

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Милена Алексић  
1078/2018

**ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ У  
МАТЕМАТИЧКОМ МОДЕЛОВАЊУ**

мастер рад

Београд, 2023.

**Ментор:**

др Марија Микић, доцент  
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Чланови комисије:**

др Милан Дражић, редовни професор у пензији  
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Јелена Катић, ванредни професор  
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Датум одбране:** 22.06.2023.

# Садржај

<b>1</b>	<b>Увод</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>О математичком моделовању</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Обичне диференцијалне једначине првог реда</b>	<b>12</b>
3.1	Диференцијална једначина која раздваја променљиве . . .	15
<b>4</b>	<b>Примена диференцијалних једначина првог реда у математичком моделовању</b>	<b>17</b>
4.1	Закон радиоактивног распада . . . . .	17
4.2	Њутнов закон хлађења . . . . .	28
4.3	Динамички модели раста популације . . . . .	30
4.4	Проблем смеша . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Обичне диференцијалне једначине вишег реда</b>	<b>40</b>
5.1	Хомогена линеарна диференцијална једначина $n$ -тог реда	43
5.2	Нехомогена линеарна диференцијална једначина $n$ -тог реда	46
5.3	Линеарна диференцијална једначина $n$ -тог реда са константним коефицијентима . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Примена диференцијалних једначина вишег реда у математичком моделовању</b>	<b>50</b>
6.1	Осцилаторно кретање . . . . .	50
6.2	Математичко клатно . . . . .	57
	<b>Референце</b>	<b>61</b>
	<b>Биографија</b>	<b>62</b>

# Глава 1

## Увод

Диференцијалне једначине су једна од грана математике са најширом применом која се огледа у готово свим сферама свакодневног живота. Многи проблеми природних, па чак и неких друштвених наука, попут социологије и економије, се моделују њима. Оне имају важну улогу у моделовању процеса који се свакодневно одвијају у оквиру одређених система. Особине тих појава, односно система, можемо проучавати, па чак и предвидети како ће се они понашати у будућности или добити слику њиховог стања из прошлости уколико их моделујемо диференцијалним једначинама.

Рад ће приказати на који начин се формирају и користе математички модели неких процеса или појава који се описују помоћу диференцијалних једначина. Циљ рада је да покаже разноврсност примене диференцијалних једначина, као и могућности, предности и мане математичких модела који се добијају помоћу диференцијалних једначина.

У првом делу рада биће речи о математичком моделовању генерално. Следећи део рада ће се односити на диференцијалне једначине првог реда. Биће дат осврт на основне дефиниције и теореме које се односе на диференцијалне једначине првог реда. Биће посебно обрађене диференцијалне једначине које раздвајају променљиве како бисмо у наредном делу рада проучили процесе који су моделирани тим једначинама (као што су, на пример, динамички модели раста популације, примене Њутновог закона хлађења, примене закона радиоактивног распада материје).

Затим ће бити речи о диференцијалним једначинама вишег реда, основним дефиницијама и теоремама које се односе на њих. Такође,

биће проучени одабрани модели који се моделирају диференцијалним једначинама вишег реда (на пример, биће посматрано осцилаторно кретање и резонанца). На појединим местима у раду ће уместо диференцијалних једначина бити коришћена скраћеница дј.

## Глава 2

# О математичком моделовању

Промене се око нас дешавају сваког тренутка. Људи од давнина настоје да их што боље разумеју и објасне, пре свега, јер разумевање света око нас помаже нашем преживљавању и прилагођавању природи. Осим разумевања, људи теже и да предвиде будуће промене. Томе у прилог иде и чињеница да већина појава (промена) у природи није случајна, већ се међу појавама уочавају међусобне зависности.

Неке од ових промена су предвидљиве попут падања предмета под дејством силе гравитације и изласка и заласка сунца, док се друге дешавају насумично и није их могуће предвидети. У неким случајевима појаве можемо предвидети само краткотрајно, али не и на дуге стазе. Дobar пример краткотрајног предвиђања јесте праћење урагана.

Људи нису одувек природу и њене процесе и појаве објашњавали помоћу науке, међутим, научни начин објашњења света се показао веродостојнијим од осталих објашњења појава у природи и свету попут филозофских и религијских.

Пре него што кренемо на проучавање, запитајмо се на који начин опажамо природу? Природне појаве, процесе и системе који се јављају у свакодневном животу опажамо помоћу својих чула и помоћу мерних инструмената. Опажање помоћу чула није у потпуности тачно, као што није ни мерење помоћу мерних инструмената. Оба алата садрже недостатке, а поред тога не могу се ни све појаве уочити чулима, нити измерити помоћу мерних инструмената. Чак и када појаву уочимо, односно измеримо, то радимо са одређеним одступањем од стварности. У великом броју случајева можемо регистровати та одступања и знати

да природа није савршено опажена, али се тих одступања не можемо у потпуности ослободити. Ту на сцену ступа моделовање природе, у нашем случају, математичко моделовање. Детаљније видети у [1].

Да бисмо могли да моделујемо појаву, процес или систем, морамо знати шта је математичко моделовање, а шта математички модел.

Математичко моделовање је процес добијања математичког модела неке појаве, процеса или система, на основу расположивих информација које имамо, док је математички модел сам опис појаве, процеса или система помоћу математичког језика. Предмет овог рада ће бити проучавање оних појава, процеса или система које као своје моделе имају диференцијалне једначине.

Реч модел потиче од латинске речи *modus*, што значи мера. Моделовање не мора бити само математичко, постоје и други типови модела, попут кројачких лутки, макета, географских карата, мапа, итд.

Модел, сами по себи, не могу савршено осликавати природу која је изузетно комплексна. Зато је врло често потребно вршити поједностављења. Таквим поступањем одступамо од савршено тачног приказа природе. Рецимо, када моделујемо предмет који пада под дејством гравитације можемо занемарити отпор ваздуха. Када моделе решимо и решење треба да представимо у облику конкретних бројних вредности, примењујемо неко нумеричко израчунавање при коме је прецизност записа бројева такође ограничена. Дакле, одступања увек има: било да су она настала при опажању, при превођењу проблема у математички облик (при одабиру променљивих које су битне за модел и занемаривању оних које нису битне за модел, као и облику зависности међу њима), при решавању или при запису решења математичког модела.

Када математички модел, односно његово решење, одступа од стварности за неку прихватљиву вредност за модел кажемо да је адекватан. У супротном је потребно модификовати дати модел или тражити нови који ће боље пристајати стварности, односно, појави коју проучавамо, а чије ће решење бити адекватно.

Оно што се природно поставља као питање је да ли било ко може да се упусти у авантуру звану математичко моделовање? Одговор је не. Математичко моделовање захтева познавање математике, њених тео-

рија, концепата, захтева начин апстрактног размишљања и познавање правила доношења валидних закључака. Чак ни све ово претходно познавање није довољно за формирање математичког модела. За моделовање конкретне појаве, процеса или система је неопходно знање о њима самима, што врло често подразумева познавање неке друге научне области, поред математике. Дакле, да би се формирао адекватан математички модел неопходна је сарадња међу припадницима различитих научних области. Део моделовања у коме познаваоци математике имају најбитнију улогу је онај у коме треба доказати да ли модел има решење, да ли је оно јединствено и које су његове особине. Такође треба да се установи да ли је модел добро дефинисан, којом процедуром ће се тражити решење модела, као и шта гарантује тачност решења модела. Чест је случај да је за решавање одређеног математичког модела потребно развити неку нову теорију, поред постојеће, што је, такође, један математички задатак, занимљив теоретичарима.

Математичке моделе првенствено користимо за боље разумевање природе: да опишемо појаву, нађемо разлог због ког се она дешава и на који начин ће се одвијати у будућности. Поред тога, математички модел за једну појаву може довести до бољег разумевања неке друге појаве и развијања модела за њу. Пример је Кеплеров модел елиптичних путања планета захваљујући коме се дошло до Њутновог универзалног закона гравитације који је након тога довео до још бољег модела Сунчевог система, који је у обзир узимао и међусобно привлачење планета.

Математички модели имају посебно велики значај за проучавање појава за које је немогуће извести експерименте (моделирање судара галаксија, животни циклус звезда, ефекат стаклене баште, прогноза времена), затим за проучавање оних појава за које није пожељно изводити експерименте (фисија, фузија, стабилност грађевина, природне катастрофе), за проучавање појава чији су експерименти веома скупи (утицај радијације на генетски материјал, аеродинамика). Модели имају велики значај и у контроли процеса у свакодневном животу ради сигурности и уштеде материјала и времена, рецимо, у индустрији, где се тежи да се финални производ добије уз минимални утрошак ресурса, а да при томе и даље задовољава потребне стандарде.



Моделовање је битно и при конструкцији мерних уређаја. Није ре-  
дак случај да када желимо да измеримо неку физичку величину ми,  
заправо, конструишемо мерни уређај који мери неку другу физичку  
величину коју је лакше измерити, а затим искористимо законе физи-  
ке који повезују ове две величине. Овим поступком, заправо, мерећи  
једну величину добијамо податке о другој, оној коју смо првенствено  
хтели да измеримо. Пример тога је живин термометар, где за мерење  
температуре ваздуха користимо особину ширења живе пропорционал-  
но температури. Захваљујући рачунарима данас можемо конструисати  
и неке сложеније мерне уређаје који служе мерењу величина које не  
можемо директно мерити чак ни преко неке друге величине (као, на  
пример, у физиологији).

Поред свега наведеног, математички модели имају изузетан значај  
у образовању, где се онима који уче комплексне природне појаве, про-  
цеси и системи могу приближити заменом одговарајућим моделима.

Да би настао математички модел, морамо поштовати основне прин-  
ципе и кораке који се користе при његовом формирању. При формира-  
њу математичког модела треба пратити следеће кораке. Почетни ко-  
рак је препознати проблем који желимо да моделујемо, а затим и јасно  
поставити циљ: одредити шта је оно што желимо да добијемо форми-  
рањем модела. Потребно је превести проблем на математички језик  
и дефинисати колико је одступање од стварности прихватљиво. Затим  
треба сакупити све податке добијене већ обављеним експерименталним  
испитивањем датог проблема и по потреби, организовати нове експе-  
рименте за добијање додатних података.

Након тога је потребно формулисати математички модел, односно,  
одредити које су променљиве и параметри битни за проучавање нашег  
проблема и у којој мери. Од изузетне је важности да свака променљи-  
ва, тј. параметар има своју интерпретацију у стварном проблему којим  
се бавимо. Битно је елиминисати променљиве које су мање битне да би  
добијени модел био решив, а са друге стране и даље у траженој мери  
верно приказивао стварност, односно проблем који решавамо. Навед-  
ени део формулације модела је често најтежи. Треба уочити и на који  
начин ове променљиве и параметри зависе једни од других. На основу  
природе проблема одредити шта ће тај модел заправо бити: диферен-

цијална једначина, проблем оптимизације, варијациони проблем. . . При избору модела треба користити и информације о раније формираним моделима за сличне појаве, што може бити од велике помоћи.

Наредни корак је тестирање модела и провера да ли је он адекватан, односно, провера да ли је одступање од стварности у рангу прихватљивог. Често је потребно вршити експерименте за нове вредности променљивих и параметара. Дешава се да је модел адекватан за неке вредности променљивих и параметара, док за друге није. Ако је опсег вредности које модел задовољава мали, модел није довољно добар, односно није адекватан и као што је речено раније, треба кориговати постојећи модел или формирати потпуно нови. Последњи корак је презентација модела и резултата истраживања.

Постоји више подела математичких модела у односу на природу проблема који се моделује, на математичке концепте који се користе, као и у односу на начин закључивања. Једна од њих је подела на континуалне и дискретне. Континуални модели користе реалне променљиве, а дискретни дискретне променљиве. Постоје и мешовити модели у којима се јављају и континуалне и дискретне променљиве.

Још једна подела модела је на детерминистичке и стохастичке. Детерминистички су они модели који се користе за објашњавање појава које подлежу неким законима, док су стохастички они у којима се променљиве понашају на случајан начин. Дешава се и да се стохастички модели користе за детерминистичке појаве, рецимо у временској прогнози.

Наредна подела односи се на линеарне и нелинеарне. Линеарни су једноставнији и њих је лакше проучавати, док су нелинеарни комплекснији и тежи за проучавање.

Такође, постоје динамички и статички модели, од којих ови први користе време као променљиву (за њих се користе диференцијалне једначине), док други не.

Последња подела модела је на индуктивне и дедуктивне. Индуктивни настају када из постојећих опажања и података уопштавамо, док су дедуктивни они који настају логичким извођењем из познатих закона.

Пример индуктивног модела је Кеплеров<sup>1</sup> модел кретања планета по елиптичним путањама, јер је настао помоћу опажања током низа година, а пример дедуктивног модела је Њутнов<sup>2</sup> модел кретања планета, јер се трајекторије планета добијају применом Њутновог закона гравитације.

Многа истраживања се у последње време односе на диференцијалне једначине. Данас чак постоје и компјутерски алгоритми који нам само уз помоћ основних знања о диференцијалним једначинама и особинама њихових решења омогућавају огромна сазнања и могућности моделовања комплексне природе.

---

<sup>1</sup>*Johannes Kepler* (1571-1630.) био је немачки математичар и астроном. Установио је кретање планета по елипсама и тиме срушио теорије и веровања да се планете крећу око Сунца по кружницама. Користећи посматрања данског астронома Тиха Брахеа, Кеплер је открио правилности у планетским кретањима која је сврстао у три закона, тзв. Три Кеплерова закона. Предавао је математику, а у једном свом делу служио се поступцима који га чине претечом у открићу инфинитезималног рачуна.

<sup>2</sup>*Isaac Newton* (1642-1727.) био је енглески математичар, физичар, астроном и филозоф и сматра се једним од највећих научника свих времена. Поставио је темеље класичне механике, која се по њему зове Њутнова механика. Увео је нови физички појам који је назвао импулс и извео закон одржања импулса као и закон одржања момента импулса. Формулисао је закон гравитације. У математици Њутн дели заслуге заједно са Лајбницом за откриће инфинитезималног рачуна. Такође је изложио и уопштио биномну теорему, развијајући на тај начин тзв. Њутнов метод за апроксимацију нула функција и доприносићи проучавањима разлагања функција у редове.

## Глава 3

# Обичне диференцијалне једначине првог реда

У првом делу рада ћемо се бавити диференцијалним једначинама првог реда. На почетку ћемо навести основне дефиниције и теореме потребне за даље изучавање математичких модела.

**Дефиниција 3.1** *Обичне диференцијалне једначине су једначине у којима се појављује бар један од извода непознате реалне функције једне независне променљиве.*

Постоје различити типови диференцијалних једначина, зависно од реда и линеарности.

**Дефиниција 3.2** *Диференцијална једначина која садржи парцијалне изводе непознате функције две или више независно променљивих је парцијална диференцијална једначина.*

**Дефиниција 3.3** *Нека је  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ , где је  $D$  отворен скуп. Нека је  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  дата функција независно променљиве  $x$ , зависно променљиве  $y$  и њених извода. Једначина*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3.1)$$

*у којој фигурише бар један од извода непознате реалне функције  $y = y(x)$  назива се **ОБИЧНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА**  $n$ -тог реда у општем облику.*

**Дефиниција 3.4** *Ред диференцијалне једначине је ред највишег извода непознате функције који се у њој појављује.*

Једначина облика

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.2)$$

јесте диференцијална једначина  $n$ -тог реда у нормалном облику.

За нас ће тренутно од интереса бити да посматрамо само следећи тип диференцијалне једначине.

**Дефиниција 3.5** *Нормални облик диференцијалне једначине првог реда је облика*

$$y' = f(x, y), \quad (3.3)$$

где  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , где је  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

**Дефиниција 3.6** *Функција  $y = \varphi(x)$  је решење диференцијалне једначине (3.3) на интервалу  $(a, b)$  ако је диференцијабилна на  $(a, b)$  и ако задовољава једначину (3.3) на  $(a, b)$ .*

**Дефиниција 3.7** *Интегрална крива диференцијалне једначине (3.3) је график решења диференцијалне једначине (3.3), односно, геометријско место тачака  $\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b)\}$ .*

Разликујемо три типа решења, опште, партикуларно и сингуларно.

**Дефиниција 3.8** *Нека је  $S \times T$  отворен скуп у  $\mathbb{R}^2$ . Фамилија функција*

$$y = \varphi(x, c),$$

при чему је  $c \in C$ , где је  $C \subset \mathbb{R}$ , је опште решење диференцијалне једначине (3.3) у скупу  $S \times T$  ако за сваку тачку  $(x_0, y_0) \in S \times T$  постоји јединствено  $c_0 \in C$  такво да је  $y = \varphi(x, c_0)$  решење диференцијалне једначине (3.3) које задовољава услов

$$y_0 = \varphi(x_0).$$

**Дефиниција 3.9** *Партикуларно решење диференцијалне једначине (3.3) је решење диференцијалне једначине (3.3) које се може добити из општег решења за фиксирану, допустиву вредност параметра  $c$ .*

**Дефиниција 3.10** *Сингуларна тачка решења диференцијалне једначине (3.3) је тачка у којој је нарушена јединственост решења.*

**Дефиниција 3.11** *Сингуларно решење диференцијалне једначине (3.3) је оно решење диференцијалне једначине (3.3) коме је свака тачка сингуларна, односно, оно решење коме је нарушена јединственост у свакој његовој тачки.*

Сингуларна решења су од великог значаја за разумевање процеса или делова стварности који се моделују, стога морамо бити пажљиви у вези са њима и не смемо их занемаривати у процесу решавања диференцијалних једначина.

Под решавањем диференцијалне једначине (3.3) подразумевамо одређивање свих њених решења, што значи да треба одредити опште решење, сингуларна решења (ако таква решења постоје) и испитати понашање решења у близини сингуларних тачака.

**Дефиниција 3.12** *Кошијев<sup>1</sup> задатак за диференцијалну једначину или Кошијев проблем почетних услова подразумева одређивање решења диференцијалне једначине (3.3) која пролазе кроз тачку  $(x_0, y_0) \in D$  тј. одредити решење  $y = \varphi(x)$  диференцијалне једначине (3.3) дефинисано у некој околини тачке  $x_0$  тако да оно задовољава услов*

$$y_0 = \varphi(x_0),$$

при чему бројеве  $x_0$  и  $y_0$  зовемо почетним условима.

Дакле, Кошијев задатак је задатак у коме треба да нађемо функцију  $\varphi$  (једну или више њих) тако да она задовољава наредна два услова

$$\begin{aligned}\varphi' &= f(x, \varphi) \\ y_0 &= \varphi(x_0).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Многи математички модели се свODE на решавање одређеног Кошијевог проблема.

Оно што нас занима јесте да ли и под којим условима постоји решење Кошијевог проблема диференцијалне једначине првог реда у нормалном облику, као и да ли је оно јединствено (ако такво решење постоји).

---

<sup>1</sup> *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857.) био је чувени француски математичар. Проучавао је различите области математике: теорију бројева, математичку анализу, теорију диференцијалних и парцијалних једначина, теоријску и небеску механику, математичку физику и др.

Нека је  $G$  отворен скуп и  $(x_0, y_0)$  произвољна тачка која му припада. Посматрајмо скуп тачака у равни, односно правоугаоник  $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset G$  (приметимо да постоје позитивне константе  $a$  и  $b$  такве да је правоугаоник  $\Pi \subset G$ ).

Теорема која даје довољан услов за постојање решења је Пеанова теорема.

**Теорема 3.13** (Пеано<sup>2</sup>) *Нека је функција  $f$  дефинисана и непрекидна на правоугаонику  $\Pi$ . У том случају Кошијев проблем (3.4) има решење дефинисано у некој околини тачке  $x_0$ .*

Теорема која говори о јединствености решења је Пикарова теорема.

**Теорема 3.14** (Пикар<sup>3</sup>) *Нека је функција  $f$  непрекидна на правоугаонику  $\Pi$  и нека је она Липшицова функција на правоугаонику  $\Pi$  у односу на променљиву  $y$ . Тада постоји јединствено решење Кошијевог проблема (3.4) и дефинисано је у некој околини тачке  $x_0$ .*

Доказ Пикарове теореме се може наћи у [2].

### 3.1 Диференцијална једначина која раздваја променљиве

Најједноставнији тип диференцијалних једначина првог реда су диференцијалне једначине које раздвајају променљиве. Оне имају изузетан значај, имајући у виду да се на њих своде многи други типови диференцијалних једначина, коришћењем погодних смена.

Диференцијална једначина која раздваја променљиве је облика

$$y' = h(x)g(y), \tag{3.5}$$

при чему су  $h = h(x)$  и  $g = g(y)$  познате, а  $y = y(x)$  непозната функција.

---

<sup>2</sup>*Giuseppe Peano* (1858-1932.) био је италијански математичар који је оснивач математичке логике и теорије скупова. Стандардна аксиоматизација природних бројева назива се Пеанови аксиоми. Од великог значаја је и његов рад у области диференцијалних једначина с обзиром да је доказао да је непрекидност функције  $f(x, y)$  довољан услов за постојање решења диференцијалне једначине првог реда  $y' = f(x, y)$ .

<sup>3</sup>*Charles Emile Picard* (1856-1941.) био је француски математичар чије су теорије познате у анализи, алгебарској геометрији и механици. Увео је метод узастопних апроксимација за доказивање постојања и јединствености решења код диференцијалних једначина.

На који начин решавамо овај тип једначина? Поделимо и леву и десну страну једнакости са  $g(y)$ , под условом да је  $g(y) \neq 0$ , за свако  $y \in (c, d)$

$$\frac{y'}{g(y)} = h(x).$$

Након интеграције и увођења смене  $y(x) = t$ , добија се

$$\int \frac{dt}{g(t)} = \int h(x)dx.$$

Ако са  $G(t)$  и  $F(x)$  означимо примитивне функције редом за функције  $\frac{1}{g(t)}$  и  $h(x)$ , добијамо фамилију решења одређену једначином

$$G(t) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

што после враћања смене добија облик

$$G(y(x)) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Вратимо се за тренутак на корак у коме смо обе стране једнакости (3.5) делили са  $g(y)$ . Тада смо претпоставили да је  $g(y) \neq 0$ , за свако  $y \in (c, d)$ . Шта се дешава ако је  $g(y_0) = 0$ , за неко  $y_0 \in (c, d)$ ? Заменимо  $y = y_0$  у једначину (3.5). Добија се да једнакост важи што значи да је  $y_0$  такође решење наше једначине (3.5).

Закључујемо да приликом решавања диференцијалних једначина које раздвајају променљиве у скуп решења морамо уврстити и ова, константна решења која одговарају услову  $g(y) = 0$ . Та решења могу бити сингуларна или партикуларна.



## Глава 4

# Примена диференцијалних једначина првог реда у математичком моделовању

### 4.1 Закон радиоактивног распада

#### Ван Мегеренови фалсификати

Овај део рада базиран је на материјалу који се може пронаћи у књизи [7]. После ослобађања Белгије у Другом светском рату, почела су хапшења ратних злочинаца и оних који су сарађивали са нацистима. Један од ухапшених је био банкар, посредник у продаји слике „Жена ухваћена у прељуби” чувеног холандског сликара Јана Вермера из 17. века, која је продата Герингу. Банкар је открио да је његов саучесник у овом делу био холандски сликар Ханс ван Мегерен (1889-1947.), па је и он био ухапшен под сумњом да је сарађивао и подржавао нацисте, за шта га је чекала смртна казна.

Недуго након хапшења, ван Мегерен је запрепастио свет признањем да он, заправо, никад није продао слику „Жена ухваћена у прељуби” Герингу. Изјавио је да је ова, као и још неке познате слике попут „Вечера у Емаусу”, за које се мислило да су Вермеров рад, заправо биле његов лични рад. Многи су веровали да он не говори истину како би сачувао себе.

Да би доказао да говори истину, да је нацистима продао фалсификат и на тај начин их преварио, да није издао свој народ продавши им национално благо, почео је у затвору, уз надзор, да фалсифику-

је Вермерову слику „Млади Исус у храму”, што је, уједно, био његов последњи фалсификат. Истовремено је доказивао и своју невиност и своју кривицу. Када је рад био при крају, оптужница за сарадњу са нацистима бива замењена оптужницом о фалсификовању. Ван Мегерен одбија да заврши слику, надајући се да на тај начин неће бити откривена његова тајна којом је чинио да слике изгледају као из времена оригинала.

Мотив за превару Геринга био је да сачува оригинална уметничка дела од нациста. На тај начин је ван Мегерен од издајника постао народни херој. Сликао је на платнима која је добијао чишћењем слика насталих у време када је Вермер стварао своја дела, а чија вредност није била велика. Сликао је длакама од јазавца и израђивао боје традиционалним методама из 17. века. Како би фалсификати деловали као да су настали у доба када су настали оригинали, ван Мегерен би боје мешао са бакелитом, фенол-формалдехидном смолом насталом полимеризацијом карболне киселине (фенола) и формалдехида и такве их наносио на платно. Бакелит би после сушења постајао тврд и слика је добијала још старији изглед. По завршетку сликања, пекао би своја дела у рерни како би настале пукотине и како би деловала као дела неког старог мајстора, јер је уљаним бојама потребно много времена да се осуше. Након тога би прелазео ваљком преко слика, како би оне изгледале као слике из времена када су настали оригинали.

Он није само копирао Вермерова дела, већ је сликао и нова, превезши Вермеров стил у потпуности. Њих је даље продавао, убеђујући критичаре да су у питању дела познатог сликара. Фалсификујући неколико дела није био пажљив, па су експерти нашли трагове модерних боја и детектовали формалдехид, који није био откривен у периоду у ком је Вермер стварао.

Због овог открића првобитна оптужница за сарадњу са нацистима је оборена и он је осуђен 12. октобра 1947. године на једну годину затвора због фалсификовања, а не због оног због чега је првобитно био приведен. Осуђен је на минималну казну затвора, али није дочекао да буде ослобођен, јер је доживео срчани удар. Претпоставља се да је разлог смрти управо токсичност бакелита коме је био изложен годинама без икакве заштите.

Упркос свему откривеном, многи су и даље одбијали да поверују да је слика „Вечера у Емаусу” била Мегеренова копија. Нису веровали, јер је та слика била квалитетнија од преосталих за које се доказало да јесу фалсификати. Заиста, она јесте првобитно била потврђена као оригинално Вермерово дело и продата за огромну своту новца. Одговор на питање због чега је ова слика била квалитетнија од осталих фалсификата је тај што је ван Мегерен радећи на њој имао велику жељу да докаже да је првокласни уметник, док је радећи остале та жеља ишчезла. Скептици нису веровали у ово објашњење и захтевали су детаљну научну анализу и валидне доказе да слика „Вечера у Емаусу” заиста јесте фалсификат. Истраживање је завршено 1967. године на Карнеги Мелон Универзитету. Научници су истраживање обавили користећи диференцијалне једначине првог реда, односно закон радиоактивног распада материје. Поступак којим је истраживање обављено се може пронаћи у [7] и биће објашњен у овом делу рада.

Кључ у одређивању старости слика и осталих материјала попут камења или фосила лежи у феномену радиоактивности који је откривен крајем 19. века. Физичар Ернест Радерфорд<sup>1</sup> је са својим колегама доказао да су атоми одређених радиоактивних елемената нестабилни и да се након одређеног периода одређени број атома спонтано разлаже и формира атоме новог елемента мање тежине. Теорија радиоактивног распадања је веома значајна. Радерфорд је 1904. године увидео да време у току којег се распадне половина почетног броја атома неког радиоактивног елемента може помоћи у одређивању брзине његовог распада, па ју је зато увео као константу - период полураспада.

Закон радиоактивног распада одређује како се смањује број нераспаднутих атома дате радиоактивне супстанце током времена. Ако са  $N = N(t)$  означимо број (нераспаднутих) атома у супстанци у тренутку  $t$ , онда је  $dN/dt$  пропорционално  $N(t)$ , односно

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t). \quad (4.1)$$

Константа  $\lambda$  је позитивна и она представља коефицијент радиоактивног распада супстанце. Што је веће  $\lambda$ , то се атоми брже распадају.

<sup>1</sup>*Ernest Rutherford* (1871-1937.) био је британски физичар, а сматра се оцем у откривању нуклеарних реакција. Први је употребио реч протон за позитивно наелектрисану честицу.

Да бисмо изразили период полураспада супстанце у зависности од  $\lambda$ , претпоставимо да је почетном тренутку  $t_0 = 0$  број нераспаднутих атома  $N_0$ . Решимо Кошијев (почетни) проблем:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t) \tag{4.2}$$

$$N(0) = N_0.$$

Интеграцијом обе стране једначине (4.15) након раздвајања променљивих добија се

$$\ln |N(t)| = -\lambda t + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Стога је

$$N(t) = e^{-\lambda t} \cdot c, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

што је опште решење посматране једначине. Из услова

$$N(0) = N_0 \Rightarrow c = N_0.$$

Заменимо  $c$  у (4.3) и добијамо решење Кошијевог проблема (4.2)

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{4.4}$$

Са  $T$  означимо период полураспада, односно, период за који се распадне половина почетног броја атома, тада је

$$N(T) = \frac{N_0}{2}$$

тј.

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}.$$

Стога је

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

тј.

$$T \approx \frac{0,6931}{\lambda}.$$

Период полураспада је обрнуто пропорционалан коефицијенту радиоактивног распада. Период полураспада многих супстанци је утврђен, на пример период полураспада радиоактивног изотопа угљеника

$^{14}\text{C}$  је око 5 568 година, а период полураспада радиоактивног изотопа уранијума је око 4,5 милијарди година.

Из претходно реченог је лако утврдити старост одређене супстанце. Ако је  $t_0 = 0$  тренутак када је покренут процес распада, онда из (4.4) добијамо

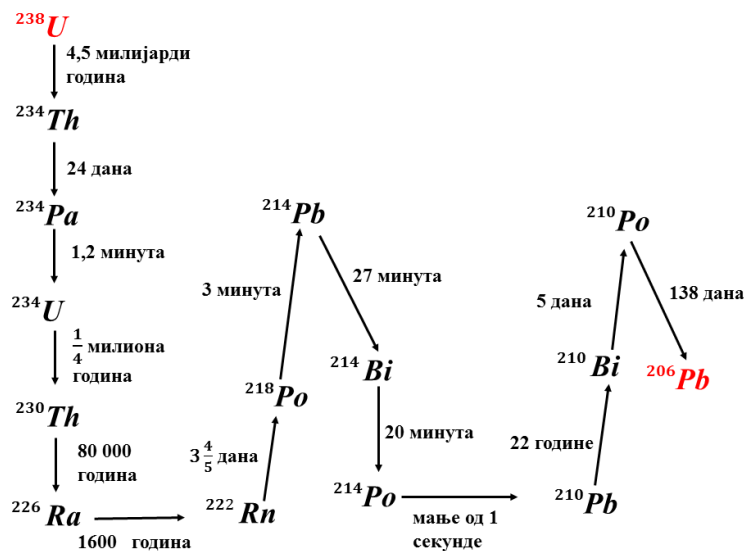
$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

из чега следи да је време протекло од нултог тренутка до тренутка када вршимо анализу одређено функцијом

$$t = T \log_2 \frac{N_0}{N}.$$

Дакле, ако знамо  $N_0$ , „старост” ћемо лако одредити. Међутим, не знамо увек  $N_0$ , али га можемо приближно одредити или макар наћи неки интервал коме  $N_0$  припада, као што је случај код ван Мегеренових фалсификата.

Почињемо са добро познатим чињеницама елементарне хемије које кажу да скоро све стене у Земљиној кори садрже малу количину уранијума. Уранијум у стенама се разлаже на други радиоактивни елемент, тај други на следећи радиоактивни елемент и тако даље, док се, као крајњи резултат, не добије олово које није радиоактивно (Слика 4.1, преузета из [7]).



Слика 4.1: Поступак којим се изотоп уранијума  $^{238}\text{U}$  разлаже до изотопа  $^{206}\text{Pb}$  који није радиоактиван, као и време полураспада од потомка до потомка.

Све слике садрже малу количину радиоактивног изотопа  $^{210}\text{Pb}$  и још мању количину изотопа  $^{226}\text{Ra}$ , пошто су ти изотопи садржани у боји *оловно бела* коју су сликари користили преко 2000 година.

За анализу која следи је битно нагласити да је *оловно бела* хемијска боја која се прави топљењем руде олова. У том процесу 90 – 95% радијума и његових потомака бива одстрањено у отпад. Тако, велика количина  $^{210}\text{Pb}$ , као потомка радијума, бива одстрањена. Олово  $^{210}\text{Pb}$  има период полураспада од 22 године. Овај процес се наставља докле год  $^{210}\text{Pb}$  у оловно белој не буде у радиоактивној равнотежи са малом количином радијума у том тренутку, односно док се радиоактивност (брзина распада нестабилних изотопа) ова два потомка приближно не изједначи. Искористимо сада ову информацију да бисмо доказали да је слика „Вечера у Емаусу” фалсификат.

Нека је  $y = y(t)$  број нераспаднутих атома  $^{210}\text{Pb}$  по граму у оловно белој боји у тренутку  $t$ ,  $y_0$  количина  $^{210}\text{Pb}$  по граму у оловно белој у тренутку производње  $t_0$  и  $r(t)$  број радиоактивних распада  $^{226}\text{Ra}$  у минути по граму у оловно белој боји, у тренутку  $t$ . Ако је  $\lambda$  коефицијент радиоактивног распада  $^{210}\text{Pb}$ , чија је јединица  $\frac{1}{\text{min}}$ , онда је

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y(t) + r(t), \quad y(t_0) = y_0,$$

што је линеарна диференцијална једначина првог реда. У диференцијалну једначину смо морали додати и број радиоактивних распада  $^{226}\text{Ra}$ , односно  $r(t)$ , јер се истовремено са радиоактивним распадом  $^{210}\text{Pb}$  дешава и радиоактивни распад  $^{226}\text{Ra}$ , при чему добијамо нове нераспаднуте атоме  $^{210}\text{Pb}$ , као радиоактивне потомке  $^{226}\text{Ra}$ . Приметимо да у овом математичком моделу користимо континуалну променљиву  $y$  за дискретан реалан број атома, што је добар пример моделирања дискретне појаве континуалним моделом. Разлог оваквог одабира је тај што се резултати дискретног и континуалног модела врло мало разликују, а континуални се много лакше решава.

Пошто нас интересује временски период од триста година, можемо претпоставити, ради поједностављења модела, да  $^{226}\text{Ra}$ , чији је период полураспада 1600 година, остаје константан, дакле да је  $r(t) = r$ , тј.

треба решити Кошијев проблем

$$\begin{aligned}y'(t) &= -\lambda y(t) + r \\y(t_0) &= y_0.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Како је претпоставка да је  $r(t) = r = \text{const}$ , то је једначина (4.5) једначина која раздваја променљиве.

Скуп свих решења једначине (4.5) је

$$y(t) = \frac{r}{\lambda} + ce^{-\lambda t}, \quad \text{где је } c \in \mathbb{R}.$$

Нађимо решење које задовољава услов  $y(t_0) = y_0$ . Из

$$y_0 = \frac{r}{\lambda} + ce^{-\lambda t_0}$$

следи да је

$$c = e^{\lambda t_0} \left( y_0 - \frac{r}{\lambda} \right),$$

стога је тражено Кошијево решење

$$y(t) = \frac{r}{\lambda} + e^{-\lambda(t-t_0)} \left( y_0 - \frac{r}{\lambda} \right)$$

тј.

$$y(t) = \frac{r}{\lambda} \left( 1 - e^{-\lambda(t-t_0)} \right) + y_0 e^{-\lambda(t-t_0)},\tag{4.6}$$

где вредност  $y$  (у тренутку  $t$ ) и  $r$  могу лако да се измере, па на тај начин можемо одредити и старост слике.

Као што смо већ поменули, не можемо директно измерити  $y_0$ . Могуће решење овог проблема јесте да искористимо чињеницу да је почетна количина  $^{210}\text{Pb}$  била у радиоактивној равнотежи са већом количином  $^{226}\text{Ra}$  у руди из које је метал екстрахован. Посматраћемо број распада (брзину промене броја нераспаднутих атома)  $^{226}\text{Ra}$  у руди. Ово је већ познато за различите врсте руда и тај број варира од 0, 18 до 140. То значи да ће и број распада  $^{210}\text{Pb}$  у минути по граму у белом олову такође варирати од 0, 18 до 140. Ово значи да ће  $y_0$  такође варирати у великом интервалу и стога не можемо користити једначину (4.6) како бисмо одредили старост слике, чак ни у грубо.

Али још увек можемо искористити једнакост (4.6) како бисмо направили разлику да ли се ради о слици из 17. века или о слици насликаној у садашњости. Због чега? Ово следи из чињенице да ако је слика веома стара, а период полураспада  $^{210}\text{Pb}$  22 године, онда је број распада радиоактивних атома  $^{210}\text{Pb}$  у слици приближно једнак броју распада радиоактивних атома радијума. Са друге стране, ако је слика новијег датума (стара око 20 година), онда ће број распада радиоактивних атома  $^{210}\text{Pb}$  бити много већи од броја распада радиоактивних атома радијума.

Претпоставимо да је слика о којој се ради или скоро насликана или стара око 300 година. Заменимо  $t - t_0 = 300$  у једначину (4.6). Из тога добијамо

$$\lambda y_0 = \lambda y(t)e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1). \quad (4.7)$$

Ако се ради о слици новијег датума, онда ће  $y_0$  бити бесмислено велико. Бесмислено великим ћемо сматрати сваки резултат преко 30 000 радиоактивних распада  $^{210}\text{Pb}$  у минути по граму у оловно белој боји, у тренутку настанка слике, односно боје. Зашто баш оволико? На основу броја распада  $^{210}\text{Pb}$  у минути по граму у оловно белој боји можемо одредити концентрацију уранијума  $^{238}\text{U}$  у том трнутку у руди из које је метал екстрахован. Може се показати, на пример, да ако је број радиоактивних распада  $^{210}\text{Pb}$  100 у минути по граму у оловно белој, онда је руда из које је метал добијен имала 0,014% уранијума  $^{238}\text{U}$  [7]. Такве руде на Земљи постоје. Међутим, у случају броја распада преко 30 000, за концентрацију  $^{238}\text{U}$  у руди добили би се подаци који не одговарају стварности, односно као резултат бисмо добили концентрацију  $^{238}\text{U}$  коју ниједна руда на планети Земљи не садржи.

Пошто је стопа распадања (број радиоактивних распада у јединици времена у узорку)  $^{210}\text{Po}$  једнака стопи распадања  $^{210}\text{Pb}$  након неколико година, лакше је одредити стопу распадања полонијума, па тај податак касније искористити.

$$e^{300\lambda} = e^{300 \cdot \frac{\ln 2}{T}} = e^{\left(\frac{300}{22}\right) \ln 2} = 2^{\frac{150}{11}},$$

јер је период полураспада за  $^{210}\text{Pb}$  22 године, па је коефицијент радиоактивног распада за олово  $\lambda = \frac{\ln 2}{22}$ .

Број радиоактивних распада у минути у граму оловно беле за  $^{210}\text{Po}$



и  $^{226}\text{Ra}$  је измерен за неке од слика за које се сумњало да су фалсификати, тако је за слику „Вечера у Емаусу” у тренутку доказивања број радиоактивних распада у минути у граму оловно беле за  $^{210}\text{Po}$  био 8,5, док је за  $^{226}\text{Ra}$  био 0,8. Ако сада израчунамо  $\lambda y_0$  за оловно белу у слици „Вечера у Емаусу”, добијамо да је

$$\lambda y_0 = (8,5)2^{\frac{150}{11}} - 0,8\left(2^{\frac{150}{11}} - 1\right) = 98\,050,$$

што је неприхватљиво велико. Дакле, слика мора бити модеран фалсификат, настао новијег датума. На исти начин можемо и за остале фалсификате доказати да они то заправо јесу.

**Задатак 4.1.1** Доказати да је слика „Жена свира мандолину” фалсификат, ако знамо да је број радиоактивних распада у минути у граму оловно беле боје за  $^{210}\text{Po}$  у тренутку доказивања 8,2, а за  $^{226}\text{Ra}$  0,17. Коришћени су подаци из [7].

**Решење:** Ако у једначину (4.7) заменимо дате податке добија се

$$\lambda y_0 = (8,2)2^{\frac{150}{11}} - 0,17\left(2^{\frac{150}{11}} - 1\right) = 102\,225,98.$$

Ово је још већи резултат од оног добијеног у случају слике „Вечера у Емаусу”, из чега се јасно види да је ова слика такође фалсификат.  $\square$

Један од начина да се одреди старост археолошких артефаката јесте метод одређивања броја нераспаднутих језгара радиоактивног угљениковог изотопа  $^{14}\text{C}$ , који је открио Вилард Либи<sup>2</sup> око 1949. године. За то откриће добио је Нобелову награду за хемију 1960. године.

Будући да је Земљина атмосфера константно под утицајем космичких зрака, они производе неутроне који у комбинацији са азотом стварају угљеников изотоп  $^{14}\text{C}$ , односно радиоактивни изотоп угљеника. Он се садржи у угљен-диоксиду и на тај начин га биљке, фотосинтезом, усвајају. Животиње, хранећи се биљкама или дишући, исти уносе у своје организме. У живим организмима су унос радиоактивног угљеника и његов распад у равнотежи, док у мртвим то није случај. Унос престаје, тако да количина радиоактивног изотопа угљеника у организму опада, будући да долази само до његовог распада.

<sup>2</sup>Willard Frank Libby (1908-1980.) био је амерички физикохемичар.

Под претпоставком да је количина космичког зрачења, под чијим је Земља утицајем, увек била константна можемо одредити старост одређених фосила. Либи је израчунао да је време полураспада угљениковог изотопа  $^{14}\text{C}$  приближно 5 600 година, међутим, данас се претпоставља да је та вредност приближно 5 730 година ( $\pm 40$  година). Овај метод је био коришћен да би се одредила старост археолошких проналазака, фосила, намештаја пронађеног у египатским гробницама, Торинског (светог) покроба и тако даље, за шта се примери могу пронаћи у [4].

Означимо са  $N = N(t)$  број нераспаднутих атома радиоактивног угљеника  $^{14}\text{C}$  у тренутку  $t$ , а са  $N_0 = N(t_0)$  број нераспаднутих атома  $^{14}\text{C}$  у тренутку  $t_0 = 0$ . Ако је  $\lambda$  коефицијент радиоактивног распада угљеника  $^{14}\text{C}$ , онда је

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= -\lambda N(t) \\ N(0) &= N_0,\end{aligned}$$

Кошијев проблем који треба решити. Како је опште решење дате диференцијалне једначине

$$N(t) = ce^{-\lambda t}, \quad c \in \mathbb{R},$$

константу  $c$  одређујемо из услова  $N(0) = N_0$ . Како је  $N_0 = c$ , тражено Кошијево решење је

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{4.8}$$

Имајући у виду податак да је за  $^{14}\text{C}$  период полураспада  $T \approx 5730$  година, можемо изразити коефицијент радиоактивног распада  $\lambda$ . Тада је

$$N(T) = \frac{N_0}{2}, \quad \text{стога је} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T},$$

што када уврстимо у (4.8) добијамо

$$N(t) = N_0 \left( e^{\ln 2} \right)^{-\frac{t}{T}} = N_0 2^{-\frac{t}{T}}. \tag{4.9}$$

### Торински покров

Торински (свети) покров је комад тканине на којој се оцртава отисак мушког тела које је прошло физичку тортуру. Име је добио по Катедрали Светог Јована Крститеља у Торину, где се годинама чува.

Многи су веровали да је управо тим комадом тканине Исус Христ био покривен приликом сахрањивања. 1988. године је обављена анализа и доказано је, од стране три независне лабораторије, да је комад тканине заправо стар око 660 година, односно да датира из средњег века. Ова анализа је обављена уз помоћ закона радиоактивног распада. Детаљније информације читалац може пронаћи у [4].

**Задатак 4.1.2** *Користећи податак да је свети покров стар око 660 година, одреди проценат количине угљениковог изотопа  $^{14}\text{C}$  у односу на почетну количину угљениковог изотопа  $^{14}\text{C}$  који се у тој тканини налазио у периоду анализе, 1988. године. Задатак је преузет из [4].*

**Решење:** На основу претходно реченог и податка да је период полураспада угљениковог изотопа  $^{14}\text{C}$  приближно 5730 година, заменом у једначину (4.9) добијамо

$$N(660) = N_0 2^{-\frac{660}{5730}}$$

$$\frac{N(660)}{N_0} = 2^{-\frac{660}{5730}} = 2^{-0,1152} = 0,9233 = 92,33\%,$$

што значи да је у тканини 1988. године било 92,33% почетне количине атома радиоактивног угљениковог изотопа  $^{14}\text{C}$ .  $\square$

**Задатак 4.1.3** *Одредити старост комада дрвета пронађеног у пећини Ласко у Француској, ако знамо да се 85,5% угљениковог изотопа  $^{14}\text{C}$  који се садржи у живом дрвету истог типа, у том комаду распало. Задатак је преузет из [4].*

**Решење:** Распало се 85,5% почетне вредности угљениковог изотопа, што значи да се сада у дрвету налази 14,5% од почетне вредности. Дакле

$$N(t_0) = 14,5\% \cdot N_0 = 0,145N_0.$$

Даље,

$$N(t_0) = N_0 2^{-\frac{t_0}{T}}.$$

Ако заменимо познате вредности, добијамо

$$0,145N_0 = N_0 2^{-\frac{t_0}{5730}},$$

одакле следи

$$t_0 = -5730 \cdot \log_2 0,145,$$

односно

$$t \approx 15\,963 \text{ године,}$$

што значи да ово дрво датира из доба праисторије.  $\square$

## 4.2 Њутнов закон хлађења

Њутнов емпиријски закон хлађења (грејања) каже да је брзина хлађења тела пропорционална разлици температуре тела и температуре средине која га окружује тј.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - \tau), \quad (4.10)$$

при чему је  $T = T(t)$  температура тела у тренутку  $t$ ,  $\tau$  температура средине у којој се тело налази, а  $k$ , где је  $k > 0$ , коефицијент пропорционалности који се назива константа хлађења.

Занима нас како одредити температуру тела у тренутку  $t$ , ако знамо температуру средине (која је константна) у којој се тело налази и почетну температуру тела? Потребно је решити следећи Кошијев проблем

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - \tau) \quad (4.11)$$

$$T(0) = T_0$$

Како је опште решење диференцијалне једначине (4.10)

$$T(t) = ce^{-kt} + \tau, \quad c \in \mathbb{R},$$

да бисмо одредили Кошијево решење потребно је одредити константу  $c$ , тј.

$$T_0 = T(0) = c + \tau \Rightarrow c = T_0 - \tau.$$

Тражено Кошијево решење је

$$T(t) = (T_0 - \tau)e^{-kt} + \tau. \quad (4.12)$$

Добијени израз нам омогућава да предвидимо будућу температуру тела или одредимо неку његову пређашњу температуру. Ако је разлика  $T_0 - \tau < 0$  температура ће расти, па онда говоримо о Њутновом закону грејања.

Њутнов закон хлађења је веома значајан у форензици, ради утврђивања времена смрти.

*Algor mortis* или *мртвачко хлађење* је процес смањивања телесне температуре након смрти. У питању је стално опадање температуре тела док се она не изједначи са температуром околине. Овај процес није савршено моделиран Њутновим законом хлађења, јер хлађење тела након смрти зависи од више фактора. Хемијски процеси настављају да се одвијају у телу и након смрти и могу одржавати константну температуру тела током неког времена, након кога ће тек наступити хлађење тела.

**Занимљивост:** У времену одређивања смрти улогу има и *rigor mortis*, односно *мртвачка укоченост*, која је узрокована хемијским променама у мишићима након смрти и која као последицу има укоченост тела покојника, као и *livor mortis* и *pallor mortis*. Више информација можете пронаћи у [9].

**Задатак 4.2.1** *Тело убијеног човека је пронађено у соби константне температуре  $21^\circ\text{C}$ , у 3 часа након поноћи. У време када је тело пронађено, његова температура је била  $29^\circ\text{C}$ . Сат времена након тога температура тела је била  $26^\circ\text{C}$ . У колико сати је почињен злочин? Претпоставља се да је нормална човекова температура  $37^\circ\text{C}$ . Задатак је преузет из [3].*

**Решење:** Да бисмо нашли време које је протекло од убиства, морамо прво наћи  $k$ , коефицијент хлађења. Њега добијамо користећи два мерења температуре након убиства. Означимо са  $T(0) = 29$  температуру тела у 3 h, а са  $T(1) = 26$  температуру тела у 4 h, сат времена касније. Температуру собе означимо са  $\tau = 21$ , па заменом у (4.12) добијамо

$$T(t) = 21 + (29 - 21)e^{-kt}.$$

Како је

$$T(1) = 26,$$

следи да је

$$26 = 21 + 8e^{-k},$$

тј.

$$8e^{-k} = 5,$$

па је

$$k = \ln \frac{8}{5} \quad \text{коэффициент хлађења.}$$

Сада, пошто имамо  $k$  треба да нађемо време протекло од тренутка када је тело имало температуру  $37^\circ C$  до оног тренутка када је температура тела била  $29^\circ C$ , означимо то време са  $t_1$  (очекујемо да је  $t_1 < 0$ , јер се злочин догодио пре првог мерења)

$$e^{-\ln \frac{8}{5} t_1} = 2$$

$$e^{\ln \frac{8}{5} t_1} = \frac{1}{2}$$

$$\ln \frac{8}{5} t_1 = \ln \frac{1}{2}$$

$$t_1 = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{8}{5}} \approx \frac{-0,6931}{0,47} \approx -1,5 \text{ h.}$$

Злочин се догодио приближно 1,5 h пре тренутка када је извршено прво мерење температуре тела, тј. око 1.30 после поноћи.  $\square$

### 4.3 Динамички модели раста популације

Моделовање раста популације је првобитно било везано за Томаса Роберта Малтуса<sup>3</sup>. Популација је скуп јединки исте врсте која насељава одређени простор и која има могућност размножавања. Први и најједноставнији модел раста популације је, управо, Малтусов модел, представљен 1789. године у раду „Пут у катастрофу”. Овај модел се заснива на томе да је брзина раста популације пропорционална величини популације. Променљиве у овом моделу су време и број јединки, односно, величина популације. И у овом случају ћемо за дискретну појаву

<sup>3</sup>Thomas Robert Malthus (1766-1834.) био је енглески математичар и демограф.

користити континуални модел.

Ако означимо са  $P = P(t)$  број јединки популације у тренутку  $t$ , са  $\beta$  стопу наталитета,  $\delta$  стопу морталитета, добијамо стопу раста  $k = \beta - \delta$ , што је коефицијент пропорционалности. Ако број јединки популације у почетном тренутку  $t = t_0$  означимо са  $P(t_0) = P_0 > 0$ , онда број јединки популације у тренутку  $t$  можемо добити решавањем Кошијевог проблема

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= kP(t) \\ P(t_0) &= P_0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Како је у питању диференцијална једначина која раздваја променљиве

$$\frac{P'}{P} = k,$$

добијамо једноставним рачуном да је опште решење

$$\ln |P| = kt + c, \text{ односно } P(t) = c_1 \cdot e^{kt}, \text{ где је } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Из почетног услова

$$P(t_0) = P_0 = c_1 e^{kt_0} \Rightarrow c_1 = P_0 e^{-kt_0}$$

добијамо да је решење Кошијевог проблема (4.13)

$$P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}. \quad (4.14)$$

**Задатак 4.3.1** *Претпоставимо да одређена бактеријска култура задовољава Малтусов модел раста популације. Након сат времена, на одређеном простору је 1 000 бактерија, а након 4 сата 3 000 бактерија. Одредити број бактерија у тренутку  $t_0 = 0$  применом Малтусовог модела.*

**Решење:** Знамо да је раст популације у овом моделу одређен изразом (4.14)

$$P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}.$$

Да бисмо одредили једначину којом се описује раст броја ових бактерија морамо наћи коефицијент  $k$ . Означимо са  $P_2$  број бактерија након 4 сата, а са  $P_1$  број бактерија након једног сата. Заменом у (4.14)

добијамо

$$\begin{aligned}P_2 &= P_0 e^{k \cdot 4}, \\P_1 &= P_0 \cdot e^k.\end{aligned}$$

Следи да је

$$P_1 e^{-k} = P_0 \text{ тј. } P_2 = P_1 e^{-k} \cdot e^{4k} = P_1 e^{3k}$$

тј.

$$3\,000 = 1\,000 e^{k(4-1)}.$$

Одатле добијамо да је

$$k = \frac{\ln 3}{3} \approx 0,366.$$

Сада је потребно наћи  $P(t_0)$ . Како је  $P_0 = P_1 \cdot e^{-k}$  видимо да је почетни број бактерија

$$P_0 = P(t_0) = 1\,000 \cdot e^{-\frac{\ln 3}{3}} \approx 693,5.$$

□

Видимо да овај модел предвиђа да величина популације експоненцијално, неограничено расте, што се, углавном, у природи не догађа. Постоји много разлога због којих популације не расту неограничено. Неки од њих су недостатак ресурса (храна, одговарајућа средина, вода, Сунчева светлост, хранљиве материје, простор за раст и размножавање), као и ривалство међу јединкама. Због ограничености ових ресурса, популација ће расти до оног тренутка када њена величина одговара доступности ресурса.

Када говоримо о људској популацији, значајан фактор су и емиграције и имиграције, планирање породице у савременим друштвима, епидемије заразних болести, ратови, висина животног стандарда.

У Малтусовом моделу је претпоставка да су ресурси неограничени и да број јединки зависи само од броја рођених и броја умрлих (који су константни у датој јединици времена), да нема болести, емиграција и имиграција. Овај модел је применљив за неке популације, за одређени временски период, углавном док је популација мала. Дакле, овај модел нам не одговара на дуже стазе, нити за све врсте популација.



У ранијим периодима раст људске популације заиста јесте био експоненцијалан, али се брзина раста смањила са повећањем броја људи. Због овога се јавила потреба за формирањем новог, бољег модела раста популације. Пјер Франсоа Верхулст<sup>4</sup> је 1845. године представио бољи модел, назван логистички модел раста популације или Верхулстов модел.

У овом моделу, Верхулст објашњава да у почетку (док је популација и даље мала) број јединки популације расте „приближно” експоненцијално, са стопом раста  $k$  (као по Малтусовом моделу), али да се тај раст спорије одвија како се број јединки популације приближава максималном капацитету система  $K$ , односно, максималном броју јединки које систем може да издржи. Овде је јасна зависност наталитета од броја јединки, а не од времена, јер како број јединки расте, тако је мање могуће даље размножавање. Залихе хране се смањују, па неке јединке могу и умрети од глади, простор се смањује па се и фертилитет може смањити у недостатку свега потребног за живот. Могу се појавити и заразне болести које додатно смањују број јединки у популацији, као и ривалство међу јединкама ради обезбеђивања потребног за живот.

Верхулстов модел се користи најчешће за предвиђање раста популације бактерија, воћних мушица, протозоа на неком ограниченом простору.

Модел претпоставља да је за малу популацију природни прираштај једнак  $k$ , за популацију једнаку  $K$  он је једнак 0, а за остале вредности популације природни прираштај је линеарна функција по величини популације. Стога је логистички динамички модел одређен једначином

$$P'(t) = \frac{k}{K} P(t)(K - P(t)) = k \cdot P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right). \quad (4.15)$$

Видимо да у случају када је број јединки мали, да је онда  $P(t)/K$  мало, па је вредност унутар заграде приближно једнака јединици и раст је бржи. Са повећањем популације  $P(t)/K$  се повећава, што смањује брзину раста популације.

Сада треба решити Кошијев проблем за ову логистичку диферен-

---

<sup>4</sup>*Pierre Francois Verhulst* (1804-1849.) био је белгијски математичар и доктор теорије бројева.

цијалну једначину

$$P'(t) = \frac{k}{K} P(t) (K - P(t)) \quad (4.16)$$

$$P(t_0) = P_0.$$

Добија се да је опште решење

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-kt}}, \quad \text{где је } C \in \mathbb{R},$$

а решење које задовољава услов

$$P(t_0) = P_0$$

одређено је аналитичким изразом

$$P(t) = \frac{KP_0}{(K - P_0) \cdot e^{-k(t-t_0)} + P_0}. \quad (4.17)$$

Да бисмо добили тачнија предвиђања, када је реч о људској популацији, не треба је посматрати као хомогену групу, већ поделити на више група, па сваку третирати као посебну популацију.

Ови модели се могу применити и на пад броја јединки у популацији, односно, ако је број рођених мањи од броја умрлих у јединици времена, број јединки популације ће експоненцијално да опада.

**Задатак 4.3.2** *Према подацима Републичког завода за статистику (подаци се могу пронаћи у [10]) Србија је 1961. године имала 6 678 247, 1971. године 7 202 915, а 1981. године 7 729 246 становника. Користећи логистички модел предвидети колико је Србија имала становника 1991. године.*

**Решење:** Почетна популација је  $P_0 = P(1961) = 6\,678\,247$ . Ако уврстимо податке о броју становника из 1971. и 1981. године у логистички модел онда можемо израчунати  $k$  и максимални капацитет система  $K$  из добијеног система једначина са две непознате

$$P(1971) = \frac{K \cdot 6\,678\,247}{(K - 6\,678\,247) \cdot e^{-10k} + 6\,678\,247} = 7\,202\,915.$$

$$P(1981) = \frac{K \cdot 6\,678\,247}{(K - 6\,678\,247) \cdot e^{-20k} + 6\,678\,247} = 7\,729\,246.$$

Решење система је  $k \approx 0.014$  и  $K \approx 14\,732\,436$ , па је тако тражени број становника по логистичком моделу приближно

$$P(1991) = \frac{14\,732\,436 \cdot 6\,678\,247}{(14\,732\,436 - 6\,678\,247) \cdot e^{-0.014 \cdot (1991-1961)} + 6\,678\,247} = 8\,219\,556,$$

што је за око 400 000 више од броја становника добијеног пописом 1991. године (тачан број становника Србије према попису из 1991. године је био 7 822 795 (податак преузет из [10])).

Приметимо да логистички модел у овом случају не даје довољно добре резултате за предвиђање броја становника Србије, јер не узима у обзир миграције које су се у том периоду интензивно дешавале.  $\square$

#### 4.4 Проблем меша

Диференцијалним једначинама се успешно решавају и такозвани проблеми меша. У питању су проблеми у којима је потребно одредити количину неке супстанце добијену мешањем два раствора различитих концентрација.

Ако са  $y = y(t)$  означимо количину супстанце у тренутку  $t$ , диференцијалну једначину желимо формирати на следећи начин

$$\frac{dy}{dt} = (\text{улазни флуks супстанце}) - (\text{излазни флуks супстанце}), \quad (4.18)$$

при чему је  $\frac{dy}{dt}$  брзина промене количине супстанце у тренутку  $t$ . У зависности од природе проблема добијаћемо различите диференцијалне једначине које треба решити.

**Задатак 4.4.1** Резервоар садржи 300 америчких галона слане воде (1 галон  $\approx 3,785$  литара). Други раствор у ком је концентрација соли 2 lb/gal (фунте по галону; 1 фунта  $\approx 0,45359237$  килограма) улази у резервоар брзином од 3 gal/min. Раствор напушта резервоар истом брзином. Желимо да одредимо диференцијалну једначину која описује промену количине соли у том раствору, ако је познато да је у почетном тренутку у раствору који се налазио у резервоару било 50 lb соли. Задатак је преузет из [3].

**Решење:** Да бисмо одредили диференцијалну једначину потребно је да одредимо улазни и излазни флуks соли. Са  $y = y(t)$  означимо количину соли у раствору (у фунтама) у резервоару у тренутку  $t$  (мерено у минутима). Брзина промене количине соли у раствору је

$$\frac{dy}{dt} = (\text{улазни флуks соли}) - (\text{излазни флуks соли}).$$

Улазни флуks соли је производ брзине којом раствор улази у резервоар и концентрације соли у том раствору, тј.

$$3 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \cdot 2 \frac{\text{lb}}{\text{gal}} = 6 \frac{\text{lb}}{\text{min}}.$$

Аналогно одређујемо и излазни флуks, као производ брзине којом раствор излази из резервоара и концентрације соли у том раствору, односно,

$$3 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \cdot \frac{y(t) \text{ lb}}{300 \text{ gal}} = \frac{y(t) \text{ lb}}{100 \text{ min}}.$$

Пошто раствор истом брзином улази у резервоар и из њега излази, количина раствора у резервоару је константна и износи 300 галона. Претпоставимо да се раствор у резервоару непрекидно меша.

Ово не мора увек бити случај, брзина којом раствор улази у резервоар и она којом излази могу бити различите, па стога не морамо имати константну запремину раствора у резервоару; може се догодити да више течности истекне него што у резервоар уђе и обрнуто, што ће бити обрађено у наредном примеру.

Дакле, диференцијална једначина има следећи облик

$$\frac{dy}{dt} = 6 - \frac{y(t)}{100}.$$

Скуп свих решења посматране диференцијалне једначине је

$$y(t) = \left(600 \cdot e^{\frac{t}{100}} + c\right) \cdot e^{-\frac{t}{100}} = 600 + c \cdot e^{-\frac{t}{100}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Константу  $c$  тражимо из почетног услова  $y(0) = 50$ , тј.

$$50 = y(0) = 600 + c \cdot e^{-\frac{0}{100}} = 600 + c.$$

Следи да је  $c = -550$ , па је функцијом

$$y(t) = 600 - 550 \cdot e^{-\frac{t}{100}}$$

представљена промена количине соли током времена.  $\square$

**Задатак 4.4.2** Резервоар садржи 300 галона воде у којој је растворено 50 фунти соли. Желимо да саставимо диференцијалну једначину која ће описати промену количине соли у раствору у тренутку  $t$ , ако:

а) чиста вода улази у резервоар брзином од 3 gal/min и истом брзином и излази;

б) у резервоар улази други раствор брзином од 3 gal/min и садржи 2 lb/gal соли, а из резервоара излази течност спорије, брзином од 2 gal/min;

в) у резервоар улази други раствор брзином од 3 gal/min и садржи 2 lb/gal соли, а из резервоара излази течност брже, брзином од 3,5 gal/min.

Задатак је преузет из [3].

**Решење:** а) Пошто у резервоар улази чиста вода која не садржи со, улазни флуks соли је

$$3 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \cdot 0 \frac{\text{lb}}{\text{gal}} = 0 \frac{\text{lb}}{\text{min}}.$$

Иzлазни флуks соли је, као и у претходном задатку,

$$3 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \cdot \frac{y(t) \text{ lb}}{300 \text{ gal}} = \frac{y(t) \text{ lb}}{100 \text{ min}}.$$

Тражена диференцијална једначина је

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y(t)}{100}.$$

Скуп свих решења посматране диференцијалне једначине је

$$y(t) = c \cdot e^{-\frac{t}{100}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Из почетног услова  $y(0) = 50$  следи да је константа  $c = 50$ , па је функцијом

$$y(t) = 50 \cdot e^{-\frac{t}{100}}$$

представљена промена количине соли током времена, где је  $t$  изражено у минутима, а  $y(t)$  у фунтама.

б) У овом случају, улазни флуks соли је

$$3 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \cdot 2 \frac{\text{lb}}{\text{gal}} = 6 \frac{\text{lb}}{\text{min}}.$$

Како течност из резервоара спорије излази него што у њега улази, количина раствора се повећава за  $1 \text{ gal/min}$ , што значи да је укупна количина раствора у резервоару у тренутку  $t$  једнака  $300 + t \text{ gal}$ . Излазни флуks соли је

$$2 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \cdot \frac{y(t)}{300 + t} \frac{\text{lb}}{\text{gal}} = 2 \frac{y(t)}{300 + t} \frac{\text{lb}}{\text{min}}.$$

Добијамо диференцијалну једначину

$$\frac{dy}{dt} = 6 - 2 \frac{y(t)}{300 + t},$$

чији је скуп свих решења

$$y(t) = 2(300 + t) + \frac{c}{(300 + t)^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Из почетног услова  $y(0) = 50$  налазимо вредност константе  $c$  на следећи начин

$$\begin{aligned} 50 = y(0) &= 600 + \frac{c}{300^2} \\ \frac{c}{90\,000} &= -550 \\ c &= -4,95 \cdot 10^7. \end{aligned}$$

Количина соли у резервоару у тренутку  $t$  је одређена изразом

$$y(t) = 2(300 + t) - \frac{4,95 \cdot 10^7}{(300 + t)^2},$$

где је  $t$  изражено у минутима, а  $y(t)$  у фунтама.

е) У овом случају је, као и у претходном, улазни флуks соли  $6 \text{ lb/min}$ . Течност из резервоара излази брже него што у њега улази, па се укупна количина раствора у резервоару смањује за

$$3,5 \frac{\text{gal}}{\text{min}} - 3 \frac{\text{gal}}{\text{min}} = 0,5 \frac{\text{gal}}{\text{min}}.$$

Укупна количина раствора у резервоару у тренутку  $t$  је  $300 - 0,5t \text{ gal}$  (течност брже истиче, па се количина раствора смањује за  $0,5 \text{ gal/min}$

и укупна количина раствора у тренутку  $t$  у резервоару ће бити  $300 - 0,5t$ , па је излазни флуks соли одређен изразом

$$3,5 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \cdot \frac{y(t)}{300 - 0,5t} \frac{\text{lb}}{\text{gal}} = 3,5 \frac{y(t)}{300 - 0,5t} \frac{\text{lb}}{\text{min}}.$$

Долазимо до диференцијалне једначине

$$\frac{dy}{dt} = 6 - 3,5 \frac{y(t)}{300 - 0,5t}.$$

Скуп свих решења посматране диференцијалне једначине је

$$y(t) = 2(300 - 0,5t) + c(300 - 0,5t)^7, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Из почетног услова  $y(0) = 50$  добијамо да је вредност константе  $c = -25,14 \cdot 10^{-16}$ , што значи да је промена количине соли током времена у овом случају дата функцијом

$$y(t) = 2(300 - 0,5t) - 25,14 \cdot 10^{-16}(300 - 0,5t)^7,$$

где је  $t$  изражено у минутима, а  $y(t)$  у фунтама.

## Глава 5

# Обичне диференцијалне једначине вишег реда

Наведимо основне дефиниције и теореме које се односе на диференцијалне једначине вишег реда, које ће бити наша тема у наредном делу рада.

**Дефиниција 5.1** Нека функција  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ , при чему је  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , тада је једначина облика

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (5.1)$$

где је  $y = y(x)$  непозната функција, диференцијална једначина  $n$ -тог реда у нормалном облику.

**Дефиниција 5.2** Функција  $y = \varphi(x)$  је решење диференцијалне једначине (5.1) на интервалу  $(a, b)$  ако постоје  $\varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$  за свако  $x \in (a, b)$  и ако функција  $y = \varphi(x)$  задовољава једначину (5.1) на  $(a, b)$ .

**Дефиниција 5.3** Кошијев задатак за диференцијалну једначину (5.1) подразумева да се одреди решење  $y = \varphi(x)$  диференцијалне једначине (5.1) које задовољава услове

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

при чему унапред задате бројеве  $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  зовемо почетним условима.



Дакле, треба наћи функцију  $\varphi$  тако да она задовољава следећих  $n+1$  услова:

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)} &= f(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n-1)}) \\ \varphi(x_0) &= y_0 \\ \varphi'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Решење Кошијевог задатка назива се Кошијево решење.

Као и код диференцијалних једначина првог реда и код диференцијалних једначина вишег реда разликујемо три врсте решења и потпуно аналогно их дефинишемо.

Теорема која нам гарантује егзистенцију решења је следећа.

**Теорема 5.4** *Нека је функција  $f$  непрекидна на отвореном скупу  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Тада за сваку тачку  $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in G$  постоји решење  $y = \varphi(x)$  диференцијалне једначине (5.1) које је дефинисано у некој околини тачке  $x_0$  и задовољава услове*

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= y_0 \\ \varphi'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}.\end{aligned}$$

Гаранцију за јединственост тог решења даје следећа теорема.

**Теорема 5.5 (Последица Пикарове теореме).** *Нека су функције  $f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$  непрекидне на отвореном скупу  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Тада за сваку тачку  $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in G$  постоји јединствено решење  $y = \varphi(x)$  диференцијалне једначине (5.1) дефинисано у некој околини тачке  $x_0$  које задовољава услове*

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= y_0 \\ \varphi'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}.\end{aligned}$$

Од посебног значаја са становишта примене јесу линеарне диференцијалне једначине. Диференцијалне једначине вишег реда могу бити изузетно тешке за решавање, али веома често се у моделовању јављају управо линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима, а на нашу срећу, оне се могу решити.

**Дефиниција 5.6** *Једначина у којој се непозната функција  $y = y(x)$  и њени изводи до  $n$ -тог реда јављају у линеарној вези, назива се линеарна диференцијална једначина  $n$ -тог реда. Општи облик линеарне диференцијалне једначине  $n$ -тог реда је*

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = q(x), \quad (5.4)$$

где су функције  $p_0, p_1, \dots, p_n$  и  $q$  дате функције дефинисане на интервалу  $(c, d)$ .

Ако је  $p_0(x) \neq 0$  за свако  $x \in (c, d)$ , онда се једначина (5.4) може написати у стандардном облику

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = b(x), \quad (5.5)$$

где су  $a_i(x) = \frac{p_i(x)}{p_0(x)}$  и  $b(x) = \frac{q(x)}{p_0(x)}$  за  $i = \overline{1, n}$ .

Разликујемо два типа ових једначина у зависности од аналитичког облика функције  $b$ . Уколико је  $b(x) = 0$  за свако  $x \in (c, d)$  у питању је хомогена линеарна диференцијална једначина  $n$ -тог реда

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0, \quad (5.6)$$

а у супротном, ако постоји неко  $x \in (c, d)$  за које је  $b(x) \neq 0$ , реч је нехомогеној линеарној диференцијалној једначини  $n$ -тог реда (5.5)

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = b(x).$$

**Теорема 5.7 (О егзистенцији и јединствености решења линеарне диференцијалне једначине).** *Нека су  $a_i$  и  $b$  непрекидне функције на интервалу  $(c, d)$ , за  $i = \overline{1, n}$ . Тада за сваку тачку  $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in (c, d) \times \mathbb{R}^n$  постоји јединствено решење  $y = \varphi(x)$  диференцијалне једначине (5.5) које је дефинисано на  $(c, d)$  и задовољава услове*

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= y_0 \\ \varphi'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}.\end{aligned}$$

## 5.1 Хомогена линеарна диференцијална једначина $n$ -тог реда

Нека су функције  $a_i \in C(a, b)$ . У случају хомогене линеарне диференцијалне једначине функција  $\varphi(x) = 0$ ,  $x \in (a, b)$  је тривијално решење. Означимо са

$$L_n(y)(x) := y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y.$$

Оператор  $L_n : C^{(n)}(a, b) \rightarrow C(a, b)$  је *линеарни диференцијални оператор реда  $n$* , тј.

$$L_n(c_1y_1 + c_2y_2)(x) = c_1L_n(y_1)(x) + c_2L_n(y_2)(x), \quad y_1, y_2 \in C^{(n)}(a, b), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Користећи ову ознаку, једначине (5.6) и (5.5) можемо редом представити у облику

$$L_n(y) = 0 \quad \text{и} \quad L_n(y) = b(x).$$

**Теорема 5.8** *Нека је  $k \in \mathbb{N}$ . Нека су  $y_1(x), \dots, y_k(x)$  решења диференцијалне једначине (5.6) на интервалу  $(a, b)$ . Тада је функција*

$$y(x) = \sum_{i=1}^k c_i y_i(x), \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, k},$$

*такође решење диференцијалне једначине (5.6).*

Да бисмо пронашли опште решење линеарне једначине, морамо се упознати са појмом линеарне независности функција, детерминанте Вронског и фундаменталног скупа решења.

**Дефиниција 5.9** Нека функције  $f_i : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, m}$  и нека је  $D \subseteq (a, b)$ . Функције  $f_1, \dots, f_m$  су линеарно независне на  $D$  ако за свако  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$  важи импликација: за свако  $x \in D$

$$(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_m f_m(x) = 0) \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0.$$

У супротном су линеарно зависне.

**Дефиниција 5.10** Нека су функције  $f_1, \dots, f_n$  дефинисане на интервалу  $(a, b)$  и нека ове функције имају све изводе на  $(a, b)$  закључно са  $(n - 1)$ -вим изводом. Функционална детерминанта

$$W(f_1, \dots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

се назива детерминанта Вронског (Вронскијан)<sup>1</sup> функција  $f_1, f_2, \dots, f_n$  на интервалу  $(a, b)$ .

**Теорема 5.11** Нека су функције  $f_1, \dots, f_n$  дефинисане на интервалу  $(a, b)$  и нека имају све изводе закључно са  $(n - 1)$ -вим на  $(a, b)$ . Ако су функције  $f_1, \dots, f_n$  линеарно зависне на  $(a, b)$ , онда је  $W(f_1, \dots, f_n)(x) = 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ .

**Теорема 5.12** Нека су функције  $a_i$  непрекидне на интервалу  $(a, b)$ . Решења  $y_1, y_2, \dots, y_n$  диференцијалне једначине (5.6) јесу линеарно независна на интервалу  $(a, b)$  ако и само ако постоји  $x_0 \in (a, b)$  тако да важи  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$ .

**Дефиниција 5.13** Скуп од  $n$  линеарно независних решења диференцијалне једначине (5.6) на  $(a, b)$  је фундаментални скуп решења диференцијалне једначине (5.6) на интервалу  $(a, b)$ .

**Теорема 5.14 (О егзистенцији фундаменталног скупа решења).** Нека су  $a_i \in C(a, b)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тада постоји фундаментални скуп решења диференцијалне једначине (5.6) на интервалу  $(a, b)$ .

<sup>1</sup>Josef Wronski (1776 - 1853.) био је пољски математичар, физичар, филозоф и проналазач.

**Доказ:** Фиксирајмо  $x_0 \in (a, b)$ . Посматрајмо Кошијев проблем за диференцијалну једначину (5.6) и почетне услове:

$$y(x_0) = 1, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

На основу Теореме 5.7 следи да постоји решење диференцијалне једначине (5.6) које ћемо означити са  $y_1$ , које задовољава дате услове.

Сада посматрајмо Кошијев проблем за диференцијалну једначину (5.6) и почетне услове:

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

На основу исте теореме следи да постоји решење које ћемо означити са  $y_2$  и овог Кошијевог проблема. Наставимо ли поступак посматрањем аналогних Кошијевих проблема и применом Теореме 5.7 добићемо решења која ћемо редом означити са  $y_3, y_4, \dots, y_n$  при чему је последње у низу решење Кошијевог проблема за диференцијалну једначину (5.6) и почетне услове:

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-2)}(x_0) = 0, y^{(n-1)}(x_0) = 1.$$

Дакле, нашли смо  $n$  решења диференцијалне једначине (5.6). Да би она образовала фундаментални скуп решења, потребно је још да буду и линеарно независна на посматраном интервалу. На основу Теореме 5.12 и чињенице да је Вронскијан датих функција у тачки  $x_0$ , заправо, детерминанта јединичне матрице следи да решења  $y_1, \dots, y_n$  чине фундаментални скуп решења диференцијалне једначине (5.6) на интервалу  $(a, b)$ , чиме смо доказали његову егзистенцију. ■

**Теорема 5.15 (О општем решењу).** Нека су  $a_i \in C(a, b)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Нека функције  $y_1, y_2, \dots, y_n$  образују фундаментални скуп решења диференцијалне једначине (5.6) на интервалу  $(a, b)$ . Тада је

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x), \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}$$

опште решење диференцијалне једначине (5.6) на  $(a, b) \times \mathbb{R}^n$ .

**Теорема 5.16** Нека су  $a_i \in C(a, b)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Скуп свих решења диференцијалне једначине (5.6) образује векторски простор чија је димензија  $n$ . Фундаментални скуп решења диференцијалне једначине (5.6) је једна база тог векторског простора.

## 5.2 Нехомогена линеарна диференцијална једначина $n$ -тог реда

Посматрајмо једначину (5.5)

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = b(x).$$

**Теорема 5.17** *Нека су  $a_i \in C(c, d)$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $b \in C(c, d)$ . Нека функције  $y_1, \dots, y_n$  образују фундаментални скуп решења одговарајуће хомогене диференцијалне једначине на интервалу  $(c, d)$ . Нека је  $y_p(x)$  било које партикуларно решење диференцијалне једначине (5.5) на  $(c, d)$  и  $y_h$  опште решење одговарајуће хомогене диференцијалне једначине на  $(c, d)$ . Тада је опште решење диференцијалне једначине (5.5) на  $(c, d)$  облика*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x) + y_p(x), \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Да бисмо нашли опште решење нехомогене једначине, потребно нам је, дакле, опште решење хомогене и било које партикуларно решење нехомогене. Партикуларно решење нехомогене једначине можемо тражити помоћу методе варијације константи или методе неодређених коефицијената.

## 5.3 Линеарна диференцијална једначина $n$ -тог реда са константним коефицијентима

Посебан случај хомогених линеарних диференцијалних једначина вишег реда су линеарне диференцијалне једначине вишег реда са константним коефицијентима. То су једначине облика

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.8)$$

Да бисмо их решили потребно је наћи један фундаментални скуп решења. Решења тражимо у облику  $y(x) = e^{\lambda x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Заменимо ли  $y(x) = e^{\lambda x}$  и  $y^{(i)}(x) = \lambda^i e^{\lambda x}$  у (5.8) добијамо једначину

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (5.9)$$

коју називамо карактеристичном једначином диференцијалне једначине (5.8).

**Теорема 5.18** Ако је  $\lambda = \lambda_0$  решење карактеристичне једначине (5.9), онда је  $y(x) = e^{\lambda_0 x}$  решење диференцијалне једначине (5.8) на  $\mathbb{R}$ .

Полином  $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$  је карактеристични полином диференцијалне једначине (5.8). Потребно је наћи решења карактеристичне једначине (5.9). У зависности од њих разликујемо више случајева.

**Теорема 5.19** Ако су  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  реална и различита решења карактеристичне једначине (5.9), онда функције

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n(x) = e^{\lambda_n x}$$

образују фундаментални скуп решења диференцијалне једначине (5.8) на  $\mathbb{R}$ .

**Последица 5.20** Ако су  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  реална и различита решења карактеристичне једначине (5.9), онда је опште решење диференцијалне једначине (5.8) облика

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}, \quad c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

**Теорема 5.21** Ако је  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  решење карактеристичне једначине (5.9), при чему је  $b \neq 0$ , онда су

$$y_1(x) = e^{ax} \cos bx \quad \text{и} \quad y_2(x) = e^{ax} \sin bx$$

линеарно независна решења диференцијалне једначине (5.9) на  $\mathbb{R}$ .

**Теорема 5.22** Нека су  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , реална и различита решења карактеристичне једначине (5.9), нека су  $\lambda_j = a_j \pm ib_j$ ,  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ ,  $b_j \neq 0$ ,  $j = \overline{1, s}$ , комплексна и међусобно различита решења карактеристичне једначине (5.9), при чему је  $n = k + 2s$ . Тада скуп функција

$$\begin{aligned} y_i(x) &= e^{\lambda_i x} \\ y_j^1(x) &= e^{a_j x} \cos b_j x \\ y_j^2(x) &= e^{a_j x} \sin b_j x, \end{aligned}$$

за  $i = \overline{1, k}$ ,  $j = \overline{1, s}$  образује фундаментални скуп решења диференцијалне једначине (5.8) на  $\mathbb{R}$ .

**Теорема 5.23** Ако је  $\lambda$  реално решење карактеристичне једначине (5.9) вишеструкости  $k$ , онда су функције

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = x e^{\lambda x}, \dots, y_k(x) = x^{k-1} e^{\lambda x}$$

линеарно независна решења диференцијалне једначине (5.8).

**Теорема 5.24** Ако су  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$  комплексна решења карактеристичне једначине (5.9) вишеструкости  $k$ , онда су функције

$$y_1(x) = e^{ax} \cos bx, y_2(x) = x e^{ax} \cos bx, \dots, y_k(x) = x^{k-1} e^{ax} \cos bx, \\ y_{k+1}(x) = e^{ax} \sin bx, y_{k+2}(x) = x e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2k}(x) = x^{k-1} e^{ax} \sin bx$$

линеарно независна решења диференцијалне једначине (5.8) на  $\mathbb{R}$ .

Докази претходних теорема се могу наћи у [2].

У случају нехомогене линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима опште решење тражимо као и у општем случају: као збир општег решења одговарајуће хомогене диференцијалне једначине и било ког партикуларног решења нехомогене једначине.

Специјални случај је када се функција  $b$  јавља у облику  $P_m(x)e^{\alpha x}$ , односно када је једначина облика

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = P_m(x) e^{\alpha x}, \quad (5.10)$$

где је  $P_m$  полином  $m$ -тог степена, а  $\alpha$  реалан број. Тада лако можемо наћи њено партикуларно решење. Оно ће бити облика

$$y_p(x) = x^s \widetilde{P}_m(x) e^{\alpha x},$$

где је  $\widetilde{P}_m(x)$  полином степена  $m$ , а број  $s$  вишеструкост броја  $\alpha$  као решења одговарајуће карактеристичне једначине. Ако  $\alpha$  није решење карактеристичне једначине  $s$  ће бити једнако нули. Коефицијенте полинома  $\widetilde{P}_m(x)$  налазимо помоћу методе неодређених коефицијената (више о методи неодређених коефицијената можете пронаћи у [2]).

Када је функција  $b$  облика  $(P_m(x) \cos \beta x + Q_p(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$ , где је  $P_m(x)$  полином  $m$ -тог степена,  $Q_p(x)$  полином  $p$ -тог степена, односно када је једначина облика

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = (P_m(x) \cos \beta x + Q_p(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}, \quad (5.11)$$



тада партикуларно решење тражимо у облику

$$y_p(x) = x^s \left( \widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \sin \beta x \right) e^{\alpha x},$$

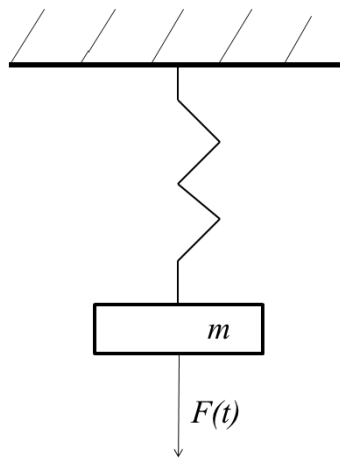
где је  $s$  вишеструкост броја  $\mu = \alpha + i\beta$  као решења одговарајуће карактеристичне једначине, а  $\widetilde{P}_k(x)$  и  $\widetilde{Q}_k(x)$  полиноми степена  $k = \max\{m, p\}$  чије коефицијенте можемо наћи методом неодређених коефицијената. Више о овој методи читалац може наћи у [2].

## Глава 6

# Примена диференцијалних једначина вишег реда у математичком моделовању

### 6.1 Осцилаторно кретање

Посматрајмо тело масе  $m$  окачено о еластичну опругу које се креће вертикално (Слика 6.1).



Слика 6.1: Осцилаторно кретање тела окаченог о опругу

Под еластичном опругом подразумевамо опругу која при истезању или стискању занемарљиво мало мења своју дужину и која увек тежи да се врати у првобитно стање.

Означимо са  $y = 0$  равнотежни положај тела, односно, положај у коме тело мирује. У случају који посматрамо, у равнотежном положају на тело не делују спољашње силе, осим силе гравитације. Она је, док

тело мирује, једнака сили истезања опруге, али су супротног смера, па је резултанта те две силе једнака нули. Са  $y = y(t)$  означимо померај тела у тренутку  $t$ .

Да бисмо даље проучавали осцилације, неопходно је да дефинишемо наредне појмове. Померај је растојање тела од равнотежног положаја, који може мењати смер, те зато може узимати негативну вредност, док је амплитуда максимални померај. Период осциловања је време за које тело изврши једну пуну осцилацију, а фреквенција осциловања је број извршених осцилација у јединици времена.

Разликоваћемо више врста осцилација у зависности од тога које силе делују на тело. Посматрајмо  $y = y(t)$ , померај тела у тренутку  $t$ . Резултанта гравитационе силе и силе затезања опруге делује на тело силом пропорционалном померају тела  $-k \cdot y(t)$ , где је  $k > 0$  коефицијент еластичности опруге, а знак минус је зато што је смер супротан померају тела. То је сила којом опруга тежи да се врати у равнотежни положај. Средина у којој се тело и опруга налазе такође делује на кретање силом директно пропорционалном брзини кретања која је једнака  $-c \cdot y'(t)$ , за  $c \geq 0$ , где је  $c$  коефицијент отпора средине. Она омета кретање, пружа му отпор и делује супротно смеру кретања тела. На тело, осим гравитације, може деловати и нека спољашња сила  $F = F(t)$ . Користећи II Њутнов закон, тј. чињеницу да је сила једнака производу масе и убрзања добијамо израз:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky(t) - c \frac{dy}{dt} + F(t),$$

то јест,

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F(t). \quad (6.1)$$

У зависности од тога које од ових сила занемарујемо, а које узимамо у обзир разликујемо пригушене и непригушене, слободне и принудне осцилације. Проучавање започињемо непригушеним осцилацијама, оним у којима занемарујемо дејство средине.

### 1.1° Слободне непригушене осцилације

У питању су осцилације у којима, поред дејства средине, занемарујемо и дејство спољашње силе на кретање. Промену помераја тела

описујемо једначином

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0,$$

која, ако са  $\omega_0^2$  означимо количник  $\frac{k}{m}$  постаје

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0.$$

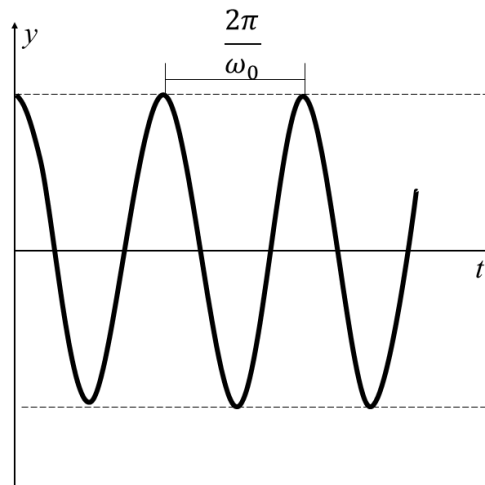
Опште решење ове линеарне диференцијалне једначине II реда са константним коефицијентима је

$$y(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Добијено решење можемо записати у следећем облику

$$y(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta), \quad \text{где је } R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{c_2}{c_1}. \quad (6.2)$$

За детаљније објашњење на који начин се дошло до овог записа погледати [7].



Слика 6.2: График функције  $y(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta)$

Уочимо да је решење ограничена функција (Слика 6.2), периодична са периодом  $\frac{2\pi}{\omega_0}$ . Фреквенција  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  којом тело у овом случају осцилује назива се сопствена или природна фреквенција тела. Амплитуда је константна и износи  $R$ .

### 1.2° Принудне непригушене осцилације

Укључимо у претходни случај дејство периодичне спољашње силе  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ , са фреквенцијом  $\omega$ . Једначина постаје

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad \text{где је } \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (6.3)$$

У оквиру овог случаја разликоваћемо два подслучаја: када се сопствена фреквенција и фреквенција спољашње силе разликују ( $\omega_0 \neq \omega$ ) и када су оне једнаке ( $\omega = \omega_0$ ).

У случају када је  $\omega \neq \omega_0$  партикуларно решење једначине (6.3) тражимо у облику

$$y_p(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

Након примене методе неодређених коефицијената добијамо тражено партикуларно решење

$$y_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t,$$

па је опште решење почетне диференцијалне једначине

$$y(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

то јест,

$$y(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t, \quad R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{c_2}{c_1}. \quad (6.4)$$

Решење је ограничено.

Интересантнији је случај када су поменуте фреквенције једнаке, тј.  $\omega = \omega_0$ . То је случај када долази до резонанце. Посматрајмо диференцијалну једначину

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t. \quad (6.5)$$

У овом случају партикуларно решење једначине (6.5) тражимо у облику

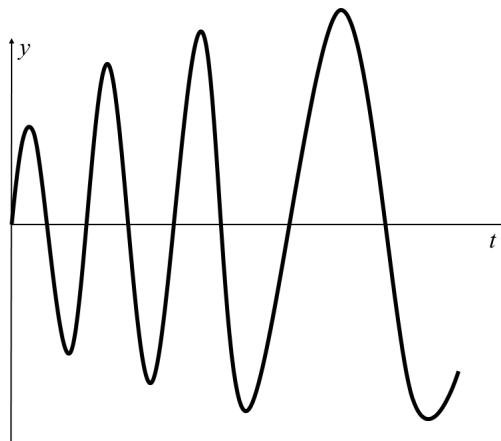
$$y_p(t) = At \cos \omega_0 t + Bt \sin \omega_0 t.$$

Применом методе неодређених коефицијената налазимо да је  $A = 0$ , а  $B = \frac{F_0}{2m \cdot \omega_0}$ , па је тражено партикуларно решење

$$y_p(t) = \frac{F_0}{2m \cdot \omega_0} t \sin \omega_0 t,$$

што значи да је тражено опште решење диференцијалне једначине (6.5)

$$y(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t. \quad (6.6)$$



Слика 6.3: График функције неконтролисаних осцилација са великом амплитудом

Како је  $y_h(t)$  ограничена функција, а  $y_p(t)$  није ограничена функција, добијамо да ће амплитуда осциловања сваког решења нехомогене диференцијалне једначине тежити ка бесконачности, када  $t \rightarrow +\infty$ . То значи да ако на осцилаторни систем делујемо периодичном силом на сопственој фреквенцији, онда долази до резонанце са (локалним) амплитудама које неограничено расту (Слика 6.3). Најпознатији пример резонанце је љуљање на љуљашци, где добијамо велике амплитуде љуљања чак и при ситним покретима, уколико се они покlope са фреквенцијом љуљања. Резонанца је, због својих великих амплитуда, често неповољна за осцилаторне системе.

## 2.1° Слободне пригушене осцилације

Једначина којом се описују слободне пригушене осцилације (када у разматрање узмемо и дејство силе спољашње средине (најчешће тре-

ње)) је

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = 0, \quad (6.7)$$

чије решење тражимо у облику  $y(t) = e^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Одговарајућа карактеристична једначина је

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0.$$

У зависности од вредности дискриминанте, разликујемо три случаја:

a) ако је  $c^2 - 4km > 0$ , онда су  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  негативни и решење полазне једначине је облика

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

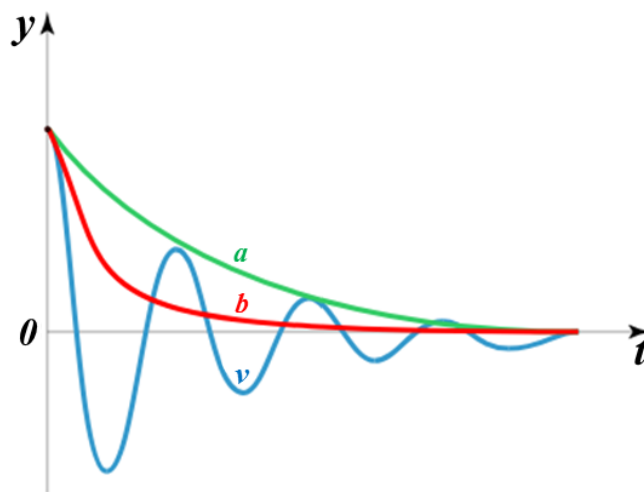
b) ако је  $c^2 - 4km = 0$ , онда је решење полазне једначине облика

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{-\frac{ct}{2m}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

и за осцилаторни систем кажемо да је критично пригушен;

v) ако је  $c^2 - 4km < 0$ , решење полазне једначине је облика

$$y(t) = e^{-\frac{ct}{2m}} (c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t), \quad \mu = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (6.8)$$



Слика 6.4: Три случаја слободних пригушених осцилација

Приметимо да понашање система зависи од  $c$ , коефицијента отпора средине. У сва три случаја померај тежи нули када  $t$  тежи бесконачности што значи да се померај смањује под утицајем отпора средине, тј. пригушења (Слика 6.4). У случају критичног пригушења, слично као у првом случају, тело се монотono, без даљег осциловања враћа у равнотежни положај и то је управо принцип по коме раде амортизери на аутомобилима. Они настоје да ублаже (пригуше) удар који настаје, рецимо, када аутомобил упадне у рупу. У првом случају тело се такође монотono враћа у равнотежни положај, али спорије него у случају критичног пригушења. Уколико израз (6.8) запишемо у облику

$$y(t) = Re^{-\frac{ct}{2m}} \cos(\mu t - \delta), \quad R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{c_2}{c_1} \quad (6.9)$$

видимо да у овом случају тело наставља да осцилује до „повратка” у равнотежни положај, са све мањом амплитудом.

## 2.2° Принудне пригушене осцилације

Додајмо претходном случају дејство спољашње силе  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ . Предмет изучавања тада постаје једначина

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega t. \quad (6.10)$$

Партикуларно решење тражимо у облику

$$y_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Заменом у једначину добијамо вредности коефицијената

$$A = \frac{F_0(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} \quad \text{и} \quad B = \frac{F_0 c \omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2},$$

стога је тражено партикуларно решење

$$y_p(t) = \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} ((k - m\omega^2) \cos \omega t + c \omega \sin \omega t),$$

то јест

$$y_p(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t - \delta)}{((k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2)^{1/2}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{c \omega}{k - m\omega^2}.$$



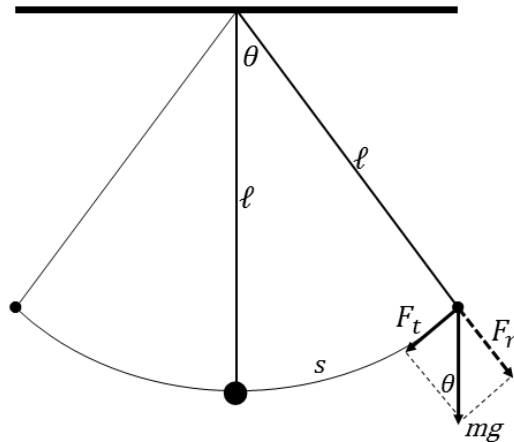
Опште решење полазне диференцијалне једначине је збир општег решења одговарајуће хомогене једначине и добијеног партикуларног решења. Опште решење хомогене једначине тежи нули када  $t$  тежи бесконачности, па видимо да за довољно велико  $t$  израз  $y(t) \approx y_p(t)$  довољно добро описује померај тела. За фиксирано  $F_0$  се променом  $\omega$  добијају различите амплитуде за  $y_p(t)$ . Највећа амплитуда се добија за  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2}$ , где је  $p = \frac{c}{2m}$ . Та фреквенција  $\omega_1$  се зове практична резонантна фреквенција. Пример практичне резонанце представља радио пријемник. Ово је принцип бирања радио станица у електричном колу где се фреквенција жељене радио станице појачава више него фреквенције осталих станица.

## 6.2 Математичко клатно

Један од примера осцилаторног кретања је кретање математичког клатна. Под математичким клатном подразумевамо тело облика лопте (куглицу) одређене масе  $m$ , окачено о неистегљиви канап дужине  $l$  који је причвршћен за непокретну тачку. Претпоставићемо да је маса канапа занемарљива у односу на масу тела, као и димензије тела у односу на дужину канапа (Слика 6.5).

Равнотежни положај тела је положај у коме тело мирује. Када тело дејством неке спољашње силе изведемо из равнотежног положаја, а затим укинемо дејство те спољашње силе, тело ће наставити слободно да осцилује лево-десно по кружној путањи под дејством силе Земљине теже.

Посматрајмо тренутак  $t$  када је клатно удаљено од равнотежног положаја за угао отклона  $\theta = \theta(t)$  и означимо са  $s = s(t)$  пређени пут (растојање) дуж лука путање тела од равнотежног положаја у тренутку  $t$  (Слика 6.5), с тим да ће имати знак минус ако се лоптица креће лево од равнотежног положаја. Сила Земљине теже делује на тело вертикално надоле и једнака је производу масе тела  $m$  и убрзања Земљине теже  $g \approx 9,807 \text{ m/s}^2$ . У овом положају се сила Земљине теже може представити као збир две компоненте: радијалне, силе затезања канапа  $F_r$  која, по претпоставци, нема дејство и тангенцијалне компоненте  $F_t$  која, заправо, једина има ефекта за осцилаторно кретање, односно, враћање куглице у равнотежни положај. Она делује дуж



Слика 6.5: Математичко клатно

путање тела. Са слике 6.5 видимо да је  $F_t = -mg \sin \theta$ . Пошто је сила једнака производу масе и убрзања, а убрзање је други извод пређеног пута добија се

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta,$$

односно,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \theta.$$

Како је дужина лука (пређени пут) директно пропорционална углу отклона

$$s(t) = l\theta(t),$$

добијамо модел

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (6.11)$$

Ово је модел клатна без пригушења, јер смо занемарили отпор спољашње средине. У питању је диференцијална једначина другог реда која има бесконачно много решења. За добијање решења нашег проблема користићемо и почетне услове. У почетку угао отклона је био  $\theta(0) = \theta_0$  и тело је било у мировању, па му је брзина  $v_0$  била 0. Са следећим почетним условима

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

и једначином (6.11) добијамо Кошијев задатак који има јединствено решење (на основу Теореме 5.7), али није могуће добити његово ана-

литичко решење.

Уколико је почетни угао отклона  $\theta_0$  мали, можемо додатно упростити модел, јер је за мале вредности  $\sin \theta \approx \theta$ , те можемо посматрати једначину

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

која се може тачно решити. То је хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Њено решење можемо тражити у облику  $\theta(t) = e^{\lambda t}$ . Из траженог облика решења следи да је

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t},$$

па се наша једначина своди на

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{g}{l} e^{\lambda t} = 0$$

$$e^{\lambda t} \left( \lambda^2 + \frac{g}{l} \right),$$

тако да је одговарајућа карактеристична једначина

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0.$$

Њена решења су конјуговано - комплексни бројеви

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}},$$

те је опште решење облика

$$\theta(t) = c_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + c_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Из почетних услова добијамо да је  $c_1 = \theta_0$ ,  $c_2 = 0$ , стога је решење Кошијевог проблема

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t, \tag{6.12}$$

што описује периодично хармонијско кретање.

До овог истог модела математичког клатна смо могли доћи користећи и закон одржања енергије који каже да се збир потенцијалне и кинетичке енергије клатна не мења са временом (више о овом начину можете погледати у [1]).

Узмимо сада у обзир и отпор ваздуха који успорава клатно при кретању. Тај отпор је сила пропорционална брзини тела  $F_0 = -B \frac{ds}{dt}$ , па означавајући  $b = \frac{B}{m}$  добијамо модел клатна са пригушењем

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{b}{m} \frac{d\theta}{dt} - \frac{g}{l} \sin \theta.$$

Овај модел нећемо разматрати, јер је његова анализа доста захтевнија од анализе претходног.

# Референце

- [1] М. Дражић: Математичко моделирање, Математички факултет, 2017.
- [2] С. Јанковић, Ј. Кнежевић-Миљковић: Диференцијалне једначине I, Математички факултет, 2007.
- [3] D. G. Zill: A First Course in Differential Equations with Modeling Applications, Cengage Learning, 2012.
- [4] D. G. Zill: Differential Equations with Boundary-Value Problems, Cengage Learning, 2016.
- [5] H. Edwards, D. E. Penney: Differential Equations, Computing and Modeling, Pearson Education, 2014.
- [6] G. Baker: Differential Equations as models in Science and Engineering, World Scientific Publishing, 2016.
- [7] M. Braun: Differential Equations and Their Applications An Introduction to Applied Mathematics, Springer, 1993.
- [8] K. B. Howell: Ordinary Differential Equations An Introduction to the Fundamentals, Ed 2, CRC Press, 2019.
- [9] <https://www.youtube.com/watch?v=intBEYKlaGY> (Rigor Mortis, Livor Mortis, Pallor Mortis, Algor Mortis: Forensic Science Explains Stages of Death)
- [10] <https://pod2.stat.gov.rs/ObjavljenePublikacije/G2002/pdf/G20024009.pdf>

# Биографија

Милена Алексић је рођена 3. новембра 1991. године у Панчеву, где и данас живи. Као носилац Вукове дипломе завршила је Основну школу „Свети Сава” и Гимназију „Урош Предић” у Панчеву.

Школске 2010/2011. уписује основне студије на Математичком факултету у Београду, смер Професор математике и рачунарства. Студије завршава 2018. године и исте године уписује мастер студије, такође на Математичком факултету у Београду, смер Професор математике и рачунарства.

Упоредо је са студијама од 2014. до 2018. године била запослена у Основној школи „Бранко Радичевић” у Панчеву, као наставник математике и информатике. Од 2018. године је запослена у Основној школи „Свети Сава” у Панчеву као наставник математике.