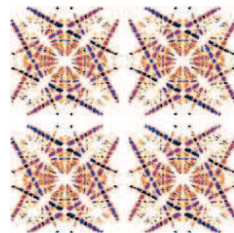


UNIVERZITET U BEOGRADU  
MATEMATIČKI FAKULTET

Nataša Todorović

**ISTRAŽIVANJE DINAMIČKE STRUKTURE I DIFUZIJE  
U SISTEMIMA HAMILTONIJANSKOG TIPA:  
ČETVORODIMENZIONA SIMPLEKTIČKA MAPA**

-MAGISTARSKA TEZA-



Beograd 2007.

# Sadržaj

Uvod	3
<b>1 Klasična i hamiltonijanska dinamika</b>	<b>7</b>
1.1 Njutnove jednačine kretanja . . . . .	7
1.2 Hamiltonijan . . . . .	10
1.2.1 Integrabilni sistemi . . . . .	14
1.2.2 Akcija-ugao promenljive . . . . .	15
1.2.3 Kvazi-integrabilni hamiltonijanski sistemi . . . . .	19
<b>2 Osnovne teoreme nebeske mehanike</b>	<b>23</b>
2.1 KAM teorema . . . . .	23
2.1.1 Svojstva KAM torusa . . . . .	24
2.1.2 Numerički primeri . . . . .	28
2.2 Teorema Nehoroševa . . . . .	30
2.2.1 Geometrijski opis faznog prostora pomoću teoreme Nehoroševa. . . . .	33
<b>3 Numeričke metode za detekciju haosa</b>	<b>41</b>
3.1 Detekcija haosa . . . . .	42
3.2 Eksponenti Ljapunova . . . . .	43
3.3 Analiza frekvencija . . . . .	46
3.4 FLI . . . . .	49
3.5 Helikoidni i <i>twist</i> uglovi . . . . .	54
3.6 Srednje, maksimalne i minimalne vrednosti akcija . . . . .	55

<b>4</b>	<b>4-dimenziona simplektička mapa kao model prostora</b>	<b>57</b>
4.1	Mape . . . . .	57
4.1.1	Definicija modela 4-D simplektičke mape . . . . .	58
4.2	Arnoldova mreža . . . . .	59
4.2.1	Arnoldova mreža i FLI . . . . .	61
4.3	Prelaz iz režima Nehoroševljevog tipa u režim tipa Čirikova . . . . .	62
4.3.1	Numerički primer prelaza i reda u haos . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Difuzija u diskretnom hamiltonijanskom sistemu</b>	<b>67</b>
5.1	Lokalna difuzija . . . . .	67
5.1.1	Arnoldova difuzija: kvalitativni aspekti . . . . .	67
5.1.2	Arnoldova difuzija: kvantitativni aspekti . . . . .	71
5.2	Globalna difuzija . . . . .	75
5.3	Koegzistencija lokalne i globalne difuzije . . . . .	77
	<b>Zaključak</b>	<b>83</b>
	<b>Bibliografija</b>	<b>85</b>

# Uvod

Poslednjih godina bili smo u prilici da bolje upoznamo Sunčev sistem. Otkrivena je haotična priroda kretanja u našem sistemu planeta i razotkriveni su mnogi dinamički mehanizmi, uključujući i negravitacione, koji u njemu vladaju. Pored klasične, nastala je i takozvana *moderna nebeska mehanika*. Poznavanje analitičkih i numeričkih metoda, razvoj matematičkih modela na osnovu teorije Hamiltonijana, korektna interpretacija rezultata i njihova primena na kretanje realnih tela u Sunčevom sistemu su, kao i mnogi drugi aspekti moderne nebeske mehanike, doprineli da ova problematika postane bitna oblast u nauci koja nalazi mesta na svim značajnijim svetskim kongresima astronomije i planetologije.

Magistarski rad *"Istraživanje dinamičke strukture i difuzije u sistemima hamiltonijanskog tipa: četvorodimenziona simplektička mapa"*, u tom kontekstu, ima za cilj ispitivanje dinamike jednog modela faznog prostora koji je definisan pomoću 4-D simplektičke mape. Mnogi fenomeni koje predviđa teorema Nehoroševa analitički još uvek nisu dokazivi. Numerički, međutim, oni mogu da se pokažu. Stoga se ovaj rad bavi numeričkom analizom stabilnosti jednog diskretnog modela hamiltonijanskog prostora. Trebalo je ispitati stabilnost i difuziju koristeći brzi indikator Ljapunova, poznatiji kao FLI i odrediti vrednosti poremećajnih parametara za koje se dešava prelaz iz jednog globalno stabilnog stanja Nehoroševljevog tipa u stanje globalnog haosa, u takozvani režim tipa Čirikova. Zatim, zadatak je bio da se ispita difuzija, da se potvrde fenomeni difuzije koji su detektovani na prethodnim modelima, kao i da se i da ocena koeficijenta difuzije u sistemu.

Prva glava *Klasična i hamiltonijanska dinamika* daje osnove klasične i moderne dinamike. Nešto veći naglasak je na hamiltonijanskim sistemima, data je

njihova definicija, kao i nekoliko primera realnih Hamiltonijana. Osnovna dva tipa hamiltonijanskih sistema su *integrabilni i neintegrabilni* sistemi. Integrabilni sistemi su, kao što to samo ime govori, rešivi, dok neintegrabilni sistemi predstavljaju sisteme u kojima, pored integrabilnog dela, postoji i takozvani poremećajni član koji je 'odgovoran' za neintegrabilnost. Opisani su tipovi kretanja u integrabilnim sistemima i navedene su neke osnovne ideje kako prevazići teškoće koje stvara poremećaj u neintegrabilnim sistemima.

U drugoj glavi, *Osnovne teoreme nebeske mehanike*, čitalac će imati priliku da se upozna sa Kolmogorov Arnold Moser (KAM) teoremom i sa teoremom Nehoroševa koje predstavljaju primer hamiltonijanskog sistema u kojima su pored integrabilnog dela prisutni i mali poremećaji. Opisana je priroda kretanja i struktura prostora koja je svojstvena Nehoroševljevim sistemima. Takođe, dati su i numerički primeri ovih teorema.

*Numeričke metode za detekciju haosa* su predmet treće glave gde se tretira haotično kretanje, odnosno numeričke metode kojima se haos detektuje i meri. S obzirom da je FLI jedan od osnovnih alata kojim se ispituje sistem definisan u zadatku teze, brzi indikator Ljapunova - FLI, je nešto detaljnije opisan.

Četvrta glava *4-dimenziona simplektička mapa kao model prostora* daje definiciju i pojam mape, a zatim je data 4-dimenziona simplektička mapa kojom je definisan model hamiltonijanskog prostora. U ovoj glavi dati su rezultati numeričke analize modela prostora koje podrazumevaju prelaz iz stabilnog stanja Nehoroševljevog tipa u haotični režim tipa Čirikova.

*Difuzija u diskretnom hamiltonijanskom sistemu* naziv je pete glave. Ispituju se različiti tipovi difuzije u datom sistemu i daje ocena koeficijenta difuzije. Takođe, numerički model, koji je predmet ove analize, zapravo treba da potvrdi ili bar nagovesti fenomene koje predviđa hamiltonijanska teorija.

Zahvaljujem se članovima komisije dr Zoranu Kneževiću, dr Mikeu Kuzmanoskom i dr Slobodanu Ninkoviću na sugestijama koje su izneli. Ideju za ovu temu dali su dr Zoran Knežević i dr Claude Froeschlé. Elena Lega i Massimiliano Guzzo su mi svojim sugestijama pomogli u toku izrade teze. Ovom prilikom im se zahvaljujem. Želim da se zahvalim i kolegama na beogradskoj opservatoriji na pomoći

u programskim rešenjima među kojima ću istaći mr Radeta Pavlovića, Bojana Novakovića i dr Predraga Jovanovića.

NATAŠA TODORVIĆ

*Beograd, 7. 1. 2007.*



# Glava 1

## Klasična i hamiltonijanska dinamika

### 1.1 Njutnove jednačine kretanja

PROBLEM DVA TELA. Posmatrajmo jedan izolovan sistem i u njemu dva tela mase  $m_0$  i  $m_1$ . Po Njutnovoju teoriji gravitacije, jednačine kretanja ova dva tela su:

$$\frac{d^2\mathbf{u}_0}{dt^2} = \frac{\mathcal{G}m_1}{\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0\|^3}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0), \quad \frac{d^2\mathbf{u}_1}{dt^2} = \frac{\mathcal{G}m_0}{\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1\|^3}(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1) \quad (1.1)$$

gde su  $\mathbf{u}_1$  i  $\mathbf{u}_0$  vektori položaja u nekom inercijalnom referentnom sistemu (na primer *baricentrični položaj* ako je koordinatni početak u baricentru sistema),  $\mathcal{G}$  je gravitaciona konstanta, a  $\|\mathbf{x}\|$  je euklidska norma generičkog vektora  $\mathbf{x}$ .

Ako uzmemo da je  $\mathbf{r} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0$  relativni položaj jednog tela u odnosu na drugo ( $r_1, r_2, r_3$  su heliocentrične kordinate ako je  $\mathbf{u}_0$  vektor položaja Sunca), tada dve gore navedene vektorske jednačine mogu da se zapišu kao

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G}(m_0 + m_1)}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r} \quad (1.2)$$

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = 0 \quad (1.3)$$

Jednačina (1.2) opisuje relativno kretanje jednog tela u odnosu na drugo, a



jednačina (1.3) pokazuje da baricentar sistema  $\mathbf{s} = m_0\mathbf{u}_0 + m_1\mathbf{u}_1$  zadržava svoje inercijalno kretanje.

Rešenje jednačine (1.2) zavisice od početnog položaja  $\mathbf{r}(0)$  i početne brzine  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(0)$  i jedno je od najznačajnijih rezultata Njutnove teorije gravitacije, jer je za slučaj povezanog kretanja (tj. kad imamo elipsu) u savršenom skladu sa Keplerovim zakonima kretanja.

Sada je poželjno definisati neke veličine koje opisuju geometrijska svojstva orbitalne elipse, kao i trenutni položaj tela na njoj. Te veličine nazivaju se *orbitalni elementi*. Navešćemo ih ovde i opisaćemo ukratko njihovo značenje<sup>1</sup>.

*Oblik elipse* određen je *velikom poluosom*  $a$ , i *ekscentričnošću*  $e$ . Tačka na elipsi koja je najbliža centralnom telu, tj. žiži naziva se *pericentar* (ako telo orbitira oko Sunca *perihel*, ako orbitira oko Zemlje *perigeum*). Najudaljenija tačka na elipsi zove se *apocentar* (*apohel* i *apogeum* respektivno). Veličina koja opisuje *položaj tela na elipsi* data je *srednjom anomalijom*  $M$ . *Položaj elipse* u nekom ortogonalnom referentnom sistemu  $(x, y, z)$  čiji je koordinatni početak u centralnom telu dat je *inklinacijom*  $i$ , *longitudom čvora*  $\Omega$  i *argumentom perihela*  $\omega$ . Inklinacija je nagib orbitalne ravni u odnosu na ravan  $(x, z)$ . Presek ravni orbitalne ravni sa ravni  $(x, z)$  daće *liniju čvorova*, na kojoj se nalaze uzlazni i silazni čvor. *Uzlazni čvor* je tačka na elipsi u kojoj vrednosti  $z$  prelaze iz negativnih u pozitivne (za silazni čvor važi obrnuto). Uglovno rastojanje  $x$ -ose i pravca ka uzlaznom čvoru je *longituda čvora*  $\Omega$  kojom je data orijentacija orbitalne ravni u prostoru. *Argument pericentra* (*argument perihela* ako se radi o kretanju oko Sunca) je ugao između pravca ka uzlaznom čvoru i pravca ka pericentru, meri se u ravni orbite i njime je definisan položaj elipse u orbitalnoj ravni.

Ovih šest orbitalnih elemenata  $a, e, i, \omega, \Omega$  i  $M$  u potpunosti definišu položaj i brzinu kretanja sekundarnog tela u odnosu na primarno. Takođe, postoji bijekcija između ovih elemenata i šest komponenti faznog prostora,  $x, y, z, dx/dt, dy/dt, dz/dt$ . Ono što ovde treba naglasiti je da u slučaju Keplerovog kretanja imamo *pet konstantnih veličina* u 6-dimenzionom prostoru koji definišu trajektoriju (ako bismo

---

<sup>1</sup>Definicija orbitalnih elemenata je sastavni deo svakog udžbenika astronomije, stoga se ovde njima nećemo detaljnije baviti.

imali još jednu konstantu ne bi bilo kretanja) i jednu promenljivu veličinu, srednju anomaliju  $M$ , kojom je definisano kretanje po trajektoriji.

**PROBLEM N TELA.** U baricentričnom inercijalnom referentnom sistemu, jednačine kretanja u sistemu kojeg čine Sunce mase  $m_0$  i  $N - 1$  planeta čije su mase  $m_1, m_2, \dots, m_{N-1}$  imaju sledeći oblik:

$$\frac{d^2 \mathbf{u}_i}{dt^2} = -\mathcal{G} \sum_{j \neq i} m_j \frac{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j}{\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|^3} \quad (1.4)$$

$i, j = 0, \dots, N - 1$ .

Uvedimo sada heliocentrične položaje planeta  $\mathbf{r}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0$ , tada su jednačine (1.4) oblika:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G}(m_0 + m_i)}{\|\mathbf{r}_i\|^3} \mathbf{r}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \mathcal{G} m_j \left( \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_j\|^3} \right) \quad (1.5)$$

$i = 1, \dots, N - 1$ , dok je kretanje Sunca dato je sa

$$\mathbf{u}_0 = -\frac{\sum_{i=1}^{N-1} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=0}^{N-1} m_i}. \quad (1.6)$$

Jednačine (1.5) opisuju čuveni *problem N tela*. Heliocentrične jednačine kretanja nekog tela zanemarljivo male mase koje se potčinjava gravitacionim silama Sunca i  $N - 1$  tela izgledaju ovako:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_0}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} + \sum_{j=1}^{N-1} \mathcal{G} m_j \left( \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}\|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_j\|^3} \right) \quad (1.7)$$

gde je  $\mathbf{r}$  vektor položaja tela zanemarljivo male mase u odnosu na Sunce, a  $\mathbf{r}_j$ , su heliocentrični vektori položaja planeta čije su mase  $m_j$ . Jednačina (1.7) predstavlja *ograničeni problem*. Ako u sistemu imamo samo jednu planetu, Sunce i telo male mase, radi se o *ograničenom problemu tri tela*.

Ako su mase planeta  $m_j$  male u odnosu na Sunce, i nijedna od njihovih međusobnih razdaljina  $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$  nije mala, tada jednačine (1.5) i (1.7) mogu da se posmatraju kao jednačina problema dva tela (1.2), gde članovi koji sadrže mase planeta  $m_j$  igraju ulogu *malog poremećaja*. Zato će kretanje dato jednačinama (1.5) i (1.7)

biti vrlo slično Keplerovom kretanju, s tim što orbitalni elementni neće više biti konstantni. Ako je na primer  $\alpha$  neki od elemenata  $a, e, i, \omega, \Omega$ , promena orbitalnih elemenata će biti oblika  $d\alpha/dt = \mathcal{O}(m_j/m_0)$ , tj. biće reda veličine odnosa mase  $j$ -tog tela i mase Sunca, dakle jako malo. Za razliku od ovih pet elemenata koji su u slučaju problema dva tela bili konstantni, a sada se menjaju, promena  $M$  će u slučaju  $N$  tela biti oblika  $dM/dt = n + \mathcal{O}(m_j/m_0)$ , gde je  $n$  neporemećeno srednje kretanje.

Jednačine kojima su date spore promene orbitalnih elemenata su *Lagranževe jednačine*. Njihov značaj je u tome što pokazuju da se orbitalni elementi  $a, e, i, \omega, \Omega$  u sistemu gde imamo više od dva tela, menjaju jako sporo u vremenu, a srednja anomalija  $M$  jako malo odstupa od svog linearnog neporemećenog kretanja. Ove promene su zanemarnjive sa aspekta trajanja ljudskog života, ali ipak nisu u potpunosti zanemarljive. Orbitalni elementi koji sada važe za tačne, formalno predstavljaju neku vrstu tangentne orbite za dati trenutak, ili orbitu koju bi telo imalo kada bi svi poremećajni faktori odjednom nestali. Takvi 'aktuelni' orbitalni elementi nazivaju se *oskulatorni elementi*. Trenutak na koji se ovi elementi odnose je *epoha oskulacije*.

Vratimo se na kratko Lagranževim jednačinama kretanja. Lagranževa preformulacija Njutnove teorije kretanja ima jedan značajan nedostatak: jednačine su jako nepraktične za rešavanje, tj. nerešive su. Stoga ćemo napraviti jedan iskorak iz domena klasične mehanike u *hamiltonijansku dinamiku*, čije su jednačine kretanja proistekle iz Lagranževih, ali su daleko pogodnije za rešavanje kao i za izučavanje problematike kretanja.

## 1.2 Hamiltonijan

OSNOVNE DEFINICIJE. Za sistem običnih diferencijalnih jednačina tipa

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (1.8)$$

kažemo da su *hamiltonijanskog oblika*, ako je  $\mathbf{r}$  uređena  $2n$ -torka oblika  $(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$ , i ako postoji funkcija  $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$  takva da se jednačine (1.8)

mogu zapisati u obliku:

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_i} \quad (1.9)$$

gde je  $i = 1, \dots, n$ .

Za funkciju  $\mathcal{H}$  kažemo da je *hamiltonijanska funkcija ili Hamiltonijan sistema*, a za  $n$ -torke  $(x_1, \dots, x_n)$  i  $(v_1, \dots, v_n)$  respektivno, kažemo da su *koordinate* i *momenti*. Vektoski oblik  $(x_1, \dots, x_n)$  i  $(v_1, \dots, v_n)$  označićemo sa  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{v}$ . Za  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{v}$  kažemo da su *konjugovane promenljive*. Uređena  $2n$ -torka  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  je *fazni prostor* sistema. Dimenzija  $n$  vektora  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{v}$  je *broj stepeni slobode*.

### Hamiltonijan i problem dva tela

Većina jednačina koje figurišu u nebeskoj mehanici mogu se zapisati u hamiltonijanskom obliku. Jednačine drugog reda tipa

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\text{grad}_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) \quad (1.10)$$

mogu se napisati u obliku (1.9), tako što ćemo uzeti da je  $x_i = r_i$ ,  $v_i = \dot{r}_i$  i da je Hamiltonijan  $\mathcal{H} = 1/2 \|\mathbf{v}\|^2 + U(\mathbf{x})$ , kojeg možemo da zapišemo i u sistemu skalarnih promenljivih

$$\mathcal{H} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{2} - \frac{\mathcal{G}(m_0 + m_1)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \quad (1.11)$$

gde su  $x_1, x_2, x_3$  pravougla koordinate, a  $v_i = \dot{x}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  su odgovarajuće brzine. Hamiltonijan može da se zapiše i u nekom drugom sistemu koordinata, na primer u sfernom ili u cilindričnom (Morbidelli, 2002, Whitaker, 1937). U svakom od ovih sistema Hamiltonijan će imati drugačiji oblik, ali svi oni će biti međusobno ekvivalentni. Dakle, Hamiltonijan nekog sistema nije jedinstven, već zavisi od izbora koordinatnog sistema, a izbor jednog koordinatnog sistema u odnosu na drugi zavisice od tipa problema kojim se bavimo.

Sistem kojeg karakteriše očuvanje nekog svojstva- recimo 'energije' dozvoljava hamiltonijansku formu. To svojstvo ne mora uvek da bude energija. Postoje uslovi koje sistem treba da ispuni da bi Hamiltonijan sistema mogao da se tretira kao ukupna energija (detaljnije u Whittaker, 1937).

### Hamiltonijan i problem N tela

Jednačine ograničenog problema (1.7) se takođe mogu napisati u hamiltonijanskom obliku. Posmatrajmo levu stranu jednačine (1.7) kao  $-\text{grad}_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r})$ , gde je

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{\mathcal{G}m_0}{\|\mathbf{r}\|} - \mathcal{G} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{1}{\|\Delta_j\|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_j}{\|\mathbf{s}_j\|^3} \right), \quad (1.12)$$

$\mathbf{s}_j$  je heliocentrični položaj vektora  $j$ -te planete, a  $\Delta_j = \mathbf{r} - \mathbf{s}_j$ . Hamiltonijan za ograničeni problem  $n$  tela će opet biti zbir kinetičke energije  $T = \|\mathbf{v}^2\|/2$  i potencijalne koja je data jednačinom (1.12), dakle

$$\mathcal{H} = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} - \frac{\mathcal{G}m_0}{\|\mathbf{r}\|} - \mathcal{G} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{1}{\|\Delta_j\|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_j}{\|\mathbf{s}_j\|^3} \right) \quad (1.13)$$

gde su  $r_1, r_2, r_3$  koordinate, a  $v_1, v_2, v_3$  momenti i  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ . Primitimo da je Hamiltonijan (1.13) oblika  $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$ , i da je  $\mathcal{H}_0 = \|\mathbf{v}\|^2/2 - \mathcal{G}m_0/\|\mathbf{r}\|$  zapravo hamiltonijanski oblik za problem dva tela (1.11) gde je  $m_1 = 0$ , a  $\mathcal{H}_1$  igra ulogu *poremećaja*. Veličina tog poremećaja je reda veličine odnosa masa planeta i mase Sunca. S obzirom da su u jednačinama (1.13)  $\mathbf{s}_j$  neke funkcije vremena, Hamiltonijan (1.13) je oblika  $\mathcal{H} = (\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  i predstavlja primer *vremenski zavisnog* ili *neautonomnog Hamiltonijana*. Za razliku od njega Hamiltonijan za problem dva tela je *vremenski nezavisan* ili *autonoman*.

### Kanonske transformacije

Za vremenski nezavisnu transformaciju koordinata i momenata faznog prostora kažemo da je *kanonska* ukoliko ona čuva hamiltonijanski oblik jednačina kretanja bez obzira na izbor hamiltonijanske funkcije. Tačnije, transformacija  $(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \rightarrow (\mathbf{v}', \mathbf{x}')$  je kanonska ako  $\forall \mathcal{H}$ , postoji  $\mathcal{H}'$  takvo da je novi Hamiltonijan oblika

$$\mathcal{H}'(\mathbf{v}', \mathbf{x}') = \mathcal{H}(\mathbf{v}(\mathbf{v}', \mathbf{x}'), \mathbf{x}(\mathbf{v}', \mathbf{x}')) \quad (1.14)$$

i da pri tom jednačine kretanja  $\mathbf{x}'$  i  $\mathbf{v}'$  zadržavaju hamiltonijanski oblik

$$\dot{\mathbf{v}}' = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \mathbf{x}'}, \quad \dot{\mathbf{x}}' = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \mathbf{v}'}. \quad (1.15)$$

Klasa kanonskih transformacija je dosta restriktivna na skupu transformacija u faznom prostoru. U hamiltonijanskoj dinamici zanimaju nas uglavnom kanonske transformacije, upravo zato što jednačine kretanja zadržavaju svoj oblik. Stoga je jako važno da imamo pouzdan kriterijum za ocenu da li je neka transformacija kanonska ili nije.

Najpopularniji kriterijum za ocenu da li je transformacija kanonska, su takozvane *Poasonove zagrade*. Primere za primenu Poasonovih zagrada na realne hamiltonijanske sisteme kao i ostale kriterijume za ocenu da li je transformacija kanonska pogledati u Brouwer and Clemence (1969).

### Hamiltonijanski tok

*Hamiltonijanski tok* je vremenska evolucija koordinata i momenata koji su dati hamiltonijanskim jednačinama. Najznačajnija svojstva hamiltonijanskog toka su:

a) *Očuvanje zapremine*. Hamiltonijanski tok ima to svojstvo da i neka minimalna zapremina  $\delta V$  koja je generisana hamiltonijanskim tokom, ostaje nepromenjena (Liuvilova teorema). Dakle, sistem ne može da 'kolabira' u sistem koji je za dimenziju manji, niti može da doživi ekspanziju.

b) *Očuvanje Hamiltonijana*. Hamiltonijan ne menja vrednost duž toka kojeg generiše. U slučajevima kada Hamiltonijan predstavlja ukupnu energiju sistema<sup>2</sup> očuvanje Hamiltonijana je zapravo očuvanje energije i predstavlja *integral kretanja*.

c) *Vremenska evolucija funkcije duž hamiltonijanskog toka*. Neka je  $f(v, x)$  neka funkcija definisana u faznom prostoru, i  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{v}$  se ponašaju u skladu sa (1.9), tada diferenciranjem funkcije  $f$  dobijamo

$$\frac{df}{dt} = \text{grad}_{\mathbf{x}}f \cdot \dot{\mathbf{x}} + \text{grad}_{\mathbf{v}}f \cdot \dot{\mathbf{v}} = \{f, \mathcal{H}\} \quad (1.16)$$

Vrednost  $f(t) \equiv f(\mathbf{v}(t), \mathbf{x}(t))$  predstavlja *evoluciju funkcije  $f$  duž hamiltonijanskog toka  $\mathcal{H}$* . Time je zapravo omogućeno da se vrednost neke funkcije u bilo kom trenutku  $t$ , posmatra kao funkcija početnih uslova sistema. Iz razvoja funkcije u Tejlorov red moguće je izvesti i razvoj u Lijev red i definisati takozvani *Lijev operator*, koji ima široku primenu na probleme u nebeskoj mehanici. Detaljnija

---

<sup>2</sup>Napomenimo i ovde da Hamiltonijan ne mora uvek da bude isto što i ukupna energija sistema.

procedura dobijanja i primene Lijevo operatora na realne sisteme objavljena je u Dvorak (2005).

### 1.2.1 Integrabilni sistemi

U ogromnoj populaciji hamiltonijanskih sistema postoji jedna klasa stanovnika koji uživaju posebne privilegije: klasa integrabilnih sistema.<sup>3</sup> Integrabilni sistemi su dobro izučena oblast dinamike i obično su sastavni deo svake knjige koja se bavi klasičnom mehanikom.

Pretpostavimo da rešenje sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{dr_i}{dt} = F_i(\mathbf{r}), \quad i = 1, \dots, n \quad \mathbf{r} \equiv (r_1, \dots, r_n) \quad (1.17)$$

može da se zapiše u implicitnom obliku kao sistem integrala

$$\int_{\mathbf{r}(0)}^{\mathbf{r}(t)} \frac{dr_i}{F_i(\mathbf{r})} = \int_0^t dt. \quad (1.18)$$

Za sistem (1.17) kažemo da je *integrabilan*, ako integrali na levoj strani jednačine (1.18) mogu eksplicitno da se izračunaju, tj. rezultat oblika  $F'_i(\mathbf{r}(t)) - F'_i(\mathbf{r}(0)) = t$ , gde su  $F'_i$  primitivne funkcije  $1/F_i$ , dozvoljava da se  $\mathbf{r}(t)$  napiše kao eksplicitna funkcija  $t$ . Ovako definisana integrabilnost je zapravo dosta nezahvalna za ocenu integrabilnosti, jer ako se desi da  $\mathbf{r}$  ne može da se eksplicitno izrazi kao funkcija  $t$ , mi ne znamo da li je to zbog toga što  $F'_i$  ne postoji ili jednostavno nismo dovoljno spretni da  $F'_i$  izračunamo.

Posmatrajmo neki autonoman ( $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$ ) dinamički sistem, i pretpostavimo da su hamiltonske jednačine kretanja date u sistemu kanonskih promenljivih  $x_i, v_i$ . Ako je  $\Phi(x_i, v_i)$  neka funkcija koja ne menja vrednost za vreme  $t$  za bilo koji skup rešenja jednačine kretanja (1.9), tada za funkciju  $\Phi$  kažemo da je *konstanta kretanja* dinamičkog sistema. Odavde i iz (1.16) zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(x_i, v_i)}{dt} &= 0 = \sum_i \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt} \right) = \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i} \frac{\partial\Phi}{\partial v_i} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial v_i} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right) = \{\Phi, \mathcal{H}\}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

---

<sup>3</sup>Rečenica preuzeta iz Morbidelli, (1994)

Izrazom (1.19) je zapravo pokazano da, ako je  $\Phi$  konstanta kretanja, tada je Poasonova zagrada konstante kretanja  $\Phi$  i hamiltonijanske funkcije  $\mathcal{H}$  sistema jednaka nuli  $\{\Phi, \mathcal{H}\} = 0$ . Ovo je potreban i dovoljan uslov da neka funkcija  $\Phi$  bude konstanta kretanja. Takođe, ako su  $\Phi_j, \Phi_k$  dve nezavisne konstante kretanja tada je i

$$\{\Phi_j, \Phi_k\} = 0 \quad \forall j \neq k. \quad (1.20)$$

Osnovno svojstvo konzervativnih integabilnih sistema je da poseduju *konstante kretanja*, pored 'energije' koja je po definiciji konstantna. Svaka od ovih konstanti određuje neku hiperpovrš. Presek ovih hiperpovrš biće zapravo trajektorija po kojoj se telo kreće. Da bismo u potpunosti poznavali kretanje, tj. trajektoriju potrebno nam je bar onoliko konstanti kretanja koliko imamo i stepeni slobode, dakle  $n$  (Liuvilova teorema, Arnold 1989, poglavlje 10).

Međutim, ni ove olakšice koje obezbeđuje Liuvilova teorema ne ukazuju na to *kako* da odredimo sve integrale kretanja. Ako nam je npr. poznato  $m$  integrala kretanja, i  $m < n$ , mi ipak ne znamo za preostalih  $n - m$  integrala da li oni ne postoje ili nismo dovoljno vešti da ih odredimo. Naslućujemo, da je vrlo teško naći konstante kretanja kao eksplicitne funkcije koordinata i momenata. Ali zato integrabilni sistemi poseduju određenu strukturu, za koju je definisan poseban sistem koordinata o kojem će biti više reči u sledećem poglavlju. U tom preformulisanom sistemu put do konstanti kretanja sistema je daleko eksplicitniji.

### 1.2.2 Akcija-ugao promenljive

Ako pretpostavimo da su ispunjene hipoteze Liuvilove teoreme, i ako je  $n$ -dimenziona mnogostrukost u sistemu sa  $n$  stepeni slobode definisana odgovarajućim konstantama kretanja  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  *kompaktna*, tada je moguće definisati sistem kanonskih promenljivih, koordinata i momenata  $\mathbf{q}$  i  $\mathbf{p}$  takvih da

*i)* koordinate  $q_1, \dots, q_n$  su *uglovi* koji su ciklično definisani na intervalu  $[0, 2\pi]$ . Kanonska transformacija kojom originalne koordinate  $\mathbf{x}$  i momenti  $\mathbf{v}$  prelaze u  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  je  $2\pi$ -periodična funkcija po  $q_1, \dots, q_n$ .

*ii)* U novom sistemu promenljivih  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  Hamiltonijan je funkcija samo momenata  $\mathbf{p}$ , tj.  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\mathbf{p})$ .



Momente  $\mathbf{p}$  nazivamo *akcijama* ili *dejtvom* sistema, a ovako definisane koordinate  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  nazivamo sistemom *akcija-ugao* promenljivih. Značaj Arnold-Liuvilove teoreme je u tome što ona zapravo daje mogućnost da se svaki integrabilni Hamiltonijan može zapisati u sistemu promenljivih akcija-ugao, ali tako da Hamiltonijan  $\mathcal{H}(\mathbf{p})$  bude funkcija samo akcija. Naglasimo da se sistem akcija-ugao promenljivih može konstruisati samo za slučaj integrabilnih sistema.

### Kretanje u integrabilnom sistemu

Jednačine kretanja u nekom integrabilnom sistemu date su sa:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}(\mathbf{p}) = 0, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}(\mathbf{p}) \equiv \omega_j(\mathbf{p}), \quad j = 1, \dots, n \quad (1.21)$$

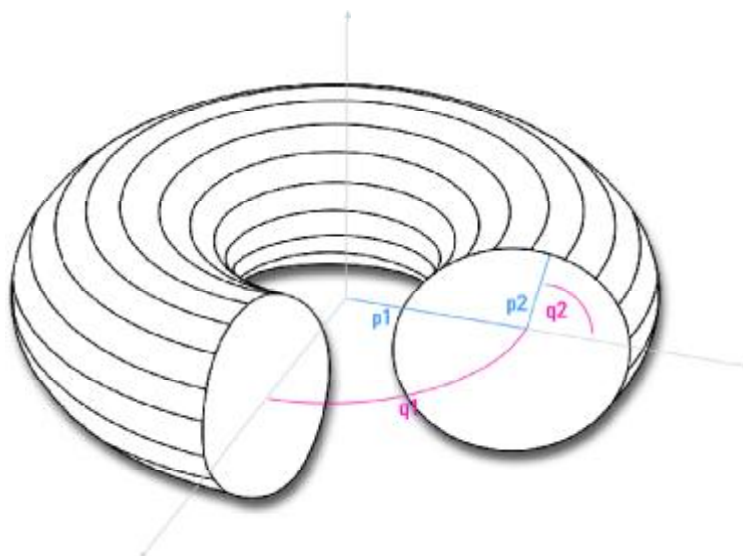
Iz prvog izraza očigledno je da su akcije konstantne, tačnije konstante kretanja, dok uglovi imaju konstantne izvode po vremenu. S obzirom da su  $q_j$  uglovi, njihovi izvodi po vremenu  $\omega_j$  predstavljaju zapravo njihove frekvencije.

U sistemu sa  $n$  stepeni slobode, imaćemo da je prostor akcija  $n$ - dimenziona mnogostrukost smeštena u  $2n$ -dimenzioni prostor. Jedna takva mnogostrukost je i *torus* i obično se označava sa  $\mathbf{T}^n$ . U slučaju sistema sa jednim stepenom slobode torus  $\mathbf{T}^1$  je krug, u sistemu sa dva stepena slobode  $\mathbf{T}^2$  je telo ilistrovano na slici (1.1).

Torus  $\mathbf{T}^2$  je zapravo definisan sa dva kruga. Poluprečnici tih krugova biće akcije koje su konstantne, a položaj tela na torusu dat je sa dva ugla koji se očigledno kreću na intervalu  $[0, 2\pi]$ . Iz (1.21) zaključujemo da su izvodi ovih uglova po vremenu tj. njihove frekvencije konstantne. Primitimo da trajektorija koja leži na torusu ima helikoidan oblik.

Za torus kažemo da je *invarijantan* za dinamiku, a za fazni prostor da je *raslojen* ili *podeljen* torusima. Svaki početni uslov u nekom integrabilnom sistemu generiše kretanje koje leži na nekom invarijantnom torusu. S obzirom da važi pretpostavka da se dve različite orbite ne seku, zaključujemo da će ovi torusi biti smešteni (upisani) jedan u drugi.

S obzirom da su akcije konstantne, kretanje će biti definisano samo frekvenci-



Slika 1.1: Kretanje na invarijantnom torusu  $\mathbf{T}^2$  definisano je sa dva ugla  $q_1$  i  $q_2$ , a sam torus sa dve akcije  $p_1$  i  $p_2$  koje su zapravo poluprečnici dva kruga, velikog oko kojeg je torus 'obavijen' i malog kruga koji je 'omotan' oko torusa.

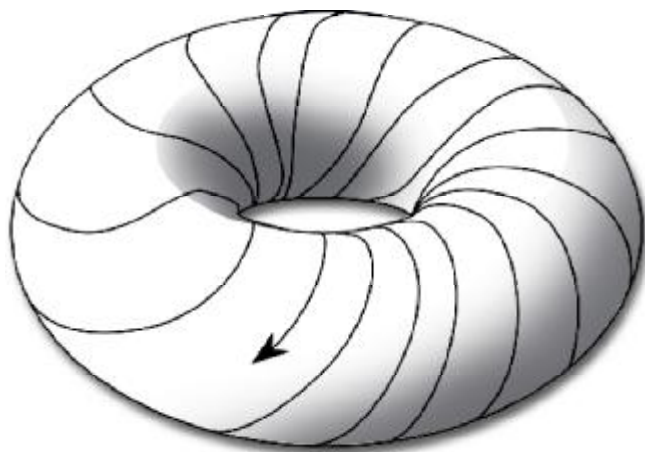
jama  $\omega_j(\mathbf{p})$ . Ukoliko su frekvencije takve da jednačina

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_{j=1}^n k_j \omega_j = 0, \quad \mathbf{k} \equiv (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \quad (1.22)$$

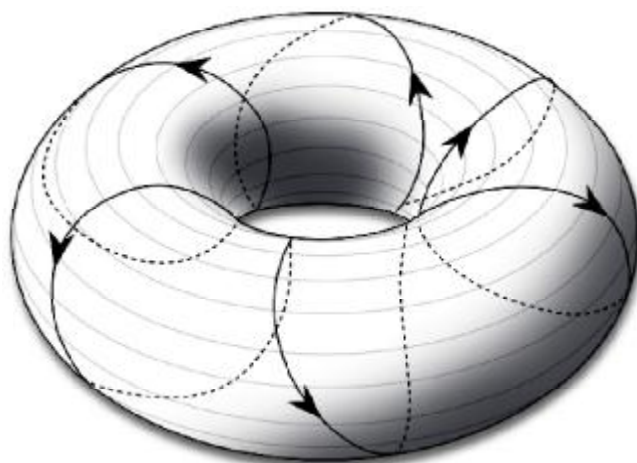
ima jedinstveno rešenje oblika  $\mathbf{k} = (0, \dots, 0)$ , kretanje je *nerezonantno* ili *kvazi-periodično*. Kažemo da je torus je *gusto* pokriven trajektorijom. Preciznije, za svaku tačku  $q_0$  na torusu, u nekom trenutku trajektorija će proći kroz njenu proizvoljno malu okolinu  $U(q_0)$ . Takođe, trajektorija ne može proći dva puta kroz istu tačku, jer bi u tom trenutku kriva postala zatvorena i kretanje bi bilo periodično.

Ako jednačina (1.22) ima  $n-1$  linearno nezavisnih nenula rešenja koja su oblika  $\mathbf{k}^1, \dots, \mathbf{k}^{n-1}$ , kretanje na torusu je *periodično*. U ovom slučaju bi se svi nezavisni uglovi kojih ima  $n-1$  mogli izraziti kao periodična funkcija jednog ugla. Za ovaj tip kretanja kažemo i da je *potpuno rezonantno*.

Imamo i međuslučaj kada je broj nenula rešenja jednačine (1.22) jednak  $m$ , gde je  $m < n-1$ . Tada je kretanje *u rezonanci mnogostukosti m*. Projekcije kre-



Slika 1.2: Kvazi-periodično kretanje na invarijantnom torusu  $\mathbf{T}^2$ . Kriva je otvorena, rešenje rezonantne relacije (1.22) je jedinstveno nula rešenje. Za ovaj tip kretanja još kažemo da je *nerezonantno* ili *gusto*.



Slika 1.3: Periodično kretanje na invarijantnom torusu  $\mathbf{T}^2$  biće zatvorena kriva. Rezonantna relacija (1.22) ima  $n - 1$  nenula rešenja, i svako od ovih rešenja može se predstaviti kao periodična funkcija jednog ugla.

tanja na  $n - m$  dimenzioni torus definisan sa  $q_{m+1}, \dots, q_n$  odgovara kretanju koje je gusto, a projekcija na  $m$ -dimenzioni torus definisan uglovima  $q_1, \dots, q_m$  predstavlja periodično kretanje.

*Red rezonance* se definiše kao

$$\min_{1 \leq j \leq m} |\mathbf{k}^j|, \quad \text{gde je } |\mathbf{k}^j| \equiv |k_1^j| + \dots + |k_n^j|. \quad (1.23)$$

Hamiltonijanski sistem je *degenerativan* ako je determinatna Hesijanove matrice  $\det[\partial^2 \mathcal{H} / \partial p_i \partial p_j] = 0$ . U suprotnom, sistem je *nedegenerativan*. Problem dva tela je primer degenerativnog sistema.

### 1.2.3 Kvazi-integrabilni hamiltonijanski sistemi

Za hamiltonijanski sistem kažemo da je *kvazi-integrabilan*, ako postoji skup kanonskih promenljivih akcija-ugao takvih da je hamiltonijanska funkcija oblika

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{p}) + \varepsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (1.24)$$

gde je  $\varepsilon$  mali parametar.  $\mathcal{H}_0$  se tretira kao *integrabilna aproksimacija*, a  $\mathcal{H}_1$  igra ulogu *poremećaja*. Integrabilna aproksimacija  $\mathcal{H}_0$  predstavlja odstupanje od realnog kretanja (realno kretanje generisano sa  $\mathcal{H}$ ) veličine  $\varepsilon$  za neko jedinično vreme. Možemo da ga posmatramo i kao jedinično odstupanje za vreme  $1/\varepsilon$ . Po isteku vremena  $1/\varepsilon$  integrabilna aproksimacija  $\mathcal{H}_0$  više nije u stanju da dobro opiše kretanje<sup>4</sup>.

Ovde na scenu stupa *teorija poremećaja* gde je glavni cilj da se na što bolji način opiše sistem čije jednačine kretanja nisu integrabilne. Značaj teorije poremećaja nije samo u tome što ona predstavlja svojevrsni matematički izazov, već i u tome što se ona dosta primenjuje na probleme u nebeskoj mahanici.

Princip je ovde nešto drugačiji od uobičajenog. Umesto da posmatramo jednačine koje opisuju stvarno kretanje i umeju da budu jako glomazne - posmatračemo samo hamiltonijansku funkciju. Tragamo za nekom kanonskom transformacijom

---

<sup>4</sup>U Sunčevom sistemu npr., poremećajni parametar  $\varepsilon$  predstavlja odnos mase Jupitera i mase Sunca i on je reda  $\sim 10^{-3}$ .

koja je bliska identičkom preslikavanju i ima oblik

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^1 + \varepsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{p}^1, \mathbf{q}^1), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^1 + \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{p}^1, \mathbf{q}^1) \quad (1.25)$$

Kada se (1.25) uvrsti u izraz (1.24), novi Hamiltonijan je

$$\mathcal{H}^1(\mathbf{p}^1, \mathbf{q}^1) = \mathcal{H}_0(\mathbf{p}^1) + \varepsilon \overline{\mathcal{H}}_1(\mathbf{p}^1) + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(\mathbf{p}^1, \mathbf{q}^1) \quad (1.26)$$

gde su  $\overline{\mathcal{H}}_1$  i  $\mathcal{H}_2$  neke nove hamiltonijanske funkcije. Ovaj oblik Hamiltonijana naziva se *Birkhoffovljeva normalna forma* prvog reda po  $\varepsilon$ . Ako nam pođe za rukom da pronađemo kanonsku transformaciju kojom Hamiltonijan prelazi u oblik (1.26), tada je  $\mathcal{H}_0 + \varepsilon \overline{\mathcal{H}}_1$  integrabilna aproksimacija reda  $\varepsilon^2$ . Ovaj postupak može iterativno da se ponavlja. Tada bi transformacija u nekom  $r$ -tom koraku bila

$$\mathbf{p}^{r-1} = \mathbf{p}^r + \varepsilon^r \mathbf{f}_r(\mathbf{p}^r, \mathbf{q}^r), \quad \mathbf{q}^{r-1} = \mathbf{q}^r + \varepsilon^r \mathbf{g}_r(\mathbf{p}^r, \mathbf{q}^r). \quad (1.27)$$

Odgovarajući Hamiltonijan u sistemu promenljivih akcija-ugao  $\mathbf{p}^r, \mathbf{q}^r$  je

$$\mathcal{H}^r(\mathbf{p}^r, \mathbf{q}^r) = \mathcal{H}_0(\mathbf{p}^r) + \varepsilon \overline{\mathcal{H}}_1(\mathbf{p}^r) + \dots + \varepsilon^r \overline{\mathcal{H}}_r(\mathbf{p}^r) + \varepsilon^{r+1} \overline{\mathcal{H}}_{r+1}(\mathbf{p}^r, \mathbf{q}^r), \quad (1.28)$$

i predstavlja nešto bolju aproksimaciju realne dinamike. Možemo pretpostaviti da se ovaj postupak može ponavljati beskonačno puta i da će tada Hamiltonijan  $H^\infty(p^\infty)$  zapravo predstavljati realno kretanje. Iz radova Poenkarea znamo da je ovo isuviše optimistična pretpostavka i da se ipak moramo zaustaviti na nekom optimalnom  $r$ -tom koraku koje će zavisi od  $\varepsilon$ , ali i od samog sistema.

Postoji ceo analitički aparat koji se bavi time kako hamiltonijanske funkcije razviti u red. Treba imati u vidu da hamiltonijanska funkcija treba da dozvoljava razvoj u red koji je apsolutno konvergentan. Međutim, redovi često nisu konvergentni, zbog problema *malih imenilaca*. Napomenućemo samo da članovi ovih redova u imeniocu imaju  $\mathbf{k} \cdot \omega_0(\mathbf{p})$  i da zbog toga rezonantno kretanje predstavlja singularitet. S obzirom da je za nedegenerativni hamiltonijanski sistem, skup rezonantnih torusa beskonačno gust, singulariteti i njihove okoline će preplaviti ceo prostor i cela ova analiza tada gubi smisao. Ovaj problem je prevaziđen na dva načina. Prvi, tako što se razmatraju samo one rezonance čiji je red manji od nekog fiksiranog  $K$ . Hamiltonijan će tada biti razdvojen na dva dela, deo koji sadrži

rezonance čiji je red manji od  $K$  (broj tih članova biće konačan), i na rezonantne članove reda većeg od  $K$  koji se zanemaruju u datoj aproksimaciji, tj. Hamiltonijan će biti oblika  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\leq K} + \mathcal{H}^{\geq K}$ . Drugi način je uvođenje takozvanog diofantskog uslova, gde tretiramo samo one tačke u prostoru  $\mathbf{p}^*$  za koje važi

$$|\mathbf{k} \cdot \omega_0(\mathbf{p}^*)| > \frac{\gamma}{|\mathbf{k}|^\tau}, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n, \quad \mathbf{k} \neq 0 \quad (1.29)$$

za neko pozitivno  $\gamma$  i  $\tau$  (dokazano je da je mera ovog skupa pozitivna). Dakle, opredeljeni smo samo za one tačke koje su dovoljno daleko od rezonantnih singulariteta.

Fenomen neintegrabilnosti sistema (nerešivosti jednačina kretanja) može se identifikovati sa pojavom haotičnog kretanja. U glavi 3 biće više reči o ovoj temi, kao i o metodama kojima se kaos detektuje. Detaljniji analitički pristup ovoj problematici objavljen je u Morbidelli (2002), a teoremu o neintegrabilnosti pogledati u Giorgilli (1989).



## Glava 2

# Osnovne teoreme nebeske mehanike

KAM teorema i teorema Nehoroševa svrstane su u najznačajnije rezultate hamiltonijanske dinamike. Obe teoreme su značajne, jer daju svojevrsan uvid u dinamička svojstva faznog prostora kada su vrednosti poremećaja male. U nekom smislu one su komplementne: KAM teorema razmatra akcije *lokalno*, opisuje dinamiku samo nerezonantnih kretanja i obezbeđuje stabilnost na neograničeno vreme. Teorema Nehoroševa razmatra ceo prostor, dakle *globalno*, uključujući i rezonantne i nerezonantne oblasti, ali zato neograničenu stabilnost zamenjuje stabilnošću na ograničeno vreme. Teorema Nehoroševa, za razliku od KAM teoreme, ima geometrijski pristup faznom prostoru i odnosi se na sisteme sa više stepeni slobode ( $n > 2$ ).

### 2.1 KAM teorema

U neintegrabilnom hamiltonijanskom sistemu jedan od osnovnih zadataka je nalaženje načina da se oslobodimo zavisnosti od uglova koji su najčešće glavna prepreka za integrabilnost, tj. cilj je konstruisati kanonsku transformaciju kojom  $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  prelazi u oblik  $\mathcal{H}'(\mathbf{p}')$ . Kolmogorov je 1954. godine dao ideju kako da se prevaziđe problem neintegrabilnosti za jednu klasu Hamiltonijana. Navešćemo



ovde osnovnu ideju Kolmogorovljevog pristupa.

Posmatrajmo hamiltonijanski sistem oblika  $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{p}) + \varepsilon\mathcal{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  kada je  $\|\mathcal{H}_1\| = \mathcal{O}(\|\mathbf{p}\|^2)$  i tačku  $\mathbf{p}_0$  u prostoru akcija za koju važi:

- i)  $\omega_0 = \text{grad}_{\mathbf{p}}\mathcal{H}_0(\mathbf{p}_0)$  zadovoljava diofantovski uslov za neke konstante  $\gamma$  i  $\tau$
- ii)  $\mathcal{H}_0$  je lokalno nedegenerisana u  $\mathbf{p}_0$ , odnosno determinanta Hesijanove matrice  $[\partial^2\mathcal{H}_0/\partial p_i\partial p_j(\mathbf{p}_0)]$  nije jednaka nuli.

postoji granično  $\bar{\varepsilon}$  koje zavisi od  $\omega_0$ , takvo da za svako  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  neka kanonska transformacija  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{I}, \phi)$  dozvoljava da se Hamiltonijan zapiše u obliku Kolmogorovljeve normalne forme:

$$H(\mathbf{I}, \phi) = \mathcal{H}_0(\mathbf{I}) + \mathcal{H}_1(\mathbf{I}, \phi) \text{ i } \|\mathcal{H}_1\| = \mathcal{O}(\|\mathbf{I}\|^2) \quad (2.1)$$

gde su  $\text{grad}_{\mathbf{I}}\mathcal{H}_0(\mathbf{0}) = \omega_0$ .

Teorema Kolmogorova zapravo dozvoljava da za kvazi-integrabilne Hamiltonijane i za male poremećaje invarijantni torusi sa diofantovskim frekvencijama opstaju u poremećenoj dinamici. Kasnije su Moser (1962) i Arnold (1963b) doradili teoremu, te po njima ona i figuriše pod ovim imenom- *KAM (Kolmogorov Arnold Moser) teorema*. Invarijantni torusi na kojima su trajektorije nerezonantnih kretanja nazivaju se *KAM torusi*.

### 2.1.1 Svojstva KAM torusa

Dinamika integrabilne aproksimacije Hamiltonijana  $\mathcal{H}_0(\mathbf{p})$  zapravo deli fazni prostor na invarijantne toruse, gde su akcije  $\mathbf{p}$  konstantne a uglovi  $\mathbf{q}$  cirkulišu linearno u vremenu sa frekvencijama  $\omega_0(\mathbf{p})$  (leva strana slike 2.1). Kada se integralu doda mali poremećaj  $\varepsilon\mathcal{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , KAM teorema obezbeđuje opstanak torusa sa diofantovskim frekvencijama za tok kompletnog Hamiltonijana  $\mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{H}_1$ . Za svaki invarijantni torus može se uvesti novi skup lokalnih promenljivih akcija-ugao  $(\mathbf{I}, \phi)$  takvih da se Hamiltonijan može zapisati u obliku (2.1). U ovom sistemu promenljivih kretanje na torusu je vrlo jednostavno: Akcije  $\mathbf{I}$  su konstantne na torusu, a uglovi cirkulišu linearno u vremenu. Ako se, međutim, vratimo na stari

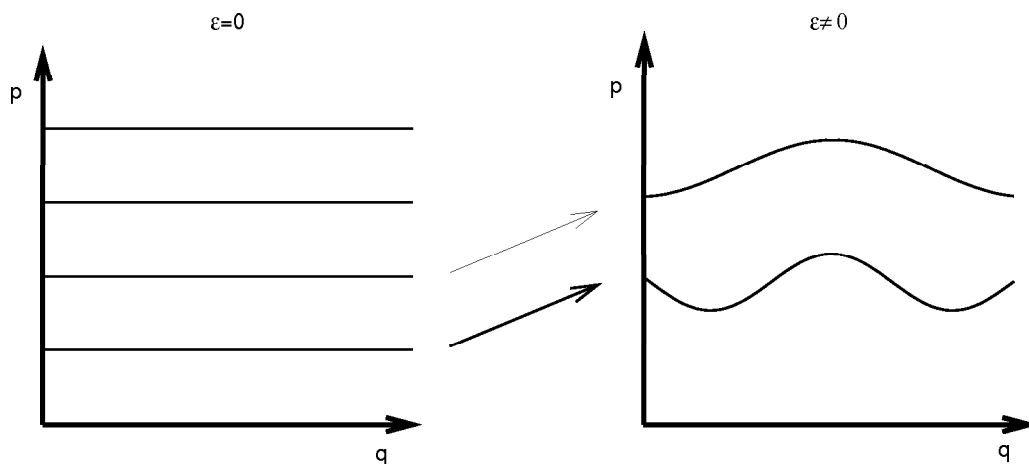
sistem koordinata  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , uglovi  $\mathbf{q}$  neće više biti linearne funkcije vremena, akcije  $\mathbf{p}$  imaće promene koje su periodične po uglovima i kvazi-periodične funkcije vremena. Takođe, postoji inverzna kanonska transformacija  $(\mathbf{I}, \phi) \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{q})$  kojom se poremećeni torus vraća u svoj prvobitni oblik, ali ne postoji analitička transformacija jedinstvena za sve poremećene toruse; jedna transformacija odgovara jednom torusu. Za dati vektor frekvencija kaže se da je poremećeni invarijantni torus *transliran* u faznom prostoru u odnosu na neporemećeni. Ovu situaciju ilustruje slika 2.1.

Glavni nedostatak KAM teoreme je to što ne daje nikakvu informaciju o kretanju koje ne zadovoljava diofantovske uslove. Ne znamo, dakle, šta se dešava sa rezonantnim oblastima. Pretpostavlja se da one formiraju jednu haotičnu zonu. KAM torusi, bez obzira na ovaj nedostatak, daju veoma značajne informacije o dinamici faznog prostora.

Veličina poremećajnog člana  $\varepsilon$  određuje koji od torusa sa diofantovskim frekvencijama može da opstane. Po teoremi Kolmogorova  $\varepsilon$  mora da bude manje od neke granične vrednosti  $\bar{\varepsilon}$ . Granično  $\bar{\varepsilon}$  zavisi od vektora frekvencija, preko konstanti  $\gamma$  i  $\tau$ , koje zapravo i karakterišu Diofantova svojstva. U teoremi Kolmogorova ispostavlja se da je  $\bar{\varepsilon} \sim \gamma^4$ . Stoga će sa povećanjem poremećaja broj torusa koji opstaju kao invarijantni biti znatno redukovani. Samo oni torusi gde je  $\gamma$  dovoljno veliko biće u stanju da 'prežive' poremećaj. Kada vrednost  $\varepsilon$  pređe  $\bar{\varepsilon}$ , nijedan torus neće moći da opstane. Oni se kidaju i formiraju haotične slojeve u faznom prostoru.

U hamiltonijanskom sistemu sa dva stepena slobode svaki KAM torus deli fazni prostor na dve nepovezane oblasti (nepovezane u smislu kretanja). Fazni prostor sistema sa dva stepena slobode je zapravo 4-dimenzionalan. Zbog očuvanja Hamiltonijana (jedna dimenzija manje) kretanje se odvija u 3-dimenzionalnom prostoru. Invarijantni torus je 2-dimenziona mnogostrukost koja je smeštena u 3-dimenzionalni prostor. Kao posledica, trajektorije ne mogu preći sa jedne strane torusa na drugu, a da ne pređu preko invarijantnog torusa. Međutim prelaz preko invarijantnog torusa, zbog same definicije invarijantnosti je nemoguć (slika 2.2).

Za hamiltonijanski sistem sa više stepeni slobode zbog kodimenzionalnosti KAM

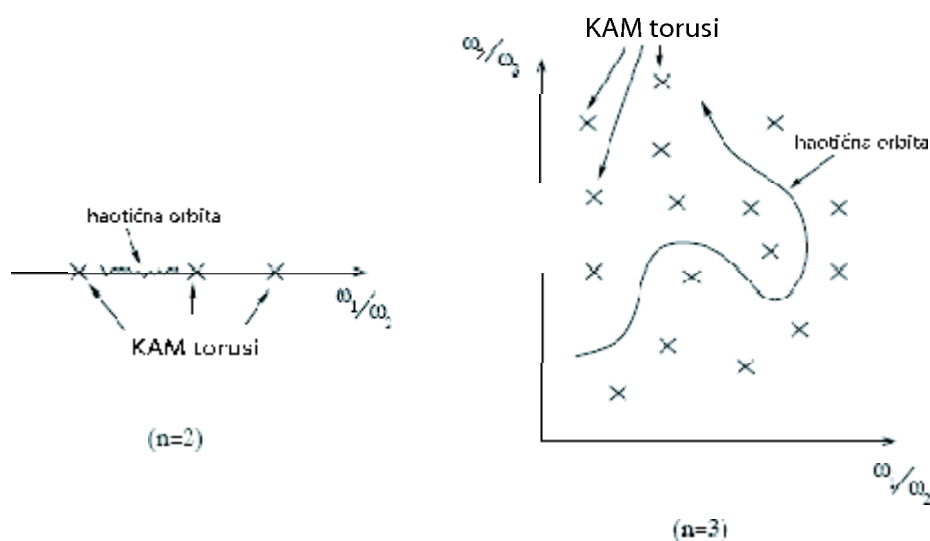


Slika 2.1: Za integrabilni Hamiltonijan, prostor je podeljen invarijantnim torusima, gde su akcije konstantne a uglovi imaju linearnu promenu u vremenu (leva strana slike). KAM teorema obezbeđuje da, kada se Hamiltonijanu doda mali poremećaj (desna strana slike), torusi sa diofantovim frekvencijama opstaju, ali akcije više nisu konstantne, nego periodične funkcije uglova. Štaviše, srednje akcije za poremećeni torus se razlikuju od odgovarajućih akcija neporemećenog torusa.

torusa i faznog prostora ne važi ovaj uslov izolacije. Sistem sa  $n$  stepeni slobode je  $2n$ -dimenzionalan. Zbog konstantnosti Hamiltonijana imaćemo jednu dimenziju manje, dakle  $2n - 1$ . KAM torus je dimenzije  $n$ ; zato će nastati kodimenzionalnost reda  $n - 1$ . To znači da će prostor biti podeljen na nepovezane oblasti samo u slučaju  $n = 2$ . Ovo se jako teško vizualizuje, jer je ljudski um ipak predviđen za prostor čija je dimenzija 3. Ali može se dati jedno intuitivno objašnjenje koje dosta dobro ilustruje situaciju. Umesto da zamišljamo dinamiku u  $n$ -dimenzionalnom prostoru, posmatrajmo prostor frekvencija koji je  $n - 1$  dimenzionalan u sistemu sa  $n$  stepeni slobode (uzima se u obzir činjenica da je Hamiltonijan konstantan).

U sistemu sa dva stepena slobode, na površi gde je Hamiltonijan konstantan, prostor frekvencija je jednodimenzionalan, tj. linija. Ta linija je određena odno-

som  $\omega_1/\omega_2$ . U ovom prikazu KAM torusi biće fiksirane tačke koje zadovoljavaju diofantove uslove i nalaze se na liniji frekvencija (leva strana slike 2.2). Ovde je očigledno da je linija frekvencija podeljena KAM torusima na nepovezane delove. Trajektorije koje nisu na invarijantnim torusima, mogu da odstupaju od linije  $\omega_1/\omega_2$ , ali neće moći da pređu tačke koje zadovoljavaju diofantovske uslove. Zato je opseg tih varijacija ograničen KAM torusima.



Slika 2.2: Intuitivni pogled na difuziju: u faznom prostoru sa dva stepena slobode (leva strana) kada je Hamiltonijan konstantan, fazni prostor je linija, a u sistemu sa tri stepena slobode - ravan (desna strana). Invarijantni KAM torusi predstavljani su invarijantnim tačkama. Difuzija je u prvom slučaju ograničena KAM torusima, dok je u ravni difuzija moguća u svim pravcima (slika preuzeta iz Morbidelli, 2002.)

Uzmimo sada sistem sa tri stepena slobode (desna strana slike 2.2). Na površi gde je Hamiltonijan konstantan, imaćemo da je prostor određen frekvencijama dvodimenzionalan. Biramo da koordinate tog sistema budu  $\omega_1/\omega_2$  i  $\omega_2/\omega_3$ . I ovde će KAM torusi biti tačke u ravni frekvencija, ali sada trajektorije koje nisu na KAM torusu mogu slobodno da se kreću među torusima. I kao što vidimo na slici, KAM torusi ih ne sprečavaju da se slobodno kreću, tj. da se difuzno šire u faznom prostoru. Ali ova slika ipak predstavlja idealizovanu situaciju, jer ovako

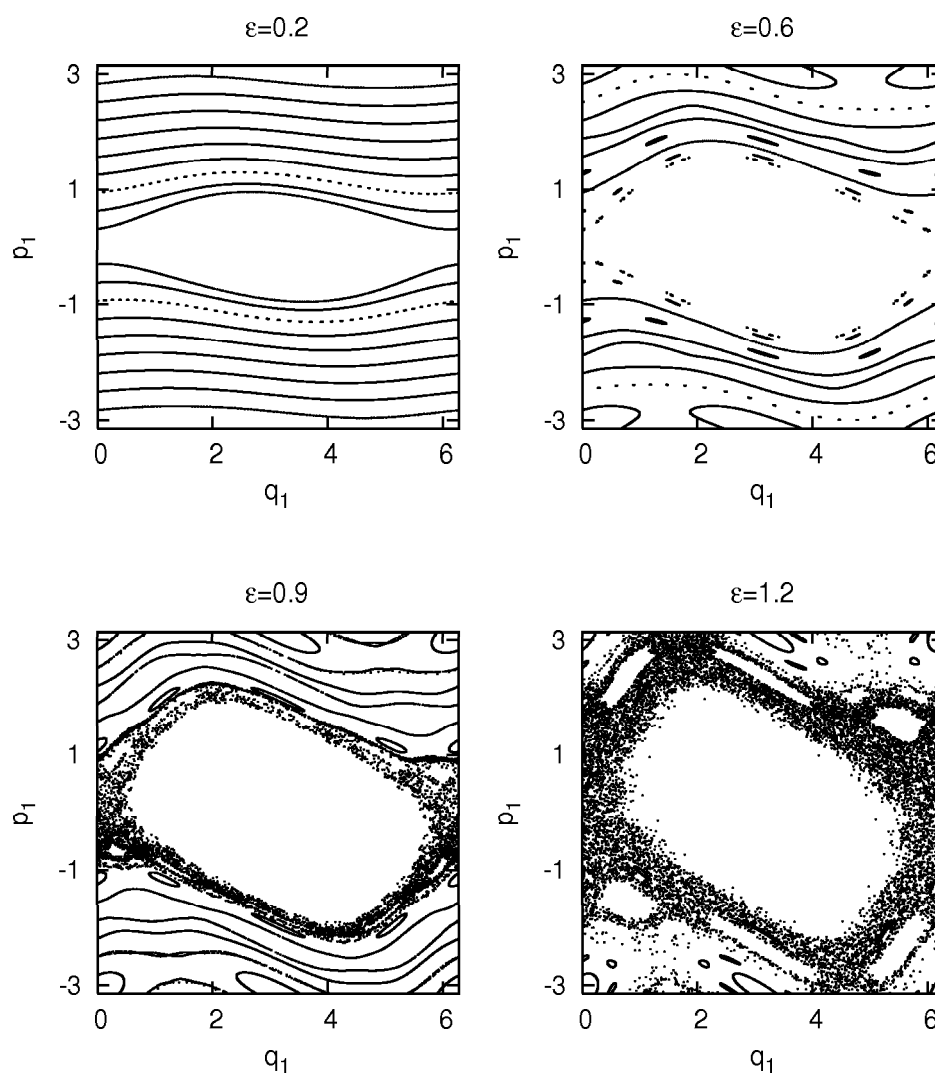
opisano kretanje među KAM torusima zahteva ekstremno mnogo vremena, zato što je difuzija eksponencijalno spora u odnosu na inverznu vrednost udaljenosti od invarijantnog torusa. U sistemu sa više od dva stepena slobode skup KAM torusa je jako gust (jer je i skup racionalnih brojeva gust) i može da stvori vrlo efektne prepreke za kretanje u faznom prostoru. Te prepreke mogu se preći samo u ekstremno dugim vremenskim intervalima.

### 2.1.2 Numerički primeri

Da bismo bolje razumeli dinamičku strukturu prostora koju opisuje KAM teorema poslužićemo se jednim numeričkim primerom. Imajmo u vidu da se sistem sa dva stepena slobode teško može prikazati slikom. Poenkare je dao rešenje koristeći *tehniku površi preseka*. Dobijene površi, takozvane *Poenkareove površi preseka* dosta se koriste u praksi, jer omogućuju da se slikom predstavi dinamika sistema sa dva stepena slobode.

Razmotrimo hamiltonijanski sistem  $\mathcal{H}(p_1, q_1, p_2, q_2)$  gde su  $p_1, q_1$  i  $p_2, q_2$  kanonske akcija-ugao promenljive. Uzmimo u obzir samo one trajektorije koje zadovoljavaju uslov  $\mathcal{H}(p_1, q_1, p_2, q_2) = C$ , gde je  $C$  neka konstanta. Biramo zatim neku dvodimenzionalnu površ  $\Sigma$  (obično je to ravan) takvu da većina trajektorija koje razmatramo seče  $\Sigma$ . Akcije generalno imaju male promene, a uglovi cirkulišu na intervalu  $[0, 2\pi]$ . Zato biramo da ravan  $\Sigma$  bude definisana konstantnom vrednošću jednog od uglova, neka to bude  $q_2 = 0$ . Za datu vrednost konstante  $C$  vrednosti  $p_1$  i  $q_1$  na površi  $q_2 = 0$  jednoznačno određuju vrednost preostale akcije  $p_2$ , koja se može izračunati rešavanjem implicitne jednačine  $\mathcal{H}(p_1, q_1, p_2, 0) = C$ . Numeričkom integracijom jednačina kretanja određuju se sukcesivni prolazi svake trajektorije kroz površ  $\Sigma$ . Ono što je ovde najzanimljivije je to da upravo ovako definisan presek daje vrlo preciznu sliku kretanja u faznom prostoru. Međutim, postoji jedna mala opasnost, a to je pogrešan izbor ravni  $\Sigma$ , jer se tako može desiti da trajektorija vrlo retko prolazi kroz ravan ili da je ne seče uopšte, što bi rezultovalo nejasnom i nepreciznom slikom. Napomenimo i to da je potrebno unapred izabrati smer trajektorije, tj. biramo samo one preseke gde je  $\dot{q}_2 > 0$  (ili obrnuto).

Poenkareova površ može se dati i za neki diskretizovani sistem pomoću stan-



Slika 2.3: Fazni portret standardne mape za različite vrednosti  $\epsilon$ . Povećanjem poremećajnog člana KAM torusi postaju sve nepravilniji i ređi, a haotična oblast sve rasprostanjenija.

darne mape<sup>1</sup>. Uzmimo jedan primer gde su sukcesivni prolazi orbite kroz ravan dati sa:

$$q'_1 = q_1 + p_1, \quad p'_1 = p_1 + \varepsilon \sin(q_1) \quad (2.2)$$

Biramo za početne vrednosti 20 tačaka za koje je  $q_1 = 0$ , a  $p_1$  su ravnomerno raspoređene duž  $p_1$  na intervalu  $[-\pi, \pi]$ . Ukoliko je trajektorija na KAM torusu, sukcesivni prolazi orbite kroz ravan  $q_2 = 0$ , formiraće neku jednodimenzionalnu krivu. Nerezonantno kretanje je kvazi-periodično odakle sledi da trajektorija ne može dva puta proći kroz istu tačku. Imaćemo dakle niz tačaka koji formira neku liniju. Ukoliko je poremećaj veliki, KAM torus puca i orbita postaje haotična. Sukcesivni prolazi orbite kroz ravan neće više ležati na liniji, nego će formirati jedan sloj tačaka rasutih duž linije preseka. Slika 2.3 predstavlja Poenkareove površi koje predstavljaju standardnu mapu (2.2) za četiri različite vrednosti poremećajnog parametra  $\varepsilon$ . Na prvoj slici  $\varepsilon$  je 0.2, tj. dovoljno malo za egzistenciju KAM torusa. Svaka neprekidna linija predstavlja jedan KAM torus. Na drugoj slici poremećaj je nešto veći 0.6. Primitimo da je struktura torusa sada dosta narušena u odnosu na prethodnu situaciju. Imamo ovde jedan 'prazan' prostor oko prave  $p_1 = 0$  tzv. *rezonantnu oblast* čija dinamika ima drugačiju prirodu i ne može se opisati na ovaj način. Sledeća slika predstavlja fazni profil sistema čiji je poremećaj 0.9. Ovde skoro da nema torusa oko rezonantne oblasti koji su sada uglavnom rastureni visokim poremećajem. Oko ivice rezonance vidljiv je jedan skup tačaka nepravilno rasutih duž ivice rezonance takozvana *haotična oblast*. Poslednja slika ilustruje situaciju kada je  $\varepsilon = 1.2$ , torusa nema, vidljiv ja samo haos.

Na ovaj način diskretizovan je jedan neprekidan dinamički sistem koristeći *standardnu mapu*.

## 2.2 Teorema Nehoroševa

Teorema Nehoroševa zauzima posebno mesto na polju hamiltonijanske dinamike. Ona daje jedan *globalan* rezultat (KAM teorema razmatra samo nerezonantna kretanja) koji važi za *svaki* skup početnih uslova na datom domenu u faznom prostoru.

---

<sup>1</sup>Pojam standardne mape biće detaljnije opisan u poglavlju x

Uobičajeni matematički koncept stabilnosti tretira sisteme u *beskonačnom* vremenu. Teorema Nehoroševa tu beskonačnost zamenjuje *dugim* vremenskim intervalima, jer ovde vreme stabilnosti  $T_S$  raste *eksponencijalno* sa inverznom vrednošću parametra neintegrabilnosti  $T_S \sim \exp(1/\varepsilon)$ . Struktura faznog prostora je opisana teoremom Nehoroševa, zato je ona značajna.

Nehoroševljeva teorema razmatra autonomne kvazi-integrabilne Hamiltonijane sa  $n$  stepeni slobode koji su oblika  $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{p}) + \varepsilon\mathcal{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , gde su  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  akcija-ugao promenljive definisane na domenu  $D \equiv G \times \mathbf{T}^n$ ;  $G \subset \mathbf{R}^n$  je prostor akcija, a  $\mathbf{T}^n$  je  $n$ -dimenzioni torus tj. prostor uglova. Pretpostavlja se i da je Hamiltonijan analitičan tj. da dozvoljava razvoj u konvergentan red u okolini svake tačke iz  $D$ . Ovaj uslov povlači da se  $H$  može proširiti i na svoju kompleksnu okolinu. Sa  $G - \Delta$  označićemo skup svih akcija  $\mathbf{p}$  koje zajedno sa svojom  $\Delta$  okolinom pripadaju  $G$ .

**TEOREMA NEHOROSĚVA:** *Neka je  $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{p}) + \varepsilon\mathcal{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  analitična na  $D \equiv G \times \mathbf{T}^n$ , gde je  $G \subset \mathbf{R}^n$  otvoren i povezan. Posmatrajmo matricu  $C(\mathbf{p})$  definisanu sa  $C_{i,j}(\mathbf{p}) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial p_i \partial p_j}(\mathbf{p})$  i pretpostavimo da važi uslov konveksnosti:*

$$C(\mathbf{p})\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \neq 0 \quad \forall \mathbf{p} \in G \quad i \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n \setminus 0 \quad (2.3)$$

*Tada postoje pozitivne konstante  $\varepsilon^*, \alpha, \beta, a$  i  $b$  takve da za svako  $\varepsilon < \varepsilon^*$  važi:*

$$\| \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(0) \| \leq \Delta \equiv \alpha\varepsilon^a$$

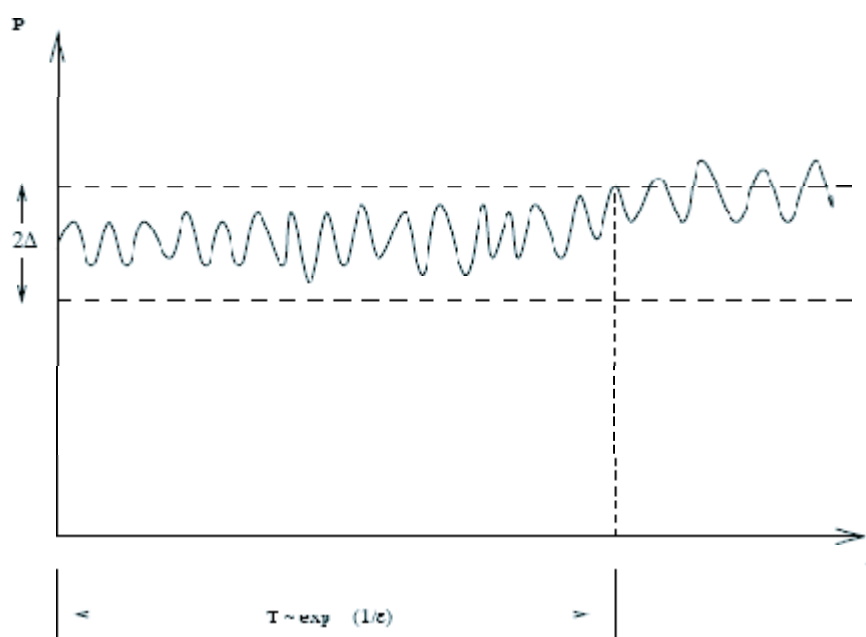
*za svako  $\mathbf{p}(0) \in G - \Delta$  i za svako  $|t| \leq T(\varepsilon)$ , gde je:*

$$T(\varepsilon) = \beta \left( \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon} \right)^b. \quad (2.4)$$

Nehoroševljeva teorema ne isključuje mogućnost haotičnog kretanja, štaviše, akcije imaju slobodu da se kreću haotično, ali samo tako da za *vreme stabilnosti*  $T$  promene akcija u odnosu na njihove početne vrednosti ne prelaze vrednost  $\Delta$  (slika 2.4). Tek po isteku vremena  $T$ , koje raste eksponencijalno u odnosu na  $\varepsilon^*/\varepsilon$ , trajektorija može da napusti  $\Delta$  okolinu početne tačke. Zbog relacije (2.4) imaćemo: Ako je  $\varepsilon$  manji od  $\varepsilon^*$ , vreme stabilnosti postaje ekstremno dugo i može lako da nadživi sistem koji se razmatra (npr. Sunčev sistem). Tada je sistem dostigao



takozvanu *praktičnu stabilnost*. Rezultat Nehoroševljeve teoreme važi *uniformno* na celom domenu  $D$ . U slučaju akcija, uzima se da je domen  $G - \Delta$ , zbog toga što bi orbite koje napuste svoju  $\Delta$  okolinu, time napustile i domen  $G$ . Takođe, ako Hamiltonijan nije analitičan (beskonačno puta diferencijabilan), već samo  $r$  puta diferencijabilan, eksponencijalnu zavisnost vremena stabilnosti u odnosu na  $\varepsilon^*/\varepsilon$  zameniće stepena zavisnost. Uslov konveksnosti (2.3) se takođe može ublažiti jednim drugim uslovom, takozvanim uslovom *strmosti* (Nekhoroshev, 1979).



Slika 2.4: Teorema Nehoroševa: za dati početni uslov, akcije mogu da se menjaju haotično, ali tako da se za vreme  $T$  koje je eksponencijalno u odnosu na  $1/\varepsilon$ , akcije ne promene za vrednost koja je veća od  $\Delta(\varepsilon)$  (slika preuzeta iz Morbidelli and Guzzo, 1997).

Nehoroševljeva teorema, pored toga što obezbeđuje stabilnost u eksponencijalno dugim vremenima, ima još jedno vrlo značajno svojstvo: pomoću teoreme Nehoroševa moguće je na vrlo slikovit način opisati strukturu faznog prostora. Ovaj 'geometrijski' deo rezultata je opisan u dokazu teoreme, a po svom značaju svrstao je teoremu Nehoroševa u jedno od najznačajnijih rezultata na polju hamil-

tonijanske dinamike.

Kada se poremećaj  $\varepsilon H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  razvije u red moguće je, pomoću Lijeviskih transformacija 'premestiti' harmonijske članove oblika  $\varepsilon c_k(p) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})$  u članove višeg reda po  $\varepsilon$ , ali samo ako smo dovoljno daleko od odgovarajuće rezonance  $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ . U blizini rezonance harmonijski član mora biti zadržan u normalnoj formi, jer rezonanca odgovara singularitetu. S obzirom da je skup racionalnih brojeva beskonačno gust (imajmo u vidu da svaki racionalan broj odgovara nekoj rezonanci), imaćemo da na svakom otvorenom podskupu domena  $G$  postoji beskonačno mnogo harmonijskih članova koje je naravno nemoguće sve odstraniti iz poremećaja. Ovo je zapravo glavni razlog zbog kojeg je sistem neintegrabilan (Poincaré, 1892). Ideja Nehoroševa bila je u tome da se zanemare sve rezonance reda većeg od nekog graničnog  $K$ .

Ova aproksimacija je jako važna. Ako se dakle ograničimo na rezonance čiji je red manji od  $K$ , imaćemo da je na svakom otvorenom podskupu  $G$ , broj rezonantnih linija konačan, struktura će biti kao na slici 2.5. Iz analitičnosti Hamiltonijana sledi da ostatak reda koji se odnosi na zanemarene rezonance reda većeg od  $K$  ne prelazi  $\exp(-K\sigma)$  za neko pozitivno  $\sigma$ , dakle u skladu sa Nehoroševljevom teoremom - eksponencijalno je mali. Granično  $K$  se bira tako da bude oblika  $1/\varepsilon^b$  za neko pozitivno  $b$ , što će dati eksponencijalnu zavisnost vremena stabilnosti  $T(\varepsilon)$  od  $1/\varepsilon^b$  kao u 2.4. U slučaju kada je Hamiltonijan samo  $r$  puta diferencijabilan, a nije analitičan, zanemareni članovi biće reda veličine  $K^{-r}$ . Kao posledica, vreme stabilnosti  $T(\varepsilon)$  neće preći  $\sim 1/\varepsilon^{rb}$ .

### 2.2.1 Geometrijski opis faznog prostora pomoću teoreme Nehoroševa.

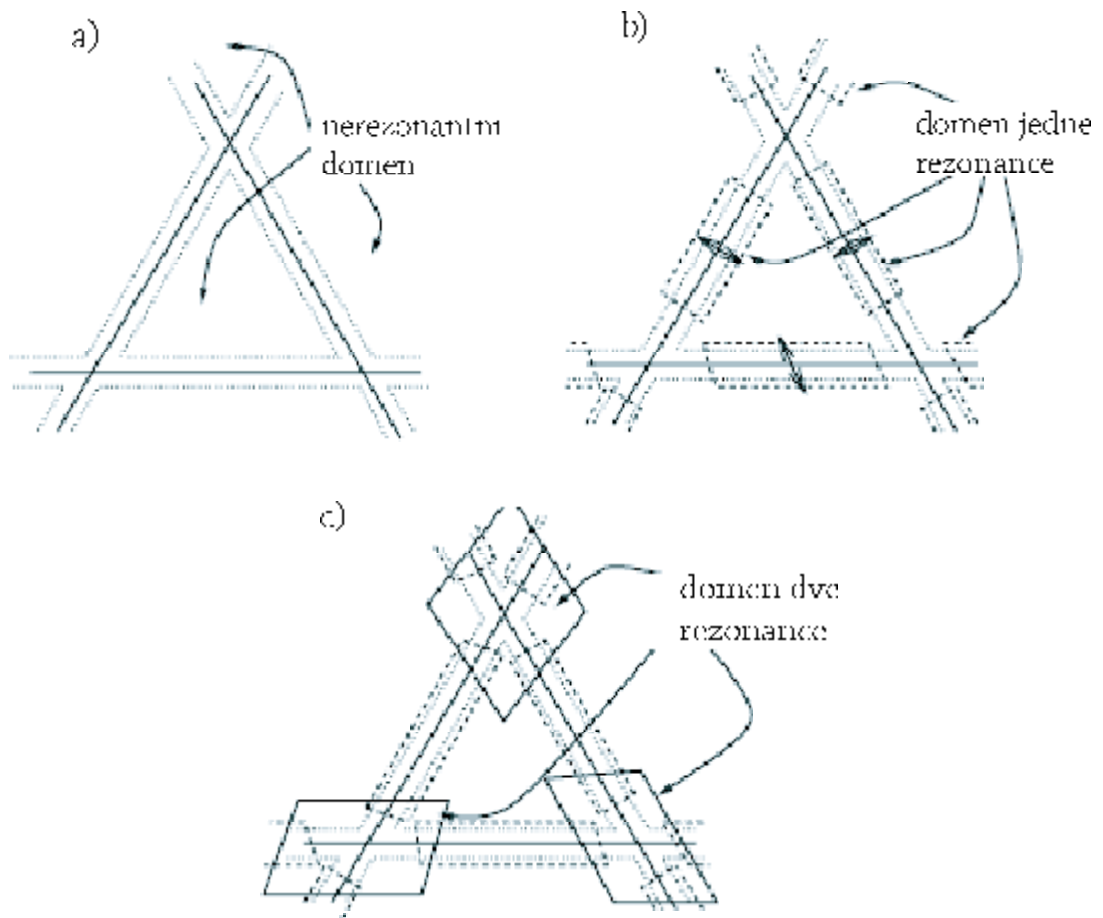
Posmatrajmo sistem sa tri stepena slobode i u njemu ravan frekvencija određenu sa  $\omega_1/\omega_2$  i  $\omega_2/\omega_3$ . Tri stepena slobode biramo zbog jednostavnosti slike, a u slučaju sa više stepeni slobode situacija je analogna. U ravni frekvencija rezonance su određene pravama čiji je koeficijent pravca racionalan broj (slika 2.5). Skup svih pravih u ravni frekvencija čiji je koeficijent pravca racionalan broj formira takozvanu *Arnoldovu mrežu* ili *rezonantnu mrežu*. Ovde postoje tri osnovna tipa kre-

tanja koja zavise od toga gde se orbita nalazi u odnosu na rezonancu.

*Nerezonantni domen* je skup tačaka u ravni frekvencija koje su dovoljno daleko od svih rezonanci reda manjeg od  $K$ . Tačnije, nerezonantni domen  $\mathcal{G}_K$  je skup frekvencija  $\omega$  za koje važi da je  $|\mathbf{k} \cdot \omega| > \sqrt{\varepsilon}$  gde je  $|k| < K$  (imajmo u vidu da je  $\sqrt{\varepsilon}$  zapravo širina rezonance, u ovom slučaju širina rezonantne trake duž prave koja definiše rezonancu). Na slici 2.5a nerezonantni domen je oblast ograničena isprekidanom linijom. Na  $\mathcal{G}_K$  možemo konstruisati normalnu formu eliminišući iz poremećaja  $\varepsilon H$  sve harmonijske članove  $e^{ik \cdot q}$  za koje je  $|k| < K$ . Po konstrukciji, svi ovi članovi su nerezonantni. Novi Hamiltonijan zavisiće od novih akcija, i ekponencijalno malog ostatka reda  $\mathcal{R}_K$  u kojem su svi članovi za koje je  $|k| > K$ . Ako zanemarimo spore promene frekvencija koje su uzrokovane malim ostatkom,  $\omega$  se ne menjaju u vremenu. Dakle, u nerezonantnoj oblasti smatramo da su frekvencije konstatne.

*Domen jedne rezonance* je oblast u kojoj imamo samo jednu rezonancu reda manjeg od  $K$  (sl.2.5b). Na ovom domenu rezonantna forma sadrži samo jedan rezonantni član ( $|k| \leq K$ ), dok su ostali članovi reda ili nerezonantni ili su, ako im je  $k > K$ , premešteni u  $R_K$ .

Ako zanemarimo ostatak reda, Hamiltonijan će biti integrabilan, s tim što će sada zavisiti od jednog rezonantnog ugla. Sledi da akcije, a samim tim i frekvencije, nisu više konstantne. One se menjaju zahvaljujući rezonantnom harmoniku koji je zadržan u normalnoj formi. Pravac te promene označen je strelicom na slici 2.5b i obično se zove *pravac brzih promena*. Iz konveksnosti hamiltonijanske funkcije sledi da je kretanje povezano, a može se dokazati i da je taj pravac transverzalan na pravac same rezonance. Ako međutim, pratimo ovu promenu u nekom jako dugom vremenu, može se pretpostaviti da ćemo ući u nerezonantni domen, ali to je zapravo nemoguće jer su akcije u nerezonantnoj oblasti fiksirane (treba napomenuti da je ovo nemoguće samo na nivou ove aproksimacije). Transverzalno kretanje u odnosu na pravac brzih promena, odnosno kretanje duž rezonance, može biti uzrokovano samo sa  $\mathcal{R}_K$  tj. može biti samo ekponencijalno sporo. Ove spore promene obično se nazivaju *Arnoldova difuzija*. O Arnoldovoj difuziji će biti više reči u drugom delu ovog rada.



Slika 2.5: Skica geometrijske konstrukcije teoreme Nehoroševa u sistemu sa tri stepena slobode, prikazana u ravni  $\omega_1/\omega_2$ ,  $\omega_2/\omega_3$ . Tri pune linije predstavljaju rezonance mnogostrukosti 1 i formiraju takozvanu Arnoldovu mrežu. Tačke u kojima se rezonance seku odgovaraju oblastima gde je mnogostukost 2 (slika preuzeta iz Morbidelli and Guzzo, 1997)

Preostalo nam je da definišemo *domen dve rezonanace* tj. oblast u kojoj se dve rezonance seku. Na slici 2.5c je ova oblast obeležena punom tankom linijom. Rezonantna forma imaće dva nezavisna rezonantna člana reda manjeg od  $K$  i biće neintegrabilna. Zato se ovde očekuje haotično kretanje i promena akcija je moguća u svim pravcima, ali i dalje, kretanje će biti povezano. Ako se haotična orbita udalji od ovog domena, opet možemo pretpostaviti da će trajektorija doći u jednu od dve gore opisane oblasti: u nerezonantnu, gde su akcije konstantne, dakle ovaj deo pretpostavke je netačan, ili u oblast jedne rezonance gde je pomeranje moguće samo u pravcu brzih promena.

Teorema za svaki početni uslov definiše jedan od navedena tri tipa kretanja (kada se  $R_K$  zanemari). Najveće pomeranje akcija biće na domenu dve rezonance i radijusom ovog domena u stvari određena je maksimalna promena akcija u faznom prostoru. Može se dokazati da je taj radijus  $\sim \varepsilon^a$  za neko pozitivno  $a < 1$  ( $a$  opada kad broj stepeni slobode raste). Moramo voditi računa i o tome da broj rezonanci reda manjeg od  $K$  bude dovoljno mali, jer u protivnom ne bi bilo mesta za nerezonantni domen. Iz činjenice da je gornja granica za domen određena sa  $\varepsilon^a$ , izvodi se i gornja granica za  $K$  i ona je oblika  $1/\varepsilon^b$ .

Na kraju, uzmimo u obzir i mali ostatak  $\mathcal{R}_K$ . Kretanje je moguće u svim pravcima prostora frekvencija (kao i akcija), ali je ono eksponencijalno sporo. U skladu s tim, kretanje koje je izvedeno zanemarujući  $\mathcal{R}_K$  važi samo u eksponencijalno dugom vremenskom intervalu.

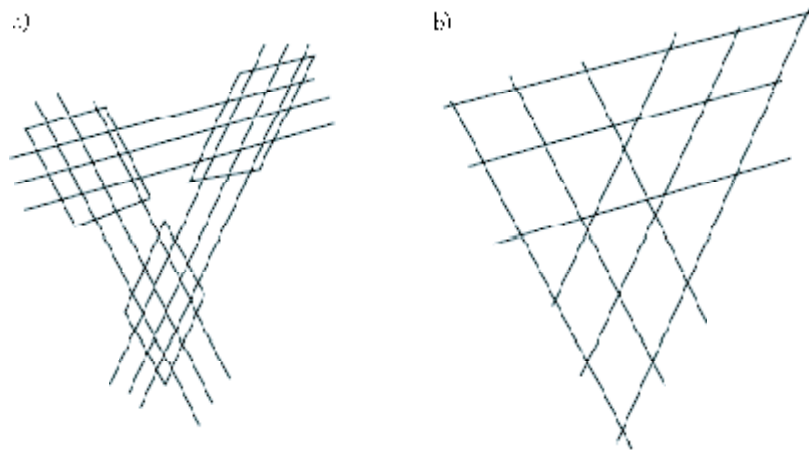
Dokaz Nehoroševljeve teoreme dao je Pöshel (1993). Takođe pogledati radove Nekhoroshev (1977), Benettin et al.(1985) i Lochak (1992).

**NEHOROŠEVLJEVA STRUKTURA.** Posmatrajmo nerezonantni domen  $\mathcal{G}_K$  iz kojeg su odstranjene sve rezonance reda višeg od  $K$ . U novom sistemu promenljivih  $\mathbf{p}', \mathbf{q}'$  Hamiltonijan će biti oblika:

$$H(\mathbf{p}', \mathbf{q}') = \mathcal{H}'_0(\mathbf{p}') + \varepsilon' \mathcal{H}'_1(\mathbf{p}', \mathbf{q}') \quad \text{gde je} \quad \varepsilon' \mathcal{H}'_1(\mathbf{p}', \mathbf{q}') \equiv \mathcal{R}_K(\mathbf{p}', \mathbf{q}'). \quad (2.5)$$

Imamo i ovde jedan autonoman konveksan sistem čiji je poremećaj  $\varepsilon'$  ekponencijalno mali u odnosu na  $\varepsilon$ , tj.  $\varepsilon' \sim \exp[-1/\varepsilon^b]$ . Na ovaj Hamiltonijan opet primen-

jujemo teoremu Nehoroševa (imamo novu granicu  $K'$  za red rezonance za koju važi  $K' \sim 1/\varepsilon^b \sim \exp[b/\varepsilon^b]$ ). Sada je vreme stabilnosti kretanja super-eksponencijalno dugo, tj.  $T \sim \exp[\exp(1/\exp^b)]^b$ . Imamo i novi nerezonantni domen  $\mathcal{G}_{K'}$  iz kojeg su odstranjene rezonance reda manjeg od  $K'$ . Na  $\mathcal{G}_{K'}$  moguće je definisati novi sistem akcija-ugao promenljivih, i konstruisati novi Hamiltonijan kao zbir integrabilnog dela i ostatka  $\mathcal{R}_{K'}$ , koji je sada super-eksponencijalno mali. Ovaj postupak može iterativno da se ponavlja i jasno je da pri svakom koraku poremećaj mora da bude eksponencijalno mali u odnosu na integrabilni deo Hamiltonijana. Dokazano je da tada nerezonantni domen (koji se svakom novim korakom iteracije smanjuje) konvergira ka skupu invarijantnih KAM torusa (Giorgilli and Morbidelli, 1997).



Slika 2.6: a) skica Nehoroševljeve strukture: rezonance se seku u rezonantnim čvorovima, ali se ne preklapaju potpuno. Uvek ostaje mesta za nerezonantni domen. Ova struktura se ponavlja za svaki red rezonance. b) Za neki red rezonance, dolazi do preklapanja i nerezonantni domen ne može se definisati. Invarijantni torusi su nestali i kretanje može da prelazi sa jedne rezonance na drugu tj. kretanje je Čirikovljevog tipa. Ova slika kao i slika 2.5 odnosi se na sistem sa tri stepena slobode. Preuzeto iz (Moribidelli, 2002).

U sukcesivnoj primeni teoreme Nehoroševa na nerezonantnu oblast dobija se globalna slika faznog prostora, koju ilustruje slika 2.6. Kada je poremećaj *dovoljno mali*, imaćemo sledeću strukturu (slika 2.6a): Rezonance se seku u rezonantnim

čvorovima stvarajući time kaos lokalnih razmera. Dakle, rezonance se ne preklapaju potpuno, već samo delimično, tako da ostaje dovoljno prostora za nerezonantni domen. Nerezonantni domen opstaje čak i kada se ovaj iterativni postupak ponovi beskonačno mnogo puta. Pokazano je da on konvergira ka skupu invarijantnih KAM torusa, za koje važi da su super-eksponencijalno stabilni (Morbidei and Giorgolli 1995a). Dinamički sistem sa ovakvom strukturom nazivamo *sistemom Nehoroševljevog tipa*.

Obrnuta situacija prikazana je na slici 2.6b. Posle nekog koraka, rezonance i oblast njihovih preseka potpuno ispunjavaju prostor, nema mesta za nerezonantni domen, a samim tim ni za invarijantne KAM toruse. Orbite prelaze sa jedne rezonance na drugu, zahvaljujući tome što je fazni prostor u velikoj meri ispunjen oblašću gde se preklapaju dve ili više rezonanci. Ovakve brze promene uzrokovane prelaskom orbita kroz oblast preseka rezonanci nazivamo *difuzijom Čirikovljevog tipa*. S obzirom da je širina rezonance određena sa  $\sqrt{\varepsilon}$ , ovaj ishod desiće se kada  $\varepsilon$  bude veće od neke granične vrednosti.

Zanima nas sada, da li neki sistem ima Nehoroševljevu strukturu ili ne. Ako je nema, za koji red rezonance se ta struktura gubi. Analitičkim putem se teško dolazi do odgovora, ali moguće je dati jedan kvalitativan opis odgovora izveden iz rada Arnolda (Arnold 1963b). Vodimo se sledećom logikom: Širina rezonantnog domena zavisiće od reda  $K$ , tj. od  $\sqrt{\varepsilon} \exp(-K\sigma)$ . Broj rezonanci reda  $K$  biće  $2^n K^{n-1}$ ;  $n$  je broj stepeni slobode. Možemo sada da damo ocenu zapremine dela faznog prostora koji je ispunjen svim rezonancama čiji je red manji od  $K$ :

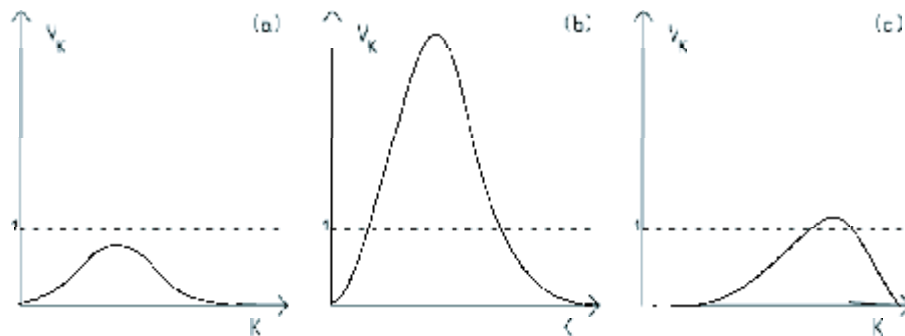
$$V_K \sim 2^n \sqrt{\varepsilon} K^{n-1} \exp(-K\sigma). \quad (2.6)$$

Zapremina  $V_K$  je maksimalna kada je  $K = (n - 1)/\sigma$  i opada eksponencijalno kad  $K$  raste. Na slici 2.7 data je  $V_K$  kao funkcija  $K$  za različite vrednosti parametra  $\varepsilon$ . Ako je  $\varepsilon$  malo i zapremina prostora pokrivenog rezonancama je mala. Za svako  $K$  zapremina će biti manja od zapremine faznog prostora (2.7 a). Dakle, bez obzira koliko je veliko  $K$ , rezonance ne mogu u potpunosti da ispune fazni prostor i uvek ostaje prostora bez prisustva rezonanci, tj. ostaje mesta za invarijantne KAM toruse. Sistem tada ima Nehoroševljevu strukturu. Kada je  $\varepsilon$  veće, za neko  $K$ ,

relativna zapremina biće jednaka zapremini celog prostora. Prostor je sav ispunjen rezonancama, nema mesta za invarijantne toruse i struktura Nehoroševa se gubi. Najmanje  $K$  za koje se Nehoroševljeva struktura gubi zavisice od  $\varepsilon$ . Kada je poremećaj veliki, ovo se dešava već za malo  $K$  (sl. 2.7b), za neko manje  $\varepsilon$  desiće se kada je  $K$  blizu  $K_{max} = (n - 1)/\sigma$  (slika 2.7c). Ako je broj stepeni slobode veliki, ili je parametar  $\sigma$  mali,  $K_{max}$  može biti jako veliko.

Postoje različiti analitički (Contopolulos, 1966; Chirikov, 1979; Wisdom, 1980) i numerički algoritmi pomoću kojih je moguće ispitati strukturu prostora. Numerički algoritmi su se pokazali uspešnijim, a jedan od njih (FLI) je i predmet ovog rada i biće detaljnije opisan u daljem izlaganju.

Teorema Nehoroševa se može primeniti i na realne sisteme, na pojedine oblasti Sunčevog sistema (Morbidelli and Guzzo, 1997, Guzzo et al., 2002, Pavlović, 2006).



Slika 2.7: Relativna zapremina  $V_K$  svih rezonanci reda manjeg od  $K$  data jednačinom 2.6. Na slici (a),  $\varepsilon$  je malo, tako da je za svako  $K$  zapremina  $V_K$  manja od zapremine faznog prostora (koji je ovde normiran na 1). Stoga, rezonance ne mogu u potpunosti da se preklope, invarijantni torusi opstaju i sistem ima Nehoroševljevu strukturu. Na drugoj i trećoj slici zapremina  $V_K$  je veća od 1 za neko  $K$ . Rezonance moraju da se preklope i invarijantni torusi ne mogu da postoje. Za koju vrednost  $K$  dolazi do potpunog preklapanja rezonanci zavisice od  $\varepsilon$ . Ako je  $\varepsilon$  jako veliko (slika b), red  $K$  je mali; red  $K$  može biti i jako veliko (slika c) blizu graničnog  $K_{max}$ .





## Glava 3

# Numeričke metode za detekciju haosa

Za svaki neprekidan proces u prirodi postoji diferencijalna jednačina kojom se taj proces opisuje. I kretanje u Sunčevom sistemu može se zapisati jednačinama, u obliku reda, čiji su članovi neke funkcije orbitalnih elemenata. *Da li je njima moguće predvideti kretanje svih tela Sunčevog sistema u svakom trenutku u vremenu?* Ovo pitanje je, između ostalih, postavio i Švedsko-Norveški kralj Oskar II 1889. godine, kada je raspisao nagradni konkurs povodom svog 60-tog rođendana. Nagrađeni rad potpisao je Anri Poenkare (1854-1912), u kojem je pokazano da zbog malih delilaca, članovi reda postaju sve veći, i da redovi nisu konvergentni. Takođe, Poenkare je pokazao da se problem malih delilaca ne može izbeći, tj. da se jednačinama kretanja, u stvari ne može predvideti kretanje tela Sunčevog sistema na neko jako dugo vreme. Pola veka kasnije, fenomen nerešivosti jednačina kretanja nazvan je *haos*. Iako je Poenkareov rad dobio nagradu, odgovor na nagradno pitanje je zapravo ostao nerešen.

Pojavom računara dolazi do razvoja haotične dinamike, jer je numeričko rešavanje nelinearnih jednačina kretanja znatno olakšano. Jasno je da odgovarajućim integracijama možemo pratiti orbitalno kretanje tela u Sunčevom sistemu, ali zbog nagomilavanja grešaka zaokrugljivanja, čak i najbolji integrator, posle nekog dovoljno dugog vremena, prestaje da daje dobro rešenje. Ipak, možemo reći da su

orbite tela Sunčevog sistema danas dovoljno dobro poznate. Pionirski rad iz ove oblasti objavili su Hénon i Heiles (1964) u kojem je pokazano da i u jednostavnim dinamičkim sistemima kaos može da dominira sistemom. Kasnije je pokazano da je i u Sunčevom sistemu neintegrabilna dinamika pre pravilo nego izuzetak.

Modeli koji opisuju haotičnu dinamiku, primenljivi su i na razne druge dinamičke sisteme, u fizici, hemiji, ekonomiji itd. Haos je zapravo jedna uobičajena pojava u dinamičkim sistemima sa više stepeni slobode. Problematika haosa detaljno je opisana u Contopoulos (2002) i Morbidelli (2002). Pregled metoda za detekciju haosa dat je i u Knežević (2000).

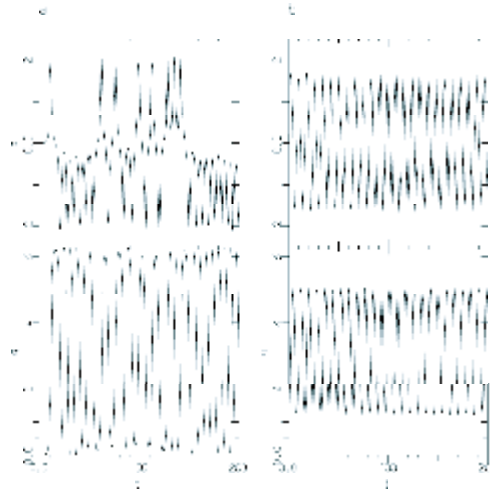
### 3.1 Detekcija haosa

Do sada su razvijene različite metode kojima se kaos detektuje i meri (imajmo u vidu da i kaos ima svoj intenzitet). Svaka od metoda obično je podobna za jedan tip problema. Stoga se za detaljniju analizu haotičnosti često preporučuje kombinacija više metoda. Takođe, treba voditi računa i o softverskoj implementaciji ovih modela, jer se dešava da analitičko rešenje nije uvek moguće realizovati, najčešće zbog dugog vremena integracije. Zato se pribegava raznim modifikacijama koje dosta dobro aproksimiraju analitički model.

Navešćemo ovde osnovne indikatore haosa i ukratko opisati njihova svojstva. Nešto veći naglasak biće na *brzim indikatorima Lyapunova (Fast Lyapunov Indicator-FLI)*, jer će uglavnom FLI biti korišćen u ovom radu, u poslednjoj glavi.

Zanima nas, dakle, da li je neka orbita haotična i da li jedan skup početnih uslova u datom sistemu generiše regularno ili haotično kretanje. U prethodnom poglavlju videli smo da se pomoću standardne mape u sistemu sa dva stepena slobode koristeći Poenkareovu površ preseka može doći do odgovora. Ali površi preseka mogu se primenjivati na direktan način samo u sistemima sa dva stepena slobode. Froeschle (1970a, 1972) je uspeo nešto drugačijom tehnikom da primeni površi preseka na sisteme sa tri stepena slobode, ali u sistemu sa većim brojem stepeni slobode površ preseka bila bi višedimenzionalna i ne bi mogla da da nikakve značajne informacije.

Možemo za neki sistem i da posmatramo promenu akcija i uglova u vremenu (slika 3.1). Ako je ta promena pravilna, kretanje je regularno. Ako nije, kretanje je haotično (Morbidelli, 2002). Međutim, ni ovaj metod nije podoban za sisteme sa više stepeni slobode ili ako je Hamiltonijan nešto složeniji.



Slika 3.1: Vremenska evolucija akcija i uglova za (a) haotičnu i (b) regularnu orbitu, za slučaj poremećenog klatna (Slika preuzeta iz Morbidelli, 2002).

## 3.2 Eksponenti Ljapunova

Jedna od glavnih odlika haotične oblasti prostora je da orbite čiji su početni uslovi međusobno blizu, divergiraju eksponencijalno u vremenu. Maksimalni Ljapunovljev Ekspozent (MLE) je mera te divergencije. Detaljniji pristup teoriji Ljapunovljevih eksponenata može se naći u Lyapunov (1907), Osledec (1968) i Benettin et al. (1976, 1980) kao i u Lichtenberg and Lieberman (1983).

Posmatrajmo dve orbite  $\mathbf{p}^{(1)}(0), \mathbf{q}^{(1)}(0)$  i  $\mathbf{p}^{(2)}(0), \mathbf{q}^{(2)}(0)$ . Da bismo merili njihovu relativnu divergenciju u vremenu  $\mathbf{p}^{(1)}(t), \mathbf{q}^{(1)}(t)$  i  $\mathbf{p}^{(2)}(t), \mathbf{q}^{(2)}(t)$  neće biti dovoljno da posmatramo samo njihovu euklidsku razliku  $\|\mathbf{p}^{(1)}(t) - \mathbf{p}^{(2)}(t)\| + \|\mathbf{q}^{(1)}(t) - \mathbf{q}^{(2)}(t)\|$  kao funkciju vremena, jer se u ovom slučaju divergencija može meriti samo *lokalno*.

Maksimalni eksponent Ljapunova ima nešto drugačiji pristup, divergencija orbita se definiše preko *linearizovanih jednačina kretanja* (koje se u literaturi nazivaju i *varijacione jednačine*). Neka je  $\delta\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^{(2)}(t) - \mathbf{p}^{(1)}(t)$  i  $\delta\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^{(2)}(t) - \mathbf{q}^{(1)}(t)$ . Linearizovane jednačine relativnog kretanja mogu se zapisati u obliku:

$$\dot{\delta p}_i = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial q_i}(\mathbf{p}^{(1)}(t), \mathbf{q}^{(1)}(t))\delta p_j - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial q_i}(\mathbf{p}^{(1)}(t), \mathbf{q}^{(1)}(t))\delta q_j \quad (3.1)$$

$$\dot{\delta q}_i = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial p_i}(\mathbf{p}^{(1)}(t), \mathbf{q}^{(1)}(t))\delta p_j + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_i}(\mathbf{p}^{(1)}(t), \mathbf{q}^{(1)}(t))\delta q_j \quad (3.2)$$

$\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  je Hamiltonijan sistema čije su  $\mathbf{p}^1(t), \mathbf{q}^1(t)$  i  $\mathbf{p}^2(t), \mathbf{q}^2(t)$  trajektorije. Integracijom ovih jednačina i analizom njihovog rešenja dolazimo do prirode kretanja orbita.

Maksimalni Eksponent Ljapunova (MLE) se definiše kao:

$$\mathcal{L} = \lim \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta\mathbf{p}(t), \delta\mathbf{q}(t)\|}{\|\delta\mathbf{p}(0), \delta\mathbf{q}(0)\|} \quad (3.3)$$

gde je  $\|\delta\mathbf{p}(t), \delta\mathbf{q}(t)\|$  euklidska norma vektora čije su komponente  $(\delta p_1(t), \dots, \delta q_n(t), \delta q_1(t), \dots, \delta q_n(t))$ . Može se dokazati da  $\mathcal{L}$  neće zavistiti od izbora kanonskih promenljivih  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ , kao ni od izbora početnih uslova  $\mathbf{p}^{(1)}(0), \mathbf{q}^{(1)}(0)$  za datu orbitu. Odnosno, svaka orbita ima sopstveni MLE (Osledec, 1968).

Neka je  $\bar{\lambda}$  maksimalna sopstvena vrednost Hesijanove matrice (matrica će imati  $2n$  sopstvenih vrednosti) u tački  $\mathbf{p}^1(0), \mathbf{q}^1(0)$ . Za  $\bar{\lambda}$  važi da je  $|\bar{\lambda}| > 1$  ili  $|\bar{\lambda}| = 1$ . Ako je  $|\bar{\lambda}| > 1$ , kretanje je hiperboličko. Tada je priroda promene  $\|\delta\mathbf{p}(t), \delta\mathbf{q}(t)\|$  eksponencijalna i raste neograničeno u vremenu tj. kad  $t \rightarrow \infty$  imaćemo da  $\|\delta\mathbf{p}(t), \delta\mathbf{q}(t)\| \rightarrow \exp \bar{\lambda}t$ . Iz (3.3) je očigledno da je  $\mathcal{L} = \bar{\lambda}$ . Ako je  $|\bar{\lambda}| = 1$ , kretanje je eliptičko, povezano, ograničeno i  $\mathcal{L}$  će biti jednako 0. Za orbitu na KAM torusu  $\mathcal{L} = 0$ , a haotična orbita imaće  $\mathcal{L} > 0$ . Stoga se MLE može smatrati indikatorom haotičnog kretanja.

Pored maksimalnog eksponenta Ljapunova, može se definisati još  $n-1$  Ljapunovljev eksponent, koji mogu biti ili nula ili pozitivni. Broj pozitivnih eksponenta Ljapunova biće zapravo broj pravaca u prostoru u kojem može da se razvije haotično (ili bar hiperboličko) kretanje. Metod za određivanje ovih koeficijenata

dat je u Benettin et al. (1980) i nešto je složeniji od računa MLE.

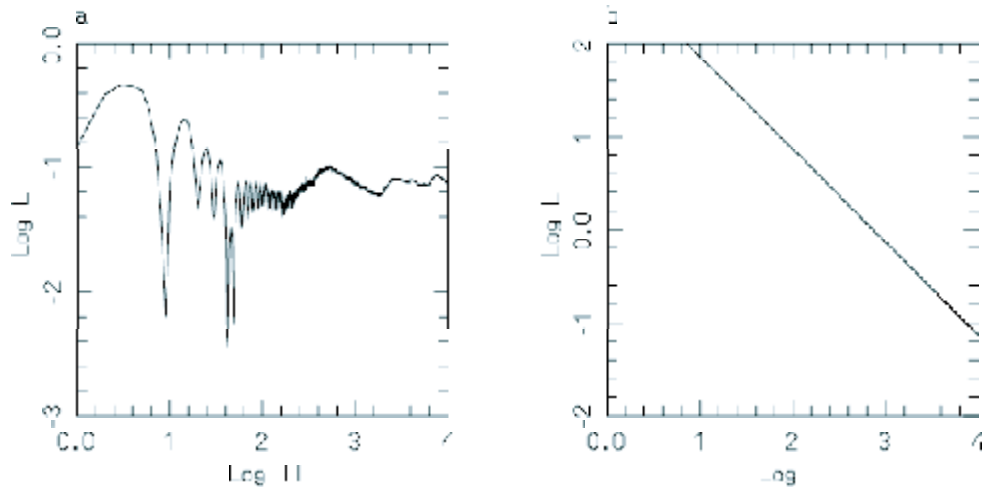
Da bismo numerički odredili MLE potrebno je odrediti graničnu vrednost (3.3) kad vreme teži beskonačnosti, a samim tim i linearizovane jednačine kretanja (3.2) integraliti na beskonačno vreme. Jasno je da je taj račun u numeričkom smislu neizvodljiv. Zato je potrebno napraviti neke modifikacije MLE da bi se on prilagodio računarskim mogućnostima. *LCE (Lyapunov Characteristic Exponents) karakteristični eksponenti Ljapunova* predstavljaju ocenu MLE za neko vreme koje je ograničeno (nije beskonačno) i dovoljno dugo da bi se naslutilo asimptotsko ponašanje krive.

Jedno od rešenja kako odrediti LCE dao je Benetin (Benettin et al. 1980). Ovde se beskonačno vreme zamenjuje nizom dovoljno dugih vremenskih intervala  $T$ , ali greške zaokrugljivanja na  $T$  ne treba da pređu neku zadatu granicu. Zatim se definiše niz  $s_i = \|\delta\mathbf{p}(T), \delta\mathbf{q}(T)\|/\|\delta\mathbf{p}(0), \delta\mathbf{q}(0)\|$  i definišu se elementi  $\delta\mathbf{p}_i = \delta\mathbf{p}(T)/s_i$  i  $\delta\mathbf{q}_i = \delta\mathbf{q}(T)/s_i$  koji se u sledećoj iteraciji, u izrazu za  $s_{i+1}$ , tretiraju kao početne vrednosti. Ovde se zapravo daje ocena MLE koja je oblika:

$$\mathcal{L} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^l \ln s_j}{lT} \quad (3.4)$$

i vrednost  $\mathcal{L}$  ne zavisi od  $T$  (Benettin et al., 1980). Asimptotsko ponašanje  $\mathcal{L}(lT)$  u odnosu na  $lT$  daje informaciju o haotičnosti orbite.

Slika (3.2) ilustruje ocenu MLE za standardnu mapu na logaritamskoj skali, (3.2a) ukazuje na haotično kretanje, a slika (3.2b) na regularno. Ako zanemarimo činjenicu da na početku intervala  $\mathcal{L}(lT)$  ima veću vrednost za regularnu orbitu, funkcija na (3.2b) monotono opada, a vrlo nepravilno se menja u slučaju haotične orbite (3.2a). Na slici (3.2a) kriva se stabilizuje oko vrednosti  $\sim 10^{-1.1}$  koja jeste mala, ali je veća od nule, dok je za regularnu orbitu jasno da će  $\mathcal{L} \rightarrow 0$  kada  $lT \rightarrow +\infty$ . Međutim, ovde se krije jedna zamka: koje vreme odabrati da bismo bili sigurni da će posle isteka tog vremena kriva ostati nepromenjena? Za haotičnu orbitu, po isteku  $T$ , kriva može da konvergira ka 0. Za regularnu krivu, ovako izračunat LCE zapravo, uvek će biti veći od neke vrednosti, a jedini način da se 'približimo nuli' je da produžimo vreme integracije. Takođe, kriva koja se odnosi na regularno kretanje ne može nikad savršeno monotono da opada, uvek su prisutne



Slika 3.2: Ocena eksponenta Ljapunova za haotičnu (a) i za regularnu (b) orbitu standardne mape.  $T = 1$ , a  $l$  je broj iteracija standardne mape. (Slika preuzeta iz Morbidelli, 2002)

male oscilacije koje su uzrokovane prisustvom rezonanci. Dakle, glavni nedostatak ove metode, je dugo vreme integracije, ali i pored ovog nedostatka MLE spada u jednu od najpouzdanijih metoda za detekciju haotičnog kretanja.

### 3.3 Analiza frekvencija

Drugi izuzetno moćan instrument za detekciju haosa je *analiza frekvencija* koju je definisao Laskar (1990) sa ciljem da analizira sekularnu evoluciju planeta. Primjenjivana je u proučavanju dinamike malih tela (Nesvorný and Ferraz-Mello 1997, Robutel and Laskar, 1998), pa čak i za ispitivanje galaktičke dinamike (Papa-philippou and Laskar, 1998). Metoda je detaljnije opisana u Laskar et al. (1992) i Laskar(1993).

Osnova ideje je sledeća: orbite na KAM torusu imaju konstantne frekvencije (pogledati poglavlje 2.1); haotične orbite međutim, nemaju jasno definisanu promenu frekvencija. Unutar haotične zone akcije i uglovi se kreću bez nekog nama poznatog reda. Vrednosti frekvencija mogu se odrediti numerički za neki interval vremena. Zatim proveravamo da li se te vrednosti menjaju od jednog vremenskog intervala do drugog.

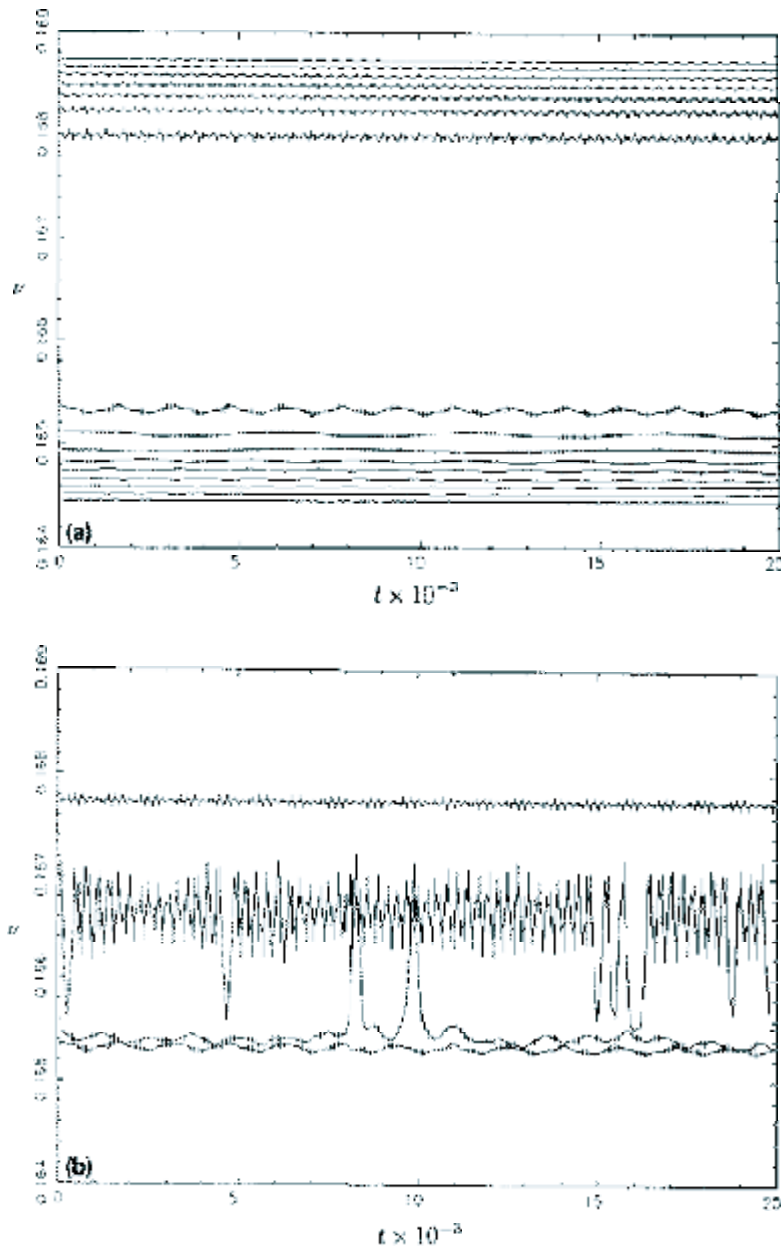
Za neku orbitu, tj. njenu promenu u vremenu  $\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)$ , određuje se fundamentalna frekvencija kretanja  $\nu_0$  (detaljnije u Morbidelli, 2002) na vremenskom intervalu  $[t_0, t_0 + T]$ . Vreme  $T$  mora biti duže od inverzne vrednosti najsporije fundamentalne frekvencije. Zatim se za različite vrednosti  $t_0$ , numeričkim putem određuju  $\nu_0$  i posmatra se njihova promena u vremenu (slika 3.3). Ukoliko su frekvencije konstantne ili imaju jako male promene, kretanje je periodično ili je na KAM torusu (Laskar, 1999) tj. regularno. Kretanje je haotično ako frekvencije imaju izražene varijacije.

Moguće je posmatrati promenu frekvencija i kao funkciju početnih uslova (slika 3.4). Fiksiramo ugao na neku vrednost i za jedan skup početnih akcija  $\mathbf{p}(0)$  koje su ravnomerno raspoređene na nekom intervalu, računaju se odgovarajuće frekvencije za neko dovoljno dugo  $T$ . Lazutkin (1973) je pokazao da, ako je kriva glatka, kretanje je regularno, dok za haotične oblasti funkcije imaju prekide.

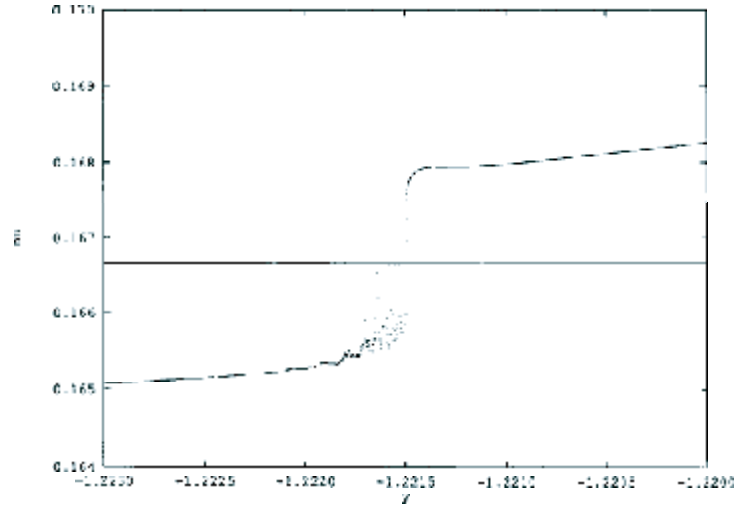
Analiza frekvencija zahteva mnogo manje računarskog vremena u odnosu račun eksponenata Ljapunova. Ovde je dovoljno nekoliko perioda promene najsporijeg ugla da bismo imali informaciju o prirodi orbite, dok je kod ocene MLE potrebno vreme koje je dovoljno dugo da bismo imali informaciju o asimptotskom ponašanju krive. Takođe, kod analize frekvencija u stanju smo da lociramo haotične oblasti, a imamo i direktnu informaciju o tome koja rezonanca generiše kaos. Međutim, softver koji je potrebno razviti za primenu analize frekvencija dosta je nepraktičan, posebno u primeni ove metode na realne probleme u nebeskoj mehanici.

Bez obzira na svoje nedostatke, eksponenti Ljapunova i analiza frekvencija spadaju u najčešće korištene metode za detekciju haosa.





Slika 3.3: Vremenska evolucija orbita u okolini rezonance  $1/6$  za standardnu mapu. Na gornjoj slici prikazana je promena frekvencija koje su nešto udaljenije od rezonance. Frekvencije su konstantne ili su varijacije jako male. Donja slika daje prikaz za istu oblast, ali su orbite bliže rezonanci. Promena frekvencija je najizraženija za drugu krivu i ona osciluje oko rezonantne vrednosti (slika preuzeta iz Laskar et al., 1992.)



Slika 3.4: Promena frekvencija kao funkcije početnih uslova  $p_1$  za standardnu mapu u blizini rezonance  $1/6$ . Delovi krive koji su glatki ukazuju na oblasti gde je kretanje regularno, dok prekidi krive tj. oblasti gde su tačke nepravilno rasute ukazuju na haotičnost (slika je preuzeta iz Laskar et al., 1992).

### 3.4 FLI

Podsetimo se da se karakteristični eksponent Ljapunova definiše<sup>1</sup> kao vrednost  $\ln \|\mathbf{v}(t)\|/t$  kada je  $t$  dovoljno veliko da bi se ocenilo asimptotsko ponašanje krive, gde se  $\|\mathbf{v}(t)\|$  dobija integracijom linearizovanih jednačina kretanja (3.2). Međutim, jako malo pažnje je bilo usmereno na sam početak računa LCE. Froeschlé et al. (1997) su pokazali da ponašanje prvog dela krive LCE, za neko relativno kratko vreme, između ostalog, zavisi i od početnih uslova kretanja. LCE se za neko fiksirano  $T$ , ponaša drugačije kada je kretanje haotično i kada je regularno. Štaviše, za slučaj regularnog kretanja, različito se ponaša kada je kretanje rezonantno i kada to nije (tj. kada je nerezonantno). LCE, koji se dobija za velike vrednosti  $T$ , je

<sup>1</sup>Ovde ćemo sa  $\mathbf{x}(t)$  označiti vektor  $(p_1(t), \dots, q_n(t), q_1(t), \dots, q_n(t))$ , a sa  $\mathbf{v}(t)$  odgovarajući izvode  $(\delta p_1(t), \dots, \delta q_n(t), \delta q_1(t), \dots, \delta q_n(t))$ . Definicija LCE je tada nešto jednostavnije formulisana.

jednak nuli u oba slučaja. Dolazimo tako do jednog novog indikatora haosa, *brzog indikatora Ljapunova (Fast Lyapunov Indicator-FLI)*.

**DEFINICIJA FLI:**<sup>2</sup> Neka je  $M$  mapa koja  $\mathbb{R}^n$  preslikava u  $\mathbb{R}^n$ , i neka je  $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$  neki početni uslov i  $\mathbf{v}(0) \in \mathbb{R}^n$  početni vektor, takav da je  $\|\mathbf{v}(0)\| = 1$ . Indikator haosa FLI definišemo kao funkciju  $F(\mathbf{x}(0), \mathbf{v}(0), t)$  gde je  $t \in \mathbb{Z}^+$ , tada je  $F$  data sa:

$$F(\mathbf{x}(0), \mathbf{v}(0), t) = \log \|\mathbf{v}(t)\| \quad (3.5)$$

a vektor  $\mathbf{v}(t)$  je dat sistemom:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = M\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{v}(t+1) = \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t))\mathbf{v}(t) \end{cases}$$

Za slučaj neprekidnog Hamiltonijanskog toka, FLI se definiše na sličan način:  $\mathbf{v}(t)$  se dobija integracijom linearizovanih jednačina kretanja (3.2). Napomenimo da definicija FLI nije ista svugde u literaturi, npr. funkcija se usrednjava po  $N$  vremenskih intervala (Froeschlé and Lega, 2000):

$$\text{FLI}(\mathbf{x}(0), \mathbf{v}(0), t) = \frac{1}{2N} \sum_{k=t-N}^{k=t+N-1} \log \|\mathbf{v}(k)\|$$

ili se posmatra supremum logaritma na intervalu  $T$ :

$$\text{FLI}(\mathbf{x}(0), \mathbf{v}(0), t) = \sup_{0 < t < T} \log \|\mathbf{v}(t)\|$$

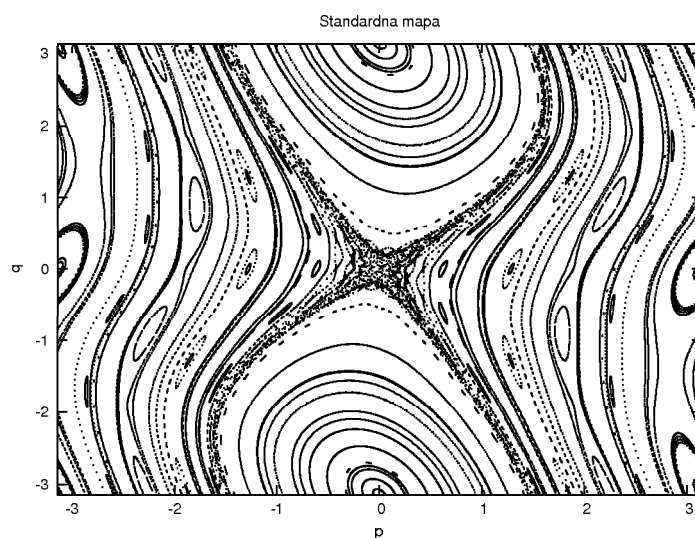
ali razlika u ovim definicijama je neznatna sa kvalitativnog aspekta, jedini efekat je to da kriva FLI nešto više izravnata u odnosu na krivu dobijenu iz osnovne definicije (3.5).

### Svojstva FLI

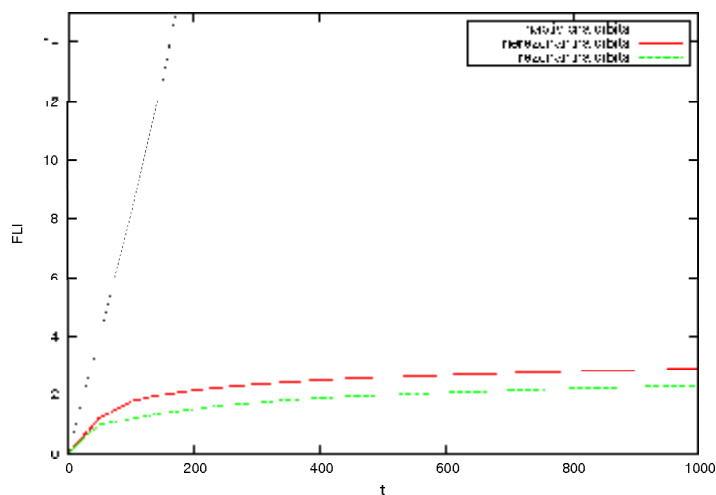
Da bismo opisali svojstva brzog indikatora Ljapunova poslužićemo se standardnom mapom (slika 3.5) koja je data jednačinama (2.2).

---

<sup>2</sup>Ovde je FLI deinisana za slučaj jednog diskretizovanog sistema, na primeru mape. Prioritet je dat ovoj definiciji zato što će u sledećoj glavi FLI biti korišten isključivo za 4D-mapu, a ne za neprekidni Hamiltonijan.



Slika 3.5: Standardna mapa za  $\varepsilon = 0.6$ . Krive koje imaju oblik elipse odgovaraju rezonancama, dok otvorene linije koje se kreću od donje do gornje ivice slike predstavljaju KAM toruse. Haotične zone su predstavljene tačkama koje su rasute bez nekog reda.



Slika 3.6: Promena FLI za tri orbite na standardnoj mapi za vreme  $T = 1000$  gde je  $\varepsilon = 0.6$ . Gornja kriva se odnosi na tačku  $(0.01, 0.0)$  iz haotične oblasti. Srednja kriva predstavlja FLI za regularnu, ali nerezonantnu orbitu čiji je početni uslov  $(2.256, -0.004)$ . Donja kriva se odnosi na regularnu i rezonantnu orbitu, početni uslov je  $\sim (0.64, 0.0)$ .

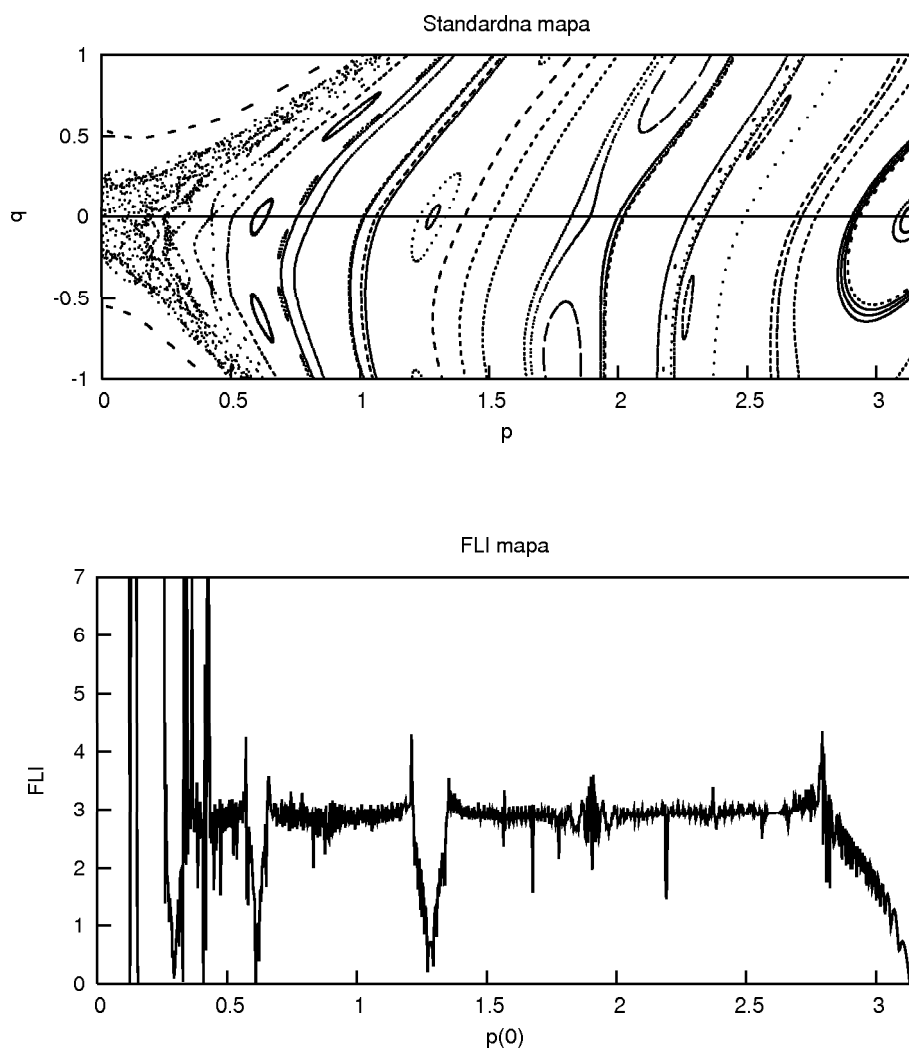
Na standardnoj mapi, za početne uslove uzete su tri različite tačke iz tri oblasti u kojima vladaju različiti režimi kretanja. Očekuje se da se funkcija FLI različito ponaša za svaki od ovih slučajeva.

Na slici (3.6) vidimo promenu FLI za ove tri orbite kao funkcije vremena. Gornja kriva se odnosi na tačku (0.01, 0.0) koja se nalazi u haotičnoj oblasti, i malo je izmeštena iz centra koordinatnog sistema koji odgovara hiperboličkoj nestabilnoj tački. FLI raste izuzetno brzo, tačnije, ima eksponencijanu promenu. Srednja kriva odnosi se na nerezonantnu tačku  $\sim (2.256, -0.04)$  koja se nalazi na jednom od KAM torusa (KAM torusi su predstavljeni otvorenim krivama). Donja kriva predstavlja FLI za rezonantnu orbitu čiji je početni uslov tačka  $\sim (0.64, 0.0)$ . Na standardnoj mapi rezonance odgovaraju zatvorenim krivama u obliku elipse.

Za regularne orbite, promena FLI je linearna, odnosno  $FLI \simeq kt$ . Međutim, bez obzira što je kretanje u oba slučaja regularno, koeficijenti pravca za rezonantno i nerezonantno kretanje neće biti isti. Vrednost FLI za rezonantno kretanje uvek je niža od vrednosti FLI za nerezonantnu orbitu. Ovakvo ponašanje brzog indikatora Ljapunova za standardnu mapu obrazloženo je u Froeschlé and Lega (2000), gde je dat i jedan jednostavan model kojim se opisuje mehanizam promene FLI za rezonantne orbite. Ponašanje FLI za neprekidne hamiltonijanske funkcije oblika  $\mathcal{H}_\varepsilon = h(I) + \varepsilon f(I, \phi)$  analitički je objašnjeno u Guzzo et al. (2002) gde su date i vrednosti koeficijenata pravaca za slučaj rezonantnog i nerezonantnog kretanja.

Vrednost FLI za 1000 iteracija i 1000 tačaka na standardnoj mapi duž prave  $q = 0$  na intervalu za akcije  $[0, \pi]$  prikazana je na slici (3.7). Ovaj 'FLI presek' standardne mape naziva se *FLI mapa*. Na početku intervala, u haotičnoj oblasti, vrednosti FLI su velike. Početni uslov koji je na KAM torusu imaće  $FLI \sim \log t$ . Sledi da će za vreme  $T = 1000$ , vrednost  $FLI \sim 3$ . Za rezonantna ostrva FLI imaju vrednost manju od 3, što se jasno vidi na slici (3.7) kao minimum u obliku slova V. Na FLI mapi prepoznaje se i to da je vrednost FLI nešto veća za haotični sloj koji se nalazi oko same rezonance (na separatriisi), tj. neposredno oko minimuma na FLI mapi.

Iz same definicije FLI, jasno je da se informacija o haotičnosti orbite dobija za jako kratko vreme. Ne moramo kao u slučaju LCE da čekamo da ono bude



Slika 3.7: Na donjoj slici prikazana je FLI mapa, tj. promena FLI za 1000 početnih uslova koji su ekvidistantno raspoređeni duž prave linije koja je obeležena na delu standardne mape (gornja slika). Sledeći liniju na gornjoj slici, pratimo i promenu FLI na donjoj slici: haotične orbite imaju veliku vrednost FLI, svaki prelaz preko rezonance (zatvorene krive u obliku elipse na gornjoj slici) vidljiv je i na FLI mapi kao minimum u obliku slova V, dok orbite na KAM torusu imaju vrednost  $FLI \sim 3$  za vreme od 1000 iteracija.

dovoljno veliko da bi se pokazala asimptotska priroda krive. LCE je pouzdana metoda u smislu tačnosti, kada nas zanima konkretna orbita, ali u slučaju kada je skup početnih uslova veliki, kada se na primer istražuje struktura jedne oblasti u prostoru, FLI je zbog svoje brzine daleko praktičniji. U sledećem poglavlju imaćemo priliku da se bolje upoznamo sa primenom FLI na konkretne dinamičke sisteme.

Upravo zbog te svoje osobine, da se pomoću FLI može posmatrati struktura prostora, FLI je primenjen i u oceni poremećaja  $\varepsilon$  za koji sistem prelazi iz stabilnog režima Nehoroševljevog tipa u haotični režim Čirikova (Froeschlé et al. 2000). Ovde se zapravo daje interval vrednosti  $\varepsilon$ , jer FLI ipak nije u stanju da predvidi tačnu vrednost poremećaja za koje sistem prelazi iz stabilnog u nestabilno stanje. Često se iz dobijenog intervala  $\varepsilon$ , nekom drugom metodom traži tačna vrednost poremećaja (Guzzo et al., 2002). FLI je uspešno primenjen i na višedimenzione mape, kao i za problem difuzije u datim sistemima. Detaljnije u Lega et al. (2003), Froeschlé et al. (2003), Guzzo et al. (2005).

### 3.5 Helikoidni i *twist* uglovi

Autori ove metode su Contolopoulos i Voglis (1996). U linearizovanim jednačinama kretanja (3.2), potrebno je pratiti promenu orijentacije vektora  $\delta\mathbf{p}(t)$  i  $\delta\mathbf{q}(t)$  kao funkciju vremena. U sistemu sa  $n$  stepeni slobode orijentacija je definisana  $n - 1$  uglom: *helikoidnim uglom*  $\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$ . Usrednjene vrednosti ovih uglova po vremenu  $\langle\Phi_1\rangle, \dots, \langle\Phi_{n-1}\rangle$  u najvećoj meri zavise od prirode orbite. Zavisnosti od početnih uslova  $\delta\mathbf{p}(0)$  i  $\delta\mathbf{q}(0)$  ovde nema. Contolopoulos i Voglis su pokazali da je za orbite u haotičnim oblastima promena ovih vrednosti invarijantna, dok se za regularne orbite ona ravnomerno menja. I ovde je osnovni nedostatak dugo računsko vreme.

Pored helicoidnih uglova, Contolopoulos i Voglis su pokazali da su za ocenu haotičnosti merodavni i izvodi helicoidnih uglova po vremenu, takozvani *twist uglovi*. U skladu sa definicijom helicoidnih uglova, ovde su usrednjene vrednosti twist uglova invarijantni za orbite u haotičnoj oblasti, a jednaki su nuli za orbite na

KAM torusu. U oblastima rezonantnih invarijantnih torusa jednaki su libracionim frekvencijama. Analiza ponašanja twist uglova u standardnoj mapi opisana je u Froeschlé and Lega (1998).

### 3.6 Srednje, maksimalne i minimalne vrednosti akcija

Ako je kretanje regularno, uglovi su konstantni i akcije se menjaju periodično ili kvazi periodično. Haotično kretanje nema pravilnu promenu akcija. Stoga je srednja, minimalna ili maksimalna vrednost akcija na nekom intervalu  $[t_0, t_0 + T]$  promenljiva ili nepromenljiva (vremenski interval treba da bude dovoljno dug). Dakle, ovde će kriterijum za razlučivanje haotičnih od regularnih orbita biti: regularne orbite su one za koje se srednje, minimalne i maksimalne vrednosti akcija ne menjaju kada se menjaju vremenski intervali; haotične orbite su one kod kojih se ove vrednosti menjaju sa  $t_0$ . Ova metoda inspirisana je metodom analize frekvencija, uveo ju je Laskar (1994) analizirajući vremensku evoluciju planeta. Metoda srednje, minimalne i maksimalne promene akcija se mnogo lakše primenjuje na realna tela Sunčevog sistema nego metoda analize frekvencija, a ima i tu prednost da se može direktno pratiti promena nekih orbitalnih elemenata (akcija) u vremenu. Detaljnija analiza i primeri ove metode za standardnu mapu objavljeni su u Contopoulos et al. (1997).





## Glava 4

# 4-dimenziona simpleksička mapa kao model prostora

U ovoj glavi je ispitivan dinamički profil jednog modela faznog prostora datog 4-D simpleksičkom mapom. Data je opšta definicija mape, a zatim predstavljen jedan konkretan model 4-dimenzione mape. Koristeći FLI određena je odgovarajuća Arnoldova mreža i ispitana je stabilnost ovog sistema. Takođe, određena je vrednost, odnosno inertval vrednosti za poremećaj  $\varepsilon$ , za koji sistem prelazi iz jednog globalno stabilnog stanja Nehoroševljevog tipa, u difuzioni sistem tipa Čirikova. Na jednom segmentu prostora posmatran je fenomen difuzije, i njegova promena u zavisnosti od  $\varepsilon$ . Na izabranom segmentu prostora data je ocena koeficijenta difuzije. Pokazani su tipovi globalne difuzije na datom modelu faznog prostora.

### 4.1 Mape

U poglavlju (2.1.2) već je bilo reči o mapama, tačnije o 2-dimenzionoj standardnoj mapi koja je dobijena koristeći Poenkareovu površ preseka. Ovde ćemo malo preciznije definisati mapu i navesti neka njena osnovna svojstva.

**DEFINICIJA MAPE.** Mape su matematički objekti oblika

$$a_{n+1} = F(n, a_n)$$

gde je  $n$  neki prirodan broj,  $a_n$  je niz realnih (ili kompleksnih) brojeva, a  $F(n, a_n)$  funkcija kojom se određuje svaki sledeći član niza  $a_{n+1}$ . Analogno hamiltonijanskom sistemu, za mapu kažemo da je *autonomna*, ukoliko ne zavisi eksplicitno od indeksa  $n$ . U suprotnom, mapa je *neautonomna*.

Sada ćemo se pozabaviti jednom posebnom klasom mapa na skupu hamiltonijanskih sistema sa  $n$  stepeni slobode, biće reći o *simplektičkoj mapi* koju definišemo kao:

$$\begin{aligned} I &= I' + \frac{\partial S}{\partial \phi}(I', \phi) \\ \phi' &= \phi + \frac{\partial S}{\partial I}(I', \phi) \end{aligned} \quad (4.1)$$

gde je  $S$  neka generička funkcija oblika  $S(I', \phi) = h(I') + \epsilon f(I', \phi)$ , a uređena  $2n$ -torka  $(I, \phi)$  su parovi akcija-ugao promenljivih koje su definisane na otvorenom i povezanom skupu  $B \times \mathbb{T}^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ .

Prednost mapa u odnosu na klasične i hamiltonijanske jednačine kretanja je njihova jednostavnost i brzina kojom se računaju. Osnovne informacije o dinamičkom sistemu se zadržavaju, ali u nešto jednostavnijem obliku. Pored 2-D standardne mape koju smo ovde već pominjali, biće detaljno opisan jedan model koji je dat 4-D simplektičkom mapom.

### 4.1.1 Definicija modela 4-D simplektičke mape

Prethodnih godina Froeschlé et al. (2000), Guzzo et al. (2002) i Lega et al. (2003) definisali su jedan model kvazi-integrabilnog Hamiltonijana i koristeći FLI ispitali strukturu, stabilnost i dinamiku ovog sistema. Nešto kasnije iz ovog Hamiltonijana *leap-frog* diskretizacijom izvedena je odgovarajuća mapa (Froeschlé et al., 2005) koja je bila pogodnija za ispitivanje dinamičkih procesa koji su vezani za duge integracije, kada jednačine kretanja dobijene direktno iz Hamiltonijana nisu davale dovoljno dobra rešenja zbog nagomilavanja grešaka zaokrugljivanja.

U ovom radu definisana je simplektička mapa koja je u odnosu na prethodnu

(Froeschlé et al., 2005) dopunjena sa dva nespregnuta rezonantna člana:

$$M = \begin{cases} x_{j+1} = x_j + a_1 \sin(x_j + y_j) - \varepsilon \frac{\sin(x_j + y_j)}{(\cos(x_j + y_j) + \cos(z_j + t_j) + 4)^2} \\ y_{j+1} = y_j + x_j \\ z_{j+1} = z_j + a_2 \sin(z_j + t_j) - \varepsilon \frac{\sin(z_j + t_j)}{(\cos(x_j + y_j) + \cos(z_j + t_j) + 4)^2} \\ t_{j+1} = t_j + z_j \end{cases} \pmod{2\pi} \quad (4.2)$$

gde su  $a_1, a_2$  i  $\varepsilon$  parametri sistema,  $x, z$  su komponente prostora koje odgovaraju akcijama  $I_1$  i  $I_2$ , a  $y$  i  $t$  uglovima  $\phi_1$  i  $\phi_2$ . Stoga za  $a_1$  i  $a_2$  veće od nule, Hamiltonijan koji bi odgovarao ovoj mapi neće biti u kvazi-integrabilnoj formi (integrabilni deo plus poremećaj koji je generisan članom  $\varepsilon$ ), tj. odgovarajući Hamiltonijan ne bi bio integrabilan čak ni kada je  $\varepsilon = 0$ .

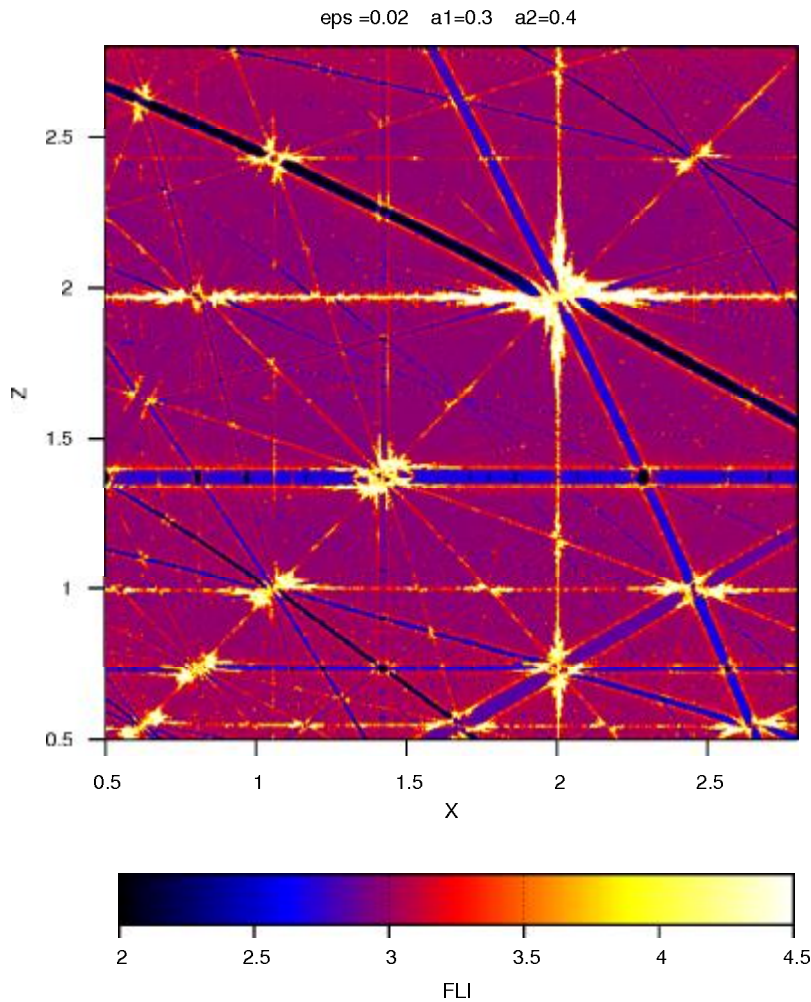
Mapom 4.2 definisan je jedan diskretan hamiltonijanski sistem, čija je dinamička analiza predmet ovog rada. U naredne dve glave ispituje se struktura, stabilnost i difuzioni procesi ovog sistema. Mapu  $M$  definisao je Claude Froeschlé.

## 4.2 Arnoldova mreža

*Arnoldovu ili rezonantnu mrežu* možemo da posmatramo kao rezonantni profil jednog sistema. U poglavlju 1.2.2 smo videli da, kada je sistem integrabilan, akcije su konstante kretanja. Ako su poremećaji mali i sistem zadovoljava određene uslove<sup>1</sup> kretanje pripada klasi KAM torusa  $\mathcal{K}$ . Komplement skupa KAM torusa  $\mathcal{K}$  u jednom sistemu zapravo je Arnoldova mreža. Arnoldova mreža je kompaktan i gust skup, a kad je poremećaj mali, relativna mera tog skupa takođe je mala.

Da bismo topološki opisali strukturu Arnoldove mreže posmatraćemo jedan podskup faznog prostora, neka je to ravan  $\mathcal{S} = \{(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \phi_i = 0, i = 1, 2\}$ . Iz KAM teoreme sledi da trajektorija koja je na KAM torusu ne može dva puta proći kroz istu tačku, dakle seći će ravan  $\mathcal{S}$  u samo jednoj tački koja je određena nekim parom akcija  $(I_1, I_2)$ . Stoga je u sistemu sa dva stepena slobode svakim parom akcija  $(I_1, I_2)$  definisan zapravo jedan invarijantni torus. Preseci torusa iz  $\mathcal{K}$  i ravni  $\mathcal{S}$  će biti izvan okoline prave  $k_1 I_1 + k_2 I_2 + 2\pi k_3 = 0$  (Diofantov uslov),

<sup>1</sup>Uslov nedegenerativnosti, frekvencije su diofantovske i hamiltonijanska funkcija je analitička.



Slika 4.1: Arnoldova mreža u ravni  $(x, z)$  za mapu (4.2). Na ovaj način pokazana je geografija rezonanci dobijena pomoću FLI na koordinatnoj mreži od  $500 \times 500$  početnih uslova i vreme  $\tau = 1000$ . Parametri ovog sistema su  $a_1 = 0.3, a_2 = 0.4$ . Poremećaj  $\varepsilon = 0.02$ , a početni vektor je  $\mathbf{v}(0) = (0.5(\sqrt{5} - 1), 1, 1, 1)$ .

a okolina prave će biti proporcionalna  $\gamma/|k|^\tau$ , za svako  $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 \setminus 0$ . Stoga će presek Arnoldove mreže i ravni  $\mathcal{S}$  sadržati sve ove prave zajedno sa njihovim okolinama (koje očigledno opadaju sa redom rezonance  $|k|$ ). Dakle, svaka prava na

Arnoldovoj mreži predstavlja neku rezonancu uključujući i njenu  $\gamma/|k|^\tau$  okolinu.

Arnoldovu mrežu  $\mathcal{A}$  možemo da shvatimo i kao sve one tačke iz ravni  $\mathcal{S}$  koje ne pripadaju skupu KAM torusa  $\mathcal{K}$ . Tačnije,  $\mathcal{A} = \mathcal{S} - \{\mathcal{S} \cap \mathcal{K}\}$ .

### 4.2.1 Arnoldova mreža i FLI

Struktura Arnoldove mreže dobijena numerički, tačnije pomoću FLI za dati hamiltonijanski sistem objavljena je u Froeschle et al. (1997, 2000). Pokazano je da FLI vrlo precizno odslikava rezonantnu strukturu prostora. FLI će nam poslužiti i za dobijanje Arnoldove mreže našeg modela faznog prostora koji je dat mapom  $M$ .

Podsetimo se da FLI ima jednu vrednost na skupu KAM torusa. Izvan tog skupa FLI je u stanju da pokaže razliku između regularnog rezonantnog i haotičnog rezonantnog kretanja. Štaviše, u stanju je da razlikuje jači i slabiji kaos (pogledati poglavlje 3.4). Iskoristićemo ove osobine FLI za pletenje Arnoldove mreže.

Arnoldova mreža koja odgovara mapi (4.2) prikazana je na slici 4.1.  $x$  i  $z$  odgovaraju akcijama, a  $y$  i  $t$  uglovima. Izabrali smo ovu notaciju, jer se sistem koji je diskretizovan pomoću mape ipak razlikuje od sistema koji je zadat hamiltonijanskom funkcijom. Možemo da konstatujemo da su to ekvivalentni sistemi, ali ne i da su identični.

Na slici (4.1) prikazana je vrednost FLI za vreme  $\tau = 1000$  iteracija na koordinatnoj mreži od  $500 \times 500$  na  $x$  i  $z$ . Početne vrednosti uglova su  $y = 0$  i  $t = 0$ , a početni vektor<sup>2</sup>  $\mathbf{v}(0) = (0.5(\sqrt{5} - 1), 1, 1, 1)$ . Vrednost FLI za svaku tačku koordinatne mreže predstavljena je na skali boje. Tamnije boje odgovaraju regularnom rezonantnom kretanju, dok najsvetlije boje predstavljaju haotične orbite u okolini separatriše, i na presecima rezonanci, takozvanim rezonantnim čvorovima.

Tačnije, orbite čije su vrednosti FLI  $\sim 1.5 \log(\tau)$  odgovaraju haotičnim orbitama, u našem slučaju je vrednost odgovarajućeg FLI  $\sim 4.5$  i na slici im odgovara žuta. Tačke na Arnoldovoj mreži čija je vrednost FLI  $\sim \log(\tau)$  predstavljaju KAM toruse. Na primeru naše mape FLI koji odgovara KAM torusu biće 3 i na skali boje odgovara purpurnoj boji. Rezonantne orbite imaju vrednost FLI manju od 3 i na

---

<sup>2</sup>Vektor  $\mathbf{v}(0)$  definisan je u 3.4.

slici im odgovaraju najtamnije nijanse. Dakle, na slici (4.1) 'trake' predstavljaju rezonance na čijim se rubovima jasno vidi svetli haotični sloj, a na preseccima rezonanci, nešto intenzivnije prisustvo haotičnih zona. Oblasti koje nisu obuhvaćene rezonancama tretiraju se kao KAM torusi, odnosno preseccima KAM torusa i ravni  $(x, z)$ .

### 4.3 Prelaz iz režima Nehoroševljevog tipa u režim tipa Čirikova

Kada razmatramo neki dinamički sistem, jedno od osnovnih pitanja je pitanje stabilnosti. Sa geometrijskog aspekta, stabilnost možemo da posmatramo kroz strukturu i gustinu invarijantnih torusa kojima je ispunjen prostor. Ovakav pristup je zapravo ekvivalentan geometrijskoj interpretaciji Nehoroševljeve teoreme (1977). Za male vrednosti poremećaja sistem je u režimu Nehoroševa, promena akcija je eksponencijalno spora i fazni prostor je ispunjen invarijantnim torusima. Za veće vrednosti poremećajnog parametra, Nehoroševljeva struktura se gubi, difuzija se ubrzava i sistem prelazi u režim Čirikovljevog tipa.

Ceo ovaj postupak se teško može analitički pokazati, jer podrazumeva jedan izuzetno složen proces čiji je scenario takav da se najpre dešava superpozicija rezonanci višeg reda, a zatim dolazi do rapidnog ubrzanja difuzije. Međutim, ako zanemarimo određene teorijske pretpostavke, numerički se ovaj fenomen već može detektovati, a osnovni princip je taj da se preko geometrijske strukture prostora prati njegova promena za različite vrednosti poremećajnih parametara.

U narednom poglavlju bavimo se numeričkom demonstracijom stabilnosti dinamičkog sistema datog mapom  $M$ . Važno je napomenuti da se ovde radi o jednom konkretnom sistemu, jer opšte rešenje zapravo i ne postoji. Moguće je, bar za sada, posmatrati samo promene sistema za konkretne ili za pojedine klase hamiltonijanskih sistema, ali ne i na opštem planu.

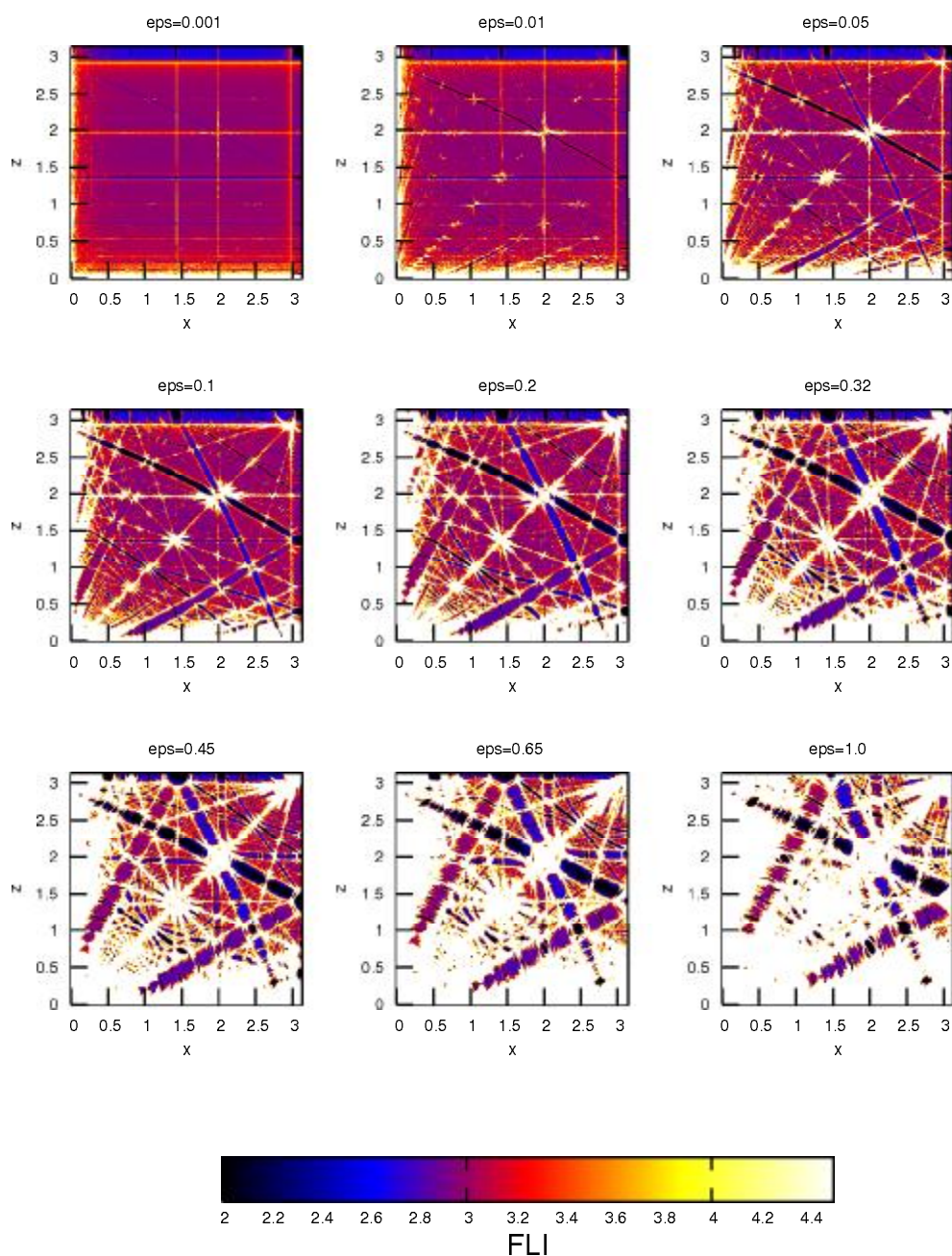
### 4.3.1 Numerički primer prelaza i reda u haos

Pomoću Arnoldove mreže u mogućnosti smo i da ispitamo prelaz iz jednog globalno stabilnog i eksponencijalno sporog režima Nehoroševljevog tipa u režim tipa Čirikova za kojeg važi da je haotičan u globalnom smislu i da se difuzija ubrzava rapidno.

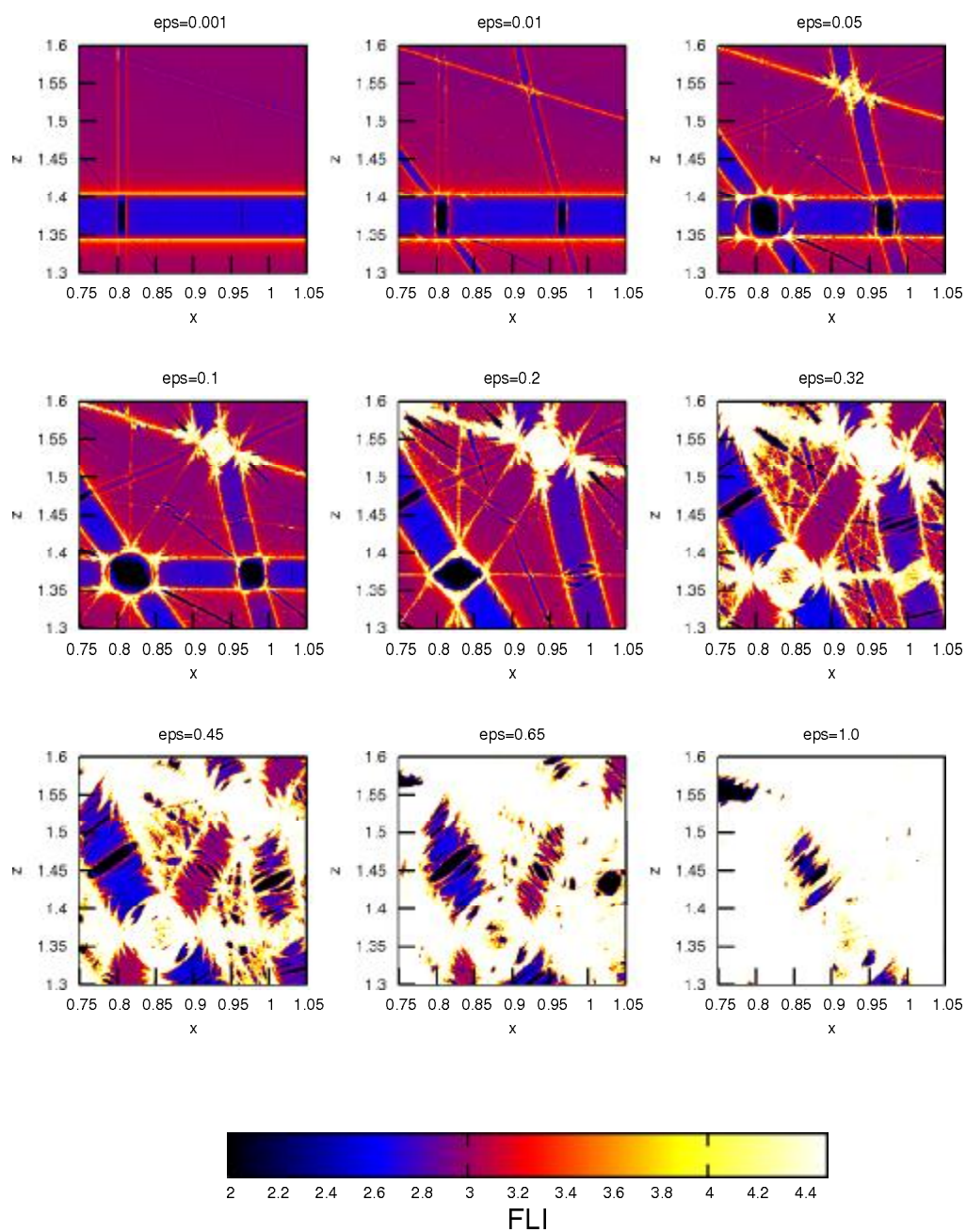
Posmatraćemo strukturu prostora, koju smo dobili koristeći FLI, za različite vrednosti poremećajnog člana  $\varepsilon$  (slika 4.2). Princip dobijanja slika već je opisan. Parametri  $a_1$  i  $a_2$  su fiksirani na 0.3 i 0.4 respektivno. Na gornje tri slike vrednost  $\varepsilon$  je mala 0.001, 0.01 i 0.05, sistem je stabilan jer je većina tačaka je na KAM torusu (dominira purpurna boja). U sistemu vlada režim Nehoroševljevog tipa. Primitimo da se broj haotičnih orbita uvećava povećanjem vrednosti poremećaja, što je posebno izraženo u oblastima koje su blizu koordinatnih osa, gde se razaznaju haotične zone generisane parametrima  $a_1$  i  $a_2$ . Ova tendencija se nastavlja i za vrednosti  $\varepsilon = 0.1$  i  $\varepsilon = 0.2$ , s tim što je na svakoj od ovih slika haotična zona, kao što se i očekuje, sve veća i dominantnija. Za  $\varepsilon = 0.32$  situacija se postepeno menja, polovina orbita ima vrednost FLI veću od 3.2, odnosno veću od one koja je svojstvena KAM torusima. Konstatujemo da sistem polako napušta stabilni Nehoroševljev režim i prelazi u stanje globalnog haosa. Za vrednosti  $\varepsilon = 0.32$  i  $\varepsilon = 0.45$  uočavamo povećanje broja haotičnih orbita, npr. za  $\varepsilon = 0.45$  imamo da je već oko 60% orbita haotično te možemo da konstatujemo da je ovo početak ulaska u stanje globalnog haosa. Zaključujemo da je prelazni režim iz Nehoroševljeve strukture u Čirikovljevu na intervalu za  $\varepsilon$  između 0.3 i 0.45. Poslednje dve slike koje odgovaraju  $\varepsilon = 0.65$  i  $\varepsilon = 1.0$  i prikazuju sistem u kojem već dominira haotično kretanje, odnosno stanje globalnog haosa ili režim Čirikovljevog tipa.

Da bismo imali jasniju sliku, poželjno je da usmerimo pažnju na jedan deo ravni  $(x, z)$ . Biramo da taj deo ravni bude  $[0.75, 1.05] \times [1.3, 1.6]$  koji je prikazan na slici (4.3). Prelaz iz jednog stabilnog režima Nehoroševljevog tipa u haotični režim tipa Čirikova potvrđen je i na ovom malom segmentu prostora, gde su vidljiva tri rezonantna čvora i njihova promena za različite vrednosti  $\varepsilon$ . Nehoroševljevu strukturu karakteriše, između ostalog, i to da su rezonance jasno razdvojene, što se lako uočava na slikama koje odgovaraju malim vrednostima poremećaja kada je





Slika 4.2: Prelaz iz jednog globalno stabilnog stanja u stanje globalnog haosa za sistem definisan mapom  $M$  kada je  $a_1 = 0.3$  i  $a_2 = 0.45$ . Utvrđeno je da se prelaz na globalnom nivou dešava za  $\epsilon \in [0.3, 0.45]$ . Odgovarajući  $\epsilon$  navedeni su iznad svake slike. Za male poremećaje sistem je stabilan. Povećanjem  $\epsilon$  uvećava se i broj haotičnih orbita.



Slika 4.3: Prelaz na intervalu za  $\epsilon \in [0.3, 0.45]$  iz jednog stabilnog Nehoroševljevog sistema u nestabilni Čirikovljevi je numerički potvrđen i na manjem segmentu prostora. Početni uslovi kao i ostali parametri identični su odgovarajućim slikama na (4.2).

sistem stabilan. Za vrednosti  $\varepsilon$  za koje je konstatovan prelaz u stanje globalnog haosa, tj. za  $\varepsilon$  između 0.32 i 0.45 vidimo i kako izgledaju rezonantni čvorovi, kako se oni polako deformišu i postaju sve manje prepoznatljivi. Ovaj prelaz je nešto izraženiji za rezonance višeg reda, takođe vidljive na slici (4.3). Za vrednosti  $\varepsilon = 0.65$  i  $\varepsilon = 1.0$  primećujemo da su rezonance višeg reda već izgubile oblik. Sistem je u režimu Čirikovljevog tipa.

Naglasimo da se ovaj prelaz dešava na globalnom planu. Vrednosti po-remećajnog parametra za koje sistem prelazi u haotični režim zavisice i od konkretne oblasti u ravni  $(x, z)$ . Očigledno je da će u oblastima koje su blizu koordinatnih osa haotično kretanje nastupiti jako brzo, već za male vrednosti poremećaja  $\varepsilon$ . Razlog ove neravnomernosti su dva člana generisana parametrima  $a_1$  i  $a_2$  koji odgovaraju rezonancama  $x = 0$  i  $z = 0$  (kao i njihovim  $2\pi$  periodičnim slikama) čije vrednosti su relativno velike, u ovom slučaju 0.3 i 0.4. Takođe, vrednost 'prelaznog'  $\varepsilon$  zavisice i od izbora parametara  $a_1$  i  $a_2$ .

# Glava 5

## Difuzija u diskretnom hamiltonijanskom sistemu

Prvi model kvazi-integrabilnog Hamiltonijana na kojem je detektovana difuzija konstruisao je Arnold (1964). Kasnije je ovaj tip difuzije pokazan na nizu hamiltonijanskih modela. Data je numerička ocena koeficijenta difuzije kao funkcije poremećajnog parametra. Difuzija je detektovana i na modelima kvazi-integrabilnih simplektičkih mapa (Kuksin and Pöschel, 1994, Froeschlé et al., 2005). Na slučaju jedne mape pokazano je da Arnoldova difuzija prevazilazi lokalni karakter i da je u velikoj meri odgovorna za globalnu difuziju, te da orbite difunduju na vrlo zanimljiv način- verno slede strukturu Arnoldove mreže (Guzzo et al., 2005).

Pokušaćemo ove tipove difuzija da prepoznamo i na našem modelu prostora.

### 5.1 Lokalna difuzija

#### 5.1.1 Arnoldova difuzija: kvalitativni aspekti

Fenomen Arnoldove difuzije ovde shvatamo kao sporo pomeranje akcija duž rezonantne ivice. Očekuje se da za male poremećajne parametre ovaj tip difuzije bude u skladu sa teoremom Nehoroševa, odnosno eksponencijalno spor. Upravo zbog te svoje osobine, ona se teško detektuje. U računskom smislu, to znači da da potraga za ovom difuzijom zahteva mnogo vremena.

Princip koji je i ranije korišćen (Lega et al., 2003, Guzzo et al., 2005) je sledeći: najpre se odredi interval vrednosti poremećaja za koje sistem prelazi iz Nehoroševljevog u Čirikovljev režim. Zatim se izabere neko  $\varepsilon$  koje je nešto niže od donje granice za interval prelaza iz jednog sistema u drugi. Dakle,  $\varepsilon$  takav da je sistem još uvek u režimu Nehoroševljevog tipa, ali blizu granice ulaska u Čirikovljev režim. Ovakvi sistemi koji su na granici izlaska iz Nehoroševljevog režima su najpogodniji za detektovanje difuzionih procesa.

Na slikama koje slede prikazana je difuzija na haotičnoj ivici rezonance  $x = 2z$  koju vidimo kao žutu tanku liniju. Tačke na haotičnoj ivici rezonance su idealni kandidati za difuziju. Biramo skup od 100 tačka (naravno broj tačaka ne mora uvek da bude 100). Da bismo bili sigurni da je izabrani skup zaista pogodan za procenu difuzije, poželjno je da još jednom ispitamo njihovu haotičnost pomoću FLI ili LCE. Svaku od 100 trajektorija koje odgovaraju početnim uslovima koje smo izabrali 'integralimo' pomoću mape  $M$  i beležimo one tačke koje su posle nekog vremena presekle ravan  $(x, z)$ . Smatramo da je trajektorija prošla kroz ovu ravan ako je zadovoljen uslov  $|y| + |t| \leq 0.005$ . Sve prolaze kroz ravan  $(x, z)$  svake od 100 trajektorija obeležavamo tačkom. Po teoremi, ako je sistem u režimu Nehoroševa, jedan od očekivanih pravaca za difuziju je onaj kojim se orbita lagano (tačnije eksponencijalno sporo) pomera duž haotične ivice. Ovaj tip difuzije je ranije pomenut i naziva se *Arnoldova difuzija*. Postoji i pravac brzih promena normalan na ivicu rezonance (opisan u poglavlju 2.2.1), ali se difuzija u tom pravcu ne može direktno videti na ovoj slici. Gornja i donja ivica rezonance su zapravo povezane nekom hiperboličkom površi u 4-D prostoru po kojoj se trajektorija kreće, tako da je jedina vidljiva posledica pravca brzih promena to što su tačke koje predstavljaju prolaze kroz ravan prisutne sa obe strane rezonantne ivice.

Ispitaćemo ovde prirodu Arnoldove difuzije u sistemu koji je definisan 4-D simplektskom mapom (4.2). Kao i u prethodnom slučaju, najpre ćemo detektovati geografiju rezonanci, odnosno Arnoldovu mrežu dobijenu pomoću FLI, a zatim u jednoj oblasti, na haotičnoj ivici izabrane rezonance ispitati difuziju. Parametri  $a_1$  i  $a_2$  su i ovde fiksirani na 0.3 i 0.4. Biramo jednu oblast prostora i u njoj rezonancu nižeg reda  $x = 2z$  (primetimo da ona zapravo odgovara rezonanci 1:2). Metodom

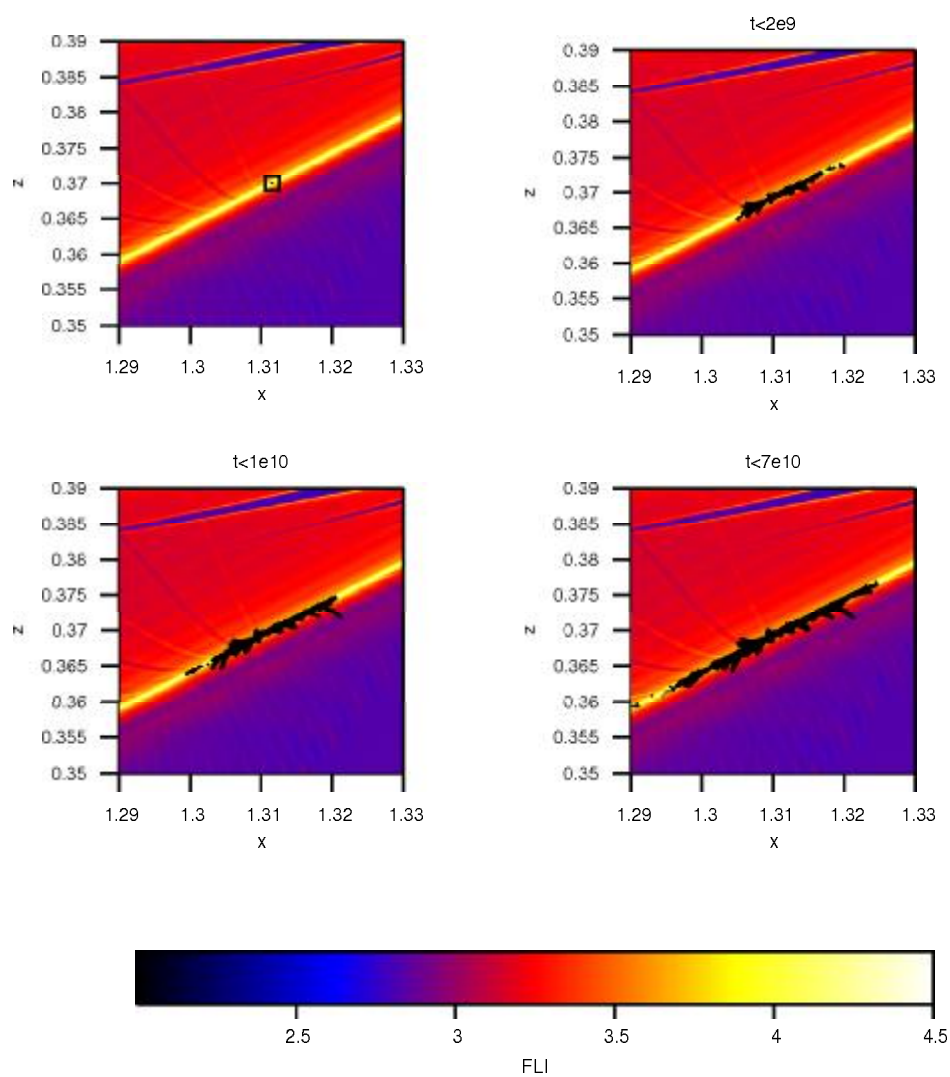
koja je opisana u prethodnom poglavlju nalazimo da je prelaz iz stabilnog u nestabilni režim u *lokalnom* domenu za vrednosti  $\varepsilon$  između  $[0.02, 0.05]$ . Primetimo da je 0.02 dosta niže od vrednosti  $\varepsilon = 0.3$  koja je procenjena za globalni prelaz. Ovo se objašnjava blizinom haotične oblasti koja odgovara rezonanci  $z = 0$ , a generisana je parametrom  $a_2 = 0.4$ .

Ovde ćemo prikazati efekte Arnoldove difuzije za  $\varepsilon = 0.006$  (slika 5.1), zatim slučaj kada je poremećaj veći  $\varepsilon = 0.0105$  (slika 5.2) i primer kada je  $\varepsilon = 0.015$ , neznatno manji od 0.02 koje predstavlja početak ulaska u haotični režim. Donja vrednost  $\varepsilon$  za koju je difuzija registrovana je 0.003, tj. za  $\varepsilon$  manje od ove vrednosti nije uočena difuzija čak i za ekstremno duga vremena integracije ( $\sim 10^{11}$  koraka).

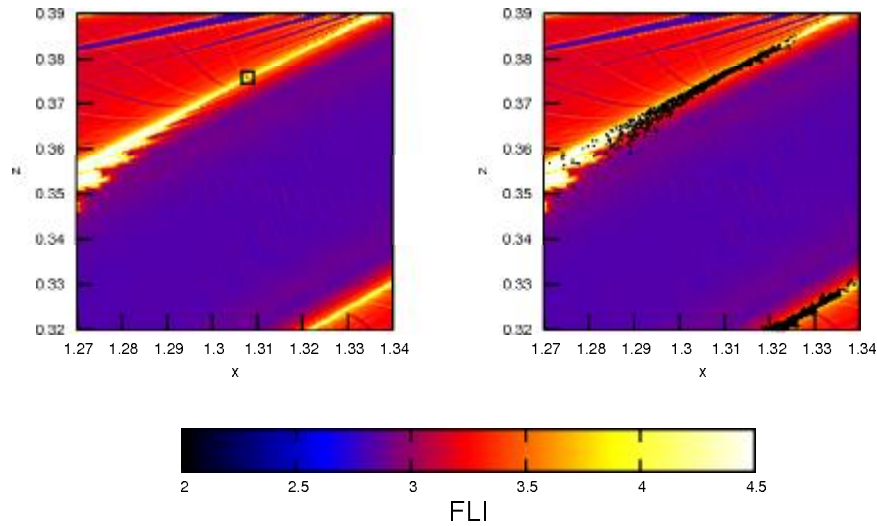
Slika (5.1) prikazuje fenomen difuzije na haotičnoj ivici rezonance kada je vrednost poremećaja  $\varepsilon = 0.006$ . Na gornjoj levoj slici crnim kvadratićem obeležena je oblast u kojoj se nalazi 100 početnih tačaka. Pored nje vidimo situaciju posle  $2 \times 10^9$  iteracija. Orbite su napustile oblast iz koje su krenule, i kao što to teorija predviđa polako se kreću duž rezonantne ivice. Broj iteracija na sledeće dve slike je  $1 \times 10^{10}$  i  $7 \times 10^{10}$ . Vidimo kako orbite nastavljaju da se kreću u ovom režimu. Primetimo da je broj iteracija izuzetno veliki što nas navodi na zaključak da je ovaj fenomen jako spor. Time smo pokazali da Arnoldova difuzija može da se registruje i na primeru naše mape, kao i da je ovo izuzetno spor proces, što se za male poremećaje i očekuje.

Slika (5.2) ilustruje situaciju koja je analogna, s tim što je ovde poremećaj nešto veći  $\varepsilon = 0.0105$ . Na prvoj slici je obeležena oblast u kojoj se nalaze početne tačke, a na sledećoj one tačke koje su se vratile na ravan slike u toku  $2 \times 10^9$  iteracija. Ako uporedimo situaciju sa prethodnom, gde je poremećaj manji, vidimo da je dužina rezonantne ivice koja je zahvaćena ovim 'difuzionim' orbitama dosta veća u odnosu na prethodnu. Dakle, poremećaj je veći te je difuzija znatno brža za isti broj iteracija.

Na slici (5.3) vidimo difuziju na istoj rezonanci kada je  $\varepsilon = 0.015$ . Evidentno je da je ovde difuzija znatno brža, jer je i poremećaj veći. Orbite koje difunduju prelaze celu dužinu rezonantne ivice i za vreme od  $2 \times 10^9$  iteracija već dolaze do preseka rezonanci. Štaviše, ulaze u rezonance višeg reda i za vreme integracije



Slika 5.1: Difuzija duž ivice rezonance za vrednosti  $\varepsilon = 0.006$ . Na prvoj slici kvadratićem je obeležena oblast iz koje su uzete početne tačke. Ukupan broj iteracija je  $7 \times 10^{10}$ . Na preostale tri slike možemo da pratimo difuziju za  $t < 2 \times 10^9$ ,  $t < 1 \times 10^{10}$  i  $t < 7 \times 10^{10}$ .



Slika 5.2: Difuzija duž ivice rezonance za vrednosti  $\varepsilon = 0.0105$ . Na prvoj slici kvadratićem je obeležena oblast iz koje je uzet skup od 100 tačaka. Na susednoj slici vidimo efekte Arnoldove difuzija za vreme od  $2 \times 10^9$  iteracija.

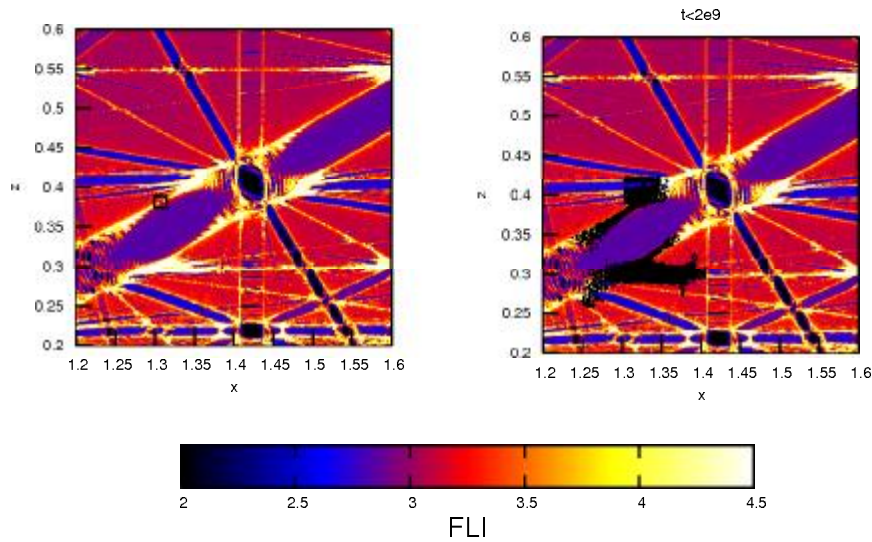
uspele su da osvoje deo i slabih rezonanci višeg reda na kojima je difuzija znatno sporija.

### 5.1.2 Arnoldova difuzija: kvantitativni aspekti

Videli smo da se Arnoldova difuzija ubrzava i usporava u zavisnosti od veličine poremećaja sistema. Takođe, brzina difuzije zavisi i od reda rezonance. Niži red rezonance karakteriše brža difuzija i obrnuto (Morbidelli and Giorgilli, 1995, Giorgilli and Morbidelli, 1997). Međutim, da bismo malo ozbiljnije analizirali vezu difuzije i poremećaja poželjno je da damo neki opštiji kriterijum za ocenu brzine difuzije. Definisaćemo ovde *koeficijent difuzije*.

S obzirom da nam nije poznat analitički model kretanja na haotičnoj ivici, tretiraćemo Arnoldovu difuziju kao Braunovsko kretanje (u okviru haotične ivice).





Slika 5.3: Difuzija duž ivice rezonance za vrednosti  $\varepsilon = 0.015$  i za vreme od  $2 \times 10^9$  iteracija. Obrbite za ovo vreme već uspevaju da napuste rezonancu sa koje su krenule.

*Linearnu promenu srednje kvadratne razlike u odnosu na skup početnih uslova definišemo kao koeficijent difuzije.* Dakle, posmatramo linearnu promenu srednje kvadratne razlike trenutnih u odnosu na početne položaje izabranih orbita. Da bismo redukovali efekte brzih pomeranja, tretiraćemo samo one tačke koje su u nekom trenutku presekle površ  $(x, z)$ . Postoji nešto drugačija definicija koeficijenta difuzije u kojoj se razmatraju sve difundujuće tačke bez obzira na položaj u odnosu na ravan  $(x, z)$ , gde se srednja kvadratna razlika takođe usrednjava po određenim međuintervalima (Lega et al. 2003). Naravno, postoji mogućnost da damo i ocenu koeficijenta difuzije tako što ćemo uzeti u obzir sve tačke prostora posle svakog koraka iteracije, ali time bismo vrlo brzo prekoračili naše računске resurse. Jedan od nedostataka ove metode određivanja koeficijenta difuzije je taj da je broj početnih uslova relativno mali (u našem primeru samo 100). Idealno bi bilo kada bismo posmatrali difuziju velikog broja tačaka na haotičnoj ivici, ali s

obzirom da je potrebno ogromno vreme integracije da bi se difuzija uopšte i detektovala, zaključujemo da je za ovaj poduhvat potrebno ogromno računsko vreme, te nas i ova činjenica navodi na zaključak da ona za sada računarski nije izvodljiva.

Numerički, ocena koeficijenta lokalne Arnoldove difuzije izgleda ovako: početne vrednosti označićemo sa  $x_i(0), z_i(0)$ ,  $i = 1, \dots, N$  gde je  $N$  broj početnih tačaka na ivici izabrane rezonance. Vrednosti  $x_i(j)$  i  $z_i(j)$  predstavljaju vrednosti  $x_i$  i  $z_i$  u nekom  $j$ -tom trenutku. Ukupan inerval integracije delimo na podintervale dužine  $t^*$ . Na svakom od ovih podintervala definiše se vrednost  $S(nt^*)$  kao:

$$S(nt^*) = \frac{1}{M_n} \sum_{i: (|y_i(j)| + |t_i(j)|) < 0.005} [(z_i(j) - 2x_i(j)) - (z_i(0) - 2x_i(0))]^2 \quad (5.1)$$

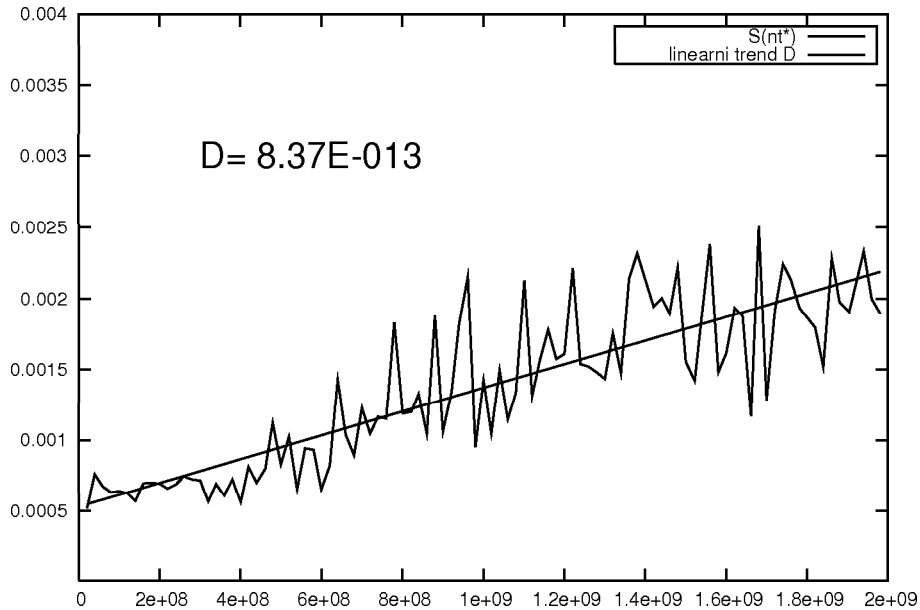
ovde je  $M_n$  broj tačaka u ravni  $(x, z)$  koje su presekle ravan  $(x, z)$  u vremenskom intervalu dužine  $t^*$ , tačnije u vremenu  $(n-1)t^* \leq j \leq nt^*$ . Posmatramo zatim promenu  $S(nt^*)$  od jednog intervala  $t^*$  do drugog (slika 5.4) i određujemo linearni porast  $S(nt^*)$ . Koeficijent pravca ove prave predstavlja *koeficijent difuzije*.

Primetimo da ovako definisan koeficijent podrazumeva da se tačke koje su presekle ravan  $(x, z)$  i 'učestvuju' u oceni koeficijenta, predstavljaju njihove projekcije na pravu  $x = 2z$ . Ovo ima smisla, jer se ovde meri pomeranje *u pravcu* pomenute rezonance (ovaj pravac pomeranja akcija predviđa teorema Nehoroševa).

Na slici (5.4) prikazana je zavisnost  $S(nt^*)$  (definisana jednačinom (5.1) u vremenu za vrednost  $\varepsilon = 0.0105$ , kao i prava koja predstavlja njenu linearnu promenu. Za ovu vrednost  $\varepsilon$  koeficijent difuzije je ocenjen na  $D \sim 8.4 \times 10^{-13}$ .

Sada, za različite vrednosti  $\varepsilon$  ponavljamo ovaj postupak. Dakle, za svako  $\varepsilon$  ispituje se difuzija na ovoj rezonanci i daje ocena koeficijenta difuzije  $D$  na način koji je već opisan. Zanima nas veza između  $D$  i  $\varepsilon$ . Očekuje se da ona bude eksponencijalne prirode.

Ocena  $\ln D$  u odnosu na  $\ln(1/\varepsilon)$  predstavljena je na slici (5.5). Prepoznali smo dva skupa podataka, koji predstavljaju dva lokalna režima oblika  $\ln D = a + m \ln(1/\varepsilon)$ . Prvi skup podataka se odnosi na sistem koji odgovara vrednostima  $\varepsilon$  između 0.02 i 0.0107 gde je koeficijent  $m$  ocenjen na  $m_1 = -1.3$  i režim koji odgovara vrednostima  $\varepsilon$  između 0.005 i 0.0105 i kojem odgovara  $m_2 = -12.4$ . Bilo

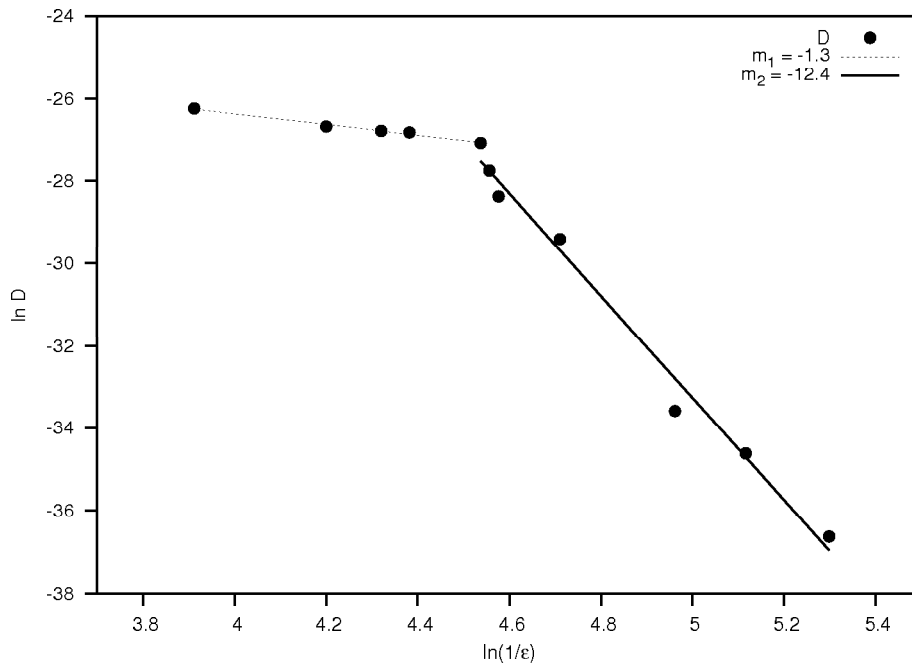


Slika 5.4: Evolucija  $S(nt^*)$  za vreme od  $2 \times 10^9$  iteracija 100 orbita za sistem koji je dat mapom  $M$ , kada je  $\varepsilon = 0.0105$  i prava koja predstavlja njen linearni trend. Koeficijent pravca ove prave daje nam koeficijent difuzije  $D$  koji je ovde ocenjen na  $D \sim 8.4 \times 10^{-13}$ .

bi poželjno da se kroz ove podatke fituje i eksponencijalna kriva, međutim u našem slučaju broj uzoraka nije dovoljan da bismo se pouzdali u ovu ocenu.

Ovim smo zapravo pokazali da je difuzija u sistemu brža od stepenog zakona. Smatramo da je ovo dovoljno dobra ocena promene koeficijenta difuzije, jer stepena promena se očekuje u Čirikovljevom režimu kretanja. Promena koja je brža od stepene, je ipak dosta blizu eksponencijalnoj koju predviđa Nehoroševljeva teorema.

Čirikov (1979) je predvideo da brzina difuzije u haotičnom režimu ima stepenu zavisnost u odnosu na poremećajni član  $\varepsilon$ . Naš primer pokazao je da je difuzija brža od stepene. Dakle, sistem još uvek nije u režimu Čirikova. Da bi se pokazalo da kretanje zaista ima eksponencijalnu zavisnost, koja se očekuje, potrebno je uraditi detaljniju analizu sistema, koja u našem slučaju nije izvodljiva, prvenstveno zbog ogromnog računskog vremena koje ona zahteva.



Slika 5.5: Logaritam koeficijenta difuzije  $D$  kao funkcija logaritma inverzne vrednosti  $\varepsilon$ . Primetimo da postoje dva tipa stepene zavisnosti. Ustanovljeno je da se sistem menja brže od stepene funkcije što je dovoljan uslov da promena može da ima i eksponencijalnu prirodu.

## 5.2 Globalna difuzija

U prethodnom poglavlju opisana je Arnoldova difuzija koja odgovara sistemima u kojima je poremećaj mali. Difuzija je zbog svoje sporosti bila takva da orbite nisu napuštale lokalnu oblast. Za veće vrednosti poremećaja, situacija je drugačija. Iz lokalnih oblasti orbite difunduju na celom domenu faznog prostora, dakle globalno. Fenomen globalne difuzije na modelu hamiltonijanskog prostora opisan je u Froeschlé et al. (2005) i Guzzo et al. (2005). Na primeru mape  $M$  takođe ćemo pokušati da ispitamo fenomen globalne difuzije.

Ranije je pokazano da postoje dva tipa globalne difuzije. Dve situacije u kojima orbite osvajaju prostor u globalnom smislu: globalna Arnoldova i takozvana globalna Čirikovljeva difuzija. Kada je sistem jako blizu prelaza iz Nehoroševljeve

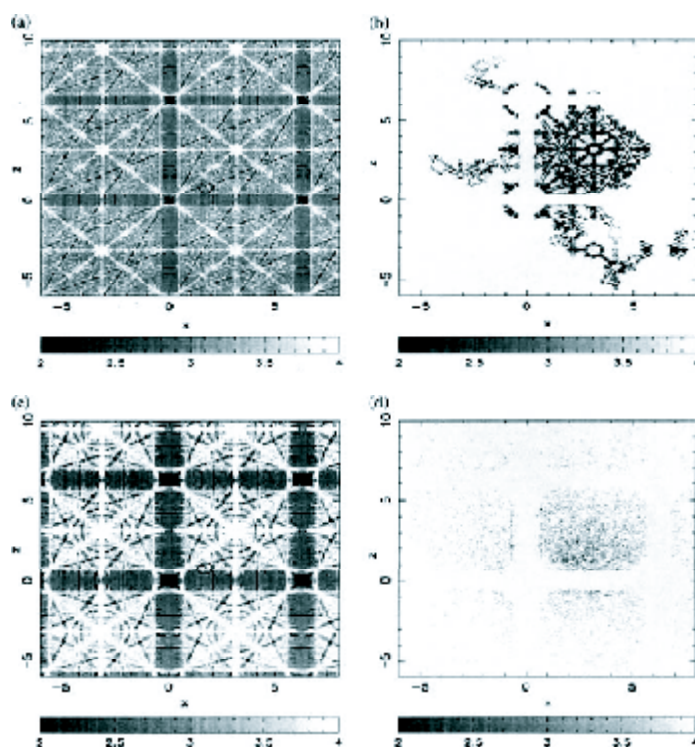
u Čirikovljevu, kretanje na haotičnom rubu rezonance ima to svojstvo da orbite difunduju tako što ne napuštaju rezonantne ivice. Posledica je to da one zapravo odslikavaju strukturu Arnoldove mreže. Dakle, još uvek je prisutan fenomen Arnoldove difuzije, ali na globalnom planu. Ovakva situacija ilustrovana je na slici 5.6b. Smatra se da, kada bi vreme integracije bilo beskonačno, difundujuće orbite bi pre ili kasnije posetile sve rezonance prostora. Naglasimo da se ovaj fenomen dešava kada je sistem blizu prelaza iz stabilnog u haotični režim.

Za veće poremećaje, kada je sistem u haotičnom režimu Čirikovljevog tipa, rezonance se preklapaju, a difuzija ubrzava. Na Arnoldovoj mreži, rezonance, kao glavni 'vodiči' difuzionog kretanja, gube svoj oblik (5.6c). Zato će i difuzija na Arnoldovoj mreži biti haotična (slika 5.6d). Za razliku od prethodne situacije kada je globalna difuzija bila Arnoldovog tipa, kod globalne Čirikovljeve difuzije nismo u mogućnosti da prepoznamo strukturu prostora na osnovu difundujućih orbita.

Na primeru mape  $M$  očekivana je analogna situacija. Arnoldova difuzija koja ima globalni karakter na modelu koji je dat mapom  $M$  nije registrovana. Umesto nje, detektovan je nešto drugačiji fenomen o kojem će biti više reči u sledećem poglavlju.

Globalna difuzija svojstvena sistemima u haotičnom režimu za mapu  $M$ , prikazana je na slici (5.7) i odgovara situaciji kada je  $\varepsilon = 1.2$ , tj. sistem je u režimu Čirikova. Parametri su, kao i u prethodnim slučajevima fiksirani,  $a_1 = 0.3$  i  $a_2 = 0.4$ . Na haotičnoj ivici rezonance uzet je skup od 20 tačaka. Ova oblast je na slici (5.7) obeležena kvadrati 'cem. Na desnoj slici vidimo rezultat difuzije za vreme od  $5 \times 10^7$ . Primetimo da je vreme iteracije daleko kraće nego u slučaju lokalne Arnoldove difuzije. Za ovako relativno kratko vreme (broj iteracija u prethodnim primerima bio reda veličine  $10^{11}$ ). Orbite uspevaju da osvoje prostor u globalnom smislu, ali nismo u mogućnosti da razaznamo konture rezonanci.

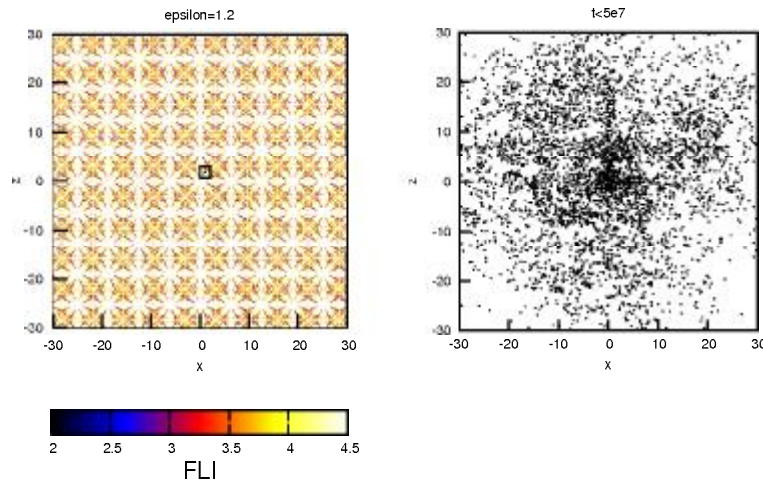
Očekivani tip globalne haotične difuzije, koji je ilustrovan slikom (5.6), potvrđen je i na našem modelu prostora (slika 5.7).



Slika 5.6: Globalna difuzija koja odgovara mapi iz Froeschlé et al. (2005): na slikama (a) i (c) prikazana je Arnoldova mreža za mapu kada su vrednosti poremećaja  $\varepsilon = 0.6$  i  $\varepsilon = 1.7$  respektivno. Kružićem je obeležena oblast iz koje je uzet skup od 20 tačkaka. Na slikama (b) i (d) tačkama su obeležene one orbite koje su se posle nekog vremena vratile na ravan slike, tj. orbite za koje važi  $|y| + |t| < 0.005$ . Na slici (b) uzeto je  $10^{11}$ , a na slici (d)  $2 \times 10^7$  iteracija. Slika preuzeta iz Froeschlé et al. (2005)

### 5.3 Koegzistencija lokalne i globalne difuzije

Na primeru mape  $M$  pošlo nam je za rukom da prepoznamo još jedan zanimljiv fenomen. Naime rezonance  $x = 0$  i  $z = 0$  su za svako  $a_1$  i  $a_2$  veće od nule razlog zbog kojeg Hamiltonijan nije u kvazi-integrabilnoj formi. Takođe, u blizini  $x$  i  $z$  ose, kao što je već pomenuto, imamo izražene haotične zone koje generišu vrlo jak haos čak i kada sistem nije u globalno haotičnom režimu. Sve ovo se odražava i na prirodu kretanja u sistemu. Najpre tako što sistem 'neravnomerno' prelazi



Slika 5.7: Fenomen Čirikovljeve difuzije u sistemu kada je  $\varepsilon = 1.2$ . Na levoj slici vidimo FLI mapu i oblast iz koje je uzet skup od 20 tačaka. Na desnoj slici prikazana je ista oblast gde su zbog preglednosti date samo one tačke koje su se u toku  $2 \times 10^9$  iteracija vratile na ravan  $(x, z)$ . Nismo u stanju da prepoznamo strukturu rezonanci jer je sistem haotičan.

u Čirikovljev režim, tj. u blizini ovih zona mnogo pre nego na globalnom planu. Takođe, primećen je nešto drugačiji fenomen difuzije, koji je prvi put uočen na ovom modelu prostora.

Difuzija koja je bila svojstvena modelu prostora iz (Froeschlé et al., 2005) imala je sledeći scenario: Sistem je u Nehoroševljevom režimu. Za male poremećaje Arnoldova difuzija je takva da trajektorija ne napušta rezonantnu ivicu. Jedan od primera za ovaj slučaj već je pomenut (videli smo ovaj tip difuzije na slikama (5.1) i (5.2)). Za nešto veći poremećaj difuzija se ubrzava eksponencijalno, dolazi do sledećeg rezonantnog čvora, napušta rezonancu, ali ne i haotične ivice, dakle difunduje globalno, ali i dalje sledi strukturu Arnoldove mreže. Ovo je zapravo jedan vrlo zanimljiv fenomen, difuzioni proces sam iscertava rezonantnu strukturu prostora. Dakle, Arnoldova difuzija nije imala samo lokalni karakter, već i glob-

alni. Štaviše smatra se da kada bi vreme integracije bilo beskonačno, trajektorije bi imale mogućnost da 'posete' sve rezonance sistema. Kada je sistem u režimu Čirikova, nismo u mogućnosti da među orbitama koje difunduju prepoznamo strukturu prostora. Primer kako izgledaju ova dva tipa globalne difuzije prikazan je na slici (5.6). Slične procese globalne difuzije očekivali smo i za mapu (4.2). Međutim, rezultat je uporno odstupao od očekivanog.

Kada je sistem u režimu Nehoroševa, videli smo da difuzija ima lokalni karakter, i u skladu sa teoremom Nehoroševa, ekponencijalno je spora. Za nešto veće poremećaje, umesto očekivane globalne Arnoldove difuzije, imali smo da su se orbite do jednog trenutka ponašale u skladu sa teoremom Nehoroševa, ali u jednom trenutku difuzioni proces je 'dovezao' neke orbite u rezonantne čvorove u kojima je prisutan nešto intenzivniji kaos. Slično, jedan broj orbita je 'upao' u haotično more generisano rezonancama nižeg reda. Imamo da jedan deo orbita nastavlja sa lokalnom difuzijom Nehoroševljevog tipa, dok drugi deo orbita difunduje globalno i haotično. Koegzistencija Nehoroševljeve i Čirikovljeve difuzije nije uočena na ranijim modelima.

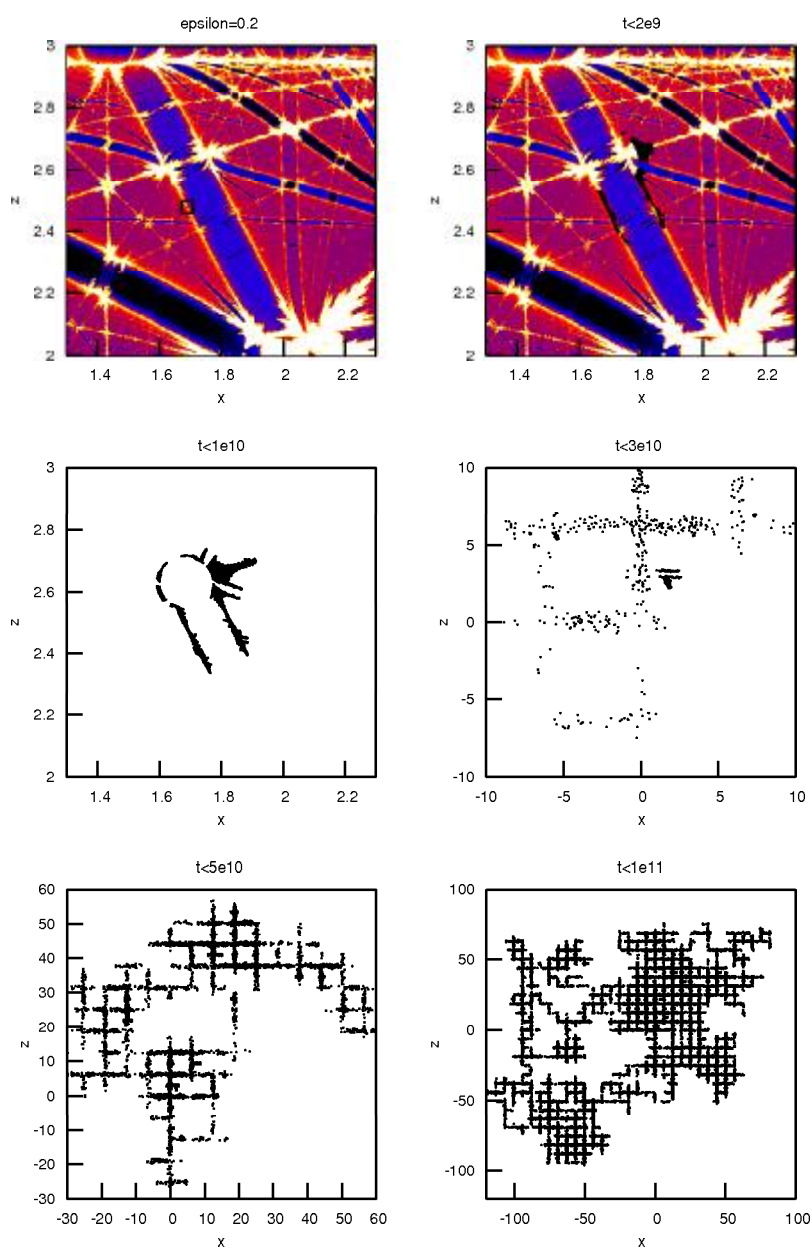
Primer ovakvog kretanja vidimo na slikama (5.9) i (5.8). Ove dve slike predstavljaju zapravo jedan isti difuzioni proces koji ima istovremeno i lokalni i globalni karakter. Poremećaj  $\varepsilon$  ovog sistema je 0.2. Kao i u prethodnim slučajevima, na haotičnoj ivici rezonance uzet je skup od 20 tačaka. Na prvoj slici oblast iz koje je ovaj skup uzet obeležena je kvadratićem. Na slici (5.9) vidimo posledice difuzije za vremena od  $2 \times 10^9$  do  $1 \times 10^{11}$  iteracija. Orbite polako osvajaju rezonance u lokalnoj oblasti. Ovo je primer lokalne Arnoldove difuzije. Slika (5.8) predstavlja istu ovu situaciju sa aspekta globalne difuzije. Brzina difuzije je rapidna i generisana je rezonancama  $x = 0$  i  $z = 0$  (i njihovim  $2\pi$  periodičnim parovima). Primitimo da su na svakoj sledećoj slici sve veći segmenti prostora zahvaćeni ovim difuzionim orbitama.

Ovaj tip difuzije za mapu  $M$  najpre je uočen na rezonanci  $x = 2z$  koja je i ranije bila predmet naše analize, za slučaj lokalne Arnoldove difuzije. Smatralo se da je razlog ovakvog kretanja blizina haotičnih zona, koje su 'odgovorne' za haotičnu difuziju. Izabrana je zatim rezonanca, nešto višeg reda i nešto udaljenija

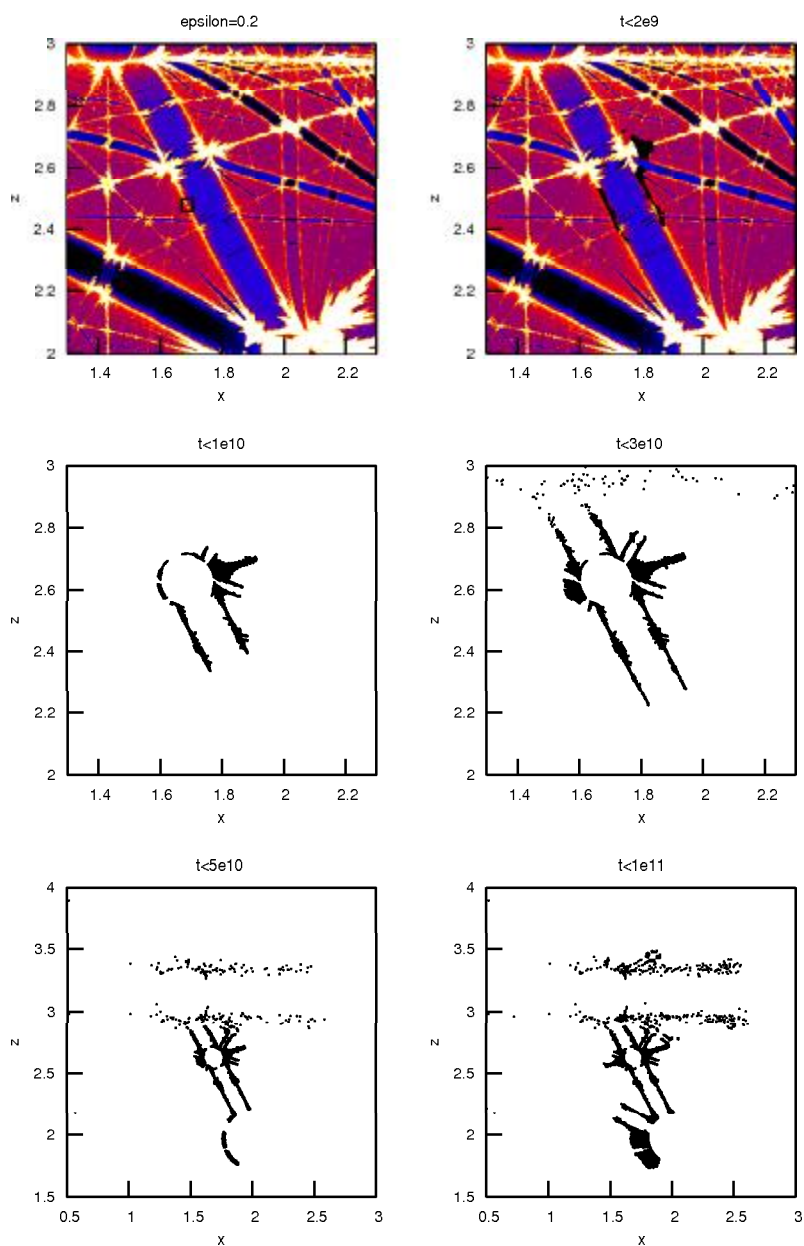


od haotičnih zona, koju vidimo na slikama 5.9 i 5.8 u gornjem levom uglu. I na ovom segmentu prostora uočen je isti fenomen: lokalna i globalna difuzija koegzistiraju u sistemu. Ovakav fenomen potvrđen je za različite vrednosti poremećajnih parametara i na različitim segmentima prostora.

Naglasimo da koegzistencija lokalne Arnoldove i globalne Čirikovljeve difuzije nije detektovana na prethodnim modelima hamiltonijanskog prostora.



Slika 5.8: Difuzija u sistemu koji je definisan mapom  $M$  za  $\varepsilon = 0.2$ . Na gornjoj levoj slici iz oblasti koja je obeležena kvadratićem uzet je skup od 20 tačaka. Na slikama koje slede prikazani su efekti difuzije za vremena koja su navedena iznad slika. Za vreme od  $3 \times 10^{10}$  (desna slike u drugom redu) uočljivi su prvi efekti globalne difuzije generisane rezonancama  $x = 0$  i  $z = 0$ . Difuzija je Čirikovljevog tipa. Vidimo da orbite vrlo brzo osvajaju prostor u globalnom smislu.



Slika 5.9: Difuzija za  $\epsilon = 0.2$  prikazana na slici (5.8) pored globalnog, ima i lokalni karakter. Na prvoj slici vidimo oblast iz koje je uzet skup od 20 tačaka. Na ostalim slikama pratimo difuziju za vremena koja su navedena iznad slike. Ova slika prikazuje samo one orbite koje nisu napustile lokalnu oblast.

# Zaključak

Magistarska teza u prvom delu daje kratak pregled hamiltonijanske dinamike, opis dinamike u integrabilnom sistemu, kao i dve teoreme, Nehoroševljevu i KAM teoremu, kojima je opisano kretanje u neintegrabilnim sistemima kada su poremećaji mali. Zatim, dat je pregled numeričkih metoda i indikatora za detekciju haosa, među kojima je FLI detaljno ispitan. Na primeru standardne mape pokazano je da FLI može da razlikuje ne samo haotično kretanje od regularnog, nego i rezonantno od nerezonantnog kretanja, što nije uobičajeno za ostale indikatore haosa.

Poslednje dve glave tretiraju jedan model hamiltonijanskog sistema koji je definisan 4-dimenzionom simplektičkom mapom. Analizirani su dinamički fenomeni ovog modela prostora. Opisan je pojam Arnoldove mreže, a zatim i Arnoldova mreža za dati hamiltonijanski sistem, koja je dobijena koristeći FLI. Ovaj princip, kojim se pomoću Arnoldove mreže prikazuje rezonantni profil, korišćen je i za određivanje poremećajnih parametara za koje sistem prelazi iz stabilnog u haotični režim kretanja. Numerički primeri prelaza iz jednog režima u drugi dati su za opseg poremećajnog parametra od  $\varepsilon = 0.001$  do  $\varepsilon = 1$  i nađeno je da se za ispitivanu mapu prelaz dešava na intervalu  $\varepsilon \in [0.3, 0.45]$ .

U datom hamiltonijanskom sistemu, u jednoj oblasti prostora, ispitana je i difuzija sistema. Egzistencija lokalne Arnoldove difuzije potvrđena je na ivici izabrane rezonance za različite vrednosti poremećaja. Data je ocena koeficijenta difuzije kada je sistem u režimu Nehoroševa. Zatim, pokazano je, da je promena koeficijenta difuzije u odnosu na poremećajni član ovog sistema brža od stepene, što navodi na zaključak da zavisnost može da ima ekponencijalnu prirodu, koju

teorema Nehoroševa i predviđa. Za veće vrednosti poremećaja, detektovano je prisustvo globalne Čirikovljeve difuzije. Fenomen globalne Arnoldove difuzije nije registrovan.

Pored očekivanih tipova difuzije u sistemu kao što su Arnoldova lokalna (na primeru date mape Arnoldova difuzija ima samo lokalni karakter) i globalna Čirikovljeva difuzija, prvi put je detektovana i njihova koegzistencija. Pokazano je da u sistemu istovremeno dolazi do brze i spore difuzije, što nije bio očekivan rezultat.

# Bibliografija

- [1] Arnold, V. I. (1963) Proof of A. N. Kolmogorov's theorem on the conservation of conditionally periodic motions with a small variation in the Hamiltonian. *Russian Math. Surv.*, **18**, 9.
- [2] Arnold, V.I. (1964), Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, *Sov. Math. Dokl.* **6**, 581-585.
- [3] Arnold, V.I. (1989) *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, Berlin)
- [4] Benettin, G., Galgani L. and Strelcyn, J. M. (1976) Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Phys. Rev. A.* **14**, 2338.
- [5] Benettin, G., Galgani L., Giorgilli, A. and Strelcyn, J.M (1980) All Lyapunov characteristic exponents are effectively computable. *Meccanica*, March,21.
- [6] Benettin, G., Galgani, L. and Giorgilli, A. (1985) A proof of Nekhoroshev's theorem for the stability times in nearly integrable Hamiltonian systems, *Celest. Mech.*, **37**, 1.
- [7] Brouwer, D. and Clemence, G. M. (1961) *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York and London
- [8] Chirikov, B.V. (1979) An universal instability of manydimensional oscillator system, *Phys. Rep.*, **52**, 263-379.
- [9] Contopoulos, G. (1966) Resonance phenomena and the non-applicability of the "third" integral. in *Les Nouvelles Méthodes de la Dynamique Stellaire*, Nahon

- F. and Hénon M, eds. CNRS, Paris. See also *Bull. Astron., Ser. 3*, **2**, 233 (1967)
- [10] Contopoulos, G. and Voglis, N. (1996) Spectra of stretching numbers of helicity angles in dynamical systems. *Celest. Mech.*, **64**, 1.
- [11] Contopoulos, G., Voglis, N., Efthymopoulos, C. Froeschlé, C., Gonzi, R., Lega, E., Dvorak, R. and Lohinger, E. (1997) Transition spectra of dynamical systems. *Celest. Mech.*, **67**, 293.
- [12] Contopoulos, G. (2002) *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*, Springer
- [13] Dvorak, R. and Freistetter, F. (2005) *Chaos and Stability in Planetary Systems*, *Lect. Notes Phys.* (Springer) **683**, 3.
- [14] Froeschlé, C. Gonzi, R. and Lega, E. (1997) The fast Lyapunov indicator: a simple tool to detect weak chaos. Application to the structure of the main asteroidal belt. *Planetary Space Sci.* **45**, 881
- [15] Froeschlé, C. and Lega, E. (1998) Twist angles: a method for distinguishing islands, tori and weak chaotic orbits. Comparison with other methods of analysis, *Astron. Astrophys.*, **334**, 355.
- [16] Froeschlé, C. and Lega, E. (2000) On the structure of symplectic mappings. The fast Lyapunov indicator: a very sensitive tool, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **78**, 167.
- [17] Froeschlé, C. Guzzo, M. and Lega, E. (2000) Graphical Evolution of the Arnold Web: From Order to Chaos, *Science*, **289**, 2108.
- [18] Froeschlé, C., Guzzo, M. and Lega, E. (2005) Local and Global Diffusion along resonant lines in discrete quasi-integrable dynamical systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **92**, 243.
- [19] Giorgilli, A. (1989), New insights of the stability on the stability problem from recent results in classical perturbation theory, in *Modern methods in Celestial Mechanics*, D. Benest & Cl. Froeschlé, 249.

- [20] Giorgilli, A. and Morbidelli, A. (1997), ZAMP. 48, 102-134
- [21] Guzzo, M., Lega E., Froeschlé, C. (2002) On the numerical detection of the effective stability of chaotic motions in quasi-integrable systems, *Physica D* **163**, 1
- [22] Guzzo, M., Lega, E. and Froeschlé, C. (2005) First numerical evidence of global Arnold diffusion in quasi-integrable systems, *Dicrete and Continuous Dynamical Systems- B*, **5**, 3, 687
- [23] Guzzo, M., Knežević, Z. and Milani, A. (2002) Probing the Nekhoroshev stability of asteroids. *Celest. Mech. Dyn. Astron.***83**, 121
- [24] M. Hénon, M. and Heiles, C. (1964) The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments, *Astronomical Journal*, **69**, 73
- [25] Knežević, Z. (2000) Chaos in the motion of asteroids, *Proceedings of the Symposium Contemporary Mathematics: 125 years of Faculty of Mathematics* (N. Bokan Ed.), Fac. Math. Univ. Belgrade, 269.
- [26] Kolmogorov, A. N. (1954) Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamiltonian function. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **98**, 527; engleski prevod u *Lecture notes in Physics*, **93** Springer-Verlag, Berlin, 51.
- [27] Kuksin, S. and Pöschel, J. On the inclusion of analytic symplectic maps in analytic Hamiltonian flows and its applications ', Seminar on Dynamical Systems (St. Petersburg, 1991), 96-116. Progr. *Nonlinear Differential Equations Appl.* **12**, Birkhäuser, Basel.
- [28] Laskar, J. (1990) The chaotic motion of the solar system: a numerical estimate of the size of the chaotic zones. *Icarus*, **88**, 266.
- [29] Laskar, J. (1992) The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. *Phys. D*, **56**, 253.



- [30] Laskar, J.(1993) Frequency analysis for multidimensional systems. *Phys. D.* **67**, 257.
- [31] Laskar, J. (1994) Large-scale chaos in the solar system. *Astron. Astrophys.*, **287**, 9.
- [32] Laskar, J. (1999) Introduction to frequency map analysis in Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom, *C. Simó, ed. Kluwer, Dordrecht*, 134.
- [33] Laskar, J. (1999) Introduction to frequency map analysis in Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom, *C. Simó, ed. Kluwer, Dordrecht*, 134.
- [34] Lazutkin, V. F. (1973) The existence of caustics for a biliard problem in a convex domain. *Math. USSR Izis*, **7**, 185.
- [35] Lega, E., Guzzo, M., Froeschlé, C. (2003) Detection of Arnold diffusion in Hamiltonian systems, *Physica D*, **182**, 179
- [36] Lichtenberg A. J. and Lieberman M. A. (1983) Regular and Stochastic Motion, Springer-Verlag, New-York.
- [37] Lochak, P. (1992) Canonical perturbation theory via simultaneous approximations. *Russ. Math. Surv.*, **47**, 57.
- [38] Lyapunov, A. M. (1907) Problème général de la stabilité du mouvement. *Ann. Fac.Sci. Univ. Toulouse*, **9**, 203. Reproduced in *Ann. Math. Study*, **17**, Princeton (1947).
- [39] Morbidelli, A. and Giorgilli, A. (1995), *Physica D* 86, 514-516
- [40] Morbidelli (1994) Chaos and diffusion in Hamiltonian systems, *Proceedings of the Fourth Workshop in astronomy and Astrophysics of Chamoniix (France)*
- [41] Morbidelli, A. (2002) Modern celestial mechanics: aspects of solar system dynamics. London: Taylor & Francis

- [42] Morbidelli, A. and Guzzo, M. (1997) The Nekhoroshev theorem and the asteroid belt dynamical system, *Celest. Mech.*, **65**,107.
- [43] Moser, J. (1962) On invariant curves of area preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen, Math. Phys.* **2**, 1.
- [44] Nekhoroshev, N. N. (1977) Exponential estimates of the stability time of near-integrable Hamiltonian systems. *Russ. Math. Surveys*, **32**, 1.
- [45] Nekhoroshev, N. N. (1979) Exponential estimates of the stability time of near-integrable Hamiltonian systems, II. *Trudy Sem. Petrovs.*, **5**,5.
- [46] Nesvorný, D. and Ferraz-Mello, S. (1997) On the asteroidal population of the first-order Jovian resonances. *Icarus*, **130**, 247.
- [47] Osledec, V. I. (1968) The multiplicative ergodic theorem: the Lyapunov characteristic numbers of dynamical systems. *Trudy Mosk. Mat. Obsch.*, **19**, 179. *English translation in Trans. Mosc. Soc.*, **19**, 197.
- [48] Papaphilippou, Y. and Laskar, J. (1998) Global dynamics of triaxial galactic models through frequency map analysis. *Astron. Astrophys.*, **329**,451.
- [49] Pavlović, R. (2006) Applicability of Nekhoroshev's theorem in some selected chaotic regions. *Publ. Astron. Obs. Belgrade*, **80**, 167.
- [50] Poincaré, H. (1892) Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. *Gauthier-Villar*, Paris.
- [51] Pöschel, J. (1993) Nekhoroshev's estimates for quasi-convex Hamiltonian systems. *Math. Z.*, **213**, 187.
- [52] Robutel, Ph. and Laskar, J. (2001) Frequency map and global dynamics in the solar system I: short periodic dynamics of massless particles. *Icarus*, **152**, 4.
- [53] Wisdom, J. (1980) The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behaviour in the restricted three-body problem. *Astron. J.*, **85**, 1122.

- [54] Whittaker, E. T. (1937) A treatise on the Analytical dynamics of Particles and Rigid Bodies. *Cambridge University Press*.