УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Ана Љ. Меркле

# СТОХАСТИЧКА ПРЕДВИДИВОСТ ФИЛТРАЦИЈА И ПРОЦЕСА ПО НЕПРЕКИДНОМ ПАРАМЕТРУ

докторска дисертација

Београд, 2023.

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Ana Lj. Merkle

# STOCHASTIC PREDICTABILITY OF FILTRATIONS AND PROCESSES WITH CONTINUOUS PARAMETER

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2023.

**Ментори:**

академик др Стеван Пилиповић, редовни професор
Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет

др Миљана Јовановић, редовни професор
Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет

**Чланови комисије:**

др Марија Милошевић, редовни професор
Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет

др Бојана Милошевић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Ленка Главаш, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Датум одбране:** ____________________

**Захвалница**

*Пре свега, велику захвалност дугујем менторима, академику Стевану Пилиповићу на сталној подршци и охрабрењу током писања рада и проф. др Миљани Јовановић на пажљивом читању оригиналног текста као и корисним коментарима и сугестијама који су допринеле квалитету овог рада.*

*Захваљујем се и проф. др Марији Милошевић на подршци и ангажовању. Хвала члановима Комисије за оцену научне заснованости теме и члановима Комисије за оцену докторске дисертације на ангажовању.*

*Захвална сам својим пријатељима уз које је период великог рада био обојен радошћу и представљао пријатно искуство.*

*Највећу захвалност за безрезервну љубав током живота, као и на стрпљењу, подршци и сталном охрабрењу током мог целокупног школовања дугујем својој мами Љиљани.*

Београд, мај 2023. Ана Меркле

**Наслов:** Стохастичка предвидивост филтрација и процеса по непрекидном параметру

**Сажетак:** Многи нови развојни правци у области вероватноће и статистике се заснивају на налажењу и истраживању узрочних веза између посматраних процеса. То подразумева и разматрање релација зависности и испитивање како прошлост утиче на садашњост и будућност процеса. Познати концепт Грејнџерове узрочности (1969) је повезан са појмом локалне зависности коју је увео Шведер (1970). Грејнџер је разматрао временске серије, док је рад Шведера био заснован на процесима Маркова. Тај концепт је касније проширио Микланд (1986) на нешто општије класе процеса. Сви наведени концепти уводе у модел временску компоненту приликом разматрања зависности.

Дисертација садржи четири главе. Оригинални резултати дисертације су изложени у четвртој глави. Предмет докторске дисертације је увођење различитих концепата стохастичке предвидивости коришћењем особина условне независности. Према идеји Грејнџера, разматрају се релације између $\sigma$-алгебри догађаја, односно филтрација и између процеса са непрекидним параметром, јер модели са непрекидним параметром представљају почетни корак у многим применама као што су: примене у области финансија, економетрије, неуро науке, епидемиологије, климатологије, демографије и другим. У дисертацији је дефинисан концепт зависности између процеса и филтрација. Концепт је назван узрочна предвидивост јер се заснива на предикцији. Наведене су неке од главних особина тог концепта и приказана је повезност са другим концептима зависности. Узрочна предвидивост је примењена на дифузионе процесе, прецизније, на испитивање јединствености слабих решења стохастичких диференцијалних једначина Итоа и стохастичких диференцијалних једначина по семимартингалима. Поред тога, теорема о репрезентацији је представљена у терминима узрочне предвидивости и дати су многобројни примери примена уведеног концепта у финансијској математици код моделирања заштите од ризика и бајесовској статистици.

Један од могућих праваца даљег истраживања би било проучавање прогресивне стохастичке предвидивости преласком са фиксираног времена на времена заустављања.

**Кључне речи:** филтрација, узрочна предвидивост, стохастичке диференцијалне једначина, слаба решења, слаба јединственост, теорема о репрезентацији

**Научна област:** Математика

**Ужа научна област:** Вероватноћа и статистика

**AMS класификација:** 60G07, 60H10, 60H30, 60G44

**Title:** Stochastic predictability of filtrations and processes with continuous parameter

**Abstract:** Many new developments in the filed of probability and statistics focus on finding causal connections between observed processes. This leads to considering dependence relations and investigating how the past influence the present and the future. The well known concept of Granger (1969) causality is closely related to the idea of local dependence introduced by Schweder (1970). Granger studied time series, while Schweder considered Markov chains. The concept was later extended to more general stochastic processes by Mykland (1986). All this concepts incorporate the time into consideration dependence.

The dissertation consist of four chapters. New results are presented in the fourth chapter. The main aim of this doctoral dissertation is to determine different concepts of stochastic predictability using the well known tool of conditional independence. Follow Granger's idea, relationships between family of $\sigma$-algebras (filtrations) and between processes in continuous time were considered since continuous time models dependence represent the first step in various applications, such as in finance, econometric practice, neuroscience, epidemiology, climatology, demographic, etc. In this dissertation the concept of dependence between stochastic processes and filtration is introduced. This concept is named causal predictability since it is focused on prediction. Some major characteristics of the given concept are shown and connections with known concept of dependence are explained. Finally, the concept of causal predictability is applied to the processes of diffusion type, more precisely, to the uniqueness of weak solutions of Ito stochastic differential equations and stochastic differential equations with driving semimartingales. Also, the representation theorem in terms of causal predictability is established and numerous examples of applications of the given concept are presented such as application in financial mathematics in the view of modeling default risk, in Bayesian statistics.

The idea for the future might be to deal with the case of progressive stochastic predictability, i.e. the generalization of stochastic predictability from fixed time to stopping time.

**Key words:** filtration, causal predictability, , stochastic differential equations, weak solution, weak uniqueness, representation theorem,

**Scientific field:** Mathematics

**Scientific subfield:** Probability and Statistics

**AMS Classification:** 60G07, 60H10, 60H30, 60G44

# Садржај

"Always be a little improbable."
- Oscar Wild

# Увод

Један од приоритетних задатака у многим областима науке је проучавање међусобне повезаности различитих појава и испитивање њихове међусобне зависности.

Многи научници фокусирају своја истраживања на налажење узрочних зависности између регистрованих података. Из регистрованих података се могу извести различите статистичке карактеристике, али тако добијене релације не морају нужно бити узрочне. Зато је потребно да се дефинишу критеријуми узрочне зависности. Добра полазна тачка у литератури, при истраживању начина за одређивање и мерење узрочних ефеката, може бити Холандова књига [24]. Још једно решење је и да се разматра стохастичка зависност као код Гуда[1] [21] и Шупеса[2] [64] који је дефинисао вероватносну узрочност. Много софистициранији приступ, који је и врста предвидивости, предложио је Грејнџер[3] [22]. Грејнџер је испитивао међусобне утицаје појава у времену користећи назив неузрочност, а сличан приступ је имао и Шведер[4] [63] и користио је назив локална независност. Грејнџер је проучавао временске серије, а Шведер ланце Маркова. У случају две временске серије $X$ и $Y$ каже се да $X$ не узрокује $Y$, ако на предвиђање будућности серије $Y$ не утиче додавање информације коју даје серија $X$, што представља исти концепт као и локална независност. У литератури се користи и назив Грејнџер-Шведерова узрочност. Такав концепт је проширио Микланд[5] [57] на класу процеса са непрекидним временом.

Следећи поменуте идеје, показано је како релације условне ортогоналности и условне независности могу послужити као основ за општу вероватносну теорију узрочности за случајне догађаје и случајне процесе. Узрочност изражену у

[1] Irving John Good, 1916-2009, британски математичар

[2] Patrick Suppes, 1922-2014, амерички филозоф

[3] Clive William John Granger, 1934-2009, британски економетричар, добитник Нобелове награде за економију 2003. године

[4] Tore Schweder, 1943-, норвешки статистичар

[5] Per A. Mykland, амерички математичар и статистичар

терминима условне ортогоналности у Хилбертовим просторима квадратно интеграбилних случајних величина проучавао је Хосоја [25], а широко су је развили Флоренс[6] и Моушарт[7] [18], док су дефиниције у терминима условне независности дате у радовима [17], [18], [19], [22], [57].

Предмет докторске дисертације је дефинисање нових облика зависности између случајних процеса и фамилија $\sigma$-алгебри догађаја, односно филтрација, и анализирање њихових веза. Идеја увођења времена код испитивања зависности и међусобног утицаја појава је значајна и за предвиђање разматраних појава.

У раду се разматрају филтрације и случајни процеси по непрекидном параметру јер модели са непрекидним временом имају широку примену у финансијама, економетрији, биостатистици, неуронауци, екологији, епидемиологији, демографији и другим областима науке. Дефинисан је и нови концепт зависности под називом стохастичка предвидивост, а затим је разматрана веза те релације са познатим дефиницијама зависности.

Структура рада је следећа.

У првој глави су наведени резултати из теорије случајних процеса, који се користе у наставку рада. Важан појам у Теорији мартингала су случајна времена, специјално времена заустављања. У овом делу су дефинисана времена заустављања и мерљивост процеса са непрекидним параметром, као и Винеров процес и дате су неке његове основне особине. Наведени су и основни ставови из Теорије мартингала са непрекидним параметром. Дефинисан је простор непрекидних мартингала $\mathcal{M}$, као и простори $\mathcal{M}_c^2$, $\mathcal{M}_b^c$ и $\mathcal{M}_c^u$ који садрже, редом, непрекидне, ограничене и униформно интеграбилне мартингале са почетним вредностима у нули. Описан је и простор $\mathcal{M}_c^{loc}$ непрекидних локалних мартингала са почетним вредностима у нули и проширен је појам квадратне варијације и квадратне коваријације на локалне мартингале.

У другој глави је описан начин дефинисања интеграла по процесима чије трајекторије немају ограничене варијације. Приказан је поступак конструкције стохастичког интеграла по различитим класама мартингала. Прво се разматра интеграл елементарних процеса, а затим се тако дефинисан стохастички интеграл проширује на класе непрекидних мартингала и семимартингала. У истој глави је наведен и један од најпознатијих резултата у стохастичкој анализи, формула Итоа, која је стохастичка верзија Њутн[8]-Лајбницове[9] формуле из теорије класичне интеграције.

Трећа глава дисертације је посвећена стохастичким диференцијалним једначи-

[6] Jean Pierre Florens, 1947- , француски економетричар

[7] Michel Mouchart, белгијски статистичар

[8] Sir Isaac Newton, 1643-1727, енглески математичар и физичар

[9] Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz, 1646 -1716, немачки математичар, физичар и проналазач

нама, које су мотивисале Итоа на конструкцију стохастичког интеграла. Наведене су основне дефиниције, као и резултати који се односе на неке од особина решења стохастичких диференцијалних једначина Итоа, које се разматрају у наредном поглављу. Описане су и стохастичке диференцијалне једначине са семимартингалима и дефинисана њихова решења. Оне ће, такође, бити предмет проучавања у дисертацији.

Четврта глава садржи нове теоријске резултате. У оквиру ње су дефинисани нови облици зависности између случајних појава. Разматрају се у два главна случаја: зависност између филтрација и зависност између случајних процеса и филтрација. У оба случаја је дефинисан нови облик зависности под називом стохастичка предвидивост. У истој глави су наведени и различити алтернативни облици уведене дефиниције и наведене бројне особине новог концепта. Показана је и инваријантност релације предвидивости у односу на стохастичку предвидивост. Добијени резултати су примењени на одређивање услова за слабу јединственост слабих решења стохастичких диференцијалних једначина са Брауновим кретањем и стохастичких диференцијалних једначина са семимартингалима. Наведени су и примери примене стохастичке предвидивости код решавања проблема мартингалне репрезентације као и у финансијској математици код моделирања заштите од ризика. Нови концепт зависности је повезан и са појмом мерљиве раздвојености $\sigma$-алгебри и филтрација који има широку примену у бајесовској статистици.

Сви резултати приказани у четвртој глави су оригинални и објављени у радовима [50], [51], [52], [67].

# Глава 1

# Случајни процеси са непрекидним параметром

## 1.1 Филтрације, времена заустављања и случајни процеси

У овом поглављу се разматрају неки од основних појмова Теорије случајних процеса који ће у наставку бити коришћени.

Изложени резултати се односе на процесе са непрекидним параметром и специјално на мартингале по непрекидном параметру.

Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа. Скуп $A \subseteq \Omega$ је $P$-мере нула из $\mathcal{A}$ ако постоји $B \in \mathcal{A}$, такав да је $A \subset B$, за који важи $P(B) = 0$.

Простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ је **комплетан** у односу на вероватноћу $P$ ако $\sigma$-алгебра $\mathcal{A}$ садржи све подскупове скупова чија је вероватноћа $P$ једнака нули. У наставку се увек претпоставља да је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ комплетан мерљив простор, што не представља умањење општости, јер се сваки мерљив простор може комплетирати.

Код математичког моделирања многих случајних појава, које се мењају у времену, разматрају се и неопадајуће фамилије $\sigma$-алгебри из $\sigma$-алгебре $\mathcal{A}$ које се називају филтрације.

Филтрације представљају основни појам у теорији случајних процеса. Увео их је Дуб, а многи појмови са којима се ради у наставку, као што су времена заустављања, мартингали или семимартингали, укључују појам филтрација.

**Дефиниција 1.1.1.** *Нека је* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *простор вероватноћа и* $I$ *параметарски или индексни скуп.* **Филтрација** *или* **поток** *догађаја на* $(\Omega, \mathcal{A})$ *је неопадајућа фамилија*

$\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ *под–$\sigma$-алгебри из $\mathcal{A}$, тј. таквих да за свако $s \leq t$, $s, t \in I$ важи $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$.*

Простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ снабдевен филтрацијом $\mathbf{F}$, у ознаци $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P)$ назива се **стохастички базис** или **простор са филтрацијом**.

**Дефиниција 1.1.2.** *Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ комплетан простор вероватноћа са филтрацијом $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$. Филтрација $\mathbf{F}$ је* **комплетна** *ако свако $\mathcal{F}_t$, $t \in I$ садржи све скупове $P$-мере нула из $\mathcal{A}$.*

Ако филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ није комплетна, она се може комплетирати са $\mathbf{F}^P = \{\mathcal{F}_t^P, t \in I\}$, где $\mathcal{F}_t^P$, $t \in I$, представља $\sigma$-алгебру генерисану са $\mathcal{F}_t$ и скуповима $P$-мере нула из $\mathcal{A}$.

Ако је $I = [0, \infty)$, филтрацији $\mathbf{F}$ се може додати њен задњи члан дефинисан са

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma \left\{ \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t \right\},$$

који представља најмању $\sigma$-алгебру на $\left\{ \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t \right\}$ и означава се са $\mathcal{F}_\infty \equiv \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$.

За $I = [0, t_0], t_0 \in \mathbb{R}$ биће

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma \left\{ \bigcup_{t \in I} \mathcal{F}_t \right\} \equiv \bigvee_{t \in I} \mathcal{F}_t.$$

Јасно је да важи $\mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{A}$.

Природна интерпретација индекса $t \in I$ је време. Тако се филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ може интерпретирати као описивање прошлости неке појаве, па се $\mathcal{F}_t$ назива $\sigma$-алгебра догађаја који претходе тренутку $t$, а може се схватити као скуп свих информација из $\mathcal{A}$, доступних до тренутка $t$, укључујући и $t$.

Неке од $\sigma$-алгебри које имају важну улогу у Теорији мартингала су (видети, на пример, [8], [9], [32], [46], [47]):

$$\mathcal{F}_{t-} = \sigma \left\{ \bigcup_{s < t} \mathcal{F}_s \right\} \equiv \bigvee_{s < t} \mathcal{F}_s,$$

$\sigma$-алгебра која садржи догађаје који се реализују стриктно пре тренутка $t$, $t > 0$;

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s,$$

$\sigma$-алгебра која садржи догађаје који се реализују непосредно после тренутка $t$, $t \geq 0$.

За $I = [0, t_0]$ је $\mathcal{F}_{t_0+} = \mathcal{F}_{t_0}$, $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0$ за $t \in I$.

Јасно је да за свако $t \in I$ важи $\mathcal{F}_{t-} \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+}$.

Каже се да је филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ **непрекидна** ако је $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_{t+}$, за свако $t \geq 0$. Филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ је **непрекидна здесна** ако је $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, за свако $t \geq 0$, а **непрекидна слева** ако је $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$ за свако $t \geq 0$. Јасно је да је филтрација $\mathbf{F}^+ = \{\mathcal{F}_{t+}, t \geq 0\}$ увек непрекидна здесна.

У наставку ће, ради поједностављења одређених израчунавања, бити претпостављено да филтрација $\mathbf{F}$ задовољава одређене услове регуларности који се називају **уобичајени услови**, а који су наведени у наредној дефиницији.

**Дефиниција 1.1.3.** *Нека је* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ *филтрација на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Каже се да филтрација* $\mathbf{F}$ *задовољава уобичајене услове или да је* **стандардна филтрација** *ако је непрекидна здесна и ако за свако* $t \geq 0$ $\mathcal{F}_t$ *садржи све скупове* $P$*-мере нула из* $\mathcal{A}$.

Како је $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_t$ за свако $t \in I$, за други услов из претходне дефиниције је довољно да $\mathcal{F}_0$ садржи све скупове $P$ мере нуле из $\mathcal{A}$.

Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа, $I \subset \mathbb{R}$ скуп вредности параметра $t$ и $(E, \mathcal{E})$ мерљив простор. Ако је на скупу $E$ дефинисана метрика, Борелова $\sigma$-алгебра генерисана том метриком означава се са $\mathcal{B}(E)$. Често ће $E$ бити скуп $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^d$, а Борелова[1] $\sigma$-алгебра на $\mathbb{R}$ се означава са $\mathcal{B}$.

Фамилија случајних променљивих које су дефинисане на истом простору вероватноћа и које зависе од параметра $t$ представља случајан процес. Прецизније, важи следећа дефиниција.

**Дефиниција 1.1.4. Реалан случајан** *или* **стохастички процес** *са фазним простором (или простором стања)* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *је фамилија случајних променљивих* $X = \{X(t, \omega), t \in I\}$ *из* $\Omega$ *у* $\mathbb{R}$ *које су* $\mathcal{A}/\mathcal{B}$*-мерљиве.*

Често се уместо $\{X(t, \omega), t \in I\}$ користе краћи записи $\{X(t), t \in I\}$ или $\{X_t, t \in I\}$. У применама се често изучавају процеси који се дешавају у времену, па параметар $t \in I$ обично представља време, а његова фиксирана вредност временски тренутак. Тада се каже да случајна променљива $X_t$ описује стање процеса у тренутку $t$.

Према врсти параметарског скупа $I$ разликују се две основне класе случајних процеса:

[1] Emile Borel, 1871-1956, француски математичар

1) ако је $I$ дискретан скуп, фамилија $\{X(t,\omega), t \in I\}$ се назива **случајни процес са дискретним параметром**;

2) ако је $I$ интервал са реалне праве, тада се фамилија $\{X(t,\omega), t \in I\}$ назива **случајни процес са непрекидним параметром**.

Надаље ће се проучавати случајни процеси са непрекидним параметром.

Како ће даље често бити $I = [0, \infty)$, разматраће се процеси чије су трајекторије непрекидне или непрекидне здесна или непрекидне здесна са коначним левим граничним вредностима (càdlàg) за свако $t > 0$, као и процеси који те особине имају скоро сигурно.

Наредна теорема представља основну теорему теорије случајних процеса.

**Теорема 1.1.1.** (**Теорема Колмогорова**[2]) *Нека је $I$ непразан скуп и нека је $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)$ фамилија расподела за све коначне подскупове $\{t_1, \dots, t_n\} \subset I$ која задовољава услов симетрије и услов сагласности. Тада постоји случајан процес $\{X_t, t \in I\}$ такав да је фамилија расподела $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)$ његова фамилија коначно-димензионих расподела.*

Очигледно је да важи обрнуто тврђење: ако је процес $\{X_t, t \in I\}$ задат на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, тада је фамилија коначно-димензионих расподела тог процеса једнозначно одређена.

Често је потребно прецизирати у ком смислу су два случајна процеса једнака. У наставку су дата два концепта једнакости случајних процеса $X = \{X_t, t \in I\}$ и $Y = \{Y_t, t \in I\}$ који су дефинисани на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и на истом параметарском скупу $I$ са вредностима у истом фазном простору $(R, \mathcal{B})$.

**Дефиниција 1.1.5.** *Случајни процеси $X = \{X_t, t \in I\}$ и $Y = \{Y_t, t \in I\}$ су* **стохастички еквивалентни у ширем смислу** *ако се за сваки низ $(t_1, \dots, t_n)$, $t_i \in I$ расподеле случајних вектора $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ и $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ поклапају, тј. ако процеси имају исте коначно-димензионалне расподеле.*

**Дефиниција 1.1.6.** *Ако је за свако $t \in I$*

$$P\{X_t = Y_t\} = P\{\omega : X(t,\omega) = Y(t,\omega)\} = 1, \tag{1.1}$$

*каже се да су случајни процеси* **стохастички еквивалентни** *или само* **еквивалентни**.

[2] Andrej Nikolajevich Kolmogorov, 1903-1987, руски математичар, један од највећих математичара двадесетог века

Сваки други случајан процес дефинисан на истом простору вероватноћа који је стохастички еквивалентан процесу $X$ назива се **модификација** или **верзија** процеса $X$.

Стохастички еквивалентни случајни процеси имају једнаке коначно-димензионе функције расподеле, мада се по особинама трајекторија они могу битно разликовати.

За два процеса $X = \{X_t, t \in I\}$ на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и $Y = \{Y_t,\ t \in I\}$ на простору вероватноћа $(\Omega^1, \mathcal{A}^1, P^1)$ се каже да се **не разликују** ако постоји изоморфизам $U : \Omega \to \Omega^1$ простора вероватноћа такав да је $Y(U\omega, t) = X(\omega, t)$. Такви процеси се сматрају једнаким. Специјално, ако су процеси $X$ и $Y$ дефинисани на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, тада је $X(\omega, t) = Y(\omega, t)$ за свако $\omega$. Прецизније важи следећа дефиниција.

**Дефиниција 1.1.7.** *Случајни процеси $X = \{X_t, t \in I\}$ и $Y = \{Y_t, t \in I\}$ се* **не разликују** *(енгл. indistinguishable) ако се скоро све њихове трајекторије поклапају на $I$, другим речима ако је*

$$P\{X_t = Y_t, \text{за свако } t \in I\} = 1. \tag{1.2}$$

Облик еквиваленције из Дефиниције 1.1.7 је најјачи и имплицира претходна два. Јасно је да претходна два облика еквиваленције (из Дефиниције 1.1.5 и Дефиниције 1.1.6) имају смисла само ако су процеси дефинисани на истом простору вероватноћа, док у облику из Дефиниције 1.1.7 то не мора бити случај. Процеси који се не разликују у смислу Дефиниције 1.1.7 сматрају се **једнаким.**

**Лема 1.1.1.** *[59] Нека је процес $Y = \{Y_t, t \in I\}$ модификација процеса $X = \{X_t, t \in I\}$ и нека су све трајекторије тих процеса непрекидне здесна. Тада се процеси $X$ и $Y$ не разликују.*

У наставку ће се разматрати различите врсте мерљивости случајног процеса.

Ако се случајан процес посматра као пресликавање

$$X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R},$$

каже се да је процес мерљив ако $X^{-1}(B)$ припада $\sigma$-алгебри $\mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{A}$ за свако $B \in \mathcal{B}$. То је прецизније формулисано у наредној дефиницији.

**Дефиниција 1.1.8.** *Случајан процес $X = \{X_t, t \in I\}$ је* **мерљив** *ако за свако $B \in \mathcal{B}$ скуп*

$$\{(t, \omega) : X(t, \omega) \in B\}$$

*припада производу σ-алгебри $\mathcal{B}(I) \times \mathcal{A}$, где је $\mathcal{B}(I)$ σ-алгебра Борелових скупова на $I$.*

Наредна дефиниција додатно појачава појам мерљивости процеса.

**Дефиниција 1.1.9.** *Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P)$ простор са филтрацијом. Мерљив случајан процес $X = \{X_t, t \in I\}$ дефинисан на $(\Omega, \mathcal{A})$ са вредностима у $(R, \mathcal{B})$ је* **адаптиран** *у односу на филтрацију* **F** *(или* **сагласан** *са филтрацијом* **F***), у скраћеном запису* **F-адаптиран***, ако је за свако $t \in I$ случајна променљива $X_t$ мерљива у односу на σ-алгебру $\mathcal{F}_t$.*

Адаптиран стохастички процес $X = \{X_t, t \in I\}$ у односу на филтрацију **F** означава се са $X = \{(X_t, \mathcal{F}_t), t \in I\}$ или само $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$. У литератури се често пише и $X_t \in \mathcal{F}_t$. За адаптиран стохастички процес каже се да је **задат на стохастичком базису** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P)$, **сагласан са филтрацијом** или **неантиципирајући** у односу на филтрацију **F**.

Нека је процес $X = \{X_t, t \in I\}$ адаптиран у односу на филтрацију $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$. Јасно је да је за сваку мерљиву функцију $f$, случајан процес $f(t, X_t)$ адаптиран у односу на исту филтрацију. Такође, свака неслучајна функција је адаптирана у односу на дату филтрацију.

**Дефиниција 1.1.10.** *Фамилија σ-алгебри $\mathbf{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X, t \in I\}$ генерисана стохастичким процесом $X = \{X_t, t \in I\}$, где је $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t;\ s, t \in I\}$, назива се* **природна** *(или* **канонска)** **филтрација** *тог процеса.*

Уобичајена интерпретација природне филтрације $\mathbf{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X, t \in I\}$ је да $\mathcal{F}_t^X$ садржи све расположиве информације дате случајним величинама $\{X_s, s \leq t\}$. На пример, уколико $X_t$ представља цену акције у тренутку $t$, тада су познате све информације о променама цене акције $\{X_s, s \in [0, t]\}$, тј. $\mathbf{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \in [0, t]\}$.

Јасно је да је $\mathcal{F}_t^X$ минимална σ-алгебра из $\mathcal{A}$ у односу на коју су мерљиве све случајне величине $X_s, s \leq t$. Отуда је $\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t$ за било коју другу филтрацију $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$. Филтрација $\mathcal{F}_t^X$ не мора, у општем случају, бити комплетна, али се може комплетирати додавањем свих скупова $P$-мере нула из $\mathcal{A}$.

Јасно је да је процес $X$ адаптиран у односу на природну филтрацију $\mathbf{F}^X$.

Ако се параметар $t \in I$ интерпретира као време, σ-алгебра

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t,\ s, t \in I\}$$

се схвата као скуп свих информација о случајном процесу $X$ доступних до момента $t$, укључујући и $t$ и назива се **прошлост**, а фамилија

$$\mathcal{F}^X_{\geq t} = \sigma\{X_s, s \geq t,\ s, t \in I\},$$

се назива **будућност процеса** $X$ **у тренутку** $t$.

Наредна дефиниција повезује мерљивост процеса са филтрацијом.

**Дефиниција 1.1.11.** *Нека је* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I = [0, \infty)\}$ *непрекидна филтрација на* $(\Omega, \mathcal{A})$ *и нека је* $X = \{X_t, t \in I\}$ *процес дефинисан на* $(\Omega, \mathcal{A})$. *Каже се да је процес* **прогресивно мерљив** *или* **прогресиван** *(у односу на филтрацију* $\mathbf{F}$*) ако је за свако* $t \geq 0$ *пресликавање* $X$ *из* $[0, t] \times \Omega$ *на* $(R, \mathcal{B})$ *мерљиво у односу на* $\sigma$*-алгебру* $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ *за свако* $t \in I$, *тј. ако за свако* $t \geq 0$ *и свако* $B \in \mathcal{B}$ *скуп*

$$\{(s, \omega) : s \leq t, \omega \in \Omega, X(s, \omega) \in B\}$$

*припада производу* $\sigma$*-алгебри* $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$.

*Подскуп* $G \subseteq [0, \infty) \times \Omega$ *је прогресиван ако је процес* $X = 1_G$ *прогресиван.*

*Фамилија прогресивних скупова из* $\sigma$*-алгебре на* $[0, \infty) \times \Omega$ *се назива прогресивна* $\sigma$*-алгебра и означава се са* $Prog$. *Процес* $X$ *је прогресиван ако и само ако је пресликавање* $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ *мерљиво у односу на* $\sigma$*-алгебру* $Prog$.

Класа мерљивих процеса је шира од класе прогресивно мерљивих процеса.

**Напомена 1.1.1.** *Јасно је да је сваки прогресивно мерљив процес* $X = (X_t, \mathcal{F}_t),\ t \in I$ *мерљив и адаптиран у односу на филтрацију* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$, *али обрнуто у општем случају не важи. Сваки непрекидан (здесна, слева) случајан процес* $X = (X_t, \mathcal{F}_t), t \in I$ *је прогресивно мерљив (видети [54]).*

Следећа теорема представља познат резултат, који су дали Чанг[3] [4] и Дуб[4] [12].

**Теорема 1.1.2.** *Нека је* $\mathbf{F}$ *филтрација на* $(\Omega, \mathcal{A})$ *и нека је* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *мерљив и адаптиран процес у односу на филтрацију* $\mathbf{F}$. *Тада процес има прогресивно мерљиву модификацију.*

Доказ ове теореме се може наћи у [54].

Важи и следећи мање општи резултат који се једноставније доказује.

[3]Kai Lai Chung, 1917-2009, кинеско-амерички математичар

[4]Joseph Leo Doob, 1910-2004, амерички математичар

**Теорема 1.1.3.** *[60] Нека је* $\mathbf{F}$ *филтрација на* $(\Omega, \mathcal{A})$ *и* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *адаптиран процес у односу на филтрацију* $\mathbf{F}$ *са вредностима у* $(R, \mathcal{B})$ *и нека су све трајектори-је процеса непрекидне здесна (или непрекидне слева). Тада је процес* $X$ *прогресивно мерљив у односу на филтрацију* $\mathbf{F}$.

У наредној дефиницији је дата још једна класа процеса.

**Дефиниција 1.1.12.** *Предиктабилна* $\sigma$*-алгебра* $\mathcal{P}$*, дефинисана на* $\mathbb{R}^+ \times \Omega$*, је* $\sigma$*-алгебра генерисана свим процесима* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *адаптираним у односу на филтрацију* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$*, чије су трајекторије непрекидне с леве стране. Процес* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *је предиктабилан процес ако је мерљив у односу на предиктабилну* $\sigma$ *- алгебру* $\mathcal{P}$.

У многим ситуацијама, на пример у финансијској математици, преласком са мере $P$ на меру $Q$, потребно је променити додељене вероватноће догађаја из $\Omega$. Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и нека је $L$ ненегативна случајна величина за коју важи $EL = \int LdP = 1$. Нека је

$$Q(\Gamma) = \int_\Gamma LdP, \ \Gamma \in \mathcal{A}$$

вероватносна мера на $\mathcal{A}$. Мера $Q$ је апсолутно непрекидна у односу на меру $P$ $(Q \ll P)$ и важи

$$L = \frac{dQ}{dP}.$$

Случајна величина $L$ се назива **извод Радон**[5] **-Никодима**[6] мере $Q$ по мери $P$. Извод Радон-Никодима има важну улогу, на пример, у статистици јер случајна величина $L$ представља количник верodостојности код дифузионих процеса.

**Дефиниција 1.1.13.** *Мера* $P$ *је екстремна на* $\mathcal{A}$ *ако из* $P = a_1Q_1 + a_2Q_2$*,* $a_1, a_2 \in (0,1), a_1 + a_2 = 1$*, следи* $P = Q_1 = Q_2$.

У наставку се уводи класа случајних времена, која се називају времена заустављања и која представљају један од најважнијих појмова у Теорији случајних процеса.

Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа са филтрацијом $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0, \infty)\}$ и нека је $I = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ индексни скуп.

Случајна промењлива у ширем смислу је мерљиво пресликавање из $(\Omega, \mathcal{A})$ на $([-\infty, +\infty], \mathcal{B}([-\infty, +\infty]))$.

[5] Johann Karl August Radon, 1887-1956, аустријски математичар
[6] Otton Marcin Nikodym, 1887-1974, пољски математичар

**Дефиниција 1.1.14.** *Нека је $T : \Omega \to [0, +\infty]$ случајна променљива у ширем смислу на простору $(\Omega, \mathcal{A})$. Таква случајна променљива се назива* **случајно време** *(енгл. random time).*

**Дефиниција 1.1.15.** *Случајно време $T$ је* **време заустављања** *(енгл. stopping time) или време Маркова[7] (енгл. Markov time) у односу на филтрацију $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ ако*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ \{T \leq t\} = \{\omega : T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

*Случајно време $T$ се назива* **опционо време** *(енгл. optional time; weak stopping time) филтрације $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ ако*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \{\omega : T(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

**Напомена 1.1.2.** *Дефиниција времена заустављања је природна јер се у тренутку $t$ реализује само $T \wedge t = \min(T, t)$, па је природно претпоставити $\mathcal{F}_t$-мерљивост за свако $t$. Време заустављања је случајно време $T$ такво да догађај „$T$ се реализовало до тренутка $t$" зависи само од прошлости до тренутка $t$, а не од било које информације о будућности.*

У наставку су дате основне особине времена заустављања при чему су сва времена заустављања у односу на филтрацију $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+\}$.

**Лема 1.1.2.** *Нека су $S$ и $T$ времена заустављања. Тада су и $S \wedge T = \min(S, T)$ и $S \vee T = \max(S, T)$ времена заустављања. Ако је $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ времена заустављања, тада су и $\bigwedge_n T_n$ и $\bigvee_n T_n$ времена заустављања.*

За време заустављања $T$ поставља се проблем описивања догађаја (информација) приспелих до тренутка $T$. Ако је $A$ догађај о чијој се реализацији или нереализацији одлучује у случајном тренутку $T$, информација о томе ће бити доступна само у времену после $T$, односно за свако $t$ за које је $T \leq t$. То значи да су догађаји $A \cap \{T \leq t\}$ и $A^c \cap \{T \leq t\}$ из $\sigma$-алгебре $\mathcal{F}_t$ за свако $t \geq 0$. Како је

$$A^c \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{T \leq t\})^c \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ t \geq 0, \tag{1.3}$$

довољно је само разматрати догађаје $A \cap \{T \leq t\}, \ t \geq 0$. Тако се уводи наредна дефиниција.

[7] Andrei Andreyevich Markov, 1856-1922, руски математичар

**Дефиниција 1.1.16.** *Нека је $T$ време заустављања у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+\}$. Тада је*

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{A} : \; A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \; t \geq 0\},$$

*$\sigma$-алгебра догађаја који су се реализовали до случајног времена $T$.*

Слично,

$$\mathcal{F}_{T+} = \{A \in \mathcal{A} : \; A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}, \; t \geq 0\}.$$

Непосредно се закључује да је $\mathcal{F}_T$ $\sigma$-алгебра из чињеница: $\Omega \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$; ако $A \in \mathcal{F}_T$, тада је $A^c \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ на основу (1.3); ако су $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_T$, тада је $\bigcup_k A_k \in \mathcal{F}_T$ јер је

$$\left(\bigcup_k A_k\right) \cap \{T \leq t\} = \bigcup_k (A_k \cap \{T \leq t\}) \in \mathcal{F}_t.$$

Јасно је да је $\mathcal{F}_T$ под$-\sigma$-алгебра од $\mathcal{F}_t$.

**Теорема 1.1.4.** *[15] Нека су $S$ и $T$ времена заустављања.*

*1) Ако је $S \leq T$ скоро сигурно, тада је $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*

*2) За све $A \in \mathcal{F}_S$ важи $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$. Ако је $X$ $\mathcal{F}_S$-мерљиво, тада је $1_{\{S<T\}}X$ $\mathcal{F}_T$-мерљиво.*

*3) $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.*

**Теорема 1.1.5.** *[15] Нека су $S$ и $T$ времена заустављања. Тада догађаји*

$$\{S < T\}, \; \{S = T\}, \; \{S > T\}, \; \{S \leq T\}, \; \{S \geq T\}$$

*припадају $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.*

Ако су $X$ и $Y$ càdlàg процеси, тада $X_t = Y_t$ скоро сигурно за свако $t$ имплицира да се процеси $X$ и $Y$ не разликују, као што је већ напоменуто. Како су фиксирана времена и времена заустављања, јасно је да ако је $X_T = Y_T$ скоро сигурно за свако коначно време заустављања $T$, тада се процеси $X$ и $Y$ не разликију.

**Дефиниција 1.1.17.** *За случајан процес $\{X_t, t \geq 0\}$ и време заустављања $T$ у односу на филтрацију* **F** *дефинише се* **процес заустављен у тренутку** *$T$ (енгл. stopped process) са $X^T = \{X_t^T, t \geq 0\}$ где је*

$$X_t^T = X_{t \wedge T} = X_t 1_{\{t<T\}} + X_T 1_{\{t \geq T\}}.$$

**Теорема 1.1.6.** *[60] Нека је $X = \{X_t, t \geq 0\}$ прогресивно мерљив процес. Ако је $T$ време заустављања у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, случајна променљива $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$ дефинисана на скупу $\{T < +\infty\} \in \mathcal{F}_T$ је $\mathcal{F}_T$-мерљива и процес $X^T$ заустављен у $T$ је прогресивно мерљив.*

На крају овог дела наводимо још нека запажања.

Нека су $S$ и $T$ времена заустављања у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ и нека је $Z$ интеграбилна случајна променљива таква да је $E[|Z|] < +\infty$. Тада важи
1) $E[Z|\mathcal{F}_T] = E[Z|\mathcal{F}_{S\wedge T}]$, скоро сигурно на $\{T \leq S\}$;
2) $E[E[Z|\mathcal{F}_T]|\mathcal{F}_S] = E[Z|\mathcal{F}_{S\wedge T}]$, скоро сигурно.

Више о временима заустављања се може наћи у литератури [14], [15], [42], [60].

## 1.2 Винеров процес

Винеров[8] процес (или процес Брауновог[9] кретања) има фундаменталну улогу у математичком описивању реалних појава у многим гранама природних и друштвених наука, посебно у физичким, техничким и економским наукама. Винеров процес са Пуасоновим процесом и марковским процесима чини базу теорије финансијске математике, инвестиција и осигурања.

Шкотски ботаничар Роберт Браун је, проучавајући кретање честица полена у течности, први регистровао њихово хаотично кретање због сталних судара са честицама посматраног флуида. Строго математичку формулацију за описивање посматраног феномена дао је Винер.

**Дефиниција 1.2.1.** *Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа са филтрацијом $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Реалан случајан процес $W = \{W_t, t \geq 0\}$ адаптиран у односу на филтрацију $\mathbf{F}$ се назива* **Винеров процес** *са параметром $\sigma^2$ или, краће, само Винеров процес ако важи:*
*а) $W_0 = 0$ скоро сигурно;*
*б) прираштај $W_t - W_s$ је независан од $\mathcal{F}_s$, за све $0 \leq s < t < \infty$;*
*в) прираштаји $W_t - W_s$ имају нормалну расподелу $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$, $\sigma > 0$, за све $0 \leq s < t < \infty$, тј.*

$$P\{W_t - W_s \leq x\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2(t-s)}\right\} \mathrm{d}y, \tag{1.4}$$

[8] Norbert Wiener, 1894-1964, амерички математичар и филозоф
[9] Robert Brown, 1773-1858, шкотски ботаничар

*г) за скоро свако $\omega \in \Omega$, функције $W_t = W_t(\omega)$ су непрекидне по $t$.*

Ако је у претходној дефиницији $\sigma^2 = 1$, процес $W$ је **стандардан Винеров процес** или **процес Брауновог кретања**.

На сличан начин се дефинише вишедимензиони Винеров процес.

**Дефиниција 1.2.2.** *Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа са филтрацијом $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Случајан процес $W = \{W_t, t \geq 0\}$, где је $W_t = (W_t^1, W_t^2, \ldots, W_t^d)$, $t \geq 0$, адаптиран у односу на филтрацију $\mathbf{F}$ је $d$-димензиони Винеров процес ако важи:*

*а) $W_0 = 0$, скоро сигурно;*

*б) прираштај $W_t - W_s$ је независан од $\mathcal{F}_s$, за све $0 \leq s < t < \infty$;*

*в) за све $0 \leq s < t < \infty$, прираштаји $W_t - W_s$ имају $d$-дименизону нормалну $\mathcal{N}_d(0, \sigma^2(t-s)I)$ расподелу, са очекивањем 0 и дифузионом матрицом $\sigma^2(t-s)I$, где је $I$ јединична матрица реда $d$.*

Дакле, координате Винеровог процеса су једнодимензиони међусобно независни Винерови процеси и за $d$-димензиони Винеров процес важе особине аналогне особинама једнодимензионог Винеровог процеса.

У наставку се наводе неке од особина Винеровог процеса у једнодимензионом случају које ће бити потребне у наставку рада. Средња вредност и дисперзија Винеровог процеса су, редом,

$$EW_t = 0, \ DW_t = \sigma^2 t,$$

за свако $t > 0$. Коваријациона функција је једнака

$$K(s,t) = \sigma^2 \min\{s, t\},$$

за произвољне $s, t > 0$.

Како за Винеров случајан процес $W$ важи $E\left[W_t - W_s\right]^2 = \sigma^2(t-s)$, следи да је $W$ средње квадратно непрекидан процес.

Локалне особине трајекторија Винеровог процеса могу бити од користи приликом разматрања понашања самог процеса.

**Теорема 1.2.1.** *Свака трајекторија сепарабилног Винеровог процеса је униформно непрекидна на сваком коначном интервалу, с вероватноћом 1.*

Може се показати да, у одређеном смислу, важи и обрнут резултат.

**Теорема 1.2.2.** *Нека је $W = \{W_t, t \geq 0\}$ случајан процес са независним прираштајима. Ако су трајекторије тог процеса непрекидне с вероватноћом 1, тада његови прираштаји имају нормалну расподелу.*

Следеће особине Винеровог процеса указују на фракталне особине процеса, да сажимањем и инверзијом временског интервала трајекторије задржавају своје особине. Те особине су посебно значајне у применама.

**Теорема 1.2.3.** *Ако је $W = \{W_t, t \geq 0\}$ Винеров процес, тада су и следећи процеси Винерови:*

*1) $X = \{X_t, t \geq 0\},\ X_t = W_{t+s} - W_s$ за свако $s > 0$ и процес $X$ је независан од $\sigma\{W_u, u \leq s\}$;*

*2) $Y = \{Y_t, t \geq 0\},\ Y_t = -W_t$ – особина симетрије;*

*3) $Z = \{Z_t, t \geq 0\},\ Z_t = cW_{t/c^2},\ (c \neq 0)$ – особина множења скаларом;*

*4) $U = \{U_t, t \geq 0\},\ U_t = tW_{1/t},\ (t > 0),\ U_0 = 0$ скоро сигурно – особина инверзије.*

Доказ се може наћи у [60].

Једна од најважнијих особина Винеровог процеса која је битна за дефинисање интеграла по Винеровом процесу је дата у наредној теореми.

**Теорема 1.2.4.** *Нека је $W = \{W_t, t \geq 0\}$ Винеров процес. Скоро све његове трајекторије су недиференцијабилне за свако $t \geq 0$.*

**Последица 1.2.1.** *Скоро све трајекторије Винеровог процеса имају неограничене варијације на сваком коначном интервалу.*

Наредна теорема прецизно показује колике могу бити осцилације (или „квадратне варијације”) трајекторија процеса $W$.

**Теорема 1.2.5.** *Нека је $W = \{W_t, t \geq 0\}$ стандардан Винеров процес и нека је $s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ произвољно разбијање интервала $[s,t] \subset R$такво да $\delta_n = \max(t_k - t_{k-1}) \to 0$ кад $n \to \infty$. Тада*

$$\sum_{k=0}^{n-1} [W_{t_{k+1}} - W_{t_k}]^2 \overset{с.к.}{\to} t - s, \quad n \to \infty. \tag{1.5}$$

*Ако је $\sum_n \delta_n < \infty$, тада је ова конвергенција скоро сигурна*

$$\sum_{k=0}^{n-1} [W_{t_{k+1}} - W_{t_k}]^2 \overset{с.с.}{\to} t - s, \quad n \to \infty,$$

*тј.*

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} [W_{t_{k+1}} - W_{t_k}]^2 = t - s\right\} = 1.$$

Доказ теореме се може наћи у [49].

## 1.3 Мартингали са непрекидним параметром

У овом делу ће се разматрати главни резултати теорије мартингала, јер су мартингали једна од најважнијих класа случајних процеса, који имају битну улогу у многим применама Теорије случајних процеса. Сва разматрања се односе на мартингале са непрекидним параметром у једнодимензионом случају, с тим што у аналогном облику важе и за вишедимензионе случајне процесе.

Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа са филтрацијом $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Надаље ће се увек претпостављати да је простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **комплетан** у односу на меру $P$ и да је филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ непрекидна здесна.

**Дефиниција 1.3.1.** *Реалан случајан процес* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *је* **мартингал** *у односу на филтрацију* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *(у скраћеном запису* $\mathbf{F}$*-мартингал), или* $\{X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *мартингал, ако важи:*

*а) процес* $X$ *је адаптиран у односу на филтрацију* $\mathbf{F}$*;*

*б)* $E|X_t| < +\infty$, *за свако* $t \geq 0$;

*в)* $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ *скоро сигурно, за* $0 \leq s < t < +\infty$.

Ако уместо в) важи

в') $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$ скоро сигурно, за $0 \leq s < t < +\infty$ процес $X_t$ је **супермартингал**,

а ако важи

в") $E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$ скоро сигурно, за $0 \leq s < t < +\infty$ процес $X_t$ је **субмартингал**.

Очигледно да је $X$ субмартингал ако и само ако је $-X$ супермартингал.

Наведене особине мартингала се чувају и пресликавањем функција које припадају одређеним класама. Тако, на пример, уколико је $X = \{X_t, t \geq 0\}$ мартингал и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ конвексна функција за коју важи да $f(X_t)$ има коначно очекивање (тј. $f(X_t) \in L^1(\Omega), t \geq 0$), тада је процес $\{f(X_t), t \geq 0\}$ субмартингал. Исти закључак важи за субмартингале, ако је, додатно, конвексна функција $f$ растућа.

Особина мартингала (респективно, супермартингала, субмартингала) која се често користи је и да је функција $t \to E(X_t)$ константна (респективно, опадајућа, растућа) функција.

Субмартингали су шира класа од мартингала, који задржавају многе добре особине мартингала.

Процес Брауновог кретања представља најпознатији пример мартингала са непрекидним параметром.

**Дефиниција 1.3.2.** *Мартингал* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *се назива* $L^p$*-мартингал,* $p \geq 1$ *ако је* $E|X_t|^p < \infty$ *за свако* $t \geq 0$.

**Дефиниција 1.3.3.** *Мартингал* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *је* $L^p$*-ограничен (за неко* $p \geq 1$*) ако је* $\sup_{t\geq 0} E|X_t|^p < \infty$.

Мартингал $\{X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ је непрекидан (здесна) ако и само ако филтрација $\mathbf{F}$ задовољава уобичајене услове и све трајекторије процеса $X$ су непрекидне (здесна). Десна непрекидност мартингала је битна за доказивање опционе теореме која представља једну од најважнијих особина мартингала.

**Пример 1.3.1.** *Нека је* $W = \{W_t, t \geq 0\}$ *процес Брауновог кретања на* $\mathbb{R}$ *са* $W_0 \in L^p$ *за неко* $p \in [1, \infty)$ *и нека је* $\mathbf{F}$ *природна филтрација за* $W$ *која задовољава уобичајене услове. Тада је* $\{W_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *непрекидан* $L^p$*-мартингал. Ако је, додатно,* $p \geq 2$ *тада је* $\{W_t^2 - t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *непрекидан мартингал.*

Ако је $\{X_t, \mathcal{F}_t\}$ мартингал и ако филтрација $\mathbf{F}$ задовољава уобичајене услове, тада постоји непрекидна здесна модификација мартингала $X$, али она не мора бити непрекидна модификација.

У наставку су наведене неке важне неједнакости, које важе за (суб)мартингале.

**Пропозиција 1.3.1.** *1) Нека је* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *субмартингал чије су трајекторије непрекидне здесна. Тада, за свако* $\lambda > 0$ *и* $0 \leq s \leq t$*, важи*

$$\lambda P\left\{\sup_{s\leq u\leq t} X_u \geq \lambda\right\} \leq EX_t^+$$

*и*

$$\lambda P\left\{\inf_{s\leq u\leq t} X_u \leq -\lambda\right\} \leq EX_t^+ - EX_s.$$

*2) Скоро све трајекторије десно непрекидног субмартингала* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *су ограничене на компактним интервалима и немају прекиде друге врсте (леве граничне вредности постоје с.с. за свако* $t > 0$*). За скоро све трајекторије скуп тачака прекида је највише пребројив.*

*3) Ако је* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *ненегативан мартингал и* $p > 1$*, важи* **Дубова неједнакост**

$$||\sup_{s\leq u\leq t} X_u||_p \leq \frac{p}{p-1}||X_t||_p,$$

*где је* $||\cdot||_p = (E|\cdot|^p)^{1/p}$*. Специјално, ако је* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *десно непрекидан мартингал са* $EX_t^2 < \infty$ *за свако* $t > 0$*, тада је*

$$E\left[\sup_{s\leq u\leq t} X_u^2\right] \leq 4EX_t^2.$$

Део 2) претходног тврђења описује регуларност трајекторија десно непрекидних субмартингала.

Наредна теорема даје потребне и довољне услове који оправдавају чињеницу да се надаље пажња посвећује càdlàg субмартингалима. Доказ теореме се може наћи у [59].

**Теорема 1.3.1.** *Нека је* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *субмартингал и нека је* $\mathbf{F}$ *филтрација која задовољава уобичајене услове. Нека је функција* $t \to EX_t$ *непрекидна здесна на* $[0, \infty)$*. Тада постоји модификација* $Y$ *од* $X$ *са càdlàg трајекторијама која је, такође, субмартингал у односу на* $\mathbf{F}$*.*

**Последица 1.3.1.** *Ако је* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *мартингал, тада постоји јединствена модификација* $Y$ *од* $X$ *која је càdlàg.*

Како сви мартингали имају десно непрекидне модификације, надаље ће се претпостављати да се ради са десно непрекидним модификацијама без посебног наглашавања. Треба нагласити да из Леме 1.1.1 и Последице 1.3.1 следи да је мартингал непрекидан здесна càdlàg.

Приметимо да је мартингал дефинисан на интервалу $[0, \infty)$, тј. за коначно $t$, а не и за $t = \infty$. Често је могуће проширити Дефиницију 1.3.1 за $t = \infty$.

**Дефиниција 1.3.4.** *Нека је* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *мартингал. Ако постоји* $\mathcal{F}_\infty$*-мерљива случајна величина* $X_\infty$ *таква да за свако* $t \geq 0$ *важи*

$$E[X_\infty | \mathcal{F}_t] = X_t \text{ скоро сигурно},$$

*каже се да је* $X$ **мартингал са задњим елементом** $X_\infty$*, као и да* $X_\infty$ **затвара** *мартингал* $X$*. Слично се дефинишу субмартингали и супермартингали са задњим елементом.*

Јасно је да случајна величина која затвара мартингал није нужно јединствена. Услов униформне интеграбилности мартингала је довољан да мартингал буде затворен. Прецизније, Теорема 1.3.2 даје довољне услове да мартингал буде затворен.

**Дефиниција 1.3.5.** *Случајан процес* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *је* **униформно** *(или* **равномерно) интеграбилан** *ако важи*

$$\lim_{c \to \infty} \sup_{t \geq 0} E\, |X_t|\, 1_{(|X_t| > c)} = \lim_{c \to \infty} \sup_{t \geq 0} \int_{\{|X_t| \geq c\}} |X_t| \mathrm{d}P = 0.$$

**Теорема 1.3.2.** *[59] Нека је $X$ мартингал непрекидан здесна који је униформно интеграбилан. Тада $Y = \lim_{t\to\infty} X_t$ постоји скоро сигурно, $E|Y| < \infty$ и $Y$ затвара $X$ као мартингал.*

**Лема 1.3.1.** *Ако је $X = \{X_t, t \in T\}$ коначна фамилија интеграбилних случајних променљивих, тада је $X$ униформно интеграбилан процес.*

**Теорема 1.3.3.** *[59] Нека је $X = \{X_t, t \geq 0\}$ мартингал (непрекидан здесна). Тада је $X$ униформно интеграбилан процес ако и само ако важи: $Y = \lim_{t\to\infty} X_t$ постоји скоро сигурно, $E|Y| < \infty$ и $\{X_t, 0 \leq t \leq \infty\}$ је мартингал, где је $X_\infty = Y$.*

Простор свих непрекидних мартингала са непрекидним временом (параметром) биће означен са $\mathcal{M}_c$. Са $\mathcal{M}_c^u$ се означавају елементи из $\mathcal{M}_c$ који су униформно интеграбилни, а $\mathcal{M}_c^b$ означава елементе из $\mathcal{M}_c^u$ који су ограничени у смислу да постоји константа $c > 0$ таква да је $|X_t| \leq c$ за свако $t > 0$. Јасно је да су $\mathcal{M}_c$, $\mathcal{M}_c^u$ и $\mathcal{M}_c^b$ векторски простори.

У Теорији мартингала и њеним применама од фундаменталног значаја су граничне теореме којима се описују конвергенције мартингала. Таква су наредна два резултата.

**Теорема 1.3.4.** *Нека је $X = \{X_t, t \geq 0\}$ субмартингал непрекидан здесна за који важи $\sup_{t\geq 0} EX_t^+ < \infty$. Тада постоји $\mathcal{F}_\infty$-мерљива случајна променљива $X_\infty$ са $E|X_\infty| < \infty$ таква да $X_t \xrightarrow{c.c.} X_\infty$, када $t \to \infty$. Ако је $X$ још и униформно интеграбилан, тада важи $X_t \xrightarrow{L^1} X_\infty$, када $t \to \infty$ и $E[X_\infty|\mathcal{F}_t] \geq X_t$ скоро сигурно за свако $t \geq 0$.*

**Теорема 1.3.5.** *Нека је $X = \{X_t, t \geq 0\}$ мартингал непрекидан здесна. Тада је $X$ униформно интеграбилан ако и само ако постоји интеграбилна случајна променљива $Z$ таква да је $E[Z|\mathcal{F}_t] = X_t$ скоро сигурно за свако $t \geq 0$. У том случају важи $X_t \xrightarrow{c.c.} X_\infty$ и $X_t \xrightarrow{L^1} X_\infty$, када $t \to \infty$, где је $X_\infty = E[Z|\mathcal{F}_\infty]$.*

Наредни резултати указују на чињеницу да субмартингал и мартингал задржавају своје основне карактеристике и у случајним временским тренуцима.

**Теорема 1.3.6.** *(***Теорема о опционом заустављању***)*[10] *Нека је $X = \{X_t, t \geq 0\}$ субмартингал непрекидан здесна са задњим елементом $X_\infty$ (тј. $E[X_\infty|\mathcal{F}_t] \geq X_t$, скоро сигурно за свако $t \geq 0$) и нека су $S$ и $T$ времена заустављања таква да је $S \leq T$. Тада је $E[X_T|\mathcal{F}_S] \geq X_S$ скоро сигурно.*

[10] Теорема је позната у литератури као Doob's Optional sampling (stopping) theorem

Доказ теореме се може наћи у [15].

**Напомена 1.3.1.** *Услов у Теореми 1.3.6 да $X$ има задњи елемент, може бити замењен рестрикцијом на ограничена времена заустављања $S \leq T$ одакле се добија $EX_S \leq EX_T$. У ствари, ако је процес $X$ адаптиран и непрекидан здесна за који је $E|X_t| < \infty$ и ако је $EX_S \leq EX_T$ за сва ограничена времена заустављања за које је $S \leq T$, тада је $X$ субмартингал. То следи за $t > s$ ако је $S = s$, $T = t1_F + s1_{F^c}$ за произвољно $F \in \mathcal{F}_s$.*

**Последица 1.3.2.** *Нека је $X = \{X_t, t \geq 0\}$ субмартингал непрекидан здесна и нека су $S \leq T$ времена заустављања. Тада је заустављен процес $X^T$ такође субмартингал и важи $E[X_{T\wedge t}|\mathcal{F}_S] \geq X_{S\wedge t}$ скоро сигурно за свако $t \geq 0$.*

Теорема о опционом заустављању за мартингале је кључна за многе примене у осигурању и финансијама.

**Теорема 1.3.7.** *[59] Нека је $X = \{X_t, t \geq 0\}$ мартингал непрекидан здесна, са задњим елементом $X_\infty$. Нека су $S$ и $T$ времена заустављања таква да је $S \leq T$ скоро сигурно. Тада су $X_T$ и $X_S$ интеграбилни и*

$$E[X_T|\mathcal{F}_S] = X_S \quad \text{скоро сигурно.}$$

Ако је $X$ адаптиран càdlàg процес и $T$ време заустављања, тада је заустављен процес $X^T$ такође адаптиран. Заустављен мартингал је такође мартингал што се показује у наредној теореми.

**Теорема 1.3.8.** *[59] Нека је $X = \{X_t, t \geq 0\}$ униформно интеграбилан мартингал непрекидан здесна и нека је $T$ време заустављања. Тада је $X^T = \{X_{t\wedge T}, 0 \leq t \leq \infty\}$ такође униформно интеграбилан мартингал непрекидан здесна.*

Из претходне теореме следи да је $X^T$ униформно интеграбилан $\mathbf{F}$-мартингал. Тривијална последица Теореме о опционом заустављању је да је $X^T = X_{t\wedge T}$ мартингал у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_{t\wedge T}, t \geq 0\}$.

**Последица 1.3.3.** *Нека је $Y$ интеграбилна случајна величина и нека су $S$ и $T$ времена заустављања. Тада је*

$$\begin{aligned} E[E[Y|\mathcal{F}_S]|\mathcal{F}_T] &= E[E[Y|\mathcal{F}_T]|\mathcal{F}_S] \\ &= E[Y|\mathcal{F}_{S\wedge T}]. \end{aligned}$$

Фундаменталан резултат у теорији мартингала, посебно у стохастичкој интеграцији, представља декомпозиција субмартингала на збир два случајна процеса од којих је један мартингал, а други скоро сигурно растући процес.

Пре навођења теореме, треба увести још неке појмове.

Следећи концепт појачава особину униформне интеграбилности субмартингала.

**Дефиниција 1.3.6.** *а) Нека је $\mathcal{T}$ класа свих времена заустављања $T$ филтрације* **F** *таквих да је $P\{T < \infty\} = 1$.*

*б) Нека је $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ и нека је $\mathcal{T}_a$ класа свих времена заустављања $T$ филтрације* **F** *таквих да је $P\{T \leq a\} = 1$.*

*в) Процес $X = \{X_t, t \geq 0\}$ адаптиран у односу на филтрацију* **F** *је из класе $D$ ако је фамилија $\{X_T, T \in \mathcal{T}\}$ униформно интеграбилна.*

*г) Каже се да је $X$ из класе $DL$ ако је за свако $a \in [0, \infty)$ фамилија $\{X_T, T \in \mathcal{T}_a\}$ униформно интеграбилна.*

Јасно је да важи $D \subseteq DL$.

**Дефиниција 1.3.7.** *а) Адаптиран процес $A = \{A_t, t \geq 0\}$ је* **растући** *ако је $A_0 = 0$ и ако су све трајекторије $t \to A_t(\omega)$ неопадајуће функције, непрекидне здесна и ако је $EA_t < \infty$ за свако $t$.*

*Растући процес је интеграбилан ако је $EA_\infty < \infty$, где је $A_\infty = \lim_{t\to\infty} A_t$ (случајна величина $A_\infty$ постоји за растуће процесе).*

*б) $A$ је* **процес са коначном варијацијом** *ако скоро све његове трајекторије имају коначну варијацију на сваком компактном интервалу из $\mathbb{R}$.*

*в) Растући процес $A$ је* **природан процес** *ако за сваки ограничен и непрекидан здесна мартингал $M = \{M_t, t \geq 0\}$ важи*

$$E\int_{(0,t]} M_s \mathrm{d}A_s = E\int_{(0,t]} M_{s-} \mathrm{d}A_s, \ t \geq 0.$$

Интеграли $\int_{(0,t]} M_s \mathrm{d}A_s$ и $\int_{(0,t]} M_{s-} \mathrm{d}A_s$ у претходној једнакости су Лебег-Стилтјесови интеграли по трајекторијама за свако $t \geq 0$.

Нека је $A = \{A_t, t \geq 0\}$ процес коначне варијације и нека је

$$|A|_t = \sup_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{2^n} \left| A_{\frac{tk}{2^n}} - A_{\frac{t(k-1)}{2^n}} \right|. \tag{1.6}$$

Тада је $|A|_t < \infty$ скоро сигурно и то је растући процес.

**Дефиниција 1.3.8.** *Нека је $A = \{A_t, t \geq 0\}$ процес са коначном варијацијом.* **Процес тоталне варијације** *$|A| = \{|A|_t, t \geq 0\}$ је растући процес дефинисан са (1.6).*

Следећи резултат је добро позната **Дуб-Мејерова декомпозиција** коју је увео Мејер[11] у непрекидном случају, а Дуб у дискретном случају.

**Теорема 1.3.9.** *([9], [59]) Нека филтрација* $\mathbf{F}$ *задовољава уобичајене услове и нека је* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *субмартингал из класе* $DL$ *непрекидан здесна. Тада* $X$ *има јединствено разлагање (декомпозицију) облика*

$$X_t = M_t + A_t, \tag{1.7}$$

*где је* $M = \{M_t, t \geq 0\}$ *мартингал непрекидан здесна, а* $A = \{A_t, t \geq 0\}$ *природан растући процес у односу на филтрацију* $\mathbf{F}$*. Даље, ако је* $X$ *из класе* $D$*, тада је* $M$ *униформно интеграбилан мартингал, а процес* $A$ *је интеграбилан.*

Из Теореме 1.3.9 следи да се процеси $M$ и $A$ из (1.7) могу изабрати тако да буду непрекидни здесна. За ненегативне процесе важи да ако је $X$ непрекидан процес, онда ће и процеси $M$ и $A$ бити непрекидни. Међутим, може се доказати наредни јачи резултат.

**Теорема 1.3.10.** *Претпоставимо да је субмартингал* $X = \{X_t, t \geq 0\}$*, који задовољава услове Теореме 1.3.9, додатно и слабо непрекидан слева, тј. такав да важи* $\lim_{n\to\infty} EX_{T^n} = EX_T$ *за све ограничене растуће низове времена заустављања* $T^n$ *са границом* $T$*. Тада је процес* $A = \{A_t, t \geq 0\}$ *из једначине (1.7) непрекидан.*

Наводимо у овом делу још један важан резултат.

**Пропозиција 1.3.2.** *Нека је* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *процес који задовољава услове Теореме 1.3.9 са Дуб-Мејеровом декомпозицијом* $X = M + A$ *и нека је* $T$ *време заустављања. Заустављен процес* $X^T$ *такође задовољава услове Теореме 1.3.9 и његова Дуб-Мејерова декомпозиција је дата са*

$$X^T = M^T + A^T.$$

## 1.3.1 Квадратно интеграбилни мартингали

Као и до сада, сматра се да је дат простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ са филтрацијом $\mathbf{F}$ која задовољава уобичајене услове.

[11] Paul André Meyer, 1934-2003, француски математичар

**Дефиниција 1.3.9.** *Мартингал $X$ непрекидан здесна је* **квадратно интеграбилан** *ако је $EX_t^2 < \infty$ за свако $t \geq 0$. Ако је још и $EX_\infty^2 < \infty$, тада се $X$ назива $L^2$* **мартингал**. *Са $\mathcal{M}^2$ биће означена класа свих квадратно интеграбилних мартингала који почињу од нуле ($X_0 = 0$), а са $\mathcal{M}_c^2$ подкласа скоро сигурно непрекидних квадратно интеграбилних мартингала.*

Јасно је да је сваки $L^2$ мартингал квадратно интеграбилан.

**Дефиниција 1.3.10.** *Нека су $X$ и $Y$ $L^2$ мартингали из класе $\mathcal{M}^2$. За свако $t \geq 0$ нека је $||X||_t = (EX_t^2)^{1/2}$. Норма и метрика се дефинишу са*

$$||X|| = (EX_\infty^2)^{1/2}, \quad d(X,Y) = ||X - Y||.$$

**Пропозиција 1.3.3.** *Метрички простор $(\mathcal{M}^2, d)$ је комплетан. Простор $\mathcal{M}_c^2$ је затворен (у односу на метрику $d$) потпростор од $\mathcal{M}^2$, па је и комплетан.*

**Лема 1.3.2.** *Нека $X \in \mathcal{M}_c^2$ и нека је $T$ време заустављања. Тада важи $X^T \in \mathcal{M}_c^2$ .*

За непрекидне ограничене мартингале дефинише се процес квадратне варијације.

Нека је мартингал $X \in \mathcal{M}^2$. Тада је $X^2$ ненегативан субмартингал. Применом Дуб-Мејерове декомпозиције добија се да је

$$X^2 = M + A, \tag{1.8}$$

где је $M$ мартингал који почиње од нуле, а $A$ природни растући процес. Из Теореме 1.3.10 следи да су процеси $M$ и $A$ непрекидни ако $X \in \mathcal{M}_c^2$.

**Дефиниција 1.3.11.** *За процес $X$ из $\mathcal{M}^2$, процес $A$ из декомпозиције (1.8) назива се* **квадратна варијација**, **карактеристика процеса** *или компензатор мартингала $X$ и означава се са $\langle X \rangle$. Дакле, $\langle X \rangle$ је јединствен природни растући процес за који је $X^2 - \langle X \rangle$ мартингал.*

Наредни резултат се често користи у применама.

**Лема 1.3.3.** *За $X, Y \in \mathcal{M}^2$, важи Шварцова неједнакост*

$$\langle X, Y \rangle_t^2 \leq \langle X \rangle_t \langle Y \rangle_t \quad \text{скоро сигурно.}$$

Као непосредна последица Пропозиције 1.3.2 добија се следећи резултат.

**Пропозиција 1.3.4.** *Нека је $X$ мартингал из $\mathcal{M}^2$ и $T$ време заустављања. Тада се процеси $\langle X^T \rangle$ и $\langle X \rangle^T$ не разликују.*

Појам квадратне варијације за процес $\langle X \rangle$ биће објашњен за процес $X \in \mathcal{M}_c^2$.

Нека је $\Pi : 0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = t$ подела интервала $[0, t]$. За процес $X$ се дефинише

$$V_t(X, \Pi) = \sum_{j=1}^{n} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2.$$

$V_t(X, \Pi)$ је $\mathcal{F}_t$-мерљиво ако је процес $X$ адаптиран.

**Лема 1.3.4.** *Нека је $M \in \mathcal{M}^2$ и $t > 0$. Тада за свако $t > s$ важи*

$$\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \,|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 |\mathcal{F}_s\right] \tag{1.9}$$

*и*

$$\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 - \langle M \rangle_t + \langle M \rangle_s |\mathcal{F}_s\right] = 0. \tag{1.10}$$

Може се показати да важи следећи резултат.

**Пропозиција 1.3.5.** *Нека је $X \in \mathcal{M}_c^2$. Тада $V_t(X, \Pi)$ конвергира у вероватноћи ка $\langle X \rangle_t$ кад $||\Pi|| = \max |t_{k+1} - t_k| \to 0$, тј. за све $\varepsilon > 0, \eta > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да $P\{|V_t(X, \Pi) - \langle X \rangle_t| > \eta\} < \varepsilon$ кад $||\Pi|| < \delta$.*

За произвољан процес $X$ на скупу правоугаоника $(s, t] \times A, A \in \mathcal{F}_s$ дефинише се функција скупа

$$\mu_X((s, t] \times A) = E[1_A(X_t - X_s)], \;\; \mu_X(\{0\} \times A) = 0, A \in \mathcal{F}_0.$$

Ако је $X$ мартингал, тада је $\mu_X = 0$. Ако је $X$ субмартингал, тада је $\mu_X \geq 0$. Познато је да, ако је $X$ $L^2$ мартингал, тада је процес $X^2$ субмартингал, па је $\mu_{X^2} \geq 0$. Прецизније, за $A \in \mathcal{F}_s$ и $s \leq t$ важи

$$\mu_{(X)^2}((s, t] \times A) = E[1_A(X_t - X_s)^2].$$

**Дефиниција 1.3.12.** *Ако функција скупа $\mu_X$ има јединствено проширење на $\sigma$-алгебру $B([0, \infty)) \times \mathcal{A}$ које је мера, тада се $\mu_X$ назива* **Долеанс**[12] **мера** *од $X$.*

[12]Catherine Doléans-Dade, 1942-2004, француско-америчка математичарка

Ова мера је добила назив по француској математичарки која ју је прва конструисала (видети [10], [11]).

Може се показати да, ако је $M$ $L^2$-мартингал непрекидан здесна тада постоји јединствена Долеанс мера $\mu_M$ (видети Напомену 1.4.1).

Помоћу квадратне варијације за квадратно интеграбилне мартингале може се дефинисати **квадратна коваријација** (која се назива и **крос-варијација** или **узајамна варијација**) између два квадратно интеграбилна мартингала $X$ и $Y$. То је процес $\langle X, Y\rangle$ дефинисан формулом

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{4}(\langle X+Y, X+Y\rangle - \langle X-Y, X-Y\rangle) = \frac{1}{2}(\langle X+Y, X+Y\rangle - \langle X\rangle - \langle Y\rangle).$$

Може се приметити да је процес квадратне коваријације процес са скоро сигурно ограниченом варијацијом. Поред тога важи наредно тврђење.

**Пропозиција 1.3.6.** *За $X, Y \in \mathcal{M}^2$ процес $\langle X, Y\rangle$ је јединствен процес који може да се напише као разлика два природна растућа процеса такав да је разлика од $XY$ и $\langle X, Y\rangle$ мартингал. Ако $X, Y \in \mathcal{M}_c^2$, тада је процес $\langle X, Y\rangle$ јединствен непрекидан процес ограничене варијације такав да је разлика од $XY$ и тог процеса мартингал.*

## 1.3.2 Локални мартингали

Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ фиксиран простор вероватноћа са филтрацијом $\mathbf{F}$ која задовољава уобичајене услове. Све особине, наведене у овом делу, дефинисане су у односу на филтрацију $\mathbf{F}$.

При доказивању неких сложених проблема у стохастичкој анализи често се примењује техника избора одговарајућих случајних времена при чему се проблем своди на једноставнији. Та техника је стандардна техника и често се користи за дефинисање ширих класа процеса у односу на постојећу класу, које при томе имају многе заједничке особине са полазном класом процеса.

У реалној анализи се каже да нека особина важи локално ако важи на сваком компактном подскупу посматраног тополошког простора. На реалној правој је довољно да особина важи на сваком затвореном ограниченом интервалу $[0, t]$ за свако $t$. Често се, као у случају локалне интеграције, разматра да ли одређена особина важи на интервалима $[0, t_n]$ где $t_n \to \infty$. У стохастичкој анализи се захтева да горња граница интервала буде мерљива у односу на посматрану филтрацију као у наредној дефиницији.

**Дефиниција 1.3.13.** *Низ времена заустављања* $(T^n)_{n\geq 1}$ *се назива* **локализујући** *или* **фундаменталан** *низ ако је* $T^n \geq T^{n-1}$ *за све* $n \geq 1$ *и ако је* $\lim_{n\to\infty} T^n = \infty$ *скоро сигурно. Ако је* $\mathcal{C}$ *класа процеса који имају одређену особину, тада се (обично) са* $\mathcal{C}^{loc}$ *означава класа процеса* $X$ *за које постоји локализујући низ времена заустављања* $(T^n)_{n\geq 1}$*, такав да сви заустављени процеси* $X^{T^n} = \{X_{t\wedge T^n}, t \geq 0\}$ *припадају класи* $\mathcal{C}$*.*

Код локализације се јавља проблем модификације случајне величине $X_0$, јер сваки заустављен процес $X^{T^n}$ у тренутку $t = 0$ има исту вредност $X_0$. За превазилажење тог проблема неки аутори користе процес $X^{T^n} 1_{\{T^n>0\}}$ уместо $X^{T^n}$ код локализације или се локализује процес $X - X_0$ уместо процеса $X$. Са становишта стохастичке анализе може се претпоставити да сваки локални мартингал има вредност нула у тренутку $t = 0$, јер се испитују семимартингали - процеси облика $X = X_0 + A + M$, где је $M$ локални мартингал, а $A$ је процес са трајекторијама ограничене варијације (на коначним интервалима) и $A_0 = 0$ скоро сигурно.

Наредна дефиниција проширује класу мартингала.

**Дефиниција 1.3.14.** *Адаптиран случајан процес непрекидан здесна се назива* **локални мартингал** *ако постоји локализујући низ времена заустављања* $(T^n)_{n\geq 1}$ *такав да је, за свако* $n$*, процес* $X^{T^n} = \{X_{t\wedge T^n}, t \geq 0\}$ *мартингал. Класа мартингала* $X$ *са* $X_0 = 0$ *скоро сигурно означава се са* $\mathcal{M}$*, а класа локалних мартингала* $X$ *за коју је* $X_0 = 0$ *скоро сигурно означава се са* $\mathcal{M}^{loc}$*. Подкласа непрекидних локалних мартингала* $X$ *са* $X_0 = 0$ *скоро сигурно означава се са* $\mathcal{M}_c^{loc}$*.*

**Лема 1.3.5.** *Важи да је* $\mathcal{M}_c^b \subseteq \mathcal{M}_c^2 \subseteq \mathcal{M}_c^u \subseteq \mathcal{M}_c \subseteq \mathcal{M}_c^{loc}$*.*

**Пример 1.3.2.** *Јасно је да је сваки càdlàg мартингал истовремено и локални мартингал (узети* $T^n \equiv n$*). Обрнуто у општем случају, наравно, не важи.*

Често је потребно одредити када је локални мартингал заправо мартингал. Наредни једноставан резултат који даје одговор на то питање укључује максимум функције.

Нека је $X_t^\star = \sup_{s\leq t} |X_s|$ и $X^\star = \sup_s |X_s|$.

**Теорема 1.3.11.** *[59] Нека је* $X$ *локални мартингал такав да је* $E[X_t^\star] < \infty$ *за свако* $t \geq 0$*. Тада је* $X$ *мартингал. Ако је* $E[X^\star] < \infty$*, тада је* $X$ *униформно интеграбилни мартингал.*

Још неки довољни услови да локални мартингал буде мартингал могу се наћи у [59].

Надаље ће се разматрати непрекидни мартингали, па треба навести још неке резултате.

**Пропозиција 1.3.7.** *Ако је $X$ непрекидан локални мартингал са $X_0 = 0$, тада постоји локализујући низ времена заустављања $(T^n)_{t\geq 1}$ таквих да су процеси $X^{T^n}$ ограничени мартингали.*

Познато је да је (непрекидан здесна) мартингал $X$ квадратно интеграбилан ако важи $EX_t^2 < \infty$. Слично, непрекидан здесна адаптиран процес $X$ се назива **локално квадратно интеграбилни** мартингал ако је $X_0 = 0$ и ако постоји локализујући низ времена заустављања $(T^n)_{n\geq 1}$ такав да је, за свако $n$, процес $X^{T^n}$ квадратно интеграбилан мартингал. Јасно је да су сви ти процеси локални мартингали.

Из Пропозиције 1.3.7 непосредно следи наредни резултат.

**Пропозиција 1.3.8.** *Нека је $X$ непрекидан локални мартингал са $X_0 = 0$ скоро сигурно. Тада је $X$ такође локално квадратно интеграбилан процес.*

Неке особине локалних мартингала су дате у наредним резултатима (више се може наћи [59] и [60]).

**Пропозиција 1.3.9.** *1) Локални мартингал класе $DL$ је мартингал.*
*2) Локални мартингал класе $D$ је униформно интеграбилан мартингал.*
*3) Сваки ненегативни локални мартингал је супермартингал.*

Иако локални мартингали у општем случају не морају имати коначан други моменат, може се дефинисати квадратна варијација процеса. У наставку се дефинише квадратна варијација за непрекидни локални мартингал. Поступак се заснива на чињеници да за локализујући низ времена заустављања $(T^n)_{n\geq 1}$ процес $X^{T^n}$ има процес квадратне варијације у смислу Дефиниције 1.3.11.

**Пропозиција 1.3.10.** *Нека $X \in \mathcal{M}_c^{loc}$. Тада постоји јединствен (до на еквивалентност у смислу Дефиниције 1.1.7) непрекидан процес $\langle X \rangle$ са скоро сигурно растућим трајекторијама тако да $X^2 - \langle X \rangle \in \mathcal{M}_c^{loc}$.*

**Последица 1.3.4.** *Ако $X, Y \in \mathcal{M}_c^{loc}$, тада постоји јединствен (до на еквивалентност) непрекидан процес $\langle X, Y \rangle$ чије су трајекторије ограничене варијације скоро сигурно тако да важи $XY - \langle X, Y \rangle \in \mathcal{M}_c^{loc}$.*

**Пропозиција 1.3.11.** *Нека $X, Y \in \mathcal{M}_c^{loc}$ и нека је $T$ време заустављања. Тада је $\langle X, Y \rangle^T = \langle X^T, Y \rangle = \langle X^T, Y^T \rangle$.*

У наредној леми су дате неке главне особине процеса квадратне варијације.

**Лема 1.3.6.** *Нека су $X, Y \in \mathcal{M}_c^{loc}$. Квадратна варијација и коваријација задовољавају следеће особине до на еквивалентност:*

*1)* $\langle X, X\rangle = \langle X\rangle$.

*2)* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *је симетрична и линеарна по сваком од агрумената.*

*3) За произвољно* $\alpha \in \mathbb{R}$, *важи* $\langle \alpha X\rangle = \alpha^2\langle X\rangle$.

*4)* $\langle X+Y\rangle = \langle X\rangle + 2\langle X, Y\rangle + \langle Y\rangle$.

Наредни добро познати резултат разматра како промена мере утиче на очување особина мартингала.

**Теорема 1.3.12.** *(***Теорема Гирсанова**[13]*) Нека су вероватносне мере* $P$ *и* $Q$ *еквивалентне на* $\mathcal{F}_\infty$. *Нека је* $\mathbf{D} = \{D_t, t \geq 0\}$ *мартингал са càdlàg трајекторијама, такав да, за* $t \geq 0$

$$D_t = \frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}_t.$$

*Претпоставимо да је* $\mathbf{D}$ *процес са непрекидним трајекторијама и* $L$ *јединствен непрекидан локални мартингал такав да* $D_t = \exp\left(L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right)$. *Тада, ако је* $M$ *неприкидан локални мартингал у односу на* $P$, *процес* $\tilde{M} = M - \langle M, L\rangle$ *је неприкидан локални мартингал у односу на* $Q$.

Доказ теореме се може наћи у [60].

## 1.4 Простор прогресивних процеса

Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ фиксиран простор вероватноћа са филтрацијом $\mathbf{F}$ која задовољава уобичајене услове. Све особине наведене у овом делу су дефинисане у односу на филтрацију $\mathbf{F}$ (нпр. адаптираност).

Нека процес $X$ задовољава услове мерљивости и нека је $A$ процес са коначном варијацијом за који је $A_0 = 0$. Тада је

$$\int_{[0,T]} X_t(\omega)\mathrm{d}A_t(\omega)$$

Лебег-Стилтјесов интеграл по $t$ (по свим трајекторијама). Наведени интеграл ће се често означавати са

$$\int_{[0,T]} X\mathrm{d}A.$$

[13] Igor Vladimirovich Girsanov, 1934-1967, руски математичар

Такође, користиће се ознака $\int_0^T$ уместо $\int_{[0,T]}$ ако процес $A$ има непрекидне трајекторије скоро сигурно.

Нека је, даље, $M \in \mathcal{M}_c^2$ и $\langle M \rangle$ јединствени непрекидан растући процес такав да је $M^2 - \langle M \rangle$ мартингал.

**Пример 1.4.1.** *Ако је $M$ процес Брауновог кретања на $\mathbb{R}$, процес квадратне варијације $\langle M \rangle$ се не разликује од процеса $\{t, t \in \mathbb{R}\}$.*

**Дефиниција 1.4.1.** *За мерљив, адаптиран процес $X$ дефинише се, за свако $T \in [0, \infty)$,*

$$||X||_{M,T} = \left( E \int_0^T X_t^2 \mathrm{d}\langle M \rangle_t \right)^{1/2} = \left( \int X^2 1_{[0,T]\times\Omega} \mathrm{d}\mu_M \right)^{1/2}. \tag{1.11}$$

Тада је

$$||X||_M = ||X||_{M,\infty} = \left( E \int_0^\infty X_t^2 \mathrm{d}\langle M \rangle_t \right)^{1/2} = \left( \int X^2 \mathrm{d}\mu_M \right)^{1/2}. \tag{1.12}$$

Може се приметити да је $|| \cdot ||_M$, у ствари, $L^2$-норма за Долеанс меру.

За два мерљива, адаптирана процеса $X$ и $Y$ каже се да су (M)-еквивалентни ако је $||X - Y||_M = 0$.

Нека је са $\mathcal{P}$ означена класа прогресивно мерљивих процеса за које је $||X||_{M,T} < \infty$ за свако $T \in [0, \infty)$.

**Напомена 1.4.1.** *Долеанс мера $\mu_M$ на $([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{A})$ се дефинише са*

$$\mu_M(A) = \int_\Omega \int_0^\infty 1_A(t, \omega) \mathrm{d}\langle M \rangle_t(\omega) P(d\omega) = E \int_0^\infty 1_A \mathrm{d}\langle M \rangle. \tag{1.13}$$

У терминима ове мере, на пример, важи

$$E \int_0^T X_t^2 \mathrm{d}\langle M \rangle_t = \int X^2 1_{[0,T]\times\Omega} \mathrm{d}\mu_M.$$

Није одмах јасно да ли $\mu_M$ из (1.13) дефинише меру на $([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{A})$. Интеграл из средине једнакости (1.13) је добро дефинисан. Питање је да ли је добијен израз $\mathcal{A}$-мерљив. Потребно је и да очекивање буде добро дефинисано. Одговор је потврдан ако је $A$ дисјунктна унија скупова облика $(a, b] \times F$ за $F \in \mathcal{A}$. Проширење од $\mu_M$ као мере на производ $\sigma$-алгебри $\mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{A}$ следи из Каратеодоријеве[14] теореме о продужењу мере.

[14]Constantin Carathéodory, 1873-1950, грчки математичар

**Напомена 1.4.2.** *Ако је време ограничено на* $[0, T]$*, функција* $|| \cdot ||_{M,T}$ *дефинише* $L^2$*-норму на простору мерљивих адаптираних процеса. Метрика је дефинисана са* $d_M(X, Y) := ||X - Y||_M$*. Процеси* $X$ *и* $Y$ *су еквивалентни ако и само ако је* $\int_0^T (X - Y)^2 \mathrm{d}\langle M \rangle = 0$ *скоро сигурно за свако* $T \in [0, \infty)$*.*

Даље, за класу $\mathcal{P}$, дефинише се класа $\mathcal{P}_T$ за $T \in [0, \infty)$.

**Дефиниција 1.4.2.** *За* $T < \infty$ *класа* $\mathcal{P}_T$ *је скуп процеса* $X$ *из* $\mathcal{P}$ *за које важи* $X_t = 0$ *за* $t > T$*. Класа* $\mathcal{P}_\infty$ *је скуп процеса* $X \in \mathcal{P}$ *за које је* $E \int_0^\infty X^2 \mathrm{d}\langle M \rangle < \infty$*.*

**Напомена 1.4.3.** *Јасно је да процес* $X$ *припада класи* $\mathcal{P}_T$ *ако и само ако је* $X_t = 0$ *за* $t > T$ *и* $||X||_{M,T} < \infty$*.*

**Напомена 1.4.4.** *Претходно дефинисане класе, норме и метирке зависе од мартингала* $M$*. Уколико се у резултатима појављују и други мартингали, треба нагласити зависност од одређеног мартингала, на пример, треба писати* $\mathcal{P}_T(M), \mathcal{P}(M)$*, итд.*

**Пропозиција 1.4.1.** *За* $T \leq \infty$ *класа* $\mathcal{P}_T$ *је Хилбертов простор са скаларним производом*

$$(X, Y)_T = E \int_0^T XY \mathrm{d}\langle M \rangle,$$

*ако се процеси* $X$ *и* $Y$ *за које важи* $||X - Y||_{M,T} = 0$ *сматрају једнаким.*

На крају, класа $\mathcal{P}_T$ се може проширити тако што се изостави претпоставка да су очекивања коначна и ослаби услов да је $M \in \mathcal{M}_c^2$.

**Дефиниција 1.4.3.** *За* $M \in \mathcal{M}_c^{loc}$ *класа* $\mathcal{P}^\star = \mathcal{P}^\star(M)$ *се дефинише као класа прогресивних процеса* $X$ *са особином да је* $\int_0^T X^2 \mathrm{d}\langle M \rangle < \infty$ *скоро свуда за све* $T \geq 0$*.*

**Напомена 1.4.5.** *Ако* $M \in \mathcal{M}_c^{loc}$*, тада постоји фундаменталан низ времена заустављања* $(R^n)_{n \geq 1}$ *такав да* $M^{R^n} \in \mathcal{M}_c^2$*. Ако је* $X \in \mathcal{P}^\star$*, тада ограничена времена заустављања* $S^n = n \wedge \inf\{t > 0 : \int_0^t X^2 \mathrm{d}\langle M \rangle \geq n\}$ *формирају, такође, фундаменталан низ. Времена заустављања* $T^n = R^n \wedge S^n$ *су, такође, фундаменталан низ. Тада* $M^{T^n} \in \mathcal{M}_c^2$ *и процеси* $X^n$ *дефинисани са* $X_t^n = X_t 1_{\{t \leq T^n\}}$ *припадају класи* $\mathcal{P}(M^{T^n})$*.*

У наставку је наведена дефиниција елементарних процеса (енг. *simple processes*).

**Дефиниција 1.4.4.** *Процес се назива* **елементаран** *(једноставан или степенасти) ако постоје строго растући низ реалних бројева* $t_n$ *са* $t_0 = 0$ *и* $t_n \to \infty$ *и униформно ограничен низ случајних променљивих* $\xi_n$ *са особином да је* $\xi_n$ $\mathcal{F}_{t_n}$*-мерљиво за свако* $n$*, тако да је*

$$X_t = \xi_0 1_{\{0\}}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n 1_{(t_n, t_{n+1}]}(t), \ t \geq 0.$$

Класа елементарних процеса се означава са $\mathcal{S}$.

Елементарни процеси су прогресивни и ограничени. Ако $M \in \mathcal{M}_c^2$, тада елементаран процес $X$ припада класи $\mathcal{P} = \mathcal{P}(M)$.

Наредни резултат је битан за конструкцију стохастичког интеграла.

**Лема 1.4.1.** *Нека је $X$ ограничен прогресиван процес. Тада постоји низ елементарних процеса $(X^n)_{n\geq 1}$ таквих да за свако $T \in [0,\infty)$ важи*

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T (X_t^n - X_t)^2 \mathrm{d}t = 0. \tag{1.14}$$

Помоћу претходне леме се доказује наредни резултат.

**Пропозиција 1.4.2.** *Нека је $M \in \mathcal{M}_c^2$ и нека постоји ненегативан прогресиван процес $f$ такав да се $\langle M\rangle$ не разликује од $\int_0^{\cdot} f_s \mathrm{d}s$ (каже се да је процес $\langle M\rangle$ скоро сигурно апсолутно непрекидан). Тада је скуп $\mathcal{S}$ елементарних процеса густ у $\mathcal{P}$ у односу на метрику $d_M$ дефинисану у Напомени 1.4.2.*

**Напомена 1.4.6.** *Наведени резултати се могу појачати. На пример, у претходној леми се не користи прогресивна мерљивост. Простор $\mathcal{S}$ елементарних процеса је, такође, густ у скупу мерљивих процеса. Даље, ако се изостави захтев да је процес $\langle M\rangle$ скоро сигурно апсолутно непрекидан, резултат из Пропозиције и даље важи, али је доказ сложенији.*

За писање ове главе, поред цитираних референци, коришћена је и следећа литература [1], [2], [10], [11], [12], [16], [20], [23], [30], [35], [36], [37], [38], [40], [42], [45], [46], [53], [58], [61], [65], [70].

# Глава 2

# Стохастички интеграл

Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P)$ простор са филтрацијом $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ која задовољава уобичајене услове.

Познато је да се стохастички интеграл облика

$$\int_{[0,t]} X \mathrm{d}M, \tag{2.1}$$

где су $X = \{X_t, t \geq 0\}$ и $M = \{M_t, t \geq 0\}$ стохастички процеси може дефинисати као Лебег[1]-Стилтјесов[2] интеграл само у случајевима кад процес $M$ има трајекторије са ограниченим варијацијама на коначним интервалима. Познати пример процеса чије трајекторије нису ограничене варијације на компактним скуповима је процес Брауновог кретања.

## 2.1 Конструкција стохастичког интеграла

Познато је да, осим у тривијалним случајевима, трајекторије непрекидних мартингала немају ограничене варијације, па се интеграли не могу дефинисати по трајекторијама у Лебег-Стилтјесовом смислу. У овом делу се разматра интеграл (2.1) за процесе чије трајекторије немају ограничене варијације.

У литератури, при конструкцији стохастичког интеграла се полази од стохастичког интеграла дефинисаног у односу на класу непрекидних квадратно интеграбилних мартингала. Прво се дефинише интеграл елементарних процеса, који имају

[1]Henri Lebesgue, 1875-1941, француски математичар

[2]Thomas Joannes Stieltjes, 1856-1894, холандски математичар

сличну улогу као степенасте функције код Римановог[3] интеграла, а потом се успостављањем изометрије између Хилбертових[4] простора долази до општег случаја на начин прецизиран у Пропозицији 2.1.1. Тако дефинисан стохастички интеграл се лако проширује на класе непрекидних локалних мартингала и семимартингала. Прецизније дефинише се интеграл (2.1), који се још назива стохастички интеграл Итоа[5] процеса $X$ по процесу $M \in \mathcal{M}_c^2$, кад је $M$ семимартингал. Стохастичка интеграција по семимартингалима се може схватити као проширење Стилтјесовог интеграла по трајекторијама. Опширније се може наћи, на пример, у [41] и [60].

У овом делу су издвојене дефиниције и особине стохастичких интеграла, које ће бити потребне у наставку (видети [5], [39], [53]).

Нека је $X$ елементаран процес, тј. $X \in \mathcal{S}$. Стохастички интеграл $\int_{[0,t]} X \mathrm{d}M$ је стохастички процес, означава се са $X \cdot M$, а за свако $t$ се дефинише као случајна величина

$$(X \cdot M)_t = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i (M_{t \wedge t_{i+1}} - M_{t \wedge t_i}). \tag{2.2}$$

За свако $t \in [0, \infty)$ постоји јединствено $n = n(t)$ такво да је $t_n \leq t < t_{n+1}$, па се израз (2.2) може написати у облику

$$(X \cdot M)_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_n (M_t - M_{t_n}). \tag{2.3}$$

Може се показати, на сличан начин као у класичној теорији Лебегове интеграције, да израз (2.2) за процес $(X \cdot M)_t$ не зависи од избора репрезентације за процес $X$. Може се приметити да израз (2.3) представља процес $(X \cdot M)_t$ као мартингалну трансформацију, тако да се могу описати неке особине стохастичког интеграла.

**Пропозиција 2.1.1.** *Нека је $X \in \mathcal{S}$ и $M \in \mathcal{M}_c^2$. Тада је процес $X \cdot M$ непрекидан квадратно интеграбилни мартингал чија је почетна вредност нула, а процес квадратне варијације једнак*

$$\langle X \cdot M \rangle = \int_0^{\cdot} X_u^2 \mathrm{d}\langle M \rangle_u \tag{2.4}$$

*и*

$$E(X \cdot M)_t^2 = E \int_0^t X_u^2 \mathrm{d}\langle M \rangle_u. \tag{2.5}$$

[3] Bernhard Riemann, 1826-1866, немачки математичар

[4] David Hilbert, 1862-1943, немачки математичар

[5] Kiyosi Itô, 1915-2008, јапански математичар

*Тако се, за свако фиксирано $t$, пресликавање*

$$I_t : X \to (X \cdot M)_t$$

*може посматрати као линеарни оператор на простору елементарних процеса који имају вредност нула после $t$ са вредностима у $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Следи да је $||X \cdot M||_t = ||X||_{M,t}$, где је $|| \cdot ||_t$ из Дефиниције 1.3.10, а $|| \cdot ||_{M,t}$ из Дефиниције 1.4.1. Тада је $I_t$ изометрија између $\mathcal{S}$ и потпростора $Img(I_t)$ од $\mathcal{M}_c^2$. За норме такође важи $||X \cdot M|| = ||X||_M$.*

Наведена дефиниција стохастичког интеграла се проширује на класу $\mathcal{P}$ прогресивних процеса апроксимацијом произвољног процеса из $\mathcal{P}$ помоћу низа елементарних процеса.

**Теорема 2.1.1.** *Нека је $M \in \mathcal{M}_c^2$. За све $X \in \mathcal{P}$ постоји јединствен (до на еквивалентност) процес $X \cdot M \in \mathcal{M}_c^2$ такав да $||X^n \cdot M - X \cdot M|| \to 0$ за сваки низ $(X^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ такав да $||X^n - X||_M \to 0$, кад $n \to \infty$. Квадратна варијација тог процеса је дата са (2.4) и тај процес се назива стохастички интеграл Итоа процеса $X$ по процесу $M$.*

До сада је разматран стохастички интеграл за $X \in \mathcal{P}$ и $M \in \mathcal{M}_c^2$. Дефиниција стохастичког интеграла се проширује на процесе који наведене особине имају у локалном смислу.

Нека је $M$ непрекидни локални мартингал, $M \in \mathcal{M}_c^{loc}$. Класа $\mathcal{P}^\star$ је еквивалентна класи прогресивно мерљивих процеса $X$ таквих да је $\int_0^T X^2 \mathrm{d}\langle M \rangle < \infty$ скоро сигурно за свако $T \in [0, \infty)$ (видети Дефиницију 1.4.3). Као што је наведено у Поглављу 1.5, за локалне мартингале постоје процеси квадратне варијације и квадратне коваријације.

**Теорема 2.1.2.** *Нека је $M \in \mathcal{M}_c^{loc}$ и $X \in \mathcal{P}^\star(M)$. Тада постоји јединствен локални мартингал $X \cdot M$ такав да, за све $N \in \mathcal{M}_c^{loc}$, важи*

$$\langle X \cdot M, N \rangle = \int_0^\cdot X \mathrm{d}\langle M, N \rangle. \tag{2.6}$$

*Тај локални мартингал се назива стохастички интеграл од $X$ по $M$.*

Семимартингали представљају најширу класу процеса за коју је дефинисан стохастички интеграл. Семимартингале су дефинисали Долеанс-Даде и Мејер 1970. године.

Претпоставља се, као и обично, да филтрација $\mathbf{F}$ на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ задовољава уобичајене услове.

**Дефиниција 2.1.1.** *Процес $X$ се назива (непрекидан)* **семимартингал** *ако се може представити у облику*

$$X = X_0 + A + M, \tag{2.7}$$

*где је $M \in \mathcal{M}_c^{loc}$, $A$ непрекидан процес са трајекторијама коначне варијације (на коначним интервалима) и $A_0 = 0$ скоро сигурно.*

Једнакост (2.7) се назива **семимартингална декомпозиција процеса** $X$.

Познато је да се многи физички системи приказују као декомпозиција сигнала (процес са коначном варијацијом) и шума (локални мартингал) [60].

Према конструкцији, непрекидни семимартингали имају непрекидне трајектори̂је. Могуће је дефинисати и појам семимартингала са càdlàg трајекторијама.

У наставку ће се радити само са непрекидним семимартингалима, па ће некад напомена о непрекидности бити изостављена.

**Напомена 2.1.1.** *Декомпозиција (2.7) је јединствена до на еквивалентност. То следи из чињенице да су непрекидни локални мартингали који имају ограничену варијацију скоро сигурно константни у времену.*

Може се приметити да је сваки непрекидан субмартингал семимартингал и да се његова семимартингална декомпозиција поклапа са Дуб-Мејеровом декомпозицијом.

**Дефиниција 2.1.2.** *Нека су $X$ и $Y$ семимартингали са семимартингалним декомпозицијама $X = X_0 + A + M$ и $Y = Y_0 + B + N$ где су $M$ и $N$ локални мартингали, а $A$ и $B$ процеси коначне варијације. Њихов квадратни коваријациони процес $\langle X, Y \rangle$ се дефинише као $\langle M, N \rangle$. Ако је $X = Y$, пише се $\langle X \rangle$ уместо $\langle X, X \rangle$ за процес квадратне варијације од $X$.*

Код дефинисања квадратне варијације и коваријације изоставља се део семимартингала који се односи на коначну варијацију што оправдава Пропозиција 2.1.2 у наставку.

Треба напоменути да све особине квадратне варијације из Леме 1.3.6 важе и за семимартингале.

Дата дефиниција од $\langle X, Y \rangle$ за семимартингале поклапа се са интуитивним схватањем квадратне коваријације.

**Пропозиција 2.1.2.** *Ако је $(\Pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ подела интервала $[0,\infty)$ за коју $||\Pi^n|| \to 0$ кад $n \to \infty$, тада, за свако $T > 0$, важи*

$$\sup_{t\leq T} |V_t\,(X, Y; \Pi^n) - \langle X, Y \rangle_t| \xrightarrow{P} 0, \;\; n \to \infty,$$

*где за сваку поделу* $\Pi$ *важи* $V_t(X,Y;\Pi) = \sum \left(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right)\left(Y_{t_{k+1}} - Y_{t_k}\right)$, *при чему се сабира по* $t_k, t_{k+1} \in \Pi \cap [0,t]$.

**Дефиниција 2.1.3.** *Прогресиван процес* $Y$ *је* **локално ограничен** *ако постоји локализујући низ* $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *такав да је заустављен процес* $Y^{T^n}$ *ограничен.*

Јасно је да су сви непрекидни процеси локално ограничени и да локално ограничени процеси припадају класи $\mathcal{P}^\star(M)$ за све непрекидне локалне мартингале $M$. Штавише, за локално ограничене процесе $Y$ и непрекидне процесе $A$ који су ограничене варијације, Лебег-Стилтјесови интеграли $\int_0^t Y_s(\omega)\mathrm{d}A(\omega)$ по трајекторијама су скоро свуда дефинисани за свако $t > 0$ и коначни су скоро сигурно.

**Дефиниција 2.1.4.** *Нека је* $Y$ *локално ограничен процес и* $X$ *семимартингал са декомпозицијом (2.7). Тада се стохастички интеграл процеса* $Y$ *по* $X$ *дефинише са*

$$Y \cdot M + \int_0^{\cdot} Y \mathrm{d}A.$$

Први интеграл је стохастички интеграл у смислу Теореме 2.1.2, а други је Лебег-Стилтјесов интеграл. Надаље ће се са $\int_0^{\cdot} Y\mathrm{d}X$ или $Y \cdot X$ означавати стохастички интеграл $Y$ по $X$.

Како је декомпозиција семимартингала (2.7) јединствена, процес $Y \cdot X$ је једнозначно одређен. Процес $Y \cdot X$ је такође семимартингал и

$$Y \cdot X = Y \cdot A + Y \cdot M$$

је његова јединствена семимартингална декомпозиција. Заиста, $Y \cdot M$ је локални мартингал и $Y \cdot A$ има трајекторије ограничене варијације. Процес тоталне варијације $V(Y \cdot M)$ је одређен са

$$V(Y \cdot M)_t = (|Y| \cdot V(A))_t,$$

који је скоро сигурно коначан, где је $V(A)$ тотална варијација процеса $A$.

Према томе, за два семимартингала $X_1$ и $X_2$ и два локално ограничена процеса $Y_1$ и $Y_2$ важи

$$\langle Y_1 \cdot X_1, Y_2 \cdot X_2 \rangle = (Y_1 Y_2) \cdot \langle M_1, M_2 \rangle,$$

где је $M_i$ локални мартингални део процеса $X_i, i = 1,2$. Важи и $\langle Y_1 \cdot X_1, Y_2 \cdot X_2\rangle = (Y_1Y_2) \cdot \langle X_1, X_2\rangle$.

Наредни резултат представља теорему о доминантној конвергенцији за стохастички интеграл.

**Пропозиција 2.1.3.** *Нека је $X = A + M$ декомпозиција непрекидног семимартингала $X$, а $\{L^n, n \geq 1\}$ и $L$ локално ограничени прогресивни процеси и $K$ ненегативан прогресиван процес. Поред тога, нека за $t > 0$ скоро сигурно важи*

*1) $L_s^n \longrightarrow L_s$, кад $n \longrightarrow \infty$ за свако $s \in [0, t]$,*

*2) $|L_s^n| \leq K_s$ за свако $n \geq 1$ и $s \in [0, t]$,*

*3) $\int_0^t (K_s)^2 \ \mathrm{d}\langle M, M\rangle_s < \infty$ и $\int_0^t K_s \, |\mathrm{d}A_s| < \infty$.*

*Тада*

$$\int_0^t L_s^n \ \mathrm{d}X_s \longrightarrow \int_0^t L_s \ \mathrm{d}X_s,$$

*у вероватноћи кад $n \to \infty$.*

На крају овог дела, наведен је и резултат који се односи на репрезентацију мартингала преко стохастичких интеграла. Наиме, у специјалном случају, када се посматра природна филтрација процеса Брауновог кретања на $\Omega$, може се показати да се сви мартингали могу представити у облику стохастичких интеграла у односу на посматрани процес Брауновог кретања.

**Теорема 2.1.3.** *Нека је $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ природна филтрација процеса Брауновог кретања $W = \{W_t, t \geq 0\}$ са почетком у нули. Тада за сваку $L^2$ случајну величину $Z$ из $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ постоји јединствен прогресиван процес $h \in \mathcal{P}(W)$ такав да важи*

$$Z = E[Z] + \int_0^\infty h_s \ \mathrm{d}W_s.$$

*Стога, за сваки $L^2$ ограничен (локални) мартингал $M$ постоји јединствен процес $h \in (\mathcal{P}^\star(W))\ \mathcal{P}(W)$ и константа $C \in \mathbb{R}$ тако да*

$$M_t = C + \int_0^t h_s \ \mathrm{d}W_s.$$

## 2.2 Формула Итоа

У наредној теореми је дата формула Итоа, један од најпознатијих резултата у стохастичкој анализи.

**Теорема 2.2.1.** *Нека је $X$ семимартингал и $f$ два пута непрекидно диференцијабилна функција на $\mathbb{R}$. Тада је $f(X)$ непрекидан семимартингал и важи*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X)\mathrm{d}X + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X)\mathrm{d}\langle X\rangle, \quad \text{скоро сигурно} \ \ (t \geq 0). \tag{2.8}$$

Треба приметити да за Винеров процес важи $(dW_t)^2 = dt$, а како је $\langle X\rangle_t = (\mathrm{d}X_t)^2$, следи да је формула Итоа у случају када функција $f$ зависи од Винеровог процеса дата са

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\mathrm{d}s, \quad \text{скоро сигурно} \quad (t \geq 0).$$

Формула Итоа показује да непрекидан семимартингал пресликан глатком функцијом остаје непрекидан семимартингал, чија је декомпозиција дата преко стохастичких интеграла.

Први интеграл у формули (2.8) је у смислу Дефиниције 2.1.4. За локални мартингални део $M$ семимартингала $X$, интеграл $f'(X)\cdot M$ је добро дефинисан, јер је $f'(X)$ непрекидан и према томе локално ограничен. Штавише, то је непрекидан локални мартингал. За део ограничене варијације $A$ процеса $X$ интеграл $\int_0^{\cdot} f'(X)\mathrm{d}A$ се схвата у смислу Лебег Стилтјесовог интеграла (по трајекторијама) и то је процес са коначном варијацијом као што је и интеграл $\int_0^{\cdot} f''(X)\mathrm{d}\langle X\rangle$. Следи да је $f(X)$ непрекидни семимартингал, а његов локални мартингални део је $f'(X)\cdot M$.

Формула (2.8) се често приказује у диференцијалном облику

$$\mathrm{d}f(X_t) = f'(X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\mathrm{d}\langle X\rangle_t,\ t \geq 0$$

или

$$\mathrm{d}f(X) = f'(X)\mathrm{d}X + \frac{1}{2}f''(X)\mathrm{d}\langle X\rangle.$$

Ако је $T$ коначно време заустављања, у формули (2.8) може се $t$ заменити са $T$. Формула (2.8) такође важи за $T \wedge t$ за произвољно време заустављања $T$.

Формула Итоа важи и у вишедимензионом случају.

Ако је $X = (X^1, \dots, X^d)$ семимартингал димензије $d$ и $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ два пута непрекидно диференцијабилна функција по сваком аргументу, тада је

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)\mathrm{d}X^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)\mathrm{d}\langle X^i, X^j\rangle. \tag{2.9}$$

Може се приметити да су у овом изразу парцијални изводи другог реда потребни само ако обе одговарајуће компоненте $X^i$ и $X^j$ имају мартингалне делове различите од нуле.

Специјално, ако је $W = (W^1, \dots, W^d)$ Винеров процес димензије $d$ и $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ два пута непрекидно диференцијабилна функција по сваком аргументу, тада је

$$f(W_t) = f(W_0) + \sum_{i=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(W_s)\mathrm{d}W_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(W_s)\mathrm{d}s, \tag{2.10}$$

где је $\Delta f(W)$ лапласијан функције $f$, дефинисан са $\Delta f = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

За писање ове главе, поред цитираних референци, коришћена је и следећа литература [5], [6], [23], [26], [27], [28], [29], [31],[37], [39], [40], [41], [42], [48], [49], [53], [55], [58], [59] [65], [68], [70].

# Глава 3

# Стохастичке диференцијалне једначине

## 3.1 Стохастичке диференцијалне једначине Итоа

Овај део рада је посвећен стохастичким диференцијалним једначинама, које су мотивисале Итоа на конструкцију стохастичког интеграла. Наведене су основне дефиниције, као и резутати који се односе на неке од особина решења стохастичких диференцијалних једначина, које ће бити разматране у наредном поглављу.

Познато је да се помоћу диференцијалних једначина може моделирати еволуција физичких система. Међутим, уколико се посматрају и случајне пертурбације посматраног система, тада се у једначину додаје члан који представља случајни шум, најчешће облика $\sigma \mathrm{d}W_t$, где је $W = \{W_t, t \geq 0\}$ Винеров процес (Брауново кретање), а $\sigma$ константа која представља интензитет шума. Оно што Винеров процес чини погодним за оваква моделирања је његова особина независности прираштаја, што одговара претпоставци да су случајне пертурбације посматране на дисјунктним интервалима независне.

Стохастичка диференцијална једначина непознатог $n$-димензионог процеса $X = \{X_t, t \in [\alpha, \beta]\}$ са почетним условом $X_\alpha = X_0$ дата је са

$$\mathrm{d}X_t = a\left(t, X_t\right) \mathrm{d}t + b\left(t, X_t\right) \mathrm{d}W_t,\ \ t \in [\alpha, \beta],\ \ X_\alpha = X_0, \tag{3.1}$$

где је $W$ $m$-димензиони Винеров процес, $X_0$ $n$-димензиона случајна променљива стохастички независна од процеса $W$, у смислу да су случајне величине $W_t$ и $X_0$ стохастички независне за свако $t \geq 0$ и где су $a : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $b : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ неслучајне Борел мерљиве функције у својим доменима. Једначина (3.1) је **стохастичка диференцијална једначина Итоа** непознатог процеса $X = \{X_t, t \in [\alpha, \beta]\}$ са почетним условом $X_\alpha = X_0$. Једначина (3.1) се може скраћено записати у облику

$$\mathrm{d}X_t = a_t\left(X_t\right)\mathrm{d}t + b_t\left(X_t\right)\mathrm{d}W_t, \quad X_\alpha = X_0$$

или

$$\mathrm{d}X = a\left(X\right)\mathrm{d}t + b\left(X\right)\mathrm{d}W, \quad X_\alpha = X_0.$$

Према дефиницији стохастичког диференцијала, једначина (3.1) је еквивалентна следећој стохастичкој диференцијалној једначини у интегралном облику

$$X_t = X_0 + \int_\alpha^t a\left(s, X_s\right)\mathrm{d}s + \int_\alpha^t b\left(s, X_s\right)\mathrm{d}W_s, \quad t \in [\alpha, \beta]. \tag{3.2}$$

Јасно, решења једначина (3.1) и (3.2) су стохастички еквивалентна.

У наставку ће се разматрати инфинитезимална интерпретација коефицијената $a$ и $b$. Нека процес $X$ има стохастички диференцијал (3.1) и нека је стохастички интеграл квадратно интеграбилни мартингал.

Тада је

$$E\left[X_{t+h} - X_t \mid \mathcal{F}_t\right] = E\left[\int_t^{t+h} a\left(s, X_s\right)\mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

За довољно мало $h$ овај израз је „приближно” једнак $a(t, X_t)h$. Условна дисперзија од $X_{t+h} - X_t$ у односу на $\mathcal{F}_t$ је

$$E\left[\left(\int_t^{t+h} b\left(s, X_s\right)\mathrm{d}W_s\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right] = E\left[\int_t^{t+h} b^2\left(s, X_s\right)\mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

што се за мало $h$ апроксимира са $b^2(t, X_t)h$. Тако коефицијент $a$ у једначини (3.1) говори о правцу у којем се $X_t$ мења, а коефицијент $b$ о варијанси тих промена. Функција $a$ се назива **коефицијент преноса - дрифт коефицијент**, а $b$ **коефицијент дифузије** ове једначине.

Процес $X$ се назива решење стохастичке диференцијалне једначине са почетним условом $X_0$ ако задовољава једначину (3.1) и ако је $X_\alpha = X_0$.

У даљем раду ће се разматрати две врсте решења стохастичке диференцијалне једначине (3.1): строго и слабо решење. Оригинални резултати ове дисертације, изложени у Глави 4, односе се на слаба решења стохастичких диференцијалних једначина.

Нека је са $\mathcal{F}_t$ означена $\sigma$-алгебра генерисана са $X_0$ и $\{W_s, s \leq t\}$

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{X_0, W_s, s \leq t\}.$$

Следи да је $W_t$ мерљиво у односу на $\mathcal{F}_t$ и да је $W_t - W_s$ независно од $\mathcal{F}_s$ за све $t \geq s$. Тако је Винеров процес $W$ адаптиран у односу на $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ и $X_0$ је случајна променљива мерљива у односу на $\mathcal{F}_\alpha$.

**Дефиниција 3.1.1.** *Мерљив случајан процес $X = \{X_t, t \in [\alpha, \beta]\}$ је* **строго решење** *стохастичке диференцијалне једначине (3.1) ако*

*а) $X_t$ је $\mathcal{F}_t$-мерљиво за свако $t \in [\alpha, \beta]$;*

*б) за $\overline{a}(t) = a(t, X_t)$ и $\overline{b}(t) = b(t, X_t)$ важи*

$$\int_\alpha^\beta |\overline{a}(t)| \mathrm{d}t < \infty, \quad \int_\alpha^\beta |\overline{b}(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty \quad \text{скоро сигурно;}$$

*в) $X_\alpha = X_0$ скоро сигурно;*

*г) једначина (3.2) је скоро сигурно задовољена за свако $t \in [\alpha, \beta]$.*

Како је $\mathrm{d}X_t = \overline{a}(t)\mathrm{d}t + \overline{b}(t)\mathrm{d}W_t$ скоро сигурно за свако $t \in [\alpha, \beta]$, то је, према томе, стохастички диференцијал процеса $X$.

Због услова *а*) и *б*) претходне дефиниције, интеграли на десној страни једначине (3.2) су добро дефинисани. Заиста, како је $\overline{a}$ мерљива и апсолутно интеграбилна функција сагласна са филтрацијом $\mathcal{F}_t$, интеграл $\int_\alpha^t \overline{a}(s)\mathrm{d}s$ постоји као Лебегов интеграл са параметром $\omega \in \Omega$, тј. као случајан процес сагласан са том филтрацијом. Како је $\overline{b} \in \mathcal{P}$, интеграл $\int_\alpha^t \overline{b}(s)\, \mathrm{d}W_s$ је стохастички интеграл Итоа сагласан са филтрацијом $\{\mathcal{F}_t, t \in [\alpha, \beta]\}$. Како су оба интеграла јединствено одређена до на стохастичку еквивалентност, процес $X$ је одређен до на стохастичку еквивалентност и сагласан са филтрацијом $\{\mathcal{F}_t, t \in [\alpha, \beta]\}$. Поред тога, стохастички интеграл Итоа у (3.2) је скоро сигурно непрекидан процес, а то важи и за Лебегов интеграл због апсолутне интеграбилности функције $\overline{a}$. Отуда је процес $X_t$ стохастички еквивалентан са скоро сигурно непрекидним процесом на десној страни једнакости (3.2). По Теореми Дуба процес $X$ има сепарабилну и мерљиву модификацију, тако да се под строгим решењем стохастичке диференцијалне једначине (3.1) односно (3.2) увек подразумева да се ради о скоро сигурно непрекидном, мерљивом и сепарабилном процесу.

Једначина (3.1) има **јединствено строго решење** ако за било која два решења $\{X_t^1, t \in [\alpha, \beta]\}$ и $\{X_t^2, t \in [\alpha, \beta]\}$ важи

$$P\{X_t^1 = X_t^2, \text{ за свако } t \in [\alpha, \beta]\} = 1.$$

Скоро сигурна јединственост строгог решења у суштини значи јединственост скоро свих трајекторија тог решења.

**Теорема 3.1.1.** *(видети [47]) (***Теорема егзистенције и јединствености решења***) Нека је $W = \{W_t, t \geq 0\}$ $m$-димензиони Винеров процес и $X_0$ случајна променљива независна од $W$. Нека су функције $a : [\alpha,\beta]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $b : [\alpha,\beta]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ мерљиве и нека задовољавају глобални Липшицов[1] услов и услов ограниченог раста по другом аргументу, тј. нека постоји константа $C > 0$ тако да за свако $(t, x), (t, y) \in [\alpha,\beta]\times\mathbb{R}^n$ важи*

$$\begin{aligned} |a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| &\leq C|x-y|, \\ |a(t,x)|^2 + |b(t,x)|^2 &\leq C^2(1 + |x|^2). \end{aligned}$$

*Тада постоји јединствено скоро сигурно непрекидно строго решење $X = \{X_t, t \in [\alpha,\beta]\}$ стохастичке диференцијалне једначине (3.1) за које важи*

$$E \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |X_t|^2 < \infty.$$

Претходна теорема даје само довољне услове егзистенције и јединствености строгог решења.

Поред строгог решења уводи се и појам слабог решења стохастичке диференцијалне једначине.

**Дефиниција 3.1.2.** *Стохастичка диференцијална једначина (3.1) са почетним условом $X_0$ које има функцију расподеле $F(x)$ има* **слабо решење** *(или* **решење у слабом смислу***) ако постоје простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [\alpha,\beta]\}$, скоро сигурно непрекидан $n$-димензиони процес $X = \{X_t, t \in [\alpha,\beta]\}$ и $m$-димензиони Винеров процес $W = \{W_t, t \in [\alpha,\beta]\}$ тако да важе услови б) и г) Дефиниције 3.1.1 и да је $P\{\omega : X_\alpha(\omega) \leq x\} = F(x)$.*

Може се приметити битна разлика између концепата строгог и слабог решења, при чему се због једноставности претпоставља да је $X_0 = 0$. Кад се говори о строгом решењу, то имплицира да су унапред дати простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [\alpha,\beta]\}$ и стандардни Винеров процес $W = \{W_t, t \in [\alpha,\beta]\}$. Ако је у том случају $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$, тада је процес $X = \{X_t, t \in [\alpha,\beta]\}$ такав да је случајна променљива $X_t$ за свако $t$ мерљива у односу на $\mathcal{F}_t^W$ (тј. $X_t$ је одређено преко „прошлих” вредности Винеровог процеса). Тако за строго решење важи

$$\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t^W, \quad t \in [\alpha,\beta].$$

[1] Rudolf Lipschitz, 1832-1903, немачки математичар

Кад се говори о слабом решењу једначине (3.1), са унапред датим неантиципирајућим функцијама $a(t,x)$ и $b(t,x)$, претпоставља се тада да се може конструисати простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [\alpha,\beta]\}$ и стандардни Винеров процес $W = \{W_t, t \in [\alpha,\beta]\}$ за које је једначина (3.2) задовољена скоро сигурно. У многим случајевима кад слабо решење постоји важи $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$, па је $W = \{W_t, t \in [\alpha,\beta]\}$ Винеров процес у односу на филтрацију $\mathbf{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X, t \in [\alpha,\beta]\}$. Дакле, у том случају је

$$\mathcal{F}_t^W \subseteq \mathcal{F}_t^X, \quad t \in [\alpha,\beta].$$

Из Дефиниције 3.1.2 следи да је слабо решење, у ствари, систем $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, W, X)$. Међутим, у пракси се слабим решењем назива процес $X$, а подразумева овај скуп објеката. Другим речима, за одређивање слабог решења је потребно конструисати вероватносни простор на коме постоји решење. Један тако конструисан простор је довољан за постојање слабог решења, док постојање строгог подразумева да решење може да се дефинише за свако Брауново кретање и сваку филтрацију.

Строго решење стохастичке диференцијалне једначине је наравно и слабо решење те једначине, док обрнуто не важи у општем случају.

**Дефиниција 3.1.3.** *Стохастичка диференцијална једначина (3.1) има* **јединствено слабо решење** *ако се за било која два слаба решења*

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, W, X) \quad \text{и} \quad \left(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbf{F}}, \overline{P}, \overline{W}, \overline{X}\right)$$

*расподеле процеса* $X = \{X_t, t \in [\alpha,\beta]\}$ *и* $\overline{X} = \{\overline{X}_t, t \in [\alpha,\beta]\}$ *поклапају, тј.*

$$\mu_X(A) = \overline{\mu}_{\overline{X}}(A), \quad A \in \mathcal{B},$$

*где је*

$$\mu_X(A) = P\{\omega : X \in A\}, \quad \overline{\mu}_{\overline{X}}(A) = \overline{P}\{\overline{\omega} : \overline{X} \in A\}.$$

Јединственост слабог решења се назива још и јединственост у закону.

Стохастичка диференцијална једначина је решива (ефективно решива) ако се њено решење може изразити помоћу Лебегових и Итових интеграла. Веома је мали број решивих стохастичких диференцијалних једначина. То су пре свега линеарне стохастичке диференцијалне једначине и оне које се одређеним трансформацијама своде на њих.

У наставку рада, главни предмет разматрања ће бити слаба решења стохастичке диференцијалне једначине и услови за њихову слабу јединственост.

## 3.2 Стохастичке диференцијалне једначине са семимартингалима

Стохастичка диференцијална једначина непознатог $d$-димензионог процеса $X = \{X_t, t \geq 0\}$ је дата са

$$X_t = K_t + \int_0^t u_s(X)\mathrm{d}Z_s, \tag{3.3}$$

где је $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ $m$-димензиони семимартингал, $K = \{K_t, t \geq 0\}$ $d$-димензиони процес који представља почетну вредност и $\{u_t(X), t \geq 0\}$ $d \times m$-димензиони процес који зависи од трајекторија процеса $X$. Ову једначину су увели Долеанс-Даде [10] и Протер [59].

У наставку ће бити разматран једноставнији облик стохастичке диференцијалне једначине непознатог $d$-димензионог процеса $X = \{X_t, t \geq 0\}$

$$\mathrm{d}X_t = u_t(X)\mathrm{d}Z_t, \; X_0 = x, \tag{3.4}$$

где је $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ $m$-димензиони семимартингал, а $\{u_t(X), t \geq 0\}$ предиктабилан $d \times m$-димензиони процес који зависи од трајекторија процеса $X$, тј. разматраће се једначина (3.3) са $K = 0$. Овај случај је занимљив јер су решења једначине (3.4) семимартингали, док решења једначине (3.3) не морају нужно бити семимартингали.

Простор вероватноћа $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$ је **проширење простора вероватноћа** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ако постоји мерљива сурјективна функција

$$f : (\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{A})$$

таква да је

$$\hat{P} f^{-1} = P \quad \text{на} \quad \mathcal{A}.$$

Оба простора вероватноћа морају имати исту временску осу $I$. За филтрације $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \in I\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t, t \in I\}$ и $\mathbf{J} = \{\mathcal{J}_t, t \in I\}$ на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, важи

$$\hat{\mathcal{G}}_t = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{G}_t\}, \quad \hat{\mathcal{H}}_t = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{H}_t\}, \quad \hat{\mathcal{J}}_t = \{f^{-1}(A) : A \in J_t\}.$$

Важно је напоменути да могу постојати филтрације на простору вероватноћа $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$ које нису дефинисане као инверзне слике неке филтрације из оригиналног простора вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Такође, треба приметити да важи $\hat{\mathcal{A}} \neq f^{-1}(\mathcal{A})$. (видети [33]).

Како ће се у даљем раду често разматрати разна проширења простора вероватноћа или ће се мењати филтрације, а дефиниције неких процеса директно зависе од филтрација, корисно је подсећање на неке познате резултате.

**Лема 3.2.1.** *Нека је* $\mathbf{G}$ *подфилтација од* $\mathbf{F}$ *(тј.* $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ *за свако* $t \geq 0$*) и нека је* $X$ $d$*-димензиони семимартингал у односу на* $\mathbf{F}$ *који је адаптиран у односу на* $\mathbf{G}$*. Тада је* $X$ *семимартингал у односу на* $\mathbf{G}$*.*

**Лема 3.2.2.** *Процес* $X$ *је семимартингал (респективно, локални мартингал) на* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P)$ *ако и само ако је* $\hat{X} = X \circ f$ *семимартингал (респективно, локални мартингал) на* $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathbf{F}}, \hat{P})$*.*

У наставку се претпоставља да је дат почетни услов $x \in \mathbb{R}^d$ и $\mathbf{F}$-предиктабилан $d \times m$-димензиони процес $u = \{u_t(X), t \geq 0\}$.

Нека је $(\Omega^\star, \mathcal{A}^\star, \mathbf{F}^\star, P^\star)$ простор са филтрацијом на коме је дефинисан $m$-димензиони семимартингал $Z^\star = \{Z_t^\star, t \geq 0\}$.

**Дефиниција 3.2.1.** *Строго решење једначине (3.4) на систему* $(\Omega^\star, \mathcal{A}^\star, \mathbf{F}^\star, P^\star, Z^\star)$ *је десно непрекидни* $d$*-димензиони процес* $X^\star = \{X_t^\star, t \geq 0\}$ *са левим граничним вредностима адаптиран у односу на комплетну филтрацију* $\mathbf{F}^\star$ *такав да ако је*

$$\psi : \Omega^\star \to \Omega$$

*дефинисано са*

$$Z \circ \psi = Z^\star, \; X \circ \psi = X^\star$$

*и*

$$u^\star = u \circ \psi,$$

*тада је* $u^{\star i}$*, за свако* $i \leq d$*, предиктабилан процес за који може да се дефинише стохастички интеграл по* $Z^\star$ *и*

$$X^{\star i} = x^i + \int u^{\star i} dZ^\star.$$

**Дефиниција 3.2.2.** *Слабо решење једначине (3.4) је вероватносна мера* $P$ *на простору* $(\Omega, \mathcal{A})$ *за коју постоји решење* $X^\star$ *на систему* $(\Omega^\star, \mathcal{A}^\star, \mathbf{F}^\star, P^\star, Z^\star)$ *који генерише једначину, таква да је* $P = P^\star \circ \psi^{-1}$*.*

Жакод[2] и Мемин[3] (видети [34]) су, увођењем проширења простора вероватноћа, изучавали постојаност и јединственост решења једначине (3.4). Њихове резултате је генерализовао Лебедев[4] [44].

[2] Jean Jacod, 1944– , француски математичар
[3] Jean Mémin, француски математичар
[4] Vyacheslav Ivanovich Lebedev, 1930-2010, руски математичар

У наредној глави ће бити изложен још један приступ за дефинисање слабог решења стохастичке диференцијалне једначине (3.4) који је увео Микланд [57], а који се заснива на теорији узрочности. Прецизније, главни резултати из Главе 4 који се односе на јединственост слабог решења стохастичких диференцијалних једначина овог типа ће бити засновани на приступу који је развио Микланд [57], а који подразумева одређивање вероватносне мере $P$ на простору $(\Omega, \mathcal{A})$ тако да је дати процес $X$ решење једначине у односу на дати процес $Z$ и у литератури је познат као мартингални проблем.

За писање ове главе, поред цитираних референци, коришћена је и следећа литература [15], [20], [27], [28], [29], [33], [34], [42], [44], [47], [58], [59].

# Глава 4

# Узрочност, стохастичка предвидивост и примене

У овој глави се разматрају различити облици зависности између случајних појава који су дефинисани преко познатог концепта условне независности. Прецизније, у Поглављу 4.1 се наводи позната релација узрочности коју је дефинисао Микланд [57], а која се надаље користи. Затим је дефинисан нови концепт зависности под називом узрочна предвидивост. У Поглављу 4.2 је дефинисана узрочна предвидивист између филтрација, а у Поглављу 4.3 узрочна предвидивост између случајних процеса и филтрација. Наведени су различити алтернативни облици дефинисања уведених релација, њихове особине и везе са познатим облицима зависности у теорији случајних процеса.

Дати су и примери примене узрочне предвидивости за испитивање јединствености слабих решења стохастичких диференцијалних једначина Итоа и стохастичких диференцијалних једначина са семимартингалима (Поглавље 4.3), примене у финансијској математици (Поглавље 4.4) и у статистици (Поглавље 4.5).

Резултати из Поглавља 4.2, 4.3, 4.4 и 4.5 представљају оригиналне научне резултате ове докторске дисертације који су публиковани у [50], [52], [51] и [67].

## 4.1 Различити концепти узрочности у непрекидном случају

Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P)$ простор с филтрацијом, где је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа, а $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \in I\}$ филтрација, тј. $\mathcal{F}_t$ је скуп свих догађаја у моделу до времена $t$ укључујући и време $t$, а представља подфилтрацију од $\mathcal{A}$. Укупна информација

$\mathcal{F}_\infty$ дата са $\mathbf{F}$ је дефинисана као $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\in I} \mathcal{F}_t$. Надаље ће се претпостављати да филтрација $\mathbf{F}$ задовољава уобичајене услове (тј. да је непрекидна здесна и да је комплетна, видети [15]). Параметарски скуп $I$ је једнак $\mathbb{R}^+$, ако се не нагласи другачије. Аналогна означавања ће бити коришћена за филтрације $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t, t \in I\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t,\ t \in I\}$, $\mathbf{J} = \{\mathcal{J}_t,\ t \in I\}$.

Каже се да је $\mathbf{G}$ подфилтрација од $\mathbf{F}$ у ознаци $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$, ако је $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$ за свако $t$.

Концепт условне независности се широко користи у теорији вероватноће и статистике и њиховим применама.

**Дефиниција 4.1.1.** *([8], [62]). Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и нека су $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}$ произвољне под–$\sigma$-алгебре из $\mathcal{A}$. Каже се да $\mathcal{M}$ раздваја $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ или да су $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ условно независне у односу на $\mathcal{M}$ (у ознаци $\mathcal{M}_1 \perp \mathcal{M}_2 \mid \mathcal{M}$) ако је*

$$E[X_1X_2 \mid \mathcal{M}] = E[X_1 \mid \mathcal{M}]E[X_2 \mid \mathcal{M}],$$

*где су $X_1, X_2$ позитивне случајне величине мерљиве у односу на одговарајуће $\sigma$-алгебре $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, респективно.*

Најважније особине овог концепта се могу наћи у [8], [18] и [19].

Надаље ће бити разматрани различити концепти узрочности који се дефинишу преко условне независности.

**Дефиниција 4.1.2.** *([57]) Нека су $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \in I\}$ и $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t, t \in I\}$ филтрације дефинисане на истом простору вероватноћа. Каже се да је $\mathbf{G}$ узрок за $\mathbf{H}$ у оквиру $\mathbf{F}$ у односу на $P$ (у ознаци $\mathbf{H} |\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$) ако је $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{F}$, $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$ и ако је $\mathcal{H}_\infty$ условно независно од $\mathcal{F}_t$ за дато $\mathcal{G}_t$ за свако $t \in I$, односно*

$$\mathcal{H}_\infty \perp \mathcal{F}_t \mid \mathcal{G}_t, \tag{4.1}$$

*ако је*

$$(\forall A \in \mathcal{H}_\infty) \qquad P(A|\mathcal{F}_t) = P(A|\mathcal{G}_t).$$

*Уколико је јасно о којој се мери ради, у дефиницији се изоставља „у односу на $P$”.*

Услов (4.1) се може написати у следећем облику

$$\mathcal{H}_u \perp \mathcal{F}_t \mid \mathcal{G}_t$$

за свако $t$ и свако $u$ из $I$.

Интуитивно, (4.1) значи да, за произвољно $t$, информација о $\mathcal{H}_\infty$ дата са $\mathcal{F}_t$ није „већа"од информације дате са $\mathcal{G}_t$.

Ако за $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ важи $\mathbf{G} \,|\!<\, \mathbf{G}; \mathbf{F}$, каже се да је $\mathbf{G}$ сопствени узрок у односу на $\mathbf{F}$. Појам потпуне потчињености (уведен у [62]) је еквивалентан појму сопственог узрока (самоузрочности), који је дефинисан овде. Концепт самоузрочности је честа претпоставка у теорији мартингала и стохастичке интеграције ([3], [66]). Важно је напоменути да постоји строга повезаност између очувања својства мартингалности и концепта узрочности. У теорији мартингала концепт самоузрочности је еквивалентан хипотези $(H)$ која је уведена у [3]: ако је $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$, сваки $\mathbf{G}$-мартингал је $\mathbf{F}$-мартингал, тј. $\mathbf{G}$ је утопљено (енгл. *immersed*) у $\mathbf{F}$.

Ако су филтрације $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ такве да важи $\mathbf{G} \,|\!<\, \mathbf{G}; \mathbf{G} \bigvee \mathbf{F}$ (где је $\mathbf{G} \bigvee \mathbf{F}$ фамилија одређена са $(\mathcal{G} \bigvee \mathcal{F})_t = \mathcal{G}_t \bigvee \mathcal{F}_t$), каже се да $\mathbf{F}$ не узрокује $\mathbf{G}$. Јасно је сада да је интерпретација Грејнџерове узрочности [22] да $\mathbf{F}$ не узрокује $\mathbf{G}$ ако важи $\mathbf{G} \,|\!<\, \mathbf{G}; \mathbf{G} \bigvee \mathbf{F}$ (видети [57]).

Треба приметити да је Дефиниција 4.1.2 еквивалентна дефиницији строге глобалне неузрочности (енгл. *strong global noncausality*), дате у [17].

Нека је $\mathbf{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X, t \in I\}$ природна филтрација процеса $X = \{X_t, t \in I\}$. Процес $X$ је адаптиран у односу на филтрацију $\mathbf{F}$ или $\mathbf{F}$-адаптиран ако је $\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t$ за свако $t$.

Ако је процес $X$ адаптиран у односу на филтрацију $\mathbf{F}$ користи се ознака $(X_t, \mathcal{F}_t)$ $t \in I$.

Филтрација може бити генерисана са више случајних процеса, на пример, $\mathbf{F}^{X,Y} = \{\mathcal{F}_t^{X,Y}, t \in I\}$, где је

$$\mathcal{F}_t^{X,Y} = \mathcal{F}_t^X \bigvee \mathcal{F}_t^Y, \quad t \in I.$$

Дефиниција 4.1.2 се може применити на случајне процесе. Каже се да су случајни процеси у одређеној релацији ако и само ако су њихове природне филтрације у тој релацији. На пример, $\mathbf{F}$-адаптиран случајан процес $X$ је сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F}$ ако је $\mathbf{F}^X$ сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F}$, тј. ако важи $\mathbf{F}^X \,|\!<\, \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P$ (видети, на пример, [67]).

У наставку се наводе још неке особине релације узрочности из Дефиниције 4.1.2.

**Пропозиција 4.1.1.** *[57] Нека су на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ дате филтрације $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \in I\}$ и $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t, t \in I\}$ и нека су $P$ и $\hat{P}$ вероватносне мере на $\mathcal{A}$ за које важи $\hat{P} \ll P$ и нека је $\frac{d\hat{P}}{dP}$ мерљиво у односу на $\mathcal{H}_\infty$. Тада из $\mathbf{H} \,|\!<\, \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ следи $\mathbf{H} \,|\!<\, \mathbf{G}; \mathbf{F}; \hat{P}$.*

**Пропозиција 4.1.2.** *[57] Нека су* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ *и* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \in I\}$ *филтрације на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *и нека је* $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *низ случајних процеса за које важи*

$$X_t^{(n)} \xrightarrow{P} X_t \text{ кад } n \to \infty \text{ за свако } t \in I$$

*и нека важи*

$$\mathbf{F}^{X^{(n)}} \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P \text{ за свако } n.$$

*Тада за процес* $X = \{X_t, t \in I\}$ *важи*

$$\mathbf{F}^X \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P.$$

## 4.1.1 Својство мартингалности и узрочност

Ако је процес $M = \{M_t, t \geq 0\}$ мартингал у односу на филтрацију $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, који је адаптиран у односу на филтрацију $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$, где је $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$ (тј, $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$ за свако $t$), тада је $M$ мартингал и у односу на $\mathbf{G}$. Дакле, приликом сужења филтрације, својство мартингалности се чува. Међутим, својство мартингалности у општем случају се не чува кад се филтрација проширује. Очување својства мартингалности у том случају је директно повезано са концептом узрочности који је дат у Дефиницији 4.1.2.

Наредна теорема даје везу између очувања својства мартингалности и концепта узрочности.

**Теорема 4.1.1.** *[17] 1) Ако је* $\mathbf{G}$ *узрок за* $\mathbf{H}$ *у оквиру* $\mathbf{F}$*, тада је сваки процес који је мартингал у односу на* $\mathbf{G}$ *и који је адаптиран у односу на* $\mathbf{H}$*, мартингал и у односу на* $\mathbf{F}$.

*2) Ако је сваки мартингал у односу на филтрацију* $\mathbf{G}$*, мартингал и у односу на филтрацију* $\mathbf{F}$*, тада је* $\mathbf{G}$ *сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$.

*Доказ.* 1) Нека је $X$ мартингал у односу на филтрацију $\mathbf{G}$, који је адаптиран у односу на филтрацију $\mathbf{H}$. Тада за $s \leq t$ важи $E[X_t|\mathcal{G}_s] = X_s$ скоро сигурно из својства мартингалности и $E[X_t|\mathcal{G}_s] = E[X_t|\mathcal{F}_s]$ скоро сигурно из претпостављене узрочности, одакле је $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ скоро сигурно, па је $X_t$ мартингал у односу на филтрацију $\mathbf{F}$.

2) Нека је $Y$ интеграбилна случајна величина мерљива у односу на $\mathcal{G}_\infty$ и нека је $X_t = E[Y|\mathcal{G}_t]$. Процес $X$ је мартингал у односу на филтрацију $\mathbf{G}$, а по претпоставци је мартингал и у односу на филтрацију $\mathbf{F}$. Следи да је

$$\forall s \leq t \quad E[Y|\mathcal{G}_s] = E[X_t|\mathcal{G}_s] = X_s = E[X_t|\mathcal{F}_s] \text{ с.с.}$$

Како је $X_t$ произвољна случајна величина интеграбилна у односу на $\mathbf{G}$, претходна једнакост имплицира да је $\mathcal{G}_t \perp \mathcal{F}_s|\mathcal{G}_s$ за свако $s \leq t$, што је еквивалентно са релацијом $\mathbf{G} \,|\!\!< \mathbf{G};\mathbf{F}$. $\square$

Ако је $\mathbf{H} = \mathbf{G}$, узрочност је еквивалентна очувању својства мартингалности. Без разматрања узрочности, први доказ овог резултата је дат у [3].

## 4.2 Стохастичка предвидивост између филтрација и примена на стохастичке диференцијалне једначине

У овом делу се уводи нови концепт зависности између филтрација под називом узрочна предвидивост. Биће разматране неке особине узрочне предвидивости, као и алтернативни облици дефиниције тог појма.

Укратко се наводи мотивација за увођење појма узрочне предвидивости. Биће разматрана веза између слабих решења стохастичке диференцијалне једначине (3.1) и релација узрочности између филтрација $\mathbf{F}^X$, $\mathbf{F}^W$, $\mathbf{F}^{X,W}$ и $\mathbf{F}$ у односу на вероватносну меру $P$. При томе, потребно је да те релације важе за све филтрације $\mathbf{F}$ и произвољне вероватносне мере $P$. Како не постоји простор вероватноћа који садржи све могуће филтрације $\mathbf{F}$, користиће се изоморфизам између простора вероватноћа (видети [33]).

Простор вероватноћа $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$ је проширење простора вероватноће $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ако постоји мерљиво пресликавање

$$f : (\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{A})$$

такво да је

$$\hat{P} f^{-1} = P \quad \text{на} \quad \mathcal{A}.$$

Потребно је да оба простора имају исти параметарски скуп $I = [0, \infty)$. За филтрације $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \in I\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t, t \in I\}$ и $\mathbf{J} = \{\mathcal{J}_t, t \in I\}$ на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ је

$$\hat{\mathcal{G}}_t = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{G}_t\},$$
$$\hat{\mathcal{H}}_t = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{H}_t\},$$
$$\hat{\mathcal{J}}_t = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{J}_t\}.$$

На простору вероватноћа $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$ могу да постоје филтрације које нису дефинисане као инверзне слике филтрација из оригиналног простора вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Притом важи $\hat{\mathcal{A}} \neq f^{-1}(\mathcal{A})$ (видети [33]).

Може се увести наредна дефиниција.

**Дефиниција 4.2.1.** *[50] Нека су* $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ *и* $\mathbf{J}$ *филтрације дефинисане на истом простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *са заједничким параметарским скупом* $I$. *Каже се да је филтрација* $\mathbf{J}$ *узрочно предвидива са филтрацијом* $\mathbf{H}$ *у односу на филтрацију* $\mathbf{G}$ *ако важи*

$$\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G} \tag{4.2}$$

*и*

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{G}'; P, \tag{4.3}$$

*где је*

$$\mathbf{G}' = \mathbf{G} \vee \mathbf{J} \tag{4.4}$$

*и ако за било које проширење* $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$ *простора вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{G}'_\infty, P)$ *(са* $\hat{P} f^{-1} = P$*) које садржи филтрације* $\hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{G}}', \hat{\mathbf{G}}, \hat{\mathbf{H}}$, $\hat{\mathbf{J}}$ *и које задовољава*

*а)*

$$\hat{\mathbf{G}}' \subseteq \hat{\mathbf{F}}; \tag{4.5}$$

*б) за свако* $A \in \mathcal{H}_\infty$ *и* $t \in I$

$$\left.\begin{array}{l} g(A) = P(A \mid \mathcal{G}'_t)\,(P\text{-с.с.}) \\ g \text{ је } \mathbf{G}'\text{-мерљиво} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f(A) = \hat{P}(f^{-1}(A) \mid \hat{\mathbf{G}}')\,(\hat{P}\text{-с.с.});$$

*в)*

$$\hat{\mathbf{H}} \mid\!< \hat{\mathbf{G}}; \hat{\mathbf{F}}; \hat{P};$$

*важи*

$$\hat{\mathbf{J}} \mid\!< \hat{\mathbf{G}}'; \hat{\mathbf{F}}; \hat{P}. \tag{4.6}$$

Ако је $\mathbf{G} = \mathbf{H}$ у претходној дефиницији, каже се да је $\mathbf{J}$ узрочно предвидиво са $\mathbf{H}$.

Треба напоменути да је узрочна предвидивост појам зависности, али који је слабији од појма адаптираности у односу на дату филтрацију.

У наставку су наведене неке особине узрочне предвидивости.

**Лема 4.2.1.** *[50] Нека су* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t, t \geq 0\}$ *и* $\mathbf{J} = \{\mathcal{J}_t, t \geq 0\}$ *филтрације на истом простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Ако су задовољени услови а) и б) из Дефиниције 4.2.1 за* $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$, $\hat{\mathbf{G}}', \hat{\mathbf{G}}, \hat{\mathbf{H}}$ *и* $\hat{\mathbf{J}}$ *и ако важи (4.3), тада је*

$$\hat{\mathbf{H}} \mid\!< \hat{\mathbf{G}}; \hat{\mathbf{G}}'; \hat{P}. \tag{4.7}$$

*Доказ.* Нека је $A \in \mathcal{H}_\infty$ и $t \in T$. Према (4.3), постоји $\mathbf{G}$-мерљив процес $g$ за који важи
$$g = P(A|\mathcal{G}'_t).$$
Према услову б) и дефиницији од $\hat{\mathcal{G}}_t$, $\hat{P}(f^{-1}(A)|\hat{\mathcal{G}}'_t)$ се може изабрати тако да буде $\hat{\mathbf{G}}$-мерљиво. Сада, (4.7) следи из дефиниције за $\hat{\mathcal{H}}_\infty$. □

**Лема 4.2.2.** *[50] Услов в) из дефиниције узрочне предвидивости се може заменити са*

*в′)*
$$\hat{\mathbf{H}} \mid< \hat{\mathbf{G}}'; \hat{\mathbf{F}}; \hat{P}.$$

*Доказ.* Према Пропозицији 2.2 из [57] из (4.4) и (4.5) следи да је $\hat{\mathbf{H}} \mid< \hat{\mathbf{G}}; \hat{\mathbf{F}}; \hat{P}$ еквивалентно са
$$\hat{\mathbf{H}} \mid< \hat{\mathbf{G}}; \hat{\mathbf{G}}'; \hat{P} \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{H}} \mid< \hat{\mathbf{G}}'; \hat{\mathbf{F}}; \hat{P},$$
што доказује лему. □

**Последица 4.2.1.** *[50] Следећа тврђења су еквивалентна:*
*1)* $\mathbf{J}$ *је узрочно предвидиво са* $\mathbf{H}$ *у односу на* $\mathbf{G}$.
*2)* $\mathbf{J}$ *је узрочно предвидиво са* $\mathbf{H}$ *у односу на* $\mathbf{G}'$ *и задовољени су услови* (4.2) *и* (4.3).

*Доказ.* Заменом услова *в*) са *в′*) у Дефиницији 4.2.1 једноставно се уочава да разлику између узрочне предвидивости у односу на $\mathbf{G}$ и узрочне предвидивости у односу на $\mathbf{G}'$ представљају услови (4.2) и (4.3).
□

У наредном тврђењу је доказана инваријантност узрочне предвидивости у односу на стохастичку еквивалентност.

**Пропозиција 4.2.1.** *[50] Нека су* $\mathbf{G}$, $\tilde{\mathbf{G}}$, $\mathbf{H}$, $\tilde{\mathbf{H}}$, $\mathbf{J}$ *и* $\tilde{\mathbf{J}}$ *филтрације на простору вероватноће* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *такве да је*
$$\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{G}},\ \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}},\ \mathbf{J} = \tilde{\mathbf{J}} \quad P\text{-с.с.}$$
*и*
$$\tilde{\mathbf{H}} \subseteq \tilde{\mathbf{G}}.$$
*Ако је* $\mathbf{J}$ *узрочно предвидиво са* $\mathbf{H}$ *у односу на* $\mathbf{G}$, *тада је* $\tilde{\mathbf{J}}$ *узрочно предвидиво са* $\tilde{\mathbf{H}}$ *у односу на* $\tilde{\mathbf{G}}$.

*Доказ.* Према Теореми 4.4. из [56], овај резултат следи из инваријантности релације узрочности из Дефиниције 4.1.2 у односу на стохастичку еквивалентност. □

Инваријантност узрочне предвидивости у односу на стохастичку еквивалентност из Пропозиције 4.2.1 заснована је на релацији апсолутне непрекидности. За $A=\emptyset$, из услова *б*) из Дефиниције 4.2.1 следи

$$\hat{P}f^{-1} \ll P \ \text{ на } \ \mathcal{G}'_\infty.$$

Као последица ове релације уз увођење услова *б′*):

*б′*) за свако $A \in \mathcal{H}_\infty,\ t \in I$, постоји $g$, које је $\mathbf{G}'$-мерљиво и такво да важи

$$g(A) = P(A \mid \mathcal{G}'_t)\,(P\text{-с.с.}) \ \text{ и } \ g\circ f(A) = \widehat{P}(f^{-1}(A) \mid \widehat{\mathcal{G}}'_t)\,(\widehat{P}\text{-с.с.}),$$

непосредно се добија следећи резултат.

**Пропозиција 4.2.2.** *[50] Еквивалентна дефиниција узрочне предвидивости се добија када се услов б) из Дефиниције 4.2.1 замени условима $\hat{P}f^{-1} \ll P$ на $\mathcal{G}'_\infty$ и б′).*

**Лема 4.2.3.** *[51] Услови б) и в) из Дефиниције 4.2.1 се могу заменити следећим условом*

*г) за свако $A \in \mathcal{H}_\infty,\ t \in I$,*

$$\left.\begin{array}{l} g(A) = P(A \mid \mathcal{G}'_t)\,(P\text{-а.с.}) \\ g \text{ је } \mathbf{G}'\text{-мерљиво} \end{array}\right\} \Rightarrow g\circ f(A) = \hat{P}(f^{-1}(A) \mid \hat{\mathcal{F}}_t) \quad (\hat{P}\text{-с.с.}).$$

*Доказ.* Из Леме 4.2.2 следи да се услов *в*) из Дефиниције 4.2.1 може заменити условом *в′*), који значи да је за свако $A \in \mathcal{H}_\infty$ и $t \in I$

$$\hat{P}(f^{-1}(A)|\hat{\mathcal{G}}'_t) = \hat{P}(f^{-1}(A)|\hat{\mathcal{F}}_t), \tag{4.8}$$

па су услови *б*) и *г*) еквивалентни ако важи *в′*). Услов *г*) имплицира да се $\hat{P}(f^{-1}(A)|\hat{\mathcal{F}}_t)$ може изабрати тако да буде мерљиво у односу на $\hat{\mathbf{G}}'$ за $A \in \mathcal{H}_\infty$, одакле следи (4.8). □

**Теорема 4.2.1.** *[52] Нека су $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \in I\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t, t \in I\}$ и $\mathbf{J} = \{\mathcal{J}_t, t \in I\}$ филтрације на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ са заједничким параметарским скупом $I = [0, t_0]$ такве да је $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}$ и $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{G}$. Ако је $\mathbf{J}$ узрочно предвидиво са $\mathbf{H}$ у односу на $\mathbf{G}$ у смислу Дефиниције 4.2.1, тада за сваку вероватносну меру $Q$ на $\mathcal{G}_\infty$ која задовољава*

$$Q \ll P \ (\text{на } \mathcal{G}_\infty) \tag{4.9}$$

*и за коју за свако $A \in \mathcal{H}_\infty$ и $t \in I$ важи*

$$\left.\begin{array}{l} g = P(A \mid \mathcal{G}_t) \ \ (P\text{-с.с.}) \\ g \text{ је } \mathbf{G}\text{-мерљиво} \end{array}\right\} \Rightarrow g = Q(A \mid \mathcal{G}_t) \ \ (Q\text{-с.с.}) \tag{4.10}$$

*важи и следеће*

*за свако* $A \in \mathcal{J}_\infty$ *и* $t \in I$

$$\left.\begin{array}{l} g = P(A \mid \mathcal{G}_t) \ \ (P\text{-с.с.}) \\ g \text{ је } \mathbf{G}\text{-мерљиво} \end{array}\right\} \Rightarrow g = Q(A \mid \mathcal{G}_t) \ \ (Q\text{-с.с.}). \tag{4.11}$$

*Доказ.* Нека је $\mathbf{J}$ узрочно предвидиво са $\mathbf{H}$ у односу на $\mathbf{G}$ и $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P}) = (\Omega, \mathcal{G}_\infty, Q)$ у дефиницији узрочне предвидивости при чему је $f(\omega) = \omega$. Из услова *б*) у Дефиницији 4.2.1 следи да је $Q \ll P$. Такође, из релација *б*) и *в*) из Дефиниције 4.2.1 следи да за свако $A \in \mathcal{H}_\infty$ важи

$$P(A|\mathcal{G}_t) = Q(A|\mathcal{G}_t).$$

Тада, из узрочне предвидивости следи да релација (4.6) такође важи и може се на сличан начин закључити да за свако $A \in \mathcal{J}_\infty$ важи

$$P(A|\mathcal{G}_t) = Q(A|\mathcal{G}_t).$$

□

**Напомена 4.2.1.** *Претходни резултат важи и када је* $Q \sim P$ *на* $\mathcal{G}_\infty$. *У том случају је услов (4.10) еквивалентан са*

$$\forall A \in \mathcal{H}_\infty \ \forall t \in I \quad P(A|\mathcal{G}_t) = Q(A|\mathcal{G}_t) \ \ (P - \text{с.с. и } Q - \text{с.с.})$$

*и, слично, услов (4.11) је еквивалентан са*

$$\forall A \in \mathcal{J}_\infty \ \forall t \in I \quad P(A|\mathcal{G}_t) = Q(A|\mathcal{G}_t) \ \ (P - \text{с.с. и } Q - \text{с.с.}).$$

Наредни резултат даје еквивалентне услове стохастичке предвидивости између филтрација.

**Пропозиција 4.2.3.** *[52] Нека су* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \in I\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t, t \in I\}$ *и* $\mathbf{J} = \{\mathcal{J}_t, t \in I\}$ *филтрације дефинисане на истом простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *са заједничким скупом параметара* $I$. *Нека је* $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}, \mathbf{J} \subseteq \mathbf{G}$ *и нека су*

$$H = \{\{M_t\} : M_t \text{ је } \mathbf{G}\text{-мартингал и } \exists A \in \mathcal{H}_\infty \ \ M_t = P(A|\mathcal{G}_t), \forall t \in I\},$$

$$J = \{\{M_t\} : M_t \text{ је } \mathbf{G}\text{-мартингал и } \exists A \in \mathcal{J}_\infty \ \ M_t = P(A|\mathcal{G}_t), \forall t \in I\}$$

*колекције мартингала. Следећа тврђења су еквивалентна*

*1)* $\mathbf{J}$ *је стохастички предвидиво са* $\mathbf{H}$ *у односу на* $\mathbf{G}$.

*2) За свако проширење* $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$ *простора вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *са филтрацијама* $\hat{\mathbf{F}}$ *и* $\hat{\mathbf{G}}$ *које задовољава*

$$\hat{\mathbf{G}} \subseteq \hat{\mathbf{F}},\ \hat{P}f^{-1} \ll P \text{ на } \mathcal{G}_\infty,\ \frac{d\hat{P}f^{-1}}{dP} \in L^1(\Omega, \mathcal{G}_\infty, P)$$

*за које важи да је*

$$\hat{H} = \{\{\hat{M}_t\} : \hat{M}_t(\hat{\omega}) = M_t(f(\hat{\omega})), \{M_t\} \in H\}$$

*колекција* $\hat{\mathbf{F}}$*-мартингала у односу на* $\hat{P}$*, важи и да је*

$$\hat{J} = \{\{\hat{M}_t\} : \hat{M}_t(\hat{\omega}) = M_t(f(\hat{\omega})), \{M_t\} \in J\}$$

*колекција* $\hat{\mathbf{F}}$*-мартингала у односу на* $\hat{P}$*.*

*Доказ.* 1) $\Rightarrow$ 2) Из услова *б*) у Дефиницији 4.2.1 директно следи да је $\hat{P}f^{-1} \ll P$. Услов *в*) се може записати у облику

за свако $\hat{A} \in \hat{\mathcal{H}}_\infty$

$$\hat{M}_t = \hat{P}(\hat{A}|\hat{\mathcal{G}}_t) = \hat{P}(\hat{A}|\hat{\mathcal{F}}_t),$$

па је $\hat{H}$ колекција мартингала у односу на $\hat{\mathbf{F}}$. Сада, из узрочне предвидивости следи да (4.6) мора бити испуњено, одакле се лако може показати да је $\hat{J}$ колекција мартингала у односу на $\hat{\mathbf{F}}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Довољно је доказати да из 2) следи услов *б*), све остало следи из добро познатих особина мартингала. Нека је $A \in \mathcal{H}_\infty$ и $g(A) = P(A \mid \mathcal{G}_t)\,(P\text{-с.с.})$. Како је $g \in H$, следи $g = M_t$. Сада,

$$g \circ f(A) = P(A \mid \mathcal{G}_t) \circ f = M_t \circ f(A) = \hat{M}_t = \hat{P}(f^{-1}(A) \mid \hat{\mathcal{F}}_t) = \hat{P}(f^{-1}(A) \mid \hat{\mathcal{G}}_t),$$

где је $f^{-1}(A) \in \hat{\mathcal{H}}_\infty$. □

У наставку су дати примери који повезују појам узрочне предвидивости из Дефиниције 4.2.1 са неким познатим појмовима из теорије случајних процеса.

**Пример 4.2.1.** *[51] Нека су* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *и* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ *филтрације дефинисане на комплетном простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *такве да* $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$*. Ако је* $\mathbf{F}$ *узрочно предвидиво са* $\mathbf{G}$*, тада важи да је* $T$ $\mathbf{G}$*-време заустављања ако и само ако важи да је* $\mathbf{F}$*-време заустављања, које је такође* $\mathcal{G}_\infty$*-мерљиво,*

**Пример 4.2.2.** *[51] Нека су* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *и* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ *филтрације дефинисане на комплетном простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *такве да* $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$*. Ако је* $\mathbf{F}$ *узрочно предвидиво са* $\mathbf{G}$*, тада је стохастички процес* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ $\mathbf{G}$*-опциони процес ако и само ако је* $\mathbf{F}$*-опциони процес, такав да је* $X_t$ $\mathcal{G}_\infty$*-мерљиво, за свако* $t \in I$*.*

У наредном резултату је показано како се теорија узрочне предвидивости може применити на слабу јединственост слабих решења стохастичке диференцијалне једначине Итоа (3.1) непознатог $d$-димензионог процеса $X = \{X_t, t \in [\alpha, \beta]\}$ са почетним условом $X_\alpha = X_0$, односно

$$\mathrm{d}X_t = a\,(t, X_t)\,\mathrm{d}t + b\,(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t,\ \ t \in [\alpha, \beta],\ \ X_\alpha = X_0,$$

где је $W = \{W_t, t \geq 0\}$ $d$-димензиони Винеров процес, $X_0$ случајна променљива независна од процеса $W$ и $a : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ и $b : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ су неслучајне Борел мерљиве функције у својим доменима.

**Теорема 4.2.2.** *[50] Нека стохастичка диференцијална једначина (3.1) има слабо решење. Ако је за свако слабо решење* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, W, X)$ *једначине (3.1)* $\mathbf{F}^X$ *узрочно предвидиво са* $\mathbf{F}^W$ *у односу на* $\mathbf{F}^{X,W}$*, тада је решење слабо јединствено.*

*Доказ.* Ако је $\mathbf{F}^X$ узрочно предвидиво са $\mathbf{F}^W$ у односу на $\mathbf{F}^{X,W}$, из Дефиниције 4.2.1 узрочне предвидивости за $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P}) = (\Omega, \mathcal{A}, P)$, следи да је $X$ узроковано са $X$ и са $W$ у оквиру $\mathbf{F}$, тј. важи $\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^{X,W}; \mathbf{F}; P$.

Нека су сада $(\Omega^i, \mathcal{A}^i, \mathbf{F}^i, P^i, W^i, X^i)$, $i = 1, 2$, два слаба решења једначине (3.1). Без умањења општости, може се претпоставити да је $\Omega^1 \cap \Omega^2 = \emptyset$. Нека је

$$\begin{aligned}
\Omega &= \Omega^1 \cup \Omega^2 \\
\mathcal{A} &= \left\{A \cup B : A \in \mathcal{A}^1,\ B \in \mathcal{A}^2\right\} \\
\mathcal{F}_t &= \left\{A \cup B : A \in \mathcal{F}_t^1,\ B \in \mathcal{F}_t^2\right\} \\
P(A \cup B) &= \frac{1}{2}[P(A) + P(B)],\ \text{за } A \in \mathcal{A}^1,\ B \in \mathcal{A}^2, \\
W_t(\omega) &= \begin{cases} W_t^1(\omega) \text{ за } \omega \in \Omega^1 \\ W_t^2(\omega) \text{ за } \omega \in \Omega^2 \end{cases}, \\
X_t(\omega) &= \begin{cases} X_t^1(\omega) \text{ за } \omega \in \Omega^1 \\ X_t^2(\omega) \text{ за } \omega \in \Omega^2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Тада је $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}^i, P, W, X)$ слабо решење једначине (3.1).

Нека је

$$j(\omega) = \begin{cases} 1,\ \text{за } \omega \in \Omega^1 \\ 2,\ \text{за } \omega \in \Omega^2 \end{cases}, \quad .$$

Тада су $X_0$ и $j$ независни. Следи да је $\mathcal{F}_\infty^X$ условно независно од $\mathcal{F}_0$ у односу на $\mathcal{F}_0^X$ (где је $W_0 = 0$), јер је $X$ узроковано са $X$ и са $W$ у оквиру $\mathbf{F}$. Према Теореми 2.5

из [56] следи да је $\mathcal{F}_\infty^X$ независно од $j$, што имплицира да је вероватноћа $P(X \in A|j)$ константна за $A \in \mathcal{B}(C^d)$ $P$-с.с. Сада, како

$$P(X \in A|j)(\omega) = P(X^i \in A)$$

важи за скоро све $\omega \in \Omega^i$ ($P$-с.с. и $P^i$-с.с.), следи да је

$$P(X^1 \in A) = P(X^2 \in A),$$

што показује да је решење слабо јединствено.

□

На основу Теореме 4.2.2 лако се доказује следећи резултат.

**Пропозиција 4.2.4.** *[50] Нека стохастичка диференцијална једначина (3.1) има слабо решење. Ако је за свако слабо решење* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, W, X)$ *једначине (3.1),* $X$ *сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$*, тада је решење слабо јединствено.*

*Доказ.* Претпоставимо да је $X$ сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F}$, тј. да важи $\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}$. На основу Дефиниције 4.1.2 узрочности и $\mathbf{F}^X \subseteq \mathbf{F}^{X,W} \subseteq \mathbf{F}$, важи

$$\forall A \in \mathcal{F}_\infty^X, \quad P(A|\mathcal{F}_t^X) = P(A|\mathcal{F}_t) = P(A|\mathcal{F}_t^{X,W}).$$

Следи да је $X$ узроковано са $X$ и са $W$ у оквиру $\mathbf{F}$, тј. да важи $\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^{X,W}; \mathbf{F}; P$. Сада се, слично као у доказу Теореме 4.2.2, закључује да је решење слабо јединствено.

□

У наставку ће бити разматрана стохастичка диференцијална једначина (3.4) непознатог $d$-димензионог процеса $X = \{X_t, t \geq 0\}$

$$\mathrm{d}X_t = u_t(X)\mathrm{d}Z_t, \quad X_0 = x,$$

где је $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ $m$-димензиони семимартингал, а $u_t(X)$ предиктабилан процес који зависи од трајекторија процеса $X$.

Као што је напоменуто у Поглављу 3.2, главни резултати који се односе на јединственост слабог решења стохастичке диференцијалне једначине (3.4) ће бити засновани на приступу који је развио Микланд [57], па су наредне дефиниције, повезане са решењем једначине (3.4), преузете управо из [57].

**Дефиниција 4.2.2.** *За стохатистичку диференцијалну једначину облика (3.4),* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, Z, X)$ *је регуларно слабо решење ако важи*

*а)* $\mu(A) = P(Z \in A)$ *се поклапа са унапред задатом мером на простору где* $Z$ *узима вредности,*

*б) процеси* $X$ *и* $Z$ *задовољавају (3.4),*

*в)* $Z$ *је сопствени узрок у оквиру* $F$ *у односу на* $P$*, тј. важи* $\mathbf{F}^Z \mid\!< \mathbf{F}^Z; \mathbf{F}; P$.

**Дефиниција 4.2.3.** *Регуларно слабо решење је слабо јединствено ако ни за једно регуларно слабо решење* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, Z, X)$ *стохастичке диференцијалне једначине (3.4) не постоји мера* $Q$ *на* $\mathcal{F}_\infty^{X,Z}$ *таква да је* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{X,Z}, \mathbf{F}^{X,Z}, Q, Z, X)$ *регуларно слабо решење стохастичке диференцијалне једначине (3.4).*

**Дефиниција 4.2.4.** *Екстремно регуларно слабо решење* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, Z, X)$ *стохастичке диференцијалне једначине (3.4) је регуларно слабо решење ако постоје мере* $Q_1$ *и* $Q_2$ *на* $\mathcal{F}_\infty^{X,Z}$ *такве да за* $P = a_1Q_1 + a_2Q_2, a_1, a_2 > 0$ *на* $\mathcal{F}_\infty^{X,Z}$ *и за које је* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{X,Z}, \mathbf{F}^{X,Z}, Q_i, Z, X)$ *регуларно слабо решење, важи да је* $Q_1 = Q_2 = P$ *на* $\mathcal{F}_\infty^{X,Z}$.

Наредна теорема даје услове за јединственост слабог решења стохастичке диференцијалне једначине (3.4) у терминима узрочне предвидивости.

**Теорема 4.2.3.** *[50] Нека једначина (3.4) има регуларно слабо решење. Ако је за свако регуларно слабо решење* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, Z, X)$ *једначине (3.4)* $\mathbf{F}^{X,Z}$ *узрочно предвидиво са* $\mathbf{F}^X$ *у односу на* $\mathbf{F}^{X,Z}$*, тада је решење слабо јединствено.*

*Доказ.* Нека за регуларно слабо решење $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, Z, X)$ једначине (3.4) важи да је $\mathbf{F}^{X,Z}$ узрочно предвидиво са $\mathbf{F}^X$ у односу на $\mathbf{F}^{X,Z}$.

Прво ће бити показано да је вероватноћа $P$ екстремна на $\mathcal{F}_\infty^{X,Z}$. Нека важи супротно, да $P$ није екстремна, тј. да важи $P = a_1Q_1 + a_2Q_2,\ a_1, a_2 > 0$, тако да се $Q_1$ и $Q_2$ поклапају на $\mathcal{F}_0^{X,Z}$, али да је $Q_1 \neq Q_2$. Дефинише се проширење простора вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{X,Z}, P)$ из дефиниције узрочне предвидивости на следећи начин

$$\hat{\Omega} = \Omega \times \{p, q\}$$

$$\hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t^{X,Z} \times \{\phi, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$$

и

$$\hat{P}(A \times \{p\} \cup B \times \{q\}) = \frac{1}{2}\left(Q_1(A) + Q_2(B)\right).$$

Лако се проверава да су услови из дефиниције узрочне предвидивости испуњени, али да (4.6) не важи, тј. да

$$\hat{\mathbf{F}}^{X,Z} \mid\!< \hat{\mathbf{F}}^{X,Z}; \hat{\mathbf{F}}, \hat{P}$$

не важи, што је у контрадикцији са претпоставком да је $\mathbf{F}^{X,Z}$ узрочно предвидиво са $\mathbf{F}^X$ у односу на $\mathbf{F}^{X,Z}$. Дакле, $P$ је екстремна мера на сваком регуларном слабом решењу. Сада, из [57] следи да је решење слабо јединствено. □

**Напомена 4.2.2.** *[50] Треба напоменути да Теорема 4.2.2, Пропозиција 4.2.4 и Теорема 4.2.3 важе и кад се посматрају различити начини дефинисања узрочне предвидивости као што је дато у Леми 4.2.1 и Леми 4.2.2.*

## 4.3 Стохастичка предвидивост између случајних процеса и филтрација и примена на стохастичке диференцијалне једначине

Условна предвидивост из Дефиниције 4.2.1 представља концепт успостављен између филтрација. Даље ће се разматрати узрочне релације између случајних процеса и филтрација. Теорема 4.2.1 ће послужити као мотивација за увођење оваквог концепта.

Нека су $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \in I\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t, t \in I\}$ и $\mathbf{J} = \{\mathcal{J}_t, t \in I\}$ филтрације на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ са заједничким параметарским скупом $I = [0, t_0]$ такве да $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}, \mathbf{J} \subseteq \mathbf{G}$. При условима Теореме 4.2.1, ако за произвољну вероватносну меру $Q$ на $\mathcal{G}_\infty$ која задовољава

$$Q \ll P \text{ (на } \mathcal{G}_\infty)$$

за свако $A \in \mathcal{H}_\infty$ и $t \in I$ важи

$$P(A|\mathcal{G}_t) = Q(A|\mathcal{G}_t),$$

тада за свако $A \in \mathcal{J}_\infty$ и $t \in I$ важи

$$P(A|\mathcal{G}_t) = Q(A|\mathcal{G}_t).$$

Узимајући у обзир претходни резултат, природно је увести дефиницију узрочне предвидивости између случајног процеса и филтрације.

**Дефиниција 4.3.1.** *[52] Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{G}, P)$ вероватносни простор са филтрацијом који садржи филтрацију $\mathbf{J} = \{\mathcal{J}_t, t \in I\}$ и непрекидан $\mathbf{G}$-локални мартингал $M$. Каже се да је $\mathbf{J}$ узрочно предвидиво са $M$ у односу на $\mathbf{G}$ (не пише се ако $\mathbf{G} = \mathbf{J}$) ако за сваку вероватносну меру $Q$ на $\mathcal{G}_\infty$ која задовољава:*

*а) $P$ и $Q$ се поклапају на $\mathcal{G}_0$,*

*б)*

$$Q \ll P \quad (\text{на } \mathcal{G}_\infty), \tag{4.12}$$

*в) $M$ је локални мартингал у односу на $Q$,*

*важи*

$$\forall A \in \mathcal{J}_\infty \ \forall t \in I \quad Q(A|\mathcal{G}_t) = P(A|\mathcal{G}_t) \quad (Q - с.с.). \tag{4.13}$$

Треба приметити да релација (4.13) има исто значење као релација (4.11).

Пратећи резултате из [43], који се односе на Теорему о репрезентацији за случај природне филтрације Брауновог кретања, у наредном примеру су дати услови за репрезентацију квадратно интеграбилних мартингала у терминима узрочне предвидивости.

**Пример 4.3.1.** *Нека је* $\mathbf{G} = \mathbf{G}^W$, *где је* $W = \{W_t, t \geq 0\}$ *Брауново кретање и* $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$. *Ако је* $\mathbf{F}$ *стохастички предвидиво са* $\mathbf{G}$, *тада се произвољан* $\mathbf{G}$*-квадратно интеграбилни мартингал може представити као збир стохастичког интеграла у односу на Брауново кретање и стохастичког интеграла у односу на непрекидан мартингал* $M$.

Даље ће се разматрати примене уведеног концепта узрочне предвидивости на стохастичку диференцијалну једначину облика (3.1).

Прво се наводе неки познати појмови које ће се користити у наставку рада. У наставку ће интервал $I$ бити $I = [0, t_0]$. Нека је $C^d$ простор свих непрекидних функција из $I$ у $\mathbb{R}^d$, а $\sigma$-алгебра на $C^d$ у односу на коју су све функције $\epsilon_u : C^d \to \mathbb{R}$,

$$\epsilon_u(x) = x_u$$

мерљиве за $u \leq t$, биће означен са $\mathcal{B}_t(C^d)$. Такође,

$$\mathcal{B}(C^d) = \mathcal{B}_{t_0}(C^d).$$

Непрекидан $d$-димензиони случајан процес $X = \{X_t, t \in I\}$ генерише меру $\mu_X$ на $\mathcal{B}(C^d)$ (видети [47]), на следећи начин

$$\mu_X(B) = P(X(\omega) \in B).$$

Разматра се $\{\mathcal{B}_t(C^d), t \in I\}$-функционал облика

$$m_t(x) = x_t - \int_0^t a_s(x)ds.$$

Ако је $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, W, X)$ слабо решење једначине (3.1), тада је

$$m_t(X) = X_t - \int_0^t a_s(X)ds = \int_0^t b_s(X)dW_s + X_0,$$

па је $\{m_t(X), t \in I\}$ $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$-мартингал у односу на $P$. Према Пропозицији 15.1 у [61] следи да су следећа тврђења еквивалентна

1) $\{m_t(X), t \in I\}$ је $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$-мартингал у односу на $P$,

2) $\{m_t, t \in I\}$ је $\{\mathcal{B}_t(C^d), t \in I\}$-мартингал у односу на $\mu_X$.

Према Теореми 1.1 у [15], следи да за свако $\{\mathcal{F}_t^X, t \in I\}$-време заустављања $\tau$ постоји $\{\mathcal{B}_t(C^d), t \in I\}$-време заустављања $\sigma$ такво да је $\tau = \sigma(X)$. Из непрекидности $\{m_t, t \in I\}$, закључује се да је $\{m_t, t \in I\}$ $\{\mathcal{B}_t(C^d), t \in I\}$-локални мартингал у односу на $\mu_X$ ако и само ако је $\{m_t(X), t \in I\}$ $\{\mathcal{F}_t^X, t \in I\}$-локални мартингал у односу на $P$.

Мера $\nu$ се назива максимална мера (у смислу апсолутне непрекидности $\ll$) на $\mathcal{B}(C^d)$ једначине (3.1) ако је индукована слабим решењем те једначине и ако за било коју вероватносну меру $\mu$ на $\mathcal{B}(C^d)$ индуковану слабим решењем важи $\mu \ll \nu$.

**Теорема 4.3.1.** *[52] Нека стохастичка диференцијална једначина (3.1) има слабо решење и нека је $\nu$ максимална мера једначине (3.1). Следећа тврђења су еквивалентна:*

*1) $\{\mathcal{B}_t(C^d), t \in I\}$ је узрочно предвидиво са $\{m_t, t \in I\}$, где је*

$$m_t(x) = x_t - \int_0^t a_s(x)ds, \ t \in I$$

*у односу на меру $\nu$.*

*2) За свако слабо решење $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, W, X)$ једначине (3.1), $\mathbf{F}^X$ је узрочно предвидиво са $M = \{M_t, t \in I\}$, где је*

$$M_t = X_t - \int_0^t a_s(X)ds, \ t \in I. \tag{4.14}$$

*3) Постоји слабо решење $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, W, X)$ једначине (3.1) које индукује меру $\nu$ на $\mathcal{B}(C^d)$ и где је $\mathbf{F}$ узрочно предвидиво са $M$ из (4.14).*

*Доказ.* 1) $\Rightarrow$ 2) Нека је $\{\mathcal{B}_t(C^d), t \in I\}$ узрочно предвидиво са

$$m_t(x) = x_t - \int_0^t a_s(x)ds, \ t \in I$$

у односу на меру $\nu$. Како би се показало да је за свако слабо решење $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, W, X)$ једначине (3.1), $\mathbf{F}^X$ узрочно предвидиво са $M$, треба показати да (4.13) важи ако се претпостави да је $Q$ мера на $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X)$ за коју важи да је апсолутно непрекидна у односу на меру $P$, односно $Q \ll P$ на $\mathcal{F}_\infty^X$, да се поклапа са $P$ на $\mathcal{F}_0^X$ и у односу на коју је $M$ локални мартингал.

Треба приметити да важи

$$M_t = m_t(X), \ t \in I,$$

где је $X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (C^d, \mathcal{B}(C^d))$ мерљива фукнција. Нека је $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ $\{\mathcal{B}_t(C^d), t \in I\}$-времена заустављања која своде $\{m_t, t \in I\}$ до на ограниченост. Дефинишимо

$$H = \{\{m^{(i)}_{t\wedge\tau_n}\} : t \in I, i = 1, \ldots, d, n = 1, 2, \ldots\}$$

и

$$J = \{\{l_t\} : \exists A \in \mathcal{B}(C^d),\ \forall t \in I \quad l_t = \nu(A|\mathcal{B}_t(C^d))\}.$$

Тада $H, J \subset \{\{N_t\} : N_t$ је $\{\mathcal{B}_t(C^d)\}$-адаптиран и $\exists\eta \in L^\infty(C^d, \mathcal{B}(C^d), \nu), N_t = E(\eta|\mathcal{B}_t(C^d)),$ $\forall t \in I\}$. Према теореми о опционом заустављању и теореми о доминантној конвергенцији, $H$ је колекција $\{\mathcal{B}_t(C^d), t \in I\}$-мартингала у односу на меру $\nu$ јер је $\{m_t, t \in I\}$ $\{\mathcal{B}_t(C^d), t \in I\}$-локални мартингал у односу на меру $\nu$. Дефинишимо $\hat{H}$ и $\hat{J}$ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}^X, P)$ на следећи начин

$$\hat{H} = \{\{\hat{N}_t\} : \hat{N}_t(\hat{\omega}) = N_t(X(\hat{\omega})) : (N_t) \in H,\ t \in I\},$$

$$\hat{J} = \{\{\hat{N}_t\} : \hat{N}_t(\hat{\omega}) = N_t(X(\hat{\omega})) : (N_t) \in J,\ t \in I\}.$$

Према претпоставци о максималности мере $\nu$ важи

$$PX^{-1} \ll \nu,$$

одакле је

$$QX^{-1} \ll \nu.$$

Применом Теореме 1.1 из [15], једноставно се добија да је $\sigma_n = \tau_n(X)$ низ $\mathbf{F}^X$-времена заустављања и како је $M$, следи да $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ своди $M$ до на ограниченост, односно на ограничене мартингале у односу на мере $Q$ и $P$. Како је $\hat{H}$ у овом случају дато са

$$\hat{H} = \{\{M^{(i)}_{t\wedge\sigma_n}\}, t \in I, i = 1, \ldots d, n = 1, 2 \ldots\},$$

следи да је $\hat{H}$ колекција $\mathbf{F}^X$-мартингала у односу на мере $Q$ и $P$.

Остаје да се покаже да је $\hat{J}$ такође колекција $\mathbf{F}^X$-мартингала у односу на мере $P$ и $Q$, одакле (4.13) директно следи.

Како би се показало да је $\hat{J}$ колекција $\mathbf{F}^X$-мартингала у односу на мере $P$ и $Q$, уводи се $\hat{\mathcal{B}}_t(C^d) = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}_t(C^d)\}$ и филтрација $\hat{\mathbf{F}}$ дефинисана на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, такве да је $\hat{\mathcal{B}}(C^d) \subseteq \hat{\mathbf{F}}$. Довољно је показати да је $\hat{J}$ колекција $\hat{\mathbf{F}}$-мартингала у односу на меру $P$ јер је доказ за меру $Q$ аналоган. Нека важи претпоставка да $\hat{J}$ није $\hat{\mathbf{F}}$-мартингал у односу на $P$, односно да постоје $M \in J$, $u \in T$ и $\hat{A} \in \hat{\mathcal{F}}_u$, такви да, ако важи $\hat{M}_t(\hat{\omega}) = M_t(X(\hat{\omega}))$ следи

$$\int_{\hat{A}} \hat{M}_\infty dP \neq \int_{\hat{A}} \hat{M}_u dP. \tag{4.15}$$

За $\eta \in L^{\infty}(C^d, \mathcal{B}(C^d), \nu)$, према Хелдеровој неједнакости и Пропозицији 15.1 из [61], следи

$$\hat{E}|\eta \circ X| \leq ||\eta||_{\infty} \left|\left|\frac{dPX^{-1}}{d\eta}\right|\right|_1, \tag{4.16}$$

па је функционал

$$\Phi(\eta) = \hat{E}[1_{\hat{A}}\hat{E}(\eta \circ X|\hat{\mathcal{B}}_u(C^d)) + 1_{\hat{A}^C}(\eta \circ X)]$$

добро дефинисан. Јасно је да је $\Phi$ линеаран функционал и према (4.16) и Јенсеновој неједнакости следи да је $\Phi$ ограничен. Како је $\Phi(\eta) \geq 0$ за $\eta \geq 0$ и како је $\Phi(1) = 1$, $\Phi$ је оператор математичког очекивања у односу на меру $\mu$ на $\mathcal{B}(C^d)$

$$\forall C \in \mathcal{B}(C^d) \qquad \mu(C) = \Phi(1_C).$$

Тада је $\mu \ll \nu$ и према Рицовој теореми о репрезентацији важи да $\frac{d\mu}{d\nu} \in L^{\infty}(C^d, \mathcal{B}(C^d), \nu)$.

Нека је $\{N_t, t \in I\} \in H$, $s \in I$ и $B \in \mathcal{B}_s(C^d)$. Нека је $\{\hat{N}_t, t \in I\} \in \hat{H}$ и $\hat{B} \in \hat{\mathcal{B}}_s(C^d)$, тако да $\hat{B} = X^{-1}(B)$ и $\hat{N}_t(\hat{\omega}) = N_t(X(\hat{\omega}))$.

Нека је $s \leq u$. По претпоставци је $\hat{H}$ $\hat{\mathbf{F}}$-мартингал у односу на меру $P$, тако да следи

$$\forall\{\hat{M}_t\} \in \hat{H} \ \forall t \in I \qquad \hat{E}(\hat{M}_{\infty}|\hat{\mathcal{F}}_t) = M_t$$

и према $\hat{\mathcal{B}}_u(C^d)$-мерљивости од $\hat{N}_u$ је

$$\hat{E}(\hat{N}_{\infty}|\hat{\mathcal{F}}_u) = \hat{E}(\hat{N}_{\infty}|\hat{\mathcal{B}}_u(C^d)).$$

Сада, како је $\hat{A} \in \hat{\mathcal{F}}_u$ и $\hat{B} \in \hat{\mathcal{B}}_u(C^d) \subset \hat{\mathcal{F}}_u$ следи

$$1_{\hat{A}}\hat{E}(1_{\hat{B}}\hat{N}_{\infty}|\hat{\mathcal{B}}_u(C^d)) = \hat{E}(1_{\hat{A}}1_{\hat{B}}\hat{N}_{\infty}|\hat{\mathcal{F}}_u).$$

Дакле,

$$\Phi(1_B N_{\infty}) = \hat{E}(1_{\hat{B}}\hat{N}_{\infty}). \tag{4.17}$$

Како је $\hat{H}$ $\hat{\mathbf{F}}$-мартингал у односу на меру $P$ и $\hat{B} \in \hat{\mathcal{F}}_s$, то је

$$\hat{E}(1_{\hat{B}}\hat{N}_{\infty}) = \hat{E}(1_{\hat{B}}\hat{N}_s). \tag{4.18}$$

Како је $\hat{N}_s$ $\hat{\mathcal{B}}_u(C^d)$-мерљиво, следи

$$\Phi(1_B N_s) = \hat{E}(1_{\hat{B}}\hat{N}_s). \tag{4.19}$$

Може се закључити да важи

$$\Phi(1_B N_{\infty}) = \Phi(1_B N_s). \tag{4.20}$$

Нека је сада $s > u$. Како је $\hat{H}$ $\hat{\mathbf{F}}$-мартингал у односу на меру $P$ и $B \in \hat{\mathcal{B}}_s(C^d) \subset \hat{\mathcal{F}}_s$ важи $1_{\hat{B}}\hat{N}_s = \hat{E}(1_{\hat{B}}\hat{N}_\infty|\hat{\mathcal{F}}_s)$, па како је $\hat{\mathcal{B}}_u(C^d) \subset \hat{\mathcal{F}}_s$,

$$\hat{E}(1_{\hat{B}}\hat{N}_s|\hat{\mathcal{B}}_u(C^d)) = \hat{E}(1_{\hat{B}}\hat{N}_\infty|\hat{\mathcal{B}}_u(C^d)). \tag{4.21}$$

Како је $\hat{A}^c \cap \hat{B} \in \hat{\mathcal{F}}_s$ следи да је

$$\hat{E}(1_{\hat{A}^c}1_{\hat{B}}\hat{N}_\infty|\hat{\mathcal{F}}_s) = 1_{\hat{A}^c}1_{\hat{B}}\hat{N}_s. \tag{4.22}$$

Из (4.21) и (4.22), следи да (4.20) важи и у овом случају.

Дакле, следи да је $H$ колекција $\{\mathcal{B}_t(C^d), t \in I\}$-мартингала у односу на меру $\mu$ и да је $\{m_t, t \in I\}$ локални мартингал у односу на $\mu$.

Из претпоставке о узрочној предвидивости, прецизније, из (4.13) следи да је $J$ такође $\{\mathcal{B}_t(C^d), t \in I\}$-мартингал у односу на меру $\mu$. Тада је

$$\int M_\infty d\mu = \int M_u d\mu = \hat{E}(1_{\hat{A}}\hat{M}_u) + \hat{E}(1_{\hat{A}^c}\hat{M}_u).$$

Према Пропозицији 15.1 у [61] следи да је $M$ $\{\mathcal{B}_t(C^d), t \in I\}$-мартингал у односу на $PX^{-1}$, па је $\hat{E}(\hat{M}_\infty|\hat{B}_u(C^d)) = \hat{M}_u$. Дакле,

$$\int M_\infty d\mu = \hat{E}(1_{\hat{A}}\hat{M}_u) + \hat{E}(1_{\hat{A}^c}\hat{M}_\infty),$$

што је у контрадикцији са релацијом (4.15).

2) $\Rightarrow$ 3) Резултат следи директно преласком са општег случаја при претпоставци да решење постоји.

3) $\Rightarrow$ 1) Нека је простор вероватноћа проширен тако да $X : \Omega \to C^d$ буде сурјективно пресликавање, али уз очување вероватносне структуре. Тада постоји функција $f : C^d \to \Omega$ која задовољава

$$f(x) \in X^{-1}(\{x\})$$

за свако $x \in C^d$. За $A \in \mathcal{F}_t^X$ је

$$f^{-1}(A) = X(A) \in \mathcal{B}_t(C^d).$$

Остатак доказа се заснива на идејама доказа за случај 1) $\Rightarrow$ 2), само у супротном смеру. $\square$

Наредна теорема представља важан резултат јер повезује узрочну предвидивост из Дефиниције 4.3.1 и јединственост слабог решења стохастичке диференцијалне једначине.

**Теорема 4.3.2.** *[52] Ако је за свако слабо решење* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, W, X)$ *једначине (3.1),* $\mathbf{F}^X$ *узрочно предвидиво са*

$$M_t = X_t - \int_0^t a_s(X)ds, \ t \in I, \tag{4.23}$$

*тада је* $X$ *сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$*.*

*Доказ.* Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, W, X)$ слабо решење једначине (3.1). Тада постоји низ $\mathbf{F}^X$-времена заустављања $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, такав да су $M_{t\wedge\tau_n}$ ограничени мартингали у односу на $\mathbf{F}$ и $P$. Колекције $H$ и $J$ из Теореме 4.3.1 се дефинишу на следећи начин

$$H = \{\{M^{(i)}_{t\wedge\tau_n}\} : t \in I, i = 1, \dots, d, n = 1, 2, \dots\}$$

$$J = \{\{L_t\} : \exists A \in \mathcal{F}^X_\infty, \ \forall t \in I \quad L_t = P(A|\mathcal{F}^X_t)\}.$$

Тада важи да су елементи из $J$ такође мартингали у односу на $\mathbf{F}$ и $P$. Стога,

$$\forall A \in \mathcal{F}^X_\infty \quad P(A|\mathcal{F}_t) = P(A|\mathcal{F}^X_t),$$

што значи да је $X$ сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F}$. □

Наредни важан резултат следи на основу претходне теореме.

**Пропозиција 4.3.1.** *[52] Ако је за свако слабо решење* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, W, X)$ *једначине (3.1),* $\mathbf{F}^X$ *узрочно предвидиво са*

$$M_t = X_t - \int_0^t a_s(X)ds, \ t \in I \tag{4.24}$$

*тада је решење слабо јединствено.*

*Доказ.* Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P, W, X)$ слабо решење једначине (3.1). Из Теореме 4.3.2 следи да је $X$ сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F}$. Тада, према Пропозицији 4.2 у [50], закључује се да је решење слабо јединствено. □

## 4.4 Неке примене стохастичке предвидивости у финансијској математици

У области теорије вероватноћа, један од основних појмова је време заустављања дефинисано у Поглављу 1.2 - Дефиниција 1.1.15. Међутим, неке од примена теорије вероватноћа захтевају рад са случајним временима која нису времена заустављања, као што су примене у финансијској математици, теорији процеса Маркова и друге. У наставку се разматра класа случајних времена која се називају псеудо времена заустављања (енгл. $pseudo\ stopping - time$).

Познато је да за униформно интеграбилан мартингал $M = \{M_t, t \geq 0\}$ и време заустављања $T$ важи

$$EM_T = EM_\infty = EM_0$$

и

$$E[M_\infty | \mathcal{F}_T] = M_T.$$

Природно се поставља питање да ли наведене релације важе и у случају када се време заустављања $T$ замени случајним временом $\rho$ и када се $\mathcal{F}_T$ замени са $\mathcal{F}_\rho = \sigma\{Z_\rho, Z$ је произвољан $\mathbf{F}$-опциони процес$\}$. Неки од одговора се могу наћи у радовима [38] и [69]:

1) Постоји случајно време $\rho$, које се назива псеудо време заустављања, такво да, за сваки ограничен мартингал $M$ важи

$$EM_\rho = EM_0;$$

2) Ако за сваки ограничен мартингал $M$ важи

$$E[M_\infty | \mathcal{F}_\rho] = M_\rho,$$

тада је $\rho$ време заустављања.

Нека је $\mathcal{H}^1$ Банахов простор càdlàg $\mathbf{F}$- мартингала $M$ за које важи

$$||M||_{\mathcal{H}^1} = E \sup_{t \geq 0} |M_t| < \infty.$$

**Дефиниција 4.4.1.** *Случајно време $\rho$ се назива $\mathbf{F}$-псеудо време заустављања, ако за сваки $\mathbf{F}$-мартингал $M$ из $\mathcal{H}^1$ важи*

$$EM_\rho = EM_0.$$

Класа псеудо времена заустављања је шира од класе времена заустављања. Тако псеудо времена заустављања поседују неке од особина времена заустављања, што ће се видети у наставку. За разлику од времена заустављања, минимум и максимум два псеудо времена заустављања у општем случају не морају бити псеудо времена заустављања.

У наставку је наведен један пример конструкције псеудо времена заустављања.

**Пример 4.4.1.** *Нека је $B = \{B_t, t \geq 0\}$ једнодимензионо Брауново кретање, у односу на филтрацију* $\mathbf{F}$ *и нека је $g_t = \sup\{s < t : B_s = 0\}$. Тада је*

$$\rho_t = \sup\left\{s < g_t : \frac{|B_s|}{\sqrt{t-s}} = \sup_{u<g_t} \frac{|B_u|}{\sqrt{t-u}}\right\}$$

$\mathbf{F}$*-псеудо време заустављања.*

Класа псеудо времена заустављања у односу на филтрацију $\mathbf{F}$, која у општем случају нису времена заустављања у односу на ту филтрацију у $\mathbf{G}$, односно такву да је сваки $\mathbf{F}$-мартингал уједно и $\mathbf{G}$-мартингал. Наведена ситуација описана је кроз $(H)$ хипотезу о којој ће бити више речи у наставку.

Хипотеза $(H)$ ([3]): сваки $\mathbf{F}$-мартингал је $\mathbf{G}$-мартингал, где су $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ подфилтрације од $\mathcal{A}$, за које важи $\mathbf{F} \subset \mathbf{G}$.

Наредни пример илуструје наведени начин конструкције псеудо времена заустављања.

**Пример 4.4.2.** *Нека је $B = \{B_t, t \geq 0\}$, где је $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$ $d$-димензиони процес Брауновог кретања и нека је $R_t = |B_t|$, $t \geq 0$. Тада је природна филтрација процеса $R$, односно $\mathcal{R}_t \equiv \sigma\{R_s, s \leq t\}, t \geq 0$, утопљена у природну филтрацију процеса $B$, па је*

$$T_a^{(1)} = \inf\{t : B_t^1 > a\}$$

$\{\mathcal{R}_t, t \geq 0\}$*-псеудо време заустављања.*

У раду [69] показано је да, у односу на филтрацију $\mathbf{F}$ генерисану једнодимензионим Брауновим кретањем $B = \{B_t, t \geq 0\}$, постоје псеудо времена заустављања која нису $\mathbf{F}$-времена заустављања.

**Пример 4.4.3.** *[69] Нека је $T_1 = \inf\{t : B_t = 1\}$ и $\sigma = \sup\{t < T_1 : B_t = 0\}$. Тада је*

$$\rho = \sup\{s < \sigma : B_s = S_s\}, \quad \text{где је} \quad S_s = \sup_{u \leq s} B_u,$$

$\mathbf{F}$*-псеудо време заустављања, које није* $\mathbf{F}$*-време заустављања.*

Наредни резултат повезује концепт узрочности из Дефиниције 4.1.2 са особинама псеудо времена заустављања посматраним у односу на ширу филтрацију.

**Теорема 4.4.1.** *[51] Нека су дате филтрације* $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{G}$*, за које важи $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$. Следећа тврђења су еквивалентна:*

*1) филтрација $\mathbf{G}$ је сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F}$, тј. $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}$,*

*2) свако време заустављања у односу на филтрацију $\mathbf{F}$ је псеудо време заустављања у односу на филтрацију $\mathbf{G}$.*

*Доказ.* Нека важи претпоставка $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}$ и нека је $M$ мартингал у односу на $\mathbf{G}$ и $\nu$ време заустављања у односу на $\mathbf{F}$. Претпостављена узрочност је еквивалентна са

$$(\forall M \in \mathcal{G}_\infty) \qquad E(M_s|\mathcal{F}_t) = E(M_s|\mathcal{G}_t),\ \forall s,t \geq 0$$

одакле следи да је $M$ мартингал и у односу на $\mathbf{F}$. Сада је $EM_\nu = EM_0$, што значи да је $\nu$ псеудо време заустављања у односу на $\mathbf{G}$.

Обрнуто, нека је свако време заустављања у односу на $\mathbf{F}$ псеудо време заустављања у односу на $\mathbf{G}$. Нека је $M$ ограничен мартингал у односу на $\mathbf{G}$ и $\nu$ време заустављања у односу на $\mathbf{F}$. Следи да је $\nu$ псеудо време заустављања у односу на $\mathbf{G}$, па важи $EM_\nu = EM_0$. На основу Теореме 1.42 из [35] следи да је $M$ униформно интеграбилан мартингал у односу на $\mathbf{F}$. □

**Пример 4.4.4.** *[51] Нека је $\sigma$ време заустављања у односу на филтрацију $\mathbf{F}$ и нека је $\mathbf{F}^\sigma = \{\mathcal{F}_{\sigma\wedge t}, t \geq 0\}$. Може се показати да $\mathbf{F}^\sigma \mid< \mathbf{F}^\sigma; \mathbf{F}$ важи па је свако време заустављања у односу на $\mathbf{F}$ псеудо време заустављања у односу на $\mathbf{F}^\sigma$.*

Једна од главних примена псеудо времена заустављања је примена у финансијској математици при моделирању времена немогућности извршења финансијских обавеза (енгл. *default time*). У наставку ће бити изложени резултати који повезују концепте узрочности и псеудо времена заустављања у финансијској математици.

Као што је познато, на комплетном финансијском тржишту без могућности арбитраже цена активе $X_t$ у тренутку $t$ по унапред уговореној цени $X$ са датумом доспећа $T$ једнака је

$$X_t = \mathbf{E}\left(X \exp\left(-\int_t^T r_u du\right)\middle|\mathcal{F}_t\right),$$

где је $r = \{r_s, s \geq 0\}$ каматна стопа, а $\mathcal{F}_t$ скуп свих информација расположивих до тренутка $t$, закључно са њим.

У оквирима кредитног ризика, односно ризика од немогућности извршења финансијских обавеза (енгл. *default risk*), немогућност извршења финансијских обавеза се појављује у случајном времену $\tau$. Основни процес који се користи приликом моделирања времена немогућности извршења финансијских обавеза је $1_{\{\tau<t\}}$. Код потенцијалног потраживања са ризиком од немогућности извршења, наплата ће се реализовати само ако се тренутак немогућности извршења финансијских обавеза не догоди пре датума доспећа. Заправо, наплата се у оваквим ситуацијама моделира из два дела:

1) За дати датум доспећа $T > 0$, случајна величина $X$, која не зависи од $\tau$, представља уговорену наплату - суму коју ће власник уговора добити на датум

доспећа $T$, у случају да се немогућност извршења финансијских обавеза није десила пре $T$.

2) Предиктабилним процесом $h$ се моделира наплата у случају да се немогућност извршења финансијских обавеза реализује пре датума доспећа $T$. Овај процес се назива процес опоравка (енгл. *recovery process*).

У тренутку $t$ расположива је информација да ли се немогућност извршења финансијских обавеза реализовала пре $t$ или није још увек, али не и информација о томе када ће се реализовати.

Моделирање времена немогућности извршења финансијских обавеза је широко распрострањено у финансијској математици [13], а постоје два главна приступа решавања овог проблема: случај када је $\tau$ време заустављања у односу на почетну филтрацију и случај када је $\tau$ време заустављања у односу на проширену филтрацију. У наставку ће пажња бити посвећена другом наведеном приступу.

Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа на коме је дефинисана филтрација $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$. Време немогућности извршења финансијских обавеза $\tau$ је случајно време, које није време заустављања у односу на филтрацију $\mathbf{G}$. Тада, друга филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ игра кључну улогу у моделима кредитног ризика и она представља скуп информација расположивих на тржишту. Филтрација $\mathbf{F}$ се добија прогресивним проширењем филтрације $\mathbf{G}$ случајним временом $\tau$: то је најмања десно непрекидна филтрација која садржи филтрацију $\mathbf{G}$ и у односу на коју је $\tau$ време заустављања. Може се приметити да је тада $\tau$ псеудо време заустављања у односу на филтрацију $\mathbf{G}$. Овакво проширење омогућава добијање једноставне формуле за одређивање компензатора процеса $D = \{D_t, t \geq 0\}$, где је $D_t = 1_{\{\tau<t\}}$, за које је већ напоменуто да има важну улогу у оваквим моделима. Случајан процес $D$ је растући, càdlàg процес, који је једнак 0 пре тренутка немогућности извршења финансијских обавеза, а 1 после. Нека је $\mathbf{F}^D$ природна филтрација процеса $D$, тј. нека је $\mathcal{F}_t^D = \sigma\{D_u, u \leq t\}$.

Интензитет од $\tau$ се дефинише као ненегативан адаптиран процес $\lambda$ за који је процес $M = \{M_t, t \geq 0\}$, где је

$$M_t := D_t - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda_u du,$$

мартингал.

**Дефиниција 4.4.2.** *Растућа функција* $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *дата са*

$$\Gamma(t) = -ln(1 - F(t))),$$

*где је* $F(t) = P(\tau \leq t)$*, назива се хазардна функција од* $\tau$.

**Дефиниција 4.4.3.** *Функција* $\Lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *се назива мартингална хазардна функција случајног времена* $\tau$ *у односу на природну филтрацију* $\mathbf{F}^D$*, ако је процес* $\{D_t - \Lambda(t \wedge \tau), t \geq 0\}$ $\mathbf{F}^D$*-мартингал.*

**Пример 4.4.5.** *[50] Нека је филтрација* $\mathbf{G}$ *сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$*, тј. нека важи* $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}$ *и нека је* $\mathbf{G}$*-мартингални хазардни процес* $\Lambda$ *од* $\tau$ *непрекидан. За фиксирано* $s > 0$*, нека је* $Y$ *интеграбилна случајна величина мерљива у односу на* $\mathcal{F}_s$*. Ако је десно непрекидни процес* $V = \{V_t, t \geq 0\}$*, дат са*

$$V_t = E(Ye^{\Lambda_t - \Lambda_s} | \mathcal{G}_t), \quad \forall t \in [0, s]$$

*непрекидан у* $\tau$*, односно* $\Delta V_{s \wedge \tau} = V_{s \wedge \tau} - V_{(s \wedge \tau)-} = 0$*, тада за свако* $t < s$ *важи*

$$E(1_{\{\tau > s\}} Y | \mathcal{F}_t) = 1_{\{\tau > t\}} E(Ye^{\Lambda_t - \Lambda_s} | \mathcal{G}_t).$$

Последица наведеног резултата даје довољне услове под којима се вероватноће преживљавања од $\tau$ у односу на $\mathcal{F}_t$ могу израчунати преко мартингалног хазардног процеса.

**Пример 4.4.6.** *[50] Нека су задовољени услови из Примера 4.4.5. Ако је процес* $V$*, дат са*

$$V_t = E(e^{\Lambda_t - \Lambda_s} | \mathcal{G}_t), \quad \forall t \in [0, s]$$

*непрекидан у* $\tau$*, односно ако је* $\Delta V_{s \wedge \tau} = V_{s \wedge \tau} - V_{(s \wedge \tau)-} = 0$*, тада за* $t \leq s$ *важи*

$$P(\tau > s | \mathcal{F}_t) = 1_{\{\tau > t\}} E(e^{\Lambda_t - \Lambda_s} | \mathcal{G}_t).$$

Може се приметити да резултат важи и у случају када је $\mathbf{G} = \mathbf{F}$.

### 4.4.1 Примена узрочности на одређивање вредности уговора са могућим неизвршењем

Нека је $B = \{B_t, t \geq 0\}$ непрекидан процес са коначном варијацијом адаптиран у односу на филтрацију $\mathbf{G}$ дат формулом

$$B_t = e^{\int_0^t r_u du},$$

где је $r = \{r_t, t \geq 0\}$ интеграбилан процес адаптиран у односу на $\mathbf{G}$. Овако дефинисан процес $B$ представља банковни рачун.

Нека је

$$S_t := B_t E\left( \int_{(t,T]} B_u^{-1} Z_u dD_u + B_T^{-1} X 1_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{F}_t \right), \tag{4.25}$$

где је $T$ датум доспећа, $Z$ $\mathbf{F}$-предиктабилан процес и $X$ $\mathbf{F}_T$ мерљива случајна величина. Нека је процес $V$ дефинисан са

$$V_t = \tilde{B}_t E\left(\int_t^T \tilde{B}_u^{-1} Z_u \lambda_u du + \tilde{B}_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t\right), \tag{4.26}$$

где је $\tilde{B}$ банковни рачун са краткорочном каматном стопом прилагођеном могућем неизвршењу $R_t = r_t + \lambda_t$, тј.

$$\tilde{B}_t = \exp\left(\int_0^t (r_u + \lambda_u)\, du\right).$$

У наредном примеру је дат још један облик израза (4.25).

**Пример 4.4.7.** *Нека је филтрација* $\mathbf{G}$ *сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$*, тј. нека важи* $\mathbf{G} \,|\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}$ *и нека је* $\mathbf{G}$*-мартингални хазардни процес* $\Lambda$ *од* $\tau$ *апсолутно непрекидан. Нека је* $Z$ $\mathbf{G}$*-предиктабилан процес и* $X$ $\mathcal{G}_T$ *мерљива случајна величина. Ако важи* $\Gamma = \Lambda$*, тада је* $S_t = 1_{\{\tau > t\}} V_t$ *за* $t \leq T$*, где су* $S$ *и* $V$ *процеси дати формулама (4.25) и (4.26), редом.*

Наводи се једна од особина хазардног процеса изражена преко услова узрочне предвидивости.

**Пример 4.4.8.** *[52] Нека су* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ *и* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *филтрације дефинисане на истом простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *такве да је* $\mathbf{G} \subset \mathbf{F}$ *и* $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee H_t$*, где је* $\mathcal{H}_t = \sigma(D_s, s \leq t)$*,* $N_t = 1_{\{\tau \leq t\}}$*. Ако је* $\mathbf{F}$ *узрочно предвидиво са* $\mathbf{G}$*,* $F_t = P(\tau \leq t \mid \mathcal{G}_t)$ *непрекидно и* $F_t < 1$*, тада је хазардни процес* $\Gamma$ *растући и представља* $\mathbf{F}$*-уопштени интензитет од* $\tau$*. Другим речима, процес* $\{N_t - \Gamma(\tau \wedge t), t \geq 0\}$ *је* $\mathbf{F}$*-мартингал.*

## 4.5 Неке примене концепта узрочности у статистици

У овом делу се разматрају везе између концепта узрочности из Дефиниције 4.1.2 и мерљиве раздвојености. Концепт мерљиве раздвојености између $\sigma$-алгебри је уведен у књизи [19]. Тај концепт је слабији од независности који је централна тема у статистици. Концепт мерљиве раздвојености има две верзије: условну и маргиналну. У маргиналној верзији се каже да су $\sigma$-алгебре $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ условно мерљиво раздвојене у односу на дату $\sigma$-алгебру $\mathcal{M}_3$ ако и само ако су заједнички догађаји тривијални, док у условној верзији одговара особини да су заједнички догађаји те две $\sigma$-алгебре садржани у условној $\sigma$-алгебри. У наставку $\overline{\mathcal{M}}$ означава комплетирану $\sigma$-алгебру $\mathcal{M}$.

**Дефиниција 4.5.1.** *[19] Каже се да су $\sigma$-алгебре $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathcal{M}_3$ ако важи*

$$\overline{\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_3} \cap \overline{\mathcal{M}_2 \vee \mathcal{M}_3} = \overline{\mathcal{M}_3}$$

*и означава са $\mathcal{M}_1 \parallel \mathcal{M}_2 \mid \mathcal{M}_3$. Ако је потребно да се експлицитно нагласи улога вероватноће $P$, биће означено са $\mathcal{M}_1 \parallel \mathcal{M}_2 \mid \mathcal{M}_3; P$.*

Наредна теорема даје еквивалентне начине за дефинисање мерљиве раздвојености.

**Теорема 4.5.1.** *([19]) Следећи услови су еквивалентни:*
*1)$\overline{\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_3} \cap \overline{\mathcal{M}_2 \vee \mathcal{M}_3} = \overline{\mathcal{M}_3}$,*
*2)$\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_3 \cap \overline{\mathcal{M}_2 \vee \mathcal{M}_3} \subset \overline{\mathcal{M}_3}$,*
*3 $M_t \in [\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_3]^+_\infty$ и $E(M_t \mid \mathcal{M}_2 \vee \mathcal{M}_3) = M_t$ имплицира $E(M_t \mid \mathcal{M}_3) = M_t$.*

Грубо говорећи, заједнички догађаји две $\sigma$-алгебре су садржани у условној $\sigma$-алгебри. Из првог услова Теореме 4.5.1 је јасно да је концепт мерљиве раздвојености симетричан по $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Неке основне особине овог концепта се могу наћи у [19].

Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P)$ простор са филтрацијом. Преко филтрације $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ се уводи време у модел, при чему $\mathcal{F}_t$ представља $\sigma$-алгебру генерисану свим опсервацијама до тренутка $t$. Филтрације играју важну улогу у секвенцијалним експериментима и секвенцијалној анализи јер дају информације о прошлости.

Уводи се наредна дефиниција.

**Дефиниција 4.5.2.** *[67] Нека су $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ и $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t, t \geq 0\}$ филтрације на истом простору вероватноћа. Каже се да су филтрације $\mathbf{H}$ и $\mathbf{F}$ условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathbf{G}$ у вероватноћи $P$ (у ознаци $\mathbf{H} \parallel \mathbf{F} \mid \mathbf{G}; P$) ако важи*

$$\mathcal{H}_t \parallel \mathcal{F}_t \mid \mathcal{G}_t \tag{4.27}$$

*за свако $t \geq 0$.*

Наредна теорема показује да се мерљива раздвојеност између филтрација може посматрати као неопходан услов за статистичку узрочност.

**Теорема 4.5.2.** *[67] Нека су $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ и $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t, t \geq 0\}$ филтрације на комплетном простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ако важи $\mathbf{H} \,|\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$, тада су $\mathbf{H}$ и $\mathbf{F}$ условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathbf{G}$, у вероватноћи $P$ (еквивалентно, $\mathbf{H} \parallel \mathbf{F} \mid \mathbf{G}; P$).*

*Доказ.* Према Дефиницији 4.1.2, $\mathcal{H}_\infty \perp \mathcal{F}_t \mid \mathcal{G}_t; P$ важи за свако $t$. Према Последици 2.2.11 из [19], следи

$$(\mathcal{H} \vee \mathcal{G})_\infty \perp (\mathcal{F} \vee \mathcal{G})_t \mid \mathcal{G}_t.$$

Према Последици 2.2.9 из [19] следи $\overline{\mathcal{H} \vee \mathcal{G}} \perp \overline{\mathcal{F} \vee \mathcal{G}} \subset \overline{\mathcal{G}}$. Сада према Теореми 4.5.1 и Дефиницији 4.5.2 следи да су $\mathcal{H}_\infty$ и $\mathcal{F}_t$ условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathcal{G}_t$, тј. $\mathcal{H}_\infty \parallel \mathcal{F}_t \mid \mathcal{G}_t$ важи за свако $t \in I$, па су $\mathbf{H}$ и $\mathbf{F}$ су условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathbf{G}$, тј. важи $\mathbf{H} \parallel \mathbf{F} \mid \mathbf{G}; P$. □

**Последица 4.5.1.** *[67] Нека су $\mathcal{M}_i, i \in \{1, 2, 3\}$ под–$\sigma$-алгебре из $\mathcal{A}$. Ако је $\mathcal{M}_2$ узрок за $\mathcal{M}_1$ у оквиру $\mathcal{M}_3$ тада су $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_3$ условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathcal{M}_2$ (еквивалентно, $\mathcal{M}_1 \parallel \mathcal{M}_3 \mid \mathcal{M}_2$).*

Концепт условне мерљиве раздвојености између $\sigma$-алгебри је слабији од концепта узрочности. У наредној теореми се доказује да, под неким додатним условима, мерљива раздвојеност имплицира узрочност у смислу Дефиниције 4.1.2.

**Теорема 4.5.3.** *[67] Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа, $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ и $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t, t \geq 0\}$ филтрације из $\mathcal{A}$ такве да $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{F}$ и $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$. Ако су за свако $t \in I$, $\mathcal{H}_\infty$ и $\mathcal{F}_t$ условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathcal{G}_t$ (тј. ако је $\mathcal{H}_\infty \parallel \mathcal{F}_t \mid \mathcal{G}_t$) тада важи $\mathbf{H} \,|\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$.*

*Доказ.* Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа, $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{F}$ , $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$ и $\mathcal{H}_\infty \parallel \mathcal{F}_t \mid \mathcal{G}_t$ за све $t \in I$. Према Теореми 4.5.1 и према еквивалентној карактеризацији догађаја дефинисаној са (5.2.3) у [19] следи

$$A \in \mathcal{H}_\infty \vee \mathcal{G}_t \quad \text{и} \quad E(1_A \mid \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t) = 1_A.$$

Из $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ за свако $t \in I$ следи да је $E(1_A \mid \mathcal{F}_t) = 1_A$. На основу (5.2.7) из [19] за сваки скуп $A$ који задовољава услове Теореме 4.5.1 добија се $E(1_A \mid \mathcal{G}_t) = 1_A$. Тако се, према претпоставци теореме, за свако $A \in \mathcal{H}_\infty$ добија

$$P(A \mid \mathcal{F}_t) = P(A \mid \mathcal{G}_t),$$

одакле важи $\mathbf{H} \,|\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$. □

У наредним резултатима су доказане неке особине концепта мерљиве раздвојености које непосредно следе из узрочности.

**Пропозиција 4.5.1.** *[67] Нека су $P$ и $P'$ две вероватносне мере на $(\Omega, \mathcal{A})$. Ако важи $P' \ll P$, $\dfrac{dP'}{dP}$ је $\mathcal{H}_\infty$-мерљиво и $\mathbf{H} \,|\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ тада су филтрације $\mathbf{H}$ и $\mathbf{F}$ условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathbf{G}$ и $P'$.*

*Доказ.* Нека су $P$ и $P'$ две апсолутно непрекидне мере и нека је $\dfrac{dP'}{dP}$ $\mathcal{H}_\infty$-мерљиво. Из релације узрочности $\mathbf{H} \,|\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ и [57] следи да важи $\mathbf{H} \,|\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P'$. На начин аналоган оном из доказа Теореме 4.5.2, добија се да су $\mathbf{H}$ и $\mathbf{F}$ условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathbf{G}$ и $P'$. $\square$

**Пропозиција 4.5.2.** *[67] Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и нека су $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{J}$ и $\mathbf{F}$ филтрације из $\mathcal{A}$. Ако важи $\mathbf{H} \,|\!< \mathbf{J}; \mathbf{G}; P$ и $\mathbf{H} \,|\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$, тада је $\mathbf{J} \subset \mathbf{G} \subset \mathbf{F}$ и филтрације $\mathbf{H}$ и $\mathbf{F}$ су условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathbf{J}$ (тј. $\mathbf{H} \parallel \mathbf{F} \mid \mathbf{J}$.)*

Доказ следи директно из [57] и Теореме 4.5.2.

**Пропозиција 4.5.3.** *[67] Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ и $\mathbf{F}$ филтрације из $\mathcal{A}$. Ако важи $\mathbf{H} \,|\!< \mathbf{H}; \mathbf{G}; P$ и $\mathbf{G} \,|\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$, тада су филтрације $\mathbf{H}$ и $\mathbf{F}$ условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathbf{H}$ $(\mathbf{H} \parallel \mathbf{F} \mid \mathbf{H})$.*

Доказ следи директно из [57] и Теореме 4.5.2.

**Пропозиција 4.5.4.** *[67] Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и нека су $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$ филтрације из $\mathcal{A}$. Ако су десно непрекидне модификације елемената скупа*

$$K = \{M_t, M_t = P(A \mid \mathcal{G}_t), A \in \mathcal{G}_\infty,\ t \geq 0\}$$

*$\mathbf{F}$-мартингали, тада су $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathbf{G}$ (тј. $\mathbf{G} \parallel \mathbf{F} \mid \mathbf{G}$).*

*Доказ.* Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа, $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$ филтрације из $\mathcal{A}$ и нека су елементи скупа $K$ мартингали. Према [57] $\mathbf{G}$ је сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F}$, тј. важи $\mathbf{G} \,|\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$. Тврђење следи према Теореми 4.5.2. $\square$

Из претходног резултата се може закључити да ако се посматра природна филтрација $\mathbf{F}^X$ мартингала $X = \{X_t, t \geq 0\}$ облика $X_t = P(A \mid \mathcal{F}_t^X)$, за $A \in \mathcal{F}_\infty^X$ следи да су $\mathcal{F}_\infty^X$ и $\mathcal{F}_t$ условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathcal{F}_t^X$ за свако $t \geq 0$ (тј. $\mathbf{F}^X \parallel \mathbf{F} \mid \mathbf{F}^X$).

Следећи примери илуструју претходно добијене резултате.

**Пример 4.5.1.** *[67] Нека је $X$ процес Маркова у односу на филтрацију $\mathbf{F}$. Према [57] и Теореми 4.5.2 $\sigma$-алгебре $\mathcal{F}_\infty^X$ и $\mathcal{F}_t$ су условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathcal{F}_t^X$ за свако $t \geq 0$, тј. $\mathbf{F}^X \parallel \mathbf{F} \mid \mathbf{F}^X; P$.*

**Пример 4.5.2.** *[67] Као последица Примера 4.5.1 за процес Брауновог кретања $W = \{W_t, t \geq 0\}$ у односу на филтрацију $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ следи да су $\sigma$-алгебре $\mathcal{F}_\infty^W$ и $\mathcal{F}_t$ условно мерљиво раздвојене у односу на $\mathcal{F}_t^W$ за свако $t \geq 0$, тј. $\mathbf{F}^W \parallel \mathbf{F} \mid \mathbf{F}^W; P$.*

Мерљива раздвојеност је управо један од начина да се покажу особине идентификације и строге идентификације (видети [18]). Концепт строге идентификације између $\sigma$-алгебри има широку примену, посебно у економетрији и непараметарској статистици (видети [7]). Такође, је у [7] уведен јачи концепт $\mathcal{B}$-строге мерљиве раздвојености, који је, уз неке додатне претпоставке, impлициран мерљивом раздвојеношћу како је уведено у [7].

**Напомена.** У претходним резултатима параметар $t$ је посматран као фиксирано време. Проблем се може даље уопштити увођењем времена заустављања. Та разматрања су важна за коректно разматрање неких проблема код коначне популације и тачкастих процеса.

У наставку ће бити разматране примене наведених резултата на дати Бајесов[1] експеримент.

**Дефиниција 4.5.3.** *([19]) Бајесов експеримент је дефинисан као следећи простор вероватноћа*

$$\mathcal{E} = (U \times S, \mathcal{U} \vee \mathcal{S}, \Pi),$$

*где се $(U,\mathcal{U})$ назива простор параметара, а $(S,\mathcal{S})$ узорачки простор. Рестрикција од $\Pi$ на $(U,\mathcal{U})$ се назива априорна вероватноћа.*

Нека је $U \times S \subset \Omega$ и $\mathcal{U} \vee \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$. Поред тога, нека је $\mathcal{M} \subset \mathcal{U} \vee \mathcal{S}$ под-$\sigma$-алгебра од $\mathcal{U} \vee \mathcal{S}$. Мерљива фамилија експеримента се означава са $\mathcal{E}^{\mathcal{M}}$. Под-$\sigma$-алгебра $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ је $\sigma$-алгебра генерисана неком статистиком која је дефинисана на узорачком простору. Под-$\sigma$-алгебра $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ је, обично, $\sigma$-алгебра генерисана неким функцијама из простора параметара.

Појам мерљиве раздвојености експеримента је дат у Дефиницији 5.3.1 у [19].

**Дефиниција 4.5.4.** *([19]) Бајесов експеримент је $\mathcal{E}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{B} \vee \mathcal{T}}$ мерљиво раздвојен ако $\mathcal{B} \parallel \mathcal{T} \mid \mathcal{M}$.*

Мерљива раздвојеност Бајесовог експеримента $\mathcal{E}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{B} \vee \mathcal{T}}$ се може посматрати као особина потпуно супротна од укупне информативности тог експеримента. Мерљива раздвојеност се може повезати са концептом статистичке узрочности.

**Теорема 4.5.4.** *[67] Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и нека су $\mathcal{M}, \mathcal{B}$ и $\mathcal{T}$ $\sigma$-алгебре из $\mathcal{A}$. Ако важи $\mathcal{B} |\!< \mathcal{M}; \mathcal{T}$, тада је Бајесов експеримент $\mathcal{E}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{B} \vee \mathcal{T}}$ мерљиво раздвојен.*

[1] Reverend Thomas Bayes, 1702-1762, енглески филозоф и математичар

*Доказ.* Нека важи $\mathcal{B} \mid\!< \mathcal{M}; \mathcal{T}$. Тада, према Теореми 4.5.2 (која важи за филтрације, па важи и за сваку $\sigma$-алгебру) важи мерљива раздвојеност, тј. $\mathcal{B} \parallel \mathcal{T} \mid \mathcal{M}$. Према Дефиницији 4.5.4, Бајесов експеримент је $\mathcal{E}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}\vee\mathcal{T}}$ мерљиво раздвојен. $\square$

Обрнуто тврђење не важи без додатних претпоставки.

У наредним резултатима се даје веза између датог концепта узрочности, појма довољности и појма другоразредности у бајесовском контексту. У том смислу, наведене су неке познате дефиниције.

**Дефиниција 4.5.5.** *(видети [19]) $\mathcal{N}$ је $\mathcal{E}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}\vee\mathcal{T}}$-довољна статистика ако и само ако $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \vee \mathcal{T}$ и $\mathcal{B} \perp \mathcal{T} \mid \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$.*

**Дефиниција 4.5.6.** *(видети [19]) $\mathcal{N}$ је $\mathcal{E}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}\vee\mathcal{T}}$-другоразредна статистика ако и само ако $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \vee \mathcal{T}$ и $\mathcal{B} \perp \mathcal{N} \mid \mathcal{M}$.*

Наредни резултат следи директно из Дефиниције 2.2 и Последице 3.2 из [67] и Пропозиције 5.3.2. из [19], а може бити користан за проверу мерљиве раздвојености у Бајесовом експерименту $\mathcal{E}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}\vee\mathcal{T}}$.

**Пропозиција 4.5.5.** *[67] Бајесов експеримент $\mathcal{E}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}\vee\mathcal{T}}$ је мерљиво раздвојен ако и само ако постоји $\mathcal{E}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}\vee\mathcal{T}}$-довољна статистика $\mathcal{N}$ таква да важи $\mathcal{B} \mid\!< \mathcal{M}; \mathcal{N}$.*

Може се описати веза између датог концепта и уопштене Бајесове верзије Друге Безуове[2] Теореме.

**Пропозиција 4.5.6.** *[67] Нека је $\mathcal{M}$ довољан узрок за $\mathcal{B}$ у оквиру $\mathcal{T}$. Свака $\mathcal{E}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}\vee\mathcal{T}}$-статистика $\mathcal{R}$ независна од $\mathcal{E}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}\vee\mathcal{T}}$-довољне статистике $\mathcal{N}$ је другоразредна (енг. ancillary).*

*Доказ.* Доказ следи директно из Дефиниције 2.2 и Последице 3.2 из [67] и Пропозиције 5.3.4. $(i)$ из [19]. $\square$

За писање ове главе, поред цитираних референци, коришћена је и следећа литература [23], [26], [27], [28], [29], [31], [37], [42], [58], [59] [65], [70].

[2]Debabrata Basu, 1924-2001, индијски статистичар

# Литература


[1] R. B. Ash, C. A. Doléans-Dade, *Probability Measure Theory*, Harcourt Academic Press, 2000.

[2] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[3] P. Bremaund, M. Yor, *Changes of filtration and of probability measures.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 30 (1978), 269-295.

[4] K. L. Chung, *Lectures from Markov Processes to Brownian Motion*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[5] K.L. Chung, R.J. Williams, *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[6] S. N. Cohen, R. J. Elliott, *Stochastic Calculus and Applications*, Birkhäuser New York, NY, 2015.

[7] S. Darolles, Y. Fan, J.P. Florens, E. Renault, *Nonparametric instrumental regression*, Econometrica, 79 (2011), 1541-1565.

[8] C. Dellacherie, P. A. Meyer, *Probabilités et potentiel, Vol. I.* Hermann, Paris, 1975.

[9] C. Dellacherie, P. A. Meyer. *Probabilités et potentiel, Vol. II*, Théorie des martingales, Hermann, Paris, 1980.

[10] C. Doléans-Dade, *Existence du processus croissant naturel associé á un potentielbde class (d)*, Z. Warsch. Verw. Gebiete, 8 (1968), 309-314.

[11] C. Doléans-Dade, P. A. Meyer, *Equations differentialles stochastiques*, Séminarie de Probabilités XI, Lecture Notes in Math., 581. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York, 1953.

[12] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, Wiley, New York 1953.

[13] D. Duffie, M. Schroder, C. Skiadas, *Recursive valuation of defaultable securities and the timing of resolution of uncertainty*, Annals of Applied Probability, 6 (1997), 1075-1090.

[14] R. Durrett, *Stochastic Calculus*, CRC Press, Inc, 1996.

[15] R. J. Eliot, *Stochastic Calculus and Applications*, Springer-Verlag, 1982.

[16] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, volume II.* Wiley, New York, 1986.

[17] J.P. Florens, D. Fougéres, *Noncausality in continuous time*, Econometrica, 64 (5) (1996), 1195-1212.

[18] J.P. Florens, M. Mouchart, *A note on noncausality*, Econometrica, 50 (3) (1982), 583-594.

[19] J.P. Florens, M. Mouchart, J.M. Rolin, *Elements of Bayesian statistics*, Marcel Dekker Inc. New York and Basel, 1990.

[20] I. I. Gihman, A. V. Skorohod, *Stochastic Differential Equations*, S, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[21] I. J. Good, *A causal calculus I and II*, British Journal of Phil. Soc, 305 (11) (1962), 43-51.

[22] C.W.J. Granger, *Investigating causal relations by econometric models and cross spectral methods*, Econometrica, 37 (1969), 424-438.

[23] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[24] P. W. Holland, *Statistics and casual inference*, J. Amer. Statisct. Assoc., 81 (1986), 945-960.

[25] Y. Hosoya, *On the Granger condition for noncausality*, Econometrica, 45 (1977), 1735-1736.

[26] K. Ito, *Stochastic integral*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20 (1944), 519-524.

[27] K. Ito, *On stochastic integral equations*, Proc. Japan. Acad. Tokyo, 22 (1964), 32-35.

[28] K. Ito, *Stochastic differential equations in a differentiable manifold*, Nagoya Math. J., 1 (1950), 35-47.

[29] K. Ito, *On stochastic differential equations*, Memoirs of the American Mathematical Society, 4, 1951.

[30] K. Ito, *Lectures on Stochastic Processes*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1961.

[31] K. Ito, S. Watanabe. *Transformation of markov processes by multiplicative functionals*, Ann. Inst. Fourier, 15 (1965), 15-30.

[32] J. Jacod, *Calcul stochastique et problemes de martingales*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[33] J. Jacod, *Weak and strong solutions of stochastic differential equations*, Stochastics, 3 (1980), 171-191.

[34] J. Jacod, J. Memin, *Existence of weak solutions for stochastic differential equation with driving semimartingales*, Stochastics, 4 (1981), 317-337.

[35] J. Jacod, A. Shiryaev, *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer, 2003.

[36] G. Kallianpur, *Stochastic filtering theory*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[37] I. Karatzas, S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[38] F.B. Knight, B. Maisonneuve, *A characterization of stopping times*, Ann. Probab., 22 (1994), 1600-1606.

[39] P. E. Kopp, *Martingales and Stochastic Integrals*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[40] H. Kunita, S. Watanabe, *On square integrable martingales*, Nagoya Math. J., 30 (1967), 209-245.

[41] H. H. Kuo, *Introduction to Stochastic Integration*, Springer, 2006.

[42] T. G. Kurtz, *Lectures on Stochastic Analysis*, University of Wisconsin - Madison, Preprint, 2001.

[43] S. Kusuoka, *A remark on default risk models*, Advances in Mathematical Economics, 1 (1999), 69-82.

[44] V.A. Lebedev, *On the existence of weak solutions for stochastic differential equations with driving martingales and random measures*, Stochastics, 9 (1981), 37-76.

[45] E. Lenglart, *Semi-martingales et intégrales stochastiques en teps continu*, Rev. CETHEDEC, 75 (1983), 91-160.

[46] R. S. Liptser, A. N. Shiryaev, *Theory of Martingales*, Cluwer, Dordrecht, (Russian edition 1986), 1989 .

[47] R.S. Liptser, A. N. Shiryaev, *Statistics of Random Processes, volume I and II*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[48] H. P. McKean, *Stochastic Integrals*, Academic Press, New York, 1969.

[49] P. Medvegyev, *Stochastic Integration Theory*, Oxford University Press, 2007.

[50] A. Merkle, *Predictability and uniqueness of weak solutions of the stochastic differential equations*, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, 31 (1) (2023), 207-219.

[51] A. Merkle, *Causal predictability and weak solutions of the stochastic differential equations with driving semimartingales*, Statistics and Probability Letters, 197(C) (2023).

[52] A. Merkle, *Causal predictability between stochastic processes and filtrations*, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, *прихваћен за штампу*, 2023.

[53] M. Métivier, J. Pellaumail, *Stochastic Integration*, Academic Press, New York, 1980.

[54] P. A. Meyer, *Probabilitiés et Potentiel*, Hermann, Paris, 1966.

[55] P. A. Meyer, *Un cours sur les intégrales stochastiques*, Lecture Notes in Math., 511 (1976), 245-398.

[56] M. Mouchart, J.M. Rolin, *A note on conditional independence with statistical applications*, Statistica, 44 (4) (1985), 557-584.

[57] P.A. Mykland, *Statistical causality*, report no.14. University of Bergen, pages 1-26, 1986.

[58] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer, 2003.

[59] P. E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, 2004.

[60] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1998.

[61] H.L. G. Royden, *Real Analysis*, McMillan Publishing Co, New York, 1968.

[62] Yu.A. Rozanov, *Theory of innovation processes*, Monographs in Probability Theory and Mathematical Statistics, Izdat. Nauka, 1974.

[63] W. Schweder, *Composable markov processes*, Journal of Applied Probability, 7 (1970), 400-410.

[64] P. Shuppes, *A Probabilistic Theory of Causality*, Amsterdam: North Holland, 1970.

[65] J. M. Steele, *Stochastic Calculus and Financial Application*, Springer Verlag, 2001.

[66] D.W. Strook, M. Yor, *On extremal solutions of martingale problems*, Am. Scient. Escole Norm. Sup., 4 (13) (1980), 95-164.

[67] D. Valjarević, A. Merkle, *Statistical causality and measurable separability of $\sigma$-algebras*, Statistics and Probability Letters, 177 (C), 2021.

[68] N. Wiener, *Differential space*, J. Math. Phys., 2 (1923), 131-174.

[69] D. Williams, *A non stopping time with the optional-stopping property*, Bull. London Math. Soc., 34 (2002), 610-612.

[70] D. Williams, *Probabilty with Martingales*, Cambridge University Press, 1991.

# Биографија

Ана Меркле је рођена 19. маја 1995. у Београду. Завршила је основну школу „Краљ Петар Први" као носилац дипломе „Вук Караџић". Школовање је наставила у Трећој београдској гимназији, коју је такође завршила као носилац дипломе „Вук Караџић". Основне студије је уписала школске 2014/2015. године на Математичком факултету у Београду, смер Статистика, финансијска и актуарска математика, а дипломирала јула 2018. године. Мастер студије је уписала школске 2018/2019. године, смер Статистика, финансијска и актуарска математика. Мастер рад под насловом „Мартинагали и стохастичка интеграција" је одбранила у септембру 2019. године. Докторске студије је уписала шолске 2019/2020. године на Катедри за вероватноћу и статистику. Има објављене следеће радове

1. D. Valjarević, **A. Merkle**, Statistical causality and measurable separability of $\sigma$-algebras, Statistics and Probability Letters, 177(C), (2021),

2. **A. Merkle**, Predictability and uniqueness of weak solutions of the stochastic differential equations, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, 31(1) (2023) 207-219,

3. **A. Merkle**, Causal predictability and weak solutions of the stochastic differential equations with driving semimartingales, Statistics and Probability Letters, 197(C) (2023),

4. **A. Merkle**, Causal predictability between stochastic processes and filtrations, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, *прихваћен за штампу*, 2023.

Била је запослена као сарадник у настави на Катедри за вероватноћу и статистику Математичког факултета у Београду у периоду од 2018. до 2020. године. У звање асистента је изабрана 2020. године.

**Прилог 1.**

# Изјава о ауторству

Потписани-а Ана Мерклe

број уписа 2017/2019

**Изјављујем**

да је докторска дисертација под насловом

Стохастичка предвидивост филтрација и процеса по непрекидном параметру

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис докторанда**

У Београду, 17. 5. 2023.

Ана Мерклe

**Прилог 2.**

# Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Ана Меркле

Број уписа 2017/2019

Студијски програм Математика

Наслов рада Стохастичка предвидивост филтрација и процеса по непрекидном параметру

Ментор академик Стеван Пилиповић
проф. др Миљана Јовановић, редовни професор, Универзитет у Нишу ПМФ

Потписани Ана Меркле

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, 17. 5. 2023.

Ана Меркле

**Прилог 3.**

# Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Стохастичка предвидивост филтрација и процеса по непрекидном параметру

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

**Потпис докторанда**

У Београду, 17. 5. 2023.

Ана Меркле