3 ИЗДАЊА ЗАДРУГЕ ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА 3

[illegible] ГА [illegible]ЊИКОВИЋ
директор гимназије у пенсији

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА I И II РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ТРИНАЕСТО ИЗДАЊЕ

Овај је уџбеник на основу мишљења Главног просветног савета СБр. 219 од 19 маја 1933 године одобрио г. Министар просвете одлуком Снбр. 16755 од 26 маја 1933 г.

ЦЕНА 20 ДИНАРА

РИСТА КАРЉИКОВИЋ
директор гимназије у пензији

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА I И II РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ТРИНАЕСТО ИЗДАЊЕ

Овај је уџбеник на основу мишљења Главног просветног савета СБр. 219 од 19 маја 1933 године одобрио г. Министар просвете одлуком Снбр. 16755 од 26 маја 1933 г.

БЕОГРАД
1936

Штампарија „С О К О" Миливоја Ј. Трајковића, Космајска 20. Београд

ПРОГРАМ ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ

за I и II разред

I РАЗРЕД

Посматрање квадра (правоуглог паралелопипеда), коцке, ваљка и лопте.

Посматрати на поменутим телима: равне и криве површине, праве и криве линије, тачке и хоризонталне и вертикалне равни и праве (либела и висак).

Прибор за цртање (равнило и шестар).

Посматрати и цртати: праве, зрак, дужи, круг, кругове на лопти, појас.

Транслација и ротација.

Мерење у природи. — Постављање праве у природи.

Угао. (Прав угао, кос угао; степен, угломер; управне и косе праве).

Квадар, правоугаоник, коцка, квадрат. — Мреже и модели квадра и коцке.

Површина и запремина квадра и коцке.

Пирамида. — Косе равни.

Троугао. — Врсте троугла.

Мрежа пирамиде.

II РАЗРЕД

Симетрија телâ и сликâ. (Симетриска раван, симетриска осовина. — Примери на познатим телима и сликама).

Симетрала дужи, угла. (Равнострани и равнокраки троугао).

Описани и уписани круг код троугла.

Конструкција углова од 90^0, 45^0, 60^0, 30^0 и 75^0. (Служити се само равнилом и шестаром).

Ма каква пирамида.

Троугао.

Збир углова у троуглу. (Експериментални доказ).

Пресек тежишних линија и пресек висина код троугла. (Само цртеж).

Подударност троуглова и правила о њој. (На основи конструкције троуглова).

Углови. — Комплементни углови, суплементни, унакрсни, углови с паралелним и управним крацима. (Експерименталан доказ транслацијом и ротацијом. Никакви нарочити називи за углове с паралелним и управним крацима).

Призма. — Четвороугао. Особине и подела четвороуглова. (Особине четвороуглова утврдити огледом).

Симетричност четвороуглова.

Просте конструкције четвороуглова.

Многоугли. — Правилни многоугли и њихове симетриске особине.

Цртање правилних многоугаоника од 3, 4, 5, 6, 8, 10 и 12 страна. (Петоугаоник и десетоугаоник помоћу средишњег угла).

I. УВОД

§ 1. **Тело.** — Простор у коме се налазимо бескрајан је и дељив. Од простора ми можемо одвојити веће или мање делове и ограничавати их са свих страна. Део простора **који** је са свих страна ограничен зове се **тело.** Учионица је **тело,** јер је део простора који је ограничен подом, таваницом и зидовима. Кутија жижица, пећ, лопта, јаје, пласт **сена** итд. такође су тела, пошто су и то делови простора потпуно ограничени. Део простора који је обухваћен телом зове се **запремина** или **волумен** тога тела.

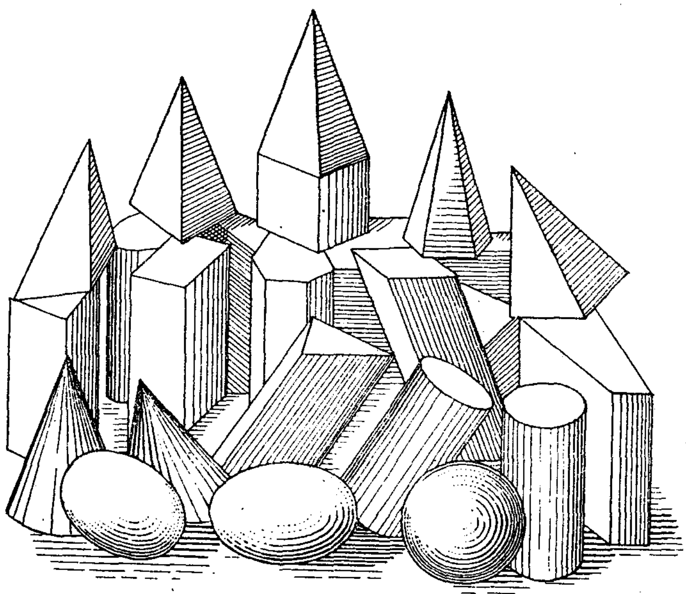
Свако се тело простире, или свако се тело може мерити у три правца: у **дужину, ширину** и **висину** (дебљину, дубину). Сваки правац простирања једнога тела зове се **димензија.** Нека тела имају све три димензије различите величине (као: школска табла, прозорско окно); нека тела имају две димензије једнаке а трећа је већа или мања (округла писаљка, округла пећ, бунар); и, најзад, има телâ код којих су све три димензије једнаке (лопта, коцка).

Посматрањем тела у природи увиђамо: да узимају различите положаје у простору, да имају различите облике **и величине,** да су испуњена разноврсним материјама и да су различите боје. Материју и боју једног тела нећемо узимати у испитивање; али зато водимо рачуна о облику, величини и положају тела у простору, особито о телима простијег и правилнијег облика.

§ 2. **Површина.** — Свако је тело одвојено од простора који га опкољава **површинама,** које ми видимо и које можемо опипати. Површина ограничава тело и одваја његову запремину од околног простора. **Површина је,** дакле, **граница једног тела и нема никакве дебљине, нити може само-**

стално да постоји. Површине могу бити двојаке: **равне и криве.** Тако, школска табла ограничена је само равним површинама, а округла пећ двема равним и једном кривом површином. Сваки део, било равне, било криве површине, опет се зове површина и простире се, или може се мерити у два правца: у **дужину** и **ширину. Површине имају,** дакле, **две димензије:** дужину и ширину.

§ 3. **Рогљаста и обла тела.** — Има тела која су ограничена само равним површинама (као учионица); има их ограничених једном кривом површином (лопта, јаје); и, најзад, има их ограничених и кривим и равним површинама (округла кутија, пласт сена). Тела ограничена само равним површинама зову се **рогљаста;** а она ограничена кривим, или кривим и равним површинама, зову се **обла** или **ваљкаста.**



Сл. 1

На сл. 1 имамо групу рогљастих и облих тела, која се зову **моделима.** Модели су вештачка, **физичка** тела, јер су начињена од дрвета, круте хартије, стакла итд., а служе да се помоћу њих упознамо са особинама **геометриских** тела, којих у природи нема, а имају исти облик као физичка.

§ 4. **Линија и тачка.** — Површине могу бити неограничене (површина лопте) или ограничене **линијама. Линија је,** дакле, **граница једне површине. Линија само ограничава површину, а нема ни дебљине ни ширине.** Она има само једну димензију, и то **дужину.**

Линије могу бити двојаке: **праве** и **криве.** Сваки део, било праве, било криве линије, ограничен је **тачкама. Тачка је,** дакле, **граница једне линије.** Она нема ни дебљине, ни ширине, ни дужине. Тачка, дакле, нема ни једне димензије.

§ 5. **Просторни облици и њихов постанак.** — Тачке, линије, површине и тела једним се именом зову **просторни или геометријски ликови (облици).** Сви просторни ликови, осим тачке, јесу **количине,** јер се дају мерити. Тако код тела можемо да меримо: дужину, ширину и висину (дебљину, дубину); код површина: дужину и ширину, а код линија само дужину. Тачке нису количине, иако се могу набрајати, јер код њих не можемо ништа да меримо.

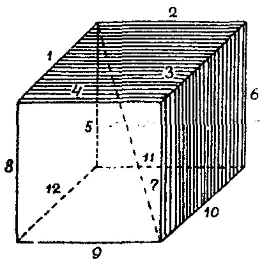
Линије, површине и тела можемо замислити да су постали **кретањем.** Тако, кад се тачка креће, она производи линију, праву или криву, према томе да ли при кретању не мења правац или га мења. Кад се линија креће тако да све њене тачке производе нове линије, онда постаје површина, равна или крива. Површина дели простор на две области. Кретањем ма какве површине у једној од тих области производи се тело.

§ 6. **Геометрија.** — Геометрија је наука која се бави просторним облицима. Она посматра најпре њихове положаје, облике и везе и проучава њихове особине, а затим израчунава бројне вредности њихових дужина, површина̂ и запремина̂.

II. ПОСМАТРАЊЕ ГЕОМЕТРИСКИХ ОБЛИКА НА ТЕЛИМА

1. КОЦКА

§ 7. **Стране коцкине.** — Тело претстављено сликом 2 зове се **коцка.** Она је рогљасто тело, пошто је ограничено само равним површинама, које се зову **стране.** Коцка има шест страна. Доња страна, на којој коцка лежи, и горња, зову се **основе,** а остале четири јесу **бочне стране.** Четири бочне стране чине **коцкин омотач.** Ма колико продужили, и с једне и с друге стране, коцкине основе, а тако исто две супротне коцкине бочне стране, оне се не би састале никако. Такве стране једнога тела које се не секу, па ма колико их продужили, зову се **паралелне.** Такве су стране у школској учионици пôд и таваница, десни и леви, предњи и задњи зидови (њихове унутрашње стране). (Покажи паралелне стране на школској табли!) Коцка има три пара паралелних страна. Све те стране укупно чине њену површину.



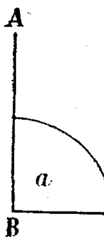
Сл. 2

§ 8. **Ивице коцке.** — Ма које две суседне стране једне коцке секу се по правој линији, која се зове **ивица.** Свака коцкина страна има четири ивице, а свака је ивица заједничка за две коцкине стране. Коцка има свега 12 ивица, и то: 4 горе (1, 2, 3 и 4, сл. 2), 4 доле (9, 10, 11 и 12) и 4 са стране (5, 6, 7 и 8). Ивице на основама, горњој и доњој, зову се **основне,** а остале четири су **бочне.** Узајамни положај двеју коцкиних ивица може бити тројак, и то: 1) могу две ивице (на пр. 1 и 2) имати једну заједничку тачку у којој се **секу, састају;** 2) могу имати исти правац простирања, а да се никако не састају, ма колико их продужили, тј. да су **паралелне** (на пр. 1 и 3), и 3) могу и да се не секу и да нису паралелне, у ком се случају каже да се **размимоилазе** (на пр. 1 и 6). Ако посматрамо ма коју коцкину страну (на пр. горњу основу, коју ограничавају ивице 1, 2, 3 и 4) и коцкине ивице, онда налазимо да коцкина страна и ивица могу заузимати такође три разна узајамна положаја, и то: 1) или ивица лежи на страни (на пр. ивица 1); 2) или ивица сече страну (на пр. ивица 8); и 3) или је са страном паралелна (на пр. ивица 12).

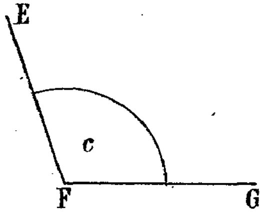
§ 9. **Темена коцке.** — Сваке три суседне коцкине ивице састају се у једној тачки. Та тачка зове се **коцкино теме.** Коцка има осам темена, од којих су 4 на горњој, а **4 на** доњој основи. (Покажи на школској табли сва темена, и изброј колико их је!)

§ 10. **Ивични углови коцке.** — Две коцкине ивице које се секу граде **ивични угао.** Свака коцкина страна има по 4 ивична угла. Како коцка има 6 страна, то је број ивичних углова код коцке 24. Ивице које склапају један угао јесу његови **краци,** а њихова заједничка тачка је **теме угла.** Угао на сл. 3 је један одвојен коцкин ивични угао. Његово је теме тачка **В,** као пресек кракова **АВ** и **ВС.**

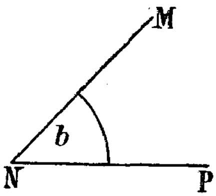
Угао се означава са три велика писмена, од којих се једно пише код темена, а два на крајевима кракова, или се означава једним малим писменом које се пише у углу. Ако је угао означен са три велика писмена, онда се он изговара тако да се слово код темена изговара у средини. Тако, угао на сл. 3 изговарамо: „угао **АВС**" или „угао **СВА**". (Изговори углове на сл. 4 и 5!)



Сл. 3



Сл. 4

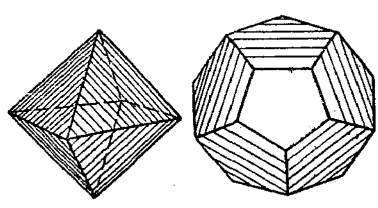


Сл. 5

Углови чији су краци управни један на другом зову се **прави** (сл. 3). Сви су прави углови једнаки међу собом, пошто се могу узајамно поклапати. Сви ивични углови код коцке јесу прави и међу собом једнаки. (Покажи ивичне углове у соби, учионици и на школској табли! Колико их свега има, и да ли су прави?)

Сваки угао који је мањи од правога зове се **оштар** (сл. 5). Угао на сл. 4 већи је од правога, и зове се **туп.** Оштри и тупи углови једним се именом зову **коси** углови, пошто се код њих краци секу косо. Такви су ивични углови код тела на сл. 6. Код првог су ивични углови оштри, а код другог тупи.

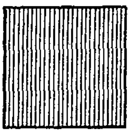
§ 11. **Праволиниске слике.** — Део равне површине који је ограничен са свих страна зове се **равна слика (фигура).** Граничне линије (ивице) какве слике зову се њене **стране.** Слика ограничена само правим линијама



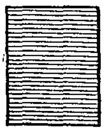
Сл. 6

зове се **праволиниска** (сл. 7, 8, 9, 10, 11 и 12). Ако су код праволиниске слике стране једнаке, слика је **равнострана** (сл. 7, 10, 11 и 12).

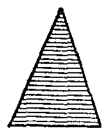
Према броју страна, праволиниске се слике деле на: **тростране** (сл. 9 и 10), **четворостране** (сл. 7, 8 и 11), **петостране, шестостране** (сл. 12. итд). Према броју углова, праволиниске се слике деле на **троугле** (сл. 9 и 10), **четвороугле** (сл. 7, 8 и 11), **петоугле** итд. Свака праволиниска слика има онолико страна колико и углова. **Обим** једне праволиниске слике јесте збир свију њених страна. Ако су углови једне равне праволиниске слике прави, слика је **правоугла**



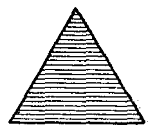
Сл. 7



Сл. 8



Сл. 9



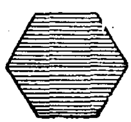
Сл. 10

(сл. 7 и 8). Ако су углови праволиниске слике коси, — оштри или тупи, слика је **косоугла** (сл. 9, 10, 11 и 12).

Праволиниска слика чије су све стране једнаке, а тако исто и сви углови једнаки, зове се **правилна** (сл. 7, 10 и 12). Правилан троугао зове се **равностран троугао** (сл. 10), а правилан четвороугао **квадрат** (сл. 7). Две су слике **подударне** ако имају и једнаке облике и једнаке површине. То је случај са подом и таваницом школске учионице. Исти је случај са наспрамним странама школске табле.

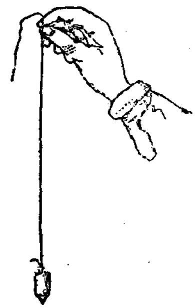
Како су код коцке ивице једнаке, а и ивични углови, као прави, једнаки, то је коцка ограничена са 6 подударних квадрата. Суседни квадрати коцке, као и ивице које се секу, стоје један на другом управно (нормално).

Сл. 11



Сл. 12

§ 12. **Правилно тело.** — За једно тело каже се да је **правилно** ако му стране чине правилне и подударне слике. Како је коцка ограничена са 6 једнаких квадрата, то је она правилна тело. Код коцке су све три димензије једнаке.



Сл. 13

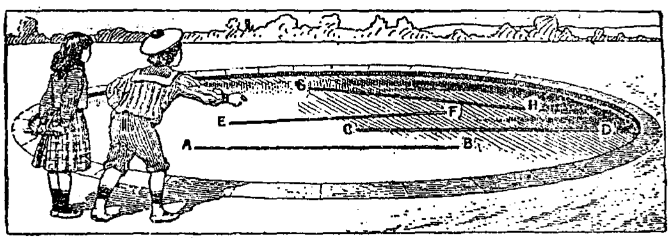
Правилна су и тела на сл. 6. Прво је ограничено равностраним подударним троугловима, а друго подударним правилним петоугловима.

§ 13. **Хоризонталне, вертикалне и косе праве и равнине.** — Када се права линија налази у простору, онда она заузима положај или **вертикалан** (усправан), или **хоризонталан** (водораван), или **кос.** Права је вертикална ако има правац **виска,** тј. правац оловном куглицом затегнутог конца који слободно виси (сл. 13). Хоризонтална или водоравна је ако има правац мотке која плива по површини мирне воде (сл. 14). Коса је ако није ни вертикална ни хоризонтална (сл. 15).

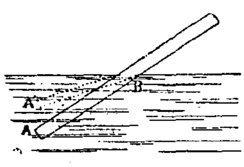
За равну површину („равнину", „раван") каже се да је вертикална ако је постављена кроз вертикалну праву линију. Врата и ограда на сл. 16 имају вертикалан положај.

Да бисмо испитали да ли је једна равнина вертикална, треба да пустимо висак да слободно виси низ равнину; па ако је свуда конац виска подједнако удаљен од равнине, значи да је та раван вертикална (сл. 17).

Раван је хоризонтална ако има положај мирне воде, или ако су праве линије на тој равни хоризонталне (сл. 14).



Сл. 14



Сл. 15

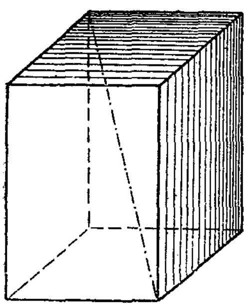
Да бисмо испитали да ли једна површина хоризонтална, треба да се послужимо справом **либелом** (сл. 18), или **зидарским троугаоником** (сл. 19). Стављамо либелу на раван, па ако ваздушни мехурић **О,** који се налази у цеви напуњеној водом, дође у средину справе (у најуз-

36. Стави коцку на једну хоризонталну раван (на сто, катедру) и покажи које су њене ивице и стране хоризонталне, а које вертикалне!

37. Покажи у учионици хоризонталне и вертикалне ивице, хоризонталне и вертикалне стране!

2. ПРАВОУГЛИ ПАРАЛЕЛОПИПЕД

§ 15. **Опис правоуглог паралелопипеда.** — Тело претстављено сликом 21 зове се **паралелопипед.** Таква су тела: школска табла, кутија жижица, цигла, зид, учионица итд. Паралелопипед, као и коцка, спада у рогљаста тела, пошто је ограничен само равним површинама. Ове површине су правоугле слике, али не и равностране. Док су код коцке све стране једнаке, видимо да су код паралелопипеда једнаке само супротне, а не и суседне. Оваква равна четворострана површина, код које су сви углови прави и само супротне стране једнаке, зове се **правоугаоник** (сл. 8). Паралелопипед је, дакле, тело ограничено са шест правоугаоника, од којих се доњи и горњи зову **основама,** а остала четири са стране дају његов **омотач.** Код паралелопипеда, као и код коцке, имамо 12 ивица: 8 основних и 4 бочне. Суседне ивице стоје једна на другој управно и граде праве углове. Све су бочне ивице једнаке, паралелне и управне на основама. Од основних ивица јесу једнаке и паралелне само супротне. Код паралелопипеда, као и код коцке, имамо 8 темена и 24 ивична угла, који су сви прави и по три код сваког темена. Све три димензије паралелопипеда јесу различите величине.



Сл. 21

§ 16. **Вежбања**

1. Каквим је површинама ограничен паралелопипед?
2. Да ли су све његове стране једнаке?
3. Које су његове ивице хоризонталне, а које су вертикалне?
4. Које су његове стране хоризонталне, а које вертикалне?
5. Колико ивица има паралелопипед, које су једнаке, које су паралелне, а које се укрштају?
6. Колико темена, а колико ивичних углова има паралелопипед?

7. Упореди квадрат и правоугаоник, коцку и паралелопипед, и реци у чему се разликују!

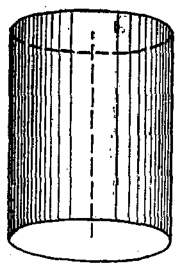
8. Могу ли, у особитом случају, квадрати бити основе на паралелопипеду, и какве су у том случају бочне површине? Које су димензије у овом случају једнаке?

9. У учионици покажи једнаке стране и једнаке ивице; паралелне стране и паралелне ивице; хоризонталне стране и хоризонталне ивице; вертикалне стране и вертикалне ивице; супротне стране и супротна темена; и најзад које се ивице размимоилазе.

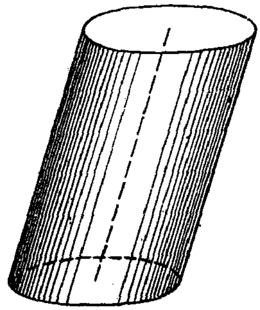
10. Именуј неколико тела која имају облик правоуглог паралелопипеда!

3. ЦИЛИНДАР ИЛИ ВАЉАК

§ 17. — Тело претстављено сликом 22 и 23 зове се **цилиндар** или **ваљак.** Оно спада у ваљкаста тела, пошто је ограничено једном кривом површином и двема равним површинама, с горње и доње стране. Крива се површина зове **омотач,** а равне површине **основе** цилиндра. Како једна тако и друга основа цилиндра ограничене су кривом затвореном линијом, којој су све тачке подједнако удаљене од једне унутрашње тачке, која се зове **центар** или **средиште.** Оваква се крива линија зове **кружна,** а површина ограничена њом — **кружна површина.** Кружна линија и кружна површина једним се именом зову и **круг.** Цилиндар, дакле, има за основе кругове, и то једнаке, пошто се могу поклопити.



Сл. 22



Сл. 23

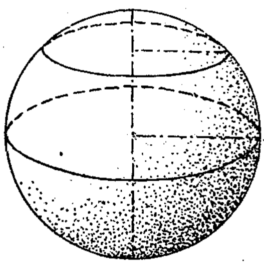
Права која спаја центре цилиндрових основа зове се **осовина,** а нормално отстојање обеју основа — **висина** цилиндра. Према томе да ли је осовина нормална или коса према основи, имамо **правих** (сл. 22) и **косих** (сл. 23) цилиндара. Код правог цилиндра осовина се поклапа с висином. Код цилиндра немамо ни ивичних углова ни темена. Права која спаја две одговарајуће тачке кружних линија горње и доње основе, зове се **страна** цилиндра. И код правих и код косих цилиндара, страна је једнака са осовином. Цилиндар има три димензије, од којих су две једнаке. (Које?). **Прав цилиндар, код кога су све три димензије једнаке, зове се равностран.**

§ 18. Вежбања

1. Каквим је површинама ограничен цилиндар, и колики је њихов број?
2. Која се крива линија зове **круг?**
3. Шта је **центар** једнога круга?
4. Шта је **осовина**, а шта је **висина** једнога цилиндра?
5. Код кога је цилиндра осовина једнака с висином, а код кога није?
6. Шта је **страна** једнога цилиндра?
7. Код кога цилиндра висина није једнака са страном?
8. Какве су међу собом основе цилиндра?
9. Да ли се могу повући паралелне праве по омотачу једнога цилиндра, и како?

4. ЛОПТА

§ 19. — Тело претстављено сликом 24 зове се **лопта.** Оно је ограничено само једном кривом површином. Ова површина има ту особину да су све њене тачке подједнако удаљене од једне унутрашње тачке, која се зове **центар** или **средиште лопте.** Права која спаја центар лопте са ма којом тачком лоптине површине, зове се **полупречник.** Сви су полупречници једне лопте једнаки. Права линија која спаја две тачке лоптине површине, а пролази кроз центар, зове се **пречник.** Сваки је пречник два пута већи од полупречника. Сви су пречници једне лопте једнаки. (Зашто?). И лопта, као и свако друго тело, има три димензије, само што су код ње све три димензије једнаке. Кад лопту пресечемо једном равнином, добијамо за пресек круг. Ови пресеци јесу све мањи што је раван која сече лопту удаљенија од центра лопте. Кад раван пролази кроз центар, пресек је највећи. Такав се пресек зове **главни лоптин круг.** Сваки други пресек зове се **споредан.** Полупречник једног главног лоптиног круга једнак је с полупречником лопте, а полупречник ма кога споредног пресека мањи је од полупречника лопте.



Сл. 24

§ 20. Вежбања

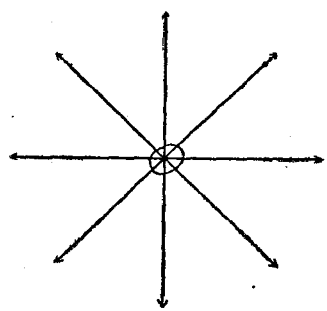
1. Шта је лопта и чиме је ограничена?
2. Шта је **центар** једне лопте?
3. Шта је **полупречник,** а шта **пречник** једне лопте?
4. Каква је слика пресек једне лопте и равнине?
5. Који се пресек зове **споредан,** а који **главни лоптин круг?**
6. Чему је раван полупречник главног лоптиног круга?
7. У коју групу тела спада лопта?
8. Какве су међу собом димензије једне лопте, и чему је свака од њих једнака?

5. ТАЧКА, ЛИНИЈА И ПОВРШИНА

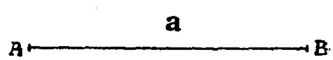
§ 21. **Тачка.** — Геометриска тачка је граница једне линије. Она није количина, пошто нема ниједне димензије. Тачке означене кредом на црној табли или оловком на хартији нису прâве геометриске, већ су тако зване **физичке тачке**. Ове тачке у ствари су врло мали делови једне површине. **Геометриска тачка само је једно замишљено место у простору, на телу, на површини или линији.** То замишљено место означава се каквим знаком уз који се пише једно од великих слова латинске азбуке.

§ 22. **Права. — Линија чије се све тачке налазе у истом правцу зове се права.** Она постаје кретањем једне тачке у истом правцу, или пресеком двеју равни. Права није ограничена ни с једне ни с друге стране и замишља се да се простире до бесконачности. Свака права има два супротна смисла у своме простирању: **леви и десни,** а означава се са два велика писмена (сл. 29).

Сл. 25



Сл. 26



Сл. 27

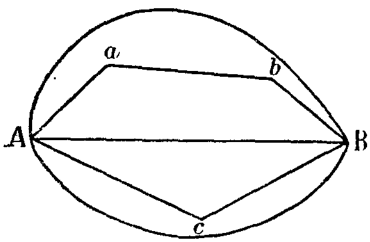
Сл. 28

Сл. 29

Кроз једну тачку у равни можемо повући врло много правих (сл. 26), али кроз две тачке само једну (сл. 27). Према томе, положај једне праве у равни или простору није одређен само једном тачком, већ тек помоћу две тачке.

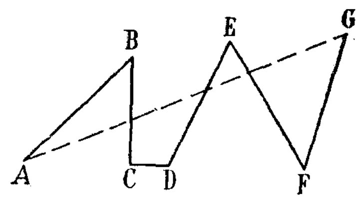
Права која је само с једне стране ограничена, зове **се полуправа** или **зрак** (сл. 25). Тачка одакле зрак почиње зове се **почетна тачка** зрака. Он се обично означава са два велика писмена, од којих се једно пише код његове почетне тачке, а друго близу стрелице која нам показује да се зрак не завршава том тачком, већ се продужава даље. Када се на једној правој узме једна тачка, онда се права дели на два зрака, који се простиру у истом правцу, али у два супротна смисла, а узета тачка биће њихова заједничка почетна тачка (сл. 28). Ако из једне тачке у равни пролазе више зракова, онда они дају **сноп зракова** или **зрачни сноп** (сл. 26). Заједничка тачка **О** свију зракова у снопу зове се **средиште** или **центар** зрачног снопа.

Права која је ограничена и с једне и с друге стране зове се **дуж** (сл. 27). Свака дуж у ствари је отсечак (део) неке праве. Граничне тачке дужи зову се **крајње тачке.** Једна је **почетна,** а друга **завршна** (**А** и **В** на сл. 27). Дуж се означава или помоћу два велика слова, која се пишу код крајњих тачака, или једним малим (на пр. **а,** сл. 27), које се обично пише у средини. Ако је дуж означена са два велика слова (на пр. дуж на сл. 27), онда изговарамо: „дуж **АВ**“, или „дуж **ВА**“, према томе да ли је дуж постала кретањем тачке **А** ка **В,** или обрнуто, кретањем тачке **В** ка **А.** Кад се две тачке у равни вежу једном правом, добијамо дуж. Ова је дуж најкраћа од свих линија којима би се могле везати те две тачке (сл. 30). Величина ове дужи јесте **раздаљина** или **отстојање (дистанција)** тих тачака.



Сл. 30

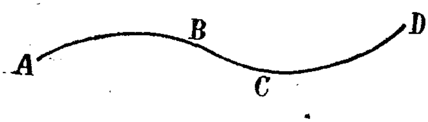
§ 23. **Изломљена линија.** — Линија која је састављена од две или више дужи различитих праваца зове се **изломљена** (сл. 31). Тачке **А** и **G** јесу њене крајње тачке. Најкраће отстојање ових двеју тачака је дуж **AG** (сл. 31).



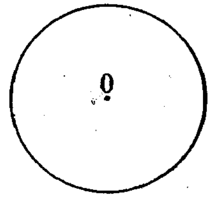
Сл. 31

§ 24. Крива линија. — Линија чије тачке не леже у истом правцу, и која није права ни у једном своме дêлу, зове се **крива** (сл. 32). Крива линија постаје кретањем једне тачке која непрестно мења правац свога кретања. Крива линија може бити **отворена** (сл. 32) и **затворена** (сл. 33).

Прва има своју почетну и завршну тачку, а код друге обе ове тачке се поклапају (састају).

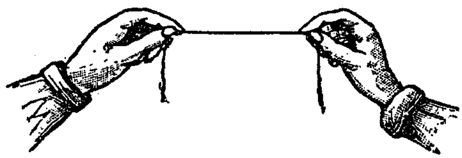


Сл. 32

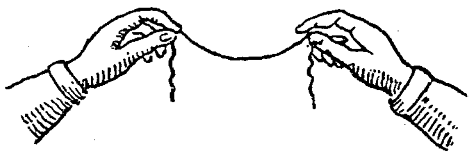


Сл. 33

Слике 34 и 35 показују нам како можемо од конца створити праву и криву линију.

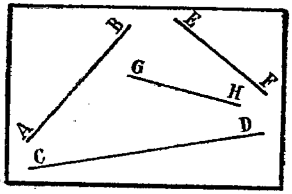


Сл. 34



Сл. 35

§ 24а. **Равна и крива површина.** — Равна површина или **раван** зове се она површина на којој можемо повући праве линије ма у коме правцу (сл. 36). Таква је површина школске табле. Крива површина је она која није равна ни у једном дѐлу. Таква је површина лопте (сл. 37).

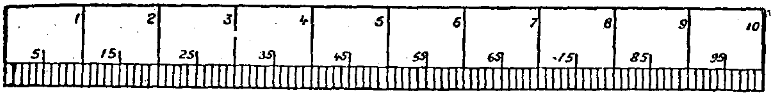


Сл. 36

Сл. 37

6. ГЕОМЕТРИЈСКО ЦРТАЊЕ

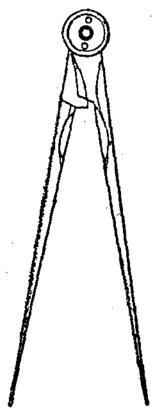
§ 25. **Справе за цртање.** — За цртање правих и кривих линија, праволиниских и криволиниских слика, употребљавамо: **лењир** (сл. 38), који је подељен на десиметре, сантиме-



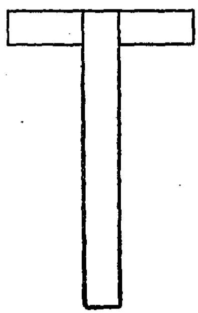
Сл. 38

тре и милиметре; **шестар** (сл. 39), **правоугласти лењир** (сл. 41), **лењир с главом** (сл. 40) и **правоугли троугаоник** (сл. 42), које су справе обично од дрвета.

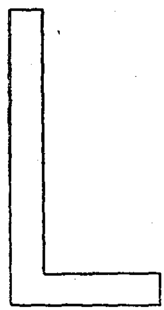
Праве цртамо помоћу лењира. Да бисмо испитали да ли је лењир тачан, тј. да ли му је ивица потпуно права, поступамо овако: најпре повлачимо писаљком (пером, кредом), која клизи по ивици лењира, једну праву (**АВ**,



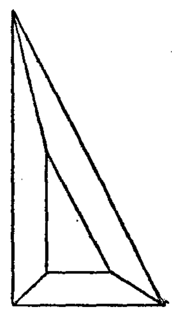
Сл. 39



Сл. 40



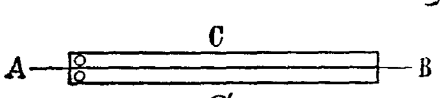
Сл. 41



Сл. 42

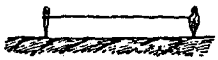
сл. 43), а затим се лењир обрне око исте ивице (први положај лењира **АСВ**, а други **АС В)**, па повлачимо другу праву. Ако се те две праве потпуно свуда поклапају, онда је ивица лењира исправна, а у противном случају није.

Да бисмо на хартији или на школској табли повукли праву кроз две тачке, треба лењир да наместимо тако да се његова ивица поклапа са датим тачкама, па затим повлачимо писаљку (перо, креду) по ивици лењира. На малом отстојању земљине површине повлачи се права кроз две тачке када се најпре забоду кочићи у те тачке (сл. 44), а затим се кочићи вежу затегнутим канапом, па се најзад копа мала, уска бразда поред канапа. По зидовима, гредама, даскама, повлачи се права кроз две тачке када се најпре забоду ексерчићи у те тачке, а затим се ексерчићи

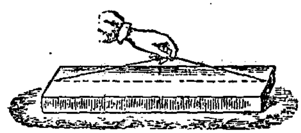


Сл. 43

везују влажном обојеном затегнутом узицом. Најзад се узица хвата за средину (сл. 45), затегне се, па се пусти; она ће потом оставити као траг праву линију.

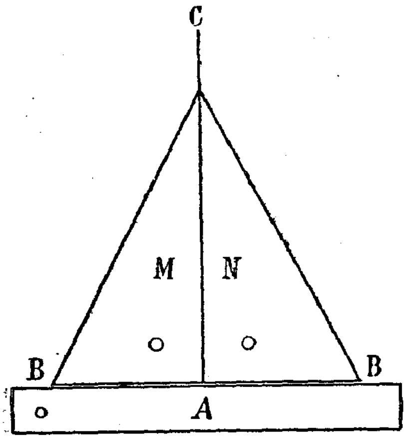


Сл. 44

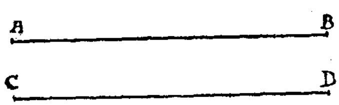


Сл. 45

Да бисмо испитали да ли је правоугли троугаоник исправан, поступамо овако: најпре га положимо на лењир да заузме положај **M** (сл. 46), па по ивици **AC** повлачимо једну праву, а затим троугаоник изврнемо, тако да се ивица **AB** опет поклапа са ивицом лењира, а теме правог угла **A** задржи пређашњи положај, тј. да троугаоник заузме положај **N.** Најзад по ивици **AC** поново повлачимо праву. Ако се друга права поклапа с првом, троугаоник је исправан, а у противном случају није.

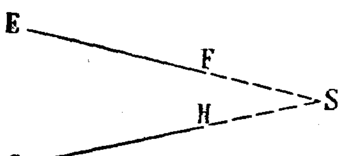


Сл. 46



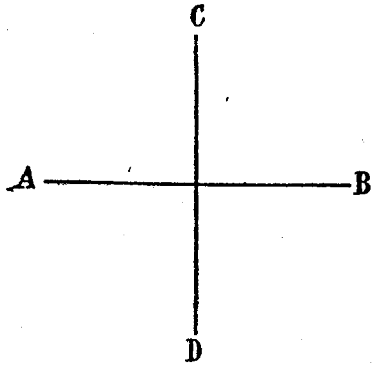
Сл. 47

§ 26. **Паралелне и управне праве и њихово цртање. —** Две праве које леже у једној равни могу заузимати само двојак узајамни положај: могу бити паралелне или да се секу. Паралелне су ако се не секу, па ма колико их продужили (сл. 47). Да су праве **AB** и **CD** на сл. 47 паралелне, означавамо: **AB**$\parallel$**CD,** а изговарамо: „права **AB** паралелна је с правом **CD**". Две праве у једној равни нису паралелне ако се секу кад их продужимо (сл. 48). Њихова заједничка тачка зове се пресечна тачка (**S,** сл. 48). Кад се праве секу, могу се сећи двојако: нор-

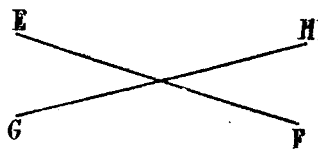


Сл. 48

мално (управно) или **косо.** Нормално се секу ако граде само праве углове (сл. 49), а косо, ако граде косе — оштре и тупе — углове (сл. 50).



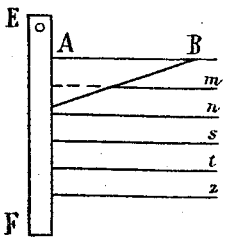
Сл 49



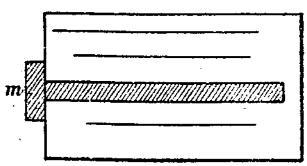
Сл. 50

Да је права **CD** управна на правој **AB** означава се: **CD** $\perp$ **AB,** а чита се: „права **CD** управна је на правој **AB**".

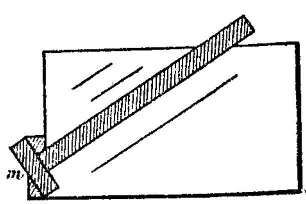
Да бисмо повукли паралелне с правом **AB** (сл. 51), служимо се лењиром и троугаоником. Намештамо најпре троугаоник тако да се једна његова ивица поклапа с правом **AB;** затим лењир **EF** полажемо тако да се његова ивица поклопи са другом ивицом троугаоника; и, најзад, држећи чврсто лењир, померамо троугаоник да стално клизи по ивици лењира, а по његовој ивици која се поклапала са правом **AB** повлачимо оловком (пером, кредом) праве: **m, n, s, t, z,** итд. (сл. 51). Најлакше се повлаче паралелне праве помоћу лењира с главом, као што показују слике 52 и 53. Полаже се најпре овај лењир тако да се његова глава **m** поклопи са ивицом табле, а затим лењир померамо и при сваком његовом заустављању повлачимо праве по његовој горњој или доњој ивици. Ове праве биће паралелне.



Сл. 51



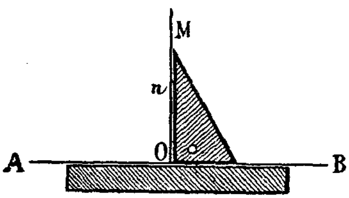
Сл. 52



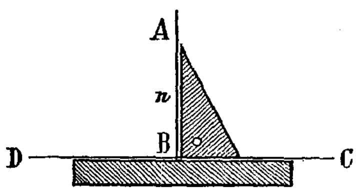
Сл. 53

Цртање нормалних правих вршимо најлакше и најбрже помоћу лењира и троугаоника. Да бисмо подигли нормалу на правој **AB** (сл. 54) у њеној тачки **O,** треба најпре лењир да наместимо тако да се његова ивица поклапа с правом **AB,** а затим стављамо троугаоник на лењир тако да се једна од његових ивица које граде прави угао поклопи са ивицом лењира. Најзад чврсто држимо лењир, а троугаоник померамо док теме његовог правог угла не буде до тачке **O;** тада провлачимо праву **OM** по ивици **n.** Ова права је нормална на **AB.**

Да бисмо спустили нормалу из тачке **A** (сл. 55) ван праве **CD,** на ову праву, намештамо лењир да се његова ивица поклопи с правом **CD,** а троугаоник стављамо на лењир тако да се једна од његових ивица које граде прави угао поклопи са ивицом лењира, па затим чврсто држимо лењир, а троугаоник померамо док његова ивица **n** не дође до тачке **A,** када повлачимо праву **AB** по ивици **n.** Та ће права бити нармална на **CD.**

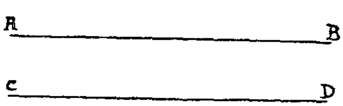


Сл. 54

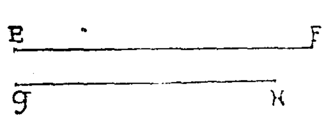


Сл. 55

§ 27. **Упоређивање двеју дужи и њихово мерење.** — Две дужи по величини јесу **једнаке** или **неједнаке.** Оне су једнаке ако се потпуно поклапају када једну ставимо на другу, а неједнаке ако се не поклапају. Да су дужи **AB** и **CD,** на сл. 56, једнаке, означава се: **AB = CD,** а чита се: „дуж **AB** једнака је дужи **CD**“. Да је дуж **EF** већа од дужи



Сл. 56

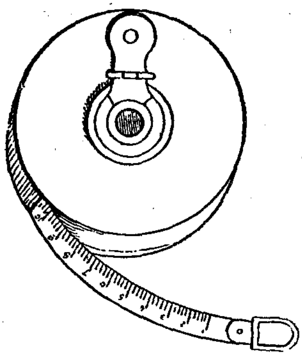


Сл. 57

GH, на сл. 57, означава се: **EF>GH,** а чита се: „дуж **EF** већа је од дужи **GH**“. Да је дуж **GH** мања од дужи **EF,** означава се: **GH<EF,** а чита се: „дуж **GH** мања је од дужи **EF**”.

Упоређивање двеју дужи врши се помоћу лењира који је подељен на сантиметре и милиметре, или помоћу шестара.

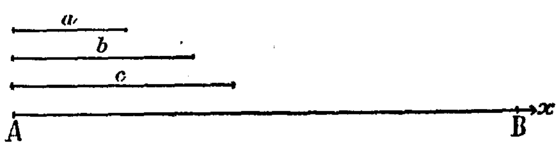
Измерити једну дуж значи испитати колико се пута садржава у њој друга дуж која је узета за јединицу дужине. Код нас је за јединицу дужине узет метар (**m**). Дужина једнога метра једнака је са дужином 40-томилионитог дела Земљиног подневачког круга који пролази кроз северни и јужни пол и дели Земљу на две половине: источну и западну. Десети део од метра јесте **десиметар** (**dm**), стоти део **сантиметар (cm)**, а хиљадити **милиметар (mm)**. Мерило **од 10 m је декаметар (Dm)**, од 100 **m хектометар (Hm)**, од 1000 **m километар (Km)**. Помоћу десиметра, сантиметра и милиметра меримо дужи на хартији, а за мерење већих дужи на поду, у дворишту или пољу, употребићемо **пантљику** од 10 или 20 **m** дужине, која је подељена на десиметре и сантиметре (сл. 58).



Сл. 58

Рачунање дужинâ помоћу лењира који је подељен (на сантиметре и милиметре) врши се овако:

1. **Сабирање.** — Ако на пр. имамо да саберемо дужи **a, b** и **c** (сл. 59), онда најпре мерењем лењиром налазимо да је **a** = 15 **mm, b** = 24 **mm,** и **c** = 30 **mm,** а њихов збир биће 69 **mm.** На зраку **AX,** почевши од почетне тачке **A,** одређујемо дуж **AB** = 69 **mm,** која претставља тражени збир датих дужи.



Сл. 59

2. **Одузимање.** — Да бисмо одузели две дужи лењиром, налазима најпре, као и код сабирања, њихове бројне вредности; затим бројну вредност мање дужи одузмемо

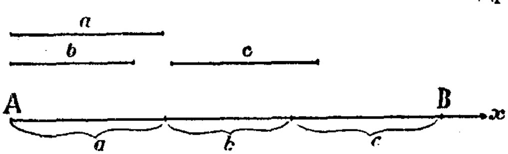
од бројне вредности веће, и добивену разлику преносимо на зрак, почевши од његове почетне тачке.

3. **Множење.** — Да бисмо нашли дуж која је 2, 3, 4, 5.... пута већа од неке дате дужи, или да бисмо дату дуж помножили неким целим бројем, налазимо најпре лењиром бројну вредност задате дужи, множимо ову вредност задатим целим бројем и добивени производ преносимо лењиром на зрак, почевши од почетне тачке.

4. **Дељење.** — Да бисмо одредили дуж која је 2, 3, 4, 5.... пута мања од неке задате дужи, или да бисмо дату дуж поделили на 2, 3, 4, 5.... једнаких делова, налазимо најпре лењиром бројну вредност задате дужи, ову вредност делимо задатим целим бројем и добивени количник преносимо лењиром на зрак, почевши од његове почетне тачке.

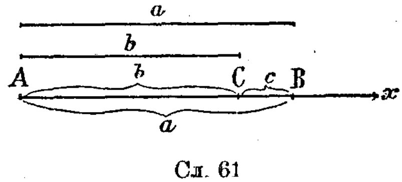
Да бисмо одредили колико је пута једна дуж већа од друге, или колико се пута садржава мања дуж у већој, треба лењиром да одредимо бројне вредности обеју дужи, а затим треба поделити већу бројну вредност мањом. Добивени количник претставља нам тражени број.

§ 28. **Графичко рачунање дужинâ. — 1. Сабирање.** — Да бисмо сабрали две или више дужи шестаром, преносимо узастопце на зрак, почевши од његове почетне тачке, величине датих дужи, тако да се завршна тачка прве поклапа са почетном тачком друге, завршна тачка друге с почетном тачком треће дужи, итд. Тражени збир је дуж између почетне тачке зрака и завршне тачке последњи дужи. Тако, на сл. 60, дуж **AB** је збир дужи **a, b** и **c**, а означава се: **AB = a + b + c.**



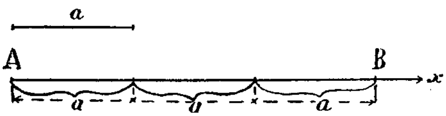
Сл. 60

2. **Одузимање двеју дужи.** — Да бисмо одузели две дужи, треба на зрак пренети шестаром, почевши од његове почетне тачке, најпре већу дуж, а затим из исте тачке мању дуж. Дуж између оних крајњих тачака које се не поклапају, биће



Сл. 61

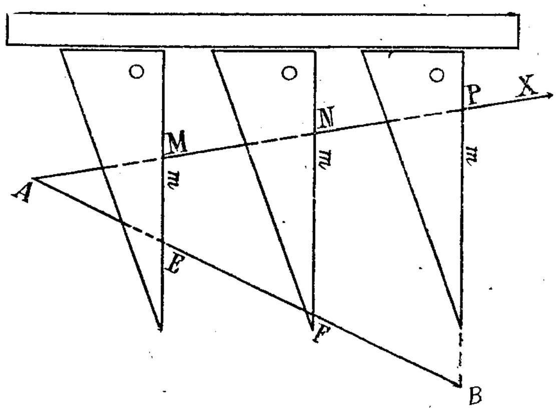
тражена **разлика.** Тако, на сл. 61, дуж **CB** јесте разлика дужи **a** и **b**, а означава се **CB = a — b.**



Сл 63

3. **Множење једне дужи целим бројем.** — Ако на пр. желимо да дуж **a** (сл.62) помножимо бројем 3, онда је преносимо на зрак **AX**, почевши од тачке **A**, трипута узастопце. Добивена дуж **AB** претставља нам тражени производ, а означава се: AB=3 **a.**

4. **Дељење дужи.** — Дељење дужи врши се овако: Из



Сл. 63

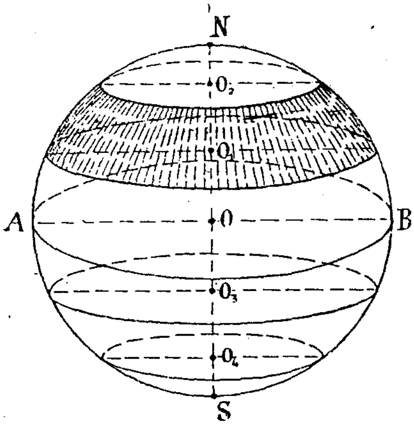
крајње тачке задате дужи **AB** (сл. 63) повлачимо зрак **AX** и по њему преносимо шестаром онолико произвољно узетих једнаких делова колико јединица има број којим делимо дуж. Крајњу тачку **P** последњег дела спајамо с другом крајњом тачком задате дужи једном помоћном правом **(PB)**, а из тачака **(M, N,** итд.) осталих делова повлачимо, помоћу лењира и правоуглог троугаоника, паралелне праве с том помоћном правом. Ове помоћне праве деле задату дуж на тражени број једнаких делова. Дуж **AB,** на сл. 63, подељена је на три једнака дела **(AE, EF, FB).**

Повлачење паралелних врши се на следећи начин: Најпре се троугаоник намешта тако да се једна његова ивица (на пр. **m**) поклапа са помоћном правом која спаја крајњу тачку (**P**) последњег пренетог дела на зраку **AX** са крајњом тачком (**B**) задате дужи, а затим лењир намештамо тако да се поклапа са другом ивицом троугаоника. Најзад, лењир држимо чврсто, а троугаоник померамо тако да клизи по ивици лењира. Када троугаоник заузме оне положаје у којима се деоне тачке **M, N...** са зрака **AX** налазе на ивици троугаоника **m**, повлачимо **NF, ME...**, које су паралелне с помоћном правом **PB.**

§ 29. Вежбања и задаци

1. Шта је права, зрак, дуж, и како се означавају?
2. Шта је сноп зракова?
3 Колико узајамних положаја заузимају две праве у равни?
4. Какве углове граде две праве када се секу управно, а какве када се секу косо?
5. Кад су две дужи једнаке, а кад су неједнаке?
6. Чиме меримо дужине у пољу?
7. Да ли је лист хартије површина, а танак конац линија?
8. Да ли могу површине, линије и тачке постојати као засебни облици?
9. Узми две тачке на табли и нађи њихово отстојање!
10. Нацртај на табли дуж од: a) 8 **dm**; b) 5 **dm** 8 **cm**; c) 40 **cm**!
11. Нацртај две дужи, па упореди њихове величине!
12. Нацртај две једнаке дужи!
13. Нацртај на табли (на хартији) три дужи од: 2 **dm** 5 **cm** (2 **cm** 5 **mm**), 3 **dm** 2 **cm** (3 **cm** 2 **mm**) и 4 **dm** 7 **cm** (4 **cm** 7 **mm**), па их сабери најпре помоћу лењира, а затим помоћу шестара!
14. Нацртај две дужи: од 7 **dm** 3 **cm** (7 **cm** 3 **mm**) и 4 **dm** 9 **cm** (4 **cm** 9 **mm**), па нађи дуж једнаку њиховој разлици!
15. Нацртај дуж од 2 **dm** 6 **cm** (2 **cm** 6 **mm**), па нађи дуж која је 3 пута већа од ње!
16. Нацртај дуж од 6 **dm** 4 **cm** (6 **cm** 4 **mm**), па нађи дуж која је 4 пута мања од ње!
17. Нацртај дуж од 60 **cm**, па нађи дуж која је за: a) $^2/_3$, b) $^3/_5$, c) $^9/_{20}$ мања од ње!
18. Израчунај збир ових дужи: 2 **dm** 8 **cm** 3 **mm**, 7 **dm** 2 **cm** 5 **mm** и 9 **dm** 8 **cm** 6 **mm**!
19. Израчунај разлику ових дужи: a) 8 **m** 7 **dm** 5 **cm** 3 **mm** и 5 **m** 9 **dm** 8 **cm** 6 **mm**!
20. Помножи дуж од: 12 **m** 8 **dm** 3 **cm** са 5!
21. Подели дуж од [redacted] 3 **cm** на пет једнаких делова!
22. Колико се пута садржава дуж од 4 **m** 5 **dm** 3 **cm** у дужи од 22 **m** 6 **dm** 5 **cm**?
23. Од збира дужи: 6 **dm** 3 **cm** 2 **mm**, 8 **dm** 7 **mm** и 7 **dm** 4 **cm** одузми збир дужи: 4 **dm** 3 **cm** 5 **mm**, 6 **dm** 8 **cm** 7 **mm**!

сно види да се полупречници споредних кругова смањују што су кругови удаљенији од центра **О.**



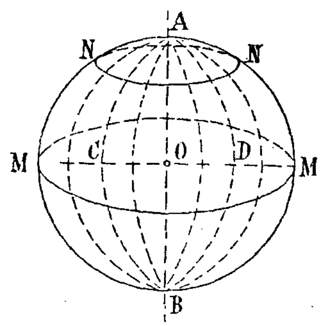
Сл. 68

§ 35. — Под централном раздаљином једног споредног лоптиног круга разумемо нормално отстојање центра лопте до центра круга. Тако, **OO_1** је централна раздаљина круга **O_1**; **OO_2** је централна раздаљина круга **O_2** итд. Из сл. 68 увиђамо: а) да **једнаким споредним круговима одговарају једнаке централне раздаљине, и обрнуто:** b) да **неједнаким споредним круговима одговарају неједнаке централне раздаљине, и то: већем кругу одговара мања, а мањем кругу већа централна раздаљина,** и обрнуто.

§ 36. **Лоптин појас** је део лоптине површине ограничен периферијама двају паралелних лоптиних кругова, који могу бити оба споредна, или један споредан, а један главан. Таква је лоптина површина између периферија лоптиних кругова **O_1** и **O_2** на сл. 68.

Цртање лоптиних кругова и појасева на једној лопти врши се лако. Треба забости један крак шестара у ма коју тачку лоптине површине, а затим, обртањем другог крака, произвољним отвором, описујемо жељени круг. Да бисмо добили лоптин појас, треба најпре описати један круг, а затим, већим или мањим отвором шестара, не мењајући тачку убода, описати други гранични круг појаса.

§ 37. **Полулопта.** — Ако лопту пресечемо једном равнином која пролази кроз центар лопте, добијамо две једнаке половине — две полулопте (сл. 69). Ма која полу-



Сл. 69

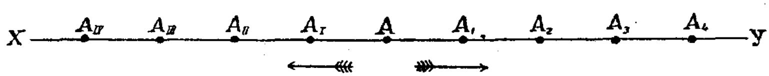
лопта ограничена је једном кривом површином, једнаком половини површине лопте од које је полулопта добивена, и једном равном кружном површином, једнаком главном лоптином кругу исте лопте. Кубета многих наших цркава имају облик полулопте.

§ 38. **Полови.** — Под половима једне лопте разумемо крајње тачке ма кога њеног пречника N и S (на сл. 68). Ако претпоставимо да нам лопта на сл. 68 претставља један глобус, или нашу Земљу, онда периферија главног лоптиног круга **AB** претставља **екватор,** пречник NS **Земљину осовину,** а његове крајње тачке N и S **северни** и **јужни пол.**

ПРАВОЛИНИСКО И КРУЖНО КРЕТАЊЕ

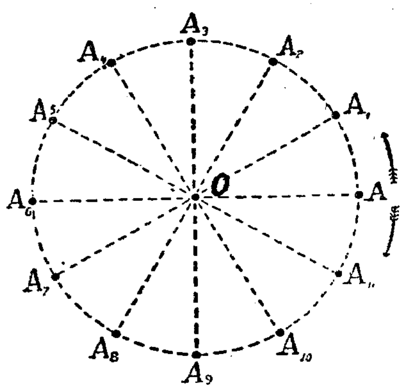
— Транслација и ротација —

§ 39. — За једну тачку каже се да се креће **праволиниски** (транслаторно) ако се креће по једној утврђеној правој линији, било удесно или улево од утврђене линије.



Сл. 70

Код овог кретања тачка се све више удаљује од свог првобитног положаја, уколико кретање дуже траје (сл. 70). Напротив, ако се једна покретна тачка креће око једне утврђене тачке тако да је сваки њен доцнији положај увек подједнако удаљен од утврђене тачке, а после извесног кретања тачка опет дође у свој првобитни положај, онда се каже да се тачка креће **кружно** (ротационо). Код овог кретања тачка се креће по обиму једнога круга (сл. 71). Утврђена тачка је центар круга, а покретна тачка је увек удаљена од центра за полупречник круга. Такво кретање има врх сказаљке на часовнику.

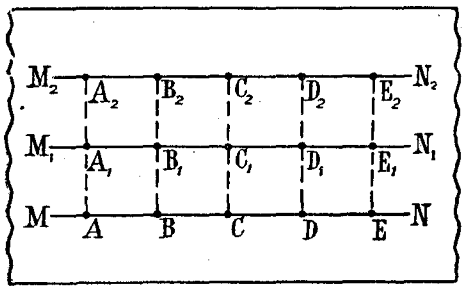


Сл. 71

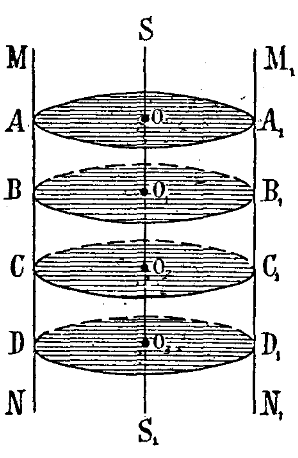
§ 40. — За једну праву каже се да се креће праволински ако она клизи по једној утврђеној правој у некој равни (сл. 72), или ако се права креће у једној равни тако да свака

Сл. 72

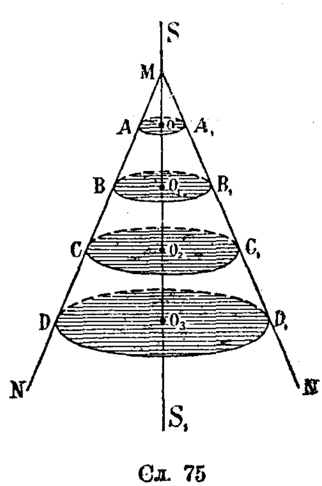
њена тачка даје праву линију (сл. 73). У овом другом случају, сваки доцнији положај праве паралелан је првобитном положају, а све више је удаљен што се права дуже креће. Међутим, за једну праву кажемо да се креће кружно (ротационо) око једне утврђене праве, зване **осовина ротације,** ако се свака њена тачка креће ротационо, тј. ако се креће по периферији једнога круга чија је раван нормална на ротационој осовини. Тако се креће права **MN** око осовине **SS′** код слика 74, 75, 76 и 77. Тачке **A, B, C, D...** на правој **MN** дају



Сл. 73

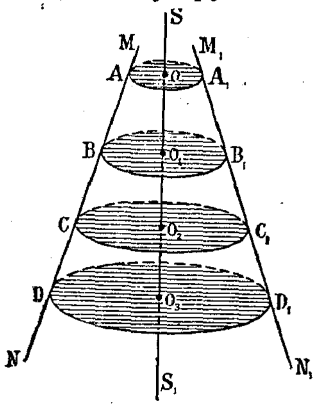


Сл. 74

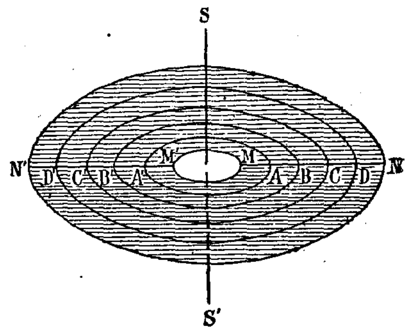


Сл. 75

кругове: **O**, **O_1**, **O_2**, **O_3**... чије су равни нормалне на SS'. Код сл. 77 ови су кругови концентрични и чине заједничку раван.

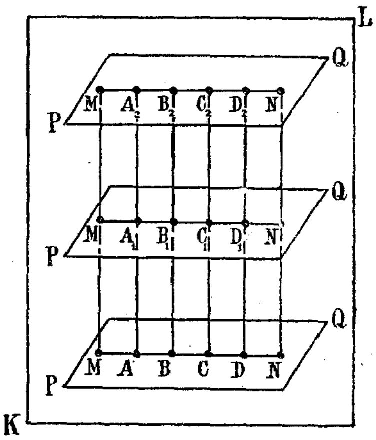


Сл. 76

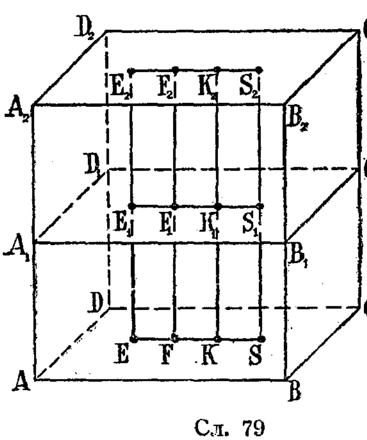


Сл. 77

§ 41. — За једну раван **PQ** (сл. 78) каже се да се креће праволиниски (транслаторно) по некој утврђеној равни **KL** ако клизи по тој утврђеној равни тако да се покретна раван увек поклапа са утврђеном и да је сваки доцнији положај паралелан првобитном положају. У овом случају свака тачка покретне равни даје праву линију. На сл. 79 транслаторно је померање равни **ABCD** ако се поступно удаљује та раван тако да је сваки њен доцнији положај паралелан првобитном положају, јер се и у овом случају свака тачка покретне равни креће праволиниски, тј. даје праву линију. Такво би било кретање ако се под учионице помера ка таваници тако да је сваки њен доцнији положај паралелан првобитном.

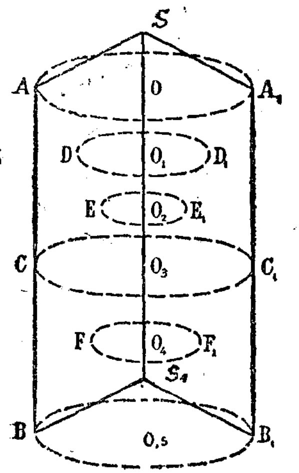


Сл. 78



Сл. 79

За једну раван каже се да се креће ротационо (кружно) око једне у тој равни утврђене праве, која се зове **осовина ротације,** ако се свака тачка равнине креће ротационо, тј. ако се креће по обиму једнога круга чија је раван управна на осовини ротације. Тако на сл. 80, раван **ABS′S** обртањем око стране **SS′**, коју узимамо за осовину ротације, креће се ротационо, јер свака њена тачка **(A, D, E, C, F, B)** даје круг **(O, O_1, O_2, O_3, O_4, O_5)** чије су равнине управне на осовини ротације SS′.

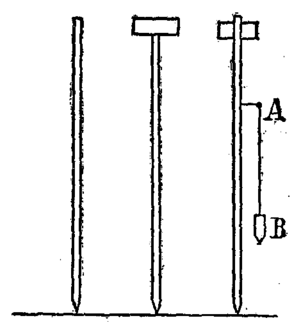


Сл. 80

При отварању врата једне собе, или крила једног прозора, имамо кружно (ротационо) кретање. Овде је осовина ротације ивица врата (прозора) на којој су утврђене шарке. Воденични камен, камен за оштрење ножева, чигра у покрету, крећу се ротационо око своје осовине, јер свака тачка, било на површини, било у унутрашњости камена (чигре), даје круг чији је центар на осовини, а чија је површина управна на истој осовини.

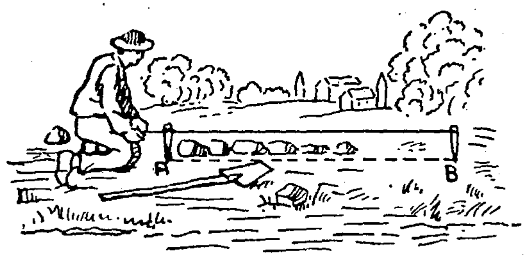
8. МЕРЕЊЕ У ПРИРОДИ

§ 42. **Означење тачака и постављање праве у природи.** — Да бисмо означили неку тачку на земљи, треба у ту тачку да забодемо вертикално мотку (сл. 81). Ова је мотка од дрвета, дужине око 2 m, дебљине 4 до 5 cm, обојена местимично бело и црвено ради бољег виђења из даљине, а оштрији јој је крај обавијен гвожђем. Помоћу виска можемо се уверити да ли је мотка вертикално пободена **(AB** на сл. 81).



Сл. 81

Ако желимо да поставимо праву између тачака **А** и **В** на земљиној површини, поступамо овако: а) за кратка растојања (слика 82) забадамо најпре у **А** и **В** кочиће, везујемо их канапом, а затим, поред канапа, градимо малу бразду помоћу мотике или другим којим оштрим алатом; b) ако је растојање тачака **А** и **В** велико, онда се служимо моткама за мерење (сл. 83). Забадамо мотке вертикално најпре у **А** и **В** а мотке



Сл. 82

Сл. 83

између њих, које треба да се налазе на истој правој **АВ**, постављамо на следећи начин: треба да станемо код мотке **А**, окренути лицем ка **В**, а наш помоћник забада мотку у тачку **С**. Ова тачка биће на правој **АВ** само онда, ако мотка у **С** заклања мотку у **В**. Истим начином забада се мотка у **D** итд. нашим померањем у **С**, а помоћниковим у **D**. Овим начином у ствари не постављамо праву **АВ**, већ налазимо само тачке: **С, D...**, које се налазе на истој правој.

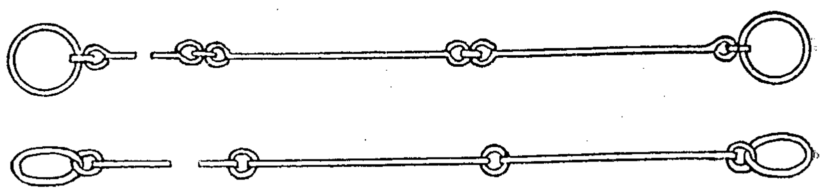
Ако желимо да продужимо праву **АВ** преко тачке **В**, забадамо поступно вертикално мотке у тачке: **С, D, Е....** (сл. 84). Да бисмо се уверили да се тачке **С, D, Е...** налазе на

Сл. 84

правцу **AB**, треба да станемо код **C**, окренути лицем ка **B**, па забадамо мотку у **C**; онда ако мотка **B** заклања мотку **A**, тачка **C** је на правој **AB**. Истим начином налазимо тачке **D**, **E**... нашим поступним померањем у **D**, **E** итд.

§ 43. **Мерење дужине у природи.** — a) Мале дужине у школској учионици, по ходницима, у дворишту итд. можемо мерити помоћу дунђерског метра или пантљиком за мерење (сл. 58) од 10 или 20 **m** дужине, која је подељена на десиметре и сантиметре, а начињена је од платна или челика

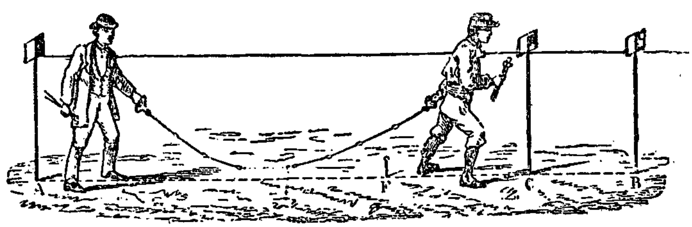
b) За мерење већих дужина у природи служимо се **ланцем за мерење** (сл. 85). То је ланац од 10 m дужине, састављен од 50 гвоздених карика од 20 **cm** дужине, повезаних алкицама од истог метала, а на крајевима снабдевен



Сл. 85

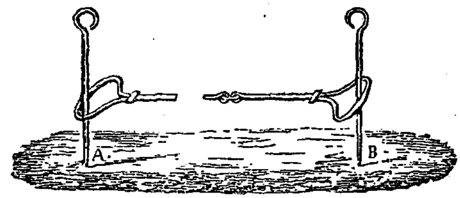
већим алкама за држање. Крајње карике јесу нешто мање, али заједно са дршкама дају дужину 20 **cm**. Осим ланца, служимо се при мерењу гвозденим кочићима (сл. 86), дужине 30 до 40 **cm**, зашиљеним на једном крају ради лакшег

Сл. 86



Сл. 87

забадања, а пресавијеним на другом крају у облику алке. Мерење на пр. дужине **AB** (сл. 87) врши се на следећи начин: Мерач ставља један крај ланца у **A**, а његов помочник, који

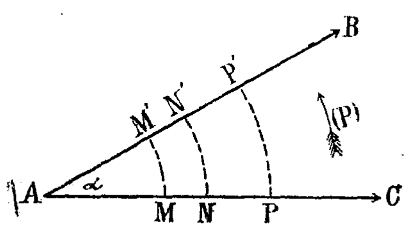


Сл. 88

у десној руци држи десетак кочића, а левом руком вуче ланац, стаје на 10 m од **A,** затеже ланац (сл. 88) и ту (у **F**) забада кочић. Затим мерач иде у **F,** закачиње свој крај за кочић **F,** а његов помоћник иде даље у правцу **AB** ради забадања другога кочића на 10 **m** од **F** итд. При померању мерач скупља поступно кочиће које је његов помоћник забадао. Ако претпоставимо да од последњег кочића до **B** нема 10 **m,** колика је дужина ланца, већ 3 **m** и 40 **cm,** а мерач до тога кочића држи у руци на пр. 7 кочића, онда је растојање **AB** = 73,40 **m.**

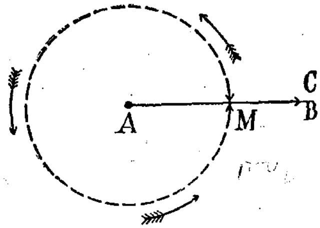
9. УГЛОВИ

§ 43. **Постанак и означавање угла.** — Кад се зрак **AC** (сл. 89) обрће око почетне тачке **A** у смислу стрелице **(p)** па после извесног кретања заузме положај **AB,** онда свака његова тачка **(M, N, P...)** описује по један лук **MM′, NN′, PP′...).** Ти су луци различите величине, али сви имају исти број степена. Првобитни положај зрака **(AC)** и последњи **(AB)** јесу **краци угла,** а почетна тачка **A теме** угла. Величина једног угла не зависи од дужине његових кракова, већ једино од њиховог размака, који се изражава бројем степена описаног лука. Дакле, **под улом разумемо број степена лука који је описан ма којом тачком зрака од његовог првобитног до последњег положаја.**

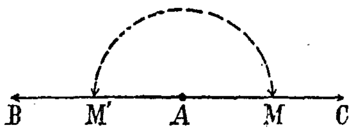


Сл. 89

Угао се означава на три начина: 1) помоћу три велика латинска писмена, од којих се једно пише код темена, а по једно на крацима; 2) једним малим писменом (обично грчким), које се пише у углу код темена; и 3) једним великим словом, које се пише код темена, споља. Угао на сл. 89 изговарамо : „угао **CAB**“ или **„BAC“,** или „угао A“ или „угао α“ (алфа).

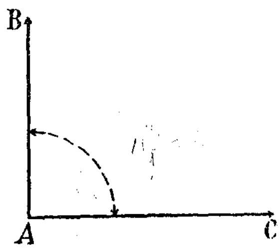


Сл. 90

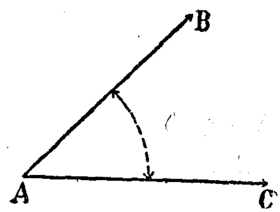


Сл. 91

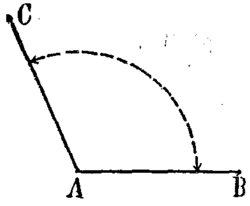
§ 44. **Врста углова.** — Ако зрак **AC** (сл. 90) дође после обртања око своје почетне тачке опет у свој првобитни положај **(AB)**, онда ма која његова тачка **(M)** опише круг. Добивени се угао зове **пун.** Ако краци описаног угла леже у истом правцу, али у супротном смислу (сл. 91), онда се такав угао зове **раван** или **опружен.** Он је половина пуног угла. Сви углови који су мањи од равнога зову се **издубљени,** а сви већи **испупчени.** Издубљени се углови деле на: **праве, оштре** и **тупе,** а испупчени на: **тупоиспупчене, правоиспупчене** и **оштроиспупчене. Прав** је угао половина равнога или четвртина пуног угла (сл. 92). Код њега стоје краци нормално један на другом. **Оштар** је сваки угао који је мањи од правога (сл. 93). **Туп** је угао већи од правога а мањи од равнога угла (сл. 94). Оштри и тупи углови једним се именом зову **коси,** пошто им се краци секу косо.



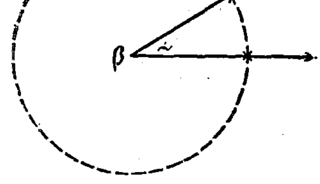
Сл. 92



Сл. 93



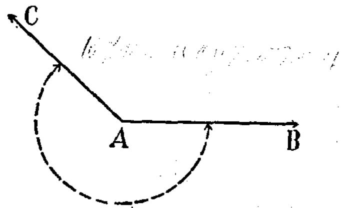
Сл. 94



Сл. 95

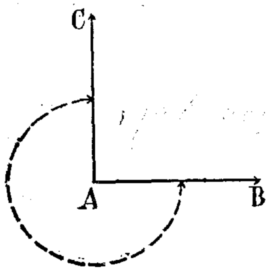
Под **допуном** једног угла разумемо онај угао који са првим образује пун угао; тако, на слици 95, угао α (алфа) је допуна за угао β (бета) и обрнуто, угао β допуна је за угао α.

Тупоиспупчен угао је онај чија је допуна туп угао (сл. 96); **правоиспупчен** је онај чија је допуна прав угао (сл. 97); и **оштроиспупчен** је онај чија је допуна оштар угао (сл. 98). Правоиспупчени угао је $^3/_4$ пунога угла.

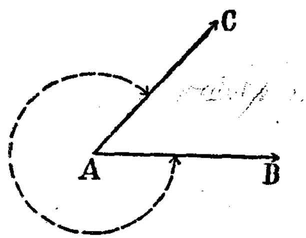


Сл. 96

Сказаљке једног часовника, које сматрамо као краке једнога угла, објашњавају постанак свију углова. Тако сказаљке на првом часовнику на сл. 96 граде с једне стране прав, с друге стране правоиспупчен угао; на другом часовнику

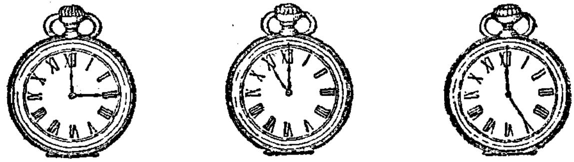


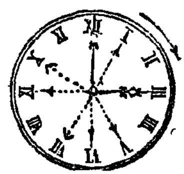
Сл. 97



Сл. 98

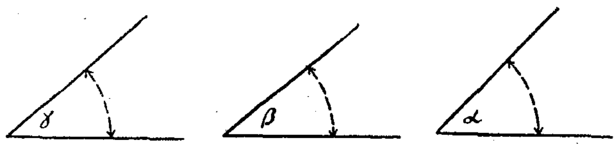
оштар и оштроиспупчен угао, а на трећем туп и тупоиспупчен угао. Сказаљке на часовнику сл. 100 граде у 1 час


Сл. 99


Сл. 100

оштар угао, у три **прав,** у пет **туп,** у шест **раван,** у седам **тупоиспупчен,** у девет **правоиспупчен,** у десет **оштроиспупчен,** а у 12 часова, када се поново поклапају, граде **пун угао.**

§ 45. **Упоређивање углова.** — Два угла по величини или су једнаки или неједнаки. Да бисмо сазнали да ли су два угла једнака или не, треба да се један изреже по крацима, а

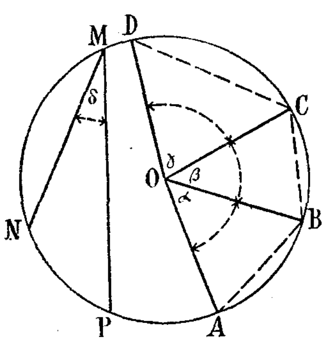


Сл. 101

затим стави на други тако да им се темена и по један крак поклапају. Ако им се поклапају и други краци, онда су углови једнаки; у противном случају, они су неједнаки. Да су углови α и β (сл. 101) једнаки, означава се: $\measuredangle\alpha = \measuredangle\beta$, а да је угао α већи од угла γ (гама) означава се: $\measuredangle\alpha > \measuredangle\gamma$; да је угао γ мањи од угла α, означава се: $\measuredangle\gamma < \measuredangle\alpha$.

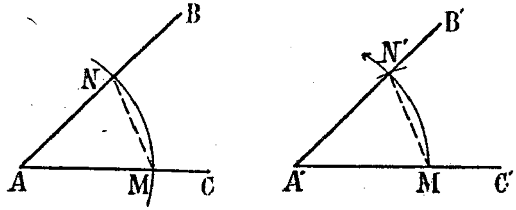
§ 46. **Перифериски и централни углови.** — Угао чије се теме налазе на периферији једнога круга, а краци су му тетиве, зове се **перифериски (NMP,** или δ (делта), на сл. 102). Угао чије се теме налази у центру круга, а краци су му полупречници, зове се **централни** или **средишњи.** Такви су углови α, β и γ на сл. 102.

Ако су луци **AB** и **BC** једнаки, онда се исечци **AOB** и **BOC** поклапају. Поклапање ових исечака доказује да су углови α и β једнаки, а тако исто и тетиве **AB** и **BC**. Стога: **једнаким луцима једнога круга (или кругова једнаких полупречника) одговарају једнаки средишњи углови и једнаке тетиве. Исто тако, једнаким средишњим угловима одговарају једнаки луци и једнаке тетиве.** Исто правило важи и обрнуто, за једнаке тетиве. Неједнаким луцима истога круга одговарају и неједнаке тетиве, и то: већем луку одговара већи средишњи угао, већа тетива, и обрнуто. Такви су углови α и γ, или β и γ (сл. 102).



Сл. 102

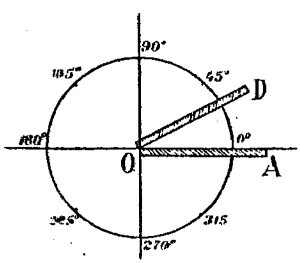
§ 47. **Преношење угла.** — Да бисмо угао **BAC** (сл. 103) пренели на друго место (на зрак **A′ C′**), тако да му тачка **A′** буде теме, треба произвољним отвором шестара описати лук **MN** око темена **A.** Истим отвором шестара описујемо око **A′** лук који сече зрак **A′C′** у **M′** На овај лук, почевши од **M′** пренесмо шестаром тетиву **MN** лука из датог угла. Углови **MAN** и **M′A′N′** једнаки су као централни углови над једнаким тетивама, односно луцима. Њихова се једнакост дâ доказати и поклапањем, када други угао изрежемо и ставимо на први.



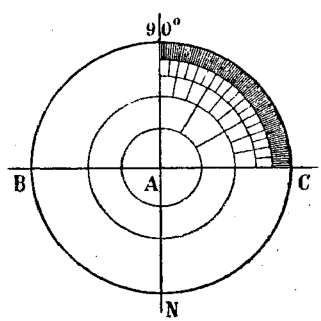
Сл. 103

§ 48. **Мерење углова.** — Ако два уска лењира **OA** и **OD** (сл. 104) ставимо тако да су једни њихови крајеви утврђени у центру **O** једнога круга, па лењир **OA** утврдимо у правцу **OA,** а лењир **OD** обрћемо у равни круга, видимо да се величина круга између лењира мења са луком **AD.** Угао **AOD** постаје двапута, трипуат итд. већи када и лук **AD** постане 2 и 3 пута већи. Стога **угао меримо луком између угловних кракова,** који припада ма ком кругу што је описан око темена угла као центра. Ако лук **AD** (сл. 104) има 30°, онда и угао **AOD** има 30°. Према томе лучни степен (1°) је узет за **меру** углова, као и за меру лукова.

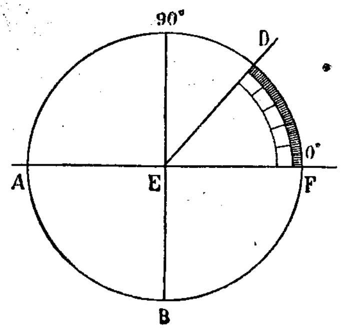
Два управна пречника једнога круга (сл. 105) граде четири права угла, а деле кружну периферију на четири једнака лука од по 90°. Према томе, прав угао има величину



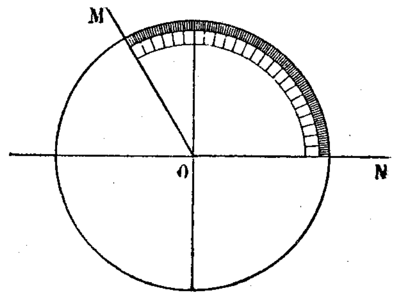
Сл. 104



Сл. 105



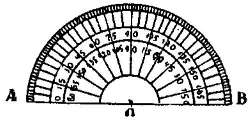
Сл. 106



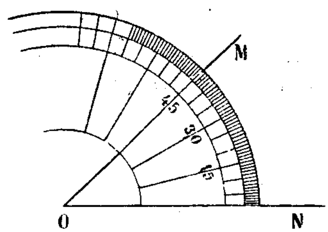
Сл. 107

од 90°. Оштар угао (сл. 106), као мањи од правога, има величину мању од 90°. За обична израчунавања сматра се да је најмањи оштри угао од 1″, а највећи од 89° 59′ 59″. Раван угао, као двапута већи од правога, има 180°, а правоиспупчени, као три пута већи од правога, има 270°. Туп угао (сл. 107), као већи од правога, а мањи од равнога, има више од 90°, а мање од 180°. Тупоиспупчени, као већи од равнога а мањи од правоиспупченог, има више од 180°, а мање од 270°. Оштроиспупчени, као већи од правоиспупченог, а мањи од пунога који има 360°, има више од 270°, а мање од 360°.

За мерење углова служимо се **угломером** (сл. 108). То је полукруг од хартије или метала, који је подељен на 180 степени. На њему тачка **O** претставља центар, а **AB** пречник. Када хоћемо да измеримо угао, стављамо угломер тако да центар падне на теме угла (сл. 109), а крак **ON** да се поклопи са полупречником. После тога гледамо кроз који



Сл. 108



Сл. 109

степен угломера пролази други крак угла. Дотични степен показује нам величину угла. На сл. 109 угао **NOM** има 45°. При мерењу испупчених углова меримо угломером њихове допуне до 360°. Одузимајући величину допуне од 360°, налазимо величину испупченога угла.

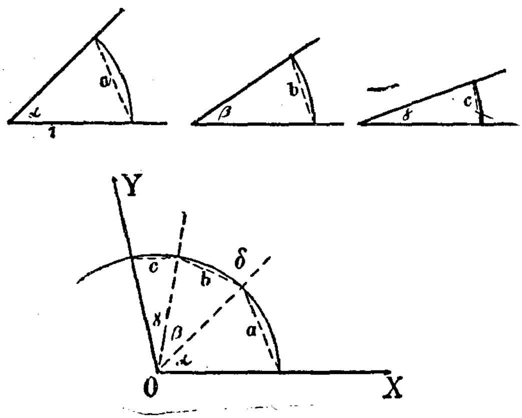
§ 49. **Комплементни и суплементни углови.** — Два су угла **комплементна** ако им збир износи 90^0. Према томе, ако је познат један, онда други налазимо када од 90^0 одузмемо познати угао.

Два су угла **суплементна** ако им збир износа 180^0. Према томе, непознати суплементни угао налази се када познати одузмемо од 180^0. Тако, углу од 30^0 комплементан је угао од 60^0, а суплементан угао од 150^0.

19·II·1937

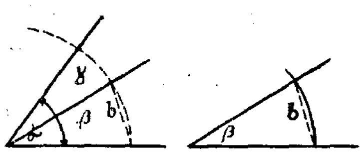
§ 50. **Графичке радње са угловима**

1. **Сабирање.** — Два или више углова сабирамо овако: најпре произвољним отвором шестара описујемо око темена сваког датог угла истим отвором лукове који секу краковe. Затим истим отвором шестара, око почетне тачке **(O)** једног зрака **(OX)**, описујемо лук који сече зрак. Најзад, на овај лук преносимо, почевши од пресечне тачке, тетиве **(a, b, c)** лукова датих углова (сл. 110). Спајањем крајње тачке последње пренете тетиве **(c)** са почетном тачком зрака **(O)** добија се угао који нам претставља збир датих углова. На сл. 110 имамо: δ (делта) $= \alpha + \beta + \gamma$.



Сл. 110

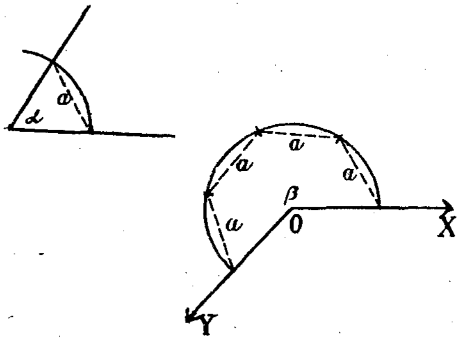
2. **Одузимање.** — Да бисмо одузели два угла, треба једним истим отвором шестара описати лукове око темена датих углова α и β на сл. 111), па тетиву лука мањег угла (β) почевши од једне пресечне тачке већега лука, пренети на овај лук. Спајањем друге крајње тачке пренете тетиве са теменом угла добијамо остатак од већег угла, који нам претставља разлику датих углова. На сл. 111 угао $\gamma = \alpha - \beta$



Сл. 111

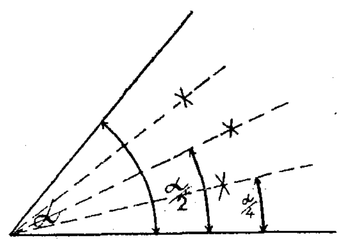
3. **Множење угла целим бројем.** — Помножити један угао

целим бројем значи наћи угао који је онолико пута већи од датога угла колико има јединица у томе броју. Тај се угао добива ако ма којим отвором шестара опишемо лук око темена датог угла и око почетне тачке једнога зрака **(OX)**, а затим тетиву лука данога угла преносимо на нови лук зрака онолико пута колико има јединица у датом броју. На слици 112 угао $\beta = 4 \cdot \alpha$.



Сл. 112

4. **Дељење угла целим бројем.** — Угао се дели на два једнака дела ако ма којим отвором шестара опишемо лук око темена угла, а затим истим, или отвором који је већи од половине лука између кракова, описујемо, најпре из једне а затим из друге пресечне тачке кракова, лукове у унутрашњости угла, тако да се они секу. Спајањем ове пресечне тачке са теменом угла, дати се угао дели на два једнака дела. Половину датога угла можемо истим путем да делимо на по два једнака дела, па добијемо четвртине; добивене четвртине можемо делити даље, исто тако, на осмине, итд. Овим путем можемо угао поделити на 2, 4, 8, 16... делова. На 3, 5, 7, итд. делова угао се дели само приближно тачно, од ока, или помоћу углометра. Ако нађемо угломером да је дати угао 72⁰, а тражи се угао који је три пута мањи, онда треба угломером нацртати угао од 24⁰ као $^1/_3$ од 72⁰. На сл. 113 угао α подељен је на 4 једнака дела.



Сл. 113

§ 51. **Рачунске радње са угловима.** — Рачунске радње са угловима јесу истоветне као и радње са вишеименованим бројевима. Тако:

1. **Сабирање.** — Пишемо дате углове тако да секунде буду испод секунада, минути испод минута, а степени испод степена, па сабирање почињемо од секунада. Ако у збиру

секунада има један или више минута, онда остатак секунада пишемо испод секунада, а нађене минуте сабирамо са минутима. Исто то радимо и са збиром минута, ако у њему буде био један или више степена.

Примери:

a)
$$\begin{array}{r} 47^{0}\ 25'\ 7''. \\ +\ 29^{0}\ 48'\ 15'' \\ \hline 77^{0}\ 13'\ 22'' \end{array}$$

Код овог примера био је збир минута 73, у коме има 1^{0}. Нађени степен сабран је са степенима, а остатак (13′) писан је испод минута.

b)
$$\begin{array}{r} 123^{0}\ -'\ 45'' \\ +\ 54^{0}\ 52'\ 50'' \\ \hline 177^{0}\ 53'\ 35'' \end{array}$$

Код овог примера био је збир секунада 95, у коме има 1′ и 35″. Нађени минут сабран је са минутима, а остатак (35″) писан је испод секунада.

2. **Одузимање.** — Код одузимања пишемо мањи угао испод већега, па одузимање почињемо од секунада. Ако се деси да је број секунада другог угла већи од броја секунада првог угла, онда најпре узимамо један минут већег угла, претварамо га у секунде (60) и сабирамо са његовим секундама, па после вршимо одузимање. Исто овако поступамо и при одузимању минута ако се деси исто, у ком случају узимамо један степен већег угла, претварамо га у минуте и сабирамо га са његовим минутима.

Примери:

a)
$$\begin{array}{r} 81^{0}\ 45'\ 17''. \\ -\ 52^{0}\ 35'\ 55'' \\ \hline 29^{0}\ \ 9'\ 22'' \end{array}$$

Код овога примера узели смо само 1′ који има 60″ и сабрали са 17″, па смо 55″ одузели од 77″ а 35′ од 44′.

b)
$$\begin{array}{r} 65^{0}\ 34'\ 15''. \\ -\ 41^{0}\ 56'\ \ 8'' \\ \hline 23^{0}\ 38'\ \ 7'' \end{array}$$

Код овога примера узели смо 1^{0}, који има 60′, и сабрали са 34′, па смо 56′ одузели од 94′, а 41^{0} од 64^{0}.

3. **Множење.** — Да бисмо нашли угао који је 2, 3, 4 итд. пута већи од неког угла, треба најпре и секунде, и минуте и степене угла да помножимо тим бројем, а после, или у току рада, претварамо секунде у минуте, а минуте у степене, ако у добивеним производима секунада и минута буде било минута односно степена.

Пример: $37^0\ 47'\ 25'' \times 4 = 148^0\ 188'\ 100'' = 151''\ 9'\ 40''$.

Код овог примера је производ секунада 100, а производ минута 188. У производу секунада има $1'\ 40''$, а у производу минута има, после додавања $1'$, $189'$ или 3^0 и $9'$.

4. **Дељење.** — Да бисмо нашли угао који је 2, 3, 4 итд. пута мањи од неког угла, треба најпре његове степене да поделимо тим бројем, чиме добијамо степене траженог угла. Ако при дељењу добијемо остатак у степенима, онда овај остатак претварамо претходно у минуте, и сабирамо са минутима угла, па добивене минуте делимо истим бројем, чиме добијамо и минуте траженог угла. Ако при дељењу минута добијемо остатак у минутима, онда овај остатак претходно претварамо у секунде, и сабирамо са секундима угла (разуме се, ако их угао има), па добивене секунде делимо истим бројем, чиме добијамо и секунде траженог угла. Ако број секунада није дељив са делитељем, онда количник секунада израчунавамо са 1 или 2 децимала.

Пример: $134^0\ 7'\ 35'' : 5 = 26^0\ 49'\ 31''$.

Код овог примера, при дељењу степена, добијамо као остатак 4^0 или $240'$ који сабрани са минутима угла дају $247'$. Овај број минута делимо са 5, те добијамо $49'$ за количник и $2'$ за остатак, који остатак ($120''$), са секундама угла, чини $155''$. Овај број секунада подељен је са 5, те је добивен количник секунада траженог угла.

Напомена. — Ако се захтева да се сазна колико је пута неки угао већи од другога угла, треба оба угла претходно претворити у најниже јединице (у минуте или секунде, ако их у угловима буде било), па већи угао поделити мањим.

Пример. — Колико је пута угао од $76^0\ 30'\ 36''$ већи од угла $25^0\ 30'\ 11''$. Први угао има $275436''$, а други $91812''$, те је њихов количник 3. Према томе, први је угао 3 пута већи од другога.

§ 52. Вежбања и задаци

1. Какви су углови од: 300^0, 72^0, 163^0, 200^0, 350^0, 83^0, 271^0, и 347^0?

2. Какав угао описује стрела на ветроказу кад се обрне: а) од севера ка југу; b) од истока к југу; с) од истока преко југа к југозападу?

3. Какав угао описује минутна сказаљка на часовнику за 10, 15, 25, 30 и 45 минута?

4. Какав угао граде сказаљке на часовнику у 2, 3, 4, 5, 6 и 9 часова?

5. Нацртај неколико издубљених и испупчених углова, оцени их од ока, па их затим измери угломером!

6. Нацртај угломером углове од 90°, 45°, 60°, 30°, 80°, 120°, 175°, 200°, 270° и 300°!

7. Колики је комплеменат угла од: a) 72°; b) 48° 12′; c) 73° 22′ 48″; d) 55° 25′ 30″?

8. Колики је суплеменат угла од: a) 59°; b) 102° 17′; c) 142° 27′ 49″; d) 50° 25′ 17″?

9. Какав се угао добија кад се саберу: a) прав и оштар угао; b) прав и туп угао; c) раван и туп?

10. Какав се угао добија кад се одузме: a) оштар угао од правог; b) прав од тупог; c) туп од равног; d) туп од тупог?

11. Какав се угао добија кад се удвоји: a) прав; b) туп; c) раван угао?

12. Какав је угао половина од: a) правог; b) тупог; c) равног; d) пуног угла?

13. Нађи збир ових углова: a) 47°, 25°, 123°, и 46°; b) 32° 17′ 15″, 50° 28′ 37″ и 137° 10′!

14. Нађи разлику ових углова: a) 147° и 80°; b) 216° 24′ 28″ и 75° 43′ 15″; c) 103° и 75° 34′ 47″!

15. Нађи угао који је пет пута већи од угла 37° 25′ 14″!

16. Нађи угао који је пет пута мањи од угла 40° 17′ 25″!

17. Испитај колико је пута већи: a) угао од 96° од угла 8°; b) угао од 107° 20′ од угла 15° 20′; c) угао од 87° 56′ 5″ од угла 17° 34′ 49″!

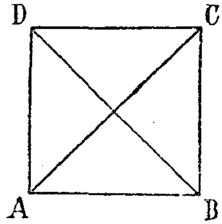
18. Нацртај два неједнака угла, па их затим сабери, па после одузми!

19. Од два суплементна угла један је 5/6 правог угла; колико степени има други?

20. Од збира углова 35° 7′ 45″, 98° 52′ 4″ и 120° 35′ 40″ одузми збир углова: 40° 10′ 42″, 60° 45′ 30″ и 101° 57′ 58″.

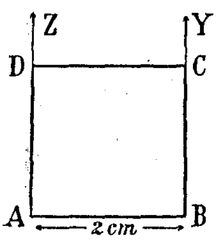
§ 53 Цртање квадрата и коцкине мреже

1) Видели смо код § 11 да је квадрат правилан четвороугао, пошто су му све стране једнаке, а тако исто и сви су му углови, као прави, једнаки. Квадрат има, дакле, 4 једнаке стране и 4 права угла. Он има и две **дијагонале.** То су дужи које спајају његова супротна темена (**AC** и **BD** на сл. 114). **Обе су дијагонале код квадрата једнаке, управно стоје једна на другој и узајамно се полове.** Да је све ово тачно, можемо се уверити мерењем. Стога нам је лако конструисати (нацртати) квадрат ако знамо само једну његову страну, или само једну његову дијагоналу. a) Ако дата страна има 2 cm (**3 cm, 4 cm**), онда квадрат цртамо када на зрак **AX** (сл. 115) пренесемо лењиром (шестаром) од његове почетне



Сл. 114

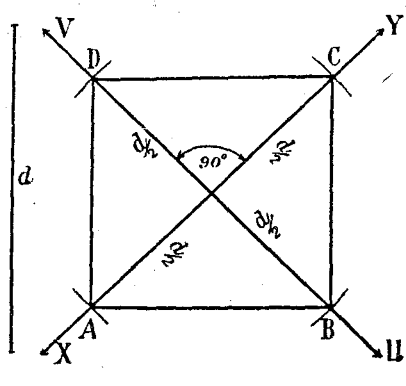
тачке **A** дуж од 2 **cm** (3 **cm**, 4 **cm**...), чиме добијамо теме **B**. У тачкама **A** и **B** зрака **AX** подижемо помоћу правоуглог троугаоника управне **AZ** и **BY**, и на ове управне преносимо 2 **cm** (3 **cm**, 4 **cm**...), чиме добијамо и остала два темена квадрата, **C** и **D**. Квадрат на сл. 115 нацртан је са страном од 2 **cm**. (Нацртај три квадрата са страном од 3 **cm**, 4 **cm** и 5 **cm** (на табли: од 3 **dm**, 4 **dm** и 5 **dm**) и увери се мерењем да сваки има једнаке дијагонале.) в) Ако је дијагонала квадрата величине дужи **d** (сл. 116), онда цртамо квадрат када нацртамо најпре две управне праве **XY** и **VU**, а затим од њиховог пресека преносимо и с једне и с друге стране половину дате дијагонале. Добивене тачке **A**, **B**, **C** и **D** јесу темена траженог квадрата.



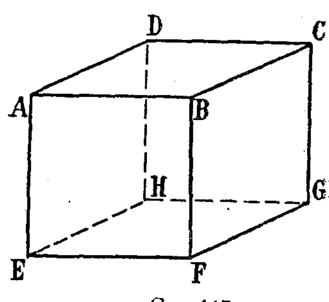
Сл. 115

(Нацртај три квадрата чије су дијагонале **4 cm**, 5 **cm** и 6 **cm** (4 **dm**, 5 **dm** и 6 **dm**) и мерењем се увери да ли има сваки једнаке стране!)

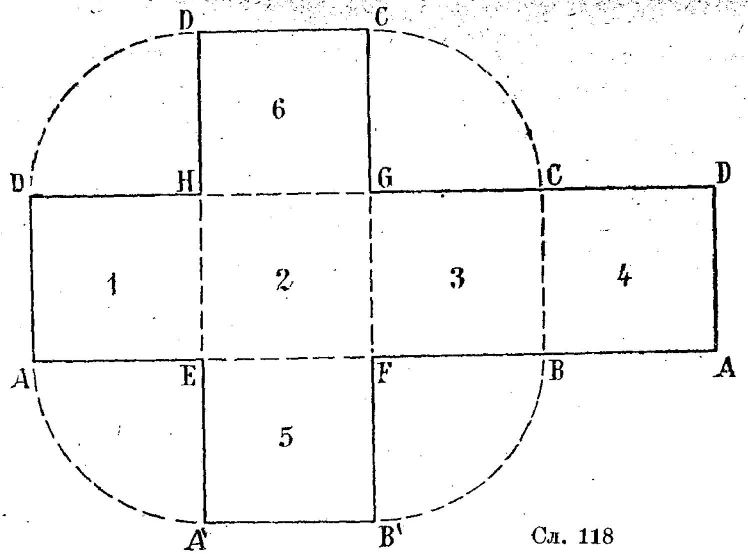
2) Ако замислимо да је коцка на сл. 117 од картона, па изрежемо по ивицама горње основе: **AD**, **AB** и **DC**, а тако исто изрежемо по свима бочним ивицама: **AE**, **BF**, **CG** и **DH**, па расклопимо и положимо на раван све њене стране, онда добијамо **коцкину мрежу** (сл. 118), која је састављена од 6 једнаких квадрата поређаних један до другога у облику крста. Коцкина се мрежа може лако нацртати на овај начин: најпре нацртамо четири једнака квадрата поређана је-



Сл. 116



Сл. 117

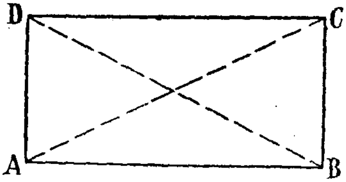


Сл. 118

дан до другога (1, 2, 3 и 4 на сл. 118), а затим и с једне и с друге стране ма ког квадрата нацртамо још два истоветна квадрата (5 и 6).

3) Да бисмо саградили коцку од картона или ма које дебеле хартије, треба најпре да нацртамо на картону коцкину мрежу (сл. 118), а затим оштрим перорезом, уз помоћ лењира, изрежемо мрежу око целог њеног обима, по странама 2 квадрата, као и по страни **BC**, које су на сл. 118 тачкицама нацртане, повлачимо перорезом овлажно, тако да не пресече цео картон. Најзад тако изрезану мрежу од картона пресавијемо око страна другог квадрата и стране **BC**, чиме добијамо коцку, коју танком пантљичицом од хартије облепљујемо око ивица, да би коцка била стално склопљена. (Сагради од картона две коцке чије су ивице 2 **cm** и 4 **cm**!).

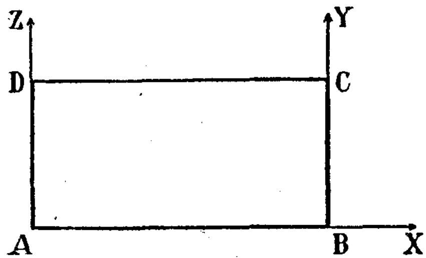
§ 54. **Квадрат и правоугаоник.** — Посматрајући квадрат (сл. 114) и правоугаоник (сл. 119), налазимо: 1) да су код квадрата све 4 стране једнаке, а код правоугаоника само су супротне стране једнаке; 2) да су код квадрата дијагонале једнаке и једна другу полове, и да стоје управно једна на другој; а код правоугаоника су такође дијагонале једнаке и једна дру-



Сл. 119

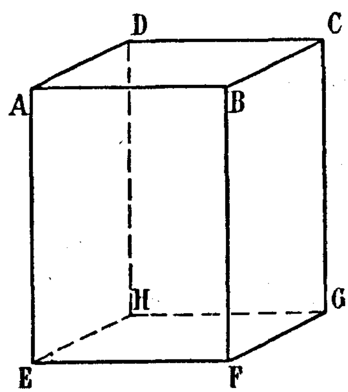
гу толове, али не стоје управно једна на другој, већ се секу косо; 3) да су углови и код квадрата и правоугаоника прави; и 4) да су супротне стране и код квадрата и код правоугаоника паралелне.

§ 55. **Цртање правоугаоника.** — За цртање једнога правоугаоника потребно је знати обе његове суседне стране: дужину и ширину. Тако, ако желимо да нацртамо правоугаоник дужине 4 **cm** а ширине 2 **cm,** треба на зрак **AX** (сл. 120) да пренесемо лењиром (шестаром) од његове почетне тачке **A** дуж од 4 **cm,** чиме добијамо теме **B;** затим у тачкама **A** и **B** подижемо помоћу правоуглог троугаоника управне **AZ** и **BY;** и, најзад, на ове управне преносимо из **A** и **B** дужи од 2 **cm.** Добивене тачке **D** и **C** јесу остала два темена траженог правоугаоника. (Нацртај правоугаоник чије су стране. а) 2 **cm** и 3 **cm;** б) 4 **cm** и 3 **cm**; с) 5 **cm** и 2,5 **cm.** На табли узимај **dm** уместо **cm!).**



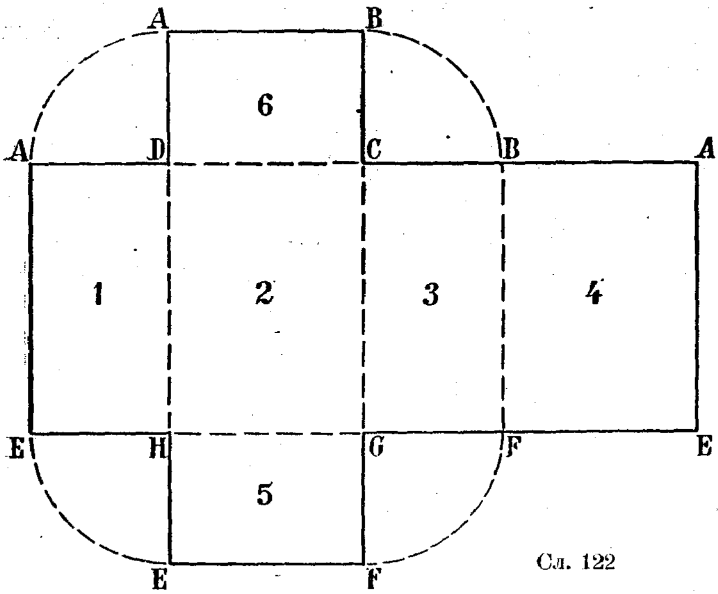
Сл. 120

§ 56. **Мрежа правоуглог паралелопипеда.** — Ако замислимо да је паралелопипед на сл. 121 од картона, па га изрежемо по ивицама горње основе: **AD, AB** и **BC,** по ивицама доње основе **HE, EF, FG** и по бочној ивици **AE,** расклопимо и положимо на равни све његове стране, онда добијамо **паралелопипедову мрежу** (сл. 122), која се састоји од 6 правоугаоника од којих су два и два једнака, а поређани су један поред другога у облику крста. Паралелопипедову мрежу цртамо на следећи начин: треба нацртати четири правоугаоника један до другога тако да су 1 и 3 затим 2 и 4 једнаких страна, а најзад над другим правоугаоником треба нацртати над странама **DC** и **HG** (сл. 122) два правоугаоника ширине 1, односно 3 правоугаоника.



Сл. 121

Да бисмо саградили модел



Сл. 122

од картона једног правоуглог паралелопипеда, треба на картону да нацртамо најпре његову мрежу (сл. 122), а затим оштрим перорезом, уз помоћ лењира, да је изрежемо свуда око обима, а стране 2 правоугаоника и страну **BF** овлаш да засечемо, тако да перорез не пресече цео картон; најзад, тако изрезану мрежу пресавијемо око страна 2 правоугаоника и око стране **BF**, чиме добијамо паралелопипед, који се танком пантљичицом од хартије, намазаном гумарабиком, облепљује око ивица, да би био паралелопипед стално склопљен.

§ 57. **Вежбања**

1. Нацртај квадрат стране: a) 3 *dm* (3 *cm)*; 25 *cm* (25 *mm)*!

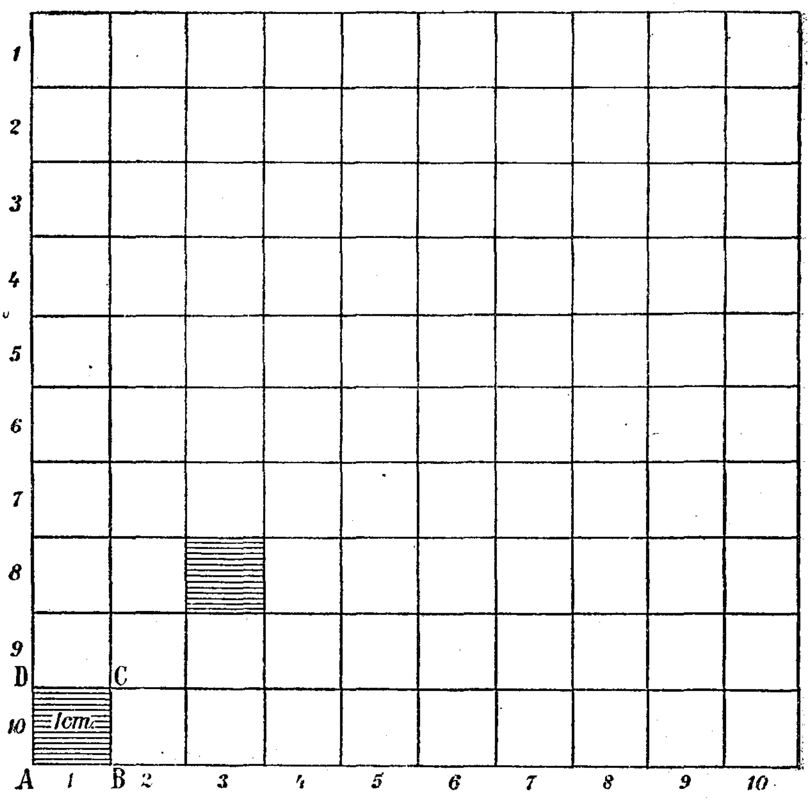
2. Нацртај правоугаоник страна: a) [redacted] (5 *cm* и 3 *cm)*; b) [redacted] (30 *mm* и 20 *mm)*; c) [redacted] (45 *mm* и 30 *mm)*; види да ли су њихове дијагонале једнаке и да ли се узајамно полове!

3. Сагради од картона паралелопипед чије су димензије: a) 2 *cm*, 3 *cm* и 5 *cm*; b) 5 *cm*, 3 *cm* и 6 *cm*!

10. ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПОВРШИНА И ЗАПРЕМИНА КОЦКЕ И КВАДРА

§ 58. **Мере за површине.** — Као основна јединица за мерење површина узет је код нас **квадратни метар** **(1m²)**. То је у ствари квадрат чија је свака страна 1 **m.** Ако сваку његову страну поделимо на 10 **dm**, па одговарајуће дециметре супротних страна спојимо, онда се он дели на 100 квадрата код којих је свака страна 1 **dm**, тј. квадратни метар (1 **m²**) се дели на 100 **dm²** (квадратних десиметара).

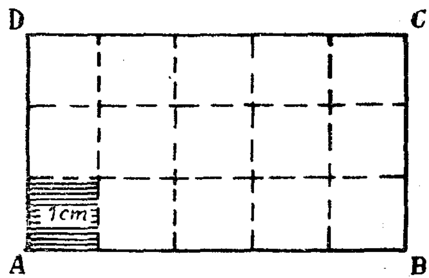
Све остале јединице за мерење површина произлазе од квадратног метра. Тако: **квадратни десиметар** (1 **dm²**) је 100-ти део квадратнога метра, или је он квадрат чија је страна 1 **dm** (сл. 123); 2) **квадратни сантиметар** (1 **cm²**) је 100-ти део квадратног десиметра, или је квадрат чија је страна 1 **cm** (**AB,AD,** на сл. 123); 3) **квадратни милиметар** (1 **mm²** је 100-ти део квадратног сантиметра, или је он квадрат чија је страна 1 **mm**; 4) **Ар** (1 **a**) је квадрат чије је страна 10 **m**, те у њему има 100 **m²**; **5) хектар** (1 **ha**) је кварат чија је страна 100 **m**, те у њему има 100 ари, или 10000 **m²**; и 6) **квадратни километар** (1 **Km²**) је квадрат чија је страна 1 **Km** или 1000 **m**, те у њему има 100 **ha**, или 10000 **a**, или 1000000 **m²**.



Сл. 123

§ 59. Под површином једне слике разумемо величину површине, ограничене странама те слике. До те величине долазимо када површину слике упоредимо с површином ма које јединице за површину (1m², 1 dm², 1 cm² итд.). Резултат који показује колико се пута садржава узета јединица у површини једне слике, јесте величина или бројна вредност површине те слике. Површина ма које слике не израчунава се непосредним преношењем узете јединице по површини слике, који је посао тежак и често неизводљив, већ се то израчунавање врши посредно: мерењем оних дужи на слици од којих зависи површина слике, па рачунским путем налазимо површину слике.

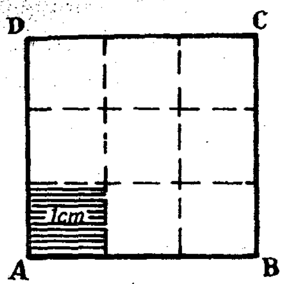
§ 60. **Површина правоугаоника.** — Нека је код правоугаоника **ABCD** (сл. 124) дужина **AB** = 5 **cm**, а ширина **AD** = 3 **cm**. Ако из сваког сантиметра дужине повучемо паралелну са ширином, а из свакога сантиметра ширине повучемо паралелну са дужином, онда се површина тога правоугаоника дели на квадратне сантиметре, чији је број 15. До ове бројне вредности површине овога правоугаоника дошли бисмо када дужину 5 помножимо ширином 3 (5 × 3 = 15 **cm²**). Ако су стране неког правоугаоника 8 **dm** и 5 **dm**, онда поступајући на исти начин, нашли бисмо да је његова површина 8×5=40 **dm²**.



Сл. 124

Да бисмо, дакле, **израчунали површину једнога правоугаоника, треба да измеримо његову дужину и ширину, па добивене мерне бројеве да помножимо.**

§ 6. **Површина квадрата.** — Како је квадрат у ствари један правоугаоник, код кога је дужина једнака са ширином, то се његова површина налази кад се мерни број његове стране помножи самим собом. Тако, код квадрата **ABCD** (сл. 125) мерни број стране је 3 **cm**, а његова површина биће $3 \times 3 = 9$ **cm²**, што се из слике види. Ако је страна неког квадрата 8 **dm** и 5 **cm**, онда је његова површина $8{,}5 \times 8{,}5 = 72{,}25$ **dm²** или 7225 **cm²**



Сл. 125

§ 62. **Површина коцке.** — Пошто се коцкина површина састоји од шест једнаких квадрата, то је она 6 пута већа од површине ма које њене стране. Стога, да бисмо израчунали површину једне коцке, треба претходно да израчунамо површину ма ког њеног квадрата, па добивени резултат да помножимо са 6. Тако, површина коцке чија је ивица 4 **dm** јесте: $6 \times (4 \times 4) = 6 \times 16 = 96$ **dm²**.

§ 63. **Површина паралелопипеда.** — Пошто се паралелопипедова површина састоји од 6 правоугаоника, од којих су супротни једнаки, то је она двапута већа од збира површина трију његових различитих страна. Стога, да бисмо израчунали површину једнога паралелопипеда, треба најпре да израчунамо површину доње основе, множећи мерне бројеве дужине и ширине; затим израчунавамо површину једне бочне стране, множећи мерне бројеве дужине и висине; а затим израчунавамо површину друге суседне бочне стране, множећи мерне бројеве ширине и висине; и најзад добивене површине сабирамо, па нађени резултат множимо са 2. Тако површина паралелопипеда чије су димензије 3 **cm**, 4 **cm** и 5 **cm**, јесте:

$$[3 \times 4 + 4 \times 5 + 3 \times 5] \times 2 = [12 + 20 + 15] \times 2 = 47 \times 2 = 94 \text{ cm}^2.$$

§ 64. Задаци за вежбу

1. Нађи површину квадрата чија је страна: a) 15 **cm**; b) 2 **dm** 5 **cm**!

3. Колика је површина ктадрата чији је обим 40 **cm**?

4. Колико стаје плац, облика квадвата, кад му је страна 30 **m**, а један квадратни метар стаје 55 динара?

5. Колико стаје паркет квадратне собе од 6 **m** и 5 **dm** кад се за 1 **m²** плаћа 120 динара?

6. Нађи површину правоугаоника чије су стране: а) 12 **cm** и

8 cm; b) 3,25 m и 1,75 m; c) 2 m 3 dm 5 cm и 1 m 8 dm 2 cm; d) 2 m и 80 cm!

7. Нађи површину пода школске учионице чија је дужина 9,5 m, а ширина 6,3 m.

8. Двориште, облика правоугаоника, дужине 63 m а ширине 40 m, треба да се патоше квадратним плочама страна 6 dm; колико је плоча потребно за ово патосање?

9. Обим једнога правоугаоника износи 140 m, а дужина му је 40 m; нађи његову површину!

10. Колико ари, а колико хектара има њива, облика правоугаоника, дужине 250 m а ширине 180 m?

11. Колико стаје калдрмисање дворишта, облика правоугаоника, дужине 23 m а ширине 15 m, када се плаћа по 30,50 динара за 1 m^2?

12. Колико је hl пшенице потребно да се засеје њива облика правоугаоника дужине 200 m, а ширине 120 m, када се на један ар рачуна по 2 l?

13. Колике стају 100 прозорских окана дужине 50 cm а ширине 30 cm када 1 m^2 стаје 30 динара?

14. Нека ливада, облика правоугаоника, дугачка је 280 m, широка 170 m; колико ће се сена добити са те ливаде, ако се узме да један ар просечно даје 30 кгр?

15. Шта стаје патосање двеју соба, кад је први под квадрат стране 7 m, а други под је правоугаоник дужине 8 m а ширине 5 m, и када се за 1 m^2 плаћа 65 динара?

16. Нађи површину коцке, чија је ивица: a) 8 cm, b) 20 mm, c) 1 m 2 dm 3 cm; d) 3 m 8 cm!

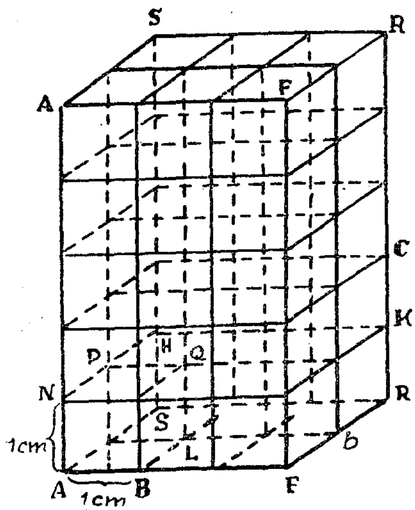
17. Нађи површину правоуглог паралелопипеда чије су димензије: a) 4 dm, 2 dm и 6 dm; b) 2 cm, 4 cm и 7 cm; c) 25 mm, 25 mm и 40 mm; d) 1 m, 2 m и 3 m; e) 1,5 m, 2,75 m и 4,2 m.

§ 65. **Мере за запремине и течности.** — Као основна јединица за мерење запремина узет је код нас **кубни метар (1 m^3)**, и за мерење течности литар (1 dm^3). Кубни метар је у ствари коцка чија је ивица 1 m. У једном кубном метру има 1000 **кубних десиметара (dm^3)**, у једном кубном десиметру има 1000 **кубних сантиметара (cm^3)**, а у једном кубном сантиетру има 1000 **кубних милиметара (mm^3)**. Кубни десиметар, кубни сантиметар и кубни милиметар јесу опет коцке чије су ивице 1 dm, 1 cm и 1 mm.

Према томе: $1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1\,000\,000\ cm^3 = 1000\,000\,000\ mm^3$; $1\ dm^3 = 1000\ cm^3 = 1000\,000\ mm^3$.

Литар је запремина исто толико колико 1 dm^3. У једном литру има 10 **десилитара (dl)**, 100 **сантилитара (cl)**, а 1000 **милилитара (ml)**. Сто литара дају један **хектолитар (hl)**, а 50 l дају један аков (раније 56,32 l). Један литар чисте воде тежак је један килограм (1 Kgr).

§ 66. **Запремина правоуглог паралелопипеда.** — Ако замислимо да је дужина паралелопипеда на сл. 126 3 **cm**, ширина 2 **cm**, а висина 5 **cm**, па кроз сваки сантиметар дужине, ширине и висине пролазе равнине паралелне с левом (десним) бочном страном, с предњом (задњом) бочном страном и с доњом (горњом) основом, као што је на слици претстављено, онда се цео паралелопипед дели на 30 **cm³**, који чине запремину тог паралелопипеда. До овог резултата дошли бисмо када бројне вредности димензија паралелопипеда помножимо, јер $3 \times 2 \times 5 = 30$.



Сл. 126

Код другога неког паралелопипеда, чије су димензије 3 **dm**, 4 **dm** и 6 **dm**, истим путем нашли бисмо да је његова запремина: $3 \times 4 \times 6 = 72$ **dm³**.

Према овоме, **запремину неког паралелопипеда израчунавамо кад бројне вредности његових димензија помножимо.** Тако, запремина паралелопипеда димензијâ: 2,3 **m**, 4,5 **m** и 7 **m** је: $2{,}3 \times 4{,}5 \times 7 = 72{,}45$ **m³** $= 72{,}450$ **dm³** $= 72\,450\,000$ **cm³**.

§ 68. **Запремина коцке.** — Пошто коцку можемо да сматрамо као правоугли паралелопипед код кога су све три димензије једнаке, то **коцкину запремину израчунавамо кад бројну вредност једне њене ивице помножимо међу собом трипута.** Тако, запремина коцке ивице 4 **cm** јесте: $4 \times 4 \times 4 = 64$ **cm³**; запремина коцке ивице 6,5 **dm** јесте: $6{,}5 \times 6{,}5 \times 6{,}5 = 274{,}625$ **dm³**.

§ 68. Задаци за вежбу

1. Нађи запремину коцке чија је ивица: a) 9 **cm**; b) 1 m 2 **dm** 3 **cm**; c) 5,22 **dm**; d) 1,75 **m**.

2. Нађи површину и запремину коцке чија је ивица 2 **m** 5 **dm** 1 **cm**.

3. Нађи запремину правоуглог паралелопипеда чије су димен-

зије: а) 6 **dm**, 7 **dm** и 9 **dm**; b) 2 **m**, 3 **m** и 8 **m**; c) 3,2 **cm**, 4,5 **cm** и 6,75 **cm**; d) 1 **m** 3 **dm** 5 **cm**, 2 **m** 1 **dm** 8 **cm** и 3 **m** 3 **dm** и 7 **cm**.

4. Наћи површину и запремину правоуглог паралелопипеда чије су димензије: 2,35 **m**, 3,2 **m** и 5,25 **m**.

5. Наћи запремину школске учионице дужине 9,3 **m**, ширине 6,5 **m** а висине 5,5 **m**.

6. Наћи запремину претсобља дугачког 3 **m**, широког 2 **m** а високог 5,25 **m**.

7. Наћи запремину цигле дужине 30 **cm**, ширине 15 **cm** а дебљине 7 **cm**.

8. Наћи запремину једног зида дужине 20 **m**, ширине 60 **cm** а висине 4,5 **m**.

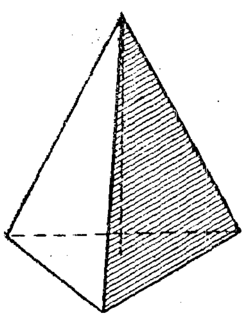
9. Измери димензије школске табле, па израчунај њену површину и запремину!

10. Колико је цигала потребно за зид дужине 12 **m**, ширине 45 **cm** а висине 3,75 **m**, ако су димензије једне цигле, заједно са малтером: 28 **cm**, 14 **cm** и 6 **cm**?

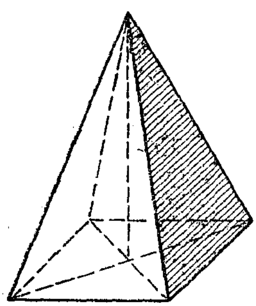
11. Школска сала дугачка је 20 **m**, широка 12 **m** а висока 7 **m**; наћи њену запремину.

11. ПИРАМИДЕ И ТРОУГЛОВИ

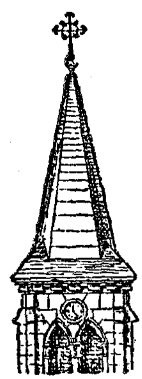
§ 69. **Опис пирамиде.** — Тела претстављена сликама 127 и 128, као и део звонаре испод крста на сл. 129, јесу **пирамиде.** Пирамиде спадају у рогљаста тела, пошто су ограничена само равним попршинама. Тако, пирамида на сл. 127 ограничена је са 4 равне тростране површине; пирамида на сл. 128 има за основу четворострану површину,



Сл. 127

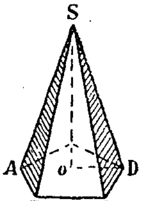


Сл. 128

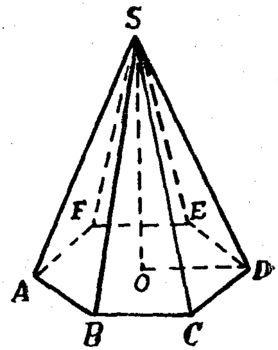


Сл. 129

а бочне су јој површине тростране слике. Прва има четири темена, 3 основне а 3 бочне ивице, а друга 5 темена, 4 основне и 4 бочне ивице. (Са колико је површина ограничена пирамида на сл. 130 и колико има основних, а колико бочних ивица?) Посматрајући ма коју пирамиду, увиђамо да су бочне површине увек троуглови који имају једно заједничко теме, звано **врх пирамиде** (S на слици 130 и 131), а основа може бити: троугао, четвороугао или ма који многоугао. Затим увиђамо да **свака пирамида има онолико основних колико и бочних ивица.** Према броју основних ивица, пирамиде делимо на: тростране (сл. 127), четворостране (сл. 128), петостране (сл. 130), итд. Бочне ивице једне пирамиде могу бити једнаке дужине или неједнаке. У првом случају каже се да је пирамида **права,** а у другом **коса.** Права пирамида чија је основна правилна слика, тј. слика чије су стране једнаке и углови једнаки, зове се **правилна.** Такве су пирамиде на сликама 130 и 131. Код ових пирамида бочне су стране подударни троуглови. Пирамида чије су бочне ивице једнаке са основним, заве се **равноивична.** Свега имамо три равноивичне пирамиде: **тространу, четварастрану** и **петострану,** код којих су основе равностран троугао, квадрат и правилан петоугао. Код ових пирамида бочне су стране сами равнострани троуглови.



Сл. 120



Сл. 131

Под **висином** једне пирамиде разумемо нормално отстојање врха пирамиде од њене основе. **Пирамида је,** дагле, **рогљасто тело, ограничено једном основом, која може бити ма која равна праволинска слика, а са стране троугловима који имају једно заједничко теме, звано врх пирамиде.**[2]

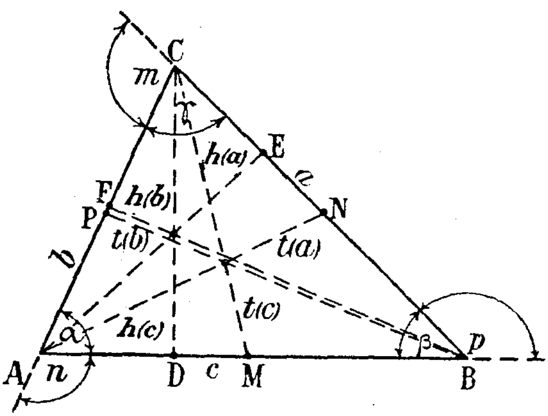
§ 70. **Троугао.** — Код § 11, у коме је било говора о праволиниским сликама уопште, видели смо да под троуглом разумемо део равне површине, ограничен трима дужима. Те три дужи зову се **стране,** а њихове заједничке тачке (пресеци) зову се **темена** троугла. Сваки пар троугло-

---

[2]) Наставник треба да покаже ученицима више модела правих, косих правилних и равноивичних пирамида.

вих страна гради по један угао, те је број углова у троуглу: три. На свакој троугловој страни налазе се по два угла, а трећи се налази наспрам ње. Сваки се троугао означава са три велика писмена која се пишу код темена. Ако је троугао означен писменима: **A, B** и **C** (сл. 132), онда се обично страна наспрам темена **A** означава са **a**, страна наспрам **B** са **b**, а страна наспрам **C** са **c**; угао код **A** са α (алфа) угао, код **B** са β (бета или вита) и угао код **C** са γ (гама). Она троуглова страна на којој се замишља да троугао лежи зове се **основица, а теме** наспрам основице зове се **врх.** Свака страна троуглова може узети за основицу. Нормално отстојање врха једнога троугла до основице зове се **висина** и бележи се обично словом **h.** Како се свака страна може узети за основицу, то у сваком троуглу има три висине $h_{(a)}$, $h_{(b)}$ и $h_{(c)}$, према томе да ли висина одговара страни **a**, страни **b** или страни **c.**

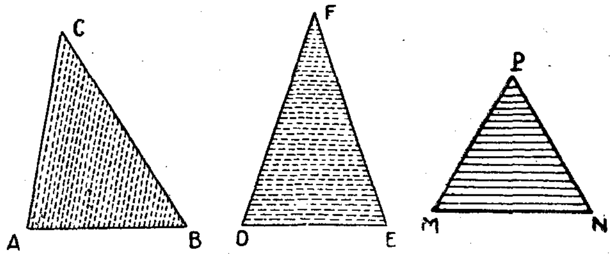
Средње тачке једнога троугла јесу средине његових страна (**M, N** и **P**, сл. 132). Дуж која спаја теме са срединам супротне стране зове се **средишња** или **тежишна линија.** Ова се дуж обично означава са **t**, и то: $t_{(a)}$ ако одговара страни **a**, $t_{(b)}$ страни **b** и $t_{(c)}$ страни **c.**



Сл. 132

Кад се продужи једна троуглова страна, онда се угао између продужене и суседне стране зове **спољашњи** (**m, n** и **p** на сл. 132). Под **обимом** једнога троугла разумемо збир његових страна. Тако, ако су стране троугла: 5 **m**, 6 **m** и 7 **m**, онда је његов обим 18 **m.**

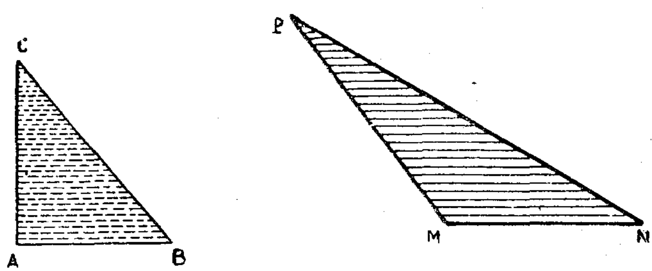
§ 71. **Врсте троуглова.** — а) С обзиром на дужине страна троуглове делимо на: **разностране, равнокраке и равностране.** Разностран је троугао код кога су све стране различите дужине (△ **ABC,** сл. 133). Равнокрак је онај који има само две стране једнаке (△ **DEF,** сл. 133). Равностран је онај код кога су све три стране једнаке (△ **MNP,** сл. 133).



Сл. 133

Једнаке стране равнокраког троугла зову се **краци (DF** и **EF,** сл. 133), а трећа се страна узима обично за основицу. Теме наспрам основице јесте **врх** равнокраког троугла.

b) С обзиром на углове троугле делимо на: **оштроугле, правоугле** и **тупоугле.** Оштроугли је троугао онај код кога су сва три угла оштра (на пр. △ **DEF,** сл.133); правоугли је онај који има један прав и два оштра угла (△ **ABC,** сл. 134); тупоугли је онај који има један туп и два оштра угла (△ **MNP,** сл. 134). Оне стране правоуглога троугла које граде прави угао зову се **катете,** а страна наспрам правога

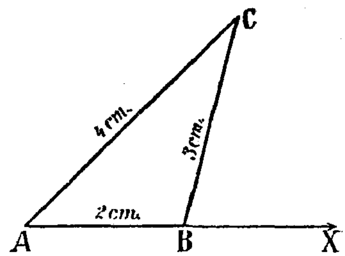


Сл. 134

угла **хипотенуза.** Равнокрако-правоугли троугао јесте онај код кога су катете једнаке. Оштроугли и тупоугли троуглови једном се именом зову **косоугли,** пошто су им углови коси.

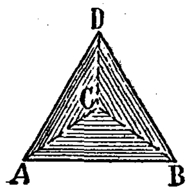
Напомена. — Код правих пирамида, бочне су стране равнокраки троуглови; код правилних и правих пирамида такође равнокраки троуглови, али сви једнаки међу собом; а код равноивичних пирамида, као што је напред казано, бочне су стране равнострани подударни троугли.

§ 72. **Цртање троуглова помоћу страна.** — Има више начина за цртање једнога троугла, и са њима ћемо се упознати доцније, али је најлакши и најбржи начин цртања троугла кад су му све три стране познате. Тако, да бисмо нацртали троугао чије су стране: 2 **cm,** 3 **cm** и **4 cm,** треба на зрак **AX** (сл. 135), почевши од почетка тачке **A,** да пренесемо шестаром дуж **AB** = 2 **cm,** а затим из темена **A** и **B,** отвором шестара од 4 **cm** и 3 **cm,** описујемо лукове, чији пресек **C** сматрамо за треће теме траженог троугла **ABC.** (Колико је страна потребно да знамо за цртање равнокраког, а колико за цртање равностраног троугла?) Нацртај: а) разностран троугао страна: 2 **dm,** 5 **dm** и 6 **dm** (2 **cm,** 5 **cm** и 6 **cm**); b) равнокрак троугао основице 2 **dm** (2 **cm**) и крака 5 **dm** (5 **cm**); c) равностран троугао стране 3 **dm** (3 **cm**) и d) правоугли троугао чије су катете 3 **dm** и 4 **dm** (3 **cm** и 4 **cm**)! Зашто се правоугли троугао да̂ нацртати помоћу двеју страна када није равнокрак? Нацртај равнокрако-правоугли троугао чија је катета 4 **dm** (4 **cm**)!

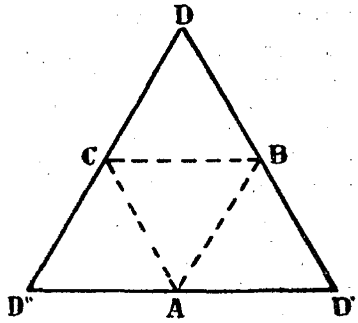


Сл. 135

§ 73. **Правилни тетраедар и његова мрежа.** — Правилни тетраедар је у ствари једна правилна и права равноивична тространа пирамида (сл. 136a). Он је ограничен, дакле, са 4 равнострана подударна троугла, те спада у **правилна тела.** Има 4 темена и 6 ивица (3 основне и 3 бочне). Његова је мрежа претстављена на сл. 136 b), а добили смо је када смо правилни тетраедар од картона најпре разрезали по бочним ивицама, а затим расклопили и положили на раван. Из сл. 136 b) видимо да се мрежа овога тетраедра састоји од 4 равнострана подударна троугла, који скупа дају равностран троугао **DD'D''.**



Сл. 136а)

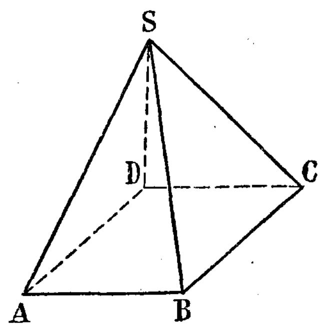


Сл. 136б)

Да бисмо саградили модел од картона правилног тетраедра, треба претходно нацртати на картону равностан троугао **DD′D″** на сл. 136 **b)**, и средине његових страна **A**, **B** и **C** да спојимо, а затим оштрим перорезом да изрежемо троугао **DD′D″**, а овлаш повлачимо перорезом по странама: **AB, BC** и **AC.** Најзад пресавијемо лобивену мрежу супротно од троугла **ABC**, тако да се темена **D, D′** и **D″** састану, и облепимо танком пантљиком од хартије премазаном гумарабиком бочне ивице **DA, DB** и **DC.**

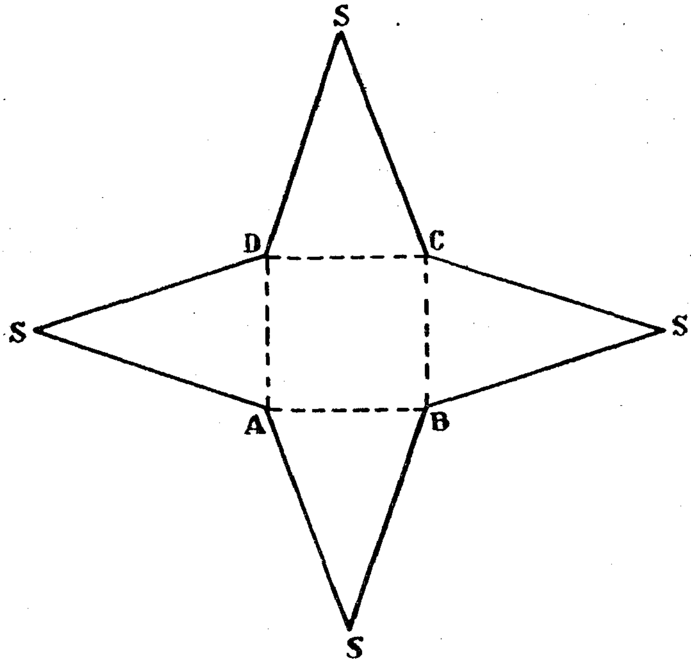
Начини модел правилног тетраедра чија је ивица 3 **cm.** (Нацртај најпре равностран троугао стране 6 **cm**, па поступи по горњем упутству!)

§ 74. **Мрежа правилне четворостране пирамиде.** — Ова пирамида има за основу квадрат, а бочне су јој стране равнокраки подударни троуглови, или равнострани подударни троуглови, ако је пирамида равноивична. Ако претпоставимо да је правилна четворострана пирамида на сл. 137 од картона, па је разрежемо по њеним бочним ивицама, расклопимо и положимо на раван, онда њена мрежа има облик слике 138, а састоји се од једног квадрата и четири равнокрака једнака троугла, који имају за основице стране квадрата. Ови троуглови могу бити и равнострани, ако је пирамида равноивична.



Сл. 137

Стога нам је лако саградити модел од картона правилне и праве четворостране пирамиде. Треба најпре да нацртамо на картону квадрат **ABCD** (сл. 138), а затим да нацртамо над сваком страном овога квадрата 4 равнокрака троугла једнаких кракова, па добивену слику оштрим перорезом да исечемо дуж кракова троугла, а овлаш повлачимо перорезом сваку страну квадрата. Најзад добивену мрежу пре-



Сл. 138

савијемо супротно од квадрата **ABCD**, тако да се темена троуглова̂ S састану, и облепљујемо танком пантљичицом од хартије премазаном гумарабиком бочне ивице **SA, SB, SC** и **SD.** Ако нацртамо над сваком страном квадрата **ABCD** равностране троуглове, онда добијамо модел равноивичне четворостране пирамиде. (Начини модел: а) правилне четворостране пирамиде чија је основна ивица 3 **cm**, а бочна 5 **cm**; b) правилне равноивичне четворостране пирамиде чија је ивица 4 **cm**!)

§ 75. Вежбања

1. Колико ивица има тространа, четворострана и петострана пирамида?

2. Колико основних, а колико бочних ивица има шестострана пирамида?

3. Да ли тространа пирамида има паралелних ивица? Исто питање за многостране пирамиде.

4. Која пирамида има паралелних ивица, и које су то ивице?

5. Колико ивичних углова има четворострана пирамида, и какви су?

6. Колико темена има петострана пирамида?

7. Која се пирамида зове **права,** а која **коса?**

8. Која се пирамида зове **правилна?**

9. Какви су бочни троуглови код праве пирамиде?

10. Какви су међу собом бочни троуглови код правилне и праве пирамиде?

11. Какви су бочни троуглови међу собом код једне правилне и косе пирамиде?

12. Који се троуглови зову равнокраки, равнострани и разнострани?

13. Шта је **врх** пирамиде?

14. Шта је **висина** пирамиде?

15. Да ли је број основних ивица једнак броју бочних код сваке пирамиде?

16. Код којих су пирамида бочне стране подударни троуглови?

17. Колики је број равноивичних пирамида, и које су?

18. Шта је троугао, и како се означава?

19. Шта је висина троугла, и колико их има?

20. Шта је средња (тежишна) линија троугла, и колико их има?

21. Нацртај троугао страна 4 **dm (cm),** 5 **dm (cm)** и 6 **dm (cm),** и нацртај његове висине и тежишне линије!

22. Како делимо троуглове према угловима?

23. Нацртај равнокрак троугао основице 3 **dm (cm),** а крака 5 **dm (cm),** као и његове висине, и види које су висине једнаке!

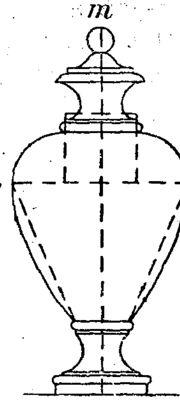
24. Нацртај равностран троугао стране 4 **dm (cm),** и његове висине, и види какве су висине по величини. Нацртај и тежишне линије овога троугла, па ћеш видети да се оне поклапају са висинама!

25. Нацртај правоугли троугао чије су катете 3 **dm (cm),** и 5 **dm (cm),** а затим и његове висине, и види где се секу све три висине!

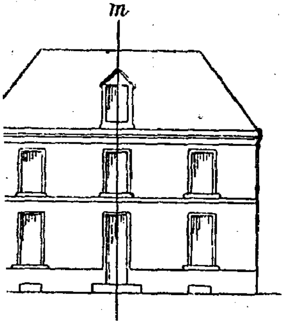
(Крај градива за I разред).

12. СИМЕТРИЈА ТЕЛА И СЛИКА

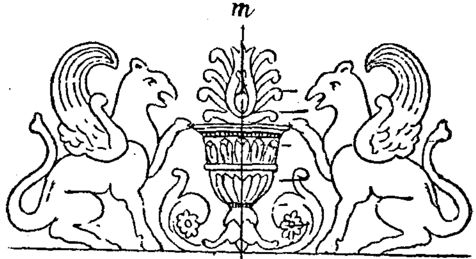
§ 76. **Симетрија тела.** — Посматрајући урну (сл. 139), фасаду куће (сл. 140) и украс (сл. 141), на први поглед видимо се једном равнином *(mn)* могу подети на такве две једнаке половине, да одговарајући делови једне и друге ловине подједнако удаљени од те равне. Дуж која спаја ма које две одговарајуће тачке обеју половина полови се вниином и стоји на њој нормално. Тело е се да поделити једном равнивом на ве две половине зове зе *симетрично*, раван која га дели зове се *симетриска*. иетрична су тела: коцка, правоугли паелопипеди, лопта, правилно човечје теинсекти, правилан лист са дрвећа итд.



Сл. 139



Сл. 140



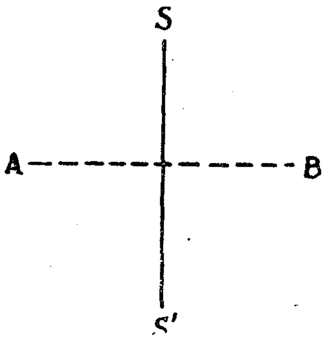
Сл. 141

§ 77. **Симетричне тачке, дужи и слике.** — 1. За е **A** и **B** (сл. 142) каже се да заузимају симетричан положпрема правој SS', ако је дуж **AB** која их везује преполњена том правом и стоји на њој нормално. Права SS' зове *иметрала* или *осовина симетрије*, а тачка **A** и **B** јесу пређој симетрично поређане.

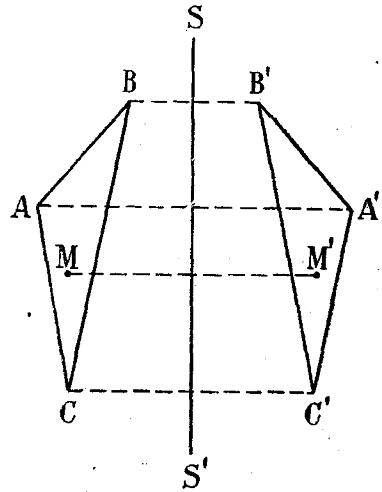
2. Две дужи **AB** и **A′B′** (сл. 143) јесу симетричне према вини SS', ако су њихове крајње тачке симетрично поре- према тој осовини.

3. За две слике **ABC** и **A′B′C′** (сл. 143) каже се да заујy симетричне положаје према правој SS', ако свакој тачки ла и површине једне слике одговарају симетричним по-

ложајем по једна тачка друге слике. На сл. 143 симентрично су поређане тачке: **В** и **В′**, **А** и **А′**, **С** и **С′**, **М** и **М′**. На тој слици троуглови **АВС** и **А′В′С′** јесу симетрично поређани, а

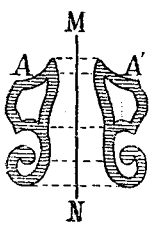


Сл. 142

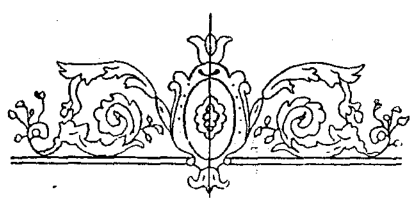


Сл. 143

права **SS′** је њихова симетрала. Исти је случај са сл. 144. Симетрично поређане слике поклапају се ротпуно, ако ма коју од њих обрнемо за 180° око њихове симетрале.



Сл. 144

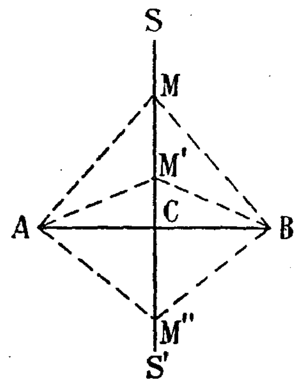


Сл. 145

За једну слику каже се да је симетрична ако се може једном правом поделити на две половине у симетричном положају. Такав је цртеж на сл. 145. Код такве слике оба њена дела једнака су и по облику и по површини. Има сликâ које се дају поделити симетрично само помоћу једне симетрале, а има и таквих слика које се могу поделити симетрично помоћу две, три и више симетрала. Стога имамо слика једноосно, дво-осно и више-осно симетричних. Уколико једна слика има више осовина симетрије, утолико је она правилнија. Тако, равнокрак троугао је једно-осна симетрична слика, и његова је осовина симетрије основина висина; квадрат је четворо-осна симетрична слика, и његове су симетрије дијагонале и праве које спајају средине супротних страна; круг је више-осна симетрична слика, и његове су симетрале ма који његов пречник, итд.

Колико-осна симетрична слика је: а) равностран троугао, b) правоугаоник, и које су њихове симетрале?

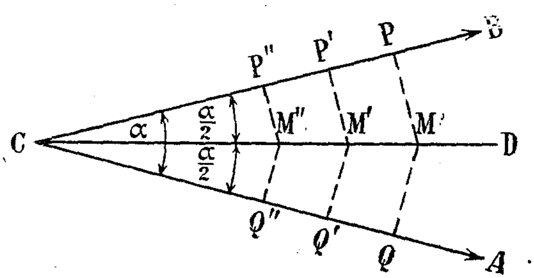
§ 78. **Симетрала дужи и угла.** — 1. Под симетралом једне дужи разумемо праву која пролази кроз средину дужи и стоји на њој нормално. Таква је права SS′ за дуж AB (сл. 146). **Симетрала дужи има ту особину да је ма која њена тачка подједнако удаљена од крајњих тачака дужи.** Заиста, ако на симетрали SS′ узмемо произвољну тачку M, па је спојимо са крајњим тачкама дужи AB, онда △ ACM обртањем за 180° око CM поклапа △ BCM, те је AM = BM.



Сл. 146

Истим путем бисмо нашли да је AM′ = BM′, AM″ = BM″, итд.

2. Под симетралом једног угла разумемо праву која дели угао на два једнака дела. Таква је права CD за угао ACB (сл. 147). **Симетрала угла има ту особину да је ма која њена тачка подједнако удаљена од кракова угла.** Заиста, ако на симетрали



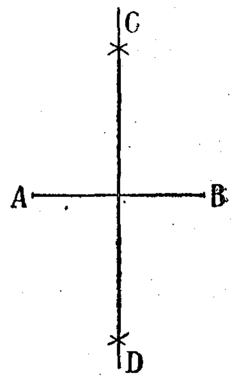
Сл. 147

CD узмемо тачку M, па из те тачке помоћу правоуглог троугаоника спустимо нормале MP и MQ на кракове, а онда се троуглови CMP и CMQ потпуно поклапају ако ма који од њих обрнемо за 180° око CM. Стога је MP = MQ. Истим путем нашли бисмо да је M′P′ = M′Q′, M″P″ = M″Q″, итд.

§ 79. Конструктивни задаци

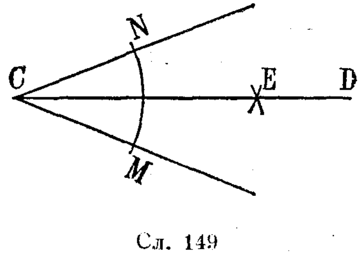
1 задатак. — Конструисати симетралу једне дужи. — Треба најпре око једне крајње тачке дужи, отвором шестара са више од половине дате дужи, описати лукове и с горње и с доње стране, а затим, истим отвором шестара, око друге крајње тачке описати лукове који секу прве. Спајањем пресечних тачака ових лукова добија се тражена симетрала *CD* (сл. 148).

(Оваквом конструкцијом чинимо да су тачке *C* и *D* подједнако удаљене од крајњих тачака дужи *AB*, које су узете за центре двају кругова једнаких полупречника. Стога је *CD* по § 78 заиста симетрала дужи *AB*). Конструкцијом симетрале једне дужи делимо у исто време ту дуж на два једнака дела.

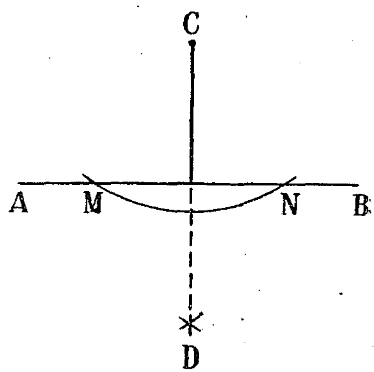


Сл. 148

2 задатак. — Конструисати симетралу једног угла. — Треба најпре произвољним отвором шестара описати око темена датог угла лук који сече обадва крака *M* и *N* (сл. 149), а затим истим отвором шестара, или отвором који је већи од половине лука између кракова, описати најпре око *M*, а зазим око *N*, лукове у унутрашњости угла. Спајањем пресечне тачке *E* ових лукова са теменом угла добија се



Сл. 149

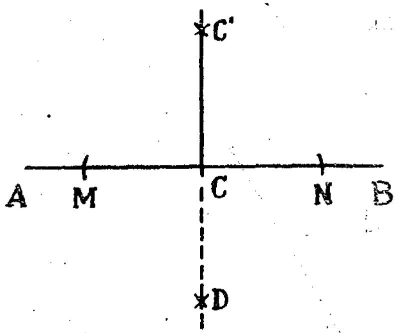


Сл. 150

тражена симетрала *CD*. Конструкцијом симетрале једнога угла делимо у исто време угао на два једнака дела.

3 задатак. — Из тачке C изван праве AB (сл. 150) спустити нормалу на праву AB. — Треба најпре око тачке *C* толиким отвором шестара описати лук да овај сече дату праву у *M* и *N*; затим треба конструисати симетралу добивене дужи *MN*. Симетрала ове дужи пролази кроз дату тачку *C*.

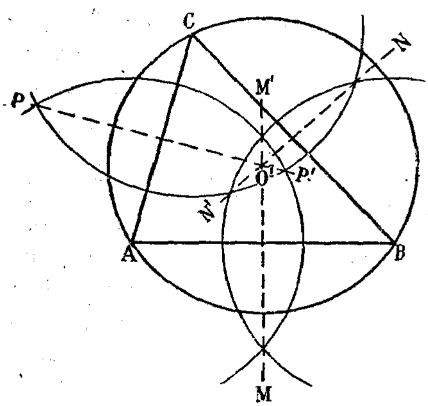
4 задатак. — У тачци C која се налази на датој правој AB (сл. 151) подићи нормалу на AB. — Треба најпре произвољним отвором шестара и с једне и с друге стране тачке *C* одвојити тачке *M* и *N* на правој *AB*, а затим за дуж *MN* конструисати симетралу. Симетрала *CD* пролази кроз *C* и стоји нормално на *AB*, пошто је тачка *C* средина дужи *MN*).



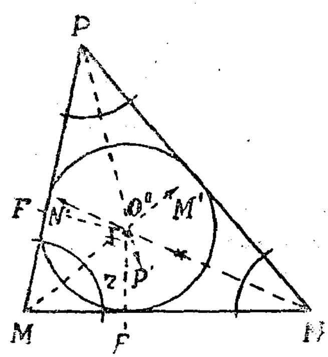
Сл. 151

5 задатак. — Око троугла ABC (сл. 152) описати круг. — Треба конструисати симетрале троуглових страна, њихов пресек узети за центар, а за полупречник е отстојање од пресека до ма кога троуглова темена.

Да је пресек симетралâ *O* заиста центар круга описаног око троугла, уверавамо се по томе што се налази на симетрали *MM'* стране *AB*, и на симетрали *NN'* стране *BC*, те је по претходном параграфу подједнако удаљен од крајњих тачака тих страна, тј. од троуглових темена.



Сл. 152



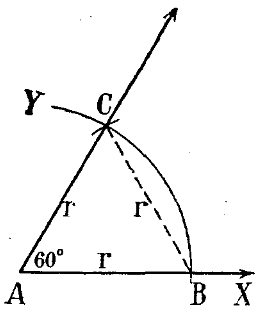
Сл. 153

6 задатак. — У даном троуглу MNP (сл. 153) уписати круг. — Треба најпре конструисати симетрале углова тога троугла, њихов пресек узети за центар, а нормално отстојање од тог пресека до ма које троуглове стране за полупречник. Да је пресек *O* симетралâ угловâ заиста центар уписаног круга у троуглу, уверавамо се по томе што се налази и на симетрали *MM'* угла *M* и на симетрали *NN'* угла N, те је подједнако удаљен од кракова тих углова (§ 78), тј. од троуглових страна.

§ 80. Конструкција углова од 60°, 30°, 90°, 120°, 150° и 135°.

1. Да бисмо нацртали угао од 60°, треба произвољним

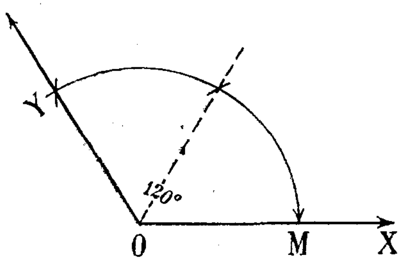
отвором шестара да упишемо лук око почетне тачке једног зрака, а затим *истим* отвором шестара из пресека лука и зрака (тачка **B** на сл. 154) да пресечемо први лук другим луком. Најзад, пресек лукова (**C**) спајамо са почетном тачком зрака (**A**). Оваквом констукцијом у ствари цртамо троугао **ABC**, у коме је као што ћемо видети сваки угао по 60^0.



Сл. 154

2. Да бисмо нацртали угао од 30^0, треба најпре да нацртамо угао од 60^0, а затим овај угао да поделимо на два једнака дела. (Види § 50 т. 4). Половљењем угла од 30^0 добија се угао од 15^0.

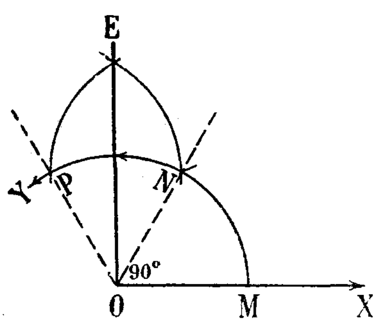
3. Угао од 120^0 цртамо када нацртамо један до другога два угла од по 60^0. Треба на лук MY (слика 155) пренети његов полупречник OM два пута.



Сл. 155

4. Угао од 90^0 цртамо или када раван угао преполовимо, или када нацртамо два угла од по 60^0 један до другога, па други угао преполовимо (сл. 156).

Половљењем угла од 90^0 добија се угао од 45^0, а половљењем овога угла добија се угао од 22^0 $30'$.

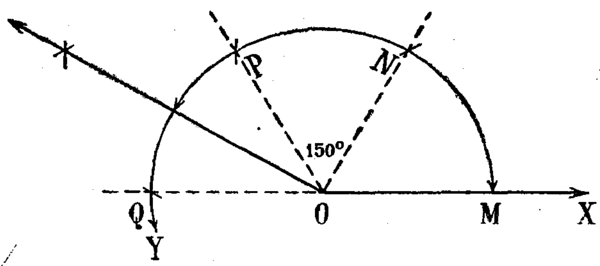


Сл. 156

5. Угао од 150^0 цртамо када најпре нацртамо три угла од по 60^0, један до другага па трећи преполовимо (сл. 157). Половљењем угла од 150^0 добијамо угао од 75^0.

6. Угао од 135^0 цртамо када најпре нацртамо раван угао, а затим овај угао преполовимо, чиме добијамо два права угла,

Најзад, половимо други прави угао и тиме се добија угао од 135°. Ако преполовимо угао од 135°, добићемо угао од 67° 30′.



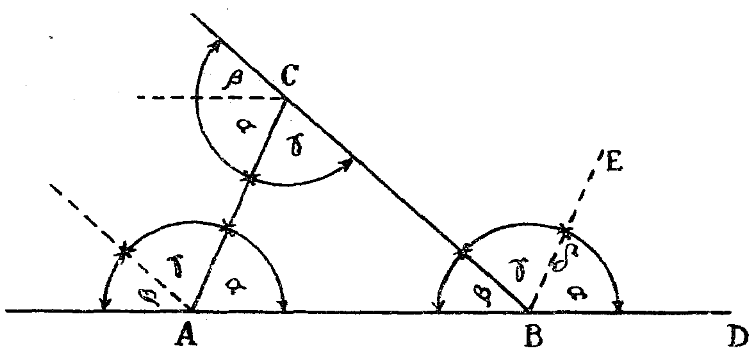
Сл. 157

III. ОСОБИНЕ И КОНСТРУКЦИЈА ГЕОМЕТРИСКИХ ОБЛИКА

13. ТРОУГАО

§ 81. У одељку пирамида упознали смо се са троугловима на пирамидама, са деловима једнога троугла и са врстама троуглова и према странама и према њиховим угловима. У овоме одељку треба да се боље упознамо са угловима троугла, са везом између страна и углова једнога троугла, са условима подударности троуглова и најзад да цртамо троуглове не само помоћу њихових страна (§ 72), већ и помоћу других њихових познатих састојака.

§ 82. **Углови троугла.**—1) Ако углове α и γ троугла **ABC** (сл. 158) пренесемо узастопно код темена **B** споља, увиђамо да



Сл. 158

њихов збир даје спољашњи угао δ. Исти случај наступа ако углове β и γ пренесемо код темена **A**, а углове α и β пренесемо

1) Колики је угао при врху једнакокраког троугла, ако је један угао на основици 58° 5′ 49″

2) Колики је један угао на основ. једнакокраког Δ, ако је спољашњи на врху 130°

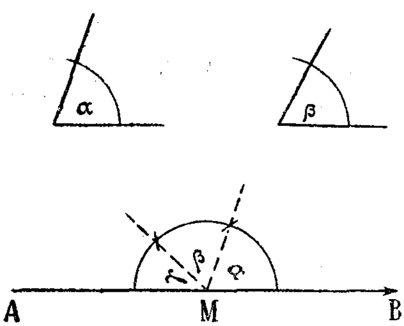
код темена **С**. Стога је: **сваки спољашњи угао једнога троугла једнак збиру два унутрашња неналегла (несуседна) угла.**

Према овоме правилу, ако су нам позната два унутрашња угла једнога троугла, онда спољашњи њима супротни угао налазимо када те унутрашње саберемо. Тако исто, ако је познат спољашњи угао једнога троугла (δ) и један њему неналегли унутрашњи угао (α), онда други неналегли угао (γ) налазимо када од спољашњег одузмемо познати унутрашњи угао ($\gamma = \delta - \alpha$).

2) Посматрајући сл. 158 увиђамо да сва три угла α, β и γ, поређани код сваког темена дају раван угао, који, као такав, има 180°. Стога: **збир унутрашњих углова једнога троугла износи 180°.**

Помоћу овога правила у стању смо да нађемо ма који од углова троуглових, ако су нам позната друга два. Треба збир познатих углова одузети од 180°. Тако за $\alpha = 53^{0}\ 27'\ 40''$ и $\beta = 78^{0}\ 40'\ 25''$ имамо: $\alpha + \beta = 132^{0}\ 8'\ 5''$, а $\gamma = 180^{0} - 132^{0}\ 8'\ 5'' = 47^{0}\ 51'\ 55''$.

Напомена. — Цртањем само могли бисмо наћи трећи угао једнога троугла, ако су нам позната друга два, када ма код које тачке **М** једне праве **АВ** (сл. 159) пренесемо шестаром (угломером) најпре један угао (α) а затим одмах до њега други угао (β). Трећи угао (γ), који допуњује прва два угла до 180, јесте тражени угао.



Сл. 159

3) Како сваки пар од спољашњег и унутрашњег угла код једног троугловог темена износи по 180°, а таквих парова има три, то је збир свих спољашњих и унутрашњих углова 540°. Па како је збир унутрашњих 180°, онда је јасно да је збир спољашњих углова 360°. Отуда имамо правило: **Збир спољашњих углова једнога троугла износи** 360°.

§ 83. **Однос страна и углова у троуглу.** — а) Ако угломером измеримо углове *ма кога разностраног* троугла, па био он оштроугли, тупоугли или правоугли, начини-

[illegible] 49° 17′25″ [illegible]?
[illegible] $\alpha = 12°37′42″$ [illegible]
$\beta = 38°9′37″$
[illegible] 102°25′29″ [illegible] 40°40′52″ [illegible]

ћемо да су му углови различите величине, и то: наспрам највеће стране лежи највећи, а наспрам најмање стране лежи најмањи угао. Исто тако, ако измеримо стране једнога троугла, чији су углови различите величине, налазимо да су му и стране различите дужине, и то: наспрам највећег угла лежи највећа, а наспрам најмањег угла лежи најмања страна. Отуда изводимо правило: **Наспрам неједнаких страна једнога троугла леже неједнаки углови, и то: наспрам веће стране лежи већи угао; и обрнуто: наспрам неједнаких углова у троуглу леже неједнаке стране, и то: наспрам већег угла лежи већа страна, а наспрам мањег угла мања страна.**

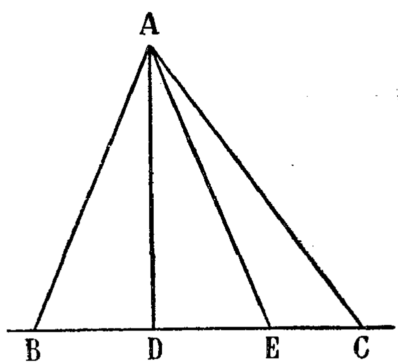
Последице овога правила јесу ове:

1) Хипотенуза правоуглога троугла већа је од ма које катете тога троугла.

2) Страна наспрам тупог угла у троуглу већа је од ма које друге његове стране.

3) Нормала је најкраћа дуж која се може повући од једне тачке до једне праве (сл. 160); и

4) Од двеју косих дужи, спуштених из једне тачке до исте праве, већа је она чија је подножна тачка удаљенија од подножне тачке нормале, спуштене из исте тачке до те прве (сл. 160).



Сл. 160

в) Ако измеримо угломером углове **ма кога равнокраког** троугла, па био он оштроугли, тупоугли или правоугли, наћи ћемо да су углови наспрам једнаких страна (наспрам кракова) једнаке величине. Тако исто, ако измеримо стране ма кога троугла који има два једнака угла, налазимо да су једнаке и оне стране које леже наспрам једнаких углова. Отуда изводимо правило: **Наспрам једнаких страна једнога троугла леже једнаки углови; и обрнуто: наспрам једнаких углова једнога троугла леже једнаке стране.**

Последице овог правила јесу ове:

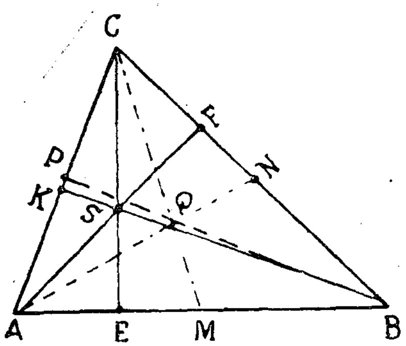
1) Да су код равнокраког троугла углови на основици једнако; и

2) Да су сва три угла код равностраног троугла једнаки и сваки има по 60° (Зашто?). Како се израчунавају остали углови равнокраког троугла ако је познат само један спољашњи или унутрашњи угао?

с) Ако измеримо стране **ма кога** троугла, па добивене бројне вредности ма којих двеју страна најпре саберемо, а затим одузмемо, наћи ћемо: **да је збир ма којих двеју троуглових страна већи од треће стране, а да је разлика ма којих двеју страна мања од треће троуглове стране.** Ово треба имати увек у виду при цртању једнога троугла помоћу његових страна. Треба, дакле, изабрати такве дужи, или узети такве бројне вредности страна, које задовољавају ово правило. Тако, помоћу дужи чије су бројне вредности: 4 **cm,** 5 **cm** и 7 **cm,** можемо нацртати троугао, јер задовољавају правило о односу страна у троуглу, а помоћу дужи чије су бројне вредности 3 **cm,** 5 **cm** и 9 **cm** не можемо нацртати троугао, јер је збир прве и друге дужи мањи од треће дужи.

§ 84. ПРЕСЕК ТЕЖИШНИХ ЛИНИЈА И ПРЕСЕК ВИСИНА КОД ТРОУГЛА

Ако конструишемо висине и тежишне линије троугла **ABC** (сл. 161), увиђамо да се како висине, тако и тежишне линије, секу у истој тачци. Исти случај наступа ако консруишемо висине и тежине линије ма ког другог троугла. Код сл. 161 висине се секу у тачци **S,** а тежишне линије у тачци **Q.** Пресек висина **S** зове се **ортоцентар,** а пресек тежишних линија **Q** зове се **тежиште. Ако је троугао оштроугли, онда се ортоцентар налази у троуглу; ако је тупоугли, ортоцентар се налази ван троугла; ако је правоугли, онда се ортоцентар поклапа са теменом правог угла.** (Увери се конструкцијом!). Тежиште **Q** дели сваку тежишну линију на



Сл. 161

таква два дела, **да је део од темена до тежишта двапут већи од дела од тежишта до средине стране,** о чему се можемо мерењем уверити.

Напомена. — Пресек симетрала страна (центар описаног круга), пресек симетрала углова (центар уписаног круга), ортоцентар и тежиште једним се именом зову **значајне** или **важне тачке** једнога троугла. Ако је троугоа разностран или равнокрак, ове се тачке налазе на разним местима; али ако је троугао равностран, онда се све четири значајне тачке поклапају. Код овога се троугла, дакле, поклапају висине са тежишним линијама, са симетралама страна и са симетралама углова.

§ 85. **Подударност троуглова и њихова конструкција.**

За два троугла каже се да су подударна ако имају не само једнаке облике, већ и једнаке површине. Знак подударности је $\cong$. Подударни троуглови потпуно се поклапају, те су стране једнога троугла једнаке са одговарајућим странама и угловима другога троугла; тада смо начисто да су троуглови подударни. Њихова подударност биће зајемчена, ако су само три елемента једнога троугла, међу којима мора бити бар једна страна, једнака са одговарајућим елементима другога троугла. У том случају лако се уверавамо да су им и остала три елемента једнака, а тиме би била подударност троуглова доказана.

За подударност троуглова потребно је знати једнакост **три** елемента зато што троугао није одређен: 1) ни са једном страном или једним углом; 2) ни са два угла, ни двема странама, или једним углом и једном страном; 3) ни са сва три угла. Сва три угла не одређују троугао зато што већ два угла једнога троугла одређују трећи, а са два угла троугао није одређен. За одређивање једнога троугла најмање је потребно да су позната **три** његова елемента, и то:

1.) Једна страна и оба налегла угла; 2) две стране и захваћени угао; 3) две стране и угао наспрам веће од тих страна; и 4) све три стране.

Познавајући ма која три елемента од претходна четири случаја, у стању смо да конструишемо бескрајно много троуглова, који ће имати једнака не само дати три елемента, већ и остала три, те су стога сви ти троугли подударни.

Отуда постоје четири правила о подударности троуглова:

1) Два су троугла подударна ако имају једнаке поједну страну и њихове налегле углове;

2) Два су троугла подударна ако имају једнаке по две стране и захваћене углове;

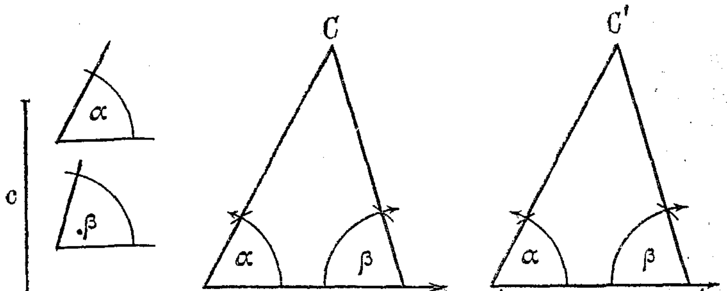
3) Два су троугла подударна ако имају једнаке по две стране и углове наспрам већих од тих страна; и

4) Два су троугла подударна ако су све три стране једнога троугла једнаке са странама другога троугла.

Тачност ма кога од горња четири правила дâ се доказати на два начина: 1) поклапањем и 2) конструкцијом троуглова. Начин поклапањем у томе је што изрезивањем једнога троугла и стављањем на други троугао видимо да се поклапају потпуно не само дати елементи него и остали Поклапањем и осталих елемената доказује се њихова једнакост, а тиме и подударност троуглова. Начин конструкције у томе је што можемо помоћу дата три елемента конструисати не два, већ више троуглова, који ће имати једнаке не само дате, већ и остале елементе, о чему се мерењем уверавамо.

Како је начин конструкције троуглова за доказивање њихове подударности јаснији и лакше изводљив, то ћемо се њиме и послужити.

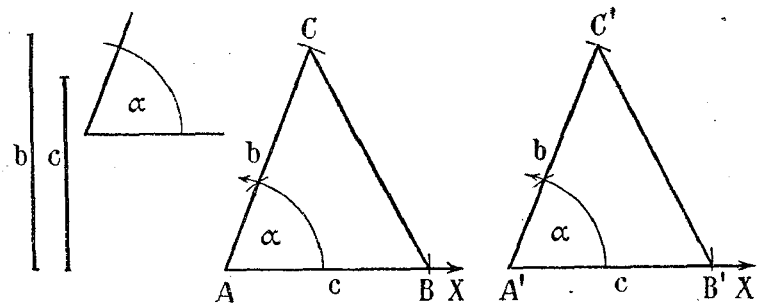
1 конструкција. — Конструисати троугао кад је дата једна страна и два налегла угла (c, α и β). — Треба на зрак **AX** (сл. 162) пренети дату страну **c**, а затим код тачке **A** угао α и код тачке **B** угао β. Продужењем кракова пренетих углова добијамо пресек **C** као треће теме траженог троугла. На исти начин, само на другом месту, можемо нацртати и троугао **A′B′C′**. Мерењем се уверавамо да троуглови: **ABC** и **A′B′C′** конструисани помоћу истих елемената: **c**, α и β, имају и остале елементе једнаке, те су подадарни.



Сл. 162

Напомена. — Ова је конструкција могућна само онда када су оба дата угла оштра, или када је један оштар, а други прав или туп. Ако је дат само један угао на познатој страни и њен супротни угао, онда најпре, било рачунским путем, било конструкцијом (види I напомену § 82), налазимо и други угао на тој страни, а затим поступамо као у првој конструкцији. Како су код равнокраког троугла краци једнаки, а тако исто и углови на основици, а код правоуглога троугла прави је угао увек познат, то се ти троуглови дају конструисати само помоћу једне стране и једног угла. **Стога су равнокраки и правоугли троуглови подударни када имају по два елемента (страну и угао) једнака.**

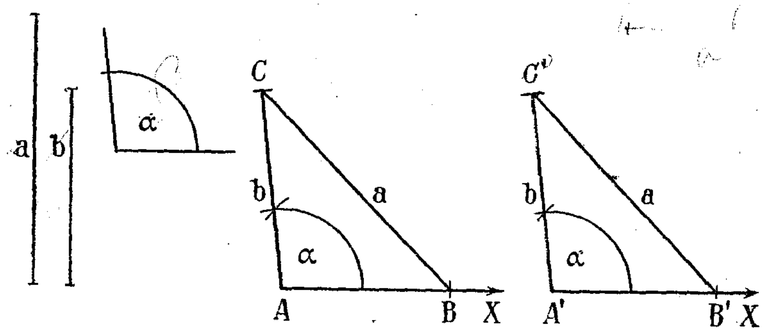
II конструкција. — Конструисати троугао када су дате две стране и захваћени угао (b, c и α). — Најпре на зрак **AX** (сл. 163) преносимо страну **c**, затим код почетне тачке **A** угао α и најзад на други крак овог угла преносимо страну **b**. Спајањем тачака **C** и **B** добијамо тражени троугао **ABC**. На исти начин, само на другом месту, можемо нацртати и троугао **A'B'C'**. Мерењем уверавамо се: да троуглови **ABC** и **A'B'C'**, конструисани помоћу датих елемената: **b, c** и α, имају и остале елементе једнаке, чиме се доказује њихова подударност.



Сл. 163

Напомена. — На основу ове канструкције, правоугли троугао се да̂ конструисати када су дате само катете, пошто је прави угао између њих познат. **Стога су правоугли троуглови подударни ако су им катете једнаке.**

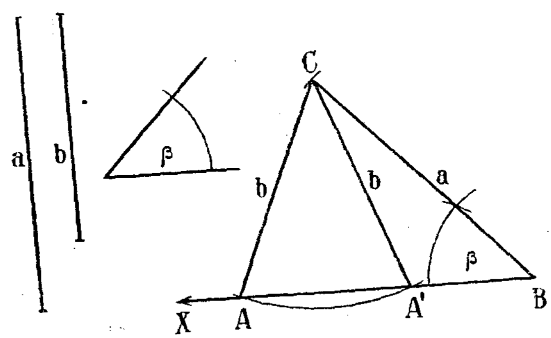
III конструкција. — Конструисати троугао када су познате две стране и угао наспрам веће од ти страна (a, b и α). — Треба најпре код почетне тачке зрака **AX** (сл. 164) пренети угао α, затим на други крак пренети мању страну **b** и најзад из добивене тачке **C**, отвором шестара величине веће стране **a**, описати лук који сече зрак **AX** у тачци **B**. Спајањем тачка **C** и **B**, добијамо тражени угао **ABC**. На исти начин, само на другом месту, можемо нацртати троугао **A′B′C′**. Мерењем уверавамо се: да троуглови **ABC** и **A′B′C′**, конструисани помоћу датих елемената: **a**, **b** и **α** имају и остале елементе једнаке, чиме се доказује њихова подударност.



Сл. 164

Према овоме, правоугли троугао се дâ конструисати када је дата хипотенуза и једна катета. (Зашто?). Стога **правоугли троугли су подударни ако су им хипотенузе и по једна катета једнаке.**

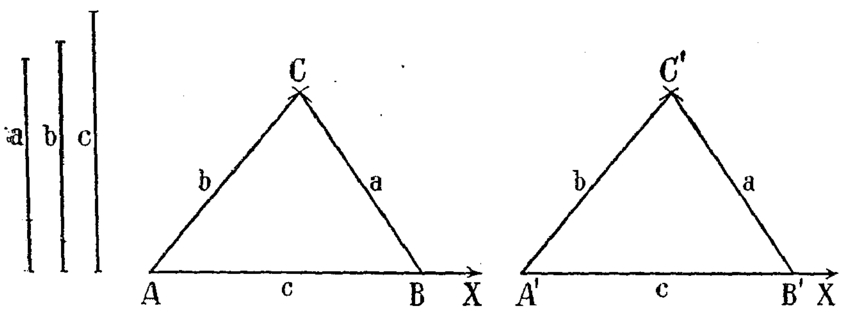
Напомена. — Конструкција троуглова помоћу двеју



Сл. 165

страна и угла наспрам мање од тих страна, која се врши обрнутим редом него трећа конструкција, није увек могућна, јер често отвором шестара величине мање стране b из темена C (сл. 165) не можемо сећи зрак **BX;** или, ако га сечемо, добијамо две пресечне тачке **A** и **A′**, а тиме и два троугла **ABC** и **A′BC**, чиме задатак постаје неодређен; а врло је редак случај да се отвором b из темена C опише лук који додирује зрак **BX** само у једној тачци; када се добија једно добро решење. (Какав се троугао добија у овом последњем случају?)

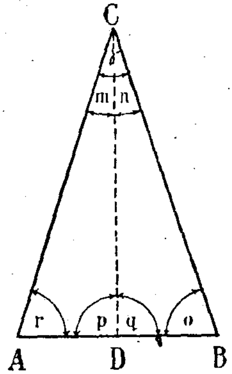
VI конструкција. — Конструисати троугао кад су дтте све три стране. (a b и **c).** — Треба на зрак **AX** (сл. 166) пренети најпре страну **c (AB = c),** чиме добијамо троуглова темена **A** и **B.** Затим отвором шестара стране **b** описујемо из темена **A** лук, а отвором шестара стране **a** из темена **B** описујемо други лук који сече први. Пресек лукова биће треће теме **C** траженог троугла **ABC.** На исти начин, само на другом месту, можемо нацртати и троугао **A′B′C′.** Мерењем (угломером) уверавамо се да троуглови **ABC** и **A′B′C′**, конструисани помоћу датих елемената: **a, b** и **c,** имају и одговарајуће углове једнаке, чиме се доказује њихова подударност. За конструкцију равнокраког троугла довољно је да знамо основицу и крак, а за равнострани троугао само страну. (Зашто?)



Сл. 166

Напомена. — Ова конструкција биће немогућа ако дате дужи: **a, b** и **c** не одговарају погодби из § 83 под **c.**

§ 86. **Примена подударности троуглова код равнокраког троугла.** — Нека је **CD** (сл. 167) основичина висина



Сл. 167

равнокраког троугла **ABC**. Тада су троуглови **ADC** и **BDC** подударни, пошто имају по две стране и углове наспрам већих стране једнаке (**AC = BC, CD** им је заједничка, $\sphericalangle$ **p** = **q** = 90°). Из њихове подударности излази: 1) да је $\sphericalangle$ **m** = $\sphericalangle$ **n**, тј. да **основичина висина равнокракога троугла полови угао на врху;** 2) да је **AD = DB**, тј. **да основичине висина полови основицу, или да је она у исто време тежишна линија основице.** Према овоме налазимо: 1) да права која спаја средину основице равнокракога троугла са врхом, јесте и висина основице, и њена тежишна линаја, и симетрала угла на врху; и 2) да нормала, подигнута у средини основице равнокраког троугла, пролази кроз врх тога троугла. Овај последњи закључак врло је важан, јер се често примењује при конструкцији равнокраког троугла.

Ово што важи за основину висину равнокраког троугла, важи и за све три висине равностраног троугла.

§ 87. Задаци за вежбу

1. Нађи трећи угао једнога троугла кад су му два: a) 83° и 78°, b) 27° 35′ и 76° 15′; c) 55° 28′ 32″ и 68° 48′ 57″!

2. Колики су спољашњи углови једнога троугла када су му два унутрашња: a) 73° 35″ и 76° 15′; b) 37° 25′ 50″ и 80° 25′ 45″!

3. Један спољашњи угао троугла износи 123° 12′ 43″, а један унутрашњи њему неналегли угао 53° 27′ 55″; колики је други унутрашњи неналегли угао?

4. Колики је један оштар угао правоуглога троугла када му је други: a) 42° 17′; b) 72° 15′ 47″?

5. Када је један спољашњи угао на хипотенузи 126° 17′ 49″, колики је тада други спољашњи угао на тој хипотенузи?

6. Колико износи сваки угао на основици равнокраког троугла када је угао на врху: a) 75°; b) 56° 29′ 40″?

7. Колико износи угао на врху равнокраког троугла када је угао на основици: a) 35° 25′; b) 88° 17′ 15″?

8. Колики су остали углови равнокраког троугла, ако спољашњи угао на врху износи 127° 43′ 56″?

9. Конструисати углове од 15°, 7° 30′, 45°, 37° 30′, 67° 30′!

10. Поделити прави угао на три једнака дела.

11. Конструисати троугао чија је једна страна ~~3 dm 6 cm~~ (3 cm 6 mm), а и налегли углови 45° и 60°.

13. Конструисати равнокрак троугао кад је: основница ~~5 dm~~ (5 cm), а један налегли оштри угао 75°; b) основица [redacted] (3 cm), а супротни угао 120°; c) крак [redacted] (3,5 cm), а угао на основици 45°.

14. Конструисати правоугли троугао када му је: а) једна катета ~~4 dm~~ (4 cm), а налегли оштри угао 60°; b) хипотенуза [redacted] (4,5 cm), а један оштар угао 75°.

15. Конструисати равнокрако-правоугли троугао чија је хипотенуза 4,3 dm (4,3 cm).

16. Конструисати равнокраки троугао чији је угао на врху 45°, а основина висина 6 [redacted] (cm).

17. Конструисати равнокраки троугао чија је висина [redacted] (4 5 cm), а угао на врху 75°.

18. Конструисати троугао када су две његове стране 28 cm и 37 cm (28 mm и 37 mm) а захваћени угао: а) 75°, b) 60°.

19. Конструисати правоугли троугао чије су катете 34 cm и 38 cm.

20. Конструисати правоугли равнокрак троугао чија је катета 4 dm (4 cm).

21. Конструисати равнокрак троугао чија је основица 35 cm (35 mm), а њена висина 42 cm (42 mm).

22. Конструисати троугао у коме су две стране 2,5 dm и 4 dm (2,5 cm и 4 cm), а угао наспрам веће стране 75°.

23. Конструисати правоугли троугао чија је катета 2 dm (2 cm), а хипотенуза 3,5 dm (3,5 cm).

24. Конструисати равнокрак троугао чији је крак 4 dm (4 cm), а основина висина 2,5 dm (2,5 cm).

25. Конструисати троугао чије су стране 28, 30 и 32 cm (mm).

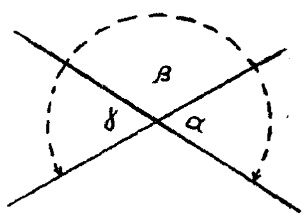
26. Конструисати равнокраки троугао чији је крак 4 dm (4 cm), а основица 3 dm (3 cm).

27. Конструисати равностран троугао чија је страна [redacted] (3,5 cm).

28. Конструисати равнокрако-правоугли троугао чија је хипотенузина висина 4 dm (cm).

14. ВРСТЕ УГЛОВА ПО ПОЛОЖАЈУ

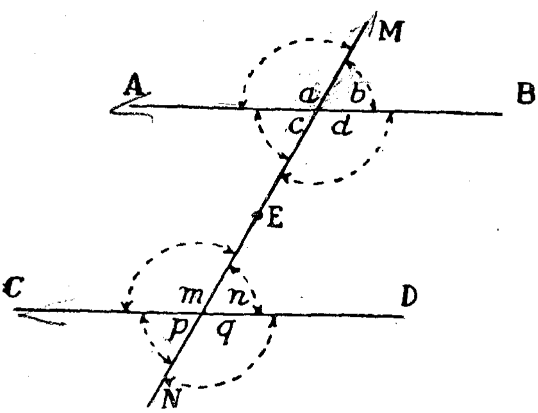
§ 88. **Упоредни и унакрсни углови.** — Упоредни углови имају једно заједничко теме и један заједнички крак, а друга се два крака налазе у истом правцу, али у супротном смислу. Такви су углови α и β на сл. 168. Како ови углови дају раван угао, а сваки раван угао има 180°, то је $\alpha + \beta = 180°$, тј. **збир упоредних углова̂ износи 180°; према томе су суплементни.**



Сл. 186

Унакрсни углови имају заједничко теме, а краци једнога угла јесу продужења кракова другога преко заједничког темена. Такви су углови α и γ на сл. 168. Кад додамо угао β најпре углу α, а затим углу γ, добијамо равне углове; значи да је $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \gamma$, тј. **унакрсни углови су једнаки.**

§ 89. **Сагласни, наизменични и супротни углови.** — Права која сече друге две паралелне или непаралелне праве зове се **трасверзала.** Она гради са пресеченим правама осам углова, од којих су 4 **спољашња,** а 4 **унутрашња.** Спољашњи су углови изван пресечених правâ (**a, b, p, q** на сл. 169), а унутрашњи између њих (**c, d, m** и **n** на сл. 169).



Сл. 169

Ове углове делимо на **сагласне** или **напоредне, наизменичне** и **супротне.**

Сагласни су: **један спољашњи и један унутрашњи угао који се налазе на истој страни трасверзале, а на разним теменима (a и m, b и n, c и p, d и q).**

Наизменични су: два спољашња или два унутрашња угла који се налезе на разним странама трансверзале на разним теменима (a и q, b и p, c и n, d и m).

Супротни су: два спољашња или два унутрашња угла који се налазе на истој страни трасверзале, а на разним теменима (a и p, b и q, c и m, d и n).

а) Ако претпоставимо да су пресечене праве **AB** и **CD** (сл. 169) паралелне, и ако трансверзалу пресечемо тачком **E,** на средини између теменâ углова, па обе праве **CD** и **NE** померамо тако да **NE** клизи по **EM,** а да сваки доцнији положај праве **CD** буде паралелан према правој **AB,** онда ће после извесног померања права **CD** поклопити праву **AB, NE** поклопиће **EM,** а теме пашће на друго теме. Тада се углови **m** и **a, n** и **b, p** и **c, q** и **d** поклапају. Поклапањем тих углова доказује се њихова једнакост; а како су ови углови сагласни, имамо одмах и правило:

Сагласни углови једнаки су ако су пресечене праве паралелне.

b) Ако су праве AB и CD паралелне, онда је $\sphericalangle$ q = $\sphericalangle$ d као сагласни, а $\sphericalangle$ a = $\sphericalangle$ d као унакрсни. Стога су и наизменични углови a и q једнаки на основу **аксиоме**[1] да су **две количине једнаке међу собом ако су оне једнаке с једном истом трећом количином.** Исто тако:

$\sphericalangle$b=$\sphericalangle$c као унакрсни, $\sphericalangle$p=$\sphericalangle$c као сагласни, те је $\sphericalangle$b=$\sphericalangle$p;
$\sphericalangle$c=$\sphericalangle$b као унакрсни, $\sphericalangle$n=$\sphericalangle$b као сагласни, те је $\sphericalangle$c=$\sphericalangle$n;
$\sphericalangle$d=$\sphericalangle$a као унакрсни, $\sphericalangle$m=$\sphericalangle$a као сагласни, те је $\sphericalangle$m=$\sphericalangle$d;

Одавде имамо правило:

Наизменични су углови једнаки ако су пресечене праве паралелне.

c) За AB $\parallel$ CD имамо $\sphericalangle$ m = $\sphericalangle$ a као сагласни, а како је $\sphericalangle$ a + $\sphericalangle$ c = 180°, то заменом $\sphericalangle$ a са $\sphericalangle$ m, што смемо учинити, пошто су једнаки као сагласни, добијамо: $\sphericalangle$ m + $\sphericalangle$ c = = 180°. Истим путем налазимо да је: $\sphericalangle$ n + $\sphericalangle$ d = 180°, $\sphericalangle$ a + $\sphericalangle$ p = 180° и $\sphericalangle$ b + $\sphericalangle$ q = 180°.

Отуда правило:

Збир супротних углова износи 180° ако су пресечене праве паралелне.

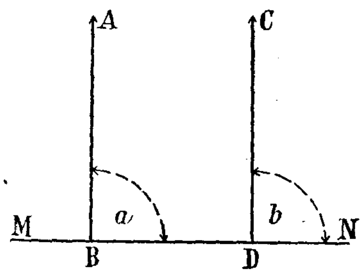
d) **Напомена.** — На основу сва три правила из овога параграфа тачно је и следеће њима супротно правило:

Ако су сагласни углови једнаки, или ако су наизменични углови једнаки, или ако су супротни углови суплементни, онда морају пресечене праве бити паралелне.

§ 90. Важност правила из претходног параграфа је велика, јер је њихова примена врло честа. На овим правилима основано је ових шест правила:

Правило 1. — **Кад су две праве нормалне на трећој правој, онда су оне паралелне.**

Ако је AB $\perp$ MN и CD $\perp$ MN (сл. 170), онда су углови a и b, као прави, једнаки. Међутим ови су углови сагласни, па пошто су једнаки, то је по 4 правилу претходног параграфа AB $\parallel$ CD.



Сл! 170

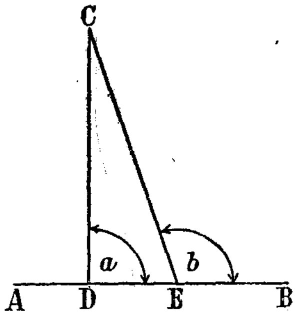
[1]) Аксиома је истина којој није потребан доказ, пошто је очевидна. Тако, аксиоме су: 1) Целина је већа од ма кога свога дела; 2) Свака је целина једнака збиру својих делова, итд.

Правило 2. — **Ако су две праве паралелне, па је једна од њих нормална на трећој правој, онда је и друга нормална на њој.**

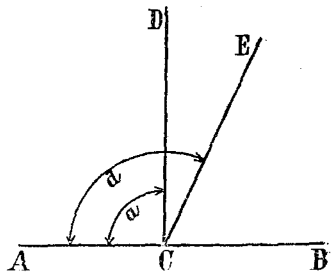
Ако су праве **AB** и **CD** (сл. 170) паралелне, онда су углови **a** и **b**, као сагласни, једнаки. За **AB** $\perp$ **MN**, угао **a** је прав. Тада је и угао **b**, као једнак са **a**, прав. Стога је и **CD** $\perp$ **MN**.

Правило 3. — **Из једне тачке ван неке праве може се спустити само једна нормала на ту праву.**

Ако је дато да је **CD** $\perp$ **AB** (сл. 171), онда је угао **a** прав. Ако претпоставимо да је права **CE** $\perp$ **AB**, што се коси са овим правилом, онда би угао **b** био прав. Тада би углови **a** и **b** били као прави једнаки. А како су углови сагласни, онда би по правилу из предњег параграфа биле праве **CD** и **CE** паралелне. Међутим овај случај није, пошто се те праве



Сл. 171



Сл. 172

секу у тачци **C**. Стога наша претпоставка да је и права **CE** $\perp$ **AB**, као нетачна, отпада. Према томе само је **CD** нормална на **AB**[1]).

Правило 4. — **У једној тачци неке праве може се подићи само једна нормала на ту праву.**

Ако је дато да је **CD** $\perp$ **AB** (сл. 172), онда је угао **a** прав.

Ако претпоставимо да је права **CE** $\perp$ **AB**, онда би и

---

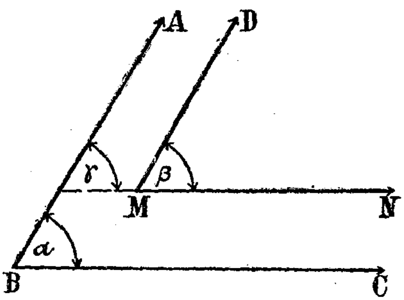
1) Овакав доказ зове се индиректан. За један доказ каже се да је индиректан ако претпоставимо тврђење које је противно тврђењу правила, па применом ранијих правила и аксиома долазимо до једног закључка из кога се види погрешност наше претпоставке, а тачност правила.

угао **d** био прав. У том случају углови **a** и **d** били би једнаки. Међутим, ово се коси са аксиомом да је сваки део мањи од своје целине. Овде је угао **a**, као део угла **d**, мањи од угла **d**. Стога угао **d** није прав, те наша претпоставка да је **CE** $\perp$ **AB**, као нетачна отпада. Остаје само да је **DC** $\perp$ **AB**.

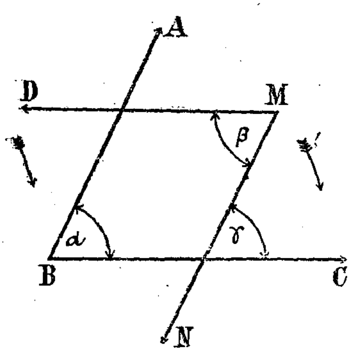
Правило 5. — **Два су угла једнака ако су им краци у истом или супротном смислу паралелни, а суплементни су ако су им два крака у истом, а два у супротном смислу паралелна.**

a) Нека је **AB** $\parallel$ **DM** и **BC** $\parallel$ **MN** (сл. 173). Продужењем крака **MN** до пресека са краком **AB**, добија се угао γ. Тада је $\alpha = \gamma$ као сагласни, а $\beta = \gamma$ такође као сагласни. Стога је $\alpha = \beta$, пошто су оба једнака са углом γ. б) [illegible]

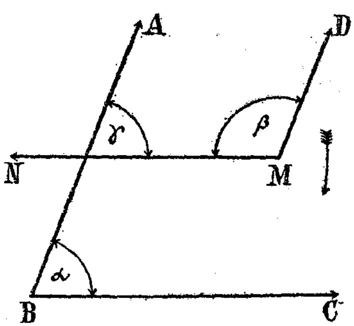
b) Нека је **AB** $\parallel$ **MN** и **BC** $\parallel$ **MD** (сл. 174) у супротноме



Сл. 173



Сл. 174



Сл. 175

смислу. Тада је $\alpha = \gamma$ као сагласни, $\beta = \gamma$ као неизменични. Стога је $\alpha = \beta$, пошто су оба једнака са углом γ.

Конструиши угао од 60° 30° 120° 150°
и 90° 45° 135°

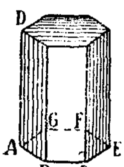
c) Нека је **AB** ∥ **MD** у истом, и **BC** ∥ **MN** (сл. 175) у супротном смислу. Тада је $\alpha=\gamma$ као сагласни, а $\gamma+\beta=180^0$ као супротни. Ако сабирак γ заменимо за α, добијамо $\alpha+\beta= = 18^0$, тј. углови α и β јесу суплементни.

Правило 6. — **Када краци једног угла стоје нормално на крацима другог угла, онда су ти углови једнаки или суплементни.**

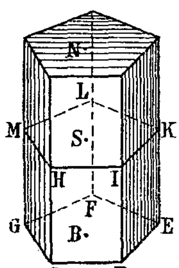
Ако угао β код сл. 173, 174 и 175 обрнемо за 90^0 у смислу означених стрелица, онда ће краци овога угла бити нормални на крацима угла α. Како β обртањем не мења своју величину, то су углови α и β у I и II случају једнаки, а у III суплементни.

5. ПРИЗМЕ И ЧЕТВОРОУГЛИ

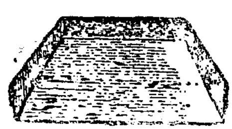
§ 91. **Четвороугли на рогљастим телима.** — Видели смо код коцке (сл. 2), паралелопипеда (сл. 21), да су не само основе, већ и бочне стране праволиниске четворостране слике — квадрати и правоугаоници; а код пирамиде (сл. 127), да је само основа четворострана праволиниска слика, а бочне



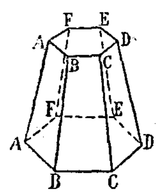
Сл. 176



Сл. 177



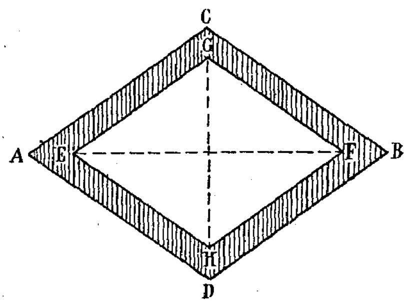
Сл. 178



Сл. 179

стране троуглови. Посматрањем тела на сл. 176 и 177 видимо да прво има за основе подударне правилне шестоугле, а друго подударне петоугле, али да су оба тела са бока ограничена четвоространим сликама чије су **супротне стране паралелне.** Такве четворостране слике зову се **паралелограми,** а посматрана тела зову се **призме. Призма је,** дакле, **рогљасто тело које је са бока ограничено паралелограмима, а има**

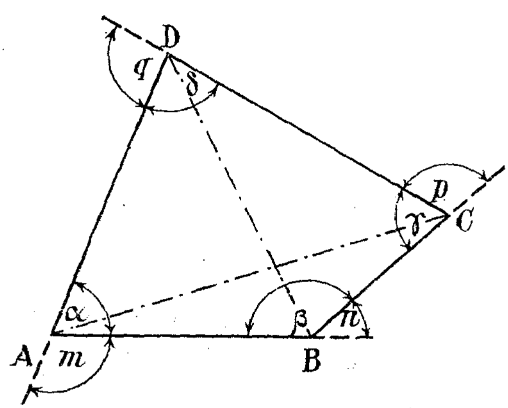
за основе с горње и доње стране две подударне слике, тростране, четворостране или многостране. Коцка и паралелопипед такође су призме. Посматрањем тела на сл. 178 и 179, која су добивена од пирамида пресечених равнином паралелном са основом, видимо да су оба тела са бока ограничена такође четвоространим праволинијским сликама које имају по две паралелне и по две непаралелне стране. Такве четворостране слике зову се **трапези.** Посматрајући рам на сл. 180 видимо да ограничава слику чије су супротне стране паралелне, све стране једнаке, а углови коси. Таква слика зове се **ромб.** (Именуј још неколико тела на којима има четвоространих површина!)



Сл. 180

§ 92. **Опис и елементи четвороугла.** — Део равне површине ограничен са четири дужи зове се **четвороугао.** Код свакога четвороугла имамо: четири стране, четири темена, четири унутрашња и четири спољашња угла. Под **дијагоналом** једног четвороугла разумемо дуж која спаја два његова супротна темена (**AC** и **BD**, сл. 181). Код четвороугла има свега две дијагонале, и свака дели четвороугао на два троугла.

§ 93. **Углови четвороугла.** — а) Повлачењем дијагонале четвороугао се дели на два троугла, а збир углова у једном троуглу износи 180⁰, те према томе углови у оба добивена троугла који дају унутрашње углове четвороугла имају збир 360⁰.

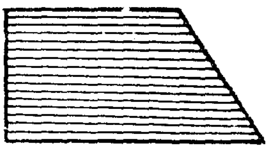


Сл. 181

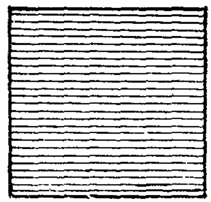
b) Код четвороугла имамо 4 пара спољашњих и унутрашњих углова од по 180⁰; према томе је збир свих углова четвороуглових 720⁰. Па пошто је збир унутрашњих углова 360°, то је и збир спољашњих опет 360°. Отуда имамо правило:

Збир како унутрашњих тако и спољашњих углова једнога четвороугла износи 360°.

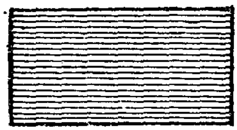
§ 94. **Врсте четвороуглова.** — Четвороуглове делимо на: **трапезоиде, трапезе, паралелограме и делтоиде.** Трапезоид је четвороугао у коме нема ни паралелних ни једнаких страна (сл. 181). Трапез је четвороугао у коме има две пара-



Сл. 182

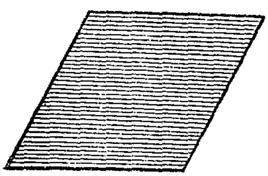


Сл. 183

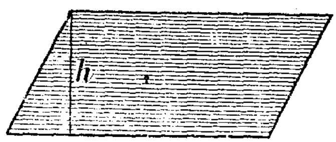


Сл. 184

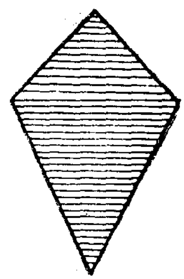
лелне и две непаралелне стране (сл. 182). Паралелограм је четвороугао у коме су супротне стране паралелне (сл. 183,



Сл. 185

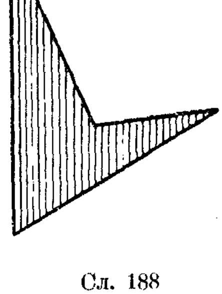


Сл. 186



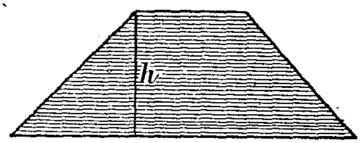
Сл. 187

184, 185 и 186). Делтоид је четвороугао који нема паралелних страна, али има две и две суседне стране једнаке (сл. 187). Трапезоид у коме су сви унутрашњи углови издубљени јесте **конвексан** (сл. 181), а ако има један испупчен онда је **конкаван** (сл. 188). Трапез у коме су непаралелне стране једнаке, зове се **равнокрак** (сл. 189) Непаралелне стране таквог трапеза зову се **краци.** Дуж која спаја среди-



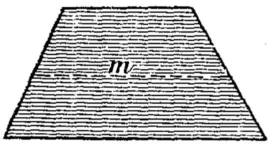
Сл. 188

не непаралелних страна у трапезу зове се **средња трапезова линија** (**m** на сл. 190). Нормално отстојање паралелних страна трапеза зове се **висина** (**h** на сл. 189).



Сл 189

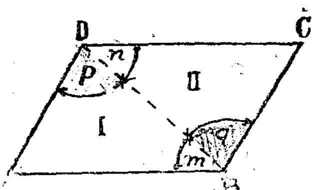
Трапезу коме се једна од непаралелних страна поклапа са висином, или трапез у коме има два права угла, зове се **правоугли** (сл. 182).



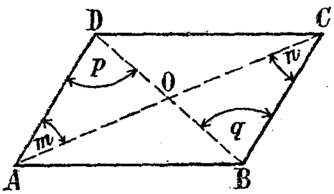
Сл. 190

Паралелограме делимо, према томе да ли су им углови прави или коси, на **правоугле** и **косоугле.** Правоугле паралелограме делимо на **квадрате** и **правоугаонике,** а косоугле на **ромбове** и **ромбоиде.** Квадрат је правоугли паралелограм код кога су све стране једнаке (сл. 183). Правоугаоник је правоугли паралелограм у коме су две и две супротне стране једнаке. Ромб је косоугли паралелограм код кога су све стране једнаке (сл. 185). Ромбоид је косоугли паралелограм у коме су две и две супротне стране једнаке (сл. 186). Под **основицом** једнога паралелограма разумемо ону његову страну над којом је конструисан. Обично се за основицу узима доња паралелна страна. Под **висином** једног паралелограма разумемо управну спуштену на основицу из ма које тачке супротне паралелне стране (**h** на сл. 186). Код квадрата и правоугаоника суседна страна основици у исто време је висина.

§ 95. **Особине паралелограма.** — а) Повлачењем дијагонале **BD** паралелограма **ABCD** (сл. 191) овај се дели на два



Сл. 191

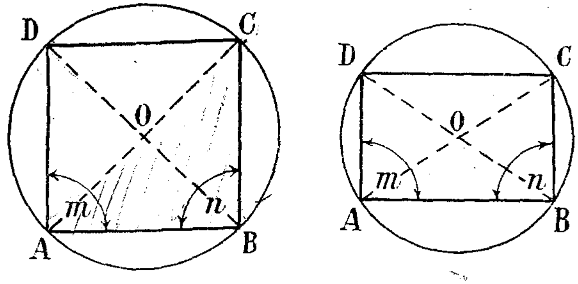


Сл- 192

подударна троугла **ABD** и **BCD**. Ови су троуглови подударни, јер им је страна **BD** заједничка, $\sphericalangle$ **m** = $\sphericalangle$ **n** и $\sphericalangle$ **q** = $\sphericalangle$ **p** као наизменични (I правило о подударности). Из подударности ових троуглова излази да је: **AB** = **DC**, **AD** = **BC**, и $\measuredangle$ **A** = $\measuredangle$ **C**. Па како је $\measuredangle$ **m** = $\measuredangle$ **n** и $\measuredangle$ **q** = $\measuredangle$ **p**, то је и **p** + **n** = **m** + **q** или и $\measuredangle$**D** = $\measuredangle$ **B**. Према томе: **Код паралелограма су супротне стране и супротни углови једнаки.**

b) Посматрајући троуглове **ADO** и **BCO** (сл. 192), видимо да су они подударни, јер је **AD** = **BC**, $\measuredangle$ **m** = $\measuredangle$ **n** и $\measuredangle$ **p** = $\measuredangle$ **q** као наизменични (I правило о подударности). Стога су им остали делови једнаки. Одавде је **AO** = **CO** и **BO** = **DO**, тј. **дијагонале код паралелограма узајамно се полове.**

c) Посматрајући троуглове **ABC** и **ABD** (сл. 193) код квадрата (правоугаоника), видимо да су подударни по дру-



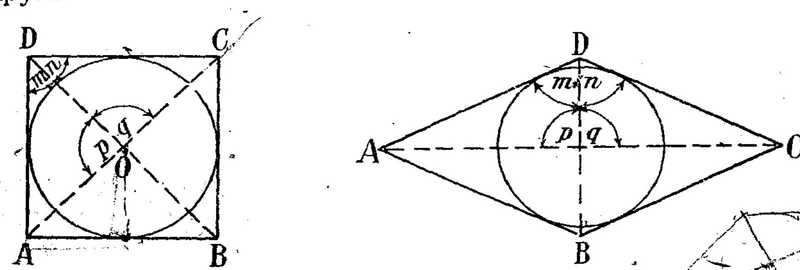
Сл. 193

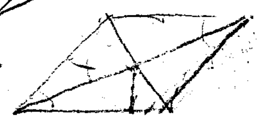
гом правилу о подударности троуглова, јер им је страна **AB** заједничка, затим је **AD** = **BC** и $\measuredangle$ **m** = $\measuredangle$ **n** = 90^0. Из њихове подудорности излази да је **AC** = **BD**, тј. **код квадрата и правоугаоника дијагонале су једнаке.**

Како су дијагонале код квадрата и правоугаоника једнаке, а и узајамно се полове, то је њихов пресек **O** подједнако удаљен од свих темена. Стога је овај пресек центар описаног круга. Дакле, **да бисмо описали круг око једнога квадрата или правоугаоника, треба да повучемо њихове дијагонале, пресек да узмемо за центар, а за полупречник отстојање од тога пресека до једнога темена** (сл. 193).

d) Посматрајући троуглове **AOD** и **COD** код квадрата (ромба) **ABCD** (сл. 194), видимо да су и они подударни, пошто су им и стране једнаке [**DO** заједничка, **AD** = **DC** као страна истога квадрата (ромба), **AO** = **CO** као половине дијагонале]. Стога су једнаки и углови тих троуглова, и то: $\sphericalangle m = \sphericalangle n$, $\sphericalangle p = \sphericalangle q = 90^0$. Прва једнакост показује нам да је **DO** симетрала угла **D**, а друга да је **DB** $\perp$ **AC**. Отуда имамо правило: **дијагонале код квадрата и ромба стоје нормално једна на другој и симетрале су углова чија темена спајају.**

Пошто су дијагонале код квадрата и ромба у исто време и симетрале углова, то је њихов пресек **O** подједнако удаљен од свих страна. Стога је тај пресек центар уписаног круга.





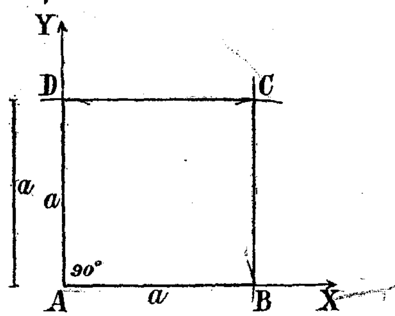
Сл. 194

Према томе, **да бисмо уписали круг код квадрата или ромба, треба да повучемо њихове дијагонале, пресек да узмемо за центар, и за полупречник отсојање од тога пресека до ма које стране (сл. 194).**

§ 96. Конструктивни задаци из паралелограма. — На основу изложених особина паралелограма (§ 95) могу се решити ови конструктивни задаци:

а) Решени задаци:

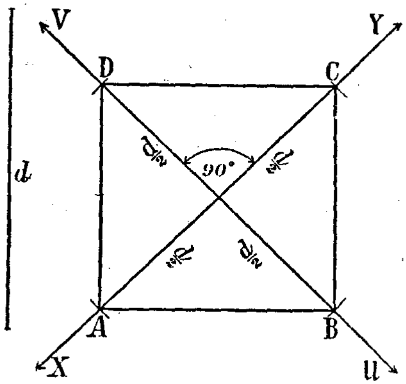
1. **Конструисати квадрат кад је позната његова страна а.** — Најпре треба да нацртамо прав угао **XAY**, а затим на његове краке преносимо дату страну **а** = **AB** = **AD** (сл. 195). Најзад отвором шестара величине **а** описујемо из темена **B** и **D** лукове. Пресек лукова биће четврто теме **C** траженога квадрата **ABCD**.



Сл. 195

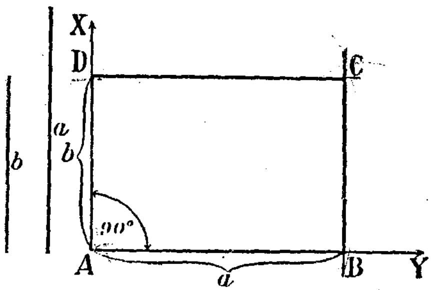
2. **Конструисати квадрат кад је позната његова дијагонала.** — Треба најпре нацртати две нормалне праве **XY** и

VU, затим од њиховога пресека пренети, и с једне и с друге стране сваке праве, половину дате дијагонале. Добивене



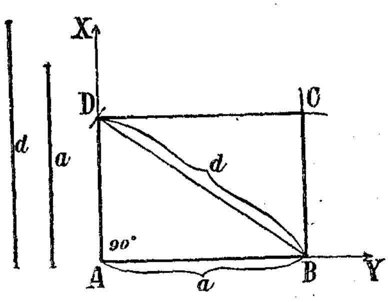
Сл. 196

тачке **A**, **B**, **C** и **D** jесу темена траженог квадрата (сл. 196).



Сл. 197

3. **Конструисати правоугаоник кад су познате његове суседне стране: a и b.** — Треба најпре конструисати прави угао **XAY**; затим на крак **AX** пренети страну **b** = **AD**; а на крак **AY** страну **a** = **AB.** Најзад отвором шестара величине **b** описати лук из темена **B**, а отвором шестара величине **a** из темена **D** описати други лук који сече први. Пресек лукова је четврто теме **C** траженог правоугаоника **ABCD** сл. 197).

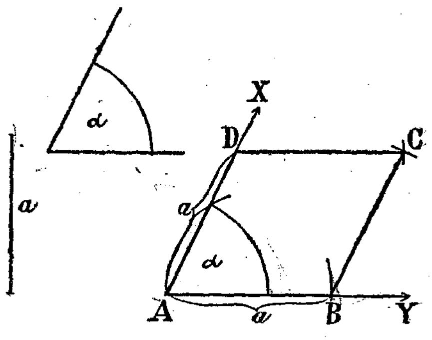


Сл. 198

4. **Конструисати правоугаоник кад је позната његова дијагонала d и једна његова страна a.** — Треба најпре конструисати прав угао **XAY** (сл. 198), а за-

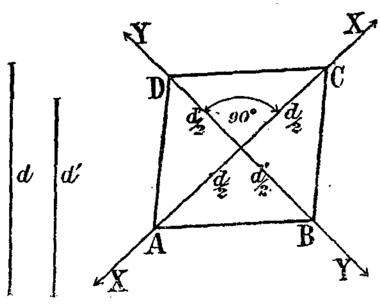
тим на крак **AY** пренети страну **a** = **AB**, па отвором шестара величине дијагонале **d** описати лук из **B**, који сече **AX** у **D**. Теме **C** добијамо повлачењем кроз **D** праву **DC** ∥ **AB**, а кроз **B** праву **BC** ∥ **AD**. (Како би се још добило теме **C**?)

5. Конструисати ромб кад је позната његова страна и угао α. — Треба најпре конструисати угао YAX = α (сл. 199), а затим на зрак AX и AY пренети дату страну **a**. Истим отвором шестара описати из **B** и **D** лукове чији ће пресек бити четврто теме C траженог ромба.



Сл. 199

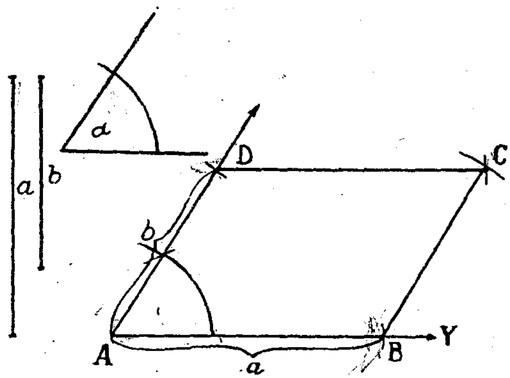
6. Конструисати ромб кад су познате његове дијагонале d и d′. — Треба најпре конструисати нормалне праве XX′ и YY′ (слика 200), а затим на праву XX′ пренети половину дијагонале **d** и с једне и с друге стране пресека, а исто тако половину дијагонале **d′** пренети и с једне и с друге стране



Сл: 200

пресека на праву YY′ Спајање добивених тачака A, B, C и D добијамо тражени ромб.

7. Конструисати ромбоид кад су познате две стране: a и b, и захваћени угао α. — Треба најпре нацртати угао **YAX** = α (сл. 201), а затим на крак **AY** пренети **a**, на други крак **b**. Најзад, из **D** повлачимо **DC** ∥ **AB**, а из **B** повлачимо



Сл. 201

BC ‖ AD. Пресек C биће четврто теме траженог ромбоида ABCD. (Како се друкчије добија четврто теме C?)

b) Задаци за вежбу

1) Нацртај квадрат код кога је: a) страна 40 cm (mm); b) обим 1 m (dm); c) дијагонала 5 dm (cm)!

2. Нацртај правоугаоник чије су стране 5 dm (cm) и 3 dm (cm) и око њега опиши круг!

3. Нацртај квадрат чији је обим једнак обиму датог правоугаоника!

4. Нацртај правоугаоник чија је ширина једнака са страном, а дужина са дијагоналом датог квадрата!

5. Нацртај правоугаоник кад му је једна страна 16 cm (mm), а дијагонала 30 cm (mm)!

6. Нацртај правоугаоник чија је дијагонала 3 dm (cm), а угао између дијагонала: a) 60°; b) 45°; c) 75°!

7. Нацртај ромб чија је страна 28 cm (mm), а угао: a) 60°; b) 30°; c) 75°!

8. Нацртај ромб чија је страна 25 cm (mm), а једна од дијагонала 30 cm (mm)!

9. Нацртај ромб чије су дијагонале 30 cm (mm) и 35 cm (mm)!

10. Нацртај ромб чија је висина $h = 20$ cm (mm) а један угао 60°!

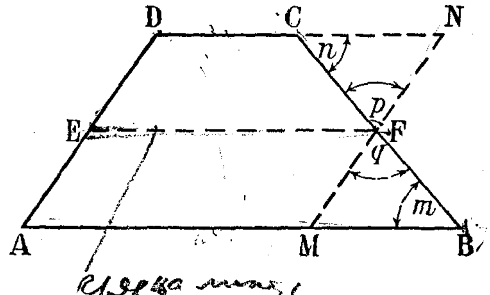
11. Нацртај ромбоид чије су стране 30 и 35 cm (mm) а захваћени угао 45°!

12. Нацртај ромбоид чије су две стране 30 и 34 cm (mm), а једна од дијагонала 40 cm (mm)!

13. Нацртај ромбоид чије су дијагонале 25 и 30 cm (mm), а захватају угао од 30 !

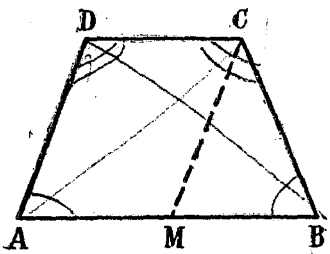
14. Нацртај ромбоид чије су дијагонале 25 и 30 cm (mm), а једна од страна 20 cm (mm)!

§ 97. **Особине трапеза.** — а) Нека су тачке **E** и **F** средине непаралелних страна **AD** и **BC** трапеза **ABCD** (сл. 202). Тада је **EF** средња линија тога трапеза. Ако на један зрак, почевши од његове почетне тачке, пренесемо најпре паралелну страну **AB**, а затим паралелну страну **DC**, па добивени збир преполовимо, онда је половина збира тих паралелних страна једнака средњој линији **EF** (измери и увери се!). Отуда имамо правило: **Средња линија ма кога трапеза једнака је полузбиру паралелних страна.** Тачност овога правила види се из сл. 202, где је повучена кроз **F** права **MN** ∥ **AD**, и страна **DC** продужена до пресека с том паралелном.



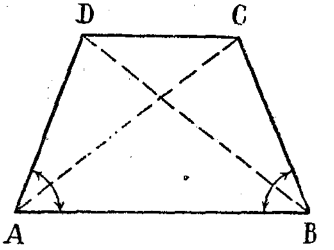
Сл. 202

b) Нека је трапез **ACD** (сл. 203) равнокрак. Повлачењем из **C** праве **CM** паралелно са **AD**, добијамо паралелограм **AMCD** и равнокрак троугао **MBC.** Троугао **MBC** је равкрак, јер су му стране **BC** и **CM** једнаке (као једнаке са **AD**). Стога је угао **B** једнак углу **M** (Зашто?). А како је ∡ **A** = ∡ **M** као сагласни, то је и угао **B**, као једнак са углом **M**, једнак и са углом **A**. Углови **D** и **C** такође су једнаки као суплементни углова **A** и **B.** Отуда имамо правило: **Код равнокраког трапеза једнаки су углови на свакој паралелној страни.**

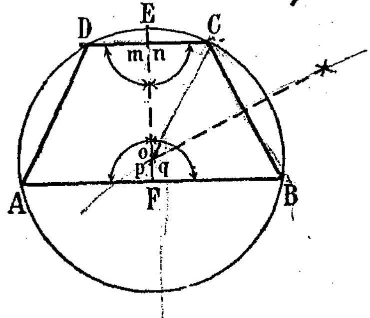


Сл. 203

с) Нека је трапез **ABCD** (сл. 204) равнокрак. Тада су троуглови **ABC** и **ABC**, добивени повлачењем дијагонала, подударни, пошто имају по две стране и захваћене углове једнаке (**AB** заједничка,**AD** = **BC.** Из њихове подударности излази да су им једнаке и треће стране: **BD** и **AC.** Отуда имамо правило: **Код равнокраког трапеза дијагонале су једнаке.**



Сл. 204



Сл. 205

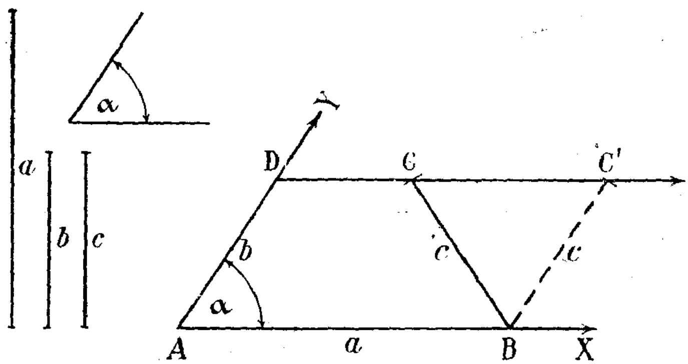
b) Нека су тачке **E** и **F** средине паралелних страна равнокраког трапеза **ABCD** (сл. 205). Ако спојимо тачке **E** и **F** и обрнемо четвороугао **AFED** око **EF** за 180⁰ поклопиће он четвороугао **FBCE.** (Зашто?). Овим поклапањем доказује се да је ∢ **m** = ∢ **n** и ∢ **p** = ∢ **q.** Па како су ови углови суплементни, то су они прави. Стога је **EF** симетрала обеју паралелних страна. Па како **EF** дели трапез на два потпуно једнека и симетрично положена дêла, то је она и симетрала самога трапеза. Отуда имамо правило: **Права која спаја средине паралелних страна равнокраког трапеза јесте заједничка симетрала тих страна и самога трапеза.**

На овој симетрали постоји само једна тачка **O,** која је подједнако удаљена од свих трапезових темена. Та је тачка центар круга описаног око равнокраког трапеза, а налази се у пресеку свих симетрала страна. Свака друга тачка заједничке симетрале подједнако је удаљена од темена **C** и **D,** или од темена **A** и **B,** али није подједнако удаљена од свих темена. Стога **да бисмо описали круг око равнокраког трапеза довољно је да конструишемо симетрале двеју суседних страна, пресек симетрала да узмемо за центар, а за полупречник узимамо отстојање од тог пресека до ма кога трапезовог темена.**

§ 98. **Конструктивни задаци из трапеза.** — На основу изложених особина трапеза (§ 97) могу се решити ови задаци:

1. **Конструисати трапез кад је позната једна паралелна страна a, обе непаралелне c и b, и угао α на доњој паралелној**

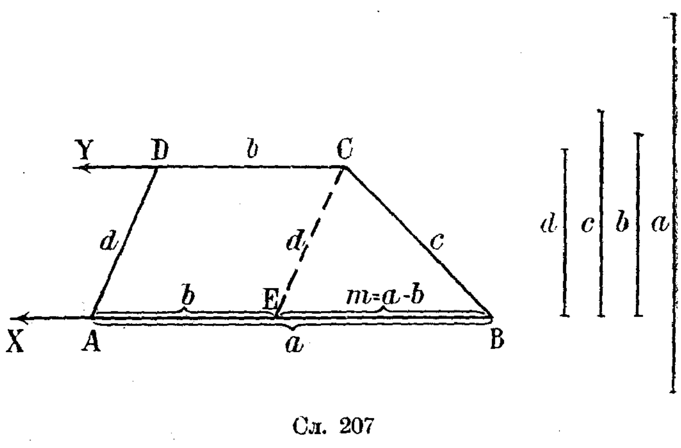
страни. — Треба најпре конструисати дати угао **XAY** = α (сл. 206), а затим на крак **AX** пренети страну *a*, а на крак **AY** страну **b**. Најзад, треба из темена **D** повући **DC** ∥ **AX**, а из темена **B**, отвором шестара величине стране **c**, описати лук



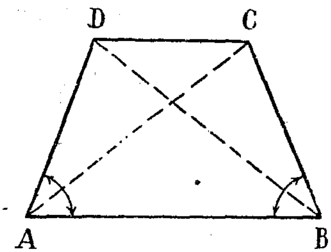
Сл. 206

који сече **DC** у **C**. Тачка **C** је четврто теме траженог трапеза **ABCD**. Како овај лук сече **DC** и у тачки **C′**, то је трапез **ABC′D** друго решење овога задатка. (Када се добива само једно решење?)

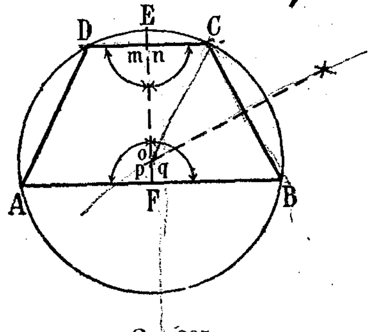
2. **Конструисати трапез чије су паралелне стране a и b, а непаралелне c и d.** — Треба најпре конструисати троугао **BCE** чије су стране **m** = **a** — **b**, **c** и **d** познате (сл. 207), а затим кроз теме **C** повући **CY** ∥ **BX** и на ту праву пренети **b** (**CD** = **b**). Најзад на зрак **BX** преносимо **a** = **BA**, чиме добијамо четврто теме **A** траженог трапеза **ABCD**.



Сл. 207



Сл. 204



Сл. 205

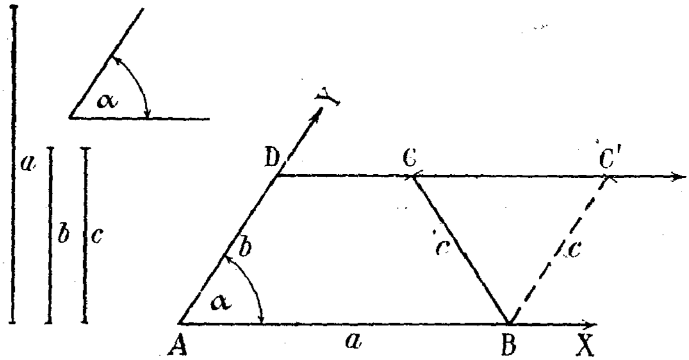
b) Нека су тачке **E** и **F** средине паралелних страна равнокраког трапеза **ABCD** (сл. 205). Ако спојимо тачке **E** и **F** и обрнемо четвороугао **AFED** око **EF** за 180° поклопиће он четвороугао **FBCE.** (Зашто?). Овим поклапањем доказује се да је ∢ **m** = ∢ **n** и ∢ **p** = ∢ **q.** Па како су ови углови суплементни, то су они прави. Стога је **EF** симетрала обеју паралелних страна. Па како **EF** дели трапез на два потпуно једнака и симетрично положена дêла, то је она и симетрала самога трапеза. Отуда имамо правило: **Права која спаја средине паралелних страна равнокраког трапеза јесте заједничка симетрала тих страна и самога трапеза.**

На овој симетрали постоји само једна тачка **O,** која је подједнако удаљена од свих трапезових темена. Та је тачка центар круга описаног око равнокраког трапеза, а налази се у пресеку свих симетрала страна. Свака друга тачка заједничке симетрале подједнако је удаљена од темена **C** и **D,** или од темена **A** и **B,** али није подједнако удаљена од свих темена. Стога **да бисмо описали круг око равнокраког трапеза довољно је да конструишемо симетрале двеју суседних страна, пресек симетрала да узмемо за центар, а за полупречник узимамо отстојање од тог пресека до ма кога трапезовог темена.**

§ 98. **Конструктивни задаци из трапеза.** — На основу изложених особина трапеза (§ 97) могу се решити ови задаци:

1. **Конструисати трапез кад је позната једна паралелна страна a, обе непаралелне c и b, и угао α на доњој паралелној**

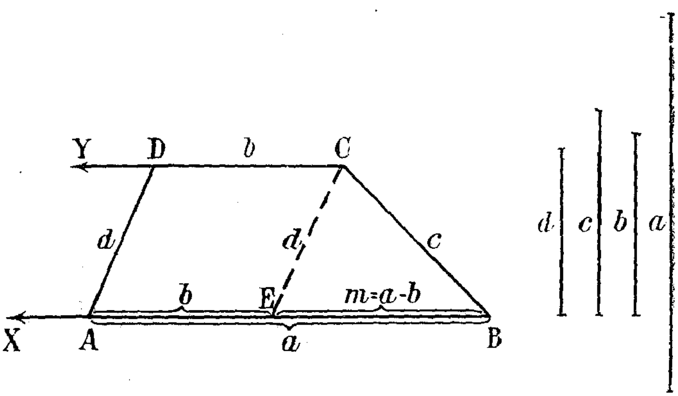
страни. — Треба најпре конструисати дати угао XAY = α (сл. 206), а затим на крак AX пренети страну *a*, а на крак AY страну b. Најзад, треба из темена D повући DC ∥ AX, а из темена B, отвором шестара величине стране c, описати лук



Сл. 206

који сече DC у C. Тачка C је четврто теме траженог трапеза ABCD. Како овај лук сече DC и у тачки C′, то је трапез ABC′D друго решење овога задатка. (Када се добива само једно решење?)

2. **Конструисати трапез чије су паралелне стране a и b, а непаралелне c и d.** — Треба најпре конструисати троугао BCE чије су стране m = a — b, c и d познате (сл. 207), а затим кроз теме C повући CY ∥ BX и на ту праву пренети b (CD = b). Најзад на зрак BX преносимо a = BA, чиме добијамо четврто теме A траженог трапеза ABCD.



Сл. 207

Слично се решавају задаци:

3. Нацртај трапез чије су паралелне стране 32 и 40 **cm (mm)**, а углови на већој паралелној страни 60° и 75°!

4. Конструисати равнокраки трапез чије су паралелне стране 30 и 40 **cm**, а крак 20 **cm**.

5. Конструисати равнокрак трапез чије су паралелне стране 25 и 30 **cm (mm)**, а један угао на већој паралелној страни 45°.

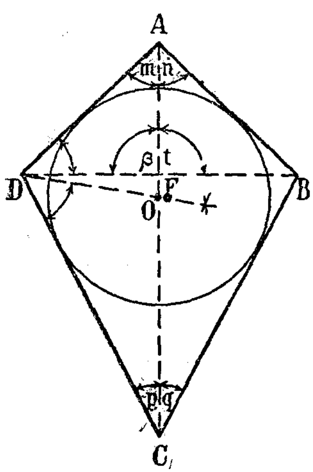
6. Нацртај равнокрак трапез чија је једна паралелна страна 30 **cm (mm)**, крак 20 **cm (mm)**, а угао између ових страна 60°.

7. Нацртај равнокрак трапез чија је једна паралелна страна 28 **cm**, дијагонала 40 **cm** и један угао 60°.

§ 99. Особине делтоида. — а) Посматрајући троуглове **ACD** и **ABC**, на које дијагонала **AC** дели делтоид **ABCD** (сл. 208), видимо да су они подударни, пошто имају стране једнаке. Из подударности ових троуглова излази да је ∢ **m** = ∢ **n** и ∢ **b** = ∢ **q**. Отуда имамо правило: **Дијагонола делтоидова која спаја темена, која граде једнаке стране делтоидове, симетрала је за углове између тих страна.**

Пошто је дијагонала **AC** симетрала углова **A** и **C**, то на њој постоји једна тачка која је подједнако удаљена од свих страна делтоидових. Та тачка је центар уписаног круга, а налазимо је када конструишемо поред симетрале **AC** још симетралу угла **B** или угла **D**. Пресек ових симетрала **O** је тражени центар, а полупречник је нормално отстојање од тога центра до ма које стране.

b) Посматрајући троуглове **AFD** и **AFB** (сл. 208), видимо да су подударни (**AF** је заједничка, **AD** = **AB** и ∢ **m** = ∢ **n**). Из њихове подударности излази да је **DF** = **FB** и ∢ β = ∢ **t** = 90°. Отуда имамо правило: **Већа дијагонала делтоидова симерала је мање дијагонале његове.**



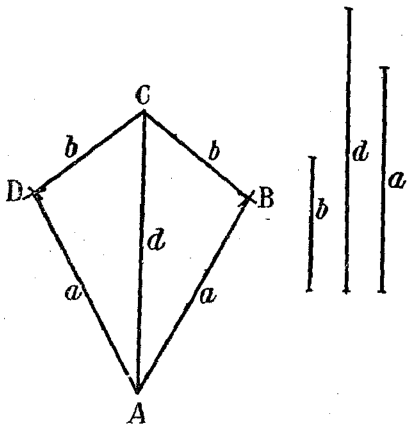
Сл. 208

Већа дијагонала је тада и симетрала делтоида, пошто га дели на две симетричне половине.

Напомена. — Из свега онога што је казано досада о четвороугловима, закључујемо: 1) да можемо описати круг око четвороуглова са једнаким дијагоналама (квадрат, правоугаоник и равнокрак трапез); 2) да можемо уписати круг код четвороуглова са нормалним дијагоналама (квадрат, ромб и делтоид). Као и код троуглова, центар описаног круга је заједнички пресек симетрала̂ четвороуглових страна, а центар уписаног круга је заједнички пресек симетрала̂ углова̂. Ови центри код квадрата, правоугаоника и ромба поклапају се са пресецима дијагнола тих четвороуглова.

§ 100. Конструктивни знаци из делтоида

1.Конструисати делтоид чије су стране a и b, a једна дијагонала d. — Треба најпре помоћу датих елемената конструисати троугао **ACD** (сл. 209), а затим отвором шестара величине *a* из темена **A** описати лук, а из темена **C** отвором шестара величине **b** описати други лук који сече први у **B.** Тачка **B** је четврто теме траженога делтоида **ABCD.**



Сл. 209

Слично се решавају задаци:

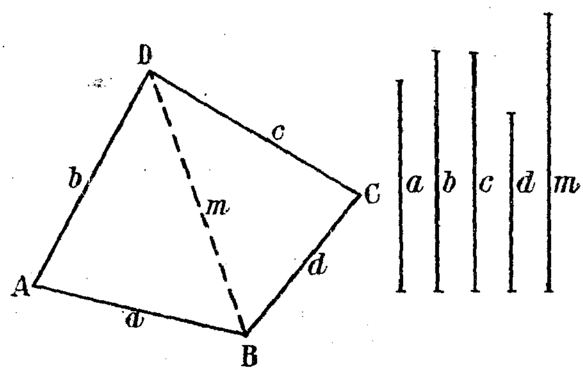
2. Нацртај делтоид чије су стране 20 и 30 **cm (mm),** а мања дијагонала 15 **cm (mm)!**

3. Нацртај делтоид чија је једна страна 25 **cm (mm),** а дијагонале 20 и 35 **cm (mm)!**

4. Нацртај делтоид чије су стране 25 и 35 **cm (mm),** а захваћени угао 120°!

§ 101. Конструктивни задаци из трапезоида

1. Конструисати трапезоид кад су дате све четири стране: a, b, c и **d** и једна од дијагонала **m.** — Најпре помоћу страна **a** и **b** и дијагонале **m** треба нацртати △ **ABD** (сл. 210), а затим из **D,** отвором шестара величине **c,** описати лук, а из **B,** отвором шестара величине **d,** описати други лук који сече први у тачци **C.** Ова тачка је четврто теме траженог трапезоида **ABCD.**



Сл. 210

Слично се решавају задаци:

2. Нацртај трапезоид кад су дате све четири стране и један угао!

3. Нацртај трапезоид кад су дате три стране и два угла на једној од тих страна!

4. Нацртај трапезоид кад су дате две стране, обе дијагонале и угао код једне од датих страна!

5. Нацртај трапезоид кад су дате три стране и обе дијагонале!

6. Конструисати трапезоид који је подударан са каквим датим трапезоидом.

§ 102. Симетричност четвороуглова

Посматрајући четвороуглове у овом одељку, увиђамо да су симетричне слике: а) од паралелограма: **квадрат, правоугаоник и ромб;** в) од трапеза само **равнокрак трапез;** и најзад с) сваки делтоид.

1)**Квадрат** је четвороосна симетрична слика, јер га и обе дијагонале и симетрале супротних страна деле симетрично;

2) **Правоугаоник** је двоосна симетрична слика, јер га само симетрале супротних страна деле симетрично;

3) **Ромб** је такође двоосна симетрична слика, јер га само дијагонале деле симетрично;

4) **Равнокрак трапез** је једноосна симетрична слика, јер га само заједничка симетрала паралелних страна дели симетрично; и

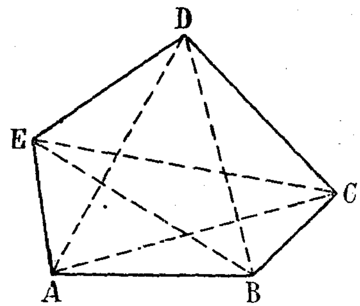
5) **Делтоид** је такође једноосна симетрична слика, јер га само дијагонала AC (сл. 208) дели симетрично.

16. МНОГОУГАОНИЦИ

§ 103. **Многоугаоници на рогљастим телима.** — Видели смо код пирамиде (сл. 130 да је њена основа петострана праволинска слика, а код призама (сл. 176 и 177) основе су шестостране и петостране праволиниске слике. Тако исто има много пирамида и призама чије основе могу бити праволиниске слике ограничене са 7, 8, 9 и више страна. Све праволиниске равне слике ограничене са више од четири стране зову се **многоугловима.** Свака таква слика има онолико унутрашњих углова, спољашњих углова и темена, колики је број њених страна. Према броју страна или углова многоугле делимо на: **петоугле, шестоугле, седмоугле,** итд. Многоугаонике делимо још на: **правилне** и **неправилне.** Правилан је онај многоугао код кога су све стране и сви углови једнаки.

§ 104. **Број дијагонала.** Под дијагоналом једнога многоугла разумемо ону дуж која спаја ма која два неузастопна темена многоуглова. **Из сваког темена многоугла може се повући онолики број дијагонала колики је број његових страна мање три.** Ако нам **n** значи број страна једнога многоугла, онда је број његових дијагонала повучених из једног темена **n — 3**. Тако, код петоугла можемо повући из једнога темена 2 дијагонале (сл. 211), код шестоугла 3, код седмоугла 4, код петнаестоугла 12 итд. Како је број темена многоугла **n**, то би требало да буде број свих многоуглових дијагонала $n \times (n-3)$. Међутим, овај је број двострук зато што је свака дијагонала заједничка за два темена која спаја. Стога број свих дијагонала једнога многоугла налазимо по обрасцу: $\frac{(n-3) \times n}{2}$. Тако, број свих дијагонала код петоугла износи 5 (сл. 211), код шестоугла 9, код десетоугла 35, итд.

§ 105. **Углови многоугла.** — a) Један многоугао може имати оштре, праве, тупе па и испупчене углове; али је њихов број увек једнак броју страна **n**. **Повлачењем свих дијагонала из једног темена једног n-тоугла, овај се дели на онолики број троуглова колики је број страна, мање два.** Тако петоугао се дели на 3 троугла, шестоугао на 4, дванаестоугао на 10, итд.



Сл. 211

Како је збир углова у једноме троуглу 180° и како углови свих троуглова дају углове многоугла, то је збир свих унутрашњих углова једнога петоугла $(n - 2) \times 180°$. Тако збир углова код петоугла износи 540° (3 × 180° = 540°); код шестоугла 720° (4 × 180° = 720°, код десетоугла 1440° (8 × 180° = 1440°), итд. Формула: $(n-2) \times 180°$ важи и за четвороуглове, па и троуглове. Код првих је $n - 2 = 2$, а код других $n - 2 = 1$. Стога је збир унутрашњих углова код четвороугла (2 × 180° = 360°), а код троугла (1 × 180° = 180°).

b) Из свега овога што је казано о угловима код многоуглова, закључујемо: да збир унутрашњих углова равних праволиниских слика почиње са троугловима од 180°, а расте за 180°, ако се број страна у слике повећа за један. Међутим, збир спољашњих углова ма које праволиниске равне слике сталан је број и износи 360°, што смо видели код троуглова и четвороуглова (§ 82 т. 3 и § 93 т. 6). Да је збир спољашњих углова код петоуглова 360° налазимо овим путем: код петоугла имамо пет пари спољашњих и унутрашњих углова по 180° пар, што чини свега 900°; како је збир унутрашњих углова петоугла 540°, то за спољашње остаје 360°. Истим путем налазимо исто код ма кога n-тоугла.

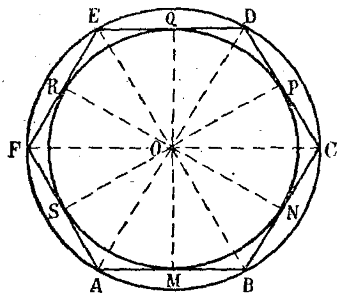
c) Како су сви углови код правилних многоуглова једнаки, то величину једнога унутрашњег угла правилнога многоугла налазимо када збир $(n-2)\times 180^0$ поделимо са бројем углова. Дакле, формула: $\frac{(n-2)\times 180^0}{n}$ служи нам за израчунавање величине једнога унутрашњег угла правилног многоугла. Тако, један угао код правилнога петоугла износи 180° тј. $\frac{3\times 180^0}{5} = 108^0$, код правилног шестоугла 120°, код правилнога десетоугла 144°, итд.

Како се израчунава један спољашњи угао код правилнога n-тоугла?

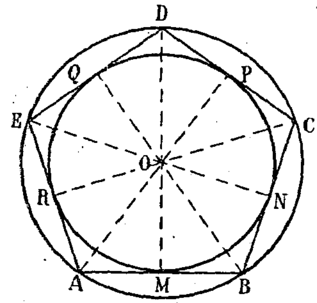
§ 106. **Правилни многоугли.** — Ако код једног правилног многоугла, парног (сл. 112) или непарног (сл. 113) броја страна, конструишемо симетрале страна и симетрале углова, видимо да се те симетрале секу у истој тачци **O.** Та тачка подједнако је удаљена како од свих многоуглових темена тако и од његових страна. За прво се уверавамо подударношћу ма која два правоугла троугла који имају симетралу стране за заједничку катету ($\triangle$ **AMO** и $\triangle$ **BMO,** $\triangle$ **BNO** и $\triangle$ **CNO,......),** а за друго подударношћу ма која два правоугла троугла који имају симетралу угла за заједничку хипотенузу ($\triangle$ **MBO** и $\triangle$ **BNO,** $\triangle$ **NCO** и $\triangle$ **CPO....).** Стога је пресек било симетрала страна, било симетрала углова правилног многоугла центар и описаног и уписаног круга у томе многоуглу. Према томе, **да би смо описали или уписали круг код правилнога многоугла, треба да конструишемо или симетрале његових страна (не морамо све), или симетрале његових углова, пресек да узмемо за центар, а отстојање**

од пресека до ма ког темена за полупречник описаног, а отстојање од пресека до ма које стране за полупречник уписаног круга.

Посматрајући слике 212 и 213, увиђамо да се код правилних многоуглова непарног броја страна симетрала страна



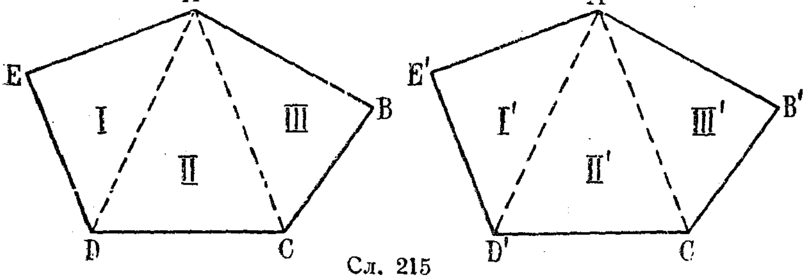
Сл. 212



Сл. 213

поклапа са симетралом супротног угла, и обрнуто, што није исти случај код правилних многоуглова парнога броја страна. Правилни многоуглови јесу симетричне слике. Свака симетрала угла или стране дели правилни многоугао на две симетричне половине, о чему се лако уверавамо поклапањем тих половина.

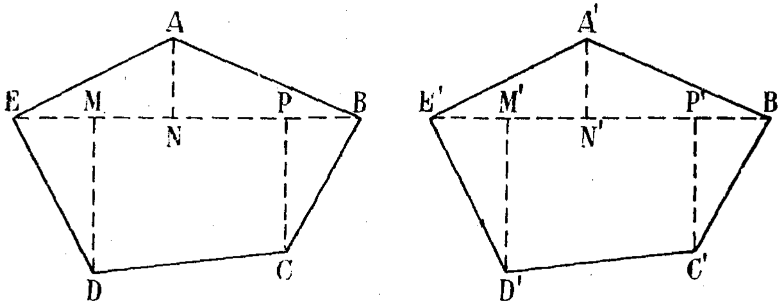
§ 107. **Конструкција многоуглова. — 1. Конструисати многоугао који је подударан многоуглу ABCDE** (сл. 214). **I начин.** — Треба најпре повлачењем дијагонала из једног темена да поделимо дати многоугао на троуглове, а затим да конструишемо редом те троуглове на другом месту помоћу њихових страна (IV конструкција троуглова из § 85). Добивени многоугао A′B′C′D′E′ (сл. 214) по-



Сл. 215

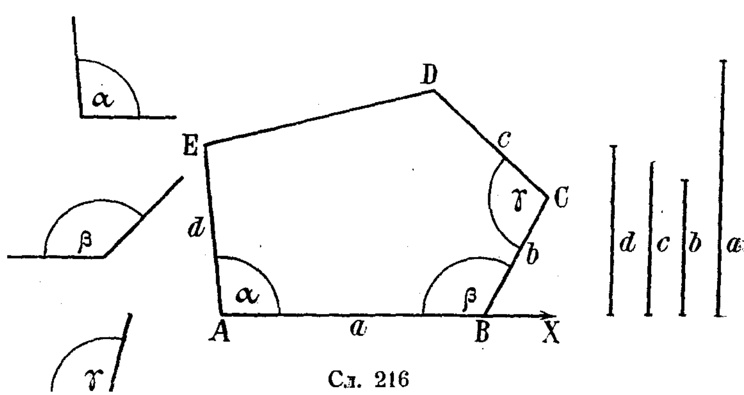
дударан је са датим многоуглом, пошто су им троуглови I и I′, II и II′, III и III′ подударни.

II начин. — Повлачимо најпре дијагоналу **BE,** која спаја најудаљенија темена, а из осталих темена спуштамо нормале на ту дијагоналу. Тиме се дати многоугао **ABCDE** (сл. 215) дели на правоугле троуглове и правоугле трапезе. Затим повлачимо зрак **E′B′** и по њему преносимо **E′M′ = EM, M′N′ = MN, N′P′ = NP** и **P′B′ = PB.** Најзад у тачкама **M′, N′** и **P′** подижемо нормале и на те нормале преносимо **M′D′ = MD, A′N′ = AN** и **P′C′ = PC.** Спајањем тачака **A′, B′, C′, D′** и **E′,** добијамо тражени многоугао.



Сл. 214

2. **Конструисати петоугао ако су познате четири његове стране a, b, c и d и три угла на тим странама α, β и γ.** — Треба најпре на зрак **AX** (сл. 216) пренети **AB = a,** а затим код темена **A** пренети угао α, а код **B** угао β. На други крак угла α пренети страну **AE = d,** а на други крак угла β пренети **BC = b,** Код темена **C** преносимо γ, а затим на други крак овога угла преносимо **CD = c.** Најзад спајамо темена **D** и **E.**



Сл. 216

3. **Над датом дужи конструисати правилан шестоугао.**

I начин. — Треба датом дужи као полупречником описати круг. У њему се тада дуж као тетива садржава 6 пута. Спајањем деоних тачака кружне периферије добијамо тражени шестоугао.

II начин. — Треба код крајњих тачака дате дужи конструисати углове 120° и на нове краке пренети исту дуж, чиме добијамо још два темена. Затим треба конструисати код нових темена опет углове од 120° и на нове краке пренети дату дуж, чиме добијамо последња два темена траженог шестоугла.

4. **Над датом дужи конструисати правилан осмоугао.** — Како је један угао код правилног осмоугла 135°, то је поступак за конструкцију правилног осмоугла истоветан као код другог начина конструкције правилног шестоугла, с том разликом што се на крајњим тачкама дате дужи преноси угао од 135°.

Напомена. — На исти се начин могу конструисати над датом дужи сви правилни многоуглови, чији су углови одређени само у степенама. Угао таквог многоугла израчунавамо по формули: $\frac{(n - 2) \times 180^0}{n}$, а преносимо га на цртеж угломером.

Тако, ако желимо да над датом дужи конструишемо: a) правилан 5-тоугао, b) правилан 10-тоугао, c) правилан 12-тоугао, налазимо најпре да је угао код правилног 5-тоугла 108°, код 10-тоугла 144°, а код 12-тоугла 150°, па је поступак за конструкцију ових правилних многоуглова истоветан као код другог начина конструкције правилног шестоугла.

ПРЕГЛЕД САДРЖИНЕ