalne invarijantnosti. Odgovor na pitanje koja konstitutivna jednačina, ili jednačina stanja adekvatno opisuje ponašanje realnih tela može jedino dati eksperiment. Mi ih navodimo istim redom.

Princip determinizma za napon

Napon je određen istorijom kretanja tela do na posmatrani trenutak t.

Princip lokalnog dejstva

Pri određivanju napona za datu česticu, kretanje čestica izvan njene proizvoljne okoline može biti zanemareno.

Prevedeno na matematički jezik, ovi principi tvrde postojanje funkcionala $\mathscr{F}$[1] koji ima sledeća svojstva:

i. za svaki kinematički dopustiv proces napon $\mathbf{T}(t)$ u trenutku t dat je sa

$$\mathbf{T}(t) = \mathscr{F}\left[\boldsymbol{\chi}(Z,\tau), X, t\right], \quad \tau \leq t, \tag{37.1}$$

ii. za dva kretanja $\boldsymbol{\chi}$ i $\bar{\boldsymbol{\chi}}$ koja se poklapaju u nekoj okolini $N(X)$ za sve vreme $\tau \leq t$, vrednost $\mathscr{F}$ je ista. Formalno,

$$\mathscr{F}\left[\boldsymbol{\chi}(Z,\tau), X, t\right] = \mathscr{F}\left[\bar{\boldsymbol{\chi}}(Z,\tau), X, t\right], \tag{37.2}$$

pod uslovom da postoji okolina $N(X)$, tako da je

$$\boldsymbol{\chi}(Z,\tau) = \bar{\boldsymbol{\chi}}(Z,\tau), \quad \text{za sva} \quad Z \in N(X) \quad \text{i svako } \tau \leq t. \tag{37.3}$$

Jednačina (37.1), ograničena sa (37.2), je najopštija konstitutivna jednačina u mehaničkoj teoriji mehanike kontinuuma. Uočimo da je $\mathscr{F}$ funkcional funkcije $\boldsymbol{\chi}$ od dve promenljive, vremena t i promenljive Z u okolini fiksne čestice X. Vrednost funkcionala $\mathscr{F}$ određuje napon u položaju $\boldsymbol{\chi}(X,t)$ koji zauzima čestica X u trenutku t.

Nisu svi proizvoljni funkcionali koji zadovoljavaju uslov ii. dopustivi. Konstitutivna jednačina mora zadovoljavati sledeće principe:

37.2 Princip materijalne indiferentnosti

[1] Napomena. Ovde i nadalje veličine (oznake) $\mathfrak{F}$, $\mathscr{F}$, $\mathfrak{I}$, su tenzori dugog reda što se vidi iz prioženog.

37.2.1 Sistem referencije. Događaj

Osnovna ideja koja se koristi pri korektnom formulisanju konstitutivnih jednačina se zasniva na činjenici:

Fizička svojstva materijala i njegovo ponašanje ne zavisi od posmatrača.

Zbog toga je pri eksperimentalnim merenjima veoma važno znati izdvojiti one veličine koje karakterišu datu pojavu, a na koje kretanje posmatrača ne utiče. Za takve veličine kažemo da su **indiferentne**, ili *objektivne* i dovoljno ih je odrediti u odnosu na jednog posmatrača.

Sa matematičkog stanovišta posmatrač se karakteriše sistemom referencije u odnosu na koji izučavamo sve fizičke veličine i događaje. U kinematici postoje dve fundamentalne veličine koje merimo : **rastojanje** i **vremenski interval**. Fizički sistem referencije može biti zid laboratorije, neka zvezda, ili skup objekata čija tija uzajamna rastojanja ostaju nepromenjena za sve vreme kretanja. Vreme nekog događaja može biti određeno samo u odnosu na neki drugi događaj (na primer: u odnosu na vreme puštanja u rad štoperice) i smatramo ga delom sistema referencije. Prema tome, sistem referencije se može opisati kao mogući način povezivanja fizičke realnosti sa trodimenzionalnim euklidskim prostorom $\mathbb{E}_3$ i realnom vremenskom osom. To znači da su prostor i vreme samo oblici postojanja materije.

Događaj je par $(\mathbf{x},t)$, gde je $\mathbf{x}$ tačka u $\mathbb{E}_3$, a t vreme. Skup svih događaja se naziva **prostor-vreme**.

U slučaju kada se koristi Dekartov sistem koordinata u $\mathbb{E}_3$, tačke i njeni vektori položaja imaju iste koordinate. Tada ćemo pisati $\mathbf{z}$ za tačku i njen vektor položaja, kao i $(\mathbf{z},t)$ za događaj.

37.2.2 Promena sistema referencije

Pod promenom sistema referencije podrazumevamo obostrano jednoznačno preslikavanje prostor-vremena u samog sebe tako da:

a) rastojanja,
b) vremenski intervali i
c) vremenski redosled ostaju očuvani.

Neka $\mathbf{z}$ i t označavaju tačku i vreme u sistemu $\mathfrak{F}$, a $\mathbf{z}^*$ i t^* njima odgovarajući položaj i vreme u sistemu $\mathfrak{F}^*$. Tada je, pod gore navedenim uslovima, najopštija promena sistema referencije data sa:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^* &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{z} + \mathbf{c}(t), \\ t^* &= t - a, \end{aligned} \tag{37.4}$$

gde su:

$\mathbf{c}(t)$ - vektor položaja koordinatnog početka sistema $\mathfrak{F}$ u odnosu na koordinatni početak sistema $\mathfrak{F}^*$,

$\mathbf{Q}(t)$ - ortogonalan tenzor i

a - realan broj.

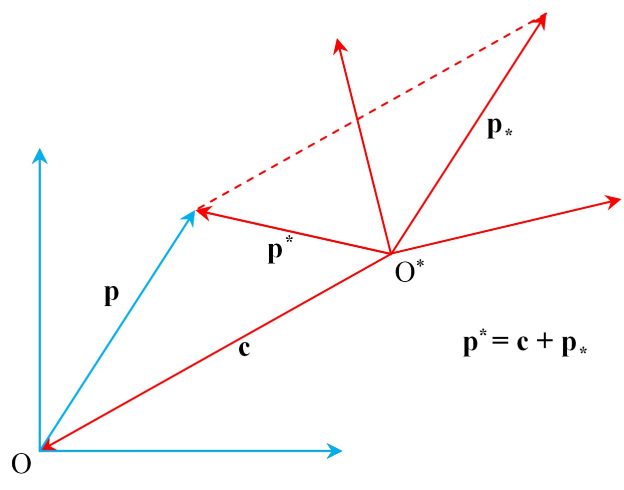
Za tenzor $\mathbf{Q}$ važi uslov

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad (\det\mathbf{Q} = \pm 1) \tag{37.5}$$

gde je $\mathbf{I}$ jedinični tenzor, a $\mathbf{Q}^T$ transponovani tenzor tenzora $\mathbf{Q}$. Tenzor tenzora $\mathbf{Q}$ određuje rotaciju za $\det\mathbf{Q} = +1$, a refleksiju, ili ogledanje za $\det\mathbf{Q} = -1$ starog sistema u odnosu na novi. U svakom slučaju, određuje relativnu orijentaciju posmatrača $\mathfrak{F}$ u odnosu na $\mathfrak{F}^*$. S obzirom na kruto kretanje, sledi da transformacija sistema referencije, data sa (37.4), ne predstavlja ništa drugo nego kruto pomeranje prostornog sistema referencije. Sa matematičkog stanovišta transformacija (37.4) ima grupno svojstvo i definiše **euklidsku transformaciju**.

N Od interesa je da se izvede $(37.4)_1$ kao promenu sistema referencije dva posmatrača u $\mathbb{E}_3$. Obeležimo njihove sisteme referencije sa O i O^*, a sa A događaj koji uočavaju. Vektore pložaja A u odnosu na ove posmatrače obeležimo sa $\mathbf{p}$ i $\mathbf{p}^*$, a njihove referentne sisteme sa $\{O, \mathbf{e}_k\}$ i $\{O^*, \mathbf{e}_k^*\}$, gde su $\mathbf{e}_k$ i $\mathbf{e}_k^*$, bazni vektori njihovih Dekartovih koordinata. Onda je $\mathbf{p} = p_k\mathbf{e}_k$ i $p_k = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_k)$. Takođe je $\mathbf{p}^* = p_k^*\mathbf{e}_k^*$.

Uočimo da su vektori $\mathbf{p}^*$ i $\mathbf{c}$ definisani u odnosu na sisatem reference $\{O^*, \mathbf{e}_k^*\}$, za razluku od vektora $\mathbf{p}$, koji je definisan u odnosu na $\{O, \mathbf{e}_k\}$. Očigledno je da vektor $\mathbf{c}$ određuje položaj koordinatnih početaka sistema O i O^*; definisan je u odnosu na sistem O^*.



Slika 37.1

Ilustrujemo to u slučaju E_2. Označimo sa $\mathbf{p}_*$ vektor $\mathbf{p}$ paraleno pomeren u koordinatni početak sistema O^*. Onda su vektori $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{c}$ i $\mathbf{p}_*$

definisane u $\{O^*, \mathbf{e}_k^*\}$ (vidi sliku 37.1), pa je

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{c} + \mathbf{p}_*, \tag{37.6}$$

Lema 3

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{p}, \tag{37.7}$$

gde je $\mathbf{Q}$ matrica rotacije koja prevodi bazne vektore $\{O, \mathbf{e}_k\}$ i $\{O^*, \mathbf{e}_k^*\}$.

Dokaz

Obeležimo sa $(\mathbf{e}_k)_*$ bazne vektore $\mathbf{e}_k$ paralelno pomerene u koordinatno početak sistema O^*. Onda je $(\mathbf{e}_k)_* = Q_{kl}\mathbf{e}_l^*$. Jasno je da je $(\mathbf{e}_k)_* \otimes \mathbf{e}_l^* = Q_{kl}$. Sledi da je

$$\mathbf{p}_* = p_k(\mathbf{e}_k)_* = p_k Q_{kl}\mathbf{e}_l^* = Q_{kl}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_l^* = Q_{kl}(\mathbf{e}_l^* \otimes \mathbf{e}_k)\mathbf{p} = \mathbf{Q}\mathbf{p}, \tag{37.8}$$

gde je $\mathbf{Q} = Q_{kl}(\mathbf{e}_l^* \otimes \mathbf{e}_k)$. Iz (39.12) i (39.14) sledi (39.13).

Potrebno je još dokazati da $\mathbf{Q} = Q_{kl}(\mathbf{e}_l^* \otimes \mathbf{e}_k)$ definiše ortogonalan tenzor. Onda je

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T &= (Q_{kl}(\mathbf{e}_l^* \otimes \mathbf{e}_k)(Q_{pq}(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q^*) = \\
&= Q_{kl}Q_{pq}\delta_{kp}(\mathbf{e}_l^* \otimes \mathbf{e}_q^*) = Q_{pl}Q_{pq}(\mathbf{e}_l^* \otimes \mathbf{e}_q^*) = \\
&= (\mathbf{e}_p)_* \otimes (\mathbf{e}_p)_* = \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

Radi kompletnosti navodimo $(37.4)_2$ koji je postulat.

Princip materijalne objektivnosti

Konstitutivna jednačina mora biti invarijantna pri promeni sistema referencije. Ako je konstitutivna jednačina zadovoljena za proces $(\mathbf{x}, \mathbf{T})$, gde je:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(X,t), \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(X,t), \tag{37.9}$$

onda je ona takođe zadovoljena za process $(\mathbf{x}^*, \mathbf{T}^*)$. To znači da konstitutiva jednačina mora biti zadovoljena takođe za kretanje i tenzor napona koji su dati sa:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^* &= \boldsymbol{\chi}^*(X,t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\chi}(X,t), \\
t^* &= t - a,
\end{aligned} \tag{37.10}$$

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^*(X,t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(X,t)\mathbf{Q}^T(t), \tag{37.11}$$

gde su $\mathbf{c}(t)$ i $\mathbf{Q}(t)$ neke proizvoljne vektorske funkcije i proizvoljna ortogonalna tenzorska funkcija vremena t, redom, gde je a proizvoljan broj.

Saglasno sa ovim principom,

$$\mathbf{T}^*(X,t^*) = \mathscr{F}\left[\boldsymbol{\chi}^*(Z,\tau^*),X,t^*\right], \tag{37.12}$$

za svaki proces $(\boldsymbol{\chi}^*,\mathbf{T}^*)$ koji je ekvivalentan procesu $(\boldsymbol{\chi},\mathbf{T})$. Ova funkcionalna jednačina mora biti identički zadovoljena za svako $\boldsymbol{\chi}$ i t.

U daljem postupku, s obzirom na (37.3), poželjno je eksplicitno pisati (37.10) za bilo koju česticu i vreme:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \boldsymbol{\chi}^*(Z,\tau^*) = \mathbf{c}(\tau) + \mathbf{Q}(\tau)\,\boldsymbol{\chi}(Z,\tau), \\ \tau^* &= \tau - a. \end{aligned} \tag{37.13}$$

Iz (37.13) se vidi da promenu sistema reference karakterišu tri nezavisne veličine: a, $\mathbf{c}(\tau)$ i $\mathbf{Q}(\tau)$. U cilju određivanja ograničenja na oblik funkcionala $\mathscr{F}$ koje one nameću, razmotrićemo posebno svaku od ovih veličina.

U tom cilju pogodno je pisati (37.11) u odbliku

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[\boldsymbol{\chi}^*(Z,\tau^*),X,t^*] &= \mathfrak{F}[\mathbf{c}(\tau) + \mathbf{Q}(\tau)\boldsymbol{\chi}(Z,\tau),X,t-a] = \\ &= \mathbf{Q}(t)\,\mathfrak{F}[\boldsymbol{\chi}(Z,\tau),X,t]\mathbf{Q}(t)^T. \end{aligned} \tag{37.14}$$

I. Kruto kretanje prostornog sistema

U ovom slučaju je $\mathbf{Q}(\tau) = I$, $a = 0$. Biramo $\mathbf{c}(\tau) = -\boldsymbol{\chi}(X,\tau)$. Onda je, prema (37.13),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}^*(X,\tau^*) &= \mathbf{0}, \\ \tau^* &= \tau. \end{aligned}$$

Ovaj izbor odgovara relativnoj translaciji dva sistema referenci u kojoj čestica X ostaje u miru u koordinatnom početku (sistem reference sa zvezdicom). Takođe je

$$\begin{aligned} t^* &= t, \\ \boldsymbol{\chi}^*(Z,\tau) &= \boldsymbol{\chi}(Z,\tau) - \boldsymbol{\chi}(X,\tau). \end{aligned} \tag{37.15}$$

Poslednji izraz ne predstavlja ništa drugo nego lokalizaciju kretanja $\boldsymbol{\chi}$ u odnosu na česticu X. Koristeći ove izraze u (37.11) dobijamo

$$\mathbf{T}^*(X,t) = \mathbf{T}(X,t), \tag{37.16}$$

ili, saglasno sa (37.14), (37.11) i (37.12),

$$\mathbf{T}(t) = \mathscr{F}\left[\boldsymbol{\chi}(Z,\tau),X,t\right] = \mathscr{F}\left[\boldsymbol{\chi}(Z,\tau) - \boldsymbol{\chi}(X,\tau),X,t\right]. \tag{37.17}$$

II. Vremenska translacija

U ovom slučaju je $\mathbf{Q}(\tau)=\mathbf{I}$, $\mathbf{c}(\tau)=\mathbf{0}$, $a=t$. Sada je, redom prema (37.13), (37.10) i (37.11),

$$\begin{aligned}\tau^* &= \tau - t = -s,\\ \boldsymbol{\chi}^*(Z,\tau^*) &= \boldsymbol{\chi}(Z,t+\tau^*),\\ t^* &= 0,\\ \mathbf{T}^*(0) &= \mathbf{T}(t),\end{aligned} \tag{37.18}$$

gde je $s \geq 0$. Onda je

$$\mathscr{F}\left[\boldsymbol{\chi}(Z,\tau),X,0\right] = \mathscr{F}\left[\boldsymbol{\chi}(Z,t+\tau),X,t\right], \tag{37.19}$$

odakle sledi da $\mathscr{F}$ ne zavisi eksplicitno od t.

Iz (37.17) i (37.19) sada sledi da je

$$\mathbf{T}(t) = \mathfrak{F}\left[\boldsymbol{\chi}(Z,t-s)-\boldsymbol{\chi}(X,t-s)\right], \quad s \geq 0, \tag{37.20}$$

gde smo radi pogodnosti zamenili τ sa $\boldsymbol{\tau} = t - s$.

Uprošćenje ovog izraza se dalje dobija ako se, na osnovu principa lokalnog dejstva, ograničimo na aproksimaciju

$$\boldsymbol{\chi}(Z,t-s)-\boldsymbol{\chi}(X,t-s) \approx \mathbf{F}(X,t-s)\,\mathrm{d}X. \tag{37.21}$$

. Veličina

$$\mathbf{F}(X,t-s) \equiv \mathbf{F}^t(X,s) \tag{37.22}$$

definiše istoriju gradijenta deformacije do na trenutak t. Ona je nezavisna od okoline $N(X)$ u referentnoj konfiguraciji i kretanja $\boldsymbol{\chi}$. Međutim, $\mathrm{d}X = Z - X$ isključivo zavisi od referentne konfiguracije. Za dovoljno bliske čestice Z čestici X, uticaj $\mathrm{d}X$ u konstitivnoj jednačini (37.20) se može zanemariti. Za takvo kretanje se kaže da je **lokalno homogeno** (treba praviti razliku između pojmova: homogeno kretanje i homogen materijal, o čemu će kasnije biti više reči). U tom slučaju (37.20) postaje

$$\mathbf{T}(t) = \mathfrak{F}\left[\mathbf{F}^t(X,s),X\right]. \tag{37.23}$$

Takav materijal, čije je reagovanje na svaku deformaciju jednoznačno određeno njegovim reagovanjem na homogenu deformaciju u okolini X, nazivamo **prost materijal**. Samo prosti materijali će biti predmet naših daljih izučavanja.

III. Kruta rotacija prostornog sistema reference

Onda je $\mathbf{c}(\boldsymbol{\tau})=\mathbf{0}$, $a=0$, a $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\tau})$ proizvoljno.

Iz (37.10) i (37.13) sledi da je

$$t^* = t,$$
$$\tau^* = \tau,$$
$$\boldsymbol{\xi}^*(X,\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\boldsymbol{\xi}(X,\tau),$$

odakle se dobija

$$\mathbf{F}^*(X,\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F}(X,\tau). \tag{37.24}$$

Onda je i

$$\mathbf{F}^*(X,s) = \mathbf{Q}^t(s)\mathbf{F}^t(X,s). \tag{37.25}$$

Sada, saglasno sa (37.11), (37.23), (37.24), dobijamo

$$\mathbf{Q}(t)\mathfrak{F}\left[\mathbf{F}^t(X,s),X\right]\mathbf{Q}^T(t) = \mathfrak{F}\left[\mathbf{Q}^t(s)\mathbf{F}^t(X,s),X\right]. \tag{37.26}$$

S obzirom da je $s \geq 0$ ili, ekvivalentno tome, $\tau \leq t$, ova jednačina mora da važi za svaku predistoriju ortogonalnog tenzora $\mathbf{Q}^t(s)$ i svaku predistoriju gradijenta deformacije $\mathbf{F}^t(X,s)$. Uočimo da je $\mathbf{Q}^t(0) = \mathbf{Q}(t)$.

Jednačina (37.23), podvrgnuta uslovu (37.26), predstavlja **najopštiji oblik** konstitutivne jednačine za proste materijale u mehanici (nepolarnog) kontinuuma. Samim tim se podrazumeva da ona mora zadovoljavati i ostale principe konstitutivne teorije, kao na primer princip materijalne invarijantnosti. Opšte rešenje ove jednačine daje Nolova teorema:

Teorema 37.2.1 — Nolova-1. Funkcional $\mathscr{F}\left[\mathbf{F}^t(X,s),X\right]$ zadovoljava (37.26) akko je

$$\mathscr{F}\left[\mathbf{F}^t(X,s),X\right] = \mathbf{R}^t\mathscr{F}\left[\mathbf{U}^t(X,s),X\right]\mathbf{R}^T. \tag{37.27}$$

Dokaz

Uslov (37.27) je potreban. U tom cilju, koristeći teoremu o polarnoj dekompoziciji regularnog tenzora, pišemo

$$\mathbf{F}^t(X,s) = \mathbf{R}^t(X,s)\mathbf{U}^t(X,s),$$

gde je $\mathbf{R}^t(X,s)$ tenzor rotacije, a $\mathbf{U}^t(X,s)$ simetrični pozitivno definitni tenzor izduženja. Jedačina (37.26) mora da važi za proizvoljno ortogonalno $\mathbf{Q}^t(s)$, pa prema tome i za

$$\mathbf{Q}^t(s) = \left[\mathbf{R}^t(s)\right]^T.$$

Tada je

$$\mathbf{Q}^t(s) = \mathbf{F}^t(X,s)\mathbf{U}^t(X,s) \quad \text{i} \quad \mathbf{Q}(t) = \mathbf{R}^T(t).$$

Smenom ovih izraza u (37.26) dobijamo (37.27). Uslov (37.27) je dovoljan. Onda je

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[Q^t(s)\mathbf{F}^t(X,s),X\right] &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t)\mathscr{F}\left[\mathbf{U}^t(X,s),X\right]\left[\mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t)\right]^T = \\ &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t)\mathscr{F}\left[\mathbf{U}^t(X,s),X\right]\mathbf{R}^T(t)\mathbf{Q}^T(t) = \\ &= \mathbf{Q}(t)\mathscr{F}\left[\mathbf{F}^t(X,s),X\right]\mathbf{Q}^T(t).\end{aligned}$$

Analiza redukovane konstitutivne jedančine (37.27) pokazuje da je funkcional reagovanja $\mathscr{F}$ u potpunosti nezavisan od predistorije rotacije $\mathbf{R}^T(s)$, $s > 0$, da zavisi od rotacije $\mathbf{R}(t)$ u posmatanom trenutku t i da je proizvoljni funkcional predistorije tenzora izduženja $\mathbf{U}^t(X,s)$.

Dalje, iako $\mathbf{R}$ i $\mathbf{U}$ imaju neposredno fizičko značenje, ni jedno njihovo određivanje nije jednostavno. Međutim, gradijent deformacije $\mathbf{F}$, kao i tenzori deformacija $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^2$ i $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$, mogu biti lako određeni. Prema tome, pogodnije je koristiti funkcional reagovanja izražen preko ovih veličina. Tako, na primer,

$$\mathfrak{I}\left[\mathbf{C}^t(s),X\right] = \mathscr{F}\left[\mathbf{U}^t(s),X\right]$$

određuje tenzor napona sa

$$\mathbf{T}(X,t) = \mathbf{Q}(t)\mathfrak{I}\left[\mathbf{C}^t(s),X\right]\mathbf{Q}^T(t), \tag{37.28}$$

koji je jednostavniji za računanje. Mogući su i drugi redukovani oblici funkcionala reagovanja koji se izražavaju preko drugih mera deformacije, kao na primer preko tenzora relativne deformacije $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$. Ovi posebni oblici uslovljeni su karakterom i prirodom problema koji se izučava. Mi se na tome ovde nećemo dalje zadržavati.

N Napomena 1. Fizički, deformabilno materijalno telo može posedovati niz osobina kao što su boja, hemijski sastav, toplotnu provodljivost, električnu provodljivost, itd. Mehaničke osobine materijala, koje se matematički iskazuje konstitutivnom jednačinom, su samo jedne od fizičkih osobina tela. Međutim, sve druge osobine su potpuno irelevantne u okviru mehanike kontinuuma, kada je reč o matematičkom određivanju kretanja tela pod uticajem samo spoljašnjih sila. Primera radi, ako dva tela različitog hemijskog sastava isto mehanički reaguju, onda se njihova reagovanja u mehanici kontinuuma iskazuju istom konstitutivnom jednačinom. S druge strane, voda i led su istog hemijskog sastava, H_2O. Međutim, njihovo ragovanje na istu deformaciju je različito i moramo ih modelirati različitim konstitutivnim jedačinama.

37.3 Princip materijalne invarijantnosti

Sva dosadašnja razmatranja konstitutivne teorije odnosila su se na jednu referentnu konfiguraciju tela, recimo k.

Na isti način, saglasno sa Nolovom teoremom, pišemo tenzor napona $\mathbf{T}(t)$ u odnosu na konfiguracije κ i $\bar{\kappa}$:

$$\mathbf{T}(t) = \mathscr{F}_k \left[\mathbf{F}^t(X,s),X\right], \tag{37.29}$$

i

$$\mathbf{T}(t) = \mathscr{F}_{\bar{k}} \left[\bar{\mathbf{F}}^t(X,s),X\right]. \tag{37.30}$$

Napomenimo da se koriste i druge oznake za isticanje značaja konfiguracije. Tako Vang[2] piše

$$\mathbf{T}(t) = \mathscr{F} \left[\mathbf{F}^t(X,s),X,k\right],$$

odnosno

$$\mathbf{T}(t) = \mathscr{F} \left[\bar{\mathbf{F}}^t(X,s),X,\bar{k}\right].$$

Ovaj način obeležavanja, mada duži, ima i svoje prednosti, jer naznačava istu tenzorsku veličinu izraženu u raznim referentnim konfiguracijama. U tom smislu treba shvatiti i način obeležavanja Nola.

U ovom delu naših razmatranja dominantnu ulogu imaće razne referentne konfiguracije za istu česticu X. Tada u (37.29), odnosno (37.30), nećemo ekplicitno pisati njihovu zavisnost od X, jer će se ona dalje u tim izrazima podrazumevati. Očigledno da se sada (37.29) i (37.30) mogu sažeto pisati kao

$$\mathbf{T}(t) = \mathscr{F}_k \left[\mathbf{F}^t(s)\right] = \mathscr{F}_{\bar{k}} \left[\bar{\mathbf{F}}^t(s)\right]. \tag{37.31}$$

Na isti način, kao $\mathbf{F}_\kappa = \bar{\mathbf{F}}_{\bar{\kappa}}\mathbf{P}$, može se pokazati da je

$$\mathbf{F}^t(s) = \bar{\mathbf{F}}^t(s)\mathbf{P}. \tag{37.32}$$

Tada se (37.31) može izraziti u obliku

$$\mathbf{T}(t) = \mathscr{F}_k \left[\mathbf{F}^t(s)\right] = \mathscr{F}_{\bar{k}} \left[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{P}^{-1}\right], \tag{37.33}$$

tj. kao funkcional $\mathbf{F}^t(s)$ u obe konfiguracije. Ova jednačina mora da važi za svako $\mathbf{F}^t(s)$ u različitim referentnim konfiguracijama k u $\bar{k}$. Sa formalno matematičkog stanovišta, ona ne predstavlja nikakvo ograničenje na oblik funkcionala $\mathscr{F}_k$, jer iskazuje samo način predstavljanja funcionala reagovanja materijala u dvema različitim konfiguracijama.

[2] Wang

37.4 Materijalni izomorfizam. Homogenost

Ovde preciziramo pojmove od značaja za dalje egzaktno izvođene konstitutivne teorije.

Za referentnu konfiguraciju k kažemo da ima **konstantnu gustinu**, ako je $\rho_k = \text{const.}$, tj. ako je ρ_k nezavisno od X. Za dve čestice X i $\hat{X}$ se kaže da su **materijalno izomorfne**, ako je moguće naći referentnu konfiguraciju k okoline $N(X)$ i referentnu konfiguraciju $\bar{k}$ okoline $N(\hat{X})$ tako da:

a) k i $\hat{k}$ imaju istu uniformnu gustinu, tj.

$$\rho_k = \rho_{\hat{k}} = \text{const.} \tag{37.34}$$

b) Funkcional reagovanja, tj. konstitutivni funkcional u X je isti, kao i funkcional reagovanja u $\hat{X}$, tj.

$$\mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\right] = \mathscr{F}_{\hat{k}}\left[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{P}^{-1}\right] = \mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{P}^{-1}\right] \tag{37.35}$$

za sve glatke funkcije $\boldsymbol{\chi}(Z,s)$, svako $s \geq 0$ i svako $Z \in N(X)$.

Poslednji uslov zahteva da funkcional $\mathscr{F}_{\hat{k}}\left[\bar{\mathbf{F}}^t(s)\right]$ od $\bar{\mathbf{F}}^t(s) = \mathbf{F}^t(s)\mathbf{P}^{-1}$ je isti kao i $\mathscr{F}_k[\mathbf{F}^t(s)]$.

Fizičko značenje ove definicije je iskazano u Napomeni na str. 690. Kratko rečeno, dve čestice su materijano izomorfne akko je njihovo reagovanje na istu istoriju deformacije, opisano u odnosu na pogodne referentne konfiguracije, isto. Prevedeno na jezik mehanike kontinuuma, smatramo da su te čestice sastavljene od istog materijala.

Ako su sve čestice tela B uzajamno materijalno izomorfne, onda se kaže da je telo B **materijalno uniformno**. To znači da se za svaku česticu $X \in B$ materijano uniformnog tela može naći referentna konfiguracija k njene okoline $N(X)$, tako da je ρ_k uniformno i nezavisno od X i da je funkcional reagovanja $\mathscr{F}$ koji odgovara čestici X isti za sve $X \in B$. U opštem slučaju, potrebno je birati različite referentne konfiguracije k^X za različite čestice uniformnog tela.

U specijalnom slučaju, kada se materijalni izomorfizam svih čestica uniformnog tela može odrediti u odnosu na **jednu** referentnu konfiguraciju k za celo telo, onda se za telo kaže da je **homogeno**. U tom slučaju $\mathscr{F}_k$ u odnosu na tu konfiguraciju k ne zavisi od X, odnosno $\mathbf{X}$. Sa fizičkog stanovišta, telo je homogeno akko postoji referentna konfiguracija za celo telo, tako da svaka čestica tela reaguje na isti način, istovetno, na istoriju deformacije datu u odnosu na tu konfiguraciju. Za homogena tela konfiguracija k^X može biti posmatrana kao lokalizacija k^X globalne referentne konfiguracije, mada u opštem slučaju, k^X nisu lokalizacije.

Svako homogeno telo je uniformno. Obrnuto ne važi. Primer uniformog, ali nehomogenog tela, je telo sa defektima, ili dislokacijama.

Mi ćemo se do daljnjeg, ako se drugačije ne kaže, baviti homogenim telima.

37.5 Grupa simetrije (grupa izotropije)

Može se desiti da je materijalna čestica X netrivijalno materijalno izomorfna u odnosu na samu sebe - **automorfne**. Prema definiciji materijalnog izomorfizma to znači da postoje dve konfiguracije k i $\hat{k}$ iste gustine okoline čestice X za koje su njima odgovarajući funkcionali reagovanja $\mathscr{F}_k$ i $\mathscr{F}_{\hat{k}}$ isti. Sa fizičkog stanovišta to znači da se materijal u čestici X u konfiguraciji k ne razlikuje, prema svome reagovanju, od istog matrijala, pošto se ono defomacijom prevede u konfiguraciju $\hat{k}$. Na primer, ako je telo kristal, onda se njegove dve konfiguracije, koje se prevode jedna u drugu tranformacijom koja pripada njegovoj kristalografskoj grupi, ne razlikuju sa stanovišta njegovog reagovanja. Za proste materijale uslov poklapanja funkcionala reagovanja u odnosu na dve konfiguracije k i $\hat{k}$ sledi iz (37.32). Izražen u odnosu na konfiguraciju k, glasi

$$\mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\right] = \mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{P}^{-1}\right] \tag{37.36}$$

i saglasno sa (37.35), mora da važi za svako $\mathbf{F}^t(s)$. Gradijent deformacije $\mathbf{P} : k \Rightarrow \hat{k}$ je, u ovom slučaju, **unimodularan**, jer se pri takvoj deformaciji referentnih konfiguracija gustina očuvava. Zaista, tada je

$$\det\left(\mathbf{F}^t(s)\right) = \det\left(\hat{\mathbf{F}}^t(s)\right),$$

tako da iz

$$\mathbf{F}^t(s) = \hat{\mathbf{F}}^t(s)\mathbf{P},$$

sledi

$$\det\left(\mathbf{F}^t(s)\right) = \det\left(\hat{\mathbf{F}}^t(s)\right)\det(\mathbf{P}) \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{P}) = 1,$$

tj. $\mathbf{P} \in u$, gde smo sa u označili **unimodularnu grupu**.

Mi ćemo, do daljnjeg, razmatrati posledice uslova (37.36) bez tog ograničenja na regularan tenzor $\mathbf{P}$. U tom slučaju, tj. u slučaju netrivijalnog materijalnog izomorfizma, pogodno je koristiti oznaku $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{H}$. Tada (37.36) pišemo u obliku

$$\mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\right] = \mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{H}\right]. \tag{37.37}$$

Tenzor $\mathbf{H}$, koji zadovoljava (37.36), dalje nazivamo **materijalni automorfizam** čestice X u odnosu na konfiguraciju k. Skup svih takvih $\mathbf{H}$ obeležimo sa g_k.

Teorema 37.5.1 Skup g_k svih materijalni automorfizama čestice X u odnosu na konfiguraciju k obrazuje grupu.

Dokaz

Neka (37.37) važi za $\mathbf{H}_1$ i $\mathbf{H}_2$. Onda je:

$i.$ $\mathscr{F}_k[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2] = \mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{H}_1\right] = \mathscr{F}_k[\mathbf{F}^t(s)]$,

$ii.$ $\mathscr{F}_k[\mathbf{F}^t(s)] = \mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\right] = \mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{H}^{-1}\right]$,

$iii.$ Za $\mathbf{I}$ trivijalno sledi da je $\mathbf{HI} = \mathbf{IH}$, za svako $\mathbf{H}$,

$iv.$ Važi asocijativni zakon $(\mathbf{HH}_1)\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}(\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2)$, za svako $\mathbf{H}, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$.

Definicija 37.5.1 Grupu g_k nazivamo **grupa simetrije**, ili **grupa izotropije** čestice X u odnosu na konfiguraciju k.

Očigledno da je najveća moguća grupa izotropije g_k unimodularna grupa u.

Napomenimo da postupak, kojim smo objasnili materijalni automorfizam, pre ukazuje na (37.37) kao definiciju grupe izotropije g_k, nego kao uslov na funkcional reagovanja $\mathscr{F}_k$. U primeni, međutim, funkcional $\mathscr{F}_k$ je retko kad dat eksplicitno, dok se za grupu g_k pretpostavlja da je poznata. Onda (37.37) postaje uslov na oblik neodređenog funkcionala $\mathscr{F}_k$. To znači da propisivanje grupe izotropije sužava klasu dopustivih funkcionala reagovanja. Prema tome, uslovi materijalne objektivnosti (37.26) i materijalne simetrije (37.37) su dva fundamentalna uslova na kojima se zasniva konstitutivna teorija prostih materijala.

Na osnovu definicije, grupa izotropije g_k zavisi od izbora lokalne referentne konfiguracije k. To smo i istakli u samoj oznaci grupe. U odnosu na drugu referentnu konfiguracuju grupa izotropije biće $g_{\hat{k}}$. Postavlja se pitanje kakav je odnos grupa izotropija pri promeni referentnih konfiguracija $k \to \hat{k}$. Odgovor na to pitanje daje Nolova teorema:

Teorema 37.5.2 — Nolova-2. Neka su k i $\hat{k}$ dve referentne konfiguracije i neka je $\mathbf{P} : k \quad \Rightarrow \quad \hat{k}$. Onda je

$$g_{\hat{k}} = \mathbf{P} g_k \mathbf{P}^{-1}, \tag{37.38}$$

tj. grupe izotropije u odnosu na dve referentne konfiguracije su uzajamno konjugovane.

Dokaz

Neka je $\mathbf{H} \in g_k$. Onda (37.37) važi za svako regularno $\mathbf{F}^t(s)$. Tada je

$$\mathscr{F}_{\hat{k}}\left[\hat{\mathbf{F}}^t(s)\mathbf{PHP}^{-1}\right] = \mathscr{F}_{\hat{k}}\left[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{HP}^{-1}\right] = \mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{H}\right] =$$
$$= \mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\right] = \mathscr{F}_{\hat{k}}\left[\hat{\mathbf{F}}^t(s)\right],$$

tj.

$$\mathbf{PHP}^{-1} \in g_{\hat{k}}.$$

Pri ovom izvođenju u prvoj jednakosti smo koristili činjenicu da je $\mathbf{F}^t(s) = \hat{\mathbf{F}}^t(s)\mathbf{P}$, u drugoj (37.33) u obliku $\mathscr{F}_{\hat{k}}\left[\hat{\mathbf{F}}^t(s)\mathbf{P}^{-1}\right] = \mathscr{F}_k[\mathbf{F}^t(s)]$, u trećoj (37.37) i četvrtoj (37.31) u obliku $\mathscr{F}_k[\mathbf{F}^t(s)] = \mathscr{F}_{\hat{k}}\left[\hat{\mathbf{F}}^t(s)\right]$.

Izraz (37.38) poznat je pod imenom **Nolovo pravilo**. Iz njega slede dva specijalna slučaja:

I. Ako je $\mathbf{P} \in g_k$, onda je $g_{\hat{k}} = g_k$. Tada je reč o automorfizmu. Trivijalan slučaj.

II. Ako je $\mathbf{P}$ čista dilatacija, tj. $\mathbf{P} = \lambda\mathbf{I}$, gde je λ pozitivan skalar, onda je $g_{\hat{k}} = g_k$.

To znači da se grupa izotropije ne menja pri promeni referentne konfiguracije pri čistoj dilataciji.

U matematičkoj terminologiji za $\mathbf{P} = \lambda\mathbf{I}$ se kaže da je **sferni tenzor**.

Kako je $\mathbf{H} \in g_k$ regularan tenzor, onda se on jednoznačno može predstaviti kao proizvod sfernog i unimodularnog tenzora, tačnije

$$\mathbf{H} = \left[(\det(\mathbf{H}))^{1/3}\mathbf{I}\right](\det(\mathbf{H}))^{-1/3}\mathbf{H},$$

gde je očigledno $(\det(\mathbf{H}))^{1/3}\mathbf{I}$ sferni, a $(\det(\mathbf{H}))^{-1/3}\mathbf{H}$ unimodularni tenzor. Na osnovu II. grupu izotropije g_k karakteriše samo unimodularni deo $\mathbf{H} \in g_k$. Zbog toga se dalje razmatraju samo automorfizmi $\mathbf{H}$ za koje je $\det(\mathbf{H}) = 1$. Prema tome grupa izotropije je podgrupa unimodularne grupe, tj.

$$g_k \subset u. \tag{37.39}$$

Uočimo da se ograničenje na unimodularne tenzore očuvava pri bilo kojoj promeni referentne konfiguracije. Naime, za bilo koje $\mathbf{H} \in u$ biće $\mathbf{PHP}^{-1} \in u$ za bilo koje regularno $\mathbf{P}$. Na osnovu toga zaključujemo:

Grupa izotropije g_k postaje grupa izotropije $g_{\hat{k}}$ pri promeni referentne konfiguracije $\mathbf{P} : k \to \hat{k}$.

Međutim, važno je uočiti da, iako su elementi grupa g_k i $g_{\hat{k}}$ unimodularni tenzori, referentne konfiguracije k i $\hat{k}$ ne moraju imati iste gustine. Primera radi, kada je $\mathbf{P} = \lambda\mathbf{I}$, $\lambda > 1$, referentna konfiguracija $\hat{k}$ se dobija iz k zapreminskim širenjem i, prema II, $g_k = g_{\hat{k}}$. Tada iz $\mathbf{F}^t(s) = \hat{\mathbf{F}}^t(s)\mathbf{P}$ sledi

$$\det(\mathbf{F})^t(s) = \lambda^3 \det\big(\hat{\mathbf{F}}\big)^t(s) \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{F})^t(s) > \det\big(\hat{\mathbf{F}}\big)^t(s),$$

pa je i

$$\rho_k > \rho_{\hat{k}}.$$

Ako je $g_k = u$, onda je $g_k = g_{\hat{k}} = u$, pri svakoj promeni referentne konfiguracije. Rečima:

Unimodularna grupa izotropije je invarijantna u odnosu na sve referentne konfiguracije.

Međutim, ako je g_k prava podgrupa unimodularne grupe u, tj. $g_k \subset u$, onda je, u opštem slučaju $g_{\hat{k}} \neq g_k$. U svakom slučaju može se pokazati da elemente u čine: rotacija, čisto smicanje, izduženja sa bočnim kontrakcijama i kombinacije takvih deformacija.

U mnogim slučajevima nas interesuju posebno članovi grupe izotropije koji su ortogonalni.

Teorema 37.5.3 Ortogonalni tenzor $\mathbf{Q}$ pripada grupi izotropije g_k akko je

$$\mathbf{Q}\mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\right]\mathbf{Q}^T = \mathscr{F}_k\left[\mathbf{Q}\mathbf{F}^t(s)\mathbf{Q}^T\right] \tag{37.40}$$

identički zadovoljeno za svako $\mathbf{F}^t(s)$.

Dokaz

Neka je $\mathbf{Q} \in g_k$. Kako je g_k grupa i $\mathbf{Q}$ ortogonalno, onda je i $\mathbf{Q}^T \in g_k$ pa je, prema (37.37),

$$\mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\right] = \mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{Q}^T\right],$$

koje mora da važi za svako regularno $\mathbf{F}^t(s)$. Za regularno $\mathbf{Q}\mathbf{F}^t(s)$, ono postraje

$$\mathscr{F}_k\left[\mathbf{Q}\mathbf{F}^t(s)\right] = \mathscr{F}_k\left[\mathbf{Q}\mathbf{F}^t(s)\mathbf{Q}^T\right].$$

Međutim, saglasno sa (37.26), koje važi za savaki ortogonalan tenzor, pa prema tome i za svako $\mathbf{Q} \in g_k$, biće

$$\mathbf{Q}\mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\right]\mathbf{Q}^T = \mathscr{F}_k\left[\mathbf{Q}\mathbf{F}^t(s)\right].$$

Iz ova dva poslednja izraza sledi (37.40).

Obrnuto, neka (37.40) važi za neko ortogonalno $\mathbf{Q}$. Onda iz (37.40) i poslednjeg izraza, koji važi za svaki ortogonalni tenzor, pa prema tome i za $\mathbf{Q}$, dobijamo

$$\mathscr{F}_k\left[\mathbf{Q}\mathbf{F}^t(s)\right] = \mathscr{F}_k\left[\mathbf{Q}\mathbf{F}^t(s)\mathbf{Q}^T\right],$$

koje važi za svako regularno $\mathbf{F}^t(s)$. Onda ono važi i za $\mathbf{Q}\mathbf{F}^t(s)$. Tada ova relacija postaje

$$\mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\right] = \mathscr{F}_k\left[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{Q}^T\right],$$

odakle sledi, saglasno sa (37.37), da je $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1} \in g_k$. Kako je g_k grupa, onda je i $\mathbf{Q} \in g_k$.

Teorema 37.5.3 je od izuzetnog značaja u konstitutivnoj teoriji. Tako se iz

(37.37) odmah zaključuje da su $\mathbf{I}$ i $-\mathbf{I}$ uvek elementi grupe simetrije. Kako je $\{\mathbf{I}, -\mathbf{I}\}$ grupa, onda možemo zaključiti na je najmanja grupa koju materijal može imati grupa $\{\mathbf{I}, -\mathbf{I}\}$. Formalno,

$$\{\mathbf{I}, -\mathbf{I}\} \subseteq g_k \subseteq u.$$

Ako je neko ortogonalno $\mathbf{Q} \in g_k$, onda je i $-\mathbf{Q} \in g_k$. Prema tome, grupa g_k ne može sadržati ortogonalnu svojstvenu grupu O_0, tj. ortogonalne tenzore $\mathbf{Q}$ za koje je $\det(\mathbf{Q}) = 1$, ako ne sadrži ortogonalnu grupu O.

Definicija 37.5.2 Za matrijal se kaže da je **izotropan** ako postoji bar jedna lokalna referentna konfiguracija u odnosu na koju je grupa izotropije, koja odgovara njegovom funkcionalu reagovanja, sadrži ortogonalnu grupu O, tj. ako je

$$O \subset g_k. \tag{37.41}$$

Takva lokalna referentna konfiguracija se naziva **neizobličeno stanje** materijala.

To znači da materijal u neizobličenom stanju nema privilegovanih pravaca i da prema tome fizički test ne može da otkrije da li je materijal bio proizvoljno rotiran pre nego što je testiran.

U slučaju izotropnih materijala (37.39) i (37.40) možemo pisati u obliku

$$O \subset g_k \subset u. \tag{37.42}$$

Međutim, kako je, prema teoremi teorije grupa, ortogonalna grupa O maksimalna podgrupa unimodularne grupe u, onda je

$$g_k = O, \quad \text{ili} \quad g_k = u \tag{37.43}$$

odakle sledi stav:

Stav 5

Izotropna grupa izotropnih materijala je, ili ortogonalna, ili unimodularna grupa.

38. Prosti materijali

Podsetimo se. Materijale čija je konstitutivna jednačina definisana sa (37.23) nazivamo **prostim**; sa $\mathscr{F}$ i $\mathscr{F}_k$ naznačavamo funkcionale reagovanja prostih materijala za globalnu, ili lokalnu referentnu konfiguraciju, čija je **fundamentalna funkcionalna jednačina** data sa (37.26). U slučaju nehomogenih prostih materijala funkcional $\mathscr{F}$ zavisi ekplicitno od X. Za uniformne (homogene) proste materijale $\mathscr{F}$ ne zavisi od X ako se izražava u odnosu na odgovarajuću lokalnu (globalnu) konfiguraciju.

38.1 Prost fluid

Konstitutivna teorija fluida definiše njegov matematički model. Takav model zasniva se na osnovnim fizičkim svojstvima realnog materijala koji predstavlja. Međutim, sa fizičkog stanovišta, fluidi poseduju raznovrsna svojstva. Jedno od njih je da takvi materijali imaju sposobnost tečenja. Ali, sam pojam "tečenje" je dosta rasplinut. Jedno od njegovih značenja jednostavno podrazumeva da se materijal deformiše pod dejstvom napona; fluid se onda ne razlikuje ni po čemu od drugih deformabilnih tela. Drugo značenje se odnosi na svojstvo takvog materijala da pod dejstvom konstantnog napona "teče" konstantnom brzinom. Mada se ovo značenje često koristi, primenjivo je samo na posebne oblike "tečenja". Svojstvo fluida je i njegova nesposobnost da se odupre dejstvu smičućih napona.

Polazimo od sledećeg svojstva takvog materijala: njegovo reagovanje se ne menja pod dejstvom proizvoljne deformacije pri kojoj mu se gustina ne menja. Imajući to u vidu, Nol daje sledeću definiciju:

Definicija 38.1.1 **Prosti materijal** je prost fluid ako je za neku referentnu konfiguraciju njegova grupa izotropije unimodularna grupa, tj. ako je

$$g_k = u. \tag{38.1}$$

Podsećamo da se takva lokalna referentna konfiguracija naziva neizobličeno stanje materijala.

Trivijalna posledica ove definicije je: *Svi prosti fluidi su izotropni*.

Takođe, na osnovu Nolovog pravila, sledi da je

$$g_{\hat{k}} = \mathbf{P} g_k \mathbf{P}^{-1} = u \tag{38.2}$$

za svaku drugu referentnu konfiguraciju. Znači: *svaka referentna konfiguracija prostog fluida je njegovo neizobličeno stanje*. Drugačije rečeno, *prost fluid nema privilegovane referentne konfiguracije*.

Funkcional reagovanja $\mathscr{F}_k [\mathbf{F}^t(s)]$ prostog fluida mora zadovoljavati, saglasno sa (37.37),

$$\mathscr{F}_k \left[\mathbf{F}^t(s)\right] = \mathscr{F}_k \left[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{H}\right]$$

za svako unimodularno $\mathbf{H}$, kao i (37.33) u obliku

$$\mathscr{F}_k \left[\mathbf{F}^t(s)\right] = \mathscr{F}_{\hat{k}} \left[\mathbf{F}^t(s)\mathbf{P}^{-1}\right]$$

za svako regularno $\mathbf{F}^t(s)$. Onda je

$$\mathscr{F}_k \left[\mathbf{F}^t(s)\right] = \mathscr{F}_{\hat{k}} \left[\mathbf{F}^t(s)\right] \tag{38.3}$$

za svako $\mathbf{P} \in u$, tj. za svako $\mathbf{P}$ za koje je $|\det \mathbf{P}| = 1$. Kako je $\rho_k = \rho\,|\det \mathbf{P}|$, onda je i $|\det \mathbf{P}| = 1$. Kako je $\rho_k = \rho_{\hat{k}}\,|\det \mathbf{P}|$ pa je $\rho_k = \rho_{\hat{k}}$ akko je $|\det \mathbf{P}| = 1$. Znači, uslov da (37.37) uvek važi kada je $|\det \mathbf{P}| = 1$ ekvivalentan je uslovu da (38.3) važi uvek kada je $\rho_k = \rho_{\hat{k}}$. Prema tome oblik funkcional $\mathscr{F}_k$ zavisi samo od ρ_k i nikakvih drugih karakteristika referentne konfiguracije k, posebno od njenog oblika i orijentacije. Tada opšta konstitutivna jednačina (37.27) za prosti fluid glasi

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{R}(t)\mathscr{F}\left[\mathbf{U}^t(s), \rho_k\right]\mathbf{R}^T(t), \tag{38.4}$$

pri tome pišemo $\mathscr{F}$ za funkcional reagovanja ukazujući na taj način na njegovu nezavisnost od izbora lokalne referentne konfiguracije. Kako unimodularna grupa u sadrži ortogonalnu grupu O, onda iz (37.40) sledi da $\mathscr{F}$ mora, takođe, da zadovoljava uslov

$$\mathbf{Q}(t)\mathscr{F}\left[\mathbf{U}^t(s), \rho_k\right]\mathbf{Q}^T(t) = \mathscr{F}\left[\mathbf{Q}^t\mathbf{U}^t(s)\mathbf{Q}^{tT}(t), \rho_k\right] \tag{38.5}$$

za sve ortogonalne tenzore $\mathbf{Q}^t(s)$, $s \geq 0$.

Druge moguće redukovane oblike funkcionala reagovanja za proste fluide nećemo ovde razmatrati.

38.2 Prosto čvrsto telo

Realni čvrsti materijali poseduju privilegovanu konfiguraciju koja se, pri bilo kojoj čistoj deformaciji (bez rotacije), prevodi u konfiguraciju u kojoj je reagovanje materijala drugačije.

Drugačije rečeno, bilo koja promena oblika takvog tela, u odnosu na njegovu privilegovanu konfiguraciju, dovodi do promene reagovanja materijala. Na primer, ako se neki neopterećeni štap (od čelika, ili gume) izduži i onda drži u miru, sile izduženja (ili deo tih sila) moraju i dalje da deluju da bi štap ostao u tom stanju. Takve sile se ne moraju primenjivati na telo u polaznoj, referentnoj, konfiguraciji. Ovo ponašanje je potpuno drugačije od ponašanja realnih tela koje nazivamo ”fluid” koji, kao što je poznato, reaguju na isti način na primenjenu istoriju deformacije u odnosu na dve konfiguracije istih gustina.

Za razliku od čiste deformacije, rotacija čvrstog tela u odnosu na privilegovanu konfiguraciju može, ali ne mora, da ima uticaja na njegovo reagovanje. Ova njihova karakteristika materijala dovodi nas do sledeće definicija:

Definicija 38.2.1 Prosti materijal je **prosto čvrsto telo** ako postoji referentna konfiguracija k u odnosu na koju je njegova grupa izotropije g_k podgrupa ortogonalne grupe, tj. ako je

$$\gamma_k \subset O. \tag{38.6}$$

Takva referentna konfiguracija naziva se **neizobličeno stanje** čvrstog tela. Prema tome, nikakva neortogonalna deformacija ne pripada grupi izotropije g_k ako je k neizobličeno stanje.

Uočite razliku između definicije pojma neizobličeno stanje čvrstog tela i neizobličeno stanje izotropnog prostog materijala, koja je data napred. Dalje ćemo pokazati da se ove definicije poklapaju u svakom slučaju kada se obe mogu primeniti.

Prosto čvrsto telo se naziva **anizotropno**, ili **aelotropno**, ako je njegova grupa izotropije u odnosu na neizobličeno referentno stanje k je prava podgrupa ortogonalne grupe. Tip izotropije je određen tipom grupe izotropije g_k. Međutim, kako je već napred rečeno, svaka grupa izotropije sadrži minimalnu grupu $\{\mathbf{I}, -\mathbf{I}\}$, onda je lako pokazati da je g_k proizvod ova dva elementa i grupe O_0 koja se sastoji samo od rotacija, tj. od elemenata $\mathbf{Q}$ za koje je $\det \mathbf{Q} = 1$. Prema tome, tip anizotropije je određen tipom grupe O_0. Mada postoji beskonačno mnogo tipova grupe O_0, samo 12 njih opisuje ponašanje anizotropije čvrstih tela.

Jedanaest tipova anizotropije odgovara 32-ema kristalnim klasama. Grupe izotropije kristala su određene njihovim tačkastim kristalografskim grupama i inverzijom $-\mathbf{I}$. Na primer, čvrst materijal kome odgovara grupa izotropije $\{\mathbf{I}, -\mathbf{I}\}$ je triklinički kristal. Takođe ortotropnom materijalu odgovara grupa izotropije koja se sastoji od refleksija u odnosu na tri uzajamno upravne ravni.

Dvanaesti tip anizotropije, **transverzalna izotropija**, karakteriše grupa g_k koju čine sve rotacije oko neke ose, recimo oko ose definisane jediničnim vektorom $\mathbf{k}$. Mi ćemo ih obeležavati sa $\mathbf{R}_k^{\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$. Primer takvih materijala su laminati.

Za prosto čvrsto telo nije nađen neki poseban i jednostavan oblik predstavljanja funkcionala reagovanja. Za takve materijale i funkcional reagovanja i grupa izotropije zavise ne samo od materijala, nego i od referentne konfiguracije. Tako za dve neizobličene referentne konfiguracije k i $\hat{k}$ grupe izotropija g_k i $g_{\hat{k}}$, saglasno sa Nolovim pravilom važi

$$g_{\hat{k}} = \mathbf{P} g_k \mathbf{P}^{-1},$$

gde je $\mathbf{P}$, kao i do sada, deformacija koja prevodi k u $\hat{k}$, tj. $\mathbf{P} : k \to \hat{k}$. To znači da za svako ortogonalno $\mathbf{Q} \in g_k$, postoji ortogonalno $\hat{\mathbf{Q}} \in g_{\hat{k}}$, tako da je

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1}. \tag{38.7}$$

Neka je, na osnovu polarne dekompozicije, $\mathbf{P} = \mathbf{R}\mathbf{U}$. Ovde je $\mathbf{R}$ rotacija, a $\mathbf{U}$ simetričan pozitivno definitan tenzor izduženja deformacije $\mathbf{P} : k \to \hat{k}$. Onda iz $\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{Q}$, što je ekvivalentno sa (38.7), sledi

$$\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{Q} = \mathbf{R}\mathbf{Q}\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{U}\mathbf{Q}\right),$$

odakle dobijamo

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}\mathbf{Q}\mathbf{R}^T \quad \text{i} \quad \mathbf{U} = \mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{Q}^T. \tag{38.8}$$

Prema tome, iz $(38.8)_1$ zaključujemo

$$g_{\hat{k}} = \mathbf{R}\, g_k\, \mathbf{R}^T, \tag{38.9}$$

tj. grupe $g_{\hat{k}}$ ig_k su konjugovane u okviru ortogonalne grupe O. Može se ova tvrdnja iskazati i drugačije koristeći terminologiju teorije grupa: *za dve podgrupe od O kaže se da su istog tipa ako su konjugovanje u okviru O.*

Prema tome, iz (38.9) sledi da su $g_{\hat{k}}$ ig_k istog tipa. To daje smisao termina "tip rotacije" koji smo više koristili. Znači, samo tip grupe izotropije, ne grupa izotropije, predstavlja bitna svojstva prostog čvrstog tela.

Za analizu $(38.8)_2$, pišemo

$$\mathbf{U}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{U}. \tag{38.10}$$

Ovaj izraz nam omogućuje direktnu primenu teoreme linerane algebre:

Simetrični tenzor **U** *komutativan je sa ortogonalnim tenzorom* **Q** *akko* **Q** *ostavlja karakteristične prostora* **U** *invarijantnim.*

U opštem slučaju tenzor **U** se može predstaviti u obliku

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i,$$

gde su λ_i i $\mathbf{u}_i$ karakteristične vrednosti i njima odgovarajući karakteristični vektori.

Kako se karakteristični prostori tenzora **U** sastoje samo od njegovih karakterističnih vektora u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru, onda sledi da su mogući sledeći slučajevi:

i) karakteristične vrednosti **U** su međusobno različite: postoje tri karakteristična prostora koje određuju tri međusobno upravna pravca;

ii) ima samo dve različite karakteristične vrednosti, onda je

$$\mathbf{U} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{u} \otimes \mathbf{u},$$

tj. **U** ima samo jedan jednodimezionalni i jedan dvodimezionalni karakterističan prostor;

iii) sve karakteristične vrednosti **U** su jednake: onda je

$$\mathbf{U} = \lambda \mathbf{I}$$

i ceo trodimezionalni prostor je karakterističan prostor tenzora **U**.

Onda (38.10) tvrdi:

Lokalna deformacija čvrstog tela u odnosu na neizobličeno stanje prevodi telo u drugo neizobličeno stanje akko pri tome karakteristični prostori lokalnog desnog tenzora izduženja **U** *ostaju invarijantni.*

Pri tome, kao što se moglo očekivati, rotacija samo prevodi jedno neizobličeno stanje u drugo neizobličeno stanje i druge uloge nema. Međutim, u opštem slučaju, grupe izotropije, koje odgovaraju dvema neizobličenim stanjima čvrstog tela, su različite. Specijalno, rotacija tela u odnosu čak na neizobličeno stanje, dovodi telo u konfiguraciju u odnosu na koju je njegova grupa izotropije drugačija.

38.2.1 Izotropno čvrsto telo

Izotropno čvrsto telo je telo koje je istovremeno čvrsto i izotropno. Oba ova pojma podrazumevaju postojanje posebnih neizobličenih konfiguracija. Radi definisanosti, mi ćemo sa k označavati konfiguraciju u odnosu na koju definišemo izotropiju, sa $\bar{k}$ konfiguraciju u odnosu na koju definišemo pojam čvrstog tela. Onda, za izotropno čvrsto telo važi

$$O \subset g_k, \quad g_{\bar{k}} \subset O. \tag{38.11}$$

Vezu između ovih konfiguracija daje

Teorema 38.2.1 Grupa izotropije izotropnih prostih čvrstih tela u odnosu na bilo koje neizobličeno stanje je ortogonalna grupa, tj.

$$g_k = g_{\bar{k}} = O. \tag{38.12}$$

Dokaz

Prema (37.43), za izotropna prosta tela je $g_k = O$, ili $g_k = u$. Ako je $g_k = u$, onda je, prema (38.2), $g_{\hat{k}} = \mathbf{P}\,g_k\,\mathbf{P}^{-1} = u$, pa prema tome i $g_{\hat{k}} = u$, što protivureči $(38.11)_2$. Znači, $g_k = O$. Onda je k i neizobličena konfiguracija i za čvrsto telo. Potrebno je još pokazati da je $g_{\bar{k}} = O$. To sledi iz (38.9), jer je $g_{\bar{k}} = \mathbf{R}O\mathbf{R}^T = O$.

Teorema 38.2.1 takođe tvrdi da je $\bar{k}$ neizobličena konfiguracija i u smislu izotropije i čvrstog tela. U tom slučaju nema razlike između definicija neizobličeno stanje čvrstog tela i neizobličeno stanje izotropnog prostog materijala.

U slučaju izotropnih prostih čvrstih tela (38.10) mora da važi za svako ortogonalno $\mathbf{Q} \subset O$. Tada iz (38.10) sledi $\mathbf{U} = \lambda\mathbf{I}$, u kom slučaju je ceo prostor karakterističan i invarijantan pri prelasku iz jedne neizobličene konfiguracije u drugu neizobličenu konfiguraciju. Očigledno da je tada $\mathbf{P} = \mathbf{RU} = \lambda\mathbf{R}$, tj. $\mathbf{P}$ je tada **konformna deformacija**. Drugačije rečeno:

Bilo koje neizobličeno stanje izotropnog čvrstog tela može biti dobijeno konformnom deformacijom u odnosu na neko neizobličeno stanje; ili, svaka konformna deformacija prevodi jedno neizobličeno stanje u drugo.

38.2.2 Elastični materijali

Ovde se zadržavamo samo na osnovnim pojmovima i definicijama koji su u vezi sa nekim specifičnostima pojma konfiguracije.

Definicija 38.2.2 Za materijal se kaže da je elastičan ako je prost i ako napon u trenutku t zavisi samo od lokalne konfiguracije u trenutku t. Ovako definisani materijali su poznati pod imenom **Košijevi elastični materijali**.

Saglasno sa ovom definicijom napon elastičnih materijala ne zavisi od predistorije kretanja. U slučaju elastičnih materijala funkcional reagovanja prostih materijala $\mathscr{F}$ svodi se na funkciju $\mathbf{G}$ gradijenta deformacije $\mathbf{F}$, tj.

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{F}). \tag{38.13}$$

Naglašavamo da je $\mathbf{F}$ gradijent deformacije u trenutku t u odnosu na neku fiksiranu, inače proizvoljno uzetu, lokalnu referentnu konfiguraciju. Radi definisanosti $\mathbf{G}$ nazivamo **funkcija reagovanja** elastičnog materijala. Izraz (38.13) se često naziva **relacija napon-deformacija**.

A. Funkcija reagovanja **G** mora zadovoljavari princip materijalne objektivnosti (37.26) u obliku

$$\mathbf{Q}\mathbf{G}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T = \mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{F}). \tag{38.14}$$

Ova relacija mora biti identički zadovoljena za svako ortogonalno **Q**.

B. Funkcija reagovanja **G** zavisi od izbora referentne konfiguracije i kada je nužno mi ćemo to naznačiti, kao i do sada, sa

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}_k(\mathbf{F}). \tag{38.15}$$

U odnosu na drugu konfiguraciju $\bar{k}$ biće

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}_{\bar{k}}(\bar{\mathbf{F}}), \tag{38.16}$$

tako da je uvek

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}_k(\mathbf{F}) = \mathbf{G}_{\bar{k}}(\bar{\mathbf{F}}). \tag{38.17}$$

Kako je $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}\mathbf{P}$, gde je, kao i do sada, $\mathbf{P} : k \to \hat{k}$, onda iz (38.17) sledi da je

$$\mathbf{G}_k(\bar{\mathbf{F}}\mathbf{P}) = \mathbf{G}_{\bar{k}}(\bar{\mathbf{F}}) \tag{38.18}$$

za svako regularno $\bar{\mathbf{F}}$, pa prema tome i za svako regularno **F**. Prema tome,

$$\mathbf{G}_k(\mathbf{F}\mathbf{P}) = \mathbf{G}_{\bar{k}}(\mathbf{F}) \tag{38.19}$$

je ekvivalentno sa (38.18) (vidi (37.33)).

C. Lako je pokazati da se, u redukovanom obliku, relacija napon-deformacija može predstaviti na više načina. Pišemo sledeće redukovane oblike:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{G}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T, \tag{38.20}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{C})\mathbf{R}^T, \tag{38.21}$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{C}). \tag{38.22}$$

D. Smenom (38.13) u (37.37), dobijamo

$$\mathbf{G}_k(\mathbf{F}) = \mathbf{G}_k(\mathbf{F}\mathbf{H}), \tag{38.23}$$

gde je **H** unimodularni tenzor. Prema tome grupu izotropije g_k elastičnih prostih tela čine unimodularni tenzori **H** koji zadovoljavaju (38.23) za svako regularno **F**. Za takvo (38.19) glasi

$$\mathbf{G}_k(\mathbf{F}) = \mathbf{G}_k(\mathbf{F}\mathbf{H}) = \mathbf{G}_{\bar{k}}(\mathbf{F}). \tag{38.24}$$

Onda, iz (38.17), (38.24), (38.18) i (38.23) sledi da je

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}_k(\mathbf{F}) = \mathbf{G}_{\bar{k}}(\mathbf{F}) = \mathbf{G}_{\bar{k}}(\bar{\mathbf{F}}) = \mathbf{G}_k(\bar{\mathbf{F}}). \tag{38.25}$$

Znači, u slučaju automorfizma sve jedno je u odnosu na koju funkciju reagovanja, ili gradijent deformacije, određujemo napon elastičnog čvrstog tela.

Ovaj zaključak važi utoliko pre kada je $\mathbf{H} \in g_k \subset O$, tj. kada je elastično telo čvrsto telo. Tada je moguće izvesti i nove zaključke. Tako (38.23), za $\mathbf{H} = \mathbf{Q} \in O$, pišemo u obliku

$$\mathbf{G}(\mathbf{F}) = \mathbf{G}(\mathbf{FQ}); \tag{38.26}$$

za $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ ova jednačina postaje

$$\mathbf{G}(\mathbf{I}) = \mathbf{G}(\mathbf{Q}).$$

Za iste vrednosti $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ (38.14) glasi

$$\mathbf{QG}(\mathbf{I})\mathbf{Q}^T = \mathbf{G}(\mathbf{Q}).$$

Onda, s obzirom na ove dve poslednje jednačine,

$$\mathbf{QG}(\mathbf{I})\mathbf{Q}^T = \mathbf{G}(\mathbf{I}). \tag{38.27}$$

Prema tome, Košijev napon za referentnu konfiguraciju k_0 (u odnosu na koju je $\mathbf{F} = \mathbf{I}$, tj, u odnosu na koju je telo nedeformisano) mora da zadovoljava (38.27) za svako g_{k_0}. Uočimo da je to zajednička posledica materijalne objektivnosti i materijalne simetrije. Uočimo, takođe, da isti oblik ograničenja važi i za tenzor $\mathbf{U}$, što se vidi iz $(38.8)_2$.

Ako grupa izotropije g_{k_0} elastičnog čvrstog tela sadrži pravu ortogonalnu grupu (grupu rotacija), onda (38.27) i $(38.8)_2$ važi za svaku rotaciju $\mathbf{Q}$. Tada mora biti:

$$\mathbf{G}(\mathbf{I}) = \alpha\mathbf{I}, \tag{38.28}$$

$$\mathbf{U} = \alpha\mathbf{I}, \tag{38.29}$$

tj. tenzori $\mathbf{G}(\mathbf{I})$ i $\mathbf{U}$ su tada izotropni. Prema tome, napon u takvoj referentnoj konfiguraciji g_{k_0} je **hidrostatički napon**, a deformacija koja povezuje takve dve konfiguracije je čista dilatacija (moguće spregnuta sa rotacijom).

Tako prirodno dolazimo do razmatranja materijala koji precizira sledeća

Definicija 38.2.3 Elastični materijal koji je izotropan nazivamo **izotropni elastični materijal**.

To znači da postoji bar jedna referentna konfiguracija k u odnosu na koju je grupa simetrije g_k sadrži pravu ortogonalnu grupu.

Teorema 38.2.2 Elastični materijal je izotropan akko je funkcija reagovanja $\mathbf{G}(\mathbf{F})$, u odnosu na neizobličenu konfiguraciju kao referentnu konfiguraciju, izotropna tenzorska funkcija od $\mathbf{F}$, tj. akko je

$$\mathbf{QG}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T = \mathbf{G}(\mathbf{QFQ}^T) \tag{38.30}$$

identički zadovoljeno za svako regularno $\mathbf{F}$ i ortogonalno $\mathbf{Q}$.

Dokaz

Ako je telo elastično i izotropno, onda je $g_k = O$. Ako je $\mathbf{Q}$ ortogonalno, onda je i $\mathbf{Q}^T$ ortogonalno. Znači, ako je $\mathbf{Q} \in g_k$, onda je i $\mathbf{Q}^T \in g_k$. Tada (38.26) važi i za $\mathbf{Q}^T$, tj. $\mathbf{G}(\mathbf{F}) = \mathbf{G}(\mathbf{F}\mathbf{Q}^T)$. Ova jednačina mora da važi za svako regularno $\mathbf{F}$, pa prema tome i za $\mathbf{QF}$ kada postaje $\mathbf{G}(\mathbf{QF}) = \mathbf{G}(\mathbf{QFQ}^T)$. Iz ove jedačine i (38.14) dobijamo (38.30).

Obrnuto, neka sada važi (38.30). Kako uvek važi (38.14), onda iz (38.30) i (38.14) sledi da je $\mathbf{G}(\mathbf{QF}) = \mathbf{G}(\mathbf{QFQ}^T)$ za svako regularno $\mathbf{F}$ i ortogonalno $\mathbf{Q}$. Specijalno, ako uzmemo $\mathbf{QF}$ za $\mathbf{F}$, dobijamo $\mathbf{G}(\mathbf{F}) = \mathbf{G}(\mathbf{FQ}^T)$, koje važi za svako ortogonalno $\mathbf{Q}^T$, pa prema tome i $\mathbf{G}(\mathbf{F}) = \mathbf{G}(\mathbf{FQ})$. Znači, grupa izotropije elastičnog prostog materijala je $g_k = O$ i materijal je izotropan.

Redukovani oblik konstitutivne jednačine za izotropne elastične materijale dobijamo iz (38.26), koristeći polarnu dekompoziciju tenzora deformacije $\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}$. Tako za $\mathbf{H} = \mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ i za $\mathbf{H} = \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T$, dobijamo

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{F}) = \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \mathbf{G}(\mathbf{VQ}^T). \tag{38.31}$$

Dalja ograničenja na oblik funkcionala reagovanja $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ nameće (38.30), kojim se iskazuje princip materijalne objektivnosti. Iskazuje se relacijom

$$\mathbf{QG}(\mathbf{V})\mathbf{Q}^T = \mathbf{G}(\mathbf{QVQ}^T) \tag{38.32}$$

koja mora biti identički zadovoljena za svaki pozitivno definitan simetričan tenzor $\mathbf{V}$ i svako ortogonalno $\mathbf{Q}$. Formalno matematički (38.32) tvrdi da $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ mora biti izotropna funkcija svoga argumenta. Njen eksplicitan oblik daje sledeća teorema:

Teorema 38.2.3 $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ je izotropna funkcija akko je

$$\mathbf{G}(\mathbf{V}) = \phi_0\mathbf{I} + \phi_1\mathbf{V} + \phi_2\mathbf{V}^2, \tag{38.33}$$

gde su ϕ_0, ϕ_1 i ϕ_2 skalarne invarijante tenzora $\mathbf{V}$. Preciznije, može se pokazati da su ϕ_0, ϕ_1 i ϕ_2 funkcije glavnih invarijanata od $\mathbf{V}$, tj. od

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{V}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2(\mathbf{V}) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \\ I_3(\mathbf{V}) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \tag{38.34}$$

Na isti način može se pokazati da je

$$\mathbf{T} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{B}) \tag{38.35}$$

izotropna funkcija $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$, tj. takva da je

$$\mathbf{Q}\mathbf{\Phi}(\mathbf{B})\mathbf{Q}^T = \mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T). \tag{38.36}$$

Prema Teoremi 38.2.3,

$$\mathbf{\Phi} = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{B} + \varphi_2 \mathbf{B}^2, \tag{38.37}$$

gde su φ_0, φ_1 i φ_2 funkcije invarijanata

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{B}) &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_2(\mathbf{B}) &= \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2, \\ I_3(\mathbf{B}) &= \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2. \end{aligned} \tag{38.38}$$

Moguće su i potpunije anlize redukovanih oblika funkcija reagovanja izotropnih elastičnih materijala, na kojima se ovde nećemo zadržavati.

38.3 Elastični fluidi

Videli smo da je grupa izotropije elastičnih prostih materijala za neku referentnu konfiguraciju k unimodularna grupa, tj. $g_k = u$, i da tada važi (38.23). Kako je $\mathbf{F}$ regularno, onda se ono može uvek predstaviti u obliku

$$\mathbf{F} = (\det(\mathbf{F}))^{1/3}\,\mathbf{F}^*,$$

gde je očigledno $\det(\mathbf{F})^* = 1$ i prema tome $\mathbf{F}^* \in u$. Kako (38.23) mora da važi za svako $\mathbf{H} \in u$ onda, će ono važiti i za $\mathbf{H} = \mathbf{F}^{*-1}$. Tada iz (38.23) sledi da je

$$\mathbf{G}(\mathbf{F}) = \mathbf{G}\left[(\det(\mathbf{F}))^{1/3}\,\mathbf{I}\right] = \mathbf{G}\left(\sqrt[3]{J}\,\mathbf{I}\right),$$

gde je $\det(\mathbf{F}) = J$. Primenjujući princip materijalne objektivnosti (38.30) na ovu funkciju reagovanja dobijamo

$$\mathbf{Q}\mathbf{G}\left(\sqrt[3]{J}\,\mathbf{I}\right)\mathbf{Q}^T = \mathbf{G}\left(\sqrt[3]{J}\,\mathbf{I}\right),$$

što mora da važi za svako ortogonalno $\mathbf{Q}$. Znači $\mathbf{G}\left(\sqrt[3]{J}\,\mathbf{I}\right)$ je izotropna funkcija svog argumenta, pa je, prema Teoremi 38.2.3,

$$\mathbf{G}\left(\sqrt[3]{J}\,\mathbf{I}\right) = \alpha(J)\,\mathbf{I}, \tag{38.39}$$

gde je $\alpha(J)$ skalarna funkcija. Međutim, kako je $J = \frac{\rho_0}{\rho}$, gde je ρ_0 gustina materijala u neizobličenoj konfiguraciji (ista za sve takve konfiguracije), onda možemo pisati $\alpha(J) = -p(\rho)$. Tada je Košijev napon

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{F}) = -p(\rho)\,\mathbf{I}. \tag{38.40}$$

U ovom specijalnom slučaju $p(\rho)$ je pritisak u trenutnoj konfiguraciji. Materijali koji se karakterišu ovom konstitutivnom jednačinom nazivaju se **elastični fluidi**. Svaka konfiguracija elastičnog fluida, kao i za fluide uopšte, je neizobličena konfiguracija.

38.4 Prirodna konfiguracija

Definicija 38.4.1 Neizobličena konfiguraciju u odnosu na koju je tenzor napona nula (slobodna od napona) naziva se **prirodna konfiguracija**.

Neka je k_0 takva konfiguracija. Onda je $\mathbf{G}_{k_0}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$. Interesuje nas relacija između k_0 i bilo koje druge moguće prirodne konfiguracije. Neka je $\bar{k}_0$ neka neizobličena konfiguracija i neka je funkcija reagovanja u odnosu na ovu konfiguraciju. Onda je, saglasno sa (37.31) i (37.32), za slučaj elastičnih materijala

$$\mathbf{G}_{\bar{k}_0}(\mathbf{I}) = \mathbf{G}_{k_0}(\mathbf{P}_0), \tag{38.41}$$

gde je $\mathbf{P}_0$ gradijent deformacije $k_0 \quad\Rightarrow\quad \bar{k}_0$. Kako su k_0 i $\bar{k}_0$ neizobličene konfiguracije, možemo pisati $\mathbf{P}_0 = \sqrt[3]{J}\mathbf{R}$, gde je $J = \det(\mathbf{P})_0$ i $\mathbf{R}$ rotacija. Onda je $\mathbf{G}_{k_0}(\mathbf{P}_0) = \mathbf{G}_{k_0}(\sqrt[3]{J}\mathbf{R})$. Ako identifikujemo $\mathbf{R}$ sa $\mathbf{Q}$ i $\sqrt[3]{J}\mathbf{I}$ sa $\mathbf{F}$, onda se $\mathbf{G}_{k_0}(\sqrt[3]{J}\mathbf{R})$ može identifikovati sa $\mathbf{G}_{k_0}(\mathbf{QF})$. Primenom (38.14) na ovaj specijalan slučaj, a zatim (38.32) i (38.39), možemo (38.41) pisati u obliku

$$\mathbf{G}_{\bar{k}_0}(\mathbf{I}) = \mathbf{G}_{k_0}(\sqrt[3]{J}\mathbf{R}) = \alpha(J)\mathbf{I}. \tag{38.42}$$

Prema tome, $\bar{k}_0$ je prirodna konfiguracija akko je $\alpha(J) = 0$. Dalja analiza se odnosi na $\alpha(J)$. Kako je $\alpha(1) = 0$ i

$$\mathbf{G}_{\bar{k}_0}(\mathbf{I}) = \mathbf{G}_{k_0}(\mathbf{R}) = \mathbf{G}_{k_0}(\mathbf{I}), \tag{38.43}$$

onda je bilo koja konfiguracija koja se razlikuje od k_0 za rotaciju $\mathbf{R}$, takođe, prirodna konfiguracija. Poslednja jednakost sledi iz (38.31) za slučaj $\mathbf{F} = \mathbf{I}$, tj. $\mathbf{V} = \mathbf{I}$. Dalje, uočimo da je $\alpha(J)$ hidrostatički napon koji predstavlja reagovanje materijala pri čistoj dilataciji u odnosu na konfiguraciju k_0 slobodan od napona. Fizički je opravdano pretpostaviti da se pri povećanju zapremine $(J > 1)$ zahteva hidrostatički napon, dok se pri smanjenju zapremine $(J < 1)$ zahteva pritisak. Znači,

$$\alpha(J) \geq 1 \quad \text{kada je} \quad J \geq 1, \tag{38.44}$$

ili

$$\alpha(J) \leq 1 \quad \text{kada je} \quad J \leq 1. \tag{38.45}$$

Odavde zaključujemo da je $\bar{k}_0$ prirodna konfiguracija akko je $J = 1$. Drugačije rečeno, prirodna konfiguracija k_0 je jedinstvena do na proizvoljnu rotaciju.

39. Lagranževe jednačine u mehanici kontinuuma za neproste materijale

Često smo se susretali sa Lagraževim jednačinama u različitim problemima: minimalna površ, geodezijska linija, u mehanici materijalne tačke, sistema materijalnih tačaka, u mehanici kontinuuma, u $\mathbb{E}_2$ i $\mathbb{E}_n$. Izvodili smo ih više puta u zavisnosti od problema koji izučavamo. Normalo je da se postavi pitanje: postoji li način da se izvedu na najopštiji način koji bi mogao da se koristi u specijalnim slučajevima? Jedan takav pristup izlažemo ovde.

Zadržavamo se na najjednostavnijem slučaju: statika **hiperelastičnog neprostog materijala**.

Pretpostavljamo da je unutrašnja energija ε zavisna od **gradijenata deformacije većeg od jedan**, tj.

$$\nabla(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_{,K_1}), \nabla^2(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_{,K_1K_2}), \ldots, \nabla^\alpha(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_{,K_1K_2\ldots K_\alpha}),$$

ili kratko

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}, \nabla^\alpha(\mathbf{x})), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, k \tag{39.1}$$

gde je $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ kretanje tela, a ∇^α je gradijent reda α u odnosu na materijalnu tačku $\mathbf{X}$.

Izložićemo opšti prilaz u okviru varijacionog računa gradijentne hiperelastičnosti.

Sa $V \in \mathbb{E}_3$ obeležavamo zapreminu koje telo zauzima u referentnoj konfiguraciji, a sa ∂V njenu graničnu površ. Onda je ukupna elastična nagomilana energija

$$E = \int_V \varepsilon(\mathbf{x}, \nabla^\alpha(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}V, \quad \alpha = 1, \ldots, k, \tag{39.2}$$

gde je $\nabla^\alpha(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_{,K_1\cdots K_\alpha})$. Pretpostavljamo da je $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$ deformacija za koju nagomilana energija ima ekstremum. Dalje pretpostavljamo da je

$$\mathbf{x} \Rightarrow \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \tau\,\boldsymbol{\eta} \tag{39.3}$$

dopuštena (infinitezimalna) transformacija, gde je

$$\nabla^\alpha \boldsymbol{\eta}|_{\partial V} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, k, \tag{39.4}$$

tako da je funkcional ukupne energije invrijantan. Drugačije rečeno

$$\int_V \varepsilon(\bar{\mathbf{x}}, \nabla^\alpha(\bar{\mathbf{x}}))\,\mathrm{d}V = \int_V \varepsilon(\mathbf{x}, \nabla^\alpha(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}V. \tag{39.5}$$

Onda mora biti

$$\left.\frac{\mathrm{d}E(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} \quad \Rightarrow \quad \int_V \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}, \nabla^\alpha(\bar{\mathbf{x}}))\right|_{\tau=0} \mathrm{d}V = 0. \tag{39.6}$$

U razvijenom obliku je

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}, \nabla^\alpha(\bar{\mathbf{x}}))\right|_{\tau=0} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}}\cdot \boldsymbol{\eta} + \sum_{\alpha=1}^{k} \nabla^\alpha(\mathbf{x})\cdot \nabla^\alpha(\boldsymbol{\eta}),$$

gde je

$$\begin{aligned}
\nabla^\alpha(\mathbf{x})\cdot \nabla^\alpha(\boldsymbol{\eta}) &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_{,K_1\ldots K_\alpha}}\cdot \boldsymbol{\eta}_{,K_1\ldots K_\alpha} = \\
&= \frac{\partial}{\partial X^{K_\alpha}}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_{,K_1\ldots K_\alpha}}\cdot \boldsymbol{\eta}_{,K_1\ldots K_{\alpha-1}}\right) - \frac{\partial}{\partial X^{K_\alpha}}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_{,K_1\ldots K_\alpha}}\right)\cdot \boldsymbol{\eta}_{,K_1\cdots K_{\alpha-1}} \\
&\quad \cdots + (-1)^\alpha \frac{\partial}{\partial X^{K_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial X^{K_{\alpha-1}}} \frac{\partial}{\partial X^{K_\alpha}} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_{,K_1\cdots K_\alpha}}\right)\cdot \boldsymbol{\eta}.
\end{aligned}$$

Prema tome je

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}, \nabla^\alpha(\bar{\mathbf{x}}))\right|_{\tau=0} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}}\cdot \boldsymbol{\eta} + \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^\alpha \frac{\partial}{\partial X^{K_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial X^{K_{\alpha-1}}} \frac{\partial}{\partial X^{K_\alpha}} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_{,K_1\ldots K_\alpha}}\right)\cdot \boldsymbol{\eta}.$$

Primenom teoreme o divergenciji i korišćenjem pretpostavke da je $\nabla^{\alpha}(\boldsymbol{\eta})|_{\partial V}=0$ svodi se $\int_V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\varepsilon(\bar{\mathbf{x}},\nabla^{\alpha}(\bar{\mathbf{x}}))|_{\tau=0}\,\mathrm{d}V=0$ na sledeći oblik

$$\int\limits_V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\varepsilon(\bar{\mathbf{x}},\nabla^{\alpha}(\bar{\mathbf{x}}))|_{\tau=0}\,\mathrm{d}V=$$

$$=\int\limits_V\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{x}}+\sum_{\alpha=1}^{k}(-1)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial X^{K_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial X^{K_{\alpha-1}}}\frac{\partial}{\partial X^{K_\alpha}}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{x}_{,K_1\ldots K_\alpha}}\right)\right]\mathrm{d}V\cdot\boldsymbol{\eta}=0.$$

S obzirom na proizvoljnost funkcija $\boldsymbol{\eta}$, konačno dobijamo Lagranževe jednačine za posmatrani slučaj u obliku

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{x}}+\sum_{\alpha=1}^{k}(-1)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial X^{K_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial X^{K_{\alpha-1}}}\frac{\partial}{\partial X^{K_\alpha}}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{x}_{,K_1\ldots K_\alpha}}\right)=0. \tag{39.7}$$

Navodimo sledeće primere:

Za $k=1$, biće $\alpha=1$ i

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{x}}-\frac{\partial}{\partial X^{K_1}}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{x}_{,K_1}}\right)=0.$$

Poznatiji oblik je

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^k}-\frac{\partial}{\partial X^K}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^k_{,K}}\right)=0. \tag{39.8}$$

Za $k=2$, biće $\alpha=1,2$ i

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{x}}-\frac{\partial}{\partial X^{K_1}}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{x}_{,K_1}}\right)+\frac{\partial}{\partial X^{K_1}}\frac{\partial}{\partial X^{K_2}}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{x}_{,K_1K_2}}\right)=0,$$

ili

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^k}-\frac{\partial}{\partial X^K}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^k_{,K}}\right)+\frac{\partial}{\partial X^K}\frac{\partial}{\partial X^L}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^k_{,KL}}\right)=0. \tag{39.9}$$

Na isti način se dobijaju Lagranževe jedanačine višeg reda.

Uočimo da sledeća identifikacija obuhvata i Lagranževe jednačine sistema materijalnih tačaka. U tom slučaju X^K identifikujemo sa t. Onda jednačine (39.8) postaju klasične jednačine materijalnog sistema

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\dot{x}^k}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^k}=0.$$

Uporediti sa (33.66).

39.1 Ležandrove transformacije u mehanici kontinuuma - Elastični materijali

Neka je data funkcija dejstva $L(x^k, x^k_{,K})$, gde je $x^k = x^k(X^K)$ deformacija, a $x^k_{,K} = \dfrac{\partial x^k}{\partial X^K}$ gradijent deformacije. Onda je

$$\mathscr{L} = \int L(x^k, x^k_{,K})\,\mathrm{d}V$$

integral dejstva. Odgovarajuće Ojler-Lagranževe jednačine su

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial X^K}\frac{\partial L}{\partial x^k_{,K}} = 0.$$

Označimo sa $\dfrac{\partial L}{\partial x^k_{,K}} \equiv p^K_k$. Onda je

$$\mathrm{d}L = \frac{\partial L}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k + \frac{\partial L}{\partial x^k_{,K}}\,\mathrm{d}x^k_{,K} = \frac{\partial L}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k + p^K_k\,\mathrm{d}x^k_{,K}.$$

Takođe je

$$\mathrm{d}\left(x^k_{,K}\,p^K_k\right) = x^k_{,K}\,\mathrm{d}p^K_k + (\mathrm{d}x^k_{,K})p^K_k.$$

Onda sledi da je

$$\mathrm{d}\left(x^k_{,K}\,p^K_k - L\right) = x^k_{,K}\,\mathrm{d}p^K_k - \frac{\partial L}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k.$$

Po defdiniciji je

$$H = x^k_{,K}\,p^K_k - L.$$

Vidi se da je

$$H = H(x^k, p^K_k),$$

pa je

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k + \frac{\partial H}{\partial p^K_k}\,\mathrm{d}p^K_k,$$

i

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= (\mathrm{d}x^k_{,K})p^K_k + x^k_{,K}\,\mathrm{d}p^K_k - \frac{\partial L}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k - \frac{\partial L}{\partial x^k_{,K}}\,\mathrm{d}x^k_{,K} = \\ &= (\mathrm{d}x^k_{,K})p^K_k + x^k_{,K}\,\mathrm{d}p^K_k - \frac{\partial L}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k - p^K_k\,\mathrm{d}x^k_{,K} = \\ &= x^k_{,K}\,\mathrm{d}p^K_k - \frac{\partial L}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k.\end{aligned}$$

Iz ovih dveju jednakosti sledi da je

$$\frac{\partial H}{\partial x^k} = -\frac{\partial L}{\partial x^k},$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_k^K} = x^k_{,K}.$$

Iz Ojler-Lagranževih jednačina sledi da je

$$\frac{\partial H}{\partial x^k} = -\frac{\partial L}{\partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial X^K}\frac{\partial L}{\partial x^k_{,K}} = -\frac{\partial}{\partial X^K} p_k^K.$$

Onda prethodni sistem jednačina postaju **Hamiltonove jednačine za elastični kontinuum**

$$\frac{\partial x^k}{\partial X^K} = \frac{\partial H}{\partial p_k^K},$$
$$\frac{\partial}{\partial X^K} p_k^K = -\frac{\partial H}{\partial x^k}.$$

U delu koji se odnosi na Mehaniku kontinuuma dajemo kratak prikaz primene Ležandrove transforacije u Termodinamici.

39.2 Lagranževi množioci veza

Lagranževi množioci veza su snažan matematički metod od posebnog značaja pri rešaravnju problema optimizacije i mehaničkih sistema pod dejstvom veza. Već smo se sa tim susretali u poglavlju 33.3. Ovde razmatramo opšti slučaj. Koristi se pri rešavanju sledećeg problema:

Problem 10

Naći ekstremnu vrednost diferencijabilne funkcije podvrgnute nekim ograničenjima na promene posmatrane funkcije.

Preciznije, naći maksimalnu (minimalnu) vrednost funkcije

$$f(\mathbf{x}), \tag{39.10}$$

koja je podvrgnuta sledećim ograničenjima

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}) &= 0, \\ \vdots &= \vdots \\ h_m(\mathbf{x}) &= 0, \end{aligned} \tag{39.11}$$

gde je $\mathbf{x} \in \Omega \in \mathbb{R}^n$. Obično se pretpostavlja da su funkcije $h_1, \ldots, h_m \in C^2$.

U cilju razumevanja problema zadržavamo se na jednostavnom slučaju kada je $n = 2$ i $m = 1$.

Naći najveću (najmanju) vrednost funkcije

$$z = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x}(x,y), \quad x,y \in \mathbb{R} \tag{39.12}$$

pod uslovom da je

$$h(\mathbf{x}) = 0. \tag{39.13}$$

Veza (ograničenje) $h(x,y) = 0$ definiše krivu u $\mathbb{R}^2$. Diferenciranjem ove funkcije po x, sledi da je

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{39.14}$$

Tangenta krive $\mathbf{T}(x,y) = \left(1, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^T$ je predstavljena kao vektor kolone. Poznato je takođe da je *grad* krive $\nabla h = \left(\dfrac{\partial h}{\partial x}, \dfrac{\partial h}{\partial y}\right)$. Prema tome gornja jednačina se može napisati u obliku

$$(\nabla h)\cdot \mathbf{T} = 0. \tag{39.15}$$

Sa geometrijskog stanovišta, to znači da je tangenta krive u svim svojim tačkama uvek upravna na gradijen krive. Podrazumeva se da vektor $\mathbf{T}$ određuje pravac pomeranja tačke $\mathbf{x}(x,y)$ duž krive.

Nas intersuje da nađemo tačku $\mathbf{x}(x,y)$ krive $h(\mathbf{x}) = 0$ u kojoj funkcija $f(\mathbf{x})$ ima maksimalnu (milnimalnu) vrednost. Kad je u pitanju sama funkcija $f(\mathbf{x})$, dve ključne tačke su:

1. Neka je $f(\mathbf{x}) = c$ bilo koja ekviskalarna povš funkcije $z = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$. Onda je
$$\mathrm{d}f = (\nabla f)\cdot \mathbf{t} = 0, \tag{39.16}$$
gde je $\mathbf{t}$ tangentni vektor ekviskalarne povši $f(\mathbf{x}) = c$. Znači ∇f je upravan na $f(\mathbf{x}) = c$ u njenim tačkama. Uočimo takođe da su $f(\mathbf{x}) = c$, $\nabla f \in \mathbb{R}^2$ kao i kriva $h(x,y) = 0$.
2. max (min) $f(\mathbf{x})$ je u pravcu ∇f.

Prema tome, pri pomeranju tačke $\mathbf{x}(x,y)$ duž krive (u pravcu vektora $\mathbf{T}$), traži se ona tačka na $h(\mathbf{x}) = 0$ u kojoj bi bilo $\mathbf{t}$ paralelno sa $\mathbf{T}$ za posmatranu ekviskalarnu površ $f(\mathbf{x}) = c$ u toj tački, tj. u kojoj je

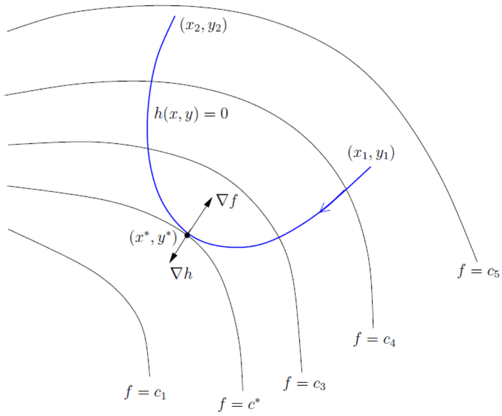
$$(\nabla f)\cdot \mathbf{T} = 0. \tag{39.17}$$

Vizualno, to možemo pretstaviti kretanjem dijedra ortogonalnih vektora $\mathbf{t}$, ∇f duž krive $h(\mathbf{x}) = 0$.

To znači da su u toj tački krive ∇f i ∇h kolinearne, tj.

$$\nabla f = \lambda \nabla h. \tag{39.18}$$

Skalar λ je koeficijent proporcionalnosti i naziva se **Lagranžev množilac veze**.



Slika 39.1

39.2.1 Lagranžijan

Pogodno je uvesti Lagranžijan $\ell(x,y,\lambda)$ koji se odnosi na problem sa vezama. Po definiciji je

$$\ell(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda h(x,y).$$

Onda je

$$\nabla \ell = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial h}{\partial y}, h \right) = () = 0.$$

Primer 18

Klasičan problem. Naći ekstremne vrednosti funkcije

$$f(x,y) = xy,$$

koja je podvrgnuta vezi

$$h(x,y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0.$$

Rešenje

A)

$$\nabla f(x,y) = (y,x),$$
$$\nabla h(x,y) = \left(\frac{x}{4}, y\right).$$

Onda je

$$\left.\begin{aligned} y - \frac{\lambda x}{4} &= 0 \\ x - \lambda y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 4y^2 = x^2,$$
$$x^2 + 4y^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4,$$

ili

$$x = \pm 2, \quad y = \pm 1.$$

Prema tome, tačke na krivoj

$$h(x,y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

u kojima kriva funcija $f(x,y) = xy$ ima ekstermum su:

$$(2,1), \quad (2,-1), \quad (-2,1), \quad (-2,-1).$$

Funkcija $f(x,y) = xy$ ima sledeće vrednosti u tim tačkama, redom, $2, -2, -2, 2$. Maksimalnu vrednost 2 postiže u prvoj i poslednjoj tački, dok minimalnu vrednost -2 postiže u drugoj i trećoj tački.

Ostaje nam da odredimo vrednost Lagražeovog množioca veze λ. Iz jednačina

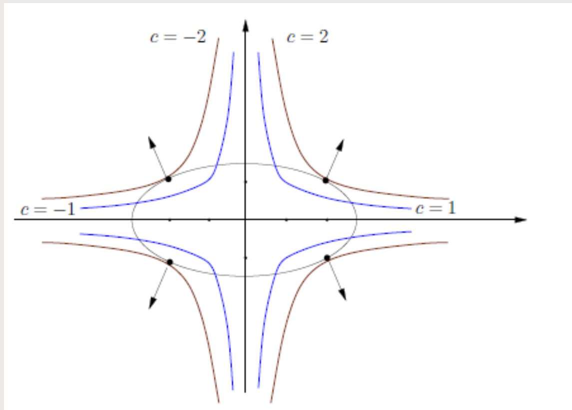
$$y - \frac{\lambda x}{4} = 0,$$
$$x - \lambda y = 0,$$

sledi da je

$$y - \frac{\lambda^2}{4} y = 0.$$

Pošto je $y \neq 0$ onda je $\lambda^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2.$

B) Grafički prikaz rešenja dat je na slici 39.2



Slika 39.2

Funkcija veze je elipsa. Ekviskalarne linije funkcije $f(x,y)=xy=c$ su hiperbole.

Vidi se da $|c|$ raste kada se ekviskalarne krive udaljavaju od koordinatnog početka. U tačkama dodira ekviskalane linije s linijom ograničenja, u kojima se tengente ekviskalarne linije i linija ograničenja poklapaju, nalaze se tačke u kujima f-ja $f(x,y)=xy$ ima ekstermum.

C) Ilustrativno je rešiti isti problem na drugi, ovde mogući, način. To je slučaj kada se funkcija ograničenja $h(\mathbf{x})=0$ moguće predstaviti u parametarskom obliku, tj. u obliku

$$x=x(t) \quad \text{i} \quad y=y(t).$$

U našem primeru parametraski oblik funkcije $h(x,y)=\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}-1=0$, je

$$\begin{aligned} x &= 2\sqrt{2}\cos t, \\ y &= \sqrt{2}\sin t. \end{aligned}$$

Onda je

$$\varphi(t)=f(x(t),y(t))=4\cos t\sin t=2\sin 2t.$$

Ekstremum f-je $\varphi(t)$ nalazi se iz uslova

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=4\cos 2t=0,$$

ili

$$0=\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=4\cos 2t \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t-\sin^2 t=0,$$

tj.

$$\cos t = \pm \sin t.$$

0dakle se dobijaju rešenja $(2,1)$, $(2,-1)$, $(-2,1)$, $(-2,-1)$ i $f_{ext} = \pm 2$.

Slučaj kada se $h(\mathbf{x}) = 0$ može rešiti po jednoj promenljivoj, npr. y, spada u tu grupu zadataka. Onda je $y = y(x)$ i $\psi(x) = f(x, y(x))$. Klasičan slučaj funkcije jedne promenljive, prethodni primer.

U opštem slučaju takva mogućnost ne postoji i tada nastupa metod Lagranževog monožitelja veze.

39.2.2 Opšti slučaj

Koristimo reprezentaciji $\mathbf{x} \in \Omega \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}(x^i)$. Onda je

$$f(\mathbf{x}) = f(x^i), \tag{39.19}$$

$$h_\alpha(\mathbf{x}) = h_\alpha(x^i) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m < n. \tag{39.20}$$

Pretpostavljamo da su funkcije $h_\alpha(x^i)$ funkcionalno nezavisne, ili ekvivalentno tome da je $\operatorname{rang} J = \operatorname{rang}\left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial x^i}\right) = m$. Onda se iz sistema jednačina (39.20) može odrediti m koordinata x^i u funkciji $n-m$ preostalih koordinata. Bez gubljenja u opštosti pišemo

$$x^\alpha = \varphi^\alpha(x^\sigma), \quad \sigma = m+1, \ldots, n.$$

Geometriski to znači da funcije

$$\mathbf{r} = (x^\alpha, x^\tau) = (x^\alpha(x^\sigma), x^\tau), \quad \sigma, \tau = m+1, \ldots, n$$

definišu potprostor $\mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$. (Kordinatni sistem od $\mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$ su koordinate x^σ).

Bazni vektori $\mathbf{T}_\sigma$ prostora $\mathbb{R}^{n-m}$ su po definiciji

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\sigma} = \mathbf{T}_\sigma = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\sigma}, \delta^\tau_\sigma\right).$$

Primer 19

Neka je $z = f(xy)$ ili $\mathbf{r} = (x, y, z) = (x, y, f(x, y))$. Onda je

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{i} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

(Uočimo redosled promenljivih u ovom primeru.)

Uočimo da je

$$h_\alpha(\mathbf{x}) = h_\alpha(x^\beta, x^\tau) = h_\alpha(x^\beta(x^\sigma), x^\tau) \equiv 0.$$

Onda je

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}h_\alpha &= \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i = \nabla h_\alpha \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \\
&= \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\sigma}\,\mathrm{d}x^\sigma + \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\tau}\,\mathrm{d}x^\tau = \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\sigma}\,\mathrm{d}x^\sigma + \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\tau}\delta^\tau_\sigma\,\mathrm{d}x^\sigma = \\
&= \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\tau}\delta^\tau_\sigma\right)\mathrm{d}x^\sigma = \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\beta}, \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\tau}\right)\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\sigma}, \delta^\tau_\sigma\right)\mathrm{d}x^\sigma = \\
&= \nabla h_\alpha \cdot \mathbf{T}_\sigma\,\mathrm{d}x^\sigma = 0,
\end{aligned}$$

gde je

$$\nabla h_\alpha = \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\beta}, \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\tau}\right).$$

Znači, mora biti

$$\nabla h_\alpha \cdot \mathbf{T}_\sigma = 0.$$

Vektori ∇h_α su linearano nezavisni i predstavljaju bazu vektorskog prostora upravnog na prostor baznih vektora $\mathbf{T}_\sigma$. Zaista, iz uslova

$$\lambda^\alpha \nabla h_\alpha = 0,$$

i pretpostavke da je

$$\mathrm{rang} J = \mathrm{rang}\left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial x^i}\right) = m,$$

sledi da mora biti $\lambda^\alpha = 0$.

Takođe je

$$f(x^i) = f(x^\alpha(x^\sigma), x^\tau)$$

vrednost f-je $f(x^i)$ u prostoru funkcija ograničenja f-ja $h_\alpha(x^i) = 0$. Onda je

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\sigma}\,\mathrm{d}x^\sigma + \frac{\partial f}{\partial x^\tau}\,\mathrm{d}x^\tau = \left(\frac{\partial f}{\partial x^\beta}, \frac{\partial f}{\partial x^\tau}\right)\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\sigma}, \delta^\tau_\sigma\right)\mathrm{d}x^\sigma = \nabla f \cdot \mathbf{T}_\sigma\,\mathrm{d}x^\sigma.$$

Prema tome, funkcija $f(x^i)$ imaće ekstremne vrednosti kada je

$$\nabla f \cdot \mathbf{T}_\sigma = 0.$$

Znači $\nabla f \cdot \mathbf{T}_\sigma = 0$ i $\nabla h_\alpha \cdot \mathbf{T}_\sigma = 0$, odakle sledi da je ∇f u prostoru vektora ∇h_α.

Zaključak, mora biti

$$\nabla f = \lambda^\sigma \nabla h_\alpha. \tag{39.21}$$

N Kao primer primene Lagranževog množioca veze u Mehanici kontinuuma navodimo rad I-Shi Liu [**I-Shi**].

Bibliografija

[1] Akivis, M. A., Goldberg V. V., *An Introduction to Linear Algebra and Tensors*, Dover Publications, Inc., 1977.

[2] Aljančić S., Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Građevinska knjiga, Beograd, 1968.

[3] Anđelić, Tatomir, *Tenzorski račun*, Naučna knjiga, Beograd, 1973.

[4] Anđelić, Tatomir, Stojanović, Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, SRS, Beograd, 1965.

[5] Anton Howard, *Calculus*, Second edition, John Wiley & Sons& Sons, 1984.

[6] Anton Howard, *Elementary Linear Algebra*, John Wiley & Sons, INC. New York, 1999.

[7] Anton Howard, Rorres Chris, *Calculus*, John Wiley & Sons, INC. New York, 2011.

[8] Apostol M. Tom, *Mathematical Analysis*, Second edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1974.

[9] Arfken B. George, Weber J. Hans, *Mathematical methods for physicists*, Elsevier Inc., 2005.

[10] Aris Rutherford, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover Publication. Inc. New York, 1989.

[11] Aubram Daniel, *Differential geometry applied to continuum mechanics*, Shaker Verlag, Berlin 2009.

[12] Bakša, A., Simić, S., *Racionalna mehanika*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad 2021.

[13] Bapat, R. B., *Linear Algebra and Linear Models*, Springer, 2000.

[14] Bapat, R. B., Raghavan,T. E. S., *Nonnegative Matrices and Applications*, Cambridge University Press, 1997.

[15] Javier Bonet, Antonio J. Gil, Rogelio Ortigosa, *On a tensor cross product based formulation of large strain solid mechanics*, International Journal of Solids and Structures 84 (2016) 49â€“63.

[16] Boothby M. William, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Rimannian Geometry*, Academic Press, 1975.

[17] Borisenko, A.I. and Tarapov I.E., *Vector and Tensor Analysis with applications*, Dover Publications, Inc., 1968.

[18] Bowen, R.M., Wang, C.-C., *Introduction to vectors and tensors*, Vol.1, Plenum press, 1976.

[19] Bowen M. Rey, Wang C.-C., *Introduction to vectors and tensors*, Dover publications, 2008.

[20] Byron, Jr. F., Fuller, W. R., *Mathematics of classical and quantum physics*, Dover, 1992

[21] Chandrasekharaiah, D. S., Debnath Lokenath, *Continuum mechanics*, Academic Press, Inc., 1994

[22] Choquet-Bruhat Yvonne, DeWitt-Morette Cécile and Dillard-Bleick Margaret, *Analysis, Manifolds and Physics*, Part I: Basics, North-Holland, 1982.

[23] Ciarlet G. Philippe, *An introduction to differential geometry with applications to elasticity*, Springer, 2005.

[24] Coman D. Ciprian, *Continuum Mechanics and Linear Elasticity*, Springer, 2020.

[25] Crampin, M., F. A. E. Pirani, *Applicable Differential Geometry*, Cambridge University, 1987.

[26] Cullen G. Charles, *Matrices and Linear transformations*, Dover Publications,

[27] Das Anadijiban, *Tensors*, Springer Science, 2007.

[28] Dimitrienko Yu. I., *Tensor Analysis and Nonlinear Tensor Functions*, Springer Science-Business Media Dordrecht, B.V., 2002.

[29] Vladan D. Đorđević, Jovo Jarić, Ben Fabry, Jeffrey J. Fredberg, and Dimitrije Stamenović, *Fractional Derivatives Embody Essential Features of Cell Rheological Behavior*, Annals of Biomedical Engineering, Vol. 31, pp. 692â€“699, 2003.

[30] Doličanin Ćemal, Bokan Neda, Kuzmanović Dragoslav, *Odabrana poglavlja iz matematike*, Akademska misao, Beograd 2018.

[31] A. Cemal Eringen, . *Nonlinear Theory of Continuous Media*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, N. Y., 1962.

[32] Edwarda, C.H., *Advanced calculus of several variables*, Dover, 1994.

[33] Eisenhart L. P., *An Introduction to Differential Geometry*, Princeton University Press, 1947.

[34] Gonzales Oscar and Stuart M. Andrew, *A First Course in Continuum Mechanics*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 2008.

[35] Gurtin E. Morton, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, 1981.

[36] Harville A. David, *Marix Algebra From Stsatistical's Perspekive*

[37] Harville A. David, *Matrix algebra: exercises and solutions*, Springer, 2001.

[38] Helrich S. Carl, *Modern Thermodynamics with Statistical Mechanics*

[39] Islam Nazrul, *Tensors and their applications*, New Age International (P) Ltd., Publishers, 2006.

[40] Itskov Mikhail, *On the theory of fourth-order tensors and their applications in computational mechanics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 189 (2000) 419-438.

[41] Itskov Mikhail, *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers*, Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 2009.

[42] Jovo Jarić, Dimitrije Stamenović, and Vladan D. Đorđević, *On Extended Polar Decomposition*, Journal of Elasticity (2006) 83: 277â€“289, Springer 2006, DOI: 10.1007/s10659-005-9045-x.

[43] Jarić Jovo, *Mehanika Kontinuuma*, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.

[44] Jarić, Jovo, *On the gradients of the principal invariants of a second-order tensor*, Journal of Elasticity Vol. 44, pages 285-287 (1996).

[45] Jarić, J. P., *On the representation of symmetric isotropic 4-tensors*, J. Elast., 51(1), 73-79, 1998.

[46] J. P. Jarić, D. S. Kuzmanović, *On the Elasticity Tensor of Third Order*, Theoretical and applied mechanics, vol. 26, pp. 91-106, 2001.

[47] Jarić, P.J., Stamenović, D., *On Unsheared Tetrads*, Journal of Elasticity, 81: 153-157, 2005.

[48] Jarić J., Cvetković P., Golubović Z., Kuzmanović D., *Advances in continuum mechanics*, MB-25, Caretaken by the PAMM-Centre at the Budapest University of Technology and Economics, Budapest, 2002.

[49] Jarić Jovo, Kuzmanović Dragoslav, Golubović Zoran, *On Tensors of Elasticity*, Theoret. Appl. Mech. Vol 35, No. 1-3, pp. 119-136, (2008).

[50] Jarić Jovo, *On Gauss-Bonnet theorem*, Publications de L'Institut Mathématique, 91(105), pp. 59-62, 2012.

[51] Jarić Jovo, P., Kuzmanovi¸ Dragoslav S.; Golubović, Zoran D.J.; Dulikravich, George S., *On the inverse Noether's theorem in nonlinear micropolar continua*, Inverse Problems in Science & Engineering, Apr. (2012), Vol. 20 Issue 3, p423-443.

[52] J. Jarić, D. Kuzmanović, D. Šumarac, *On anisotropic elasticity damage mechanics, Internal journal of damage mechanics*, Vol 22 (7), septembar, pp. 1023-1038, (2012).

[53] Jarić P. Jovo, Rade Vignjević and Siniša Đ. Mesarović, *Transport Theorem for Spaces and Subspaces of Arbitrary Dimensions*, Mathematics, 8, 899, (2020).

[54] Jog, C. S., *A concise proof of the representation theorem for fourth-order isotropic tensors*, J. Elast., 85(2), 119-124, 2006.

[55] Knowles, J. K., *On the representation of the elasticity tensor for isotropic materials*, J. Elast., 39(2), 175-180, 1995.

[56] Kreyszig Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1978.

[57] Kreyszig Erwin, *Differential Geometry*, Dover Publications (1991).

[58] Kühnel Wolfgang, *Differential Geometry* - Curves-Surfaces-Manifolds, AMS - American Mathematical Society, Providence, 2015.

[59] David Lovelock, Hanno Rund, *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles*, Dover book.

[60] Malvern, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, New Jersey: Prentice Hall Inc., 1969.

[61] Marsden, J. E. and T. J. R. Hughes, *Mathematical Foundations of Elast.*, New York: Dover, 1994.

[62] Marsden E. Jerrold, Ratiu Tudor, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer-Verlag Publishing Company, Inc., 2002

[63] Marsden E. Jerrold, Tromba J. Anthony, *Vector calculus*, W. H. Freeman and Company New York, 2003.

[64] Masud Chaichian, Ioan Merches, Anca Tureanu, *Mechanics An Intensive Course*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2012).

[65] Matthews, P.C., *Vector Calculus*, Springer-Verlag London Limited, 1998.

[66] McConnell, A. J., *Applications of tensor analysis*, Dover Publications, Inc., 1957.

[67] Meyer D. Carl, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*,

[68] Michal, D. Aristotle, *Matrix and Tensor Calculus*, Dover Publications, Inc., 2008.

[69] Michel, A.N., Herget, Ch. *Applied Algebra and Functional Analysis*, Dover, 1993.

[70] Michel, A.N., Herget, Ch. *Algebra and Analysis for Engineers and Scientists*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2007.

[71] Millman S. Richard and Parker D. George, *Elements of differential geometry*, Prentice-Hall, 1977.

[72] Minči; M. Svetislav, Velimirović S. Ljubica, *Tenzorski račun*, Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Niš 2009.

[73] Moon P., Spencer, D.E., *Field theory handbook*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1971.

[74] Mungan E. Carl, *Ležandrove transformacije za početnike*, Legendre Transforms for Dummies,

[75] Munkres R. James, *Analysis on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company, 1991.

[76] Murdoch, A. Ian, *Physical foundations of continuum mechanics*, Cambridge University Press, 2012.

[77] Mušicki, Đ., Milić B., *Matematičke osnove teorijske fizike*, Naučna knjiga, Beograd, 1975.

[78] Nair Sudhakar, *Introduction to Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, 2009.

[79] Nash Charles, Siddhartha Sen, *Topology and geometry for physicists*, Academic Press, 1983.

[80] Nivaldo A. Lemos, *Analytical mechanics*, Cambridge University Press, 2018.

[81] Ogden, R.W, *Non-linear elastic deformation*, New York: Dover, 1997.

[82] Olver, J. Peter, *Classical Invariant Theory*, Cambridge University Press, 1999.

[83] Pease C. Marshall, *Mrthods of matrix algebra*, Vol. 16, Academic press, 1965.

[84] Prasun Kumar Nayak, *Tensor Calculus and Differential Geometry*, PHI Learning Private Limited, New Delhi, 2012.

[85] Roman Steven, *Advanced Linear Algebra*, Springer, 2000.

[86] Schouten, A.J. *Ricci-Calculus: An Introduction to Tensor Analysis and Its Geometrical Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1954.

[87] Schwartz Abraham, *Calculus and Analytic Geometry*, Third edition, 1974.

[88] Stojanović, Rastko, *Osnovi diferencijalne geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1963.

[89] Sedmak, A., BerkovićM., Jarić,J., *J-integral for Thin Shells*, EGF9 (1991).

[90] I.S. Sokolnikoff, *Tensor analysis. Theory and applications*,Wiley, New York.

[91] Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications*, 4th edn. Brooks cole, Stamford (2005).

[92] Tai, C.T., *A Survey of the Improper Uses od Δ in Vector Analysis*, University of Michigen, 1994.

[93] R.A. Toupin, *Elastic materials with couple-stresses*, Arch. Rational Mech.Anal., 11, (1962), 385-414.

[94] R.A. Toupin, R.A., *Theories of elasticity with couple-stress*, Arch. Rational Mech. Anal., 17, (1964), 85-112.

[95] Truesdell, C. and W. Noll, *The Non-linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik 3, Berlin: Springer-Verlag, 1965.

[96] Truesdell, C. and Toupin, R.A. (1960) *The Classical Field Theories*, In: Flugge, S., Ed., Handbuck der Physik, Vol. III/I, Springer-Verlag, Berlin.

[97] Udwadia E. Firdaus and Kalaba E. Robert, *Analytical dynamics*, Cambridge University Press, 1996.

[98] Usmani A. Riaz, *Applied linear algebra*, M. Dekker, 1987.

[99] Veblen Oswald, *Invariants of Quadratic Differenti Forms*, Cambridge University Press, 2004.

[100] Vekua I.N., *Generalized Analytic Functions*, Pergamon Press, 1962.

[101] William H. Meeks III, Joaquín Péerez, *A survey on classical minimal surface theory*, 2012.

[102] https://en.wikipedia.org/wiki/Vector-calculus-identities

[103] *Lecture notes on generalized eigenvectors for systems with repeated eigenvalues*, https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT2440/v11/undervisningsmateriale/genvect

[104] I-Shi Liu, *fMethod of Lagrange Multipliers for Exploitation of the Entropy Principle*, Archive for Rational Mechanics and Analysis 46(2):131-148, January 1972.

[105] https://pl.wikipedia.org/wiki /Helikoida/media/Plik:Helicoid.PNG .

[106] Arnold I.V. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 1989, Springer-Verlag.

[107] Dragović V., Milinković D., *Analiza na mnogostrukosti*, Matematichki fakultet, Brograd, 2003.

Indeks

Symbols

A

B

C

D

E

F

G

K

L

M

N

O

P

R

S