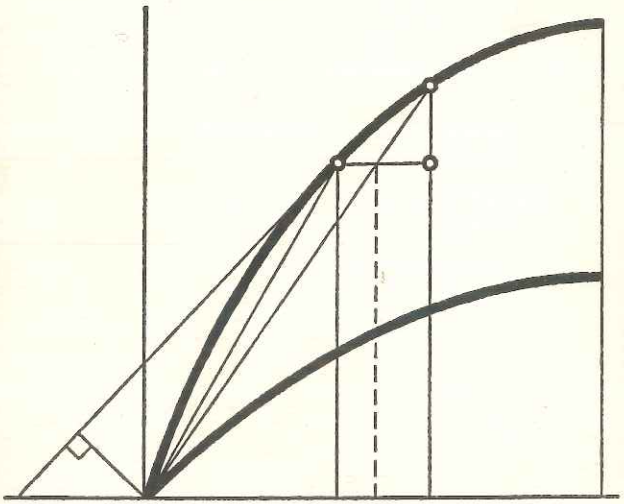
moderna
matematika

Zvonimir Šikić

KAKO JE STVARANA NOVOVJEKOVNA MATEMATIKA

matematički ogledi



Cilj je ovih matematičkih ogleda da čitatelja upoznaju sa suvremenom poviješću nekih dijelova novovjekovne matematike, dakle s racionalnom rekonstrukcijom do koje su došli (najznačajniji) suvremeni povjesničari matematike, a koja se često temeljno razlikuje od one njihovih prethodnika iz prve polovice 20. stoljeća. Radi se, dakle, o jednoj sintezi rezultata razasutih po mnogim stručnim publikacijama, koje su zbog jezika ili stručne zahtjevnosti najčešće nedostupne očekivanom čitatelju ovih ogleda.

Osim što čitatelja upoznaju s najsuvremenijim dostignućima povijesti matematike, ogledi mu nude i obilje biografskog materijala koji ih čini interesantnim i širem krugu čitatelja, kao popularno-znanstveno djelo.

M moderna
M matematika

Urednik
ZLATKO ŠPORER

Recenzenti
VLADIMIR DEVIDÉ
ŽARKO DADIĆ
LUKA KRNIĆ

Lektor
MILADA PINDULIĆ

CIP — Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i sveučilišna biblioteka, Zagreb

UDK 51(091)

ŠIKIĆ, Zvonimir
Kako je stvarana novovjekovna matematika / Zvonimir Šikić. — Zagreb : Školska knjiga, 1989. — 199 str. : ilustr. ; 24 cm

Bibliografija iza svakog poglavlja i uz tekst.

ISBN 86-03-99237-1

Tisak: Grafički zavod Hrvatske, Zagreb

Zvonimir Šikić

Kako je stvarana novovjekovna matematika

ŠKOLSKA KNJIGA — ZAGREB 1989

PREDGOVOR

Prošlost gledamo kroz prizmu vlastitog vremena. Ponor kojim smo u svojem vremenu odvojeni od svih prošlih možemo premostiti samo mostovima izgrađenim od ostavštine proteklih vremena. Ta ostavština, kao tradicionalna svijest čovječanstva, narodâ, obitelji, strukovnih cehova, opstaje u našoj suvremenosti i dobrim dijelom oblikuje poglede njezina vremena. Ona djeluje kao prirodna sila kojoj sve podliježe, kao sila teža kojom smo čvrsto vezani za Zemlju.

Zadatak je povjesničara da objasni tu ostavštinu, kao što je zadatak fizičara da objasni silu težu. Riječ je, dakle, o njezinoj racionalnoj rekonstrukciji.

Čak i ako pretpostavimo da postoji jedinstvena stvarnost proteklih vremena, što bi odgovaralo pretpostavljanju jedinstvene stvarnosti sile teže, ona je znanju dostupna tek kao povijest, **kao povjesničarova racionalna rekonstrukcija,** analogna teoriji gravitacije, koja je fizičarova racionalna rekonstrukcija. I kao što su fizičari raznih vremena dolazili do različitih gravitacijskih teorija, tako i povjesničari raznih vremena pišu različite povijesti. Ukratko, povijest je živa i uzbudljiva znanost koja ne napreduje samo protokom vremena što taloži nove slojeve na korpus ostavštine.

Cilj je ovih *matematičkih ogleda* da čitatelja upoznaju sa *suvremenom* poviješću nekih dijelova novovjekovne matematike, dakle s racionalnom rekonstrukcijom do koje su došli (najznačajniji) suvremeni povjesničari matematike, a koja se često temeljno razlikuje od one njihovih prethodnika iz prve polovice 20. stoljeća. Radi se, dakle, o jednoj sintezi rezultata razasutih po mnogim stručnim publikacijama, koje su zbog jezika ili stručne zahtjevnosti najčešće nedostupne očekivanom čitatelju ovih *ogleda*.

Odabir dijelova novovjekovne matematike, kojima se ovdje bavimo, određuju dva faktora. S jedne strane, infinitezimalni račun i teorija skupova uvršteni su kao najznačajniji konstitutivni dijelovi novovjekovne matematike. S druge strane, matematička logika osnovna je znanstvena preokupacija autora, pa je, prirodno, i njezina povijest ušla u ovaj izbor. Što se tiče izbora tema unutar tako odabranih matematičkih teorija, uvijek smo se odlučivali za one koje objašnjavaju stvaranje ili otkrivanje novih matematičkih područja. Tako ćemo, naprimjer, u povijesti infinitezimalnog računa (i analize), pored Newtona i Leibniza, više naglasiti Cauchya nego Eulera jer je on otac moderne ε—δ--analize, dok je Euler »samo« najveći majstor lajbnicovskog računa (iako je vjerojatno Euler najveći matematičar među njima). Naslov naših *ogleda* jasno ističe to osnovno opredjeljenje.

Povijest matematike, kao i svaka druga povijest, nosi bitno obilježje svih humanističkih znanosti. Rezultati istraživanja ostavštine i sami postaju relevantnom ostavštinom. Znanost povijesti, bar jednim dijelom, sama stvara svoj vlastiti predmet. Povijest, kao prizma vlastitog vremena kroz koju gledamo sva prošla vremena, stalno se mijenja tom povratnom spregom. Svaka pak suvremena djelatnost, posebno i znanstvena, nastavak je svoje prošlosti i određena je pogledom na tu prošlost. Jasno je stoga da razumijevanje povijesti matematike određuje i naše suvremeno matematičko djelovanje; kod velikih začetnika sasvim svjesno, kod njihovih sljedbenika utoliko što participiraju na djelu velikana koje slijede. Nadamo se da će ovi povijesni *ogledi* i u tom smislu biti korisni matematičaru.

Razumijevanje (suvremene) matematike još je više određeno njezinom poviješću no što je sama (suvremena) matematika. Zadnje poglavlje ovih *ogleda* sadrži nekoliko specifičnih pokušaja razumijevanja (suvremene) matematike, do kojih je autor došao (uglavnom) baveći se njezinom poviješću. Bez toga oni ne bi ni bili mogući, pa im je stoga upravo ovdje prirodno mjesto.

Nadamo se da smo mogućeg čitatelja ovim kratkim predgovorom bar donekle obavijestili o tome što može naći u *matematičkim ogledima* koji slijede. Učini mu li se to zanimljivim, prepuštamo mu *oglede* s nadom da neće iznevjeriti njegova očekivanja.

I. KAKO JE STVARAN INFINITEZIMALNI RAČUN

OTKRIĆE PRIRODNIH LOGARITAMA

U vrijeme velikog novovjekovnog razvoja astronomije pojavio se problem brzog računanja. Zbrajalo se relativno brzo, problem je bio u množenju.

Tablice cjelobrojnih potencija, poput sljedeće s bazom 2:

y	0	1	2	3	4	5	6
x	1	2	4	8	16	32	64

$x = 2^y$

bile su odavno poznate. One su jasno pokazivale kako se množenje može svesti na zbrajanje. Dva broja x-retka možemo pomnožiti tako da zbrojimo odgovarajuće brojeve y-retka. Te »odgovarajuće brojeve« zovemo logaritmima jer su tako nazvani upravo oni brojevi koji se zbrajaju kada se njima odgovarajući brojevi množe. Naime, ako je $x_1 \cdot x_2 = x_3$, onda je $y_1 + y_2 = y_3$. Ipak, praktična vrijednost takve tablice je zanemariva zbog velikih razlika među raspoloživim x-ovima. Pitanje je: kako dobiti finiju razdiobu x-ova? To su pitanje postavili istovremeno i nezavisno Bürgi (1614, objavljeno 1620) i Nepier (1614, objavljeno 1619). Danas bismo sigurno odgovorili: finijom razdiobom y-a! Dakle, prelaskom na razlomljene eksponente, što vodi računanju korijena, a to čini ovaj odgovor praktično bezvrijednim. Međutim, nije to bio ni Bürgijev ni Nepierov odgovor, jer u to doba još nije bilo ni poznato potenciranje s razlomljenim eksponentom. Oni su zadržali cjelobrojne eksponente i tako utrli put otkriću prirodnih logaritama. Evo kako su to učinili Bürgi i Nepier.

Neka varijabla y prima (pozitivne) cjelobrojne vrijednosti. Kako ćemo potenciranjem $x = b^y$ doći do fine razdiobe x-ova? »Najfiniju« razdiobu dobivamo kada za bazu uzmemo $b = 1$. Tada se x-ovi stapaju. Dakle, fina razdioba dobiva se za $b \doteq 1$. Bürgi je odabrao bazu $b = 1.0001$, a Nepier $b = 0.9999999$. Pokazat ćemo kako se dobivaju logaritmi uz Bürgijev odabir. Za $y = 0, 1, 2, 3, \ldots$ dobivamo odgovarajuće x-ove potenciranjem $x = 1.0001^y$. Međutim, Bürgi neće potencirati 1.0001^{131} tako da broj 1.0001 pomnoži 131 puta sam sobom. Tko bi na takav način ikada zgotovio tablicu logaritama? Možda čitatelju pada na pamet ideja da pri računanju vrijednosti 1.0001^{131} iskoristi prethodno izračunatu vrijednost 1.0001^{130}. Dakle, $1.0001^{131} = (1.0001^{130})\,1.0001$. To je već mudrije. Ali Bürgi i Nepier su još mudriji. Oni naprosto ne žele množiti. Naravno, iskoristit će prethodno izračunati x, ali ne u računanju sljedećeg x-a nego u računanju prirasta do sljedećeg x-a. Dakle, ako je

$$x = 1.0001^y,$$

onda oni traže Δx takav da je

$$x + \Delta x = 1.0001^{y+1}.$$

Dakle,

$$\Delta x = (x + \Delta x) - x = 1.0001^{y+1} - 1.0001^y =$$

$$= 1.0001^y\,(1.0001 - 1) = \frac{x}{10000}.$$

Kako se, dakle, računa tablica logaritama? Ovako!

y	x	Δx
0	1	0.0001
1	1.0001	0.00010001
2	1.00020001	0.000100020001
3	1.000300030001	itd.

Sve u svemu: pomakni zarez za četiri mjesta ulijevo pa dobivenu vrijednost pribroji početnoj vrijednosti, u tako dobivenoj vrijednosti opet pomakni zarez četiri mjesta ulijevo, pa opet pribroji tako dobivenu vrijednost početnoj vrijednosti itd. Jednostavan algoritam. Dakako, Δx i x bit će u stvarnom računu zaokruženi na neki broj decimala.

Nakon što je ovako jednostavno stvorena tablica logaritama, slijedio je korak ka finijoj razdiobi y-a. Taj je korak

vrlo jednostavan. Svi y-i su proporcionalno umanjeni. Bürgijev faktor je $\frac{1}{10^4}$. Tako nastaje nova tablica:

y	x
0.0000	1.0000
0.0001	1.0001
0.0002	1.00020001
0.0003	1.000300030001

Je li i ta tablica — tablica logaritama? Da li i u njoj množenju x-ova odgovara zbrajanje y-a? Svakako da odgovara. Označimo y-e stare tablice sa $\bar{y}$, a novi neka i dalje budu označeni sa y. Tada je $y = \frac{\bar{y}}{10^4}$. Ako je $x_1 \cdot x_2 = x_3$, onda je, vidjeli smo, $\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \bar{y}_3$, ali onda je i $\frac{\bar{y}_1}{10^4} + \frac{\bar{y}_2}{10^4} = \frac{\bar{y}_3}{10^4}$, tj. $y_1 + y_2 = y_3$. Dakle, i nova tablica je logaritamska tablica. Prednost je nove tablice što malim promjenama x-a odgovaraju male promjene y-a, i obrnuto, pa vezu x-a i y-a možemo lakše shvatiti kao neprekinutu funkciju.

Napustimo za trenutak našu rekonstrukciju stvarne povijesti otkrića, pa kroz naočale suvremenog matematičkog poimanja pogledajmo o kakvom je potenciranju i kakvim prirastima riječ u novoj tablici.

Za staru tablicu (tj. za stare logaritme) vrijedi

$$x = 1.0001^{\bar{y}},$$

gdje je $\bar{y} = 0, 1, 2, 3, \ldots$, tj. $\Delta\bar{y} = 1$. Osim toga znamo da je $\Delta x = \frac{x}{10^4}$, tj. $\frac{\Delta\bar{y}}{\Delta x} = \frac{10^4}{x}$. Budući da je u novoj tablici $y = \frac{\bar{y}}{10^4}$, onda za nove logaritme vrijedi

$$x = 1.0001^{10000y} \quad \text{i} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

Uočimo li da je

$$1.0001^{10000y} = (1.0001^{10000})^y,$$

vidimo da nova logaritamska tablica ima bazu

$$b = 1.0001^{10000} = \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4} \doteq \mathrm{e}.$$

Ta je aproksimacija točna do treće decimale.

Dakle, nova tablica je tablica funkcije $y = \log_b x$ za $b \doteq \mathrm{e}$, tj. $y \doteq \ln x$. Nova tablica daje približne vrijednosti prirodnih logaritama. Da smo u staroj tablici odabrali bazu još bližu broju 1, npr. $b = 1 + \frac{1}{n}$, gdje je $n = 10^{100}$, i da smo potom prešli na novu tablicu dijeljenjem y-a sa $n = 10^{100}$, dobili bismo još finiju razdiobu x-ova i još bolju aproksimaciju prirodnih logaritama funkcijom

$$y = \log_b x \text{ gdje je } b = \left(1 + \frac{1}{10^{100}}\right)^{10^{100}}.$$

No vratimo se racionalnoj rekonstrukciji stvarnoga otkrića prirodnih logaritama. Naime, prijelaz na prirodne logaritme, koje Bürgijevi i Nepierovi logaritmi aproksimiraju, nije učinjen upravo opisanim suvremenim prijelazom na bazu $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ za $n \to \infty$. Povijesni prijelaz na prirodne logaritme bio je geometrijski. To je sasvim razumljivo ako znamo da u to doba još i ne postoji pojam (numeričke) funkcije u današnjem smislu. Osnovni matematički pojam su geometrijske veličine vezane uz neku krivulju, tzv. funkcije krivulje (usp. sljedeći članak). Razmotrimo još jednom Bürgijeve logaritme

$$x = \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4 y}$$

interpretirajući ih geometrijski. Sjetimo se da je

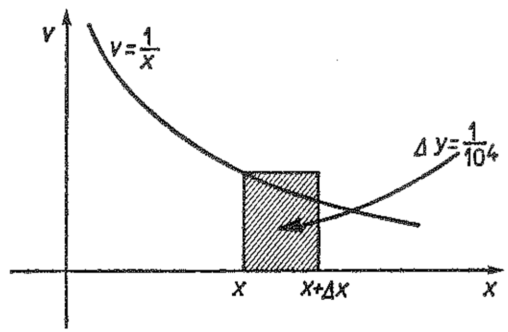
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}, \quad \text{tj.} \quad y = \frac{1}{x}\,\Delta x,$$

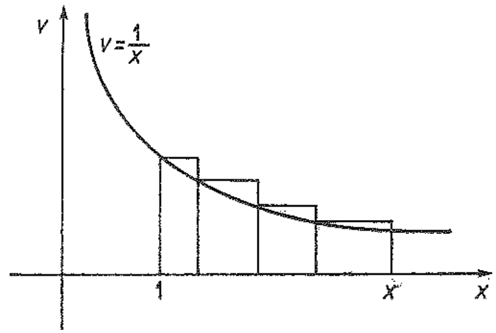
odakle slijedi da se prirast Δy $\left(\text{koji je uvijek jednak } \frac{1}{10^4}\right)$ može geometrijski prikazati kao pravokutnik s visinom $v = \frac{1}{x}$ i takvom osnovicom Δx koja daje površinu pravokutnika $\frac{1}{x}\Delta x = \frac{1}{10^4}$.

Naravno, sam y je suma prirasta Δy

$$y = \sum_1^x \Delta y = \sum_1^x \frac{1}{x}\,\Delta x,$$

koja se geometrijski može prikazati kao suma pravokutnika: a) koji se protežu od 1 do x, b) kojima se visina proteže do grafa funkcije $v = \frac{1}{x}$ i c) kojima je površina $\frac{1}{10^4}$.





Ako je (stara) baza bliža jedinici od Bürgijeve, npr. ako je $b = 1 + \frac{1}{10^{100}}$, onda dobivamo pravokutnike manjih površina $\left(\text{u našem primjeru pravokutnike površine } \frac{1}{10^{100}}\right)$, čiji je zbroj još bliži površini ispod hiperbole. Dakle, gledano geometrijski, granični prijelaz na prirodne logaritme je prijelaz na površinu ispod hiperbole, tj.

$$\ln x = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

Taj je prijelaz učinio Mercator (1667) i tako su otkriveni prirodni logaritmi. Razdioba x-ova sada je kontinuirana kao i razdioba y-a. Lako se vidi da je tako uvedena funkcija još uvijek logaritamska. Naime,

$$\ln(x_1 x_2) = \int_1^{x_1 x_2} \frac{dx}{x} = \int_1^{x_1} \frac{dx}{x} + \int_{x_1}^{x_1 x_2} \frac{dx}{x} =$$

$$= \left(\text{uz supstituciju } t = \frac{x}{x_1}\right) = \int_1^{x_1} \frac{dx}{x} + \int_1^{x_2} \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln x_1 + \ln x_2.$$

Iz Mercatorove definicije prirodnog logaritma, koji on sinonimno zove i hiperbolni logaritam, lako je rekonstruirati vrijednost baze tih logaritama, koju danas označavamo sa e. Naime, ako je $q = \sqrt[n]{x}$, onda je

$$\ln x = \int_1^x \frac{dx}{x} = \int_1^q \frac{dx}{x} + \int_q^{q^2} \frac{dx}{x} + \ldots + \int_{q^{n-1}}^{q^n} \frac{dx}{x} =$$

$$= n \int_1^{\sqrt[n]{x}} \frac{dx}{x} = n \frac{1}{x'} (\sqrt[n]{x} - 1),$$

gdje je $1 < x' < \sqrt[n]{x}$. Dakle

$$\ln x = \lim_{n \to \infty} n (\sqrt[n]{x} - 1).$$

Odavde slijedi da je

$$x = \ln e^x = \lim_{n \to \infty} n (\sqrt[n]{e^x} - 1) \text{ tj. } \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Supstitucijom $\frac{n}{x} = m$ dobivamo

$$e^x = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx} = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx},$$

ili specijalno za $x = 1$

$$e = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

NEWTON I LEIBNIZ OTKRIVAČI INFINITEZIMALNOG RAČUNA

Mnogo velikih, a uz njih i podosta manje značajnih matematičara, bijaše zaslužno za stvaranje infinitezimalnog računa. Samo dvojica nose počasni naslov otkrivača računa — Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz. Njihova su otkrića prilično različita, ne samo notacijom nego i pojmovno, ali u njima nalazimo dovoljno mnogo onoga što držimo suštinom računa, pa im obojici dodjeljujemo počasno mjesto otkrivača. Danas se općenito smatra da su oni »začinjavci« i da su do svojih otkrića došli nezavisno; Newton ranije, 1664—1666, Leibniz kasnije, 1675. Leibniz je svoje otkriće objavio u *Acta eruditorum* 1684. »Nova methodus pro maximis et minimis...« i 1686. »De geometria recondita...«, dok su Newtonovi »De analysi...« kolali među članovima Royal Society od 1669, ali su objavljeni tek 1711. Te naizgled banalne činjenice o počecima računa niti su oduvijek prihvaćane, niti je uvijek bilo jasno njihovo značenje. One su se ovako iskristalizirale tek strpljivim povijesnim istraživanjima u našem stoljeću.

Kada je na prijelazu iz 17. u 18. stoljeće već dosta toga objavljeno o Leibnizovu računu (čak i prvi, L'Hôpitalov, udžbenik), i kada su dostupna obavještenja o Newtonovu računu postala dovoljna da se pokaže kako su oba velikana našla nove metode u istom matematičkom području, došlo je do svađe o prioritetu. Osjećaji nacionalnog, a potom i osobnog ponosa, pomiješani u većine sudionika s potpuno nedovoljnim uvidom u matematičke osnove predmeta svađe, stvorili su krajnje neukusnu zavrzlamu nerazumijevanja i insinuacija koja se, rekosmo, razmrsila tek u našem stoljeću. No pitanje prioriteta, iako prije četvrt tisućljeća vrlo burno postavljeno, za nas danas i nije tako važno. Ono što s te distance lakše izmiče i čemu često ne znamo pravo značenje jest sam račun Newtona i Leibniza. Jer Newton i Leibniz nisu stvorili **naš** moderni račun, niti su čak izmislili jedan te isti račun. Da bismo pravilno shvatili značaj njihova otkrića, moramo znati što su oni otkrili. To opisujemo u ovom članku, s nadom da ćemo tako saznati ne samo što znači da su Newton i Leibniz stvorili infinitezimalni račun već da ćemo možda bolje razumjeti što uopće znači da je netko stvorio novo matematičko područje. No prije nego se posvetimo toj osnovnoj i specifičnoj zadaći, a da bismo bolje razumjeli značaj i veličinu naših junaka, evo njihovih sažetih biografija, u kojima ćemo više pažnje obratiti njihovu otkrivanju infinitezimalnog računa.

Život i djelo I. Newtona

Jedan biograf, Newtonov suvremenik, usporedio ga je s rijekom Nil: njene su ogromne moći znane, ali joj izvor nije otkriven. Ipak, bar nekoliko poznatih činjenica o njegovoj mladosti možda će nam pomoći da razumijemo nastanak genija.

Rođen je kao nedonošče na Božić 1642. Babica je nakon poroda otišla po neki okrepljujući lijek za jadno djetešce, i kada ga je po povratku zatekla živa, bila je iznenađena. Pričalo se također da je još mjesec dana po rođenju nosio potporanj oko vrata i da nitko nije vjerovao da će ostati živ. Sam Newton je često ponavljao kako je bio toliko sićušan da je mogao stati u litreni lonac.

Otac je umro tri mjeseca prije Newtonova rođenja. Kada su mu bile dvije godine, majka se ponovo udala, a on je poslan svojoj ostarjeloj baki. Živio je na osamljenoj farmi, lišen roditeljske brige i ljubavi, bez blagotvorne bratske uzajamnosti i suparništva. Biografi smatraju da se veći dio Newtonove duševnosti može pripisati njegovom usamljenom i nesretnom djetinjstvu. Jedna djevojka, koja ga je poznavala u djetinjstvu, opisuje ga kao staloženog, šutljivog i misaonog momka koji nikada nije sudjelovao u igrama svojih vršnjaka.

Čini se da je Newton u srednjoj školi prebrodio svoje slabosti. Ta se konstatacija obično povezuje s jednom anegdotom. Poznati školski siledžija bezrazložno je napao mladog Newtona. Pored fizičke boli u žrtvu se uvukao strah i nepodnošljiv duševni nemir. Uočivši mladićeve teškoće, jedan je razumni nastavnik ohrabrio Newtona da siledžiju izazove na poštenu borbu. Newton nije samo pobijedio nego je po mišljenju većine učenika pokazao veliku odlučnost i snagu svojeg duha. (Siledžija je bio među najboljim učenicima pa je Newton odlučio da ga i tu pretekne. Uskoro je postao glavni u školi.)

U Newtonovoj 14. godini umro je drugi muž njegove majke. Dječak se tada vratio kući. Majka je željela mladoga nasljednika učiniti uzornim farmerom. Taj je pokušaj bio čisti promašaj, pa je majka na nagovor svojega brata, a srećom po čovječanstvo, odustala od svoje namjere, dopustivši mladome Newtonu da se pripremi za studije na Cambridgeu. Sa 18. godina on je ušao u slavni Trinity College.

U prvim sveučilišnim godinama Newton se nije ničim isticao. Presudni preokret zbio se kada je došao pod utjecaj Isaaca Barrowa, profesora matematike i izuzetnog čovjeka. Barrow je bio značajan matematičar svojeg vremena, ugledan astronom i autoritet u području optike. Sve su to područja kasnijih Newtonovih velikih uspjeha. Oni su se počeli nizati zapanjujućom brzinom.

Završivši studije, Newton se vratio kući, gdje je u svega 18 mjeseci intenzivnog rada stvorio temelje svoje matematike, nebeske mehanike i fizikalne optike. Newtonov kasniji znanstveni život možemo dobrim dijelom opisati kao elaboraciju osnovnih otkrića do kojih je došao u zlatnih podrug godine, koju mnogi smatraju najplodnijom u čitavoj povijesti znanosti. Što je tih mjeseci stvoreno u Woolsthorpeu, najbolje ćemo opisati Newtonovim riječima: »Početkom 1665. otkrio sam metodu aproksimacije redova i pravilo za svođenje svake potencije binoma na takav red. Te godine u svibnju pronašao sam Gregoryjevu i Slusisovu metodu tangenata, a u studenom otkrio sam direktnu metodu fluksija. U siječnju sljedeće godine već sam bio u posjedu nove teorije boja, a u svibnju proniknuo sam u inverznu metodu fluksija. Te sam godine počeo misliti o gravitaciji protegnutoj na Mjesečevu putanju... i, usporedivši tako silu potrebnu da Mjesec zadrži na njegovoj putanji s gravitacijskom silom na površini Zemlje, našao sam vrlo bliske podudarnosti...«.

Zadržat ćemo se ovdje na njegovim matematičkim otkrićima, točnije na otkriću infinitezimalnog računa. Ono je vezano uz sljedeće osnovne teme: redovi, algoritmi, recipročni odnos diferenciranja i integriranja, pojam varijable kao gibanja u vremenu i doktrina prvih i konačnih omjera. Iako se te teme isprepliću u Newtonovim razmatranjima, mi ćemo ih, jednostavnosti radi, opisati svaku posebno.

Razvoje u redove potencija Newton je smatrao izuzetno značajnim, jer su mu omogućavali da transcedentne, a naravno i složene algebarske krivulje predoči jednostavnijim jednadžbama (makar i s beskonačno mnogo **jednostavnih** članova). To je imalo dvije velike prednosti. S jedne strane, razvoj u red omogućavao je da se pravila i algoritmi definirani samo za jednostvane jednadžbe primijene i na složenije krivulje. Naprimjer, relacija

$$(1) \qquad \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

(koja je do 1660. bila dobro poznata, iako ne u ovoj nego u raznim drugim formama) mogla se, u kombinaciji s razvojem u red, upotrijebiti za nalaženje kvadratura gotovo svih poznatih krivulja. S druge strane, razvoji u redove pružali su jednostavnu mogućnost aproksimiranja i simplifikacija formula, zanemarivanjem članova višeg reda — sredstvo kojim se Newton često koristio pri rješavanju fizikalnih problema.

Binomni teorem je najslavniji Newtonov razvoj u red, do kojeg je došao u zlatnih podrug godine, točnije u toku zime 1664—1665. Newton je ustvrdio da poznati binomni razvoj za pozitivne cjelobrojne eksponente n

$$(a + x)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 + \ldots + x^n$$

vrijedi i za razlomljene eksponente $\alpha = p/q$, u kojem je slučaju razvoj beskonačan:

$$(a + x)^\alpha = a^\alpha + \frac{\alpha}{1} a^{\alpha-1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} a^{\alpha-2} x^2 + \ldots .$$

Do tog je rezultata došao razmatrajući problem kvadrature kruga $y = (1 - x^2)^{1/2}$. Usporedio je sljedeće krivulje s kvadraturama onih među njima koje su bile poznate:

$y = (1 - x^2)^0$, čija je kvadratura x

$y = (1 - x^2)^{1/2}$

$$y = (1 - x^2)^{2/2}, \text{ čija je kvadratura } x - \frac{1}{3}x^3$$

$$y = (1 - x^2)^{3/2}$$

$$y = (1 - x^2)^{4/2}, \text{ čija je kvadratura } x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

$$y = (1 - x^2)^{5/2}$$

$$y = (1 - x^2)^{6/2}, \text{ čija je kvadratura } x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$$

i tako dalje.

Razmatrajući koeficijente u kvadraturama Newton je uočio da su im nazivnici neparni brojevi 1, 3, 5, 7, ..., a brojnici su im u sukcesivnim razvojima (1), (1, 1), (1, 2, 1), (1, 3, 3, 1). Bili su to dobro mu poznati brojevi Pascalova trokuta za koje je znao da se za prirodni cjelobrojni n mogu izraziti kao

$$\left(1, n, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots\right).$$

Newton je naslutio da bi isti izrazi mogli biti valjani i za razlomljeni n. Naprimjer, za $n = \frac{1}{2}$ dobio bi kvadraturu kruga $y = (1 - x^2)^{1/2}$ u obliku

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} - \ldots .$$

Dakako, iz relacije (1) i ovakvog razvoja kvadrature kruga $y = (1 - x^2)^{1/2}$ odmah slijedi odgovarajući razvoj za samu krivulju $y = (1 - x^2)^{1/2}$

$$(2) \qquad (1 - x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^7 - \ldots .$$

Newton je svjestan krhkosti svoje argumentacije »po analogiji«, pa će dvostruko provjeriti razvoj (2). Najprije će pokazati da desna strana od (2) pomnožena sama sobom daje $1 - x^2$ (svi ostali članovi poništavaju se), a potom će se uvjeriti da standardni postupak korjenovanja formalno primijenjen na $1 - x^2$ daje desnu stranu od (2). Na isti je način upotrijebio standardni postupak dijeljenja i dobio razvoj

$$(3) \qquad \frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots,$$

uz pomoć kojeg je došao i do kvadrature hiperbole $y = \frac{1}{1 + x}$. Naravno, odmah je ustanovio da razvoj (3) slijedi i iz njegova binomnog teorema za $n = -1$. U svojim »De analysi...«, u kojima je objavio i upotrebljavao svoje razvoje u redove, Newton je dao i opći postupak kojim se iz dane algebarske jednadžbe

$$\sum a_{mn} x^m y^n = 0$$

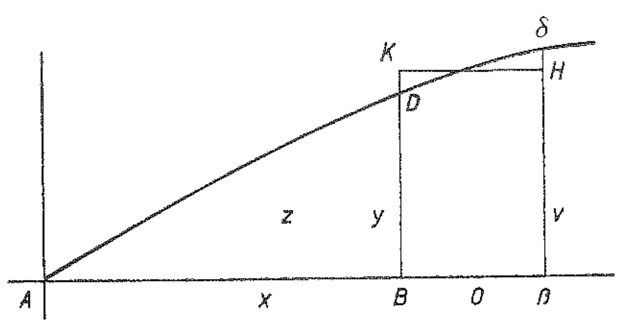
dolazi do koeficijenata odgovarajućeg reda

$$y = \sum b_n x^n.$$

Uočimo da je i u pronalasku binomnog teorema i u njegovim primjenama relacija (1) imala važnu ulogu. Newton je (naravno u drugačijem obliku) navodi na samom početku »De analysi...«, nazivajući je pravilom za kvadrature jednostavnih krivulja. Kasnije, u istoj raspravi, koja objelodanjuje njegova matematička otkrića iz zlatnog perioda, on daje opći postupak (kojem je to pravilo neposredna posljedica), za nalaženje relacije koja veže kvadraturu krivulje s njenom ordinatom. Taj postupak jasno pokazuje da je Newton **potpuno svjestan inverznog odnosa integriranja i diferenciranja** (iako se, naravno, ne koristi tim terminima). Svoju metodu objašnjava on na primjeru, u kojem se jasno očituje općenitost metode.

Evo njegova objašnjenja.

Na slici (str. 22) je površina $ABD = z$, $AB = x$ i $BD = y$. Neka je nadalje $B\beta = o$ i neka je $BK = v$ odabrano tako da površina $BD\delta\beta$ bude jednaka površini $BKH\beta = o \cdot v$.



Uzmimo, naprimjer, krivulju kojoj je

$$(4)\qquad z = \frac{2}{3} x^{3/2}, \quad \text{tj.} \quad z^2 = \frac{4}{9} x^3.$$

Tada je i

$$(z + o\,v)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3,$$

odakle slijedi

$$z^2 + 2\,zov + o^2v^2 = \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3).$$

Odstranjivanjem članova bez o, jednakih prema (4), pa potom dijeljenjem s o, dobivamo

$$2zv + ov^2 = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2).$$

Sada Newton uzima $B\beta$ »beskonačno malim«, a u tom je slučaju $v = y$ i o iščezava, pa dobiva

$$2zy = \frac{4}{3} x^2.$$

Uvrštavajući z iz (4), Newton konačno nalazi

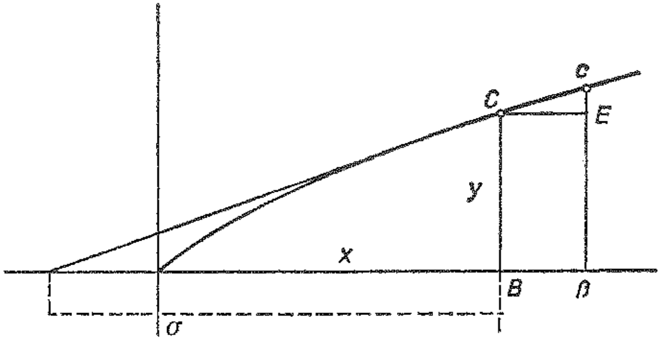
$$y = x^{1/2}.$$

Očito, postupak je primjenljiv na svaku polinomsku relaciju između z i x. On je u biti računanje derivacije, u ovom slučaju y, dane algebarske funkcije z od x. Razumije se, z je kvadratura, tj. integral od y, pa je inverzija deriviranja i integriranja očigledna.

Newton je potpuno jasno vidio da problemu kvdaratura treba prići na ovaj inverzni način: izračunavajući y za sve moguće algebarske z, on će naći sve moguće krivulje y koje su kvadraturabilne (integrabilne). Primijenivši taj postupak, on je uistinu našao mnoge integrabilne krivulje, nižući ih u podužu listu, koja nije ništa manje do prva tablica integrala.

Krucijalni element gore opisanog postupka jest dodavanje »malih« prirasta o i ov varijablama x i z, i potom poništavanje »malog« o i odgovarajući prijelaz od v u y. U svojim diskusijama ekstrema, tangenti i zakrivljenosti Newton se koristio tom metodom, došavši tako do mnogih algoritama za rješavanje spomenutih problema (modernim riječima, on je razvio algoritme za nalaženje derivacije bilo koje algebarske funkcije).

Tek se kasnije Newton prihvatio kritičke analize svojih infinitezimalnih metoda otkrivenih u zlatnom periodu. U svojem manuskriptu »Methodus fluxionum et serierum infinitarum«, koji povjesnici smještaju u 1671. godinu, on reformulira svoje algoritme i dokaze u terminima fluenti i njihovih fluksija. Fluenta je Newtonv pojam varijabilne veličine u analitičkoj geometriji: on ih razumije kao »veličine koje protječu«, tj. kao veličine koje se mijenjaju s vremenom. Dakle, kad razmatra veličine na gornjoj slici, Newton zamišlja da se točka D giba duž krivulje, dok se odgovarajuće veličine (ordinata y, apscisa x, kvadratura z, ili bilo koje druge veličine povezane s krivuljom) mijenjaju, tj. teku na odgovarajući način. Te tekuće veličine Newton naziva fluentama. Brzinu fluente naziva fluksijom i označava je točkom (npr. fluksije fluenata x, y, z označava sa $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$). Newton je smatrao da s takvim pojmom veličine koja se giba u vremenu može razriješiti temeljne teškoće inherentne »malim« prirastima, koji su tako mali da ih možemo zanemariti, ali nisu jednaki nuli tako da s njima ipak možemo dijeliti. Rješenje je njegova doktrina prvih i konačnih omjera. Naime, u fluksionom računu nisu važne same fluksije već njihovi omjeri. Naprimjer, tangenta krivulje nalazi se zaključivanjem da je omjer ordinate i suptangente jednak **omjeru fluksija** ordinate i apscise, tj. $y/\sigma = \dot{y}/\dot{x}$.



Newton nadalje objašnjava da je omjer fluksija $\dot{y}/\dot{x}$ jednak »prvom« ili »konačnom« omjeru prirasta od y i x (usp. »De quadratura curvarum«, manuskript iz 1693, objavljen 1710). Dakle, on zamišlja odgovarajuće priraste $B\beta = CE$ od x i Ec od y (vidi sliku), da bi potom razmotrio njihov omjer Ec/CE kad oba prirasta stižu u nulu ili se pak oba pokreću iz nule. U prvom slučaju govori o **konačnom omjeru** koji prirasti postižu upravo onda kada nestaju, u drugom o **početnom omjeru** koji prirasti postižu upravo onda kada nastaju. Omjer $\dot{y}/\dot{x}$ jednak je baš tom konačnom ili ekvivalentno početnom omjeru. Iako će današnji čitalac u toj argumentaciji prepoznati implicitni pojam limesa, Newtonov je argument ipak sumnjiv, što su uočili već i njegovi suvremenici. Naime, tako dugo dok prirasti postoje, njihov omjer nije konačni omjer, a kad prestanu postojati, onda i nemaju omjera. Postoje li dakle konačni omjeri? Kao što reče biskup George Berkeley u svojem »The analyst«: Što su te fluksije? Brzine nestajućih prirasta? A što su sami ti nestajući prirasti? Niti su konačne veličine, niti beskonačno male, niti uopće ikakve veličine. Ne bismo li ih trebali zvati duhovima preminulih veličina?

No usprkos tim pojmovnim teškoćama Newton je stvorio uspješan i korektan, iako ne i opravdan račun. Nastavimo stoga ovaj prikaz njegova otkrića jednim primjerom izračunavanja krajnjeg omjera, iz njegovih »De analysi...«, koji će to ilustrirati. Ako je o infinitezimalni prirast vremena, tada su odgovarajući prirasti fluenti x i y, umnošci s odgovarajućim fluksijama, $\dot{x}o$ i $\dot{y}o$. Newton izračunava krajnji omjer $\dot{y}/\dot{x}$ za krivulju čija je jednadžba

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0. \tag{5}$$

Uvrštavajući $x + \dot{x}o$ i $y + \dot{y}o$ umjesto x i y, dobiva

$$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - (ax^2 + \\ + 2a\dot{x}ox + a\dot{x}^2o^2) + (axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + \\ + a\dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0.$$

Odbacujući $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, s obzirom na (5), dijeleći sa o, te ništeći članove s faktorom o, Newton dobiva

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0,$$

odakle lako nalazi omjer $\dot{y}/\dot{x}$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}.$$

S takvim algoritmima Newton je bio u stanju riješiti ono što je zvao jednim od dva fundamentalna problema infinitezimalnog računa: za zadane odnose fluenti naći odnose njihovih fluksija. Drugi problem bio je obrat prvoga: za zadane odnose fluksija naći odnose njihovih fluenti. To je svakako mnogo teži problem nego prvi, no Newton je učinio mnogo više od njegove puke formualcije. Njegove, već spomenute, tablice integrala prvi su korak k rješenju problema, a on je učinio i mnoge dalje korake, rješavajući mnoge pojedine fluksione jednadžbe. Toliko o Newtonovom otkriću infinitezimalnog računa.

Javna priznanja Newtonovom znanstvenom radu došla su brzo i bila su značajna. Barrow se povukao u mirovinu da bi Newtonu prepustio svoje mjesto. Tako je on sa 26 godina stekao ugledni akademski položaj koji mu je omogućio da slobodno nastavi svoja istraživanja. Sa 30 godina izabran je za člana Royal Society, što je u Engleskoj najveća znanstvena počast. Neposredan povod tom izboru bio je članak što ga je 6. veljače 1672. poslao na adresu Royal Society of London, a koji je sadržavao njegovu novu teoriju svjetlosti i boja. Tu je Newton obznanio svoje eksperimente, u kojima je pomoću prizme razložio bijelu svjetlost na raznobojne komponente (pridružene različitim indkesima loma) da bi ih pomoću druge prizme ponovo složio u jednu jedinu bijelu svjetlost. Ti veličanstveni eksperimenti otvorili su Newtonu put ka formulaciji fizikalne teorije boja. Bila je to prva Newtonova publikacija.

Ipak članak nije naišao na univerzalno odobravanje koje je on očekivao. Royal Society bilo je obasuto pismima koja su opovrgavala Newtonove zaključke. Među oponentima bile su i veličine kao Christian Huyghens i Robert Hooke. S nevjerojatnom strpljivošću Newton je pisao pažljivo sročena pisma odgovarajući na svaki prigovor. Ali uspio je uvjeriti samo jednog jedinog oponenta, francuskog isusovca oca Pardiesa. Velik uspjeh, koji mu je otvrio vrata u Royal Society, postao je i gorko iskustvo, koje je ostavilo duboke tragove u njegovoj ličnosti. Zavjetovao se da više neće objavljivati svoja otkrića. Ipak je kasnije nastavio s objavljivanjem; trebalo mu je priznanje znanstvene javnosti. Ta nepostojanost nije promakla Newtonovim neprijateljima. Jedan od njih, astronom John Flamsteed, opisao ga je kao »podmuklog, ambicioznog i pretjerano pohlepnog za slavom« iako je dodao: »Ja vjerujem da je on u suštini dobar čovjek, ali po prirodi sumnjičav.«

Poslije te polemike Newton se kao znanstvenik povukao iz javnosti. Služio je Sveučilištu kao njegov predstavnik u Parlamentu, a privatno se bavio kemijom, alkemijom, teologijom, fizikom i matematikom. Upoznao se s Leibnizom, ali je velikom suvremeniku odbio dati bilo kakve točnije informacije o svojim otkrićima u matematici. Kasnije ga je optužio za plagijat u okviru već spomenute svađe o prioritetu. Newton je razvijao ljubomorno posjednički odnos spram svakog predmeta svojih izučavanja. Gotovo svako dostignuće njegova kreativna života bilo je popraćeno nekom svađom.

Godine 1684. došlo je do sada već legendarne posjete astronoma Edmunda Halleya Isaacu Newtonu. Halley i Hooke zaključili su iz Keplerovog prikaza gibanja planeta da privlačne sile moraju opadati s kvadratom udaljenosti od Sunca. Ali oni nisu bili u stanju dokazati valjanost svoje ideje. Halley je Newtonu došao sa sljedećim pitanjem: »Koju bi krivulju opisivao planet uz pretpostavku da gravitacija opada s kvadratom njene udaljenosti od Sunca?« Newton je bez razmišljanja odgovorio da bi to bila elipsa. Kada se Halley začudio kako on to zna, Newton je odgovorio da je to već izračunao. Halleyu je taj kratki odgovor bio

dovoljan da shvati kako je Newton otkrio jedan od najtemeljinijih zakona univerzuma — zakon gravitacije — i odmah je želio vidjeti njegov epohalni račun. Međutim, Newton nije mogao naći svoje zabilješke. Ipak je obećao da će iznova napisati teorem i dokaze. Uz neprestano Halleyevo požurivanje Newton je dovršio taj tekst za Royal Society. Tako je stvorena PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA, otada znana jednostavno kao Newtonova PRINCIPIA. (Neposredno pred tiskanje nastala je kriza izazvana Hookeovim svojatanjem zakona inverznog kvadrata. Newton je zaprijetio povlačenjem iz tiska najvažnijih dijelova svojeg rukopisa, ali ga je Halley umirio, pa je velika znanstvena klasika otišla u tisak neokrnjena. Halleyjeve su zasluge u cijelom pothvatu goleme. Ne samo da je Newtona nagovorio da napiše svoje najveće djelo, već je sam nadgledao njegovo tiskanje i platio sve troškove izdavanja, a nije bio bogat čovjek.)

Nakon dovršenja Principia Newton je patio od neke vrste živčanog sloma. Žalio se da ne može spavati i da nema negdašnju konzistentnost uma. Pisao je ljuta pisma prijateljima, da bi im se potom ispričavao. Godine 1696. napustio je akademski život preuzevši položaj u Kraljevskoj kovnici. Počasti za njegova znanstvena dostignuća i dalje su pristizale, 1705. postao je plemić i dugi je niz godina bio predsjednik Royal Society. Ali velikih znanstvenih doprinosa više nije bilo. Neki kažu da je njegov kreativni genij naprosto sagorio. Drugi dokazuju da poslije utemeljenja fizikalne optike, otkrića infinitezimalnog računa i razotkrivanja mehanizma samog univerzuma nije preostalo ništa što bi još mogao učiniti u znanosti.

Newton je često opisivan kao inaugurator »Doba Razuma«. Alexander Pope izrazio je to poznatim stihovima:

Nature and Nature's laws lay hid in night:
God said, Let Newton be! and all was light.*

No, pokojni Lord Keynes upozorio je i na drugu Newtonovu stranu. Njegovu potragu za odgovorom na zagonetku postojanja, njegov velik interes za alkemiju, okultnu filozofiju i religiju, njegove neortodoksne teološke poglede. Tkogod je čitao Newtonove neznanstvene spise, neće se

* Priroda i zakoni njeni u noći skriveni leže:
Bog reče, Nek' bude Newton! i sve u svjetlu bješe.

potpuno zadovoljiti samo slavnim Popeovim stihovima. Njemu će možda nedostajati stihovi poput ovih kojima je William Wordsworth opisao Newtona:

... with his prism and silent face,
... a mind forever
Voyaging through strange seas of thought alone.*

Život i djelo G. W. Leibniza

Gottfried Wilhelm Leibniz rođen je u Leipzigu 1. lipnja 1646. Njegov otac Friedrich Leibnütz bio je profesor moralne filozofije na Sveučilištu u Leipzigu. (U svojim dvadesetim godinama Leibniz je promijenio pisanje svojeg imena iz Leibnütz u Leibniz; on se sam nije nikada koristio oblikom Leibnitz, koji je postao najčešći još za njegova života, a koji je izašao iz mode tek nedavno.)

O Leibnizovu najranijem obrazovanju ponešto znamo, ali samo iz njegovih usputnih opaski, koje vjerojatno prenaglašavaju stupanj njegove samoobrazovanosti. Otac ga je naučio čitati još mnogo prije no što je pošao u školu. On tvrdi da je sam naučio latinski iz jednog ilustriranog Livija i da je s osam godina naprosto gutao knjige tada već pokojnog oca. Nije sasvim jasno što je mogao činiti s tim knjigama jer je u latinskom postao fluentan s dvanaest godina, a tada je tek i počeo učiti grčki. Ipak, to mora da je temelj njegove kasnije goleme erudicije u klasicima i skolastičkoj filozofiji. Osim toga, njegovo školsko obrazovanje bilo je obimno i zahtjevno, uključujući njemačku povijest i literaturu, latinski, grčki, teologiju i logiku. Naročito ga je zanimala logika, pa je već u trinaestoj godini, usprkos odgovaranju svojih učitelja, pokušao ispraviti Aristotelovu teoriju kategorija.

Na Sveučilište se upisao 1661, u svojoj četrnaestoj godini, mlad, ali ne i izuzetno mlad u to doba. Nakon diplomiranja mogao je nastaviti svoje studije (koji su dotad uključivali filozofiju, retoriku, matematiku, latinski, grčki i hebrejski) samo na jednom od »viših« fakulteta: teologiji,

* ... sa svojom prizmom i nijemim licem,
... um za vječnost
Ploveći tajnovitim morima misli, sam.

pravu ili medicini. Odlučio se za pravo, provodeći prije toga jedan kratki ljetni semestar na susjednom Sveučilištu u Jeni. Tu se upoznao s mnogim neortodoksnim idejama, posebno s neopitagorejstvom Erharda Weigela, prema kojem je Broj temeljni realitet univerzuma.

Nakon povratka u Leipzig Leibniz je sljedeće tri godine proveo u radu na »disputationes«, koje je morao braniti u otvorenim debatama na svakom stupnju svoje studentske karijere. Studij je završio habilitacijom koja ga je kvalificirala za predavača filozofije. Tim se pravom nije koristio jer je bilo počasno, ali ne i plaćeno, a on je već prilično dugovao svojoj rodbini. Bio je zainteresiran za jedno od dvanaest mentorskih mjesta na pravu, koje su dobivali doktori prava kad bi se koje ispraznilo, i to po redu doktoriranja. Na nesreću, te je godine bilo previše kandidata za doktore, pa je mlađima, uključujući i Leibniza, kazano da čekaju sljedeći termin. To ga je izgleda teško pogodilo. Čak je sumnjao da je dekanova žena skovala zavjeru protiv njega osobno, iako nikada nije objasnio s kojim motivom. Revoltiran, prešao je na malo Sveučilište u Altdorfu, koje je tada bilo glavni centar znanosti i tehnologije. Tu je doktorirao, s već pripremljenom tezom, u roku od nekoliko mjeseci. Profesori iz Altdorfa bili su toliko impresionirani da su mu odmah ponudili profesuru; ali on je već odustao od akademske karijere odlučivši se za javne poslove.

Izgleda da je Leibniz još kao student u Altdorfu dobio mjesto tajnika u društvu niremberških intelektualaca zainteresiranih za alkemiju. Ne znamo o kakvom se to poslu radilo; u vezi s alkemijskim pitanjima Leibniz se strogo držao tradicionalne tajnovitosti. Nasuprot svojem suvremeniku Newtonu, malo je vjerojatno da se ikada uključio u laboratorijski rad, ali je svojim dubokim teorijskim razumijevanjem alkemije sigurno stekao reputaciju stručnjaka. Njegovi javni motivi bili su znanstveni: kada bi transmutacija bila moguća, sigurno bi dovela do značajnih obavještenja o strukturi materije. Ali bit će da se nadao i stjecanju imetka, jer znamo, naprimjer, da je 1676. sklopio ugovor o dijeljenju profita s aktivnim alkemičarima, G. H. Schullerom i J. D. Craftom. Njegova je obaveza bila savjetništvo i namicanje kapitala (uvijek je bio diskretna veza ljudima koji su bili voljni posuditi novac za alkemijske pokuse). Njegova jedina ograda prema stvaranju zlata bila je da će zlato izgubiti vrijednost ako se počne jeftino proizvoditi.

No, bez obzira na karakter njegovih veza s niremberškim alkemičarima, sigurno znamo da s njima nije ostao dugo.

Na jednom od svojih putovanja »do Nizozemske i dalje« slučajno je upoznao barona Johanna Christiana von Boineburga, bivšeg prvog ministra izbornog kneza Mainza, Johanna Philippa von Schönborna. Impresioniran njegovom alkemijskom i pravničkom erudicijom, kao i njegovim izuzetnim administrativnim sposobnostima, Boineburg ga je privolio da prihvati njegov patronat i pridruži mu se u Frankfurtu na Maini, u neposrednoj blizini Mainza. Boineburg mu je uskoro osigurao mjesto kneževog pravnog savjetnika, gdje je radio na novoj kodifikaciji građanskog prava. Sljedećih pet godina proveo je koliko u Frankfurtu toliko i u Mainzu.

Mnoge njegove aktivnosti iz tog razdoblja zamišljene su kao doprinos njegovoj »univerzalnoj enciklopediji«, koja je sve znanje trebala obuhvatiti jedinstvenim sistemom. (U to je spadala i pravna kodifikacija u Mainzu, jer je Leibniz prirodno pravo smatrao važnim dijelom ljudskoga znanja.) Već je bilo pokušaja da se sve znanje obuhvati jednim djelom, npr. J. H. Alstedovom Enciklopedijom u sedam tomova iz 1630, koju je Leibniz kanio prilagoditi svojim ciljevima. Ali ukupni fond tadašnjeg znanja nalazio se u knjigama razasutim po bibliotekama, diljem Evrope, pa je Leibniz uskoro shvatio da je najpogodniji način centralizacije razasutog blaga stvaranje glavnog predmetnog kataloga. (U to vrijeme jedini upotrebljivi predmetni katalog bio je katalog Bodleian knjižnice u Oxfordu, za koji Leibniz nije znao.) On je 1670, kao model, izradio katalog za Boineburgovu bogatu kolekciju knjiga, ali i pored upornih zahtjeva nikada mu nije dopušteno da isto učini i za velike biblioteke kojima je kasnije upravljo. U to vrijeme razradio je i shemu za prikazivanje knjiga, koju je nazvao *nucleus librarius*, a koja je trebala sadržavati apstrakte svih ozbiljnih novih publikacija. U dugoročnom planu bilo je proširenje koje bi obuhvatilo ranije publikacije, neobjavljene radove, istraživanja koja su u toku i kumulativni predmetni indeks. Dva je puta, 1668. i 1669, pokušao dobiti tada obaveznu carsku licencu za taj projekt, ali je oba puta odbijen. Vjerojatno zbog straha od štete koju bi nanio tržištu knjiga.

Potreba za koordinacijom istraživanja sugerirala je osnivanje učenih i znanstvenih društava. Kao i mnogi njegovi suvremenici, Leibniz je zamišljao razne utopijske sheme za istraživačke komune, izložbe i muzeje za popularizaciju znanosti i sl. Međutim, dok još nije bio dovoljno utjecajan da ostvari svoje planove, jedini praktični korak bio je da se pokuša uključiti u već postojeća društva. S tom nakanom napisao je priličan broj znanstvenih rasprava, od kojih je neke posvetio londonskom Royal Society i pariškoj Académie. Za člana Royal Society izabran je 19. travnja 1673, a za vanjskog člana pariške Académie tek 13. ožujka 1700.

Iako su se znanstvena društva i časopisi počel javljati u 17. stoljeću, još uvijek je najvažniji oblik intelektualne suradnje i širenja ideja bila izmjena pisama. Pisma su obično naširoko cirkulirala među poznanicima korespondenata, a bilo je uobičajeno i da se kolekcije takvih pisama objave u obliku knjige. Naprimjer, Leibniz je 1697. objavio izbor iz svoje korespondencije s isusovačkim misionarima u Kini, pod naslovom **Novissima Sinica**. Boineburg je bio jedan od aktivnih pismopisaca i on je pomogao Leibnizu da stvori vlastiti krug korespondenata, stavljajući ga u kontakt s intelektualcima širom Evrope. Za nekoliko godina Leibniz se dopisivao doslovno sa stotinama ljudi istovremeno, o gotovo svakom predmetu — prirodnim znanostima, matematici, pravu, politici, religiji, filozofiji, književnosti, povijesti, lingvistici, antropologiji, numizmatici itd. Pridavao je veliko značenje svojim pismima i do danas ih je sačuvano više od 15 000. Većina naših znanja o njegovu djelu, posebno njegovoj filozofiji, logici i matematici, potječe iz tih pisama, i rukopisa. Jednom je i sam napisao »Tko me zna samo po mojim publiciranim djelima, uopće me ne zna«. (Većina je rukopisa na latinskom, koji je tada još uvijek (iako ne zadugo) *lingua franca* školovanoga svijeta. Pisma su često na francuskom (čak i kada piše Nijemcima), a gotovo nikad na njemačkom. Ako i piše na njemačkom, često skrene u latinski zbog nedostatka apstraktnih tehničkih termina u tadašnjem njemačkom. Kao uvjereni njemački nacionalist iskreno je žalio zbog te činjenice, pa je ponekad pokušavao pisati filozofske tekstove na njemačkom bez latinskih posuđenica, u duhu njemačkog purizma koji je zavladao tek u 18. stoljeću.)

U to se vrijeme Leibniz intenzivno bavio i političkim pitanjima. Naprimjer, uskoro po dolasku u Mainz objavio je kratku raspravu u kojoj je deduktivnom argumentacijom

(po uzoru na geometriju) riješio pitanje Poljskog nasljedstva. Nešto dugoročniji problem bila je francuska prijetnja Njemačkoj, oslabljenoj tridesetogodišnjim ratom. Leibniz se opetovano javljao s antifrancuskim idejama, kao što je podrivanje tržišta konjaka jeftinim rumom iz zapadnoindijskog šećera, ili anonimna satira koju je 1684. napisao o *Rex Christianissimusu* Louisu XIV pod naslovom *Mars Christianissimus*, aludirajući na njegov militarizam. Dok je još bio pod Boineburgovim patronatom, skovao je plan kojim će odvratiti Louisovu pažnju od sjeverne Evrope. Razradio je, naime, zavodljivu strategiju francuskog osvajanja Egipta (koja je bila gotovo identična onoj koju je Napoleon stvarno proveo stoljeće i pol kasnije). Boineburg je bio toliko impresioniran tim planom da je organizirao Leibnizov posjet Parizu, u kojem je on trebao privoliti fransucku vladu za svoj plan. Iako je četiri godine (od 1672. do 1676) ostao u Parizu, Leibniz nije dospio do francuske vlade. Ipak, za našu osnovnu temu, otkriće infinitezimalnog računa, to su najznačajnije Leibnizove godine.

Došavši u Pariz proljeća 1672, i čekajući priliku da ostvari svoje političke nakane, Leibniz se potrudio da postane poznat u pariškim intelektualnim krugovima. Sklopio je mnoga poznanstva, između ostalih i s matematičarem Christianom Huyghensom. Preko svojih filozofskih veza uspio je doći do neobjavljenih rukopisa dvojice najvećih francuskih filozofa prethodne generacije, Pascala i Descartesa, a neki od Descartesovih sačuvani su samo preko njegovih kopija. Kritički studij Descartesova djela jedan je od glavnih temelja njegova zrelog filozofskog sustava. Ipak, u to doba, njegov je glavni interes matematika. Zbog nedovoljnog matematičkog obrazovanja, koje je stekao u Njemačkoj, Leibniz je stigao u Pariz s precijenjenim vrednovanjem vlastitih dostignuća. Nakon priličnog broja neugodnih susreta s vodećim matematičarima, uglavnom Englezima i Francuzima, došao je do zaključka da još štošta treba naučiti. Daleko od toga da bude obeshrabren, on se potpuno predao matematičkim studijima pod vodstvom Huyghensa, i kada je došlo vrijeme da napusti Pariz, on je već došao do većine otkrića koja će mu osigurati značajno mjesto u povijesti matematike. U to razdoblje pada i njegovo otkriće infinitezimalnog računa, koje ćemo prikazati nešto detaljnije.

U nizu Leibnizovih rukopisa datiranih od 25. listopada do 11. studenog 1675. nalazimo vjeran zapis njegovih razmišljanja o najvažnijem matematičkom problemu 17. stoljeća; nalaženju jednostavnih i općih metoda za izračunavanje kvadratura krivulja. U toku tih izučavanja uveo je Leibniz simbole »∫« i »d«, našao i istražio operaciona pravila po kojima se oni ravnaju u formulama, a potom je, primjenjujući ta pravila, preveo mnoge geometrijske argumente o kvadraturama krivulja u simboličke operacije s formulama. Ukratko, ti su manuskripti autentičan zapis Leibnizova otkrića infinitezimalnog računa.

Za razliku od Newtonova otkrića, koje smo opisali u moderniziranoj notaciji, Leibnizove ćemo rukopise prikazati doslovno u originalnoj. Naime, današnja verzija računa nasljednik je Leibnizove verzije, na liniji: Leibniz (i Bernoullijevi)-Euler-Lagrange-Cauchy, pa je za pravilno razumijevanje razlika u pojedinim fazama (dakle i za razumijevanje samih prijelaza iz jedne faze u drugu), presudno ne koristiti se pojmovima ili notacijom novije faze, pri objašnjavanju starije, jer se tako u nju, svjesno ili ne, unose momenti kojih u njoj uistinu nije bilo. Newtonova verzija računa tek se sporadično razvijala u Engleskoj, da bi konačno i tamo usahnula prihvaćanjem Leibniz-Euler-Lagrange-Cauchyjeve, pa smo je kao manje značajnu opisali nešto slobodnije, služeći se modernim pojmovima i notacijom.

No prije doslovnog opisa Leibnizova otkrića upozorit ćemo na tri glavne ideje vodilje u njegovim istraživanjima 1675. Prva je, Leibnizova osnovna filozofska ideja jedne **characteristica generalis**, jednog općeg simboličkog jezika, uz pomoć kojega bi se svi procesi rasuđivanja i zaključivanja mogli zapisati simbolima i formulama, tako da bi se slaganje simbola i formula pokoravalo pravilima koja bi osiguravala korektnost zaključivanja. Ta ga je ideja vodila u mnogim filozofskim razmišljanjima. Ona također objašnjava njegov veliki i stalni interes za matematičku notaciju i simboliku i posebno njegovu težnju da matematičke iskaze i metode prevede u formule i algoritme. Stoga se on, izučavajući geometriju krivulja, više zanimao za metode no za same rezultate, a posebno za načine transformiranja tih metoda u algoritme provedive sa samim formulama. Ukratko, on je tražio **račun** za infinitezimalno-geometrijske probleme.

Druga poticajna ideja vezana je za nizove diferencija. Razmatrajući nizove $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ i odgovarajuće nizove diferencija $d_1 = a_2 - a_1, d_2 = a_3 - a_2, d_3 = a_4 - a_3, \ldots,$ Leibniz je uočio da je

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = a_1 - a_{n+1}.$$

To znači da je niz diferencija lako zbrojiti, i on je taj uvid iskoristio pri rješavanju problema, koji mu je postavio Huyghens 1672: zbrojiti beskonačni red recipročnih vrijednosti trokutnih brojeva (tj. brojeva oblika $n(n+1)/2$)

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots.$$

Leibniz je našao da se članovi reda mogu napisati kao diferencije

$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1},$$

odakle, prema osnovnom uvidu, slijedi

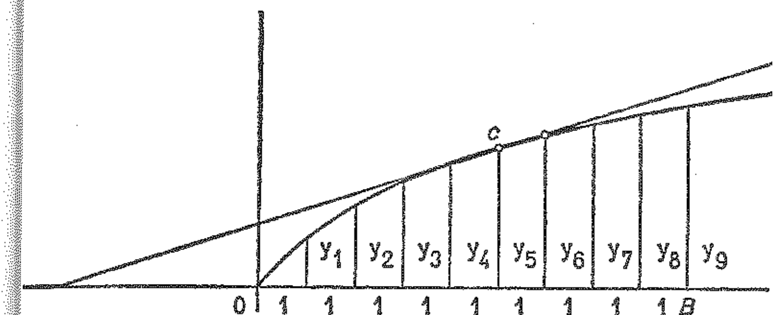
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)} = 2 - \frac{2}{n+1},$$

što znači da tražena (beskonačna) suma iznosi 2. Taj je rezultat motivirao Leibniza da istraži čitavu shemu sličnih nizova suma i diferencija, koje je složio u tzv. harmonijski trokut:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \frac{1}{2} && \frac{1}{2} &&&&& \\
&&&& \frac{1}{3} && \frac{1}{6} && \frac{1}{3} &&&& \\
&&& \frac{1}{4} && \frac{1}{12} && \frac{1}{12} && \frac{1}{4} &&& \\
&& \frac{1}{5} && \frac{1}{20} && \frac{1}{30} && \frac{1}{20} && \frac{1}{5} && \\
& \frac{1}{6} && \frac{1}{30} && \frac{1}{60} && \frac{1}{60} && \frac{1}{30} && \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} && \frac{1}{42} && \frac{1}{105} && \frac{1}{140} && \frac{1}{105} && \frac{1}{42} && \frac{1}{7} \\
\cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot \\
\cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot
\end{array}$$

Kose kolone tog trokuta sukcesivni su nizovi diferencija, pa se njihove sume lako očitavaju iz samog trokuta. Naprimjer, $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \ldots = \frac{1}{2}$. Ti rezultati nisu bili sasvim novi (bijaše to Leibnizova vježba u Huyghensovoj školi), ali su Leibnizu jasno pokazali da su formiranje niza diferencija i niza suma inverzne operacije. Ta je ideja postala značajna kad ju je Leibniz preveo u geometriju.

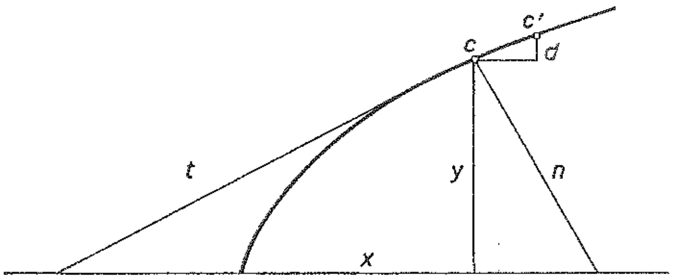
Krivulja na sljedećoj slici definira niz ekvidistantnih ordinata y. Ako je njihova udaljenost 1, onda suma ordinata y aproksimira kvadraturu krivulje, a diferencija sukcesivnih ordinata y aproksimira nagib (koeficijent smjera) tangente krivulje.



Dapače, što je odabrana jedinica 1 manja, to je aproksimacija, u oba slučaja, bolja. Leibniz stoga zaključuje da će odabirom **beskonačno male** jedinice aproksimacije postati egzaktne. U tom će slučaju kvadratura biti jednaka ukupnoj sumi ordinata, a nagib tangente bit će jednak diferenciji ordinata. Zbog već ustanovljene inverznosti sumiranja i diferenciranja, Leibniz zaključuje da su i određenje kvadratura i tangenti međusobno inverzne operacije.

Dakle, Leibnizova druga ideja, bez obzira na to koliko je još neprecizna 1673. godine, jasno sugerira jedan infinitezimalni račun ordinatnih suma i diferencija, račun koji prezentira određivanje kvadratura i tangenti kao inverzne operacije. Naravno, ideja je, po analogiji s nizovima suma i diferencija, upozorila Leibniza na činjenicu da se tangente određuju lako, dok s kvadraturama nije tako.

Treću osnovnu ideju Leibniz je našao izučavajući Pascalove geometrijske radove. Riječ je o upotrebi »karakterističnog trokuta« za transformacije kvadratura. Naime, Leibniz je uočio mali trokut *cc'd*, duž krivulje na donjoj slici, koji je značajan stoga što je aproksimativno sličan trokutu koji čine ordinata, suptangenta i tangenta, ili pak subnormala, ordinata i normala.

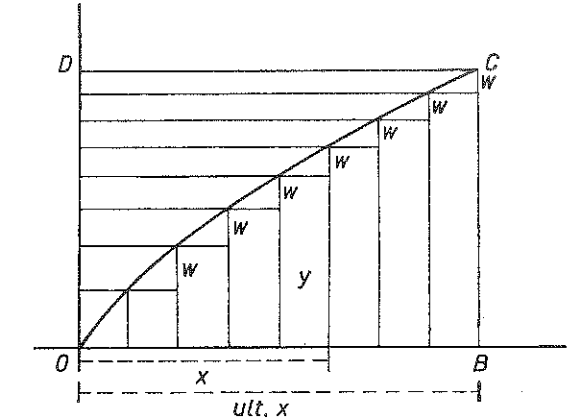


Ta se konfiguracija javljala u mnogim matematičkim radovima 17. stoljeća (Pascalova je upotreba bila u vezi s kružnicom), no Leibniz je uočio mogućnost njene općenite upotrebe za nalaženje relacija među kvadraturama na određeni način spregnutih krivulja, ili pak relacija koje vežu kvadrature krivulja s drugim veličinama vezanim uz krivulje, kao što su momenti, težišta i sl. Naprimjer, sličnost trokuta na gornjoj slici daje

$$cc' \cdot y = cd \cdot n \quad \text{tj.} \quad \sum cc' \cdot y = \sum cd \cdot n,$$

što nije drugo do jednakost totalnog momenta krivulje s obzirom na x (lijeva strana) s kvadraturom što je dobivamo vertikalnim dizanjem svih normala duž osi x (desna strana). Leibniz je smatrao da mora postojati čisto analitički (simbolički) račun za generiranje takvih geometrijskih transmutacija.

No vratimo se sada vjernom opisu Leibnizova otkrića. U već spomenutim rukopisima datiranim od 25. listopada do 11. studenog 1675. Leibniz razmatra problem kvadratura. Pokušava ga napasti s više strana, pa tako i upotrebom Cavalierijeva simbola »omn.«, radi analitičkog nalaženja svih mogućih vrsta relacija među kvadraturama. »Omn.« je kratica za »omnes lineae« tj. »sve linije«, u smislu sume svih linija. Evo primjera karakterističnog za ta Leibnizova istraživanja. U donjem dijagramu uočava on niz ordinata y krivulje OC, koje su međusobno udaljene za beskonačno malu jedinicu. Diferencije sukcesivnih ordinata označene su s w.



Dakle, površina OBC jednaka je sumi ordinata y. Površine pravokutnika, $w \cdot x$, Leibniz interpretira kao momente diferencija w s obzirom na os OD. Dakle, površina OCD predstavlja totalni moment diferencija w. Površina OBC komplementarna je površini OCD unutar pravokutnika $OBCD$, pa Leibniz zaključuje da je ukupni moment diferencija s obzirom na OD jednak komplementu sume elemenata y. No w je niz diferencija niza y, dakle i obratno, y je niz suma niza w, pa možemo eliminirati y, i razmatrati samo niz w i njegov niz suma, što Leibniza vodi do zaključka da je ukupni moment (diferencija w) jednak komplementu sume suma (diferencija w). On formalno zapisuje taj rezultat, koristeći se simbolom »omn.« za ono što naziva sumom, na sljedeći način:

$$(6) \qquad omn.\overline{xw} \sqcap ult.x, \overline{omn.w} - \overline{omn.omn.w}.$$

$\sqcap$ je Leibnizov simbol za jednakost, *ult.x* znači ultimus x, dakle posljednji x, tj. OB, a natcrtavanje i zarez služe mu umjesto naših zagrada. Dakle, s lijeve strane jednakosti (6) imamo simbol za ukupni moment diferencija w, a s desne je strane simbol za razliku ukupne površine i sume suma diferencija w (čitalac će lako uočiti da bismo tu formulu danas zvali formulom parcijalne integracije). Leibniz odmah uočava mogućnost da iz te jedne formule, raznim supstitucijama, dobije mnoge druge relacije među kvadraturama. Naprimjer, supstitucijom $xw=a$, tj. $w=\frac{a}{x}$, dobiva formulu

$$omn.a \sqcap ult.x, omn.\frac{a}{x} - omn.omn.\frac{a}{x},$$

koju interpretira kao izražavanje sume logaritama pomoću kvadratura hiperbole $y=\frac{a}{x}$; no ta je kvadratura logaritam (za razumijevanje logaritama u tom razdoblju usp. članak o otkriću logaritama), stoga je $omn.omn.\frac{a}{x}$ suma logaritama. (Čitalac će lako uočiti da bismo danas čitav taj postupak opisali kao integraciju logaritma pomoću parcijalne integracije.)

U takvim istraživanjima (koja u razmatranim Leibnizovim rukopisima nalazimo u većem broju) lako uočavamo nastojanje da se problemi kvadratura rješavaju analitički, upotrebom pogodnih simbola i notacije, kao i potpuno razumijevanje i upotrebu inverznog odnosa nizova suma i diferencija. U sljedećem rukopisu, datiranom nekoliko dana kasnije, Leibniz izvodi dalje konzekvencije svojeg uvida. Polazi sada od formule (6) napisane u obliku

$$(7) \qquad omn.\, xl \sqcap x\, omn.\, l - omn.\, omn.\, l.$$

(Posebno naglašava pojam **niza** beskonačno malo udaljenih ordinata, objašnjavajući da je l osnovni element progresije, dok x određuje poziciju od l, koja mu odgovara; ili, reći će drugim riječima, x je redni broj, a l je ono što se niže u red.) Sljedeća Leibnizova razmišljanja bit će današnjem čitaocu strana, no čini se da su baš ona značajna za dalje usavršavanje njegova računa. Naime, veličine vezane uz krivulju (npr. ordinata y, kvadratura z, diferencija w itd.) nisu bezdimenzionalni brojevi današnje matematičke analize. U kartezijanskoj geometrijskoj analizi 17. stoljeća to su geometrijske veličine, svaka sa svojom dimenzijom, koje se

moraju pokoravati zakonu dimenzione homogenosti. Dužine se mogu zbrajati s dužinama, površine s površinama itd., pa su izrazi kao a^2+a neprihvatljivi (uočite u tom smislu ulogu faktora a u Newtonovom primjeru izračunavanja omjera fluksija na prethodnim stranama). Leibniz zato uočava dimenziono pravilo kojem se pokorava simbol »*omn.*« u formulama poput formule (7): »*omn.*« prefiksiran dužini, npr. l u (7), daje površinu (tj. kvadraturu); »*omn.*« prefiksiran površini, npr. xl u (7), daje volumen itd. Tek uz to pravilo bit će formula (7) dimenziono homogena, dakle dimenziono interpretabilna, i stoga prihvatljiva. Čini se da su ta dimenziona razmatranja navela Leibniza da umjesto riječi *omn.* uvede jednostavni simbol $\int$. Naime, homogenost jednadžbe (7) zapisane uz pomoć novog simbola sasvim je transparentna:

$$\int xl = x \int l - \int \int l.$$

Osim toga $\int$ je jedan od oblika slova 's', koji se upotrebljavao u pisanim tekstovima Leibnizova vremena, i koji je prvo slovo latinske riječi »summa«. Leibniz odmah primjećuje da vrijede (dimenziono korektne) formule

$$\int x = x^2/2 \quad \text{i} \quad \int x^2 = x^3/3,$$

naglašavajući da su one valjane samo za »nizove čije diferencije prema samim članovima imaju omjer manji od bilo kojeg zadanog omjera«, tj. za nizove čije su diferencije beskonačno male.

Nekoliko redaka kasnije nailazimo i na simbol d, za diferenciranje. Leibniz ga uvodi izvanrednom argumentacijom ovog sadržaja: Problem kvadrature je problem sumiranja nizova, za koji smo uveli simbol $\int$, i za koji želimo izgraditi **račun**, tj. kolekciju upotrebljivih algoritama. Međutim, sumiranje nizova, tj. nalaženje općih izraza za $\int y$, za dani y, najčešće nije moguće, ali zato je uvijek moguće nalaženje izraza za diferencije danih nizova. Taj račun diferencija je recipročan račun računa suma, pa se možemo nadati da ćemo izgradnjom recipročnog računa diferencija steći uvid i u račun suma. Doslovno Leibnizovim riječima:

> Za dani l, i njegov odnos prema x, treba naći $\int l$. To se može postići uz pomoć suprotnog računa, tj. pretpostavimo da je $\int l = ya$. Neka je tada $l = \frac{ya}{d}$ (dakle,

kao što $\int$ povećava dimenziju, d je smanjuje). No $\int$ znači sumu, a d diferenciju, i iz danog y uvijek možemo naći y/d ili l, tj. diferenciju od y.

Tako je uveden simbol d, ili točnije $1/d$. Zbog dimenzione intepretacije simbola $\int$ Leibniz mora d pisati u nazivniku: l je dužina, $\int l$ površina, recimo $y \cdot a$ (uočite dimenzionu ulogu od a), pa budući da diferencije moraju opet biti dužine, nužno je pisati $y \cdot a/d$. Ipak, Leibniz ubrzo postaje svjestan notacijske nepogodnosti takvog zapisa (koja nije vrijedna dimenzione interpretabilnosti simbola $\int$ i d) pa uskoro piše $d(y \cdot a)$ umjesto nezgrapnog $\frac{y \cdot a}{d}$, i otada reinterpretira d i $\int$ kao bezdimenzione simbole. Usprkos tome, moramo zaključiti da su ga baš dimenziona razmatranja vodila u odabiru novog simbolizma.

U preostalom dijelu rukopisa Leibniz ispituje svoj novi simbolizam, prevodeći u njega poznate rezultate infinitezimalne analize i istražujući operaciona pravila za $\int$ i d. U tim je istraživanjima neko vrijeme smatrao da je $d(u\,v) = du \cdot dv$, da bi ubrzo našao korektno pravilo

$$d(u\,v) = u\,dv + v\,du.$$

Dodatni problem bijaše da je još dugo pisao $\int x$, $\int x^2, \ldots$ za ono što će kasnije konzistentno pisati kao $\int x\,dx$, $\int x^2 dx \ldots$.

Poslije 11. studenog 1675. ostalo je još dosta toga za sređivanje, i Leibnizu je trebalo pune dvije godine da oblikuje svoj račun. Ipak rukopisi koje smo prikazali sadrže bitne značajke novog Leibnizova računa: pojam diferencijala i sume, simbole $\int$ i d, njihov recipročni odnos i većinu pravila za njihovu upotrebu u formulama. Time ćemo završiti prikaz (za nas, u ovom članku) najvažnijeg Leibnizova otkrića.

Mogućnost Leibnizova višegodišnjeg, za matematiku izuzetno plodonosnog, zadržavanja u Parizu (gdje je, sjetimo se, bio poslan s političkom misijom koju nije ispunio) otvorena je time što je krajem 1672. Boineburg poslao svojeg sina Philippa Wilhelma u Pariz da završi svoje školovanje pod Leibnizovim nadzorom. Sa štićenikom je u jednoj diplomatskoj misiji stigao i Melchior Friedrich von Schönborn, nećak izbornog kneza, koji je Leibnizu dao položaj poluslužbenog atašea. Za Leibniza najvažnije bijaše to da ga je pratio na putu u London početkom 1673, što mu je omogućilo da stvori osobne veze sa članovima Royal Society, posebno s tajnikom, njegovim zemljakom Oldenburgom, preko kojeg će se nekoliko godina kasnije dopisivati s Newtonom (ta se prepiska kasnije povlačila kao jedan od glavnih argumenata u svađi o prioritetu). Na tom putovanju u London Leibniz se i upoznao s Newtonom.

U to su doba članovi Royal Society pokazali velik interes za Leibnizov prototip mehaničkog kalkulatora, na kojem je on radio još u Njemačkoj. Na svoj je izum bio veoma ponosan, ali ga je uspio realizirati tek mnogo kasnije, na narudžbu ruskoga cara Petra Velikog, koji je stroj poslao kineskom caru kao dokaz superiornosti zapadne tehnologije.

Leibnizov izlet u London naglo je prekinut viješću o smrti oba njegova patrona, Boineburga i izbornog kneza. Vratio se u Pariz, gdje je do kraja 1674. bio tutor mladom Boineburgu. Tada je imao 28 godina, ali i pored opće priznate briljantnosti nije još imao sređenu karijeru. Nuđena su mu mjesta na dvorovima Hannovera i Danske, ali ono što je stvarno želio bila je istraživačka pozicija pri pariškoj Académie. Konačno je morao shvatiti da takve pozicije nema na vidiku a kako je sve dublje zapadao u dugove, preko volje je prihvatio položaj dvorskog savjetnika u Hannoveru. Službeno je preuzeo novu dužnost u siječnju 1676, ali je uspio odgoditi svoj dolazak u Hannover do prosinca te godine. Pariz je napustio u listopadu da bi krenuo okolnim putem, preko Londona i Nizozemske. U Londonu se zadržao kratko. U Amsterdamu se upoznao s pionirom mikroskopije Antonie van Leeuwenhoekom, koji je upravo izveo prva promatranja bakterija, protozoa i spermatozoa. U Hagu je proveo četiri dana u intenzivnim raspravama s Benedictom de Spinozom, slavnim filozofom i brusačem leća.

Uprava u Hannoveru bila je manje-više ista kao i u drugih stotinjak nezavisnih država pod titularnom vlašću njemačkog cara u Beču. Pod autokratskim vodstvom vojvode Johanna Friedricha Brunswick-Lüneburga državne je poslove vodilo Dvorsko vijeće, sastavljeno uglavnom od niže aristokracije i diplomiranih pravnika, među koje je spadao i Leibniz. Dobrim se dijelom on uspio osloboditi uobičajenih poslova u vijeću zbog opterećenosti posebnim obavezama knjižničara, političkog savjetnika, međunarodnog korespondenta, a s vremenom sve više i savjetnika za tehnologiju.

U tom razdoblju svoje karijere Leibniz se najviše bavio tehnološkim inovacijama. S vojvodom (i njegovim nasljednicima) proveo je mnogo vremena u razmatranju alkemijskih recepata. Jednom je spriječio realizaciju krajnje idiotske ideje alkemičara I. I. Beckera, pa ga je ovaj za uzvrat ismijao u svojoj satiri *Glupa mudrost i mudra glupost*, zbog navodne zamisli novog tipa kočije kojom bi se od Amsterdama do Hannovera moglo stići za 6 sati (tj. s prosječnom brzinom od 60 km/h). Becker i Leibniz su uistinu razmatrali konstrukcije kočija još 1678. i Leibniz je već tada imao zanimljive ideje o povećanju njihovih brzina. S obzirom na dalekosežnost nekih Leibnizovih ideja alkemičar možda i nije pretjerao u svojem izvještaju. Svakako Leibniz je kasnije imao kočiju napravljenu po vlastitom nacrtu, ali nažalost ništa ne znamo o njenim tehničkim detaljima. Istovremeno bio je opsjednut problemom isušivanja vojvodinih rudnika na Harzu. Rane 1679. zamislio je isušivanje na vjetreni pogon, i uspio je vojvodu nagovoriti da financira eksperimente u vezi s tim projektom. Ugovoreno je da u slučaju uspjeha on dobije pozamašnu doživotnu penziju. Od tada do kraja 1686. proveo je više od pola svojeg vremena u brdima Harza. Konstruirao je sve moguće vrste vjetrenjača, prijenosnih mehanizama i pumpi, uključujući i prethodnicu moderne rotacione pumpe. Također je predložio nove konstrukcije rudarskih vagoneta, poboljšane postupke lijevanja željeza i proizvodnje čelika, tehniku za desalinizaciju vode itd. Koliko danas znamo, svi ti projekti završili su kao promašaji. Leibniz je smatrao da su to uzrokovale namjerne opstrukcije administratora i tehničara, kao i bojazan radnika da će im tehnološki progres oduzeti posao. No usprkos stalnim napadima Dvorskog vijeća vojvode su ga sa strpljenjem podržavale u svim njegovim projektima. Potpuno nezavisno od rudnika Harza on je trajno podnosio memorandume o svim mogućim vrstama tehničkih projekata, kao što su kanali, riječna plovidba, snabdijevanje vodom, fontane u vrtovima hanoferskog dvorca Herrenhausen, proizvodnja platna, manufaktura porculana, eksploatacija topline izgubljene u dimnjacima; a također i o sociološko-političkim pitanjima, kao što su monetarna politika, reforma poreznog sistema, uravnotežena trgovina itd.

Po smrti vojvode Johanna Friedricha, u prosincu 1679, naslijedio ga je mlađi brat Ernst August. Radi promicanja svojih dinastičkih ambicija, utemeljenjem i objavljivanjem povijesnih prava kuće Brunswicka, Ernst August je predložio Leibnizu da istraži i napiše povijest kuće. No u to se vrijeme ništa od toga nije pokrenulo jer je Leibniz baš tada počeo sa svojim akcijama u rudnicima Harza. Međutim, u toku 1685. postalo je jasno da su eksperimenti s isušivanjem promašaj, pa je Ernst August, s osnovnom idejom da ga odvrati od rudnika, sklopio s Leibnizom ugovor, kojim ga obavezuje da napiše povijest čitave porodice Gvelfa, kojoj je kuća Brunswicka bila ogranak. Trebao je početi od najranijih vremena i dospjeti do svojeg poslodavca i za to mu je garantiran stalan prihod. Čak i uz te uvjete Leibniz nije počeo s istraživanjem sve do kraja 1686, kada je napokon napustio rudnike Harza.

Uskoro je iscrpio materijale dostupne u lokalnim arhivima pa je dobio dopuštenje i sredstva za trogodišnji put u Bavarsku, Austriju i Italiju. Osim za arhivski rad iskoristio je tu pogodnost da upozna mnoge značajnike i znanstvenike. U Italiji je postao član Fizičko-matematičke akademije u Rimu. U Austriji je impresionirao cara Leopolda I, iako ne toliko da bi dobio mjesto carskog savjetnika i službenog povjesničara ili da bi dobio dopuštenje i sredstva za osnivanje »univerzalne biblioteke«.

Po povratku u Hannover Leibniz se pobrinuo da poboljša svoj položaj paralelnom službom na ostalim dvorovima porodice Brunswick. Preuzeo je upravu Bibliothecae Augustae u Wolfenbüttelu. Vojvoda od Brunswick-Wolfenbüttela pristao je plaćati i trećinu troškova za rad na povijesti Gvelfa. Od 1691. i Ernst Augustov brat, vojvoda od Celle, pristaje da plaća povijest Gvelfa. Njegovi su dohoci tada bili 1000 talira godišnje od Hannovera, 400 od Brunswick-Wolfenbüttela i 200 od Celle. Čak i najmanji od tih prihoda bio je veći od godišnjeg prihoda vrsnog majstora. Do kraja života boravio je u Brunswicku, Wolfenbüttelu i Celleu koliko i u Hannoveru. Mnogo je vremena proveo putujući tom kružnom turom dugačkom 200 km. Na tim putovanjima napisana su mnoga njegova pisma i spisi, pa je sasvim razumljiva njegova težnja za poboljšanjem konstrukcija kočija.

I unatoč stalnim prosvjedima svojih poslodavaca da radi sve osim onog za što je plaćen obavio je povelik posao na povijesti Gvelfa. Kao predradnju za samu povijest izdao je ogromnu masu dotad uglavnom neobjavljenog arhivskog materijala. Od 1698. do 1700. objavio je šest pozamašnih tomova arhivskog materijala, a potom još tri koji se odnose baš na Gvelfe, *Scriptores rerum Brunsvicensium*, od 1707. do 1711. Ostalo je objavljeno po njegovoj smrti. Dovršio je i dva preliminarna eseja, koji pokazuju kako je doslovno shvatio da treba »početi od početka«. Prvi, *Protogea*, bavi se mineralima i fosilima i uglavnom se oslanja na njegova opažanja u Harzu. Drugi objašnjava evropske plemenske migracije pomoću lingvističkih podataka i imena naselja. Leibniz je sakupio veliku količinu informacija o porijeklu evropskih jezika, početno u potrazi za jedinstvenim arhetipskim jezikom, mada su ga njegovi nalazi doveli do zaključka da razne jezične grupe imaju razne izvore. Usput je opovrgao tvrdnje švedskih školnika da je švedski najstariji pa stoga i najplemenitiji evropski jezik. No, i unatoč stalnoj grižnji savjesti, samu povijest Gvelfa nije nikada ni započeo. Ironija je što su njegovi poslodavci uistinu željeli samo čitljivu i autoritativnu knjižicu kojom bi impresionirali svoje suparnike.

Mimo »rada na povijesti Gvelfa« i diplomatske aktivnosti, u kojoj je znao igrati dvostruke uloge kao službenik više kuća, Leibniz je, na prijelazu stoljeća, ipak najveći entuzijazam pokazivao za osnivanje znanstvenih akademija. Bio je uključen u pokušaje u Mainzu, Hannoveru, Hamburgu i Poljskoj, a potpuno se posvetio prijedlozima za Berlin, Dresden, Beč i Petrograd. Za berlinsku akademiju agitirao je još od 1695, koristeći se podrškom kneginje Sophie Charlotte od Brandenburga, žene izbornog kneza Prusije Friedricha (i sestre hanoferskog izbornog kneza Georga Ludwiga, nasljednika Ernsta Augusta i budućeg kralja Engleske), s kojom je bio veoma blizak. Osobno je išao u Berlin 1698, a u sljedećoj posjeti 1700. Friedrich je odobrio njegov projekt i postavio ga za doživotnog predsjednika Brandenburškog znanstvenog društva, uz 600 talira godišnje za troškove njegova godišnjeg boravka u Berlinu. To je i prva prilika u kojoj se njegovo ime pojavljuje kao von Leibniz, iako ništa ne znamo o nekoj službenoj promociji u barona. Društvo nije bilo naročito uspješno, i Leibniz je uglavnom bio razočaran razinom članaka (osim dakako svojih), koji su izašli u jedinom tiskanom zborniku radova tog društva. Ipak ono je pridonijelo rastućem ugledu Prusije i bilo je temelj kasnije uglednoj *Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin.*

Poslije početnog uspjeha u Prusiji Leibniz je pokušao sa sličnim projektom kod izbornog kneza Saksonije u Dresdenu, ali bez uspjeha. Uspješniji je bio u Beču, gdje ga je car proglasio 1712. carskim savjetnikom i direktorom predložene akademije. No do njena osnivanja došlo je tek po Leibnizovoj smrti. Konačno, između 1711. i 1716. više se puta susreo s ruskim carem Petrom Velikim na njegovim opetovanim putovanjima Evropom. Nagovorio ga je da osnuje znanstvenu akademiju u Petrogradu, ali i ovaj put to je ostvareno tek nakon njegove smrti. Ipak on je još jednom dobio plaćeno dvorsko mjesto kao carski savjetnik za matematiku i znanost. Car je strastveno poticao znanstvene veze Rusije s Evropom, i obećao je podržati istraživanja magnetskog sjevera, u okviru šireg Leibnizova projekta za navigacijska pomagala, kao i ispitivanje porijekla Slavena i njihovih jezika, o čemu je Leibniz napisao preliminarni esej.

Angažiran u Berlinu i Beču, Leibniz je provodio kod kuće manje vremena no ikada. Od 1712. bio je na platnom spisku dvora u Hannoveru, Brunswick-Lüneburgu, Berlinu, Beču i Petrogradu (Celle je dotad priključen Hannoveru). Ne iznenađuje što su svi neprestano bili nezadovoljni njegovim uslugama, držeći da ne daje dovoljno za novac kojim ga plaćaju, i povremeno bi jedan ili drugi prihod bio obustavljen do njegova ponovnog pojavljivanja. Najviše je prigovora stiglo iz Hannovera, gdje je Georg Ludwig, ne bez razloga, smatrao da ima pravo prvenstva na Leibnizove usluge — povijest porodice Gvelfa pripremala se već više od trideset godina. Ujesen 1712. Leibniz je opet u Beču, gdje pokušava dobiti mjesto kancelara Siebenburgena (s punim radnim vremenom). Tu je ostao čitave dvije godine ignorirajući pozive iz Hannovera. Nisu ga pomakle ni glasine da je katolički špijun, ni obustava hanoferskih prihoda, čak ni smrt njegove zaštitnice kneginje Sophie. Konačno se vratio 1714, saznavši za smrt engleske kraljice Anne i dolazak Georga Ludwiga na englesko prijestolje. Stigavši, ustanovio je da je Georg Ludwig otišao u Englesku tri dana ranije.

Uobičajeno je da se Leibnizove posljednje godine u Hannoveru prikazuju kao nedostojno zanemarivanje od strane Georga Ludwiga, koji ga nije htio kod sebe u Engleskoj. Istina je da se u Hannoveru osjećao jadno, ali ne zato što je posebno želio biti u Engleskoj. Iznenadna težnja da emigrira s dvorom koji je izbjegavao četrdeset godina ne djeluje uvjerljivo. Jedini koji je još preostao na dvoru, a s kim je bio u zaista dobrim odnosima, bio je sam Georg Ludwig.

On ga je uvijek branio od mržnje Dvorskog vijeća, tolerirao je sve njegove mane, a uostalom engleski kralj je baš njega poveo na odmor kada je 1716. posjetio Hannover. Leibnizov problem bio je što je u svojim kasnim šezdesetim bio preslab da nastavi svoja uobičajena putovanja ili pak da započne nov život negdje drugdje. Istina, on je mislio na odlazak u London, čak je 1715. dao krajnje neobičan prijedlog da bude postavljen za službenog povjesničara Engleske. Ipak, više ga je privlačio Pariz. I unatoč njegovoj antifrancuskoj politici Louis XIV. ga je tamo i pozvao, te bi Leibniz svakako i završio u Parizu da kralj nije umro 1715. Istovremeno, aktivno je radio na svom prelasku u Beč. Kao mogućnost bio je tu i Berlin, gdje je još uvijek bio predsjednik akadmije, i Petrograd, gdje je i dalje bio carski savjetnik.

Još uvijek je radio na nikada napisanoj povijesti Gvelfa, koju je kanio završiti i potom se posvetiti radu na filozofskim spisima. Iako ni povijest ni filozofski *magnum opus* nisu ugledali svjetlo dana, neke od njegovih najznačajnijih filozofskih korespondencija (s Clarkeom i des Bossesom) potječu iz tog vremena.

Na dan 14. prosinca 1716, nakon tjedna provedenog u krevetu, Leibniz je mirno umro u prisustvu svoga tajnika i kočijaša. Imao je sedamdeset godina. Ostaci nekada slavnog, Leibnizu uvijek protuslovnog, hanoferskog Dvorskog vijeća odbili su prisustvovati sprovodu, i to je sva »istina« o »nedostojnom pokopu« velikana. Pokopan je uz sve primjerene počasti u Neustädter Kirche.

Zašto su baš Newton i Leibniz otkrivači računa

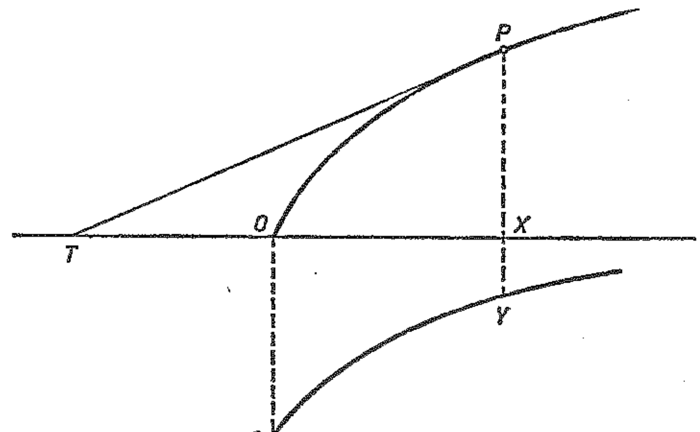
Iako je lako za mnogim knjigama ponoviti da su Newton i Leibniz otkrili infinitezimalni račun, pa i zapisati to u neku novu knjigu, za kojom će to opet mnogi drugi ponoviti (što ovim opetovanim izričajima pribavlja vjerodostojnost uvriježenosti), uistinu je teško ukazati na trenutak i na osobu s kojom je rođen diferencijalni i integralni račun. Sve ovisi o tome što smatramo dovoljnim oznakama računa.

Ako je dovoljan samo pojam granice omjera ili suma, tada je infinitezimalni račun star bar koliko i Arhimed, a i broj njegovih više ili manje općenitih primjena, razrađenih do 1670, tada je priličan. Ako pak presudnom značajkom držimo strogost i apstraktnost posebnog modela uvedenog u 19. stoljeću, onda račun nije uveden do tog vremena.

Koje značajke, između tih krajnosti, ustoličuju Newtona i Leibniza kao otkrivače?

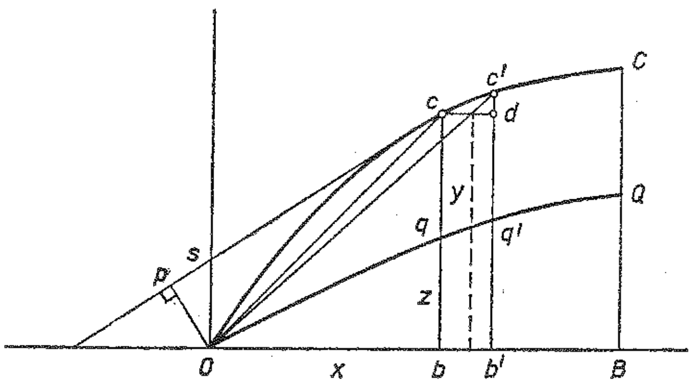
Svaki će poznavalac računa, ne isključujući nužno ostale značajke, izdvojiti bar dvije. Prva je da se diferenciranje i integriranje uočavaju, i primjenjuju, kao inverzne operacije. Druga je da se za obje operacije razvijaju odgovarajuće algoritamske tehnike. (Uočite da samo ime discipline: diferencijalni i integralni **račun,** eksplicitno iskazuje drugu značajku.) Newton i Leibniz stvorili su račun koji je imao te dvije značajke.

Od Arhimeda do Newtonovih i Leibnizovih suvremenika Fermata i Gregoryja mnogi su matematičari, čak i sistematski, izračunavali površine i volumene (tj. integrirali), te nalazili tangente i normale, suptangente i subnormale (tj. derivirali), iako nisu uočili ni iskoristili reciprocitet tih operacija. Dapače (na to je prvi upozorio J. M. Child) Barrow je čak, u svojim *Lectiones geometricae*, dokazao inverznost diferenciranja i integriranja u geometrijskom ruhu. Dokazao je da su omjeri ordinata i odgovarajućih suptangenti na krivulji čije su ordinate proporcionalne površinama ispod druge krivulje proporcionalni ordinatama te druge krivulje. Ili, detaljnije, Barrow je pretpostavio da je krivulja $\widehat{SY}$ zadana pomoću krivulje $\widehat{OP}$ tako da je XP jednako *povr* $(OXYS) \times 1/R$ (faktor $1/R$ čuva dimenzionu homogenost), da bi onda dokazao da tangenta u P odsijeca suptangentu XT, tako da je $PX : TX = XY : R$.



Taj frapantni Barrowljev dokaz Newton-Leibnizova teorema naveo je Childa da dovede u pitanje Newtonov i Leibnizov prioritet otkrivača računa. Međutim, kao što je upozorio Whiteside, takvih geometrijskih teorema koji povezuju suptangente jedne krivulje s površinama druge nalazimo u općenitoj formi već kod Gregoryja i Wallisa, a u konkretnim slučajevima kod Torricellija i mnogih drugih. (Whiteside čak predlaže takvu konkretnu interpretaciju nekih Arhimedovih rezultata.) Činjenica je da nitko od tih autora, uključujući i Barrowa, nije uočio važnost tog rezultata, niti izvukao njegove konzekvencije za algoritmizaciju računa (na koju uostalom nisu ni pomišljali). Sigurno je, naime, da povijesni utjecaj jedne ideje mnogo (ako ne i presudno) ovisi o jasnom i svjesnom uočavanju i same ideje i njene važnosti, a notorna je činjenica da sredinom 17. stoljeća nitko, uključujući i Barrowa, nije u njegovu vrlo općenitom teoremu vidio više od još jednog u mnoštvu teorema koji povezuju svojstva dviju krivulja. (U njegovoj knjizi to je i bio samo jedan, ničim istaknuti teorem, u mnoštvu takvih teorema.)

I sam je Leibniz, prije 1675 (to je godina njegova otkrića računa), dokazao nekoliko takvih teorema. Posebno je značajno, među takvim tipičnim predračunskim rezultatima, bilo pravilo transmutacije, s kojim Leibniz postaje sasvim svjestan uloge karakterističnog trokuta u infinitezimalnoj geometrijskoj analizi.



Na gornjoj slici krivulja $Occ'C$ je zadana, a cdc' je njen karakteristični trokut u točki c. Kvadratura te krivulje,

$\mathcal{K} = \mathcal{K}(OCB)$, jest suma svih traka $bcc'b'$, ali se može dobiti i kao suma svih trokuta Occ' upotpunjena trokutom OBC, tj.

$$\mathcal{K} = \sum Occ' + \Delta OBC.$$

Naravno, budući da je karakteristični trokut cdc' sličan trokuth Osp, vrijedi i sljedeće:

$$Occ' = \frac{1}{2} cc' \times Op = \frac{1}{2} cd \times Os = \frac{1}{2} bqq'b.$$

Naime, ako za svaku točku c na krivulji $Occ'C$ konstruiramo odgovarajuću točku q (povlačenjem tangente u c, određenjem odsječka Os i njegovim prenošenjem na bc), time dolazimo do krivulje $Oqq'Q$, za koju vrijedi zadnja od gornjih jednakosti, odakle slijedi

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} povr\,(Oqq'Q) + \Delta OCB.$$

To je Leibnizovo pravilo transmutacije, koje upotrebom karakterističnog trokuta transformira kvadraturu jedne krivulje u kvadraturu druge, koja je prvoj pridružena preko svojih tangenti. (Primjenjujući to pravilo na kvadraturu kruga, Leibniz je došao do svojega slavnog razvoja za π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots).$$

No, rekli smo, bio je to tek jedan u nizu geometrijskih rezultata tipičnih za to razdoblje. Slična pravila nalazimo u radovima Huyghensa (Leibnizova učitelja!), Barrowa, Gregoryja i ostalih. Barrowljeve *Lectiones geometricae* krcate su takvim transformacionim pravilima. Prevedemo li te rezultate na jezik analitičkih formula, otkrivamo da je riječ o poznatim teoremima diferencijalnog i integralnog računa. To je i navelo Childa da Barrowa smatra otkrivačem računa, budući da i nema Newton-Leibnizova rezultata u novom računu koji se takvim prijevodom ne otkriva već u *Lectiones geometricae*. Naravno, sagledati problem na taj način znači potpuno zanemariti značenje **prijevoda** Barrowljeva teksta u **analitičke formule**. No, upravo je to (druga) odsudna značajka **računa**. Baš je Leibniz (kao i Newton u kontekstu svojih istraživanja) bio onaj koji je krenuo u potragu za analitičkim **računom**, a taj će račun uz pomoć odgovarajućih simbola i pravila omogućiti uniformno analitičko izvođenje i izražavanje svih tih transmutacijskih metoda i pružiti im logičku koherentnost i općenitost na jednostavnoj osnovi.

Bit će poučno da to ilustriramo na gornjem primjeru. Prevest ćemo Leibnizovo transmutacijsko pravilo u analitičke formule. Ordinata z krivulje $Oqq'Q$ dana je, prema konstrukciji, sa

$$z = y - x\frac{dy}{dx} \tag{8}$$

(gdje je $dy = dc'$ prirast ordinate y, a $dx = cd$ prirast ordinate x). Transmutacijsko pravilo tvrdi da je za $x_0 = OB$

$$\int_0^{x_0} y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{x_0} z\,dx + \frac{1}{2}x_0 y_0.$$

Uvrštavanjem vrijednosti od z iz formule (8) nalazimo

$$\int_0^{x_0} y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{x_0}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)dx + \frac{1}{2}x_0y_0 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{x_0} y\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{x_0} x\frac{dy}{dx}\,dx + \frac{1}{2}x_0y_0.$$

Dakle,

$$\int_0^{x_0} y\,dx + \int_0^{x_0} x\frac{dy}{dx}\,dx = x_0y_0, \tag{9}$$

što nije drugo do dobro nam poznata parcijalna integracija. Osim naznaka granica integracije $(0, x_0)$ simbolizam gornjeg prijevoda našao je Leibniz 1675. Njegova prednost pred geometrijskim formulacijama očita je: geometrijska konstrukcija krivulje $Oqq'Q$ opisana je jednostavnom formulom (8), pa se samo transmutacijsko pravilo (kao i mnoga druga!) sada algoritamski dobiva uvrštavanjem formule (8) u formulu (9), koja opet zbog recipročne veze diferenciranja i integriranja neposredno slijedi iz jednostavnog pravila za diferenciranje produkta

$$d(xy) = x\,dy + y dx.$$

Dakle, baš je taj prijevod i jednostavno algoritamsko zaključivanje u njegovu okviru ono što je otkrio Leibniz (i u drugačijoj formi Newton), tj. diferencijalni i integralni račun. Ukratko, zato su Newton i Leibniz otkrivači.

Dakako, moramo biti svjesni da današnji račun ima i mnoge druge značajke (pored inverznosti osnovnih operacija i algoritamskog karaktera), po kojima se prilično razlikuje od Newtonova ili Leibnizova računa. Zato većina poznavalaca današnjeg računa ne bi razumjela Newtonov i Leibnizov kad bismo im ga predstavili u izvornom obliku, bez dodatnih objašnjenja. Iako ovdje ne možemo ući u podrobnu analizu tih razlika, jer bi to značilo pisati povijest računa, a ne samo njegova otkrića, navest ćemo osnovne značajke daljeg razvoja, i bar donekle naglasiti njegove temeljne razlike spram Leibnizova računa (naime, današnji je račun potekao iz njegova, a ne iz Newtonova).

U povijesti analize nailazimo na četiri ključna procesa. Prvi je, gore opisano, uvođenje lajbnicovske infinitezimalne analize u okviru kartezijanske analize, koju možemo karakterizirati kao izučavanje krivulja primjenom algebarskih metoda. Jasnu svijest o tom proširenju uobičajene (commune) analize iskazuje L'Hôpital u uvodnim riječima prvoga udžbenika analize: »L'Analyse qu'on explique dans cet Ouvrage, suppose la *commune*, mais elle en est fort différente. L'Analyse ordinere ne traite que des grandeurs finies: celle-ci penetre jusques dans l'infini même.«*

Drugi proces, koji se javlja sredinom 18. stoljeća i veže uz Eulera, bilo je razdvajanje analize od geometrije. Analiza prestaje biti puko sredstvo za izučavanje krivulja, te postaje zasebna matematička disciplina, čiji predmet više nisu relacije među geometrijskim veličinama vezanim uz danu krivulju, već su to relacije među općim veličinama, koje izražavaju (apstraktne) formule izgrađene iz slova i brojeva. Taj pomak interesa s krivulja na formule pratila je i promjena

* Analiza koja se objašnjava ovim Djelom pretpostavlja uobičajenu, ali je sama sasvim drugačija. Obična analiza ne razmatra druge veličine do konačnih: ova dopire do same beskonačnosti.

temeljnih pojmova analize. U geometrijskom periodu, osnovni pojam analitičkog izučavanja krivulja bila je **varijabilna geometrijska veličina,** dok je osamostaljivanje analize od geometrije dovelo do pojave novog fundamentalnog pojma **funkcije jedne varijable.** Drugi fundamentalni pojam geometrijske analize, diferencijal, doživio je odgovarajuću promjenu. On je izgubio svoje početne geometrijske konotacije, da bi se počeo tretirati kao simbol na istoj razini s ostalim simbolima analitičkih formula. Ipak, on je još duboko u 18. stoljeće zadržao svoj neprikosnoveni položaj fundamentalnoga pojma lajbnicovskog infinitezimalnog računa.

Upravo je treći proces u razvoju analize zamjena diferencijala derivacijom kao temeljnim pojmom infinitezimalne analize. Taj je proces proveden uglavnom u radovima Lagrangea i Cauchyja, iako se neki njegovi važni aspekti nalaze već u Eulera.

Četvrti je proces dobro poznata aritmetizacija analize, koju su u 19. stoljeću proveli Weierstrass, Cantor i Dedekind, zasnivanjem pojma realnog broja (tj. linearnog kontinuuma), a time i realne funkcije jedne i više varijabli.

Moderni će čitalac bez većih problema pratiti Cauchyjev kurs analize, kao i post-Cauchyjeve tekstove. (Mogli bismo stoga reći da je Cauchy, trećim procesom, stvorio manje-više suvremeni račun.) S izvjesnim će čuđenjem pratiti Eulerov *Introductio in analysin infinitorum,* ne shvaćajući principe kojima se rukovodi u tretmanu beskonačno malih veličina, tj. diferencijala, ali prepoznavajući krajnje rezultate, kao i mnoge »neegzaktne« heurističke metode koji do njih vode, a koje će znati »popraviti« na svoj (tj. Cauchyjev) $\varepsilon - \delta$ način.

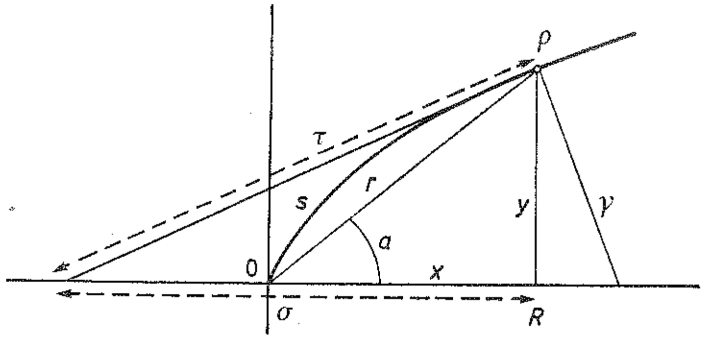
Prepoznavanje računa ozbiljnije će zapeti tek pri povratku u lajbnicovski period geometrijskog (analitičkog) računa. Naime, lajbnicovski se račun ne može razumjeti ako se ne uzme u obzir njegova geometrijska interpretacija, jer su njegovi osnovni pojmovi bitno vezani za svoj geometrijski kontekst. Zato ćemo ovdje dati još nekoliko općih napomena o geometrijskom karakteru analize 17. stoljeća.

Ta analiza bijaše sustav analitičkih sredstava za izučavanje geometrijskih objekata, točnije krivulja. Sredstva su uključivala kartezijanske algebarske jednadžbe i operacije, kao i kasnije lajbnicovske diferencijale i pravila računa.

Prvi, L'Hôpitalov, udžbenik diferencijalnog računa iz 1696. imao je, u tom smislu, karakterističan naslov: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.* (Spomenimo usput da je Marquis de L'Hôpitala u račun uveo Johann Bernoulli, koji je 1690. došavši u Pariz, impresionirao učene krugove svojom diferencijalnom metodom određivanja zakrivljenosti proizvoljnih krivulja — problem tako reći nerješiv metodama kartezijanske analitičke geometrije. Jedan od najzadivljenijih bijaše L'Hôpital, koji je zamolio Bernoullija da ga za dobru plaću poduči novim metodama. Bernoulli je prihvatio, i predavanja su održana dijelom u Parizu, a dijelom u miru markiževa dvorca izvan Pariza. Predavanja bijahu napisana i obojica zadržaše kopije. Nakon više od jedne godine Bernoulli je napustio Pariz, uz pogodbu da poduku nastavi putem pisama. Točnije, pogodbom je riješeno da Bernoulli, za priličan i redovan mjesečni prihod, odgovara na sva L'Hôpitalova matematička pitanja, da mu šalje sva svoja matematička otkrića i da ih učini nedostupnim trećim osobama; nevjerojatan ugovor kojim je sva Bernoullijeva matematička originalnost stavljena u L'Hôpitalovu službu. Bernoulli se od samog početka nije baš doslovno držao slova ugovora, i L'Hôpital je ubrzo shvatio da briljantnog matematičara ne može vezati na taj način. No kada je L'Hôpital 1696. objavio svoj, inače prvi udžbenik analize, Bernoulli je tek u bijesu i šutnji, kojom ga je vezao ugovor, mogao ustanoviti da su to, uz manje dopune, njegova pariška predavanja. Po L'Hôpitalovoj smrti Bernoulli se pokušao izboriti za autorstvo prve *Analyse,* no do tada je njegova vjerodostojnost u pitanjima prioriteta postala sasvim mizerna zbog otvorenih svađa oko sličnih stvari sa svojim bratom Jakobom. Johannovo polaganje prava na većinu sadržaja iz *Analyse* pokazalo se opravdanim tek 1921, kada je pronađen manuskript njegovih pariških predavanja.)

Dakle, osnovni predmet istraživanja bila je krivulja, koja ovaploćuje relacije među raznim varijabilnim geometrijskim veličinama, definiranim u odnosu na varijabilnu točku krivulje. Te varijabilne geometrijske veličine — ili kraće varijable — bile su naprimjer (vidi dolje): apscisa x, ordinata y, duljina luka s, radijus r, polarni luk a, suptangenta σ, tangenta τ, normala ν, površina $Q = \widehat{OPR}$; upisani pravokutnik, rotacioni volumeni s obzirom na osi, udaljenost težišta luka od osi x (ili y) itd.

Relacije među varijablama izražavane su, ako je to bilo moguće, jednadžbama. (To nije uvijek bilo moguće. Do pred kraj 17. stoljeća nije bilo formula za transcedentne, nealgebarske, relacije. One su izražavane proznim tekstom, koji je opisivao metodu konstruiranja krivulje, koja je reprezentirala danu transcedentnu relaciju.)



U tom kartezijanskom kontekstu algebarskih relacija među varijablama važno je uočiti odsustvo pojma **funkcije.** Ni jednadžbe, ni varijable nisu funkcije u smislu preslikavanja $x \rightarrow y(x)$, tj. one nisu jednosmjerne relacije od »nezavisne« varijable x prema »zavisnoj« varijabli y. Relacija između x i y razmatrana je kao jedinstveni entitet, a ne kao par međusobno inverznih preslikavanja $x \rightarrow y(x)$ i $y \rightarrow x(y)$. Krivulja nije shvaćena kao graf funkcije $x \rightarrow$ $\rightarrow y(x)$, nego je ona bila primarni objekt, figura koja je inducirala (sekundarni) odnos x-a i y-a. Varijable nisu bile funkcije jer pojam varijable nije implicirao ovisnost o nekoj posebno istaknutoj »nezavisnoj« varijabli.

To odsustvo pojma funkcije u kartezijanskoj i lajbnicovskoj analizi objašnjava mnoge aspekte ranog infinitezimalnog računa. Naprimjer, pojam **derivacije** funkcije nikako ne može biti (osnovni) pojam tog računa jer on pretpostavlja pojam funkcije; no o tome više kasnije.

Reference varijabli geometrijske analize jesu geometrijske veličine, a ne realni brojevi. Naime, geometrijske veličine, i uopće veličine kako su ih razumjeli matematičari 17. stoljeća, nemaju multiplikativnu strukturu i jedinični element. Veličine su dimenzionirane. Geometrijske veličine

mogu imati dimenziju duljine (npr. ordinata, suptangenta, duljina luka), ili površine (npr. površina između krivulje i osi), ili obujma (npr. rotacioni volumen). Izvan geometrije nalazimo veličine raznih dimenzija, kao što su brzina, masa, sila itd. Nadalje, algebarske manipulacije, posebno s geometrijskim veličinama, vodile su dimenzijama većim od dimenzije obujma. Iako te veličine viših dimenzija, kao što su potencije a^4 ili b^5 dužina a i b, nisu bile direktno interpretabilne u prostoru, prihvaćene su u analizi kao veličine čija je dimenzija određena brojem faktora s dimenzijom duljine.

Samo se veličine iste dimenzije mogu međusobno zbrajati. U nekim slučajevima množenje veličina je interpretabilno, kao u slučaju dviju dužina čiji je produkt površina. Ali množenje nikada nije zatvorena operacija, tj. produkt dviju istovrsnih veličina iste dimenzije uvijek je nova veličina druge dimenzije. Zato veličine iste dimenzije nemaju multiplikativne strukture ni jediničnog elementa, koji bi njome mogao biti uveden.

Takve skučene mogućnosti zbrajanja i množenja veličina dopuštale su njihov algebarski tretman tek uz izvjesna ograničenja. Specijalna priroda množenja nametala je zakon dimenzione homogenosti jednadžbama koje se pojavljuju u algebarskom tretmanu: svi termi jednadžbe moraju biti iste dimenzije.

Descartes je već 1637. pokazao kako se zahtjev dimenzione homogenosti može zaobići i kako se množenje dužina — kao prototipa veličina uopće — može definirati tako da umnožak opet bude dužina. Descartes odabire proizvoljnu dužinu kao jediničnu dužinu 1 i definira produkt dviju dužina a i b kao dužinu c, koja zadovoljava omjer

$$1 : a = b : c.$$

Na taj način on je riješio i problem interpretacije potencija: ako je x dužina, onda je x^2 dužina takva da je

$$1 : x = x : x^2,$$

x^3 je dužina takva da je

$$1 : x^2 = x^2 : x^3,$$

x^4 je dužina takva da je

$$1 : x^3 = x^3 : x^4 \text{ itd.}$$

To rješenje problema dimenzija bilo je upotrijebljeno u teoriji jednadžbi s jednom nepoznanicom. One su se sada mogle interpretirati kao relacije među dužinama, čiji su korijeni također dužine, a time su i iracionalni korijeni jednadžbi i dimenzije veće od tri postali interpretabilni.

Ali u analitičkom pristupu krivuljama dimenziona homogenost jednadžbi ostala je neprikosnovenim zahtjevom do duboko u 18. stoljeće (usp. gornje Newtonove i Leibnizove formule). To nas ne treba iznenaditi, jer u tom dijelu matematike odbacivanje dimenzione homogenosti nema nekih direktnih prednosti, osim interpretabilnosti viših potencija (koje su i tako relativno jednostavno poopćenje nižih). Dimenziona homogenost osiguravala je prirodnu geometrijsku interpretaciju svakog koraka algebarske analize i time osiguravala jednostavnu mogućnost provjere u složenijim računima. Što se tiče uvođenja jedinice, ono zahtijeva proizvoljni izbor koji remeti općenitost razmatranja.

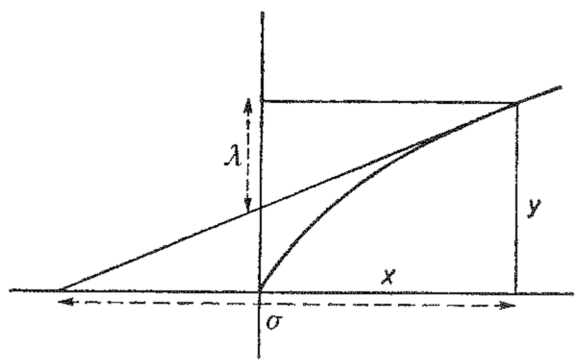
U geometrijskoj analizi koja se drži dimenzione homogenosti nije dakle nužno uvoditi jediničnu dužinu (à la Descartes), pa zato varijable kao što su dužina, površina itd. nisu skalirane. One nisu realni brojevi koji reprezentiraju omjere spram jedinice. Realni se brojevi pojavljuju u lajbnicovskoj analizi samo kao cijeli ili razlomljeni faktori u termima jednadžbi ili kao omjeri veličina iste dimenzije.

Već smo rekli da se mnogi aspekti lajbnicovskog računa, nejasni današnjem čitatelju, mogu objasniti geometrijskom prirodom tog računa. Naprimjer, kako se diferencijal, tj. beskonačno mala veličina (razlika sukcesivnih? vrijednosti dane veličine), koji *per definitionem* ima kontradiktorna svojstva, može konzistentno iskorištavati kao osnovni pojam računa, a da se ne zamijeni (tj. ne redefinira à la Cauchy) pomoću derivacije, konačne i za nas danas jednostavne veličine. Naime, prema L'Hôpital-Bernoullijevu udžbeniku, diferencijalne veličine zadovoljavaju ovaj osnovni postulat (prvi u udžbeniku):

> Dvije veličine, razlika kojih je beskonačno mala veličina, mogu, bez razlike, zamijeniti jedna drugu, ili (što je isto) veličina koja se uveća ili smanji za beskonačno malu veličinu može se smatrati nepromijenjenom.

Dakle, diferencijal može uvećati veličinu tako da je ne uveća i umanjiti je tako da je ne umanji! Sve postaje još čudnije kada znamo da se među nekim Leibnizovim rukopisima objavljenim tek 1846. može naći definicija diferencijala kao konačne veličine proporcionalne graničnom diferencijalnom omjeru. Iako tu nije riječ o sasvim konzistentno izvedenom tekstu, košijevska ideja svođenja diferencijala na neku vrst primitivne derivacije potpuno je jasna. Međutim, te nama apsolutno prihvatljive ideje ne prevladavaju početnim geometrijskim računom, Leibniz ih čak ne objavljuje, nego umjesto njih nalazimo nama krajnje opskurni L'Hôpitalov postulat I. Zašto?

Prije svega, već smo spomenuli da pojam derivacije pretpostavlja pojam **funkcije** (jer je derivacija dy/dx derivacija **funkcije** $y(x)$), kojega još nema u geometrijskoj analizi Leibnizova vremena. Na donjoj slici, tipičnoj za taj period, derivacija dy/dx javlja se samo kao omjer ordinate y i suptangente σ. Taj omjer nema očigledni centralni položaj u gornjoj konfiguraciji, i odabir njega, kao temelja, bio bi uistinu proizvoljan. Zaista nije jasno zašto bi npr. y/σ bio bolji izbor od x/λ. Ukratko, odabir y/σ implicira odabir varijable y kao funkcije varijable x, a ne možda x-a kao funkcije od y-a, ili pak i x-a i y-a kao funkcije neke treće varijable.



No postoji još jedan razlog zbog kojeg se derivacija ne može prirodno nametnuti u geometrijskom kontekstu. Taj je razlog povezan s dimenzionom interpretacijom geometrijskih veličina. Ako y/σ razumijevamo kao derivaciju varijable y, to znači da deriviranje povezuje bezdimenzioni omjer (tj. derivaciju) s dimenzionom varijablom, tj. dužinom. To implicira da se ta operacija ne može na prirodan način iterirati, jer nije jasno koju bi vrstu veličine ona trebala povezati s bezdimenzionim omjerom. Jedini je način da se y/σ interpretira (à la Descartes) kao dužina, što implicira proizvoljni odabir jedinične dužine. Zbog te proizvoljnosti derivacije višeg reda, u čisto geometrijskom kontekstu, nisu jednoznačno definirane.

Dakle, derivacija se nije mogla pojaviti u geometrijskoj fazi infinitezimalnog računa, i to nam može pomoći da razumijemo zašto je tek otkriveni infinitezimalni račun izgrađen na pojmu diferencijala usprkos svim problemima vezanim za beskonačno male veličine. Naravno, kada je sredinom 18. stoljeća (zahvaljujući ponajviše Euleru) došlo do pomaka matematičkog interesa sa samih krivulja i geometrijskih veličina prema formulama koje izražavaju odnose među tim veličinama, izgubio se i zahtjev dimenzione homogenosti (preživjevši tek kao tehnički termin za posebno svojstvo formula). To je značilo da se prešutno pretpotavljao odabir jedinične veličine, jer bi dimenziona homogenost inače bila presudna za konzistentnu interpretaciju formula. Dakle, sada su slova u formulama predstavljala skalirane veličine, pa možemo reći da su praktičari ojlerovske analize uistinu radili s realnim brojevima utemeljenim na modelu brojevnog pravca.

Time je, kao što smo već rekli, stvorena mogućnost pojave pojma **fuukcije jedne varijable**. Sam termin »funkcija« ima svoj izvor u geometrijskoj fazi analize. U matematiku ga je uveo Leibniz, nazivajući varijabilne geometrijske veličine poput koordinata, tangenti, suptangenti, radiusa, površina i sl. »funkcijama« odgovarajuće krivulje. No te Leibnizove »funkcije« nisu shvaćene kao ovisne o nekoj određenoj nezavisnoj varijabli. Tek je kasnije Johann Bernoulli počeo pisati o potencijama varijable »ili uopće o bilo kojoj funkciji« varijable. Već se i Leibniz složio s tom novom upotrebom termina »funkcija«, koji je izgubio svoje prvobitne geometrijske konotacije, postavši pojam povezan s formulama, a ne više s figurama. Uostalom, bilo je potpuno prirodno da odvajanjem analize od geometrije osnovne komponente formula postanu fundamentalni pojmovi analize. Funkcija, kako su je definirali Johann Bernoulli i Euler, bila je upravo takva osnovna komponenta formula, tj. izraz koji sadrži

konstantne veličine (slova i brojeve) i samo jednu varijabilnu veličinu (slovo). Tako imamo Bernoullijevu definiciju:

> Ovdje zovemo *funkcijom* varijabilnu veličinu, veličinu izgrađenu na bilo koji način iz varijabilne veličine i konstanti,

ili uistinu preciznu Eulerovu:

> Funkcija varijabilne veličine je analitički izraz izgrađen na bilo koji način od te varijabilne veličine i brojeva ili konstantnih veličina.

Euler je, osim toga, proširio pojam funkcije i na izraze koji sadrže više od jedne varijable, a to je bio još jedan značajni otklon od geometrijske paradigme krivulje s njenim geometrijskim veličinama.

Dakle, separacijom analize i geometrije uveden je pojam funkcije i uklonjena je dimenziona intepretacija objekata izučavanja, što je otvorilo put pojavi derivacije. Ipak diferencijal je zadržao svoju temeljnu poziciju još dugo nakon što je analiza prestala biti geometrijska.

Što se tiče daljeg razvoja, čini se da je veliki formalni zamah ojlerovskog perioda donekle zapriječio povratak geometrijskim temeljima u novom funkcijskom kontekstu (usp. članak o Lagrangeu i njegov pokušaj potpune algebraizacije analize), no uskoro je došao i taj košijevski period (usp. članak o Cauchyju).

Nadamo se da smo tim naznakama osnovnih razlika lajbnicovskog računa, spram kasnijih faza koje vode modernom računu današnjice, stvorili još jasniju sliku o onome što su otkrili osnivači moderne matematike Newton i Leibniz.

JOSEPH LOUIS LAGRANGE — ZNAČAJ PROMAŠENE TEORIJE

Dva najveća matematičara 18. stoljeća bijahu L. Euler i J. L. Lagrange. Kada je L. Euler 1766. napustio Berlin, gdje je kao najveći matematičar Evrope stolovao na dvoru najvećeg kralja Evrope Fridrika Velikog, na tom ga je mjestu zamijenio J. L. Lagrange. Debata o tome koji je od dvojice najvećih bio veći traje i danas.

J. L. Lagrange rođen je 1736. u Torinu. Tu je stekao klasično obrazovanje. Njegov povećani interes za matematiku obično se veže uz čitanje eseja Newtonova prijatelja Halleya, u kojem ovaj iznosi prednosti diferencijalnog računa nad sintetičkom geometrijskom metodom Grka. Lagrange je osvojen. U izuzetno kratkom vremenu on savladava sve ono što je bila moderna analiza njegova vremena. Sa šesnaest godina postaje profesor Kraljevske artiljerijske škole u Torinu. Već tada je napisao svoje remek-djelo »*Mécanique analytique*«, koje će biti objavljeno tek 1788. u Parizu (u njegovoj 52. godini). Za taj Lagrangeov analitički napad na mehaniku može se reći da je prvi potpuni prekid s grčkom tradicijom. Uostalom, pogledajmo što G. Boole u 19. stoljeću kaže o njegovoj »*Mécanique céleste*«, koju je Lagrange pisao u istom analitičkom duhu:

> Lagrangeovim je radom gibanje planeta, sa svom svojom složenošću i raznovrsnošću, svedeno na čisto matematičko pitanje. Ono je prestalo biti fizikalnim problemom. Nestali su i pobuđeni i pobuđujući planeti. Ideje vremena i sile privedene su svome kraju. Elementi orbita iščezavaju, ili još bolje postoje samo kao proizvoljni znaci matematičkih formula.

Malo emfatičan prikaz, ali otkriva duh Lagrangeova djela. Naravno, veliki analitičar nije bio samo korisnik analitičke metode, on ju je i usavršavao. Dapače, bavio se i tada otvorenim pitanjem njezina zasnivanja jer diferencijalni i integralni račun još nisu jasno utemeljeni. Već 1759. on piše Euleru da je došao do istinske metafizike ne samo osnovnih principa mehanike nego i diferencijalnog i integralnog računa. Lagrange misli na metodu koju je objavio 1772. u članku »*Sur une nouvelle espéce de calcul relatif*

à la différentation et à l'integration«* (o tome uskoro govorimo nešto više). Osim toga Lagrange se bavi teorijom jednadžbi, o čemu je ostavio značajno djelo »*Traite de la résolution des équations numeriques de tous degrés*«,** 1767. godine. Taj je rad kasnije nastavio mladi Galois, došavši tako do svoje teorije grupa. Poznati teorem teorije grupa koji kaže da je red podgrupe neke konačne grupe faktor reda te grupe nosi Lagrangeovo ime. Značajne rezultate ostvario je Lagrange i u aritmetici, mada se (kako reče D'Alambertu) njome bavio samo radi promjene. Dokazao je npr. da se svaki prirodni broj može izraziti kao zbroj najviše četiriju kvadrata.

Produktivni berlinski period trajao je do smrti Fridrika Velikog 1786, kada na poziv Luja XVI. Lagrange odlazi u Pariz, gdje ostaje i nakon revolucije 1789. Bio je revoltiran okrutnostima Terora koji je uslijedio. Glupost i kratkovidnost mnogih egzekucija izrazio je riječima kojima je popratio jednu od najglupljih, giljotiniranje Lavoisiera:

> Rulji je trebao samo trenutak da ukloni njegovu glavu, a stoljeće neće dostajati da se ona ponovo stvori.

Kada je 1795. ustanovljena Ecole Normal, Lagrange je imenovan profesorom matematike. Kada je ta škola zatvorena i 1797. osnovana slavna École Polytechnique, Lagrange je predložio predavanja iz matematike i bio je njen prvi profesor. Prvi put u svojoj karijeri najveći matematičar svojeg vremena postaje učiteljem matematike. U tom periodu u Lagrangea se ponovo javlja interes za rigorozno zasnivanje diferencijalnog i integralnog računa. Očito je da su Lagrangeovi učenici imali poteškoća s pojmovima beskonačno malog i beskonačno velikog u tradicionalnom diferencijalnom računu. Lagrange pokušava savladati te teškoće svojim osebujnim pristupom razvijenim 1797. u »*Théorie des functions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanoussians, de limites ou de fluxions, et réduits a l'analyse algébrique des quantités finies*«, koji dalje* raz-

* »O jednoj novoj vrsti računa što se odnosi na diferenciranje i integriranje.«

** »Rasprava o rješenjima numeričkih jednadžbi svih stupneva.

vija ideje zacrtane 1772. u »*Sur une nouvelle*...«. Te se Lagrangeove ideje obično smatraju promašenim. To međutim nije sasvim točno, pa ćemo zato o njima reći nešto više.

Mnogi matematičari 18. stoljeća jasno uočavaju da beskonačno malo nije zadovoljavajući temelj diferencijalnog i integralnog računa. Većina kao zamjenu te sumnjive osnove predlaže neku formu ideje granične vrijednosti (u tome je najuspješniji iako ne i sasvim uspješan D'Alembert). J. L. Lagrange jedini je značajni matematičar koji ne ide tom glavnom linijom. Skeptičan je prema beskonačno malom, što iskazuje Berkeleyjevim riječima da rezultati diferencijalnog računa zahvaljuju svoju točnost kompenzaciji grešaka, međutim njegov stav prema pojmu granične vrijednosti također je hladan. On smatra da D'Alembertova definicija tangente kao granične vrijednosti sekante ne zadovoljava utoliko što sekantu, nakon što jednom postane tangenta, ništa ne može spriječeiti da opet postane sekanta s druge strane promatrane točke, pa mu se čini da je točna specifikacija te granice skopčana s mnogim metafizičkim teškoćama. Jasno je da pisac »*Mécanique analitique*« nije zadovoljan ni Newtonovom metodom fluksija, zbog uvođenja irelevantnog pojma gibanja. Eulerov način da dx i dy predstavlja kao 0 također ga ne zadovoljava jer osjeća da nemamo jasne i precizne ideje o omjeru dviju veličina koje postaju 0. Kao rezultat svega toga Lagrange traga za jednostavnom algebarskom idejom koja ne bi trpjela od takvih prigovora. Spomenuli smo da je već 1759. pisao Euleru o toj ideji, koju je prvi put objavio u »*Sur une nouvelle*...« 1772. godine.

Red $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \ldots$ poznat je bar od vremena Taylora čije ime i nosi. U tom redu koeficijenti potencija od h nisu drugo do omjeri diferencijala ili fluksija. Dakako, ti se redovi mogu razvijati (kako je već Newton pokazao) bez poziva na te pojmove. Što je onda prirodnije nego diferencijale i fluksije definirati pomoću koeficijenata tih redova? Na taj bi način zaobišli uvođenje bilo granica bilo diferencijala, ili pak fluksija, pa bi diferen-

* »Teorija analitičkih funkcija, u kojoj su sadržana načela »diferencijalnog računa, bez ikakvog razmatranja beskonačno malih ili iščezavajućih (veličina), granica ili fluksija, i koja je svedena na algebarsku analizu konačnih veličina«

cijalni račun time bio sveden na jednostavne algebarske operacije. To je osnovna Lagrangeova ideja izražena i u dugom naslovu njegova rada iz 1797. godine. On dakle u temelje svojeg pristupa stavlja Taylorov razvoj, implicitno pretpostavljajući da sve funkcije dopuštaju takav razvoj. Koeficijente p', p'',... potencija od h u Taylorovu razvoju od $u(x+h)$ on definira kao »**functions dérivées**« od u. Diferencijalni se račun za Lagrangea satoji u »neposrednom nalaženju, uz pomoć jednostavnih i spretnih postupaka, deriviranih funkcija p', p'', ... funkcije u«; a integralni se račun sastoji u »određivanju funkcije u pomoću tih deriviranih funkcija«.

Danas znamo da se Lagrangeova metoda oslanja na pogrešnu pretpostavku da se svaka funkcija može razviti u Taylorov red. Dapače, znamo i to da je bijeg od beskonačno velikog i beskonačno malog, kao i od pojma granice, samo prividan jer ti pojmovi ulaze u kritično ispitivanje konvergencije reda koje Lagrange ne razmatra na adekvatan način. To je ono što čitavu njegovu konstrukciju kvalificira kao očit promašaj. Međutim, uočimo ipak neke pozitivne novine njegova pristupa. On je jedan od prvih koji se okrenuo kritičkom istraživanju fundamenata računa, i to tako što je pojam funkcije stavio u središte tih istraživanja. Naime, otkrivači infinitezimalnog računa interpretirali su ga (i shvaćali) kao instrument za ispitivanje odnosa među veličinama u geometrijskim i mehaničkim problemima, a kada je s Eulerom i došlo do razdvajanja računa od geometrije uz pojavu pojma funkcije (usp. članak o Newtonu i Leibnizu), nagli je razvoj računa utišao interes za njegove fundamente. Svojim je pristupom Lagrange prvi put usmjerio pažnju na veličinu koja je danas osnovni pojam diferencijalnog računa, na deriviranu funkciju ili, kraće, derivaciju. (Osim što joj je dao ime, Lagrange ju je i označio oznakom $f'(x)$, koja je i danas u upotrebi.) Mada Newtonov krajnji omjer fluksija možemo danas interpretirati kao **jedan** broj ili veličinu, koju zovemo derivacijom, Newton je o toj veličini mislio kao o omjeru **dviju** fluksija. Iako je Leibniz razumio značenje omjera dvaju diferencijala, nije o njemu mislio kao o **jednom** broju, nego kao o kvocijentu **dvaju** »neodredljivih«. S D'Alembertom i njegovim inzistiranjem na tome da diferencijalni račun trebamo strogo razumijevati u terminima graničnih vrijednosti približavamo se pojmu derivacije, ali ni kod njega ne nalazimo pojam **jedne** derivirane funkcije, odnosno **jednog** broja koji je granična vrijednost **jednog** beskonačnog niza. Kao Newton i Leibniz tako i D'Alembert nema na pameti deriviranu funkciju, nego dvije strane neke jednadžbe kojima su granične vrijednosti jednake. Kod Lagrangea se prvi put »function dérivée« javlja kao **jedinstvena** veličina (iako, a to danas smatramo promašajem, nezavisno od ideje granice omjera). Ona je jedna funkcija, i mada Lagrangeova definicija te funkcije nije ona koju smo na kraju prihvatili, Lagrangeov pogled na nju kao jedinstvenu funkciju mogao je pridonijeti njenoj danas opće prihvaćenoj definiciji. Cauchyjev revolucionarni obrat (vidi sljedeći članak) kojim derivacija postaje osnovni pojam diferencijalnog računa, pomoću kojega se tek definiraju diferencijali (ili fluksije), ponešto duguje i Lagrangeu. Naime, uočavanje tog pojma kao osnovnog Lagrangeovo je. Drugi vjerovnik je naravno D'Alambert, od kojeg se moglo naučiti da se taj osnovni pojam treba definirati kao granična vrijednost. Za one koji vole jednostavne iako ne uvijek precizne formule:

$$\text{Lagrange} + \text{D'Alembert} = \text{Cauchy}.$$

Toliko o Lagrangeovu promašaju.

I na kraju recimo da je Lagrange proživio svoju starost kao slava Francuske. Napoleon, koji ga je zvao »veličanstvenom piramidom matematičke znanosti«, ukazivao mu je velike počasti. Kada je Francuska pripojila Piemont, Talleyrand je dobio naređenje da posjeti Lagrangeova oca, koji je još živio u Torinu, i da mu kaže:

> Vaš sin, na kojeg je Piemont ponosan što ga je dao, a Francuska što ga posjeduje, služi na čast čitavom čovječanstvu svojim genijem.

Posljednji Lagrangeov znanstveni napor bijaše revizija i proširenje njegova remek-djela »*Mécanique analytique*« za drugo izdanje. S velikim elanom vratio se djelu za koje je uvijek pokazivao najveći interes i koje će ostati njegov najveći doprinos ljudskoj misli. Završivši taj posao, uskoro je umro, u rano jutro 10. travnja 1813. u 76. godini života.

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY — STROGO ZASNIVANJE RAČUNA

Delta-epsilon dokaze, koji čine metodološku osnovu modernog diferencijalnog i integralnog računa, u analizu je uveo Augustin Louis Cauchy. Intuitivno prihvatljivu ideju o derivaciji kao graničnoj vrijednosti kvocijenta diferencija

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

kada Δx teži prema nuli (usp. slične ideje Newtona, Leibniza, Eulera i D'Alemberta u prethodna dva članka), Cauchy je preveo na precizni jezik nejednadžbi, što je tu ideju učinilo upotrebljivom za dokazivanje mnogih tvrdnji, koje su prije Cauchyja bile tek intuitivno prihvaćane (i dublje neargumentirane) istine. Naime, iako je svakome jasno što znači da se tijelo giba s brzinom od 10 m/s, svođenje bitnih svojstava pojma brzine na jednostavna matematička svojstva (a tek to svođenje dopušta čisto matematičko razmatranje matematičke suštine toga pojma) omogućeno je tek time što se svakome jasna tvrdnja o brzini tijela počela razumijevati kao tvrdnja: da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da iz $|t_2 - t_1| < \delta$ slijedi $|(s_2 - s_1)/(t_2 - t_1) - 10| < \varepsilon$. Kako je došlo do toga da se »jasni pojam brzine« tako apstraktno preformulira, i time matematički strogo zasnuje, tj. kako je došlo do strogog zasnivanja infinitezimalnog računa, opisat ćemo u ovom članku.

Potkraj 17. stoljeća Newton i Leibniz otkrili su, gotovo istovremeno, infinitezimalni račun. Da bismo njihovo otkriće mogli lakše usporediti s Cauchyjevim, ponovit ćemo ukratko (usp. članak o Newtonu i Leibnizu) bitne karakteristike njihovih računa. I Newtonov i Leibnizov račun bavi se **varijabilnim veličinama**. Ipak, Newton ih je zamišljao kao **promjenljive u vremenu**, a Leibniz ih je promatrao kao **niz međusobno beskonačno bliskih vrijednosti**. To je dovelo do razlike u odabiru fundamentalnih pojmova računa. Newtonov je osnovni pojam bila fluksija, brzina promjene varijable (u vremenu), a Leibnizov je osnovni pojam bio diferencijal, beskonačno mala razlika između sukcesivnih vrijednosti varijable.

Leibniz je posebno cijenio notaciju, i njegov se izbor simbola pokazao sretnijim od Newtonova. Njegova upotreba posebnih slova »d« i »∫« jasno je isticala ulogu diferenciranja i integriranja kao operatora. Osim toga njegovi su se simboli mnogo lakše nego Newtonovi uklapali u složene formule. Ukratko, Leibnizov je račun bio analitičniji od Newtonova, koji je bio izrazitije geometrijski formuliran (uz odgovarajuće tekstualne argumente).

I Newton i Leibniz radili su s **beskonačno malim veličinama** i bili su svjesni logičkih teškoća svojeg pristupa. Newton je smatrao da se njegov račun može strogo zasnovati na pojmu **početnog i krajnjeg omjera**, na pojmu srodnom, ali ne i jednakom pojmu granice. Newtonova definicija zvuči dobro, no ona nije ni razumijevana ni upotrebljavana na algebarski način, a tek bi joj to omogućilo da se primjenjuje u **dokazima** o granicama.

U daljem razvoju računa, odvajanjem analize od geometrije, naglašava se analitički aspekt računa, kojem osnovni predmet više nije varijabla nego funkcija. Konstituciju računa u tom smislu dugujemo Euleru. On je prvi eksplicitno ustvrdio da je analiza grana matematike koja se bavi **analitičkim izrazima** i posebno funkcijama, koje je (slijedeći Johanna Bernoullija; usp. članak o Newtonu i Leibnizu) definirao na sljedeći način:

> »Funkcija neke varijabilne veličine je analitički izraz izgrađen na bilo koji način od te varijable, brojeva i konstantnih veličina«.

Dakle, algebarski izrazi, ali i beskonačni redovi, smatrani su funkcijama svoje varijable (koja je mogla biti i kompleksna). Jednu temeljnu inventuru i klasifikaciju širokog spektra funkcija napravio je Euler u svojem »*Introductio in analysin infinitorum*«. Taj je uvod zamišljen kao preliminarni pregled pojmova i metoda analize i analitičke geometrije (za kasniji studij diferencijalnog i integralnog računa). Tu su analitičkim metodama, bez poziva na diferencijalni i integralni račun, uvedene elementarne transcedentne funkcije: logaritam, eksponencijalna funkcija, trigonometrijske funkcije i njihovi inverzi, što nije bilo malo dostignuće, s obzirom na to da je logaritam bio tradicionalno vezan uz kvadraturu hiperbole (usp. članak o otkriću logaritama), a trigonometrijske funkcije uz duljinu luka

kružnice. Naravno, i u svojem čisto analitičkom (negeometrijskom) pristupu Euler se morao poslužiti nekom vrstom infinitezimalnog procesa: razvojem funkcija u redove potencija (algoritmom dijeljenja, binomnim razvojem i drugim metodama) i uvrštavanjem beskonačno velikih i beskonačno malih brojeva u analitičke formule. Karakterističan primjer je Eulerov razvoj od a^z u red potencija. On zaključuje na sljedeći način. Neka je $a > 1$ i neka je ω jedan »beskonačno mali broj, ili razlomak tako malen da samo što nije nula«. Tada je

$$a^\omega = 1 + \psi,$$

za neki beskonačno mali broj ψ. Neka je nadalje

$$\psi = k\,\omega,$$

gdje k ovisi samo o a (uz fiksni ω). Tada je

$$a^\omega = 1 + k\,\omega, \quad \text{tj.} \tag{1}$$

$$\omega = \log a\,(1 + k\,\omega).$$

Euler dalje pokazuje kako se, za $a = 10$, aproksimativna vrijednost od k može naći uz pomoć logaritamskih tablica (kako su se konstruirale te tablice, možete vidjeti u članku o logaritmima).

Potencirajući jednadžbu (1) realnim brojem i, a koristeći se pritom binomnim razvojem (usp. članak o Newtonu), Euler nalazi

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \tag{2}$$

$$+ \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 + \ldots$$

Ako je z konačni pozitivni broj, tada je $i = z/\omega$ beskonačno veliki broj. Supstitucijom $i\omega = z$ u jednadžbu (2), dobivamo

$$a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1\,(i-1)}{1\cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1\,(i-1)\,(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}\,\cdot \tag{3}$$

$$\cdot\, k^3z^3 + \ldots.$$

No, budući da je i beskonačno velik broj $(i-1)/i = 1$, $(i-2)/i = 1$, itd. pa iz (3) slijedi

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{2!} + \frac{k^3z^3}{3!} + \dots .$$

Prirodne logaritme dobivamo ako a odaberemo tako da bude $k = 1$. Euler je izračunao vrijednost takvoga a na 23 decimale i uveo za tu konkretnu vrijednost oznaku e, koja je i danas u upotrebi. Tako Euler nalazi dobro nam poznati razvoj

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots .$$

U sljedećem poglavlju svojeg »*Introductio*«, u kojem se bavi trigonometrijskim funkcijama, Euler zapisuje: »Budući da je

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

faktorizacijom dobivamo

$$(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)(\cos z - \sqrt{-1} \sin z) = 1,$$

i ti su faktori, mada imaginarni, od vrlo velike koristi za usporedbu i množenje lukova«. Koristeći se poznatim formulama za sume, on dalje nalazi da je

$$(\cos y \pm \sqrt{-1} \sin y)(\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z) =$$
$$= \cos(y+z) \pm \sqrt{-1} \sin(y+z),$$

odakle dobiva

(4) $$(\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1} \sin nz,$$

tzv. De'Moivreovu formulu. Razvijajući (4) po binomnom pravilu, Euler dobiva izraze za $\cos nz$ i $\sin nz$. Uzimajući sada n beskonačno velikim brojem, što uz konačni $n \cdot z = v$ čini z beskonačno malim brojem (pa je $\sin z = z$, a $\cos z = 1$), Euler metodama sličnim onima gore nalazi

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \dots$$

$$\sin v = v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \dots .$$

Tako Euler dolazi do čisto analitičkih prikaza transcedentnih funkcija.

Sličnim metodama rješava on i sasvim konkretne zadaće. Naprimjer, problem nalaženja beskonačne sume recipročnih kvadrata:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots .$$

Suma je očito konačna jer je odozgo omeđena sumom

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \dots ,$$

koja iznosi 2, kako je pokazao Johann Bernoulli i nezavisno Leibniz (usp. članak o Leibnizu). Eulerova sumacija recipročnih kvadrata temelji se na jednoj lemi iz teorije jednadžbi: koeficijent linearnog člana polinomske jednadžbe, kojoj je slobodni koeficijent 1, jednak je zbroju recipročnih vrijednosti korijena jednadžbe, s promijenjenim predznakom. (Razmotrimo kvadratnu jednadžbu $(x-a)(x-b) = 0$, s korijenima a i b. Množenjem i izlučivanjem faktora ab dobivamo

$$\frac{1}{ab}x^2 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x + 1 = 0,$$

što lemu čini očitom u tom slučaju, a i upućuje na jednostavno uopćenje za svaki viši stupanj.) Euler sada razmatra jednadžbu

(5) $$\sin x = 0.$$

Koristeći se analitičkim prikazom funkcije $\sin x$ on (5) zapisuje u obliku

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = 0.$$

Dijeleći sa x, dobiva

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = 0.$$

Supstituirajući $x^2 = u$, nalazi

$$(6) \qquad 1 - \frac{u}{3!} + \frac{u^2}{5!} - \ldots = 0.$$

No red potencija nije za Eulera drugo do polinom beskonačnog stupnja. Dakle, pred nama je polinomska jednadžba za u, sa slobodnim koeficijentom 1. Primjenjujući lemu, Euler zaključuje da je koeficijent linearnog člana, s promijenjenim predznakom, tj. $1/3!$, jednak sumi recipročnih vrijednosti korijena jednadžbe (6). No korijeni jednadžbe (6) su korijeni jednadžbe (5) uz supstituciju $u = x^2$, tj. π^2, $4\pi^2$, $9\pi^2, \ldots$. Dakle, prema lemi

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \ldots .$$

Množeći sa π^2, Euler rješava problem, nalazeći

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Mada je lako kritizirati takve matematičke argumente, tipične za 18. stoljeće, zbog nedostatka stroge argumentacije, to zapravo nema smisla. Precizna specifikacija uvjeta pod kojima je takva manipulacija s beskonačnim dopuštena, matematičarima toga vremena nije bila važna. Oni su i bez nje dolazili do značajnih otkrića (koja su se, kao i u ovom slučaju, mogla **provjeriti**). Intuitivno razumijevan i algoritmički provođen račun 18. stoljeća primijenjen je na mnoge probleme. Naprimjer, riješena je parcijalna diferencijalna jednadžba titranja žice; riješene su jednadžbe gibanja za Sunčev sustav; sva je mehanika obrađena u jeziku računa. To su ogromna dostignuća matematike 18. stoljeća. Tko bi ozbiljno brinuo za strogo zasnivanje računa, koji je svoju moć dokazao rješavanjem tako važnih problema. Brojili su se rezultati, dok su rasprave o osnovama bile manje značajne. One su se nalazile u uvodima knjiga, u popularizacijama ili filozofskim spisima, a nikada nisu bile, kao što su danas (tj. kao što će biti od Cauchyja nadalje), predmetom članaka u znanstvenim časopisima.

Dakle, za nas osnovno pitanje, o nastajanju strogo zasnovanog računa, svodi se na dva temeljnija pitanja. Prvo, kako je došlo do toga da strogo zasnivanje računa postane značajan i matematičarima zanimljiv problem. I drugo, koje su matematičke tehnike omogućile strogo zasnivanje računa. Jer mada je interes za strogo zasnivanje nužan uvjet toga zasnivanja, on nije i dovoljan. Naime, da bi se zasnivanje provelo, još je i važnije (mada ne i dovoljno) da postoje tehnike koje će omogućiti pristup tom cilju. Preciznije, ako će se račun strogo zasnovati svođenjem na algebru nejednakosti, potrebno je posjedovati i tu algebru i krucijalna znanja o osnovnim pojmovima računa koji se trebaju izraziti u toj algebri.

Početkom 19. stoljeća složili su se svi ti uvjeti. Strogost se smatrala značajnom, algebra nejednadžbi bila je prilično razvijena, a i mnoga svojstva osnovnih pojmova analize bila su toliko poznata da su se, po potrebi, mogla prevesti na jezik nejednadžbi. Taj prijevod, u već razvijenu algebru nejednadžbi, obavio je Cauchy, uključujući se tako u trend već pojačanog interesa za osnove računa. No njegovo uključivanje (tim prijevodom) bijaše ništa manje do izgradnja logički povezanog sustava glavnih teorema infinitezimalnog računa, kojim je stvorena osnova današnjeg modernog računa. Današnji matematičar čita Cauchyja kao svojeg autora, za razliku od »stranaca iz 18. stoljeća«. Kako su se složili svi ti uvjeti, opisat ćemo sada malo detaljnije.

Početkom 19. stoljeća matematičari pokazuju neusporedivo više zanimanja za problem strogog zasnivanja računa no što su ga pokazivali njihovi predšasnici. Porijeklo tog zanimanja moramo tražiti na više strana. Jedna je svakako bila već odavno i javno iskazana kritika samih fundamenata računa. Biskup Berkeley napisao je još 1734, u svojem »*The Analyst, or a Discourse Addressed to an Infiedel Mathematician*«* (usp. članak o Newtonu i Leibnizu) da matematičari ne bi smejli napadati nerazumnost vjere, s obzirom na vlastitu argumentaciju kojom se služe u računu. On je ismijavao fluksije kao »duhove preminulih veličina«, pravilno uočavajući kontradiktornost postupka njihova nalaženja: za $y = x^2$ uzima se kvocijent diferencija $((x + h)^2 - x^2)/h$, sredi se do $2x + h$, pa se h izjednači s nulom i tako dobiva fluksija $2x$. No da li je $h = 0$, pita se Berkeley. Ako jest, ne možemo s njim dijeliti, ako nije, ne možemo $2x + h$ izjednačiti s $2x$. Košijevski odgovor na tu kritiku pretpostavlja da se jednadžba koja uključuje granice shvati kao pokrata za jedan niz nejednadžbi. Profinjena, a ujedno i komplicirana ideja, do koje nije uspio doprijeti nijedan matematičar 18. stoljeća. Naravno, mnogi su pokušavali. Maclaurin, D'Alembert, Lagrange, Carnot, svi su znali za Berkeleyevu kritiku i pokušavali naći pravi odgovor. Ipak, jedini pa čak ni osnovni motiv njihovu okretanju osnovama računa nije bila ni Berkeleyeva ni slične kritike.

Drugi značajan uzrok vraćanju samim osnovama računa bijaše taj da je broj rezultata koji se mogao polučiti analitičkim metodama 18. stoljeća ipak bio ograničen. Pred kraj stoljeća neki su vodeći matematičari počeli osjećati da je granica dostignuta. Lagrange i D'Alembert upozoravaju na to u svojoj korespondenciji, posebno prvi kada višu matematiku naziva dekadentnom. Diderot čak tvrdi da su matematičari 18. stoljeća »digli Herkulove stupove«, preko kojih se dalje ne može ići. Došlo je stoga vrijeme da se konsolidiraju tekovine minulog stoljeća.

Poseban »uzrok« bio je Lagrange, koji je svoj ogromni interes za strogo zasnivanje računa prenio na mnoge druge matematičare. Godine 1784. postavio je problem strogog zasnivanja računa, kao nagradni problem Berlinske akademije. Lagrange nije bio potpuno zadovoljan nijednim rješenjem, ali su dva, od mnogih pristiglih na natječaj, izrasla kasnije u prve knjige posvećene strogom zasnivanju infinitezimalnog računa: L'Huilierova, »*Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*«, Berlin, 1787, i Carnotova, »*Réfleksions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*«, Paris, 1797. Lagrangeov interes za zasnivanje računa potaknut je njegovim velikim uvažavanjem sigur-

* »Analitičar, ili rasprava upućena nepoštenom matematičaru«

nosti (i općenitosti) algebre; uvažavanjem sigurnosti koju je želio proširiti i na račun (usp. članak o Lagrangeu). No pojavio se i drugi faktor, koji je osim Lagrangeova interesa pobudio i interes mnogih drugih matematičara za osnove računa. Bila je to sve izraženija potreba da se infinitezimalni račun uči i podučava, a poduka naprosto sili da se pažnja usmjeri na temeljna pitanja.

Do duboko u drugu polovicu 18. stoljeća velik su broj viđenijih matematičara uzdržavali razni dvorovi širom Evrope. Pred kraj stoljeća (sjetimo se 1789) moć dvorova naglo opada, broj matematičara se povećava, a sama se matematika počinje činiti korisnom. Najprije na vojnim školama, a kasnije i na civilnim, poput pariške Ecole Polytechnique, matematičarima se otvara novi radni prostor; predavanje matematike studentima egzaktnih znanosti i tehnike. Prvi Lagrangeov rad na osnovama računa potječe iz razdoblja u kojem je predavao analizu na Vojnoj akademiji u Torinu. Četrdeset godina kasnije vratio se toj temi, kada ga je francuska revolucionarna vlada postavila za prvog predavača matematike na novoosnovanoj Ecole Polytechnique. Čak su duboko u 19. stoljeće glavni radovi na osnovama matematike izrastali iz obrazovnog matematičkog okružja. Weierstrassovo zasnivanje linearnog kontinuuma realnih brojeva, kao polazišta analize, nije drugo do izvadak iz njegovih berlinskih predavanja. Dedekindova razmišljanja o problemu kontinuiranosti realnog brojevnog pravca vezana su uz njegova predavanja na Eidgenossische Technische Hochschule u Zürichu. Dini i Landau stali su se baviti osnovama računa kada su ga počeli predavati. Za nas je najvažnije da se isto zbilo i s Cauchyjem. Njegovo zasnivanje analize pojavljuje se u knjigama, koje su pročišćeni zapisi njegovih predavanja na Ecole Polytechnique. Njegov **Course d'analyse** iz 1821. početak je velike tradicije francuskih kursova analize.

S druge strane, 18. je stoljeće bilo svjedok znatnog razvoja algebre nejednadžbi. Danas se ta algebra najčešće uči u uvodnom kursu računa, jer nam služi kao njegova baza, no ta primjena nije poznata do Cauchyja. U 18. stoljeću algebra nejednadžbi je razvijana kao pogodno sredstvo za izučavanje aproksimacija. Naprimjer, izvaditi necjelobrojni korijen iz nekog broja najčešće je značilo aproksimirati ga odgovarajućim binomnim redom. Matematičari 18. stoljeća često su za dani broj članova takvog reda pokušavali izračunati gornju među učinjene aproksimacije, tj. izračunati gornju među razlike odgovarajuće parcijalne sume i ukupne sume reda. Taj račun je zadatak iz algebre nejednadžbi. D'Alembert ga je riješio za najčešći slučaj binomnog reda. Za dani broj članova binomnog reda n, pretpostavljajući prešutno da red konvergira, on je našao među ostatka reda, ograničavajući ga odozdo i odozgo konvergentnim geometrijskim redovima (čije su sume dobro poznate). Lagrange je našao po njemu nazvani ostatak Taylorova reda, koristeći se nejednakošću koja je ograničavala ostatak, odozdo i odozgo, pomoću maksimalne i minimalne vrijednosti n-te derivacije. Kroz takve radove razvila se u 18. stoljeću algebra nejednadžbi, i mnogi su se matematičari u njoj s lakoćom kretali. Za zadani n oni su bili navikli tražiti odgovarajuću grešku ε.

Interes za zasnivanje računa je postojao, algebarske tehnike rada s nejednadžbama bile su na raspolaganju. Pogledajmo sada što je neposredno prije Cauchyja bilo poznato o osnovnim pojmovima računa, a što je on trebao učiniti da definira konvergenciju, neprekinutost, derivaciju i integral i dokaže osnovne teoreme o njima.

Intuitivno razumijevanje konvergencije, koje je u konkretnim slučajevima bilo i detaljnije ispitano, Cauchy je sistematski i sasvim općenito preveo na jezik algebre nejednadžbi, što mu je omogućilo da **dokazuje** razna svojstva vezana uz pojam konvergencije. Time je u 18. stoljeću često ponavljana tvrdnja da se račun može zasnovati na pojmu granice i konvergencije, prvi put stvarno potvrđena. Naprimjer, već je Maclaurin pisao da je suma reda granica njegovih parcijalnih suma. No za Cauchyja je to nešto sasvim precizno. To znači da se za svaki ε može naći n takav da je, za više od n članova, razlika parcijalne i ukupne sume manja od ε. To je zapravo obrat D'Alembertova postupka za procjenu greške. Iz svoje **definicije** sume reda Cauchy je mogao dokazati da geometrijski red, s kvocijentom apsolutno manjim od 1, konvergira prema svojoj uobičajenoj sumi, i taj rezultat iskoristiti da uspoređivanjem redova s geometrijskim redovima dokaže valjanost raznih testova konvergencije. Koristeći se tehnikama kojima su se matematičari kao D'Alembert i Lagrange tu i tamo služili za aproksimacije, i upotrijebivši definiciju sume reda utemeljenu na pojmu granice, Cauchy je došao do stroge teorije konvergencije.

Cauchyjeva definicija neprekinute funkcije u suštini je naša moderna definicija. Funkcija $f(x)$ je neprekinuta na danom intervalu ako za svaki x iz tog intevala apsolutna vrijednost razlike $f(x+\alpha) - f(x)$ neograničeno opada s α. On je upotrijebio tu definiciju u prvom **dokazu** teorema srednje vrijednosti za neprekinute funkcije. Dokaz je prepoznatljiv. Ako je $f(b) > 0$, a $f(c) < 0$, Cauchy dijeli interval $[b, c]$ na m dijelova duljine $h = \frac{c-b}{m}$. Uočavajući vrijednosti $f(b), f(b+h), \ldots, f(c)$, on zaključuje da (osim ako je neka od njih nula, a time bi teorem bio potvrđen) postoje dvije vrijednosti $b_1 < c_1$, udaljene za h, takve da je $f(b_1) > 0$ i $f(c_1) < 0$. Ponavljajući postupak na sljedećim intervalima duljine $\frac{c-b}{m^2}, \frac{c-b}{m^3}, \ldots$, Cauchy dolazi do uzlaznog niza $b_1, b_2, \ldots$, na kojem je funkcija f pozitivna, i do silaznog niza $c_1, c_2, \ldots$, na kojem je ona negativna. On tvrdi da ti nizovi moraju imati zajedničku granicu a. Zbog neprekinutosti od f Cauchy sada zaključuje da niz negativnih vrijednosti $f(b_k)$, kao i niz pozitivnih vrijednosti $f(c_k)$, konvergira prema zajedničkoj granici $f(a)$ koja je, budući da je zajednička, jednaka nuli. U tom se dokazu Cauchy koristi već otprije poznatom tehnikom, koju je Lagrange primjenjivao za aproksimacije realnih korijena polinomskih jednadžbi. Cauchy je i ovdje sredstvo aproksimiranja pretvorio u sredstvo strogosti.

Kao što vidimo, u svojoj obradi konvergencije i neprekinutosti Cauchy prešutno pretpostavlja potpunost linearnog kontinuuma realnih brojeva. Smatra očiglednim da red s pozitivnim članovima, odozgo omeđen konvergentnim geometrijskim redom, i sam konvergira; ili u dokazu teorema srednje vrijednosti, da monotoni omeđeni niz ima granicu. Dakle, iako se Cauchy u dokazima analize prvi sistematski služio tehnikama nejednadžbi, on nije jasno izlučio krucijalne (implicitne) pretpostavke o realnim brojevima, koje tim tehnikama daju punu egzaktnost. To će učiniti sljedeća generacija velikana, Weierstrass, Dedekind i Cantor. Čitalac je vjerojatno uočio i određenu dvosmislenost u Cauchyjevoj definiciji neprekinutosti. Njegovo »za svaki x« i »neograničeno opada s α« može značiti »za svaki x i svaki ε postoji δ« ili pak »za svaki ε postoji δ takav da za svaki x«, što čini razliku između obične i uniformne neprekinutosti. Sličnu neodređenost između obične i uniformne konvergencije nalazimo i u njegovoj obradi redova funkcija. Naravno, 1820. kada su dokazi teorema o konvergenciji i neprekinutosti sami po sebi bili velika novost, naprosto se nije moglo očekivati razumijevanje ni tih distinkcija ni njihove važnosti.

U prethodnom članku (usp. i članak o Newtonu i Leibnizu) pokazali smo kako je došlo do toga da se, u jednom neuspjelom Lagrangeovu pokušaju, derivacija pojavi kao alternativa diferencijalu pri zasnivanju računa. No i u tom neuspjelom kontekstu Lagrange je istakao značenje sljedeće relacije (u biti nejednadžbe)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + hd, \tag{7}$$

gdje d teži prema nuli zajedno s h. Dao je i interpretaciju te osnovne relacije: za svaki dani ε možemo naći dovoljno mali h tako da je $|d| < \varepsilon$. Naravno (usp. prethodni članak), za Lagrangea osnovna relacija (7) nije definicija, nego je posljedica pretpostavljenog Taylorova razvoja funkcije f. Sjetimo se da je on $f'(x)$ definirao bez poziva na pojam granice, kao koeficijent linearnog člana u Taylovoru razvoju od $f(x+h)$. Njegov je osnovni uvid bio da za svaki red potencija u h možemo odabrati h toliko malen da svaki član reda premašuje ukupnu sumu članova koji mu slijede. Ta je aproksimacija, zapisao je Lagrange u svojoj »*Théorie des fonctions analytiques*«, pretpostavka svih primjena računa u geometriji i mehanici. Primijenimo li je na linearni član Taylorova razvoja, dobivamo osnovno Lagrangeovo svojstvo derivacije (7). No Lagrange nije samo formulirao osnovnu relaciju (7), uz njoj pridružene nejednadžbe, nego se njome koristio kao osnovnim sredstvom za brojne dokaze o derivaciji. Tako je dokazao da je funkcija s pozitivnom derivacijom u nekom intervalu uzlazna na tom intervalu; tako je dokazao Lagrangeov teorem srednje vrijednosti (za derivacije); tako je našao Lagrangeov ostatak Taylorova reda; tako je karakterizirao ekstreme funkcija i dodire krivulja višeg reda, itd. Uz manje modifikacije svi ti Lagrangeovi dokazi ostaju valjani, uz uvjet da se opravda osnovna relacija (7). Cauchy je zapravo preuzeo te Lagrangeove dokaze bazirajući ih na novoj definiciji derivacije. Derivacija je, za Cauchyja, kao i za neke njegove prethodnike (npr. Newtona i D'Alemberta), granična vrijednost omjera diferencija, ali kod njega je pojam granice sveden na niz nejednadžbi, pa za svoju derivaciju može reći:

> Neka su δ i ε dva vrlo mala broja; prvi je odabran tako da za sve numeričke vrijednosti h manje od δ, i za svaku razmatranu vrijednost x, omjer $(f(x+h) - f(x))/h$ bude uvijek veći od $f'(x) - \varepsilon$ i manji od $f'(x) + \varepsilon$.

Tako su tek s Cauchyjem Lagrangeovi dokazi postali legitimni, jer je tek Cauchy precizno i strogo definirao derivaciju koja zadovoljava relevantnu relaciju (7). Još jednom je sredstvo aproksimacije pretvoreno u sredstvo strogosti. Za Lagrangea je derivacija koeficijent linearnog člana Taylorova razvoja. Relacija (7) i pridružena joj nejednakost

$$h(f'(x) - \varepsilon) \leqslant f(x+h) - f(x) \leqslant h(f'(x) + \varepsilon)$$

jest izvedena, ali za primjene temeljna, aproksimacija. Cauchy je pretvara u strogu definiciju derivacije, čime i Lagrangeovi dokazi postaju dokazi strogo zasnovanog računa. Treba ipak dodati da je Cauchy pojednostavio mnoge od tih dokaza.

I na kraju razmotrimo integral. U 18. stoljeću on je redovito definiran kao inverz diferencijala, što znači ne kao suma definirana nezavisno od diferencijala, u lajbnicovskom duhu, nego kao iz diferencijala izvedeni pojam, u bernulijevskom duhu (usp. članak o Newtonu i Leibnizu). Ipak, kada se inverz nije mogao egzaktno izračunati, matematičari (npr. Euler) bili su svjesni da se integral može po volji dobro aproksimirati odgovarajućim sumama. Naravno, na to su direktno upućivali i geometrijska slika površine aproksimirane pravokutnicima i lajbnicovska definicija integrala kao beskonačne sume. Ali značajno je to da su matematičari 18. stoljeća mnogo truda posvetili takvim aproksimacijama određenih integrala, razmatrajući između ostalog koliko fina mora biti razdioba intervala za postizanje zadane preciznosti aproksimacije.

Poisson je 1820. postavio sebi sljedeće pitanje: Ako je integral F definiran kao antiderivacija od f, i ako je $b - a = nh$, može li se dokazati da je

$$F(b) - F(a) \stackrel{\text{def.}}{=\!=} \int_a^b f(x)\,dx$$

granica sume

$$S(h) = hf(a) + hf(a+h) + \dots + hf(a+(n-1)h),$$

kada h teži prema nuli? Naravno, $S(h)$ je od one vrste aproksimativnih suma kakve su razmatrane u 18. stoljeću. Poisson je taj rezultat, koji je nazvao »fundamentalnom propozicijom teorije određenih integrala«, dokazao koristeći se opet jednom nejednakošću, tj. procjenom ostatka Taylorova reda. Najprije je $F(b) - F(a)$ zapisao u obliku sume

$$(8)\ F(a+h) - F(a) + F(a+2h) - F(a+h) + \dots + \\ + F(b) - F(a+(n-1)h).$$

Zbog $F' = f$, iz procjene ostatka u Taylorovu razvoju, za svaki član oblika $F(a+kh) - F(a+(k-1)h)$ slijedi sljedeća procjena

$$F(a+kh) - F(a+(k-1)h) = hf(a+ \\ + (k-1)h) + R_k h^{1+w},$$

gdje je $w > 0$. Suma (8) sada postaje

$$hf(a) + hf(a+h) + \dots + hf(a+(n-1)h) + \\ + (R_1 + \dots + R_n)h^{1+w}.$$

Dakle, $F(b) - F(a)$ i aproksimativna suma $S(h)$ razlikuju se za $(R_1 + \dots R_n)h^{1+w}$. Uz $R = \max\{R_1, \dots, R_n\}$ dobivamo

$$(R_1 + \dots + R_n)h^{1+w} \leqslant n \cdot R \cdot h^{1+w} = \\ = R \cdot nh \cdot h^w = R(b-a)h^w.$$

Dakle, za dovoljno mali h, $F(b) - F(a)$ razlikuje se od $S(h)$ po volji malo. To je bio prvi pokušaj da se strogo, tehnikom procjenjujućih nejednadžbi, bez poziva na geometrijske evidentnosti, dokaže ekvivalencija pojma integrala kao antiderivacije s pojmom integrala kao granične sume. Razumije se, u dokazu je prisutna implicitna pretpostavka o postojanju antiderivacije. No, samo iz toga

što postoji operacija deriviranja ne slijedi da je njeno invertiranje uvijek moguće. Postojanje određenog integrala treba dokazati. To je učinio Cauchy. (Osim toga Poissonov dokaz pretpostavlja jednoliku razdiobu intervala integracije. Poisson je smatrao da isti rezultat vrijedi i za nejednake podintervale razdiobe, ali to nije opravdao strogim argumentom sličnoga tipa, nego se vratio geometrijskim evidencijama: »Ako integral predstavimo kao površinu krivulje, ona će biti ista bez obzira na to rastavimo li osnovni integral na beskonačno mnogo jednakih ili nejednakih dijelova«. Cauchy je jasno uviđao da je i tu potreban strogi dokaz.) Dakle, Cauchy je definirao integral kao granicu suma $\Sigma f(x_k) \cdot \cdot (x_{k+1} - x_k)$. Eksplicitno pretpostavljajući neprekinutost od $f(x)$ (a implicitno i uniformnu neprekinutost), uspio je dokazati da sve sume tog tipa konvergiraju prema istoj vrijednosti, koju zove integralom, i koji je tek time korektno definiran. A sada je mogao, preuzimajući od Lagrangea teorem srednje vrijednosti za integrale, dokazati i fundamentalni teorem računa. U najkraćim crtama, tako je Cauchy stvorio strogi račun.

Čitalac je vjerojatno stekao dojam da Cauchy nije bio pretjerano originalan. Izgleda da je samo na nov način slagao tuđe kockice.

Naravno, to je krajnje površan dojam, jer to »novo slaganje starih kockica« nije ništa manje do stvaranje novog konceptualnog okvira iz kojega izrastaju potpuno novi matematički problemi i područja. Takvu intuiciju za uočavanje problema, koji su izvan vidokruga njihovih suvremenika, imaju samo najveći i najoriginalniji matematičari. Čini se, uostalom, da postoje dvije osnovne vrste matematičke originalnosti. Jedna je upravo spomenuta sposobnost iskakanja iz suvremene matematike; bilo rješavanjem suvremenih problema na potpuno nov način, bilo stvaranjem sasvim novih problema i odgovarajućih matematičkih područja. Najveći primjer takve originalnosti bio je Gauss čiji, zbog straha od vike Beočana, uglavnom neobjavljeni spisi sadrže zametke svih važnijih područja matematike 19. stoljeća. Originalnost druge vrste jest sposobnost da se neki značajni otvoreni problem suvremene matematike riješi njenim vlastitim metodama, ili da se neki njen dosegnuti fragment sveobuhvatno poopći i proširi do krajnjih granica. Primjeri takve originalnosti su mnogobrojni, a jedan od najznačajnijih je Cauchyjeva teorija kompleksnih funkcija.

Uzimajući u obzir da je, osim u **Cours d'Analyse** kojim je stvoren strogi račun, u svojim ostalim radovima Cauchy uvijek pokazivao originalnost druge vrste, poznati povjesničar matematike I. Grattan-Guinness čak tvrdi da je tu riječ o plagijatu Bolzanova originala. Ta se priča lijepo uklapa u **chronique scandaleuse** pariške matematike Cauchyjeva vremena i potvrđuje ružnu sliku Cauchyjeva nesnosnog karaktera ali, kako je to nedvosmisleno dokazao Freudenthal, ona naprosto nije isitnita. Ovdje ne možemo ulaziti u detalje te neobične polemike; napomenimo tek da se danas sa sigurnošću može tvrditi da je povijest nastanka strogoga računa onakva kakvom smo je i mi prikazali u ovom članku.

I na kraju, pošto smo već dopustili da se nasluti čar pikanterije koja prati opise Cauchyjeva karaktera, recimo još nešto o osobi velikog matematičara. Taj fanatični katolik i burbonist rođen je u Parizu 21. kolovoza 1789, mjesec dana nakon pada Bastille. Djetinjstvo je proživio u pozadini najkrvavijeg perioda revolucije. Škole su bile zatvorene, komuni u tom periodu nije bila potrebna ni znanost ni kultura. Mnogi su prvaci znanstvenog i kulturnog života gladovali, a neki su i završili pod giljotinom. Cauchyjev otac izbjegao je opasnost preselivši obitelj u selo Arcueil, gdje je ženu i prvenca hranio voćem i povrćem, koje je sam uzgajao (Cauchy je odrastao neishranjen i tjelesno slabo razvijen). Augustina i ostalih petero braće i sestara školovao je sam otac, u duhu katolicizma. Na prvu Novu godinu 19. stoljeća Cauchyjev otac, koji je potajno održavao veze s Parizom, izabran je za tajnika Senata. Koristeći se za učenje dijelom očeve kancelarije u Luksemburškoj palači, Cauchy je često viđao Lagrangea (profesora na Ecole Polytechnique) kako poslovno razgovara s tajnikom Cauchyjem. Navodno je jednom prilikom, u Laplaceovu prisustvu, Lagrange pokazao na mladog Cauchyja rekavši: »On će, što se tiče matematike, prestići sve nas.« U sljedećih 16 godina školovanja, inženjerske službe u Cherbourgu i stalnih matematičkih studija i istraživanja (koji obuhvaćaju i velebnu teoriju funkcija kompleksne varijable) Cauchy je sa svojih 27 godina ušao u red najvećih živućih matematičara. Kandidiran je za člana Akademije, u kojoj trenutno nije bilo slobodnog mjesta za još jednog besmrtnika, ali su se uskoro mogla očekivati čak dva. Mongeu je bilo 70 godina, a Carnotu 63. Međutim, stvari

su se ubrzale izbacivanjem Mongea i Carnota iz Akademije, nakon Napoleonova neuspješnog »stodnevnog« povratka s Elbe. I dok je Carnotov zamjenik zauzeo svoje mjesto bez velikog talasanja, Cauchyjevo zauzeće Mongeove stolice izazvalo je burne reakcije. Izbacivanje starine Mongea bijaše politička glupost i nepristojnost, i tko god se time okoristio, pokazao je u najmanju ruku pomanjkanje takta. Naravno, Cauchy je smatrao da je u pravu i savjest mu bijaše mirna. Služeći Bourbonima i vjerujući da je dinastija nebom predodređena da vlada Francuskom, Cauchy je samo pokazao lojalnost prema nebu i Francuskoj kada je sjeo na Mongeovo mjesto. Jasno je da su takva uvjerenja i odgovarajući Cauchyjevi postupci izazivali opće negodovanje. Ipak valja priznati da je Cauchy, kada je revolucija iz 1830. zbacila njegova kralja Charlesa, ostavio sve svoje ugledne položaje i otišao u **dobrovoljno** izgnanstvo.

Među svojim znanstvenim kolegama Cauchy je bio nepopularan, katkada i omražen. Dokazivao je svoju superiornost u svakom trenutku i nad svakim, makar i najneznatnijim, suvremenikom. Publicirao je gotovo neprekinutu rijeku radova. Zasuta njegovom produkcijom Akademija je donijela propis (i danas na snazi), kojim se zabranjuje objavljivanje članaka duljih od četiri stranice. U znanstvenim akademijama i društvima glasao je prema svojim vjerskim i političkim (a ne samo znanstvenim) pogledima. Pratio ga je glas da nije spreman ni na najmanju pomoć mlađim kolegama u njihovu radu i karijeri. Kao primjer redovito se navodi odlomak iz Abelova pisma prijatelju (i kasnijem izdavaču njegovih djela) Holmboeu: »Cauchy je budala za koju se ne može imati razumijevanja, iako je matematičar koji zna kako se danas treba baviti matematikom... on je ekstremni katolik i bigot...«. Abel nije ni slutio kako je točno opisao osobu koja će uskoro i njemu nauditi — to je omiljeno zapažanje u melodramatskim opisima kratka Abelova života (glavne činjenice za tu biografsku melodramu izmislio je Libri). Možda će biti dobro da iznesemo taj primjer, kojim se često želi pokazati nesnosnost Cauchyjeva karaktera.

Riječ je o peripetijama s jednim Abelovim člankom predanim Akademiji. Za referente su određeni Legandre i Cauchy. Rukopis je preuzeo Legandre i kada je ustanovio da je nečitljiv (»napisan gotovo bijelom tintom«), predao ga je Cauchyju. Cauchy se u to vrijeme bavio drugim stvarima (matematičkom fizikom) i nije za Abelov rad pokazivao nikakav interes (tako izvještava Legandre), pa je rad odložio u ladicu i na njega zaboravio. Tu počinje melodramatski skandal, jer se kasnije pokazalo da je rad izuzetno značajan, a Cauchy je optužen (ali nikada ozbiljno, nego samo u melodramatici Abeliana) za namjerno zapostavljanje mlađeg kolege. Melodramatska epizoda dalje se razvija ovako: Abel razočaran umire 1829. u bijedi i zaboravu. Pred kraj 1830-ih izdavač njegovih **Oeuvres** prijatelj i rehabilitator Holmboe, koji je znao za rukopis, pokušava ga dobiti od Akademije, ali se rukopis ne može naći. Odjednom, 1841, članak je tiskan u Akademijinoj publikaciji iako je rukopis i dalje izgubljen? Mračna Cauchyjeva posla? No, pogledajmo činjenice koje su danas dobro poznate. Kao prvo, iako ovdje manje značajno, Abel nije umro ni u zaboravu ni u bijedi. No vratimo se njegovom radu. Cauchyju rad nije bio zanimljiv i on ga je stvarno odložio u ladicu krajem 1826. Međutim, 1829. jedan njemački znanstvenik postavlja Akademiji pitanje o tom radu, s obzirom na njegovo uočeno značenje. **Naime, glavni dio rada (Abelov teorem) već je objavljen u Crelleovu Journalu (najznačajnijem matematičkom časopisu tog vremena).** Cauchy, sada zainteresiran, nalazi rukopis i želi ga referirati Akademiji, no ona je pokolebana s obzirom na to da je glavni dio rada već objavljen, a i nastavak je trebao izaći u Crelleovu Journalu. Cauchy predaje rukopis Akademiji i s njim više nema nikakve veze (1830. napušta Francusku i vraća se tek 1838). Zbog Abelove prerane smrti i značenja njegova rada Akademija kasnije odlučuje da rad ipak objavi. To se ostvarilo tek 1841, no zaostaci od 10 do 15 godina u to doba uopće nisu neobični (svaka je publikacija trebala kraljevsku autorizaciju), a u Abelovu slučaju određenu ulogu imala je i činjenica da je glavnina rada već objavljena drugdje. Ipak, gdje je i zašto nestao rukopis? To je otkrio Viggo Brun 1952. Nakon 1829. Cauchy nema s rukopisom više nikakve veze, ali nekakve veze ima Libri (onaj praautor melodramatske Abelove biografije). On je radio korekture Abelova članka, iako po njegovu izvješću bez rukopisa. Međutim, taj matematički mediokritet i akademik postao je slavan kada je 1848. naglo otputovao u London, da bi se ispostavilo kako je godinama potkradao francuske biblioteke otuđivši rijetke knjige i rukopise u milijunskim vrijednostima. Bilo je prirodno da se i u vezi s Abelovim rukopisom pročešlja Librijev posjed u Moreniana biblioteci u Firenzi. Brun je to učinio 1952. i našao Abelov rukopis. Što je tjeralo Librija na krađe, izmišljanja i spletke, nije nam poznato, ali jasno je da Cauchy s tom nije imao ništa. Vidljivo je s prethodnih stranica, a i inače je dobro poznato, da je ekstremno konzervativni Cauchy bio čudan tip, i da bi se to dokazalo, uistinu nije potrebno izmišljati skandale o njemu.

Pod stare dane Cauchy je sasvim zahirio. Pokušavao je obratiti na katolicizam svakoga s kim je došao u dodir. Kada je William Thomson (kasnije Lord Kelvin) kao mladić od dvadeset godina posjetio velikog Cauchyja, sa željom da razgovaraju o matematici, nije uspio u svojem naumu. Cauchy je čitavo vrijeme susreta potrošio na bezuspješne pokušaje da odanog sljedbenika škotske crkve preobrati na katolicizam.

Cauchy je umro iznenada u svojoj 68. godini. Nekoliko sati prije smrti razgovarao je s pariškim nadbiskupom o nekom dobrotvornom radu. Milosrđe bijaše jedno od njegovih životnih zanimanja. Navodno su njegove posljednje riječi upućene nadbiskupu bile: »Ljudi odlaze, njihova djela ostaju.«

Dodatna literatura uz prvo poglavlje

1) Bos, H. J. M. *Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus, AHES* 14, 1—90 (1974)
2) Bos, H. J. M. *On the Representation of Curves in Descartes' Geometrie, AHES* 24, 295—338 (1981)
3) Boyer, C. B. *The History of the Calculus and its Conceptual Development, New York,* 1939 (1949, 1959)
4) Feigenbaum, *L. Brook Taylor and the Method of Incrementes, AHES* 34, 1—140 (1985)
5) Freudenthal, H. *Did Cauchy Plagiarize Bolzano?, AHES* 7, 375—392 (1971)
6) Grabiner, J. V. *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus, Cambridge,* 1981.
7) Grattan-Guinness, *I. Bolzano, Cauchy and the »New Analysis« of the Early* 19th *Century, AHES* 6, 372—400 (1970)
8) Grattan-Guinness, I, (ed.) *From the Calculus to Set Theory:* 1630—1910. *An Introductory History, London,* 1980.
9) Hofmann, J. E. *Leibniz in Paris* 1672—1676 (engl. prijevod), *Cambridge,* 1974.
10) Rootselaar, *B. van Bolzano's Theory of Real Numbers, AHES* 2, 168—180 (1964)
11) Scriba, C. J. *The Inverse Method of Tangents: A Dialogue between Leibniz and Newton (1675—1677), AHES* 2, 113—137 (1964)
12) Taylor, A. E. *The Differential: 19th and 20th Century Developments, AHES* 12, 355—383 (1974)
13) Whiteside, D. T. *Patterns of Mathematical Thought in the later 17th Century, AHES* 1, 179—388 (1961)
14) Youschkevitch, A. P. *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century, AHES* 16, 37—85 (1976)

AHES = *Archive for History of Exact Sciences*

II. KAKO JE STVORENA TEORIJA SKUPOVA

GEORG CANTOR — NEPREBROJIVOST KONTINUUMA I NASTANAK TEORIJE SKUPOVA

Ovdje ćemo ukratko prikazati nastanak teorije skupova, uz detaljniji osvrt na Cantorovo otkriće neprebrojivosti kontinuuma, kao ključni moment nastajanja naše teorije. Glavni je junak te povijesti Georg Cantor.

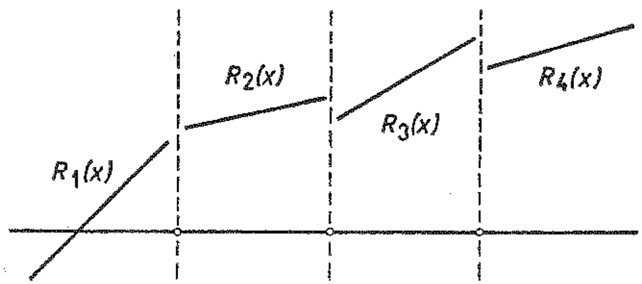
Pretpovijest

Cantor je završio svoje studije matematike na Berlinskom sveučilištu, 14. prosinca 1866, obranom disertacije »*De aequationibus secundi gradis indeterminatis*«. Njegovi berlinski profesori Kummer, Kronecker i Weierstrass ocijenili su radnju kao *docta et ingeniosa*, što bijaše najbolja moguća ocjena. (Uočite da prvi Cantorov matematički rad spada u teoriju brojeva.) Nakon kraćeg službovanja u jednoj berlinskoj djevojačkoj gimnaziji Cantor dobiva mjesto na Sveučilištu u Halleu. Njegov pristupni *Habilitationschrift* još uvijek spada u teoriju brojeva; u njemu je riječ o transformacijama ternarnih kvadratnih formi. Međutim, Cantor se u Halleu, pod utjecajem starijeg kolege Edwarda Heinea, okreće analizi. Kao berlinski, Weierstrassov đak imao je solidno analitičko obrazovanje, što tu promjenu interesa čini sasvim prirodnom.

Heine je u to vrijeme (1870) uspio dokazati teorem o jednoznačnoj reprezentaciji funkcije trigonometrijskim redom. Rezultat prilično značajan već i zbog toga što su ga bezuspješno pokušavali polučiti i takvi velikani kao Dirichlet, Lipschitz i Riemann. Točnije, Heine je dokazao:

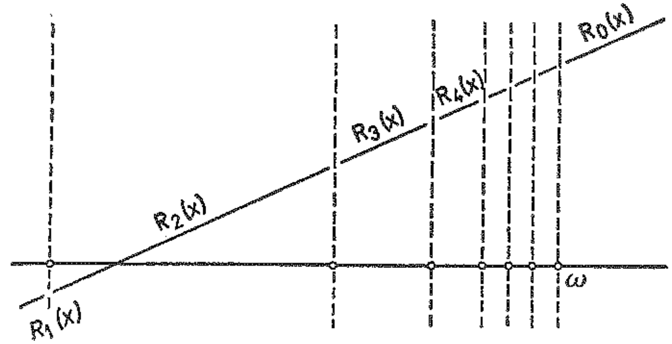
> Ako trigonometrijski red konvergira uniformno (osim, možda u konačno mnogo točaka), onda je granična funkcija jedinstveno prikazana tim redom, tj. svaki drugi trigonometrijski red s istom granicom poklapa se s ovim.

Cantor se, na Heineov nagovor, prihvatio uopćavanja tog rezultata. Prvi korak u tom nastojanju bio je pokušaj da se analogni teorem dokaže uz slabiju pretpostavku o običnoj konvergenciji trigonometrijskog reda. Trebalo je, dakle, dokazati jedinstvenost reprezentacije ne pretpostavivši uniformnu konvergenciju. Ne ulazeći u detalje, recimo toliko da je Cantor uspio dokazati to uopćenje pokazavši zavidnu ingenioznost u upotrebi standardnih analitičkih tehnika svojeg vremena. Razmatrajući tzv. Riemannovu funkciju trigonometrijskog reda (koju je Riemann uveo u svojoj *Habilitationschrift* posvećenoj trigonometrijskim redovima), Cantor je uočio da će uniformna konvergentnost reda biti posljedica obične, ako uspije dokazati linearnost Riemannove funkcije. Linearnost je uspio dokazati analizirajući specifičnosti konvergencije trigonometrijskih redova. Drugi korak Cantorova uopćavanja sastojao se u dopuštanju da trigonometrijski red (čiju jedinstvenost treba dokazati) ne konvergira u konačno mnogo točaka. Ako je tih konačno mnogo točaka raspoređeno kao na sl. 1, onda je Cantor

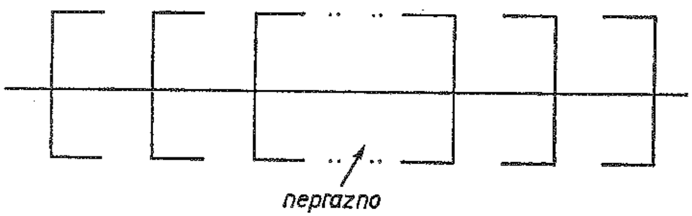


već opisanim argumentom mogao dokazati da je Riemannova funkcija u svakom od pojedinih područja određenih ovim točkama linearna. Dakle, u slučaju sa sl. 1. $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$ i $R_4(x)$ linearne su funkcije. Da bi se argument, kojim se iz linearnosti Riemannove funkcije izvodi uniformna konvergentnost reda, mogao provesti na čitavom području, trebalo je dokazati da se radi o jednoj linearnoj funkciji: u našem slučaju sa sl. 1. da je $R_1(x) = R_2(x) = R_3(x) = R_4(x)$. Cantor je to dokazao. Dakle, njegov rezultat o jedinstvenosti reprezentacije vrijedi i onda ako funkcija koju reprezentiramo trigonometrijskim

redom ima konačno mnogo singulariteta s obzirom na tu reprezentaciju. Naravno, dopustimo li i beskonačno mnogo diskretno raspoređenih singulariteta (poput cijelih brojeva na brojevnom pravcu), vrijedi isti Cantorov argument. Dapače, Cantor je uz neznatnu modifikaciju svojeg zaključivanja uspio dokazati teorem o jedinstvenoj reprezentaciji i za funkcije čiji skup singulariteta ima točku gomilanja. Naprimjer, ako je beskonačno mnogo singulariteta raspoređeno kao na sl. 2, a budući da se područje u kojem nalazimo $R_n(x)$ može konačnim intervalom izolirati od gomi-



lišta ω, za svako n, onda Cantor može ponoviti svoje zaključivanje i u ovom slučaju, pokazujući da je $R_n(x) = R_m(x)$, za svaki n i m. Prateći slijed tih uopćavanja, uviđamo da se u njima uvijek ponavlja jedan te isti analitički argument, te da je jedino što se mijenja skup singulariteta na koji se to zaključivanje primjenjuje. Tako u daljim Cantorovim uopćavanjima osnovni problem više nije analitičke prirode, jer krucijalni analitički argument s Riemannovom funkcijom uvijek ostaje isti, već osnovni problem postaje specifikacija skupa singulariteta dane funkcije na koji će se taj argument primijeniti. Zbog boljeg sagledavanja povijesnog konteksta spomenimo da je Hankel svojim principom kondenzacije singulariteta, formuliranim baš u to doba, pokazao kako se iz funkcije s određenim brojem singulariteta određenog tipa mogu konstruirati funkcije s umnoženim brojem singulariteta istoga tipa. Hankelov rad, inače potaknut Riemannovom *Habilitationschrift* o trigonometrijskim redovima, potaknuo je Cantora da uz sačuvanje jedinstvenosti reprezentacije analogno umnožava singularitete trigonometrijskih redova. Naravno, problem precizne specifikacije skupa singularnih točaka pretpostavljao je preciznu specifikaciju samog skupa točaka iz kojeg se singulariteti izdvajaju, dakle, pretpostavljao je zasnivanje linearnog područja realnih brojeva, drugim riječima zasnivanje linearnog kontinuuma. Cantor se prihvatio toga zadatka, što je rezultiralo tzv. Cantorovim zasnivanjem realnih brojeva, koje u današnjoj literaturi najlakše prepoznajemo po imenu tzv. Cantorova aksioma: Svaki niz uklopljenih segmenata realnih brojeva ima neprazni presjek (vidi sl. 3), iako je to kod Cantora teorem, dokaziv za realne brojeve koje Cantor definira kao fundamentalne nizove racionalnih brojeva (što je



i u današnjoj literaturi standardni postupak). Nakon preciznog i strogog određenja područja realnih brojeva Cantor definira pojam derivata proizvoljnog skupa realnih brojeva: Derivirani skup skupa X, oznakom X', jest skup svih graničnih točaka skupa X. Taj mu pojam omogućuje da precizno specificira, tj. strogo definira skupove prve vrste: S je skup prve vrste ako je njegova n-ta derivacija, za neki prirodni broj n, prazna ($S^{(n)} = \emptyset$). Nakon precizne specifikacije skupova prve vrste Cantor je mogao, koristeći se onim istim zaključivanjem preko lineranosti Riemannove funkcije, dokazati svoj najopćenitiji rezultat:

> Ako je skup singulariteta funkcije reprezentirane trigonometrijskim redom skup prve vrste, onda je ta reprezentacija još uvijek jedinstvena.

Taj je rezultat objavljen 1872. u radu »*Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*« (Mathematische Annalen 5). Ono zbog čega je taj rad posebno zanimljiv za našu temu i zbog čega smo

mu posvetili toliku pažnju jest već spomenuti evidentni pomak od standardnih analitičkih razmatranja onog vremena prema razmatranju i istraživanju skupova točaka linearnog kontinuuma. Upravo taj pomak smatramo danas zametkom buduće teorije skupova. Dapače Cantor u svom radu spominje i skupove druge vrste, tj. skupove kojima su sve konačne derivacije neprazne i za koje bi se mogao uvesti pojam beskonačne derivacije $S^{(\infty)}$. Naravno, postupak deriviranja moguće je nastaviti daljom produkcijom niza

$$\ldots S^{(\infty)},\ S^{(\infty+1)},\ S^{(\infty+2)}, \ldots$$

koji se temelji, prema Cantorovim riječima iz 1872, na »pojmu broja koji, bar utoliko koliko je tu razvijen, nosi u svojoj jezgri nužno i apsolutno beskonačno protezanje«. Lako je u toj opasci prepoznati specifičan zametak buduće teorije ordinala. Ipak bilo bi pretjerano reći da je 1872. rođena teorija skupova. Dijete je na putu, ali još nije rođeno.

Neprebrojivost kontinuuma, početak povijesti

Transfinitna teorija skupova ne slijedi neposredno iz Cantorova rada o trigonometrijskim redovima 1872. godine. Iako je uvođenje deriviranih skupova i ostalih Cantorovih metoda odmah prepoznato kao moćno sredstvo za primjene u analizi (među prvima su se njima koristili Ulysse Dini i Gösta Mittag-Leffler), Cantorove metode nisu dopuštale neki bitni korak prema transfinitnoj teoriji skupova. Ono što je transfinitnu teoriju skupova donijelo na svijet bilo je Cantorovo otkriće neprebrojivosti kontinuuma.

Izučavanjem svojstava kontinuuma i njegovim strogim i detaljnim zasnivanjem nije se bavio samo Cantor. Već 1858, predajući analizu na politehnici u Zürichu, Dedekind je došao do toga da realni broj poima kao *Schnit*, rez u području racionalnih brojeva, i da linearni kontinuum definira kao skup svih mogućih rezova u racionalnom području. Budući da je takvo zasnivanje realnih brojeva bilo prilično složeno i nije obećavalo neke lake primjene u analizi, Dedekind se nije potrudio da objavi svoja ciriška predavanja. To ne znači da svoj rezultat nije smatrao značajnim. Dapače, u njegovim je spisima brižljivo zapisan datum

24. studenoga 1858. kao dan kada je došao »... do istinske definicije kontinuuma...«. Četrnaest godina kasnije, pročitavši Heineov prikaz Cantorove teorije iracionalnih brojeva u njegovim *Die Elemente der Functionenlehre*, a i izvorni Cantorov rad iz 1872, Dedekind smatra da je došlo vrijeme da se objavi njegova teorija iracionalnih brojeva i kontinuuma, koju on smatra jednostavnijom i jasnijom od Cantorove, iako je njoj ekvivalentna. Tako 1872. dolazi do objavljivanja slavne Dedekindove monografije *Stetigkeit und Irrationalzahlen*. Dedekind (kao i Cantor u svojem radu iz 1872) smatra da su priroda graničnih procesa i neprekidnosti i aritmetička teorija kontinuuma realnih brojeva nerazdvojno povezane. U 3. odjeljku svoje monografije on će napisati da je »pravac *l* beskonačno bogatiji točkama no što je područje *R* racionalnih brojeva brojevima«. U toj tvrdnji dio je tajne kontinuuma, i mada Dedekind nije imao baš nikakvu stvarnu ideju o tom bogatstvu kontinuuma, on je svojom tvrdnjom upozorio na onu njegovu značajku koja je već bila osnovnom Cantorovom preokupacijom.

U bogatoj i prijateljskoj prepisci Cantora i Dedekinda, započetoj u to vrijeme, nalazimo Cantorovo pismo (otposlano 29. studenoga 1873), u kojem Cantor osnovni problem postavlja u jasnoj matematičkoj formulaciji, koja omogućava dokazivanje ili opovrgavanje teze o »beskonačno bogatijem kontinuumu«:

> Uzmi kolekciju svih pozitivnih cijelih brojeva n i označi je sa (n); zatim zamisli kolekciju svih realnih brojeva x i označi je sa (x); pitanje je, jednostavno, mogu li se (n) i (x) tako pridružiti da svakom individuumu jedne kolekcije odgovara jedan i samo jedan individuum druge? Na prvi bi se pogled moglo odgovoriti ne, to nije moguće, jer (n) je diskretan, a (x) tvori kontinuum; ali ništa se ne postiže tom primjedbom, i mada sam sklon smatrati da (n) i (x) ne dopuštaju takvo pridruženje, ne mogu otkriti razlog zbog kojeg je to tako (a pridajem mu veliku važnost), iako je taj razlog, možda, vrlo jednostavan.

Cantorova je opaska namjestu, jer mnogi bi možda primijetili i da gusto raspoređeni racionalni i algebarski brojevi ne mogu biti na isti način pridruženi kolekciji (n), iako to nije točno. Kako dakle karakterizirati tu važnu razliku između racionalnih i realnih brojeva. Područje racio-

nalnih brojeva je gusto (između svaka dva uvijek nalazimo treći), ali ono ipak nije neprekinuto. Možda baš zato što je racionalnih brojeva *manje* nego realnih. Cantor je prvo uočio da racionalnih i algebarskih brojeva ima koliko i prirodnih, sve su to beskonačnosti iste veličine, a onda se pojavila plodonosna misao da je tajna kontinuuma u tome što realnih brojeva ima više. U svojem pismu od 2. prosinca 1873. on podsjeća Dedekinda da sâm već godinama traga za pravom prirodom kontinuuma, bezuspješno pokušavajući da dokaže njegovu neprebrojivost. Čak je pomišljao na to da mu možda i izmiče neki vrlo jednostavan argument, ali sada kada je iz Dedekindova pisma saznao da ni on ne uspijeva dokazati neprebrojivost, jasno vidi da je riječ o objektivno teškom problemu. Iznenada, početkom prosinca 1873, Cantor uspijeva dokazati neprebrojivost kontinuuma.

Dokaz je objavljen početkom 1874. u članku čudnog naslova: **Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reallen algebraischen Zahlen*** *(Journal für die reine und angewandte Mathematik, 77)*. Naime, naslovom je istaknuta prebrojivost područja algebarskih brojeva, dok se neprebrojivost kontinuuma u naslovu ne spominje, iako je potpuno sigurno da je Cantor upravo taj rezultat smatrao najznačajnijim jer je prebrojivost algebarskog područja dokazao već prije nekoliko godina i nije smatrao potrebnim objaviti taj rezultat sve do ovoga trenutka. Zašto, onda, taj naslov?

Nova, »zrnasta« teorija kontinuuma čiji su konstitutivni elementi točke, koje se ne mogu efektivno konstruirati pa je njihovo postojanje ustvrđeno mimo njihova konstruiranja, naišla je na velik otpor konstruktivista. Naročito joj se suprotstavljao tada vrlo utjecajni Leopold Kronecker, koji je javno dovodio u pitanje pojam iracionalnog broja i u vezi s njim smislenost Bolzano-Weierstrassova teorema. Kronecker je bio izdavač Crelleova Journala i Cantor se plašio da bi zbog nekonstruktivnih metoda njegov rad mogao biti odbijen. (Ta je bojazan bila opravdana. Kronecker je već ranije nagovarao Heinea da ne objavi svoj »Über trigonometrische Reihen«, no on ga je ipak poslao C. W. Borschardtu da ga objavi u Cralleovu Journalu.

* »O jednom svojstvu pojma svih realnih algebarskih brojeva«

Međutim, Kronecker je članak »spremio u ladicu«, odakle ga je izvukao tek osobni Heineov dolazak u Berlin.) Zato se Cantor odlučio na neupadljiv naslov, pa je čak i čitav članak koncipirao kao rad o algebarskim brojevima. Neprebrojivost kontinuuma spominje se tek kao uzgredni rezultat koji omogućava primjenu osnovnog rezultata iz naslova: osnovno je da je algebarsko područje prebrojivo, a jedna je zgodna primjena toga glavnog rezultata da odavde (uz neprebrojivost realnog područja koju usput dokazujemo) slijedi postojanje transcedentnih brojeva; no to je već poznati Liouvilleov rezultat. Kao da Cantor želi da njegov rezultat o neprebrojivosti dobije patinu nečeg poznatog. Dapače, u samom dokazu neprebrojivosti, koji ćemo uskoro opisati, posebno pazi da ne naglasi upotrebu principa kontinuiranosti (danas bismo rekli Cantorova aksioma), iako je jasno da je to ključni korak dokaza. Da je stvarno riječ o skrivanju, saznajemo iz prepiske s Dedekindom. Dedekind je preporučio da se naglasi ta ključna uloga principa kontinuiranosti, ali Cantor to odbija učiniti zbog već spomenutih razloga.

Dokaz neprebrojivosti, koji nalazimo u Cantorovu pismu Dedekindu, nešto je složeniji od objavljenoga u članku »čudnoga naslova«. Naime, Cantor je objavio Dedekindovo pojednostavljenje svojega dokaza. Ovdje ćemo prikazati osnovne ideje obaju dokaza.

Cantor (u svojem pismu Dedekindu, 7. prosinca 1873) polazi od pretpostavke da se kontinuum realnih brojeva može prebrojiti, tj. da se oni mogu poredati u niz

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \ldots$$

u kojem se pojavljuje svaki realni broj. U prvom koraku svoje analize Cantor iz početnog niza odstranjuje jedan beskonačni niz brojeva, tako da najprije odstrani $\omega_1 = \omega_1^1$, zatim prvi sljedeći broj u početnom nizu koji je veći od ω_1^1, nazovimo ga ω_1^2, pa prvi sljedeći koji je veći od ω_1^2, nazovimo ga ω_1^3 itd. Tako je generiran prvi uzlazni niz

(1) $\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \ldots$

Zatim se isti postupak odstranjivanja ponavlja s nizom brojeva preostalih u početnom nizu (nakon odstranjivanja niza (1)). Tako dobivamo niz

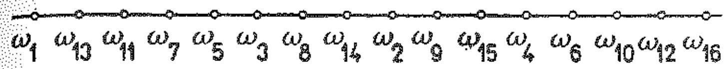
(2) $\omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \ldots$

Postupak nastavljamo, generirajući niz uzlaznih nizova, koji obuhvaća sve realne brojeve početnog niza:

(3) $\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3, \ldots$

(4) $\omega_4^1, \omega_4^2, \omega_4^3, \ldots$ itd.

Naprimjer, ako je prvih 16 brojeva početnog niza smješteno na realnom pravcu ovako:



onda prvih šest (odstranjenih) uzlaznih nizova počinje ovako:

(1) $\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_{10}, \omega_{12}, \omega_{16}, \ldots$

(2) $\omega_3, \omega_8, \omega_9, \omega_{15}, \ldots$

(3) $\omega_5, \omega_{14}, \ldots$

(4) $\omega_7, \ldots$

(5) $\omega_{11}, \ldots$

(6) $\omega_{13}, \ldots$

U sljedećem koraku svoje analize Cantor uočava segment $[\alpha, \beta]$, koji je smješten između bilo koja dva člana niza (1). Taj segment očito ne sadrži ni jedan član uzlaznog niza (1). Cantor zatim zaključuje: Ako nijedan član preostalih nizova nije sadržan u $[\alpha, \beta]$, onda se elementi iz $[\alpha, \beta]$ ne nalaze u početnom nizu i time je oborena pretpostavka da početni niz sadrži sve realne brojeve, tj. dokazana je neprebrojivost kontinuuma. Ako to nije slučaj, postoji prvi takav niz (k) čiji su neki članovi sadržani u $[\alpha, \beta]$. Budući da je niz (k) uzlazan, lako je naći segment $[\alpha_1, \beta_1]$ sadržan u $[\alpha, \beta]$, koji ne sadrži nijedan član niza (k). Sada se opet otvaraju dvije mogućnosti: ili nijedan član preostalih nizova $(k+1)$, $(k+2)$, ... nije sadržan u $[\alpha_1, \beta_1]$, odakle opet slijedi neprebrojivost; ili postoji prvi takav niz (k_1) čiji su neki članovi sadržani u $[\alpha_1, \beta_1]$, no tada je opet lako naći segment $[\alpha_2, \beta_2]$ sadržan u $[\alpha_1, \beta_1]$, koji ne sadrži nijedan član niza (k_1). Ponavljanjem tog postupka Cantor proizvodi beskonačni niz uklopljenih segmenata

$$[\alpha_1, \beta_1]; [\alpha_2, \beta_2]; [\alpha_3, \beta_3]; \ldots$$

čiji lijevi krajevi čine uzlazni niz, omeđen gornjom međom α,

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha,$$

a desni krajevi čine mu silazni niz, omeđen donjom međom β,

$$\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \ldots > \beta.$$

Dakle, prvi niz određuje granicu $\alpha_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, a drugi niz $\beta_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$. Ako je $\alpha_\infty = \beta_\infty$, Cantor tu zajedničku granicu mora naći u početnom nizu kao neki ω_ϱ, a ukoliko je $\alpha_\infty < \beta_\infty$, onda se bilo koji, specificirani element segmenta $[\alpha_\infty, \beta_\infty]$, mora naći u početnom nizu kao neki ω_ϱ. Međutim, prema konstrukciji uklopljenog niza segmenta svaki je član početnog niza $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ isključen iz svih segmenata sadržanih u $[\alpha_n, \beta_n]$, za dovoljno velik n, što znači da ω_ϱ nije uključen u početni niz. To obara početnu pretpostavku o prebrojivosti kontinuuma i dokazuje njegovu neprebrojivost.

Dva dana kasnije Cantor uviđa da je njegov dokaz nepotrebno zakompliciran uzlaznim nizovima (1), (2), (3),... pa samo kratko obavještava Dedekinda (u novom pismu 9. prosinca 1873) da se argument može provesti bez te komplikacije. Dedekind je takvo pojednostavljenje već našao i poslao ga Cantoru u pismu datiranom 8. prosinca 1873. Taj pojednostavljeni dokaz nalazimo u radu objavljenom u Cralleovu Journalu. I u njemu se polazi od pretpostavke da su svi realni brojevi poredani u niz

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$$

Dedekind proizvodi niz uklopljenih segmenata na sljedeći način. Segment $[\alpha, \beta]$ je $[\omega_1, \omega_2]$ (uz pretpostavku da je $\omega_1 < \omega_2$, inače $[\alpha, \beta] = [\omega_2, \omega_1]$). Segment $[\alpha_1, \beta_1]$ čini

prvi sljedeći par $\omega_{i_1}, \omega_{j_1}$ početnoga niza, koji ima svojstvo da je $[\omega_{i_1}, \omega_{j_1}] \subset [\alpha, \beta]$. Segment $[\alpha_2, \beta_2]$ čini prvi sljedeći par $\omega_{i_2}, \omega_{j_2}$ početnoga niza, koji ima svojstvo da je $[\omega_{i_2}, \omega_{j_2}] \subset [\alpha_1, \beta_1]$. I tako dalje. Proizvedeni uklopljeni niz segmenata

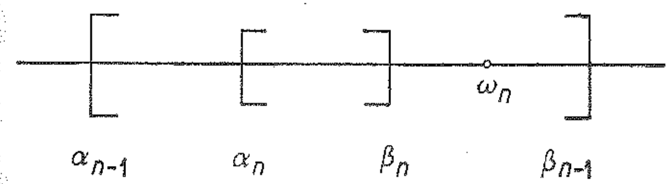
$$[\alpha, \beta]; [\alpha_1, \beta_1]; [\alpha_2, \beta_2]; \ldots$$

može biti konačan, u kojem slučaju je u posljednjem segmentu $[\alpha_n, \beta_n]$ još najviše jedan član ostatka početnog niza $\omega_{j_n}, \omega_{j_n+1}, \omega_{j_n+2}, \ldots$. No onda, beskonačno mnogo elemenata segmenta $[\alpha_n, \beta_n]$ nije obuhvaćeno početnim nizom, tj. kontinuum nije prebrojiv. Ako je uklopljeni niz segmenata beskonačan, onda postoji $\alpha_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ (jer je niz $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ uzlazan i odozgo omeđen sa α) i postoji $\beta_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$ (jer je niz $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ silazan i odozdo omeđen sa β). Agrument sa α_∞ i β_∞ sada je jednak prethodnom Cantorovu argumentu.

Još jedna varijanta tog istog dokaza toliko je jednostavna da je gotovo nevjerojatno da je ne nalazimo ni u jednom udžbeniku koji se bavi tom materijom. Evo te varijante. Neka je

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$$

bilo koji niz točaka linearnog kontinuuma. U prvom koraku odaberimo segment $[\alpha_1, \beta_1]$ koji ne sadrži točku ω_1. U drugom koraku odaberemo segment $[\alpha_2, \beta_2]$ koji je sadržan u segmentu $[\alpha_1, \beta_1]$, ali koji ne sadrži točku ω_2. I tako dalje. Jasno je da za svaki segment $[\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]$ i svaku točku ω_n možemo naći segment $[\alpha_n, \beta_n]$ koji je sadržan u prethodnom, a koji ne sadrži točku ω_n.



Tako dobivamo niz uklopljenih segmenata

$$[\alpha_1, \beta_1]; [\alpha_2, \beta_2]; [\alpha_3, \beta_3]; \ldots.$$

Prema Dedekindovu načelu neprekinutosti ili Cantorovu aksiomu, postoji bar jedna točka η koja je sadržana u svim segmentima. S druge strane, prema konstrukciji niza segmenata, $\omega_n \notin [\alpha_n, \beta_n]$, što znači da se točka η razlikuje od svake točke početnog niza $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$. Dakle, sve točke linearnog kontinuuma nisu nabrojene u tom nizu. Budući da isti argument vrijedi za svaki niz, zaključujemo da je kontinuum neprebrojiv.

Dokazavši neprebrojivost kontinuuma, Cantor je riješio dio njegove tajne. No, on je tim dokazom dao i prvi primjer razlikovanja beskonačnosti. Tu se prvi put egzaktno pokazalo da beskonačni skupovi mogu biti nejednakih veličina. Ta je činjenica, sama po sebi, *rasion d'etre* transfinitne teorije skupova jer se njome jasno pokazuje da postoje distinkcije koje ta teorija treba da istraži. Ipak, Cantorov glavni interes, u to vrijeme, još je uvijek primjena njegovih novih metoda na dalje istraživanje kontinuuma. Pojam dimenzije kontinuuma, bitan za osnovnu klasifikaciju kontinuuma, Cantor će pokušati objasniti razlikom u broju točaka. Time bi intuitivni pojam dimenzije bio objašnjen i egzaktno matematički definiran, a osim toga nastavilo bi se raslojavanje beskonačnosti, koje je osnovni preduvjet razvitka teorije skupova.

Dedekind će 5. siječnja 1874. primiti još jedno Cantorovo pismo u kojem je formuliran novi problem:

> Je li moguće površinu (naprimjer kvadrat s njegovim stranicama) preslikati na krivulju (naprimjer dužinu s njenim krajevima) tako da svakoj točki površine odgovara jedna točka krivulje i obratno, da svakoj točki krivulje odgovara jedna točka površine?

Cantor dalje primjećuje da je problem vjerojatno težak, iako su mnogi skloni reći da je očiti odgovor »ne« i da je tu svaki dokaz suvišan. Ustvari, kada je Cantor, prilikom jedne posjete Berlinu u proljeće 1874, u krugu svojih prijatelja matematičara spomenuo taj problem, oni su bili zapanjeni apsurdnošću postavljenog pitanja. Bili su uvjereni da se dvije nezavisne varijable ne mogu reducirati na jednu i da je to evidentno bez ikakva dokaza. I Cantor je vjerovao u nemogućnost te redukcije, s tom razlikom što je smatrao da je treba dokazati. Naravno, da bi bilo dokazivanje, bilo opovrgavanje te očiglednosti uopće bilo moguće, trebalo je

jasnim matematičkim pojmovima objasniti što znači »reducirati dvije nezavisne varijable na jednu«. Svojom formulacijom problema Cantor je učinio upravo to. Točke linearnog kontinuuma, krivulje, mogu se adresirati realnim brojevima, dakle jednom realnom varijablom, dok se točke dvodimenzionalnog kontinuuma, površine, mogu adresirati parovima realnih brojeva, dakle s dvije realne varijable. To što je moguće, većina matematičara (bez ikakva dokaza) smatra, nužnim, držeći da su za adresiranje točaka dvodimenzionalnog kontinuuma nužno potrebni parovi realnih brojeva, a da za to nisu dovoljni sami realni brojevi. Na kraju krajeva upravo se zato dvodimenzionalni kontinuum i zove dvo-dimenzionalnim. Cantor ne sumnja u tu očiglednu činjenicu, on samo misli da je treba dokazati, i to tako da dokaže nemogućnost 1—1 pridruženja točaka linearnog i dvodimenzionalnog kontinuuma, tj. realnih brojeva i njihovih parova.

Tri i pol godine protekle su od formulacije problema do njegova rješenja. A rješenje je bilo zapanjujuće. Apsurdno i očigledno nemoguće 1—1 pridruženje točaka linearnog i dvodimenzionalnog (čak i svakog konačno-dimenzionalnog) kontinuuma jest moguće. Točke svake površine, točke čitavog trodimenzionalnog prostora, čak i točke bilo kojeg konačno-dimenzionalnog prostora moderne geometrije Cantorova doba, mogu se adresirati realnim brojevima; za to nam nisu nužno potrebni ni parovi, ni trojke, ni n-torke realnih brojeva. Dvije, tri, n-varijabli mogu se reducirati na jednu jedinu. Dokaz te tvrdnje Cantor će skicirati u pismu poslanom Dedekindu 29. lipnja 1877, popratívši ga usklikom *Je le vois, mais je ne le crois pas*!* Definicija dimenzije kontinuuma, kao broja realnih varijabli potrebnih za njegov opis (tj. za adresiranje svih njegovih točaka), postaje besmislenom. Postaje li time i sam pojam dimenzije besmislen? Ruše li se sami temelji modernog, Riemannova poimanja geometrije? Vratit ćemo se tim pitanjima nakon prikaza Cantorova dokaza.

Cantorov je dokaz savršeno jednostavan. Sve realne brojeve iz intervala [0, 1] (oni adresiraju točke jedinične dužine, dok njihovi parovi adresiraju točke jediničnog kvadrata) možemo prikazati njihovim decimalnim razvojima.

* Vidim, ali ne vjerujem.

Naprimjer

$$a = 0 \,.\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots$$

$$b = 0 \,.\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots \text{ itd.}$$

Pridruženje realnih brojeva njihovim parovima Cantor je definirao, koristeći se decimalnim razvojima, na sljedeći način. Paru realnih brojeva (a, b), s gore navedenim decimalnim razvojima, pridružio je realni broj c definiran ovim decimalnim razvojem:

$$c = 0 \,.\, a_1\, b_1\, a_2\, b_2\, a_3\, b_3 \ldots$$

Tim je pravilom svakom paru realnih brojeva pridružen realni broj, a očito je da se iz svakog broja može rekonstruirati par kojemu je taj broj pridružen.

Pročitavši Cantorov dokaz, Dedekind je u njemu našao grešku, prouzrokovanu time što jedan te isti realni broj može imati dva decimalna razvoja. Naprimjer, 0.5000... = = 0.4999..., pa broju 1/2, ovisno o odabranom razvoju, može biti produžen par (1/2, 0) ili par (1/2, 1), a paru (1/2, 0), opet ovisno o odabranom razvoju, možemo pridružiti broj 1/2 ili broj 9/22. Ograničimo li se na interval (0, 1] i definiramo li pridruženje isključivo preko razvoja »bez nula na kraju«, suočit ćemo se s novim problemom. Broj koji počevši od nekog decimalnog mjesta na svakom parnom mjestu decimalnog razvoja ima znamenku 0 neće biti pridružen ni jednom paru brojeva. Naprimjer, broj 0.11101010... neće biti pridružen ni jednom paru brojeva. Cantor je grešku ispravio u sljedećih nekoliko dana, ali korektni dokaz jednakobrojnosti kontinuuma različitih dimenzija nije bio tako savršeno jednostavan kao prvi, pogrešni. Možda je najjednostavniji način da se korektno dokaže Cantorov rezultat taj da se svakom broju c pridružuje par brojeva (a, b), pomoću **grupa znamenaka** koje završavaju znamenkom $\neq 0$ i čije su sve prethodnice znamenke $= 0$ (uključujući i pojedinačne znamenke $\neq 0$), a ne pomoću pojedinačnih znamenaka kao u Cantorovu nekorektnom dokazu. Naprimjer broju

$$c = 0.3\,|\,5\,|\,07\,|\,9\,|\,001\,|\,2\,|\,6\,|\,0004\,|\ldots$$

pridružit ćemo par brojeva: 0.3070016... i 0.5920004....

Lako se vidi da je to pridruženje 1 — 1 pridruženje realnih brojeva i njihovih parova.

Vratimo se problemima vezanim uz pojam dimenzije, koje je pokrenuo Cantorov dokaz. Postaje li pojam dimenzije besmislenim? Izgleda da je Cantor, na trenutak, pomislio baš to. Na istoj dopisnici, kojom Dedekinda obavještava da je ispravio grešku u prvoj jednostavnoj varijanti dokaza, on upozorava da je do sada, kao i svi ostali matematičari, pretpostavljao da su točke n-dimenzionalnog kontinuuma determinirane sa n nezavisnih realnih varijabli. Smatra da njegovo novo otkriće pokazuje »kako su nedopustive sve filozofske i matematičke dedukcije koje se koriste tom pogrešnom pretpostavkom«. U svojem odgovoru 2. srpnja 1877. Dedekind čestita Cantoru na izvanrednom i značajnom rezultatu, ali dodaje da se ne može složiti s opovrgavanjem svih filozofskih i mateamtičkih radova koji pretpostavljaju invarijantnost dimenzije. Uvjeren je da je »dimenzija kontinuiranog prostora njegova prva i najvažnija invarijanta i, kada je o tome riječ, on mora stati u obranu svih ranijih autora.« Uostalom, dodatna i isto tako univerzalno prihvaćena pretpostavka (kao i ona o n varijabli) jest ta da kontinuitet ima ključnu ulogu u određenju invarijantnosti dimenzije. Dedekind je tu drugu pretpostavku (prvi!) eksplicitno formulirao:

> Ako je moguće obostrano jednoznačno pridruženje točaka kontinuiranog područja A, dimenzije a, i kontinuiranog područja B, dimenzije b, onda je to pridruženje, nužno, potpuno diskontinuirano, ako su a i b različiti.

Dva dana kasnije, 4. srpnja 1877, Cantor objašnjava da se radi o nesporazumu. Invarijantnost dimenzije on nikada nije dovodio u pitanje. Ne osuđuje prijašnje autore zato što pretpostavljaju invarijantnost dimenzije, nego zato što pretpostavljaju »determiniranost broja nezavisnih koordinata, i što taj broj smatraju brojem dimenzija«. Naprotiv, kaže Cantor

> ... ako razmotrimo pojam koordinata sasvim općenito, bez ikakvih pretpostavki o prirodi upletenih funkcija, broj nezavisnih, jedinstvenih i potpunih koordinata može biti, kao što sam pokazao, bilo koji broj.

Naravno, Cantor se slaže s Dedekindom da je tajna u **diskontinuiranosti** pridruženja područja s različitim dimenzijama. Ali i pretpostavku da kontinuirano pridruženje nije moguće treba dokazati. Cantor će to pokušati u *Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten (Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg Augustus Universität zu Götingen, str. 127—135, 1879)*. Nažalost bezuspješno, dokaz je bio pogrešan. Korektan dokaz nemogućnosti obostrano kontinuiranog i obostrano jednoznačnog pridruženja 1-dimenzionalnog i ($n \geqslant 2$)-dimenzionalnog kontinuuma dao je Lüroth 1878. Uspio je dokazati isti rezultat za 2-dimenzionalni i ($n \geqslant 3$)-dimenzionalni kontinuum. Taj je dokaz bio toliko složen da je Lüroth odustao od daljeg istraživanja. Tek je razvoj moderne topologije omogućio da L. E. J. Brouwer 1911. riješi problem za proizvoljne vrijednosti dimenzija.

Jedna od posljedica Cantorova rezultata, značajna za transfinitnu teoriju skupova, bila je ta da se beskonačnost nije dalje raslojavala kako je to Cantor očekivao. Dužina i kvadrat sadrže jednaki broj točaka. Transfinitna teorija skupova ne obogaćuje se distinkcijom u dimenziji. Naravno, pored razlikovanja beskonačnosti, problem kontinuiranosti, tako jasno istaknut i promaknut u prvi plan novim Cantorovim rezultatima, ostaje i dalje glavnom temom njegovih istraživanja.

Transfinitna aritmetika. Beskonačno brojenje

Između 1879. i 1884. Cantor je objavio seriju od šest članaka, pod zajedničkim naslovom *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, u kojoj je izložio osnovne elemente svoje nove teorije skupova. U prva četiri članka sustavno su izloženi matematički rezultati o linearnim skupovima točaka do kojih je Cantor došao prethodnih godina. (Naime, dokazavši svoj rezultat iz 1878. o jednakobrojnosti kontinuiranih područja različitih dimenzija, Cantor je mogao zaključiti da se istraživanje skupova točaka može ograničiti na kontinuirano područje dimenzije jedan, tj. na realni pravac.) Tokom 1883. Cantor je shvatio da njegova nova teorija beskonačnog zahtijeva temeljniju i razrađeniju prezentaciju (pa i obranu od mnogih skeptika) no što su je nudila prva četiri članka. Peti članak bio je zamišljen upravo tako da

se suoči s filozofskim i matematičkim problemima koje je pokrenula nova teorija transfinitnih skupova (taj članak između ostaloga sadrži i Cantorove odgovore na mnoge prigovore, koji su se uglavnom odnosili na njegovu aktualnu interpretaciju beskonačnosti). Cantor je taj članak smatrao dovoljno značajnim da kod svojeg izdavača, B. G. Teubnerea, uredi da se izda kao posebna monografija pod naslovom *Grundlagen einer allgemeinen Manigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen.** Za dalji razvoj teorije skupova najznačajniji Cantorov doprinos u toj monografiji jest uvođenje transfinitnih rednih brojeva *(Anzahlen)*, kao autonomnog i legitimnog proširenja područja prirodnih brojeva. To će proširenje omogućiti Cantoru da precizno definira pojam moći *(Mächtigkeit)* skupa, te da se posveti općem problemu moći i posebnom problemu moći kontinuuma.

Opći problem moći sastojao se u iznalaženju računa moći, tj. računa apsolutnih mjera adekvatnih za opise veličina proizvoljnih skupova točaka. Do 1878. Cantor je potpuno usvojio načelo 1 — 1 korespondencije kao relativnu mjeru veličine skupova (načelo koje su Bolzano i drugi ranije odbacili), a implicitno je prihvatio ideju da beskonačni skupovi imaju apsolutnu mjeru, koju je zvao njihovom moći *(Mächtigkeit)*. Time je otvorio mnoga pitanja. Kako reprezentirati beskonačne moći? Je li moguće ustrojiti skalu apsolutnih mjera beskonačnih skupova i njihovu efektivnu aritmetiku, analognu skali i aritmetici konačnih brojeva koji su mjere konačnih skupova? Koliko moći uopće postoji?

Svojim prethodnim radovima Cantor je bar djelomično odgovorio na posljednje pitanje. Dokazao je da svi euklidski intervali, bez obzira na dimenziju, imaju istu moć. Taj iznenađujući rezultat pokazao je da su moći euklidskih skupova točaka reprezentirane već u linearnom kontinuumu. Osim toga je dokazao da postoje bar dvije različite moći među beskonačnim linearnim skupovima točaka. Dapače, dokazao je i to da skup algebarskih (dakle i racionalnih) brojeva ima moć niza prirodnih brojeva. To je Cantora moglo navesti na misao da u euklidskim prostorima nalazimo »vrlo malo« različitih moći. Tako je 1878. postavio hipotezu da nalazimo svega dvije: »Beskonačni linearni skup

* »Zasnivanje opće teorije skupova. Matematičko filozofski pokušaj učenja o beskonačnom.«

točaka ima moć skupa prirodnih brojeva ili pak moć kontinuuma.« Bila je to prva verzija slavne Cantorove hipoteze kontinuuma. Želja da dokaže tu hipotezu bila je glavni kreativni poticaj Cantorovu daljem radu, pa i razlog da se bavi općim problemom moći. Definirajući aritmetičku skalu beskonačnih moći, možda će u njoj odrediti mjesto moći kontinuuma i tako dokazati ili opovrći svoju hipotezu; dokazati je ako je to mjesto drugo, opovrći je ako nije.

Uostalom konstitutivni element Cantorove koncepcije beskonačnosti bio je taj da se transfinitni skupovi mogu tretirati kvantitativno (tj. numerički) i da brojenje u beskonačnom području treba biti analogno brojenju u konačnom. No to je značilo da moći, ako su uistinu kardinalni brojevi, moraju biti komparabilne, tj. linearno uređene. Monografijom iz 1883. Cantor rješava upravo taj problem, i to u duhu moderne, fonnojmanovske, ordinalne teorije kardinalnih brojeva. On definira *Anzahlen*, transfinitne redne brojeve, i pretpostavlja kao evidentnu istinu (koju će dokazati tek Zermelo uz pomoć aksioma izbora) da njima može prebrojiti svaki skup. To mu omogućava da dokaže usporedivost svaka dva skupa. Osim toga, definicija brojevnih klasa kao skupova ordinala istog kardinaliteta omogućava mu da dokaže da je kardinalitet svake brojevne klase veći od kardinaliteta pojedinih ordinala koji je sačinjavaju. To dokazuje da postoji po volji mnogo kardinalnih brojeva. Pojavu novih kardinala, koju povećanje dimenzije nije omogućilo u euklidskom području, omogućile su brojevne klase u području ordinalnih brojeva.

Te su ideje dovele teoriju transfinitnih skupova do pune zrelosti. Njen dalji razvoj uglavnom je poznat i njime se više nećemo baviti. Spomenimo samo da je Cantorov ordinalni pristup kardinalima u jednoj fazi zapostavljen, da bi ga u novije doba Von Neumann opet inaugurirao, i danas je opće prihvaćen (pokazalo se čak da je nezaobilazan, tj. da je implicite bio prisutan i u prethodnoj fazi).

Cantorov dijagonalni postupak

Cantorova teorija iz 1883. temeljila se na nekoliko nedokazanih pretpostavki. Usporedivost skupova temeljila se na nedokazanoj mogućnosti njihove ordinalne reprezentacije (tj. mogućnosti njihova dobrog uređenja), a egzistencija skupova po volji velikih moći temeljila se na definiciji brojevnih klasa, koju Cantor nije općenito formulirao. On je definirao samo I. i II. brojevnu klasu, te dodao da je tako moguće definirati i ostale (no »tako« sigurno nije moguće definirati granične klase). Osjećajući te nedostatke, već je sam Cantor počeo razvijati teoriju kardinalnih brojeva nezavisnu (koliko je to moguće) od teorije ordinalnih brojeva. Osvrnut ćemo se samo na jedan moment tog razvoja, na slavni Cantorov dijagonalni postupak kojim se dokazuje egzistencija po volji velikih kardinalnih brojeva.

Cantor je svoj novi dokaz izložio 1891. na prvom sastanku novoosnovanog *Deutsche Mathematiker Vereinigung*. Svoje je izlaganje započeo opaskom da je »...moguć mnogo jednostavniji dokaz tog teorema (teorema o neprebrojivosti iz 1874), koji je nezavisan od razmatranja iracionalnih brojeva«. Njegov osnovni interes zapravo više i nije neprebrojivost realnih brojeva, već naprotiv jedan mnogo impresivniji zaključak:

Taj dokaz nije značajan samo zbog svoje jednostavnosti, već zbog toga što se načelo koje on slijedi može neposredno proširiti do dokaza općeg teorema da moći dobro definiranih skupova nemaju maksimuma, to jest da se svaki skup L može zamijeniti drugim skupom M čija je moć veća od moći skupa L (*Über eine elementare Frage der Manigfaltigkeitslehre, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung I, 1891*).

Spomenuto načelo jest slavni Cantorov postupak dijagonalizacije, u ovom slučaju preko nizova s dvije vrijednosti m i w. Naime, Cantor je razmotrio skup M elemenata $E = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ takvih da je svaki x_n jednak m ili w. Kao primjere dao je elemente

$$E' = (m, m, m, m, \ldots)$$
$$E'' = (w, w, w, w, \ldots)$$
$$E'' = (m, w, m, w, \ldots).$$

Zatim je ustvrdio da skup M svih takvih elemenata nije prebrojiv, dokazujući to na sljedeći način. Za svaki niz elemenata

$$\begin{aligned} &E_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, \ldots) \\ &\vdots \\ &E_n = (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots, a_{nn}, \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

definirao je element $E_0 = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots)$, zahtjevom $b_n \neq a_{nn}$, za koji je mogao dokazati da je različit od svakog elementa E_n. Tako je dokazao da nijedan niz elemenata iz M ne obuhvaća sve elemente skupa M, tj. da je skup M neprebrojiv.

Kao još jedan primjer primjene istog načela Cantor dalje razmatra linearni kontinuum L, realnih brojeva iz intervala $(0, 1)$, i skup M svih funkcija $f(x)$ definiranih za $x \in (0, 1)$, s dvije moguće vrijednosti 0 i 1. Bilo koja 1 — 1 korespondencija skupova L i M pridruživala bi svakom $z \in L$ funkciju $f_z(x) \in M$. Za svaku takvu 1 — 1 korespondenciju Cantor može definirati funkciju $g(x) \in M$, zahtjevom $g(x) \neq f_x(x)$, za koju može dokazati da je različita od svake funkcije $f_z(x)$ korespondirane nekom elementu $z \in L$. Naime $g(x)$ se razlikuje od $f_z(x)$ baš na argumentu z jer je $g(z)$ definirano tako da je $g(z) \neq f_z(z)$. Tako je dokazao da nijedna korespondencija skupa L i skupa M ne obuhvaća sve elemente skupa M, tj. moć skupa M veća je od moći skupa L (očito je naime da skup L jest u 1 — 1 korespondenciji s nekim podskupom od M, npr. korespondiranjem svakog $x \in L$ funkciji $f_x \in M$ definiranoj sa $f_x(z) = 0$ za $x \neq z$ i $f_x(x) = 1$). Budući da su elementi skupa M karakteristične funkcije podskupova skupa L, Cantor je dokazao da je moć partitivnog skupa od L veća od moći samoga skupa L. Očito je da se isti postupak može provesti za svaki skup L, pa Cantor neposredno zaključuje da nema skupa s najvećom moći (njegov partitivni skup uvijek ima veću moć). Tako je konačno i bez ostatka dokazano da se beskonačnost beskonačno raslojava.

Cantorov novi, dijagonalni dokaz neprebrojivosti i njegovo poopćenje imali su, a i danas imaju, mnoge zanimljive primjene, pa i različite interpretacije. Spomenut ćemo jednu primjenu i jednu značajnu interpretaciju različitu od Cantorove.

Cantorovim dijagonalnim postupkom dokazujemo da nijedna funkcija f definirana na S ne može primiti svaku vrijednost iz partitivnog skupa $\mathscr{P}(S)$, i to tako da za svaki f definiramo vrijednost C iz $\mathscr{P}(S)$ koju f ne prima. Tu vrijednost definiramo dijagonalno

$$C = \{x \in S : x \notin f(x)\}.$$

Očito je da ne postoji $a \in S$ takav da je $f(a) = C$, jer bi tada $a \in C$, tj. $a \notin f(a)$, vrijedilo onda i samo onda kada bi

vrijedilo $a \in f(a)$. Primjena tog zaključka, o kojoj ćemo nešto reći, je Russellova primjena iz 1902. (objavljena 1903. u Russellovim *»The principles of mathematics«*). Russell je uočio da Cantorov zaključak ne može vrijediti za univerzalni skup U svih skupova jer on kao skup svih skupova mora sadržavati i sve svoje podskupove, dakle svoj partitivni skup, što povlači da najjednostavnija funkcija definirana na U, identitet, prima svaku vrijednost u $\mathscr{P}(U) \subseteq U$. Ali Cantor je dokazao da za svaku funkciju može naći C koji nije njena vrijednost. U tom bi slučaju ta iznimka, nazovimo je u Russellovu čast R, bila definirana ovako:

$$R = \{x \in U : x \notin x\}.$$

No sada je jasno zašto ta iznimka ne može potvrditi Cantorov opći zaključak. R je paradoksalan skup. Naime $R \in R$ ako i samo ako $R \notin R$. To je slavni Russellov paradoks, kojim je opovrgnuto načelo objedinjenja. Načelo po kojem svaki uvjet $\varphi(x)$ određuje skup objekata koji udovoljavaju uvjetu. Uvjet $x \notin x$ ne određuje skup i time je to evidentno načelo zdravog razuma opovrgnuto. Rasprava tog problema zahtijevala bi novi članak, pa je ovdje nećemo nastavljati. Spominjemo još samo to da je autor ove knjige u *Cantor's theorem and paradoxical classes, Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, Bd. 32, 1986*, pokazao da se i druge poznate, na drugi način otkrivene paradoksalne klase, kao i mnoge potpuno nove mogu dobiti sličnom primjenom Cantorova dijagonalnog postupka.

I na kraju upozoravamo na jednu interpretaciju Cantorova rezultata, koja je od njegove bitno različita. Znamo da je ona već dosta dugo poznata iako ne znamo gdje je, kada i kako prvi put formulirana. Možemo je nazvati konstruktivističkom jer je inherentna konstruktivnom fundiranju matematike. Izložit ćemo formulaciju do koje je autor ove knjige nedavno došao i koja mu se čini izuzetno jednostavnom i razumljivom. Cantor je pokazao da funkcija definiranih na skupu prirodnih brojeva $\mathbf{N}$, a s vrijednostima u tom istom skupu, ima više no što ima samih prirodnih brojeva. Pokazao je da za svako jednoznačno pridruženje brojeva funkcijama, $n \rightarrow f_n$, može definirati funkciju ψ koja nije pridružena nijednom broju. Naime,

$$\psi(n) = f_n(n) + 1$$

bit će takva funkcija, jer će se od svake funkcije f_n razlikovati po vrijednosti koju prima na argumentu n. Ukratko, Cantor će zaključiti da aritmetičkih funkcija ima neprebrojivo mnogo. Ali kako taj rezultat može shvatiti konstruktivist za kojeg je aritmetička funkcija f *pravilo kojim se propisuje kako za svaki broj n treba izračunati vrijednost funkcije* $f(n)$. Kako god općenito zamislili pojam pravila, ono mora biti konačno objašnjivo i konačno opisivo. Svaki konačni opis može se kodirati prirodnim brojem i (koji ćemo u slučaju da i jest kod opisa neke funkcije, nazovimo je φ_i, zvati indeksom te funkcije, dok ćemo tvrdnju »i je indeks neke funkcije« kraće označiti sa $F(i)$). Ali ako su funkcije opisive prirodnim brojevima, onda ih ne može biti više no što ima prirodnih brojeva, suprotno onome što dokazuje Cantor. No s druge strane Cantor je za svaki niz funkcija egzaktno definirao funkciju koja tim nizom nije obuhvaćena. To bi isto moralo vrijediti i za naš niz funckija φ_i takvih da je $F(i)$, tj. da i jest indeks funkcije. Cantor iznimku definira ovako:

$$\psi(n) = \varphi_n(n) + 1.$$

Međutim, ne mora svaki n biti indeks funkcije (tj. ne vrijedi $F(n)$ za svaki n). To znači da Cantorov postupak ne definira iznimku potpuno. No to je lako popraviti. Definirajmo ψ ovako:

$$(*) \qquad \psi(n) = \begin{cases} \varphi_n(n) + 1 & \text{ako } F(n) \\ 0 & \text{ako nije } F(n). \end{cases}$$

Sada je ψ potpuno definirana i lako se vidi, à la Cantor, da se razlikuje od svake naše funkcije-pravila. No to znači da sama definicija (*) nije pravilo, iako tako izgleda. Naime (*) nas upućuje da $\psi(n)$ računamo tako da pravilo-funkciju s indeksom n primijenimo na n i tome dodamo 1 *ako vrijedi* $F(n)$ ili da joj neposredno damo vrijednost 0 *ako ne vrijedi* $F(n)$. To bi stvarno bilo pravilo kada bismo imali pravilo kojim bismo mogli odrediti vrijedi li $F(n)$ ili ne vrijedi $F(n)$, tj. je li n indeks pravila ili nije. Budući da Cantorov postupak dokazuje da (*) nije pravilo, slijedi da nema pravila koje bi odlučilo je li n indeks pravila, tj. je li ono što n kodira pravilo. Ukratko, Cantorov dijagonalni postupak, konstruktivistički interpretiran, dokazuje da

nema pravila koje bi odredilo što jest pravilo. Ili, drugim riječima, aritmetičkih funkcija ima (u Cantorovu smislu) isto toliko koliko i brojeva, pa njegov dijagonalni postupak ne pokazuje da ih ima više, nego dokazuje to da nema pravila kojim bismo uvijek mogli odlučiti je li nešto jest ili nije aritmetička funkcija.

Dodatna literatura uz drugo poglavlje

1) Daivs, M. *(ed) The Undecidable, Hewlett, N. Y., 1965.*

2) Dauben, J. W. *The Trigonometric Background to Georg Cantor's Theory of Sets, Arch. hist. exact sci. 7, 181—216 (1971)*

3) Dauben, J. W. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosoph of Infinite, Cambridge, Mass. 1979.*

4) Grattan-Guinness, I. *(ed) From the Calculus to Set Theory: 1630——1910. An Introductory History, London, 1980.*

5) Hallet, M. *Russell, Jaurdain and »Limitation of Size«, Brit. jour. hil. sci. 32, 381—399 (1981).*

6) Hallett, M. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size, Oxford, 1982.*

III. KAKO JE STVARANA MATEMATIČKA LOGIKA

KAKO SU I ZAŠTO AKSIOMATIZIRANI PRIRODNI BROJEVI

1. Čini se da, prije ili kasnije, sva matematička znanja postaju predmetom aksiomatske metode.

Često se smatra da tek time ta znanja i postaju matematička. Aksiomatika ih organizira u deduktivni sustav, u kojem matematičke tvrdnje logički slijede iz sigurnog i trivijalno istinitog temelja, tj. iz sigurnih i trivijalno istinitih aksioma. Tek deduktivno dobivena matematička znanja imaju onu sigurnost koja ih čini matematičkima.

Pritom postoje dvije pretpostavke. Prva je trivijalno uviđanje istinitosti aksioma neposrednom intuicijom predmeta koji se razmatra. Druga je intuicija općih zakona mišljenja, tzv. logička intuicija, po kojoj je neposredno jasno da slijedom zaključaka iz istinitih aksioma dobivamo istinite posljedice. Druga pretpostavka je pretpostavka svake deduktivne znanosti. Prva pretpostavka je pretpostavka sadržajne aksiomatike. Ta aksiomatika ne smatra svojim zadatkom uspostavljanje veza između proizvoljno odabranih aksioma i njihovih posljedica, kako to smatra postulacijska aksiomatika. Ona aksiome smatra istinitim tvrdnjama iz kojih izvodi istinite tvrdnje. Kao tipičan primjer sadržajne aksiomatike stoljećima se spominje Euklidova geometrija. Istinitost Euklidovih aksioma neposredno je i trivijalno jasna, a njegovi nas zaključci od tih aksioma sigurno vode prema geometrijskim istinama. Novija težnja da se svi ili većina matematičkih aksiomatskih sustava smatra postulacijskim proizvod je novog shvaćanja čiste matematike (usp. sljedeći članak).

Počeli smo ovaj članak s konstatacijom da prije ili kasnije sva matematička znanja postaju predmetom aksiomatske metode. Je li baš sasvim nevažno da se s geometrijom to dogodilo dva tisućljeća prije nego s aritmetikom? Je li to samo nevažna povijesna činjenica, ili ta činjenica baca neko svjetlo na aksiomatsku metodu?

Čini se da su razlozi kasnije aksiomatizacije aritmetike prilično jasni i da bar djelomično pobijaju prethodni opis aksiomatske metode. Naime, pojam prirodnog broja i upotreba aritmetičkih operacija toliko su jasni da nije bilo nikakve potrebe da se još jasnije ekspliciraju upotrebom aksioma. Intuicija prirodnog broja dovoljno je čvrsta osnova aritmetike. Intuicija prostora (zor) bila je naprotiv teško poljuljana učenjem Elejaca, koji su je doveli u pitanje dokazujući nemogućnost djeljivosti prostora, nemogućnost protežnosti i nemogućnost mnoštva. Još je veći udar došao s dokazom nesumjerljivosti stranice i dijagonale kvadrata. Grčka misao je prihvatila logičku argumentaciju, tj. dokazivanje, kao vrhovnu aribitražu u pitanjima znanosti. Prihvaćajući kritiku intuicije prostora, u širem okviru kritike opažanja, ona je toj intuiciji nadredila deduktivnu geometriju kojom vlada logičko argumentiranje. U tom kontekstu aksiomi nisu sigurno i trivijalno istiniti. Naime, iako vjeruju svojim osnovnim prostornim intuicijama, grčki geometri moraju odgovoriti na izazov predloženog logičkog pobijanja tih intuicija. Zato oni te intuicije ugrađuju u deduktivni sustav geometrije kao aksiome koje tek trebaju iskušati i opravdati tako što će iz njih deducirati intuitivno prihvatljiv i logički konzistentan sustav geometrije. Tek u okviru toga sustava aksiomi se potvrđuju zadobivajući sigurnost višeg, logičkog reda.

Kako je aritmetika ipak aksiomatizirana? Zar je sredinom 19. stoljeća poljuljana sigurnost intuitivnog poimanja prirodnog broja? Nije! Podrijetlo aksiomatike ne iscrpljuje sve njezine mogućnosti i ciljeve. Aksiomatska metoda, jednom nastala, pokazala se prikladnim sredstvom za ispitivanje logičkih odnosa bilo kojeg znanja, varljivog ili ne. Naravno, aksiomatska metoda s takvim užim ciljem prestaje biti nezaobilaznim zahtjevom osiguravanja samih temelja znanosti. Njena primjena ovisit će više o tehničkom razvoju same aksiomatske metode, a manje o zahtjevima predmeta na koji se ona primjenjuje. To će tako biti naročito tamo gdje je intuicija samog predmeta dovoljno čvrsta osnova znanja o njemu, a tako jest u aritmetici. Tu će se aksiomatizacija svesti na izdvajanje osnovnih aritmetičkih pojmova dovoljnih za izgradnju deduktivnog sustava aritmetike i na samu tu izgradnju, što kratko možemo nazvati logičkim oblikovanjem aritmetike. Takva je aksiomatizacija provedena u toku druge polovice 19. stoljeća, a poznata je kao Peanova aksiomatizacija prirodnih brojeva (prvi je put nalazimo u *Peano G., Arithmetices principia, Torino 1889*).

2. Dva su izvora Peanove aksiomatizacije prirodnih brojeva. On sam kaže da je aksiome preuzeo iz Dedekindova rada **Was sind und was sollen die Zahlen, 1889**, a da se izgrađujući deduktivni sustav aritmetike (koji je utemeljen tim aksiomima) obilato služio Grassmannovim radom **Lehrbuch der Arithmetik, 1861**.

Grassmannov pristup je tipična primjena aksiomatske metode kao prikladnog sredstva za ispitivanje logičkih odnosa unutar neke teorije, u ovom slučaju unutar aritmetike. Grassmann je izdvojio osnovne aritmetičke pojmove dovoljne za izgradnju deduktivnog sustava aritmetike i izgradio osnovne elemente toga sustava. (Tema njegova rada zapravo su cijeli brojevi, ali je lako uočiti kako se njegova metoda može prilagoditi izgradnji teorije prirodnih brojeva.) Međutim, Grassmannova prezentacija nije aksiomatska u doslovnom smislu riječi. H. Wang ipak je pokazao kako se ona bez ikakvih teškoća može »čitati« kao prava aksiomatizacija. Mi ćemo je ovdje prikazati u toj Wangovoj rekonstrukciji.

Osnovni (nedefinirani) pojmovi kojima Grassmann zasniva aritmetiku cijelih brojeva jesu:

(I) cijeli broj i istaknuti cijeli broj 1,

(II) biti pozitivan,

(III) binarna relacija $=$, binarne operacije $+$, $\cdot$ i unarna operacija $-$ (unarna operacija $-$ primjenjuje se samo na istaknuti broj 1, usp. (IV), a općenito se definira, usp. (V)).

Istaknuti cijeli broj 0, svojstvo »biti negativan« i relacija »biti veći od« pojmovi su koji se definiraju na sljedeći način:

(IV) $0 = 1 + (-1)$

(V) $a - b$ je broj za koji vrijedi $b + (a - b) = a$ (posebno, $-a = 0 - a$)

(VI) $a > b$ znači da je $a - b$ pozitivan.

Slijede Grassmannovi aksiomi u Wangovoj rekonstrukciji:

(1) $a = (a + 1) + (-1) \qquad a = (a + (-1)) + 1$

(2) $a + (b + 1) = (a + b) + 1$

(3) $a \cdot 0 = 0$

(4) Ako je $b = 0$ ili je b pozitivan, tada je $a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$.

(5) 1 je pozitivan broj.
(6) Ako je a pozitivan, onda je $a + 1$ pozitivan.
(7) Ako je b pozitivan, onda je $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.
(8) Ako 1 ima svojstvo S i ako za svaki b vrijedi: $b + 1$ ima svojstvo S ako b ima svojstvo S i $b + (-1)$ ima svojstvo S ako b ima svojstvo S, tada svaki a ima svojstvo S.
(9) Ako 1 ima svojstvo S i ako za svaki b vrijedi: $b + 1$ ima svojstvo S ako b ima svojstvo S, tada svaki pozitivni a ima svojstvo S.

Lako ćete uočiti da su aksiomi (1) i (2) rekurzivna pravila za zbrajanje, a aksiomi (3) i (4) rekurzivna pravila za množenje. (Ta se pravila prvi put pojavljuju u Grassmanna.) Aksiom (9) je aksiom potpune indukcije, a aksiom (8) je aksiom potpune indukcije za cijele brojeve.

Koristeći se svojim aksiomima, Grassmann je dokazao ove tvrdnje:

(10)	$a + (b + c) = (a + b) + c$	*asocijativnost zbrajanja*
(11)	$a + b = b + a$	*komutativnost zbrajanja*
(12)	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	*asocijativnost množenja*
(13)	$a \cdot b = b \cdot a$	*komutativnost množenja*
(14)	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	*distributivnost množenja u odnosu prema zbrajanju*
(15)	$a + 0 = a$	*neutralnost nule u odnosu prema zbrajanju*
(16)	$a \cdot 1 = a$	*neutralnost jedinice u odnosu prema množenju*
(17)	$a + (-a) = 0$	*invertibilnost zbrajanja*

(18) *Ako je* $c \neq 0$ *i* $c \cdot a = c \cdot b$, *tada je* $a = b$.
(19) *Ako je* a *pozitivan broj i ako je* b *pozitivan broj, tada je i* $a + b$ *pozitivan broj.*
(20) *Ako je* a *pozitivan broj i ako je* b *pozitivan broj, tada je i* $a \cdot b$ *pozitivan broj.*
(21) *Ili je* a *pozitivan broj, ili je* $-a$ *pozitivan broj, ili je* $a = 0$.

Odmah uočavamo da su tvrdnje (9)—(21) suvremena algebarska aksiomatizacija dobro uređenog područja cijelih[1], koja do izomorfizma karakterizira cijele brojeve. Grassmann je bio prvi koji je osnovna svojstva te strukture izveo iz rekurzivnih pravila za zbrajanje i množenje koristeći se indukcijom. Možemo reći da je Grassmann preteča suvremene algebarske karakterizacije cijelih brojeva.

Peanova aksiomatizacija ide korak dalje. On deduktivni sustav aritmetike temelji na samo tri osnovna pojma:

(I) prirodni broj,
(II) sljedbenik,
(III) istaknuti prirodni broj 1.

Ostale aritmetičke pojmove (npr. zbrajanje i množenje) on može definirati, a njihova najvažnija svojstva (npr. Grassmannova rekurzivna pravila) dokazati pomoću sljedećih tzv. Peanovih aksioma:

(P1) 1 je prirodni broj.
(P2) Sljedbenik svakog prirodnog broja je prirodni broj.
(P3) Nijedna dva prirodna broja nemaju istog sljedbenika.
(P4) 1 nije sljedbenik nijednog prirodnog broja.
(P5) Svako svojstvo koje pripada prirodnom broju 1, i sljedbeniku svakog prirodnog broja koji ima to svojstvo, pripada svim prirodnim brojevima.

Međutim, rekli smo da je Peano svoje aksiome preuzeo od Dedekinda (Grassmannovim radom koristio se izgrađujući deduktivni sustav aritmetike nakon što je dokazao Grassmannove aksiome). Što je Peano preuzeo od Dedekinda?

Dedekindov rad, »*Was sind und was sollen die Zahlen*« iz 1888. (dalje [D]), nešto je više od aksiomatike. Za njega je nevažno ispitivanje logičkih odnosa unutar postojećeg aritmetičkog znanja i izdvajanje osnovnih pojmova i njihovih svojstava iz ukupnosti toga znanja. Koji osnovni pojmovi i koja njihova svojstva omogućuju izgradnju deduktivnog sustava aritmetike nije Dedekindovo osnovno pitanje.

[1] Za uređeno područje cijelih (tj. uređenu integralnu domenu) kažemo da je dobro uređeno ako mu je podskup pozitivnih elemenata dobro uređen.

Njegovo je osnovno pitanje: Što je broj? On ne želi izdvojiti osnovna svojstva broja iz postojećeg aritmetičkog znanja; on želi utemeljiti pojam broja, a time i samo to znanje. Njega ne zadovoljava intuicija prirodnog broja, ali ne zato što je varljiva i nesigurna, nego zato što smatra da je može svesti na bitniju intuiciju — logičku intuiciju, koja i jest pretpostavka svake deduktivne znanosti. Upravo je ta redukcija »nešto više od aksiomatike«.

Jednostavno shvaćanje aksiomatske metode već je prije opisano i dovedeno u pitanje u točki 1. Ustanovili smo da aksiomi ne izviru iz neposredne i trivijalno istinite intuicije već da, upravo suprotno, njihovo podrijetlo treba tražiti u varljivosti intuicije. Aksiomatika se pojavljuje tamo gdje je intuicija poljuljana i nesigurna, tamo gdje je treba staviti pod vlast logike. Samu logičku intuiciju aksiomatika ne dovodi u pitanje. Ali kad bi se pojam broja mogao utemeljiti samom logičkom intuicijom, jasno je da bi aritmetika postala deduktivni sustav oslobođen bilo kakvih aksioma, »prazna aksiomatika«. Takva bi aksiomatika odgovarala onom idealu koji smo ranije doveli u pitanje. Naime, sami logički zakoni su idealni aksiomi; oni su istine utemeljene neposrednom i trivijalnom logičkom intuicijom.

Dedekind ostvaruje tu redukciju detaljnom analizom pojma broja, koja ga dovodi do odgovora na njegovo osnovno pitanje — što je broj. Sretna je okolnost što je do danas sačuvano autentično Dedekindovo svjedočanstvo o tome kako je došao do svojeg odgovora. To je Dedekindovo pismo Kefersteinu od 9. 2. 1890. (pohranjeno u Niedersächische Staats und Universitätsbibliotek). Ono je dragocjen izvor podataka o nastanku Dedekindova eseja [D] i ovdje ćemo ga gotovo u cijelosti citirati.[2]

[2] H. Keferstein je 1890. objavio članak o pojmu broja, *Über den Begriff der Zahl,* u kojem raspravlja o [D]. Njegove opaske uz [D] pokazale su njegovo nerazumijevanje nekih osnovnih mjesta. Dedekind je smatrao potrebnim odgovoriti esejom, *Über den Begriff des Unendlichen,* u kojem je pokazao svu bespredmetnost Kefersteinovih »ispravaka«. Izdavač Kefersteinova članka odbio je objaviti taj odgovor zbog nedostatka prostora i dužine odgovora. Objavljen je samo Kefersteinov odgovor Dedekindu, u kojem on odustaje od svojih »ispravaka«. Dedekind je ipak, u svojem pismu od 9. 2. 1890, morao zažaliti što Kefersteinov odgovor »nakon svog uloženog truda i vremena još uvijek sadrži mnoga nerazumijevanja«. Ipak trud nije bio uzaludan. Ostalo je ovo dragocjeno pismo.

> »Kako lišiti ova[3] svojstva njima svojstvenog aritmetičkog značaja, i time ih podvesti pod općenitije pojmove i djelatnosti razumijevanja, bez kojih mišljenje uopće nije moguće, a s kojima je osigurana osnova pouzdanosti i potpunosti dokaza, kao i konstruiranje suglasnih pojmova i definicija?«

kaže Dedekind u svom pismu i nastavlja:

> »Kada se problem ovako postavi, vjerujem da moramo prihvatiti sljedeće činjenice:
>
> (1) Brojni niz **N** je sistem individuuma ili elemenata, koje zovemo brojevima. To vodi k općenitom izučavanju sistema kao takvih (§ 1. mojega eseja[4]).«

I stvarno u § 1. Dedekind ispituje opća, elementarna načela teorije skupova, i to je vjerojatno prvi pokušaj da se izričito ustanove načela (neefektivne) gradnje skupova (tj. sistema, u njegovoj terminologiji).

> (2) »... elementi sistema **N** stoje jedan prema drugome u određenim odnosima; određeni red uspostavlja se, prije svega, činjenicom da svakom broju n pripada određeni broj n': sljedeći ili neposredno veći broj. To vodi k razmatranju općeg pojma preslikavanja φ sistema (§ 2), i budući da je slika $\varphi(n)$ svakog broja n opet broj n', te je stoga $\varphi(\mathbf{N})$ dio od **N**, mi ovdje razmatramo preslikavanje sistema **N** u sebe, koje moramo izučiti u svoj općenitosti (§ 4).
>
> (3) Sljedbenici različitih brojeva a i b međusobno su različiti; preslikavanje φ ima dakle svojstvo razabiranja ili sličnosti (§ 3).«

Dakle, u § 2. razmatra se opći pojam preslikavanja. Slična preslikavanja ili kako danas kažemo injekcije tema su § 3. U paragrafu 4. razmatraju se preslikavanja sistema u samog sebe. Tu je uveden i osnovni pojam lanca: skup M je lanac u odnosu na preslikavanje φ, ako je $\varphi(M)$ dio od M. Presjek svih lanaca (u odnosu na φ) koji sadrže element a je lanac elemenata a: $\varphi_0(a)$ ili a_0.

[3] Iz prethodnog teksta jasno je da se tu govori o osnovnim svojstvima prirodnih brojeva iz kojih slijede sva ostala.

[4] Dedekind misli na [D].

(4) »Nije svaki broj sljedbenik n', tj. $\varphi(\mathbf{N})$ je pravi dio od **N**; to zajedno s prethodnim čini brojni niz **N** beskonačnim (§ 5).

(5) Točnije, 1 je jedini broj izvan $\varphi(\mathbf{N})$. Tako smo naveli sve činjenice koje vi smatrate (na str. 124 rada citiranog u opaski 2) potpunom karakterizacijom uređenog jednostavno beskonačnog sistema **N**.«

U § 5. Dedekind uvodi definiciju beskonačnosti. Skup je beskonačan ako je sličan svojem pravom dijelu. Tu su dokazana i neka jednostavna svojstva beskonačnih skupova. Dedekindov dokaz o postojanju beskonačnog skupa nalazi se također u § 5.

(6) »Ali već sam u svojem odgovoru (citiranom u opaski 2) pokazao da su ove činjenice još uvijek daleko od toga da budu primjerena karakterizacija prirode brojevnog sistema. Sve te činjenice važile bi i za bilo koji sistem S koji osim brojnog niza **N** sadrži i sistem T proizvoljnih dodatnih elemenata t, na koji bi uvijek bilo moguće proširiti preslikavanje φ sačuvavši ga sličnim i udovoljivši zahtjevu $\varphi(T) = T$. Ali takav sistem S je očito nešto sasvim različito od našega brojnog niza **N**, i ja bih ga mogao tako odabrati da bi teško i jedan aritmetički teorem ostao u njemu sačuvan. Što dakle moramo dodati prije navedenim činjenicama, radi ponovnog čišćenja našeg sistema S od takvih stranih uljeza t koji remete svaki red, a u svrhu ograničenja sistema S na sistem **N**? Bila je to jedna od najtežih točaka moje analize i njeno me savladavanje nagnalo na duga razmišljanja. Ako netko pretpostavi znanje niza **N** i u skladu s tim dopusti aritmetičku terminologiju, tada je, naravno, sve jednostavno. On samo treba reći: element n pripada nizu **N** ako, i samo ako, u nekom trenutku, polazeći od elementa 1, i brojeći uporno dalje i dalje, tj. prolazeći konačnim brojem iteracija preslikavanja φ (vidi kraj člana 131. mojeg eseja) stvarno dosegnem element n; tim postupkom nećemo, dakako, nikada doseći element t izvan niza **N**. Ali taj način razlikovanja elemenata t, koje treba izbaciti iz S, od onih elemenata n, koji jedini treba da ostanu u S, sigurno je za našu svrhu sasvim beskoristan. On bi, uostalom, sadržavao najgrublju i očitu vrstu poročnog kruga. Ne koriste tu ni same riječi *konačno dosegnuti*. One nisu od veće koristi no što su, recimo, riječi *karam sipo tatura*, koje sam izmislio ovog trenutka, a da im nisam pridao nikakvo jasno određeno značenje. Dakle: Kako mogu, ne pretpostavivši nikakvo aritmetičko znanje, pružiti nedvosmislenu pojmovnu osnovu razlikovanju elemenata n i elemenata t? Naprosto, razmatranjem *lanaca* (37. i 44. mojeg eseja), a ipak, pomoću njih potpuno: Ako bih želio izbjeći svoj izraz *lanac*, kazao bih: n, element od S, pripada nizu **N** ako, i samo ako, je n element svakog takvog dijela K od S, čije je svojstvo (i) da 1 pripada K *i* (ii) da je $\varphi(K)$ dio od K. Na mom tehničkom jeziku: **N** je presjek 1_0 ili $\varphi_0(1)$ svih lanaca K u S kojima pripada element 1. Tek nakon toga je potpuno određen značaj niza **N**. U vezi s tim napominjem sljedeće: U kratkom razdoblju prošlog ljeta (1889) prvi su put do mene dospjeli Fregeovi *Begriffsschrift i Grundlagen der Arithmetik*. Sa zadovoljstvom sam ustanovio da se njegova metoda definiranja odnosa elemenata i njegovog, ne nužno neposrednog, sljedbenika u biti slaže s mojim poimanjem lanca (37. i 44). Važno je samo ne zbuniti se njegovom, donekle nepogodnom, terminologijom.«

Dedekindova objašnjenja u točki (6) sigurno su najvažniji dio pisma. Što ne razumije Keferstein? On misli da splet ideja objašnjenih u točkama (1)—(5) potpuno karakterizira uređen, jednostavno beskonačan skup **N**. On (vjerojatno) smatra da preslikavanje φ, koje ima svojstvo sličnosti (usp. (2)) i koje različite elemente skupa **N** preslikava u različite elemente skupa **N** (usp. (2) i (3)), potpuno određuje skup **N**, polazeći od jedinog sa φ neproizvedenog elementa 1 (usp. (4) i (5)):

1 je element sistema **N** prema (4), (5)
1′ je element sistema **N** prema (2), (3)
1″ je element sistema **N** prema (2), (3)

i tako dalje...

Ali što znači i tako dalje...? Odgovor bi mogao glasiti: 1 je element skupa **N**, 1′ je element skupa **N**, 1″ je element skupa **N**, i svaka stvar koju napokon (konačno) dosegnemo ponavljanjem tog postupka element je skupa **N**. Ali što znači nešto napokon dosegnuti ponavljanjem tog postupka? Odgovor bi mogao biti: To je intuitivno jasno. Ali o kakvoj je intuiciji tu riječ? O intuiciji višestrukog ponavljanja, tj. o intuiciji određenog broja ponavljanja, tj. o intuiciji broja. Ali Dedekind upravo tu intuiciju želi svesti na nešto temeljnije (na logičku intuiciju skupova preslikavanja i njihovih svojstava). Nije riječ o tome da Kefersteinovo objašnjenje nije dovoljno sigurno, čvrsto i utemeljeno, ono je takvo upravo toliko koliko je takva intuicija prirodnog broja, a ona to jest; riječ je o tome što njegovo objašnjenje nije svođenje te intuicije na neku drugu i kao takvo je cirkularno (kao što je, uostalom, cirkularna svaka krajnja intuicija). Ako netko ne želi svoditi intuiciju broja, neka je i ne svodi. Ali pogrešno misli onaj koji kaže da je ona svedena u obrazloženju: »1 je broj, 1′ je broj i svaka stvar koju dosegnemo ponavljanjem tog postupka je broj.« Samo to obrazloženje je izraz intuicije prirodnog broja.

Točke 27. i 44. koje Dedekind spominje pri kraju odjeljka (6) definicije su lanca, općenito, i lanca elemenata a, posebno, i njih smo već prije izrekli.

> (7) »Nakon što je, pomoću moje analize (71. i 73), otkrivena suština jednostavno beskonačnog sistema, čiji je apstraktni tip niz brojeva **N**, javlja se pitanje: Postoji li uopće takav sistem u području naših ideja? Bez logičkog dokaza postojanja uvijek bi ostala sumnja da sistem sadrži unutarnje proturječje. Odatle potreba za takvim dokazom (66. i 72. mojeg eseja).«

U § 6. definicijom 71. definiran je jednostavno beskonačni skup **N**, kao sistem koji je upravo jednak lancu jednog svog istaknutog elementa a, tj. $\mathbf{N} = \varphi_0(a)$. Definicija 73. je definicija skupa prirodnih ili rednih brojeva:

> »Ako se pri razmatranju nekog jednostavno beskonačnog, preslikavanjem φ uređenog, sistema **N** potpuno zanemare svojstvene osobine elemenata sistema, i jedino se zadrži mogućnost njihova razlučivanja, uz odnose u koje ih stavlja uređujuće preslikavanje φ, onda se ti elementi nazivaju prirodnim brojevima, ili rednim brojevima, a također i naprosto brojevima, dok se osnovni element 1 naziva osnovnim brojem brojnog niza **N**. S obzirom na to oslobađanje elemenata od svakog njima svojstvenog sadržaja možemo brojeve s pravom zvati slobodnom tvorevinom ljudskoga uma.«

Teoremom 66. dokazano je (kako smo već spomenuli) postojanje beskonačnog skupa. Teorem 72. dokazuje da svaki beskonačni skup kao svoj dio sadrži jednostavan beskonačni skup. Teoremima 66. i 72. dokazano je dakle postojanje jednostavno beskonačnog skupa iz kojeg se apstrakcijom stvara brojni niz.

> (8) »Nakon što je i to riješeno, preostalo je pitanje: sadrži li dosadašnje obrazlaganje metodu dokazivanja koja može, u svoj općenitosti, uspostaviti tvrđenja za koja se pretpostavlja da vrijede za sve brojeve n? Da! Glasovita metoda dokazivanja indukcijom sigurno je utemeljena poimanjem lanca (59, 60. i 80. mojeg eseja).«

Teorem 59. dokazuje valjanost induktivnog zaključivanja o elementima svakog lanca generiranog skupom A (posebno dakle i elementom a). Teorem 60. je jedna varijanta tog teorema prikladna za dokazivanje teorema 80, kojim je dokazana valjanost potpune indukcije.

Dedekind smatra da njegova, sada potpuna, analiza dovodi do karakterizacije prirodnih brojeva, koja omogućuje izvođenje svih njihovih svojstava. Da bi se u to uvjerio, on ne proučava mnogo aritmetičkih teorema i njihovih dokaza, nego se zadovoljava dokazom o izomorfnosti svih jednostavno beskonačnih sistema karakteriziranih njegovom analizom (teorem 132. u [D]), i odatle zaključuje da svi aritmetički teoremi slijede iz njegove karakterizacije. Neke Dedekindove opaske u točki (6) bolje objašnjavaju taj zaključak. Tamo je riječ o isključivanju neželjenih interpretacija sistema **N**, »za koje neće vrijediti gotovo nijedan aritmetički teorem«. Naime, definicija brojnog niza, kao lanca osnovnog elementa 1 (definicija 73), omogućuje da se apstraktni karakter brojnog niza potpuno odredi (teorem 132, usp. gore). Ako neki aritmetički teorem ne ovisi o toj definiciji, ona dopušta dvije interpretacije: jednu u kojoj teorem vrijedi i jednu u kojoj ne vrijedi. Ali definicija jednoznačno određuje interpretaciju (teorem 132). Dakle, svi aritmetički teoremi slijede iz definicije. Vjerojatno je to bio tok Dedekindovih misli iz kojeg je slijedio željeni zaključak, što se temeljio na prešutnoj pretpostavci da deduktivno nepotpuni sistem dopušta više interpretacija.

> (9) »Konačno, je li moguće uspostaviti definicije numeričkih operacija konzistentno za sve brojeve n? Da! To je postignuto zapravo teoremom 126. mojeg eseja.«

Teoremom 126. dokazuje se da induktivna (rekurzivna) »definicija« preslikavanja φ (koja nije eliminabilna, pa i nije definicija u logičkom smislu) jednoznačno određuje to preslikavanje. Taj dokaz potpunom indukcijom zapravo je (kao i prije) svođenje inače jasne jednoznačnosti preslikavanja φ na poimanje lanca, tj. i ovdje je riječ o svođenju intuicije broja na logičku intuiciju (sistema, preslikavanja i njihovih svojstava). Time se logički opravdane rekurzivne definicije zbrajanja, množenja i potenciranja (§ 11, § 12. i § 13. Dedekindova eseja).

Vidimo dakle da Dedekindovo osnovno pitanje nije aksiomatsko pitanje o tome koji osnovni pojmovi i koja njihova svojstva omogućuju izgradnju deduktivnog sustava aritmetike, već je temeljno reduktivno pitanje: Što je broj? Ali upravo odgovor na to temeljnije pitanje daje odgovor i na ono prvo. (Čini se zapravo da je odgovor na aksiomatsko pitanje uvijek sporedni proizvod odgovora na temeljnije pitanje.) Peanovi aksiomi P1—P5 u biti i nisu drugo nego svojstva α, β, γ i δ iz Dedekindove definicije jednostavno beskonačnog sistema (def. 71. u [D]):

α) $s(\mathbf{N}) \subseteq \mathbf{N}$

(**N** je lanac u odnosu na preslikavanje s.)

β) $\mathbf{N} = \cap \{M\colon 1 \in M \,\&\, s(M) \subseteq M\}$

(**N** je lanac generiran istaknutim elementom 1.)

γ) $1 \notin s(\mathbf{N})$

(Istaknuti element 1 nije slika nijednog elementa sistema **N**.)

δ) $s(m) = s(n) \to m = n$

(Preslikavanje s je slično.)

Naime, rezimirajmo prethodna razmatranja. S obzirom na to da je β definicija skupa **N**, vidimo da su Dedekindovi osnovni (nedefinirani) pojmovi: preslikavanje s, istaknuti element 1 i elementarni pojmovi teorije skupova. Sve ostale aritmetičke pojmove $+$, $\cdot$, $>$ itd. Dedekind je definirao pomoću ovih osnovnih pojmova i dokazao njihova najvažnija svojstva (npr. Grassmannova pravila za $+$ i $\cdot$, tranzitivnost, irefleksivnost i povezanost od $>$ itd.). Budući da je α trivijalna posljedica od β, možemo reći da je Dedekind pokazao kako se u okviru teorije skupova može definirati skup prirodnih brojeva (usp. β), uz pretpostavku da postoji neko preslikavanje s koje je injektivno (usp. δ) i koje u odnosu na neki istaknuti objekt 1 ima svojstvo γ. U tom smislu Dedekind nije samo aksiomatizirao aritmetiku nego ju je i reducirao na teoriju skupova. To je i bila njegova osnovna nakana. On i nije posebno isticao da su svojstva α, β, γ i δ aksiomi aritmetike. Međutim, odmah uočavamo da je α upravo Peanov aksiom P2, da je γ Peanov aksiom P4, δ Peanov aksiom P3, kao i to da Peanovi aksiomi P1 i P5 trivijalno slijede iz β. Što se tiče posljednje tvrdnje, usporedite

$$\beta.\ \mathbf{N} = \cap \{M\colon 1 \in M \,\&\, s(M) \subseteq M\}$$

s ovom jednostavnom preformulacijom Peanova aksioma P5

$$\mathbf{N} \subseteq \cap \{M\colon 1 \in M \,\&\, s(M) \subseteq M\}.$$

Tako je nastala poznata aksomatizacija prirodnih brojeva koju je preuzeo Peano i koju bismo trebali točnije zvati Dedekindovom ili barem Dedekind-Peanovom, kada bi nam to naše dugogodišnje navike dozvoljavale.

I na kraju spomenimo još neke aksiomatizacije prirodnih brojeva. O mnogim manje-više trivijalnim preformulacijama Dedekind-Peanove aksiomatizacije nećemo govoriti. Spominjemo samo jednu, onu u kojoj je osnovni pojam 1 eliminiran (kao osnovni pojam). Ta aksiomatizacija ima svega dva osnovna pojma; prirodni broj i funkciju sljedbenika, a njeni su aksiomi:

$s1$. $(\exists ! m)(m \in \mathbf{N} \setminus s(\mathbf{N}))$

$s2$. $s(m) = s(n) \to m = n$

$s3$. $(\mathbf{N} \setminus s(\mathbf{N}) \subseteq M \,\&\, s(M) \subseteq M) \to \mathbf{N} \subseteq M$.

Ta u biti Dedekind-Peanova aksiomatizacija ima funkciju sljedbenika s kao jedini[5] nedefinirani pojam.

Drugi tip aksiomatizacije, koji ćemo sada prikazati, uzima uređaj prirodnih brojeva za svoj osnovni pojam. Od Cantorova uvođenja teorije ordinala i dobro uređenih sku-

[5] **N** je univerzum aksiomatizacije pa ga kao takvog ne trebamo smatrati osnovnim pojmom.

pova (u *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigheitseehre, 1883*) poznato je da prirodni brojeve čine početni segment ordinala određen drugim graničnim ordinalom. Iz te Cantorove perspektive moguće je i definirati prirodne brojeve u okviru teorije skupova, kako je to učinio Von Neumann[6]. Kao u Dedekindovu slučaju, i u Cantor-Von Neumannovoj definiciji prirodnih brojeva implicite je sadržana jedna njihova aksiomatizacija. Njen osnovni pojam je relacija $>$, a aksiomi su joj:

$>1.$ $(\forall n)(\exists m)(m > n)$,

$>2.$ $(\exists!m)(m \in \mathbf{N} \setminus >_*(\mathbf{N}))$,

$>3.$ relacija $>$ je dobar uređaj,

gdje je $>_*(n) = \{m : m >_* n\}$ i $m >_* n \leftrightarrow m > n \,\&\, \neg(\exists k)(m > k \,\&\, k > n)$.

Iako čitatelj nije naišao na tu aksiomatizaciju prirodnih brojeva, pretpostavljamo da će lako provjeriti da ona to jest (ako je upoznat s teorijom dobro uređenih skupova). Uočite da aksiom $>2.$ postulira postojanje točno jednog graničnog broja, tj. točno jednog broja bez neposrednog prethodnika.

Prvi tip aksiomatizacije zvat ćemo s-aksiomatizacijom, a drugi tip $>$-aksiomatizacijom. Prvi tip ima neposrednog sljedbenika kao osnovni nedefinirani pojam, a drugi tip ima općeg sljedbenika kao osnovni nedefinirani pojam. Dakle, oba tipa imaju kao osnovni nedefinirani pojam pojam sljedbenika, pa možemo očekivati da im bar neki aksiomi (koji ih implicitno određuju) budu zajednički. Može se pokazati da prirodne brojeve možemo aksiomatizirati koristeći se relacijom sljedbenika (bilo neposrednog, bilo općeg) kao osnovnim pojmom kojim ravnaju ova tri zajednička aksioma:

(z_1) Svaki broj ima sljedbenika.
(z_2) Samo jedan broj je granični.
(z_3) Svaki skup brojeva ima minimum.

Nadalje, s-aksiomatizaciju prirodnih brojeva dobivamo dodavanjem aksioma

[6] Zanimljivo je da Cantor to nije učinio. Za njega su prirodni brojevi kardinalni brojevi konačnih skupova.

(s_4) Sljedbenik je funkcijska relacija.[7]

i razumijevanjem z-aksioma kao s-aksioma. S druge strane, $>$-aksiomatizaciju prirodnih brojeva dobivamo dodavanjem aksioma

(>4) Sljedbenik je povezana relacija.

i razumijevanjem z-aksioma kao $>$-aksioma.

Uočite da su te aksiomatizacije izuzetno reducirane u odnosu na ranije opisanu Dedekind-Peanovu i Cantor-Von Neumannovu. Ovdje za neposrednog sljedbenika s ne zahtijevamo injektivnost (možemo je dokazati), a za općeg sljedbenika $>$ ne zahtijevamo da je uređaj (i to možemo dokazati).

[7] Tu aksiomatizaciju nalazimo u Devidé V., *Ein axiomensystem für die natürlichen Zahlen, Arch, d. Math., Vol. VI, 1955.*

BOOLE I FREGE — MATEMATIKA LOGIKE I LOGIKA MATEMATIKE

Gottlob Frege i George Boole nose častan naslov otaca moderne simboličke ili **matematičke logike.** Što to znači?

1. Prethodnici

Aristotelovu logiku i njen tradicionalni oblik, koji su joj dali srednjovjekovni skolastici, karakterizira upotreba simbola, i ona u tom smislu nije ništa manje simbolička od moderne logike. Svakako, šira i promišljenija upotreba simboličkih procedura jedan je od činilaca koji je modernu logiku druge polovice 19. stoljeća učinio sveobuhvatnijom i dubljom teorijom od tradicionalne logike. Ipak, tu širinu pogleda, i svijest o potrebi dublje i obuhvatnije analize, od one što je pruža tradicionalna logika, nalazimo već kod Leibniza, pa bismo i njega mogli zvati ocem simboličke logike.

Leibniz je zamislio gotovo utopijsku shemu reforme svekolike znanosti (usp. poglavlje o Newtonu i Leibnizu), uz pomoć dva osnovna instrumenta: univerzalnog znanstvenog jezika, **characteristica universalis,** i računa racionalnog zaključivanja, **calculus ratiocinator,** za baratanje (tim) jezikom. Univerzalni jezik trebao je omogućiti lakšu komunikaciju među znanstvenicima (govornicima različitih jezika) i, što je mnogo značajnije, olakšati proces logičke analize (i sinteze) jezika, zamjenom fonograma prirodnih jezika ideogramima univerzalnog jezika. U matematici se, naprimjer, jasno uočavala superiornost ideogramskih zapisa nad fonogramskim, a i u svekolikoj se znanosti, već do Leibnizova vremena, jasno uočavao neprestani porast upotrebe ideograma. Leibniz je vjerovao da će se uz pomoć relativno malog broja izvornih i nedefiniranih ideja moći definirati svi pojmovi koje nalazimo u znanostima. Sam oblik tako definiranih pojmova jasno bi pokazivao kako komponentne jednostavne ideje sudjeluju u oblikovanju složenog pojma, otprilike kao što algebarska simbolizacija produkta ukazuje na njegove faktore i njihov odnos, ili kao što kemijska formula neke tvari upozorava na njene komponente i njihov odnos. Konačno, sami znanstveni argumenti mogli bi se provoditi analizom (i sintezom)

odgovarajućih ideograma univerzalnog jezika, u skladu s računom racionalnog zaključivanja. Naime, *calculus ratiocinator,* koji bijaše nešto skromniji projekt, trebao je biti jedan organon za najopćenitija zaključivanja, realiziran kao skup preciznih pravila za provođenje logičkih operacija na ideografskim simbolima u okviru **characteristicae universalis.**

Te Leibnizove zamisli bile su značajne kao vidoviti projekti i smjernice budućim istraživačima; do same realizacije nije došlo tako skoro. Ipak, što se tiče računa racionalnog zaključivanja, Leibniz je postigao neke značajnije rezultate, koji uglavnom nisu objavljivani, pa i nisu bitno utjecali na dalji razvoj. (M. Dummet čak tvrdi da je jedina razlika između Leibnizovih i Booleovih dostignuća što prva nisu objavljena, a druga jesu.)

Glavne Leibnizove nastavljače ne nalazimo na kontinentu nego u Velikoj Britaniji. Najznačajniji je sigurno George Boole, ali i on ima svoje prethodnike. To su W. Hamilton (filozof, koji nije izmislio kvaternione) i De Morgan.

Hamilton je značajan zbog tzv. kvantifikacije predikata, kojom se navodno dvosmislena propozicija »Svi *A* su *B*« zamjenjuje jednosmislenom »Svi *A* su svi *B*« ili »Svi *A* su neki *B*«. Kvantifikacija predikata može se provesti i u ostalim tradicionalnim formama propozicija, što ih čini nedvosmislenim. Ta je ideja vrlo jednostavna i s današnjeg stanovišta potpuno nezanimljiva (nije čak ni nova, nalazimo je kod Leibniza). Međutim, značenje te ideje nije u njoj samoj, nego u utjecaju koji je imala na Hamiltonove sljedbenike. Kvantificiranje predikata jasno je upozorilo na mogućnost da se propozicije razmatraju kao pojmovne jednadžbe. (Naime, »dvosmislenost« je u gornjim propozicijama jedino i razumljiva ako je kopula identitet.) Ako su propozicije jednadžbe, naprosto se nameće misao o njihovu **matematičkom** tretmanu. Ta misao, i Hamiltonova samosvjesna objava da se njome otvara novo razdoblje u razvoju logike, probudili su u Velikoj Britaniji interes za logiku.

De Morgan je bio školovani matematičar, koji je logici dao značajne doprinose. I on je kvantificirao predikate, pomno izradivši tablicu od 32 rezultirajuće forme propozicija (jer je i negirao pojmovne terme u odgovarajućim jednadžbama), a dao je i pravila za nalaženje ekvivalentnih formi. Od mnogih doprinosa izdvojimo još napuštanje tradicionalne restrikcije da su pojmovni termi propozicije povezani nekom formom glagola **biti,** i ispitivanje formi s općenitom tranzitivnom, ili tranzitivnom i simetričnom kopulom. On se prvi počeo temeljnije i sustavnije baviti logikom relativnih pojmova (danas bismo rekli relacija), upozorivši na to da je ona najznačajnija za analizu matematičkih argumentacija. (Ta značajna istraživanja, koja su Boole i njegovi neposredni sljedbenici Venn i Jevons zapustili, baveći se isključivo apsolutnim pojmovima (ili njihovim ekstenzijama, klasama), nastavit će Peirce i Schröder.)

2. George Boole

Prvi zaokruženi, dosegom netrivijalni i uistinu efikasni **calculus ratiocinator** stvorio je Boole. (Dummetove, i ne samo njegove, primjedbe na Booleovu nepreciznost, i što je važnije, na odsustvo bilo kakvog dokaza valjanosti njegova računa, smatrane su poraznim za račun, jer su njihovi autori vjerovali da on stvarno i nije valjan, no to je šezdesetih godina opovrgao Hailperin; v. dalje).

Boole je svoj račun izložio u **The Mathematical Analysis of Logic** 1847, a detaljnije i preciznije u **An Investigation of the Laws of Thought** 1854. Temeljni pojmovi njegova računa jesu: elektivni simboli i »zakoni mišljenja«, tj. pravila za operiranje s tim simbolima. Glavni Booleov uvid, ujedno i garant matematičkog funkcioniranja njegova računa, jest taj da su »zakoni mišljenja«, tj. pravila koja ravnaju operacijama, ona ista koja ravnaju operacijama u algebri brojeva 0 i 1.

Elektivni simboli x, y, z itd. predstavljaju rezultat izbora (elekcije) svih x-ova, y-a, z-ova itd. iz univerzuma stvari, tj. x, y, z itd. jesu simboli za klase (koje su dobivene operacijom selekcije iz univerzuma stvari).

Uzastopni izbor analogan je algebarskom množenju: izaberemo li (iz univerzuma svih stvari) prvo x-ove, pa potom iz te klase y-e, rezultat tog uzastopnog izbora, koji Boole označava sa $x \cdot y$, jest klasa stvari koje su i x-ovi i y-i. Redoslijed izbora očito ne utječe na konačni rezultat, tj. vrijedi pravilo (Booleov »zakon mišljenja«):

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Isto je tako jasno da vrijedi pravilo

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

Međutim, uzastopnim ponavljanjem istog izbora dolazimo stalno do iste klase, tj. vrijedi pravilo

$$x \cdot x = x, \quad \text{ili} \quad x^2 = x.$$

Tim se pravilom Booleova logička algebra bitno razlikuje od obične numeričke algebre, pa ga Boole smatra fundamentalnim zakonom logike (fundamentalnim »zakonom mišljenja«).

Nadalje, Boole razmatra operaciju dodavanja $+$, kojom se klasa x dodaje klasi y, što rezultira klasom $x + y$. (Boole upozorava da se ta operacija u prirodnim jezicima označava s »i« ili »ili«, kao u »ljudi i žene« ili »jalove planine ili plodne nizine«). No mada priznaje da uobičajena upotreba daje prednost inkluzivnoj verziji »dodavanja«, Boole će svoju operaciju $+$ držati ekskluzivnom, jer, »... strogo gledano, riječi »i« i »ili« umetnute među termine koji opisuju dvije ili više klasa predmeta impliciraju da su te klase sasvim odvojene, tj. da se nijedan član jedne ne nalazi u drugoj«. Dakle $x + y$ je klasa **samo ako su x i y ekskluzivni (disjunktni).** Jasno je da je ta operacija logičke adicije komutativna i asocijativna, te da je logička multiplikacija s obzirom na nju distributivna, tj. vrijede praviia:

$$x + y = y + x$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y.$$

Za razliku klasa (npr. »ljudi osim Azijata«), Boole upotrebljava simboličku ofrmu $x - y$, a u skladu s primjerima iz jezika (npr. »osim Azijata, ljudi«) uvjerava se da je

$$x - y = -y + x,$$

ne zabrinuvši se pri tome za značenje klase $-y$, koja se dodaje klasi x. S obzirom na utvrđeno značenje logičke suptrakcije, jasno je da vrijedi pravilo distributivnosti

$$z \cdot (x - y) = z \cdot x - z \cdot y.$$

Prihvaćajući valjana pravila numeričke algebre

$$0 \cdot y = 0$$

$$1 \cdot y = y,$$

Boole će zaključiti da 0 i 1 u logici predstavljaju Ništa i Univerzum (Sve). Naravno, tada $1 - x$ predstavlja klasu predmeta koji nisu u x (negaciju od x). To su Booleovi osnovni pojmovi, i neka od važnijih pravila (»zakona mišljenja«) za operiranje s njima. Vidimo da su to zaista pravila algebre brojeva 0 i 1. Boole će zaključiti:

> Zamislimo, dakle, Algebru u kojoj smiboli x, y, z itd. mogu primiti vrijednosti 0, 1, i samo te vrijednosti. Zakoni, aksiomi i procedure jedne takve algebre bit će potpuno identični sa zakonima, aksiomima i procedurama Algebre logike. Te će se algebre razlikovati samo interpretacijom, i na tom se principu zasniva metoda rada koji slijedi.

Osnovna svojstva Algebre na koju upućuje Boole nisu precizirana; on pretpostavlja da je to dobro poznata *»obična« algreba,* čije su varijable x, y, z itd. restringirane na vrijednosti 0, 1.

Prvi logički teorem, koji Boole deducira, u okviru svoje Algebre, jest: Ništa nije x i ne-x!

$$x \cdot (1 - x) = 0$$

Algebarski dokaz savršeno je jednostavan:

$$x \cdot (1 - x) = x - x^2 = x - x = 0.$$

Boole je veoma zadovoljan »da princip kontradikcije, koji je Aristotel smatrao fundamentalnim aksiomom svekolike filozofije«, neposredno slijedi iz njegova osnovnog zakona mišljenja $x^2 = x$. Princip isključenja trećeg dokazuje se s jednakom *matematičkom* jednostavnošću:

$$x + (1 - x) = x + 1 - x = 1.$$

Uočimo, međutim, da Boole pravila za $+$ ne formulira uvjetno, npr.

$$\text{ako } x \cdot y = 0, \text{ onda } x + y = y + x.$$

Znači li to da $x + y$ ima smisla i kada x i y nisu disjunktni? Da! Boole ne odbacuje takve izraze, dapače $x + x$, $x + 1$ (vidi gornji izvod principa isključenja trećeg) i slični izrazi, pojavljuju se često u njegovim dedukcijama. Takve izraze Boole zove neinterpretabilnima, oni ne predstavljaju klase, a to se formalno ogleda u tome što oni ne zadovoljavaju osnovni zakon mišljenja $x^2 = x$. Naprimjer:

$$(x + 1)^2 = x^2 + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 =$$
$$= x + x + x + 1 \neq x + 1$$

jer je

$$x + x \neq 0.$$

Naime, Boole u svojoj »običnoj« Algebri pretpostavlja »obično« pravilo

$$A \neq 0 \rightarrow A + A \neq 0$$

za svaki A, interpretabilan ili ne. (Uočite da prihvaćanjem tog pravila Boole onemogućava da se njegov $+$ intepretira kao ekskluzivna disjunkcija, tj. simetrična diferencija, jer za nju je uvijek $A + A = 0$.) Isto tako on pretpostavlja i »obično« pravilo po kojem

$$A + X = B \text{ ima jedinstveno rješenje } X,$$

za svaki A i B, interpretabilan ili ne. Boole želi svoje jednadžbe rješavati »običnim« algebarskim procedurama, koje zahtijevaju takvo pravilo.

Dakle, iako svi entiteti kojima se bavi Algebra logike (a to su klase) zadovoljavaju $x^2 = x$, Boole se u svojoj Algebri koristi i izrazima koji ne zadovoljavaju $x^2 = x$ (tj. izrazima koji nemaju značenja), tako da s njima slobodno algebarski operira u skladu s »običnom« algebrom, koju posebno ne specificira. (T. Hailperin je 1976, u *Boole's Logic and Propability*, rekonstruirao tu »običnu« Algebru, na temelju Booleove upotrebe. Riječ je o algebri karakteriziranoj sljedećim aksiomima koje Hailperin označava sa SH:

$$0 \neq 1$$

$$A + B = B + A \qquad A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$A + 0 = A \quad A \cdot 1 = A$$

$$A + X = 0 \textit{ ima jedinstveno rješenje } X.$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A + 1 \neq A \quad A \cdot 0 = 0$$

$$A \neq 0 \rightarrow A^n \neq 0 \quad A \neq 0 \rightarrow nA \neq 0.$$

A, B i C su bilo kakvi izrazi izgrađeni od varijabli za klase x, y, z... uz pomoć $+$, $\cdot$, 1 i 0; bili oni interpretabilni, $A^2 = A$, ili ne, $A^2 \neq A$.) Budući da se koristi punom algoritamskom slobodom numeričke algebre, Boole mora riješiti problem upotrebe izraza koji se javljaju tokom provedbe njegovih algoritama, a kojima nije moguće dati nikakvo logičko značenje. Njegov je odgovor lakonski i neuvjerljiv: Ako simboli imaju fiksnu interpretaciju, čiji su zakoni korektno utvrđeni (kao npr. zakoni za operacije s klasama) i ako se formalni procesi s tim simbolima dalje provode uz poštivanje tih zakona (kao npr. u Booleovoj »običnoj« Algebri), i ako je konačni rezultat takvih formalnih procesa interpretabilan, onda ne može biti sumnje u njegovu valjanost, čak i ako se u nekim međukoracima pojavljuju neinterpretabilni izrazi i primjenjuju neinterpretabilni procesi. To se načelo, ustvrdit će Boole, zasniva na jednom općem zakonu uma, po kojem se opći princip jasno manifestira u posebnom slučaju. Boole će ovdje citirati poznati primjer upotrebe imaginarnog $\sqrt{-1}$ u »međukoracima« trigonometrije.

Dakako, za današnjeg matematičara korektnost takve procedure opravdava se ne »jednim općim zakonom uma«, nego, naprimjer, uranjanjem područja realnih brojeva u odgovarajuće kompleksno područje. Mnogi su umanjivali značenje Booleova računa vjerujući, između ostalog, da takvo opravdanje njegova računa nije moguće. T. Hailperin je to opovrgao 1976. u ranije citiranoj knjizi. (Njegovo je uranjanje zapanjujuće jednostavno. Uskoro ćemo ga ukratko opisati.)

Na temelju dodatnih razmatranja, u kojima pokazuje kako se u okviru njegove algebre, jednadžbama koje vežu termine za klase, formuliraju primarne propozicije (koje izražavaju odnose među stvarima), Boole će zaključiti:

Vidjeli smo da se svaki sistem (primarnih, op. Z. Š.) propozicija može izraziti jednadžbama koje sadrže simbole x, y, z, koji se, kad god je intepretacija moguća, pokoravaju zakonima za sisteme s kvantitativnim simbolima, kojima su dostupne samo vrijednosti 0 i 1. Ali budući da formalni procesi zaključivanja ovise samo o zakonima koji ravnaju operacijama sa simbolima, a ne o prirodi njihove intepretacije, dopušteno nam je baratati gornjim simbolima x, y, z kao da su to kvantitativni simboli opisane vrste. *Možemo ustvari zaboraviti logičku interpretaciju simbola u danoj jednadžbi; smatrati ih kvantitativnim simbolima koji primaju vrijednosti 0 i 1; provoditi s njima kao takvima sve potrebne postupke rješavanja; konačno rekonstruirati ih do njihove logičke interpretacije.*

Napomena: Pri rekonstrukciji konačnog rezultata do interpretabilnog oblika Boole se koristi nekim specijalnim transformacijama (koje uključuju i njegove poznate »razvoje« funkcija), a koje se, čini se, ne mogu prema današnjim standardima potpuno opravdati zbog specifičnog Booleova dijeljenja nulom. T. Hailperin je, u prije citiranoj knjizi, pokazao da je to ipak moguće. Time je otklonjena sigurno najžešća kritika Booleova računa, kritika njegova dijeljenja. Druga, gotovo porazna kritika (npr. Dummetova) ticala se Booleova izražavanja partikularnosti u propozicijama, kao i baratanja s takvim propozicijama. Dosljedan svojoj algebarskoj koncepciji logike Boole vjeruje da se sve primarne propozicije mogu formulirati kao jednadžbe među terminima za klase. No njegov račun nema kvantifikatora kojim bi izrazio postojanje, nego on upotrebljava neodređeni klasni simbol v, pretpostavljajući (kada mu je to potrebno) njegovu nepraznost. Naprimjer, razmatrajući propoziciju »Svi ljudi su smrtni«, on je (u hamiltonovskoj tradiciji) razumije kao jednakost »Svi ljudi jesu neka smrtna bića«, pa je algebarski formulira kao jednadžbu

$$y = v \cdot x,$$

gdje y predstavlja klasu ljudi, x klasu smrtnih bića, a v klasu neodređenu u svakom pogledu osim što su neki njeni članovi smrtna bića. Za Boolea je v običan simbol za klasu, dakle istog tipa kao x, y, tj. i on se pokorava fundamentalnom zakonu $v^2 = v$ ili $v \cdot (1 - v) = 0$. Ipak, jasno je da v baš nije u svemu jednak običnim simbolima za klase, jer njegovo značenje ovisi o tome čemu je prefiksiran. Međutim, Booleovi postupci s tim simbolom, koji uvijek vode njegovoj eliminaciji, daju korektne rezultate. O čemu je riječ? Objašnjenje i ovaj put nalazimo kod Hailperina: Booleov se postupak može shvatiti kao tipična tehnika tzv. prirodnih dedukcija, kojom se odbacuje kvantifikator da bi se dedukcija provela na propozicionalnom nivou. Naime, Boole bi propoziciju »Svi x-ovi su neki y-i« trebao korektno formulirati upotrebom kvantifikatora $\exists$ kao $\exists v (y = v \cdot x)$. Spomenuta tehnika prirodne dedukcije sastoji se u tome da se iz egzistencijalne forme $\exists v F(v)$ ispusti kvantifikator, pa se zatim iz $F(v)$ pokušava deducirati rezultat P koji ne sadrži v. Ako se to uspije, jasno je da P slijedi iz $\exists v\, F(v)$. Dakle, kada Boole umjesto $\exists v (y = v \cdot x)$ piše $y = v \cdot x$, on ispušta kvantifikator, da bi, zatim, eliminacijom simbola v došao do rezultata koji ne sadrži v, i koji je uistinu posljedica korektne kvantificirane forme. (Kraj napomene.)

Vratimo se Booleovu »opravdanju« neinterpretabilnih koraka njegova računa. Ono je formalno, slično formalnom »opravdanju« upotrebe imaginarnog elementa u algebri. Rješavamo li neki problem u vezi s realnim veličinama, postupci rješavanja (npr. vađenje korijena) mogu dovesti i do imaginarnih veličina, no mi formalno korektno provodimo postupke, pa ako na kraju dođemo do realnog rezultata, smatramo ga korektnim. Ili, riješavamo li algebarsku jednadžbu koju zadovoljava traženi prirodni broj, koristimo se svim algoritmima algebre, bez obzira na to ima li njihova primjena smisla u području prirodnih brojeva, i ako na kraju kao rezultat dobijemo prirodni broj, smatramo ga korektnim rješenjem problema. Moderni matematičar te postupke sadržajno opravdava time što zna da su realni brojevi dio algebre kompleksnih brojeva u kojoj su dopušteni postupci relevantni za rješavanje njegova problema; ili u drugom slučaju time što zna da su prirodni brojevi dio relevantne šire algebre, npr. algebarskih brojeva. Boole ne predlaže takvo prošireno područje za svoje osnovno područje klasa. On se samo koristi formalnim procedurama koje ga pretpostavljaju. To je njegova slabost, koju mnogi kritiziraju.

Međutim, preciznije govoreći, Boole je ipak suočen s nešto jednostavnijom situacijom, pa njegovo »opravdanje« možda i nije tako beznadno. Njegova algebra klasa, on to jasno uočava i ističe, istovjetna je algebri brojeva 0 i 1. S druge strane Boole zna da je algebra brojeva 0 i 1 dio šireg područja Z ili čak Q, u kojem su dopušteni svi relevantni algebarski algoritmi. Ne znači li to da su oni dopušteni i u njegovoj interpretaciji algebre kao algebre klasa (vs. algebre brojeva 0 i 1)?! Govoreći današnjom terminologijom, ne pretpostavlja li Boole sljedeće: Imaju li aksiomi A_1 dva modela M_1 i N_1, i zadovoljava li model M_2 koji je proširenje od M_1 aksiome A_2, tada postoji i model N_2, koji je proširenje od N_1 i koji također zadovoljava aksiome A_2. Riječ je o pretpostavci koja bi automatski osiguravala potrebno proširenje područja klasa, ali za koju se, kada je formuliramo današnjom terminologijom, ne može reći da je plauzibilna (prije bismo rekli da je oboriva).

No, bez obzira na eventualni opći rezultat, koji bi automatski riješio i poseban Booleov problem, Hailperin je našao konkretno proširenje područja klasa koje rješava poseban problem (nezavisno od općeg). Vrijednosti Booleovih varijabli, i od njih izgrađenih *interpretabilnih* izraza, jesu klase odabranog univerzuma rasprave U (koji je u Booleovu računu označen s 1). Dakle, x, y, $x \cdot (1 - y) + y$, itd. predstavljaju potklase univerzalne klase U, dok su $x + x$, $1 + x$, itd. »imaginarni elementi« bez interpretacije (tj. sigurno nisu klase), koje će tek Hailperin uspješno interpretirati. Naime, svaku potklasu od U možemo poistovjetiti s njenom karakterističnom funkcijom, iz univerzuma $\{0, 1\}^U$ karakterističnih funkcija definiranih na U, a taj je univerzum prirodno proširiti do univerzuma Z^U, cjelobrojnih funkcija definiranih na U, u kojem ranije neinterpretabilni izrazi dolaze do svoje interpretacije. Hailperin je uveo to proširenje i pokazao kako se njime može opravdati Booleov račun (riješivši još i dodatni problem dijeljenja u Booleovu računu). Mi se time ovdje nećemo baviti, ali uočite npr. da je 'A' bulovski interpretabilan izraz (tj. $A \in \{0, 1\}^U$) ako $A \cdot A = A$, što odmah opravdava Booleov »fundamentalni zakon mišljenja«.

Booleovi neposredni sljedbenici nisu krenuli Hailperinovim putem. Njihov je put vodio onome što danas zovemo Booleovom algebrom (a što nije prije opisani Booleov račun). Deset godina po objavljivanju Booleovih *Laws of Tought* pojavljuje se Jevonsova *Pure Logic or the Logic of Quality apart from Quantity*, koja izlaže jedan račun logike pojmova, za koji autor kaže da se »temelji na računu profesora Boolea«, ali, što je značajna razlika, upotrebljava isključivo »postupke čije je značenje samo po sebi evidentno«. Naime, u Jevonsovu sistemu (koji nije algebarski, što je ovdje manje značajno jer su ga kasniji sljedbenici algebraizirali), svi su termi logički interpretabilni zahvaljujući promijenjenoj interpretaciji zbrajanja. Jevons $x + y$ interpretira, na danas uobičajeni način, kao »ili x ili y ili oboje«, dakle kao uniju. Logički gledano, ta je promjena stvar konvencije, ali njenim prihvaćanjem dolazi do značajnih promjena u računu. To više nije obična (matematička) algebra, već posebna (logička) algebra sa svojim specifičnim zakonima. S druge strane, u njoj nema problema interpretabilnosti, npr. sada je $x + x = x$, $1 + x = 1$, itd. Dapače, zakon $x + x = x$ dovodi do veoma zanimljive simetrije između sume i produkta. Booleova interpretacija sume uzrokovala je logičku neinterpretabilnost izraza $x + x$. Kada se takav izraz pojavio u njegovu računu, bio je podvrgnut zakonima obične algebre, što je značilo da je $x + x = 2x$, pa su se tako uvedeni numerički koeficijenti morali eliminirati prije spomenutim posebnim postupcima, da bi se došlo do logičke interpretacije konačnih rezultata. Naravno, uz Jevonsovu interpretaciju (tj. uz $x \cdot x = x$ i $x + x = x$) takvi se numerički koeficijenti više ne pojavljuju, pa se logička interpretabilnost svih terma može opisati i kao eliminacija kvantitete iz algebre (što i nalazimo u Jevonsovu naslovu). Jevons je uveo još jednu značajnu novinu. Potpuno je eliminirao dijeljenje iz svog sistema, a umjesto Booleove razlike uveo je negaciju (tj. komplement). Takav su sistem dalje razvili Peirce (koji je npr. uveo relaciju $\subset$) i Schröder shvaćajući ga, za razliku od Jevonsa, a u skladu s Booleom, ekstenzionalnim i jasno upozoravajući na još dvije njegove različite interpretacije koje je Boole miješao: na algebru (koja je originalno interpretirana kao algebra klasa) shvaćenu kao algebru monadskih propozicionalnih funkcija, i uz dodatni zakon »$x = 0$ ili $x = 1$«, kao algebru propozicija. Krajnji rezultat tog razvoja ono je što danas zovemo Booleovom algebrom, a što bi bilo pravilnije zvati (kao što čini C. I. Lewis) Boole-Schröderovom algebrom. Njeni su osnovni pojmovi konstante 0 i 1, unarna operacija $-$, binarne operacije $+$ i $\cdot$ te relacija $\subset$, a aksiomi su joj (u jednoj od varijanti):

$$1 = -0$$

$$x + y = -((-x) \cdot (-y))$$

$$x \subset y \textit{ akko } x \cdot y = x$$

$$x \cdot x = x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$\textit{ako} \quad x \cdot (-y) = 0 \quad \textit{onda} \quad x \subset y$$

$$\textit{ako} \quad x \subset y \text{ i } x \subset -y \quad \textit{onda} \quad x = 0.$$

(Naravno, 0, $+$ i $\subset$ mogu se eliminirati iz fonda osnovnih pojmova tako da prva tri aksioma smatramo definicijama.)

Ovdje nećemo posebno objašnjavati kako se ta algebra, uz odgovarajuće interpretacije, primjenjuje kao račun logike klasa (pojmova), monadskih propozicionih funkcija ili pak propozicija (to je inače dobro i opće poznato). Dat ćemo samo jedan trivijalan primjer. Što možemo zaključiti iz premisa:

Svi y su x i

Nijedan x nije z?

One su u Boole-Schröderovoj algebri predstavljene jednadžbama

$$y \cdot (-x) = 0 \quad \text{i}$$

$$x \cdot z = 0.$$

Zbrojimo li te jednadžbe, dobivamo

$$y \cdot (-x) + x \cdot z = 0.$$

No u našoj se algebri može dokazati da iz $A \cdot x + B \cdot (-x) = 0$ slijedi $A \cdot B = 0$. Dakle, iz prethodno istaknute jednadžbe slijedi

$$y \cdot z = 0.$$

Interpretiramo li tu jednadžbu, dolazimo do zaključka:

Nijedan y nije z.

Zanimljivo je razvoj od originalnog Booleova računa do moderne Booleove (Schröderove) algebre razmotriti u okviru Hailperinove interpretacije Booleova računa. Dakle, Hailperin je izdvojio temeljne zakone Booleova računa (vidi gore njegovu SH aksiomatizaciju) i prvi je dokazao njihovu konzistentnost našavši im model $\langle Z^U, +, \cdot, 0, 1\rangle$. Iz svojih SH aksioma za $\langle Z^U, +, \cdot, 0, 1\rangle$ (a to su rekonstruirani aksiomi Booleova računa) Hailperin lako izvodi teorem koji daje osnovna svojstva bulovski interpretabilnih elemenata.

Teorem: Neka je $\langle H, +, \cdot, 0, 1\rangle$ proizvoljni model aksioma *SH*, a B neka je podskup idempotentnih elemenata od H, i neka varijable $x, y, z, \ldots$ (kao u Boolea) primaju vrijednosti samo u B. Tada vrijedi:

(1) $x^2 = x$ i $x \cdot (1 - x) = 0$

(2) $(1 - x)^2 = 1 - x$

(3) $(x \cdot y)^2 = x \cdot y$

(4) $(x + y)^2 = x + y$ *akko* $x \cdot y = 0$

(5) $(x + y - x \cdot y)^2 = x + y - x \cdot y$

(6) $(x + y - 2x \cdot y)^2 = x + y - 2x \cdot y$.

Teorem pokazuje da skup bulovski interpretabilnih idempotenata B, koji nije zatvoren na operaciju zbrajanja, jest zatvoren na operacije oduzimanja-od-1 (komplementiranja) i množenja, ali i na operaciju

$$x + y - x \cdot y, \text{ kraće } x +_B y,$$

koju danas zovemo bulovskim zbrajanjem, i na operaciju

$$x + y - 2x \cdot y, \text{ kraće } x +_\Delta y,$$

koju danas zovemo simetričnom diferencijom. Lako se dalje dokazuje da je struktura $\langle B, +_B, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$, gdje je $\bar{A} = 1 - A$, Booleova algebra; i nadalje da je struktura $\langle B, +_\Delta, \cdot, 0, 1\rangle$ Booleov prsten, kao i da su te strukture ekvivalentne preko veza

$$1 - x = 1 +_\Delta x$$

$$x +_B y = x +_\Delta y +_\Delta x \cdot y$$

$$x +_\Delta y = x \cdot (1 - y) +_B y \cdot (1 - x).$$

Možemo stoga reći da dalji povijesni razvoj Booleova računa, koji je težio odbacivanju neinterpretabilnih elemenata, tj. koji je težio svođenju »Booleove« strukture H na njen interpretabilni dio B, biva omogućen nalaženjem Jevonsove zamjene $+_B$ za Booleov $+$, koja je za razliku od $+$ zatvorena operacija na B (kasnije je nađena i alternativna ekvivalentna zamjena $+_\Delta$, koja vodi matematički prepoznatljivoj strukturi, prstenu).

No, čitav taj razvoj nosi neka bitna zajednička obilježja. I Booleov račun i Boole-Schröderova algebra matematički su sustavi (računi) uz pomoć kojih je moguće specificirati određeni univerzum rasprave (najčešće označen sa 1), kao i postupke rješavanja određenih problema u vezi s njim. Naravno, interpretacija kojom se određuje što jest univerzum nije jednoznačna (univerzum je promjenljiv) i tek je jedna od njih baš logička, što je posebno naglašeno u Booleovu računu, koji je uostalom »obična« algebra, između ostalog i s »običnom« matematičkom interpretacijom. Dakle, riječ je o matematičkim sustavima koji opisuju matematičke strukture, koje mogu biti i logički interpretabilne, što onda takav sustav može kvalificirati i kao matematičku analizu logike (tako je Boole i nazvao prvi rad u kojem izlaže svoj sustav: *Mathematical Analysis of Logic*).

U tom smislu, tj. ako pod nazivom matematička logika razumijemo matematičku analizu logike ili kraće matematiku logike, Boole jest otac i stvaratelj matematičke logike.

Napomena: Ovdje valja dodati da današnje shvaćanje čiste matematike, kao znanosti što se bavi matematičkim sustavima, koji opisuju matematičke (najčešće skupovne) strukture, nije tipično shvaćanje Booleova vremena, nego su Boole i njegovi sljedbenici dobrim dijelom baš zaslužni za uvođenje tog shvaćanja. Zato će Russell ustvrditi da je Boole otac čiste matematike (a ujedno je, vidjeli smo, i otac nečiste matematičke logike).

3. Gottlob Frege

Ako je Boole otac i stvaratelj matematičke logike, što je Frege? Najkraći je odgovor: otac i stvaratelj nečega drugog, što se također zove matematičkom logikom. Da je to što je on izložio u svojoj *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens** iz 1879. zaista nešto drugo, Fregeu bijaše potpuno jasno. Ne i njegovim kritičarima.

Naslov njegova djela protumačen je »bulovski«, kao aritmetiziranje logike. Recenzirajući *Begriffsschrift* za *Zeitschrift für Mathematik und Physik* (1880), Schröder je usporedio Booleovu i Fregeovu notaciju zaključivši da je Booleova bolja, jer je uzeta iz aritmetike. Zatim je pogrešno ustvrdio da doseg Fregeove logičke analize nije veći od dosega Booleove. U svojoj recenziji za Mind (1880) Venn je došao do istog zaključka, smatrajući Fregea »jednim od onih slučajeva u kojima ingeniozni čovjek razrađuje jednu shemu, u ovom slučaju vrlo nezgrapnu, ne znajući da je bilo što te vrste već ranije učinjeno«. U svojoj recenziji za *Revue philosophique* (1879), Tannery je Fregeovu zamjenu subjekta i predikata, argumentom i funkcijom (usp. dolje), proglasio neplodnom i nepoželjnom. Vidjevši sve to, Frege će napisati članak u kojem objašnjava bitne razlike između svojeg i Booleova sustava, i koji će, navodno zbog duljine, biti odbijen u tri časopisa, da bi potom bila odbijena i kraća verzija. Ipak, u ne baš čitanim *Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft für das Jahr* 1882, jenski profesor Frege objavljuje *Über den Zweck der Begriffsschrift*, kao svoj odgovor kritičarima. Tu će ustvrditi da njegova logika, za razliku od Booleove, nije samo **calculus ratiocinator** već je **lingua characterica** (nešto kao Leibnizova characteristica universalis). Razumijevanje te Fregeove opozicije pružit će nam jasan uvid u neke bitne razlike dvaju sustava, ali će nam istovremeno otkriti ključne komponente povijesti matematičke logike (na što je dobro upozorio Van Heijenoort u *Logic as calculus and logic as language*, 1967).

Prije nego objasnimo značenje Fregeove opozicije, objasnit ćemo, radi lakše usporedbe, njegove osnovne doprinose (matematičkoj) logici. To su:

(a) Istinosno-funkcionalne definicije veznika, posebno kondicionala, uz odgovarajući račun propozicija.

(b) Zamjena klasične (silogističke, bulovske) subjekt-predikat analize propozicije suvremenom argument(i)-funkcija analizom, koje je značenje toliko da se danas ona naziva subjekt-predikat analizom.

(c) Teorija kvantifikacije, bazirana na sistemu aksioma i pravila zaključivanja, i u vezi s tim jasno izveden pojam formalnog sistema.

(d) Logička definicija beskonačnog niza prirodnih brojeva.

Ad (a). Terme Booleova računa i Boole-Schröderove algebre moguće je interpretirati kao propozicije, pa su ti računi uz tu interpretaciju propozicioni računi. Naravno da veznici, koji ustrojavaju propozicije prirodnog jezika (a one su sada interpretanti matematičkih simbola), time nisu definirani, kao što ni geometrijski račun ne definira konstituense fizičkog prostora, koji su njegovi interpretanti. U Fregea su propozicije pravi konstituensi njegove logike, a ne jedna njena moguća interpretacija. On konstruira jedan umjetni jezik kao izražajni medij svoje logike, definirajući veznike (koji ustrojavaju propozicije njegove umjetne *Begriffsschrift*) kao istinosne funkcije. Pravila za baratanje tako ustrojenim jezikom čine njegovu logiku propozicija.

Ad (b). Međutim, Frege ne ostaje na tom nivou »apstraktne logike«, u kojem se elementarne propozicije dalje ne analiziraju, pa su time reducirane na svoje istinosne vrijednosti. Uvođenjem predikata, varijabli i kvantifikatora njegove se propozicije artikuliraju i postaju nosioci značenja (a ne tek pukih istinosnih vrijednosti). Novi jezik omogućava simboličko zapisivanje čitavih (čak i svih) znanstvenih područja, poglavito matematike, dakle nešto što je daleko izvan dosega propozicionog računa. To je omogućeno zamjenom klasične subjekt-predikat analize Fregeovom argument(i)-funkcija analizom.

Taj epohalni (po Tanneryju promašeni!?) korak, kojim je stvorena moderna logika, zaslužuje detaljnije objašnjenje, posebno stoga što je danas tako čvrsto inkorporiran u same temelje logike da se mnogima čini da je tu oduvijek i bio. Prije svega upozorimo da se pod subjekt-predikat analizom pomišlja na više međusobno inkompatibilnih stvari. Ovdje ćemo spomenuti tri, koje nam se čine osnovnima za razumijevanje naše rasprave. Prva je, da se subjekt i predikat izdvajaju iz rečenice po gramatičkim kriterijima (naravno, po kriterijima tzv. površinske gramatike). Ta nas analiza ovdje neće zanimati. Drugo je gledište da i subjekt i predikat označavaju opća svojstva koja su vezana kopulom,

* Pojmovno pismo, po aritmetičkom uzoru izgrađen formalni jezik čistog mišljenja.

a mogu biti i kvantificirana (subjekt u Aristotela, a i predikat u mnogih novovjekih logičara; vidi gore). To je klasična analiza Aristotela i njegovih sljedbenika, a posebno, što je nama zanimljivo, to je i analiza bulovaca. Treće je shvaćanje da subjekt(i) zonačava(ju) individuum(me), dok je predikat izraz koji se istinito ili neistinito pripisuje tom (tim) individuumu(mima). To je Fregeova analiza, koju je on u opreci spram druge zvao argument(i)-funkcija analizom, a koja je danas (bar u logici) dobila status i ime osnovne subjekt-predikat analize. Evo nekoliko primjera. U rečenici

'Sve nestaje',

gramatičar će vidjeti subjekt 'Sve' i predikat 'nestaje', a logičar, ni aristotelovac ni fregeovac, neće u njoj naći ni subjekta ni predikata. Aristotelovac će je moći razumjeti kao alternativu za

'Sva bića su nestajuća',

u kojoj je 'biće' (kvantificirani) subjekt, a 'nestajuće' predikat, dok će je fregeovac razumjeti kao rečenicu

'$\forall x$ (nestaje x)',

čijem ćemo se značenju još vratiti. U rečenici

'Sokrat je mudriji od Platona'

gramatičar vidi subjekt 'Sokrat' i složeni predikat 'je mudriji od Platona'. Aristotelovac će imati problema s uklapanjem te rečenice u svoje sheme (kao i bulovac), a pokušaji će se sastojati u tome da se, uz *apsolutne pojmove*, npr. biće, čovjek, smrtan itd., kao značenja subjekata i predikata, uvedu i *relativni pojmovi*, npr. brat, otac, mudriji od Platona itd. (Danas, zahvaljujući fregeovskom razvoju logike, znamo da je takav pokušaj svođenja logike relacija na logiku svojstava, ili stručnije, svođenje poliadske logike na monadsku logiku, neostvariv.) Fregeovac će u toj rečenici vidjeti dva subjekta 'Sokrat' i 'Platon' i dvomjesni predikat 'je mudriji od', ili, kako bi rekao Frege, dva argumenta: Sokrat i Platon, i jednu funkciju dviju varijabli: je mudriji od.

Izložit ćemo ukratko osnovne crte nove fregeovske subjekt-predikat analize. Subjekt je lingvistički entitet (dio rečenice), i to tzv. označavajući dio rečenice. On označava (referira na, imenuje, identificira) neki individuum (objekt, stvar). Predikat je također lingvistički entitet (dio rečenice), koji ima određeni broj mjesta, takvih da se popunjavanjem tih mjesta sa subjektima dobiva rečenica. Ta je rečenica istinita ako predikat vrijedi o individuima koje označavaju uvršteni subjekti. Za rečenice dobivene na taj način kažemo da imaju (fregeovsku) subjekt-predikat formu. Naprimjer, rečenica

'Sokrat je mudar'

ima (fregeovsku) subjekt-predikat formu, kao što je ima i gornja rečenica o Sokratu i Platonu.

Mnoge rečenice nemaju (fregeovsku, što više nećemo ponavljati) subjekt-predikat formu. Naprimjer, matematički iskaz:

'Broj e nije racionalan, a veći je od 2 i manji od 3.'

nema subjekt-predikat formu, ali se fregeovski interpretira kao istinosno-funkcionalna veza rečenica koje imaju tu formu:

'$\neg$ (e je racionalan) $\wedge$ (e je veći od 2) $\wedge$ (e je manji od 3)'.

Bitno je složenija situacija s kvantificiranim rečenicama. Naprimjer, matematički iskaz:

'Postoji prost broj veći od 10^6',

analiziran fregeovski, zapisao bi se naprimjer ovako:

'$\exists x$ (x je prost broj $\wedge$ x je veći od 10^6)'.

Ta rečenica nema subjekt-predikat formu. Ona je dobivena, primjenom egzistencijalnog kvantifikatora $\exists x$ na lingvistički entitet

'x je prost broj $\wedge$ x je veći od 10^6', koji je opet konjunkcija svojih dijelova

'x je prost broj'

'x je veći od 10^6'.

Ti su dijelovi izgrađeni od jednomjesnog predikata 'je prost broj', odnosno dvomjesnog predikata 'je veći od', na čija je mjesta samo jednom uvršten označavajući izraz, tj. subjekt '10^6', dok je na druga dva mjesta uvrštena varijabla 'x'. Dakle ti dijelovi nemaju subjekt-predikat formu.

Pojednostavit ćemo stvari tako da načas zanemarimo konjunkciju i razmotrimo sljedeći par rečenica.

'3 je prost broj' i

'$\exists x$ (x je prost broj)'.

Prva ima subjekt-predikat formu, a druga je nema. Prvom se tvrdi da predikat 'je prost broj' vrijedi o individuumu 3, označenom subjektom '3'. Druga je dobivena kvantifikacijom lingvističkog entiteta 'x je prost broj', kojim kao da se »tvrdi« da predikat 'je prost broj' vrijedi o x, no budući da varijabla 'x' ništa ne označava, onda ni 'x je prost broj' zapravo ništa ne tvrdi. Međutim, dvostrukim ponavljanjem varijable 'x' u '$\exists x$ (x je prost broj)' ostvaruje se unakrsno referiranje. Dok u '3 je prost broj' subjekt '3' idenficira objekt, o kojem se zatim tvrdi da jest prost broj, dotle se u '$\exists x$ (x je prost broj)' s '$\exists x$' tvrdi da egzistira neki objekt, a potom se o tom istom objektu tvrdi da je prost broj. Moglo bi se stoga reći, iako '$\exists x$ (x je prost broj)' nema subjekt-predikat formu, da je 'x je prost broj' ima u nešto proširenom značenju. Uzastopnim kvantificiranjem takvih subjekt-predikat formi, u proširenom značenju, dobiva se puna izražajna snaga fregeovske teorije kvantifikacije, koja znatno nadilazi izražajnu snagu bulovske »apstraktne logike«. Naprimjer, fregeovska formulacija matematičkog iskaza

'Za svaki broj postoji prost broj koji je od njega veći'

jest sistematski dostupna rečenica

'$\forall x\ \exists y$ (x je broj $\rightarrow$ (y je prost broj $\wedge$ y je veći od x))',

dok je odgovarajuća bulovska, tj. monadska nemoguća.

Ad (c). Pravila za baratanjem tako ustrojenim jezikom kvantifikacije nisu drugo do teorija kvantifikacije sa svojim aksiomima i pravilima zaključivanja. To je prvi primjer modernog formalnog sistema. Naravno, Frege ne daje samo taj jedan primjer nego je potpuno svjestan i značenja općeg pojma formalnog sistema (vidi dolje u vezi s pojmom pravila u formalnom sistemu).

Ad (d). Najbolja potvrda izražajnih i deduktivnih mogućnosti Fregeove logike, tj. njegove teorije kvantifikacije, jest logička definicija niza prirodnih brojeva, koja je njome omogućena. Ovdje nećemo ulaziti u detalje te sofisticirane logicističke definicije, jer čitatelja možemo uputiti na prethodni članak u kojem je prikazana, u biti ekvivalentna, Dedekindova definicija. Bitna je razlika u tome što je Frege svoju formulirao u okviru potpuno izgrađenog sistema formalne logike (tj. u okviru njegove teorije kvantifikacije), dok je Dedekind svoju temeljio na intuitivnoj logici i isto takvoj teoriji skupova (ne približivši se modernom pojmu formalnog sistema).

Spomenimo još i fundamentalne matematičke korijene logicizma, koji objašnjavaju i Fregeove osnovne motive. Kritika infinitezimalnog računa i vraćanje matematičara problemu njegova zasnivanja, sredinom 19. stoljeća (usp. članak o Cantoru), jasno su ukazali na potrebu zasnivanja aritmetike realnih brojeva. To je razdoblje kritičkog pokreta u matematici, razdoblje u kojem jedan Weierstrass može postati vrhunski matematički autoritet (*Notre maître à tous*, kako je uskliknuo Hermite), razdoblje u kojem se intuicija prostora i vremena odbacuje kao osnova razumijevanja kontinuuma. U tom razdoblju Weierstrass, Cantor i Dedekind aritmetiziraju kontinuum realnih brojeva, da bi posljednji uskoro postavio i problem geneze samih prirodnih brojeva, ovim riječima:

> »Kada aritmetiku (algebru, analizu) nazivam samo jednim dijelom logike, time već iskazujem da pojam broja smatram sasvim nezavisnim od predodžbi ili intuicija prostora i vremena, da ga, naprotiv, smatram neposrednim proizvodom čistih zakona mišljenja (*Was sind und was sollen die Zahlen*, 1888).

Tu se pojavljuje mišljenje koje ne može imati sluha za bulovsku logiku, koja je primijenjena matematika; za logiku koja svoju sigurnost nalazi u matematici. To je mišljenje u kojem se sigurnost matematike traži u njenoj logici.

Taj korjeniti obrat zbio se usvajanjem i dosljednim razvijanjem još jednoga aspekta kritičkog pokreta u matematici. Vodeći matematičari, s kraja 19. stoljeća, imali su jasno zacrtan ideal matematičke teorije, kao teorije koja se deducira iz određenog broja matematičkih pretpostavki u skladu s logičkim načelima. Bio je to ideal teorije, koja odbacuje intuiciju čak i kao sredstvo argumentacije, a čijem su prihvaćanju mnogo doprinijeli i bulovci. Radikalniji mislioci, poput Peana, uvidjeli su da se tako shvaćena deduktivna teorija može realizirati samo unutar umjetno stvorenog simboličkog jezika, neopterećenog intuitivnim sadržajima prirodnih jezika. Taj je jezik matematika uglavnom već razvila. Međutim, Peano (u skladu s novim shvaćanjem deduktivne teorije) smatra da je potrebno učiniti i ono što u matematici nije provedeno: formalizirati i same postupke matematičke argumentacije. To je on donekle i proveo u svojim *Formulaire de mathematiques,* koristeći se pritom bulovskim formulacijama logike.

Spoj tog peanovskog aspekta kritičkog pokreta s onim aspektom što ga predstavlja Dedekind, a koji je već ustvrdio da su osnovni konstituensi matematičkih propozicija (prirodni broj, cijeli broj, racionalni broj, realni broj) logički definabilni, upozorava na mogućnost da je matematika tek nadgradnja njene temeljen logike. Konkretno prihvaćanje tog logicističkog stava, i čitav program njegova opravdavanja i dokazivanja (spajanjem spomenutih aspekata kritičkog pokreta u matematici) proveo je Russell.

Fregeova veličina je u tome što je on to sve učinio ne samo prije Russellova spajanja tih dvaju aspekata u *The Principles of Mathematics,* iz 1903, nego i prije jasne formulacije prvog aspekta u Dedekinodvu radu iz 1888, i dakako prije još kasnijih i ne baš sasvim jasnih Peanovih formulacija drugog aspekta iz 1889. Sve to nalazimo već u Fregeovoj *Begriffsschrift* iz 1879, s jasnoćom i preciznošću kakvu kasnije nije dosegao nitko od spomenutih, izuzev Dedekinda, ali samo u svojem (prvom) aspektu. (Takav povijesni tok bio je moguć zato što je Fregeov rad naišao na potpuno nerazumijevanje, pa je dvadeset godina ostao gotovo nepoznat, dok na njegovo značenje nije upozorio Russell, a postao je opće priznat, u današnjem smislu, tek pedeset godina nakon pojave u javnosti.)

Vidimo dakle da je porijeklo Fregeove logike u njegovu (Dedekindovu, Peanovu, Russellovu itd.) logicizmu, koji svu čistu matematiku smatra dijelom logike, što se nalazi u temeljima matematike, a nju samu drži nadgradnjom te temeljne logike.

U tom smislu, ako pod nazivom matematička logika razumijemo (temeljnu) logiku matematike, Frege jest otac i stvaratelj matematičke logike.

Dakle, matematiku logike stvorio je Boole, a logiku matematike stvorio je Frege. Samo su po tome obojica stvoritelji matematičke logike, iako ne stvoriše isto. Razliku je potpuno razumio Frege, kroz svoju opoziciju *calculus ratiocinator* vs. *lingua characterica,* koju ćemo sada lakše objasniti. U pozadini te opozicije jest ono što Heijenoort (u već spomenutom članku) zove univerzalnošću Fregeove logike.

Univerzalnost njegove *linguae charactericae* jest, prije svega, izražajna univerzalnost njegove teorije kvantifikacije, koja nedostaje propozicionom računu. Booleovu logiku Frege često zove »apstraktnom logikom«, misleći pritom na to da atomarne propozicije Booleove logike ostaju neanalizirane, pa se time reduciraju na svoje vrijednosti istine. Njegova teorija kvantifikacije artikulira atomarne propozicije, tako da one dobivaju subjekt-predikat formu (vidi gore), i time postaju nosioci značenja. Time je omogućeno da se u njegovu, po uzoru na matematiku (a uglavnom zbog matematike), umjetno stvorenom jeziku izraze čitava znanstvena područja (poglavito i najvažnije matematička). Frege je stvoritelj jedne *linguae,* a ne samo još jednog *calculusa.* Booleova logika, koja nije lingua, a jest još jedan (ovaj put logički) *calculus,* teorija je koja se u okviru prirodnog jezika bavi algebarskim odnosima među propozicijama. Ta teorija, izvedena u okviru prirodnog jezika, usporediva je s mnogim drugim matematičkim, naročito algebarskim, teorijama, npr. s teorijom grupa. Fregeova logika izvodi se u okviru svojeg vlastitog (samodovoljnog) za to stvorenog jezika, Begriffsschrifta.

Međutim, opozicija između *calculusa ratiocinatora* i *linguae charactericae* bitno nadilazi razliku između propozicionog računa i teorije kvantifikacije. Univerzalnost Fregeove logike izražava se na neke još bitnije načine. U njegovoj teoriji kvantifikacije, vezane individualne varijable primaju kao svoje vrijednosti sve objekte. To nije nešto po potrebi promjenljivo; od rasprave do rasprave. Dakle, to nije Booleova univerzalna klasa, ili De Morgenov univerzum rasprave (označen s '1'), koji ontološki ne obavezuju i po potrebi su promjenljivi. Univerzum rasprave sadrži samo ono što razmatramo u određenom trenutku, i u danom kontekstu. Za Fregea je »promjena univerzuma« contradictio in adjecto. Njegov univerzum je jedan i jedini univerzum (dakako, on nije nužno univerzum fizičkih objekata, jer za Fregea mnogi objekti nisu fizički). Fregeov univerzum sadrži sve što jest, i to je fiksno.

Koncepcija univerzalne logike ima važne posljedice. Najvažnija je ta da ništa ne može, i ne treba, biti kazano izvan sistema. Zato Frege nikada ne razmatra tzv. metalogička pitanja, npr. konzistentnost, nezavisnost, potpunost i sl. Naravno, Frege je potpuno svjestan da svaki formalni sistem posjeduje pravila, koja se ne izražavaju unutar samog sistema, ali upozorava da ona **ne pretpostavljaju** nikakvu intuitivnu logiku, već da su ona »pravila za upotrebu naših znakova«. U takvom manipuliranju znakovima, kojemu nije potrebna nikakva (intuitivna) logika, Frege uočava bit i osnovne prednosti formalnog sistema (usp. gore).

Osnovni pojam tako shvaćene univerzalne logike jest dokazivost (ili izvedivost), a nikako naprimjer valjanost (temeljena na naivnoj teoriji skupova kao intuitivnoj logici). Takav univerzalni sistem jest i Russellova **Principia mathematica,** iako je donekle modificiran uvođenjem tipova. Njegov je univerzum stratificiran, no opet je to jedan jedini univerzum, a ne promjenljivi univerzum rasprave. Kada Gödel 1930, na početku svojeg rada o potpunosti logike, opisuje aksiome i pravila **Principiae mathematicae,** te potom dodaje:

> »Naravno, kada slijedimo takav pristup, odmah se postavlja pitanje je li početno postulirani sistem aksioma i pravila zaključivanja potpun, tj. dostaje li on za izvođenje svake (istinite, op. Z. Š.) logičko-matematičke propozicije ili je moguće da postoje istinite propozicije... koje nije moguće izvesti u sistemu što ga razmatramo«,

korisno je sjetiti se da su ti redovi, po kojima se »*odmah* postavlja pitanje...«, napisani 20 godina nakon pojave **Principia,** a da je pitanje koje se »*odmah* postavlja« prvi postavio

Hilbert dvije godine prije toga (dakle 18 godina nakon pojave **Principia**). Za to, da se prirodno i odmah nametne takvo pitanje, odsudan je dalji razvoj logike, kojim ćemo se (ukratko) pozabaviti u sljedećem odjeljku. Za to, da se ono faktički ne pojavljuje odmah, bitna je univerzalnost Fregeove i Russellove logike. Univerzalni formalni jezik (univerzalne formalne logike) istiskuje i zamjenjuje prirodni jezik (matematike i znanosti), pa se zadržavanje pojma valjanosti, koji se temelji na intuitivnoj teoriji skupova, ne uklapa u tu znanstvenu rekonstrukciju jezika. Jedino pitanje potpunosti koje se uopće može pojaviti jest, kako je govorio Herbrand, pitanje *eksperimentalne* potpunosti: Da li su sistemom obuhvaćeni svi intuitivni načini argumentacije, koji se stvarno primjenjuju u znanosti? Odgovor na to eksperimentalno pitanje o potpunosti jest ono čime se bave logicisti od **Begriffsschrifta** do **Principia mathematicae.**

4. Nastavljači

Najistaknutiji pojmovi moderne logike jesu pojam formalnog sistema i pojam skupovno-teorijske interpretacije. Oni su blisko vezani. Sintaktički konstruirani formalni sistem interpretacijom dolazi do svoje skupovno-teorijske semantike.

Pojam formalnog sistema stvorio je Frege kada je u svojem *Begriffsschiftu* napisao da su pravila formalnog sistema »pravila za upotrebu njegovih znakova«. Naravno, pojam (višestruke) skupovno-teorijske interpretacije formalnog sistema njemu je stran.

Povijest tog pojma nije tako jasna. Pojam skupovno-teorijske posljedice (tj. skupovno-teorijske semantičke posljedice) izvodi se iz pojma interpretacije već u Bolzanovim *Wissenschaftslehre* iz 1837; naravno, ne za formalni jezik (u Bolzana ne nalazimo formalnih zapisa, on se služi običnim jezikom). Propozicija C slijedi iz propozicija $H_1, H_2, \ldots, \ldots, H_n$ s obzirom na neke zajedničke konstituense, ako i samo ako svaka supstitucija, provedena iz određene klase, na mjesto tih konstituensa, čini C istinitom kada god čini sve $H_1, H_2, \ldots, H_n$ istinitima. Bolzanovo je otkriće ostalo izolirano, a ni on sam ga nije bitnije razvio (niti se njime u svojim razmatranjima koristio, kao mogućim temeljnim pojmom logike).

Kada je krajem prošlog stoljeća došlo do značajnijeg razvoja netom stvorene matematičke logike, vidjeli smo da je on išao dvama tokovima. Oni se gotovo upoće nisu miješali sve do 20-ih godina ovog stoljeća. Jedan tok predstavljali su fregeovci, Frege i Russell, drugi bulovci, Peirce, Schröder i Löwenheim. Grubo govoreći, prvi tok možemo nazvati sintaktičkim, a drugi semantičkim. (To nije sasvim korektno jer su i Frege i Russell imali svoje, međusobno različite, semantike, no te nisu bile skupovno-teorijske). Peirce, Schröder i Löwenheim koristili su se promjenljivim područjima individua, kao područjima na kojima su definirana svojstva i relacije što ih razmatraju. Formalne dokaze raznih teorema o tako definiranim svojstvima i relacijama, koji su bili glavno sredstvo pomoću kojeg su ih razmatrali fregeovci, oni gotovo i nisu upotrebljavali. Njihove rezultate danas bismo smatrali model-teorijskim, jer su polučeni semantičkim metodama.

Löwenheim je logiku učio iz Schröderovih spisa, koji je pak sredio i dalje razvio neke Peircove zamisli. Peirce je relaciju predstavljao kao bulovsku sumu uređenih parova (iz određenog univerzuma rasprave, na kojem je relacija interpretirana), u kojoj svaki par ima koeficijent 1 ili 0, ovisno o tome je li u razmatranoj relaciji ili nije. Na taj su način matematički znakovi Σ i Π (za sumu i produkt) interpretirani kao egzistencijalni i univerzalni kvantifikator. Međutim, te kvantifikatore Pierce, a za njim i Schröder i Löwenheim, upotrebljava bitno drugačije no Frege svoje. O njima nema aksioma, ni pravila zaključivanja po kojima bi se oni ravnali. Oni imaju *interpretaciju*, uvijek vezanu za određenu domenu rasprave, koja je promjenljiva. Za takvu teoriju kvantifikacije Löwenheim je 1915. dokazao svoj slavni teorem: Ako je propozicija (takve teorije) valjana u ikojem području rasprave, valjana je u nekom prebrojivom području.

Naravno, fregeovcima, s njihovim fiksnim univerzumom, takav je teorem čisto konceptualno nedostupan. Pojmovi valjanosti, zadovoljivosti i sl. ne mogu kod njih naći nikakve primjene. Naprimjer, ako fregeovac ikada i razmatra formulu $\forall x\,(Fx \supset Fx)$, on je razumije samo kao pokratu za $\forall F\,\forall x\,(Fx \supset Fx)$, a za nju se pojmovi valjanosti i zadovoljivosti poklapaju jer se svode na pojam istine.

U vezi s ta dva toka važno je spomenuti i fundamentalni pojam moderne logike, logiku prvoga reda. U razdoblju odvojenih tokova on još ne postoji. Bulovcima je stran jer im je stran sintaktički pojam formalnog sistema. Fregeovcima je stran jer si oni u svojem univerzalnom i grandioznom projektu logičke rekonstrukcije svijeta, ili bar matematike, ne postavljaju granice na prvom ili bilo kojem daljem redu, niti u toj granici mimo pojmova valjanosti, zadovoljavanja i sl. mogu vidjeti bilo što značajno. Važno je uočiti da Peirce, Schröder i Löwenheim u svojim semantičkim razmatranjima mogu jasnije osjetiti razliku u kompleksnosti logike prvog reda i viših redova. Danas je svakom jasno da je Löwenheim svoj slavni teorem dokazao za logiku prvoga reda (iako je nije jasno sintaktički formulirao), jer ga za logiku višeg reda nije ni moguće dokazati. (Uostalom, pojava teorije modela bez početnog odvojenog razmatranja teorije modela logike prvog reda gotovo je nezamisliva.)

Prvi veliki spajatelj tih dvaju tokova bio je Hilbert. Kao Frege i Russell on se koristi aksiomima i pravilima, i jasno mu je značenje pojma formalnog sistema. S druge strane, on neće pustiti svoje kvantifikatore da se odnose na »sve«, nego će ih svesti na ograničena područja rasprave. To odsustvo univerzalnosti i uvažavanje pojmova zadovoljavanja, valjanosti i sl. koji se javljaju u užem, ali zato promjenljivom kontekstu, upozorit će ga na bitnu razliku u kompleksnosti, koja logiku prvog reda dijeli od logike viših redova. Mada je u nekim situacijama logika višeg reda neizbježna, važno je saznati što se može postići s logikom prvoga reda. Tako se pojam formalnog deduktivnog sistema nadopunjen pojmom interpretacije počeo javljati u Hilbertovim logičkim radovima 20-ih godina i napokon trijumfalno u Hilbert-Ackermannovim *Grundzüge der theoretischen Logik*, 1928. U njima je zato mogao biti postavljen problem potpunosti logike, koji je Gödel riješio dvije godine kasnije. (Ne treba ni napominjati da je Gödel učio logiku baš iz te knjige; vidi sljedeći članak.)

Drugi (čak i paralelni, ali u to doba nezapaženi, iako često od Hilberta mnogo jasniji) velik spajatelj dvaju tokova bio je Skolem. On je, dakako, poznavao Löwenheimov rad, jer ga je sam poboljšao i poopćio. Također je pročitao i Russellove *Principia*. No, nikada nije dokraja prihvatio aksiome i pravila u svojem radu, nego je težio nalaženju takvih dokazanih postupaka kakve ćemo kasnije naći kod Herbranda i Gentzena, i koje vode novom i plodnijem shvaćanju formalnih sistema, što bitno olakšava spajanje o kojem govorimo.

Jednom spojeni tokovi nisu se više razdvajali, pa je tako nastala jedinstvena matematička logika. No, valja reći da se u tom jedinstvenom toku još uvijek osjećaju dvije jake struje, kojih porijeklo mnogi ne poznaju (ne poznavajući povijest matematičke logike: matematike logike i logike matematike), što izaziva mnoge zabune i nerazumijevanja.

ŽIVOT I DJELO KURTA GÖDELA

Kurt Friedrich Gödel rođen je 28. travnja 1906, kao drugi sin Rudolfa i Marianne (Handschuh) Gödel, u Brnu (njem. Brün) središtu austrougarske pokrajine Moravske. Gödelov otac, koji je pripadao ovećoj njemačkoj govornoj manjini, došao je u Brno iz Beča. Tu je s vremenom postao direktor i djelomični vlasnik najvažnijih tekstilnih tvrtki, što je Gödelovima osiguravalo siguran i udoban život.

Prema svjedočanstvu dra Rudolfa Gödela, Kurtova brata, Kurtovo djetinjstvo bijaše sretno, unatoč njegovoj osjetljivosti i sklonosti lakom uzbuđivanju. Sa osam godina Kurt je prebolio reumatsku groznicu, i mada je potpuno ozdravio, počeo je vjerovati da je groznica trajno oštetila njegovo srce. Tu nalazimo prve znakove Gödelove kasnije preopterećenosti pitanjima vlastitog zdravlja. Rano su uočene i njegove izuzetne intelektualne sposobnosti. Kurta su u porodici zvali *Herr Warum* zbog njegove velike i neprestane znatiželje.

Od 1916. do 1924. Gödel je pohađao *Deutsches Stats--Realgymnasium*. Iz svih je predmeta imao odlične ocjene, a osobito se isticao u matematici, jezicima i teologiji.

U vrijeme prvoga svjetskog rata Gödel se još školovao. Taj presudni događaj evropske povijesti jedva da je djelovao na njega i njegovu porodicu. Područje Brna bilo je daleko od glavnih frontova i ostalo je netaknuto ratnim razaranjima koja su pustošila Evropu. Međutim, raspad Austro-Ugarske Monarhije na kraju rata i uključenje Moravske, zajedno s Češkom, u novu čehoslovačku državu, bilo je prilično važno za njemačku govornu manjinu kojoj su pripadali i Gödelovi. Jedan od prvih znakova pomaka nacionalnog identiteta bijaše zamjena njemačkog imena Brünn češkim imenom Brno. Ipak, za Gödelove se život u poratnim godinama nije bitno izmijenio. Otac je zadržao svoj položaj, a Gödelovi su i dalje živjeli bogatim i udobnim životom.

Završivši *Gimnasium* u Brnu 1924. godine, Gödel je prešao u Beč i počeo studirati na Bečkom sveučilištu. U Beču je ostao sljedećih 15 godina; od 1929. kao austrijski državljanin. U početku je bio neodlučan u izboru studija. Kolebao se između matematike i fizike, mada se činilo da je skloniji studiju fizike. Čini se da ga je matematici odvela njegova sklonost preciznosti i impresioniranost jednim njegovim profesorom, teoretičarom brojeva Philippom Furtwänglerom. Osim Furtwänglera profesori mu bijahu Hans Hahn i Wilhelm Wirtinger. Karl Menger, jedan od Hahnovih najdarovitijih studenata, bio je izvanredni profesor. Znamo da je Gödel 1925. sudjelovao u radu seminara što ga je vodio Moritz Schlick o Russellovoj knjizi *Uvod u matematičku filozofiju* (1919).

Hans Hahn uskoro je postao Gödelov glavni učitelj. Bio je to matematičar nove generacije (koji se vratio u Austriju, napustivši položaj u Bonnu), zainteresiran za modernu analizu, skupovno-teorijsku topologiju, logiku, osnove matematike i filozofiju znanosti. Upravo je Hahn uveo Gödela u grupu filozofa okupljenih oko Moritza Schlicka, koji je držao katedru za filozofiju induktivnih znanosti (katedru su dotad držali Ernst Mach i Ludwig Boltzmann). Schlickova je grupa kasnije prozvana »Bečkim krugom« *(Wiener Kreis)* i počela se identificirati s filozofskom doktrinom nazvanom logički pozitivizam ili logički empirizam. Zadatak te škole bila je analiza znanja u logičkim i empiričkim terminima, s težnjom da se filozofija učini znanstvenom, oslobađajući je metafizičkih spekulacija. Gödel je sudjelovao na sastancima Kruga od 1926. do 1928, da bi se sljedećih godina odvojio od njega, održavajući stalne veze s pojedinim članovima, osobito s Rudolfom Carnapom. Glavni razlog odvajanja bijaše to što je Gödel s vremenom razvio vlastite filozofske poglede, dijametralno suprotne pogledima logičkih pozitivista.

Svakako, pitanja koja su se razmatrala u Krugu pouzdano su utjecala na Gödela. Logički su empiristi povezivali ideje iz različitih konceptualnih okvira, ponajprije Machovu empirističko-pozitivističku filozofiju znanosti i Russellov logicistički program zasnivanja matematike, a oboje u svjetlu Wittgensteinova *Tractatusa logico-philosophicusa*. Hahn, koji je za osnivanje Kruga bio bar toliko važan koliko i Schlick, držao je 1924—1925. seminar o Russell-Whiteheadovim *Principia mathematica*, u kojima su detaljno razvijene logicističke ideje. Mora da je i Hahnov matematički interes za modernu teoriju funkcija realne varijable utjecao na Gödela jer su u tu teoriju upletene i skupovno-teorijska razmatranja koja je francuska škola realne analize preuzela od G. Cantora. Ipak, čini se da su na smjer Gödelova kreativnog rada najneposrednije utjecala Carnapova predavanja o matematičkoj logici i Hilbert-Ackermannova monografija *Grundzüge der theoretischen Logik* iz 1928. godine. U potpunoj suprotnosti prema masivnim svescima Whiteheada i Russella, *Grundzüge* su se svojom konciznošću i matematičkom direktnošću morali dopasti Gödelu, koji je uvijek bio i ostao izuzetno sklon jezgrovitim izlaganjima

Grundzüge su kao otvoren problem postavile pitanje je li određeni sistem aksioma predikatske logike prvoga reda potpun. Drugim riječima, omogućava li izvođenje svih logički istinitih tvrdnji (tj. tvrdnji koje su istinite bez obzira na to kako interpretiramo osnovne terme i predikate od kojih su one izgrađene). Gödel je svoju istraživačku karijeru započeo rješavanjem tog otvorenog problema. Taj rad, koji će postati Gödelova doktorska teza, završen je u ljeto 1929, kada su mu bile samo 23 godine. Iako će znanstvena javnost tek postepeno razumijevati fundamentalnu važnost toga rada, on je već i u to vrijeme bio dovoljno istaknut da Gödelu pribavi reputaciju zvijezde u usponu.

Objasnit ćemo ukratko fundamentalno značenje teorema potpunosti. Čitaocu je sigurno poznato da deduktivnu konzistentnost nekog sistema tvrdnji prvoga reda (najčešće su to aksiomi neke matematičke teorije) dokazujemo tako da osnovne terme i predikate, koje nalazimo u tim tvrdnjama, interpretiramo u nekom modelu (kao objekte i relacije tog modela), pa zatim dokazujemo da su u tom modelu (uz tu interpretaciju) sve razmatrane tvrdnje istinite. Naime, ako sistem tvrdnji ima model, onda (neposredno) zaključujemo da je deduktivno konzistentan, jer ako nešto postoji o tome, ne može važiti, a ujedno i ne važiti neki iskaz. Ukratko, postojanje implicira konzistentnost. Da spriječimo moguće nesporazume, upozoravamo da je deduktivna konzistentnost, kraće konzistentnost, pojam vezan uz odgovarajući deduktivni sistem. Naime, sistem tvrdnji je deduktivno konzistentan ako se iz njega u odgovarajućem deduktivnom sistemu ne može izvesti kontradikcija. Isto tako, pretpostavljamo da je deduktivni sistem koji razmatramo korektan, tj. da njegove dedukcije istinite tvrdnje prevode u istinite tvrdnje. Međutim, mnogi će matematičar, budući da teško može odrediti **predmet** svoje struke, reći da postojanje u matematici čak i nije drugo do (deduktivna) konzistentnost: »Moja je teorija smislena (što u krajnjoj liniji znači da je teorija **nečega**), zato što je konzistentna«.

Ali on time tvrdi da konzistentnost implicira postojanje; da svaki deduktivno konzistentni sistem tvrdnji prvoga reda ima (bar jedan) model koji ga potvrđuje. To nije sasvim jasno i mnogi će prihvatiti taj stav samo zato što ga pogrešno miješaju s njegovim ranije spomenutim obratom (da postojanje implicira konzistentnost), koji jest jasan. Fundamentalno značenje Gödelova teorema upravo je u tome što se njime **dokazuje** onaj neevidentni stav. Gödel je pokazao kako za bilo koji sistem tvrdnji prvoga reda koji je konzistentan s obzirom na Hilbert-Ackermannove dedukcije možemo konstruirati model koji će ga potvrditi. Štoviše, on je pokazao da uvijek možemo konstruirati prebrojivi model koji će potvrditi deduktivno konzistentni sistem tvrdnji. Posljedice tog dodatka u najmanju ruku začuđuju. Svakako, za dokaz je bitno da se razmatraju samo tvrdnje **prvog reda.** Ali svu današnju matematiku možemo smjestiti u okvire teorije skupova koja je aksiomatizirana aksiomima **prvoga reda?!**

Čitalac se možda već pita u kojoj je vezi upravo opisani Gödelov teorem s problemom otvorenim u *Grundzüge.* Problem iz *Grundzüge* rješava se neposrednom primjenom tog teorema. Naime, pretpostavimo da je A logički istinita tvrdnja prvoga reda. Tada njezina negacija $-A$ nema modela koji bi je potvrđivao (budući da logička istinitost znači istinitost u svakom modelu). Tada po Gödelovu teoremu slijedi da tvrdnja $-A$ nije konzistentna s obzirom na Hilbert-Ackermannove dedukcije, tj. iz nje pomoću Hilbert-Ackermannovih aksioma i pravila možemo izvesti kontradikciju. Lako se pokazuje da u tom slučaju tvrdnju A možemo izvesti u Hilbert-Ackermannovu deduktivnom sistemu. (Osnovne konstrukcije za dokaz Gödelova teorema nalazimo već kod Skolema 1920, 1928. i 1929. godine. Zašto sam Skolem nije dokazao Gödelov teorem o potpunosti, vrlo je zanimljivo pitanje, i odgovor na njega odslikava razvoj logike u 20. stoljeću. Nažalost, ovdje se ne možemo pozabaviti tim pitanjem.) Neposredna posljedica Gödelova teorema je i ovaj vrlo značajni rezultat: ako je svaki konačni podsistem beskonačnog sistema tvrdnji potvrđen nekim modelom, onda je i čitav beskonačni sistem tvrdnji potvrđen nekim modelom. Taj tzv. teorem kompaktnosti postao je kasnije jedno od polazišta teorije modela i posebno temelj za konstruiranje nestandardnih modela, za koje se u to vrijeme nije moglo ni pomisliti da uopće postoje. Naime,

nestandardni modeli pokazuju da je svaki aksiomatski sistem prvoga reda, koji ima beskonačni model, potvrđen bar sa dva međusobno bitno različita modela, što znači da se nijedna beskonačna struktura ne može potpuno specificirati aksiomima prvoga reda. Što li onda aksiomatizira aksiomatska teorija skupova u čiji okvir možemo smjestiti čitavu današnju matematiku?! Toliko o prvom istraživačkom radu 23-godišnjeg Kurta Gödela.

Razdoblje od 1929. do 1939. desetljeće je intenzivnog Gödelova rada u matematičkoj logici koje rezultira njegovim glavnim doprinosima toj disciplini. U toku 1930. Gödel je počeo (finitnim sredstvima) raditi na provođenju Hilbertova programa utvrđivanja konzistentnosti aksiomatskih sistema matematike. Najprije se posvetio problemu konzistentnosti analize, nadajući se da će ga svesit na konzistentnost aritmetike. Međutim, radeći na tom problemu, ubrzo je naišao na teškoće vezane uz dobro poznate paradokse istine i definabilnosti u prirodnom jeziku. Gödelu je bilo jasno da u precizno formuliranim jezicima formaliziranih aksiomatskih sistema matematike nije moguće ponoviti argumente koji vode tim paradoksima. Ali on je uočio da može provesti analogne argumente koji više nisu paradoksalni nego vode krajnje iznenađujućim istinitim posljedicama ako (neformalizabilni) pojam istine zamijeni pojmom dokazivosti formalizabilnim u svakom sistemu koji sadrži aritmetiku. Naime, Gödel je pokazao da je svaki formalni sistem S u kojem je moguće razviti određeni elementarni dio aritmetike i koji zadovoljava minimalne zahtjeve konzistentnosti nužno nepotpun, tj. u njemu možemo konstruirati tvrdnju G takvu da ni G ni njezina negacija $-G$ nisu dokazive u S. Štoviše, tvrdnja G je konstruirana tako da (služeći se reprezentacijom sintakse sistema S u aritmetici, dakle i u S) izražava svoju vlastitu nedokazivost, a to znači da je tvrdnja G istinita (budući da je Gödel dokazao da je nedokaziva). Ukratko, Gödel je pokazao da svaki, koliko god obuhvatni, konzistentni formalni sistem sadrži istinitu tvrdnju koju sam ne može dokazati. Dalje, služeći se već spomenutom reprezentacijom sintakse sistema S u samom sistemu S, konstruirao je i tvrdnju C koja u samom sistemu S izražava konzistentnost sistema S, da bi zatim dokazao kako je i implikacija $C \rightarrow G$ dokaziva u S. Odavde neposredno slijedi da tvrdnja C nije dokaziva u S (jer bi inače i tvrdnja G morala biti dokaziva u S). Taj se rezultat obično naziva drugim Gödelovim teoremom o nepotpunosti. On je prisilio Hilbertovu školu i njezinu širu okolinu da temeljno preispitaju samu mogućnost ostvarenja Hilbertova programa i da zaključe kako je on, bar u svojoj naivnoj varijanti, neostvariv. Zapravo, već i prvi teorem o nepotpunosti opovrgava Hilbertovu nadu da bi ostvarenje njegova programa konačno riješilo problem zasnivanja matematike jer je već prvim teoremom dokazana nemogućnost potpune formalizacije matematike, a to je nužna Hilbertova pretpostavka. Teoremi o nepotpunosti objavljeni su 1931. godine. Do tada nezamislivi zaključci i potpuno novi tip argumentacije koji je vodio tim zaključcima izazvali su izuzetno veliku pažnju znanstvene javnosti i stvorili Gödelu reputaciju vodećeg mislioca u tom području. Gödelu je tada bilo 25 godina.

Značenje Gödelova teorema nepotpunosti za buduća istraživanja među prvima je uočio Johann von Neumann, koji ih je odmah počeo i poticati. Samo tri godine stariji od Gödela, i sam dijete (mađarskog dijela) Austro-Ugarske, Von Neumann bijaše već dobro poznat u matematičkim krugovima zahvaljujući svojim izvanrednim i neoubičajeno raznovrsnim radovima u teoriji skupova, teoriji dokaza (tj. Hilbertovu matematičkom programu), analizi i matematičkoj fizici. Međutim, ostali djelatnici u matematičkoj logici polako su i dosta teško usvajali Gödelov novi rad. Naprimjer, Paul Bernays, Hilbertov asistent i suradnik, iako je brzo prihvatio i uočio značenje Gödelovih rezultata, imao je priličnih poteškoća s razumijevanjem samih dokaza, a uklonjene su tek nakon prepiske u kojoj je Gödel više puta objašnjavao svoje dokaze. Gödelov rad je čak nailazio na kritiku, s raznih strana, koja je gotovo uvijek bila uzrokovana brkanjem distinkcija nužnih za pravilno razumijevanje njegovih dokaza (npr. istinitost vs. dokazivost, iskaz vs. njegova sintaktička reprezentacija u aritmetici itd.). Čak je i slavni Ernest Zermelo, teoretičar skupova, interpretirao Gödelove osnovne pojmove tako da je dolazio u doslovnu kontradikciju s Gödelovim rezultatima. U prepisci u toku 1931. Gödel se, čini se bezuspješno, trudio da objasni svoj rad Zermelu. Ipak, teoremi o nepotpunosti na kraju su ipak shvaćeni i prihvatili su ih svi koji su se kretali glavnim tokom matematičke logike. Štoviše, Gödelovi rezultati i metode proželi su sve aspekte toga glavnog toka, a možemo čak reći da su ga i odredili.

Gödelov rad o nepotpunosti postao je 1932. njegova *Habilationsschrift* na Bečkom sveučilištu. Hahn ga je u svojem izvještaju nazvao epohalnim postignućem prvoga reda. Habilitacija je značila dodjelu titule *Privatdozent,* koja je donosila *veniam legendi*, tj. pravo predavanja na Sveučilištu koje nije plaćeno, osim možda neposrednim doprinosima skupljenim od studenata. Zbilo se međutim da je Gödel u toku sljedećih godina u Beču predavao rijetko i vrlo neredovito.

U međuvremenu su se i u Gödelovu privatnom životu dogodile značajne promjene. Još je u 21. godini upoznao svoju buduću ženu Adele Nimbursky (rođenu Porkert), međutim, razlika u njihovu socijalnom položaju uzrokovala je oštro protivljenje Gödelovih roditelja toj vezi. Adele je bila plesačica, iza sebe je već imala jedan kratki brak i bila je šest godina starija od Gödela. Tako se dogodilo da se Kurt i Adele nisu uzeli još sljedećih deset godina. Gödelov otac je 1929. iznenada umro u svojoj 54. godini. Na sreću, porodicu je ostavio u sređenoj i vrlo povoljnoj financijskoj situaciji. Zadržavajući vilu u Brnu, Gödelova majka se preselila u Beč i iznajmila oveći apartman za sebe i svoja dva sina. Kurtov brat Rudolf već je postao poznati i uspješni radiolog. Nikada se nije ženio i njih su troje često viđani u zajedničkim izlascima, najčešće odlascima u kazalište. Prema Rudolfovu svjedočanstvu Kurt se upravo trudio da se u porodici ne primijeti važnost njegova rada, unatoč njegovoj tada već etabliranoj internacionalnoj slavi.

U ranim 30-im godinama Gödel je neprekidno i uporno unapređivao svoja znanja iz mnogih područja logike i matematike. Bio je redovni slušatelj i predavač na Mengerovim kolokvijima u Beču, koji su počeli sa sastajanjem 1929, a surađivao je i u njihovu izdavanju u »*Ergebnisse eines matematischen Kolloquiums*«. Od 1932. do 1936. objavio je u tom časopisu 13 (kao i uvijek) kratkih, ali značajnih članaka s raznovrsnom tematikom, uključujući naprimjer intuicionističku logiku i geometriju.

Intuicionističku logiku formulirao je Heyting 1930. kao formalizaciju osnovnih argumenata dopuštenih u Brouwerovoj intuicionističkoj rekonstrukciji matematike. Presudna je razlika u usporedbi s klasičnom logiklom intuicionističko odbacivanje načela isključenja trećeg. Počevši od 1932. Gödel se često bavio sistemima temeljenim na intuicionističkoj logici, iako nije prihvaćao Brouwerove ideje.

Taj se interes može možda objasniti njegovim radom iz 1933, u kojem je pokazao da se klasični sistemi mogu interpretirati u odgovarajućim intuicionističkim sistemima upotrebom tzv. »negativnog« prijevoda svake formule A u formulu A', za koji vrijedi da intuicionistička dokazivost prijevoda A' slijedi iz klasične dokazivosti originala A (naravno za bogatu klasu A-ova, prijevod A' poklapat će se s originalom A i za takve se formule intuicionistički i klasični sistem poklapaju s obzirom na dokazivost). Do sličnog je rezultata (s nešto drukčijim prijevodom) došao i Gentzen. Filozofski gledano, Gödelova je interpretacija značajna jer pokazuje da se klasični sistem, npr. klasične aritmetike, može u određenom smislu smatrati podsistemom intuicionističkog sistema aritmetike. Neposredna je posljedica ta da je klasična aritmetika isto toliko »sigurna« koliko i intuicionistička (one su ekvikonzistentne), iako se razlozi za prihvaćanje jedne, odnosno druge bitno razlikuju. U jednom drugom radu iz 1933. Gödel je obrnuo točku gledanja, interpretirajući intuicionističku propozicionalnu logiku u okviru klasične propozicionalne logike obogaćene operatorom B, gdje B sugerira *beweisbar* (tj. dokaziv). Tako dobiveni B-sistem jedan je od klasičnih $S4$-sistema modalne logike. Gödel je upozorio da, zbog njegovog teorema o nepotpunosti, B ipak ne možemo interpretirati kao reprezentaciju dokazivosti u nekom formalnom sistemu. (Ipak, ovih se godina u logici mnogo radi baš na takvim interpretacijama operatora B.)

U vezi s Mengerovim kolokvijem spomenimo još da je jedan od njegovih stranih gostiju 1930. bio poljski logičar Alfred Tarski, koji je uskoro postao slavan zbog svojeg rada o pojmu istine u formalnim jezicima (temi donekle vezanoj uz Gödelov rad o nepotpunosti formalnih sistema) i još kasnije zbog svojeg vodstva u stvaranju i razvijanju teorije modela. Tarski je u Beču boravio nekoliko tjedana i u tom se razdoblju upoznao s Gödelom, koji je iskoristio tu priliku da s njim prodiskutira rezultate svoje teze iz 1929. godine. U nešto duži posjet, kao gost Mengerova kolokvija, Tarski je ponovo došao 1935. godine.

Na svojem neplaćenom položaju, kao *Privatdozent*, Gödel je financijski ovisio o svojoj porodici. Ipak, ta su sredstva uskoro dopunjena prihodima koje su mu donosile njegove gostujuće pozicije u Sjedinjenim Američkim Državama. Gödelova prva gostujuća pozicija bila je na *Institute for Advanced Study* u Princetonu u toku akademske godine

1933—1934. Institut je službeno osnovan 1930, a njegov direktor Abraham Flexner je Alberta Einsteina i Oswalda Veblena postavio kao prve profesore dvije godine kasnije, 1932. Veblen je bio vodeća ličnost u razvoju više matematike u SAD, a vodeću ulogu imao je i u stvaranju vrlo istaknutog matematičkog odsjeka na Sveučilištu u Princetonu. Ponajviše je bio odgovoran za dalju selekciju veličanstvenog profesorskog zbora, koji su sačinjavali James Alexander, Marston Morse, John von Neumann i Hermann Weyl. Osim toga, Veblen je poticao organizaciju postdoktorskih gostovanja mladih matematičara u usponu, uključujući i Gödela. Nema sumnje da je Veblen o Gödelu čuo od Von Neumanna, koji je Gödela smatrao »najvećim logičarom od pojave Aristotela«.

Gödelovo gostovanje 1933—1934. bilo je prvo od ukupno tri koliko ih je imao prije preuzimanja stalnog položaja na Institutu 1940. godine. U proljeće 1934. on je na Institutu održao niz predavanja o svojim rezultatima nepotpunosti, i ta su predavanja, prema bilješkama Kleenea i Rossera u Gödelovoj redakciji, izdana te godine. Jedna je od bitnih novosti tih predavanja uvođenje pojma opće rekurzivnosti, slijedeći jednu Herbrandovu sugestiju. Taj i njemu (kako je kasnije pokazano) ekvivalentni pojam λ-definabilnosti Church je 1936. predložio kao precizno objašnjenje neformalnog pojma efektivne izračunljivosti. Tu »Churchevu tezu« Gödel nije prihvatio u to vrijeme, nego tek pošto je Turing 1937. dao svoju analizu efektivne izračunljivosti pomoću apstraktnih računskih strojeva, pokazujući ujedno da su oni ekvivalent λ-definabilnosti i općoj rekurzivnosti. Ti su pojmovi postali temelj izuzetno važnom području teorije rekurzija. Također su bili i ključni teorijski pojmovi za moderne digitalne kompjutore opće namjene, koje su realizirali Turing i Von Neumann 1940-ih godina.

Čini se da je Gödel počeo dosta intenzivno raditi na problemima teorije skupova, te da se istovremeno osjećao prilično usamljeno i depresivno, u toku tog prvog posjeta Princetonu. Neposredno po povratku u Evropu doživio je nervni slom, pa je neko vrijeme proveo u sanatoriju. U toku sljedećih godina povremeno su se vraćali ti napadi depresije i potpune iscrpljenosti. Već dogovoreni posjet Princetonu odgođen je za jesen 1935, da bi potom bio odgođen za još dva mjeseca, ponovo zbog mentalne rastresenosti. Gödel je dosta vremena proveo u sanatoriju i 1936, pa nije bio sposoban da nastavi svoj rad na Sveučilištu u Beču sve do ljeta 1937. Kada je napokon bio sposoban da preuzme nastavu, počeo je predavati o svojim novim velikim rezultatima u aksiomatskoj teoriji skupova.

Teoretičari skupova pokušavali su, počevši od samog utemeljitelja teorije Georga Cantora, riješiti dva osnovna problema: mogućnost dobrog uređenja proizvoljnog skupa i određenje kardinalnog broja (tj. prirodne mjere) kontinuuma. Zermelo je riješio prvi problem, neformalno 1904. i u sklopu svojeg novouvedenog aksiomatskog sistema teorije skupova 1908, pokazavši da je mogućnost dobrog uređenja proizvoljnog skupa ekvivalentna aksiomu izbora (AC), koji tvrdi da za svaki skup nepraznih skupova S postoji skup koji sadrži točno po jedan element iz svakog skupa u S. Pozitivnim rješenjem tog problema napokon je potvrđeno da svaki skup ima točno određeni kardinalni broj u dobro uređenom nizu transfinitnih kardinala jer se taj zaključak nužno pozivao na mogućnost dobrog uređenja svakog skupa. Međutim, točno određenje mjesta kardinalnog broja kontinuuma u tom uređenom nizu i dalje je ostalo neriješeno. Cantor je dokazao da je kardinalni broj kontinuuma sigurno veći od kardinalnog broja najmanjeg beskonačnog skupa (kakav je npr. skup prirodnih brojeva 1, 2, 3, 4, ...), ali nije uspio dokazati da je taj kardinalni broj upravo drugi u nizu beskonačnih kardinalnih brojvea. To je bila samo njegova hipoteza, koja je postala poznata pod imenom hipoteze kontinuuma CH. Nakon svojih rezultata nepotpunosti Gödel se okrenuo tim problemima teorije skupova. Tvrdnje AC i CH razmatrao je u sklopu aksiomatske teorije skupova ZF (koju su nakon Zermela proširili i točnije formulirali Fraenkel, Skolem, Von Neumann i Bernays) ispitujući da li ih je moguće dokazati koristeći se aksiomima teorije ZF. To je pitanje bilo posebno značajno za CH jer se ta tvrdnja, za razliku od AC, nije mogla smatrati evidentnom po samoj sebi. Konačni rezultat, do kojeg je Gödel došao u ljeto 1937, bio je da su aksiom izbora i hipoteza kontinuuma, kao i njezina poopćena verzija, generalizirana hipoteza kontinuuma GCH suglasne s preostalim aksiomima teorije skupova, ako su oni konzistentni, te da se stoga ni AC ni CH ne mogu opovrći u okviru teorije ZF.

Osnovna Gödelova ideja bila je definicija konstruktibilnog skupa u okviru ZF. On je prilično rano uočio da će moći dokazati kako konstruktibilni skupovi čine model za sve aksiome iz ZF, a da su, uz to, i model za AC i GCH. Von Neumannu je već 1935. saopćio da njegov model zadovoljava sve aksiome iz ZF, a, osim toga, i AC, ali su mu trebale još pune dvije godine da to isto dokaže za GCH. Naime, s tada dostupnim matematičkim metodama svi detalji koje je Gödel trebao ustanoviti bili su gotovo nesavladivi, pa je taj suptilni i složeni rad za Gödela bio izuzetno težak, pogotovo u svojoj završnici. To je sigurno bio jedan od uzroka čestih mentalnih stresova koji su ga mučili u toku čitavog razdoblja od 1934. do 1937. godine.

Sljedeće godine donijele su značajne promjene u Gödelovu privatnom životu i u njegovoj karijeri. Majka se vratila u Brno 1937, a brat je nastavio svoju medicinsku praksu u Beču. To je olakšalo odluku da se Gödel i Adele Nimbursky vjenčaju, što su i učinili u rujnu 1938. Taj brak bio je trajan i skladan. U krugu Gödelovih bečkih prijatelja i kolega zbile su se 1930-ih godina mnoge promjene. Njegovi najbliži prijatelji iz Bečkoga kruga napustili su Beč. Rudolf Carnap je 1931. otišao u Prag, a zatim u SAD. Gödelov učitelj Hans Hahn umro je 1934. godine. Moritza Schlicka je 1936. ubio poremećeni bivši student. Uznemiren tim slijedom događaja i općom situacijom u Austriji, Karl Menger je sljedeće godine otišao na Sveučilište Notre Dame u SAD. Sve se to zbivalo u vrijeme teških ekonomskih prilika u kojim se Evropa našla nakon depresije 1929. i uspona Hitlera i nacionalsocijalizma u Njemačkoj 1933. godine. I Austrija je 1934. došla pod upravu polufašističkog režima Engelberta Dollfussa, kojeg su iste godine ubili austrijski nacisti. Bio je to prvi korak nacističkog preuzimanja vlasti, s *Anchlussom* kao krajnjim ciljem. Austrija je 1938. postala provincija *(Ostmark)* nacističke Njemačke. Te je godine počela transformacija austrijskog kulturnog i intelektualnog života identična onoj koju je Njemačka morala podnijeti prije pet godina. Došlo je do pravog eksodusa intelektualaca, pa je jedna od usputnih posljedica bila i raspad Bečkoga kruga. Unatoč punoj svijesti o zbivanjima oko sebe, Gödel je, vjeran svom apolitičkom i neobavezujućem stavu, ignorirao evidentne konzekvencije nastale situacije.

Na Mengerov nagovor Gödel posjećuje SAD još jedanput 1938—1939. Zimski semestar je proveo na *Institute for Advanced Study*, gdje saopćuje svoje nove rezultate o aksiomu izbora i generaliziranoj hipotezi kontinuuma. U ljetnom semestru pridružuje se Mengeru u Notre Dameu, gdje ponovo predaje o svojem radu u teoriji skupova. U ljeto 1939. ponovno je u Beču. Iako je planirao da zimski semestar 1939. opet provede na Institutu u Princetonu, to se neće ostvariti. Pozvan je na vojni liječnički pregled i, na njegovo veliko iznenađenje (s obzirom na slabo zdravlje i njegovu uvjerenost da ima oslabljeno srce), proglašen je sposobnim za vojnu službu. Osim toga, neplaćeni status *Privatdozenta* nacisti su poništili, zamijenivši taj položaj plaćenim položajem *Dozent neuer Ordnung*. Dakako, on je zahtijevao novu prijavu, koja je mogla biti odbijena iz političkih ili rasnih osnova. Gödel se prijavio za nov položaj u rujnu 1939, no molba se sporo rješavala. Postavljena su pitanja o njegovim vezama s profesorima Židovima (osobito s Hahnom), i mada je uočena njegova apolitičnost, nedostatak otvorene podrške nacizmu bio je njegov »minus«. S obzirom na realnu mogućnost da bude odbijen, Gödel je u toj nesigurnoj situaciji (rat je počeo u rujnu) napisao »dešperatno« pismo Veblenu u studenome 1939, tražeći pomoć za svoj odlazak. Nekako su sređene američka »izvankvotna« ulazna viza i njemačke izlazne dozvole, pa su Kurt i Adele napustili Beč u siječnju 1940. Budući da je Atlantik bio suviše opasan, krenuli su vlakom u istočnu Evropu, da bi potom transsibirskom željeznicom prešli Sovjetski Savez i Mandžuriju, te na kraju stigli u Jokohamu. Odatle su brodom otplovili u San Francisco, i u ožujku 1940. vlakom se uputili u Princeton.

Gödel se više nikada nije vratio u Evropu. Njegova prijava za *Dozenta neuer Ordnung* potvrđena je u lipnju 1940. Kasnijih se godina s gorčinom sjećao svojega neugodnog položaja u Austriji od 1939. do 1940, osuđujući, međutim, austrijski *Schlamperei* više nego sramotnu nacističku situaciju. Na svoj 60. rođendan 1966. odbio je počasno članstvo Austrijske akademije znanosti. Međutim, svoje je odbijanje zaogrnuo ruhom pseudopravne opasnosti da bi članstvo u Akademiji zemlje njegova prvotnog državljanstva moglo dovesti u pitanje njegovo novo državljanstvo.

Gödel je 1940. postao redovni član Instituta u Princetonu, gdje je zajedno sa svojom ženom zasnovao miran društveni život. Najbliži Gödelovi prijatelji postali su Albert Einstein i Oskar Morgenstern, koji je i sam bio ex-Bečanin, i koji će uskoro postati slavan svojim važnim i

utjecajnim radom s Von Neumannom, *The theory of games and economic behavior* (1944). Sam Von Neumann je 1940-ih bio Gödelu manje dostupan jer, kao konzultant brojnih vladinih ratnih projekata, najčešće nije bio na Institutu.

Među mnogim Morgensternovim anegdotama o Gödelu izdvaja se jedna iz travnja 1948, kada je Gödel postao američki državljanin, s Einsteinom i Morgensternom kao svjedocima. Gödel je trebao pristupiti rutinskom ispitu za koji se marljivo pripremao, proučavajući ustav SAD. Dan prije ispita Gödel je, vidljivo uzbuđen, došao k Morgensternu s riječima: »Otkrio sam logičko-legalnu mogućnost da se SAD pretvore u diktaturu.« Morgenstern je uskoro ustanovio da, unatoč logičkoj izvrsnosti Gödelova argumenta, njegova stvarna realizacija ostaje krajnje hipotetička, pa je od Gödela zahtijevao da svoje otkriće ne objelodanjuje na ispitu. Sljedeće jutro Morgenstern je odvezao Gödela i Einsteina iz Princetona u Trenton, gdje se provodio postupak prihvaćanja državljanstva. Einstein se cijelim putem uspješno trudio da mnogobrojnim zabavnim anegdotama opusti Gödela. U Trentonu je službenik, očito impresioniran Einsteinovom i Morgensternovom prisutnošću, obojicu pozvao da prisustvuju ispitu, iako se on (proceduralno) polaže nasamo. Počeo je obrativši se Gödelu: »Dosad ste imali njemačko državljanstvo.« Gödel ga je ispravio objašnjavajući da je Austrijanac. »Svakako« nastavio je službenik »bilo je to pod đavoljom diktaturom... no, na sreću, u SAD to nije moguće.« »Naprotiv«, uzviknuo je Gödel, »ja znam kako do toga može doći.« Sva su trojica imala velike teškoće da spriječe Gödelovu elaboraciju vlastitog otkrića, kako bi procedura bila privedena kraju predviđenim prihvaćanjem državljanstva SAD.

Mnogobrojne detalje o bliskom prijateljstvu Einsteina i Gödela otkrivaju nam sjećanja Einsteinova asistenta (1944—1948) Ernesta Straussa. On primjećuje da ih je povezivala izuzetno naglašena zajednička osobina da direktno i potpuno predano ulaze u samu srž stvari koje razmatraju. Kao osobe bili su u svakom pogledu različiti. Einstein sretna narav, društven, pun smijeha i zdravog razuma, a Gödel ekstremno dostojanstven (gotovo ukočen), vrlo ozbiljan, prilično osamljen i krajnje nepovjerljiv prema zdravom razumu.

Položaj bez formalnih obaveza pružio je Gödelu potpunu slobodu istraživanja. U toku prvih godina na *Institute for Advanced Study* nastavio je svoj rad u matematičkoj logici, ulažući velike napore da dokaže kako aksiom izbora i hipoteza kontinuuma ne zavise od ostalih aksioma ZF--teorije skupova. To je uspio samo djelomično, i to s obzirom na (manje značajan) aksiom izbora. Ti djelomični rezultati nikada nisu objavljeni. Nalazimo ih u *Nachlassu*, koji će vjerojatno biti objavljen u nekom od svezaka njegovih sabranih djela. Drugo Gödelovo postignuće iz tog razdoblja (objavljeno tek 1958) nova je konstruktivna interpretacija aritmetike, kojom je dokazana njezina konzistentnost. Naravno, metode dokazivanja premašuju finitna sredstva, u Hilbertovom smislu »konkretne intuicije«, jer su ta finitna sredstva obuhvaćena elementarnom aritmetikom pa stoga (po Gödelovu teoremu nepotpunosti) ne mogu biti dovoljna za dokazivanje konzistentnosti same aritmetike. Naime, u svojem dokazu konzistentnosti Gödel se koristi izračunljivim funkcionalima konačnog tipa pomoću kojih interpretira aritmetičke propozicije dokazujući tako konzistentnost aritmetike. On navodi razloge za prihvaćanje tog apstraktnog pojma kao konstruktivnog, pa u tom smislu i njegov dokaz možemo smatrati konstruktivnim. Tako je 1940-ih godina rušilac Hilbertova programa (iz 1931) poradio na njegovu ponovnom oživljavanju. (Funkcionalnu interpretaciju je 1960-ih godina Spector proširio na analizu, dokazujući tako konzistentnost analize. Konstruktivnost tog proširenja je upitna.)

Od 1943. dalje Gödel se gotovo sasvim posvetio filozofiji, najprije filozofiji matematike pa općoj filozofiji i metafizici. Godine 1944. objavljuje poznati članak o Russellovoj matematičkoj logici, koji daje izuzetno značajnu analizu Russellova rada, a osim toga prvi put javno iznosi Gödelov »platonistički« stav prema postojanju matematičkih objekata. Taj je stav, u kontekstu teorije skupova, još izraženiji u Gödelovu jedinom preglednom radu *O Cantarovu problemu kontinuuma* iz 1947. godine. Što se tiče opće filozofije, Gödel je nastavio svoja započeta proučavanja Kanta i Leibniza, koja je 1950-ih dopunio fenomenologijom Edmunda Husserla. (U *Nachlassu* su mnoge bilješke o radovima tih filozofa.) Jedan, naizgled, izuzetak u neprekinutom slijedu tih filozofskih studija Gödelov je iznenađujući rad na općoj teoriji relativnosti u razdoblju od 1947. do 1951, koji je rezultirao tzv. Gödelovim kozmološkim modelom. Jedan samo naizgled izuzetak, jer je Gödel upozorio da taj rad nije bio potaknut njegovim mnogobrojnim diskusijama s Einsteinom, nego njegovim vlastitim zanimanjem za Kantovu filozofiju prostora i vremena. (Uostalom, Einstein se u to vrijeme intenzivno trudio oko jedinstvene teorije polja, u čiju je mogućnost Gödel sumnjao.)

Gödel je 1946. promaknut u stalnog člana *Institut for Advanced Study*, a profesor (najviši status na Institutu) postao je 1953. godine. Ta relativno kasna promocija u zvanje profesora često je izazivala čuđenje, međutim posrijedi je bio obostran interes Gödela i Instituta. Profesorski položaj nosio je određene administrativne odgovornosti jer se od profesora tražilo da vode poslove Instituta. To Gödelu nije odgovaralo. S druge strane, postojale su određene bojazni da bi Gödel svojim izuzetnim smislom za detalje i naglašeno legalističkim odnosom prema poslovima mogao zaustavljati uobičajeni tok njihove provedbe. Od 1953. on je uistinu velik dio svojeg vremena posvetio poslovima Instituta, najviše razmatranju povećanog broja prijava logičara za gostujući status na Institutu. Međutim, unatoč tom angažmanu, Gödel je ograničio svoje osobne kontakte na manji broj gostiju (iako je pokazivao interes i za rad svih ostalih). S Gödelom su uspjeli uspostaviti dublji znanstveni i osobni kontakt W. Boone, G. Kreisel, G. Takeuti, D. Scott i H. Wang. Osim toga, Gödel je bio impresioniran radom C. Spectora (koji je neposredno nastavio neke njegove radove) i A. Robinsona, iako je s njima imao manje osobne kontakte.

Gödelu su dodijeljene mnoge počasti. Godine 1951. podijelio je (s J. Schwingerom) prvu Einsteinovu nagradu; te ga je godine Američko matematičko društvo izabralo za Gibbs Lecturera; 1955. je izabran za člana National Academy of Sciences; 1957. za člana Royal Society; 1975. mu predsjednik SAD, G. Ford, dodjeljuje National Medal of Science. To su dakako samo neke od dodijeljenih mu počasti.

Posljednjih petnaest godina svojega života Gödel se veoma rijetko vraćao logici; bio je okupiran gostima i poslovima Instituta, te vlastitim filozofskim studijima. Uglavnom je revidirao svoje ranije logičke radove. Posebno se trsio oko prijevoda i revizije svoje konstruktivne interpretacije aritmetike (tzv. *Dialectica* interpretacije), objavljene 1958. godine. Ta će revizija biti tiskana tek u njegovim sabranim djelima. Ranih 1970-ih godina došlo je do priličnog uzbuđenja u redovima logičara, zbog jednog Gödelova neobjavljenog, ali u Princetonu »kolajućeg« spisa, u kojem on predlaže nove aksiome teorije skupova što su trebali implicirati negaciju hipoteze kontinuuma. Međutim, pokazale su se bitne teškoće u argumentima koji vode negaciji CH, pa spis nije nikada objavljen. Sam Gödel je previd tih teškoća pripisao svojem teškom zdravstvenom stanju.

Naime, već od 1960-ih godina Gödelovo je zdravlje bilo loše. Preporučena mu je operacija prostate, na koju nikada nije pristao (čini se da je Gödelovo nepovjerenje prema liječnicima bilo potpuno). Uz probleme s prostatom bio je uvjeren da mu je i srce slabo (unatoč medicinskim potvrdama). Vratile su mu se i depresije, dopunjene sada paranojom. Proganjao ga je strah od trovanja, pa je odbijao jesti. Umro je u Princetonu 14. siječnja 1978. zbog »slabe ishranjenosti i potpune iscrpljenosti uzrokovane poremećajem ličnosti«. Gödelova je smrt iznenađujuće snažno odjeknula u sredstvima informiranja (zagrebački je »Start« objavio dvije stranice teksta o Kantu 20. stoljeća), pa su se mnogi intelektualci čudili kako za Gödelova života nisu ništa čuli o tom velikanu 20. stoljeća.

Dodatna literatura uz treće poglavlje

1) Church, A. *Introduction to Mathematical Logic, Princeton,* 1956. (uvodno poglavlje).
2) Dummett, M. *Frege Philosophy of language, London,* 1973 (1981).
3) Hailperin, T. *Boole's Logic and Probability, Amsterdam,* 1976.
4) Heijenoort, J. van *From Frege to Gödel, Cambridge Mass.,* 1970.
5) Hijenoort, J. van *Selected Essays, Napoli,* 1985.
6) Hodges, W. *Elementary Predicate logic; u Gabbay, D, Guenthner, F, Handbook of Philosophical logic,* Vol. I, *Dordrecht,* 1983.
7) Kneale, W. & M. *The Development of Logic, Oxford,* 1962.
8) Lewis, C. I.; *Langford, C. H. Symbolic Logic, New York,* 1939 (1959).
9) Wang, H. *The Axiomatization of Arithmetics, Journ. Symb. Logic,* 22, 1957.
10) Wang, H. *From Mathematics to Philosophy, London,* 1974.

IV. RAZMIŠLJANJA O MATEMATICI

O RAZLIKOVANJU ČISTE I PRIMIJENJENE MATEMATIKE

I. Što je predmet matematike? Opisuje li matematika predmete i koji je modus egzistencije tih predmeta? O čemu je riječ u matematici? Već kada je riječ o najosnovnijem prvom predmetu matematike, (prirodnom) broju, naše se razumijevanje vrti u mnoštvu neodređenosti. Pokušat ćemo objasniti odakle izvire ta neodređenost, a time i nesigurnost koja je karakteristična za susrete s tim pitanjima.

Konkretizirajmo pitanje dokraja: Na što možemo uputiti onoga koji pita što je broj 3? Nuđeni su razni odgovori, vezani uz realne predmete, njihova količinska svojstva, znakove, urođene ideje, objektivne ideje itd. Po našem mišljenju najjednostavnije je i najpoučnije upućivanje na određenu skupinu, naprimjer palac, kažiprst i srednjak, kombinirano, a to je najbitnije, s govorno-pokaznom podukom iz brojenja. Ona se sastoji u izricanju brojeva jedan, dva i tri, popraćenom pokazivanjem pojedinih članova uočene skupine (palac, kažiprst i srednjak). Osnovni prigovor toj poduci jest upravo to što je ona puka poduka o upotrebi brojeva i stoga unaprijed pretpostavlja jedan odgovor na pitanje gdje su i što su brojevi, koji se tim postupkom prebrajanja vežu uz uočenu skupinu. Iz tog prigovora izrasta poznata Fregeova definicija prirodnog broja. Naime, postupak u kojem se brojevi već unaprijed spominju, a koji je gore opisan, zamjenjuje se postupkom kojim se dovode u 1—1 korespondenciju dva skupa. U tom novom postupku brojevi se više ne spominju i time se na poznati način broj pokušava shvatiti razumijevanjem korespondencije skupova, tj. kao zajedničko svojstvo međusobno korespondentnih (sličnih) skupova. Način egzistencije brojeva time je vezan uz način egzistencije skupova i njihovih korespondencija.

Ranije spomenuti prigovor i ovo razjašnjenje izviru iz jednog ontološkog pritiska — jednog zahtjeva, da se za ono o čemu je riječ eksplicite utvrdi da jest i da se nadalje utvrdi što jest to što jest, i gdje jest to što jest (u kojoj sferi onoga što jest). Dalji ontološki pritisak (sada potaknut svojstvom, koje je zajedničko sličnim skupovima) dovodi do ekstenzionaliziranja tog zajedničkog svojstva, tj. do zaključka da je broj upravo skup svih međusobno sličnih skupova. Taj pristup nosi u sebi sve one teškoće koje donosi pokušaj razumijevanja korespondencije, pogotovo pokušaj razumijevanja korespondencije mimo svakog brojenja.

Sam ontološki pritisak time nije ukinut, nego je premješten u drugu sferu (no to i nije neki prigovor).

Ono na što smo željeli upozoriti jest to da je taj tip argumentacije, kojom dominira ono što smo nazvali ontološkim pritiskom, atipičan za matematiku. Naša je teza da je za matematiku, kada je zovemo čistom matemtikom, konstituirajuće upravo to što je oslobođena svakog ontološkog pritiska i u određenom je smislu matematika upravo ono što je moguće mimo ontološkog pritiska. Konkretizirat ćemo tu tezu na već pokrenutom problemu (postojanja) broja u matematici.

Matematika brojeva ili aritmetika primjerom pokazuje kako je moguća znanost (i znanje) o brojevima mimo ontologiziranja broja. Predmet aritmetike nisu brojevi u Fregeovu ili bilo kojem drugom ontologiziranom smislu, nego je njen predmet uloga brojeva u brojenju, a potom i spajanju, odbijanju, umnožavanju, podjeli itd. Prisutnost te uloge u aritmetici realizirana je nosiocem uloge, tj. brojevnim znakom (brojkom), i ta prisutnost omogućuje izvođenje aritmetike. Uloga tih nosilaca određena je ponajprije njihovim nabrajanjem, u smislu potencijalne ostvarljivosti brojki, a potom njihovim zbrajanjem u smislu potencijalne ostvarljivosti zbrajanja brojki itd. Tu potencijalnu ostvarljivost obično kodiramo u obliku pravila:

Nabrajanje brojki

$$\to 0$$

$$m \to m|$$

Zbrajanje brojki

$$\to m, 0, m$$

$$m, n, p \to m, n|, p|$$

Kada tako određene uloge shvatimo kao transformaciona pravila brojevnih znakova, možemo se složiti, ali samo u tom, a ne nekom poigravajuće formalnom smislu, s često

ponavljanom tvrdnjom da aritmetika nije studij samih brojeva, nego transformacionih pravila (potencijalno ostvarljivih) brojevnih znakova. To što u aritmetici ipak govorimo o brojevima implicite pokazuje neopterećenost toga govora ontološkim pritiskom. Razliku broj-brojka ekspliciramo tek onda kada želimo, kao gore, **eksplicirati** tu neopterećenost.

U vezi s postojanjem brojevnih znakova i transformacionim pravilima, koja određuju njihove uloge, potrebno je još reći sljedeće. Transformaciona pravila imaju normativni, a ne deskriptivni karakter. Takvim pravilom, kao što smo vidjeli, postavlja se norma potencijalnog ostvarivanja brojki, njihova zbrajanja itd. S druge strane brojevni znak se opire ontološkom pritisku svojom proizvoljnošću. Bilo što, što jest, može biti brojevni znak. Upravo ta ontološka proizvoljnost brojki temelj je izvođenja aritmetike, jer je u njoj mogućnost *(potentio)* ostvarenja nove brojke, što omogućuje iskazivanje potencijalne ostvarljivosti u obliku prije navedenih pravila.

U normativnom karakteru čiste matematike i ontološkoj proizvoljnosti, koja omogućuje njeno izvođenje, njena je sigurnost, ili kako se to katkada s ponosom i češće s nerazumijevanjem kaže — njena vječna istinitost.

Dešava se, međutim, da se suočimo s tom sigurnošću, a da još nismo (ili možda više nismo) svjesni njenog izvora i tada ga, pritisnuti ontološkim pritiskom, želimo otkriti i pokazati tako da (ontološki) zasnujemo *predmet* matematike, a nju shvatimo kao deskripciju tog negdje prisutnog predmeta. Jasno je da se u ontološkoj obaveznosti (inače izuzetno značajnoj) i deskriptivnom karakteru tako shvaćene matematike gubi ona sigurnost s kojom smo bili suočeni i do čijeg nam je izvora bilo stalo. U potrazi za samim izvorom sigurnosti mi postajemo nesigurni, pa se, zbunjeni time, počinjemo vrtjeti u mnoštvu neodređenosti.

Treba stoga biti svjestan da ontološko zasnivanje matematike (tj. zasnivanje matematike kao deskriptivne znanosti putem zasnivanja njenog predmeta) ne može imati onaj karakter sigurnosti koji ima čista matematika.

II. Nakon tog, svakako ne dovoljno detaljnog, uvida u karakter čiste matematike i njenog zasnivanja, kazat ćemo nekoliko riječi o apodiktičkoj istinitosti matematičkih tvrdnji, a i o logici te apodiktičnosti.

Gore prikazano razumijevanje čiste matematike brojeva navelo nas je da je u jasno određenom smislu shvatimo kao izučavanje transformacionih pravila brojevnih znakova. To izučavanje zahtijeva jedan govor, asertorički govor, govor kojim se tvrdi, govor tvrdnji.

Jedna jednostavna aritmetička tvrdnja je tvrdnja o potencijalnoj ostvarljivosti nekog izračunavanja (zbrajanja, množenja itd.). Naprimjer, jednom takvom tvrdnjom tvrdimo potencijalnu ostvarljivost trojke m, n, p primjenom pravila zbrajanja. Toj tvrdnji o potencijalnoj ostvarljivosti ili o konstruktibilnosti dajemo oblik $+ \; m, n, p$ ili uobičajenije $m + n = p$.

Apodiktička istinitost takve tvrdnje upravo je u potencijalnoj ostvarljivosti normativno usmjerenih izračunavanja. Osigurana je ostvarljivošću propisane konstrukcije, dakle ostvarljivošću jedne sinteze, koja nije deskriptivna nego normativno usmjerena (kazano starijim riječnikom apriorna). Možemo reći da je značenjem tvrdnje (u našem slučaju to je potencijalna ostvarljivost jedne konstrukcije) određen kriterij njene istinitosti.

Ne ostaje međutim sve na govoru jednostavnih tvrdnji. Tvrdnje vežemo veznicima, negiramo, partikulariziramo, univerzaliziramo itd. U čemu je i što je istina pojedinih tvrdnji tako bogatog asertoričkog govora? Koja su značenja tih tvrdnji?

Dokle god se u našem govoru zadovoljavamo jednostavnim vezanjem tvrdnji pomoću tzv. propozicionih veznika (uključujući i negaciju), značenja i kriterije istinitosti tako dobivenih tvrdnji potpuno razumijevamo dvovaljanim (klasičnim) shvaćanjem istine i laži kao predikata, koji se tvrdnjama pridaju ili odriču u skladu s tzv. tablicama istinosnih vrijednosti pojedinih veznika.

Da je to razumijevanje u skladu s razumijevanjem jednostavnih tvrdnji i da se taj sklad može na izvjestan način proširiti i na univerzalne tvrdnje, pokazuje nam primjerom rekurzivna aritmetika kako ju je razvio Skolem 1923[1]. On je pokazao kako je u rekurzivnoj aritmetici potpuno moguće simulirati govor, propozicionim veznicima vezanih tvrdnji, čisto računskim govorom jednostavnih tvrdnji. Na taj je način čisto aritmetički fundirana jedna logika, ali

[1] Skolem Th., *Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Varanderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich. Skrifter Norske Videnskaps--Akademi,* I, No 6b, Oslo.

lišena neposredne upotrebe partikularnog (egzistencijalnog) i univerzalnog kvantora. Jedna vrlo jaka aritmetika može se razviti na taj način.

Ostaje otvoreno pitanje koje značenje imaju univerzalne i partikularne (egzistencijalne) tvrdnje? U čemu je istinitost i što je istinitost tih tvrdnji? Konkretno, što znači tvrdnja: Bar jedan neparan broj je savršen, ili tvrdnja: Svaki neparan broj je nesavršen? Ako pritisnuti ontološkim pritiskom razumijemo takve tvrdnje kao deskripcije aktualno postojećeg područja brojeva (najčešće shvaćenog isključivo po analogiji s aktualno ostvarljivim, tj. konačnim skupovima), tada su značenja tih tvrdnji deskripcije stanja stvari u tom području. Uvjet istinitosti određen tim značenjem je adekvatnost deskripcije stanju stvari. Nesigurnost koja proizlazi iz tog razumijevanja već je naznačena. (Nadalje, taj uvjet istinitosti neke tvrdnje ne pruža ujedno i kriterij istinitosti.)

Ako nam je i ovdje stalo do sigurnosti čiste matematike, znamo već gdje je njen izvor. (Opisan je u prvom odjeljku.) Sada se dakle radi o tome da se zasnuje jedna (recimo po analogiji) matematika asetoričkog govora neopterećena ontološkim pritiskom. Ta matematika, tj. matematička logika u jednom smislu čak i prethodi onoj prije opisanoj (slobodno rečeno u onom smislu u kojem govor prethodi brojenju). Recimo još samo toliko da se tu radi o zasnivanju konstruktivne matematičke logike[2].

[2] Drugi način suočavanja s tom nesigurnošću je Hilbertova metoda idealnih elemenata, koja se treba opravdati njegovim programom. Bit metode jest da se problematizirane tvrdnje (idealni elementi) liše svakog značenja i shvate samo kao pomoćno sredstvo kojim se omogućuje lakše utvrđivanje istinitosti jednostavnih tvrdnji, čije nam je značenje jedino neposredno dano. U tu svrhu dopušta se izvođenje tih tvrdnji, i izvođenje iz tih tvrdnji, u skladu s manipulativnim principima, koji su slike logičkih principa, bilo konstruktivno bilo ontološki zasnovanih (kao što je npr. princip tertium non datur — naime jedno stanje stvari ili je aktualno ostvareno u aktualno postojećem području ili nije). Međutim, porijeklo tih manipulativnih principa metodički se zanemaruje i previđa, tako da matematika postaje igra u kojoj samo mali dio ima direktno značenje i smisao. Ona se naknadno kao cjelina opravdava metamatematičkim dokazima konzistencije, koji bi trebali osigurati slijedeće (?): Svaka tvrdnja koja ima direktno značenje (realni element) i koja se u okviru igre može dokazati, po samom svom značenju je istinita (usp. članak o novijoj filozofiji matematike).

III. Iscrpljuje li čista matematika, kako smo je ovdje razumjeli, svu onu aktivnost, prošlu i sadašnju, koja je kulturno i povijesno označena kao matematika? Sigurno ne. Izvan opsega čiste matematike ostaje primijenjena matematika, tj. ona matematika koja prihvaća ontološki pritisak, koja je po intenciji deskriptivna. To je, primjerice, geometrija shvaćena kao deskripcija postojećeg prostora ili matematička analiza shvaćena kao deskripcija brojevnog pravca (kontinuuma) i promjenljivih veličina čija se promjenljivost mjeri funkcijama, koje ovise o argumentima s brojevnog pravca.

Po čemu je takva, primijenjena matematika još uvijek matematika? Može li se njena matematičnost uskladiti s onim što smo do sada rekli?

U jednom smislu može. Primijenjena je matematika, doduše, deskriptivna po svojoj intenciji, ona upućuje na svoj predmet, ali u samoj izvedbi ona teži onoj apodiktičnosti čiste matematike o kojoj je već bila riječ. Ta težnja očituje se u samom odnosu prema predmetu primijenjene matematike. Pretpostavke o prirodi tog predmeta uvijek se pokušavaju svesti na minimum. To je karakteristično.

Poučan primjer je aritmetizacija matematičke analize; zamjena infinitezimala, koji je tipičan proizvod ontološkog pritiska, graničnim procesom, procesom približavanja.

Programi koji su išli za tim da pruže sigurnost čiste matematike primijenjenoj matematici, oslobađajući je ontološkog pritiska njenog predmeta, često su uspijevali samo u tome da njen predmet zamijene novim predmetom, dakle da ontološki pritisak premjeste u novu sferu. Poznati primjer je skupovno-teorijsko zasnivanje matematike.

Naša je posljednja teza da je teorija skupova (razvijena od Cantora nadalje kao teorija transfinitnih ordinala i kardinala) primijenjena matematika, u ovdje jasno naznačenom smislu, i da kao takva ne može služiti zasnivanju matematike. Naprotiv, pravi je zadatak da se upravo njoj pokuša pružiti sigurnost čiste matematike, zasnivanjem jedne matematike skupljanja i transfinitnog nabrajanja, u ontološki neopterećenom smislu. Mislimo da je to do neke mjere moguće, i to onda kada se radi o teoriji transfinitnih ordinala. (Možda je to i najznačajniji zadatak čiste matematike.) U slučaju transfinitnih kardinala sumnjamo da je takvo zasnivanje upoće moguće. Zašto?

Nakon burnog razdoblja svoje mladosti, u kojem je bila teško potresena antinomijama koje su zbunjivale, teorija skupova konačno se konstituirala kao deskripcija kumulativne, po tipovima izrasle, strukture skupova u Zermelovu smislu. Treba priznati da se otada u teoriji skupova nije pojavila ni jedna antinomija. Međutim, isto tako treba priznati da je kumulativna struktura prilično varljiva. Uglavnom je prihvaćamo školskim treningom i teško da imamo bilo kakav uvid u tu bogatu strukturiranost. Ontološki je ona potpuno nezasnovana. Sigurno nije zadatak čiste matematike da je ontološki zasnuje, ali tu se i ne radi o čistoj matematici, nego o njenoj primjeni na nešto što se mora, ako nam je stalo do sigurnosti, samo sobom, tj. izvanmatematički, ontološki osigurati. Takvi pokušaji su rijetki i prilično neuvjerljivi.

S druge strane, matematičkim izvođenjem teorije skupova (za koje je karakteristično da se ne opterećuje ontološkim problemima) pokušava se, koliko je to moguće, zaobići ontološka obaveznost koju nameće predmet izučavanja. Pokušava se s aksiomatikom; dakle, obavezati se što manje, što određenije, jasno to iskazati aksiomima i potom djelovati čisto matematički. Međutim:

1. Matematički tretman se u takvim slučajevima, gotovo uvijek, služi i principima, koji su ontološki zasnovani (naprimjer, *tertium non datur*), bez ispitivanja njihove matematičke opravdanosti (npr. Hilbertovom metodom spomenutom u 2. podlisku). Tu je prisutna prešutna pretpostavka o ontološkoj zasnovanosti predmeta izučavanja.
2. Skolemov paradoks pokazuje da matematički tretman, bez obzira na snagu aksioma, sam po sebi ne obavezuje na velike kardinale. Drugim riječima, da bismo rezultate takve teorije skupova shvatili kao rezultate o transfinitnim kardinalima, nužna je interpretacija tih rezultata na kumulativnoj strukturi, što zahtijeva uvid u tu strukturu i njeno ontološko zasnivanje. To je i najjači odgovor na »Zašto?« iz pretprošlog pasusa.

Literatura

1) Goodstein R. L., *Recursive Number Theory, SL. Nortsh Holland* 1957.
2) Goodstein R. L., *Recursive Analysis, SL. North Holland,* 1961.
3) Lorenzen P., *Normative Logic and Ethics, Bibliographisches Institut — Mannheim,* 1969.

ŠTO JE NOVIJA FILOZOFIJA MATEMATIKE

Filozofija matematike je problematiziranje matematike, dovođenje matematike u pitanje. Filozofija matematike je, dakle, kritičko razmatranje matematike; razmatranje koje zahtijeva distanciju, istupanje iz matematičkog mišljenja. Treba je stoga razlikovati od nekritičkog uranjanja u okvir matematičkog mišljenja u kojem se zbiva sama matematika.

Ovaj bi uvod pogrešno mogli shvatiti kvazifilozofi vjerujući da je njime još jednom potvrđena njihova vizija znanstvenika kao onoga koji ne može razumjeti bit znanosti; konkretno, njihova vizija matematičara koji ne može razumjeti bit matematike. Znanstvenik bi, naime, bio taj koji navodno ne može istupiti iz znanosti i jasno je filozofski shvatiti. Mi ovdje ne zastupamo to gledište. Iako znamo da većina znanstvenika ne istupa iz znanosti, mi isto tako znamo da većina filozofa nikada ne ulazi u znanost, što im unaprijed onemogućava da iz nje istupe. (Kvazifilozofi zaboravljaju da se istupiti može samo iz nečega u što se već prethodno ušlo.) Smatramo da filozofski relevantan govor o znanosti može izreći upravo znanstvenik koji istupa iz znanosti (i dopuštamo, ako je to nekome značajno, da on time postaje filozof) ili filozof koji ulazeći u znanost zadržava (filozofsku) distanciju prema njoj. Točno je da čisti znanstvenici nisu relevantni za naše pitanje, ali ni tzv. čisti filozofi nemaju o njemu što reći. (Uostalom, relevantna povijest filozofije i znanosti dovodi ozbiljno u pitanje postojanje tih čistih oblika.)

Problematiziranje matematike o kojem će ovdje biti riječ jest problematiziranje matematike kao spoznaje ili, točnije, kao paradigmatskog primjera spoznaje. Prema tom paradigmatskom primjeru spoznaje moguć je dvojak odnos:

I. Matematika je paradigmatski primjer sigurne spoznaje i time ona postaje mjesto na kojem se iskušava svaka teorija spoznaje (epistemologija).
II. Matematika je paradigmatski primjer spoznaje čija se sigurnost mora opravdati jednom sveobuhvatnom teorijom spoznaje. Tu je sama ta sigurnost upitna.

U prvom pristupu teorija spoznaje (epistemologija) prolazi ili pada ovisno o tome može li ili ne može objasniti

sigurnost matematike, tj. sigurnost matematičke spoznaje. (Ovdje kao da se umjesto matematike problematizira epistemologija.) U drugom pristupu matematika prolazi ili pada ovisno o tome može li se ili ne može epistemološki zasnovati.

Prvi je pristup karakterističan za filozofe koji misle o matematici. Drugi je pristup karakterističan za matematičare koji misle filozofski.

Prvi je pristup *stara* značajka filozofskog odnosa prema sigurnoj matematici. Drugi je pristup *nova* značajka filozofskog odnosa prema sigurnosti matematike.

Tema našeg članka je »novija filozofija matematike« u upravo naznačenom smislu.

Prije nego se posvetimo ovoj (ovdje) osnovnoj temi, recimo još nešto o prvom pristupu, koji ćemo (u opreci prema drugom pristupu) zvati starijom filozofijom matematike.

Naše dosadašnje izlaganje nameće ključno pitanje: što se matematičko uopće dovodi u pitanje u starijoj filozofiji matematike? Svakako ne njena sigurnost. Dapače, sve ono što bi moglo biti u opreci s tom sigurnošću već je zbog same te opreke sumnjivo. Ukratko, sigurnost matematike ne dovodi se u starijoj filozofiji matematike u pitanje. Tu je u pitanju njena primjenljivost. Da bismo to objasnili, poslužit ćemo se nekim legendama, koje ne treba shvatiti doslovno. (One su samo personifikacije trendova, koje su, bar nama, pogodne i značajne za usredotočenje mišljenja.)

Tales je stvorio (elementarnu) matematiku. On je, naime, konstituirao matematiku kao deduktivnu znanost, »otkrivši« ono područje apstraktnoga u kojem se zbiva matematika. Od Talesa nadalje znamo za znanost koja se ne bavi konkretnim, za znanost koju zovemo matematikom. Ta znanost, dakle, nije podložna mijenama konkretnoga, nego je apsolutno sigurna u svojoj apstraktnosti. Matematika dokazuje svoje apstraktne istine. (Zbroj kutova nekog konkretnog, osjetilima dostupnog trokuta uvijek je nešto približno, ako uopće i jest nešto; zbroj kutova apstraktnog, mislima dostupnog i mislima određenog trokuta dokazivo je, dakle sigurno 180°.) Sigurnost matematike je u njenoj apstraktnosti; apstraktnosti koja omogućuje dokaz.

Tales je započeo, a Pitagora nastavio razvijati matematiku kao sigurnu apstraktnu spoznaju. Ali ta apstraktna spoznaja nije u Pitagore samo spoznaja apstraktnoga. U njega je apstraktni matematički pojam strukturni i konstitutivni element konkretnoga (prirode). Ili, kako bi to rekao Pitagora: priroda je brojevna, priroda je sva od brojeva. Iako je taj stav često i prečesto proglašavan matematičkim misticizmom, čini nam se da je to paušalna ocjena koja ništa ne govori, a još manje objašnjava. Jer o čemu je ovdje zapravo riječ? O odnosu sigurne apstraktne matematike i konkretne prirode. Tu prvi put nalazimo problematizaciju (i uočavanje) toga odnosa, a i prvo rješenje uočenog problema. Rješenje koje identifikacijom konkretne prirode s apstraktnom matematikom objašnjava primjenljivost apstraktne matematike u razumijevanju konkretne prirode. (Većina današnjih i nekadašnjih fizičara, koji vjeruju u primjenljivost apstraktne matematike u fizici, isto su toliko mistici koliko je to i Pitagora, jer se njihova vjera zasniva uglavnom na identifikaciji Pitagorina tipa. Štoviše, oni često (čak i dva tisućljeća nakon Pitagore) nisu čak ni svjesni identifikacije koju čine, pa bi se možda jedino tu s pravom moglo govoriti ako ne o misticizmu, a ono bar o mistificiranosti.) Problematiziranje odnosa apstraktne matematike i konkretne prirode, ili kako smo to gore nazvali, problematiziranje primjenljivosti apstraktne matematike u konkretnom, ne bismo dakle nikako mogli nazvati misticizmom. Riječ je upravo o osnovnom problemu starije filozofije matematike, koja ne dovodi u pitanje sigurnost matematike (smatrajući je dobro fundiranom u njenoj apstraktnosti), ali dovodi u pitanje njenu primjenljivost; s Pitagorom kao začetnikom.

Ovdje je potrebno dodatno objašnjenje. Identifikacija o kojoj je riječ provodi se u Pitagore u dva koraka. U prvom se geometrijske apstrakcije smatraju konstitutivnim elementima konkretne prirode, a u drugom se kao krajnji redukt tih apstrakcija otkriva broj. Drugi korak te identifikacije uzdrman je otkrićem moguće nesumjerljivosti dužina. To je, naravno, uzdrmalo specifično pitagorejsku redukciju konkretne prirode na broj, ali ne i pitagorejski uvid da apstraktna utemeljenost sigurnosti matematike dovodi u pitanje njenu primjenljivost na konkretno; uvid koji postaje osnovnim problemom svekolike starije filozofije matematike.

Ovdje ćemo samo još kratko upozoriti na to da taj problem uistinu i ostaje osnovnim problemom starije filozofije matematike.

Mnogima je teško razumjeti porijeklo Demokritova matematičkog atomizma[1]. Lako ćemo ga shvatiti ako u njemu vidimo usuglašavanje apstraktne matematike s konkretnom, atomistički shvaćenom prirodom; usuglašavanje koje treba da opravda primjenljivost matematike.

Sa sličnim se problemima susreću i mnogi izučavatelji Zenonovih aporija. Dok jedni u njima vide prazna sofistička izmotavanja, drugi pronalaze matematičku grešku u slavnim Zenonovim argumentima. Prazni sofizam, naime, ne može zbuniti one koji jednostavno i konkretno vide kretanje strijele i Ahilovu pobjedu nad kornjačom. Njih apstraktni argumenti ne mogu »zavarati i odvesti na pogrešan put«. S druge strane, izolirani apstraktni argument zasniva se na matematički pogrešnoj pretpostavci da suma beskonačno mnogo konačnih veličina mora biti beskonačna veličina. Nije li Zenonov argument sofistička igrarija koja dovodi u pitanje elementarno razumijevanje konkretne prirode služeći se apstraktnim matematičkim argumentom koji prešućuje jednu pogrešnu pretpostavku? Možda, ali samo uz uvjet, da primjenljivost apstraktnog matematičkog argumenta u konkretnoj (npr.) Ahilovoj situaciji smatramo samorazumljivom. Samo ako identificiramo Ahilov konkretni put s apstraktnom matematičkom dužinom. Samo ako smatramo da je beskonačna djeljivost apstraktne matematičke dužine isto što i beskonačna djeljivost konkretnog Ahilova puta. Dakle, Zenonov argument možemo smatrati praznim sofizmom samo ako primjenljivost apstraktnog matematičkog argumenta u konkretnoj Ahilovoj situaciji smatramo samorazumljivom. Ali, ne dovodi li Zenonov argument u pitanje upravo tu samorazumljivost primjenljivosti apstraktne matematike? Ne radi li se i tu o osnovnom problemu starije filozofije matematike? Mislimo da je riječ upravo o tome.

U svojem učenju o idejama Platon odustaje od proste identifikacije apstraktnoga s konkretnim. Taj odnos rješava on nadređivanjem apstraktne ideje konkretnom. Apstraktna ideja je objektivni normativ konkretnome. (U Platona ta tema nije čvrsto vezana za matematiku, ali nema sumnje da Platon upravo iz odnosa matematike i prirode crpi neke

[1] Detaljnije informacije o Demokritovu matematičkom atomizmu možete naći u knjizi C. Boyera, *The History of the Calculus*, Dover, 1959.

od svojih osnovnih motiva. Uostalom, često je upravo taj odnos početna tema njegovih dijaloga, koja se zatim uopćava.)

U novovjekovnoj filozofiji možemo pratiti pomak od objektivnog normativnog vladanja apstraktnoga nad konkretnim prema zamisli o apstraktnome koje normativno usmjerava deskripciju konkretnoga (dakle, ne samo konkretno). Na vrhuncu te zamisli stoji I. Kant: matematička spoznaja je sigurna jer je spoznaja apriornih oblika svijesti, prostora i vremena. Ta je spoznaja i primjenljiva jer apriorni oblici svijesti tek omogućuju susret s (konkretnom) stvarnošću, tj. oni su konstituensi stvarnosti. (Ovdje kao da se gubi stari, nezavisni, pojam konkretnoga.) Opreka apstraktno-konkretno zamjenjuje se oprekom transcendentno-imanentno, a primjenljivost ne treba shvatiti kao primjenljivost apstraktnoga u razumijevanju transcedentnoga (jer transcedentno nije konkretno). I konkretno i apstraktno su imanentni, i upravo su time čvrsto povezani jedno s drugim.

Ovdje ćemo završiti naš »telegrafski« prikaz starije filozofije matematike[2] i vratiti se osnovnoj temi ovog članka, novijoj filozofiji matematike.

Novija filozofija matematike dovodi u pitanje sigurnost apstraktne matematike. Rješavajući taj problem, ona i ne dolazi do pitanja primjenljivosti. Njen je zadatak da objasni sigurnost čiste matematike, dakle onu sigurnost koja je u starijoj filozofiji matematike samorazumljiva. Novija filozofija matematike čak je toliko zaokupljena tim zadatkom da i ne razmatra osnovni problem starije filozofije: mogućnost primijenjene matematike[3].

Gdje leži sigurnost čiste matematike? Na čemu se ona temelji, što je zasniva? Tri su odgovora jasno zacrtana u ovom stoljeću. Odgovor logicizma, odgovor intuicionizma (konstruktivizma) i odgovor formalizma. Reći ćemo nešto pobliže o svakom od njih.

Logicisti izvode sigurnost matematike iz (za njih) samorazumljive sigurnosti logike, tako da matematiku na-

[2] Starija filozofija matematike ne prestaje s Kantom. Njen osnovni problem ostaje i danas jednim od temeljnih problema filozofije matematike. Termine starija i novija filozofija matematike ne treba shvaćati doslovno. (Uostalom, uvjetnost tih termina već je objašnjena.)

[3] Često se misli da su starija i novija filozofija matematike u nekom sukobu. Radi se samo o tome da one u fokus svojeg interesa stavljaju dva različita (podjednako značajna) problema.

prosto izvode iz logike. Matematika je nastavak logike i kao takva zadobiva njenu neumitnu sigurnost. Do takvoga razumijevanja odnosa logike i matematike, koje rezultira stvaranjem matematičke logike (shvaćene kao logike matematike), dolazi se jednim obratom, koji ćemo sada ukratko prikazati[4].

Tridesetih i četrdesetih godina 19. stoljeća (formalna) logika razvija se uglavnom u Engleskoj proširivanjem skolastičke silogistike (zahvaljujući autorima kao što su W. Hamilton i De Morgan). Karakteristični su pokušaji da se u izučavanju logike, kao nauke koja istražuje zakone u području kvalitete, primijene matematičke metode analize koje su se pokazale plodnima i uvjerljivima u izučavanju zakona kvantitete. Krajnji cilj bio bi stvaranje odgovarajuće simbolike i utvrđivanje zakona njenog manipuliranja po uzoru na matematiku (točnije: aritmetiku). Ti pokušaji vuku svoj korijen iz ranijih razdoblja i drugih sredina (sjetimo se, naime, G. W. Leibniza), no prvi pravi uspjeh postignut je 1847. Booleovim radom *Mathematical Analysis of Logic*. G. Boole je pokazao da se osnovne operacije s pojmovima (operacije mišljenja, po njemu) mogu predočiti aritmetičkim operacijama $+$ i $\cdot$, a osnovni pojmovi svega i ničega brojevima 1 i 0. Naime, te se operacije pokoravaju upravo aritmetičkim zakonima, tj. zakonima operiranja s kvantitetama, uz jedan dodatni zakon: $x^2 = x$ (nazvan principom tautologije), koji je karakterističan i distinktivan za operacije s kvalitetama. U tom smislu logika pojmova postaje specijalnom aritmetikom i G. Boole je tako i shvaća. Premise su jednadžbe iz kojih se aritmetičkim operacijama mogu dobivati druge jednadžbe, koje su dakle konkluzije aritmetiziranog zaključivanja. Smatralo se da je tom analizom logika pojmova dobila jednostavnost, sigurnost i općenitost matematike. Drugim riječima, smatralo se da je dobro, tj. matematički zasnovana.

Neinterpretirane jednadžbe, koje se javljaju u aritmetiziranom dokazu, smetale su čisto logičkom razumijevanju osnovnih zakona, pa je počelo »čišćenje od aritmetike« (G. Boole, W. S. Jevons, S. C. Peirce, J. Venn, E. Schröder). Konačni rezultat bila je Boole-Schröderova algebra koja predstavlja logiku pojmova, ali istovremeno i logiku jedno-

[4] Usp. članak o Booleu i Fregeu u kojem je detaljnije analiziran taj obrat.

mjesnih propozicijskih funkcija, kao i logiku propozicija. Ta se algebra javlja, dakle, kao apstraktni matematički sistem s više mogućih interpretacija. Takav sistem nije određen svojom interpretacijom (tj. predmetom koji istražuje), nego se nezavisno od svojih mogućih interpretacija zasniva kao deduktivni aksiomatski sistem (čiji aksiomi, pa dakle i čitav sistem, mogu poprimiti razne interpretacije). Postavljanje i izučavanje takvih sistema postaje karakteristikom čiste matematike koja više nije određena predmetom istraživanja (kao što su to bile aritmetika ili geometrija), nego se razvija nezavisno od tog predmeta izgrađujući čiste neinterpretirane aksiomatske sisteme.

Tako je rođena tzv. čista matematika i u tom smislu treba razumjeti Russella kada kaže da je G. Boole otac čiste matematike. Međutim, Boole-Schröderova algebra, koja bi trebala predstavljati čisto matematičko (od aritmetike »očišćeno«) zasnivanje logike, u određenom je smislu paradoksalna (kao zasnivanje logike). Naime, matematičke dedukcije koje se provode u tom kao i u svakom drugom čisto matematičkom sistemu temelje se na zakonima logike. Ali, ako se tom Boole-Schröderovom algebrom želi matematički zasnovati sama logika, onda se u njoj ne bismo smjeli koristiti zakonima te iste logike, što — s druge strane — nije moguće jer matematika pretpostavlja logiku. Naravno, to uvjerenje o prvenstvu logike nije uvjerenje Boolea i njegova razdoblja. To razdoblje (formalnu) logiku smatra specijalnim slučajem čiste matematike. Naime, matematička logika (shvaćena kao matematika logike) poklapa se s jednim apstraktnim sistemom čiste matematike, s Boole-Schröderovom algebrom. Taj sistem, koji jest matematika logike, nije čista matematička logika, jer nije čisto matematički zasnovan (nezavisno od svoje logičke interpretacije). Boole je otac čiste matematike, koja pretpostavlja logiku. On nije otac čiste matematičke logike. Čista matematička logika nastaje obratom kojim se od Booleove matematike logike prelazi na logiku matematike. Kako dolazi do tog logicističkog obrata?

Kritika infinitezimalnog računa i vraćanja matematičara problemu njegova zasnivanja, sredinom 19. stoljeća, jasno su upozorili na potrebu zasnivanja aritmetike realnih brojeva. To je razdoblje kritičkog pokreta u matematici, razdoblje u kojem K. Weierstrass postaje vrhunski matematički autoritet, razdoblje u kojem se (neformalnom) logičkom analizom intuicije prostora i vremena odbacuju kao temelj aritmetike. U tom razdoblju R. Dedekind aritmetizira kontinuum (realnih brojeva) da bi potom postavio čak i problem geneze samih prirodnih brojeva ovim riječima[5]: »Kada aritmetiku (algebru, analizu) nazivam samo jednim dijelom logike, time već iskazujem da pojam broja smatram sasvim nezavisnim od predstava ili intuicija prostora i vremena, nego ga, naprotiv, smatram neposrednim proizvodom čistih zakona mišljenja.« To je razdoblje koje nema sluha za bulovsku logiku koja svoju sigurnost traži u matematici, naprotiv, to će razdoblje sigurnost matematike tražiti u logici. Taj radikalni obrat zbio se ipak postepeno, usvajanjem i razvijanjem još jednog aspekta kritičkog pokreta u matematici. U svijesti vodećih matematičara s kraja 19. stoljeća jasno je zacrtan ideal matematičke teorije koja se iz malog broja (matematičkih) pretpostavki izvodi u skladu s logičkim načelima, dakle, ideal teorije koja odbacuje intuiciju čak i kao sredstvo demonstracije[6]. Radikalniji mislioci poput G. Peana uvidjeli su da se tako shvaćena deduktivna znanost (koja zahtijeva postuliranje i definiranje osnovnih entiteta, ali i radikalno čišćenje deduktivnog postupka od pribjegavanja intuiciji) može realizirati samo u okviru simboličkog jezika neopterećenog intuitivnim sadržajima prirodnih jezika. Taj jezik matematika je u velikoj mjeri već razvila. Međutim, G. Peano (u skladu s novim shvaćanjem deduktivne znanosti) smatra da je potrebno učiniti i ono što u matematici dotad nije činjeno: formalizirati i simbolički opisati sâmo matematičko argumentiranje. Konstruirao je, dakle, simboličku logiku i koristio se njome pri formalizaciji matematike. Uz pomoć te logike izvođenje zaključka iz premisa zamijenjeno je formalnim generiranjem odgovarajućeg simboličkog izraza iz drugih takvih izraza jednim kvazialgebarskim procesom. Time je matematika oslobođena intuicije tako što je pretvorena u skup propozicija oblika »p implicira q«, gdje p predstavlja konjunkciju postuliranih matematičkih tvrdnji (aksioma), a q njihove kvazialgebarski (mehanički) izvedene konzekvencije. Spoj tog aspekta kritičkog pokreta s onim što ga reprezentira Dedekind, a koji

[5] Citat je iz knjige R. Dedekinda, *Was sind und was sollen die Zahlen*, *Brunswick*, 1888.

[6] Očito je i bulovsko razdoblje, u kojem je stvorena čista matematika, bitno pridonijelo stvaranju tog ideala.

je ustvrdio da su osnovni konstituensi matematičkih propozicija (prirodni broj, cijeli broj, racionalni broj, realni broj) logički definabilni, upućuje na mogućnost da su p i q čisto logičke propozicije (propozicije izgrađene od logičkih konstanti), tj. da je matematika oslobođena intuicije postala skup čisto logičkih propozicija oblika »p implicira q«. Drugim riječima, matematika je postala dio logike. Spajanje tih dvaju aspekata kritičkog pokreta u matematici i konzekventno prihvaćanje takvog stava proveli su logicisti (G. Frege, B. Russell i drugi). Oni su se pothvatili pokazati da je čista matematika dio logike, dio koji su nazvali matematičkom logikom, jer je ona logika matematike (logika iz koje nastaje matematika).

Logika koja je potrebna za logicističku rekonstrukciju čiste matematike ekstenzionalno se poklapa s Cantorovom teorijom skupova, čija je sigurnost početkom ovog stoljeća dovedena u pitanje otkrićem paradoksalnosti te teorije. Logicizam je matematiku reducirao na logiku, ali ne na neumitno sigurnu logiku, nego na logiku koja je možda nesigurnija i od same matematike. Intuicionisti, ili šire konstruktivisti (L. E. J. Brouwer i drugi), kreću putem ponovnog zadobivanja sigurnosti matematike u samoj matematici.

U članku »*O razlikovanju čiste i primijenjene matematike*« pokazano je gdje konstruktivisti nalaze sigurnost matematike. Tu vidimo kako se konstruktivistički može odrediti čista matematika i gdje se (u skladu s tim određenjem) nalazi njena sigurnost. Jasno je pokazano i to da konstruktivistički shvaćena čista matematika ne pretpostavlja logiku. Dapače, i sama je logika dio čiste matematike. Ona je čista »matematika asertoričkog govora neopterećena ontološkim pritiskom«.

Ali, konstruktivistička rekonstrukcija cjelokupne klasične matematike nije moguća. Konstruktivizam nalazi sigurnost u (čistoj) matematici koja se ne poklapa sa standardnom klasičnom matematikom[7]. Mnogima se to čini prevelikom žrtvom, naprimjer formalistima.

[7] U članku *O razlikovanju čiste i primijenjene matematike*, pokazali smo kako se, s konstruktivističkog stajališta, klasična matematika može rekonstruirati kao primijenjena matematika. Ta mogućnost dovodi u pitanje stav da konstruktivizam ne nalazi u klasičnoj matematici nikakav smisao. (Primijenjena matematika iz tog članka nije isto što i primijenjena matematika o kojoj smo govorili u ovom članku.)

Termin »formalizam« upotrebljava se dvojako. Najčešće označava nominalistički stav prema postojanju matematičkih predmeta. Mi ćemo ga ovdje upotrebljavati u drugom smislu. Formalizam će za nas (kao i za mnoge druge, npr. Von Neumanna) biti sinonim za Hilbertovo metamatematičko zasnivanje matematike (jer to zasnivanje u jednom svojem koraku zahtijeva metodičko prihvaćanje (nominalističkog) formalizma). Objasnit ćemo o kakvom je zasnivanju riječ.

Hilbert prihvaća konstruktivističku kritiku klasične matematike (kao nesigurne matematike). Dapače, ono što on smatra sigurnom matematikom samo je dio konstruktivistički shvaćene čiste matematike (tzv. finitni dio). Ipak, on ne pristaje (kao što pristaju konstruktivisti ili intuicionisti) na odbacivanje onog dijela klasične matematike koji konstruktivističkom rekonstrukcijom nije opravdan kao sigurna spoznaja. Njegov program je program opravdavanja konstruktivistički odbačene (nesigurne) matematike tzv. metodom idealnih elemenata.

Prvi zadatak toga programa je formalizacija standardne klasične matematike. Osnovne rezultate za ispunjenje toga zadatka polučili su već logicisti, pretvarajući matematiku u sistem propozicija oblika »p implicira q«, u kojem p predstavlja konjunkciju postuliranih matematičkih tvrdnji (aksioma), a q njihove kvazialgebarski (mehanički) izvedene konzekvencije. Ali dok logicizam traži logičku interpretaciju propozicija toga sistema, Hilbert prihvaća samo njihovu finitnu (matematičku) interpretaciju. Jednostavnije kazano, Hilbert pridaje značenje (i smisao) samo onim propozicijama sistema koje imaju jednostavni računski (finitni matematički) smisao kakav, naprimjer, imaju tvrdnje oblika $m + n = p$. Sve ostale propozicije koje se ne mogu ovako jednostavno objasniti Hilbert uopće ne interpretira, ne pridaje im nikakvo značenje. (Striktno govoreći, one za njega i njegovu školu uopće nemaju značenje. Znakovi su koji ništa ne označavaju, nominalistički shvaćeni znakovi.) Neinterpretirane propozicije sistema jesu idealni elementi sistema, koji mogu biti formalno-logičke posljedice interpretiranih propozicija, iz kojih se opet mogu formalno-logički izvoditi druge neinterpretirane propozicije, a u krajnjoj instanciji i interpretirane. One su dakle, formalno gledano, ravnopravni članovi deduktivnog sistema. Deduktivni sistem se kao cjelina opravdava matematičkim dokazom konzistencije sistema, koji bi trebao osigurati sljedeće:

Svaka interpretirana propozicija (koja ima jednostavno finitno značenje) i koja se u okviru sistema može dokazati (pa makar i upotrebom idealnih elemenata lišenih značenja), po samom je svom značenju istinita.

Idealni elementi, koji nemaju značenje i kojima značenje ne treba pridavati, služe, dakle, bržem i jednostavnijem dokazivanju jednostavnih (finitnih) propozicija. (Lako je, naime, vidjeti da je dokaz neke tvrdnje, koji se koristi idealnim elementima, u načelu bitno kraći i formalno jednostavniji od finitnog (konstruktivističkog) dokaza te iste tvrdnje, koji se ne koristi idealnim elementima.)

U tom programu treba uočiti jedan moment koji ga odvaja od nominalistički shvaćenog formalizma. To je moment odabiranja ili, bolje rečeno, konstruiranja sistema koji se opravdava. S jedne strane, da bi to opravdanje bilo ujedno i željeno opravdanje klasične matematike sam bi sistem morao biti formalizacija klasične matematike, a to će biti samo onda ako je klasična matematika njegova interpretacija. Dakle, u samom momentu formalizacije sistem mora biti interpretiran (ako nam je stalo do opravdanja klasične matematike, a ne do formalnog rezultata o formalnom sistemu). S druge strane, samo se opravdanje nalazi metodičkim zaboravljanjem te inetrpretacije. Krajnji hilbertovski zaključak trebao bi biti ovakav:

Mi razumijemo klasičnu matematiku, ali nismo sigurni u neke njene dijelove. Međutim, ako čak potpuno odbacimo i samu mogućnost razumijevanja tih (nefinitnih) dijelova, i zadržimo kao razumljiv i siguran dio klasične matematike samo njen finitni dio, možemo pokazati sljedeće: tvrdnje koje ne razumijemo i koje nisu sigurna spoznaja možemo shvatiti kao pomoćno sredstvo koje omogućuje da se brže i jednostavnije dokazuju (finitno) razumljive tvrdnje.

Često možemo pročitati da je Gödelovim teoremima o nepotpunosti dokazana neostvarljivost Hilbertova programa. Gödel je svojim prvim teoremom dokazao da nije moguće potpuno formalizirati nijednu matematičku teoriju koja sadrži aritmetiku. U svakoj formalizaciji matematičke teorije spomenutog tipa moguće je naći (formalnu) propoziciju koja nije ni dokaziva ni oboriva u formalnom sistemu. Dapače, interpretacija te propozicije je istinita matematička tvrdnja. Iz prvog teorema slijedi drugi, koji tvrdi da konzistentnost formalizirane matematičke teorije, koja sadrži aritmetiku, nije moguće dokazati u samoj formaliziranoj teoriji. Međutim, posljedice Gödelovih teorema za Hilbertov program su sljedeće.

1. Sasvim je jasno da Hilbertovim programom ne možemo opravdati cjelokupnu matematiku, jer se cjelokupna matematika prema prvom Gödelovu teoremu ne može formalizirati (a formalizacija teorije koja se opravdava prvi je korak Hilbertova programa).

2. Dokaz konzistencije formalnog sistema ne osigurava da će svaka interpretirana i idealno dokaziva propozicija sistema biti i (realna) istinita propozicija. (Hilbertova tvrdnja da realna istinitost idealno dokazivih i interpretiranih propozicija nekog formalnog sistema slijedi iz dokaza konzistentnosti toga sistema temeljila se na pogrešnoj pretpostavci o potpunosti formalizacije.)

Dokaz o realnoj istinitosti idealno dokazanih propozicija mora dakle biti neposredan (takvi dokazi se nalaze u novijoj teoriji dokaza), pa dokazi konzistencije gube ono značenje koje su nekada imali u Hilbertovu programu. Taj neposredni dokaz, iako moguć, bitno je složeniji od čistog dokaza konzistentnosti. Mogućnost ostvarenja Hilbertova programa nije dakle uništena Gödelovim teoremima. Ispunjenje programa samo je postalo složenije i nužno je parcijalno. Uočite da su intuicionisti mogućnost formalizacije matematike držali upitnom i prije Gödelovih rezultata.

I, na kraju, upozorimo na jedan opći okvir u kojem možemo jasnije sagledati čitavu matematiku i uz čiju ćemo pomoć možda lakše razumjeti sve do sada spomenute poglede, stavove i opredjeljenja.

Matematika je već u svojem najelementarnijem vidu apstraktna konstrukcija (utemeljena na intuiciji razdvajanja, njegovoj iteraciji koja vodi nizanju, pa još složenijim uređajima itd.) koja omogućava susret sa stvarnošću (ili, kako bi neki rekli, koja omogućava konstrukciju stvarnosti). S druge strane, spoznaja čistih oblika same te stvarnosti, tj. njene protežnosti i trajanja (jednostavnije: prostora i vremena) također se naziva matematikom kada se do nje dolazi ovim postupkom: neke intuitivno uočene (prostorne ili vremenske) pravilnosti postuliraju se i uklapaju u jezik kao tzv. aksiomi; potom se iz te aksiomatske jezgre izvode dalja svojstva uz pomoć formalnih (lingvističkih) pravila klasične logike. Intuitivno uočene pravilnosti predmet su stalne sumnje[8]. (Predmet sumnje je, naprimjer, prostorna intuicija u geometriji i analizi.) Njih ukloniti, znači zadobiti sigurnost matematike. (Aritmetizacija analize primjer je uklanjanja prostorne intuciije.) Ovdje se otvaraju tri mogućnosti; dvije radikalne i jedna pragmatička.

Radikalne odbacuju postuliranje. Jedna, držeći matematiku konstrukcijom nezavisnom od lingvističko-logičkih metoda, izgrađuje tzv. konstruktivnu matematiku. Druga, držeći matematiku logičko-lingvističkom djelatnošću, pokušava sve njene pojmove i rezultate izvesti iz tog područja. Pragmatička matematika ne odustaje od postuliranja samo mu umanjuje značenje. Postulirati se može bilo što, a vrijednost tako dobivene matematike pokazat će njene primjene.

Konstruktivna matematika teško doseže bogatstvo struktura dostupno pragmatičkoj, ali kad se izravno sukobi s nekim od njenih rezultata, tada ih ozbiljno dovodi u pitanje. Logički orijentirana matematika ne može ustvari zaobići postuliranje, ali ga svodi na svega nekoliko odsudnih postulata (naprimjer na aksiom beskonačnosti i reducibilnosti kod Russella). Pragmatička matematika (koja ustvari i jest svakodnevna, standardna matematika) svojim se primjenjivanjem uranja u eksperimentalne znanosti, te se u krajnjoj liniji kroz njih može eksperimentalno potvrditi ili oboriti[9]. Ipak, moguć je i obrat, kojim ona može ponovo zadobiti matematičku sigurnost.

Naime, znanost na koju se matematika primjenjuje može biti i neki sigurni dio nje same, npr. finitni ili konstruktivni. »Eksperimentalna« provjera sastoji se sada u tome da se vidi kako ta primjena neće dovesti do finitno ili konstruktivno nevaljanih rezultata. Štoviše, možda je to moguće finitno ili konstruktivno dokazati.

Taj okvir kao da je spravljen po mjeri logicizma, intuicionizma i formalizma. No prije bismo rekli da ti pogledi (povijesno) izrastaju iz takvog okvira u koji se, uostalom, mogu smjestiti i neki drugi »izmi«. Naprimjer, u taj se okvir može smjestiti i matematički empirizam, kako je to upravo naznačeno. Dapače, tek u tom okviru uočavamo koliko je Hilbertova metamatematika (po svojoj metodi) bliska matematičkom empirizmu.

---

[8] Čak se čini da se postuliranje javlja tek tamo gdje počinju sumnje. O tome više u gornjem članku o aksiomatizaciji prirodnih brojeva.

[9] Tu se ponovo javlja osnovni problem starije filozofije matematike.

NEKE NAPOMENE O LOGICI I FILOZOFIJI ZNANOSTI

Za mnoge mislioce 19. i 20. stoljeća logika i nije drugo do filozofija znanosti. Kada u 19. stoljeću Bolzano i Mill govore o logici, nema sumnje da izlažu svoju filozofiju znanosti, kao što je izlaže i Popper u 20. stoljeću kada govori o »logici znanstvenog otkrića«.

Burnim razvojem logike kao matematičke logike, u određenom smislu, dolazi do odvajanja logike od filozofije znanosti[1]. Naime, filozofija znanosti nastavlja svoj stari put kao filozofska kritika i tradicionalna sistematika znanosti, ali se pritom ne koristi formalnim metodama nove logike. S druge strane, filozofija znanosti ipak dolazi u vezu s novom logikom, pod novim imenom formalne filozofije, tako što ta logika postaje sredstvo formalne eksplikacije znanosti, sredstvo njene logičke rekonstrukcije. Formalni jezik (matematičke, tj. simboličke, tj. formalne) logike primjenjuje se kao jezik podoban za formalizaciju znanosti. Međutim, u tome se i iscrpljuje odnos formalne filozofije i logike. S formalizacijom znanosti ništa se ne poduzima (ona ne postaje operativna), a budući da je teško prihvatiti da bi formalizacija sama po sebi, bez daljega mogla objasniti znanost i omogućiti nam njeno razumijevanje, mnogima se čini da formalna filozofija više i nije filozofija (znanosti)[2].

Ipak, ne smijemo prebrzo zaključiti (kao što mnogi čine) da filozofija znanosti nema i ne treba da ima veze s (formalnom) logikom ili, posebno, da je formalizacija znanosti filozofski irelevantna. Radi se o tome da formalna logika mora postati operativnim dijelom filozofije znanosti. Uostalom, filozofija matematike i matematička logika najbolje pokazuju da je tako nešto moguće i važno.

---

[1] Naravno, matematička logika postaje izuzetno značajna za filozofiju matematike, čak toliko značajna da se s njom katkada poistovjećuje, ali ona se ipak sve više udaljava od filozofije ostalih znanosti.

[2] Lako je razumjeti formaliziranu znanost formalne filozofiije, ali je pitanje objašnjava li ta formalizacija adekvatno samu (neformaliziranu) znanost. Ipak, u periodima krize smisla, koje često izaziva logički neobavezan (slobodan) poetski govor o znanosti, mnogi se filozofi znanosti okreću formalizaciji kao jasnoj eksplikaciji znanosti. Kao da formalna logika postaje mentalni higijeničar filozofije znanosti; sterilni stranac koji donosi spokoj i mir, ali ujedno uništava ono najdraže.

Već smo rekli da je uloga (matematičke) logike u (novijoj) filozofiji matematike veoma značajna (usp. prethodni članak). Sada možemo dodati da je to značenje posljedica operativnosti logike u filozofiji matematike. Matematička logika pojavljuje se u filozofiji matematike (usp. gornji članak o Booleu i Fregeu) kao sredstvo koje omogućava jasnu formulaciju njenog (filozofskog) programa. Naime, zahvaljujući matematičkoj logici, formulacija osnovnih teza programa postaje jasna utoliko što postaje jasno što znači opovrći ili dokazati osnovne teze programa, a time konačno postaje jasno i to što znači odbaciti ili ispuniti program. Sama matematička logika je upravo ono sredstvo kojim se opovrgavaju ili dokazuju osnovne teze, i u tom smislu je ona operativna. Naprimjer, Fregeova (Dedekindova, Russellova) teza o reducibilnosti matematike na logiku, koja je osnovna teza logicističkog programa, jasno je formulirana u okviru Fregeove (Russellove) matematičke logike. Formalizacija matematike ovdje nije sama sebi svrhom, niti se od nje očekuje neka, sama po sebi značajna, eksplikacija matematike. Formalizacija je ovdje samo sredstvo kojim se dokazuje ili opovrgava osnovna teza programa[3]. Ta je teza djelomično dokazana svođenjem pojma prirodnog broja na pojam konačne klase, a djelomično je dovedena u pitanje upotrebom stvarne (transfinitne) teorije skupova pri svođenju pojma realnog broja na pojam prirodnog broja[4] (usp. [Q]). Operativnost matematičke logike još je naglašenija u Hilbertovu (metamatematičkom) programu. Tu je formalizacija matematike doslovno tek prvi korak[5] mnogo opsežnijeg (i filozofski značajnog) programa metamatematičke redukcije klasične matematike na njenu finitnu jezgru. Operativnost matematičke logike manifestira se opovrgavanjem nekih osnovnih teza programa (npr. Gödelovim teoremima o nepotpunosti), a i dokazivanjem nekih drugih teza (npr. Gentzenovim dokazom konzistentnosti peanovske aritmetike). Sve u svemu, veza (formalne, matematičke) logike s filozofijom matematike je značajna i plodonosna. Možemo li stoga zaključiti da bi takva trebala biti i veza (formalne) logike s filozofijom (ostalih) znanosti?

[3] Upozoravamo da to npr. nije razumio Poincaré, što pokazuje njegova naivna kritika logicizma (usp. [P]), koju možemo usporediti s Kefersteinovom kritikom Dedekinda (usp. članak o aksiomatizaciji prirodnih brojeva).

[4] Pitanje je možemo li stvarnu (transfinitnu) teoriju skupova smatrati logikom. (O stvarnoj vs. virtualnoj teoriji skupova vidi u [Q].)

[5] On je uostalom, gotovo potpuno, preuzet od logicista (usp. članak o Booleu i Fregeu).

Mnogi misle da je matematika specifična znanost i da zato taj zaključak po analogiji nije točan. Razmotrimo stoga prigovor, za koji mislimo da bi mogao biti krajnja osnova odbacivanju tog zaključka po analogiji. Prvo, matematika nije eksperimentalna znanost. Njen predmet je (ako ga ona uopće ima, usp. prvi članak ovoga poglavlja) potpuno apstraktan. Ona je nastavak logike (ili je čak, kako tvrde logicisti, dio logike), pa nije čudno da je logika značajna za filozofiju matematike. Međutim, za razumijevanje eksperimentalnih znanosti, koje imaju konkretni predmet izučavanja (materiju, posebne tvari, organizme, društvene i mentalne strukture itd.), logika nije i ne može biti toliko značajna. Filozofsko razumijevanje tih znanosti temelji se na filozofskom razumijevanju njihova predmeta, a tu nam logika malo što može otkriti. Da li je sve baš tako? Mislimo da nije. Kao prvo i eksperimentalne znanosti svojim su većim dijelom teorijske, dakle apstraktne. One mnogo češće barataju tzv. teorijskim tvrdnjama nego tzv. empirijskim. Dapače, jedno od odsudnih pitanja za filozofsko razumijevanje eksperimetalnih znanosti je ovo: Kako je moguće (i je li uopće moguće) da konkretna empirijska tvrdnja bude posljedica apstraktne teorije? Naime, to je ono što je stalno na djelu u eksperimentalnim znanostima; to je uostalom ono što eksperimentalne znanosti i čini eksperimentalnim (vs. empirijskim) znanostima, ono što ih ne ostavlja tek pukim popisima (nepovezanih) podataka. Samo razlikovanje empirijskih i teorijskih tvrdnji, kao i ispitivanje njihove međuovisnosti, dostupno je upravo logičkoj analizi metodologije znanosti. Uostalom, nisu li Hilbertovim programom i tvrdnje (neeksperimentalne) matematike podijeljene na finitne tvrdnje (koje možemo slobodno nazvati empirijskim) i idealne tvrdnje (koje možemo nazvati teorijskim), i nije li upravo taj program postavio isto odsudno pitanje. Razlika je samo u tome što su sljedbenici Hilbertova programa potražili i odgovore na to pitanje. Naime, (formalna) matematička logika omogućila je da se odsudna teza (pitanje) postavi jasno, tj. tako da bude dokaziva ili bar oboriva. Ukratko, nije matematika toliko udaljena od ostalih znanosti i »antilogički« argument nije točan, bar utoliko ukoliko se poziva na tu udaljenost. Napominjemo da taj naš odgovor (na pretpostavljeni prigovor) možemo shvatiti kao još jednu elaboraciju novovjekovnog razumijevanja znanosti kao one koja nije toliko određena svojim predmetom koliko je određena svojom metodom.

Nadalje, mislimo da (nova) logika može odgovoriti i na neka druga manje odsudna, ali ipak značajna, pitanja filozofije znanosti. Naprimjer, sredstvima teorije modela mogli bismo postaviti a i riješiti neke probleme koji bi bacili novo svjetlo na razumijevanje znanosti. Teorija modela ispituje veze između sintaktičkih teorija (teorija koje shvaćamo kao sisteme tvrdnji) i strukturalnih teorija (teorija koje shvaćamo kao apstraktne strukture). Veze su mnogobrojne i dobro izučene. S druge strane i fizikalne teorije shvaćamo katkada strukturalno, kao apstraktne strukture korespondentne predmetu izučavanja, a katkada ih shvaćamo sintaktički, kao sistem tvrdnji o predmetu izučavanja. Vjerojatno je lakše razumjeti velebnu zgradu fizike kao strukturalnu teoriju (usp. [S]), ali onda nije lako razumjeti kako se u nju uklapaju njeni najznačajniji zakoni, koji su zakoni invarijantnosti tvrdnji, dakle sintaktički. Teorija modela posjeduje pojmove i već razrađene metode za razumijevanje i rješavanje takvih problema u matematici i vjerojatno bi ih lako bilo prenijeti i u druga područja. Osim toga, sigurno bi se i sama teorija modela obogatila nekim novim pojmovima i metodama napuštajući (usko) područje matematike. Ta nas napomena približava posljednjoj temi ovog članka.

Ako i ne prihvatimo tezu da je matematika veoma udaljena od ostalih znanosti, u gore naznačenom »kvalitativnom« smislu, još uvijek možemo smatrati da je od njih prilično udaljena u jednom drugom »kvantitativnom« smislu. Naime, možda je uistinu formalna logika značajna za filozofiju znanosti isto toliko koliko je značajna za filozofiju matematike. Ipak, njena primjena u filozofiji znanosti nije do danas dosegla onaj stupanj koji je dosegla u filozofiji matematike. Puka formalizacija, koju često nalazimo u filozofiji znanosti (a koja ne proizlazi iz nekog filozofskog programa i s kojom zato ništa ne poduzimamo) ipak nije zastranjenje. Radi se samo o prvom koraku. Filozofski program i operativni rezultati tek slijede. Možda je to tako, iako nismo sasvim sigurni da formalizacija može biti neka nezavisna predradnja, nakon koje slijedi operativno dokazivanje ili opovrgavanje osnovnih teza filozofskog programa,

a koji će biti naknadno formuliran. Vratimo li se opet filozofiji matematike, lako ćemo ustanoviti da su formalizacije matematike izrastale iz samih programa (logicističkog, Hilbertova itd.). One su bile i ostale jedan od koraka realizacije već postojećeg (filozofskog) programa, a nisu o njemu ovisile, pa mu pogotovu nisu prethodile. Logicisti su formalizirali matematiku da bi dokazali svoju osnovnu tezu, hilbertovci su je formalizirali na svoj način (služeći se rezultatima logicista i dalje ih razvijajući) da bi dokazali svoju osnovnu tezu itd. Naravno, mogli bismo se sjetiti i Peana, koji je formalizirao matematiku nezavisno od nekog svojeg (filozofskog) programa, pa i toga da se logicist Russell kasnije koristio tom formalizacijom kao nekom vrstom predradnje. Ali dobro je poznato da je Peano preuzeo svoje aksiome od logicista Dedekinda, koji je do njih došao slijedeći svoju logicističku redukcionu tezu. Osim toga, logicist Frege je slijedeći istu tezu došao do formalizacije koja nadmašuje i Dedekindovu i Peanovu, prije no što su oni došli do svojih rezultata (usp. članak o Booleu i Fregeu). Mislimo da je filozofski relevantni prvi korak uvijek program sa svojim tezama. On će sam doći do odgovarajuće logike (i formalizacije) pomoću koje će jasno formulirati svoje teze, dokazivati ih ili opovrgavati. Nekada će to biti već etablirana logika (npr. teorija modela u prethodnom odjeljku), a nekada će program zahtijevati stvaranje nove logike. Najčešće će pak biti riječ o nadogradnji već etablirane logike (usp. kraj prethodnog odjeljka).

Literatura

[P] Poincaré H., *Foundations of Science, New York,* 1929.

[Q] Quine W., *Set theory and its logic, Harvard Univ. Press,* 1969.

[S] Sneed J. D., *The logical Structure of Mathematical Physics, D. Reidel,* 1971.

Dr. Zvonimir Šikić je docent na Katedri za matematiku FSB-a, Sveučilišta u Zagrebu. Područja njegova osnovnog znanstvenog interesa su matematička logika i osnove matematike. S posebnim interesom bavi se problemima nastave matematike. Suautor je udžbenika za 4. i 6. razred osnovne škole.

Povijest matematike jedna je od tema kojom se kontinuirano bavi. Mnogi rezultati tog rada sabrani su u ovoj knjizi.

SADRŽAJ

Izdavačka radna organizacija
»ŠKOLSKA KNJIGA«
Zagreb, Masarykova 28

Za izdavača
dr. JOSIP MALIĆ

Grafički urednik
MARIJAN GORŠIĆ

Korektor
ANTE TERZIĆ

Biblioteka
»Moderna matematika«

Savelov
RAVNINSKE KRIVULJE

Palman
PROJICIRANJA I METODE
NACRTNE GEOMETRIJE

Trostnikov
ŠTO SU KONSTRUKTIVNI PROCESI
U MATEMATICI

Božić i dr.
BROJEVI

Šikić
KAKO JE STVARANA
NOVOVJEKOVNA MATEMATIKA