УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Жарко Мијајловић • Драгољуб Аранђеловић
Миодраг Рашковић • Радосав Ђорђевић

НЕСТАНДАРДНА АНАЛИЗА

БЕОГРАД
2014

НЕСТАНДАРДНА АНАЛИЗА

Аутори:
др Жарко Мијајловић
др Драгољуб Аранђеловић
др Миодраг Рашковић
др Радосав Ђорђевић

Рецензенти:
др Зоран Огњановић,
научни саветник Математичког института САНУ у Београду
др Предраг Тановић,
виши научни сарадник Математичког института САНУ у Београду
др Ђорђе Кртинић,
доцент Математичког факултета у Београду

Издавач: Математички факултет у Београду
www.matf.bg.ac.rs

За издавача:

Слог: *др Радосав Ђорђевић, Ненад Стојановић*

Цртежи: *др Небојша Икодиновић, Ненад Стојановић*

Корице:

Штампа:

Тираж:

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд
()
:

ISBN

Посвећујемо ову књигу нашем коаутору и врсном математичару,
професору Драгољубу Аранђеловићу (1942–2010)

Садржај

Предговор

Књига се односи на строго и непротивуречно заснивање фундаменталних појмова и конструкција математичке анализе као што су непрекидност, конвергенција, инфинитезимални рачун, интеграција и изградња елементарних функција. Имали смо у виду данас две најзначајније методологије: Вајерштрасову ε–δ анализу и Робинсонову нестандардну анализу. Део књиге односи се на проблем непротивуречности инфинитезималног рачуна, како у класичном смислу, тако у смислу Лајбницове анализе. Дакле, с једне стране дискутују се детаљно особине архимедских поља и у том окружењу уводе основни појмови анализе. С друге стране излаже се конструкција Лајбницовог универзума као модела за рачун са актуелним бесконачно малим и бесконачно великим објектима. Циљ овог двојног приступа није да се оцени предност једне или друге методе, већ да се укаже на чињеницу да су оба прилаза значајна уколико желимо да се у анализи на легитиман начин користе уобичајени појмови као што су *непрекидност* или *бесконачно мала величина*.

Такође су писци имали следеће разлоге да нешто детаљније пишу о нестандардној анализи. Пре свега о овом предмету се на нашем језику мало писало. С друге стране, нестандардна анализа је нова област математике која се брзо развија и њени оквири превазилазе анализу. Тачно је да се води полемика о томе колики је њен значај и допринос класичној анализи. Ипак, једно је сигурно, настанком нестандардне анализе решен је један од најзначајнијих и најстаријих проблема математике. Наиме, решен је проблем конзистентног заснивања инфинитезималног рачуна. Подсетимо се да се овај проблем појавио у рудиментарном облику већ у Архимедово време, а да је врхунац достигао појавом Лајбницовог инфинитезималног рачуна и остао отворен све до Робинсоновог решења 1960. године. Споменимо и другу значајну страну нестандардне анализе, да је она пре свега методологија. То је разлог да се она срећно користи и у другим областима математике као што су аритметика, теорија вероватноће, алгебра, бесконачна комбинаторика, математичка логика и свуда где се користи појам бесконачно мале и бесконачно велике величине. Неке примене техника нестандардне анализе могу се пронаћи у радовима аутора (видети, на пример, [6], [29], [102], [104], [118], [119], ...).

Књига је настала из предавања која су аутори држали дужи низ година на математичким департманима универзитета у Београду, Крагујевцу и Нишу. Први курс из ове области одржао је у Београду Ж. Мијајловић, сада већ давне 1979. године. Скоро одмах родила се идеја да се и напише књига на ову тему, најпре од стране Ж. Мијајловића и Д. Аранђеловића, да би се том пројекту убрзо прикључили и М. Рашковић и Р. Ђорђевић. Највећи део рукописа написан је пре више од двадесет година. Стицајем разних околности, а ваљда и због прилика које су настале у временима која су следила, књига је завршена тек у јесен 2014. године. Писци су писали поједина поглавља доста независно од других поглавља и осталих аутора. Отуда, књига се не мора читати редом. Поједини појмови су расправљани и по два пута, имајући у виду различите аспекте и околности у којима се они јављају. Д. Аранђеловић је написао поглавља: *Уређена поља* и прва два одељка поглавља *Нестандардни приступ граничним процесима*; Ж. Мијајловић је написао поглавља: *Филтери*, *Ултрапроизводи*, *Модели*, *Лајбницов принцип*, *Елементарне функције*, *Верижни разломци и Беров простор*, *Засићени модели и интернални скупови* и уводни текст *Математика у Лајбницовом универзуму*; М. Рашковић је написао поглавља: *Заснивање нестандардне математике*, *Елементи нестандардне теорије мере*, *Алтернативна теорија скупова* и завршни текст *Есеј о бесконачности*, а Р. Ђорђевић је написао поглавља: *Нестандардни реални бројеви*, трећи одељак поглавља *Нестандардни приступ граничним процесима*, одељак *Брауново кретање*, *Нестандардна анализа Хилбертовог простора* и извршио унификацију целокупног текста.

На крају, желимо да се захвалимо следећим колегама који су читали рукопис у разним фазама писања ове књиге, помогли да исправимо грешке и дали нам многобројне корисне сугестије: Бранку Малешевићу, професору Електротехничког факултета у Београду, Небојши Икодиновићу, доценту Математичког факултета у Београду и Ненаду Стојановићу и Владимиру Ристићу, асистентима Универзитета у Крагујевцу. Такође се захваљујемо на добронамерним коментарима и корисним примедбама рецензентима Ђорђу Кртинићу, доценту Математичког факултета у Београду, научном саветнику Зорану Огњановићу и вишем

научном сараднику Предрагу Тановићу из Математичког института САНУ.

Београд, 2014. Аутори

Математика у Лајбницовом универзуму

Нестандардна анализа користи методе теорије модела, дисциплине математичке логике, тако што се универзум класичне анализе проширује до такозваног *нестандардног универзума* који садржи бесконачно мале (инфинитезимале) и бесконачно велике објекте. Лајбниц[1] је увео метод актуелних инфинитезимала у диференцијални и интегрални рачун крајем 17. века, али тек Робинсон[2] шездесетих година 20. века ове идеје поставља на строге математичке основе. Од тада се ова област врло брзо развија и налази многобројне примене у реалној и функционалној анализи, теорији мере, теорији вероватноће, статистичкој физици, топологији и бесконачној комбинаторици.

Први почеци анализе могу се везати за Архимедов[3] рад у математици (3. век пре н.е.). Архимед је одредио површину одсечка параболе, затим запремине неких тела, на пример лопте. При томе, користио је рачун који се среће у модерној анализи, као што је, на пример *сумирање бесконачних редова*. Ипак, доказе својих теорема није излагао на начин како их је добио с обзиром да се *атомизам* као метод и поглед на свет у време када је живео није прихватао. Тако је у јавном излагању својих теорема доказе преводио на метод пропорција који је онда био опште прихваћен. Како се у таквом случају није јасно видела идеја доказа нити мотивација изложеног тврђења, то су поједини математичари оног времена сматрали „да Архимеду богови шапућу теореме”.

Опште је прихваћено да су два велика математичара, Лајбниц и Њутн[4] увели, односно пронашли математичку анализу. Наравно, њи-

[1] Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646–1716)
[2] Abraham Robinson (1918–1974)
[3] *Αρχιμηδης* (287–212)
[4] Isaac Newton (1643–1727)

ховом открићу претходило је дугогодишње, боље речено дуговековно одређивање посебних случајева површина, запремина, тангенти, затим развој механике, астрономије и физике. Сматра се да су Њутн и Лајбниц дошли до својих открића независно, с тим да Њутн своју *теорију флуктуација* није одмах објавио. С друге стране, Лајбницов *диференцијални рачун* више је утицао на развој математичке анализе, посебно у континенталној Европи, јер је имао прихватљивију нотацију, отуда је био и једноставнији за излагање. Осим тога, Лајбницов приступ више је одговарао интуитивној представи појму бесконачно мале величине.

Лајбниц је под диференцијалима подразумевао бројеве бесконачно мале величине. Са њима је изводио све уобичајене аритметичке операције, поредио их са другим величинама и при томе је узимао да су позитивне инфинитезимале мање од сваког позитивног обичног (реалног) броја. С друге стране, реципрочна вредност позитивне инфинитезимале била је бесконачно велика величина. На пример, у Лајбницовом d-рачуну симбол dx означавао је бесконачно малу величину, па је тако извод био представљен са $dy = f(x+dx) - f(x) = f'(x)dx$. Дакле, у Лајбницовом систему dx је била променљива чије су вредности бесконачно мале. Оваква нотација је имала техничке предности у односу на Њутнов систем, па је преовладала и довела до брзог развоја анализе.

Главни недостатак Лајбницове анализе је одсуство заснивања, односно имплицитна противречност система. Убрзо су се појавиле критике, на пример већ 1734. године Беркли[5)] је уобичајено изостављање чланова тј. „бесконачно малих вишег реда" у једнакостима називао „duховима нестајућих величина". Са данашњег становишта ово уједначавање можемо објаснити као увођење релације „бесконачно блиско" у смислу савремене нестандардне анализе.

Наравно, Лајбниц и његови следбеници били су свесни ове чињенице и покушавали су да ове и друге контрадикције отклоне. Тако је Лајбниц у оквиру свог система сматрао бесконачно мале као део проширеног система реалних бројева, те да се са њима могу изводити алгебарске операције, слично као код реалних и комплексних бројева. Ова идеја биће кључна и у заснивању нестандардне анализе у 20. веку. Главну тешкоћу представљала је чињеница да Лајбниц и његови следбеници нису успевали да прецизно формулишу својства реалних бројева као ни нових, идеалних елемената. Ипак, Лајбниц исказује следећи принцип: *све што важи за коначне (реалне) бројеве, важи такође за проширен систем, и обрнуто*. У овом исказу, који је познат под именом *Лајбницов принцип*,

5) George Berkeley (1685–1753)

није било прецизирано на која се то својства тачно мисли. Наравно, у оно време нити у време које је следило, није било могуће ближе одредити законе на које се Лајбицов принцип односи. Једноставно није постојао формални оквир у којем би се Лајбницов принцип прецизно исказао. У одређеном смислу то је довело до опадања значаја Лајбницове теорије инфинитезималних величина. С друге стране, прецизирањем формалног оквира, Лајбницов принцип имаће главну улогу у нестандардној анализи.

У првој половини 19. века Коши[6] својом теоријом граничних вредности најзад врши заснивање анализе, што убрзо Вајерштрас[7] завршава увођењем ε–δ формализма. Данас се у анализи уобичајено користи Вајерштрасова ε–δ техника.

И после тога се настављају покушаји да се оствари Лајбницова идеја, да се на конзистентан начин уведу актуелне бесконачно мале и бесконачно велике величине. С краја 19. века то покушава Дибуа-Рејмон[8], а то исто почетком 20. века чини Хан[9], полазећи од конструкција над неархимедским пољима. У то време владало је опште уверење да тако нешто није могуће учинити са целокупном анализом.

И пред саму појаву нестандардне анализе, 1958. Лаугвиц[10] и Шмиден[11] постављају нову теорију инфинитезималног рачуна у којој се Диракова[12] δ-функција репрезентује као функција чије су вредности бесконачно мале, осим у околини броја 0, где за бесконачно мале вредности функција узима бесконачно велике вредности. Ипак ни овај покушај не решава проблем проблем заснивања целокупног инфинитезималног рачуна.

Абрахам Робинсон 1961. године у раду **Non-Standard Analysis**, *Proc. Roy. Acad.*, Амстердам, сер A, 64, 432-440, решио је, може се рећи у потпуности овај 300 година стар проблем заснивања инфинитезималног рачуна.

Покушајмо да одговоримо укратко на питање шта је то нестандардна анализа. Под овим се подразумева пре свега техника, или метод, а не засебан предмет, или област математике. Наиме, сви резултати добијени

[6] Augustin Louis Cauchy (1789–1857)
[7] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)
[8] Paul David Gustav du Bois-Reymond (1831–1889)
[9] Hans Hahn (1879–1934)
[10] Detlef Laugwitz (1932–2000)
[11] Curt Schmieden (1905–1991)
[12] Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984)

у оквиру нестандардне анализе углавном имају превод на стандардни, класични облик. Тако је Крајсел[13)] доказао 1969. да је нестандардна анализа *конзервативно проширење* класичне анализе. Дакле, скупови исказа који се односе на реалне бројеве исти су, без обзира на који начин су добијени. Важност ове методе огледа се најпре у томе што она води до једноставнијег и интуитивнијег излагања анализе. То је између осталог омогућило да се дође до нових открића у анализи, па и решења неких отворених проблема.

Са становишта заснивања, место нестандардне анализе налази се у контексту идеалних (нових) елемената. Ова идеја је добро позната у математици. Наиме ради се о идеји да се нека теорија о извесним математичким објектима поједностави увођењем *нових*, или *идеалних* елемената. Добро познати примери ове врсте су проширење поља реалних бројева на поље комплексних бројева, или у алгебри увођење појма идеала, где се релација дељивости међу бројевима замењује скуповном инклузијом међу идеалима.

У нестандардној анализи уводе се идеални елементи који су у одређеном смислу бесконачно блиски броју 0. На пример, $\varepsilon > 0$ је један такав елемент уколико за све позитивне природне бројеве n важи $\varepsilon < 1/n$. Настављајући ову идеју, осим скупа реалних бројева шире се и други скупови који су у некој вези са реалним бројевима. На пример, ако је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ је скуп реалних бројева) и ${}^*\mathbb{R} \supseteq \mathbb{R}$ је нестандардни универзум, онда постоји екстензија ${}^*f \supseteq f$ тако да ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$. Наравно, оваква екстензија треба да има и одређена, антиципирана својства, на пример, да је реална функција f непрекидна у $a \in R$ ако и само ако важи: *ако је x бесконачно блиско a, онда је ${}^*f(x)$ бесконачно блиско ${}^*f(a)$*. Слично и структура природних бројева $\mathbb{N}$ има проширење до нестандардне структуре природних бројева ${}^*\mathbb{N}$ и тада ће за реални низ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и проширење ${}^*f : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ бити: $\lim_{n\to\infty} f_n = a$ ако и само ако *за бесконачно велике $n \in {}^*\mathbb{N}$, ${}^*f_n$ је бесконачно блиско броју a*.

А. Робинсон је засновао Лајбницову анализу применом теорије модела, која је једна од области савремене математичке логике. Наиме математичка логика даје формални оквир за заснивање нестандардне анализе. Прецизирањем језика и логичких правила Лајбницов принцип добија јасан и пун смисао. Како то изгледа види се из следећег. Постоје својства реалних бројева $\mathbb{R}$ која се односе само на њих. На пример, у скупу $\mathbb{R}$ нема инфинитезимала осим нуле, или другачије речено, $\mathbb{R}$ је једино (до на изоморфизам) комплетно уређено поље. Дакле не-

[13)] Georg Kreisel (1923–)

стандардно раширење $^*\mathbb{R}$ не може бити комплетно поље. Парадокс садржан у Лајбницовом принципу се разрешава спецификацијом формалног језика L у смислу математичке логике. Тада Лајбницов принцип гласи:

Постоји проширење реалних бројева које садржи бесконачно мале величине и има иста својства као систем реалних бројева, докле год су та својства изражена у предикатском рачуну језика L.

Према томе, не могу се сва својства изразити, дакле нити пренети са $\mathbb{R}$ на $^*\mathbb{R}$, на пример „имати бесконачно мале величине” или „бити комплетно уређено поље”.

Поред тога, теорија модела даје и саму конструкцију нестандардног проширења $^*\mathbb{R}$, тј. универзума нестандардне (Лајбницове) анализе. Показало се да Лајбницов универзум има веома занимљива математичка својства, отуда се велики део истраживања односе на његову структуру, и у томе такође главно место има теорија модела.

Глава 1

Уређена поља

Одељак о уређеним пољима је кључан за разумевање нестандардне анализе. Наиме, уводе се појмови нестандардне анализе који се односе на било које неархимедско поље $\mathbf{F}$: појам бесконачно малог и бесконачно великог елемента, монаде, галаксије и други. Функција st (стандардни део) као хомоморфизам из прстена коначних елемената $\mathbf{F}_{\mathrm{fin}}$ у поље реалних бројева је фундаментална у нестандардној анализи јер се помоћу ње остварује трансфер из нестандардног (Лајбницовог) универзума ${}^*\mathbb{R}$ у стандардан, тј. поље реалних бројева $\mathbb{R}$. Особине ове функције омогућавају алгебраизацију ε–δ доказа класичне анализе.

1.1 Аксиоме уређеног поља

Уређено поље је свака структура $\mathbf{F} = (F, +, \cdot, \leq, 0, 1)$, где је $(F, +, \cdot, 0, 1)$ поље и $(F, \leq)$ је линеарно уређење сагласно са операцијама $+$ и $\cdot$ (сабирање и множење у пољу $\mathbf{F}$). Дакле свако уређено поље задовољава следеће аксиоме:

1.	$x + (y + z) = (x + y) + z$	*асоцијативност сабирања*
2.	$x + 0 = x,\ \ 0 + x = x$	*неутрални елемент сабирања*
3.	$(\exists y)(x + y = 0 \land y + x = 0)$	*супротни елемент*
4.	$x + y = y + x$	*комутативност сабирања*
5.	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	*асоцијативност множења*
6.	$1 \cdot x = x,\ \ x \cdot 1 = x$	*неутрални елемент множења*
7.	$x \cdot y = y \cdot x$	*комутативност множења*

8.	$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	*дистрибутивност*
9.	$x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1)$	*инверзни елемент*
10.	$0 \neq 1$	*нетривијалност поља*
11.	$x \leq x$	*рефлексивност релације* $\leq$
12.	$(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$	*антисиметричност релације* $\leq$
13.	$(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$	*транзитивност релације* $\leq$
14.	$x \leq y \vee y \leq x$	*линеарност релације* $\leq$
15.	$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$	*сагласност релације* $\leq$ *са* $+$
16.	$(x \leq y \wedge 0 \leq z) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$	*сагласност релације* $\leq$ *са* $\cdot$

Теорија линеарно уређених поља садржи неке важне подтеорије. На пример, формулама 1, 2 и 3 дате су аксиоме *теорије група*, док теорија група заједно са 4 чини *теорију Абелових*[1] (*комутативних*) *група*. Даље, формулама 1–8 дате су аксиоме *теорије комутативних прстена са јединицом*, а ове заједно са 9 и 10 чине *теорију поља*. Аксиомама 11, 12 и 13 описана је *теорија парцијалног уређења*, а уколико се узме и аксиома 14, добија се *теорија линеарног уређења*.

Убудуће користићемо следећу нотацију: уколико су са $\mathbf{F}, \mathbf{K}, \ldots$ означена нека (уређена) поља, или општије неке операцијско-релацијске структуре, тада су, редом, словима $F, K, \ldots$ означени домени ових структура. Такође, претпостављамо познатим елементарне теореме теорије уређених поља.

Нека је $\mathbf{F} = (F, +, \cdot, \leq, 0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$ и $x \in F$. Тада дефинишемо $n \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} x + \ldots + x$ (n-пута), и $\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} n \cdot 1$. Уместо $n \cdot x$ писаћемо и nx. Уз помоћ закона дистрибуције, није тешко доказати да је $\underline{n} \cdot x = n \cdot x$. Када је потребно, да бисмо нагласили да је реч о релацији уређења поља $\mathbf{F}$, уместо $x \leq y$ пишемо $x \leq_{\mathbf{F}} y$. Слично значење имају ознаке $+_{\mathbf{F}}, \cdot_{\mathbf{F}}, 0_{\mathbf{F}}, 1_{\mathbf{F}}$.

Теорема 1.1. *Свако уређено поље је карактеристике* 0, *тј. у* $\mathbf{F}$ *важи: ако* $x \in F \setminus \{0\}$ *и* $n \in \mathbb{N}^+$, *онда* $n \cdot x \neq 0$.

Доказ. Ако је $x > 0$, онда је $(n+1)x = nx + x > nx + 0 = nx$ за $n \in \mathbb{N}$, па је $nx > 0$ за $n \geq 1$ јер низ nx строго расте. Ако је $x < 0$, онда је $(n+1)x = nx + x < nx + 0 = nx$ за $n \in \mathbb{N}$, па је $nx < 0$ за $n \geq 1$ јер низ nx строго опада. ■

[1] Niels Henrik Abel (1802–1829)

Дакле свако уређено поље $\mathbf{F}$ садржи изоморфну копију природних бројева, то је $\{\, \underline{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$. Зато можемо претпоставити да је структура природних бројева $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ подстуктура поља $\mathbf{F}$. Следеће тврђење показује да важи нешто више.

Теорема 1.2. *Уређено поље рационалних бројева* $\mathbf{Q}$ *утапа се у свако уређено поље на тачно један начин.*

Доказ. Нека је $\mathbf{F} = (F, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ уређено поље. Даље, ако је n цео број, $n < 0$, тада ћемо узети $\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} -\underline{m}$, где је $m = -n$.

Пресликавање $f : \mathbb{Q} \to F$ дефинисано помоћу $f(m/n) = \underline{m} \cdot \underline{n}^{-1}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^+$ одређује једно утапање уређеног поља $\mathbf{Q}$ у $\mathbf{F}$.

С друге стране, нека је $g : \mathbf{Q} \to \mathbf{F}$ утапање и нека је m/n рационалан број, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Тада важи

$$\underline{n} \cdot_{\mathbf{F}} g(m/n) = ng(m/n) = g(n \cdot (m/n)) = g(m) = mg(1) = m \cdot 1_{\mathbf{F}} = \underline{m}$$

одакле добијамо $g(m/n) = \underline{m} \cdot \underline{n}^{-1}$, дакле $g = f$. ■

Према томе, свако уређено поље $\mathbf{F}$ садржи изоморфну копију уређеног поља рационалних бројева, па без губљења општости можемо узети, кад год је то потребно, да је оно потпоље поља $\mathbf{F}$, тј. да је $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{F}$.

1.2 Архимедска поља

Као што архимедска поља представљају прамодел класичне анализе, сличну улогу неархимедска поља имају у нестандардној анализи. С друге стране, добро је познато да су основни појмови класичне анализе битно везани, поред аксиоме супремума, за архимедско својство реалних бројева. Видећемо да се ови појмови могу проширити и на нека посебно изабрана архимедска поља.

Дефиниција 1.1. Архимедски уређено поље је свако уређено поље $\mathbf{F}$ у којем важи Архимедова аксиома:

за сваки $a \in F$ *постоји* $n \in \mathbb{N}$ *тако да је* $a \leq \underline{n}$.

Примери архимедски уређених поља су поље рационалних бројева $\mathbf{Q}$ и уређено поље реалних бројева $\mathbf{R}$.

Следећи појмови односе се на произвољне уређене скупове, дакле и на уређена поља. Нека је $\mathbf{A} = (A, \leq)$ парцијално уређен скуп и нека је $X \subseteq A$. Тада је X *кофиналан* (*коиницијалан*) у $\mathbf{A}$ ако и само ако за сваки $a \in A$ постоји $x \in X$ такав да је $a \leq x$ (тј. $x \leq a$). Елемент $a \in A$ је *горња граница* (*доња граница*) скупа X у $\mathbf{A}$ уколико за све $x \in X$ важи $x \leq a$ (тј. $a \leq x$). Ако је $a \in A$ најмања горња (највећа доња) граница скупа X, онда се a назива *супремумом* (*инфимумом*) скупа X. У том случају користимо ознаку $a = \sup_{\mathbf{A}} X$, односно $a = \inf_{\mathbf{A}} X$. Најзад, X је *густ* у $\mathbf{A}$ ако и само ако за све $a, b \in A$, из $a < b$ следи $a < x < b$ за неко $x \in X$.

Теорема 1.3. *Нека је* $\mathbf{F}$ *уређено поље. Тада су следећи услови еквивалентни.*

1° $\mathbf{F}$ *је архимедски уређено.*

2° *Скуп рационалних бројева* $\mathbb{Q}$ *је густ у* $\mathbf{F}$.

3° *Сваки* $a \in F$ *је супремум рационалних бројева мањих од* a, *тј.*

$$a = \sup_{\mathbf{F}}\{\, q \in \mathbb{Q} \mid q \leq_{\mathbf{F}} a \,\}.$$

Доказ. $(1° \to 2°)$ Нека су $a, b \in F$, $a < b$. Тада $0 < b - a$, па за неки $n \in \mathbb{N}$ важи $0 < \dfrac{1}{b-a} < n$, одакле $0 < \dfrac{1}{n} < b - a$. Ако је $0 < b$, нека је m најмањи природан број такав да $a < \dfrac{m}{n}$. Тада $\dfrac{m-1}{n} \leq a$, тј. $\dfrac{m}{n} \leq a + \dfrac{1}{n}$, па $a < \dfrac{m}{n} < b$. Ако је $a < b \leq 0$, онда $0 < -b < -a$, па према претходном делу постоји $q \in \mathbb{Q}$ такав да $-b < q < -a$, дакле $a < -q < b$.

$(2° \to 3°)$ Нека је $a \in F$. Тада је очигледно a горња граница скупа $X = \{\, q \in \mathbb{Q} \mid q \leq_{\mathbf{F}} a \,\}$. Нека је $b <_{\mathbf{F}} a$, $b \in F$. Скуп $\mathbb{Q}$ је густ у $\mathbf{F}$, дакле постоји $q \in \mathbb{Q}$ такво да је $b < q < a$. Према томе, a је најмања горња граница скупа X, тј. $a = \sup_{\mathbf{F}}\{\, q \in \mathbb{Q} \mid q \leq_{\mathbf{F}} a \,\}$.

$(3° \to 1°)$ За $a \in F$, како је $a < a+1$ и $a + 1 = \sup_{\mathbf{F}}\{\, q \in \mathbb{Q} \mid q \leq_{\mathbf{F}} a+1 \,\}$, то постоји $q \in \mathbb{Q}$ такав да је $a \leq q \leq a + 1$. Нека је n природан број, $n > q$. Тада $a < n$. ■

Нека је $\mathbf{F}$ архимедско уређено поље, $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) = \{\, X \mid X \subseteq \mathbb{Q} \,\}$ и пресликавање $\Phi\colon F \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ дато са $\Phi(x) = \{\, q \in \mathbb{Q} \mid q \leq_{\mathbf{F}} x \,\}$. Према претходној теореми Φ је $1-1$ пресликавање, дакле за кардинални број $|F|$ скупа F важи $|F| \leq 2^{\aleph_0}$. За архимедски уређена поља постоји и алгебарско ограничење, наиме свако архимедско поље може се утопити у уређено поље реалних бројева.

ДЕФИНИЦИЈА 1.2. Уређено поље $\mathbf{F}$ је *комплетно* ако и само ако сваки непразан, одозго ограничен скуп $X \subseteq F$ има супремум.

Свако комплетно уређено поље $\mathbf{F}$ је архимедско. Заиста, ако $\mathbf{F}$ није архимедско, тада постоји $a \in F$ такав да за све $n \in \mathbb{N}$ важи $\underline{n} < a$. Дакле $\underline{N} = \{\, \underline{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$ је ограничен одозго, па постоји $c \in F$, $c = \sup_{\mathbf{F}} \underline{N}$. Како за све $n \in \mathbb{N}$ важи $c \geq \underline{n}$, то је за све $n \in \mathbb{N}$, $c \geq \underline{n} + 1$, па је и $c - 1$ једна горња граница, супротно избору елемента c. Овај доказ истовремено показује да *скуп природних бројева нема супремум нити у једном уређеном пољу*.

ТЕОРЕМА 1.4. *Свака два комплетна уређена поља су изоморфна.*

Доказ. Нека су $\mathbf{F}$ и $\mathbf{K}$ комплетна уређена поља. С обзиром на Теорему 1.2. можемо претпоставити да је $\mathbb{Q} \subseteq F$ и $\mathbb{Q} \subseteq K$. Нека је $f\colon F \to K$ пресликавање дефинисано еквиваленцијом

$$f(a) = b \Leftrightarrow \{\, q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leq_{\mathbf{F}} a \,\} = \{\, q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leq_{\mathbf{K}} b \,\}, \quad a \in F, \ \ b \in K.$$

Дакле, $f(a) = b$ ако и само ако a и b одређују исте Дедекиндове[2)] пресеке у $\mathbb{Q}$. Приметимо да је $f(a) = \sup_{\mathbf{K}}\{\, q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leq_{\mathbf{F}} a \,\}$. Заиста, ако је $f(a) = b$, тада према Теореми 1.3. имамо:

$$\sup_{\mathbf{K}}\{\, q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leq_{\mathbf{F}} a \,\} = \sup_{\mathbf{K}}\{\, q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leq_{\mathbf{K}} b \,\} = b.$$

Ово разматрање истовремено показује да је горњом еквиваленцијом пресликавање f добро дефинисано. Нека је за произвољан $a \in F$, $Q_a = \{\, q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leq_{\mathbf{F}} a \,\}$. Наредне особине показују да је пресликавања f жељени изоморфизам.

1° f је монотоно растуће пресликавање. Нека је $a_1 \leq a_2$, и $a_1, a_2 \in F$. Тада $Q_{a_1} \subseteq Q_{a_2}$, одакле следи $f(a_1) = \sup_{\mathbf{K}} Q_{a_1} \leq \sup_{\mathbf{K}} Q_{a_2} = f(a_2)$.

2° f је $1-1$ пресликавање. Ако је $f(a_1) = f(a_2)$, $a_1, a_2 \in F$, тада $Q_{a_1} = Q_{a_2}$, одакле $a_1 = \sup_{\mathbf{F}} Q_{a_1} = \sup_{\mathbf{F}} Q_{a_2} = a_2$.

3° f је *на* пресликавање. Ако $b \in K$, тада за $a = \sup_{\mathbf{F}}\{q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leq_{\mathbf{K}} b\}$ важи $b = f(a)$.

4° Приметимо да је на основу 1° и 2°

$$x \leq_{\mathbf{F}} y \Leftrightarrow f(x) \leq_{\mathbf{K}} f(y)$$

2) Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916)

за све $x, y \in F$. Нека q означава рационалан број. Прво је $f(r) = r$ за све $r \in \mathbb{Q}$ јер је

$$q \leq_{\mathbf{F}} r \Leftrightarrow q \leq_{\mathbf{Q}} r \Leftrightarrow q \leq_{\mathbf{K}} r.$$

Затим $f(-x) = -f(x)$ за све $x \in F$ јер је

$$q \leq_{\mathbf{F}} -x \Leftrightarrow -q \geq_{\mathbf{F}} x \Leftrightarrow -q = f(-q) \geq_{\mathbf{K}} f(x) \Leftrightarrow q \leq_{\mathbf{K}} -f(x).$$

Даље, $f(r + x) = r + f(x)$ за све $r \in \mathbb{Q}$ и $x \in F$ јер је

$$q \leq_{\mathbf{F}} r + x \Leftrightarrow q - r \leq_{\mathbf{F}} x \Leftrightarrow q - r \leq_{\mathbf{K}} f(x) \Leftrightarrow q \leq_{\mathbf{K}} r + f(x).$$

Најзад, за x и y из F важи

$$\begin{aligned} q \leq_{\mathbf{F}} x + y &\Leftrightarrow q - x \leq_{\mathbf{F}} y \\ &\Leftrightarrow q - f(x) = f(q - x) \leq_{\mathbf{K}} f(y) \\ &\Leftrightarrow q \leq_{\mathbf{K}} f(x) + f(y), \end{aligned}$$

те је $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

5° $f(x \cdot_{\mathbf{F}} y) = f(x) \cdot_{\mathbf{K}} f(y)$, $x, y \in F$. Једнакост важи кад је $x = 0$ или $y = 0$ (због $f(0) = 0$). Претпоставимо да је $x \neq 0$ и $y \neq 0$, довољно је размотрити случај $x > 0$ и $y > 0$, јер је $(-x)(-y) = xy$, $(-x)y = x(-y) = -xy$ и $f(-x) = -f(x)$. За овај случај важи претходан доказ за операцију $\cdot$ уместо операције $+$, уз претпоставку $q > 0$ имајући у виду да је за $x > 0$ из F и $x' > 0$ из K једнакост $f(x) = x'$ еквивалентна $q \leq_{\mathbf{F}} x \Leftrightarrow q \leq_{\mathbf{K}} x'$. ∎

Према претходном, уређено поље реалних бројева је једино (до на изоморфизам) комплетно уређено поље. Поље $\mathbf{R}$ може се изградити на више начина, рецимо познатом конструкцијом Дедекиндових пресека, полазећи од уређеног поља рационалних бројева. У оквиру ове књиге, нешто касније, конструисаћемо поље $\mathbf{R}$ помоћу хиперрационалних бројева. Следећа теорема тврди да је $\mathbf{R}$ највеће архимедско поље.

ТЕОРЕМА 1.5. *Нека је* $\mathbf{F}$ *архимедски уређено поље. Тада се* $\mathbf{F}$ *утапа у* $\mathbf{R}$ *и то на јединствен начин.*

Доказ. Нека је пресликавање $f : F \to \mathbb{R}$ дефинисано помоћу

$$f(a) = \sup_{\mathbf{R}}\{\, q \in \mathbb{Q} \mid q \leq_{\mathbf{F}} a \,\}, \quad a \in F.$$

Пресликавање f је утапање из $\mathbf{F}$ у $\mathbf{R}$, што се види из доказа претходне теореме, где је претпоставка о комплетности поља $\mathbf{F}$ употребљена једино у доказу да је f *на* пресликавање. Јединственост пресликавања f следи из следећег разматрања. Ако је $g : F \to \mathbb{R}$ утапање поља $\mathbf{F}$ у $\mathbf{R}$ и $a \in F$, онда за све $q \in \mathbb{Q}$ важи $g(q) = q$ и $q \leq_{\mathbf{F}} a \Leftrightarrow q \leq_{\mathbf{R}} g(a)$, те је

$$g(a) = \sup_{\mathbf{R}}\{\, q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leq_{\mathbf{R}} g(a)\,\} = \sup_{\mathbf{R}}\{\, q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leq_{\mathbf{F}} a\,\} = f(a).$$

■

1.3 Неархимедска поља

У оквиру Канторове[3)] теорије скупова појам бесконачности уводи се на следећи начин: *скуп X је бесконачан уколико се скуп природних бројева може 1–1 пресликати у X*. У том смислу, у оквиру ове теорије бесмислено је тражити дуалан појам – појам бесконачно мале величине. С друге стране идеја бесконачно мале величине била је извор математичке инспирације и хеуристичке потврде преко две хиљаде година, од Архимеда до Вајерштраса. Инфинитезимала, као математички објекат нестао је из анализе у другој половини 19. века заснивањем анализе помоћу ε–δ формализма. Шездесетих година А. Робинсон је конструисао специјална уређена поља, проширења поља реалних бројева, која допуштају актуелне бесконачно мале и бесконачно велике величине. Сходно претходном одељку, ове екстензије припадају класи неархимедских поља.

Дефиниција 1.3. Уређено поље $\mathbf{F}$ је неархимедско ако није архимедско.

Према томе, уређено поље $\mathbf{F}$ је неархимедско уколико постоји $a \in F$ такав да за све $n \in \mathbb{N}$ важи $\underline{n} < a$.

Пример 1.1. (Примери неархимедског поља) 1° Нека је F скуп рационалних израза $\dfrac{h(x)}{g(x)}$ над пољем реалних бројева са једном промењивом x, где је

$$g(x) = x^{n_0} + b_1x^{n_1} + \ldots + b_kx^{n_k}, \quad n_0 < n_1 < \ldots < n_k, \quad b_1, \ldots, b_k \neq 0.$$

3) Georg Cantor (1845–1918)

Узимајући за $+$ операцију сабирања и за $\cdot$ операцију множења рационалних израза, структура $\mathbf{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ је поље. Рационалан израз $\dfrac{h}{g}$ је по дефиницији *позитиван* уколико је за

$$h(x) = a_0 x^{m_0} + a_1 x^{m_1} + \ldots + a_r x^{m_r},\ \ m_0 < \ldots < m_r,\ \ a_0, a_1, \ldots, a_r \neq 0,$$

испуњено $a_0 > 0$. Нека је $P \subseteq F$ скуп позитивних елемената из F. Тада је $(\mathbf{F}, \leq)$ уређено поље, где за $p, q \in F$ узимамо $p < q$ ако и само ако $q - p \in P$. Полином $p(x) = x$ је инфинитезимала овог поља јер за сваки $n \in \mathbb{N}^+$ важи

$$\frac{1}{n} - p(x) = \frac{\frac{1}{n} - x}{1} > 0.$$

2° Нека је уређено поље $\mathbf{F}$ право проширење поља $\mathbf{R}$. Тада је $\mathbf{F}$ неархимедско. Заиста, нека је $a \in F \setminus \mathbb{R}$. Ако је за сваки $n \in \mathbb{N}$, $\underline{n} < a$ (или $a < -\underline{n}$), онда је очигледно $\mathbf{F}$ неархимедско. Ако је за неки $n \in \mathbb{N}$, $-\underline{n} < a < \underline{n}$, онда је $S = \{\, q \in \mathbb{Q} \mid q <_{\mathbf{F}} a \,\}$ непразан и ограничен подскуп од $\mathbf{R}$, па постоји $r \in \mathbb{R}$ тако да је $r = \sup_{\mathbf{R}} S$. Тада између r и a нема рационалних бројева у $\mathbf{F}$, тј. $\mathbf{F}$ опет није архимедско.

Напоменимо да се право проширење поља $\mathbf{R}$ може лако добити помоћу неке од теорема из теорије модела: Теореме компактности, Сколем[4)]-Левенхајмове[5)] теореме о елементарним екстензијама модела, или помоћу конструкције ултрапроизвода.

Апсолутна вредност елемента $a \in F$, где је $\mathbf{F}$ уређено поље, дефинисана је помоћу:

$$|a| = \begin{cases} \ \ a, & \text{ако } \ a \geq 0 \\ -a, & \text{ако } \ a < 0. \end{cases}$$

Тада функција $|x|$ има ова, позната својства:

$$|x| \geq 0,\ \ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \ |-x| = |x|,\ \ |x + y| \leq |x| + |y|,\ \ |xy| = |x||y|,$$

док за $d(x, y) = |x - y|$, структура (F, d) постаје метрички простор.

Дефиниција 1.4. Нека је $\mathbf{F}$ уређено поље и нека су $a, b \in F$. Тада
1° a је *бесконачан* ако и само ако за сваки $n \in \mathbb{N}$ важи $\underline{n} \leq |a|$.
2° a је *коначан* ($a \in F_{\text{fin}}$) ако и само ако a није бесконачан.

[4)] Toralf Albert Skolem (1887–1963)
[5)] Leopold Löwenheim (1878–1957)

3° a је *инфинитезимала* (бесконачно мала) ако и само ако за сваки $n \in \mathbb{N}$ важи $\underline{n} \cdot |a| < 1$.
4° $a \approx b$ ако и само ако је $a - b$ инфинитезимала. Формулу $a \approx b$ читамо *a је бесконачно блиско* са b.
5° $a \sim b$ ако и само ако $a - b \in F_{\text{fin}}$. Формулу $a \sim b$ читамо *a је коначно блиско* са b.

Претходне дефиниције очигледно имају смисла једино у неархимедским пољима јер су у архимедском пољу сви елементи коначни а једина инфинитезимала је нула. Полазећи од ових дефиниција лако се проверавају следеће чињенице:

- уређено поље реалних бројева $\mathbf{R}$ нема бесконачних елемената и 0 је једина инфинитезимала у $\mathbf{R}$;
- уређено поље $\mathbf{F}$ има бесконачне елементе ако и само ако је $\mathbf{F}$ неархимедско;
- елемент $a \in F$ је коначан ако и само ако за неки $n \in \mathbb{N}$ важи $|a| \leq \underline{n}$;
- релација $\approx$ је *релација еквиваленције* скупа F, дакле за све $a, b, c \in F$ важи: $a \approx a$, $a \approx b \Rightarrow b \approx a$ и $(a \approx b \wedge b \approx c) \Rightarrow a \approx c$;
- релација $\sim$ је релација еквиваленције скупа F.

Дефиниција 1.5. Нека је $\mathbf{F}$ уређено поље и нека $a \in F$.
1° *Монада* елемента a је $\mu(a) = \{\, x \mid x \approx a \,\}$.
2° *Галаксија* елемента a је $\gamma(a) = \{\, x \in F \mid x \sim a \,\}$.

Пример 1.2. Приметимо да је $\mu(0)$ скуп свих инфинитезимала поља $\mathbf{F}$, док је $\gamma(0)$ скуп свих коначних елемената поља $\mathbf{F}$. Пресликавање дато са $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ шаље бесконачне галаксије (тј. галаксије бесконачних елемената) у $\mu(0)$. Заиста, ако је $a \in F$ бесконачан и $x \in \gamma(a)$, онда је за сваки $n \in \mathbb{N}^{+}$, $\left|\dfrac{1}{x}\right| < \dfrac{1}{n}$, па је $\dfrac{1}{x}$ инфинитезимала.

Приметимо да је $\mu(a)$ класа еквиваленције елемента a у односу на релацију еквиваленције $\approx$. Отуда, ако је $\mu(a) \neq \mu(b)$, онда важи да је $\mu(a) \cap \mu(b) = \emptyset$. Дакле, $\{\mu(a) \mid a \in F\}$ је једно разлагање (партиција) домена F. Слично својство имају и галаксије, наиме $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ повлачи $\gamma(a) \cap \gamma(b) = \emptyset$. Приметимо да је $\gamma(a)$ класа еквиваленције елемента a у односу на релацију еквиваленције $\sim$.

Лема 1.1. *Нека је* $\mathbf{F}$ *уређено поље и нека је* $a \in F$. *Тада:*

1° $\mu(a)$ *и* $\gamma(a)$ *су конвексни скупови, тј. из* $x, y \in \mu(a)$ *и* $z \in F$ *такво да* $x \leq z \leq y$ *следи* $z \in \mu(a)$ *(аналогно за* $\gamma(a)$*);*

2° $\mu(a) = a + \mu(0) = \{\, a + \varepsilon \mid \varepsilon$ *је инфинитезимала поља* $\mathbf{F}\}$.

Доказ. 1° Нека су $x, y \in \mu(a)$ и $x \leq z \leq y$. Тада је $y - x \in \mu(0)$. Како је $0 \leq z - x \leq y - x$, то за сваки $n \in \mathbb{N}^+$ важи $|z - x| \leq \dfrac{1}{n}$, тј. $z - x \in \mu(0)$, дакле $z \in \mu(x)$. Како је $x \in \mu(x) \cap \mu(a)$ следи $\mu(x) = \mu(a)$, према томе $z \in \mu(a)$. Слично се доказује ово тврђење и за $\gamma(a)$.

2° Овај низ еквиваленција доказује тврђење:

$$\begin{aligned} x \in a + \mu(0) &\leftrightarrow \text{ за неку инфинитезималу } \varepsilon \text{ имамо да важи } x = a + \varepsilon \\ &\leftrightarrow x - a \text{ је инфинитезимала} \\ &\leftrightarrow x \in \mu(a). \end{aligned}$$

■

Подсетимо се неких дефиниција и чињеница у вези са алгебарским прстенима. Нека је $\mathbf{P} = (P, +, \cdot, 0, 1)$ комутативан прстен са јединицом. *Идеал* прстена $\mathbf{P}$ је сваки подскуп $I \subseteq P$ који задовољава следеће услове:

1° I је подгрупа групе $(P, +, 0)$.

2° За сваки $x \in P$ важи $xI \subseteq I$, где је $xI = \{\, xi \mid i \in I \,\}$.

Идеал I прстена $\mathbf{P}$ је *прави* ако је $I \neq P$. Приметимо да је I прави идеал ако и само ако $1 \notin I$. Из елементарне теорије прстена знамо да је количничка структура $\mathbf{P}/I = (P/I, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ такође прстен. Домен овог прстена је $P/I = \{\, I + x \mid x \in P \,\}$, а операције на домену дефинисане су на следећи начин: $(I + x) \oplus (I + y) = I + (x + y)$, $(I + x) \odot (I + y) = I + (x \cdot y)$, док су нула $\mathbf{0}$ и јединица $\mathbf{1}$ прстена $\mathbf{P}/I$ редом I и $I + 1$. Даље, идеал I је *максималан* ако је I прави идеал и I није прави подскуп ниједног другог правог идеала прстена $\mathbf{P}$. Важи следећа теорема.

Теорема 1.6. *Ако је* I *максималан идеал комутативног прстена са јединицом* $\mathbf{P}$, *тада је количнички прстен* $\mathbf{P}/I$ *поље.*

Доказ. Доказујемо да сваки елемент различит од $\mathbf{0}$ прстена $\mathbf{P}/I$ има себи инверзан елемент. Нека је $a \in P/I$ различит од нуле. Тада постоји $x \in P$ такав да је $a = I + x$ и $x \notin I$. Како је I максималан идеал, за $\langle I, x\rangle$, идеал генерисан скупом $I \cup \{x\}$, важи $\langle I, x\rangle = P$, дакле $1 \in \langle I, x\rangle$. Отуда постоји $i \in I$ и $r \in P$ тако да је $1 = i + rx$, према томе $(I + r) \odot (I + x) = I + 1 = \mathbf{1}$. ∎

Следећа теорема описује ближе алгебарску структуру монада и галаксија.

Теорема 1.7. *Нека је* $\mathbf{F}$ *уређено поље. Тада важи:*
1° $\gamma(0)$ *је подпрстен поља* $\mathbf{F}$.
2° $\mu(0)$ *је максималан идеал прстена* $\gamma(0)$.

Доказ. 1° Нека су $x, y \in \gamma(0)$. Тада за неке $n, m \in \mathbb{N}$ важи $|x| \le n$, $|y| \le m$. Отуда $|x + y| \le |x| + |y| \le n + m$, и $|x \cdot y| \le n \cdot m$. Дакле $x + y, x \cdot y \in \gamma(0)$.

2° Нека су $x, y \in \mu(0)$. Тада за сваки $n \in \mathbb{N}^+$ важи $|x|, |y| < \dfrac{1}{2n}$, дакле за сваки $n \in \mathbb{N}^+$ имамо $|x + y| \le |x| + |y| < \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n}$, тј. $x + y \in \mu(0)$. Нека је $r \in \gamma(0)$, $\varepsilon \in \mu(0)$. Онда за неки $n_0 \in \mathbb{N}$ важи $|r| \le n_0$, па $|\varepsilon r| \le |\varepsilon| n_0 < \dfrac{n_0}{m}$ за све $m \in \mathbb{N}^+$. Отуда за сваки $n \in \mathbb{N}^+$ имамо $|\varepsilon r| < \dfrac{1}{n}$, па $\varepsilon r \in \mu(0)$. Дакле $\mu(0)$ је идеал прстена $\gamma(0)$.

Докажимо да је $\mu(0)$ максималан идеал у $\gamma(0)$. Нека је $I \supsetneq \mu(0)$ идеал прстена $\gamma(0)$. Ако је $r \in I \setminus \mu(0)$, онда је $n|r| \ge 1$ и отуда $\left|\dfrac{1}{r}\right| \le n$ за неко $n \in \mathbb{N}$, тј. $\dfrac{1}{r} \in \gamma(0)$, па је $1 \in I$ јер $1 = \dfrac{1}{r} \cdot r$, тј. $I = \gamma(0)$. ∎

Директна последица претходне две теореме је следеће тврђење:

Последица 1.1. *Нека је* $\mathbf{F}$ *уређено поље. Тада је* $\gamma(0)/\mu(0)$ *поље.*

Приметимо да су елементи поља $\gamma(0)/\mu(0)$ монаде $\mu(a)$, $a \in \gamma(0)$, као и да је пресликавање $a \mapsto \mu(a)$, $a \in \gamma(0)$, канонски хомоморфизам прстена $\gamma(0)$ на количнички прстен $\gamma(0)/\mu(0)$. Релација $\approx$ је конгруенција прстена $\gamma(0)$ која одговара идеалу $\mu(0)$, и важи нешто општије:

$$(\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in F)\ \ ((x_1 \approx y_1 \land x_2 \approx y_2) \quad\Rightarrow\quad x_1 + x_2 \approx y_1 + y_2)$$
$$(\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \gamma(0))\ \ ((x_1 \approx y_1 \land x_2 \approx y_2) \quad\Rightarrow\quad x_1 \cdot x_2 \approx y_1 \cdot y_2).$$

Сходно претходном разматрању, μ је канонски хомоморфизам из прстена $\gamma(0)$ у количнички прстен $\gamma(0)/\mu(0)$. Дакле, $\mu : a \mapsto \mu(a)$,

$a \in F$, и за све коначне $a, b \in F$ важи следеће $\mu(a +_{\mathbf{F}} b) = \mu(a) +' \mu(b)$, $\mu(a \cdot_{\mathbf{F}} b) = \mu(a) \cdot' \mu(b)$, где су $+'$ и $\cdot'$ операције поља $\gamma(0)/\mu(0)$. Убудуће, уместо $\mu(a) +' \mu(b)$ и $\mu(a) \cdot' \mu(b)$ писаћемо једноставно $\mu(a) + \mu(b)$ и $\mu(a) \cdot \mu(b)$. Приметимо да су нула $\mathbf{0}$ и јединица $\mathbf{1}$ овог поља редом $\mu(0)$ и $\mu(1) = 1 + \mu(0)$.

Поље $\gamma(0)/\mu(0)$ може се уредити на следећи начин:

$$\mu(a) \leq \mu(b) \Leftrightarrow a \leq b \vee a \approx b.$$

Није тешко проверити да је $(\gamma(0)/\mu(0), +, \cdot, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ заиста уређено поље. Заправо важи следеће тврђење:

Теорема 1.8. *Структура* $(\gamma(0)/\mu(0), +, \cdot, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *је архимедски уређено поље.*

Доказ. Доказујемо само архимедско својство уређења. Заиста, ако је $a \in \gamma(0)$, уочимо $n \in \mathbb{N}$ са особином $a \leq n$, па ћемо имати да је $\mu(a) \leq \mu(n) = n \cdot \mu(1) = n \cdot \mathbf{1}$. ■

Према претходној теореми и Теореми 1.5. постоји јединствено утапање h уређеног поља $\gamma(0)/\mu(0)$ у уређено поље $\mathbf{R}$. Нека је пресликавање $\mathrm{st} : \gamma(0) \to \mathbb{R}$ дефинисано једнакошћу $\mathrm{st} = h \circ \mu$.

$$\begin{tikzcd} \gamma(0) \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\mathrm{st}"'] & & \gamma(0)/\mu(0) \arrow[dl, "h"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Слика 1.1.

Дакле, функција st придружује сваком коначном $a \in F$ један реалан број, $\mathrm{st}(a)$, који називамо *стандардним (архимедским) делом од* a. Како је st производ хомоморфизама, то је онда и st хомоморфизам из уређеног прстена $\gamma(0)$ у $\mathbf{R}$. Дакле, за произвољне $x, y \in \gamma(0)$ важи:

Теорема 1.9.

$$\begin{aligned} \mathrm{st}(x +_{\mathbf{F}} y) &= \mathrm{st}(x) +_{\mathbf{R}} \mathrm{st}(y), \\ \mathrm{st}(x \cdot_{\mathbf{F}} y) &= \mathrm{st}(x) \cdot_{\mathbf{R}} \mathrm{st}(y), \\ x \leq_{\mathbf{F}} y &\Rightarrow \mathrm{st}(x) \leq_{\mathbf{R}} \mathrm{st}(y). \end{aligned}$$

Основна својства пресликавања st описана су у следећој теореми.

ТЕОРЕМА 1.10. 1° *Ако су* $x, y \in F$ *коначни, онда* $x \approx y$ *ако и само ако* $\mathrm{st}(x) = \mathrm{st}(y)$.
2° *Ако је* $a \in F$ *коначан, онда* $\mathrm{st}(a) = \sup_{\mathbf{R}}\{\, q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leq_{\mathbf{F}} a \,\}$.
3° *Језгро хомоморфизма* st *је* $\mu(0)$.
4° *Ако је* $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{F}$, *пресликавање* st *је ретракција из* $\gamma(0)$ *на* $\mathbf{R}$, *тј. имамо да* $\mathrm{st} \restriction \mathbb{R} = i_{\mathbb{R}}$, *где је* $i_{\mathbb{R}}$ *идентичко пресликавање домена* $\mathbb{R}$.

Доказ. 1° Тврђење следи на основу следећег низа еквиваленција:

$$x \approx y \Leftrightarrow \mu(x) = \mu(y) \Leftrightarrow h(\mu(x)) = h(\mu(y)) \Leftrightarrow \mathrm{st}(x) = \mathrm{st}(y).$$

2° Приметимо најпре да је према Теореми 1.9. пресликавање st монотоно. Нека је $Q_a = \{\, q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leq_{\mathbf{F}} a \,\}$, $a \in \gamma(0)$. С обзиром на то да је st хомоморфизам, онда st пресликава рационалне бројеве поља $\mathbf{F}$ у рационалне бројеве поља $\mathbf{R}$. Уз усвојену идентификацију потпоља рационалних бројева било којег поља са $\mathbf{Q}$, то заправо значи да је st идентичко пресликавање на рационалним бројевима. Дакле, ако важи да је $q \in Q_a$, онда $q \leq_{\mathbf{F}} a$, па због монотоности пресликавања st имамо $\mathrm{st}(q) \leq_{\mathbf{R}} \mathrm{st}(a)$, односно $q \leq_{\mathbf{R}} \mathrm{st}(a)$. Према томе, $\mathrm{st}(a)$ је једна горња граница скупа Q_a. Нека је $b < \mathrm{st}(a)$, $b \in R$ и нека је $q \in \mathbb{Q}$ тако да је $b < q < \mathrm{st}(a)$. С обзиром на то да је $\mathrm{st}(q) = q$, онда $\mathrm{st}(q) < \mathrm{st}(a)$, па како је st монотоно пресликавање, следи $q <_{\mathbf{F}} a$, тј. $q \in Q_a$. Дакле, $\mathrm{st}(a)$ је најмања горња граница скупа Q_a, па $\mathrm{st}(a) = \sup_{\mathbf{R}} Q_a$.

3° Језгро пресликавања st је

$$\ker(\mathrm{st}) = \{\, x \in F \,|\, \mathrm{st}(x) = 0 \,\} = \{\, x \in F \,|\, \mu(x) = \mathbf{0} \,\} = \mu(0).$$

4° Ако је $r \in \mathbb{R}$, тада $\mathrm{st}(r) = \sup_{\mathbf{R}}\{\, q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leq r \,\} = r$, тј. $\mathrm{st} \restriction \mathbb{R} = i_{\mathbb{R}}$. Отуда и за све $a \in \gamma(0)$ важи $\mathrm{st}(\mathrm{st}(a)) = \mathrm{st}(a)$, дакле $\mathrm{st} \circ \mathrm{st} = \mathrm{st}$, па функција st испуњава *услов репродуктивности*. ■

Нека је $\mathbb{R} \subseteq F$. Свако $x \in \gamma(0)$ се једнозначно разлаже на свој стандардни (архимедски) део и свој *нестандардни* (неархимедски) део:

$$\mathrm{nst}(x) = x - \mathrm{st}(x).$$

При томе за произвољне $x, y \in \gamma(0)$ важи:

$$\begin{aligned}
\mathrm{nst}(x+y) &= \mathrm{nst}(x) + \mathrm{nst}(y),\\
\mathrm{nst}(x \cdot y) &= \mathrm{st}(x) \cdot \mathrm{nst}(y) + \mathrm{nst}(x) \cdot \mathrm{st}(y) + \mathrm{nst}(x) \cdot \mathrm{nst}(y),\\
x <_{\mathbf{F}} y &\Rightarrow \mathrm{st}(x) <_{\mathbf{R}} \mathrm{st}(y) \vee (\mathrm{st}(x) = \mathrm{st}(y) \wedge \mathrm{nst}(x) <_{\mathbf{F}} \mathrm{nst}(y)).
\end{aligned}$$

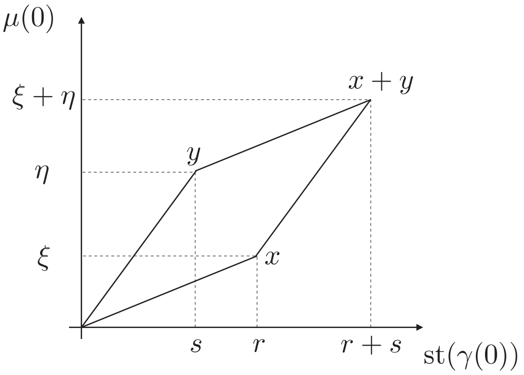
Према томе, уређен прстен $\gamma(0)$ је изоморфан структури

$$(\mathrm{st}(\gamma(0)) \times \mu(0), +, \cdot, \leq, (0,0), (1,0)),$$

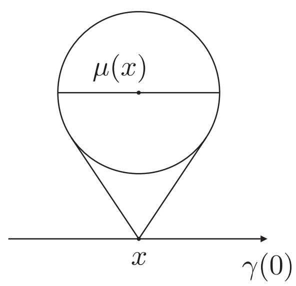
где је

$$\begin{aligned} (r,\xi) + (s,\eta) &= (r+s, \xi+\eta), \\ (r,\xi) \cdot (s,\eta) &= (rs, r\eta + s\xi + \xi\eta), \\ (r,\xi) < (s,\eta) &\Leftrightarrow r < s \vee (r = s \wedge \xi < \eta), \end{aligned}$$

тј. поредак је *лексикографски*, као што је илустровано на слици доле лево.



Слика 1.2.



Слика 1.3.

Десна слика представља *инфинитезимални* микроскоп који „види све”, па и монаду тачке x у F.

О томе шта се дешава са бесконачним (великим и малим) у F при множењу говоре *асимптотске релације* $\preceq$ (потчињен), $\asymp$ (сличан), $\ll$ (занемарљив) и $\simeq$ (еквивалентан) у F дефинисане на следећи начин:

$x \preceq y$	акко	$x = u \cdot y$ за неко $u \in \gamma(0)$,
$x \asymp y$	акко	$x \preceq y$ и $y \preceq x$, тј. $x = u \cdot y$ за неко $u \in \gamma(0) \setminus \mu(0)$,
$x \ll y$	акко	$x = u \cdot y$ за неко $u \in \mu(0)$,
$x \simeq y$	акко	$x - y \ll y$, тј. $x = u \cdot y$ за неко $u \in \mu(1) = 1 + \mu(0)$.

Ландау[6)] је $x \preceq y$ писао у облику $x = O(y)$, а $x \ll y$ у облику $x = o(y)$. На крају овог одељка истичемо нека правила асимптотског рачуна (за $x, y, z, \bar{x}, \bar{y}$ из F и c из $\gamma(0) \setminus \mu(0)$):

[6)] Edmund Georg Hermann Landau (1877–1938)

1.	$0 \preceq x,$	$0 = O(x),$
2.	$x \preceq 0 \Leftrightarrow x = 0,$	$x = O(0) \Leftrightarrow x = 0,$
3.	$x \preceq y \Leftrightarrow \|x\| \preceq \|y\|,$	$\|O(y)\| = O(\|y\|),$
4.	$x \preceq x,$	$x = O(x),$
5.	$(x \preceq y \wedge y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z,$	$O(O(z)) = O(z),$
6.	$x \preceq y \Leftrightarrow x \preceq cy,$	$O(cy) = O(y),$
7.	$(x \preceq z \wedge y \preceq z) \Rightarrow x + y \preceq z,$	$O(z) + O(z) = O(z),$
8.	$(x \preceq \bar{x} \wedge y \preceq \bar{y}) \Rightarrow xy \preceq \bar{x}\bar{y},$	$O(\bar{x})O(\bar{y}) = O(\bar{x}\bar{y}),$
9.	$\|x\| \leq \|y\| \Rightarrow x \preceq y,$	$\|x\| \leq \|y\| \Rightarrow x = O(y),$
10.	$x \preceq 1 \Leftrightarrow x \in \gamma(0),$	$x = O(1) \Leftrightarrow x$ је коначан,
11.	$0 \ll x,$	$0 = o(x),$
12.	$x \ll x \Leftrightarrow x = 0,$	$x = o(x) \Leftrightarrow x = 0,$
13.	$x \ll y \Leftrightarrow \|x\| \ll \|y\|,$	$\|o(y)\| = o(\|y\|),$
14.	$x \ll y \Rightarrow x \preceq y,$	$o(y) = O(y),$
15.	$(x \ll y \wedge y \preceq z) \Rightarrow x \ll z,$	$O(o(z)) = o(z),$
16.	$(x \preceq y \wedge y \ll z) \Rightarrow x \ll z,$	$o(O(z)) = o(z),$
17.	$x \ll y \Leftrightarrow x \ll cy,$	$o(cy) = o(y),$
18.	$(x \ll z \wedge y \ll z) \Rightarrow x + y \ll z,$	$o(z) + o(z) = o(z),$
19.	$(x \ll \bar{x} \wedge y \ll \bar{y}) \Rightarrow xy \ll \bar{x}\bar{y},$	$o(\bar{x})o(\bar{y}) = o(\bar{x}\bar{y}),$
20.	$x \ll 1 \Leftrightarrow x \in \mu(0),$	$x = o(1) \Leftrightarrow x$ је инфинитезимала.

Глава 2

Филтери

Филтери, а нарочито ултрафилтери занимљиви су прво због својих екстремалних особина, али и због двојности своје природе. Наиме, сваки ултрафилтер додељује у одређеном смислу истинитосне вредности скупу свих подскупова неког скупа. Ова, у неку руку, логичка особина чини ултрафилтере интересантним у класичној логици и теорији модела. На пример, Лајбницов универзум, тј. универзум нестандардне анализе, који је овде од основног интереса, може се изградити користећи управо ултрафилтере и конструкције над њима. Од тих конструкција као најважнију споменимо *ултрапроизвод*.

2.1 Скуповни филтери

У теорији скупова и топологији ултрафилтери имају другачију улогу, јер се тамо користе као метод за опис конвергенције. Особина конвергенције ултрафилтера, која је у природној вези са комплетирањем, користи се и у овој књизи, на пример у изградњи реалних бројева преко хиперрационалних. Поред тога, у Лајбницовом универзуму многи концепти класичне анализе узимају алгебарску форму, иза чега скривено стоје опет ултрафилтери. Напоменимо да се ове особине ултрафилтера подједнако односе како на ригорозно засноване појмове класичне анализе, као што су непрекидност и конвергенција, тако и на мање засноване као што су инфинитезимале и бесконачно велики објекти. У топологији се на сличним особинама и идејама заснива Стоун[1)]-Чехова[2)] компактификација тополошких простора.

Наравно, прича о ултрафилтерима овде не престаје. Споменимо само да су ултрафилтери у блиској вези са бинарном мером, али интересантни случајеви са овог становишта (тј. када је она σ-адитивна) воде до далеких (по некима химерних) објеката у хијерархији теорије скупова као што су, на пример, мерљиви кардинали. У овом одељку разматрамо неке основне особине филтера и ултрафилтера које су углавном скуповног карактера.

Дефиниција 2.1. Нека је I непразан скуп. Филтер над I је свака колекција $\mathcal{F}$ подскупова од I која задовољава услове:
1° $I \in \mathcal{F}$,
2° ако је $X \in \mathcal{F}$ и $X \subseteq Y$, тада $Y \in \mathcal{F}$,
3° $X, Y \in \mathcal{F}$ повлачи $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

Филтер $\mathcal{F}$ је *прави* уколико $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Пример 2.1. (Примери филтера)

1° $\mathcal{F} = \mathbf{P}(I)$. Овај филтер није прави.

2° $\mathcal{F} = \{\, I \,\}$.

3° Нека је I бесконачан скуп. Тада је фамилија скупова $\mathcal{F}$, дата са $\mathcal{F} = \{\, X \mid X \subseteq I, X^c \text{ је коначан}\}$ прави филтер. Овај филтер назива се Фрешеовим[3)] филтером (над I).

4° Нека је $i_0 \in I$ и $\mathcal{F} = \{\, X \subseteq I \mid i_0 \in X\}$. Колекција $\mathcal{F}$ је прави филтер. Лако се доказује да је $\mathcal{F}$ максималан прави филтер над I, наиме уколико је $\mathcal{G}$ филтер над I и $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$, тада $\mathcal{G} = \mathbf{P}(I)$. За овај филтер кажемо да је генерисан елементом i_0.

5° Нека је $A \subseteq I$. Колекција $\mathcal{F} = \{\, X \subseteq I \mid A \subseteq X \,\}$ је филтер над I.

6° Нека је (X, τ) тополошки простор и $a \in X$. Скуп $\mathcal{O}_a$ свих околина тачке a јесте један филтер над X.

Појам дуалан филтеру је *идеал*. Отуда имамо следећу дефиницију:

Дефиниција 2.2. Нека је I непразан скуп. Идеал над I је свака колекција $J \subseteq \mathbf{P}(I)$ која задовољава:

[1)] Marshall Harvey Stone (1903–1989)
[2)] Eduard Čech (1893–1960)
[3)] Maurice René Fréchet (1878–1973)

1° $\emptyset \in J$,
2° ако је $X \in J$ и $Y \subseteq X$, тада $Y \in J$,
3° $X, Y \in J$ повлачи $X \cup Y \in J$.

Следеће тврђење оправдава назив идеал у претходној дефиницији.

Теорема 2.1. *Нека је I нейразан скуй. Фамилија $J \subseteq \mathbf{P}(I)$ је идеал над скуйом I ако и само ако је J идеал йрсшена $\mathcal{P}(I) = (\mathbf{P}(I), \triangle, \cap, \emptyset, I)$, іде је $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ симешрична разлика скуйова X и Y.*

Доказ. $(\rightarrow)$ $(J, \triangle, \emptyset)$ је група будући да $\emptyset \in J$ и $X, Y \in J$ повлачи $X \triangle Y \in J$ према $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \subseteq X \cup Y$ и 3°, 2° Дефиниције 2.2. Даље, $J \cap \mathbf{P}(I) = \{ X \cap Y \mid X \in J,\ Y \subseteq I \} \subseteq J$ јер $X \cap Y \subseteq X$ па $X \in J$ повлачи $X \cap Y \in J$.
$(\leftarrow)$ Ако је J идеал прстена $\mathcal{P}(I)$, тада очигледно $\emptyset \in J$. Ако је $X \in J$ и $Y \subseteq X$, тада $Y = X \cap Y$ па $Y \in J$, тј. важи 2° у Дефиницији 2.2. Ако су $X, Y \in J$, тада $X \setminus Y \subseteq X$, те $X \setminus Y \in J$. Отуда $Y \triangle (X \setminus Y) \in J$, тј. $X \cup Y \in J$, па важи 3° у Дефиницији 2.2. ∎

Нека су операције $+$ и $\cdot$ скупа $\mathbf{P}(I)$ дефинисане на следећи начин: $X + Y = X^c \triangle Y^c$ и $X \cdot Y = X \cup Y$. Тада је $\mathcal{P}'(I) = (\mathbf{P}(I), +, \cdot, I, \emptyset)$ прстен изоморфан прстену $\mathcal{P}(I)$; изоморфизам је пресликавање $X \mapsto X^c$, $X \in \mathbf{P}(I)$. Слично претходној теореми доказује се

Теорема 2.2. *Нека је I нейразан скуй. Фамилија $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{P}(I)$ је филшер над I ако и само ако је $\mathcal{F}$ идеал йрсшена $\mathcal{P}'(I)$.*

Прстен $\mathcal{P}'(I)$ назива се дуалним прстеном прстена $\mathcal{P}(I)$, те се из тог разлога за филтере понекад користи назив *дуални идеал*. С обзиром на претходно разматрање имамо

Теорема 2.3. 1° *Нека је J идеал над I. Тада је $\{ X \subseteq I \mid X^c \in J \}$ филшер над I.*
2° *Ако је $\mathcal{F}$ филшер над I, шада је $\{ X \subseteq I \mid X^c \in \mathcal{F} \}$ идеал над I.*

2.2 Ултрафилтери

Објекти са екстремалним својствима су и најинтересантнији у математици. Такав случај је и овде.

ДЕФИНИЦИЈА 2.3. Нека је I непразан скуп. Ултрафилтер над I је сваки прави максималан филтер над I.

На пример, филтер генерисан неким елементом $i_0 \in I$ је ултрафилтер. Овакве филтере називамо такође *главним*. Ултрафилтер који није главни назива се *неглавним*. Показује се да су од интереса управо неглавни ултрафилтери. Следећом теоремом даје се један алгебарски опис ултрафилтера.

ТЕОРЕМА 2.4. *Нека је $\mathcal{F}$ филтер над непразним скупом I. Следећа тврђења су еквивалентна:*
1° *$\mathcal{F}$ је ултрафилтер над I.*
2° *За сваки $X \subseteq I$, $X \in \mathcal{F}$ или $X^c \in \mathcal{F}$.*
3° *За све $X, Y \subseteq I$, $X \cup Y \in \mathcal{F}$ повлачи $X \in \mathcal{F}$ или $Y \in \mathcal{F}$.*

Доказ. ($1^\circ \to 2^\circ$) Нека је $\mathcal{F}$ ултрафилтер и претпоставимо да $X \notin \mathcal{F}$, $X \subseteq I$. Скуп $\mathcal{G} = \{\, Z \subseteq I \mid \text{за неки } Y \in \mathcal{F},\ X \cap Y \subseteq Z \,\}$ је филтер над I и овај филтер садржи $\mathcal{F}$, а такође $X \in \mathcal{G}$. С обзиром на то да је $\mathcal{F}$ ултрафилтер следи $\mathcal{G} = \mathbf{P}(I)$. Отуда за неки $Y_0 \in \mathcal{F}$, $X \cap Y_0 = \emptyset$. Како је $Y_0 = (X \cap Y_0) \cup (X^c \cap Y_0)$ следи $Y_0 = X^c \cap Y_0$, одакле $Y_0 \subseteq X^c$ те $X^c \in \mathcal{F}$.

($2^\circ \to 3^\circ$) Претпоставимо 2° и нека $X \cup Y \in \mathcal{F}$, $X \notin \mathcal{F}$, $Y \notin \mathcal{F}$. Отуда $X^c, Y^c \in \mathcal{F}$, одакле $X^c \cap Y^c \in \mathcal{F}$ па према својству 3° Дефиниције 2.1. следи $X^c \cap Y^c \cap (X \cup Y) \in \mathcal{F}$, тј. $\emptyset \in \mathcal{F}$, контрадикција.

($3^\circ \to 2^\circ$) $X \cup X^c = I$, $I \in \mathcal{F}$ те из 3° следи $X \in \mathcal{F}$ или $X^c \in \mathcal{F}$.

($2^\circ \to 1^\circ$) Нека је $\mathcal{G}$ филтер и $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$. Тада постоји $X \subseteq I$ такав да $X \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Тада $X \notin \mathcal{F}$, па $X^c \in \mathcal{F}$. Како је $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ следи $X^c \in \mathcal{G}$, дакле $X \cap X^c \in \mathcal{G}$, тј. $\emptyset \in \mathcal{G}$. Према 2° Дефиниције 2.1. следи $\mathcal{G} = \mathbf{P}(I)$. ■

Колекција $\Upsilon \subseteq \mathbf{P}(I)$ генерише филтер $\mathcal{F}$ ако и само ако за све $X \subseteq I$: $X \in \mathcal{F}$ ако и само ако за неки $n \in \mathbb{N}$ и неке скупове $X_1, \ldots, X_n \in \Upsilon$, $X_1 \cap \cdots \cap X_n \subseteq X$. Колекција Υ има својство коначног пресека уколико је непразан сваки пресек коначно много чланова из Υ.

ПРИМЕР 2.2. 1° Сваки прави филтер има својство коначног пресека.

2° Колекција $\Upsilon = \{\, [n, \infty[\mid n \in \mathbb{N} \,\}$ има својство коначног пресека.

3° Нека је A непразан скуп, $I = \{\, i \subseteq A \mid i \text{ је коначан} \,\}$ и нека је скуп $S_a = \{\, i \in I \mid a \in i \,\}$ за $a \in A$. Тада $\Upsilon = \{\, S_a \mid a \in A \,\}$ има својство коначног пресека: ако $a_1, \ldots, a_n \in A$, тада $\{a_1, \ldots, a_n\} \in S_{a_1} \cap \cdots \cap S_{a_n}$.

Ако $\Upsilon \subseteq \mathbf{P}(I)$ генерише филтер $\mathcal{F}$ над I, тада Υ очигледно има својство коначног пресека. Основна теорема о егзистенцији ултрафилтера тврди обрат:

ТЕОРЕМА 2.5. *Нека $\Upsilon \subseteq \mathbf{P}(I)$ има својство коначног пресека. Тада постоји ултрафилтер $\mathcal{F}$ над I такав да $\Upsilon \subseteq \mathcal{F}$.*

Доказ. Нека је $\Sigma = \{\, \mathcal{G} \mid \mathcal{G}$ је прави филтер над $I,\ \Upsilon \subseteq \mathcal{G}\,\}$. Тада је Σ непразна фамилија с обзиром да филтер генерисан скупом Υ припада Σ. Према леми Куратовског[4] (варијанта аксиоме избора) постоји максималан ланац $\Lambda \subseteq \Sigma$. Дакле, за $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \Lambda$ важи $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ или $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1$. Нека је $\mathcal{F} = \bigcup \Lambda$. Тада је $\mathcal{F}$ прави филтер: за све $\mathcal{G} \in \Lambda$, $\emptyset \notin \mathcal{G}$ те $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Ако $X \in \mathcal{F}$ и $X \subseteq Y \subseteq I$, тада за неки $\mathcal{G} \in \Lambda$, $X \in \mathcal{G}$ одакле $Y \in \mathcal{G}$, па $Y \in \mathcal{F}$. Даље, ако $X, Y \in \mathcal{F}$, тада за неке $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \Lambda$, $X \in \mathcal{G}_1$, $Y \in \mathcal{G}_2$, те како је Λ ланац можемо узети $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, одакле $X \cap Y \in \mathcal{G}_2$, па $X \cap Y \in \mathcal{F}$. Очигледно $\Upsilon \subseteq \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ је максималан филтер: ако је $\mathcal{G}$ прави филтер над I, $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$ тада би $\Lambda' = \Lambda \cup \{\, \mathcal{G}\,\}$ био ланац садржан у Σ и $\Lambda \subsetneq \Lambda'$, што је контрадикција. ■

ПОСЛЕДИЦА 2.1. *Сваки прави филтер садржан је у неком ултрафилтеру.*

Сваки ултрафилтер над коначним скупом је главни. Егзистенцију неглавних ултрафилтера обезбеђује претходна теорема и следеће тврђење.

ТЕОРЕМА 2.6. *Ултрафилтер $\mathcal{F}$ над I је неглаван акко $\mathcal{F}$ садржи Фрешеов филтер.*

Доказ. $(\to)$ Нека је $X \subseteq I$ и $X \in \mathcal{F}$ такав да је $X^c = \{\, i_0, \dots, i_n \,\}$ коначан. Како је $X^c = \{\, i_0 \,\} \cup \cdots \cup \{\, i_n \,\}$, то из $X^c \in \mathcal{F}$, према Теореми 2.4., следи да за неки $k \leq n$, $\{\, i_k \,\} \in \mathcal{F}$, па i_k генерише $\mathcal{F}$, супротно претпоставци.

$(\leftarrow)$ Ако $\mathcal{F}$ садржи Фрешеов филтер и $i_0 \in I$ генерише $\mathcal{F}$, онда $\{\, i_0 \,\} \in \mathcal{F}$ и $\{\, i_0 \,\}^c \in \mathcal{F}$, контрадикција. ■

ПОСЛЕДИЦА 2.2. *Над сваким бесконачним скупом постоји неглаван ултрафилтер.*

[4] Kazimierz Kuratowski (1896–1980)

Приметимо да према претходном у сваком неглавном ултрафилтеру $\mathcal{F}$ сваки $X \in \mathcal{F}$ је бесконачан.

За доказ Последице 2.2. користи се аксиома избора. Међутим, из овог тврђења не може се доказати аксиома избора, дакле хипотеза о егзистенцији неглавног ултрафилтера је слабија од аксиоме избора. Хипотеза о егзистенцији неглавних ултрафилтера у теорији скупова без аксиоме избора (ZF) еквивалентна је многобројним исказима. Наводимо следеће:

1° Производ компактних Хауздорфових[5)] простора је компактан простор.

2° За сваки I, простор 2^I је компактан.

3° Став потпуности за предикатски рачун првог реда.

4° Став компактности за предикатски рачун првог реда.

2.3 Филтери у Буловим алгебрама

У овом одељку размотрићемо две теме. У оквиру прве теме показује се да се филтери поред скупова јављају и у неким другим контекстима. Овом приликом ограничићемо се на Булове[6)] алгебре. Друга тема односи се на неке скуповне особине филтера (рецимо на број ултрафилтера над неким доменом). Занимљиво је да ћемо у овом другом случају користити особине филтера над слободним Буловим алгебрама.

Дајемо кратак преглед основних чињеница о Буловим алгебрама. *Булова алгебра* је свака структура $\mathbf{B} = (B, \wedge, \vee, \leq, ', 0, 1)$ која задовољава следеће услове:

- $(B, \leq, \wedge, \vee)$ је *мрежа*. Дакле, $(B, \leq)$ је парцијално уређен скуп у којем сваки коначан подскуп има инфимум и супремум. Овде је за све $x, y \in B$, $x \wedge y = \inf\{\, x, y\,\}$, $x \vee y = \sup\{\, x, y\,\}$.
- Елементи $0, 1$ су редом најмањи и највећи елемент ове мреже.
- Мрежа $(B, \leq, \wedge, \vee)$ је *дистрибутивна*, тј. за све $x, y, z \in B$ важи $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
- $\mathbf{B}$ је *комплементарна мрежа*, тј. за сваки $x \in B$ важи $x \wedge x' = 0$ и $x \vee x' = 1$.

[5)] Felix Hausdorff (1868–1942)

[6)] George Boole (1815–1864)

Слично, као код скупова, филтер Булове алгебре $\mathbf{B}$ је сваки подскуп $\mathcal{F} \subseteq B$ који задовољава ове услове:

1° $1 \in \mathcal{F}$,

2° за сваки $x \in \mathcal{F}$ и сваки $y \in B$, $x \le y$ повлачи $y \in \mathcal{F}$,

3° за све $x, y \in \mathcal{F}$ важи $x \wedge y \in \mathcal{F}$.

Филтер $\mathcal{F}$ је *прави* уколико $0 \notin \mathcal{F}$. Даље, филтер $\mathcal{F}$ је *ултрафилтер* Булове алгебре $\mathbf{B}$ уколико је $\mathcal{F}$ максималан прави филтер у B. Ако је $\mathcal{F} = \{x \in B \,|\, x \ge a\}$ за неки $a \in B$, тада је $\mathcal{F}$ *главни* филтер. Као и у случају скуповних филтера од интереса су углавном неглавни ултрафилтери.

Пример 2.3. 1° Структура $(\mathbf{P}(X), \cap, \cup, \subseteq, {}^c, \emptyset, X)$ је Булова алгебра и $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{P}(X)$ је филтер (ултрафилтер) ове Булове алгебре ако и само ако је $\mathcal{F}$ филтер (ултрафилтер) у смислу Дефиниције 2.1.

2° Нека је $B = \{Y \subseteq X \,|\, Y$ је коначан или је Y^c коначан$\}$, где је X бесконачан скуп. Тада је $\mathbf{B} = (B, \cap, \cup, \subseteq, {}^c, \emptyset, X)$ Булова алгебра. Једини неглавни ултрафилтер ове Булове алгебре је Фрешеов филтер над X.

3° Фамилија Υ подскупова неког скупа X је *поље скупова* уколико је Υ затворена за операције $\cap, \cup$ и c_X (комплемент у односу на скуп X). У таквом случају $(\Upsilon, \cap, \cup, \subseteq, c_X, \emptyset, X)$ је Булова алгебра. Ово је канонски пример с обзиром на то да је свака Булова алгебра изоморфна неком пољу скупова (Стонова теорема).

4° Скуп свих отворено-затворених подскупова неког тополошког простора у односу на скуповне операције $\cap, \cup, c_X$ и инклузију чини Булову алгебру. Ово је такође канонски пример, јер има исто својство као Булова алгебра из претходног примера.

Као и у случају скуповних филтера (Теорема 2.4.) важи и доказује се на сличан начин следећа теорема.

Теорема 2.7. *Нека је $\mathcal{F}$ филтер Булове алгебре $\mathbf{B}$. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

1° *$\mathcal{F}$ је ултрафилтер у $\mathbf{B}$.*

2° *За сваки $x \in B$, $x \in \mathcal{F}$ или $x' \in \mathcal{F}$.*

3° *За све $x, y \in \mathcal{F}$, $x \vee y \in \mathcal{F}$ повлачи $x \in \mathcal{F}$ или $y \in \mathcal{F}$.*

Основна теорема о филтерима Булових алгебри односи се на егзистенцију ултрафилтера. Наиме, као и у случају скуповних филтера, ако је X подскуп Булове алгебре $\mathbf{B}$ са својством коначног пресека, тј. ако X задовољава

$$x_1, \ldots, x_n \in X \Rightarrow x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \neq 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

онда постоји ултрафилтер $\mathcal{U}$ Булове алгебре $\mathbf{B}$ који садржи X. Према томе, сваки филтер Булове алгебре $\mathbf{B}$ садржан је у неком ултрафилтеру алгебре $\mathbf{B}$.

Теорема 2.8. *Нека је $\mathcal{F}$ филтер Булове алгебре $\mathbf{B}$ и Ω скуп свих ултрафилтера у B који садрже $\mathcal{F}$. Тада је $\mathcal{F} = \bigcap \Omega$.*

Доказ. Очигледно, довољно је доказати $\mathcal{F} \supseteq \bigcap \Omega$. Претпоставимо супротно. Тада постоји $a \in \bigcap \Omega$ и $a \notin \mathcal{F}$. Нека је $S_{\mathcal{F}}$ скуп свих правих филтера у B који садрже $\mathcal{F}$ и не садрже a. Према Цорновој[7] леми $S_{\mathcal{F}}$ има максималан члан, нека је то $\mathcal{U}$. Тада $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ и $a \notin \mathcal{U}$. Даље, доказујемо да је $\mathcal{U}$ ултрафилтер Булове алгебре $\mathbf{B}$. Најпре докажимо да $a' \in \mathcal{U}$. Нека је $\mathcal{V}$ филтер у B генерисан скупом $\mathcal{U} \cup \{ a' \}$. Овај скуп има својство коначног пресека, јер ако је за неки $x \in \mathcal{U}$, $a' \wedge x = 0$, онда $a \geq x$, па $a \in \mathcal{U}$, што је контрадикција. Дакле, $\mathcal{V}$ је прави филтер па $\mathcal{V} \in S_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ и $a \notin \mathcal{V}$ јер $a' \in \mathcal{V}$. Отуда према избору филтера $\mathcal{U}$ следи $\mathcal{V} = \mathcal{U}$. Даље, нека је $b \in B$ било који елемент. Претпоставимо да $b \notin \mathcal{U}$. Тада скуп $\mathcal{U} \cup \{ b' \}$ има својство коначног пресека, па нека је $\mathcal{W}$ филтер генерисан овим скупом. Тада $b' \in \mathcal{W}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$. Такође, $a \notin \mathcal{W}$ јер $a' \in \mathcal{W}$. Отуда $\mathcal{W} \in S_{\mathcal{F}}$, па према избору филтера $\mathcal{U}$ следи $\mathcal{W} = \mathcal{U}$, дакле и $b' \in \mathcal{U}$. Овим смо доказали да за све $x \in B$, $x \in \mathcal{U}$ или $x' \in \mathcal{U}$, тј. $\mathcal{U}$ је ултрафилтер. Како је $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, то онда $\mathcal{U} \in \Omega$, па према избору елемента a следи $a \in \mathcal{U}$, што је контрадикција. ■

Пример 2.4. (Линденбаумова[8] алгебра исказног рачуна.) Нека је F скуп формула исказног рачуна над скупом исказних слова P и нека је $\sim$ релација скупа F дефинисана са:

$$\varphi \sim \psi \quad \text{ако и само ако} \quad \varphi \Leftrightarrow \psi \text{ је таутологија} \quad (\varphi, \psi \in F).$$

Нека је $B = F/\sim$ и $+$, $\cdot$, $'$ операције скупа B дефинисане на следећи начин: $x + y = (\varphi \vee \psi)/\sim$, $x \cdot y = (\varphi \wedge \psi)/\sim$, $x' = (\neg\varphi)/\sim$, за све $x, y \in B$ и $\varphi, \psi \in F$ такве да $x = \varphi/\sim$ и $y = \psi/\sim$. Даље, нека је 0

[7] Max August Zorn (1906–1993)
[8] Adolf Lindenbaum (1904–1941)

класа еквиваленције неке контрадикције и 1 класа еквиваленције неке таутологије. Показује се да су операције $+$, $\cdot$, $'$ добро дефинисане и да је $\mathbf{B}_P = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Булова алгебра. Ова Булова алгебра назива се Линденбаумовом алгебром исказног рачуна и има многа занимљива својства. Рецимо, ако исказних слова $p_0, p_1, \ldots$ има пребројиво много, онда је $\mathbf{B}_P$ пребројива Булова алгебра. Даље, за сваки $x \in B$, $x > 0$, постоји $y \in B$ такав да $0 < y < x$, тј. $\mathbf{B}_P$ је неатомична Булова алгебра, или густо уређена.

Подсетимо се да за ултрафилтере $\mathcal{F}$ Булових алгебри важи: за сваки $x \in B$, $x \in \mathcal{F}$ или $x' \in \mathcal{F}$. Отуда сваки ултрафилтер $\mathcal{D}$ Линденбаумове алгебре $\mathbf{B}_P$ одређује функцију $\lambda\colon \mathbb{N} \to \{\,0, 1\,\}$ дату на следећи начин $\lambda_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } p_n \in \mathcal{D} \\ 0, & \text{ако } p_n \notin \mathcal{D}. \end{cases}$ Уколико је за исказно слово q, $q^1 = q$, $q^0 = q'$, онда скуп $\{\, p_n^{\lambda_n} \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ генерише $\mathcal{D}$. Исто тако, свака функција λ дата са $\lambda\colon \mathbb{N} \to \{\,0, 1\,\}$ одређује један ултрафилтер $\mathcal{D}_\lambda$ алгебре $\mathbf{B}_P$ на управо описан начин. Ако је $\lambda \neq \mu$, онда је $\lambda_n \neq \mu_n$ за неки n, те ако је, на пример, $\lambda_n = 1$, $\mu_n = 0$, онда $p_n \in \mathcal{D}_\lambda \setminus \mathcal{D}_\mu$, тј. $\mathcal{D}_\lambda \neq \mathcal{D}_\mu$. Отуда постоји бијекција између скупа свих ултрафилтера Линденбаумове алгебре $\mathbf{B}_P$ и скупа $2^{\mathbb{N}}$, свих пресликавања из $\mathbb{N}$ у $\{\,0, 1\,\}$. Дакле, Линденбаумова алгебра исказног рачуна над пребројиво много исказних слова има $2^{\aleph_0}$ ултрафилтера. Уколико се претпостави да F има κ, $\kappa \geq \aleph_0$, исказних слова, онда $\mathbf{B}_P$ има 2^κ ултрафилтера.

Теорема 2.9. *Број ултрафилтера над* $\mathbb{N}$ *је* $2^{2^{\aleph_0}}$.

Доказ. Претходно докажимо:

(1) *Ако је* $\mathbf{B}$ *Булова алгебра и* $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_m$, $\mathcal{Q}_0, \ldots, \mathcal{Q}_n$ *су различити ултрафилтери над* $\mathbf{B}$, *тада* $\mathcal{P}_0 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_m \cap \mathcal{Q}_0^c \cap \cdots \cap \mathcal{Q}_n^c \neq \emptyset$.

Заиста, нека је $\mathcal{P}$ ма који ултрафилтер над $\mathbf{B}$ различит од $\mathcal{Q}_0, \ldots, \mathcal{Q}_n$. Тада постоје елементи a_i, $i = 0, \ldots, n$, такви да $a_i \in \mathcal{P}$, $a_i{}' \in \mathcal{Q}_i$. Тада за $a = a_0 \wedge \cdots \wedge a_n$ важи $a \in \mathcal{P}$ и $a \in \bigcap_{i \leq n} \mathcal{Q}_i^c$. Дакле, постоје елементи b_i, $i = 0, \ldots, m$ такви да $b_i \in \mathcal{P}_i$ и $b_i \in \bigcap_{j \leq n} \mathcal{Q}_j^c$. Тада за $b = b_0 \vee \cdots \vee b_m$ важи $b \in (\bigcap_{i \leq m} \mathcal{P}_i) \cap (\bigcap_{j \leq n} \mathcal{Q}_j^c)$, па је овим (1) доказано.

Фамилија Υ подскупова скупа $\mathbb{N}$ је *независна* уколико за сваки коначан низ различитих чланова $X_0, \ldots, X_n$ из Υ и свако пресликавање $\lambda\colon \{\,0, 1, \ldots, n\,\} \to \{\,0, 1\,\}$, важи

$$X_0^{\lambda_0} \cap \cdots \cap X_n^{\lambda_n} \neq \emptyset, \quad \text{где је } X^1 \stackrel{\text{def}}{=} X,\ \ X^0 \stackrel{\text{def}}{=} X^c.$$

Докажимо:

(2) *Постоји независна фамилија* Υ *подскупова од* $\mathbb{N}$ *моћи* $2^{\aleph_0}$.

Према Примеру 2.4. Линденбаумова алгебра $\mathbf{B}_P$ исказног рачуна са пребројиво много слова има $2^{\aleph_0}$ различитих ултрафилтера. Нека је Ω скуп свих ултрафилтера ове алгебре. Према (1) Ω је независна фамилија. Према истом примеру домен B_P алгебре $\mathbf{B}_P$ је пребројив, дакле постоји бијекција $f\colon B_P \xrightarrow[1-1]{\text{na}} \mathbb{N}$. Тада је $\Upsilon = \{\, f(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \Omega \,\}$ независна фамилија над $\mathbb{N}$. Овим је (2) доказано.

Нека је Υ независна фамилија подскупова од $\mathbb{N}$ моћи $2^{\aleph_0}$. Отуда, за сваки $Z \subseteq \Upsilon$ скуп $Z \cup \{\, A^c \mid A \in \Upsilon \setminus Z \,\}$ има својство коначног пресека, дакле, према Теореми 2.5., овај скуп садржан је у неком ултрафилтеру $\mathcal{D}_Z$. Ако је $Z \neq Z'$, тада за неки $A \in \Upsilon$ важи $A \in Z$ и $A^c \in Z'$, дакле $A \in \mathcal{D}_Z$ и $A^c \in \mathcal{D}_{Z'}$, тј. $\mathcal{D}_Z \neq \mathcal{D}_{Z'}$.

Према претходном, ултрафилтера над $\mathbb{N}$ има бар колико и подскупова од Υ, тј. $2^{2^{\aleph_0}}$. ■

Претходни доказ може се непосредно генерализовати. Наиме, ултрафилтера над ма којим бесконачним скупом кардиналности κ има $2^{2^{\kappa}}$. Једино приликом разматрања треба узети Линденбаумову алгебру исказног рачуна са κ исказних слова.

Претходна теорема има интересантну последицу. Наиме, два ултрафилтера $\mathcal{D}$ и $\mathcal{F}$ над скупом $\mathbb{N}$ су изоморфна уколико постоји бијекција $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow[1-1]{\text{na}} \mathbb{N}$ таква да $f(\mathcal{D}) = \mathcal{F}$. С обзиром на то да над $\mathbb{N}$ има $2^{2^{\aleph_0}}$ ултрафилтера и само $2^{\aleph_0}$ бијекција следи да постоје неизоморфни ултрафилтери.

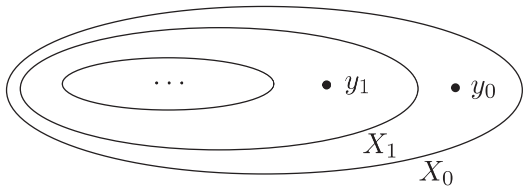
Наводимо још једно занимљиво својство ултрафилтера и њихових база (генераторних скупова).

ТЕОРЕМА 2.10. *Нека фамилија* Υ *генерише неглаван ултрафилтер* $\mathcal{D}$ *над* $\mathbb{N}$. *Тада је* $|\Upsilon| > \aleph_0$.

Доказ. Ако је Υ коначан, онда $A = \bigcap \Upsilon$ генерише $\mathcal{D}$, тј. важи да је $\mathcal{D} = \{\, X \subseteq \mathbb{N} \mid A \subseteq X \,\}$. Како је $\mathcal{D}$ ултрафилтер, то је A једночлан, тј. $\mathcal{D}$ је главни ултрафилтер, супротно претпоставци.

Претпоставимо да је $\Upsilon = \{\, X_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ пребројива фамилија различитих скупова. Можемо претпоставити да $X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \ldots$, иначе можемо узети $\Upsilon' = \{\, \bigcap_{i \leq n} X_i \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ с обзиром на то да Υ и Υ' генеришу исти филтер. Нека је Y изборни скуп за фамилију скупова

$\{\, X_i \setminus X_{i+1} \,|\, i \in \mathbb{N} \,\}$, рецимо $Y \cap (X_i \setminus X_{i+1}) = \{\, y_i \,\}$, $i \in \mathbb{N}$. Тада $Y \notin \Upsilon$ или $Y = X_0$.



Слика 2.1.

У првом случају $\Upsilon \cup \{\, Y \,\}$ има својство коначног пресека, те постоји прави филтер $\mathcal{G}$ такав да $\Upsilon \subseteq \mathcal{G}$. Но, онда $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$, супротно претпоставци о максималности филтера $\mathcal{D}$.

Ако важи да је $Y = X_0$, онда су скупови фамилије Υ следећег облика: $X_0 = \{\, y_0, y_1, \dots \,\}$, $X_1 = \{\, y_1, y_2, \dots \,\}$, $X_2 = \{\, y_2, y_3, \dots \,\} \dots$. Тада за скупове $A = \{\, y_{2n} \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$ и $B = \{\, y_{2n+1} \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$ важи $A \cup B \in \mathcal{D}$ јер $X_0 = A \cup B$, док $A, B \notin \mathcal{D}$, што је супротно делу 3° Теореме 2.4. ■

Глава 3

Ултрапроизводи

Ултрапроизводи имају изузетан значај управо због својих моделско-теоретских особина. Овом конструкцијом могуће је добити, на пример, нова алгебарска поља полазећи од неке фамилије поља, а да се притом нека заједничка својства полазних поља одрже. Која су то својства о томе ближе говори Лајбницов принцип, односно Лошова[1)] теорема. У овој глави разматрамо конструкције редукованог производа и ултрапроизвода.

3.1 Редуковани производи

Нека је $\{\, A_i \,|\, i \in I \,\}$ непразна фамилија непразних скупова и нека је $A = \prod_{i\in I} A_i$. Приметимо да је према аксиоми избора скуп A непразан. Елементи скупа A су функције $f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ такве да $f(i) \in A_i$ за свако $i \in I$. Означимо елемент f скупа A са $f = \langle f(i) \,|\, i \in I \rangle$. Даље, нека је $\mathcal{D}$ филтер над I и $=_{\mathcal{D}}$ релација скупа A дефинисана на следећи начин:

$$f =_{\mathcal{D}} g \quad \text{ако и само ако} \quad \{\, i \,|\, f(i) = g(i) \,\} \in \mathcal{D}, \quad (f, g \in A).$$

Уместо $f =_{\mathcal{D}} g$ користи се и ознака $f = g(\operatorname{mod} \mathcal{D})$, односно ознака $f(i) = g(i)$ $\mathcal{D}$-с.с., и ове ознаке редом се читају „$f = g$ по модулу $\mathcal{D}$”, тј. „$f(i) = g(i)$ скоро свуда по модулу $\mathcal{D}$”. Квантор „скоро свуда” у вези је с адитивним скуповним функцијама (које се понегде називају

[1)] Jerzy Łosh, (1920–1998)

и бинарном мером). Наиме, филтеру $\mathcal{D}$ придружује се пресликавање $\mu_{\mathcal{D}}\colon \mathbf{P}(I) \to \{0,1\}$, где $\mu_{\mathcal{D}}(X) = \begin{cases} 1, & \text{ако } X \in \mathcal{D} \\ 0, & \text{ако } X \notin \mathcal{D}. \end{cases}$ Овако уведено пресликавање $\mu_{\mathcal{D}}$ јесте једна *коначно-адитивна* функција уколико је $\mathcal{D}$ ултрафилтер. Дакле, ако су $X_1, \dots, X_n$ дисјунктни подскупови од I, онда је $\mu_{\mathcal{D}}(\bigcup_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu_{\mathcal{D}}(X_k)$.

Теорема 3.1. *Нека је $\mathcal{D}$ филтер над I. Тада је $=_{\mathcal{D}}$ релација еквиваленције скупа $A = \prod_{i\in I} A_i$.*

Доказ. Нека су $f, g, h \in A$. Тада

1° $f =_{\mathcal{D}} f$ јер $I \in \mathcal{D}$ и $\{\, i \in I \mid f(i) = f(i) \,\} = I$;

2° $f =_{\mathcal{D}} g$ повлачи $g =_{\mathcal{D}} f$, јер су следећи скупови $\{\, i \in I \mid f(i) = g(i) \,\}$, $\{\, i \in I \mid g(i) = f(i) \,\}$ једнаки;

3° $f =_{\mathcal{D}} g$ и $g =_{\mathcal{D}} h$ повлачи $f =_{\mathcal{D}} h$, јер за $A = \{\, i \in I \mid f(i) = g(i) \,\}$ и $B = \{\, i \in I \mid g(i) = h(i) \,\}$ важи $A, B \in \mathcal{D}$, одакле $A \cap B \in \mathcal{D}$. Како је, очигледно, $A \cap B \subseteq \{\, i \in I \mid f(i) = h(i) \,\}$, то је $\{\, i \in I \mid f(i) = h(i) \,\} \in \mathcal{D}$, дакле $f =_{\mathcal{D}} h$. ■

Количнички скуп $\prod_{i\in I} A_i / =_{\mathcal{D}}$ означаваћемо краће $\prod_{\mathcal{D}} A_i$ и називаћемо га *редукованим производом* скупова A_i, $i \in I$. Елементе скупа $\prod_{\mathcal{D}} A_i$ записујемо са $\langle f(i) \mid i \in I \rangle_{\mathcal{D}}$ или краће, кад нема опасности од забуне, са $\langle f(i) \mid i \in I \rangle$ и $f_{\mathcal{D}}$. Скупови A_i могу бити домени неких алгебарских структура. Показује се да је у таквом случају релација $=_{\mathcal{D}}$ конгруенција *производне структуре*. Овде ћемо размотрити ово својство релације $=_{\mathcal{D}}$ у случају прстена и поља.

Нека су $\mathbf{P}_i = (P_i, +_i, \cdot_i, 0_i, 1_i)$, $i \in I$ прстени са јединицом. Тада је структура $\mathbf{P} = \prod_{i\in I} \mathbf{P}_i = (P, +, \cdot, 0, 1)$ такође прстен, где је $P = \prod_{i\in I} P_i$ а операције $+$ и $\cdot$ скупа P су дефинисане на следећи начин ($f, g \in P$): $f + g = \langle f(i) + g(i) \mid i \in I \rangle$, $f \cdot g = \langle f(i) \cdot g(i) \mid i \in I \rangle$, $0 = \langle 0_i \mid i \in I \rangle$ и $1 = \langle 1_i \mid i \in I \rangle$.

Лема 3.1. *Нека је $\mathcal{D}$ филтер над I и нека су $\mathbf{P}_i$, $i \in I$, прстени са јединицом. Тада је $=_{\mathcal{D}}$ конгруенција производног прстена $\mathbf{P} = \prod_{i\in I} \mathbf{P}_i$.*

Доказ. Према Теореми 3.1. релација $=_{\mathcal{D}}$ је релација еквиваленције домена P. Доказујемо да је $=_{\mathcal{D}}$ сагласна са операцијом сабирања прстена $\mathbf{P}$. Нека су f_1, g_1, f_2, g_2 из P и претпоставимо $f_1 =_{\mathcal{D}} g_1$, $f_2 =_{\mathcal{D}} g_2$. За скупове $A = \{\, i \in I \mid f_1(i) = g_1(i) \,\}$ и $B = \{\, i \in I \mid f_2(i) = g_2(i) \,\}$ важи

$A, B \in \mathcal{D}$. Отуда $A \cap B \in \mathcal{D}$, а због $A \cap B \subseteq \{\, i \in I \mid f_1(i) + f_2(i) = g_1(i) + g_2(i) \,\}$ важи $f_1 + f_2 =_{\mathcal{D}} g_1 + g_2$. Доказ да је $=_{\mathcal{D}}$ конгруенција и за операцију множења прстена $\mathbf{P}$ је аналоган претходном. ∎

Приметимо да у претходном доказу нисмо користили услове да су $+$ и $\cdot$ операције прстена. Наиме, релација $=_{\mathcal{D}}$ је конгруенција за било коју операцију домена P. Дакле, може се говорити о редукованом производу група, уређених група и слично. У одељку 6.2 ову чињеницу ћемо доказати у далеко ширем контексту, наиме за производе произвољних операцијско-релацијских структура.

Количнички прстен $\mathbf{P}/\!=_{\mathcal{D}}$ означава се $\prod_{i \in I} \mathbf{P}_i/\mathcal{D}$, или краће $\prod_{\mathcal{D}} \mathbf{P}_i$. Класа еквиваленције елемента $f \in P$ означава се $f_{\mathcal{D}}$. Према томе, $f_{\mathcal{D}} = \{\, g \in P \mid g =_{\mathcal{D}} f \,\}$. Према претходној леми имамо следеће тврђење.

Теорема 3.2. *Нека је I нейразан скуй, $\{\, \mathbf{P}_i \mid i \in I \,\}$ колекција йрсйена и $\mathcal{D}$ улйрафилйер над I. Тада је сйрукйура $\prod_{\mathcal{D}} \mathbf{P}_i = (\prod_{\mathcal{D}} P_i, +_{\mathcal{D}}, \cdot_{\mathcal{D}}, 0_{\mathcal{D}}, 1_{\mathcal{D}})$ йрсйен, йри чему важи $f_{\mathcal{D}} + g_{\mathcal{D}} \overset{\text{def}}{=} (f+g)_{\mathcal{D}}$ и $f_{\mathcal{D}} \cdot g_{\mathcal{D}} \overset{\text{def}}{=} (f \cdot g)_{\mathcal{D}}$ за $f_{\mathcal{D}}, g_{\mathcal{D}} \in \prod_{\mathcal{D}} P_i$.*

Пресликавање $f \mapsto f_{\mathcal{D}}$ је хомоморфизам прстена $\prod \mathbf{P}_i$ на прстен $\prod_{\mathcal{D}} \mathbf{P}_i$.

Прстен $\prod_{\mathcal{D}} \mathbf{P}_i$ назива се *редукованим йроизводом* прстена $\mathbf{P}_i$. Уколико је $\mathcal{D}$ ултрафилтер над I, тада се $\prod_{\mathcal{D}} \mathbf{P}_i$ назива *улйрайроизводом* прстена $\mathbf{P}_i$.

Размотримо сада случај поља. Ако су $\mathbf{F}_i$ поља, тада производ $\prod_{i \in I} \mathbf{F}_i$ није поље (ако $|I| \geq 2$). На пример, производ $\mathbf{F} \times \mathbf{K}$ поља $\mathbf{F}$ и $\mathbf{K}$ има делитеље нуле, рецимо за $a = (1_{\mathbf{F}}, 0_{\mathbf{K}})$, $b = (0_{\mathbf{F}}, 1_{\mathbf{K}})$ важи $a \cdot b = 0_{\mathbf{F} \times \mathbf{K}}$ и $a, b \neq 0_{\mathbf{F} \times \mathbf{K}}$. С друге стране имамо следеће тврђење.

Теорема 3.3. *Улйрайроизвод йоља је йоље.*

Доказ. Нека је $\mathbf{F} = \prod_{\mathcal{D}} \mathbf{F}_i$ ултрапроизвод поља. Према Теореми 3.2. структура $\mathbf{F}$ је прстен. Нека је $f_{\mathcal{D}} \in F$ такав да је $f_{\mathcal{D}} \neq 0$, и нека је $X = \{\, i \in I \mid f(i) \neq 0 \,\}$. Даље, нека је функција g дефинисана на следећи начин:

$$g(i) = \begin{cases} 1/(f(i)), & \text{ако } i \in X \\ 0, & \text{ако } i \notin X. \end{cases}$$

Тада је $f_{\mathcal{D}} \cdot g_{\mathcal{D}} = 1_{\mathcal{D}}$ јер $\{\, i \in I \mid f(i) \cdot g(i) = 1 \,\} = X$ и $X \in \mathcal{D}$, тј. $f \cdot g =_{\mathcal{D}} 1$. ∎

Ако је $A_i = B$, за сваки $i \in I$, онда редуковани производ $\prod_{\mathcal{D}} A_i$ означавамо са $B^I/\mathcal{D}$, и називамо *редукованим степеном* скупа B. Слично се уводи појам редукованог степена $\mathbf{P}^I/\mathcal{D}$ неког прстена $\mathbf{P}$. *Дијагонално пресликавање* је функција $d\colon P \to P^I/\mathcal{D}$ дефинисана са $d(x) = \overline{x}_{\mathcal{D}}$, где је за сваки $i \in I$, $\overline{x}(i) = x$. Ако је $\mathbf{P}$ прстен, тада је d утапање прстена $\mathbf{P}$ у прстен $\mathbf{P}^I/\mathcal{D}$. Заиста, за различите $x, y \in P$, $\{\, i \in I \mid \overline{x}(i) = \overline{y}(i) \,\} = \emptyset$, те $\overline{x} \neq_{\mathcal{D}} \overline{y}$, дакле $d(x) \neq d(y)$. Лако је проверити да је d хомоморфизам.

Последица 3.1. *Нека је $\mathcal{D}$ ултрафилтер над $\mathbb{N}$. Тада је $\mathbf{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ поље које садржи изоморфну копију поља реалних бројева $\mathbf{R}$.*

Конструкција ултрапроизвода одржава и нека важна својства релација. Нека су $(\mathbf{P}_i, \leq_i)$, $i \in I$, уређени прстени, $\mathcal{D}$ ултрафилтер над I и $\leq$ бинарна релација на $\prod_{\mathcal{D}} P_i$ дефинисана на следећи начин:

$$f_{\mathcal{D}} \leq g_{\mathcal{D}} \quad \text{акко} \quad \{\, i \in I \mid f(i) \leq_i g(i) \,\} \in \mathcal{D}, \quad \text{за } f_{\mathcal{D}}, g_{\mathcal{D}} \in \prod\nolimits_{\mathcal{D}} P_i.$$

Теорема 3.4. *$(\prod_{\mathcal{D}} \mathbf{P}_i, \leq)$ је уређен прстен.*

Доказ. 1° Релација $\leq$ је добро дефинисана. Заиста, нека је $f_1 =_{\mathcal{D}} f_2$ и $g_1 =_{\mathcal{D}} g_2$ и нека скуп $A = \{\, i \in I \mid f_1(i) \leq_i g_1(i) \,\}$ припада $\mathcal{D}$. Тада за $B = \{\, i \in I \mid f_1(i) = f_2(i) \,\}$ и $C = \{\, i \in I \mid g_1(i) = g_2(i) \,\}$ важи $A \cap B \cap C \in \mathcal{D}$ и $A \cap B \cap C \subseteq \{\, i \in I \mid f_2(i) \leq_i g_2(i) \,\}$, дакле, важи $\{\, i \in I \mid f_2(i) \leq_i g_2(i) \,\} \in \mathcal{D}$.

2° Релација $\leq$ је транзитивна. Заиста, ако је $f_{\mathcal{D}} \leq g_{\mathcal{D}}$ и $g_{\mathcal{D}} \leq h_{\mathcal{D}}$, тада за уочене скупове $A = \{\, i \in I \mid f(i) \leq_i g(i) \,\}$ и $B = \{\, i \in I \mid g(i) \leq_i h(i) \,\}$ важи $A \cap B \in \mathcal{D}$, као и $A \cap B \subseteq \{\, i \in I \mid f(i) \leq_i h(i) \,\}$, одакле $f_{\mathcal{D}} \leq h_{\mathcal{D}}$.

3° Релација $\leq$ је тотална. Заиста, ако је $f_{\mathcal{D}} \not\leq g_{\mathcal{D}}$, тада очигледно важи $\{\, i \in I \mid f(i) \leq_i g(i) \,\} \notin \mathcal{D}$, па из Теореме 2.4. $\{\, i \in I \mid f(i) \leq_i g(i) \,\}^c \in \mathcal{D}$, тј. $\{\, i \in I \mid g(i) <_i f(i) \,\} \in \mathcal{D}$, одакле $g_{\mathcal{D}} < f_{\mathcal{D}}$.

Слично се доказује да је релација $\leq$ сагласна са операцијама $+$ и $\cdot$ ултрапроизвода $\prod_{\mathcal{D}} \mathbf{P}_i$. ∎

Последица 3.2. *Ултрапроизвод уређених поља је уређено поље.*

Сада можемо да конструишемо произвољно много неархимедских поља. Истовремено, следећа теорема показује зашто су важни управо неглавни ултрафилтери.

ТЕОРЕМА 3.5. *Нека је $\mathcal{D}$ неглавни ултрафилтер над скупом природних бројева $\mathbb{N}$ и нека су $\mathbf{F}_i$, $i \in \mathbb{N}$, уређена поља. Тада је $\prod_{\mathcal{D}} \mathbf{F}_i$ неархимедско поље.*

Доказ. Као и обично, можемо претпоставити да је $\mathbb{Q} \subseteq F_i$ за сваки $i \in \mathbb{N}$. Нека је $f = \left\langle \frac{1}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\rangle$ и $\varepsilon = f_{\mathcal{D}}$. Даље, ако је q позитиван рационалан број, онда је $\left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{1}{n+1} \leq q \right\}^c$ коначан, па како је $\mathcal{D}$ неглаван ултрафилтер, $\left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{1}{n+1} \leq q \right\} \in \mathcal{D}$, дакле $\varepsilon \leq d(q)$. Према томе, ε је мањи од сваког позитивног рационалног броја у $\prod_{\mathcal{D}} F_i$, па како је очигледно $0 < \varepsilon$, следи да је ε позитивна инфинитезимала поља $\prod_{\mathcal{D}} \mathbf{F}_i$. Приметимо да је $\varepsilon^{-1} = \langle n+1 \mid n \in N \rangle_{\mathcal{D}}$ и ε^{-1} јесте пример једног бесконачног елемента поља $\prod_{\mathcal{D}} \mathbf{F}_i$. ■

3.2 Неархимедско раширење реалних бројева

Нека у овом одељку $\mathcal{D}$ означава неглаван ултрафилтер над скупом природних бројева $\mathbb{N}$. Тада према Теореми 3.5. непосредно имамо ову последицу.

ПОСЛЕДИЦА 3.3. $\mathbf{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ *је неархимедско поље.*

Нека је ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$. С обзиром на то да је дијагонално пресликавање $d\colon \mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ утапање, можемо поистоветити x са $d(x)$, дакле можемо узети да је $\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}$. Даље, нека је ${}^*X = \{ f_{\mathcal{D}} \mid f\colon \mathbb{N} \to X \}$ за $X \subseteq \mathbb{R}$, тј. ${}^*X = \{ f_{\mathcal{D}} \mid \{ i \in \mathbb{N} \mid f(i) \in X \} \in \mathcal{D} \}$. Тада очигледно важи $X \subseteq {}^*X$. Ако је $X \subseteq \mathbb{R}$, сваком пресликавању $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ на природан начин се придружује пресликавање ${}^*\varphi\colon {}^*X \to {}^*\mathbb{R}$ дефинисано на следећи начин:

$$\text{ако је } f_{\mathcal{D}} \in {}^*X, \text{ онда } {}^*\varphi(f_{\mathcal{D}}) = (\varphi \circ f)_{\mathcal{D}}.$$

Према томе, следећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi \circ f"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & {}^*X \arrow[d, "{}^*\varphi"] \\
& \mathbb{R} \arrow[r] & {}^*\mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Слика 3.1.

Елементе скупа ${}^*\mathbb{R}$ називамо *хиперреалним* бројевима, док елементе скупа ${}^*\mathbb{Q}$ називамо *хиперрационалним* бројевима.

Пример 3.1. 1° Елемент $\langle 0,1,0,1,\dots\rangle_{\mathcal{D}}$ припада ${}^*\mathbb{N}$. Даље, елемент $\langle 0,1,0,1,\dots\rangle_{\mathcal{D}}$ је $\mathbf{0}$ или $\mathbf{1}$, већ према томе да ли скуп парних или скуп непарних природних бројева припада $\mathcal{D}$.

2° Елемент $H = \langle 0,1,2,\dots\rangle_{\mathcal{D}}$ такође припада ${}^*\mathbb{N}$ и H је већи у ${}^*\mathbb{R}$ од сваког $n \in \mathbb{N}$, јер је $\{\, i \in \mathbb{N} \mid i \geq n \,\}$ кофиналан у $\mathbb{N}$, дакле припада $\mathcal{D}$. Према томе, $H = \langle 0,1,2,\dots\rangle_{\mathcal{D}}$ је „бесконачан природан број”.

3° Скуп ${}^*\mathbb{N}$ је затворен за операције сабирања и множења структуре ${}^*\mathbf{R}$. Такође, ${}^*\mathbf{N} = ({}^*\mathbb{N}, +, \cdot, \leq, \mathbf{0})$ је модел Пеанове[2)] (формалне) аритметике. С обзиром да је ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \neq \emptyset$ (једноставно $\langle 0,1,2,\dots\rangle_{\mathcal{D}} \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$), структура ${}^*\mathbf{N}$ је *нестандардни* модел формалне аритметике.

4° Нека је $f = \langle 3, 3.1, 3.14, \dots\rangle$ децимални развој броја π. Тада $a = f_{\mathcal{D}}$ припада монади броја π, али $a \neq \pi$.

Конструкција ултрапроизвода омогућује такође изградњу уређеног поља реалних бројева, наравно полазећи од уређеног поља рационалних бројева. Ову чињеницу исказујемо у виду следећег тврђења.

Теорема 3.6. *Нека је $\mathcal{D}$ неглавни ултрафилтер над $\mathbb{N}$ и нека је структура ${}^*\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$. Тада је $\mathbf{F} = \gamma_{{}^*\mathbb{Q}}(0)/\mu_{{}^*\mathbb{Q}}(0)$ комплетно уређено поље.*

Доказ. Да је $\mathbf{F}$ архимедски уређено поље тврди Теорема 1.8. Доказујемо да $\mathbf{F}$ задовољава аксиому супремума. Нека је $X \subseteq F$ непразан одозго ограничен скуп са горњом границом m, и нека је I скуп дат са $I = \{\, x \in F \mid (\exists y \in X)\; x \leq y \,\}$. Претпоставимо нетривијалан случај, да X нема највећи елемент. Тада је I почетни део поља $\mathbf{F}$. Како је према Теореми 1.3. скуп $\mathbb{Q}$ густ у F, то постоји монотоно растући низ рационалних бројева $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ кофиналан у I. Даље, скуп I је ограничен одозго, па је $a = f_{\mathcal{D}}$ коначан. За $q \in I \cap \mathbb{Q}$ скуп $\{\, n \in \mathbb{N} \mid q \leq f(n) \,\}^c$ је коначан, према томе, $\{\, n \in \mathbb{N} \mid q \leq f(n) \,\} \in \mathcal{D}$, тј. $q \leq f_{\mathcal{D}} = a$. Скуп $I \cap \mathbb{Q}$ је кофиналан у I, дакле $\mu(a)$[3)] је горња граница у F скупа I, према томе тај елемент је горња граница и скупа X. Уколико постоји $q \in \mathbb{Q}$ такав да $q \leq m$ и за све $x \in I$ важи $x \leq q$, онда очигледно $\mu(a) \leq m$. Тада

[2)] Giuseppe Peano (1858–1932)

[3)] Подсетимо се да је $\mu(a)$ монада елемента a, као и да су елементи поља $\mathbf{F}$ монаде коначних елемената из ${}^*\mathbb{Q}$.

је $\mu(a) = \sup I = \sup X$. Уколико не постоји $q \in \mathbb{Q}$ са претходним својством, онда $m = \sup I = \sup X$. ■

Према Теореми 3.6 и Теореми 1.4. имамо да је $\mathbf{R} \simeq \gamma_{^*Q}(0)/\mu_{^*Q}(0)$.

Вишедимензионална анализа проучава функције којима је домен степен поља реалних бројева. Ако је $k \in \mathbb{N}$, онда је $\mathbf{R}^k = (\mathbb{R}^k, +, \cdot, 0, 1)$ прстен, па према Теореми 3.2. структура $^*(\mathbf{R}^k) = \prod_{\mathcal{D}} \mathbf{R}^k$ је такође прстен. Поставља се природно питање у каквој су вези прстени $^*(\mathbf{R}^k)$ и $(^*\mathbf{R})^k$. Комплетан одговор на ово питање даје следеће тврђење.

Теорема 3.7. *Нека су $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k$ прстени и $\mathcal{D}$ филтер над скупом индекса I. Тада $\prod_{\mathcal{D}}(\mathbf{P}_1 \times \cdots \times \mathbf{P}_k) \simeq \prod_{\mathcal{D}} \mathbf{P}_1 \times \cdots \times \prod_{\mathcal{D}} \mathbf{P}_k$.*

Један изоморфизам ових структура је пресликавање

$$\psi\colon (f_1, \dots, f_k)_{\mathcal{D}} \mapsto (f_{1\mathcal{D}}, \dots, f_{k\mathcal{D}}), \quad (f_i \in P_i,\ i = 1, \dots, k).$$

Потпун доказ претходног тврђења налази се у поглављу Лајбницов принцип, Теорема 6.1. где је оно доказано за произвољне операцијско-релацијске структуре.

Последица 3.4. $^*(\mathbf{R}^k) \simeq (^*\mathbf{R})^k$.

С обзиром на ову последицу убудуће пишемо једноставно $^*\mathbf{R}^k$ уместо $^*(\mathbf{R}^k)$ или $(^*\mathbf{R})^k$.

За редуковане производе поља комплексних бројева $\mathbf{C}$ важе слична тврђења, као и за реалне бројеве. Дакле, ако је $\mathcal{D}$ неглавни ултрафилтер над скупом $\mathbb{N}$, и ако је $^*\mathbf{C} = \prod_{\mathcal{D}} \mathbf{C}$, онда важи:

1° $^*\mathbf{C}$ је поље и $^*\mathbf{C}$ садржи изоморфну копију поља $\mathbf{C}$. Према томе, можемо узети да је $\mathbf{C} \subseteq {}^*\mathbf{C}$.

2° $(^*\mathbf{C})^k \simeq {}^*(\mathbf{C}^k)$, где је $^*(\mathbf{C}^k) = \prod_{\mathcal{D}} \mathbf{C}^k$.

Важи и нешто више, наиме

3° $^*\mathbf{C}$ је алгебарски затворено поље.

Ову чињеницу добићемо као тривијалну последицу на основу алгебарске затворености поља $\mathbf{C}$ применом Лајбницовог принципа (тј. Лошове теореме).

С обзиром на то да је $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, лако је доказати да $\overline{R} = \{\, f_{\mathcal{D}} \mid f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,\}$ је подпоље поља $^*\mathbf{C}$. Приметимо да $f_{\mathcal{D}} \in \overline{R}$ садржи све функције

$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ за које важи $f =_{\mathcal{D}} g$, дакле, ту се налазе и нека пресликавања која узимају вредности у $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Без обзира на то важи $\overline{R} \simeq {}^*\mathbf{R}$, па уколико се изврши уобичајено поистовећивање имамо

4° ${}^*\mathbb{C} = {}^*\mathbb{R} + \imath \cdot {}^*\mathbb{R}$, где је $\imath^2 = -1$.

Дакле, за сваки $z \in {}^*\mathbb{C}$ постоје јединствени $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ такви да је $z = x + \imath y$. Једини аутоморфизми поља $\mathbf{C}$ који фиксирају све хиперреалне бројеве су идентичко пресликавање и конјугација, где је $\overline{z} = x - \imath y$ за $z = x + \imath y$. Метричка функција $|z| = z \cdot \overline{z}$ има очекиване особине, осим што узима вредности у ${}^*\mathbb{R}$. То омогућава да се уведу бесконачно мали и бесконачно велики комплексни бројеви.

Дефиниција 3.1. 1° Елемент $\varepsilon \in {}^*\mathbb{C}$ је (комплексна) инфинитезимала ако и само ако $|\varepsilon| < r$ за сваки позитиван реалан број r.
2° Елемент $W \in {}^*\mathbb{C}$ је бесконачно велики хиперкомплексан број уколико постоји H из ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ такав да $|W| \geq H$.

Наравно, конјугацију на ${}^*\mathbb{C}$ можемо добити као проширење конјугације на $\mathbb{C}$ поступком описаним на почетку ове главе, али битних разлика нема. Ако је $\mathcal{D}$ неглавни ултрафилтер, као и код реалних бројева доказујемо да ${}^*\mathbb{C}$ садржи инфинитезимале и бесконачно велике елементе.

Пример 3.2. За сваки хиперкомплексни број z следећи услови су еквивалентни:

1° за сваки $n \in \mathbb{N}$ важи $|z| \geq n$;

2° за неки бесконачан природан број H важи $|z| \geq H$.

Импликација $2^\circ \to 1^\circ$ је тривијална, па доказујемо да $1^\circ \to 2^\circ$. Нека је $z = x + \imath y$, $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ и нека је $|z| \geq n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада је бар један од бројева $|x|$, $|y|$ већи од сваког природног броја. Заиста, у супротном би важило $|x| \leq m$, $|y| \leq k$ за неке природне бројеве m и k. Отуда следи $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{m^2 + k^2} < 2 \cdot \max\{m, k\}$, што је супротно претпоставци 1°. Нека је $|x| = f_{\mathcal{D}}$, где је $f = \langle f_0, f_1, \ldots \rangle$, већи од сваког природног броја. Тада за $h_i = [f_i]$ (цели део) важи $f_i \geq h_i > f_i - 1$, одакле за $H = \langle h_0, h_1, \ldots \rangle_{\mathcal{D}}$ имамо $f_{\mathcal{D}} \geq H > f_{\mathcal{D}} - 1$, па $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ и $|z| \geq H$.

3.3 Кардинални број ултрастепена

У овом одељку такође претпостављамо да $\mathcal{D}$ означава неки неглавни ултрафилтер. Следеће тврђење представља први корак у доказу да ултрастепен по неглавном ултрафилтеру над $\mathbb{N}$ представља ω_1-*засићену* структуру.

ТЕОРЕМА 3.8. (ω_1- ЗАСИЋЕНОСТ) *Нека је $\mathcal{D}$ неглавни ултрафилтер над $\mathbb{N}$ и нека је $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots$ опадајући низ непразних подскупова реалних бројева. Тада је $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^*A_n \neq \emptyset$.*

Доказ. Нека је $f\colon \mathbb{N} \to A_0$ пресликавање тако да за сваки $i \in \mathbb{N}$, $f(i) \in A_i$. Тада $f_{\mathcal{D}} \in {}^*A_i$, за сваки $i \in \mathbb{N}$. ■

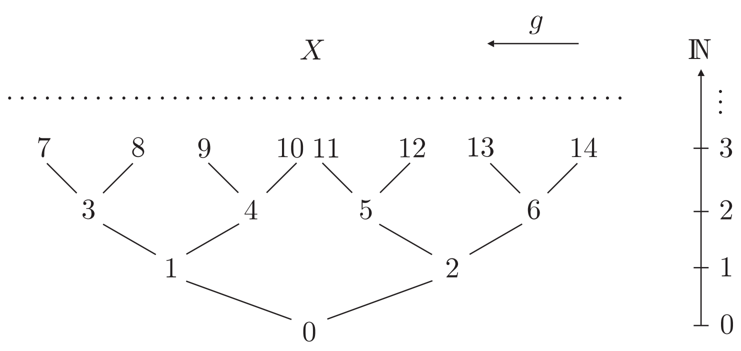
Претходна теорема може се исказати у верзији која подсећа на одређену врсту компактности: *Ако је $\Upsilon = \{\, A_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ фамилија подскупова реалних бројева тако да сваки коначан подскуп од Υ има непразан пресек, тада $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^*A_n \neq \emptyset$.*

У доказу претходне теореме нисмо користили чињеницу да је $\mathbb{R}$ заиста скуп реалних бројева. Према томе, претходно тврђење важи за било који скуп.

Ако је ${}^*X \subseteq {}^*\mathbb{R}$ бесконачан, тада је ${}^*X \setminus X \neq \emptyset$. Заиста, нека је $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} X$. Тада за било који $x_0 \in X$, скуп $\{\, i \in \mathbb{N} \mid f(i) = x_0\,\}$ је празан или једночлан, па тиме и коначан, дакле $\{\, i \in \mathbb{N} \mid f(i) = x_0\,\}^c \in \mathcal{D}$, па $f_{\mathcal{D}} \neq x_0$. Отуда имамо да $f_{\mathcal{D}} \in {}^*X \setminus X$. Ако је скуп X бесконачан, тада о њему нешто више говори следеће тврђење.

ТЕОРЕМА 3.9. *Нека је $\mathcal{D}$ неглаван ултрафилтер над $\mathbb{N}$ и нека је X бесконачан подскуп од $\mathbb{R}$. Тада је $|{}^*X| = 2^{\aleph_0}$.*

Доказ. Функција $f \mapsto f_{\mathcal{D}}$ пресликава $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *на* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$, и ${}^*X \subseteq {}^*\mathbb{R}$, одакле следи $|{}^*X| \leq |{}^*\mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$. Дакле $|{}^*X| \leq 2^{\aleph_0}$, те можемо узети $X = \{\, 0, 1, 2, \dots\,\}$. Нека су чворови бесконачног пуног бинарног дрвета означени природним бројевима као на слици 3.2. Тада свака грана овог дрвета одређује једну функцију $g\colon \mathbb{N} \to X$. Нека је Υ скуп свих ових функција. Тада је $|\Upsilon| = 2^{\aleph_0}$ с обзиром на то да пуно бинарно дрво има $2^{\aleph_0}$ грана (колико и пресликавања из $\mathbb{N}$ у $\{\, 0, 1\,\}$). Ако су $f, g \in \Upsilon$, $f \neq g$, тада је скуп $\{\, i \in \mathbb{N} \mid f(i) = g(i)\,\}$ коначан, те $f_{\mathcal{D}} \neq g_{\mathcal{D}}$. С обзиром на то да важи релација $\{\, f_{\mathcal{D}} \mid f \in \Upsilon\,\} \subseteq {}^*X$, следи $|{}^*X| = 2^{\aleph_0}$. ■

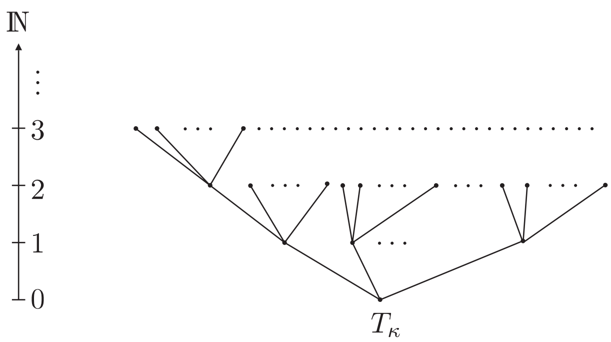


Слика 3.2.

На сличан начин се доказује општије тврђење.

Теорема 3.10. *Ако је A бесконачан скуп и $\mathcal{D}$ неглаван ултрафилтер над $\mathbb{N}$, тада* $|A^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}| = |A|^{\aleph_0}$.

Доказ. Заиста, нека је $|A| = \kappa$ и нека је T_κ дрво пребројиве висине које се рачва у сваком чвору на κ грана.



Слика 3.3.

Даље, нека је $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, где су скупови A_i узајамно дисјунктни и сваки A_i је кардиналности κ. Нека су чворови дрвета T_κ на првом нивоу означени елементима скупа A_1, на другом нивоу елементима скупа A_2, и тако редом за сваки $n \in \mathbb{N}$. Тада свака грана дрвета T_κ одређује једну функцију $g\colon \mathbb{N} \to A$. Нека је Υ скуп овако одређених функција. Тада за $f, g \in \Upsilon$ и $f \neq g$ важи $f_{\mathcal{D}} \neq g_{\mathcal{D}}$, те како је $|\Upsilon| = |A|^{\aleph_0}$, тврђење следи. ■

Пример 3.3. Нека је $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ бесконачан природан број. Доказаћемо да у моделу ${}^*\mathbb{R}$ има континуум много нестандардних природних бројева мањих од H, односно $\big|[0, H]_{{}^*\mathbb{N}}\big| = 2^{\aleph_0}$.

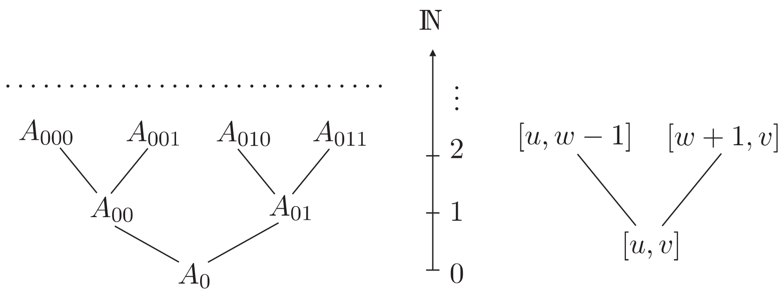
Наводимо два доказа. Први је више у духу нестандардне анализе и у њему се користи алгебарска структура реалних бројева, док други доказ показује да су неки аспекти заснивања анализе у блиској вези са бесконачним комбинаторним конструкцијама теорије скупова.

Доказ. 1° Нека је $T = \left\{ \frac{k}{H} \,\middle|\, 0 \leq k \leq H \right\}$. Доказујемо да је $\operatorname{st} T = [0,1]_{\mathbb{R}}$. Довољно је доказати да је сваки $x \in [0,1]_{\mathbb{R}}$ бесконачно близак неком $\frac{k}{H}$, $k \in {}^*\mathbb{N}$. Према Теореми 3.6. постоји хиперрационалан број $\frac{m}{n}$ такав да $x \approx \frac{m}{n}$, па $x \approx \frac{\frac{Hm}{n}}{H}$. Нека је $k = \left[\frac{Hm}{n}\right]$, где $[\cdot]$ представља $*$-продужење функције *цели део*. Тада $\frac{k}{H} \leq \frac{\frac{Hm}{n}}{H} \leq \frac{k}{H} + \frac{1}{H}$, одакле $x \approx \frac{k}{H}$. Према томе, пресликавање $\operatorname{st}\colon T \to [0,1]_{\mathbb{R}}$ је *на*, одакле следи $|T| = \big|[0,1]_{\mathbb{R}}\big| = 2^{\aleph_0}$. С друге стране, пресликавање $k \mapsto \frac{k}{H}$ је бијекција између скупова $[0,H]_{{}^*\mathbb{N}}$ и T, па $\big|[0,H]_{{}^*\mathbb{N}}\big| = 2^{\aleph_0}$. ■

Напомена. Скуп T бележимо и овако:

$$T = \left\{ 0, \frac{1}{H}, \frac{2}{H}, \ldots, 1 - \frac{1}{H}, 1 \right\}.$$

Доказ. 2° Користићемо идеју садржану у доказу Теореме 3.9.



Слика 3.4.

Нека је $A_0 = [0,H]_{{}^*\mathbb{N}}$. Ако су $u, v \in {}^*\mathbb{N}$ такви да је њихова разлика бесконачна, рецимо $v - u \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, онда постоји $w \in {}^*\mathbb{N}$ такав да је $w - u, v - w \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Користећи ову чињеницу можемо конструисати бесконачно бинарно дрво скупова A_s тако да важи $A_s = A_{s0} \cup A_{s1}$, $A_{s0} \cap A_{s1} = \emptyset$ и A_{s0}, A_{s1} су бесконачни скупови, s је коначан низ нула и јединица. Свака грана дрвета јесте један опадајући ланац подскупова од ${}^*\mathbb{N}$: $[x_0, y_0] \supseteq [x_1, y_1] \supseteq \ldots$, где $x_0 = 0$, $y_0 = H$. Следећа Лема је последица ω_1-засићености.

Лема 3.2. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[x_n, y_n] \neq \emptyset$.

Доказ. Нека је $x_n = f_{n\mathcal{D}}$, $y_n = g_{n\mathcal{D}}$, где $f_n, g_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Нека је за $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f \leq_{\mathcal{D}} g$ ако и само ако $f(n) \leq g(n)$ $\mathcal{D}$-с.с. (тј. $f_{\mathcal{D}} \leq g_{\mathcal{D}}$). Тада је релација $\leq_{\mathcal{D}}$ *предуређење* у $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, наиме $\leq_{\mathcal{D}}$ је рефлексивна и транзитивна релација. Сада се услов да је $[x_n, y_n]$ опадајући низ скупова може овако исказати:

$$f_0 \leq_{\mathcal{D}} f_1 \leq_{\mathcal{D}} \dots \cdots \leq_{\mathcal{D}} g_1 \leq_{\mathcal{D}} g_0.$$

Нека је за $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $S(f,g) = \{\, n \in \mathbb{N} \mid f(n) \leq g(n) \,\}$. Приметимо да је $f \leq_{\mathcal{D}} g$ ако и само ако $S(f,g) \in \mathcal{D}$. Даље, нека је S_n низ скупова индуктивно дефинисан на следећи начин:

$$S_0 = S(f_0, g_0), \quad S_{n+1} = S_n \cap S(f_{n+1}, g_{n+1}).$$

Тада $S_n \in \mathcal{D}$ и за $i \in S_n$ важи $f_n(i) \leq g_n(i)$. Такође је $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots$. Дакле, постоји функција $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ тако да важи $f_n(i) \leq h(i) \leq g_n(i)$ за $i \in S_n \setminus S_{n+1}$. Тада за све $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq_{\mathcal{D}} h \leq_{\mathcal{D}} g_n$, па $h_{\mathcal{D}} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[x_n, y_n]$. Овим је лема доказана.

Према леми, ако је G једна грана дрвета, онда $\bigcap G \neq \emptyset$. Ако је $x_G \in \bigcap G$, онда за $G \neq G'$, следи $x_G \neq x_{G'}$. Како пуно бинарно дрво има $2^{\aleph_0}$ грана, следи да је $\big|[0, H]_{{}^*\mathbb{N}}\big| \geq 2^{\aleph_0}$. ∎

Глава 4

Нестандардни реални бројеви

Видели смо у претходној глави како конструкција ултрапроизвода омогућује изградњу уређеног поља реалних бројева полазећи од низова рационалних бројева. Такође се реални бројеви могу добити као класе еквиваленције низова рационалних бројева по релацији

$$(a_n) \sim (b_n) \quad \text{ако и само ако} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0.$$

Притом се не води рачуна о брзини конвергенције. Слично, али суптилније и компликованије поступили смо у претходној глави приликом изградње неархимедског поља хиперреалних бројева ${}^*\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$. Пре свега, циљ нам је да раздвојимо низове по брзини конвергенције, тако да, на пример, низ са општим чланом $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ буде ближе нули од низа $b_n = \dfrac{1}{n}$. Друго, циљ нам је да низове што мање уједначавамо. Теоретски, најмање уједначавање је једнакост, али одмах видимо да је то прејако, јер добијени прстен $\mathbf{R}^{\mathbb{N}} = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot, 0, 1)$ није чак ни интегрални домен, а камоли жељено поље. Значи, потребно је неко финије уједначавање!

Уједначавањем низова реалних бројева по неглавном ултрафилтеру, како је то описано у претходној глави, изграђено је неархимедско поље хиперреалних бројева. Присетимо се најважнијих делова ове конструкције.

4.1 Уређено поље хиперреалних бројева

Нека је $\mathcal{D}$ неглавни ултрафилтер над скупом природних бројева $\mathbb{N}$. На прстену реалних низова $\mathbf{R}^{\mathbb{N}} = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot, 0, 1)$ дефинисана је релација

$\sim$ на следећи начин:

$$(a_n) \sim (b_n) \qquad \text{ако и само ако} \qquad \{\, n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n \,\} \in \mathcal{D}.$$

Према Теореми 3.1. и Леми 3.1. релација $\sim$ је конгруенција прстена $\mathbf{R}^{\mathbb{N}}$. Нека је $\langle a_n \rangle_{\mathcal{D}} = \{\, (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_n) \sim (b_n) \,\}$ класа еквиваленције низа (a_n) и ${}^*\mathbb{R} = \{\, \langle a_n \rangle_{\mathcal{D}} \mid (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\}$. Елементе скупа ${}^*\mathbb{R}$ зовемо хиперреални, а још чешће нестандардни реални бројеви. Наравно, ово је „збиран" назив за цео ${}^*\mathbb{R}$ јер Последица 3.1. или Теорема 4.2. тврде да је ${}^*\mathbf{R}$ поље које садржи изоморфну копију поља реалних бројева $\mathbf{R}$. На ${}^*\mathbb{R}$ операције $+$ и $\cdot$, и релација $\leq$ дефинисани су на следећи начин:

$$\begin{aligned}
\langle a_n \rangle_{\mathcal{D}} + \langle b_n \rangle_{\mathcal{D}} &\overset{\text{def}}{=} \langle a_n + b_n \rangle_{\mathcal{D}}, \\
\langle a_n \rangle_{\mathcal{D}} \cdot \langle b_n \rangle_{\mathcal{D}} &\overset{\text{def}}{=} \langle a_n \cdot b_n \rangle_{\mathcal{D}}, \\
\langle a_n \rangle_{\mathcal{D}} \leq \langle b_n \rangle_{\mathcal{D}} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{\, n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq b_n \,\} \in \mathcal{D}.
\end{aligned}$$

Из Примера 3.1. закључујемо да је или $\mathbf{1} = \langle 1, 0, 1, 0, \dots \rangle_{\mathcal{D}}$ или $\mathbf{0} = \langle 1, 0, 1, 0, \dots \rangle_{\mathcal{D}}$ и тиме смо избегли делитеље нуле (слично је за остале случајеве). Такође је очигледно $\left\langle \dfrac{1}{n^2} \right\rangle_{\mathcal{D}} < \left\langle \dfrac{1}{n} \right\rangle_{\mathcal{D}}$.

Уведимо формалне дефиниције најзначајнијих објеката у ${}^*\mathbb{R}$: бесконачно малих (инфинитезимале) и бесконачно великих величина.

Дефиниција 4.1. 1° Број $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$ је инфинитезимала ако и само ако $|\varepsilon| < \dfrac{1}{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.
2° Број $M \in {}^*\mathbb{R}$ је бесконачно велика величина ако и само ако је $\dfrac{1}{M}$ инфинитезимала.

Бесконачно мале означавамо са $\varepsilon, \delta, \varepsilon_1, \delta_1, \dots$, док бесконачно велике бројеве означавамо са слабо коришћеним великим словима H, M, K, $S, \dots$.

Једина инфинитезимала у $\mathbb{R}$ је нула, док бесконачно великих нема.

Пример 4.1. 1° Ако је $\varepsilon = \left\langle 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots \right\rangle_{\mathcal{D}}$, тада је $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < \dfrac{1}{n+1}$ за $\dfrac{1}{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1}, \dots \right\rangle_{\mathcal{D}}$, јер $\left\{ k \,\middle|\, \dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{n+1} \right\} = \{\, k \mid k \geq n+2 \,\}$ припада $\mathcal{D}$. Како ово важи за свако n, то је ε инфинитезимала.

2° Ако је $\delta = \left\langle 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots \right\rangle_{\mathcal{D}}$, тада је слично и δ инфинитезимала и притом $0 < \delta < \varepsilon$, што значи да имамо више различитих бесконачно малих. Приметимо и да је $\delta = \varepsilon^2$.

Доказаћемо следеће корисно тврђење.

Теорема 4.1. *Сваки нула низ реалних бројева одређује једну инфинитезималу.*

Доказ. Нека је (a_n) нула низ и $\varepsilon = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle_{\mathcal{D}}$. Тада за сваки природан број n постоји природан број m тако да важи следеће $\left\{ k \,\Big|\, |a_k| < \frac{1}{n+1} \right\} = \{ m, m+1, \dots \} \in \mathcal{D}$, одакле је $|\varepsilon| < \frac{1}{n+1}$. ∎

Обратно очигледно не важи. Довољно је узети бесконачан $A \notin \mathcal{D}$ и уочити низ $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{ако } n \notin A \\ 1, & \text{ако } n \in A \end{cases}$. Тада је $\langle a_1, a_2, \dots \rangle_{\mathcal{D}}$ инфинитезимала, а притом $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не постоји.

Теорема 4.2. 1° $\mathbb{R} \subsetneqq {}^*\mathbb{R}$.
2° ${}^*\mathbf{R}$ *није архимедско поље.*
3° ${}^*\mathbf{R}$ *није комплетно поље.*

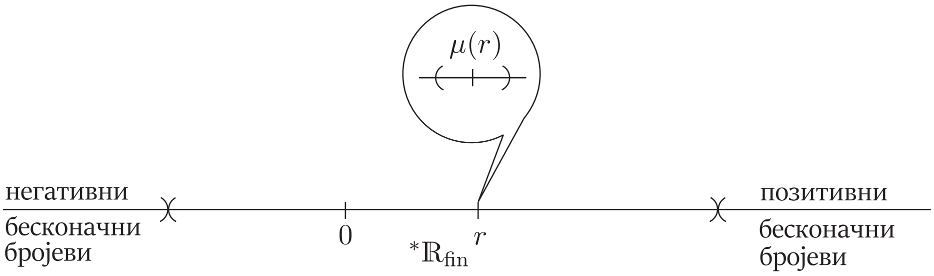
Доказ. Тврђење 1° следи непосредно из егзистенције инфинитезимала, док 2° следи из егзистенције бесконачно великих величина.

Тврђење 3° следи из 2° и чињенице да негација Архимедове аксиоме повлачи негацију аксиоме комплетности. Покажимо да, на пример, ограничен скуп $\mathbb{R}$ нема супремум. Претпоставимо супротно, нека је $a = \sup \mathbb{R}$. Тада a није коначан, јер би у супротном $a + 1 \in \mathbb{R}$, што је немогуће. Такође a није бесконачан, јер би иначе $a - 1$ такође била мајоранта скупа $\mathbb{R}$. ∎

Подсетимо се да $\mu(a) = \{ x \in {}^*\mathbb{R} \mid a \approx x \}$ представља монаду броја $a \in {}^*\mathbb{R}$, при чему $a \approx x$ ако и само ако је $a - x$ инфинитезимала. Скуп коначних елемената из ${}^*\mathbb{R}$ означавамо са ${}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$, тј.

$$ {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}} = \{ x \in {}^*\mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N}) |x| \le n \}. $$

Сада можемо да „нацртамо” хиперреалну праву.



Слика 4.1.

Слично Теореми 1.7. која се односи на уређена поља имамо следеће тврђење.

Теорема 4.3. 1° $^*\mathbf{R}_{\text{fin}} = (^*\mathbb{R}_{\text{fin}}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ *је уређен прстен коначних бројева.*
2° $(\mu(0), +, \cdot, \leq, 0, 1)$ *је максималан идеал прстена коначних бројева.*
3° $^*\mathbf{R}_{\text{fin}}/\mu(0) \cong \mathbf{R}$.

Доказ. 1° Ако $x, y \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$, тада постоје коначни природни бројеви n_x и n_y такви да је $|x| \leq n_x$ и $|y| \leq n_y$, отуда $|x+y| \leq |x| + |y| \leq n_x + n_y$ и $x + y \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$. Сличан је доказ и за множење. Видимо дакле да је $^*\mathbf{R}_{\text{fin}}$ подструктура од $^*\mathbf{R}$, па отуда наслеђује све аксиоме прстена (због њихове универзалности).

2° Ако $x, y \in \mu(0)$, тада за свако $n \in \mathbb{N}$, $|x| < \dfrac{1}{2n+2}$ и $|y| < \dfrac{1}{2n+2}$, отуда $|x+y| \leq |x| + |y| \leq \dfrac{1}{n+1}$, тј. $x + y \in \mu(0)$. Слично и $x \cdot y \in \mu(0)$. Према томе, $(\mu(0), +, \cdot, \leq, 0, 1)$ је подпрстен од $^*\mathbf{R}_{\text{fin}}$. Да бисмо показали да је идеал, уочимо $x \in \mu(0)$ и $y \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$. Тада постоји $m \in \mathbb{N}$ тако да је $|y| \leq m$. Даље, $|x| < \dfrac{1}{(n+1)m}$, отуда $|xy| = |x||y| < \dfrac{1}{n+1}$. Како ово важи за сваки природан број n, то $x \cdot y \in \mu(0)$. Уколико идеал $\mu(0)$ не би био максималан, тада постоји идеал M такав да је $\mu(0) \subsetneqq M \subsetneqq {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$. За $a \in M \setminus \mu(0)$ важи $\dfrac{1}{a} \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$, па $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1 \in M$. Одатле $^*\mathbb{R}_{\text{fin}} = M$, што је контрадикција.

3° Ако $a \notin \mu(0)$, тада је $\dfrac{1}{a} \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$ и $\dfrac{1}{a} + \mu(0)$ је инверз за $a + \mu(0)$. Отуда $^*\mathbf{R}_{\text{fin}}/\mu(0)$ је поље.

Ако ставимо, $a + \mu(0) \leq b + \mu(0)$ ако и само ако постоје x и y из $^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$ такви да $x \leq y$, $x \in a + \mu(0)$ и $y \in b + \mu(0)$, лако се проверава да је $^*\mathbf{R}_{\text{fin}}/\mu(0)$ и уређено поље.

Поље $^*\mathbf{R}_{\text{fin}}/\mu(0)$ је архимедско, јер за $a \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$, $a + \mu(0) \leq n + \mu(0)$ за неко $n \in \mathbb{N}$.

Свако уређено архимедско поље изоморфно је потпољу поља $\mathbf{R}$, па то важи и за $^*\mathbf{R}_{\text{fin}}/\mu(0)$. Како је $\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$, то за $x, y \in \mathbb{R}$ и $x \neq y$, $x + \mu(0) \neq y + \mu(0)$, тј. поља $\mathbf{R}$ и $^*\mathbf{R}_{\text{fin}}/\mu(0)$ су изоморфна. ■

Видели смо у доказу претходне теореме да скупови $x + \mu(0)$ за $x \in \mathbb{R}$ чине косете у $^*\mathbf{R}_{\text{fin}}/\mu(0)$, а сада ћемо видети да су то управо једини косети.

ТЕОРЕМА 4.4. *За свако $a \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$ постоји тачно једно $r \in \mathbb{R}$ и тачно једно $\varepsilon \in \mu(0)$ тако да је $a = r + \varepsilon$, тј. сваки коначан хиперреалан број је бесконачно близак јединственом реалном броју.*

Доказ. Нека $a \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$. Тада постоји $m \in \mathbb{N}$ тако да је $|a| \leq m$. Према томе, скуп $S = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a \,\}$ је непразан (због $-m \leq a$) и ограничен (са m) подскуп скупа $\mathbb{R}$. На основу потпуности поља реалних бројева, скуп S има супремум. Нека је $r = \sup S$. Тврдимо да је $r \approx a$. Ако претпоставимо да није $r \approx a$, следи да је $|r - a| > \dfrac{1}{n+1}$ за неко $n \in \mathbb{N}$. Отуда $r > r - \dfrac{1}{n+1} > a$ или $a > r + \dfrac{1}{n+1}$. У оба случаја следи да r није супремум. Према томе, мора бити $a \approx r$, тј. $a = r + \varepsilon$ за неко $\varepsilon \in \mu(0)$.

Докажимо јединственост. Нека је такође $a = r_1 + \varepsilon_1$. Отуда имамо да је $r - r_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon$, па $r - r_1 \in \mu(0)$. Како је нула једини реалан број у $\mu(0)$, то је $r = r_1$, па тиме и $\varepsilon = \varepsilon_1$. ■

Према овој теореми следећа дефиниција функције *стандардни део* је коректна.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2. Функцију $\mathrm{st}\colon {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}} \to \mathbb{R}$ такву да је $\mathrm{st}(a) = r$ ако и само ако $r \approx a$, $r \in \mathbb{R}$ и $a \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$, зовемо стандардни део.

Често се у литератури из практичних разлога пише $^\circ x = \mathrm{st}(x)$. Овако уведена функција стандардни део у потпуности одговара функцији st уведеној у 1. глави о уређеним пољима, па тиме правдамо што користимо исту ознаку. На пример, слично Теореми 1.10. имамо следеће тврђење.

ТЕОРЕМА 4.5. *Функција* st *је хомоморфизам прстена $^*\mathbf{R}_{\text{fin}}$ на поље $\mathbf{R}$, такав да је $\mathrm{st}(a) = a$ за $a \in \mathbb{R}$. Притом је $\ker(\mathrm{st}) = \mu(0)$.*

Доказ. Како је $\mathrm{st}(x) \approx x$ и $\mathrm{st}(y) \approx y$, а $\approx$ је конгруенција на ${}^*\mathbf{R}_{\mathrm{fin}}$, то $\mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y) \approx x + y$ и отуда $\mathrm{st}(x+y) = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)$. Слично је $\mathrm{st}(x \cdot y) = \mathrm{st}(x) \cdot \mathrm{st}(y)$.

Из дефиниције функције стандардни део следи да $x \leq y$ повлачи $\mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(y)$. Обрнуто не мора да важи. Очигледно, такође да из $\mathrm{st}(x) = 0$ следи $x \in \mu(0)$. ■

4.2 Скупови у Лајбницовом универзуму

Како је уобичајени математички језик логичко–скуповни, то ћемо проширивање у ${}^*\mathbf{R}$ објеката из $\mathbf{R}$ започети проширивањем подскупова од $\mathbb{R}$. Дакле, посматрање подскупова од $\mathbb{R}$ заменићемо посматрањем њихових $*$–слика.

Нека је
$$ {}^*X = \{\, x_{\mathcal{D}} = \langle x_n \rangle \mid (x_n) \in X^{\mathbb{N}} \,\} $$
слика скупа $X^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ при канонском пресликавању скупа $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ на ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$, где је $\mathcal{D}$ неглавни ултрафилтер над $\mathbb{N}$. За $x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ покажимо да важи:

$$ (1) \qquad x_{\mathcal{D}} = \langle x_n \rangle \in {}^*X \quad \text{акко} \quad x^{-1}(X) = \{\, i \in \mathbb{N} \mid x_i \in X \,\} \in \mathcal{D}, $$

а самим тим и ${}^*X = \big\{ x_{\mathcal{D}} \mid \{ i \in \mathbb{N} \mid x_i \in X \} \in \mathcal{D} \big\}$. Ако је $X = \emptyset$, (1) важи јер је ${}^*\emptyset = \emptyset$ и $\langle x_n \rangle \in {}^*\emptyset$ је истинито колико и $x^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{D}$. Нека је $X \neq \emptyset$ и $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ако $x_{\mathcal{D}} = \langle x_n \rangle \in {}^*X$, онда постоји елемент $y = (y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ такав да је $x_{\mathcal{D}} = y_{\mathcal{D}} = \langle y_n \rangle$. Како је $x^{-1}(X) \supseteq \{\, i \in \mathbb{N} \mid x_i = y_i \,\}$, то $x^{-1}(X) \in \mathcal{D}$. Ако је $x^{-1}(X) = M \in \mathcal{D}$, онда за $a \in X$ и $y = (y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ такав да је $y_n = \begin{cases} x_n, & n \in M \\ a, & n \notin M, \end{cases}$ биће $x_{\mathcal{D}} = y_{\mathcal{D}}$, а отуда и $x_{\mathcal{D}} \in {}^*X$.

За $X \subseteq \mathbb{R}$ и $x \in X$ је $\langle x, x, x, \dots \rangle \in {}^*X$ (јер $x^{-1}(X) = \mathbb{N} \in \mathcal{D}$) и, отуда имамо да је $X \subseteq {}^*X$ уз идентификовање скупа ${}^\sigma X = \{\, \langle x, x, x, \dots \rangle \mid x \in X \,\} \subseteq {}^*X$ са скупом X. У одељку 3.3 видели смо да за 1–1 пресликавање $x \in X^{\mathbb{N}}$ важи $x_{\mathcal{D}} \in {}^*X \setminus X$. Следећа теорема нам говори када ће ови скупови бити једнаки.

ТЕОРЕМА 4.6. *Скуп $X \subseteq \mathbb{R}$ је коначан ако и само ако је $X = {}^*X$.*

Доказ. Нека је скуп $X \subseteq \mathbb{R}$ коначан. Ако $x \in X^{\mathbb{N}}$, онда је $\bigcup_{y \in X} x^{-1}\{\, y \,\} = x^{-1}(X) = \mathbb{N} \in \mathcal{D}$, па је $x^{-1}\{\, y \,\} \in \mathcal{D}$ за неко $y \in X$ (јер је $\mathcal{D}$ ултрафилтер) и, отуда, $\langle x_n \rangle = \langle y, y, \dots \rangle \in X$, тј. $\langle x_n \rangle \in X$.

Нека $X \subseteq \mathbb{R}$ није коначан, и нека је $x \in X^{\mathbb{N}}$ неко 1–1 пресликавање. Тада за било које $x_0 \in X$ скуп $x^{-1}\{\, x_0 \,\}$ је коначан, па није елемент неглавног ултрафилтера $\mathcal{D}$, тј. $x_{\mathcal{D}} \neq x_0$. Отуда $x_{\mathcal{D}} \in {}^*X \setminus X$. ■

Овим је, уједно, доказано и да

(2) $$\langle x_n \rangle \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}, \quad \text{за 1–1 пресликавање } x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Такође су описани и бесконачни скупови: $X \subseteq \mathbb{R}$ је бесконачан ако и само ако је $X \subsetneqq {}^*X$.

Пресликавање $X \mapsto {}^*X$ скупа $\mathbf{P}(\mathbb{R})$ у скуп $\mathbf{P}({}^*\mathbb{R})$ има и следеће особине (за $X, Y \subseteq \mathbb{R}$):

Теорема 4.7.

1° ${}^*(X \cup Y) = {}^*X \cup {}^*Y$,	2° ${}^*(X \cap Y) = {}^*X \cap {}^*Y$,
3° $X \subseteq Y \Leftrightarrow {}^*X \subseteq {}^*Y$,	4° $X = Y \Leftrightarrow {}^*X = {}^*Y$,
5° ${}^*(\mathbb{R} \setminus X) = {}^*\mathbb{R} \setminus {}^*X$,	6° ${}^*(X \setminus Y) = {}^*X \setminus {}^*Y$.

Доказ. За скупове $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ имамо да важи једнакост $x^{-1}(X \cup Y) = x^{-1}(X) \cup x^{-1}(Y)$ и $x^{-1}(\mathbb{R} \setminus X) = \mathbb{N} \setminus x^{-1}(X)$, па је $x^{-1}(X \cup Y) \in \mathcal{D}$ ако и само ако $x^{-1}(X) \in \mathcal{D}$ или $x^{-1}(Y) \in \mathcal{D}$, $x^{-1}(\mathbb{R} \setminus X) \in \mathcal{D}$ ако и само ако $x^{-1}(X) \notin \mathcal{D}$ јер је $\mathcal{D}$ ултрафилтер. Тако је доказано 1° и 5°, а тиме, због $X \cap Y = \mathbb{R} \setminus ((\mathbb{R} \setminus X) \cup (\mathbb{R} \setminus Y))$ и $X \setminus Y = X \cap (\mathbb{R} \setminus Y)$, и 2° и 6°. Најзад, импликације ($\Leftarrow$) у 3° и 4° добијају се из

(3) $$X = \mathbb{R} \cap {}^*X, \quad \text{за} \quad X \subseteq \mathbb{R},$$

што ћемо управо доказати. Прво је $X \subseteq \mathbb{R} \cap {}^*X$ за $X \subseteq \mathbb{R}$, јер је $X \subseteq {}^*X$. Нека је $X \subseteq \mathbb{R}$ и $\langle x_n \rangle \in \mathbb{R} \cap {}^*X$. Тада $\langle x_n \rangle \in \mathbb{R}$ па је за неки реалан број r, $\langle x_n \rangle = \langle r, r, \dots \rangle$. Како је $\langle x_n \rangle \in {}^*X$, биће $\{\, i \in \mathbb{N} \mid r \in X \,\} \in \mathcal{D}$ и, отуда, $r \in X$ (јер $\emptyset \notin \mathcal{D}$), па $\langle x_n \rangle \in X$. ■

Посматрајмо директан производ подскупова од $\mathbb{R}$. Нека је pr_1 прва, а pr_2 друга пројекција производа скупова $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Тада је пресликавање $z \mapsto (\mathrm{pr}_1 \circ z, \mathrm{pr}_2 \circ z)$ скупа $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ у $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ изоморфизам, па поистовећујемо одговарајуће елементе:

(4) $$(x, y)_n = (x_n, y_n) \quad \text{за } x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ n \in \mathbb{N},$$

и поистовећујемо скупове $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. За $(x,y)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ и $(u,v)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ је:

$$\begin{aligned}
\langle (x,y)_n\rangle = \langle (u,v)_n\rangle \quad &\Leftrightarrow \quad \{\, n\in\mathbb{N} \mid (x_n,y_n)=(u_n,v_n)\,\}\in\mathcal{D}\\
&\Leftrightarrow \quad \{\, n\in\mathbb{N} \mid x_n=u_n\,\}\cap\{\, n\in\mathbb{N} \mid y_n=v_n\,\}\in\mathcal{D}\\
&\Leftrightarrow \quad \{\, n\in\mathbb{N} \mid x_n=u_n\,\},\ \{\, n\in\mathbb{N} \mid y_n=v_n\,\}\in\mathcal{D}\\
&\Leftrightarrow \quad (\langle x_n\rangle,\langle y_n\rangle)=(\langle u_n\rangle,\langle v_n\rangle).
\end{aligned}$$

Стога је пресликавање $\langle (x,y)_n\rangle\mapsto(\langle x_n\rangle,\langle y_n\rangle)$ скупа ${}^*(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ на скуп ${}^*\mathbb{R}\times{}^*\mathbb{R}$ изоморфизам, па опет поистовећујемо одговарајуће елементе

$$(5)\qquad \langle (x,y)_n\rangle = (\langle x_n\rangle,\langle y_n\rangle),\quad \text{за } x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ y\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

и тиме и скупове ${}^*(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ и ${}^*\mathbb{R}\times{}^*\mathbb{R}$. Више од тога тврди следећа теорема (погледати још једном и Теорему 3.7. претходне главе).

ТЕОРЕМА 4.8. *${}^*(X\times Y)={}^*X\times{}^*Y$ за $X\subseteq\mathbb{R}$, $Y\subseteq\mathbb{R}$.*

Доказ. Нека је $X\subseteq\mathbb{R}$, $Y\subseteq\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $y\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Тада имамо да је $(x,y)^{-1}(X\times Y)=x^{-1}(X)\cap y^{-1}(Y)$ и, отуда, $(x,y)^{-1}(X\times Y)\in\mathcal{D}$ ако и само ако $x^{-1}(X)\in\mathcal{D}$ и $y^{-1}(Y)\in\mathcal{D}$. ∎

Уопште, свака бинарна релација на $\mathbb{R}$, $\rho\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, има своју $*$–слику, бинарну релацију на ${}^*\mathbb{R}$, ${}^*\rho\subseteq{}^*\mathbb{R}\times{}^*\mathbb{R}$, одређену условом:

$$(6)\quad (\langle x_n\rangle,\langle y_n\rangle)\in{}^*\rho\Leftrightarrow\{\, n\in\mathbb{N}\mid (x_n,y_n)\in\rho\,\}\in\mathcal{D},\ x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ y\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

ПРИМЕР 4.2. Ако је $\rho=\{\,(x,x)\mid x\in\mathbb{R}\,\}$ једнакост на скупу $\mathbb{R}$, онда је ${}^*\rho=\{\,(x,x)\mid x\in{}^*\mathbb{R}\,\}$ једнакост на скупу ${}^*\mathbb{R}$. Слично, ако је скуп $\rho=\{\,(x,y)\mid x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},\ x\le y\,\}$ релација $\le$ скупа $\mathbb{R}$, тада је њена $*$–слика релација ${}^*\rho=\{\,(x,y)\mid x\in{}^*\mathbb{R},\ y\in{}^*\mathbb{R},\ x\le y\,\}$ скупа ${}^*\mathbb{R}$.

Такође, свака реална функција $f\colon X\to\mathbb{R}$, $X\subseteq\mathbb{R}$, тј. $f\subseteq X\times\mathbb{R}$, са условом $(\forall x\in X)(\exists_1 y\in\mathbb{R})(x,y)\in f$, има своју $*$–слику, функцију ${}^*f\subseteq{}^*(X\times\mathbb{R})={}^*X\times{}^*\mathbb{R}$ одређену условом:

$$\begin{aligned}
(\langle x_n\rangle,\langle y_n\rangle)\in{}^*f \quad &\Leftrightarrow \quad \{\, n\in\mathbb{N}\mid (x_n,y_n)\in f\,\}\in\mathcal{D}\\
&\Leftrightarrow \quad \{\, n\in\mathbb{N}\mid y_n=(f\circ x)_n\,\}\in\mathcal{D}\\
&\Leftrightarrow \quad \langle y_n\rangle=\langle (f\circ x)_n\rangle\,.
\end{aligned}$$

Отуда имамо, ако је $X\subseteq\mathbb{R}$ и $f\colon X\to\mathbb{R}$, онда је ${}^*f\colon{}^*X\to{}^*\mathbb{R}$ и ${}^*f(\langle x_n\rangle)=\langle (f\circ x)_n\rangle$ за свако $x\in X^{\mathbb{N}}$.

Теорема 4.9. $^*(f(X)) = {}^*f(^*X)$ *за* $X \subseteq \mathbb{R}$ *и* $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Доказ. Претходно увођење функције $^*f$ (погледати, још једном, одељак 3.2) даје:

$$\begin{aligned} {}^*f(^*X) &= \{\, {}^*f(\langle x_n\rangle) \,|\, x \in X^{\mathbb{N}}\,\} = \{\, \langle (f\circ x)_n\rangle \,|\, x \in X^{\mathbb{N}}\,\} \\ &= \{\, \langle y_n\rangle \,|\, y = f\circ x \in f(X)^{\mathbb{N}}\,\} = {}^*(f(X)). \end{aligned}$$

■

Нека је $\rho \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Инверзна релација, $\rho^{-1} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, одређена је условом:

$$(x,y) \in \rho^{-1} \quad \text{акко} \quad (y,x) \in \rho,\ x,y \in \mathbb{R}.$$

За $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ имамо:

$$\begin{aligned} (\langle x_n\rangle, \langle y_n\rangle) \in {}^*(\rho^{-1}) &\Leftrightarrow \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, (x_n, y_n) \in \rho^{-1}\,\} \in \mathcal{D} \\ &\Leftrightarrow \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, (y_n, x_n) \in \rho\,\} \in \mathcal{D} \\ &\Leftrightarrow (\langle y_n\rangle, \langle x_n\rangle) \in {}^*\rho \\ &\Leftrightarrow (\langle x_n\rangle, \langle y_n\rangle) \in ({}^*\rho)^{-1}. \end{aligned}$$

Отуда је $^*(\rho^{-1}) = (^*\rho)^{-1}$.

Од релација $\rho \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и $\tau \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ гради се релација $\tau\circ\rho \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ одређена условом:

$$(x,z) \in \tau\circ\rho \quad \text{акко} \quad (\exists y \in \mathbb{R})[(x,y) \in \rho \land (y,z) \in \tau],\ x,z \in \mathbb{R}.$$

За $x, z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ имамо:

$$\begin{aligned} (\langle x_n\rangle, \langle z_n\rangle) \in {}^*(\tau\circ\rho) &\Leftrightarrow \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, (x_n, z_n) \in \tau\circ\rho\,\} \in \mathcal{D} \\ &\Leftrightarrow \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, (\exists y_n \in \mathbb{R}) \\ &\qquad ((x_n, y_n) \in \rho \land (y_n, z_n) \in \tau)\,\} \in \mathcal{D}, \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}})\, [(\langle x_n\rangle, \langle y_n\rangle) \in {}^*\rho \land (\langle y_n\rangle, \langle z_n\rangle) \in {}^*\tau] \\ &\Leftrightarrow (\langle x_n\rangle, \langle z_n\rangle) \in {}^*\tau \circ {}^*\rho. \end{aligned}$$

Отуда је $^*(\tau\circ\rho) = {}^*\tau\circ{}^*\rho$, где је $\rho \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и $\tau \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Приметимо да ако је $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ и $g\colon Y \to \mathbb{R}$, онда је $g\circ f\colon f^{-1}(Y) \to \mathbb{R}$.

Посматрајмо пројекцију $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Како $^*\mathrm{pr}_1\colon {}^*\mathbb{R}\times{}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ и за $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ важи $^*\mathrm{pr}_1(\langle x_n\rangle, \langle y_n\rangle) = \langle (\mathrm{pr}_1 \circ (x,y))_n\rangle = \langle x_n\rangle$, то је $^*\mathrm{pr}_1$ прва пројекција скупа $^*\mathbb{R}\times{}^*\mathbb{R}$. Такође је $^*\mathrm{pr}_2$ друга пројекција скупа $^*\mathbb{R}\times{}^*\mathbb{R}$. Нека је $\rho \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Како је $\rho \subseteq \mathrm{pr}_1(\rho)\times\mathbb{R}$, биће

${}^*\rho \subseteq {}^*(\mathrm{pr}_1(\rho)) \times {}^*\mathbb{R}$ и, отуда, ${}^*\mathrm{pr}_1({}^*\rho) \subseteq {}^*(\mathrm{pr}_1(\rho))$. Ако је $x \in (\mathrm{pr}_1(\rho))^{\mathbb{N}}$ (за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $y_n \in \mathbb{R}$ са особином $(x_n, y_n) \in \rho$), онда је $(x, y) \in \rho$ за неко $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и, даље, $(\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle) \in {}^*\rho$ за неко $\langle y_n \rangle \in {}^*\mathbb{R}$, па је, најзад, $\langle x_n \rangle \in {}^*\mathrm{pr}_1({}^*\rho)$. Овим је доказано ${}^*(\mathrm{pr}_1(\rho)) \subseteq {}^*\mathrm{pr}_1({}^*\rho)$, што заједно са претходном инклузијом даје ${}^*(\mathrm{pr}_1(\rho)) = {}^*\mathrm{pr}_1({}^*\rho)$. Такође је ${}^*(\mathrm{pr}_2(\rho)) = {}^*\mathrm{pr}_2({}^*\rho)$. Из претходног непосредно проверавамо да за $\rho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ и $\rho(A) = \mathrm{pr}_1((A \times \mathbb{R}) \cap \rho)$ (*засек релације ρ дуж скупа A*), важи ${}^*(\rho(A)) = {}^*\rho({}^*A)$.

Помоћу пресликавања $\mathbb{R} \supseteq A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \supseteq B \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ изградимо пресликавање $h = (f, g)\colon A \cap B \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $h(x) = (f(x), g(x))$ за x из $A \cap B$, које је једнозначно одређено својим координатним пресликавањима $\mathrm{pr}_1 \circ h = f \cap ((A \cap B) \times \mathbb{R}) = f \restriction A \cap B$ и $\mathrm{pr}_2 \circ h = g \restriction A \cap B$. Тада је ${}^*h\colon {}^*A \cap {}^*B \to {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R}$, ${}^*\mathrm{pr}_1 \circ {}^*h = {}^*(\mathrm{pr}_1 \circ h) = {}^*(f \restriction A \cap B) = {}^*f \restriction {}^*A \cap {}^*B$ и ${}^*\mathrm{pr}_2 \circ {}^*h = {}^*g \restriction {}^*A \cap {}^*B$, тј. ${}^*(f, g) = ({}^*f, {}^*g)$. За $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \supseteq C \xrightarrow{H} \mathbb{R}$ дефинишимо $H(f, g) = H \circ (f, g)$, па имамо ${}^*(H(f, g)) = {}^*H({}^*f, {}^*g)$. Посебно, када је $H\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сабирање (множење) у $\mathbb{R}$, онда је ${}^*H$ сабирање (множење) у ${}^*\mathbb{R}$, те је

$$ {}^*(f+g) = {}^*f + {}^*g, \qquad {}^*(f \cdot g) = {}^*f \cdot {}^*g. \tag{8} $$

Слично, помоћу пресликавања $\mathbb{R} \supseteq A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \supseteq B \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ градимо и пресликавање $h\colon A \times B \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ помоћу $h(x, y) = (f(x), g(y))$ за $(x, y) \in A \times B$. Ово пресликавање називамо Декартовим[1)] производом пресликавања f и g, и бележимо $h = f \times g$. Како је $\mathrm{pr}_1 \circ h = f \circ \mathrm{pr}_1 \restriction A \times B$ и $\mathrm{pr}_2 \circ h = g \circ \mathrm{pr}_2 \restriction A \times B$, биће ${}^*\mathrm{pr}_1 \circ {}^*h = {}^*f \circ {}^*\mathrm{pr}_1 \restriction {}^*A \times {}^*B$ и ${}^*\mathrm{pr}_2 \circ {}^*h = {}^*g \circ {}^*\mathrm{pr}_2 \restriction {}^*A \times {}^*B$, те је ${}^*h\colon {}^*A \times {}^*B \to {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R}$ и ${}^*h(\xi, \eta) = ({}^*f(\xi), {}^*g(\eta))$ за $(\xi, \eta) \in {}^*A \times {}^*B$. Стављајући $h = f \times g$ и ако се скуп $h \subseteq A \times B \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ добија из скупа $f \times g \subseteq A \times \mathbb{R} \times B \times \mathbb{R}$ пермутацијом $(x, y, u, v) \mapsto (x, u, y, v)$ простора $\mathbb{R}^4$, претходним смо доказали

$$ {}^*(f \times g) = {}^*f \times {}^*g. \tag{9} $$

Пресликавање $\mathbb{R} \supseteq A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ је *растуће* ако је испуњен услов

$$ (\forall x \in A)(\forall y \in A)[x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)], $$

што је еквивалентно са

$$ (\forall (x, y) \in A \times A)[(x, y) \in {\le} \Rightarrow (f \times f)(x, y) \in {\le}], $$

[1)] René Descartes (1596–1650)

тј. $(f \times f)(\leq) \subseteq \leq$, а отуда је и $({}^*f \times {}^*f)({}^*\leq) \subseteq {}^*\leq$. Овим смо доказали следећу теорему.

Теорема 4.10. *Пресликавање* $\mathbb{R} \supseteq A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *је растуће ако и само ако је растуће* ${}^*f$.

Такође за пресликавања $\mathbb{R} \supseteq A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \supseteq A \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ важи:

$$\begin{aligned} f \leq g &\Leftrightarrow (f \times g)(A \times A) \subseteq \leq \\ &\Leftrightarrow ({}^*f \times {}^*g)({}^*A \times {}^*A) \subseteq {}^*\leq \\ &\Leftrightarrow {}^*f \, {}^*\!\leq {}^*g. \end{aligned}$$

За скуп $\mathbf{P}(X)$ свих подскупова скупа $X \subseteq \mathbb{R}$ важи (видети Теорему 4.9.): ${}^*(\mathbf{P}(X)) = {}^*\mathbf{P}({}^*X) \subseteq \mathbf{P}({}^*X)$. Важан део скупа $\mathbf{P}(\mathbb{R})$ чине интервали – скупови $A \subseteq R$ са особином:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})[\min\{x, y, z\} \in A \wedge \max\{x, y, z\} \in A \Rightarrow \{x, y, z\} \subseteq A].$$

Приметимо да су крајеви интервала $A \subseteq \mathbb{R}$ бројеви $\inf A$ и $\sup A$, које узимамо у скупу $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Шта се догађа са интервалима у $\mathbb{R}$ при пресликавању $*$?

Теорема 4.11. *Скуп* $A \subseteq \mathbb{R}$ *је интервал ако и само ако је*

$$(\forall x, y, z \in {}^*\mathbb{R})[\min\{x, y, z\} \in {}^*A \wedge \max\{x, y, z\} \in {}^*A \Rightarrow \{x, y, z\} \subseteq {}^*A].$$

Доказ. Нека је ρ релација $\leq$ у $\mathbf{R}$ (Пример 4.2.). Тада, скуп A је интервал ако и само ако има особину $\rho(A) \cap \rho^{-1}(A) \subseteq A$, тј. „свако $y \in \mathbb{R}$ које је $\geq$ од неког елемента из A ($y \in \rho(A)$) и $\leq$ од неког елемента из A ($y \in \rho^{-1}(A)$) налази се у A". Ово је еквивалентно са инклузијом ${}^*\rho({}^*A) \cap ({}^*\rho)^{-1}({}^*A) \subseteq {}^*A$. ■

Тако је, на пример, за $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \leq b$,

$$\begin{aligned} {}^*[a, b] &= [a, b]_{{}^*\mathbb{R}} = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\ {}^*]a, b[&=]a, b[_{{}^*\mathbb{R}} = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid a < x < b\}. \end{aligned}$$

Заиста, a и b се налазе у ${}^*[a, b]$, јер је $[a, b] \subseteq {}^*[a, b]$, па се на основу Теореме 4.11. ту налази и свако $x \in {}^*\mathbb{R}$ са особином $a \leq x \leq b$, тј. ${}^*[a, b] \supseteq \{x \in {}^*\mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$. С друге стране, за $x \in [a, b]^{\mathbb{N}}$

је $a \leq x_n \leq b$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је $\langle a, a, \dots \rangle \leq \langle x_n \rangle \leq \langle b, b, \dots \rangle$. Отуда је и ${}^*[a,b] \subseteq \{\, x \in {}^*\mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b \,\}$. Из следећих једнакости ${}^*]a,b[= {}^*([a,b] \setminus \{\, a,b \,\}) = {}^*[a,b] \setminus \{\, a,b \,\}$ следи друга једнакост.

Подсетимо се да је скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ интервал ако и само ако је *конвексан* ($\mathbb{R}$–*конвексан*), тј.

$$(\forall \lambda \in [0,1])\ [(1-\lambda)A + \lambda A \subseteq A]. \tag{10}$$

Слично је скуп $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ конвексан (${}^*\mathbb{R}$–конвексан) ако услов (10) важи за све $\lambda \in {}^*[0,1]$. Приметимо да су скупови $\mu(0)$ и $\gamma(0)$ ${}^*\mathbb{R}$–конвексни, али нису интервали. Сада Теорему 4.11. можемо да искажемо у лепшем облику.

ТЕОРЕМА 4.12. *Скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је $\mathbb{R}$–конвексан ако и само ако скуп ${}^*A$ је ${}^*\mathbb{R}$–конвексан.*

За сваки ограничен скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да важи $A \subseteq [-n,n]$. Отуда је ${}^*A \subseteq {}^*[-n,n] \subseteq \gamma(0)$. Овим условом се може окарактерисати ограниченост скупова у $\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 4.13. *Скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је ограничен ако и само ако је ${}^*A \subseteq \gamma(0)$.*

Доказ. Довољно је доказати импликацију ($\leftarrow$). Ако скуп A није ограничен, онда је $A_n = A \setminus [-n,n] \neq \emptyset$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је и $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ (аксиома избора). За $x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ имамо $\langle x_n \rangle \in {}^*A$ и $\langle x_n \rangle \geq \langle m, m, \dots \rangle$ за свако $m \in \mathbb{N}$. Отуда важи и $\langle x_n \rangle \in {}^*A \setminus \gamma(0)$. ■

Услов за ограниченост скупова из $\mathbb{R}$ можемо да искажемо и овако: *скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је ограничен ако и само ако је ограничен скуп ${}^*A \subseteq {}^*\mathbb{R}$.*

ПРИМЕР 4.3. Ни за једно $A \subseteq \mathbb{R}$ не важи ${}^*A = \mathbb{N}$. Заиста, скуп $\mathbb{N}$ је ограничен у ${}^*\mathbb{R}$ (било којим позитивним бесконачним хиперреалним бројем) и, ако би било $A \subseteq \mathbb{R}$ и ${}^*A = \mathbb{N}$, имали бисмо $A \subseteq \mathbb{N}$ (због $A \subseteq {}^*A$) и A је ограничен у $\mathbb{R}$, па би скуп A био коначан и отуда $A = {}^*A$, тј. коначан би био скуп $\mathbb{N}$. Наравно, не постоји ни скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ са особином ${}^*A = {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, јер би у супротном било ${}^*(\mathbb{N} \setminus A) = {}^*\mathbb{N} \setminus {}^*A = \mathbb{N}$.

У доказу Теореме 4.13. појавило се својство ω_1–засићености (видети Теорему 3.8.) редукованог ултрастепена ${}^*\mathbb{R}$. Општије тврђење даје следећа *аксиома увеличавања*.

ТЕОРЕМА 4.14. *Нека је* (X_n) *низ у* $\mathbf{P}(\mathbb{R})$. *Тада низ* (X_n) *има својство коначног пресека* ($\bigcap_{n\in K} X_n \neq \emptyset$ *за сваки коначан подскуп* $K \subseteq \mathbb{N}$) *ако и само ако је* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^*X_n \neq \emptyset$.

Доказ. Ако је (X_n) низ у $\mathbf{P}(\mathbb{R})$ са својством коначног пресека, онда су скупови $Y_n = X_0 \cap X_1 \cap \cdots \cap X_n$, $n \in \mathbb{N}$, непразни, и чине опадајући низ, па је $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^*Y_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^*X_n$ из Теореме 3.8. ■

Из претходног лако добијамо да се комутативност пресликавања $*\colon \mathbf{P}(\mathbb{R}) \to \mathbf{P}({}^*\mathbb{R})$ и коначног пресека (Теорема 4.7. 2°) не може да продужи на произвољне пресеке. Тако, на пример, за $X_n = \mathbb{R} \setminus [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, имамо $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \emptyset$, док је

$$\bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} {}^*X_n = \left\{\, x \in {}^*\mathbb{R} \,\middle|\, |x| > n \text{ за свако } n \in \mathbb{N} \,\right\} = {}^*\mathbb{R} \setminus \gamma(0)$$

далеко од празног скупа. Слично, за $a \in \mathbb{R}$ имамо с једне стране

$$\bigcap\nolimits_{\varepsilon\in\mathbb{R},\varepsilon>0}]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \left]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right[= \{\, a \,\},$$

а с друге

$$\bigcap\nolimits_{\varepsilon\in\mathbb{R},\varepsilon>0} {}^*]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} {}^*\left]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right[= \mu(a),$$

јер, прво, $\{\, \varepsilon \in \mathbb{R} \,|\, \varepsilon > 0 \,\} \supseteq \{\, \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$, и за свако $\varepsilon > 0$ из $\mathbb{R}$, постоји $n \in \mathbb{N}$ за које је $\frac{1}{n} < \varepsilon$, а тиме ${}^*]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\supseteq {}^*]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$, и, друго, за $x \in {}^*\mathbb{R}$ важи

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left[|x - a| < \frac{1}{n} \right] \Leftrightarrow x \approx a \Leftrightarrow x \in \mu(a).$$

Замењујући у Теореми 4.14. скуп X_n са $\mathbb{R} \setminus X_n$ и $\neq \emptyset$ са $= \emptyset$, добијамо следећу верзију аксиоме увеличавања.

ТЕОРЕМА 4.15. *Ако је* (X_n) *низ у* $\mathbf{P}(\mathbb{R})$, *тада је* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^*X_n = {}^*\mathbb{R}$ *ако и само ако је* $\bigcup_{n\in K} X_n = \mathbb{R}$ *за неки коначан скуп* $K \subseteq \mathbb{N}$.

Претходно тврђење можемо да искажемо и мало општије.

ТЕОРЕМА 4.16. *Нека је* (X_n) *низ скупова у* $\mathbf{P}(\mathbb{R})$ *и* Y *скуп у* $\mathbf{P}(\mathbb{R})$. *Тада је за неки коначан скуп* $K \subseteq \mathbb{N}$

1° $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^*X_n \supseteq {}^*Y$ *ако и само ако* $\bigcup_{n\in K} {}^*X_n \supseteq {}^*Y$;

2° $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^*X_n \subseteq {}^*Y$ *ако и само ако* $\bigcap_{n\in K} {}^*X_n \subseteq {}^*Y$.

Доказ. Тврђење 1° се добија из 4.14. јер за све $K \subseteq \mathbb{N}$ важи

$$\bigcup_{n\in K} {}^*X_n \supseteq {}^*Y \Leftrightarrow \bigcup_{n\in K} ({}^*X_n \cap {}^*Y) = {}^*Y \Leftrightarrow \bigcap_{n\in K} {}^*(Y \setminus (X_n \cap Y)) = \emptyset.$$

Замењујући у 1° скупове X_n и Y њиховим комлементима и добијене инклузије еквивалентним инклузијама између комплемената, долазимо до 2°. ∎

До сада смо разматрали само скупове у пољу $\mathbf{R}$ реалних бројева посматрајући их из ширег уређеног поља ${}^*\mathbf{R}$ хиперреалних бројева. Међутим, поље ${}^*\mathbf{R}$ садржи и оне скупове који нису проширење скупова из $\mathbb{R}$. Међу оваквим скуповима издвајају се скупови које зовемо интерналним. Ови „добри" скупови имају у пољу ${}^*\mathbf{R}$ улогу сличну оној коју имају отворени и затворени скупови у тополошком простору, или мерљиви скупови у простору са мером. На пример, уређено поље ${}^*\mathbf{R}$ није комплетно, тј. постоје непразни одозго ограничени скупови који немају супремум (такви су, на пример, $\mu(0)$ и $\gamma(0)$), али колекција интерналних скупова у ${}^*\mathbb{R}$ чува својство комплетности. Ова и друге особине интерналних скупова, које ћемо у наредном тексту да истакнемо, говоре нам о њиховој значајној улози у пољу ${}^*\mathbf{R}$.

Нека је (A_n), $n \in \mathbb{N}$ низ подскупова реалних бројева и нека је скуп $\langle A_n \rangle = \{\, x_{\mathcal{D}} \mid \{\, n \in \mathbb{N} \mid x_n \in A_n \,\} \in \mathcal{D} \,\}$. Дакле, скуп $\langle A_n \rangle$ хиперреалних бројева има особину:

$$x_{\mathcal{D}} = \langle x_n \rangle \in \langle A_n \rangle \quad \text{ако и само ако} \quad x_n \in A_n \ \text{с.с. (по } \mathcal{D}).$$

Дефиниција 4.3. (а) Скуп $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ је *интерналан* ако постоји низ (A_n) подскупова скупа реалних бројева тако да је $A = \langle A_n \rangle$.
(б) Скуп $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ је *екстерналан* ако није интерналан.

Приметимо да је својство интерналности скупова у ${}^*\mathbb{R}$ добро дефинисано. Заиста, из $x_{\mathcal{D}} \in \langle A_n \rangle$ и $x_{\mathcal{D}} = y_{\mathcal{D}}$ следи да следећи скупови $\{\, n \in \mathbb{N} \mid x_n \in A_n \,\}$ и $\{\, n \in \mathbb{N} \mid x_n = y_n \,\}$ припадају фамилији $\mathcal{D}$, а отуда и $\{\, n \in \mathbb{N} \mid y_n \in A_n \,\} \in \mathcal{D}$, тј. $y_{\mathcal{D}} \in \langle A_n \rangle$.

Пример 4.4. За хиперреалне бројеве $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ такве да је $a < b$, интервал $[a, b]_{{}^*\mathbb{R}} = \{\, x \in {}^*\mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$ је интерналан скуп. Наиме, реални низови (a_n) и (b_n) такви да је $a = \langle a_n \rangle$ и $b = \langle b_n \rangle$, одређују низ $\big([a_n, b_n]\big)$

интервала у $\mathbb{R}$ са особином $[a,b]_{^*\mathbb{R}} = \big\langle [a_n, b_n] \big\rangle$, јер за $x = \langle x_n \rangle \in {}^*\mathbb{R}$ важи:

$$\begin{aligned} x \in [a,b]_{^*\mathbb{R}} \quad &\Leftrightarrow \quad a \le x \wedge x \le b \\ &\Leftrightarrow \quad \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \le x_n \,\} \in \mathcal{D} \wedge \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \le b_n \,\} \in \mathcal{D} \\ &\Leftrightarrow \quad \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \le x_n \le b_n \,\} \in \mathcal{D} \\ &\Leftrightarrow \quad \langle x_n \rangle \in \big\langle [a_n, b_n] \big\rangle. \end{aligned}$$

Слично су и полузатворени интервали $[a,b[_{^*\mathbb{R}}$, $]a,b]_{^*\mathbb{R}}$ и отворени интервал $]a,b[_{^*\mathbb{R}}$ интернални скупови.

Пример 4.5. Ако је $X \subseteq \mathbb{R}$, тада је, овим скупом одређен, *стандардни скуп* ${}^*X$ интерналан, јер је ${}^*X = \langle A_n \rangle$, где је $A_n = X$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Отуда су ${}^*\mathbb{N}$, ${}^*\mathbb{Z}$, ${}^*\mathbb{Q}$ и ${}^*\mathbb{R}$ интернални скупови.

Истакнимо следеће својство интерналних скупова као директну последицу дефиниције.

Теорема 4.17. *Интернални скупови чине Булову алгебру скупова.*

Доказ. У односу на скуповне операције (унија, пресек и разлика скупова) интернални скупови чине поља скупова. Заиста, ако су скупови $A = \langle A_n \rangle$ и $B = \langle B_n \rangle$ интернални, тада је и $A \cup B = \langle A_n \cup B_n \rangle$ интерналан, јер за $x_{\mathcal{D}} = \langle x_n \rangle \in {}^*\mathbb{R}$ важи:

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{D}} \in A \cup B \quad &\Leftrightarrow \quad x_{\mathcal{D}} \in A \vee x_{\mathcal{D}} \in B \\ &\Leftrightarrow \quad \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \in A_n \,\} \in \mathcal{D} \vee \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \in B_n \,\} \in \mathcal{D} \\ &\Leftrightarrow \quad \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \in A_n \cup B_n \,\} \in \mathcal{D} \\ &\Leftrightarrow \quad x_{\mathcal{D}} \in \langle A_n \cup B_n \rangle. \end{aligned}$$

Слично су $A \cap B = \langle A_n \cap B_n \rangle$ и $A \setminus B = \langle A_n \setminus B_n \rangle$ интернални скупови. Како су и скупови ${}^*\mathbb{R}$ и $\emptyset$ интернални, то је ово поље скупова Булова алгебра. ■

Лако је видети да је и директан производ два интернална скупа у ${}^*\mathbb{R}$ интерналан скуп у ${}^*\mathbb{R}^2$. Теорема о интерналном дефиниционом принципу 11.4. описује, поред наведених, и друге конструкције интерналних скупова.

Једнакост два интернална скупа се описује на следећи начин.

Лема 4.1. *$\langle A_n\rangle = \langle B_n\rangle$ ако и само ако је $\{\, n\in\mathbb{N} \mid A_n = B_n \,\}\in\mathcal{D}$.*

Доказ. Очигледно је, на основу претходне теореме,

$$\langle A_n\rangle = \langle B_n\rangle \Leftrightarrow \langle A_n\rangle\triangle\langle B_n\rangle = \emptyset \Leftrightarrow \langle A_n\triangle B_n\rangle = \emptyset.$$

Посматрајмо, стога, случај $\langle C_n\rangle = \emptyset$ и покажимо да су скоро сви чланови низа (C_n) (по неглавном ултрафилтеру $\mathcal{D}$) празни скупови. Ако скуп $\{\, n\in\mathbb{N} \mid C_n = \emptyset \,\}\notin\mathcal{D}$, онда $\{\, n\in\mathbb{N} \mid C_n \neq \emptyset \,\}\in\mathcal{D}$. Изаберимо за свако n за које је $C_n\neq\emptyset$ неко $x_n\in C_n$, а за остале $n\in\mathbb{N}$ нека је $x_n = 0$. Тада је $\{\, n\in\mathbb{N} \mid x_n\in C_n \,\}\in\mathcal{D}$ и отуда $\langle x_n\rangle\in\langle C_n\rangle$, што је супротно претпоставци. ■

За сваки интерналан скуп $\langle A_n\rangle\neq\emptyset$ можемо да претпоставимо да је $A_n\neq\emptyset$ за свако $n\in\mathbb{N}$. Овим не умањујемо општост јер за низ (B_n) чији је општи члан $B_n = \begin{cases} A_n, & n\in M \\ \mathbb{R}, & n\notin M, \end{cases}$, где је $M = \{\, n\in\mathbb{N} \mid A_n\neq\emptyset \,\}\in\mathcal{D}$, важи $B_n\neq\emptyset$ за свако $n\in\mathbb{N}$ и $\langle A_n\rangle = \langle B_n\rangle$.

Такође, Лема 4.1. даје алтернативан начин изградње интерналних скупова. За низове (A_n) и (B_n) подскупова реалних бројева, нека је

$$(11)\qquad (A_n)\approx(B_n)\quad \text{ако и само ако}\quad \{\, n\in\mathbb{N} \mid A_n = B_n \,\}\in\mathcal{D}.$$

Лако се проверава да је релација $\approx$ релација еквиваленције скупа низова подскупова реалних бројева, сагласна са скуповним операцијама $\cap$, $\cup$ и $\setminus$. Сада је интерналан скуп $\langle A_n\rangle = (A_n)/\approx$ одговарајућа класа еквиваленције.

Већ смо напоменули да је на колекцији интерналних скупова у ${}^*\mathbb{R}$ очувана комплетност. Размотримо ово својство изблиза.

Теорема 4.18. *Ако је $A\subseteq{}^*\mathbb{R}$ интерналан, непразан и одозго ограничен скуп, тада постоји супремум скупа A.*

Доказ. Нека је $A = \langle A_n\rangle$ интерналан скуп и $a_{\mathcal{D}} = \langle a_n\rangle\in{}^*\mathbb{R}$ једна његова горња граница. Покажимо да $M = \{\, n\in\mathbb{N} \mid A_n\leq a_n \,\}\in\mathcal{D}$. Ако $M\notin\mathcal{D}$, тада за свако $n\notin M$ уочимо $x_n\in A_n$ тако да је $a_n < x_n$, а за остале $n\in M$ изаберимо $x_n = 0$. Лако се проверава да важи $\{\, n\in\mathbb{N} \mid a_n < x_n \,\}\in\mathcal{D}$, тј. $a_{\mathcal{D}} < \langle x_n\rangle$ и $\langle x_n\rangle\in A$, што је у контрадикцији са претпоставком да је $A\leq a_{\mathcal{D}}$.

За свако $n\in M$ скуп $A_n\subseteq\mathbb{R}$ је ограничен одозго и непразан (видети примедбу после Леме 4.1.), па према аксиоми супремума за поље реалних бројева, постоји $b_n = \sup A_n$. Нека је $b_{\mathcal{D}} = \langle b_n \rangle$, при чему је $b_n \in \mathbb{R}$ за $n \notin M$ изабрано произвољно.

Покажимо да је $b_{\mathcal{D}} = \sup A$. Из $\{ n \in \mathbb{N} \mid A_n \leq b_n \} \in \mathcal{D}$ следи да је $A \leq b_{\mathcal{D}}$. Ако је $A \leq c_{\mathcal{D}}$, тада су скупови $\{ n \in \mathbb{N} \mid A_n \leq c_n \}$ и $\{ n \in \mathbb{N} \mid b_n = \sup A_n \}$ елементи фамилије $\mathcal{D}$ и

$$\{ n \in \mathbb{N} \mid A_n \leq c_n \} \cap \{ n \in \mathbb{N} \mid b_n = \sup A_n \} \subseteq \{ n \in \mathbb{N} \mid b_n \leq c_n \},$$

а отуда и $\{ n \in \mathbb{N} \mid b_n \leq c_n \} \in \mathcal{D}$, тј. $b_{\mathcal{D}} \leq c_{\mathcal{D}}$. ■

Непосредна последица претходне теореме је да сваки непразан, интерналан и одоздо ограничен скуп у ${}^*\mathbb{R}$ има инфимум.

Пример 4.6. Скупови $\mu(0)$, ${}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$ и ${}^*\mathbb{R}^+_{\text{fin}}$ (скуп свих бесконачних позитивних хиперреалних бројева) су екстернални.

Докажимо да је $\mu(0) = \{ \varepsilon \in {}^*\mathbb{R} \mid \varepsilon \text{ је инфинитезимала} \}$ екстерналан скуп. Због $\mu(0) < 1$ довољно је показати да овај скуп нема супремум. Нека је $r = \sup \mu(0)$. Ако r није инфинитезимала, онда ни $\frac{r}{2}$ није инфинитезимала и $\mu(0) < \frac{r}{2}$, па r није супремум скупа $\mu(0)$. Ако је r инфинитезимала, тада постоји већа инфинитезимала од r, на пример, $r + \varepsilon$, где је $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \in \mu(0)$, што је, опет, супротно претпоставци да је r супремум скупа $\mu(0)$.

За остале наведене скупове на сличан начин се показује да су екстернални, што препуштамо читаоцу.

Истакнимо још неке значајне особине интерналних скупова.

Прво ћемо показати да за интерналан скуп $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ такав да је $\mathbb{N} \subseteq A$, важи и $A \cap ({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \neq \emptyset$. Следеће тврђење је општије.

Теорема 4.19. (Принцип преливања) *Ако интерналан скуп A садржи произвољно велике коначне бројеве, тада A садржи и бесконачне бројеве.*

Доказ. Случај када A нема горњу границу је очигледан. Ако A има горњу границу, тада постоји $a = \sup A$ који је бесконачан, јер је a већи од произвољног коначног броја. Тада постоји $x \in A$ такав да је $a - 1 < x \leq a$, тј. елемент x скупа A је бесконачан. ■

Покажимо и да за интерналан скуп $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ такав да ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \subseteq A$ важи $A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$. И ову чињеницу исказујемо општије.

ТЕОРЕМА 4.20. (ПРИНЦИП ПОДЛИВАЊА) *Ако интерналан скуп A садржи произвољно мале бесконачне бројеве, тада A садржи и коначне бројеве.*

Доказ. Уочимо скуп $A^+ = \{\, x \in A \,|\, x \geq 0 \,\}$. Овако дефинисан скуп $A^+ = A \cap [0, +\infty[_{^*\mathbb{R}}$ је интерналан као пресек два интернална скупа $\big([0, +\infty[_{^*\mathbb{R}} = \langle \mathbb{R}^+ \rangle\big)$. Како је скуп A одоздо ограничен, то постоји $a = \inf A$. Ако је број a бесконачан, тада скуп A садржи и бесконачне бројеве мање од a, што је супротно претпоставци да је a инфимум скупа A. Стога је a коначан број, па је оно $x \in A$ такво да је $a \leq x < a + 1$ коначан елемент скупа A. ■

Стога интерналан скуп $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ који садржи све позитивне реалне бројеве, садржи и неку инфинитезималу. Заиста, $A^+ = A \cap {}^*]0, +\infty[$ је интерналан, и ако је $A^+ \cap \mu(0) = \emptyset$, онда би свака строго позитивна инфинитезимала била доња граница овог скупа. Тада би постојао $\inf A$ који је, у ствари, $\sup \mu(0)$, што је немогуће. Такође, ако све позитивне инфинитезимале припадају интерналном скупу A, тада и неки реалан позитиван број припада скупу A. Наиме, скуп $A \cap {}^*]0, 1]$ је интерналан и ограничен одозго, па $a = \sup A \cap {}^*]0, 1]$ није инфинитезимала.

Својство добре уређености структуре $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ природних бројева наслеђују интернални подскупови скупа ${}^*\mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 4.21. *Сваки интерналан, непразан и одоздо ограничен скуп $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ садржи најмањи елемент.*

Доказ. Прво покажимо да за хиперприродне бројеве x, y важи неједнакост $|x - y| \geq 1$ или $x = y$. Заиста, из $x = \langle x_n \rangle$, $y = \langle y_n \rangle$, где $x_n \in \mathbb{N}$, $y_n \in \mathbb{N}$, и $\{\, n \in \mathbb{N} \,|\, |x_n - y_n| \geq 1 \vee x_n = y_n \,\} \in \mathcal{D}$, следи $\{\, n \in \mathbb{N} \,|\, |x_n - y_n| \geq 1 \,\} \in \mathcal{D}$ или $\{\, n \in \mathbb{N} \,|\, x_n = y_n \,\} \in \mathcal{D}$, тј. $|x - y| \geq 1$ или $x = y$.

Нека је $a = \inf A$, $a \in {}^*\mathbb{N}$. Тада, по дефиницији инфимума, постоји $x \in A$ тако да $a \leq x < a + \dfrac{1}{2}$. Сада је $|x - a| < \dfrac{1}{2}$, па је $x = a$, тј. a је најмањи елемент скупа A. ■

Непосредна последица је да сваки непразан, интерналан и одозго ограничен скуп $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ има максималан елемент.

Теорема 4.14. казује нам да се и својство компактности чува на колекцији интерналних скупова, тј. ако је A^i, $i \in \mathbb{N}$, низ интерналних скупова такав да је $\bigcap_{i \leq I} A^i \neq \emptyset$ за сваки (коначан) природан број $I \in \mathbb{N}$, тада је $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A^i \neq \emptyset$. Једна од последица овог еквивалента принципа ω_1–засићености је да сваки растући низ $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ интерналних скупова, такав да је $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ интерналан, јесте константан, тј. почев од неког $k \in \mathbb{N}$ биће $A_n = A_m$ за свако $n, m \geq k$.

ТЕОРЕМА 4.22. *Нека је A^i, $i \in \mathbb{N}$ низ интерналних скупова и нека је скуп $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A^i$ интерналан. Тада постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да је $A = \bigcup_{i\leq n} A^i$ (коначна унија).*

Доказ. Скупови $A \setminus A^i$, $i \in \mathbb{N}$ су интернални и $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(A \setminus A^i) = A \setminus (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A^i) = \emptyset$. Из ω_1–засићености следи да постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да је $\bigcap_{i\leq n}(A \setminus A^i) = \emptyset$, а отуда и $A = \bigcup_{i\leq n} A^i$. ∎

И појам интерналне функције уводи се на сличан начин, полазећи од низа реалних функција. Претпоставимо да имамо низ реалних функција $f_n\colon X_n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, и нека је $X = \langle X_n \rangle$. Функцију $f = \langle f_n \rangle\colon X \to {}^*\mathbb{R}$ дефинисану помоћу

$$f(x) = \langle f_n(x_n) \rangle, \;\; x = \langle x_n \rangle \in X$$

зовемо *интерналном функцијом*. Ако је $f\colon X \to {}^*\mathbb{R}$ интернална функција и $A = \langle A_n \rangle \subseteq X$ интерналан скуп, тада је и скуп $f(A) = \langle f_n(A_n) \rangle$ интерналан; отуда график интерналне функције је интерналан скуп. За $f_n = f$ и $X_n = X$, $n \in \mathbb{N}$, добијамо да је интернална функција дата са ${}^*f = \langle f, f, \ldots \rangle\colon {}^*X \to {}^*\mathbb{R}$ нестандардна верзија пресликавања f таквог да $f\colon X \to \mathbb{R}$. Нека занимљива својства интерналних функција биће изложена у 7. глави.

Међу интерналним скуповима најзначајнији су они који се, у одређеном смислу, понашају као коначни скупови поља реалних бројева. Ове скупове у ${}^*\mathbb{R}$, који су, дакле, бесконачни, али са комбинаторном структуром коначних скупова, зовемо *хиперконачним*.

ДЕФИНИЦИЈА 4.4. Интерналан скуп $A = \langle A_n \rangle$ је хиперконачан ако су скоро сви чланови низа (A_n) коначни скупови, што записујемо помоћу $\{\, n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{card}(A_n) < \infty \,\} \in \mathcal{D}$.

На овом месту, чињеницу да хиперконачни скупови у ${}^*\mathbb{R}$ имају комбинаторну структуру коначних скупова илустроваћемо следећим тврђењем.

ТЕОРЕМА 4.23. *Сваки хиперконачан скуп* $A = \langle A_n \rangle$ *има максимум и минимум.*

Доказ. Нека је $F = \{ n \in \mathbb{N} \mid A_n \text{ је коначан} \} \in \mathcal{D}$. Тада је елемент $a = \langle a_n \rangle$, где је $a_n = \max A_n$ ако $n \in F$ и било који елемент скупа A_n ако $n \notin F$, максималан елемент скупа A. Минималан елемент скупа A је на сличан начин одређен. ■

Нека је f интернална функција чији домен садржи хиперконачан скуп $A = \langle A_n \rangle$. Следећа дефиниција хиперконачне суме је коректна.

ДЕФИНИЦИЈА 4.5. $\sum_{a\in A} f(a) = \big\langle \sum_{a \in A_n} f_n(a) \big\rangle$.

Наводимо неке од очекиваних особина хиперконачне суме. Нека су f и g интерналне функције и нека су скупови $A \subseteq \operatorname{dom} f, \operatorname{dom} g$ и $B \subseteq \operatorname{dom} f$ хиперконачни.

ТЕОРЕМА 4.24. 1° $\sum_{a\in A}(f(a)+g(a)) = \sum_{a\in A} f(a) + \sum_{a\in A} g(a)$*;*
2° $\sum_{a\in A} \alpha \cdot f(a) = \alpha \cdot \sum_{a\in A} f(a), \quad \alpha \in {}^*\mathbb{R}$*;*
3° $\sum_{a\in A\cup B} f(a) = \sum_{a\in A} f(a) + \sum_{b\in B} f(b),$ *ако је* $A \cap B = \emptyset$*.*

Доказ. Изложићемо само доказ особине 1°; остале особине имају сличан доказ.

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in A}(f(a)+g(a)) &= \Big\langle \sum_{a\in A_n} (f_n(a)+g_n(a)) \Big\rangle \\
&= \Big\langle \sum_{a\in A_n} f_n(a) + \sum_{a\in A_n} g_n(a) \Big\rangle \\
&= \Big\langle \sum_{a\in A_n} f_n(a) \Big\rangle + \Big\langle \sum_{a\in A_n} g_n(a) \Big\rangle \\
&= \sum_{a\in A} f(a) + \sum_{a\in A} g(a).
\end{aligned}$$

■

Овај кратак осврт на хиперконачне скупове завршићемо следећим примерима.

ПРИМЕР 4.7. 1° Ако је $H = \langle a_n \rangle$ бесконачан природан број, тада је скуп $[0, H]_{^*\mathbb{N}} = \{ 0, 1, 2, \ldots, H \}$ хиперконачан скуп, јер имамо да је

$[0, H]_{^*\mathbb{N}} = \langle\{\,0, 1, 2, \ldots, a_n\,\}\rangle$. У Примеру 3.3. видели смо да је кардиналност овог скупа $2^{\aleph_0}$. Уопште, сваки бесконачан интерналан скуп има моћ континуума.

2° Ако је $H = \langle a_n\rangle \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, тада је *хиперконачни дискретни временски интервал* $T_H = \left\{\,0, \dfrac{1}{H}, \dfrac{2}{H}, \ldots, 1-\dfrac{1}{H}, 1\,\right\}$ хиперконачан скуп који има $H+1$ елемената $\left(T_H = \left\langle\left\{\,0, \dfrac{1}{a_n}, \dfrac{2}{a_n}, \ldots, 1-\dfrac{1}{a_n}, 1\,\right\}\right\rangle\right)$, јер је његова *интернална кардиналност*

$$|T_H| = \left\langle\left|\left\{\,0, \frac{1}{a_n}, \frac{2}{a_n}, \ldots, 1-\frac{1}{a_n}, 1\,\right\}\right|\right\rangle = \langle a_n + 1\rangle = H+1.$$

Користећи бијекцију $\varphi\colon [0, H]_{^*\mathbb{N}} \to T_H$ дату са $\varphi(K) = \dfrac{K}{H}$, где је $0 \le K \le H$, налазимо да је $\operatorname{card}(T_H) = 2^{\aleph_0}$. За свако $r \in [0,1]_{\mathbb{R}}$, постоји $1 \le K \le H$ такво да је $\dfrac{K-1}{H} \le r < \dfrac{K}{H}$, тј. $\operatorname{st}\left(\dfrac{K}{H}\right) = r$. Према томе, $\operatorname{st}\colon T_H \xrightarrow{\text{na}} [0,1]_{\mathbb{R}}$, што је и разлог због којег T_H зовемо хиперконачни дискретни временски интервал.

3° Ако имамо фамилију инфинитезимала $\{\,x_k \mid 0 \le k \le H\,\}$ која је хиперконачна, онда је њихова аритметичка средина (сума је хиперконачна!) $\frac{1}{H+1}\cdot\sum_{k=0}^{H} x_k$ такође инфинитезимала. Заиста, $\mu(0)$ са сваке две своје тачке садржи и све тачке између њих, а хиперконачна фамилија има максимум и минимум, па је $\min\{\,x_k \mid 0 \le k \le H\,\} \le \frac{1}{H+1}\cdot\sum_{k=0}^{H} x_k \le \max\{\,x_k \mid 0 \le k \le H\,\}$.

Дакле, сваки скуп X из $\mathbf{P}(\mathbb{R})$ раширили смо до ${}^*X \supseteq X$. Пресликавање $X \mapsto {}^*X$ је 1–1 и сагласно са инклузијом и операцијама над скуповима. Оно чува, као што смо видели, неке особине скупова, релација, операција. Помоћу $*$ шире се и структуре ширењем њихових скупова носача, релација и операција. Тако смо од поља реалних бројева $\mathbf{R}$, добили неархимедско поље ${}^*\mathbf{R}$.

Посматраћемо сада скупове у $\mathbb{R}^k$, $k \ge 1$ посматрањем њихових $*$–слика.

Степенујући $\mathbf{R}$ природним бројем $k \ge 1$ добијамо комутативан уређен прстен $\mathbf{R}^k$. Операције и релације у $\mathbf{R}^k$ дефинисане су по координатама (пројекције $\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_k$ степена $\mathbb{R}^k$ на $\mathbb{R}$ су морфизми структуре $\mathbf{R}^k$ на $\mathbf{R}$). Поредак у $\mathbf{R}^k$ задржава многе особине поретка из $\mathbf{R}$. Тако је, на пример, скуп $X \subseteq \mathbb{R}^k$ ограничен одозго ако и само ако су такве све његове пројекције. Ако X има супремум, онда је $\mathrm{pr}_i(\sup X) = \sup \mathrm{pr}_i X$ за све $i \le k$. Дијагонално утапање $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$, дато са $d(\xi) = (\xi, \xi, \ldots, \xi)$ је морфизам структуре $\mathbf{R}$ у $\mathbf{R}^k$. Сужавањем множења у $\mathbf{R}^k$ са $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ на $d(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^k$, добијамо множење скаларом, односно пресликавање $(\xi, x) \mapsto \xi x = (\xi x_1, \ldots, \xi x_k)$ скупа $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ у $\mathbb{R}^k$, а тиме од $\mathbf{R}^k$ добијамо векторски простор. Такође и пресликавања скупа $\mathbb{R}^k$ у $\mathbb{R}^k$ су k–ти декартовски степени одговарајућих пресликавања скупа $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$. Тако је, на пример, апсолутна вредност елемента $x = (x_1, \ldots, x_k)$ дата са $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_k|)$.

Полазећи од галаксије нуле у ${}^*\mathbb{R}$ $(\gamma(0))$, дефинишимо *галаксију нуле* у ${}^*\mathbb{R}^k$ $(\gamma^k(0))$, а затим и галаксију било ког $x \in {}^*\mathbb{R}^k$:

$$\gamma^k(0) = (\gamma(0))^k, \qquad \gamma^k(x) = x + \gamma^k(0).$$

Елемент x из ${}^*\mathbb{R}^k$ је *коначан* ако и само ако $x \in \gamma^k(0)$; он је *бесконачан* ако и само ако није коначан.

Из ових дефиниција и особина галаксије нуле у ${}^*\mathbf{R}$, добија се да је $\gamma^k(x) = \prod_{i=1}^k \gamma(\mathrm{pr}_i\, x)$, као и да је $\langle \gamma^k(0), +, \cdot, 0, 1\rangle$ потпрстен прстена ${}^*\mathbf{R}^k$. Ако су x и y из $\gamma^k(0)$, онда су ту и $\sup\{\, x, y \,\}$, као и свако z из ${}^*\mathbb{R}^k$ са особином $x \le z \le y$. Како је елемент x из ${}^*\mathbb{R}^k$ коначан ако и само ако су коначне све његове пројекције (налазе се у $[-n, n]$ за неко $n \in \mathbb{N}$) и како је ${}^*[-n, n]^k = ([-n, n]_{{}^*\mathbb{R}})^k$, то коначно имамо

$$\gamma^k(0) = \bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}} {}^*[-n, n]^k. \tag{12}$$

Коришћењем ове једнакости можемо да опишемо ограничене скупове у $\mathbb{R}^k$: Скуп $X \subseteq \mathbb{R}^k$ је ограничен ако и само ако је ${}^*X \subseteq \gamma^k(0)$ (сви елементи скупа ${}^*X$ су коначни).

Координатна веза између ограничености у $\mathbb{R}^k$ и ограничености у $\mathbb{R}$ може се приказати тако што заменимо низ неједнакости $|x_1| \le n$, $\ldots$, $|x_k| \le n$ неједнакошћу $\max(|x_1|, \ldots, |x_k|) \le n$. *Униформна норма* елемента $x = (x_1, \ldots, x_k)$ из $\mathbb{R}^k$ је реалан број

$$\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_k|).$$

За све x, y из $\mathbb{R}^k$ и ξ из $\mathbb{R}$ важи: $\|x\| \ge 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\|\xi x\| = |\xi| \cdot \|x\|$, $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, $0 \le x \le y \Rightarrow \|x\| \le \|y\|$, $\|\,|x|\,\| = \|x\|$, $\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$, као и $\|(1, \ldots, 1)\| = 1$.

Пресликавање $x \mapsto \|x\|$ скупа $\mathbb{R}^k$ у $\mathbb{R}$ има $*$–проширење, пресликавање $x \mapsto {}^*\|x\| = \max({}^*|x_1|, \ldots, {}^*|x_k|)$ скупа ${}^*\mathbb{R}^k$ у ${}^*\mathbb{R}$, где је ${}^*|x_i|$ апсолутна вредност елемента x_i у ${}^*\mathbb{R}$ и максимум се такође рачуна у ${}^*\mathbb{R}$.

Да би се то увидело, довољно је доказати да је $*$–проширење бинарне операције $(x, y) \mapsto \max(x, y)$ скупа $\mathbb{R}$ максимум уређеног пара из ${}^*\mathbb{R}$, што ћемо и учинити. Ако су x и y из $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, онда је за свако $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_n \leq y_n \quad &\Leftrightarrow \quad \max(x_n, y_n) = y_n \\ &\Leftrightarrow \quad (\max(x, y))_n = y_n, \end{aligned}$$

одакле добијамо

$$\begin{aligned} \max(\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle) = \langle y_n \rangle \quad &\Leftrightarrow \quad \langle x_n \rangle \leq \langle y_n \rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \langle \max(x, y)_n \rangle = \langle y_n \rangle. \end{aligned}$$

Кад је $x \in {}^*\mathbb{R}^k$ и $n \in \mathbb{N}$, тада је услов $x \in {}^*[-n, n]^k$ еквивалентан са ${}^*\|x\| \leq n$, те је x коначан ако и само ако је ${}^*\|x\|$ коначан. Често ћемо писати $\|x\|$ уместо ${}^*\|x\|$.

Слично галаксијама посматраћемо монаде. Полазаћи од монаде нуле у ${}^*\mathbb{R}$ ($\mu(0)$), дефинишимо *монаду нуле* у ${}^*\mathbb{R}^k$ ($\mu^k(0)$), а затим и монаду било ког $x \in {}^*\mathbb{R}^k$:

$$\mu^k(0) = (\mu(0))^k, \qquad \mu^k(x) = x + \mu^k(0).$$

Елемент x из ${}^*\mathbb{R}^k$ је *бесконачно мали* ако и само ако $x \in \mu^k(0)$.

Из ових дефиниција и особина монаде нуле у ${}^*\mathbb{R}$, добија се да је $\mu^k(x) = \prod_{i=1}^k \mu(\mathrm{pr}_i\, x)$, као и да је структура $(\mu^k(0), +, \cdot, 0, 1)$ идеал прстена $({}^*\mathbb{R}^k_{\mathrm{fin}}, +, \cdot, 0, 1)$. Ако су x и y из $\mu^k(0)$, онда су ту и $\max\{\, x, y \,\}$, као и свако z из ${}^*\mathbb{R}^k$ са особином $x \leq z \leq y$.

Када је $x \in {}^*\mathbb{R}^k$, тада су еквивалентни следећи услови:

(1) елемент x је бесконачно мала;

(2) све пројекције елемента x су бесконачно мале;

(3) $\|x\|$ је бесконачно мала.

Из еквиваленције (1) и (3) добијамо

$$\mu^k(0) = \bigcap\nolimits_{n=1}^{\infty} {}^*\Big[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \Big]^k, \tag{13}$$

те, на основу Теореме 4.16. за све $X \subseteq \mathbb{R}^k$ важи

$$\mu^k(0) \subseteq {}^*X \quad \text{ако и само ако} \quad \Big[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \Big]^k \subseteq X \ \text{ за неко } n \in \mathbb{N}.$$

Ако је $x \neq 0$ из ${}^*\mathbb{R}^k$, онда је $\|x\|$ бесконачно мала ако и само ако је $\dfrac{1}{\|x\|} = \left\| \dfrac{x}{\|x\|^2} \right\|$ бесконачно велика, па пермутација $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|^2}$ скупа ${}^*\mathbb{R}^k \setminus \{ 0 \}$ (инверзна себи самој) пресликава скуп бесконачно малих различитих од нуле (у ${}^*\mathbb{R}^k$) на скуп бесконачно великих и обрнуто.

На ${}^*\mathbb{R}^k$ уводимо и бинарну релацију $\approx$ (*бесконачно блиско*):

$$x \approx y \quad \text{ако и само ако} \quad x - y \in \mu^k(0).$$

Услови

- $x \approx y$,
- $\mathrm{pr}_i\, x \approx \mathrm{pr}_i\, y$ за све $i = 1, \dots, k$ и
- $\|x - y\| \approx 0$

су међусобно еквивалентни. Помоћу $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|$ добијамо да из $x \approx y$ следи $\|x\| \approx \|y\|$.

Бинарна релација $\sim$ (*коначно блиско*) скупа ${}^*\mathbb{R}^k$ дата са

$$x \sim y \quad \text{ако и само ако} \quad x - y \in \gamma^k(0),$$

има сличне (дуалне) особине.

Стандардни (*архимедски*) *део* на $\gamma^k(0)$ дефинишемо као k–ти декартовски степен стандардног дела на $\gamma(0)$ у ${}^*\mathbb{R}$:

$$\mathrm{st}^k \colon \gamma^k(0) \to \mathbb{R}^k, \quad \mathrm{st}^k(x_1, \dots, x_k) = (\mathrm{st}\, x_1, \dots, \mathrm{st}\, x_k).$$

Тада је st^k морфизам уређеног прстена $\langle \gamma^k(0), +, \cdot, 0, 1 \rangle$ у $\mathbf{R}^k$ чије је језгро $\mu^k(0)$, а чије непокретне тачке чине скуп $\mathbb{R}^k$.

Посматране релације на ${}^*\mathbb{R}^k$ (бесконачно мало, бесконачно велико, бесконачно блиско, коначно) су, дакле, k–ти декартовски степени одговарајућих релација на ${}^*\mathbb{R}$. Свако x из $\bigcup_{n=1}^{\infty} {}^*\mathbb{R}^n$ налази се тачно у једном ${}^*\mathbb{R}^k$, па ћемо у записима $\gamma^k(0)$, $\mu^k(0)$, $\mathrm{st}^k(0)$ често изостављати k.

Знамо да је у $\mathbb{R}$ производ бесконачно мале и коначне величине опет бесконачно мала. На питање шта се збива са бесконачним (великим и малим) у $\mathbb{R}$ при множењу, одговор дају асимптотске релације: потчињен ($\preccurlyeq$), сличан ($\asymp$) и занемарљив ($\ll$). За разлику од претходних, асимптотске релације $\preccurlyeq$, $\asymp$ и $\ll$ продужују се (са ${}^*\mathbb{R}$) на читав скуп $\bigcup_{n=1}^{\infty} {}^*\mathbb{R}^n$, користећи униформну норму. Нека су x и y елементи скупа $\bigcup_{n=1}^{\infty} {}^*\mathbb{R}^n$ и то, на пример, $x \in {}^*\mathbb{R}^k$, $y \in {}^*\mathbb{R}^l$.

ДЕФИНИЦИЈА 4.6. 1° $x \preccurlyeq y$ ако и само ако за неко $\xi \in \gamma(0)$ важи $\|x\| = \|\xi y\|$;
2° $x \asymp y$ ако и само ако за неко $\xi \in \gamma(0) \setminus \mu(0)$ важи $\|x\| = \|\xi y\|$;
3° $x \ll y$ ако и само ако за неко $\xi \in \mu(0)$ важи $\|x\| = \|\xi y\|$.

Видимо да елементе x и y из $\bigcup_{n=1}^{\infty} {}^*\mathbb{R}^n$ асимптотски упоређујемо тако што у ${}^*\mathbb{R}$ упоређујемо њихове униформне норме. Читаоцу препуштамо да се увери да су основна правила асимптотског рачуна која се односе на релације $\preccurlyeq$, $\asymp$ и $\ll$ (видети 1. главу) очувана.

4.3 Топологија нестандардне праве

Кренимо од почетних операција Анализе, sup и inf, које се јављају у њеном заснивању у $\mathbf{R}$.

Нека је $X \subseteq \mathbb{R}$ и нека постоје $a = \inf X$ и $b = \sup X$. Тада a и b одређују границе до којих могу доћи тачке скупа X, тј. чине „доњу и горњу границу" његовог простирања у $\mathbb{R}$. Налазе се тамо где престаје особина „бити у X" тачке из $\mathbb{R}$; дакле, тамо где би могло нешто занимљиво да се догоди! Ове тачке одређују најмањи интервал који садржи скуп X (конвексни омотач скупа X): $]a, b[\, \cup (X \cap \{\, a, b\,\})$. Приметимо да за $A \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ важи:

$$\sup A = a \Leftrightarrow (\forall y \in \mathbb{R})\ [A \leq y \Leftrightarrow a \leq y]. \tag{14}$$

Како је $A \leq y \Leftrightarrow (\forall x \in A)\ [x \leq y] \Leftrightarrow \neg(\exists x \in A)\ [x > y] \Leftrightarrow \neg y \in {>}(A)$, где је ${>}(A)$ засек релације $>$ дуж скупа A, имамо

$$\begin{aligned} \sup A = a \quad &\Leftrightarrow \quad {>}(A) = {>}\{\, a\,\} \\ &\Leftrightarrow \quad {}^*{>}({}^*A) = {}^*{>}(\{\, a\,\}), \quad {}^*{>} \text{ је релација } > \text{ на } {}^*\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \sup {}^*A = a. \end{aligned}$$

Одговарајуће дуално тврђење за inf такође важи јер су структуре $(\mathbb{R}, \leq)$ и $(\mathbb{R}, \geq)$ изоморфне (пермутација $x \mapsto -x$ скупа $\mathbb{R}$ је један изоморфизам) и $\inf_{(\mathbb{R},\leq)} X = \sup_{(\mathbb{R},\geq)} X$.

Приметимо да се из правила $\sup A = a \Leftrightarrow {>}(A) = {>}(\{a\})$ лако добија следећа особина супремума.

ТЕОРЕМА 4.25. *Нека је* $(A_i)_{i\in I}$ *фамилија непразних скупова у* $\mathbf{P}(\mathbb{R})$, $(a_i)_{i\in I}$ *фамилија у* $\mathbb{R}$, $\sup A_i = a_i$ *за* $i \in I$ *и* $a \in \mathbb{R}$. *Тада је* $\sup \bigcup_{i\in I} A_i = a \Leftrightarrow$

$\sup_{i\in I} a_i = a$, *тј.* $\sup\bigcup_{i\in I} A_i = \sup_{i\in I}(\sup A_i)$, *када постоји један од ова два супремума.*

Доказ. Једнакост $\sup\bigcup_{i\in I} A_i = \sup\{\, a_i \mid i\in I\,\}$ добијамо из низа једнакости $>\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} >(A_i) = \bigcup_{i\in I} >(\{\, a_i\,\}) = >(\{\, a_i \mid i\in I\,\})$.■

Операцијом inf дефинисана је једна од првих функција у Анализи. *Растојање тачке* $x\in\mathbb{R}$ *од* непразног *скупа* $A\subseteq\mathbb{R}$ је

$$d(x,A) = \inf\{\, |x-a| \mid a\in A\,\}. \tag{15}$$

За функцију $d_A\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, где је $\emptyset\neq A\subseteq\mathbb{R}$, дату са $d_A(x) = d(x,A)$ важи:

1° $d_A\geq 0$,

2° $\emptyset\neq A\subseteq B\subseteq R\Rightarrow d_A\geq d_B$,

3° $d_{\bigcup_{i\in I}A_i} = \inf_{i\in I} d_{A_i}$, за сваку фамилију $(A_i)_{i\in I}$ непразних скупова у $\mathbf{P}(\mathbb{R})$.

Истакнимо, прво, основне дескриптивне особине скупова тополошког простора генерисаног метриком $d(x,y) = |x-y|$ реалне праве користећи притом језик поља ${}^*\mathbf{R}$. У даљем ће ε и δ бити ознаке за позитивне реалне бројеве.

Тачка $a\in\mathbb{R}$ је *адхерентна тачка* скупа $A\subseteq\mathbb{R}$ ако је испуњено $(\forall\varepsilon)(A\cap]a-\varepsilon,a+\varepsilon[\neq\emptyset)$, што је еквивалентно са

$$(\forall n\geq 1)\Big(A\cap\Big]a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}\Big[\neq\emptyset\Big),\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Скуп свих адхерентних тачака скупа A је *адхеренција* или *затворење* скупа A, у ознаци $\mathrm{Cl}\,A$.

ТЕОРЕМА 4.26. *Ако је* $A\subseteq\mathbb{R}$ *и* $a\in\mathbb{R}$, *тада* $a\in\mathrm{Cl}\,A$ *ако и само ако* ${}^*A\cap\mu(a)\neq\emptyset$.

Доказ. Из Теореме 4.14. и услова $(\forall n\geq 1)\Big(A\cap\Big]a-\dfrac{1}{n},a+\dfrac{1}{n}\Big[\neq\emptyset\Big)$ имамо

$$\begin{aligned}\emptyset\neq\bigcap\nolimits_{n\geq 1}\Big({}^*A\cap{}^*\Big]a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}\Big[\Big) &=\\ = {}^*A\cap\bigcap\nolimits_{n\geq 1}{}^*\Big]a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}\Big[&= {}^*A\cap\mu(a).\end{aligned}$$

■

Ако је $a \in \mathrm{Cl}\, A$, онда $a \in \gamma(0)$, и такође $\gamma(0) = \mathbb{R} + \mu(0)$, па отуда

$$\begin{aligned} {}^*A \cap \mu(a) \neq \emptyset &\Leftrightarrow (\exists x \in {}^*A)\, x \approx a \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in {}^*A \cap \gamma(0))\, x \approx a \\ &\Leftrightarrow a \in \mathrm{st}({}^*A \cap \gamma(0)), \end{aligned}$$

и отуда $\mathrm{Cl}\, A = \mathrm{st}({}^*A \cap \gamma(0))$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

Скуп $A \subseteq R$ је *затворен* ако садржи све своје адхерентне тачке ($A \supseteq \mathrm{Cl}\, A$) што је, због $A \subseteq \mathrm{Cl}\, A$, еквивалентно са $A = \mathrm{Cl}\, A$, па имамо следећу карактеризацију затворених скупова.

ТЕОРЕМА 4.27. *Скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је затворен ако и само ако за скуп A важи једнакост $A = \mathrm{st}({}^*A \cap \gamma(0))$.*

Скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је *околина* тачке $a \in \mathbb{R}$ (a је *унутрашња тачка* скупа A) ако садржи бар један отворен интервал којем припада тачка a, односно има следећу особину $(\exists \varepsilon)(\,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\, \subseteq A\,)$. Са $\mathcal{O}_a$ означавамо скуп свих околина тачке a. *Унутрашњост* скупа A, у ознаци $\mathrm{Int}\, A$, јесте скуп свих његових унутрашњих тачака. Како је

$$\begin{aligned} (\exists \varepsilon)(\,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\, \subseteq A\,) &\Leftrightarrow \neg(\forall \varepsilon)(\,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\, \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset\,) \\ &\Leftrightarrow \neg(a \in \mathrm{Cl}(\mathbb{R} \setminus A)) \\ &\Leftrightarrow \neg({}^*(\mathbb{R} \setminus A) \cap \mu(a) \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow \mu(a) \subseteq {}^*A, \end{aligned}$$

то имамо $\mathrm{Int}\, A = \mathbb{R} \setminus \mathrm{Cl}(\mathbb{R} \setminus A)$, тј. $\mathbb{R} \setminus \mathrm{Int}\, A = \mathrm{Cl}(\mathbb{R} \setminus A)$ и

ТЕОРЕМА 4.28. *Ако је $A \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$, тада $a \in \mathrm{Int}\, A$ ако и само ако $\mu(a) \subseteq {}^*A$.*

Ако је $a \in \mathbb{R}$, онда

- $A \in \mathcal{O}_a \wedge B \in \mathcal{O}_a \Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{O}_a$,
- $A \in \mathcal{O}_a \wedge A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{O}_a$,
- $\emptyset \notin \mathcal{O}_a$ и $\mathbb{R} \in \mathcal{O}_a$,

па видимо да је $\mathcal{O}_a$ филтер над $\mathbb{R}$.

Скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је *отворен* ако је околина сваке своје тачке, односно $A \subseteq \mathrm{Int}\, A$, што је, због $A \supseteq \mathrm{Int}\, A$, еквивалентно са $A = \mathrm{Int}\, A$, па имамо следећу карактеризацију отворених скупова.

ТЕОРЕМА 4.29. *Скуп* $A \subseteq \mathbb{R}$ *је отворен ако и само ако* $A + \mu(0) \subseteq {}^*A$.

Тачка адхеренције и скупа A и скупа $\mathbb{R} \setminus A$ је *тачка руба* скупа A. Скуп свих оваквих тачака је *руб* скупа A, у ознаци $\beta(A)$. Отуда имамо:

$$a \in \beta(A) \Leftrightarrow {}^*A \cap \mu(a) \neq \emptyset \wedge ({}^*\mathbb{R} \setminus {}^*A) \cap \mu(a) \neq \emptyset, \tag{16}$$

као и

$$\beta(A) = \mathrm{st}({}^*A \cap \gamma(0)) \cap \mathrm{st}(({}^*\mathbb{R} \setminus {}^*A) \cap \gamma(0)), \quad A \subseteq \mathbb{R}. \tag{17}$$

Скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је *компактан* ако се сваки отворени покривач скупа A може да редукује на коначан потпокривач. С друге стране, скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је компактан ако за ма коју фамилију затворених скупова $\{ F_i \mid i \in I \}$ такву да фамилија $\{ F_i \cap A \mid i \in I \}$ има особину коначног пресека, важи $\bigcap_{i \in I}(F_i \cap A) \neq \emptyset$. Нестандардну карактеризацију компактних скупова даје следеће тврђење.

ТЕОРЕМА 4.30. *Скуп* $A \subseteq \mathbb{R}$ *је компактан ако и само ако је* ${}^*A \subseteq \gamma(0)$ *и* $\mathrm{st}({}^*A) = A$.

Доказ. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ компактан скуп. Очигледно је ${}^*A \subseteq \gamma(0)$. Претпоставимо $\mathrm{st}({}^*A) \neq A$, тј. нека за неко $x \in {}^*A$ важи $(\forall a \in A)[x \notin \mu(a)]$. Тада за било које $a \in A$ постоји околина $X_a \in \mathcal{O}_a$ таква да $x \notin {}^*X_a$. Тако добијени покривач $\{ X_a \mid a \in A \}$ скупа A редукујемо на коначан подпокривач $\{ X_{a_1}, \ldots, X_{a_k} \}$. Из $A \subseteq X_{a_1} \cup \cdots \cup X_{a_k}$ имамо ${}^*A \subseteq {}^*X_{a_1} \cup \cdots \cup {}^*X_{a_k}$, а отуда $x \notin {}^*A$, што је супротно претпоставци. Дакле, из компактности скупа A следи $\mathrm{st}({}^*A) = A$.

Нека је $\{ F_i \mid i \in I \}$ фамилија затворених скупова таква да фамилија $\{ F_i \cap A \mid i \in I \}$ има особину коначног пресека. Овим добијамо да $\bigcap_{i \in I}({}^*F_i \cap {}^*A) \neq \emptyset$. За $x \in \bigcap_{i \in I}({}^*F_i \cap {}^*A)$ важи: $x \in {}^*A$ и $x \in {}^*F_i$ за свако $i \in I$. Отуда, ако је $a = \mathrm{st}(x)$, онда $a \in A$ и $a \in F_i$ за свако $i \in I$ јер су скупови F_i затворени (Теорема 4.27.), односно $a \in \bigcap_{i \in I}(F_i \cap A)$. ■

ПОСЛЕДИЦА 4.1. *Ако је* A *компактан подскуп од* $\mathbb{R}$, *онда је* A *затворен.*

Доказ. Ако је A компактан, онда $A = \mathrm{st}({}^*A) = \mathrm{st}({}^*A \cap \gamma(0))$, па тврђење следи према Теореми 4.27. ■

За тачку $x \in {}^*\mathbb{R}$ кажемо да је *до-стандардна* ако постоји $a \in \mathbb{R}$ тако да $x \in \mu(a)$. Према томе, скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је компактан ако и само ако су све тачке скупа ${}^*A$ до-стандардне.

Базни отворени скупови у Декартовом производу $\mathbf{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$ су скупови облика $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$, где су све пројекције $\mathrm{pr}_i(A) = A_i \subseteq \mathbb{R}$ отворени скупови простора $\mathbf{R}$. Знамо да за $a, b \in {}^*\mathbb{R}^k$ важи:

$$b \in \mu^k(a) \quad \text{акко} \quad \mathrm{pr}_i(b) \in \mu(\mathrm{pr}_i(a)) \ \text{ за свако } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Сада је доказ познате теореме Тихонова[2)] (коначна верзија) непосредан.

ТЕОРЕМА 4.31. *Ако су сви $A_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ компактни скупови, тада је и скуп $\prod_{i=1}^k A_i \subseteq \mathbb{R}^k$ компактан.*

Доказ. Нека је $x \in {}^*A_1 \times {}^*A_2 \times \cdots \times {}^*A_k$. Како су све тачке $\mathrm{pr}_i(x) = x_i \in {}^*A_i$ до-стандардне, то за неко (јединствено одређено) $a_i \in A_i$ важи: $x_i \in \mu(a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тада $x \in \mu(a)$, при чему је $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$, тј. тачка x је до-стандардна. ∎

И скупови у ${}^*\mathbb{R}$ који нису проширење скупова из $\mathbb{R}$ имају занимљиве тополошке особине. Размотримо изблиза једно такво својство интерналних скупова. Сваки опадајући низ $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ непразних интерналних скупова има непразан пресек (принцип ω_1–засићености), што као занимљиву последицу даје следеће тврђење.

ТЕОРЕМА 4.32. *Ако је $A \subseteq \gamma(0)$ интерналан скуп, тада је $\mathrm{st}(A)$ затворен скуп.*

Доказ. Ако $\mathrm{st}(A)$ није затворен скуп, тада постоји елемент x скупа $\mathrm{Cl}(\mathrm{st}(A)) \setminus \mathrm{st}(A)$ и уочимо опадајући низ интерналних скупова дат са $A_n = A \cap \left\{ y \in {}^*\mathbb{R} \,\middle|\, |x - y| < \dfrac{1}{n} \right\}$, $n \geq 1$ и $A_0 = A$. Покажимо да је $A_n \neq \emptyset$ за свако $n \geq 1$. Из $x \in \mathrm{Cl}(\mathrm{st}(A))$ следи да за свако $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ постоји $r \in \mathrm{st}(A)$ такво да је $|x - r| < \dfrac{1}{m}$. Тада је

$$|x - a| \leq |x - r| + |r - a| < \frac{1}{m} + \varepsilon,$$

где је $r = \mathrm{st}(a)$, $a \in A$ и $\varepsilon \approx 0$, односно $|x - a| < \dfrac{1}{n}$.

За $y \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ важи $y \in A$ и $|x - y| < \dfrac{1}{n}$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Отуда је $x \approx y$, $y \in A$, тј. $x \in \mathrm{st}(A)$, што је супротно претпоставци. ∎

Користећи претходно, добићемо једно уопштење Теореме 4.27.

[2)] Андрей Николаевич Тихонов (1906–1993)

Теорема 4.33. *Ако је $B \subseteq \gamma(0)$ нейразан сйандардан скуй, йада важи да је* $\mathrm{st}(^*B) = \mathrm{Cl}\, B$.

Доказ. Скуп $\mathrm{st}(^*B)$ је затворен јер је $^*B$ интерналан, па из $B \subseteq \mathrm{st}(^*B)$ следи $\mathrm{Cl}\, B \subseteq \mathrm{st}(^*B)$. С друге стране, $x \notin \mathrm{Cl}\, B$ даје $\mu(x) \cap {}^*B = \emptyset$, па $x \notin \mathrm{st}(^*B)$. Отуда је и $\mathrm{st}(^*B) \subseteq \mathrm{Cl}\, B$. ■

Интерналан скуп $A = \langle A_n \rangle$ је отворен у $^*\mathbf{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ ако

$$\{\, n \in \mathbb{N} \mid A_n \text{ је отворен скуп у } \mathbf{R} \,\} \in \mathcal{D}.$$

Интернални отворени скупови у $^*\mathbf{R}$ не дају топологију у $^*\mathbf{R}$, јер унија интерналних отворених скупова није увек интерналан скуп. Међутим, $^*\mathbf{R}$ и $\emptyset$ су интернални отворени скупови, као и пресек нека два интернална отворена скупа. Стога, интернални отворени скупови у $^*\mathbf{R}$ чине базу неке топологије у $^*\mathbf{R}$, зовемо је Q-топологија. Значи, постоје и појмови као што су Q-отворен скуп, Q-затворен скуп, Q-интериор, Q-затворење, Q-руб и слично. Покажимо да се на колекцији интерналних скупова у $^*\mathbf{R}$ ови појмови подударају са ранијим.

Теорема 4.34. *Нека је $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ инйерналан скуй. Тада, A је Q-ойворен ако и само ако је ойворен.*

Доказ. Ако је $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ интерналан отворен скуп, тада A припада бази Q-топологије у $^*\mathbf{R}$, па је Q-отворен.

Нека је $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ интерналан и Q-отворен скуп. Тада је $A = \bigcup \Gamma$, где је Γ скуп свих интерналних отворених скупова садржаних у A, који је и сам интерналан. Скуп A је отворен, јер се $*$-трансфером тврђења „унија скупа отворених скупова је отворен скуп” добија да унија интерналног скупа интерналних отворених скупова је отворен скуп. Више речи о $*$-трансферу ће бити на страни 213. ■

Слично, интерналан скуп $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ је Q-затворен ако и само ако је затворен. Даље, Q-затворење интерналног скупа $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$, на пример скуп B, карактерише се као комплемент уније свих интерналних отворених скупова дисјунктних са A. Из Теореме 4.34. следи да је $B = \mathrm{Cl}\, A$. Слично се $\mathrm{Int}\, A$ и $\beta(A)$ поклапају са његовим Q-интериором и Q-рубом.

Интерналан отворен скуп облика $\{\, q \in {}^*\mathbb{R} \,\big|\, |p - q| < r \,\}$, за неко $p \in {}^*\mathbb{R}$ и $r \in {}^*\mathbb{R}^+$, јесте *ойворена кугла* у $^*\mathbf{R}$. Стога, скуп свих отворених кугли можемо узети за базу Q-топологије у $^*\mathbf{R}$. Скуп $B \subseteq {}^*\mathbb{R}$ зовемо

S-*кугла* ако постоји $p \in {}^*\mathbb{R}$ и стандардно $r \in \mathbb{R}^+$ (пишемо $B = S(p, r)$) тако да је

$$B = \{\, q \in {}^*\mathbb{R} \mid \operatorname{st}|p - q| < r \,\}.$$

Топологију у ${}^*\mathbf{R}$ чију базу чине S-кугле зовемо S-топологија. Значи, постоје и појмови као што су S-отворен скуп, S-затворен скуп, S-интериор, S-затворење, S-руб и слично. Очигледно је S-отворен скуп и Q-отворен, па је Q-топологија у ${}^*\mathbf{R}$ финија од S-топологије.

Свака монада је унија свих отворених кугли које садржи. Стога је свака монада Q-отворен скуп.

ТЕОРЕМА 4.35. *За $p \in {}^*\mathbb{R}$ важи $\mu(p) = \bigcap \Xi$, где је Ξ скуп свих S-кугли које садрже монаду тачке p.*

Доказ. Ако $q \in \mu(p)$ и $B \in \Xi$, тада $\operatorname{st}|p - q| = 0$, па $q \in B$. Ако $q \notin \mu(p)$, тада је $\operatorname{st}|p - q| = r_0 > 0$, па $q \notin S(p, r_0)$. ■

S-интериор неког интерналног скупа у ${}^*\mathbf{R}$ описан је на следећи начин.

ТЕОРЕМА 4.36. *Нека је $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ интерналан скуп. Тада p припада S-интериору скупа A ако и само ако $\mu(p) \subseteq A$.*

Доказ. Ако тачка p припада S-интериору скупа A, тада за неко стандардно $r > 0$ важи $S(p, r) \subseteq A$. Из $\mu(p) \subseteq S(p, r)$ следи $\mu(p) \subseteq A$.

Нека је A интерналан скуп који садржи монаду тачке p. Тада интерналан скуп

$$C = \Big\{\, n \in {}^*\mathbb{N} \;\Big|\; (\forall q)\Big(|p - q| < \frac{1}{n} \Rightarrow q \in A\Big) \,\Big\}$$

садржи све бесконачне природне бројеве, па садржи и неки коначан, на пример n. Из $S\Big(p, \dfrac{1}{n}\Big) \subseteq A$ следи да p припада S-интериору скупа A. ■

Слично су описани S-затворење и S-руб интерналног скупа.

ТЕОРЕМА 4.37. *Нека је $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ интерналан скуп. Тада*

(а) *S-затворење скупа A је $\{\, p \in {}^*\mathbb{R} \mid \mu(p) \cap A \neq \emptyset \,\}$.*

(б) *S-руб скупа A је $\{\, p \in {}^*\mathbb{R} \mid \mu(p) \cap A \neq \emptyset$ и $\mu(p) \cap ({}^*\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset \,\}$.*

Галаксије у ${}^*\mathbb{R}$ су пример скупова који су S-отворени, али исто тако и S-затворени. Заиста, ако је $\gamma = \gamma(a)$ галаксија у ${}^*\mathbb{R}$, тада из једнакости $\gamma = \bigcup_{p\in\gamma} S(p,1)$ следи да је галаксија S-отворен скуп. Скуп ${}^*\mathbb{R} \setminus \gamma$ је унија свих других галаксија, па је S-отворен. Стога, γ је и S-затворен скуп.

Глава 5

Модели

У Лајбницовој анализи уводи се систем бројева са истим особинама као и класични систем бројева, али тако да садржи актуелне бесконачно мале и бесконачно велике величине. С друге стране реални бројеви очигледно немају то својство Лајбницове екстензије, што доводи до својеврсног парадокса. Стога се анализа XVII и XVIII века сматра, у одређеном смислу, противречном.

Савремена математичка логика, посебно једна њена дисциплина, теорија модела, разрешава овај парадокс, одређујући формалан језик са особином да својства изразива у том језику важе за обичне бројеве ако и само ако важе у Лајбницовој екстензији–нестандардном проширењу реалних бројева. Својство поседовања позитивне инфинитезимале није изразиво у овом језику, дакле парадокса нема.

У оквиру теорије модела разматрају се уобичајене математичке структуре. Абелове групе, уређена поља, структура природних бројева јесу примери структура које се проучавају средствима теорије модела. Као што је већ речено, изразито важну улогу у тим разматрањима има формалан језик којим се прецизира скуп симбола и правила на основу којих се изграђују реченице. Главни разлог за увођење реченица и формула је да се њима могу описати својства модела. Отуда није чудно да својства модела често јесу последице структуре одређених реченица или неких теорема које се односе на некакве скупове реченица. Такве доказе онда називамо *модел-теоретским*.

Изградња језика и придружених појмова (формуле, реченице, докази, теорије итд.) спада у синтаксу. Семантика одређује значења, наиме дефинише се базни појам *релација задовољења* која казује коју од логичких вредности *тачно, нетачно* једна реченица добија у неком моделу. Теорија модела је почела да се издваја у посебну дисциплину математичке логике 30–тих година прошлог века, пре свега захваљујући радовима Тарског[1)], Сколема, Гедела[2)], Маљцева[3)], Мостовског[4)], Вота[5)], Хенкина[6)], Кислера[7)] и других.

5.1 Модели и језик

Синоним за модел је операцијско-релацијска структура. Наводимо неке примере модела:

(1) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ систем природних бројева,

(2) $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ уређено поље реалних бројева,

(3) $\mathfrak{B} = (B, \wedge, \vee, {}', \leq, 0, 1)$ Булова алгебра,

(4) $\mathfrak{P}(X) = (\mathbf{P}(X), \cap, \cup, {}^c, \subseteq, \emptyset, X)$ поље скупова над X,

(5) $\mathfrak{G} = (G, H, \cdot, {}^{-1}, 1)$ група са нормалном подгрупом H,

(6) $\mathfrak{R}_\omega = (R_\omega, \in, \langle , \rangle)$, где је $R_0 = \emptyset$, $R_{n+1} = R_n \cup \mathbf{P}(R_n)$ за сваки природан број n, $R_\omega = \bigcup_n R_n$, $\in$ скуповна релација припадања и $\langle x, y \rangle = \{ \{ x \}, \{ x, y \} \}$ операција скупа R_ω.

Главни појам теорије модела је, наравно, модел.

Дефиниција 5.1. *Модел* је свака структура $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ где је A непразан скуп, $\mathcal{R}$ скуп неких релација чији је домен скуп A, $\mathcal{F}$ је фамилија неких операција скупа A и, најзад, $\mathcal{C}$ је скуп константи домена A. Дакле,

- ако је $R \in \mathcal{R}$, тада за неки $k \in \mathbb{N}$, $R \subseteq A^k$, тј. R је k-арна релација скупа A. Пишемо $\mathrm{ar}(R) = k$;

[1)] Alfred Tarski (1901–1983)
[2)] Kurt Gödel (1906–1978)
[3)] Анатолий Иванович Мальцев (1909–1967)
[4)] Andrzej Mostowski (1913–1975)
[5)] Robert Lawson Vaught (1926–2002)
[6)] Leon Albert Henkin (1921–2006)
[7)] Howard Jerome Keisler (1936–)

- ако је $F \in \mathcal{F}$, тада за неки $k \in \mathbb{N}$, $F\colon A^k \to A$, тј. F је операција дужине k скупа A. Пишемо, такође, $\mathrm{ar}(F) = k$.

- Најзад, $\mathcal{C} \subseteq A$. За $c \in \mathcal{C}$, $\mathrm{ar}(c) = 0$.

У примеру (1) $\mathcal{R} = \{\leq\}$, $\mathcal{F} = \{+, \cdot\}$, $\mathcal{C} = \{0, 1\}$, $\mathrm{ar}(\leq) = 2$, $\mathrm{ar}(+) = \mathrm{ar}(\cdot) = 2$. У примеру (5) $\mathcal{R} = \{H\}$, $\mathcal{F} = \{\cdot, ^{-1}\}$, $\mathcal{C} = \{1\}$, $\mathrm{ar}(H) = 1$, $\mathrm{ar}(\cdot) = 2$, $\mathrm{ar}(^{-1}) = 1$.

Ако је R релација скупа A дужине k и $a_1, \dots, a_k \in A$, уместо ознаке $(a_1, \dots, a_k) \in R$ пишемо и $R(a_1, \dots, a_k)$. За моделе се такође користе ове ознаке:

$$\mathfrak{A} = (A, R_i, F_j, a_k)_{i \in I, j \in J, k \in K},$$

а уколико су I, J, K коначни (пребројиви) скупови онда модел означавамо овако:

$$\mathfrak{A} = (A, R_0, \dots, R_k, F_0, \dots, F_m, a_0, \dots, a_n),$$

односно

$$\mathfrak{A} = (A, R_0, R_1, \dots, F_0, F_1, \dots, a_0, a_1, \dots).$$

Сваки модел је модел неког језика. Наиме, значајни делови математике могу се реконструисати у оквиру такозваног предикатског рачуна првог реда. Уобичајено математичко резоновање из радне математике обично се односи на некакав скуп објеката E. У анализи особина индивидуа из E јављају се реченице које имају специфичан облик. Један од најчешћих видова јесте реченица облика „x има својство P”, где се P на неки начин односи на E. Ова реченица се краће записује $P(x)$, и у таквом контексту слово P називамо *предикатским* или *релацијским* симболом. Наравно, неки релацијски знак P се може односити на више индивидуа, што се онда записује са $P(x_1, \dots, x_n)$. Осим ових симбола користе се и *функцијски* знаци и знаци *констаната*, који имају очигледна значења. Управо ови појмови одређују и сам појам језика предикатског рачуна првог реда, чију формалну дефиницију сада наводимо.

Операцијско-релацијски језик, или *језик предикатског рачуна првог реда*, јесте сваки скуп L, где

$$L = \mathrm{Rel} \cup \mathrm{Fun} \cup \mathrm{Const}\,.$$

При томе, Rel, Fun, Const су у паровима дисјунктни скупови и (због јединствености читања формула) претпоставља се да ни један члан из

L није коначан низ неких елемената. Елементи $R \in \mathrm{Rel}$, $F \in \mathrm{Fun}$, $c \in \mathrm{Const}$, се редом називају релацијским знаком, функцијским знаком, симболом константе језика L. Функција

$$\mathrm{ar}\colon\ \mathrm{Rel} \cup \mathrm{Fun} \to \mathbb{N}$$

је функција арности. Уколико $S \in \mathrm{Rel} \cup \mathrm{Fun}$ и важи $\mathrm{ar}(S) = k$, онда се каже да је S симбол дужине k.

Нека је A непразан скуп. *Интерпретација* језика L у домен A је свако пресликавање J са доменом L које сваком релацијском знаку R језика L придружује релацију $J(R)$ скупа A, сваком функцијском знаку F језика L једну операцију $J(F)$ скупа A, и сваком симболу константе c један елемент $J(c)$ скупа A. При томе, за $S \in \mathrm{Fun} \cup \mathrm{Rel}$ важи једнакост $\mathrm{ar}(J(S)) = \mathrm{ar}(S)$. Модел језика L је сваки пар (A, J), где $A \neq \emptyset$ и J је интерпретација језика L у домен A. Уместо (A, J) чешће се користи ознака

$$\big(A, J(R), J(F), J(c)\big)_{R \in \mathrm{Rel}, F \in \mathrm{Fun}, c \in \mathrm{Const}},$$

што одговара појму модела у Дефиницији 5.1. Ако је $\mathfrak{A} = (A, J)$ модел језика L, за $S \in L$ користи се такође ознака $S^{\mathfrak{A}}$. Дакле, $S^{\mathfrak{A}} = J(S)$.

Пример 5.1. 1° Нека је $L = \{\,+, \cdot, \leq, 0, 1\,\}$, $\mathrm{Rel} = \{\,\leq\,\}$, $\mathrm{Fun} = \{\,+, \cdot\,\}$, $\mathrm{Const} = \{\,0, 1\,\}$, $\mathrm{ar}(\leq) = 2$, $\mathrm{ar}(+) = \mathrm{ar}(\cdot) = 2$. Тада су $\mathfrak{N}, \mathfrak{R}$ модели језика L.

2° Нека је $L' = L \cup \{\,'\,\}$, L је као у 1° и $' \in \mathrm{Fun}$, $\mathrm{ar}(') = 1$. Тада је свака Булова алгебра модел језика L'.

Нека су L, L' језици и нека је $L \subseteq L'$. Тада се L назива *редуктом* језика L', а L' *експанзијом* језика L. У последњем примеру имамо случај редукта односно експанзије језика.

Ако је L редукт језика L' и ако су $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ редом модели језика L, L', онда се модел $\mathfrak{A}$ назива редуктом модела $\mathfrak{A}'$, док се $\mathfrak{A}'$ назива експанзијом модела $\mathfrak{A}$. Уколико је $\mathrm{Rel}_L = \mathrm{Rel}_{L'}$ и $\mathrm{Fun}_L = \mathrm{Fun}_{L'}$, онда је L' проста експанзија језика L, док је $\mathfrak{A}'$ проста експанзија модела $\mathfrak{A}$. Ако имамо да је $S \in L' \setminus L$, тада за S кажемо да је *нови знак* језика L.

Убудуће слова $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ користимо као ознаке за моделе, док са $A, B, C, \ldots$ означавамо њихове домене.

Дефиниција 5.2. Нека су $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ модели језика L. Модел $\mathfrak{B}$ је подмодел модела $\mathfrak{A}$ ако и само ако $B \subseteq A$ и

- за $R \in \mathrm{Rel}$, $\quad R^{\mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{A}} \cap B^k, \qquad k = \mathrm{ar}(R);$
- за $F \in \mathrm{Fun}$, $\quad F^{\mathfrak{B}} = F^{\mathfrak{A}} \restriction B^k, \qquad k = \mathrm{ar}(F);$
- за $c \in \mathrm{Const}$, $\quad c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}}$.

Ако је $\mathfrak{B}$ подмодел модела $\mathfrak{A}$, користи се ознака $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Ако је $B \subseteq A$, тада постоји највише један подмодел модела $\mathfrak{A}$ са доменом B, те се из тог разлога уместо „$\mathfrak{B}$ је подмодел од $\mathfrak{A}$” пише такође „B је подмодел од $\mathfrak{A}$”.

Пример 5.2. Овај пример биће од нарочите важности у разматрању и изградњи нестандардног универзума анализе. Сваком непразном скупу A придружен је језик тог домена, означен са L_A. Ако је R k-арна релација скупа A, тада је $\underline{R}$ k-арни релацијски знак језика L_A. Симбол $\underline{R}$ назива се *именом* релације R. Слично, ако је F операција дужине k скупа A, тада је $\underline{F}$ име функције F и $\underline{F} \in L_A$. Ако је $a \in A$, тада је $\underline{a}$ име елемента a и $\underline{a} \in L_A$. Пуна експанзија скупа A је модел

$$A^\sharp = (A, \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}),$$

где је $\mathcal{R}$ скуп свих релација скупа A, $\mathcal{F}$ је скуп свих операција скупа A, и најзад $\mathcal{C} = A$. Тада је очигледно $A^\sharp$ модел језика L_A. Приметимо да је за $\underline{S} \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$, $\underline{S}^{A^\sharp} = S$.

Многи појмови из алгебре имају свој пандан у теорији модела. То се пре свега односи на разне врсте „морфизама”.

Дефиниција 5.3. Нека су $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ модели језика L и $f\colon A \to B$. Пресликавање f је хомоморфизам модела $\mathfrak{A}$ у модел $\mathfrak{B}$ ако и само ако

- из $R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ следи $R^{\mathfrak{B}}\big(f(a_1), \ldots, f(a_k)\big)$, за свако $R \in \mathrm{Rel}$ дужине k и све $a_1, \ldots, a_k \in A$;
- $f\big(F^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)\big) = F^{\mathfrak{B}}\big(f(a_1), \ldots, f(a_k)\big)$, за свако $F \in \mathrm{Fun}$ дужине k, и све $a_1, \ldots, a_k \in A$;
- $f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$, за свако $c \in \mathrm{Const}$.

Ознака $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ значи да је f хомоморфизам из $\mathfrak{A}$ у $\mathfrak{B}$. Ако је f 1-1 (*на*) пресликавање, онда се f назива *утапањем* (*на*–хомоморфизам или епиморфизам). Ако је f 1-1 и *на*–хомоморфизам, тада се f назива изоморфизмом, и у таквом случају се користи ознака $f\colon \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ или $f\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$. Ако је $f\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$, тада се f назива аутоморфизмом модела $\mathfrak{A}$.

Пример 5.3. 1° Ако важи да је $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ тада је инклузионо пресликавање $f\colon B \to A$, дато са $f(b) = b$ за $b \in B$, утапање.

2° Ако је $\mathbf{K}$ уређено поље, тада је $\mathrm{st}\colon \mathbf{K}_{\mathrm{fin}} \to \mathbf{R}$ хомоморфизам прстена $\mathbf{K}_{\mathrm{fin}}$ у уређено поље реалних бројева $\mathbf{R}$.

Хомоморфизам $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ је *јак* уколико за све $R \in \mathrm{Rel}$ дужине k, за све $a_1, \ldots, a_k \in A$, $R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ акко $R^{\mathfrak{B}}\big(f(a_1), \ldots, f(a_k)\big)$.

Пример 5.4. Ако је $\mathbf{K}$ неархимедско поље, пресликавање $\mathrm{st}\colon \mathbf{K}_{\mathrm{fin}} \to \mathbf{R}$ није јак хомоморфизам, јер за $a, b \in K_{\mathrm{fin}}$, $\mathrm{st}(a) \leq \mathrm{st}(b)$ није еквивалентно са $a \leq b$ (јер може бити $a \approx b$).

5.2 Формуле

Приликом анализе особина индивидуа из неког домена E уобичајено је да се формирају сложени искази као што су „$P(x)$ повлачи $Q(x)$”, или „*није* $P(x)$”, где су P, Q неки предикатски симболи. У изградњи сложених исказа нарочито важну улогу имају *логички везници* (*не*, *и*, *или*, *ако* … *онда* …, *ако и само ако*) и квантификатори (*сваки*, *неки*). Осим тога, већина математичких теорија садржи концепт једнакости. Тако, исказ вида $x = y$ казује да променљиве x, y означавају исти математички објект. Отуда произилазе разна својства једнакости од којих је свакако најважнија могућност замене сваког појављивања x са y (уколико је $x = y$) с тим да се логичка вредност полазног исказа не мења. Са овом мотивацијом дајемо формалну дефиницију формуле.

У изградњи формула предикатског рачуна првог реда језика L поред симбола из L учествују такође следећи логички знаци:

помоћни знаци:), , , (тј. заграде и зарез;

променљиве: $v_0, v_1, v_2, \ldots$;

логички везници: $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $\neg$ (не), $\Rightarrow$ (ако … онда …), $\Leftrightarrow$ (ако и само ако);

квантификатори: $\forall$ (за сваки), $\exists$ (за неки);

знак једнакости: $=$.

Претпоставља се да L не садржи логичке знаке. Треба разликовати логички знак „ $=$ ” од обичне једнакости (тј. метаједнакости). Зато метаједнакост понекад означавамо са $\overset{\circ}{=}$.

Најједноставније формуле изграђене су од терама. Дефиниција терма језика L је индуктивна. Нека је Var скуп свих променљивих и нека је $L = \mathrm{Rel}_L \cup \mathrm{Fun}_L \cup \mathrm{Const}_L$. Тада

- $\mathrm{Term}_L(0) = \mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}_L$,
- за сваки $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Term}_L(n+1) = \mathrm{Term}_L(n) \cup$

  $\cup \{ F(t_1, \dots, t_k) \mid F \in \mathrm{Fun}_L, \mathrm{ar}(F) = k, t_1, \dots, t_k \in \mathrm{Term}_L(n) \}$,
- $\mathrm{Term}_L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Term}_L(n)$.

Дефиниција 5.4. Низ t симбола језика L и логичких знакова је терм језика L ако и само ако $t \in \mathrm{Term}_L$.

Дакле, Term_L је скуп свих терама језика L. Већина својстава терама доказује се индукцијом по сложености терма. Сложеност терма је пресликавање $\mathrm{sl}\colon \mathrm{Term}_L \to N$, такво да за $t \in \mathrm{Term}_L$ важи

$$\mathrm{sl}(t) = n \quad \text{акко} \quad t \in \mathrm{Term}_L(n) \setminus \mathrm{Term}_L(n-1) \quad \text{или} \quad n = 0.$$

Ако је $\mathrm{sl}(t) = n$, тада је n сложеност терма t. Функција сложености терма је добро дефинисана с обзиром на следећи исказ.

Теорема 5.1. (о јединствености читања терма) *За сваки $t \in \mathrm{Term}_L$ сложености $n > 0$ постоји јединствени $k \in \mathbb{N}$, јединствени $F \in \mathrm{Fun}_L$ дужине k, и јединствени $t_1, \dots, t_k \in \mathrm{Term}_L$ такви да $t = F(t_1, \dots, t_k)$.*

Терм t језика L је *затворен* уколико t не садржи променљиве. *Атомичне формуле* су елементи скупа At_L, где $u = v \in \mathrm{At}_L$ и $u, v \in \mathrm{Term}_L$, као и $R(t_1, \dots, t_k) \in \mathrm{At}_L$ за $R \in \mathrm{Rel}_L$, $\mathrm{ar}(R) = k$ и $t_1, \dots, t_k \in \mathrm{Term}_L$.

Дефиниција формула језика L је такође индуктивна:

- $\mathrm{For}_L(0) = \mathrm{At}_L$,
- за сваки $n \in \mathbb{N}$, ако $\varphi, \psi \in \mathrm{For}_L(n)$, тада

  $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi, \varphi \Leftrightarrow \psi, \forall v_i \varphi, \exists v_i \varphi \in \mathrm{For}_L(n+1)$,
- $\mathrm{For}_L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{For}_L(n)$.

Дефиниција 5.5. Низ симбола φ језика L и логичких знакова је формула језика L ако и само ако $\varphi \in \mathrm{For}_L$.

Према томе, For_L је скуп свих формула језика L. Пресликавање $\mathrm{sl}\colon \mathrm{For}_L \to \mathbb{N}$, где је за $\varphi \in \mathrm{For}_L$, $\mathrm{sl}(\varphi)$ најмањи природан број n такав да $\varphi \in \mathrm{For}_L(n)$, назива се функцијом сложености формула. Као и код терама важи одговарајућа теорема о јединствености читања формула.

Убудуће претпостављамо уобичајену конвенцију о брисању заграда и краћим записима. На пример,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n & \text{стоји уместо} & (\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge (\cdots \wedge \varphi_n)\ldots)), \\ \forall x_1 x_2 \ldots x_n \varphi & \text{стоји уместо} & \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi. \end{array}$$

Свако појављивање променљиве v_i у формули φ је слободно или везано. Појављивање променљиве v_i у формули φ је *везано* уколико је v_i под дејством квантификатора, тј. формула φ садржи подформулу облика $\forall v_i \psi$ или $\exists v_i \psi$. Појављивање променљиве v_i у формули φ је слободно ако није везано. Кажемо такође да је променљива v_i слободна за φ уколико v_i има слободно појављивање у φ.

Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неке променљиве. Ако је $t \in \mathrm{Term}_L$, тада $t(x_1, \ldots, x_n)$ означава да су све променљиве терма t неке од променљивих $x_1, \ldots, x_n$. Ако је $\varphi \in \mathrm{For}_L$, тада записом $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ означавамо да променљиве које имају слободно појављивање у φ јесу неке од променљивих $x_1, \ldots, x_n$. У даљем тексту претпостављамо основне чињенице о досад уведеним појмовима у вези с језиком, као и о неким радњама, на пример о супституцији променљиве термом у некој формули.

Реченица, или *затворена формула*, језика L је свака формула језика L која не садржи слободне променљиве. Скуп свих реченица језика L означаваћемо са Sent_L.

Теорија језика L је сваки скуп T реченица језика L. Ако је T теорија језика L и $\varphi \in T$, тада се φ назива *аксиомом* теорије T. Аксиоме теорије T често се задају формулама са неким слободним променљивима. Тада под аксиомом треба подразумевати универзално затворење формуле φ. Подсетимо се да је универзално затворење формуле φ реченица $\forall x_1 \ldots x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорија T је *комплетна* уколико за сваку реченицу φ језика L важи $\varphi \in T$ или $\neg\varphi \in T$.

Пример 5.5. *Формална аритметика* је теорија првог реда и односи се на структуру природних бројева $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, ', 0)$ ($'$ је функција наследник). Језик ове теорије је $L = \{+, \cdot, ', 0\}$, где су $+$ и $\cdot$ двомесни операцијски знаци, $'$ је унарни операцијски знак и 0 је симбол константе. Аксиоме ове теорије су

- $0 \neq x'$, *0 нема претходника,*
- $x' = y' \Rightarrow x = y$, *$'$ је 1-1 пресликавање,*
- $x + 0 = x$,

  $x + y' = (x + y)'$, *индуктивна дефиниција за $+$,*
- $x \cdot 0 = 0$,

  $x \cdot y' = x \cdot y + x$, *индуктивна дефиниција за $\cdot$,*
- $\big(\psi(0, v_1, \ldots, v_n) \wedge \forall v_0(\psi(v_0, v_1, \ldots, v_n) \Rightarrow \psi(v_0{}', v_1, \ldots, v_n))\big) \Rightarrow$

  $\Rightarrow \forall v_0 \psi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$.

Последња аксиома (позната као схема индукције) је одређена за сваку формулу $\psi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ језика L, где v_0 нема везана појављивања у ψ. Дакле ова теорија, означимо је са P, има бесконачно много аксиома. Познато је много занимљивих резултата у вези са овом теоријом. Споменимо један од њих: P није комплетна теорија, нити је то било које њено коначно проширење.

5.3 Релација задовољења

Логичка вредност формуле φ у моделу $\mathfrak{A}$ постаје одређена тек уколико су одређене вредности учествујућих променљивих. Валуације су функције којима се додељују вредности променљивима. Нека је $\mathrm{Var} = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ скуп променљивих и нека је A непразан скуп.

Дефиниција 5.6. Валуација домена A је свако пресликавање $\sigma\colon \mathrm{Var} \to A$.

Ако за $\sigma\colon \mathrm{Var} \to A$ важи $\sigma(v_i) = a_i$, $i \in \mathbb{N}$, пишемо $\sigma = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Из тог разлога, $A^{\mathbb{N}}$ је скуп свих валуација домена A. Дефинишимо вредност $t^{\mathfrak{A}}[\sigma]$ терма t у моделу $\mathfrak{A}$ за валуацију σ користећи индуктивну дефиницију терма.

Нека је $\mathfrak{A}$ модел језика L, $t \in \mathrm{Term}_L$ и $\sigma \in A^{\mathbb{N}}$, $\sigma = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Ако је $\mathrm{sl}(t) = 0$, тада

- $t^{\mathfrak{A}}[\sigma] = a_i \quad$ за $t \stackrel{\circ}{=} v_i$,
- $t^{\mathfrak{A}}[\sigma] = c^{\mathfrak{A}} \quad$ за $t \stackrel{\circ}{=} c,\ c \in \mathrm{Const}_L$.

Ако је $\mathrm{sl}(t) > 0,\ k \in \mathbb{N},\ F \in \mathrm{Fun}_L$ дужине $k,\ t_1, \ldots, t_k \in \mathrm{Term}_L$ такви да $t = F(t_1, \ldots, t_k)$, тада

- $t^{\mathfrak{A}}[\sigma] = F^{\mathfrak{A}}\big(t_1^{\mathfrak{A}}[\sigma], \ldots, t_k^{\mathfrak{A}}[\sigma]\big)$.

Из дефиниције $t^{\mathfrak{A}}[\sigma]$ следи да ова вредност зависи једино од вредности учествујућих променљивих у t, дакле од неког почетног дела $a_0, a_1, \ldots, a_n$ валуације σ. Из тог разлога уместо $t^{\mathfrak{A}}[\sigma]$ пишемо такође $t^{\mathfrak{A}}[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

Централни појам теорије модела је релација задовољења, коју је увео Тарски. Овом релацијом се дефинише истинитост или важење формуле φ у моделу $\mathfrak{A}$ уколико су одређене вредности учествујућих променљивих у формули φ. Релација задовољења означава се са $\models$ и запис $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ казује да је формула φ при валуацији σ тачна у моделу $\mathfrak{A}$. Дефиниција релације задовољења је индуктивна, према сложености формуле φ.

Дефиниција 5.7. Нека је $\mathfrak{A}$ модел језика $L,\ \varphi \in \mathrm{For}_L$ и $\sigma \in A^{\mathbb{N}}$. Ако је $\mathrm{sl}(\varphi) = 0$, тада је $\varphi \in \mathrm{At}_L$, па разликујемо следеће случајеве.

1° За неке $u, v \in \mathrm{Term}_L,\ \varphi \stackrel{\circ}{=} (u = v)$. Тада

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma] \qquad \text{акко} \qquad u^{\mathfrak{A}}[\sigma] \stackrel{\circ}{=} v^{\mathfrak{A}}[\sigma].$$

2° За неки природан број k и $R \in \mathrm{Rel}_L$ дужине k постоје терми $t_1, \ldots, t_k$ језика L тако да је $\varphi \stackrel{\circ}{=} R(t_1, \ldots, t_k)$. Тада

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma] \qquad \text{акко} \qquad R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\sigma], \ldots, t_k^{\mathfrak{A}}[\sigma]).$$

Ако је $\mathrm{sl}(\varphi) = n + 1$, тада према дефиницији формуле имамо следеће случајеве.

3° За неке $\psi, \theta \in \mathrm{For}_L(n),\ \varphi \stackrel{\circ}{=} (\psi \wedge \theta)$. Тада

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma] \qquad \text{акко} \qquad \mathfrak{A} \models \psi[\sigma] \ \text{ и } \ \mathfrak{A} \models \theta[\sigma].$$

4° За неку формулу $\psi \in \mathrm{For}_L(n),\ \varphi \stackrel{\circ}{=} \neg\psi$. Тада

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma] \qquad \text{акко} \qquad \text{није } \mathfrak{A} \models \psi[\sigma].$$

5° За неки природан број i, и формулу $\psi \in \mathrm{For}_L(n),\ \varphi \stackrel{\circ}{=} \exists v_i \psi$. Тада за $\sigma = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ имамо

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma] \quad \text{акко} \quad \text{за неки } b \in A,\ \ \mathfrak{A} \models \psi[a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots].$$

Логички знаци $\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall$ изразиви су преко $\wedge, \neg, \exists$ (у предикатском рачуну првог реда), на пример $\varphi \vee \psi$ је замена за $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, и $\forall v_i \varphi$ је замена за $\neg\exists v_i \neg\varphi$, те се дефиниција релације задовољења за ове случаје лако изводи из претходних.

Према претходној дефиницији имамо следеће особине релације задовољења.

- $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ или $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\sigma]$.
- Важење формуле φ за валуацију σ у моделу $\mathfrak{A}$ зависи једино од слободних променљивих формуле φ, дакле од неког почетног дела $a_0, \ldots, a_n$ валуације σ. Зато, уместо $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ користимо, такође, запис $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_n]$.
- Ако је φ реченица језика L и $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$, тада за све $\sigma' \in A^{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma']$. Отуда за реченице φ језика L уместо $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ пишемо једноставно $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Имајући на располагању релацију задовољења уводимо многе друге појмове моделско-теоретске природе. Најзначајнији појмови ове врсте наводе се у следећој дефиницији.

Дефиниција 5.8. Нека су $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ модели језика L.
1° $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \{\, \varphi \mid \varphi$ је реченица језика L и $\mathfrak{A} \models \varphi \,\}$ је *теорија* модела $\mathfrak{A}$. Отуда, $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ је комплетна теорија модела $\mathfrak{A}$.

2° Модел $\mathfrak{A}$ је *елементаран подмодел* модела $\mathfrak{B}$, у ознаци $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, акко $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и за све $\varphi \in \mathrm{For}_L$, све $\sigma \in A^{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ акко $\mathfrak{B} \models \varphi[\sigma]$.

3° Утапање $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ је елементарно, у ознаци $f\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\prec} \mathfrak{B}$, акко за све валуације $\sigma = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ акко $\mathfrak{B} \models \varphi[f(a_0), f(a_1), \ldots]$.

4° Модели $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ су елементарно еквивалентни, у ознаци $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, акко $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

Непосредно се проверава да је елементарна еквиваленција модела једна релација еквиваленције у класи свих модела.

Теорема 5.2. *Ако је* $f\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\prec} \mathfrak{B}$, *тада* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Доказ. Индукцијом по сложености реченице φ доказује се да

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi \quad & \text{акко} \quad \mathfrak{A} \models \varphi[\sigma] \quad \text{за неку валуацију } \sigma = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \\ & \text{акко} \quad \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_0), f(a_1), \ldots] \\ & \text{акко} \quad \mathfrak{B} \models \varphi. \end{aligned}$$ ∎

Пример 5.6. Нека је за сваки n, σ_n следећа реченица:

$$(\exists v_0 \ldots v_{n-1})\Big(\bigwedge_{0\leq i<j<n} \neg v_i = v_j \wedge \forall v_n (v_n = v_0 \vee v_n = v_1 \vee \cdots \vee v_n = v_{n-1})\Big).$$

Тада за ма који модел $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \sigma_n$ акко A има тачно n елемената. Отуда, ако је $\mathfrak{A}$ коначан и $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, тада је и $\mathfrak{B}$ коначан и $|A| = |B|$.

Следеће тврђење је занимљиво из два разлога. Први се односи на саму индуктивну природу релације задовољења. Јер, као и у доказу који следи, и у осталим доказима тврђења од интереса, а која се односе на релацију задовољења, јесу по правилу индуктивне природе. Друга чињеница коју сазнајемо из овог тврђења је да се релација задовољења у ствари може увести једино за реченице, наравно ако се полазни модел донекле модификује. У овом случају реч је о простој експанзији модела. Подсетимо се да ако је $\mathfrak{A}$ модел и $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$, тада је $(\mathfrak{A}, a_0, a_1, \ldots, a_n)$ проста експанзија модела $\mathfrak{A}$. Такође, подсетимо се да је $\underline{a}$ име елемента a, дакле симбол константе. Стога $\varphi(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n})$ је реченица језика $L \cup \{\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}\}$.

Лема 5.1. *Нека је $\mathfrak{A}$ модел језика L и $\varphi(v_0, \ldots, v_n) \in \mathrm{For}_L$. Тада за све $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ важи*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_n] \text{ акко } (\mathfrak{A}, a_0, \ldots, a_n) \models \varphi(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}).$$

Доказ. Претходно доказујемо следеће помоћно тврђење: *ако је $t(v_0, v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{Term}_L$ и $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}, a_0, \ldots, a_n)$, онда*

$$t^{\mathfrak{A}'}(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}) = t^{\mathfrak{A}}(v_0, \ldots, v_n)[a_0, \ldots, a_n].$$

Ово тврђење доказује се индукцијом по сложености терма.
Ако је $\mathrm{sl}(t) = 0$, тада

за $t \stackrel{\circ}{=} v_i$ је $t^{\mathfrak{A}'}(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}) = \underline{a_i}^{\mathfrak{A}'} = a_i = t^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots, a_n]$,

за $t \stackrel{\circ}{=} c$, $c \in \mathrm{Const}_L$, $t^{\mathfrak{A}'}(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}) = c^{\mathfrak{A}'} = c^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots, a_n]$.

Ако је $\mathrm{sl}(t) = k + 1$, тада за неки природан број m и симбол $F \in \mathrm{Fun}_L$ дужине m постоје терми $t_1, \ldots, t_m$ језика L тако да $t \stackrel{\circ}{=} F(t_1, \ldots, t_m)$, па

$$\begin{aligned} t^{\mathfrak{A}'}(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}) &= F^{\mathfrak{A}'}(t_1^{\mathfrak{A}'}(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}), \ldots, t_m^{\mathfrak{A}'}(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n})) \\ &= F^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots, a_n], \ldots, t_m^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots, a_n]) \\ &= t^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots, a_n]. \end{aligned}$$

Сада прелазимо на доказ саме леме који је такође индуктиван.
Ако је $\mathrm{sl}(\varphi) = 0$, разликујемо следеће случајеве:
ако је φ формула $u = v,\ u, v \in \mathrm{Term}_L$, тада

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_n] & \text{акко} & u^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots, a_n] = v^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots, a_n] \\ & \text{акко} & u^{\mathfrak{A}'}\big(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}\big) = v^{\mathfrak{A}'}\big(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}\big), \\ & \text{акко} & \mathfrak{A}' \models \varphi\big(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}\big), \end{array}$$

ако је φ формула $R(u_1, \ldots, u_m)$, $R \in \mathrm{Rel}_L$ дужине m и $u_1, \ldots, u_m$ су терми језика L, тада

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_n] & \text{акко} & R^{\mathfrak{A}}(u_1^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots, a_n], \ldots, u_m^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots, a_n]) \\ & \text{акко} & R^{\mathfrak{A}'}\big(u_1^{\mathfrak{A}'}(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}), \ldots, u_m^{\mathfrak{A}'}(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n})\big) \\ & \text{акко} & \mathfrak{A}' \models \varphi\big(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}\big). \end{array}$$

Нека је $\mathrm{sl}(\varphi) = k + 1$. Тада разликујемо следеће случајеве:
ако $\varphi \stackrel{\circ}{=} (\psi \wedge \theta)$, тада

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_n] & \text{акко} & \mathfrak{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_n] \ \text{ и } \ \mathfrak{A} \models \theta[a_0, \ldots, a_n] \\ & \text{акко} & \mathfrak{A}' \models \psi\big(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}\big) \ \text{ и } \ \mathfrak{A}' \models \theta\big(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}\big) \\ & \text{акко} & \mathfrak{A}' \models \varphi\big(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}\big), \end{array}$$

ако $\varphi \stackrel{\circ}{=} \neg\psi$, тада

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_n] & \text{акко} & \text{није } \mathfrak{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_n] \\ & \text{акко} & \text{није } \mathfrak{A}' \models \psi\big(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}\big) \\ & \text{акко} & \mathfrak{A}' \models \varphi\big(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}\big), \end{array}$$

ако $\varphi \stackrel{\circ}{=} \exists v_i \psi$ и претпоставимо $\varphi \stackrel{\circ}{=} \varphi(v_1, \ldots, v_n)$, и $i \stackrel{\circ}{=} 0$, тада (за неки $b \in A$)

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] & \text{акко} & \mathfrak{A} \models \psi[b, a_1, \ldots, a_n] \\ & \text{акко} & (\mathfrak{A}', b) \models \psi\big(\underline{b}, \underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}\big) \\ & \text{акко} & \mathfrak{A}' \models \theta[b], \ \text{где је } \theta(x) \stackrel{\circ}{=} \psi\big(x, \underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}\big) \\ & \text{акко} & \mathfrak{A}' \models \exists x \theta(x) \\ & \text{акко} & \mathfrak{A}' \models \varphi\big(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n}\big). \end{array}$$

■

Претходно тврђење казује да су реченице довољне за разматрања у теорији модела, уколико је језик довољно богат. Ову лему користићемо у више прилика. Слично овој леми, индукцијом по сложености терма, доказује се следеће својство хомоморфизама.

Теорема 5.3. *Нека су* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *модели језика* L *и нека је* $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *хомоморфизам. Тада за сваки терм* $t(v_0, \ldots, v_n) \in \mathrm{Term}_L$ *и елементе* $a_0, \ldots, a_n$ *скупа* A *важи*

$$f\big(t^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots, a_n]\big) = t^{\mathfrak{B}}[f(a_0), \ldots, f(a_n)].$$

Релација елементарне еквиваленције је најзначајнија релација између модела. Следеће својство ове релације показује да се теорија модела може применити на задовољавајући начин једино на бесконачне моделе.

Теорема 5.4. *Нека су* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *модели језика* L. *Ако је* $\mathfrak{A}$ *коначан модел и* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, *тада* $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$.

Доказ. Нека је $|A| = n$ и претпоставимо да је $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Према Примеру 5.6. следи

(1) $|B| = n$.

Сада доказујемо следеће помоћно тврђење:

(2) *ако су* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *коначни модели и* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, *тада за сваки* $a \in A$ *постоји* $b \in B$ *такав да* $(\mathfrak{A}, a) \equiv (\mathfrak{B}, b)$.

Заиста, нека је $a \in A$ и нека је $B = \{\, b_1, \ldots, b_n \,\}$. Претпоставимо да не постоји $b \in B$ такав да $(\mathfrak{A}, a) \equiv (\mathfrak{B}, b)$. Даље, нека је c нови симбол константе језика L. Тада за сваки $i \leq n$ постоји формула $\varphi_i(x)$ језика L таква да $(\mathfrak{A}, a) \models \varphi_i(c)$ и $(\mathfrak{B}, b_i) \models \neg\varphi_i(c)$. Отуда, $(\mathfrak{A}, a) \models \bigwedge_{j \leq n} \varphi_j(c)$, одакле, према Леми 5.1. имамо $\mathfrak{A} \models \exists x \bigwedge_{j \leq n} \varphi_j(x)$. Како је $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B} \models \exists x \bigwedge_{j \leq n} \varphi_j(x)$, па за неки $i \leq n$, $\mathfrak{B} \models \big(\bigwedge_{j \leq n} \varphi_j(x)\big)[b_i]$. Према Леми 5.1. следи $(\mathfrak{B}, b_i) \models \bigwedge_{j \leq n} \varphi_j(\underline{b_i})$, дакле $(\mathfrak{B}, b_i) \models \varphi_i(c)$, што је контрадикција. Према томе, тврђење (2) важи.

Узастопном применом тврђења (1) и (2) на неку енумерацију дату са $a_1, a_2, \ldots, a_n$ домена A налазимо

(3) $(\mathfrak{A}, a_1, a_2, \ldots, a_n) \equiv (\mathfrak{B}, b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Пресликавање $f\colon A\to B,\ \ f(a_i)=b_i,\ \ i\le n$, је тада изоморфизам модела $\mathfrak{A}$ у модел $\mathfrak{B}$. Да бисмо то доказали, претпоставимо ради једноставности да је $+\in L$ бинарни операцијски знак. Ако су $a_i,a_j,a_k\in A$ такви да $a_k=a_i+^{\mathfrak{A}}a_j$, тада $(\mathfrak{A},a_1,\dots,a_n)\models \underline{a_k}=\underline{a_i}+\underline{a_j}$ па према (3) следи $(\mathfrak{B},b_1,\dots,b_n)\models \underline{b_k}=\underline{b_i}+\underline{b_j}$, тј. $b_k=b_i+^{\mathfrak{B}}b_j$. С обзиром на дефиницију функције f за све $i,j\le n$ важи $f(a_i+^{\mathfrak{A}}a_j)=f(a_i)+^{\mathfrak{B}}f(a_j)$, тј. f је хомоморфизам за операције $+^{\mathfrak{A}}$ и $+^{\mathfrak{B}}$. ■

Следећа теорема о утапању структура омогућава формирање модела нестандардне анализе, о чему ће више речи бити у наредној глави. Пре тога, уводимо појам *дијаграма модела* и *елементарног дијаграма модела*.

ДЕФИНИЦИЈА 5.9. Нека је $\mathfrak{A}$ модел језика L и нека је L_A језик дат са $L_A=L\cup\{\,a\,|\,a\in A\,\}$. Дијаграм модела $\mathfrak{A}$ је теорија Δ_A језика L_A чије су аксиоме атомске реченице језика L_A и њихове негације тачне у простој експанзији $(\mathfrak{A},a)_{a\in A}$ модела $\mathfrak{A}$. Елементарни дијаграм модела $\mathfrak{A}$ је теорија $\mathrm{Th}(\mathfrak{A},a)_{a\in A}$.

ТЕОРЕМА 5.5. *Нека су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ модели језика L. Тада*
1° *постоји утапање модела $\mathfrak{A}$ у модел $\mathfrak{B}$ ако и само ако постоји проста експанзија $(\mathfrak{B},b_a)_{a\in A}$ модела $\mathfrak{B}$ која је модел дијаграма Δ_A;*
2° *постоји елементарно утапање модела $\mathfrak{A}$ у модел $\mathfrak{B}$ ако и само ако постоји проста експанзија $(\mathfrak{B},b_a)_{a\in A}$ модела $\mathfrak{B}$ која је модел елементарног дијаграма $\mathrm{Th}(\mathfrak{A},a)_{a\in A}$.*

Доказ. 1° Ако је $f\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ утапање, тада $(\mathfrak{B},f(a))_{a\in A}$ је модел теорије Δ_A. На пример, ако $R(a_1,\dots,a_n)\in\Delta_A$, тада имамо да је $(\mathfrak{A},a_1,\dots,a_n)\models R(a_1,\dots,a_n)$ и $\big(\mathfrak{B},f(a_1),\dots,f(a_n)\big)\models R(a_1,\dots,a_n)$ јер је f утапање. С друге стране, ако $(\mathfrak{B},b_a)_{a\in A}\models\Delta_A$, тада $f\colon a\mapsto b_a$ је утапање модела $\mathfrak{A}$ у модел $\mathfrak{B}$. Заиста, ако је $a_1\ne a_2$, $a_1,a_2\in A$, тада $(\neg a_1=a_2)\in\Delta_A$, па $(\mathfrak{B},b_a)_{a\in A}\models\neg a_1=a_2$, тј. $b_{a_1}\ne b_{a_2}$, односно $f(a_1)\ne f(a_2)$. Лако се проверава да f има остала својства утапања. Доказ другог дела тврђења је сличан претходном. ■

Глава 6

Лајбницов принцип

Ултрапроизвод модела једна је од основних конструкција у теорији модела којом се од неких модела може добити нов модел. Овај нов модел има једну битну особину која представља један вид *принципа преноса*: уколико неко својство првог реда важи на полазним моделима, онда то исто својство има и новодобијени модел. Конструкцијом ултрапроизвода поља реалних бројева изграђује се нестандардни универзум са актуелним бесконачно малим и великим бројевима, што заједно са поменутим принципом преноса омогућује непротивуречно заснивање Лајбницове анализе.

6.1 Редукован производ модела

Конструкцији редукованог производа и ултрапроизвода модела претходи конструкција производа модела.

Дефиниција 6.1. Нека су $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, модели језика L. Модел $\mathfrak{B}$ језика L је производ модела $\mathfrak{A}_i$, у ознаци $\mathfrak{B} = \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$, ако $B = \prod_{i\in I} A_i$, а симболи језика L имају следећу интерпретацију у домену B:
1° ако је $c \in \mathrm{Const}_L$, тада је $c^{\mathfrak{B}} = \langle c^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I\rangle$;
2° ако је $F \in \mathrm{Fun}_L$, $\mathrm{ar}(F) = n$, тада за све $f_1, \ldots, f_n \in B$ важи

$$F^{\mathfrak{B}}(f_1, \ldots, f_n) = \langle F^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i)) \mid i \in I\rangle;$$

3° ако је $R \in \mathrm{Rel}_L$, $\mathrm{ar}(R) = n$, онда за све $f_1, \ldots, f_n \in B$ важи

$$R^{\mathfrak{B}}(f_1, \ldots, f_n) \quad \text{акко} \quad R^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i)) \text{ за сваки } i \in I.$$

Уместо $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ писаћемо понекад краће $\prod_i \mathfrak{A}_i$. Ако је I коначан скуп, рецимо $I = \{0,1,\dots,n\}$, користе се и ове ознаке за производ модела $\mathfrak{A}_i$: $\mathfrak{A}_0\times\mathfrak{A}_1\times\cdots\times\mathfrak{A}_n$, $\prod_{i=0}^n\mathfrak{A}_i$. За овако изабран скуп индекса I, можемо $(n{+}1)$–торку $(a_0,\dots,a_n)$ идентификовати са функцијом $\{(0,a_0),\dots,(n,a_n)\}$, или пак задржати уобичајену дефиницију n–торке и томе прилагодити дефиницију производа модела. У овом другом случају добијени модел изоморфан је производу у смислу претходне дефиниције.

Пример 6.1. 1° Производ прстена је прстен. Производ поља није поље.
2° Производ уређених скупова је уређен скуп. Производ линеарно уређених скупова није линеарно уређен скуп (осим уколико није реч о једночланим скуповима).

Пресликавање $\pi_i\colon B\to A_i$, где је за $f\in B$, $\pi_i(f)=f(i)$, назива се i–том пројекцијом производа $B=\prod_j A_j$. Свака пројекција π_i је хомоморфизам за све операције модела $\mathfrak{B}$. Наиме, ако је $F\in\mathrm{Fun}_L$ и $f_1,\dots,f_n\in B$, тада очигледно важи

$$\pi_i(F^{\mathfrak{B}}(f_1,\dots,f_n)) = F^{\mathfrak{A}_i}(\pi_i(f_1),\dots,\pi_i(f_n)).$$

Исто тако, за $c\in\mathrm{Const}_L$ важи $\pi_i(c^{\mathfrak{B}})=c^{\mathfrak{A}_i}$.

У поглављу о ултрапроизводима описан је редукован производ прстена и уређених поља. Ова конструкција непосредно се шири на било које моделе. Нека су $\mathfrak{A}_i$, $i\in I$, модели језика L и нека је $\mathcal{D}$ филтер над I. Према Теореми 3.1. филтерска релација $=_{\mathcal{D}}$ јесте једна релација еквиваленције домена $B=\prod_i A_i$. За производ $\mathfrak{B}=\prod_i\mathfrak{A}_i$ важи и нешто више.

Лема 6.1. 1° *Релација $=_{\mathcal{D}}$ је конгруенција за операције модела $\mathfrak{B}$, тј. ако је $F\in\mathrm{Fun}_L$ дужине n, онда за све елементе $f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n$ скупа B важи*

$$f_1 =_{\mathcal{D}} g_1,\dots,f_n =_{\mathcal{D}} g_n \quad \text{повлачи} \quad F^{\mathfrak{B}}(f_1,\dots,f_n) =_{\mathcal{D}} F^{\mathfrak{B}}(g_1,\dots,g_n).$$

2° *Ако је $R\in\mathrm{Rel}_L$, $\mathrm{ar}(R)=n$, онда за све $f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n\in B$ тако да $f_1 =_{\mathcal{D}} g_1,\dots,f_n =_{\mathcal{D}} g_n$ важи*

$$\{\, i\in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i),\dots,f_n(i))\,\}\in\mathcal{D} \ \text{акко}$$
$$\{\, i\in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i),\dots,g_n(i))\,\}\in\mathcal{D}.$$

Доказ. Нека $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n \in B$ и $f_1 =_{\mathcal{D}} g_1, \dots, f_n =_{\mathcal{D}} g_n$. Тада за скупове $X_j = \{\, i \in I \mid f_j(i) = g_j(i) \,\},\ j = 1, \dots, n$, важи $X_j \in \mathcal{D}$, па $\bigcap_j X_j \in \mathcal{D}$. Отуда је

$$\bigcap\nolimits_j X_j \subseteq \{\, i \in I \mid F^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \dots, f_n(i)) = F^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \dots, g_n(i)) \,\},$$

па је

$$\langle F^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \dots, f_n(i)) \mid i \in I \rangle =_{\mathcal{D}} \langle F^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \dots, g_n(i)) \mid i \in I \rangle,$$

а одатле следи први део тврђења.
За $Y = \{\, i \in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \dots, f_n(i)) \,\}, Z = \{\, i \in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \dots, g_n(i)) \,\}$ важи $Y \cap (\bigcap_j X_j) \subseteq Z$ и $Z \cap (\bigcap_j X_j) \subseteq Y$, па $Y \in \mathcal{D}$ ако и само ако $Z \in \mathcal{D}$, а одатле следи други део тврђења. ∎

Претходна лема омогућава да се на количничком скупу $A = \prod_i A_i/\mathcal{D}$ дефинише модел $\mathfrak{A}$ на следећи начин:

- ако је $c \in \mathrm{Const}_L$, онда је $c^{\mathfrak{A}} = \langle c^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle_{\mathcal{D}}$,
- ако је $F \in \mathrm{Fun}_L$ и $\mathrm{ar}(F) = n$, тада за све $f_1, \dots, f_n \in B$ важи $F^{\mathfrak{A}}(f_{1\mathcal{D}}, \dots, f_{n\mathcal{D}}) = F^{\mathfrak{B}}(f_1, \dots, f_n)_{\mathcal{D}}$,
- ако је $R \in \mathrm{Rel}_L$ и $\mathrm{ar}(R) = n$, тада за све $f_1, \dots, f_n \in B$ важи $R^{\mathfrak{A}}(f_{1\mathcal{D}}, \dots, f_{n\mathcal{D}})$ акко $\{\, i \in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \dots, f_n(i)) \,\} \in \mathcal{D}$.

Овако конструисан модел $\mathfrak{A}$ назива се *редукованим производом* модела $\mathfrak{A}_i$ и означава се са $\prod_i \mathfrak{A}_i/\mathcal{D}$, или краће $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$. Полазећи од дефиниције редукованог производа, непосредно се проверава да је пресликавање $f \mapsto f_{\mathcal{D}}$ хомоморфизам модела $\prod_i \mathfrak{A}_i$ на модел $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$. Рецимо, ако је R n–арни релацијски знак и $R^{\mathfrak{B}}(f_1, \dots, f_n)$, где $f_1, \dots, f_n \in B$, тада за сваки $i \in I$, важи $R^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \dots, f_n(i))$, одакле закључујемо $R^{\mathfrak{A}}(f_{1\mathcal{D}}, \dots, f_{n\mathcal{D}})$ јер $\{\, i \in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \dots, f_n(i) \,\} \in \mathcal{D}$.

Пример 6.2. 1° Ако је $\mathcal{D} = \{\, I \,\}$, тада је $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i \cong \prod_i \mathfrak{A}_i$. Дакле, производ модела је посебан случај редукованог производа.

2° Нека је $\mathcal{D}$ главни филтер над I генерисан елементом $i_0 \in I$. Тада је пресликавање $\tau\colon f_{\mathcal{D}} \mapsto f(i_0)$ изоморфизам модела $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_{i_0}$.

3° Нека је $X \subseteq I$ и $\mathcal{D}$ главни филтер генерисан скупом X, тј. важи $\mathcal{D} = \{\, Y \subseteq I \mid X \subseteq Y \,\}$. Тада је пресликавање $f_{\mathcal{D}} \mapsto \langle f(i) \mid i \in X \rangle$ изоморфизам модела $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$ и $\prod_{i \in X} \mathfrak{A}_i$.

Уколико су сви модели $\mathfrak{A}_i,\ i \in I$, међусобно једнаки, рецимо да је $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{C}$ за $i \in I$, тада се редуковани производ $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$ назива редукованим степеном модела $\mathfrak{C}$, и обележава се са $\mathfrak{C}^{\mathcal{D}}$. Следеће тврђење казује да редуковани степен комутира са коначним производом.

Теорема 6.1. *Нека су $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ модели језика L и нека је $\mathcal{D}$ филтер над I. Тада*

$$\mathfrak{A}_1^{\mathcal{D}} \times \cdots \times \mathfrak{A}_n^{\mathcal{D}} \cong (\mathfrak{A}_1 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n)^{\mathcal{D}}.$$

Доказ. Пресликавање $\tau\colon ({f_1}_{\mathcal{D}}, \ldots, {f_n}_{\mathcal{D}}) \mapsto (f_1, \ldots, f_n)_{\mathcal{D}},\ f_j \in {A_j}^I$ за $j = 1, \ldots, n$, је добро дефинисано и такође 1-1 и *на*. Заиста, нека је испуњено да $f_j, g_j \in {A_j}^I$, $j = 1, \ldots, n$, и $X_j = \{\, i \in I \mid f_j(i) = g_j(i)\,\}$. Тада важи да је $f_1 =_{\mathcal{D}} g_1, \ldots, f_n =_{\mathcal{D}} g_n$ ако и само ако $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{D}$, тј. $\bigcap_j X_j \in \mathcal{D}$. С друге стране, имамо да $\{\, i \in I \mid (f_1(i), \ldots, f_n(i)) = (g_1(i), \ldots, g_n(i))\,\} = \bigcap_j X_j$, дакле $f_1 =_{\mathcal{D}} g_1, \ldots, f_n =_{\mathcal{D}} g_n$ ако и само ако $(f_1, \ldots, f_n) =_{\mathcal{D}} (g_1, \ldots, g_n)$. Дакле, τ је бијекција између скупова $A_1^{\mathcal{D}} \times \cdots \times A_n^{\mathcal{D}}$ и $(A_1 \times \cdots \times A_n)^{\mathcal{D}}$.

Ако је $f_j \in {A_j}^I,\ j = 1, \ldots, n$, пресликавање $g \in (A_1 \times \cdots \times A_n)^I$ дефинисано са $g(i) = (f_1(i), \ldots, f_n(i)),\ \ i \in I$, ради једноставности бележимо са $g = (f_1, \ldots, f_n)$. При оваквој дефиницији уређене n–торке функција важи

$$(f_1, \ldots, f_n) = \big\langle (f_1(i), \ldots, f_n(i)) \mid i \in I \big\rangle.$$

Даље, нека је F k–арни функцијски знак језика L. Тада за $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_1^{\mathcal{D}} \times \cdots \times \mathfrak{A}_n^{\mathcal{D}}$, $\mathfrak{N} = (\mathfrak{A}_1 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n)^{\mathcal{D}}$, $\sigma_j = \left({f_1^j}_{\mathcal{D}}, \ldots, {f_n^j}_{\mathcal{D}} \right)$, где $f_s^j \in A_s^I$ за $s = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, k$ важи $\tau F^{\mathfrak{M}}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) =$

$$= \tau \left(F^{\mathfrak{A}_1^{\mathcal{D}}}({f_1^1}_{\mathcal{D}}, \ldots, {f_1^k}_{\mathcal{D}}), \ldots, F^{\mathfrak{A}_n^{\mathcal{D}}}({f_n^1}_{\mathcal{D}}, \ldots, {f_n^k}_{\mathcal{D}}) \right)$$

$$= \tau \big(\langle F^{\mathfrak{A}_1}(f_1^1(i), \ldots, f_1^k(i)) \mid i \in I \rangle_{\mathcal{D}}, \ldots, \langle F^{\mathfrak{A}_n}(f_n^1(i), \ldots, f_n^k(i)) \mid i \in I \rangle_{\mathcal{D}} \big)$$

$$= \big(\langle F^{\mathfrak{A}_1}(f_1^1(i), \ldots, f_1^k(i)) \mid i \in I \rangle, \ldots, \langle F^{\mathfrak{A}_n}(f_n^1(i), \ldots, f_n^k(i)) \mid i \in I \rangle \big)_{\mathcal{D}}$$

$$= \langle \big(F^{\mathfrak{A}_1}(f_1^1(i), \ldots, f_1^k(i)), \ldots, F^{\mathfrak{A}_n}(f_n^1(i), \ldots, f_n^k(i)) \big) \mid i \in I \rangle_{\mathcal{D}}$$

$$= \langle F^{\mathfrak{A}_1 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n}((f_1^1(i), \ldots, f_n^1(i)), \ldots, (f_1^k(i), \ldots, f_n^k(i)) \mid i \in I \rangle_{\mathcal{D}}$$

$$= F^{\mathfrak{N}}(\tau\sigma_1, \ldots, \tau\sigma_k).$$

Слично се доказује да је τ хомоморфизам за релације модела $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, дакле $\tau\colon \mathfrak{A}_1^{\mathcal{D}} \times \cdots \times \mathfrak{A}_n^{\mathcal{D}} \cong (\mathfrak{A}_1 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n)^{\mathcal{D}}$. ∎

Нарочито важно место у конструкцији редукованих производа имају ултрапроизвод и ултрастепен.

Дефиниција 6.2. Нека је $\mathcal{D}$ ултрафилтер над I, и нека су $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, модели језика L. Тада се редуковани производ $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$ назива ултрапроизводом модела $\mathfrak{A}_i$. Редуковани степен $\mathfrak{A}^{\mathcal{D}}$ назива се ултрастепеном модела $\mathfrak{A}$.

Пример 6.2. 2° показује да су од интереса ултрапроизводи код којих је ултрафилтер $\mathcal{D}$ неглаван.

6.2 Лошова теорема

Важност ултрапроизвода проистиче управо из принципа преноса. О томе прецизно говори Лошова теорема.

Лема 6.2. *Нека је* $\mathfrak{A} = \prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$ *редукован производ модела* $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, *језика* L, $t, t_1, \dots, t_m$ *терми језика* L *и* R m*–арни релацијски знак језика* L. *Тада за све* $f_1, \dots, f_n \in \prod_i A_i$ *важи:*
1° $t^{\mathfrak{A}}[f_{1\mathcal{D}}, \dots, f_{n\mathcal{D}}] = \langle t^{\mathfrak{A}_i}[f_1(i), \dots, f_n(i)] \mid i \in I \rangle_{\mathcal{D}}$;
2° $\mathfrak{A} \models R(t_1, \dots, t_m)[f_{1\mathcal{D}}, \dots, f_{n\mathcal{D}}]$ *ако и само ако*
$\{ i \in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(t_1^{\mathfrak{A}_i}[f_1(i), \dots, f_n(i)], \dots, t_m^{\mathfrak{A}_i}[f_1(i), \dots, f_n(i)]) \} \in \mathcal{D}$.

Доказ. 1° Пресликавање $\tau \colon f \to f_{\mathcal{D}}$ је хомоморфизам модела датог са $\mathfrak{B} = \prod_i \mathfrak{A}_i$ на модел $\mathfrak{A}$.
Из $\tau t^{\mathfrak{B}}[f_1, \dots, f_n] = \langle t^{\mathfrak{A}_i}[f_1(i), \dots, f_n(i)] \mid i \in I \rangle_{\mathcal{D}}$ следи да 1° важи.
2° Нека је $g_j \in \prod_i A_i$ дефинисано са $g_j(i) = t_j^{\mathfrak{A}_i}[f_1(i), \dots, f_n(i)]$, $i \in I$, $j = 1, \dots, m$. Тада према 1° важи

$$g_{j\mathcal{D}} = t_j^{\mathfrak{A}}[f_{1\mathcal{D}}, \dots, f_{n\mathcal{D}}],$$

одакле је, према интерпретацији релације у редукованом производу,

$R^{\mathfrak{A}}[g_{1\mathcal{D}}, \dots, g_{n\mathcal{D}}]$

акко $\{ i \in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \dots, g_n(i)) \} \in \mathcal{D}$
акко $\{ i \in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(t_1^{\mathfrak{A}_i}[f_1(i), \dots, f_n(i)], \dots, t_m^{\mathfrak{A}_i}[f_1(i), \dots, f_n(i)]) \} \in \mathcal{D}$,

чиме је доказ тврђења 2° завршен. ■

Следећа теорема казује централну особину ултрапроизвода. Напомињемо да она не важи за било које редуковане производе, но то за нас не представља сметњу јер ће Лајбницов универзум бити конструисан као један ултрапроизвод. Ова теорема је такође позната под именом Лошова теорема.

Теорема 6.2. *Нека су* $\mathfrak{A}_i,\ i \in I$, *модели језика* L *и нека је* $\mathcal{D}$ *ултрафилтер над* I. *Тада за сваку формулу* $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ *језика* L *и* $f_0, \ldots, f_n \in \prod_i A_i$ *важи следећа еквиваленција*

$$\prod\nolimits_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i \models \varphi[f_{0\mathcal{D}}, \ldots, f_{n\mathcal{D}}] \quad \textit{акко} \quad \{\, i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi[f_0(i), \ldots, f_n(i)] \,\} \in \mathcal{D}.$$

Доказ. Доказ ове теореме изводимо индукцијом по сложености формуле φ, користећи индуктивну дефиницију релације задовољења.

Нека је $\mathfrak{A} = \prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$, и нека је $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ формула језика L. Тада разликујемо следеће случајеве.

1° $\mathrm{sl}(\varphi) = 0$. Имамо два подслучаја.

- $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ је облика $t_1(x_0, \ldots, x_n) = t_2(x_0, \ldots, x_n)$ где су t_1, t_2 терми језика L. Тада за $f_0, \ldots, f_n \in \prod_i A_i$ имамо

$\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i \models \varphi[f_{0\mathcal{D}}, \ldots, f_{n\mathcal{D}}]$ акко $t_1^{\mathfrak{A}}[f_{0\mathcal{D}}, \ldots, f_{n\mathcal{D}}] = t_2^{\mathfrak{A}}[f_{0\mathcal{D}}, \ldots, f_{n\mathcal{D}}]$ према Леми 6.2.

$$\begin{array}{ll}
\text{акко} & \big\langle t_1^{\mathfrak{A}_i}[f_0(i), \ldots, f_n(i)] \,\big|\, i \in I \big\rangle =_{\mathcal{D}} \big\langle t_2^{\mathfrak{A}_i}[f_0(i), \ldots, f_n(i)] \,\big|\, i \in I \big\rangle \\
\text{акко} & \big\{\, i \in I \,\big|\, t_1^{\mathfrak{A}_i}[f_0(i), \ldots, f_n(i)] = t_2^{\mathfrak{A}_i}[f_0(i), \ldots, f_n(i)] \,\big\} \in \mathcal{D} \\
\text{акко} & \big\{\, i \in I \,\big|\, \mathfrak{A}_i \models \varphi[f_0(i), \ldots, f_n(i)] \,\big\} \in \mathcal{D}.
\end{array}$$

- Формула $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ је $R(t_1(x_0, \ldots, x_n), \ldots, t_m(x_0, \ldots, x_n))$ и R је релацијски знак дужине m језика L, $t_1, \ldots, t_m \in \mathrm{Term}_L$. Тада тврђење следи према Леми 6.2.

2° Претпоставимо да тврђење важи за све формуле ψ, $\mathrm{sl}(\psi) < \mathrm{sl}(\varphi)$ и $\mathrm{sl}(\varphi) > 1$. Тада разликујемо следеће случајеве.

- Формула φ је облика $\psi \wedge \theta$.

Тада је $\mathrm{sl}(\psi), \mathrm{sl}(\theta) < \mathrm{sl}(\varphi)$, те за $f_0, \ldots, f_n \in \prod_i A_i$ имамо

$$\mathfrak{A} \models \varphi[f_{0\mathcal{D}}, \ldots, f_{n\mathcal{D}}] \text{ акко } \mathfrak{A} \models \psi[f_{0\mathcal{D}}, \ldots, f_{n\mathcal{D}}] \text{ и } \mathfrak{A} \models \theta[f_{0\mathcal{D}}, \ldots, f_{n\mathcal{D}}].$$

Користећи индуктивну хипотезу $\{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \psi[f_0(i), \dots, f_n(i)] \,\} \in \mathcal{D}$ и $\{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \theta[f_0(i), \dots, f_n(i)] \,\} \in \mathcal{D}$, па и њихов пресек је у $\mathcal{D}$, односно

$$\{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \varphi[f_0(i), \dots, f_n(i)] \,\} \in \mathcal{D}.$$

- Формула φ је облика $\neg\psi$.

Тада $\mathrm{sl}(\psi) < \mathrm{sl}(\varphi)$ и такође је $\mathfrak{A} \models \varphi[f_{0\mathcal{D}}, \dots, f_{n\mathcal{D}}]$

$$\begin{array}{ll}
\text{акко} & \text{није } \mathfrak{A} \models \psi[f_{0\mathcal{D}}, \dots, f_{n\mathcal{D}}] \\
\text{акко} & \text{није } \{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \psi[f_0(i), \dots, f_n(i)] \,\} \in \mathcal{D} \\
\text{акко} & \{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \psi[f_0(i), \dots, f_n(i)] \,\}^c \in \mathcal{D} \\
\text{акко} & \{\, i \in I \,|\, \text{није } \mathfrak{A}_i \models \psi[f_0(i), \dots, f_n(i)] \,\} \in \mathcal{D} \\
\text{акко} & \{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \varphi[f_0(i), \dots, f_n(i)] \,\} \in \mathcal{D}.
\end{array}$$

- Формула φ је облика $\exists y \psi(y, x_0, \dots, x_n)$.

Тада је $\mathrm{sl}(\psi) < \mathrm{sl}(\varphi)$. Нека је $\mathfrak{A} \models \varphi[f_{0\mathcal{D}}, \dots, f_{n\mathcal{D}}]$ за $f_0, \dots, f_n \in \prod_i A_i$. Тада за неку функцију $g \in \prod_i A_i$, важи $\mathfrak{A} \models \psi[g_{\mathcal{D}}, f_{0\mathcal{D}}, \dots, f_{n\mathcal{D}}]$. Према индуктивној хипотези је $\{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \psi[g(i), f_0(i), \dots, f_n(i)] \,\} \in \mathcal{D}$. Како је

$$\{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \psi[g(i), f_0(i), \dots, f_n(i)] \,\} \subseteq$$
$$\subseteq \{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \varphi[f_0(i), \dots, f_n(i)] \,\},$$

то $\{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \varphi[f_0(i), \dots, f_n(i)] \,\} \in \mathcal{D}$. С друге стране, нека је $X = \{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \varphi[f_0(i), \dots, f_n(i)] \,\} \in \mathcal{D}$. Тада за $i \in X$ важи $\mathfrak{A}_i \models \varphi[f_0(i), \dots, f_n(i)]$, тј. за неки $c_i \in A_i$, $\mathfrak{A}_i \models \psi[c_i, f_0(i), \dots, f_n(i)]$. Нека је $g \in \prod_i A_i$ таква функција да је за $i \in X$, $g(i) = c_i$. Тада $X \subseteq \{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \psi[g(i), f_0(i), \dots, f_n(i)] \,\}$, те како је $X \in \mathcal{D}$, то следи $\{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \psi[g(i), f_0(i), \dots, f_n(i)] \,\} \in \mathcal{D}$. Према индуктивној хипотези $\mathfrak{A} \models \psi[g_{\mathcal{D}}, f_{0\mathcal{D}}, \dots, f_{n\mathcal{D}}]$, тј. $\mathfrak{A} \models \varphi[f_{0\mathcal{D}}, \dots, f_{n\mathcal{D}}]$.

Како су остале логичке операције сводљиве на претходне случајеве, овим је доказ теореме завршен. ■

Уколико је φ реченица језика L, онда истинитост формуле φ не зависи од избора валуације. Отуда према Лошовој теореми следи тврђење.

Последица 6.1. *Нека је φ реченица језика L, и нека су $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, модели језика L. Тада*

$$\prod\nolimits_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i \models \varphi \qquad \textit{ако и само ако} \qquad \{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \varphi \,\} \in \mathcal{D}.$$

Сада смо у могућности да дамо још један доказ Теореме 3.3. тј. да је ултрапроизвод уређених поља такође уређено поље. Заиста, аксиоме уређених поља су реченице првог реда па тврђење следи на основу Последице 6.1.

Приликом увођења редукованог производа напоменуто је да сваки ултрафилтер одређује једну коначно-адитивну меру на скупу индекса I. Отуда запис $\{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \varphi \,\} \in \mathcal{D}$ можемо и овако да читамо

- $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ за скоро сваки $i \pmod{\mathcal{D}}$, или краће
- $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ с.с. $i \pmod{\mathcal{D}}$,

с обзиром да је $\{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \varphi \,\} \in \mathcal{D}$ акко $\mu_{\mathcal{D}}\big(\{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \varphi \,\}\big) = 1$.

Последице Лошове теореме су многобројне, једна од важнијих је следећа теорема.

ТЕОРЕМА 6.3. (КОМПАКТНОСТ) *Нека је T теорија језика L. Ако сваки коначан подскуп теорије T има модел, онда и теорија T има модел.*

Доказ. Нека је I скуп коначних подскупова теорије T и нека је за сваки $i \in I$, $\mathfrak{A}_i$ модел теорије i. Даље, нека је за $\varphi \in T$, дефинисано $S_\varphi = \{\, i \in I \,|\, \varphi \in i \,\}$. Тада фамилија $\Upsilon = \{\, S_\varphi \,|\, \varphi \in T \,\}$ има својство коначног пресека, дакле постоји ултрафилтер $\mathcal{D}$ над I који садржи скуп Υ. Нека је $\mathfrak{A} = \prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$. Тада је за $\varphi \in T$, $\mathfrak{A} \models \varphi$. Заиста, како је $S_\varphi \subseteq \{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \varphi \,\}$ и $S_\varphi \in \mathcal{D}$, онда $\{\, i \in I \,|\, \mathfrak{A}_i \models \varphi \,\} \in \mathcal{D}$. Према Лошовој теореми имамо да је $\mathfrak{A} \models \varphi$. ∎

Нека је T теорија језика L и нека је $\Sigma(x) = \{\, \varphi_i(x) \,|\, i \in I \,\}$ скуп неких формула језика L. Уколико за произвољан коначан подскуп $\{\, \varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x) \,\} \subseteq \Sigma(x)$ постоји модел $\mathfrak{A}$ теорије T и елемент $a \in A$ такав да $(\mathfrak{A}, a) \models \bigwedge_{i \le n} \varphi_i(\underline{a})$, тада за скуп $\Sigma(x)$ кажемо да је *тип* теорије T. Уколико је $\mathfrak{B}$ модел језика L и $b \in B$ такав да је за све $i \in I$, $\mathfrak{B} \models \varphi_i[b]$, онда кажемо да модел $\mathfrak{B}$ *реализује* тип $\Sigma(x)$. Следећа једноставна примена става компактности показује да је сваки тип теорије T реализован у неком моделу теорије T.

ТЕОРЕМА 6.4. *Нека је T непротивуречна теорија језика L и нека је $\Sigma(x)$ тип теорије T. Тада постоји модел $\mathfrak{A}$ теорије T који реализује тип $\Sigma(x)$.*

Доказ. Нека је $T' = T \cup \{\, \varphi(c) \mid \varphi \in \Sigma(x) \,\}$, где је c нова константа за језик L. Тада сваки коначан подскуп теорије T' има модел, па према ставу компактности постоји модел $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}, a)$ теорије T', где је $c^{\mathfrak{A}'} = a$. Тада је $\mathfrak{A}$ модел теорије T и елемент a реализује тип $\Sigma(x)$ у моделу $\mathfrak{A}$. ■

На пример, уређено поље $\mathbf{F}$ је неархимедско ако и само ако $\mathbf{F}$ реализује тип $\Sigma(x) = \Big\{\, 0 < x < \dfrac{1}{n} \,\Big|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{\, 0 \,\} \,\Big\}$.

Ево још једне занимљиве последице става компактности.

Теорема 6.5. *Претпоставимо да теорија T језика L има бесконачан модел. Тада теорија T има моделе произвољно велике кардиналности.*

Доказ. Нека је κ кардиналан број, и нека је $\{\, c_m \mid m < \kappa \,\}$ скуп нових константи језика L. Даље, нека је

$$T' = T \cup \{\, c_m \neq c_n \mid m \neq n,\ m, n < \kappa \,\}.$$

По претпоставци теорија T има бесконачан модел, па нека је $\mathfrak{A}$ неки такав модел теорије T. Тада сваки коначан подскуп теорије T' има модел, то је нека проста експанзија модела $\mathfrak{A}$. Отуда, према ставу компактности, теорија T' има модел $\mathfrak{B}' = (\mathfrak{B}, b_m)_{m<\kappa}$, где је $c_m^{\mathfrak{B}'} = b_m$, те је $\mathfrak{B}$ модел теорије T. Како за $m \neq n$ важи $b_m \neq b_n$, то следи $|B| \geq \kappa$. ■

Доказ ове теореме може се извести директно користећи конструкцију ултрапроизвода. Наиме, ако је $\mathfrak{A}$ модел теорије T и ако је $\mathcal{D}$ неки ултрафилтер над скупом индекса I, онда је према Лошовој теореми $\mathfrak{A}^I/\mathcal{D}$ такође модел теорије T. С друге стране, ако се $\mathfrak{A}$ изабере тако да је његов домен A бесконачан и ако се узме да је $\mathcal{D}$ κ–регуларан ултрафилтер (видети задатак 50), онда је $|A^I/\mathcal{D}| = |A|^\kappa$ (видети исти задатак), па је $\mathfrak{A}^I/\mathcal{D}$ модел теорије T кардиналности $\geq \kappa$.

Последња теорема је само посебан случај Сколем-Левенхајм-Тарскијеве теореме. Ова теорема казује да свака теорија T која има бесконачан модел, има такође моделе у свим кардиналним бројевима већим од $\|L\|$, где је $\|L\|$ кардинални број формула језика L.

Глава 7

Нестандардни приступ граничним процесима

Кроз ову главу о конвергенцији реалних низова, непрекидности, диференцијабилности и интеграбилности реалних функција уверићемо се, још једном, да је моћ нестандардног приступа граничним процесима у томе што се интуитивни појмови појављују природно, док је сама техника доказа још увек прикривена.

7.1 Конвергенција реалних низова

Конвергенцију реалних низова искажимо класичним (Вајерштрасовим) приступом, као и помоћу Фрешеовог филтера над $\mathbb{N}$.

Дефиниција 7.1. Тачка $x_\infty \in \mathbb{R}$ је гранична вредност (лимес) низа $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ознаке: $x_\infty = \lim x$ или $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$) ако важи:

$$(\forall\varepsilon)(\exists l)(\forall n)[n \geq l \Rightarrow |x_n - x_\infty| < \varepsilon], \quad l \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0.$$

Ако је $\mathcal{F}$ Фрешеов филтер над скупом $\mathbb{N}$ природних бројева, тј. ако је $\mathcal{F} = \{\, M \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus M \text{ је коначан} \,\}$, тада је $x_\infty = \lim x$ еквивалентно са

$$(\forall\varepsilon)\ x^{-1}\big(x_\infty +]-\varepsilon, +\varepsilon[\big) \in \mathcal{F},$$

јер је $|x_n - x_\infty| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in x_\infty +]-\varepsilon, +\varepsilon[\Leftrightarrow n \in x^{-1}\big(x_\infty +]-\varepsilon, +\varepsilon[\big)$ и за $M \subseteq \mathbb{N}$ је $(\exists l)(\forall n)[n \geq l \Rightarrow n \in M]$ еквивалентно са „скуп $\mathbb{N} \setminus M$ је коначан”.

Низ $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ је *конвергентан* ако: $(\exists a \in \mathbb{R}) \lim x = a$.

Да бисмо ове релације исказали нестандардно (у пољу ${}^*\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$) приметимо прво да за $M \subseteq \mathbb{N}$ важи:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} \setminus M \ \text{је коначан} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{N} \setminus M \ \text{је ограничен} \\
&\Leftrightarrow \quad {}^*\mathbb{N} \setminus {}^*M \subseteq \gamma(0) \\
&\Leftrightarrow \quad {}^*M \supseteq {}^*\mathbb{N} \setminus \gamma(0).
\end{aligned}$$

Приметимо да је ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = {}^*\mathbb{N} \setminus \gamma(0)$ скуп бесконачних хиперприродних бројева. Сада је за $x_\infty \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ испуњено:

$(\forall \varepsilon)\ \mathbb{N} \setminus x^{-1}\big(x_\infty +]-\varepsilon, +\varepsilon[\,\big)$ је коначан

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon)^* x^{-1}\big(x_\infty + {}^*]-\varepsilon, +\varepsilon[\,\big) \supseteq {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon)^* x({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \subseteq \big(x_\infty + {}^*]-\varepsilon, +\varepsilon[\,\big) \\
&\Leftrightarrow \quad {}^*x({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \subseteq x_\infty + \bigcap\nolimits_{\varepsilon>0} {}^*]-\varepsilon, +\varepsilon[\\
&\Leftrightarrow \quad {}^*x({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \subseteq x_\infty + \mu(0) = \mu(x_\infty).
\end{aligned}$$

Овим је доказано следеће тврђење.

Теорема 7.1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})\ {}^*x_\nu \in \mu(x_\infty) \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})\ {}^*x_\nu \approx x_\infty \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})\ (\mathrm{st}({}^*x_\nu) = x_\infty),\ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ x_\infty \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Често ћемо продужење ${}^*x$ низа $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ означавати такође са x; за $n \in \mathbb{N}$ је ${}^*x_n = x_n$, те је свеједно коју од ове две ознаке употребљавамо, док за $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ознака x_ν за $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ нема смисла, те је јасно да се ради о ${}^*x_\nu$.

Приметимо да конвергентан низ има тачно једну граничну вредност. Заиста, ако је $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ конвергентан низ и ако изаберемо следећи елемент $\nu = \langle 0, 1, 2, \ldots \rangle_{\mathcal{D}} \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ (видети Пример 3.1.), онда је гранична вредност $\lim x = \mathrm{st}\, x_\nu$ јединствена.

Видели смо да потребан и довољан услов за конвергенцију низа $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ка $x_\infty \in \mathbb{R}$ јесте $x_\nu \approx x_\infty$ за све бесконачне $\nu \in {}^*\mathbb{N}$. Међутим, овај услов за конвергенцију низа x можемо да ослабимо.

ТЕОРЕМА 7.2. *Ако је x стандардан низ за који постоји бесконачно $H \in {}^*\mathbb{N}$ такво да је $x_\nu \approx x_\infty$ за све бесконачне $\nu < H$, тада је* $\lim x = x_\infty$.

Доказ. За сваки стандардан позитиван број ε, интерналан скуп

$$A = \{\, \kappa \in {}^*\mathbb{N} \,\big|\, |x_\nu - x_\infty| < \varepsilon \text{ за све } \kappa \leq \nu < H \,\}$$

је непразан. Прво κ које задовољава тај услов, рецимо $\kappa = \kappa_0$, је коначно. Према томе, $|x_n - x_\infty| < \varepsilon$ за све коначне $n \geq \kappa_0$ (у ${}^*\mathbb{R}$, и у $\mathbb{R}$), што показује $\lim x = x_\infty$. ■

Наводимо и један пример примене правила

$$M \in \mathcal{F} \quad \text{ако и само ако} \quad {}^*M \supseteq {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}, \qquad M \subseteq \mathbb{N}.$$

ПРИМЕР 7.1. Нека су x, y из $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ и нека су x_∞, y_∞ из $\mathbb{R}$ такви да важи $\lim x = x_\infty$ и $\lim y = y_\infty$. Тада

(1) из $x_\infty < y_\infty$ следи $\{\, n \in \mathbb{N} \mid x_n < y_n \,\} \in \mathcal{F}$,

(2) ако је $\{\, n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq y_n \,\}$ бесконачан, онда је $x_\infty \geq y_\infty$.

Заиста, нека је $M = \{\, n \in \mathbb{N} \mid x_n < y_n \,\}$, тј. $M = (x - y)^{-1}(\,]-\infty, 0[\,)$. Тада је ${}^*M = ({}^*x - {}^*y)^{-1}({}^*]-\infty, 0[\,) = \{\, \nu \in {}^*\mathbb{N} \mid x_\nu < y_\nu \,\}$. За $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ је $x_\nu \in \mu(x_\infty)$, $y_\nu \in \mu(y_\infty)$ те је, због $x_\infty < y_\infty$, и $x_\nu < y_\nu$. Коначно је ${}^*M \supseteq {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, и отуда $M \in \mathcal{F}$.

Друго тврђење је контрапозиција првог. Оно се може доказати и директно. Нека је $P = \{\, n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq y_n \,\}$ бесконачан и $\varphi \colon \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} P$. Тада је $\nu = \langle \varphi_n \rangle_\mathcal{D} \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ и $x \circ \varphi \geq y \circ \varphi$, те је $x_\nu = \langle (x \circ \varphi)_n \rangle_\mathcal{D} \geq \langle (y \circ \varphi)_n \rangle_\mathcal{D} = y_\nu$, и отуда $x_\infty = \operatorname{st} x_\nu \geq \operatorname{st} y_\nu = y_\infty$.

ТЕОРЕМА 7.3. *Конвергентан низ је ограничен.*

Доказ. Нека је $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, $x_\infty \in \mathbb{R}$ и $\lim x = x_\infty$. Интерналан скуп $x({}^*\mathbb{N}) = x(\mathbb{N}) \cup x({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R} \cup \mu(x_\infty) \subseteq \gamma(0)$, па је низ x ограничен. ■

Наводимо и неколико примера примене Теореме 7.1.

Пример 7.2. 1° Ако је $x_n = \frac{2n+1}{n}$, онда је, за свако $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ важи $x_\nu = 2 + \frac{1}{\nu} \approx 2$ јер је $\frac{1}{\nu}$ инфинитезимала. Према томе, $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

2° За низ $x_n = \sqrt[n]{n}$ важи $x_n > 1$, $n \geq 2$, па то важи и за све бесконачне природне бројеве $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Дакле, за неко $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ је $x_\nu = 1 + r$, где је $r \in {}^*\mathbb{R}^+$ $(r > 0)$. Тада је $x_\nu^\nu = (1+r)^\nu = 1 + \nu r + \frac{\nu(\nu-1)}{2} r^2 + \cdots + r^\nu$ и $\nu = x_\nu^\nu > \frac{\nu(\nu-1)}{2} r^2 > \frac{\nu^2}{4} r^2$, а то је могуће само ако је r инфинитезимала. Дакле, $x_\nu \approx 1$ за све $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Ово показује да $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3° (Кошијева теорема) Ако реалан низ x_n конвергира броју x_∞, тада и низ аритметичких средина $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ конвергира броју x_∞. Нека је $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ и $S_\nu = \frac{x_1+\cdots+x_\nu}{\nu}$. Изаберимо $\xi \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ тако да је $\frac{\xi}{\nu} \approx 0$. На пример, $\xi = [\sqrt{\nu}\,]$ је бесконачан природан број, јер ако би био коначан, онда би и његов квадрат био коначан а тиме би и ν био коначан, и важи $\frac{\xi}{\nu} < \frac{\sqrt{\nu}}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \approx 0$. Нека је $L \in \mathbb{R}$ такав да $(\forall n \in \mathbb{N})|x_n| \leq L$, што је добијено из ограничености конвергентног низа x_n. Ограниченост стога важи и за све $n \in {}^*\mathbb{N}$, па имамо:

$$\left|\frac{x_1 + \cdots + x_\xi}{\nu}\right| \leq \frac{|x_1| + \cdots + |x_\xi|}{\nu} \leq \frac{\xi \cdot L}{\nu} = L \cdot \frac{\xi}{\nu} \approx 0.$$

За $\xi < i \leq \nu$ ставимо $x_i = x_\infty + \varepsilon_i$. Низ $\varepsilon_i \approx 0$ је интерналан као разлика два интернална низа и важи:

$$\begin{aligned} \frac{x_{\xi+1} + \cdots + x_\nu}{\nu} &= \frac{(\nu - \xi)x_\infty + \varepsilon_{\xi+1} + \cdots + \varepsilon_\nu}{\nu} \\ &= \left(1 - \frac{\xi}{\nu}\right) x_\infty + \frac{\varepsilon_{\xi+1} + \cdots + \varepsilon_\nu}{\nu}. \end{aligned}$$

За сваки позитиван реалан број ρ имамо $\left|\frac{\varepsilon_{\xi+1}+\cdots+\varepsilon_\nu}{\nu}\right| < \frac{\rho(\nu-\xi)}{\nu} \approx \rho$, што даје $\frac{\varepsilon_{\xi+1}+\cdots+\varepsilon_\nu}{\nu} \approx 0$, односно $\frac{x_{\xi+1}+\cdots+x_\nu}{\nu} \approx x_\infty$. Коначно,

$$\frac{x_1 + \cdots + x_\nu}{\nu} = \frac{x_1 + \cdots + x_\xi}{\nu} + \frac{x_{\xi+1} + \cdots + x_\nu}{\nu} \approx x_\infty.$$

Из Теореме 7.1. и особина релације $\approx$ произилазе и позната алгебарска својства граничне вредности реалног низа.

Пример 7.3. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$.

Заиста, ако је $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = y_\infty$, тада за бесконачно ν важи $x_\nu \approx x_\infty$ и $y_\nu \approx y_\infty$, одакле је $x_\nu + y_\nu \approx x_\infty + y_\infty$, тј.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x_\infty + y_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Читаоцу препуштамо случајеве:

- $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$ (*лимес ӣроизвода*)
- $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$, (*лимес количника*), уз услов $y_n \neq 0$ и $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Тачка $x_t \in \mathbb{R}$ је *ӣачка наӣомилавања* низа $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ако важи:

$$(\forall \varepsilon)(\forall l)(\exists n)[n > l \wedge |x_n - x_t| < \varepsilon], \quad l \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+.$$

Скуп тачака нагомилавања низа $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ зовемо *изводним скуӣом* низа x и означавамо са x'. Нестандардно се скуп x' може описати овако:

$$x' = \{\, \mathrm{st}\, x_\nu \mid \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \text{ и } x_\nu \text{ је коначан} \,\}.$$

Заиста, ако је $x_t \in x'$, онда за сваку позитивну инфинитезималу $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}^+$, и за свако бесконачно $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, можемо да одредимо $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ такво да је $\xi > \nu$ и да је $|x_\xi - x_t| < \varepsilon$. Тада је и $\xi \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ и $x_t = \mathrm{st}\, x_\xi$. Према томе, $x' \subseteq \{\, \mathrm{st}\, x_\nu \mid \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, за оно ν за које је x_ν коначан$\}$. Да бисмо добили обрнуту инклузију, нека је $x_0 = \mathrm{st}\, x_\nu$, $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Тада је $|x_\nu - x_0|$ инфинитезимала, па за свако реално $\varepsilon > 0$ и коначно $n \in \mathbb{N}$, постоји ν из ${}^*\mathbb{N}$ тако да је $\nu > n$ и $|x_\nu - x_0| < \varepsilon$, и отуда је x_0 тачка нагомилавања низа x.

Теорема 7.4. (Болцано[1]–Вајерштрас) *Оӣраничен низ има бар једну ӣачку наӣомилавања.*

Доказ. Нека је низ $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ограничен. Тада су сви x_ν, $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ коначни, а отуда $\mathrm{st}\, x_\nu$ постоји за све $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, па је $x' \neq \emptyset$. ■

Како су компактни скупови у $\mathbb{R}$ затворени и ограничени, то егзистенција тачака нагомилавања низа чије су вредности из неког компактност скупа у $\mathbb{R}$ је непосредна последица претходне теореме. Дајемо и директан доказ.

Теорема 7.5. *Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ комӣакӣан скуӣ и $x \in A^{\mathbb{N}}$ низ из A. Тада x има бар једну ӣачку наӣомилавања.*

Доказ. Изаберимо бесконачно $\nu \in {}^*\mathbb{N}$. Тачка x_ν је до-стандардна, па $x_\nu \in \mu(x_0)$ за неко $x_0 \in \mathbb{R}$. Отуда је x_0 тачка нагомилавања низа x. ■

[1] Bernard Bolzano (1781–1848)

По дефиницији конвергентности, да бисмо доказали да један низ конвергира треба да одредимо његову граничну вредност. Тешкоће настају када је та гранична вредност ван домашаја нашег знања. И раније смо се сусретали са сличним тешкоћама. Када знамо само природне бројеве, -5 је у бесконачној тмини нашег незнања. Исто је и са хиперреалним бројевима када знамо само реалне. Како да дођемо до, на пример, експоненцијалне функције, када знамо само полиномске и операције $+$ и $\cdot$, па и $\lim$? Одговоре на оваква питања добијамо из основа Анализе — аксиома поља $\mathbf{R}$. Видимо да је $\sup$ (и $\inf$) једина (аксиомама дата) операција у $\mathbb{R}$ која нам казује о постојању непознатог. Зато ћемо и моћи да говоримо о конвергенцији „$\leq$–добрих" низова без познавања њихове граничне вредности.

Низ $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ је *монотон* ако је *растући* ($x \nearrow$), што је замена за $(\forall n)\ x_n \leq x_{n+1}$, или *опадајући* ($x \searrow$), тј. $(\forall n)\ x_n \geq x_{n+1}$.

Теорема 7.6. *Нека је низ $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ монотон. Тада је x конвергентан ако и само ако је ограничен. Ако је x ограничен, онда је $\lim x = \sup x$ ако је $x \nearrow$, и $\lim x = \inf x$ ако је $x \searrow$.*

Доказ. Већ смо доказали да је конвергентан низ ограничен. Нека је x растући и ограничен и нека је $x_\infty = \sup x = \sup x(\mathbb{N})$ (Аксиома супремума). Тада је низ ${}^*x$ растући (Теорема 4.10.) и $\sup {}^*x = \sup {}^*x({}^*\mathbb{N}) = x_\infty$, те је $x_n \leq x_\nu \leq x_\infty$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. По дефиницији супремума важи $(\forall \varepsilon)(\exists n)\ x_\infty - \varepsilon < x_n \leq x_\infty$, па важи и $(\forall \nu)(\forall \varepsilon)\ |x_\nu - x_\infty| < \varepsilon$ и отуда $(\forall \nu)\ x_\nu \approx x_\infty$, тј. $\lim x = x_\infty$.

На основу принципа дуалности важи одговарајуће тврђење за опадајуће низове. ■

Сада можемо говорити о конвергенцији реалних низова без познавања њихове граничне вредности.

Дефиниција 7.2. Низ $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ је *Кошијев* ако важи

$$(\forall \varepsilon)(\exists l)(\forall n)(\forall p)[n \geq l \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon],\ l \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+.$$

Слично Теореми 7.1. користећи Фрешеов филтер над $\mathbb{N}$, имамо да важи: низ $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ је Кошијев ако и само ако има особину

$$(\forall \xi, \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})\ x_\xi \approx x_\nu.$$

ТЕОРЕМА 7.7. *Кошијев низ је ограничен* (у $\mathbb{R}$).

Доказ. Нека је $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ Кошијев низ и нека је $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ оно за које је x_ν коначно (из $\gamma(0)$). Такво ν очигледно постоји. Тада је скуп $x({}^*\mathbb{N}) = x(\mathbb{N}) \cup x({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R} \cup \mu(x_\nu)$ ограничен у ${}^*\mathbb{R}$ јер су такви $\mathbb{R}$ и $\mu(x_\nu)$. ∎

ТЕОРЕМА 7.8. (КОШИЈЕВ ПРИНЦИП КОНВЕРГЕНЦИЈЕ) *Реалан низ* $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *је конвергентан ако и само ако је Кошијев.*

Доказ. Нека је $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ако је $x_\infty \in \mathbb{R}$ и $\lim x = x_\infty$, онда за ξ, ν из ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ имамо $x_\xi \approx x_\infty$ и $x_\nu \approx x_\infty$ (Теорема 7.1.), те је $x_\xi \approx x_\nu$.

Ако је x Кошијев, онда је он ограничен, па за $\xi = \langle 1, 2, \dots \rangle_{\mathcal{D}}$ и $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ имамо $x_\nu \approx x_\xi$ и, отуда, $\operatorname{st} x_\nu = \operatorname{st} x_\xi$. Према томе, имамо да је $\lim x = \operatorname{st} x_\xi$. ∎

Нека је $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ограничен низ. Тада је скуп $\operatorname{st}\, x({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}$ непразан и ограничен, па има инфимум и супремум које означавамо са $\liminf x$, односно $\limsup x$:

$$\liminf x = \inf \operatorname{st}\, x({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}), \quad \limsup x = \sup \operatorname{st}\, x({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}).$$

Из ових дефиниција добијамо $\liminf x \leq \limsup x$, а затим, на основу Теореме 7.1. и да за ограничен низ $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $x_\infty \in \mathbb{R}$ важи:

$$\lim x = x_\infty \;\Leftrightarrow\; \liminf x = \limsup x = x_\infty.$$

Приметимо да је скуп $\operatorname{st} x({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ затворен, те је

$$\liminf x = \min\, \operatorname{st} x({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \quad \text{и} \quad \limsup x = \max\, \operatorname{st} x({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}).$$

ПРИМЕР 7.4. (ГЕОМЕТРИЈСКИ НИЗ) Нека је $q \in \mathbb{R}$. Геометријски низ је низ $(q^n) = (1, q, q^2, \dots)$. За $|q| < 1$ је $|q|^{n+1} = |q| \cdot |q|^n \leq |q|^n$ ($n \in \mathbb{N}$) па је низ $(|q|^n)$ опадајући и ограничен одоздо (нулом), и отуда конвергентан. Нека је $|q|^\infty$ његова гранична вредност. Како је за $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ (било које) $|q|^\infty = \operatorname{st} |q|^{\nu+1} = \operatorname{st} |q| \cdot |q|^\nu = |q| \cdot \operatorname{st} |q|^\nu = |q| \cdot |q|^\infty$, биће $(1 - |q|) \cdot |q|^\infty = 0$ и отуда $|q|^\infty = 0$. Најзад, због $|q^n| = |q|^n$,

$$q^\infty = 0 \quad \text{за} \quad |q| < 1.$$

Када је $q = 1$, онда је $(q^n) = \mathbb{N} \times \{ 1 \}$, ${}^*(q^n) = {}^*\mathbb{N} \times \{ 1 \}$, те је $1^\nu = 1$ за $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, и отуда

$$q^\infty = 1 \quad \text{за} \quad q = 1.$$

Када је $q = -1$, онда је $(q^n) = (2\mathbb{N}) \times \{ 1 \} \cup (2\mathbb{N} + 1) \times \{ -1 \}$, те је ${}^*(q^n) = (2{}^*\mathbb{N}) \times \{ 1 \} \cup (2{}^*\mathbb{N} + 1) \times \{ -1 \}$, и отуда $q^{{}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}} = \{ -1, 1 \}$, па низ (q^n) дивергира.

Најзад, за $|q| > 1$ низ (q^n) дивергира јер није ограничен – за $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ је $q^\nu = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^\nu}$ бесконачан хиперреалан број.

Осврнимо се и на неке особине низова који нису стандардни. Интерналну функцију $x\colon {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ зовемо *интерналан низ хиперреалних бројева*.

Теорема 7.9. *Нека је x интерналан низ хиперреалних бројева такав да је $|x_n| \leq M$ за све коначне $n \in \mathbb{N}$, где је $M \in {}^*\mathbb{R}$ неки хиперреалан број. Тада постоји бесконачан $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ такав да је $|x_n| \leq M$ за све $n < H$.*

Доказ. Нека је скуп $A = \left\{ n \in {}^*\mathbb{N} \,\middle|\, |x_n| > M \right\}$ непразан. Како је скуп A интерналан, то за његов први елемент H важи тражени услов. Случај када је скуп A празан је очигледан. ∎

Посматрајмо интерналан низ x хиперреалних бројева чији су чланови x_n инфинитезимале за све коначне $n \in \mathbb{N}$. Тада је и $|y_n| = n|x_n|$ инфинитезимала за све коначне $n \in \mathbb{N}$. Отуда, $|y_n| \leq 1$ за све $n \in \mathbb{N}$, па према претходној теореми постоји бесконачан $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ такав да је $|y_n| \leq 1$ за све $n < H$. Према томе, $|x_n| \leq \frac{1}{n}$ за све $n < H$, односно и за све бесконачне $n < H$ чланови x_n низа x су инфинитезимале.

Дуално Теореми 7.9. која представља један облик принципа преливања, имамо следећу верзију принципа подливања.

Теорема 7.10. *Нека је x интерналан низ хиперреалних бројева такав да је $|x_H| \leq M$ за све бесконачне $H \in {}^*\mathbb{N}$. Тада постоји коначан $n \in \mathbb{N}$ такав да је $|x_\nu| \leq M$ за све $\nu > n$.*

Нека је x интерналан низ хиперреалних бројева такав да је x_H коначан за све бесконачне $H \in {}^*\mathbb{N}$. Ако је $y_n = \frac{1}{n} \cdot x_n$, тада је низ y интерналан и $|y_H| \leq 1$ за све бесконачне $H \in {}^*\mathbb{N}$. За оно коначно $n \in \mathbb{N}$ из Теореме 7.10. такво да је $|y_\nu| \leq 1$ за све $\nu > n$, важи и $|x_\nu| \leq \nu$. Према томе, за све коначне $\nu > n$ чланови x_ν низа x су такође коначни.

S-топологији простора ${}^*\mathbb{R}$ одговара следећи појам конвергенције низа (интерналног или екстерналног) хиперреалних бројева.

Дефиниција 7.3. Тачка $x_F \in {}^*\mathbb{R}$ је F-лимес низа $x\colon {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ ако за сваки стандардан позитиван ε, постоји коначан $n \in \mathbb{N}$ тако да је $|x_\nu - x_F| < \varepsilon$ за све коначне $\nu > n$.

Очигледно је да су све тачке из монаде $\mu(x_F)$ такође F-лимеси низа x; обратно, свака два F-лимеса низа x припадају истој монади. Приметимо, такође, да F-лимес низа x зависи само од чланова x_n са коначним индексом $n \in {}^*\mathbb{N}$.

У случају интерналног низа опет се нешто занимљиво дешава.

Теорема 7.11. *Ако је $x\colon {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ интерналан низ чији је F-лимес број $x_F \in {}^*\mathbb{R}$, тада постоји бесконачно $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ такво да је $x_\nu \approx x_F$ за све бесконачне $\nu < H$.*

Доказ. За свако $k \in \mathbb{N}$ изаберимо $\nu_k \in \mathbb{N}$ тако да важи $|x_\nu - x_F| < \frac{1}{k}$ за све коначне $\nu > \nu_k$. Избор низа (ν_k) извршимо тако да $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots$. Нестандардна екстензија низа $y\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дефинисаног са $y_n = \begin{cases} 0, & n \leq \nu_1 \\ \frac{1}{k}, & \nu_k < n \leq \nu_{k+1} \end{cases}$ задовољава $y_n \approx 0$ за све бесконачне $n \in {}^*\mathbb{N}$. Скуп $D = \big\{ n \in {}^*\mathbb{N} \,\big|\, y_n \geq |x_n - x_F| \big\}$ је интерналан и садржи све коначне природне бројеве. На основу принципа преливања, постоји бесконачан $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ такав да D садржи и све бесконачне $\nu < H$. Како је $y_\nu \approx 0$, то је $x_\nu \approx x_F$ за све бесконачне $\nu < H$. ∎

7.2 Конвергенција реалних функција

Видели смо у четвртој глави да реална функција $f\colon A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, има нестандардно продужење ($*$–слику) ${}^*f\colon {}^*A \to {}^*B$ одређено условом

$$ {}^*f\big(\langle a_n \rangle\big) = \langle b_n \rangle \quad \text{ако и само ако} \quad \{\, n \in \mathbb{N} \mid f(a_n) = b_n \,\} \in \mathcal{D}, $$

где је $\mathcal{D}$ неглавни ултрафилтер над скупом природних бројева. Основне алгебарске особине елементарних функција важе и за њихова нестандардна продужења. На пример, $*$–слике тригонометријских функција

$\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинисане помоћу ${}^*\sin(x) = \langle \sin x_n \rangle$, ${}^*\cos(x) = \langle \cos x_n \rangle$ за $x = \langle x_n \rangle \in {}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$, имају добро познате особине. Истакнимо једну од њих (за $x = \langle x_n \rangle \in {}^*\mathbb{R}$ и $y = \langle y_n \rangle \in {}^*\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} {}^*\cos(x+y) &= \langle \cos(x_n + y_n) \rangle \\ &= \langle \cos x_n \rangle \cdot \langle \cos y_n \rangle - \langle \sin x_n \rangle \cdot \langle \sin y_n \rangle \\ &= {}^*\cos(x) \cdot {}^*\cos(y) - {}^*\sin(x) \cdot {}^*\sin(y). \end{aligned}$$

Пример 7.5. Реална функција $[\cdot]\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ (*цели део реалног броја*) има занимљиво нестандардно продужење, које ћемо означити опет са $[\cdot]$. Наиме, за $x \in {}^*\mathbb{R}$ важи $[x] \leq x < [x] + 1$, па за $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ имамо $x \leq \dfrac{[Hx]}{H} < x + \dfrac{1}{H}$. Дакле, хиперрационалан број $\dfrac{[Hx]}{H}$ је бесконачно близак броју $x \in \mathbb{R}$.

У одељку 4.2 видели смо да $*$ пролази кроз уобичајене операције са функцијама (сабирање, множење и композиција функција): ${}^*(f+g) = {}^*f + {}^*g$, ${}^*(f \cdot g) = {}^*f \cdot {}^*g$, ${}^*(f \circ g) = {}^*f \circ {}^*g$, ${}^*\sup(f,g) = \sup({}^*f, {}^*g)$ и слично. Сада ћемо се упознати са нестандардном карактеризацијом конвергенције и непрекидности реалних функција.

Тачка $b \in \mathbb{R}$ је *гранична вредност функције* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *у околини тачке* $a \in \mathbb{R}$, која је тачка нагомилавања скупа A, ако важи

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in A)\ \big[0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\big],$$

што записујемо са $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$. Посматрано из ${}^*\mathbb{R}$ то изгледа овако.

Теорема 7.12. *$\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$ ако и само ако*

$$\big(\forall x \in {}^*A \cap (\mu(a) \setminus \{\, a \,\})\big)\ {}^*f(x) \approx b.$$

Доказ. $(\rightarrow)$ Претпоставимо да $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$. Тада за свако $x = \langle x_n \rangle \in {}^*A \cap (\mu(a) \setminus \{\, a \,\})$ важи $\big\{\, n \in \mathbb{N} \,\big|\, 0 < |x_n - a| < \delta \,\big\} \in \mathcal{D}$. Како је

$$\big\{\, n \in \mathbb{N} \,\big|\, 0 < |x_n - a| < \delta \,\big\} \subseteq \big\{\, n \in \mathbb{N} \,\big|\, |f(x_n) - b| < \varepsilon \,\big\},$$

то је и $\big\{\, n \in \mathbb{N} \,\big|\, |f(x_n) - b| < \varepsilon \,\big\} \in \mathcal{D}$, односно ${}^*f(x) = \langle f(x_n) \rangle \approx b$.
$(\leftarrow)$ Претпоставимо да је ${}^*f(x) \approx b$ за свако $x \in {}^*A \cap (\mu(a) \setminus \{\, a \,\})$, и претпоставимо да није $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$, тј.

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall \delta \in \mathbb{R}^+)(\exists x \in A)\ \big[0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x) - b| \geq \varepsilon\big].$$

За $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ за које претходна реченица важи, и за низ $\delta = \dfrac{1}{n}$, одредимо $x_n \in A$ тако да је $0 < |x_n - a| < \delta$ и $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$. Тада за $x = \langle x_n \rangle \in {}^*A$ имамо $x \in \mu(a) \setminus \{\, a \,\}$ и $|{}^*f(x) - b| \geq \varepsilon$, тј. није ${}^*f(x) \approx b$, што је супротно претпоставци. ∎

Директна последица претходне теореме и особина релације $\approx$ су нека алгебарска својства граничне вредности реалне функције.

Теорема 7.13. *Нека је* $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$ *и* $\lim_{A \ni x \to a} g(x) = c$, *где су* b *и* c *из* $\mathbb{R}$. *Тада*

(1) $\lim_{A \ni x \to a}(f(x) + g(x)) = b + c$, (2) $\lim_{A \ni x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$,

(3) $\lim_{A \ni x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$, *ако је* $g(x) \neq 0$ *за свако* $x \in A$ *и* $c \neq 0$.

Доказ. Приметимо да је ${}^*f(x) \approx b$ и ${}^*g(x) \approx c$ за сваки елемент $x \in {}^*A \cap (\mu(a) \setminus \{\, a \,\})$. Отуда је ${}^*f(x) + {}^*g(x) \approx b + c$ и ${}^*f(x) \cdot {}^*g(x) \approx b \cdot c$. Такође је ${}^*g(x) \neq 0$ за свако $x \in {}^*A \cap (\mu(a) \setminus \{\, a \,\})$ и $\dfrac{{}^*f(x)}{{}^*g(x)} \approx \dfrac{b}{c}$. ∎

Теорема 7.14. *Нека је* $f \colon A \to B$ *реална функција за коју важи*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in A)\ \big[0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - b| < \varepsilon\big]$$

и нека је $g \colon B \to \mathbb{R}$ *реална функција за коју важи* $\lim_{B \ni x \to b} g(x) = c$. *Тада је* $\lim_{A \ni x \to a} g \circ f(x) = c$.

Доказ. Услов који задовољава наша функција f даје да за свако $x \in {}^*A \cap (\mu(a) \setminus \{\, a \,\})$ важи ${}^*f(x) \in {}^*B \cap (\mu(b) \setminus \{\, b \,\})$, а отуда важи и ${}^*(g \circ f)(x) = {}^*g({}^*f(x)) \approx c$. ∎

У претходном одељку увођењем појма Кошијевог низа говорили смо о конвергенцији реалних низова без познавања њихове граничне вредности. Такође нам је доступан и Кошијев принцип конвергенције за функције.

Теорема 7.15. *Услов да* $\lim_{A \ni x \to a} f(x)$ *постоји еквивалентан је услову*

$$\big(\forall x, y \in {}^*A \cap (\mu(a) \setminus \{\, a \,\})\big)\ \ {}^*f(x) \approx {}^*f(y).$$

Доказ. Нека је ${}^*f(x) \approx {}^*f(y)$ за свако $x, y \in {}^*A \cap (\mu(a) \setminus \{ a \})$. Тада за онај елемент $x_0 \in {}^*A \cap (\mu(a) \setminus \{ a \})$ такав да је ${}^*f(x_0) \in \gamma(0)$ имамо $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = \mathrm{st}\ {}^*f(x_0)$. ■

Коришћењем бесконачно малих и бесконачно великих величина у $\mathbb{R}$ избегава се писање непотребно великих израза, што нам омогућава да истакнемо главни део у изразу за функцију. Везу између разних функција везано за ток граничног процеса успостављамо или Ландауовим симболима o („мало о”) и O („велико о”), или користећи Хардијеве[2)] ознаке асимптотских релација $\preceq$, $\asymp$ и $\ll$ (погледати, још једном, одељак 4.2 и 1. главу). Наводимо сада нестандардну карактеризацију симбола o и O. Нека је a тачка нагомилавања скупа A и $f\colon A \to \mathbb{R}$ реална функција. Кажемо да је функција f *бесконачно мала* у околини тачке a ако важи ${}^*f(x) \in \mu(0)$ за свако $x \in {}^*A \cap (\mu(a) \setminus \{ a \})$. Бесконачно мала $f(x)$ је *бесконачно мала вишег реда* у односу на бесконачно малу $g(x)$ у околини тачке a (у ознаци $f = o(g)$, $x \to a$), ако и само ако је функција

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)}, & g(x) \neq 0 \\ 0, & g(x) = 0 \end{cases}$$

бесконачно мала у околини тачке a, што је еквивалентно са једнакошћу ${}^*f(x) = {}^*h(x) \cdot {}^*g(x)$ и ${}^*h(x) \in \mu(0)$ за свако $x \in {}^*A \cap (\mu(a) \setminus \{ a \})$. Слично, $f = O(g)$, $x \to a$ ако и само ако је ${}^*f(x) = {}^*h(x) \cdot {}^*g(x)$ и ${}^*h(x) \in \gamma(0)$ за свако $x \in {}^*A \cap (\mu(a) \setminus \{ a \})$.

Посебно значајну класу реалних функција чине непрекидне функције. Непрекидност се као локално својство функције везује за тачку у којој је функција дефинисана. Ако је својство непрекидности испуњено у свакој тачки дефинисаности функције, проширује се на читав скуп.

Дефиниција 7.4. Реална функција $f\colon A \to \mathbb{R}$ је непрекидна у тачки $a \in A$ ако је $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = f(a)$.

Под којим условима је функција $f\colon A \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки $a \in A$? Једноставан одговор даје Теорема 7.12. Потребно је и довољно да за свако $x \in {}^*A \cap \mu(a)$ важи ${}^*f(x) \approx f(a)$.

За функцију $f\colon A \to \mathbb{R}$ непрекидну у свакој тачки скупа A кажемо да је непрекидна на скупу A. Тада је за свако $x \in {}^*A \cap \mu(A)$ испуњено

[2)] Godfrey Harold Hardy (1877–1947)

$\mathrm{st}\ {}^*f(x) = f(\mathrm{st}\ x)$, где је $\mu(A) = \bigcup_{a\in A}\mu(a)$. Стога се непрекидност реалне функције f посматрано из ${}^*\mathbb{R}$ види као комутативност функција st и ${}^*f$.

Позната алгебарска својства непрекидних функција су непосредне последице особина релације $\approx$.

Теорема 7.16. *Нека су реалне функције* $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ *непрекидне у тачки* $a \in A$. *Тада су и функције* $f+g$, $f \cdot g$ *и* $\dfrac{f}{g}$ *(за* $g(a) \neq 0$*) непрекидне у тачки* a.

Доказ. За свако $x \in {}^*A \cap \mu(a)$ важи ${}^*f(x) \approx f(a)$ и ${}^*g(x) \approx g(a)$. Стога је

- ${}^*f(x) + {}^*g(x) \approx f(a) + g(a)$, тј. ${}^*(f+g)(x) \approx (f+g)(a)$,
- ${}^*f(x) \cdot {}^*g(x) \approx f(a) \cdot g(a)$, тј. ${}^*(f\cdot g)(x) \approx (f\cdot g)(a)$,
- $\dfrac{{}^*f(x)}{{}^*g(x)} \approx \dfrac{f(a)}{g(a)}$, тј. ${}^*\Big(\dfrac{f}{g}\Big)(x) \approx \Big(\dfrac{f}{g}\Big)(a), g(x) \neq 0.$ ■

Теорема 7.17. *Ако је реална функција* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *непрекидна у тачки* $a \in A$ *и реална функција* $g\colon B \to \mathbb{R}$ *непрекидна у тачки* $f(a) \in B$, *тада је њихова композиција* $g \circ f$ *непрекидна функција у тачки* a.

Доказ. Из $x \in {}^*A \cap \mu(a)$ следи ${}^*f(x) \in {}^*B \cap \mu(f(a))$, а затим и ${}^*g({}^*f(x)) \approx g(f(a))$, тј. ${}^*(g \circ f)(x) \approx (g\circ f)(a)$. ■

Користећи чињеницу да сваки хиперконачан скуп има свој максимални и минимални елемент (Теорема 4.23.), можемо ефективно да одредимо тачке у којима реална функција непрекидна на затвореном (компактном) интервалу достиже своју највећу и најмању вредност. Такође, показаћемо да је слика интервала при непрекидном пресликавању опет интервал.

Теорема 7.18. (Вајерштрас) *Реална функција* f *непрекидна на* $[a,b]$ *достиже своју максималну и минималну вредност на* $[a,b]$.

Доказ. Изаберимо $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ и разделимо интервал $[a,b]$ на H једнаких делова тачкама скупа

$$T_H = \left\{ a, a+\frac{b-a}{H}, a+2\cdot\frac{b-a}{H}, \ldots, a+(H-1)\cdot\frac{b-a}{H}, b \right\}.$$

Скуп

$$\Big\{ {}^*f(a), {}^*f\Big(a+\frac{b-a}{H}\Big), \dots, {}^*f\Big(a+(H-1)\cdot\frac{b-a}{H}\Big), {}^*f(b) \Big\}$$

је хиперконачан. Нека је ${}^*f\Big(a+i_0\cdot\dfrac{b-a}{H}\Big)$ његов максималан елемент (читаоцу препуштамо сличан доказ за минималан елемент), и нека је $x_0 = \operatorname{st}\Big(a+i_0\cdot\dfrac{b-a}{H}\Big)$. Тада је $x_0 \in [a,b]$ јер $\operatorname{st}\colon T_H \xrightarrow{\text{na}} [a,b]$ (Пример 4.7.). Из $x_0 \approx a+i_0\cdot\dfrac{b-a}{H}$ и непрекидности функције f следи

$${}^*f\Big(a+i\cdot\frac{b-a}{H}\Big) \lesssim {}^*f\Big(a+i_0\cdot\frac{b-a}{H}\Big) \approx f(x_0)$$

за свако $0 \le i \le H$, при чему је бинарна релација $\lesssim$ скупа ${}^*\mathbb{R}$ уведена помоћу $x \lesssim y$ ако и само ако $x \le y$ или $x \approx y$, за $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ (видети задатак 63). Знамо да за $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ из $a \lesssim b$ следи $\operatorname{st}(a) \le \operatorname{st}(b)$. Стога, $f(x) \le f(x_0)$ за све $x \in [a,b]$. ∎

Скуп $I \subseteq \mathbb{R}$ је интервал ако има особину да за сваке две своје тачке садржи и све тачке између њих. Ова особина се не чува у ${}^*\mathbb{R}$. Монаде су пример скупова из ${}^*\mathbb{R}$ који имају ту особину, а ипак нису интервали. Покажимо да за непрекидно пресликавање $f\colon I \to \mathbb{R}$ и свако $a, b \in I$ и $c \in \mathbb{R}$ које је између $f(a)$ и $f(b)$ постоји неко x између a и b такво да је $f(x) = c$.

ТЕОРЕМА 7.19. (БОЛЦАНО) *Ако је $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал и $f\colon I \to \mathbb{R}$ непрекидно пресликавање, тада је $f(I)$ такође интервал.*

Доказ. Нека је $c = 0$ тачка између $f(a)$ и $f(b)$. Функција дата са $g(t) = f(b)\cdot f((1-t)a+tb)$ је непрекидна на $[0,1]$ као композиција две непрекидне функције и $g(0) < 0$, $g(1) > 0$. Покажимо да једначина $g(t) = 0$ има решење у $]0,1[$.

Нека је $H \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$. Скуп $\Big\{ k \in {}^*\mathbb{N} \,\Big|\, 0 \le k \le H \text{ и } {}^*g\Big(\dfrac{k}{H}\Big) < 0 \Big\}$ је хиперконачан. Нека је k_0 његов максималан елемент. Тада је $k_0 < H$ јер $g(1) > 0$, а тиме и $k_0 + 1 \le H$. За $t_0 = \operatorname{st}\Big(\dfrac{k_0}{H}\Big) \in [0,1]$ (Пример 4.7.) је $g(t_0) = \operatorname{st}\, {}^*g\Big(\dfrac{k_0}{H}\Big) \le 0$ и $g(t_0) = \operatorname{st}\, {}^*g\Big(\dfrac{k_0+1}{H}\Big) \ge 0$, тј. $g(t_0) = 0$. Тада је $x_0 = (1-t_0)a + t_0 b$ тачка између a и b таква да је $f(x_0) = 0$.

Случај $c \neq 0$ своди се на претходни тако што посматрамо непрекидну функцију $h(x) = f(x) - c$. ■

Обрат претходне теореме везује се обично за монотона пресликавања.

Теорема 7.20. *Ако је $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал и $f\colon I \to \mathbb{R}$ монотоно пресликавање такво да је $f(I)$ такође интервал, тада је f непрекидно пресликавање.*

Доказ. Нека је $a \in I$ и $x \in {}^*I$ такво да је $x \approx a$. Ако важи ${}^*f(x) \not\approx f(a)$, тада између $f(a)$ и ${}^*f(x)$ постоји тачка $f(b)$ скупа $f(I)$. Због монотоности закључујемо да је $b \in I$ између a и x, што је немогуће. ■

Унутар класе реалних непрекидних функција издвајају се униформно непрекидне функције. Униформна непрекидност је глобално својство функције које се везује за неки подскуп скупа $\mathbb{R}$.

Реална функција $f\colon A \to \mathbb{R}$ је *униформно непрекидна* на скупу $A \subseteq \mathbb{R}$ ако

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x, y \in A)\ \big[\,|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,\big],$$

што посматрано из ${}^*\mathbb{R}$ има следећу нестандардну карактеризацију.

Теорема 7.21. *Функција $f\colon A \to \mathbb{R}$ је униформно непрекидна на скупу $A \subseteq \mathbb{R}$ ако и само ако за све $x, y \in {}^*A$ из $x \approx y$ следи ${}^*f(x) \approx {}^*f(y)$.*

Доказ. $(\to)$ Нека за $x = \langle x_n \rangle \in {}^*A$ и $y = \langle y_n \rangle \in {}^*A$ важи $x \approx y$. За произвољан позитиван реалан број ε одредимо позитиван реалан број δ такав да за све $x, y \in A$ важи:

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Стога $\big\{\, n \in \mathbb{N} \,\big|\, |x_n - y_n| < \delta \,\big\} \cap \big\{\, n \in \mathbb{N} \,\big|\, x_n \in A \,\big\} \cap \big\{\, n \in \mathbb{N} \,\big|\, y_n \in A \,\big\} \subseteq \big\{\, n \in \mathbb{N} \,\big|\, |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon \,\big\}$. Скупови са леве стране инклузије припадају ултрафилтру $\mathcal{D}$, отуда $\big\{\, n \in \mathbb{N} \,\big|\, |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon \,\big\} \in \mathcal{D}$, односно ${}^*f(x) \approx {}^*f(y)$.

$(\leftarrow)$ Ако функција f није униформно непрекидна на скупу A, тада

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall \delta \in \mathbb{R}^+)(\exists x, y \in A)\ \big[\,|x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\,\big].$$

Према томе, за неко $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ постоје низови $x_n \in A$ и $y_n \in A$ такви да је $\langle x_n \rangle \approx \langle y_n \rangle$, али да је $\big\langle |f(x_n) - f(y_n)| \big\rangle \geq \varepsilon$. Стога, за $x = \langle x_n \rangle \in {}^*A$ и $y = \langle y_n \rangle \in {}^*A$ важи: $x \approx y$ и ${}^*f(x) \not\approx {}^*f(y)$, што је супротно претпоставци. ■

Пример 7.6. Сабирање је униформно непрекидна функција скупа $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ јер из $x \approx u$ и $y \approx v$ следи $(x+y) \approx (u+v)$. Множење није униформно непрекидна функција на скупу $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ јер за $x \in \mu(0)$, $x > 0$, имамо $x \approx 0$ и $\dfrac{1}{x} \approx \dfrac{1}{x}$, али и $x \cdot \dfrac{1}{x} \not\approx 0 \cdot \dfrac{1}{x}$.

На затвореном интервалу $[a,b]$ скупа $\mathbb{R}$ непрекидност и униформна непрекидност се не разликују.

Теорема 7.22. (Кантор) *Функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна на затвореном интервалу $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ је и униформно непрекидна на $[a,b]$.*

Доказ. Затворен интервал $[a,b]$ је компактан скуп у $\mathbb{R}$, стога је $\mathrm{st}\,{}^*[a,b] = [a,b]$. Нека су $x, y \in {}^*[a,b]$ такви да је $x \approx y$. Тада је $\mathrm{st}\ x = \mathrm{st}\ y = c \in [a,b]$. С обзиром на непрекидност функције f на $[a,b]$ имамо ${}^*f(x) \approx f(c)$ и ${}^*f(y) \approx f(c)$, а самим тим и ${}^*f(x) \approx {}^*f(y)$. ■

Униформно непрекидна реална функција има јединствену униформно непрекидну екстензију дефинисану на затворењу њеног домена.

Теорема 7.23. *Нека је $f\colon A \to \mathbb{R}$ униформно непрекидна реална функција. Тада постоји тачно једна униформно непрекидна функција $g\colon \mathrm{Cl}\,A \to \mathbb{R}$ таква да је $g \restriction A = f$.*

Доказ. Уверимо се прво у постојање таквог пресликавања g. Пођимо од реченице:

$$(\forall x \in \mathrm{Cl}\,A)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists y \in A)\ |y - x| \le \frac{1}{n}.$$

Њеним $*$–трансфером добијамо: $(\forall x \in {}^*\,\mathrm{Cl}\,A)(\exists y \in {}^*A)\, y \approx x$. Функција $g(a) = \mathrm{st}\ {}^*f(x)$, где $a \in \mathrm{Cl}\,A$, $x \in {}^*A$ и $x \approx a$, јесте екстензија функције f јер за $a \in A$ биће $x = a$ и $g(a) = \mathrm{st}\ {}^*f(a) = f(a)$. Покажимо да је функција g униформно непрекидна на $\mathrm{Cl}\,A$. За $x, y \in {}^*\,\mathrm{Cl}\,A$ и $x \approx y$, налазимо $u, v \in {}^*A$ такве да је $u \approx x$ и $v \approx y$. Стога је $u \approx v$, па из униформне непрекидности функције f следи ${}^*f(u) \approx {}^*f(v)$. Даље, ${}^*g(x) \approx {}^*g(u) = {}^*f(u)$ и ${}^*g(y) \approx {}^*g(v) = {}^*f(v)$, тј. ${}^*g(x) \approx {}^*g(y)$.

Докажимо сада јединост таквог пресликавања. Нека су пресликавања $g, h\colon \mathrm{Cl}\,A \to \mathbb{R}$ униформно непрекидна и $g \restriction A = h \restriction A$. Због непрекидности функција g и h имамо да за $a \in \mathrm{Cl}\,A$ и $x \in {}^*A$ такво да је $x \approx a$, важи ${}^*g(x) \approx g(a)$ и ${}^*h(x) \approx h(a)$. Отуда, због ${}^*g(x) \approx {}^*h(x)$, имамо $g(a) = \mathrm{st}\ {}^*g(x) = \mathrm{st}\ {}^*h(x) = h(a)$. ■

Размотримо изблиза још нека својства функција непрекидних на компактном скупу.

Теорема 7.24. *Непрекидна слика компактног скупа је такође компактан скуп.*

Доказ. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ компактан скуп и $f\colon A \to \mathbb{R}$ непрекидно пресликавање. Покажимо да је $\mathrm{st}\ {}^*(f(A)) = f(A)$. Ако $y \in {}^*(f(A)) = {}^*f({}^*A)$, тада за неко $x \in {}^*A$ имамо $y = {}^*f(x)$. Пошто је скуп A компактан, то је $\mathrm{st}\ x = a \in A$. Из $x \approx a$ и Теореме 7.22. следи ${}^*f(x) \approx f(a)$. Дакле, $\mathrm{st}\ {}^*f(x) = f(a) \in f(A)$. ■

Теорема 7.25. *Скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је компактан ако и само ако је свако непрекидно пресликавање $f\colon A \to \mathbb{R}$ ограничено.*

Доказ. Истакнимо у доказу само тежи део тврђења. Нека је свако непрекидно пресликавање $f\colon A \to \mathbb{R}$ ограничено. Покажимо да је скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничен и затворен. Скуп A је ограничен јер је пресликавање $f(x) = |x|$ непрекидно на скупу A. Нека скуп A није затворен. Пресликавање $f(x) = \dfrac{1}{|x-a|}$, где је $a \in \mathrm{Cl}\, A \setminus A$, је непрекидно али не и ограничено, јер за $x \in {}^*A$ и $x \approx a$ имамо да је $f(x)$ бесконачно велика величина. ■

На крају, осврнимо се на функције које нису обавезно стандардне.

Ослањајући се на S–топологију скупа ${}^*\mathbb{R}$ (описану у одељку 4.3) чију базу чине скупови облика $\left\{ q \in {}^*\mathbb{R} \,\middle|\, \mathrm{st}\,|q-p| < \varepsilon \right\}$ за $p \in {}^*\mathbb{R}$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, које зовемо S–кугле, присутни су и такви појмови као што су: S–ограничена функција, S–лимес и S–непрекидност.

Функција $f\colon {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ је *S–ограничена* на $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ ако је скуп $f(A)$ садржан у некој S–кугли, тј. постоји $p \in {}^*\mathbb{R}$ и стандардно $m \in \mathbb{R}$ тако да је $|f(x) - p| \leq m$ за све $x \in A$.

Теорема 7.26. *Нека је $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ интерналан скуп и $f\colon A \to {}^*\mathbb{R}$ интернална функција. Тада, функција f је S–ограничена на A ако и само ако све тачке скупа $f(A)$ припадају истој галаксији у ${}^*\mathbb{R}$.*

Доказ. $(\to)$ Нека је функција f S–ограничена на $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$. Из неједнакости $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2m$ за све $x_1, x_2 \in A$ следи да све тачке скупа $f(A)$ припадају истој галаксији.

$(\leftarrow)$ Нека f није S–ограничена функција и нека је

$$M = \left\{ n \in {}^*\mathbb{N} \,\middle|\, (\forall p \in {}^*\mathbb{R})(\exists x \in A)\, |f(x) - p| > n \right\}.$$

Интерналан скуп M садржи све коначне природне бројеве, па на основу принципа преливања (Теорема 4.19.) садржи и неки бесконачан елемент $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. За произвољно $x \in A$ изаберимо $x_0 \in A$ тако да важи $|f(x_0) - f(x)| > H$. Отуда, $f(x)$ и $f(x_0)$ не припадају истој галаксији у ${}^*\mathbb{R}$. ■

Број $b \in {}^*\mathbb{R}$ је S–*лимес* функције $f\colon A \to {}^*\mathbb{R}$ у тачки a из S–затворења скупа $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ ако

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)\big(\forall x \in A \setminus \{a\}\big)\ \big[\, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \,\big].$$

ТЕОРЕМА 7.27. *Нека је $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ интерналан скуп, $f\colon A \to {}^*\mathbb{R}$ интернална функција и $a \in {}^*\mathbb{R}$ елемент S–затворења скупа A. Тада, $b \in {}^*\mathbb{R}$ је S–лимес функције $f(x)$ када $x \to a$ у A ако и само ако $f\big(\mu(a) \cap (A \setminus \{a\})\big) \subseteq \mu(b)$.*

Доказ. $(\to)$ За $x \in \mu(a) \cap (A \setminus \{a\})$ важи $|x - a| < \delta$ за свако стандардно $\delta > 0$. Отуда је $|f(x) - b| < \varepsilon$ за свако стандардно $\varepsilon > 0$, па $f(x) \in \mu(b)$.

$(\leftarrow)$ Нека је $\varepsilon > 0$ у $\mathbb{R}$ и нека је

$$M = \left\{ n \in {}^*\mathbb{N} \,\middle|\, \big(\forall x \in A \setminus \{a\}\big)\ \left[\, |x - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \,\right] \right\}.$$

Интерналан скуп M садржи све бесконачне природне бројеве јер $x \in \mu(a)$, па на основу принципа подливања (Теорема 4.20.) садржи и неки коначан $n \in \mathbb{N}$. Тада за $\delta = \dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}^+$ имамо тражени услов. ■

Функција $f\colon A \to {}^*\mathbb{R}$ је S–*непрекидна* у тачки $a \in A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ ако

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in A)\ \big[\, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \,\big].$$

Слично претходном тврђењу имамо нестандардну карактеризацију S–непрекидности.

ТЕОРЕМА 7.28. *Нека је* $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ *интерналан скуп и* $f\colon A \to {}^*\mathbb{R}$ *интернална функција. Тада је функција* f S*–непрекидна у* $a \in A$ *ако и само ако* $f(\mu(a) \cap A) \subseteq \mu(f(a))$.

Непрекидност и S–непрекидност нестандардне функције нису упоредиви. Читаоцу препуштамо да провери тврдње следећег примера.

ПРИМЕР 7.7. Интернална функција $f\colon {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ дефинисана једнакошћу $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \alpha \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$, где је $\alpha \neq 0$ инфинитезимала, јесте S–непрекидна, али није непрекидна у тачки $x = 0$. С друге стране, функција $f(x) = x^2$ је непрекидна, али не и S–непрекидна у тачкама $x \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$. Такође, и непрекидна функција $f(x) = \sin Hx$, за бесконачан природан број $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, није S–непрекидна у тачкама скупа ${}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$.

7.3 Диференцијабилност и интеграција

За реалну функцију $f\colon A \to \mathbb{R}$ кажемо да је *диференцијабилна у тачки* $a \in \operatorname{Int} A$ ако постоји коначан $\lim_{A \ni x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Тада се добијена гранична вредност зове први извод функције f у тачки a и означава са $f'(a)$. Коришћењем Теореме 7.12. добија се нестандардна карактеризација диференцијабилности.

ТЕОРЕМА 7.29. *Функција* f *је диференцијабилна у тачки* a *и њен извод у тачки* a *је* $b = f'(a)$ *ако и само ако*

$$\big(\forall x \in {}^*A \cap (\mu(a) \setminus \{a\})\big)\ \frac{{}^*f(x) - f(a)}{x - a} \approx b.$$

Класа реалних функција диференцијабилних у тачки $a \in \mathbb{R}$ ужа је од класе реалних функција непрекидних у истој тачки.

ТЕОРЕМА 7.30. *Ако је функција* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *диференцијабилна у тачки* $a \in \operatorname{Int} A$, *тада је* f *и непрекидна функција у* a.

Доказ. Из ${}^*f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a)$ за свако $x \in {}^*A \cap \mu(a)$ следи ${}^*f(x) - f(a) \in \mu(0)$, тј. ${}^*f(x) \approx f(a)$ за свако $x \in {}^*A \cap \mu(a)$. Према томе, функција f је непрекидна у тачки a. ∎

Основна правила диференцирања су директне последице особина релације $\approx$:

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}, \ g(a) \neq 0.$

Посебно истичемо правило диференцирања које се односи на извод сложене функције.

Теорема 7.31. *Ако је реална функција* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *диференцијабилна у тачки* $a \in \operatorname{Int} A$ *и реална функција* $g\colon B \to \mathbb{R}$ *диференцијабилна у тачки* $b = f(a)$, *тада је њихова композиција* $g \circ f$ *функција диференцијабилна у тачки* a *и важи*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Доказ. За свако $x \in {}^*A \cap (\mu(a) \setminus \{a\})$ важи ${}^*f(x) \in {}^*B \cap (\mu(b) \setminus \{b\})$, а отуда за функцију $h = g \circ f$ имамо и

$$\frac{{}^*h(x) - h(a)}{x - a} = \frac{{}^*g({}^*f(x)) - g(f(a))}{{}^*f(x) - f(a)} \cdot \frac{{}^*f(x) - f(a)}{x - a} \approx g'(f(a)) \cdot f'(a). \blacksquare$$

Реална функција $f\colon A \to \mathbb{R}$ има *локални максимум у тачки* a ако постоји $\varepsilon > 0$ (стандардан) такав да за свако $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subseteq A$ важи $f(x) \leq f(a)$. Према томе, функција f има максимум у a ако и само ако је ${}^*f(x) \leq f(a)$ за свако $x \approx a$. Дуално се дефинише локални минимум реалне функције.

Теорема 7.32. *Ако је функција* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *диференцијабилна у тачки* a *и у њој има локални максимум, тада је* $f'(a) = 0$.

Доказ. За тачке $x, y \in \mu(0)$ такве да је $x < a < y$ важи:

$$\frac{{}^*f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \quad \text{и} \quad \frac{{}^*f(y) - f(a)}{y - a} \leq 0.$$

Отуда имамо, $f'(a) \approx \dfrac{{}^*f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ и $f'(a) \approx \dfrac{{}^*f(y) - f(a)}{y - a} \leq 0$, тј. $f'(a) = 0$. ■

Издвајамо следећу теорему о средњој вредности диференцијалног рачуна.

Теорема 7.33. *Нека је* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *реална функција непрекидна на* $[a,b]$, *диференцијабилна на* $]a,b[$ *и* $M = \sup_{a<x<b} |f'(x)|$ *коначан реалан број. Тада је* $|f(b) - f(a)| \leq M \cdot (b-a)$.

Доказ. Линеарном трансформацијом сводимо проблем на интервал $[0,1]$. Нека је функција $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ дефинисана са $g(t) = f((1-t)a+tb)$. Тада је пресликавање g непрекидно на $[0,1]$, диференцијабилно на $]0,1[$, $g'(t) = f'\big((1-t)a+tb\big) \cdot (b-a)$ и $|g'(t)| \leq M(b-a)$ за свако $t \in]0,1[$. Тада је за $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ испуњено:

$$\begin{aligned} |g(1)-g(0)| &= \left|\sum\nolimits_{k=1}^{H} {}^*g\left(\frac{k}{H}\right) - {}^*g\left(\frac{k-1}{H}\right)\right| \\ &\leq \sum\nolimits_{k=1}^{H} \left|{}^*g\left(\frac{k}{H}\right) - {}^*g\left(\frac{k-1}{H}\right)\right|. \end{aligned}$$

Нека је $c_k = \mathrm{st}\left(\dfrac{k}{H}\right)$. Из

$$\begin{aligned} \left|{}^*g\left(\frac{k}{H}\right) - {}^*g\left(\frac{k-1}{H}\right)\right| &\approx \left|g'(c_k)\left(\frac{k}{H} - c_k\right) + g'(c_k)\left(c_k - \frac{k-1}{H}\right)\right| \\ &\approx \left|g'(c_k) \cdot \frac{1}{H}\right| = |g'(c_k)| \cdot \frac{1}{H}, \end{aligned}$$

следи $|g(1)-g(0)| \leq M(b-a)\sum_{k=1}^{H} \dfrac{1}{H} = M(b-a)$, а самим тим важи и $|f(b)-f(a)| \leq M(b-a)$. ∎

Реална функција $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ је *интеграбилна у Римановом*[3] *смислу* на интервалу $[a,b]$, и њен интеграл је број $\int_a^b f(x)\,dx$, ако за свако $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, постоји $\delta \in \mathbb{R}^+$ тако да је

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum\nolimits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| < \varepsilon,$$

за сваку партицију интервала $[a,b]$ одређену низом подеоних тачака $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ за који је $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, $k = 1,\ldots,n$, и за сваки избор међутачака $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,\ldots,n$.

[3] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

Посматрано из ${}^*\mathbb{R}$ то изгледа овако. Нека је $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ и нека је π интернална партиција интервала $[a, b]$ одређена интерналним низом $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_H = b$ таквим да је $x_k - x_{k-1} \in \mu(0)$, $k = 1, 2, \ldots, H$. Нека је $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_H)$ интерналан низ међутачака $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, $k = 1, 2, \ldots, H$. Тада

$$S_H(\pi, \xi) = \sum\nolimits_{k=1}^{H} {}^*f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

зовемо хиперконачна интегрална сума функције f која одговара интерналној партицији π и интерналном низу међутачака ξ.

Теорема 7.34. *Ако је* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *нейрекидна реална функција, шада је* $\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{st}(S_H(\pi, \xi))$.

Доказ. Из дефиниције Римановог интеграла непрекидне функције f на интервалу $[a, b]$ $*$–трансфером добијамо:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum\nolimits_{k=1}^{H} {}^*f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon,$$

за свако $\varepsilon > 0$, где су $x_k - x_{k-1} \in \mu(0)$. Отуда, $S_H(\pi, \xi) \approx \int_a^b f(x)\,dx$. ∎

До Римановог интеграла непрекидне функције $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ могли смо доћи и на следећи начин. За $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ нека је помоћу $x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{H}$, $k = 0, 1, \ldots, H$, дата интернална партиција интервала $[a, b]$. Нека је

$$S_H f = \sum\nolimits_{k=1}^{H} {}^*f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{H}\right) \cdot \frac{1}{H}$$

интернална интегрална сума. Из ограничености непрекидне функције f, на пример $|f(x)| < M$ за свако $x \in [a, b]$, имамо $|S_H f| \le M(b - a)$, тј. $S_H f$ је коначан. Да бисмо показали да су сви $S_H f$ бесконачно блиски један другом, довољно је показати $S_{HK} f \approx S_H f$ за бесконачне $H, K \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, а што следи из:

$$\begin{aligned}
S_{HK} f - S_H f &= \sum\nolimits_{j=1}^{HK} {}^*f\left(a + j \cdot \frac{b-a}{HK}\right) \cdot \frac{1}{HK} \\
&- \sum\nolimits_{j=1}^{H} {}^*f\left(a + j \cdot \frac{b-a}{H}\right) \cdot \frac{1}{H} \\
&= \sum\nolimits_{j=1}^{H} \left(\sum\nolimits_{i=1}^{K} {}^*f\left(a + ((j-1)K + i) \cdot \frac{b-a}{HK}\right) \right. \\
&- \left. {}^*f\left(a + j \cdot \frac{b-a}{H}\right) \right) \cdot \frac{1}{HK} \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Према томе, помоћу $\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{st}(S_H f)$ можемо да уведемо Риманов интеграл непрекидне функције на $[a,b]$.

На крају, издвајамо нестандардни доказ следећег основног резултата интегралног рачуна за непрекидне функције.

ТЕОРЕМА 7.35. *Нека је $f(x)$ непрекидна функција на $[a,b]$. Тада постоји функција $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ за коју је $F'(x) = f(x)$, $x \in]a,b[$.*

Доказ. За произвољно $c \in]a,b[$ и стандардно $h > 0$ такво да $c+h \in [a,b]$ важи

$$\begin{aligned} F(c+h) - F(c) &= \int_c^{c+h} f(t)\,dt \\ &= \mathrm{st}\left(\sum\nolimits_{k=1}^{H} {}^*f\left(c + (k-1)\cdot\frac{h}{H}\right)\frac{h}{H}\right) \\ &= h\cdot \mathrm{st}\left(\frac{1}{H}\sum\nolimits_{k=1}^{H} {}^*f\left(c + (k-1)\cdot\frac{h}{H}\right)\right). \end{aligned}$$

Нека су у тачкама c_1 и c_2 максимум и минимум функције f на интервалу $[c, c+h]$. Тада је

$$f(c_2) \le \frac{1}{H}\sum\nolimits_{k=1}^{H} {}^*f\left(c + (k-1)\cdot\frac{h}{H}\right) \le f(c_1),$$

а одатле $f(c_2) \le \dfrac{F(c+h)-F(c)}{h} \le f(c_1)$. Како ово важи и за инфинитезимално $h \ne 0$, а тада је $c_1 \approx c_2$, па и $f(c_2) \approx f(c_1) \approx f(c)$, добијамо $\dfrac{F(c+h)-F(c)}{h} \approx f(c)$, тј. $F'(c) = f(c)$. ∎

Глава 8

Елементарне функције

Елементарне функције чине најважнију класу функција у анализи. У овој глави засноваћемо ове функције и извести најважније особине које су занимљиве са становишта анализе. Наравно, да бисмо изградили елементарне функције користићемо методе нестандардне анализе које смо развили у претходним поглављима.

8.1 Полиноми и рационалне функције

У сваком пољу $\mathbf{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ постоји класа функција које су дефинабилне на језику поља проширеном симболима константи из домена F. Реч је о полиномним и рационалним функцијама.

Пре него што наведемо тачне дефиниције ових појмова, подсетимо се да симбол L_F означава језик $L \cup \{\, \underline{a} \,|\, a \in F \,\}$. Дакле, ако је L језик теорије поља, онда је $L_F = \{\, +, \cdot, /, 0, 1 \,\} \cup \{\, \underline{a} \,|\, a \in F \,\}$.

Дефиниција 8.1. 1° Полином (са промењивом x) над пољем $\mathbf{F}$ је сваки терм језика L_F облика $P(x) = \underline{a_0} + \underline{a_1}x + \cdots + \underline{a_n}x^n, \;\; n \in \mathbb{N}$. Чланови низа $a_0, \ldots, a_n$ су коефицијенти полинома P. У запису полинома P уобичајено је да се уместо $\underline{a_i}$ пише a_i. Полином P је 0–полином уколико су сви његови коефицијенти једнаки 0.
2° Рационални израз (промењиве x) је сваки терм језика L_F облика $R(x) = P(x)/Q(x)$, где су P, Q полиноми поља $\mathbf{F}$, и Q није 0–полином.

Скупови свих полинома и рационалних израза промењиве x над пољем $\mathbf{F}$ означавају се редом са $\mathbf{F}[x]$ и $\mathbf{F}(x)$.

На сличан начин се дефинишу полиноми и рационални изрази више променљивих. Рецимо, полином са променљивама $x_1, \dots, x_k$ над пољем $\mathbf{F}$ је сваки терм језика L_F облика

$$P(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum\nolimits_{\alpha \in S} a_{\underline{\alpha}} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_k^{\alpha_k},$$

где је S коначан скуп неких низова дужине k природних бројева.

Дефиниција 8.2. Нека је $G(x_1, \dots, x_k)$ полином (рационални израз) над пољем $\mathbf{F}$. Пресликавање $g\colon F^k \to F$ одређено једнакошћу

$$g(a_1, \dots, a_k) = G^{\mathbf{F}}[a_1, \dots, a_k]$$

назива се полиномном (рационалном) функцијом поља $\mathbf{F}$.

Претпоставићемо елементарне појмове и особине полинома и рационалних израза. Ипак издвајамо, без доказа, ове особине.

Теорема 8.1. 1° *Полиноми $P, Q \in \mathbf{F}[x]$ су међусобно једнаки ако и само ако су P и Q полиноми истог степена и имају једнаке одговарајуће коефицијенте.*

2° *Структура $(\mathbf{F}[x], +, \cdot, 0, 1)$ је комутативан прстен са јединицом, где је $+$ сабирање, а $\cdot$ множење полинома.*

3° *Структура $(\mathbf{F}(x), +, \cdot, 0, 1)$ је поље, где је $+$ сабирање, а $\cdot$ множење рационалних израза.*

4° *Ако је $k \in F$ корен полинома $P(x) \in \mathbf{F}[x]$, онда $x - k$ дели $P(x)$.*

5° *Полином $P(x)$ степена n има највише n корена (рачунајући и њихову вишеструкост) у пољу $\mathbf{F}$. Ако су $k_1, \dots, k_n$ корени полинома $P(x)$, онда у $\mathbf{F}$ важи једнакост $P(x) = a_n(x - k_1)\dots(x - k_n)$, при чему је a_n водећи коефицијент.*

Ако је $\mathbf{F}$ поље карактеристике 0, онда свакој полиномној функцији одговара тачно један полином. То није случај са пољима чија је карактеристика различита од 0. Тако на пример, у пољу остатака $\mathbf{Z}_p = (Z_p, +_p, \cdot_p, 0, 1)$ по модулу простог броја p важи закон $x^p = x$, дакле идентичка функција домена Z_p одређена је са два различита полинома, то су x^p и x.

За Анализу од интереса су полиноми над пољем реалних и пољем комплексних бројева. Пресликавање $\mathrm{st}\colon {}^*\mathbb{R}_{\mathrm{fin}} \to \mathbb{R}$ је хомоморфизам, па отуда имамо

$$\mathrm{st}\ {}^*p(x) = \mathrm{st} \sum\nolimits_{i\le n} a_i x^i = \sum\nolimits_{i\le n} a_i(\mathrm{st}\ x)^i = p(\mathrm{st}\ x), \quad x \in {}^*\mathbb{R}_{\mathrm{fin}}.$$

Како се непрекидност реалне функције f посматрано из ${}^*\mathbb{R}$ види као комутативност функција st и ${}^*f$, то важи следеће тврђење.

ТЕОРЕМА 8.2. *Свака полиномна функција* $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *је непрекидна.*

Без икакве разлике се доказује да је свака полиномна функција таква да $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, где је $\mathbf{C}$ поље комплексних бројева, такође непрекидна у $\mathbb{C}$, као и њихове генерализације, полиномне функције са више аргумената. Такође, истим поступком се доказује да су рационалне функције непрекидне на свом домену.

Ако је $p(x) = \sum_{i\le n} a_i x^i, \quad a_n > 0$, реална полиномна функција непарног степена, онда $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ и $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$, па према Теореми 8.2. и Теореми 7.19. имамо следеће тврђење.

ТЕОРЕМА 8.3. *Сваки реални полином непарног степена има бар један реалан корен.*

С друге стране, поље комплексних бројева је алгебарски затворено, тј. сваки полином $P(x) \in \mathbf{C}[x]$ степена ≥ 1, има корен у $\mathbb{C}$. Ово веома важно својство комплексних бројева доказујемо у оквиру неколико следећих тврђења.

Следећу лему доказаћемо касније, када изведемо особине тригонометријских функција.

ЛЕМА 8.1. *Једначина* $z^n = a,\ n \ge 1,\ a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *има тачно* n *решења у пољу комплексних бројева* $\mathbf{C}$.

ЛЕМА 8.2. *Ако је* p *полиномна функција над пољем* $\mathbf{C}$*, степена* ≥ 1 *и* $p(z_0) \ne 0$*, онда постоји* $z_1 \in \mathbb{C}$ *такав да је* $|p(z_1)| < |p(z_0)|$.

Доказ. Полином p за $z_0, h \in \mathbb{C}$ и $z = z_0 + h$ можемо представити на следећи начин

$$\begin{aligned} p(z) &= A_0 + A_1(z - z_0) + \cdots + A_n(z - z_0)^n, \\ p(z_0 + h) &= p(z_0) + A_1 h + \cdots + A_n h^n. \end{aligned}$$

Нека је A_k први у низу $A_1, \dots, A_n$ различит од нуле, и $h = t\varepsilon$, где је ε једно решење једначине $x^k = -\dfrac{p(z_0)}{A_k}$ по x, које према Леми 8.1. постоји, и нека је $0 \le t \le 1$. Даље, уведимо $B_j = A_j \varepsilon^j$. Тада важи

$$\begin{aligned}
|p(z_0+h)| &= |p(z_0) - t^k p(z_0) + t^{k+1}B_{k+1} + \cdots + t^n B_n| \\
&\le |(1-t^k)p(z_0)| + t^{k+1}|B_{k+1}| + \cdots + t^n|B_n| \\
&= (1-t^k)|p(z_0)| + t^{k+1}|B_{k+1}| + \cdots + t^n|B_n| \\
&= |p(z_0)| + t^k(-|p(z_0)| + t|B_{k+1}| + \cdots + t^{n-k}|B_n|) \\
&= |p(z_0)| + t^k B(t).
\end{aligned}$$

Приметимо да је функција $B(t)$ реалан полином. Даље имамо да је $B(0) = -|p(z_0)| < 0$, па како је функција $B(t)$ непрекидна, постоји $0 < t_0 < 1$ тако да $B(t_0) < 0$. Тада за $h = t_0\varepsilon$ важи

$$|p(z_0+h)| \le |p(z_0)| + t_0^k B(t_0) < |p(z_0)|,$$

дакле можемо узети $z_1 = z_0 + t_0\varepsilon$. ■

Лема 8.3. *Ако је $p(z)$ комплексан полином степена ≥ 1, $z \in {}^*\mathbb{C}$ бесконачан, тада је и $p(z)$ бесконачан.*

Доказ. Можемо узети да је $p(z) = z^n\left(\dfrac{a_0}{z^n} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{z} + a_n\right)$, где је $n \ge 1$, $a_n \ne 0$. Отуда $\dfrac{a_{n-k}}{z^k} \approx 0$ за $k \ge 1$, па $\dfrac{a_0}{z^n} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{z} + a_n \approx a_n$. Следи $\dfrac{p(z)}{z^n} \approx a_n$, одакле $|p(z)| = +\infty$. ■

Теорема 8.4. *Сваки комплексан полином $p(z)$ степена ≥ 1 има корен у пољу комплексних бројева* $\mathbf{C}$.

Доказ. Нека је $S = \big\{\, |p(z)| \,\big|\, z \in \mathbb{C} \,\big\}$ и $s = \inf S$. Инфимум скупа S постоји јер је за све $a \in S$, $a \ge 0$. Дакле $s = \inf_{z\in\mathbb{C}} |p(z)|$. Отуда постоји $z \in {}^*\mathbb{C}$ тако да је $s \approx |p(z)|$. Како је s коначан, то је и $p(z)$ коначан, па према Леми 8.3. и z је коначан. Нека је $u = \mathrm{st}(z)$. Полином p је непрекидна функција, па је $s = \mathrm{st}\,|p(z)| = |p(\mathrm{st}(z))| = |p(u)|$, тј. $|p(u)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |p(z)|$. Према Леми 8.2. одмах следи $p(u) = 0$. ■

Дакле поље комплексних бројева је алгебарски затворено, па према Теореми 8.1. следи

ПОСЛЕДИЦА 8.1. *Сваки полином $P(x) \in \mathbf{C}[x]$ разложив је у производ линеарних фактора, тј. постоје $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ такви да у $\mathbb{C}$ важи једнакост*

$$P(x) = a_n(x - c_1) \cdot \ldots \cdot (x - c_n)$$

и a_n је водећи коефицијент.

Према Лајбницовом принципу поље ${}^*\mathbf{C}$ је такође алгебарски затворено. Користећи ову особину поља ${}^*\mathbf{C}$ могуће је оценити корене полинома $P(z) \in {}^*\mathbf{C}[z]$ уколико се коефицијенти у $P(z)$ апроксимирају елементима из $\mathbb{C}$.

ЛЕМА 8.4. *Нека је $P(z) = \sum_{i \leq n} a_i z^i$ полином са коефицијентима у ${}^*\mathbb{C}_{\mathrm{fin}}$, $\mathrm{st}(a_n) \neq 0$, и нека је за $b \in {}^*\mathbb{C}_{\mathrm{fin}}$, $P(b) \approx 0$. Тада постоји $c \in \mu(b)$ такав да је $P(c) = 0$.*

Доказ. Како је ${}^*\mathbf{C}$ алгебарски затворено поље, то постоје елементи $b_1, \dots, b_n \in {}^*\mathbb{C}$ такви да је $P(z) = a_n(z - b_1) \cdot \ldots \cdot (z - b_n)$. Даље, ако је $z \in {}^*\mathbb{C}$ бесконачан, онда

$$\frac{|P(z)|}{|a_n||z|^n} = \left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right| \approx 1, \tag{1}$$

тј. ${}^*\mathbf{C} \models (\exists h \in \mathbb{R})(\forall z)\Big(|z| \geq h \Rightarrow |P(z)| \geq \dfrac{1}{2}\Big)$, одакле према Лајбницовом принципу следи

$$\mathbf{C} \models (\exists h \in \mathbb{R})(\forall z)\left(|z| \geq h \Rightarrow |P_0(z)| \geq \frac{1}{2}\right),$$

где је $P_0(z) = d_0 + d_1 z + \cdots + d_n z^n$, $d_i = \mathrm{st}\ a_i$ за $i \leq n$, јер је за $z \in {}^*\mathbb{C}_{\mathrm{fin}}$, $P_0(z) \approx P(z)$. Отуда, за неки $h_0 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{C} \models (\forall z)\Big(|z| \geq h_0 \Rightarrow |P_0(z)| \geq \frac{1}{2}\Big),$$

одакле према Лајбницовом принципу, користећи да је $P_0(z) \approx P(z)$, $z \in {}^*\mathbb{C}_{\mathrm{fin}}$ и (1), имамо

$${}^*\mathbf{C} \models (\forall z)\left(|z| \geq h_0 \Rightarrow |P(z)| \geq \frac{1}{2}\right).$$

Дакле, сви корени полинома $P(z)$ су коначни, тј. $b_1, \dots, b_n \in {}^*\mathbb{C}_{\mathrm{fin}}$. Ако $b_i \notin \mu(b)$ за сваки $i \leq n$, онда

$$\mathrm{st}(P(b)) = \mathrm{st}(a_n) \cdot \mathrm{st}(b - b_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{st}(b - b_n) \neq 0,$$

што је контрадикција услову $P(b) \approx 0$. ■

Према последњој леми имамо занимљиву последицу да се полиноми над прстеном ${}^*\mathbf{C}_{\text{fin}}$, код којих најстарији коефицијент није инфинитезимала, разлажу на линеарне факторе. Такође, у могућности смо да оценимо корене полинома који се могу апроксимирати стандардним полиномима.

Теорема 8.5. *Нека је полином $p(z) \in {}^*\mathbb{C}[z]$ степена m са коначним коефицијентима и нека је полином $q(z) \in \mathbb{C}[z]$ степена $n \geq 1$ такав да за све $z \in {}^*\mathbb{C}_{\text{fin}}$ важи једнакост $\operatorname{st} p(z) = q(\operatorname{st} z)$. Тада важи:*

1° *Ако је $m = n$, $m, n \geq 1$, онда је $b \in \mathbb{C}$ корен полинома $q(z)$ ако и само ако постоји корен $a \in {}^*\mathbb{C}$ полинома p такав да је $b = \operatorname{st}\ a$.*

2° *Ако је $m > n$, онда постоји n корена полинома $p(z)$ чији су стандардни делови корени полинома $q(z)$ (рачунајући вишеструкост корена) и $m - n$ бесконачних корена полинома $p(z)$.*

Доказ. 1° $(\to)$ Нека је $q(b) = 0$, $b \in \mathbb{C}$. Тада важи $0 = q(b) = q(\operatorname{st}\ b) = \operatorname{st} p(b)$, тј. $p(b) \approx 0$. Како је $q(z)$ степена ≥ 1 и $q(z)$ је истог степена као и $p(z)$, то коефицијент члана полинома p са највећим степеном није инфинитезимала. Дакле, према Леми 8.4. постоји $a \in \mu(b)$ такав да је $p(a) = 0$.
$(\leftarrow)$ Из услова $p(a) = 0$ налазимо $0 = \operatorname{st}\ p(a) = q(\operatorname{st}\ a)$. Да је a коначан доказује се као у Леми 8.4. Даље, ако су $a_1, \ldots, a_n$ корени полинома p и $b_1, \ldots, b_n$ корени полинома q, онда за неки $d \in \mathbb{C}$ важи

$$q(z) = d(z - b_1) \ldots (z - b_n) = d(z - \operatorname{st}\ a_1) \ldots (z - \operatorname{st}\ a_n). \tag{2}$$

Заиста, ако је $\operatorname{st}\ p(z) = q(\operatorname{st}\ z)$ за $z \in {}^*\mathbb{C}_{\text{fin}}$, онда се непосредно доказује да такође важи

$$\operatorname{st}(p'(z)) = q'(\operatorname{st}\ z), \tag{3}$$

где је $p'(z)$ извод полинома $p(z)$. Приметимо да извод полинома можемо дефинисати формално не позивајући се на диференцијални рачун, наиме узимајући да је извод полинома $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ полином $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$. На основу ове дефиниције извода полинома није тешко видети да је a вишеструки корен полинома $p(z)$ ако и само ако је $p(a) = 0$ и $p'(a) = 0$. Отуда према (3) следи да су вишеструкости корена a_i и $\operatorname{st}\ a_i$ једнаке, дакле једнакост (2) важи.

2° Нека су $a_1, \dots, a_k$ коначни и $c_1, \dots, c_l$ бесконачни корени полинома $p(z)$ и нека су M_p, M_q редом коефицијенти чланова полинома p, q највећег степена. Дакле, $p(z) = M_p(z-a_1)\dots(z-a_k)(z-c_1)\dots(z-c_l)$. Тада $0 = \mathrm{st}\ p(a_i) = q(\mathrm{st}\ a_i)$, тј. $\mathrm{st}\ a_i$ је корен полинома $q(z)$. Даље, ако је $q(b) = 0$, онда $p(b) \approx 0$. Уколико је $b \neq \mathrm{st}\ a_i,\ i = 1, \dots, k$, онда важи $M(b-b_1)\dots(b-b_k) \approx 0$. Тада за сваки $b' \in {}^*\mathbb{C}_{\mathrm{fin}}$ имамо

$$M\cdot\prod_i(b'-b_i) = M\cdot\prod_i((b-b_i)+(b'-b)) = \sum_j(b'-b)^j\cdot M\cdot\prod_i(b-b_i) \approx 0,$$

јер је $b'-b$ коначан и $M\cdot\prod_i(b-b_i) \approx 0$. Отуда за све $z \in {}^*\mathbb{C}_{\mathrm{fin}}$, важи и $p(z) \approx 0$, одакле следи да је $q(z)$ 0–полином, супротно претпоставци да је $n \geq 1$.

Да су вишеструкости корена a_i и $\mathrm{st}\ a_i$ једнаке, доказује се као у 1°. ■

8.2 Степена функција

У овом одељку размотрићемо изградњу, као и алгебарске и инфинитезималне особине степене функције $(x, y) \mapsto x^y$.

Функција $x^m, m \in \mathbb{N}$

Неке особине ове функције следе из својстава полинома. Најпре ћемо показати да функција $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = x^m$, има инверзну функцију, другим речима, ако је $a \in \mathbb{R}^+$, онда a има m–ти корен $\sqrt[m]{a}$ за сваки позитиван природан број m.

Теорема 8.6. *Нека је m природан број и $A_m = \{\, x^m \mid x \in \mathbb{R}\,\}$. Тада важи:*

- *ако је $m > 0$ паран број, онда је $A_m = \mathbb{R}^+ \cup \{\,0\,\}$;*
- *ако је m непаран, онда је $A_m = \mathbb{R}$.*

Доказ. Очигледно, довољно је доказати да за $0 < a < 1$ постоји $x \in \mathbb{R}$ такав да је $x^m = a$.

Нека је H бесконачан природан број и нека је $c_i = \left(\dfrac{i}{H}\right)^m$ за $i = 0, 1, \dots, H$. Тада је $\{\, [c_{i-1}, c_i[\,\big|\, 1 \leq i \leq H \,\}$ разбијање интервала $[0,1]_{{}^*\mathbb{R}}$, те постоји тачно један $i \leq H$ такав да је $\left(\dfrac{i}{H}\right)^m \leq a < \left(\dfrac{i+1}{H}\right)^m$.

Отуда имамо $\mathrm{st}\left(\dfrac{i}{H}\right)^m \lesssim \mathrm{st}\ a \lesssim \mathrm{st}\left(\dfrac{i+1}{H}\right)^m$, тј. за $x_0 = \mathrm{st}\left(\dfrac{i}{H}\right)$ важи $x_0^m \lesssim a \lesssim x_0^m$, одакле следи $x_0^m = a$. ■

Од интереса може бити и следеће тврђење чији доказ даје произвољно добру апроксимацију за $\sqrt[m]{a}$ низом рационалних бројева.

Теорема 8.7. *Нека је m позитиван природан број. Тада је скуп дат са $A_m = \{\, x^m \mid x \in \mathbb{Q}^+ \,\}$ густ у $\mathbb{Q}^+$.*

Доказ. Нека је $a \in \mathbb{Q}$, $0 < a < 1$, и нека је низ (x_n) дефинисан са

$$x_{n+1} = 1 - (1-a)\cdot\frac{1-x_n}{1-x_n^m}, \qquad x_0 = 0. \tag{4}$$

Тада

1° за сваки $n \in \mathbb{N}^+$ важи $0 < x_n < 1$;

2° низ (x_n) је монотоно растући.

Доказ тврђења 1° изводимо индукцијом, с тим што наводимо само индуктивни корак. По индуктивној хипотези $0 < x_n < 1$, дакле $0 < x_n^m < 1$. С обзиром на то да је $1 - x_{n+1} = (1-a)\cdot\dfrac{1-x_n}{1-x_n^m}$ следи $x_{n+1} < 1$. Даље, према (4) следи

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n + \cdots + x_n^{m-1}}{1 + x_n + \cdots + x_n^{m-1}}, \tag{5}$$

па како је по индуктивној хипотези $x_n > 0$, то је и $x_{n+1} > 0$. Овим је 1° доказано.

Доказ тврђења 2° такође изводимо индукцијом. Како је $x_0 = 0$, $x_1 = a$, то је $x_1 > x_0$, па $x_{n+1} > x_n$ важи за $n = 0$. Даље, из (4) налазимо

$$\frac{(1-x_{n+1})(1-x_{n-1})}{(1-x_n)^2} = \frac{1-x_{n-1}^m}{1-x_n^m}, \tag{6}$$

отуда

$$\frac{1-x_{n+1}}{1-x_n} = \frac{1 + x_{n-1} + \cdots + x_{n-1}^{m-1}}{1 + x_n + \cdots + x_n^{m-1}}. \tag{7}$$

По индуктивној хипотези $x_n > x_{n-1}$, дакле $\dfrac{1 + x_{n-1} + \cdots + x_{n-1}^{m-1}}{1 + x_n + \cdots + x_n^{m-1}} < 1$, па према (7) следи $x_n < x_{n+1}$. Овим је доказано тврђење 2°.

Према 1° и 2° низ (x_n) је конвергентан, дакле Кошијев, те за бесконачне природне бројеве n, m имамо $x_n \approx x_m$. Нека је n бесконачан природан број и $w = x_n$. Тада $x_{n+1} \approx x_n$, па према (5) следи

$$w \approx \frac{a + w + \cdots + w^{m-1}}{1 + w + \cdots + w^{m-1}}. \tag{8}$$

С обзиром на то да је $1 + w + \cdots + w^{m-1}$ коначан, то из (8) следи $w^m \approx a$. Елемент w је хиперрационалан, па према Лајбницовом принципу скуп A_m је густ у некој околини броја a. Како је елемент $a \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ произвољан, то је A_m густ у $]0,1[_{\mathbb{Q}}$. Помоћу пресликавања $x \mapsto x^{-1}$ $(x \in \mathbb{Q}^+)$ непосредно се доказује да је A_m густ у $\mathbb{Q}^+$. ■

На основу претходног тврђења и ω_1–засићености имамо нов доказ Теореме 8.6. Наиме, према Теореми 8.7.

$$\Sigma(x) = \left\{ \underline{a} - \frac{1}{n} < x^m < \underline{a} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

је коначно непротивуречан скуп формула, тј. тип (са једним симболом константе $\underline{a}$), па како је ${}^*\mathbb{Q}$ ω_1–засићен, то постоји $c \in {}^*\mathbb{Q}$ који реализује тип $\Sigma(x)$ у ${}^*\mathbb{Q}$, тј. $c^m \approx a$. Узимајући $r = \mathrm{st}(c)$, добијамо $r^m = a$.

ФУНКЦИЈА x^q, $q \in \mathbb{Q}^+$

Из $t^m - 1 = (t-1)(1 + t + \cdots + t^{m-1})$ закључујемо да за позитиван природан број m у пољу $\mathbf{R}$ важи

ЛЕМА 8.5. *Из $t > 0$ и $t^m = 1$ следи $t = 1$.*

Како је за $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+$, $y_1^m = y_2^m$ ако и само ако $\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)^m = 1$, то према овој леми и Теореми 8.6. пресликавање $x \mapsto x^{1/m}$ $(x \in \mathbb{R}^+)$ је добро дефинисано следећом еквиваленцијом:

ДЕФИНИЦИЈА 8.3. $y = x^{1/m} \Leftrightarrow y > 0 \land y^m = x$.

Ако је $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ пресликавање одређено са $f(x) = x^m$, тада је према претходној дефиницији, очигледно, функција $x \mapsto x^{1/m}$, $(x \in \mathbb{R}^+)$ инверзна за f.

Нека је $q \in \mathbb{Q} \setminus \{ 0 \}$. Тада је за неке позитивне природне бројеве m, n, $q = \dfrac{m}{n}$ или $q = -\dfrac{m}{n}$. Претпоставићемо да су m и n узајамно прости.

Дефиниција 8.4. 1° Ако је $x \in \mathbb{R}^+$ и $q > 0$, тада $x^q = (x^m)^{1/n}$.
2° Ако је $x \in \mathbb{R}^+$ и $q < 0$, тада је $x^q = ((x^m)^{1/n})^{-1}$.

Према Дефиницијама 8.3. и 8.4. одмах добијамо следеће алгебарске особине функција $x \mapsto x^q$.

Теорема 8.8. *Нека су $x, y \in \mathbb{R}^+$, и $p, q \in \mathbb{Q}$. Тада*

1° $(xy)^q = x^q y^q$, $\quad 2^\circ$ $(x^q)^p = x^{qp}$, $\quad 3^\circ$ $x^{p+q} = x^p x^q$,

4° *ако је $0 < p < q$, онда за $0 < x < 1$, $x^p > x^q$ и за $x > 1$, $x^p < x^q$.*

Према Лајбницовом принципу непосредно следи да једнакости 1°–4° важе и за $x, y \in {}^*\mathbb{R}^+$, $p, q \in {}^*\mathbb{Q}^+$.

Функција x^r, $r \in \mathbb{R}$

У овом одељку видећемо да су својства функције x^r $(r \in \mathbb{R})$ последице инфинитезималних особина функције x^q $(q \in \mathbb{Q})$.

Лема 8.6. *Нека су $p, q \in {}^*\mathbb{Q}_{\mathrm{fin}}$ такви да је $p \approx q$. Тада за сваки $x \in \mathbb{R}^+$ важи $x^p \approx x^q$.*

Доказ. Најпре докажимо

$$x^{1/n} \approx 1, \quad \text{за } n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}. \tag{9}$$

Претпоставимо $x \geq 1$ и нека је $x^{1/n} = 1+\varepsilon$. Тада је $\varepsilon \geq 0$ и $x = (1+\varepsilon)^n \geq 1+n\varepsilon$. С обзиром на то да је n бесконачан, следи да је ε инфинитезимала, тј. (9) важи за $x \geq 1$. Користећи особине пресликавања $x \mapsto x^{-1}$ доказује се да (9) важи и за $0 < x \leq 1$.

Претпоставимо да су $p, q \in {}^*\mathbb{Q}_{\mathrm{fin}}$, $p \approx q$, и нека је, рецимо, $p < q$. Тада постоји $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ такав да је $q - p < \dfrac{1}{n}$. Према Лајбницовом принципу (погледати страну 213) и Теореми 8.8. за $x > 1$ важи

$$1 \leq x^{q-p} \leq x^{1/n} \approx 1,$$

тј. $x^p \approx x^q$. Слично разматрање је и у случају $0 < x < 1$. ■

Сада дефиниција степене функције x^r $(r \in \mathbb{R})$ изгледа једноставно.

Дефиниција 8.5. Нека је $x \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}$ и $q \in {}^*\mathbb{Q}$ такав да је $q \approx r$. Тада је $x^r = \mathrm{st}(x^q)$.

Према Леми 8.6. непосредно следи да вредност x^r не зависи од избора елемента $q \in \mu(r)$, тј. за сваки $q \in \mu(r)$ важи $x^r = \mathrm{st}(x^q)$. Како је $\mathrm{st}\colon {}^*\mathbb{Q}_{\mathrm{fin}} \to \mathbb{R}$ хомоморфизам, према Теореми 8.8. непосредно добијамо следеће тврђење.

Теорема 8.9. *Нека су $x, y \in \mathbb{R}^+$ и $r, s \in \mathbb{R}$. Тада*

1° $(xy)^r = x^r y^r$, 2° $x^{r+s} = x^r x^s$,

3° *за $r > 0$ је $x^r \uparrow$ (растућа функција), а за $r < 0$ је $x^r \downarrow$ (опадајућа),*

4° *за $0 < r < s$ и $0 < x < 1$ важи $x^s < x^r$, а за $1 < x$ важи $x^r < x^s$,*

5° $(x^r)^s = x^{rs}$.

Доказ. 1° Нека је $q \in {}^*\mathbb{Q}$ такав да је $r \approx q$. Тада

$$(xy)^r = \mathrm{st}(xy)^q = \mathrm{st}(x^q y^q) = \mathrm{st}(x^q)\,\mathrm{st}(y^q) = x^r y^r.$$

Слично се доказују и наредне особине. Издвојимо само доказ последње. Лако је проверити на основу Теореме 8.8. да за $s \in \mathbb{Q}$, 5° важи. Дакле, према Лајбницовом принципу ово тврђење важи и за $x \in {}^*\mathbb{R}$, $s \in {}^*\mathbb{Q}$. Нека су $r, s, x \in \mathbb{R}$ и $q \in {}^*\mathbb{Q}$ такав да је $s \approx q$. Тада

$$(x^r)^s = \mathrm{st}\,(x^r)^q = \mathrm{st}(x^{rq}) = \mathrm{st}(x^{rs+\varepsilon}), \quad \text{где је } \varepsilon \approx 0.$$

Користећи 2° имамо $(x^r)^s = x^{rs}\,\mathrm{st}(x^\varepsilon)$. Ако је $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ такав да је $\varepsilon < \dfrac{1}{n}$, тада $x^\varepsilon < x^{1/n} \approx 1$, па $\mathrm{st}(x^\varepsilon) = 1$. ■

Следећа инфинитезимална особина функције x^r је кључни корак у доказима многих макро и микро својстава ове функције.

Лема 8.7. *Нека је ε инфинитезимала. Тада за сваки $r \in \mathbb{R}$ постоји $\eta \in \mu(0)$ такав да је $(1+\varepsilon)^r = 1 + r\varepsilon + \eta\varepsilon$.*

Доказ. Нека је ε позитивна инфинитезимала и нека је функција $g\colon {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ дефинисана следећом једнакошћу

$$(1+\varepsilon)^r = 1 + g(r)\varepsilon. \tag{10}$$

Нека је $r \in \mathbb{R}^+$ и n природан број такав да је $r \leq n$. Тада

$$\frac{(1+\varepsilon)^r - 1}{\varepsilon} \leq \frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{\varepsilon} \lesssim n, \text{ дакле } 0 \leq g(r) \lesssim n. \tag{11}$$

Даље, $1 + g(-r)\varepsilon = (1+\varepsilon)^{-r} = \dfrac{1}{(1+\varepsilon)^r} = \dfrac{1}{1+g(r)\varepsilon}$.

Како је према (10) $g(r)\varepsilon$ инфинитезимала, то за неки коначан $m \in {}^*\mathbb{R}$ важи $\dfrac{1}{1+g(r)\varepsilon} = 1 - g(r)\varepsilon + m\varepsilon^2$, дакле $1 + g(-r)\varepsilon = 1 - g(r)\varepsilon + m\varepsilon^2$, па

$$g(-r) \approx -g(r). \tag{12}$$

Према (11) и (12) функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са $f(r) = \operatorname{st} g(r)$ $(r \in \mathbb{R})$, добро је дефинисана. Даље, за $r, s \in {}^*\mathbb{R}$, користећи Теорему 8.9. имамо $1+g(r+s)\varepsilon = (1+\varepsilon)^{r+s} = (1+\varepsilon)^r(1+\varepsilon)^s = 1+(g(r)+g(s))\varepsilon+g(r)g(s)\varepsilon^2$, дакле

$$g(r+s) = g(r) + g(s) + g(r)g(s)\varepsilon. \tag{13}$$

Отуда за $r, s \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$

$$f(r+s) = f(r) + f(s). \tag{14}$$

Према (11), (12) и дефиницији функције f, за $r \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, важи импликација $|r| \leq n \Rightarrow |f(r)| \leq n$, па су испуњени услови Дарбуове[1)] теореме за Кошијеву функционалну једначину (14), дакле $f(r) = f(1)r$. Како је $f(1) = 1$, то је $f(r) = r$. Даље, $g(r) \approx f(r)$, те за сваки $r \in \mathbb{R}$ постоји $\eta \in \mu(0)$ такав да је $g(r) = f(r) + \eta = r + \eta$, па тврђење важи за $r > 0$. Користећи особине функције $x \mapsto x^{-1}$ тврђење се проширује и на $r < 0$. ∎

Последица 8.2. *За сваки* $r \in \mathbb{R}$ *важи:* $x \approx 1 \Rightarrow x^r \approx 1$.

[1)] Jean Gaston Darboux (1842–1917)

Пресликавање $g\colon (x,y) \mapsto x^y,\ \ x \in \mathbb{R}^+,\ y \in \mathbb{R}$ има екстензију до ${}^*g\colon {}^*\mathbb{R}^+ \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$, и према Лајбницовом принципу, све алгебарске особине функције g преносе се на ${}^*g$, на пример особине из Теореме 8.9. Управо из ових алгебарских особина и инфинитезималног својства описаног у Леми 8.7. могу се извести остале важније особине функције ${}^*g$.

Теорема 8.10. *Нека су* $x,y \in {}^*\mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R}$ *такви да је* $a = \mathrm{st}(x),\ b = \mathrm{st}(y)$. *Тада важи* $x^y \approx a^b$.

Доказ. Нека су $\varepsilon, \eta \in \mu(0)$ такви да је $x = a+\varepsilon,\ y = b+\eta$. Тада, користећи алгебарске особине функције x^y, важи

$$x^y = (a+\varepsilon)^{b+\eta} = (a+\varepsilon)^b (a+\varepsilon)^\eta = a^b \left(1+\frac{\varepsilon}{a}\right)^b (a+\varepsilon)^\eta.$$

Према Последици 8.2. имамо $\left(1+\dfrac{\varepsilon}{a}\right)^b \approx 1$. Даље, слично доказу Леме 8.7. важи $(a+\varepsilon)^\eta \approx 1$. Отуда следи $x^y \approx a^b$. ■

Последица 8.3. *За* $x_1, x_2 \in {}^*\mathbb{R}^+_{\mathrm{fin}}$ *и* $y_1, y_2 \in {}^*\mathbb{R}_{\mathrm{fin}}$ *важи:*

$$x_1 \approx x_2 \ \wedge\ y_1 \approx y_2 \ \Rightarrow\ {x_1}^{y_1} \approx {x_2}^{y_2}.$$

С друге стране, ε^η, где су ε, η инфинитезимале, може бити било шта. Рецимо, бирајући бесконачан природан број n имамо

- За $\varepsilon = \eta = \dfrac{1}{n},\ \ \varepsilon^\eta = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/n} \approx 1.$
- За $\varepsilon = \dfrac{1}{n^n},\ \eta = \dfrac{1}{n},\ \ \varepsilon^\eta = \dfrac{1}{n} \approx 0.$

Из Последице 8.3. добијамо да је функција $(x,y) \mapsto x^y$, за $x \in \mathbb{R}^+$ и $y \in \mathbb{R}$ непрекидна на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

8.3 Једна лема

Асимптотску формулу у леми коју наводимо искористићемо приликом изградње елементарних функција $\exp, \sin, \cos$. Наравно, доказ ове леме могуће је извести методама класичне анализе, али доказ који наводимо као и формулација самог тврђења су нестандардни.

ЛЕМА 8.8. *Нека комплексан ред* $\sum_n \dfrac{a_n}{n!}$ *апсолутно конвергира. Тада*

$$\sum_{k\le n} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} a_k \approx \sum_{k\le n} \frac{a_k}{k!}, \quad n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}.$$

Доказ. Нека је $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ и k бесконачан природан број такав да је $\dfrac{k^2}{n} \approx 0$. Тада

$$\sum_{i\le n} \frac{1}{n^i}\binom{n}{i} a_i = \sum_{i\le k} \frac{1}{n^i}\binom{n}{i} a_i + \sum_{k<i\le n} \frac{1}{n^i}\binom{n}{i} a_i = A + B.$$

Даље, $A = \sum_{i\le k}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{i-1}{n}\right)\dfrac{a_i}{i!}$. За $i \le k$ важи

$$1 \ge \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \ge \left(1-\frac{k}{n}\right)^k \ge 1-\frac{k^2}{n} \approx 1.$$

Дакле, за $i \le k$ имамо $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{i-1}{n}\right) = 1+\varepsilon_i$, где је $\varepsilon_i \approx 0$ интерналан низ. Отуда

$$A = \sum_{i\le k}(1+\varepsilon_i)\frac{a_i}{i!} = \sum_{i\le k}\frac{a_i}{i!} + \sum_{i\le k}\frac{\varepsilon_i a_i}{i!}.$$

За ма који позитиван $r \in \mathbb{R}$ важи

$$\left|\sum_{i\le k}\frac{\varepsilon_i a_i}{i!}\right| \le \sum_{i\le k}\frac{|a_i|}{i!}|\varepsilon_i| \le \sum_{i\le k} r\frac{|a_i|}{i!} \le r\sum_{i\le k}\frac{|a_i|}{i!}.$$

Ред $\sum_i \dfrac{a_i}{i!}$ апсолутно конвергира, што даје да $\sum_{i\le k}\dfrac{|a_i|}{i!} \le L$ за неки $L \in \mathbb{R}^+$, тј. $\left|\sum_{i\le k}\dfrac{\varepsilon_i a_i}{i!}\right| \le rL$ за сваки $r \in \mathbb{R}^+$. Отуда $\sum_{i\le k}\dfrac{\varepsilon_i a_i}{i!} \approx 0$, тј.

$$A \approx \sum_{i\le k}\frac{a_i}{i!}. \tag{15}$$

Даље, из апсолутне конвергенције реда $\sum_i \dfrac{a_i}{i!}$ закључујемо да је $|B| \le \sum_{k<i\le n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{i-1}{n}\right)\dfrac{|a_i|}{i!} \le \sum_{k<i\le n}\dfrac{|a_i|}{i!} \approx 0$, тј.

$$B \approx 0. \tag{16}$$

Из (15) и (16) следи да за сваки бесконачан природан број n постоји бесконачан $k \in {}^*\mathbb{N}$ такав да је

$$\sum\nolimits_{i \leq n} \frac{1}{n^i}\binom{n}{i} a_i \approx \sum\nolimits_{i \leq k} \frac{a_i}{i!}. \tag{17}$$

Како је $\sum_i \dfrac{a_i}{i!}$ конвергентан ред, то за бесконачне природне бројеве k, n, према Кошијевом критеријуму конвергенције важи

$$\sum\nolimits_{i \leq k} \frac{a_i}{i!} \approx \sum\nolimits_{i \leq n} \frac{a_i}{i!}.$$

Отуда, према (17), тврђење важи. ■

8.4 Експоненцијална функција

Нека је $e_n \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ низ комплексних функција дефинисаних формулом

$$e_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Тада очигледно важи $e_n(z) = \sum_{k \leq n} \dfrac{1}{n^k}\binom{n}{k} z^k$, па бисмо радо применили асимптотску формулу из претходног одељка. Али, ова лема може се применити под условом да ред $\sum_k \dfrac{z^k}{k!}$ апсолутно конвергира. Зато најпре докажимо ово тврђење:

Теорема 8.11. *Ред* $\sum_k \dfrac{z^k}{k!}$ *апсолутно конвергира.*

Доказ. Нека је $z \in \mathbb{C}$, $a = |z|$, $m \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ и $\varepsilon = \dfrac{a}{m}$. Тада очигледно $\varepsilon \in \mu(0)$. Даље,

$$\begin{aligned} S &= \sum\nolimits_{m \leq k \leq m+n} \frac{a^k}{k!} \\ &= \frac{a^m}{m!}\left(1 + \frac{a}{m+1} + \cdots + \frac{a}{m+1}\cdot\frac{a}{m+2}\cdot \ldots \cdot \frac{a}{m+n}\right) \\ &\leq \frac{a^m}{m!}(1 + \varepsilon + \cdots + \varepsilon^n) \leq \frac{a^m}{m!}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Како је $\dfrac{1}{1-\varepsilon} \approx 1$ и с обзиром на то да је $\dfrac{a^m}{m!}$ коначан, имамо $0 \leq S \lesssim \dfrac{a^m}{m!}$. Нека је $k \geq 2a,\ k \in \mathbb{N}$. Тада

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{m!} &= \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k}\cdot\frac{a}{k+1}\cdots\frac{a}{m}, \quad \text{па за } t = \frac{a^k}{k!} \text{ следи} \\ \frac{a^m}{m!} &\leq t\left(\frac{1}{2}\right)^{m-k} \approx 0, \quad \text{дакле } \frac{a^m}{m!} \approx 0. \end{aligned}$$

Отуда следи $S \approx 0$, тј. ред $\sum_k \dfrac{z^k}{k!}$ апсолутно конвергира. ■

Према овој теореми и Леми 8.8. одмах имамо следеће тврђење.

Теорема 8.12. $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n \approx \sum_{k\leq n} \dfrac{z^k}{k!},\ \ n \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}.$

Према овој теореми и Теореми 8.11. следи да низ $e_n(z)$ конвергира за сваки $z \in \mathbb{C}$, дакле можемо увести нову функцију exp на следећи начин.

Дефиниција 8.6. $\exp(z) = \mathrm{st}\ e_n(z),\ \ n \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N},\ z \in \mathbb{C}.$

Према претходном такође важи

Теорема 8.13. $\exp(z) = \lim_{n\to\infty} e_n(z), \quad \exp(z) = \sum_n \dfrac{z^n}{n!}.$

Полазећи од ових својстава функције exp, можемо извести и друге важне алгебарске и инфинитезималне особине ове функције.

Теорема 8.14. $e_n(x+y) \approx e_n(x)e_n(y),\ \ x, y \in \mathbb{C},\ n \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}.$

Доказ. Користећи

$$\begin{aligned} e_n(x)e_n(y) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n = \\ = \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n + \binom{n}{1}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^{n-1}\frac{xy}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\left(\frac{xy}{n^2}\right)^n, \end{aligned}$$

добијамо $e_n(x)e_n(y) = e_n(x+y) + R_n(x,y)$, где је

$$R_n(x,y)=\sum\nolimits_{1\le i\le n}\binom{n}{i}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^{n-i}\left(\frac{xy}{n^2}\right)^i.$$

Отуда

$$\begin{aligned}|R_n(x,y)| &\le \frac{|xy|}{n}\sum\nolimits_{1\le i\le n}\left(1+\frac{|x+y|}{n}\right)^{n-i}\left(\frac{|xy|}{n}\right)^{i-1}\frac{1}{n^i}\binom{n}{i}\\ &\le \frac{|xy|}{n}\sum\nolimits_{1\le i\le n}\left(1+\frac{|x+y|}{n}\right)^{n}\left(\frac{|xy|}{n}\right)^{i-1}\frac{1}{n^i}\binom{n}{i}\\ &\le \frac{|xy|}{n}e_n(|x+y|)\sum\nolimits_{1\le i\le n}\left(\frac{|xy|}{n}\right)^{i-1},\ \text{jер је } \frac{1}{n^i}\binom{n}{i}\lesssim 1\\ &\le \frac{|xy|}{n}e_n(|x+y|)\frac{1}{1-\frac{|xy|}{n}}\approx 0,\end{aligned}$$

јер је $\dfrac{xy}{n}\approx 0,\ \dfrac{1}{1-\frac{|xy|}{n}}\approx 1,\ e_n\big(|x+y|\big)\in\gamma(0)$. Дакле, $R_n(x,y)\approx 0$, па тврђење следи. ■

ПОСЛЕДИЦА 8.4. $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y),\ \ x,y\in\mathbb{C}$.

Доказ. За $n\in{}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ важи $\exp(x+y)=\mathrm{st}\ e_n(x+y)=\mathrm{st}\,(e_n(x)e_n(y))=\mathrm{st}\ e_n(x)\cdot\mathrm{st}\ e_n(y)=\exp(x)\exp(y)$. ■

ТЕОРЕМА 8.15. $e_n(-x)\approx\dfrac{1}{e_n(x)},\ \ x\in C,\ n\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$.

Доказ. $1=e_n(0)=e_n(x+(-x))\approx e_n(x)e_n(-x)$. ■

Наводимо један скуп неједнакости на основу којих можемо оценити асимптотско понашање функције exp, а исто тако да одредимо неке инфинитезималне особине ове функције.

ТЕОРЕМА 8.16. 1° *Ако је* $h\approx 0,\ h\in{}^*\mathbb{R},\ n\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, *тада важи оцена*

$$1+h\le e_n(h)\le 1+h+2\frac{h^2}{1-h^2}.$$

2° *За све* $z\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}$ *и функцију* $\hat{e}_n(z)=\sum\nolimits_{0\le i<n}\dfrac{z^i}{i!}$ *важи*

$$|\exp(z)-\hat{e}_n(z)|\le\frac{|z|^n}{n!}\frac{1}{1-\frac{|z|}{n}}.$$

3° $|e_n(z)| \leq e_n(|z|),\ \ n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C}$.

4° $|\exp(z)| \leq \exp(|z|),\ \ z \in \mathbb{C}$.

Доказ. 1° Према Бернулијевој[2)] неједнакости важи следећа неједнакост $e_n(h) = \left(1 + \dfrac{h}{n}\right)^n \geq 1 + h$, дакле $1 + h \leq e_n(h)$. Даље,

$$e_n(h) = 1 + \binom{n}{1}\frac{h}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{n}\left(\frac{h}{n}\right)^n. \tag{18}$$

Такође, $\binom{n}{2i+1}\left(\frac{h}{n}\right)^{2i+1} \leq \binom{n}{2i}\left(\frac{h}{n}\right)^{2i}$ за $2i + 1 \leq n$ и $\binom{n}{2i}\left(\frac{h}{n}\right)^{2i} \leq h^{2i}$, па према (18) налазимо

$$e_n(h) \leq 1 + h + 2h^2 + 2h^4 + \cdots + 2h^{2m}, \quad \frac{n}{2} \leq m \leq \frac{n+1}{2}.$$

Отуда, $e_n(h) \leq 1 + h + 2\dfrac{h^2}{1 - h^2}$.

2°

$$|\exp(z) - \hat{e}_n(z)| = \left|\frac{z^n}{n!} + \ldots\right| \leq \frac{|z|^n}{n!}\left(1 + \frac{|z|}{n+1} + \frac{|z|^2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right)$$
$$\leq \frac{|z|^n}{n!}\left(1 + \frac{|z|}{n} + \left(\frac{|z|}{n}\right)^2 + \ldots\right) \leq \frac{|z|^n}{n!}\frac{1}{1 - \frac{|z|}{n}}.$$

3° $|e_n(z)| = \left|\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n\right| \leq \left(1 + \dfrac{|z|}{n}\right)^n$.

4° Следи из 3° и $\exp(z) = \mathrm{st}\ e_n(z)$. ■

Последица 8.5. 5° *Ако је* $z \in {}^*\mathbb{C}_{\mathrm{fin}}$ *и* $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, *тада* $\exp(z) \approx e_n(z)$.

6° *За све* $z \in {}^*\mathbb{C}$ *и* $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, *из* $z \approx 0$ *следи* $e_n(z) \approx 1$.

7° *Функција* $\exp$ *је непрекидна на* $\mathbb{C}$.

Доказ. 5° Следи непосредно на основу друге неједнакости у претходној теореми.
6° Према 1° и 3° претходне теореме.
7° Нека је $z \approx a$, где је $a, z \in {}^*\mathbb{C}_{\mathrm{fin}}$. Тада за неки $\varepsilon \in \mu(0)$ имамо $z = a + \varepsilon$, одакле следи

$$\exp(z) = \exp(a + \varepsilon) = \exp(a)\exp(\varepsilon) \approx \exp(a),$$

[2)] Johann Bernoulli (1667–1748)

јер према 6° важи $\exp(\varepsilon) \approx 1$. ■

Напоменимо да према Лајбницовом принципу неједнакости из Теореме 8.16. такође важе у ${}^*\mathbb{C}$. Даље доказујемо да је $\exp$ степена функција. С тим у вези уведимо следећу константу.

Дефиниција 8.7. $e = \exp(1)$.

На основу ове дефиниције константе e и дефиниције функције $\exp$, одмах имамо

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum\nolimits_{n\geq 0}\frac{1}{n!}.$$

Користећи 2° из Теореме 8.16. није тешко видети да је

$$\left|e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right| \leq \frac{1}{(n-1)!\,(n-1)},$$

одакле добијамо да је 2.7182818 једна приближна вредност за e са грешком не већом од $3.1 \cdot 10^{-7}$. Ову процену броја e можемо добити узимајући у претходној формули $n = 10$.

Теорема 8.17. *Нека је* $x \in \mathbb{R}$. *Тада је* $\exp(x) = e^x$.

Доказ. Нека је $\dfrac{p}{q}$ рационалан број, где је $q > 0$ и p, q су узајамно прости. Тада за бесконачан $n \in {}^*\mathbb{N}$, према Теореми 8.14. имамо

$$\left(e_n\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q \approx e_n\left(q \cdot \frac{1}{q}\right) = e_n(1),$$

одакле користећи особине степене функције добијамо

$$\left(e_n\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q \approx e, \quad e_n\left(\frac{1}{q}\right) \approx e^{\frac{1}{q}}.$$

Даље, користећи Теорему 8.10. налазимо $e_n\left(\frac{1}{q}\right)^p \approx e^{\frac{p}{q}}$ одакле је, опет према Теореми 8.14. $e^{\frac{p}{q}} = \operatorname{st}\, e_n\left(\dfrac{p}{q}\right)$, па

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}}. \tag{19}$$

Према Лајбницовом принципу, (19) важи и за хиперрационалне бројеве $\frac{p}{q}$. Нека је $x \in \mathbb{R}$ и $\frac{p}{q}$ хиперрационалан број, $\frac{p}{q} \approx x$. Тада према Теореми 8.10. налазимо $e^x \approx e^{\frac{p}{q}}$, па према (19) важи $e^x \approx \exp\left(\frac{p}{q}\right)$. Како је exp непрекидна функција, имамо

$$e^x = \operatorname{st} \exp\left(\frac{p}{q}\right) = \exp\left(\operatorname{st}\left(\frac{p}{q}\right)\right) = \exp(x).$$

■

Претходна теорема даје нам мотивацију да реалну функцију $x \mapsto e^x$, проширимо на домен комплексних бројева. За $z \in \mathbb{C}$ узећемо по дефиницији да је $e^z = \exp(z)$. Ако је $z = x + \imath y$, где је $\imath$ имагинарна јединица и $x, y \in \mathbb{R}$, онда налазимо $e^z = e^x \cdot e^{\imath y}$.

Теорема 8.18. 1° $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.

2° $|\exp(\imath y)| = 1,\ y \in \mathbb{R},\ \imath^2 = -1$.

Доказ. 1° Нека је n бесконачан природан број. Пресликавање дато са $z \mapsto \overline{z},\ z \in C$, је непрекидно, па $\overline{\exp(z)} \approx \overline{e_n(z)} = e_n(\overline{z}) \approx \exp(\overline{z})$.
2° $|\exp(\imath y)|^2 = e^{\imath y} \cdot \overline{e^{\imath y}} = e^{\imath y} \cdot e^{-\imath y} = 1$. ■

На основу Теореме 8.16. можемо израчунати изводе функције $x \mapsto e^x$ за реално x, као и у комплексној равни. У том извођењу главну улогу има следеће инфинитезимално својство функције $z \mapsto e^z$.

Лема 8.9. *Ако је* $z \in {}^*\mathbb{C},\ z \approx 0$, *тада* $\frac{e^z - 1}{z} \approx 1$.

Доказ. Према 2° Теореме 8.16. за све $z \in \mathbb{C}$, бирајући $n = 2$, важи

$$|e^z - 1 - z| \leq \frac{|z|^2}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z|}{2}}, \tag{20}$$

одакле

$$\left|\frac{e^z - 1}{z} - 1\right| \leq \frac{|z|}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z|}{2}}. \tag{21}$$

Према Лајбницовом принципу, (21) такође важи за све $z \in {}^*\mathbb{C}$, одакле за $z \approx 0$ имамо $\left|\frac{e^z - 1}{z} - 1\right| \approx 0$, тј. $\frac{e^z - 1}{z} \approx 1$. ■

Теорема 8.19. *Комплексни извод функције* e^z *је* $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$.

Доказ. Нека су $z, a \in {}^*\mathbb{C}_{\text{fin}}$ и $z \approx a$. Тада је $\varepsilon = z - a$ инфинитезимала, па је према последњој леми

$$\frac{e^z - e^a}{z - a} = e^a \cdot \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \approx e^a, \quad \text{тј.} \quad \lim_{z \to a} \frac{e^z - e^a}{z - a} = e^a.$$

∎

Као непосредне последице претходног тврђења имамо да је извод реалне функције e^x такође e^x. Споменимо да се под *аналитичком* функцијом у неком домену D комплексне равни подразумевају функције које имају извод у свакој тачки $z \in D$. Дакле, функција e^z је један пример аналитичке функције у $\mathbb{C}$. Наравно то су и све комплексне полиномне функције.

8.5 Логаритамска функција

У овом одељку размотрићемо инфинитезималне особине логаритамске функције, и то најпре функције $\ln = \log_e$, где је

$$e = \operatorname{st}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ n \in {}^*\mathbb{N}$$

константа уведена у претходном одељку.

Дефиниција 8.8. $\ln = \exp^{-1}$.

На основу особина експоненцијалне функције, могу се извести све важније особине функције $\ln$. Дефиниција 8.8. може се записати и овако:

Дефиниција 8.9. $e^{\ln x} = x, \ \ln e^x = x, \ x \in \mathbb{R}^+$.

На основу Лајбницовог принципа ове формуле важе и за све $x \in {}^*\mathbb{R}^+$. Полазећи од

$$e^x \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}, \ n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$$

можемо на основу Дефиниције 8.9. да одредимо $\ln x$ решавајући следећу једначину по y

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = x, \quad n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N},\ \ x \in {}^*\mathbb{R}.$$

Одавде одмах следи

$$y = n(\sqrt[n]{x}-1), \ \text{ тј. } \ y = \frac{n}{1+x^{\frac{1}{n}}+\cdots+x^{\frac{n-1}{n}}} \cdot (x-1).$$

Ако је $x > 1$, користећи особине степене функције, за $k < n$ важи $x^{\frac{k}{n}} > 1$ па $0 < y < x-1$. С друге стране претпоставимо $0 < x < 1$. Тада за неки $t > 1$ важи $x = \dfrac{1}{t}$, одакле

$$y = \frac{n}{t^{\frac{1}{n}}\left(1+t^{\frac{1}{n}}+\cdots+t^{\frac{n-1}{n}}\right)} \cdot (1-t).$$

Отуда је $y > 1-t$, тј. $0 > y > 1-\dfrac{1}{x}$, па је y такође коначан.

Дакле за $x \in {}^*\mathbb{R}^+_{\text{fin}}$, $y = n(\sqrt[n]{x}-1)$ је коначан, па

$$e^y \approx \left(1+\frac{y}{n}\right)^n = x, \quad \text{тј. } \ e^y \approx x.$$

Ако је $u = \operatorname{st} y$ и $x \in \mathbb{R}^+$, тада $\operatorname{st} e^y = x$ па због непрекидности функције $\exp$, $e^u = x$, одакле $u = \ln x$. Према томе,

$$\ln x \approx n(\sqrt[n]{x}-1) \quad \text{за } n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \text{ и } x \in \mathbb{R}^+.$$

Као последицу имамо следеће тврђење.

ТЕОРЕМА 8.20. 1° *Ако је* $1 < x$, *тада је* $\ln x < x-1$.

2° *За* $0 < x < 1$ *важи* $1-\dfrac{1}{x} < \ln x$.

3° $\ln 1 = 0$.

ЛЕМА 8.10. *Нека су* $x, y \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$. *Тада* $e^x \approx e^y$ *повлачи* $x \approx y$.

Доказ. Претпоставимо да је $e^x \approx e^y$ и $x, y \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$. Тада је $e^{x-y} \approx 1$ и како је $e^{x-y} > 1+(x-y)$ (видети Теорему 8.16.) следи $x-y \approx 0$. ■

ПОСЛЕДИЦА 8.6. $\ln$ *је нейрекидна функција.*

Доказ. Ако су $x, y \in {}^*\mathbb{R}^+_{\text{fin}}$ и $x \approx y$, тада $e^{\ln x} \approx e^{\ln y}$, одакле је $\ln x \approx \ln y$. ■

Следеће тврђење даје још једну важну особину функције ln.

ТЕОРЕМА 8.21. *Ако је* $x \in {}^*\mathbb{R}^+_{\text{fin}}$ *и* $\varepsilon \in \mu(0)$, *шада* $\dfrac{\ln(x+\varepsilon) - \ln x}{\varepsilon} \approx \dfrac{1}{x}$.

Доказ. Најпре приметимо да је $\dfrac{\ln(x+\varepsilon) - \ln x}{\varepsilon} = \ln\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{x}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$. Нека је $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ такав да је $n \leq \dfrac{1}{\varepsilon} < n + 1$. Тада

$$\left(1 + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} < \left(1 + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

па како је $\left(1 + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{n+1}\right)^n \approx e^{\frac{1}{x}}$, $\left(1 + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \approx e^{\frac{1}{x}}$ закључујемо да $\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{x}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \approx e^{\frac{1}{x}}$. Дакле, $\ln\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{x}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \approx \dfrac{1}{x}$. ■

Према претходном следи да је $\ln x$ диференцијабилна функција и $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$ за $x \in \mathbb{R}^+$. Особине осталих логаритамских функција изводе се лако на основу једнакости

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1.$$

8.6 Тригонометријске функције

Најпре ћемо увести комплексне тригонометријске функције. Тада ће реалне тригонометријске функције бити рестрикције ових функција на скуп реалних бројева. Неке од предности у оваквом заснивању тригонометријских функција леже у једноставном извођењу алгебарских и диференцијабилних особина ових функција.

ДЕФИНИЦИЈА 8.10. Комплексне тригонометријске функције су ($z \in \mathbb{C}$):

- функција косинус $\cos z = \dfrac{e^{\imath z} + e^{-\imath z}}{2}$,
- функција синус $\sin z = \dfrac{e^{\imath z} - e^{-\imath z}}{2\imath}$,
- функција тангенс $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\cos z \neq 0$,
- функција котангенс $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$, $\sin z \neq 0$.

Нека је x реалан број. Према Теореми 8.18. важи $e^{-\imath x} = \overline{e^{\imath x}}$, па

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2} = \frac{e^{\imath x} + \overline{e^{\imath x}}}{2} = \mathrm{Re}(e^{\imath x}), \\ \sin x &= \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath} = \frac{e^{\imath x} - \overline{e^{\imath x}}}{2\imath} = \mathrm{Im}(e^{\imath x}). \end{aligned}$$

Дакле, $e^{\imath x} = \cos x + \imath \cdot \sin x$, при чему су $\cos$ и $\sin$ реалне функције. Према томе, рестрикције комплексних тригонометријских функција на $\mathbb{R}$ су реалне функције, па те функције називамо реалним тригонометријским функцијама или једноставно тригонометријским функцијама. С обзиром на дефиницију тригонометријских функција сви алгебарски идентитети које задовољавају комплексне тригонометријске функције, такође важе и за реалне тригонометријске функције. Ево неколико основних идентитета.

ТЕОРЕМА 8.22. *Нека је* $z \in \mathbb{C}$. *Тада*

1° $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,

2° $\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z$,

3° $\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$,

4° $\sin(u \pm v) = \cos u \sin v \pm \sin u \cos v$.

Доказ. Доказаћемо само први идентитет:

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= \left(\frac{e^{\imath z} + e^{-\imath z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{\imath z} - e^{-\imath z}}{2\imath}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2\imath z} + 2 + e^{-2\imath z}}{4} - \frac{e^{2\imath z} - 2 + e^{-2\imath z}}{4} = 1. \end{aligned}$$

Остали идентитети се доказују на сличан начин. ■

ПОСЛЕДИЦА 8.7. *Ако је* $x \in \mathbb{R}$, *тада* $|\cos x| \le 1$ *и* $|\sin x| \le 1$.

Комплексне функције $\cos z$ и $\sin z$ добијају се слагањем непрекидних функција, дакле и оне саме су непрекидне. То исто важи и за функције $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ где год су ове функције дефинисане. Слично се доказује да ове функције имају изводе у свим тачкама својих домена дефинисаности, дакле оне су аналитичке. Такође важе следећи развоји у редове:

ТЕОРЕМА 8.23. *Нека је* $z \in \mathbb{C}$. *Тада важи*

$$\begin{aligned} \cos z &= \sum\nolimits_k \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\,, \\ \sin z &= \sum\nolimits_k \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\,. \end{aligned}$$

Доказ. Извођење за функцију $\cos z$ изгледа овако:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{\imath z} + e^{-\imath z}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum\nolimits_n \imath^n \cdot \frac{z^n}{n!} + \sum\nolimits_n (-\imath)^n \cdot \frac{z^n}{n!} \right) = \\ &= \sum\nolimits_n \frac{1 + (-1)^n}{2} \cdot \imath^n \cdot \frac{z^n}{n!} = \sum\nolimits_k \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}. \end{aligned}$$

Слично извођење важи и за функцију $\sin z$. ∎

Приметимо да претходни развоји важе и за реалне тригонометријске функције, као и да су наведени редови апсолутно конвергентни за свако $z \in \mathbb{C}$. Уведимо следеће делимичне суме

$$c_n(z) = \sum\nolimits_{k \le n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \qquad s_n(z) = \sum\nolimits_{k \le n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

ПОСЛЕДИЦА 8.8. *Ако је* $z \in {}^*\mathbb{C}_{\mathrm{fin}}$, $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, *тада* $\cos z \approx c_n(z)$ *и* $\sin z \approx s_n(z)$.

Убудуће се ограничавамо на изучавање реалних тригонометријских функција.

ЛЕМА 8.11. *Функција* $\cos$ *је монотона на реалном интервалу* $[0, 2]$.

Доказ. Доказујемо прво да је $\cos x$ 1-1 функција. Нека су $0 \le x, y \le 2$ и претпоставимо $\cos x = \cos y$. Тада је за

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2!} + \frac{y^4 + y^2x^2 + x^4}{6!} + \frac{y^8 + y^6x^2 + y^4x^4 + y^2x^6 + x^8}{10!} + \ldots, \\ B &= \frac{y^2 + x^2}{4!} + \frac{y^6 + y^4x^2 + y^2x^4 + x^6}{8!} + \ldots, \end{aligned}$$

испуњено $\dfrac{y^2 - x^2}{2!} - \dfrac{y^4 - x^4}{4!} + \dfrac{y^6 - x^6}{6!} - \ldots = 0$ и $0 = (y^2 - x^2)(A - B)$. Очигледно је $A \ge \dfrac{1}{2}$. Даље,

$$\begin{aligned} B &\le 2 \cdot \frac{2^2}{4!} + 4 \cdot \frac{2^6}{8!} + 6 \cdot \frac{2^{10}}{12!} + \ldots = \frac{1}{3} + \frac{2^4}{7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 3} + \frac{2^8}{11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3} \\ &< \frac{1}{3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \ldots = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^4 - 1} < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

тј. $B < A$. Дакле, из $\cos x = \cos y$ следи $x^2 - y^2 = 0$, одакле добијамо $x = y$ јер смо претпоставили да је $x, y \ge 0$. Према томе, функција $\cos$ је 1–1 на интервалу $[0, 2]$. Како је $\cos$ непрекидна функција, следи према претходном да је $\cos$ монотоно опадајућа функција јер је

$$\cos 2 = \left(1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!}\right) - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \ldots < 0, \tag{22}$$

па $\cos 0 = 1 > \cos 2$. ■

Даље, приметимо да је

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \ldots = \left(1 + \frac{1}{4!} + \frac{1}{8!} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{6!} + \ldots\right),$$

тј. $\cos 1 = C - D$. Тада је $C > 1$, док је $D < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots < 1$. Дакле $D < C$, тј. $\cos 1 > 0$. На основу овог извођења и Леме 8.11. (22), као и непрекидности и монотоности функције $\cos$ на $[0, 2]$ следи

Лема 8.12. *Постоји тачно једна реална константа, нека је означена са π, таква да је $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$ и $2 < \pi < 4$.*

За овако изабрану константу π могу се извести и неке друге особине функција $\cos$ и $\sin$. Из једнакости $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ следи $\sin^2 \dfrac{\pi}{2} = 1$, тј. $\sin\frac{\pi}{2} \in \{-1, 1\}$. С друге стране, за $x \in [0, 2]$ следи

$$\sin x = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \ldots > 0,$$

одакле имамо следеће тврђење.

Лема 8.13. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ *и* $\sin x > 0$ *за свако* $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Из адиционих формула Теореме 8.22. као и последње две леме следи

Теорема 8.24. 1° $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$,

2° $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$,

3° $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$,

4° $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$,

5° $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Према претходном ставу видимо да функција $\cos x$ настаје транслацијом за $\frac{\pi}{2}$ од функције $\sin x$. Већ се може наслутити да су особине тригонометријских функција на $\mathbb{R}$ у потпуности одређене својствима ових функција на интервалу $[0, 2\pi[$. Пре него што ту чињеницу и формално докажемо, расправимо питање монотоности ових функција на интервалу $[0, 2\pi[$.

Теорема 8.25. 1° $\cos \downarrow [0, \pi]$, $\cos \uparrow [\pi, 2\pi]$,

2° $\sin \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin \downarrow \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\sin \uparrow \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$,

3° $\operatorname{tg} \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{tg} \uparrow \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Доказ. Према Леми 8.11. и 8.12. имамо

$$\cos \downarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{23}$$

Одавде и према идентитетима из Теореме 8.24. лако се решава питање монотоности свих тригонометријских функција у интервалу $[0, 2\pi]$. Најпре приметимо да према (23) и 5° из Теореме 8.24. важи

$$\sin \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{24}$$

Сада докажимо, на пример, да је $\cos \downarrow [0, \pi]$. Нека су $x, y \in [0, \pi]$. Тада

- ако је $x < y \le \frac{\pi}{2}$, онда је према (23) $\cos y < \cos x$,
- ако је $x \le \frac{\pi}{2} < y$, онда из дела 4° претходне теореме следи $\cos x \ge 0 > \cos y$, одакле $\cos y < \cos x$,
- ако је $\frac{\pi}{2} \le x < y$, тада имамо $0 \le \pi - y < \pi - x \le \frac{\pi}{2}$, одакле $\cos(\pi - x) < \cos(\pi - y)$, па је према 4° из претходне теореме испуњено $-\cos x < -\cos y$, тј. $\cos y < \cos x$. ■

ПОСЛЕДИЦА 8.9. *За свако* $x \in]0, 2\pi[$ *важи* $\cos x < 1$.

Доказ. Ако је $x \le \pi$, онда према тачки 1° претходне теореме важи $\cos x < \cos 0 = 1$. Ако је $\pi \le x < 2\pi$, онда према истој теореми имамо $\cos x < \cos 2\pi = 1$. ■

Сада смо у могућности да размотримо питање периодичности тригонометријских функција.

ТЕОРЕМА 8.26. *Функција* $\cos$ *има периоду* 2π. *За сваку периоду* T *ове функције постоји цео број* k *такав да је* $T = 2k\pi$, *тј.* 2π *је најмања позитивна периода функције* $\cos$.

Доказ. Према Теореми 8.24. 3° број 2π је периода функције $\cos$. Нека је $T \in [0, 2\pi[$ и $\cos(x + T) = \cos x$ за све $x \in \mathbb{R}$. Стављајући $x = 0$ следи $\cos T = 1$. Према Последици 8.9. онда је $T = 0$, дакле 2π је најмања позитивна периода функције $\cos$. Даље, претпоставимо да је T било која периода функције $\cos$ и изаберимо цео број k и $t \in [0, 2\pi[$ такав да је $T = 2k\pi + t$. С обзиром на то да је за сваки $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + T) = \cos x$, добијамо $\cos t = 1$, одакле је $t = 0$. ■

ПОСЛЕДИЦА 8.10. 1° *Функција* $\sin$ *је периодична функција са периодом* 2π.

2° *Функција* tg *је периодична функција са периодом* π.

3° *За* $z \in \mathbb{C}$, $e^{z+2k\pi\imath} = e^z$, *тј. функција* $z \mapsto e^z$ *је периодична са периодом* $2\pi\imath$.

У вези са претходним је чувена Ојлерова[3)] формула $e^{\imath\pi} + 1 = 0$ која повезује најчувеније константе математике: $0,\ 1,\ \imath,\ \pi,\ e$. Ова формула важи јер

$$e^{\imath\pi} = \cos\pi + \imath\cdot\sin\pi = -1 + 0\cdot\imath = -1.$$

Такође приметимо да смо претходним у потпуности расправили питање корена и интервала монотоности тригонометријских функција јер се ови бројеви, односно интервали могу добити једноставном транслацијом за $2k\pi$, где је k неки цео број, у случају функција $\cos$, $\sin$, а у случају функција tg, ctg за $k\pi$.

Пример 8.1. 1° a је корен функције $\cos$ ако и само ако постоји цео број k такав да је $a = 2k\pi \pm \pi/2$.
2° a је корен функције $\sin$ ако и само ако постоји цео број k такав да је $a = k\pi$.

Али остаје и даље питање шта је заправо константа π. Значајну улогу у одговору на ово питање има следеће тврђење.

Лема 8.14. *Пресликавање* $s\colon [0,2\pi[\to K$ *дато са* $s\colon x \mapsto e^{\imath x}$, *где је скуп* $K = \{\, z \in C \mid |z| = 1 \,\}$ *јединични круг комплексне равни, јесте* 1-1 *и на.*

Доказ. Најпре докажимо да s је 1-1 функција. Нека су x, y реални бројеви из $[0,2\pi[$ такви да је $y \le x$ и $e^{\imath x} = e^{\imath y}$. Тада је $e^{\imath(x-y)} = 1$, одакле $\cos(x-y) = 1$. Према Последици 8.9. одмах следи $x - y = 0$. Дакле s је 1-1 функција.

Доказујемо сада да је s и *на* пресликавање. Нека је $a + \imath b \in K$. Тада је $a^2 + b^2 = 1$, одакле $-1 \le a, b \le 1$. С обзиром на то да на $[0,2\pi[$ функција $\cos x$ узима вредности из $[-1,1]$, због њене непрекидности а према Теореми 7.19. следи да постоји $x_0 \in [0,2\pi[$ такав да је $\cos x_0 = a$. Приметимо да је $\cos(2\pi - x_0) = \cos x_0 = a$, тј. ако је $x_0 \ne 0, \pi$, онда је за $x_1 = 2\pi - x_0$ такође $\cos x_1 = a$. Из $\cos \downarrow [0,\pi]$ и $\cos \uparrow [\pi, 2\pi]$ следи да је функција $\cos x$ 1-1 редом на интервалима $[0,\pi], [\pi,2\pi]$. Дакле постоје

[3)] Leonhard Eüler (1707–1783)

највише две различите вредности x_0, x_1 такве да је $\cos x_0 = \cos x_1$. Можемо претпоставити да је $x_0 < x_1$, тј. $0 \leq x_0 \leq \pi \leq x_1 < 2\pi$. Према томе имамо следеће могућности.

- Ако је $a \neq 1, -1$, онда постоје тачно две вредности x_0, x_1 такве да је $\cos x_i = a$.
- Ако је $a = 1$ или $a = -1$, онда постоји тачно једно x тако да је $\cos x = a$; то је за $a = 1$ и $x = 0$ или $a = -1$ и $x = \pi$.
- Даље, $b^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2 x_i = \sin^2 x_i$, одакле $|\sin x_i| = |b|$. Ако је $a = 1$, онда је $b = 0$ и $x = 0$. Ако је $a = -1$, онда је $b = 0$ и тада је $x = \pi$. Ако је $a \neq 1, -1$, онда је $0 < x_0 < \pi < x_1 < 2\pi$, одакле $\sin x_0 > 0$, $\sin x_1 < 0$, одакле:

  $$\text{ако је } b > 0 \text{ , онда } \sin x_0 = b,$$

  $$\text{ако је } b < 0 \text{ , онда } \sin x_1 = b.$$

Дакле, за неко $j \in \{0, 1\}$ важи $e^{\imath x_j} = \cos x_j + \imath \cdot \sin x_j = a + \imath b$, тј. s је пресликавање *на*. ■

Претходно тврђење има више важних последица. Једна је да се сваки комплексан број може представити у тригонометријском облику. Наиме важи:

ТЕОРЕМА 8.27. *За свако $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ постоји јединствено $\varrho \in \mathbb{R}^+$ и јединствено $\varphi \in [0, 2\pi[$ тако да $z = \varrho e^{\imath\varphi}$.*

Доказ. Ако је $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, онда је $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = 1$, тј. $\dfrac{z}{|z|} \in K$, па према претходном постоји тачно једно $\varphi \in [0, 2\pi[$ тако да је $\dfrac{z}{|z|} = e^{\imath\varphi}$, тј. $z = \varrho e^{\imath\varphi}$ за $\varrho = |z|$. ■

Ако је $z = \varrho e^{\imath\varphi}$, онда се φ назива аргументом броја z и бележи се са $\arg z$. Такође се овакав запис комплексног броја z назива тригонометријским обликом броја z, док се пресликавање $z \mapsto (|z|, \arg z)$, $z \in \mathbb{C}$, назива тригонометријском репрезентацијом комплексних бројева. Није тешко видети да је релација скупа $\mathbb{C}$ уведена са

$$x = y (\operatorname{mod} 2\pi) \qquad \text{ако и само ако} \qquad \frac{x - y}{2\pi} \in \mathbb{Z},$$

релација еквиваленције. Тада за све $u, v \in \mathbb{C}$ важи

Теорема 8.28. $\arg(u \cdot v) = (\arg u + \arg v) (\mathrm{mod}\, 2\pi)$.

Приликом доказа основне теореме алгебре (видети поглавље 8.1) остала је недоказана Лема 8.1. Сада имамо средстава да ову лему докажемо.

Доказ Леме 8.1. Нека је $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, и нека је $a = \varrho e^{\imath\varphi}$ тригонометријски облик броја a. Даље, нека су

$$x_k = \varrho^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\imath \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Тада очигледно важи $x_k^n = \varrho e^{\imath\varphi} = a$, тј. $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ су решења једначине $x^n = a$. Остаје да се провери да ли су ова решења међусобно различита. Дакле претпоставимо $0 \leq k < t \leq n-1$, $x_k = x_t$. Тада следи $e^{2\imath\frac{(k-t)\pi}{n}} = 1$, одакле $\cos 2\frac{(k-t)\pi}{n} = 1$. С обзиром на то да је $2\frac{(k-t)\pi}{n} \in [0, 2\pi[$ према Последици 8.9. следи $2\dfrac{(k-t)\pi}{n} = 0$, тј. $k = t$. ∎

На основу Теореме 8.27. такође имамо ову занимљиву последицу:

Последица 8.11. $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Заиста, ако је $z \in \mathbb{C}$ и $z = x + \imath y$, тада $e^z = e^x e^{\imath y} = e^x e^{\imath\varphi}$ где је $\varphi = y (\mathrm{mod}\, 2\pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi[$. Приметимо да је свака тачка комплексне равни, осим нуле, покривена пребројиво много пута вредностима функције exp, јер, ако су $u, v \in \mathbb{C}$ такви да је $\mathrm{Im} u = \mathrm{Im} v \ (\mathrm{mod}\, 2\pi)$, онда $e^u = e^v$. Дакле не може се говорити о инверзној функцији комплексне функције exp, али може се увести једна непрекидна инверзна грана. Реч је о комплексној логаритамској функцији.

Дефиниција 8.11. Комплексна логаритамска функција дефинисана је једнакошћу

$$\ln z = \ln |z| + \imath \cdot \arg z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Очигледно је рестрикција ове функције на $\mathbb{R}$ реална логаритамска функција. Непосредно на основу дефиниције лако се изводе ове елементарне особине функције $\ln z$ за $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

Теорема 8.29. 1° $e^{\ln z} = z$,

2° $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})(\exists k \in \mathbb{Z})\ \ln e^z = z + 2k\pi\imath$,

3° $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})(\exists k \in \mathbb{Z})\ \ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi\imath$.

На крају вратимо се још једном пресликавању $s\colon x \mapsto e^{\imath x}$ реалног интервала $[0, 2\pi[$ у јединични круг K комплексне равни. Ово пресликавање уведено је у Леми 8.14. и према тој леми оно је 1-1 и *на*. Даље, s је непрекидно јер $x \approx y$ повлачи $e^{\imath x} \approx e^{\imath y}$. Али s није хомеоморфизам интервала $[0, 2\pi[$ на круг K, јер, на пример, можемо изабрати тачке $x, y \in [0, 2\pi[$ такве да није $|x - y| \approx 0$, али да је $e^{\imath x} \approx e^{\imath y}$.

Хиперболичке функције такође уводимо користећи комплексне експоненцијалне функције.

- синус хиперболички: $\mathrm{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$,
- косинус хиперболички: $\mathrm{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$,
- тангенс хиперболички : $\mathrm{th} z = \dfrac{\mathrm{sh} z}{\mathrm{ch} z}$,
- котангенс хиперболички: $\mathrm{cth} z = \dfrac{1}{\mathrm{th} z}$.

Из дефиниције одмах следи да су рестрикције ових функција на $\mathbb{R}$, реалне функције. Такође, хиперболичке функције задовољавају многе идентитете, сличне тригонометријским.

8.7 О геометријској природи броја π

У елементарној геометрији број π се дефинише као количник обима јединичног круга и његовог пречника.

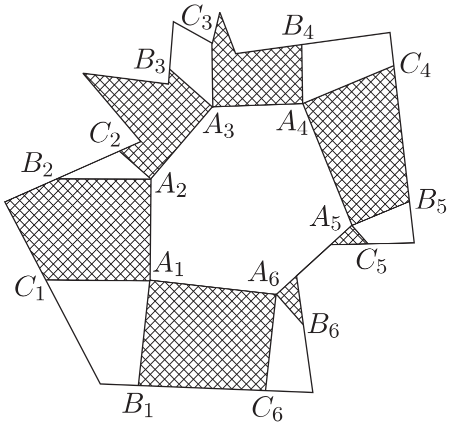
ТЕОРЕМА 8.30. *Обим јединичног круга је* 2π.

Дакле, можемо поставити природно питање да ли је реална константа уведена у Леми 8.12. заиста број π елементарне геометрије, другим речима да ли важи Теорема 8.30. У овом поглављу доказујемо да то доиста важи. Да бисмо отклонили све нејасноће, задржаћемо ознаку π за константу уведену у Леми 8.12. Такође, користићемо следеће тврђење елементарне геометрије.

ЛЕМА 8.15. *Нека је K_1 конвексан полигон уписан у било каквом полигону K_2. Ако је S_i обим полигона K_i, тада је $S_1 \leq S_2$.*

Доказ. Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ темена полигона K_1. Даље, нека су B_i, C_i најближе тачке темену A_i добијене као пресек страница полигона K_2 и нормала на странице које полазе из темена A_i.

Како је K_1 конвексан полигон, имамо $\measuredangle A_{i-1}A_iA_{i+1} < 180°$, одакле следи да за изломљене линије $\widehat{C_iB_{i+1}}$ које леже на K_2 и спајају тачке C_i, B_{i+1} важи $\widehat{C_iB_{i+1}} \cap \widehat{C_jB_{j+1}} = \emptyset$ за $1 \leq i < j < n$.



Слика 8.1.

Одавде одмах следи:

$$\begin{aligned} S_1 &= |A_1A_2| + |A_2A_3| + \ldots + |A_{n-1}A_n| + |A_nA_1| \\ &\leq |C_1B_2| + |C_2B_3| + \ldots + |C_{n-1}B_n| + |C_nB_1| \leq S_2. \end{aligned}$$

■

Такође ћемо користити ове инфинитезималне особине тригонометријских функција.

ЛЕМА 8.16. *Ако је $x \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $\varepsilon \approx 0$, тада важи:*

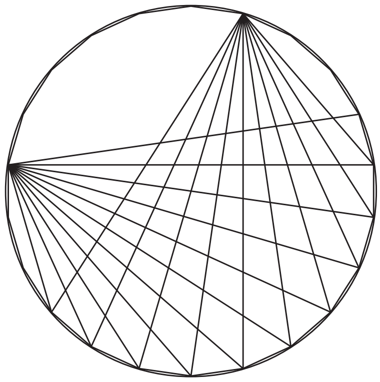
$$\frac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon} \approx x, \qquad \frac{\operatorname{tg} \varepsilon x}{\varepsilon} \approx x, \qquad \cos \varepsilon x \approx 1.$$

Доказ. Према Леми 8.9. за $x \approx 0$ постоји $\eta \approx 0$ тако да је $e^x = 1 + x + \eta x$. Отуда за неке $\eta_1, \eta_2 \approx 0$

$$\frac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon} = \frac{e^{\imath\varepsilon x} - e^{-\imath\varepsilon x}}{2\imath\varepsilon} = \frac{1 + \imath\varepsilon x + \imath\varepsilon x\eta_1 - (1 - \imath\varepsilon x - \imath\varepsilon x\eta_2)}{2\imath\varepsilon} = x + \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \approx x.$$

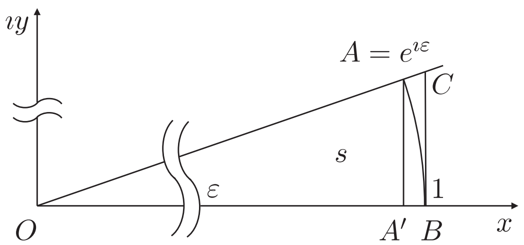
Слично се доказују преостала тврђења. ■

Сада ћемо размотрити два приступа у доказу наведене Теореме 8.30. Према првом прилазу у нестандардној анализи можемо узети да је круг правилан многоугао са бесконачно много инфинитезималних страница.



Слика 8.2.

Дакле, нека је $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ и $\varepsilon = \dfrac{2\pi}{n}$. Тада тачке $e^{\imath\varepsilon k}$, $k < n$, одређују темена правилног многоугла са бесконачно много инфинитезималних страница. Нека су A, B темена многоугла редом са координатама $e^{\imath\varepsilon}$, $1 + \imath \cdot 0$ у комплексној равни, и нека је $s = |AB|$.

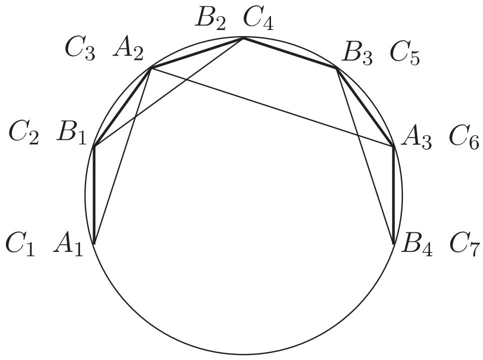


Слика 8.3.

Према ознакама на слици одмах налазимо да је $|AA'| = \sin\varepsilon$, $|OA'| = \cos\varepsilon$, одакле је $|BC| = \operatorname{tg}\varepsilon$, јер је $\triangle OAA'$ сличан $\triangle OCB$. Отуда према елементарној геометрији имамо $\sin\varepsilon \leq s \leq \operatorname{tg}\varepsilon$. Обим јединичног круга је $O = \operatorname{st}(n \cdot s)$, одакле је $n \cdot \sin\varepsilon \lesssim n \cdot s \lesssim n \cdot \operatorname{tg}\varepsilon$. Према Леми 8.16. имамо $n \cdot \sin\varepsilon = n \cdot \sin\dfrac{2\pi}{n} \approx 2\pi$ и такође $n \cdot \operatorname{tg}\varepsilon \approx 2\pi$, па $n \cdot s \approx 2\pi$, тј. $O = 2\pi$, јер $O, 2\pi \in \mathbb{R}$. Према томе, тврђење 8.30. важи.

Размотримо сада другу могућност, тј. задржимо уобичајену дефиницију круга. Тада се обим круга може дефинисати као супремум обима конвексних полигона уписаних у круг K, односно $O = \sup X$ за $X = \{\, \ell \mid \ell$ је обим конвексног полигона уписаног у круг $K \,\}$. Овај супремум постоји, јер према Леми 8.15. следи да је, на пример за јединични круг, скуп X ограничен одозго обимом правилног шестоугла описаног око круга K, тј. $O \leq 4\sqrt{3}$.

Даље, ако су K_1, K_2 било какви конвексни полигони уписани у круг K, није тешко видети да полигон K_3 чији је скуп темена унија скупова темена полигона K_1 и K_2, има обим $\ell_3 \geq \ell_1, \ell_2$, где су ℓ_1 и ℓ_2 обими редом полигона K_1, K_2.



Слика 8.4.

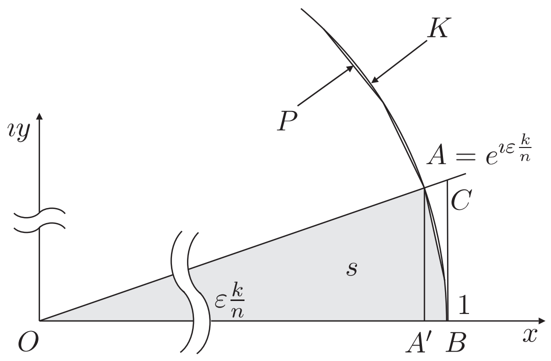
Претпоставимо да је K_1 полигон чија темена одговарају тачкама $e^{\imath\varepsilon\frac{k}{n}}$ комплексне равни, $0 \leq k < n,\ n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, и нека је K_2 било који полигон уписан у круг K. Ако је P профињење полигона K_1, K_2 добијено малопре описаном конструкцијом, одмах видимо да је P полигон са бесконачно много инфинитезималних страница као и да је његов обим $\ell \geq \ell_1, \ell_2$. Према томе за обим O јединичног круга важи $\ell_1 \leq O$. Претпоставимо, даље, ознаке као на Слици 8.5. и нека је T дужина полигоналне линије на P која спаја тачке A и B. Према Леми 8.15. следи

$$|OA| + T + |OB| \leq |OC| + |CB| + |OB|,$$

тј. $2+T \leq 2+x+\operatorname{tg}\varepsilon$, где је $x=|AC|$. Дакле, $\sin\varepsilon \leq T \leq x+\operatorname{tg}\varepsilon$. С друге стране $(1+x)^2=\operatorname{tg}^2\varepsilon+1$, па $2x<x^2+2x=\operatorname{tg}^2\varepsilon$, тј. $\sin\varepsilon \leq T \leq \frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\varepsilon+\operatorname{tg}\varepsilon$, одакле је за обим ℓ полигона P

$$n\cdot\sin\varepsilon \leq \ell \leq \frac{n}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\varepsilon+n\cdot\operatorname{tg}\varepsilon,$$

тј. $2\pi \lesssim \ell \lesssim 2\pi$, па $O=2\pi$ јер су 2π и O реални бројеви. Према томе, тврђење 8.30. важи.



Слика 8.5.

На основу претходног није тешко извести формулу за површину круга (ако се површина круга дефинише као супремум површина уписаних полигона). Према претходној слици и уведеним ознакама из површина троуглова $\triangle OAA'$, $\triangle OCB$ налазимо $\frac{\sin\varepsilon}{2} \leq m \leq \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{2}$, где је m површина осенченог дела полигона P. Отуда за површину M целог круга имамо $n\cdot\frac{\sin\varepsilon}{2} \lesssim M \lesssim n\cdot\frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{2}$, тј. $M\approx\pi$, па важи

ТЕОРЕМА 8.31. *Површина јединичног круга је* π.

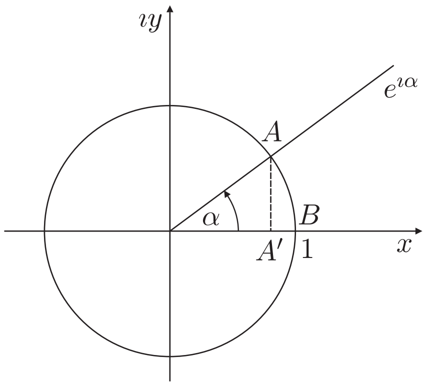
8.8 Тригонометријске функције у елементарној геометрији

У овом одељку разматраћемо проблем мерења углова, као и питање да ли се тригонометријске функције елементарне геометрије поклапају са тригонометријским функцијама анализе.

У елементарној геометрији угао се мери деловима правог угла или пуног угла. Од мера ове друге врсте практично се користи једино мера изражена у степенима (360–ти део пуног угла има меру 1°), и деловима степена, минутима и секундама. Геометријске особине комплексне функције exp и константе π омогућују да се уведе једна занимљива мера угла. Наиме реч је о радијанској мери угла, односно мери угла израженој у радијанима.

Најпре приметимо следеће чињенице.

- Сваки угао равни, α, подударан је неком централном углу $\sphericalangle AOA'$ комплексног јединичног круга. Дакле, ако је m било која транслаторно инваријантна мера угла, онда је $m(\alpha) = m(\sphericalangle AOA')$. Према томе, мера централних углова јединичног круга у потпуности одређује меру произвољних углова равни.
- Ако је $x \in [0, 2\pi[$, аргументом као приликом доказа Теореме 8.30. налазимо да дужина лука $\widehat{BA}$ јединичног круга износи x.



Слика 8.6.

Сходно претходном можемо увести ову дефиницију мере угла.

Дефиниција 8.12. Нека је α било који угао равни и $\sphericalangle AOB$ централни угао комплексног јединичног круга K $(A, B \in K)$. Ако $x \in [0, 2\pi[$ одређује тачку A, тј. ако су координате тачке A у комплексној равни $(\cos x, \sin x)$, онда је радијанска мера угла α дефинисана са $r(\alpha) = x$.

Нека је $\ominus$ нулти угао и Ω опружен угао. На основу дефиниције радијанске мере угла одмах налазимо да је

$$\begin{aligned} r(\ominus) &= 0, \qquad r(\Omega) = \pi, \\ r\left(\frac{\Omega}{2}\right) &= \frac{\pi}{2}, \quad \text{тј. радијанска мера правог угла је } \frac{\pi}{2}, \\ r(2\Omega) &= 2\pi, \quad \text{тј. радијанска мера пуног угла је } 2\pi. \end{aligned}$$

Нека је бинарна операција $+_{2\pi}$ (сабирање по модулу 2π) скупа $[0, 2\pi[$ дата са

$$\forall x, y, z \in [0, 2\pi[\quad (z = x +_{2\pi} y \Leftrightarrow z = x + y \pmod{2\pi}).$$

Уколико је $+_{2\Omega}$ операција сабирања углова по модулу пуног угла, онда за све углове α, β важи

$$r(\alpha +_{2\Omega} \beta) = r(\alpha) +_{2\pi} r(\beta), \qquad r(\alpha) = r(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Уколико је $\cdot_{2\Omega}$ операција множења угла позитивним скаларом (позитивним реалним бројем) по модулу пуног угла, онда за угао α и $x \in \mathbb{R}^+$ такође важи $r(x \cdot_{2\Omega} \alpha) = x \cdot_{2\pi} r(\alpha)$. Овде је $\cdot_{2\pi}$ операција скупа $[0, 2\pi[$ уведена са

$$\forall x, y, z \in [0, 2\pi[\quad (z = x \cdot_{2\pi} y \Leftrightarrow z = x \cdot y \pmod{2\pi}).$$

Пример 8.2. Одредимо угао α за који је $r(\alpha) = 1$. Из $r(\alpha) = 1$ налазимо $\pi \cdot r(\alpha) = \pi$, тј. $r(\pi \cdot \alpha) = \pi$ одакле је $\pi \cdot \alpha = \Omega$, па $\alpha = \dfrac{\Omega}{\pi}$. Како је Ω угао од 180°, то је $\dfrac{\Omega}{\pi}$ угао приближно једнак 57° 17’ 44”.

Тригонометријске функције у елементарној геометрији за аргументе имају углове. Размотримо следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\arrow[rr, "s \circ r^{-1}"] \arrow[dr, phantom, ""] \arrow[ddr, "\sin_r"'] & & {]0, 90^\circ[} \arrow[ddl, "\sin_s"] \\
& S \arrow[ul, "r"'] \arrow[ur, "s"] \arrow[d, "\mathrm{Sin}"] & \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

Слика 8.7.

Дефиниција синусне функције за оштре углове: $\mathrm{Sin}\,\alpha = \dfrac{a}{c}$, где је a наспрамна катета оштрог угла α правоуглог троугла, а c хипотенуза, јесте коректна с обзиром на то да је количник наспрамне катете и хипотенузе сличних правоуглих троуглова исти. Нека је S скуп оштрих углова у равни. Дакле, $\mathrm{Sin}\colon S \to \mathbb{R}$. Даље, нека су r и s две бијективне мере дефинисане на S, на пример, нека је r радијанска и s степена мера. Према томе, $r(\alpha)$ једнако је дужини лука јединичног круга који одговара централном углу α, док је $s(\alpha)$ једнако броју степени угла α. Нека су $\sin_r$ и $\sin_s$ функције дефинисане помоћу:

$$\sin_r(x) = \mathrm{Sin}(r^{-1}(x)), \qquad \sin_s(x) = \mathrm{Sin}(s^{-1}(x)).$$

Према дијаграму и овим једнакостима видимо да је

$$\mathrm{Sin}(\alpha) = \sin_r(r(\alpha)),\ \ \mathrm{Sin}(\alpha) = \sin_s(s(\alpha))\ \ \text{и}\ \ \sin_r(x) = \sin_s(s(r^{-1}(x))).$$

Отуда, функције $\sin$ и $\sin_r$ поклапају се на реалном интервалу $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, док је $\sin_s(x) = \sin_r\left(\dfrac{x\cdot\pi}{180}\right)$, тј. $\sin_s(x) = \sin\left(\dfrac{x\cdot\pi}{180}\right)$.

Пример 8.3. Ако је α угао од 30°, онда је $\alpha = \dfrac{\Omega}{6}$, одакле је $r(\alpha) = r\left(\dfrac{\Omega}{6}\right) = \dfrac{r(\Omega)}{6} = \dfrac{\pi}{6}$, тј. $\sin\alpha = \sin\dfrac{\pi}{6}$. Уобичајено је да се као аргумент функције f уместо угла α пише његова мера у степенима. Дакле у овом случају је $\sin 30^\circ = \sin\dfrac{\pi}{6}$.

На сличан начин уводи се мера произвољних углова, тј. углова већих од 2Ω као и оријентисаних углова.

Ниједна од раније уведених тригонометријских функција није 1-1 пресликавање свог домена, те се не може говорити о њиховим инверзним функцијама у правом смислу те речи. Ипак, непрекидне инверзне гране ових функција представљају важну класу елементарних функција. Према особинама ових функција из поглавља 8.6 налазимо, на пример, да је функција $\sin$ строго монотоно растућа на $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, као и $\sin\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] = [-1, 1]$, па следећим дефиницијама можемо увести ове функције.

Дефиниција 8.13. 1° Нека је $x \in [-1, 1]$ и $y \in \mathbb{R}$. Тада

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \ \wedge\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

2° Нека су $x, y \in \mathbb{R}$. Тада

$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \ \wedge \ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[; \quad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

8.9 Бесконачни производи и тригонометријске функције

Ојлер је у свом делу **Introduction ad Analysin Infitorum** (објављеном 1748. године) извео формуле којима се елементарне тригонометријске функције представљају као бесконачни производи. У овом поглављу размотрићемо како се до ове репрезентације тригонометријских функција може доћи применом нестандардне анализе. Најпре размотримо дефиницију и неке особине бесконачних производа.

Нека је $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ низ комплексних бројева таквих да је за све $k \in \mathbb{N}$, $z_k \neq -1$, и нека је $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+z_k)$. Ако за неки $P \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ постоји гранична вредност $\lim P_n = P$, онда кажемо да бесконачан производ $(1+z_0)(1+z_1)\cdots = \prod_{k=0}^{\infty}(1+z_k)$ конвергира према P. Овај бесконачан производ бележићемо краће $\prod_k(1+z_k)$. Ако бесконачан производ $\prod_k(1+|z_k|)$ конвергира, онда за $\prod_k(1+z_k)$ кажемо да апсолутно конвергира. Ево неколико особина бесконачних производа које се одмах изводе из дефиниције и особина оператора lim за низове.

Теорема 8.32. 1° *Ако* $\prod_k(1+z_k)$ *конвергира, онда* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

2° *Производ* $\prod_k(1+z_k)$ *конвергира ако и само ако за све бесконачне природне бројеве* $m, n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, *важи* $\prod_{k=m}^{n}(1+z_k) \approx 1$.

3° *Ако* $\prod_k(1+z_k)$ *конвергира, онда* $\prod_k(1+z_k) = \operatorname{st}\prod_{k=0}^{n}(1+z_k)$ *за сваки бесконачан* $n \in {}^*\mathbb{N}$.

4° *Ако је производ* $\prod_k(1+z_k)$ *апсолутно конвергентан, онда је и конвергентан.*

Доказ. 1° Ако је $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+z_k)$ и $0 \neq P = \prod_k(1+z_k)$, онда је $\lim_{n\to\infty}\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = 1$, одакле $\lim_{n\to\infty}(1+z_n) = 1$.
2° Ова еквиваленција је последица Кошијевог услова конвергенције за

низове.
3° Ово тврђење је нестандардна преформулација дефиниције конвергенције низова.
4° Применом Кошијевог критеријума за бесконачне $m, n \in {}^*\mathbb{N}$ имамо

$$0 \leq \left|\prod_{k=m}^{n}(1+z_k)\right| \leq \prod_{k=m}^{n}(1+|z_k|) \approx 0.$$

■

Користећи логаритамску функцију, бесконачан производ се своди на бесконачан ред.

Теорема 8.33. *Бесконачан производ $\prod_k(1+z_k)$ конвергира ако и само ако бесконачан ред $\sum_k \ln(1+z_k)$ конвергира. Уколико ред $\sum_k \ln(1+z_k)$ конвергира према $S \in \mathbb{C}$, онда $\prod_k(1+z_k)$ конвергира према e^S.*

Доказ. Размотримо делимичне суме $S_n = \ln P_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+z_k)$. Тада тврђење следи на основу непрекидности експоненцијалне и логаритамске функције. ■

На основу последње теореме могу се извести ови довољни услови конвергенције за бесконачне производе.

Теорема 8.34. 1° *Ако ред $\sum_k |z_k|$ конвергира, онда производ облика $\prod_k(1+|z_k|)$ апсолутно конвергира.*

2° *Ако редови $\sum_k z_k$, $\sum_k z_k^2$ конвергирају, онда и бесконачан производ $\prod_k(1+z_k)$ конвергира, уколико је (z_k) реалан низ.*

Доказ. 1° Најпре докажимо да за $z \in \mathbb{C}$

$$|z| < \frac{1}{2} \Rightarrow |\ln(1+z)| < 2|z| + 2|z|^2. \tag{25}$$

Заиста, како је $\ln(1+z) = \ln|1+z| + \imath \cdot \arg(1+z)$, према Теореми 8.20. имамо

$$\begin{aligned} |\ln(1+z)| &\leq |\ln|1+z|| + |\imath \cdot \arg(1+z)| \\ &\leq \ln(1+|z|) + |\arg(1+z)| \\ &\leq |z| + \arg(1+z). \end{aligned}$$

Даље, ако је $1+z=1+\varrho\cdot\cos\varphi+\imath\cdot\varrho\cdot\sin\varphi,\ \varrho=|z|$, онда за $\varrho<\dfrac{1}{2}$ важи

$$|\operatorname{tg}(\arg(1+z))|=\left|\frac{\varrho\cdot\sin\varphi}{1+\varrho\cdot\cos\varphi}\right|\le\frac{\varrho}{1-\varrho}\le\varrho(1+2\varrho)$$

одакле (25) следи. За бесконачне природне бројеве $m,n\in{}^*\mathbb{N}$ важи $z_n\approx 0$ и $\sum_{k=m}^{n}|z_k|^2\le\dfrac{1}{2}\sum_k|z_k|$, одакле према (25) следи

$$\left|\sum\nolimits_{k=m}^{n}\ln(1+z_k)\right|\le 2\sum\nolimits_{k=m}^{n}|z_k|+2\sum\nolimits_{k=m}^{n}|z_k|^2\le 3\sum\nolimits_{k=m}^{n}|z_k|\approx 0.$$

Тада према Кошијевом критеријуму тврђење 1° следи.

2° Уз одговарајућу замену променљивих, на основу Теореме 8.21. следи

$$(26)\qquad x\in\mu_{\mathbb{R}}(0)\Rightarrow(\exists\varepsilon\in\mu_{\mathbb{R}}(0))\ \ln(1+x)=x+\varepsilon x,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Даље, за неке инфинитезимале $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2$ и реалну инфинитезималу x важи

$$\frac{e^x}{1+x}=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\varepsilon_1x^2\right)\left(1-x+x^2+\varepsilon_2x^2\right)=1+\frac{x^2}{2}+\varepsilon_0x^2.$$

Дакле,

$$\begin{aligned}x-\ln(1+x)&=\ln\frac{e^x}{1+x}=\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\varepsilon_0x^2\right)\\&=\frac{x^2}{2}+\varepsilon_0x^2+\varepsilon\left(\frac{x^2}{2}+\varepsilon_0x^2\right)=\frac{x^2}{2}+\eta x^2\end{aligned}$$

за неке инфинитезимале ε,η. Дакле, за сваку реалну инфинитезималу x постоји реална инфинитезимала η тако да је $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\eta x^2$.

Нека су $m,n\in{}^*\mathbb{N}$ бесконачни природни бројеви и $m\le n$. Тада је $\sum_{k=m}^{n}z_k-\sum_{k=m}^{n}\ln(1+z_k)=\sum_{k=m}^{n}\eta_kz_k^2$ за неки (интерналан) низ (η_k) инфинитезимала. Даље, с обзиром на конвергенцију редова $\sum_k z_k$, $\sum_k z_k^2$ имамо $\sum_{k=m}^{n}z_k\approx 0$, и такође $\left|\sum_{k=m}^{n}\eta_kz_k^2\right|\le\sum_{k=m}^{n}z_k^2\approx 0$, дакле према Кошијевом критеријуму ред $\sum_k z_k-\sum_k\ln(1+z_k)$ конвергира, па и ред $\sum_k\ln(1+z_k)$ конвергира. Тада тврђење 2° следи према Теореми 8.33. ■

Сада ћемо доказати две техничке леме.

Лема 8.17. *Нека је* $p(x) = a_0x^r + a_1x^{r+1} + \ldots + a_mx^n$ *комплексан полином где је* $a_0 \neq 0$ *и* $n = r + m$. *Ако су* $x_1, \ldots, x_m$ *корени полинома* $p(x)$ *различити од нуле, онда важи* $p(x) = a_0x^r \prod_{k=1}^m \left(1 - \dfrac{x}{x_k}\right)$, $x \in \mathbb{C}$.

Доказ. Постоји полином $q(x)$ над $\mathbb{C}$ тако да је $p\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{q(x)}{x^n}$. Корени полинома q су $\dfrac{1}{x_i}$, $1 \leq i \leq m$, па користећи факторизацију полинома $q(x)$ имамо

$$p(x) = a_0x^n \prod_i \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_i}\right) = a_0x^r \prod_i \left(1 - \frac{x}{x_i}\right).$$

■

Следећа лема даје потребан и довољан услов за комутативност оператора st и $\sum$.

Лема 8.18. *Нека је* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *низ комплексних бројева такав да* $\sum_n a_n$ *конвергира и нека је* $(b_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ *интерналан низ нестандардних комплексних бројева тако да* $a_n = \mathrm{st}(b_n)$ *за свако* $n \in N$. *Тада важи еквиваленција*

$$(\forall n \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}) \sum_k a_k = \mathrm{st}\left(\sum_{k=1}^n b_k\right) \Leftrightarrow (\forall m, n \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}) \sum_{k=m}^n b_k \approx 0.$$

Доказ. $(\to)$ Нека су $m, n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $m < n$. Како је $\sum_k a_k = \mathrm{st}\left(\sum_{k=1}^m b_k\right)$ и $\sum_k a_k = \mathrm{st}\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)$, то је $\mathrm{st}\left(\sum_{k=1}^m b_k\right) - \mathrm{st}\left(\sum_{k=1}^n b_k\right) = 0$, тј. $\mathrm{st}\left(\sum_{k=m}^n b_k\right) = 0$.

$(\leftarrow)$ Дефинишимо низ $c_n = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$, $n \in {}^*\mathbb{N}$. Приметимо да је c_n интерналан низ, као и да је за све $n \in \mathbb{N}$, $c_n \approx 0$. Нека је $\underline{n}$ бесконачан природан број и размотримо тип

$$T(s) = \left\{ |c_s| < \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{\, n < s < \underline{n} \mid n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Ово је коначно непротивуречан скуп формула, па на основу ω_1–засићености Лајбницовог универзума, постоји $n_0 \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ који реализује овај тип. Дакле $c_{n_0} \approx 0$. Отуда имамо

$$c_{\underline{n}} = c_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{\underline{n}} (a_k - b_k).$$

Даље, према Кошијевом критеријуму $\sum_{k=n_0}^{\underline{n}} a_k \approx 0$, док је према услову за низ (b_n), $\sum_{k=n_0}^{\underline{n}} b_k \approx 0$ такође. Према томе $c_{\underline{n}} \approx 0$, тј. $\sum_k a_k = \mathrm{st}\left(\sum_{k=1}^{\underline{n}} b_k\right)$. ■

Према претходној леми и Теореми 8.33. имамо ову последицу.

ПОСЛЕДИЦА 8.12. *Нека је $(b_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ интерналан низ нестандардних комплексних бројева и нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ комплексних бројева тако да је $a_n = \mathrm{st}(b_n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Ако производ $\prod_n (1+a_n)$ конвергира, онда важи еквиваленција (за све $m, n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$)*

$$\prod_k (1+a_k) = \mathrm{st}\left(\prod_{k=1}^{n} (1+b_k)\right) \Leftrightarrow \sum_{k=m}^{n} \ln(1+b_k) \approx 0.$$

После уводних напомена о бесконачним производима, изведимо Ојлерову формулу за разлагање функције $\sin$ у бесконачан производ.

ТЕОРЕМА 8.35. *За свако $z \in \mathbb{C}$ је* $\sin z = z \cdot \prod_k \left(1 - \dfrac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Доказ. Нека је $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Полазећи од дефиниције функције $\sin$ и функције $\exp$, имамо

$$\sin z = \frac{1}{2\imath}\left(\left(1+\frac{\imath z}{n}\right)^n - \left(1-\frac{\imath z}{n}\right)^n\right). \tag{27}$$

Нека је $p_n(z)$ полином уведен у (27). Лако је видети да:

- ако је n паран, тада степен полинома p_n је $n-1$, док за непарно n степен полинома p_n је n;
- ако је $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, онда је $a_0 = 0,\ a_1 = 1$;
- ако је $p_n(z) = 0$, онда је $p_n(-z) = 0$.

Даље, узмимо да је $u = \imath \cdot \dfrac{z}{n}$. Из претходног одмах налазимо да су решења једначине $(1+u)^n = (1-u)^n$, различита од нуле, следећи комплексни бројеви:

$$u_k = \frac{1-\exp\left(\frac{2k\pi\imath}{n}\right)}{1+\exp\left(\frac{2k\pi\imath}{n}\right)}, \quad |k| < \left[\frac{n-1}{2}\right],\ k \in {}^*\mathbb{Z}.$$

Како је $\dfrac{1-\exp\left(\dfrac{2k\pi\imath}{n}\right)}{1+\exp\left(\dfrac{2k\pi\imath}{n}\right)} = \dfrac{\exp\left(-\dfrac{k\pi\imath}{n}\right)-\exp\left(\dfrac{k\pi\imath}{n}\right)}{\exp\left(-\dfrac{k\pi\imath}{n}\right)+\exp\left(\dfrac{k\pi\imath}{n}\right)} = -\imath\cdot\mathrm{tg}\dfrac{k\pi}{n}$, то су корени полинома $p_n(z)$,

$$z_k = \frac{nu_k}{\imath} = n\cdot\mathrm{tg}\frac{k\pi}{n}, \quad |k| < \left[\frac{n-1}{2}\right], \ k\in {}^*\mathbb{Z}.$$

Према Леми 8.17. тада имамо

$$p_n(z) = z\prod\nolimits_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(1-\frac{z^2}{n^2\mathrm{tg}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right),$$

а према Леми 8.16. такође важи

$$(\forall k\in\mathbb{N})(\forall z\in\mathbb{C}) \ \ \mathrm{st}\left(\frac{z^2}{n^2\mathrm{tg}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right) = \frac{z^2}{k^2\pi^2}.$$

Ред $\sum_k \dfrac{1}{k^2}$ апсолутно конвергира, па према Теореми 8.34. производ

$$\prod\nolimits_k\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

апсолутно конвергира. Тврђење теореме онда следи ако, према Последици 8.12. докажемо

$$(\forall m,n\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}) \ \ \sum\nolimits_{k=m}^{n}\ln\left(1-\frac{z^2}{n^2\mathrm{tg}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)\approx 0.$$

Ако је $x\in\mathbb{R}$, онда према дефиницији функције tg, Теореми 8.23. и $\cos x<1$, за $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, важи $\mathrm{tg}x > \sin x > x-\dfrac{x^3}{6}$, одакле

$$n\mathrm{tg}\frac{k\pi}{n} > k\pi - \frac{n\left(\frac{k\pi}{n}\right)^3}{6} > (k-1)\pi$$

за $k\le m,\ m\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$.

Дакле, за $k\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, $\dfrac{z^2}{n^2\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}$ је инфинитезимала, па према Теореми 8.34. 2° важи

$$\ln\left(1-\frac{z^2}{n^2\mathrm{tg}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right) = -\frac{z^2}{n^2\mathrm{tg}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}(1+\varepsilon_k), \quad \text{где је } \varepsilon_k\approx 0.$$

Отуда

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{n} \ln\left(1-\frac{z^2}{n^2\mathrm{tg}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)\right| &\leq |z|^2\sum_{k=m}^{n}\frac{|1+\varepsilon_k|}{n^2\mathrm{tg}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\\ &\leq 2\frac{|z|^2}{\pi^2}\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{(k-1)^2}\approx 0,\end{aligned}$$

јер је ред $\sum_k \frac{1}{k^2}$ конвергентан. ■

На сличан начин се доказују бесконачни развоји.

Теорема 8.36. 1° $\cos z = \prod_k \left(1 - 4\frac{z^2}{((2k-1)\pi)^2}\right)$.

2° $\mathrm{sh} z = z \cdot \prod_k \left(1 + \frac{z^2}{(k\pi)^2}\right)$.

3° $\mathrm{ch} z = \prod_k \left(1 + 4\frac{z^2}{((2k-1)\pi)^2}\right)$.

Ако се у формули из Теореме 8.35. замени $z = \frac{\pi}{2}$, добијамо

$$1 = \frac{\pi}{2}\prod_k \left(1 - \frac{1}{(2k)^2}\right).$$

Одавде једноставним срећивањем следи позната Валисова[4)] формула.

Теорема 8.37.

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

[4)] John Wallis (1616–1703)

Глава 9

Верижни разломци и Беров простор

Означимо са $\mathbb{I}_r$ скуп ирационалних бројева. Дакле, $\mathbb{I}_r = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Коначни верижни разломци остварују обострано једнозначну коресподенцију између рационалних бројева и коначних низова природних бројева, и са друге стране између ирационалних бројева и бесконачних низова природних бројева. У случају рационалних бројева поступак за одређивање кореспондентног верижног разломка своди се на Еуклидов алгоритам. Овај поступак на природан начин преносимо и на бесконачне верижне развоје ирационалних бројева при чему користимо њихове инфинитезималне апроксимације помоћу хиперрационалних бројева.

9.1 Рационални бројеви и верижни разломци

Из елементарне теорије бројева знамо да Еуклидов алгоритам даје поступак за одређивање највећег заједничког делиоца за два дата цела броја. Овај алгоритам се налази описан у Еуклидовим *Елементима* (300 г. пре н.е.) и сматра се да је то најстарији нетривијални алгоритам који је остао непромењен до данашњих дана. У основи Еуклидовог алгоритма лежи следеће тврђење.

Лема 9.1. (о остатку) *Нека су a и b цели бројеви, $b \neq 0$. Тада постоји јединствен цео број q и природан број r тако да је*

$$a = qb + r, \qquad 0 \leq r < |b|.$$

Доказ ове чињенице за $b > 0$ је једноставан. Заиста, ако је bq највећи умножак од b који не превазилази a, тада је $r = a - bq$ ненегативан и, с обзиром на то да је $b(q+1) > a$, имамо $r < b$. Случај $b < 0$ расправља се на сличан начин.

(ЕУКЛИДОВ АЛГОРИТАМ) Нека су a и b природни бројеви, $a > b > 0$. Према Леми о остатку можемо конструисати низове q_i и r_i тако да је

$$\begin{aligned}
r_0 &= a, \qquad r_1 = b, \\
r_0 &= q_1 r_1 + r_2, \qquad 0 \le r_2 < r_1, \\
r_1 &= q_2 r_2 + r_3, \qquad 0 \le r_3 < r_2, \\
r_2 &= q_3 r_3 + r_4, \qquad 0 \le r_4 < r_3, \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Према принципу најмањег елемента за природне бројеве, тада скуп $\{r_0, r_1, r_2, \dots\}$ мора бити коначан (иначе не би имао најмањи елемент). Дакле, за неки $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\begin{aligned}
r_0 &= a, \qquad r_1 = b, \\
r_0 &= q_1 r_1 + r_2, \\
r_1 &= q_2 r_2 + r_3, \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n, \\
r_{n-1} &= q_n r_n.
\end{aligned}$$

Није тешко видети да је $r_n = (a, b)$, највећи заједнички делилац бројева a, b. С друге стране, уз претпоставку $(a, b) = 1$ из Еуклидовог алгоритма налазимо

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_2}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{r_3}{r_2}} = \cdots = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{\ddots}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

тј.

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{}{\ddots \, q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}} \stackrel{\text{def}}{=} [q_1, q_2, \ldots, g_n].$$

Израз на десној страни ове једнакости називамо *верижним разломком* придруженим рационалном броју $\frac{a}{b}$. Приметимо да су $q_2, q_3, \ldots, q_n$ позитивни природни бројеви, док је q_1 цео број. Ако се у том верижном разломку $q_1, q_2, \ldots, q_n$ схвате као променљиве, сређивањем овог разломка добијамо два полинома $P_n(q_1, \ldots, q_n)$ и $Q_n(q_1, \ldots, q_n)$ тако да је

$$\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \ldots, q_n] = \frac{P_n(q_1, \ldots, q_n)}{Q_n(q_1, \ldots, q_n)}.$$

Лема 9.2. *Полиноми $P_n(q_1, \ldots, q_n)$ и $Q_n(q_1, \ldots, q_n)$ задовољавају следеће рекурентне формуле:*

$$\begin{aligned} P_n &= q_n P_{n-1} + P_{n-2}, \quad P_1 = q_1, \quad P_0 = 1, \\ Q_n &= q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}, \quad Q_1 = 1, \quad Q_0 = 0. \end{aligned}$$

Доказ. Наведене рекурентне формуле можемо добити индукцијом по n. Претпоставимо индуктивну хипотезу, тј. да тврђење важи за фиксирано n. Тада:

$$\begin{aligned} [q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}] &= \left[q_1, \ldots, q_{n-1}, \frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}}\right] = \\ = \frac{P_n\left(q_1, \ldots, q_{n-1}, \dfrac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}}\right)}{Q_n\left(q_1, \ldots, q_{n-1}, \dfrac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}}\right)} &\stackrel{\text{I.H.}}{=} \frac{\dfrac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}} P_{n-1} + P_{n-2}}{\dfrac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}} Q_{n-1} + Q_{n-2}} = \\ = \frac{q_{n+1}(q_n P_{n-1} + P_{n-2}) + P_{n-1}}{q_{n+1}(q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}) + Q_{n-1}} &\stackrel{\text{I.H.}}{=} \frac{q_{n+1} P_n + P_{n-1}}{q_{n+1} Q_n + Q_{n-1}}, \end{aligned}$$

па $P_{n+1} = q_{n+1} P_n + P_{n-1}$ и $Q_{n+1} = q_{n+1} Q_n + Q_{n-1}$. ■

За полиноме P_n и Q_n такође важе следећи идентитети.

Лема 9.3. 1° $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n, \quad n \geq 1,$

2° $P_nQ_{n-2} - P_{n-2}Q_n = (-1)^{n-1}q_n, \quad n \geq 2.$

Доказ. Доказ ових идентитета такође можемо добити индукцијом по n. На пример, индуктивни корак за први идентитет изгледа

$$\begin{aligned} P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} &= (q_nP_n + P_{n-1})Q_n - P_n(q_nQ_n + Q_{n-1}) \\ &= -(P_nQ_{n-1} - Q_nP_{n-1}) \stackrel{\text{I.H.}}{=} (-1)(-1)^n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Докажимо јединственост развоја рационалног броја $q \in \mathbb{Q}$, $q = \frac{a}{b}$, $b > 0$, $(a,b) = 1$ у верижни разломак. Дакле, нека је

$$\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \ldots, q_m] = [q_1', q_2', \ldots, q_n']$$

где је, рецимо, $m \geq n$. Тада за неке $\varrho, \varrho' \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{b} = q_1 + \varrho = q_1' + \varrho', \qquad 0 \leq \varrho < 1, \ 0 \leq \varrho' < 1,$$

одакле је $q_1 = [q] = q_1'$. Индукцијом даље доказујемо да је $q_i = q_i'$ за $i \leq n$. Нека је $q_1 = q_1', \ldots, q_{k-1} = q_{k-1}'$, $k \leq n$. Тада за неке $s, s' \in \mathbb{Q}$ важи

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots \, q_{k-1} + \frac{1}{s}}} = q_1' + \cfrac{1}{q_2' + \cfrac{1}{\ddots \, q_{k-1}' + \frac{1}{s'}}}$$

тј. $\dfrac{P_k(q_1, \ldots, q_{k-1}, s)}{Q_k(q_1, \ldots, q_{k-1}, s)} = \dfrac{P_k(q_1', \ldots, q_{k-1}', s')}{Q_k(q_1', \ldots, q_{k-1}', s')}$, одакле је

$$\frac{sP_{k-1}(q_1, \ldots, q_{k-1}) + P_{k-2}(q_1, \ldots, q_{k-2})}{sQ_{k-1}(q_1, \ldots, q_{k-1}) + Q_{k-2}(q_1, \ldots, q_{k-2})} = \\ = \frac{s'P_{k-1}(q_1', \ldots, q_{k-1}') + P_{k-2}(q_1', \ldots, q_{k-2}')}{s'Q_{k-1}(q_1', \ldots, q_{k-1}') + Q_{k-2}(q_1', \ldots, q_{k-2}')}.$$

Како је $P_{k-1}(q_1, \ldots, q_{k-1}) = P_{k-1}(q_1', \ldots, q_{k-1}')$ и како сличне једнакости важе за $P_{k-2}, Q_{k-1}, Q_{k-2}$, налазимо

$$s(P_{k-1}Q_{k-2} - P_{k-2}Q_{k-1}) = s'(P_{k-1}Q_{k-2} - P_{k-2}Q_{k-1}).$$

Како је $P_{k-1}Q_{k-2} - P_{k-2}Q_{k-1} = (-1)^{k-1}$, налазимо $s = s'$, тј. $q_k + \varrho_1 = q_k' + \varrho_1'$ за неке $0 \leq \varrho_1 < 1$, $0 \leq \varrho_1' < 1$, па $q_k = q_k'$. Ако је $m > n$, онда за неки $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$,

$$q_n = q_n + \frac{1}{s},$$

што је контрадикција. Дакле, $m = n$.

Нека је $\mathbb{N}_\infty$ скуп свих коначних низова позитивних природних бројева. Одавде имамо следеће тврђење.

Теорема 9.1. *Нека је* $v\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_\infty$ *пресликавање дефинисано са* $v\left(\frac{a}{b}\right) = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, *где је* $\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$. *Тада је* v *добро дефинисано пресликавање и* $v\colon \mathbb{Q} \xrightarrow[1-1]{\text{na}} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_\infty$.

Доказ. Пресликавање v је добро дефинисано јер сваки рационалан број има јединствен развој у верижни разломак. Ако је $v\left(\frac{a}{b}\right) = v\left(\frac{a'}{b'}\right) = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, онда

$$\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \ldots, q_n] = \frac{a'}{b'},$$

па је v 1-1 пресликавање. Ако је $(q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_\infty$, онда за $\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$ одмах имамо да је $v\left(\frac{a}{b}\right) = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, па је v пресликавање *на*. ■

Приметимо да је за $q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_\infty$, $v^{-1}(q) = [q]$.

За дати рационалан број $q = \frac{a}{b}$ имамо следеће парцијалне развоје:

$$q = q_1 + \frac{1}{q^2} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q^3}} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{q^4}}} = \cdots = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{q_n}}}.$$

Овим смо дефинисали низ $q^{(i)}$, $1 \le i \le n$:

$$q^{(1)} = q_1 + \frac{1}{q^{(2)}},\ q^{(2)} = q_2 + \frac{1}{q^{(3)}},\ \ldots,\ q^{(n-1)} = q_{n-1} + \frac{1}{q^{(n)}},\ q^{(n)} = q_n.$$

Дакле, за $q^{(i)}$, $1 \le i \le n-1$ важи $q^{(i-1)} = q_{i-1} + \frac{1}{q^{(i)}}$, тј.

Теорема 9.2. $q^{(i)} = \frac{1}{q^{(i-1)} - [q^{(i-1)}]}$, $q_{i-1} = [q^{(i-1)}]$, *и* $q^{(i)} \notin \mathbb{N}$ *за свако* $1 \le i \le n-1$, *где је* $\frac{a}{b} = [q_1, \ldots, q_n]$.

Нека је за $(q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_\infty$, $\alpha_n = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$. Тада према Леми 9.3.

$$\alpha_{n+2} - \alpha_n = \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n+2}Q_n - P_nQ_{n+2}}{Q_nQ_{n+2}} = \frac{q_{n+2} \cdot (-1)^{n+1}}{Q_nQ_{n+2}},$$

па

$$\begin{aligned} \alpha_n < \alpha_{n+2} \quad &\Rightarrow \quad \alpha_{n+2} < \alpha_{n+4}, \\ \alpha_n > \alpha_{n+2} \quad &\Rightarrow \quad \alpha_{n+2} > \alpha_{n+4}. \end{aligned}$$

Одавде одмах налазимо да за низ сукцесивних верижних апроксимација за $\dfrac{a}{b}$ важи:

Теорема 9.3. $\alpha_1 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_{2l+1} = \dfrac{a}{b} < \alpha_{2l} < \cdots < \alpha_4 < \alpha_2$, *или* $\alpha_1 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_{2l-1} < \alpha_{2l} = \dfrac{a}{b} < \alpha_{2l-2} < \cdots < \alpha_4 < \alpha_2$ *у зависности да ли је* $n = 2l$ *или* $n = 2l+1$, *где је* $\dfrac{a}{b} = \alpha_n$.

На основу претходног тврђења одмах налазимо

$$\left|\frac{a}{b} - \alpha_k\right| \leq |\alpha_k - \alpha_{k-1}| = \frac{|P_{k+1}Q_k - P_kQ_{k+1}|}{Q_kQ_{k+1}} = \frac{1}{Q_kQ_{k+1}}.$$

Дакле, имамо ову процену за низ сукцесивних апроксимација:

Лема 9.4. $\left|\dfrac{a}{b} - \alpha_k\right| \leq \dfrac{1}{Q_kQ_{k+1}}$.

Како је $Q_k = q_k \cdot Q_{k-1} + Q_{k-2}$ и $Q_1 = 1 > 0$, тада имамо да је $Q_1 \leq Q_2 < Q_3 < \ldots$, па је $Q_k \geq k-1$. Отуда важи

Лема 9.5. $\left|\dfrac{a}{b} - \alpha_k\right| \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$.

Пример 9.1. Нека је $\dfrac{a}{b} = \dfrac{731}{41}$. Тада из $731 = 17 \cdot 41 + 34$, $41 = 1 \cdot 34 + 7$, $34 = 4 \cdot 7 + 6$ и $7 = 1 \cdot 6 + 1$,следи

$$\frac{731}{41} = 17 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}}.$$

Такође је $\alpha_1 = \dfrac{P_1}{Q_1} = 17,\ \alpha_2 = \dfrac{P_2}{Q_2} = 18,\ \alpha_3 = \dfrac{P_3}{Q_3} = \dfrac{89}{5},\ \alpha_4 = \dfrac{P_4}{Q_4} = \dfrac{107}{6}$ и $\alpha_5 = \dfrac{P_5}{Q_5} = \dfrac{731}{41}$. Дакле,

$$\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_5 = \frac{a}{b} < \alpha_4 < \alpha_2, \qquad \text{тј.} \qquad 17 < \frac{89}{5} < \frac{731}{41} < \frac{107}{6} < 18.$$

9.2 Верижни разломци у нестандардној анализи

Подсетимо се да је ${}^*\mathbb{Q}$ скуп хиперрационалних бројева, тј.

$${}^*\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in {}^*\mathbb{Z},\ b \in {}^*\mathbb{N},\ b > 0 \right\}.$$

Једно од кључних својстава скупа ${}^*\mathbb{Q}$ је да се у монади $\mu(r)$ сваког $r \in {}^*\mathbb{R}$ налази неки хиперрационалан број. Другим речима, сваки хиперреалан број се може инфинитезимално добро апроксимирати помоћу неког хиперрационалног броја. Према Лајбницовом принципу, имамо следећу инфинитезималну верзију Теореме 9.1.

Теорема 9.4. *Нека је* $\dfrac{a}{b} \in {}^*\mathbb{Q}$. *Тада постоји тачно један* $H \in {}^*\mathbb{N}$ *и тачно један* H*–низ (нестандардних) целих бројева* $q_1, q_2, \ldots, q_H$, $q_1 \in {}^*\mathbb{Z}$, $q_i \in {}^*\mathbb{N}$, $2 \le i \le H$, $q_i > 0$, *тако да*

$$\frac{a}{b} = {}^*[q_1, q_2, \ldots, q_H].$$

Овде је ${}^*[\cdot] = {}^*(v^{-1})$. Уместо ${}^*[q_1, q_2, \ldots, q_H]$ писаћемо убудуће $[q_1, q_2, \ldots, q_H]$. Такође ћемо користити чињенице

$${}^*(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_\infty) = {}^*\mathbb{Z} \times {}^*(\mathbb{N}_\infty), \qquad ({}^*\mathbb{N})_\infty \subseteq {}^*(\mathbb{N}_\infty).$$

Теорема 9.5. *За сваки* $r \in \mathbb{I}_r = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *постоји низ* $q_1, q_2, \ldots$ *целих бројева таквих да је* $q_2, q_3, \dots > 0$ *и* $\lim\limits_{n \to \infty} [q_1, q_2, \ldots, q_n] = r$.

Доказ. Нека је $\dfrac{a}{b} \in {}^*\mathbb{Q}$ такав да је $\dfrac{a}{b} \approx r$ и нека је $\alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} [q_1, q_2, \ldots, q_n]$, где је $n \in {}^*\mathbb{N}$, $n \le H$ и $[q_1, q_2, \ldots, q_H] = \dfrac{a}{b}$. Хиперрационалан број $\dfrac{a}{b}$ је нестандардан с обзиром да је r ирационалан, па је H бесконачан. Према

Леми 9.5. $\left|\dfrac{a}{b}-\alpha_n\right| \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$ за све $n < H$, одакле, $|r-\alpha_n| \lesssim \dfrac{1}{n(n-1)}$ за све $n \leq H$. Нека је $\beta = \alpha \restriction \mathbb{N}$. Тада $|r-\beta_n| \lesssim \dfrac{1}{n(n-1)}$ за све $n \in \mathbb{N}$, па је $|r - {}^*\beta_K| \approx 0$ за све бесконачне $K \in {}^*\mathbb{N}$. Према томе, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = r$, што даје да $\lim\limits_{n\to\infty}[q_1, q_2, \ldots, q_n] = r$. ■

Ако је $r = \lim\limits_{n\to\infty}[q_1, q_2, \ldots, q_n]$ из претходне теореме, писаћемо

$$r = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots}},$$

и овај запис назваћемо *верижним развојем* ирационалног броја r. Приметимо да је за $r \in \mathbb{I}_r$, овај развој бесконачан. Даље, за $\dfrac{a}{b}$ из Теореме 9.5. према Теореми 9.2. важи $q_i = [q^{(i-1)}],\ i \leq H$, где

$$q^{(0)} = q, \qquad q^{(i)} = \frac{1}{q^{(i-1)} - [q^{(i-1)}]}, \quad i \leq H.$$

Даље, за $\dfrac{a}{b} = q_1 + \dfrac{r_1}{b},\ 0 < r_1 < b,\ r \approx q_1 + \dfrac{r_1}{b}$ па је $r = q_1 + \mathrm{st}\left(\dfrac{r_1}{b}\right)$. Приметимо да је $q_1 \in \mathbb{Z}$, јер $0 < \dfrac{r_1}{b} < 1$. С обзиром на то да је $r \in \mathbb{I}_r$, следи $\mathrm{st}\left(\dfrac{r_1}{b}\right) > 0$, дакле $q_1 = [r]$. Према томе, низ q_i је одређен са

$$q_1 = [r], \qquad q_i = [q^{(i-1)}], \quad i = 2, 3, \ldots.$$

Лема 9.6. *Нека су r и* $\dfrac{a}{b}$ *као у Теореми 9.5. и нека је* λ *низ реалних бројева такав да је*

$$\lambda_0 = r, \qquad \lambda_i = \frac{1}{\lambda_{i-1} - [\lambda_{i-1}]}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Тада $\lambda_i \approx q^{(i)},\ [\lambda_i] = [q^{(i)}],\ \lambda_i \in \mathbb{I}_r$ *и* $q_i \in \mathbb{Z}$ *за све* $i \in \mathbb{N}$.

Доказ. Како је $r \in \mathbb{I}_r$ и $\lambda_0 = r$, одмах закључујемо да $\lambda_1 \in \mathbb{I}_r$, $\lambda_2 \in \mathbb{I}_r$ и тако даље. Сада доказујемо индукцијом да је $\lambda_i \approx q^{(i)}$, и $[q^{(i)}] = [\lambda_i]$. Претпоставимо индуктивну хипотезу, односно нека важи $\lambda_{i-1} \approx q^{(i-1)},\ [\lambda_{i-1}] = [q^{(i-1)}]$. Тада

$$\lambda_i = \frac{1}{\lambda_{i-1} - [\lambda_{i-1}]} \overset{\text{I.}H.}{=} \frac{1}{\lambda_{i-1} - [q^{(i-1)}]} \overset{\text{I.}H.}{\approx} \frac{1}{q^{(i-1)} - [q^{(i-1)}]} = q^{(i)},$$

па $\lambda_i \approx q^{(i)}$. Даље, $q^{(i)} = [q^{(i)}] + s$, где је $0 \leq s < 1$, одакле је $\lambda_i \approx [q^{(i)}] + s$, тј. $\lambda_i = [q^{(i)}] + \mathrm{st}(s)$, и $\mathrm{st}(s) > 0$ јер $\lambda_i \in \mathbb{I}_r$. Дакле, $q_i = [q^{(i)}] = [\lambda_i]$, и $q_i \in \mathbb{N}$, за $i > 1$. ■

Пример 9.2. За $\lambda_0 = \sqrt{2}$, $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$, $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \sqrt{2}+1$, $\ldots$, тј. $q_0 = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 2, \ldots$ имамо

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}.$$

С обзиром на то да је $q_i = [\lambda_i]$, према претходној леми, низ $q_1, q_2, \ldots$ такав да је $r = [q_1, q_2, \ldots]$ је јединствен. Према томе, имамо следеће појачање Теореме 9.5.

Теорема 9.6. *За сваки $r \in \mathbb{I}_r$ постоји тачно један низ $q_1, q_2, \ldots$ целих бројева таквих да је $q_2, q_3, \cdots > 0$ и*

$$\lim_{n\to\infty} [q_1, q_2, \ldots, q_n] = r.$$

Такође имамо и ову последицу Леме 9.6.

Лема 9.7. *Нека су $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'} \in {}^*\mathbb{Q}$ и нека је $\frac{a}{b} \approx \frac{a'}{b'} \approx r$, где $r \in \mathbb{I}_r^+$. Тада за $\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \ldots, q_H]$, $\frac{a'}{b'} = [q'_1, q'_2, \ldots, q'_{H'}]$ важи $q \restriction \mathbb{N} = q' \restriction \mathbb{N}$.*

Доказ. Према ознакама из Леме 9.6. важи $q_i = [\lambda_{i-1}] = q'_i$, где $i = 1, 2, \ldots$. ■

Следеће тврђење даје интересантну карактеризацију ирационалних бројева.

Теорема 9.7. *Нека је r реалан број. Тада је r ирационалан ако и само ако постоји бесконачно много рационалних бројева $\frac{p}{q}$ таквих да је*

$$\left| r - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \qquad (1)$$

Доказ. Нека је $r \in \mathbb{I}_r$. Тада за верижни развој $\dfrac{P_n}{Q_n} = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$ броја r важи $\left| r - \dfrac{P_n}{Q_n} \right| < \dfrac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \dfrac{1}{Q_n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, па (1) важи за бесконачно много $\dfrac{p}{q}$. Нека је $r \in \mathbb{Q}$, $r = \dfrac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Онда $\left| \dfrac{a}{b} - \dfrac{p}{q} \right| = \dfrac{|aq - bp|}{bq} \geq \dfrac{1}{bq}$ ако је $\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{p}{q}$. Ако је $\left| \dfrac{a}{b} - \dfrac{p}{q} \right| < \dfrac{1}{q^2}$, онда $q < b$, дакле има само коначно много разломака $\dfrac{p}{q}$ таквих да важи $\left| \dfrac{a}{b} - \dfrac{p}{q} \right| < \dfrac{1}{q^2}$. ∎

Према претходној теореми, $r \in \mathbb{R}$ је ирационалан ако и само ако монада $\mu(r)$, садржи хиперрационалан број $\dfrac{p}{q}$ такав да је $\left| r - \dfrac{p}{q} \right| < \dfrac{1}{q^2}$. Одавде такође одмах следи да је за $r \in \mathbb{I}_r$, скуп $S = \{\, rx + y \mid x, y \in \mathbb{Z} \,\}$ густ у $\mathbb{R}$. Заиста, ако је $\dfrac{p}{q}$ хиперрационалан број такав да је $\left| r - \dfrac{p}{q} \right| < \dfrac{1}{q^2}$, онда можемо узети да је $0 < rq - p < \dfrac{1}{q}$ и тада је $\dfrac{1}{q} \in \mu(0)$. Ако је $s \in [0,1]_{\mathbb{R}}$, онда за неки $i \in {}^*\mathbb{N}$, $\dfrac{i}{q} \leq s < \dfrac{i+1}{q}$. Нека је $K \in {}^*\mathbb{N}$ највећи број такав да је $K(rq - p) < \dfrac{i+1}{q}$. Тада $r(Kq) - Kp \in \mu(s)$, па је S густ у $[0,1]_{\mathbb{R}}$, а с обзиром да је транслаторно инваријантан над $\mathbb{Z}$, S је густ и над $\mathbb{R}$.

Приметимо да је $2 + \dfrac{1}{H} \approx 2 - \dfrac{1}{H}$, за $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, али

$$2 - \frac{1}{H} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{H-1}} \quad \text{и} \quad 2 + \frac{1}{H} = 2 + \frac{1}{H},$$

па претходно тврђење важи само за хиперрационалне бројеве из монада ирационалних бројева.

Сходно претходном излагању, пресликавање

$$\Phi \colon \mathbb{I}_r \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

дефинисано са $\phi \colon r \mapsto (q_1, q_2, \ldots)$, где је $[q_1, q_2, \ldots]$ верижни развој за r, је добро дефинисано. Оно је и 1–1 јер из $\Phi(r) = \Phi(r')$ следи

$$r = \lim_{n \to \infty} [q_1, q_2, \ldots, q_n] = r',$$

односно $r = \operatorname{st}\left(\frac{a}{b}\right) = r'$, где $r \approx \frac{a}{b} \approx r'$ и $\frac{a}{b} \in {}^*\mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \dots, q_H]$. Докажимо да је Φ пресликавање *на*. Нека је $(q_1, q_2, \dots) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и нека је $\alpha_n = [q_1, q_2, \dots, q_n]$. Према Теореми 9.3. и Леми 9.5. важи

$$(\alpha_{2n})\downarrow, \quad (\alpha_{2n+1})\uparrow \quad \text{и} \quad |\alpha_{2n+1} - \alpha_{2n}| < \frac{1}{\alpha_{2n}}.$$

Дакле низ (α_n) је конвергентан. Нека је $r = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$. Приметимо да важи и следећа чињеница: ако је $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ и $\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \dots, q_H]$, онда $\frac{a}{b} \approx r$ и $r = [q_1, q_2, \dots]$. Докажимо да је r ирационалан. С обзиром на то да је $\alpha_n = \frac{P_n}{Q_n}$ важи $\left|r - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n^2}$, то постоји бесконачно много рационалних бројева таквих да је

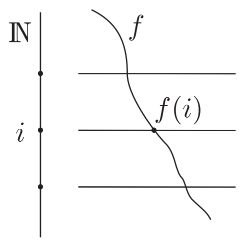
$$\left|r - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2},$$

па је према Теореми 9.7. број r ирационалан. Управо доказана својства пресликавања Φ исказујемо у виду следеће теореме.

Теорема 9.8. $\Phi\colon \mathbb{I}_r \xrightarrow[1-1]{\text{na}} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

9.3 Беров простор

Нека је задата дискретна топологија на $\mathbb{N}$. Дакле, сваки подскуп од $\mathbb{N}$ је и отворен и затворен.



Слика 9.1.

Беров[1)] простор се дефинише као степен $\Xi = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ простора $\mathbb{N}$ са топологијом производа (Тихоновљевом топологијом). Дакле, базни

[1)] René-Louis Baire (1874–1932)

скупови простора Ξ су облика

$$B = \bigcap\nolimits_{i \in S} \pi_i^{-1}[n_i], \quad S \text{ је коначан подскуп од } \mathbb{N},$$

где су $\pi_i \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ пројекцијске функције, тј. $\pi_i \colon f \mapsto f(i)$, $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$, што цртамо као на Слици 9.1, и $n_i \in \mathbb{N}$.

Нека је $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и нека је $\mu({}^*f)$ монада од ${}^*f$. Тада

$$\mu({}^*f) = \{\, h \in {}^*\Xi \mid h \approx {}^*f \,\} = \bigcap\nolimits_{f \in \mathcal{O}} {}^*\mathcal{O},$$

где $\mathcal{O}$ је отворен у Ξ. Овде ћемо користити следећу теорему (видети [126]).

Теорема 9.9. *Нека је $X = \prod_{i \in J} X_i$ производ простора X_i, $i \in J$. Ако је $g \in {}^*X$ и $f \in X$, онда $g \approx {}^*f$ ако и само ако $g(i) \approx f(i)$ за све $i \in J$.*

У случају Беровог простора, с обзиром на то да је $\mathbb{N}$ дискретан, приметимо да је $g \in {}^*\Xi$ и $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $g(i) \approx f(i)$ за $i \in \mathbb{N}$ ако и само ако $g(i) = f(i)$. Према томе, за $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,

$$\mu({}^*f) = \{\, g \in {}^*\Xi \mid g \restriction \mathbb{N} = f \,\}.$$

Ако је $h \in {}^*\Xi$, онда према Робинсоновој теореми преливања 4.19. с обзиром на то да је h интернална функција, из $h \restriction \mathbb{N} = f$ следи да за неки бесконачан $H \in {}^*\mathbb{N}$, $h \restriction [0, H] = {}^*f \restriction [0, H]$. С тим у вези дефинишемо

$$\mu_H({}^*f) = \big\{\, h \in {}^*\Xi \mid h \restriction [0, H] = {}^*f \restriction [0, H] \,\big\}, \quad H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}.$$

Према претходној напомени имамо

$$\mu({}^*f) = \bigcup\nolimits_{H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}} \mu_H({}^*f).$$

Размотримо тополошка својства пресликавања Φ из другог одељка.

Теорема 9.10. $\Phi \colon \mathbb{I}_r^+ \to \Xi$ *је хомеоморфизам.*

Доказ. У другом одељку доказали смо да је Φ 1–1 и *на*. Докажимо да је Φ непрекидно пресликавање. Нека је $r \in \mathbb{I}_r^+$ и $s \in {}^*\mathbb{I}_r$ такав да је $r \approx s$. Даље, нека је $\dfrac{a}{b} \in {}^*\mathbb{Q}$ такав да је $r \approx \dfrac{a}{b} \approx s$ и $\dfrac{a}{b} = [q_1, q_2, \ldots, q_H]$. Дакле, $r = \mathrm{st}(s)$ има верижни развој $[q_1, q_2, \ldots]$ (приметимо да је $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ јер $r \in \mathbb{I}_r$). Докажимо следећу лему.

Лема 9.8. *Ако су $r \in \mathbb{I}_r$, $s \in {}^*\mathbb{I}_r$ такви да је $s \approx r$, онда је $[s] = [r]$.*

Доказ. С обзиром на $s \approx r$, за неки $\varepsilon \approx 0$, $q \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{R}$, $0 < m < 1$, важи $s = r + \varepsilon = q + m + \varepsilon$. Тада $m + \varepsilon < 1$, па $q + m + \varepsilon < q + 1$, одакле следи $[s] = q = [r]$, чиме смо доказали лему.

У наставку доказа теореме, према Лајбницовом трансфер принципу, верижни развој за s добијамо на следећи начин:

$$s^{(0)} = s, \;\; s^{(i)} = \frac{1}{s^{(i-1)} - [s^{(i-1)}]}, \;\; s_i = [s^{(i-1)}], \quad i \in {}^*\mathbb{N}.$$

Ако је $q^{(0)} = r$, $q^{(i)} = \dfrac{1}{q^{(i-1)} - [q^{(i-1)}]}$, $q_i = [q^{(i-1)}]$, $i \in \mathbb{N}$, доказујемо да важи за све $i \in \mathbb{N}$:

$$s^{(i)} \approx q^{(i)}, \;\; q_i = s_i, \;\; s^{(i)} \in {}^*\mathbb{I}_r, \;\; q^{(i)} \in \mathbb{I}_r.$$

Доказ за ово тврђење изводимо индукцијом по i.
Случај $i = 1$: $\;s^{(0)} = s \approx r = q^{(0)}$, па како су s и r ирационални, то је $s_1 = [s^{(0)}] = [s] = [r] = [q^{(0)}] = q_1$.
Претпоставимо индуктивну хипотезу $i - 1$. Тада имамо да је вредност $s^{(i)} = \dfrac{1}{s^{(i-1)} - [s^{(i-1)}]}$ ирационална као вредност рационалног израза са ирационалним аргументом, и слично доказујемо да је и $q^{(i)}$ ирационалан (што је иначе већ доказано у другом одељку). Због непрекидности рационалних функција и према индуктивној хипотези следи

$$s^{(i)} = \frac{1}{s^{(i-1)} - [s^{(i-1)}]} \approx \frac{1}{q^{(i-1)} - [q^{(i-1)}]} = q^{(i)},$$

па према Леми 9.8. $s_i = [s^{(i)}] = [q^{(i)}] = q_i$.

Дакле, за верижни развој ${}^*\Phi(s)$ важи ${}^*\Phi(s) \restriction \mathbb{N} = (q_1, q_2, \dots)$, тј. ${}^*\Phi(s) \approx \Phi(r)$, па је Φ непрекидна функција.

Докажимо да је и $\Phi^{-1}\colon (q_1, q_2, \dots) \mapsto [q_1, q_2, \dots]$ непрекидно пресликавање из Ξ у $\mathbb{I}_r^+$. Дакле, нека је $f \in \Xi$ и $h \in {}^*\Xi$ тако да је $h \approx {}^*f$. Тада је $h \restriction \mathbb{N} = f$, па $\Phi^{-1}(f) = [q_1, q_2, \dots]$ за $f = (q_1, q_2, \dots)$. Ако је $s = {}^*\Phi^{-1}(h)$, онда је h верижни развој за s. Нека су

$$\alpha_n = [q_1, q_2, \dots, q_n], \; n \in \mathbb{N}, \quad \beta_n = [s_1, s_2, \dots, s_n], \; n \in {}^*\mathbb{N}.$$

Како је $\alpha_n = \beta_n$ за неко $n \in \mathbb{N}$, према Робинсоновој теореми преливања 4.19. за неки бесконачан $H \in {}^*\mathbb{N}$,

$${}^*\alpha \restriction [0, H] = \beta \restriction [0, H].$$

Даље, нека су $L, K \in {}^*\mathbb{N}$ бесконачни природни бројеви такви да је $2K < L$. Према Лајбницовом трансфер принципу, и првом одељку, налазимо

$$\beta_1 < \beta_3 < \cdots < \beta_{2K+1} < \cdots < s < \cdots < \beta_{2K} < \cdots < \beta_4 < \beta_2,$$

па

$$|\beta_L - s| < |\beta_{2K+1} - \beta_{2K}| < \frac{1}{2K(2K-1)},$$

тј. $\beta_L \approx s$ за све $L \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Узимајући да је $L = H$, налазимо следеће $r \approx \alpha_H = \beta_H \approx s$, где је $r = \Phi^{-1}(f)$, па $r \approx s$. Дакле, овим смо доказали

$$h \approx f \Rightarrow {}^*\Phi^{-1}(h) \approx \Phi^{-1}(f), \ \ f \in \Xi, \ h \in {}^*\Xi,$$

па је Φ^{-1} непрекидно пресликавање, а самим тим имамо да је Φ хомеоморфизам. ■

На Ξ можемо увести метрику $d(x, y)$ помоћу

$$d(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\min\{\, n \mid x_n \neq y_n \,\} + 1}, & \text{ако } x \neq y \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $x, y \in \Xi$. Уз овако уведену метрику, (Ξ, d) је комплетан простор. Нека је (x_n) Кошијев низ у (Ξ, d). Тада за бесконачне $m, n \in {}^*\mathbb{N}$, $d(x_m, x_n) \approx 0$. Даље, x_n је ограничен, јер за неки $k \in \mathbb{N}$ и све $m \in \mathbb{N}$, $m > k$, $d(x_k, x_m) < \dfrac{1}{3}$, тј. $\min\{\, k \mid x_k \neq x_m \,\} > 2$, па за $x_k = [a_1, a_2, \dots]$ важи $|x_k - x_m| < 1$, дакле x_k је ограничен, тј. x_H је коначан за бесконачан $H \in {}^*\mathbb{N}$, па постоји $r = \mathrm{st}(x_H)$. Ако је $[q_1(x_H), q_2(x_H), \dots]$ верижни развој за x_H, и ако је $[q_1, q_2, \dots]$ верижни развој за r, онда $d(x_H, r) \approx 0$, тј. $\min\{\, k \mid q_k \neq q_k(x_H) \,\}$ је бесконачан природан број. Дакле, r има бесконачан верижни развој, тј. r је ирационалан.

Приметимо да је Ξ такође и сепарабилан простор. Нека је S скуп свих низова облика $(q_1, q_2, \dots, q_k, t, t, \dots)$. Ако је $f \in \Xi$, онда $\mu(f)$ садржи елемент из ${}^*S$, то је, на пример, за $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, било које $h \in {}^*\Xi$ такво да је $h \restriction [0, H] = {}^*f \restriction [0, H]$ и $h(n) = 0$ за $n > H$.

Глава 10

Засићени модели и интернални скупови

Прве примене нестандардне анализе добијају се већ уз једноставну примену теореме компактности. Ипак, прави Лајбницов универзум је тзв. засићена структура. Засићене структуре с једне стране могу бити корисне у анализи моделско-теоретских верзија синтаксних појмова, као што је на пример елиминација квантора у теоријама првог реда. С једне стране, засићени модели имају многе особине универзалних објеката у категоријама што омогућава да се неке особине модела описују дијаграмима стрелица. Споменули бисмо још један аспект засићених структура. Наиме, коришћење ових структура омогућава да се и докази и конструкције које користе трансфинитну индукцију на одређен начин избегну. Другим речима, уместо да неки модел конструишемо у κ корака, где је κ неки бесконачан ординал, можемо се једноставно позвати на теореме егзистенције засићених модела.

С друге стране, засићених модела има мало; у датом кардиналном броју до на елементарну еквиваленцију постоји највише један засићен модел. Постојање оваквих модела обезбеђено је тек уз претпоставку неких скуповних хипотеза, као што је, на пример, генералисана континуум хипотеза (GCH) или постојање недостижних кардиналних бројева. Отуда имамо неколико генерализација овог појма за чије постојање није потребна нека додатна скуповна хипотеза. Ове генерализације углавном се своде на парцијалну засићеност модела, од којих је најважнија κ–засићеност, затим специјалне моделе и најзад рекурзивно засићене моделе.

Интерналне скупове можемо кратко дефинисати као дефинабилне подскупове засићеног модела. Због својих особина интернални скупови Лајбницовог универзума имају велику примену у Нестандардној анализи.

10.1 Засићени и парцијано засићени модели

Интуитивно, под засићеним моделима подразумевамо оне моделе који реализују све могуће типове (непротивуречне скупове формула). Овај појам увели су Морли[1)] и Вот 60-тих година 20. века, што је омогућило да се теорија модела великим делом објединии и поједностави. Кислер је увео појам κ–засићених модела, док су рекурзивно засићене моделе увели Барвајз[2)] и Шлипф[3)] 1976. године.

У дефиницији засићених структура кључну улогу има појам типа, о којем је већ било речи у поглављу 6.2. Убудуће симбол $\Sigma(x)$ користимо да означимо скуп формула који има једино промењљиву x као слободну промењљиву. Кажемо да је $\Sigma(x)$ задовољив у моделу $\mathfrak{A}$ ако постоји елемент $a \in A$ такав да је $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$ за све $\varphi(x) \in \Sigma(x)$.

Пример 10.1. 1° За $\Sigma(x) = \{1 < x, 1+1 < x, 1+1+1 < x, \ldots\}$, уређено поље $\mathbf{F}$ задовољава (реализује) тип $\Sigma(x)$ ако и само ако је $\mathbf{F}$ неархимедско поље. Модел $\mathfrak{M}$ Пеанове аритметике реализује тип $\Sigma(x)$ ако и само ако је $\mathfrak{M}$ нестандардни модел Пеанове аритметике, тј. $\mathfrak{M} \not\cong \mathbf{N}$.

2° Ако је $\Sigma(x) = \{p(x) \neq 0 \mid p \in \mathbf{Q}[x]\}$, $\mathbf{Q}$ је поље рационалних бројева, онда неко поље $\mathbf{F}$ реализује тип $\Sigma(x)$ ако и само ако $\mathbf{F}$ садржи трансцедентан елемент над $\mathbf{Q}$.

Нека је $\mathfrak{A}$ модел језика L, $X \subseteq A$ и нека је $\mathfrak{A}_X = (\mathfrak{A}, a)_{a \in X}$. Под типом модела подразумевамо сваки скуп формула $\Sigma(x)$ језика L_X који је коначно непротивуречан са теоријом $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}_X$. У следећој дефиницији задржавамо овако уведене ознаке.

Дефиниција 10.1. 1° Модел $\mathfrak{A}$ је засићен над $X \subseteq A$ ако је сваки тип $\Sigma(x)$ над $\mathfrak{A}_X$ реализован у моделу $\mathfrak{A}_X$.

[1)] Michael Darwin Morley (1930–)
[2)] Kenneth Jon Barwise (1942–2000)
[3)] John Stewart Schlipf

2° Модел $\mathfrak{A}$ је засићен ако је $\mathfrak{A}$ засићен над сваким $X \subseteq A,\ |X| < |A|$.

3° Модел $\mathfrak{A}$ је κ–засићен, κ је неки кардиналан број, ако је $\mathfrak{A}$ засићен над сваким $X \subseteq A,\ |X| < \kappa$.

Према претходној дефиницији, модел $\mathfrak{A}$ је засићен ако и само ако је $\mathfrak{A}$ $|A|$–засићен модел. Под пребројиво засићеним моделима подразумевамо ω–засићене моделе. Засићени модели могу се добити итерацијом аргумента компактности. Други важан извор ових модела даје конструкција ултрапроизвода. Ево примера ове друге врсте.

Теорема 10.1. *Нека су $\mathfrak{A}_i$, $i \in \mathbb{N}$, модели језика L и нека је $\mathcal{D}$ неглавни ултрафилтер над $\mathbb{N}$. Тада је $\mathfrak{A} = \prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$ ω_1–засићен модел.*

Доказ. Најпре приметимо да $\mathcal{D}$ садржи опадајући ланац скупова $J_0 \supseteq J_1 \supseteq \dots$ тако да је $\bigcap_n J_n = \emptyset$. Даље, за просту експанзију модела $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}, f_{1\mathcal{D}}, f_{2\mathcal{D}}, \dots)$ постоје просте експанзије $\mathfrak{A}'_i = (\mathfrak{A}_i, a_1, a_2, \dots)$ тако да је $\mathfrak{A}' = \prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}'_i$. Отуда, да бисмо проверили да ли је $\mathfrak{A}$ ω_1–засићен, без губљења општости, довољно је реализовати типове над $\mathfrak{A}$, тј. узимајући $X = \emptyset$.

Нека је $\Sigma(x) = \{\, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \}$ скуп формула над L таквих да је сваки коначан подскуп од $\Sigma(x)$ реализован у $\mathfrak{A}$. Даље, уведимо низ скупова

$$X_n = \{\, i \in J_n \,|\, \mathfrak{A}_i \models \exists x(\varphi_1(x) \wedge \cdots \wedge \varphi_n(x)) \,\}, \qquad n > 0,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Тада је $\bigcap_n X_n = \emptyset$ и X_n је опадајући низ скупова у $\mathcal{D}$, па за сваки $i \in \mathbb{N}$ постоји највећи n_i такав да је $i \in X_{n_i}$. Нека је $f \in \prod_i A_i$ функција таква да за $n_i > 0$ важи $\mathfrak{A}_i \models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n_i})[f(i)]$. Тада, ако је $i \in X_n$, онда $\mathfrak{A}_i \models \varphi_n[f(i)]$, па према Лошовој теореми следи $\mathfrak{A} \models \varphi_n[f_{\mathcal{D}}]$. Према томе, $f_{\mathcal{D}}$ реализује тип $\Sigma(x)$ у $\mathfrak{A}$. ■

Нека је $p(x)$ тип над моделом $\mathfrak{A}_X$, $X \subseteq A$. Како је $p(x)$ коначно задовољив, према теореми компактности следи да је $p(x)$ задовољив у неком моделу $\mathfrak{B}_X$, где је $\mathfrak{A}_X \prec \mathfrak{B}_X$.

Пример 10.2. Нека је $\mathfrak{A}$ алгебарски затворено поље. Тада је $\mathfrak{A}$ засићен модел ако и само ако је $\mathfrak{A}$ бесконачног степена трансцедентности над његовим простим пољем.

Напоменимо да је поље $\mathbf{F} \subseteq \mathfrak{A}$ просто поље ако је оно изоморфно коначном (Галуовом[4)]) пољу $\mathbf{Z}_p$ или пољу рационалних бројева. Поље $\mathfrak{A}$ је коначног трансцедентног степена над $\mathbf{F}$ ако постоји природан број n и $a_1, \ldots, a_n \in A$ тако да је сваки елемент $a \in A$ алгебарски над пољем рационалних израза $\mathbf{F}(a_1, \ldots, a_n)$. Поље $\mathfrak{A}$ је бесконачног трансцедентног степена над $\mathbf{F}$ ако оно није коначног.

Сада докажимо само тврђење. Овде ћемо користити чињеницу да *теорија алгебарски затворених поља допушта елиминацију квантора.* Доказ ове чињенице може се наћи, на пример, у [14].

Нека је $\mathfrak{A}$ алгебарски затворено поље бесконачног трансцедентног степена и нека је $p(x)$ тип над $\mathfrak{A}_X$, где је $X \subseteq A$. Тада је $p(x)$ реализован неким елементом b у неком елементарном проширењу $\mathfrak{B}$ модела $\mathfrak{A}$. Ако је b алгебарски елемент над X, онда је $b \in A$. Претпоставимо да је b трансцедентан над X и нека је $\mathfrak{C}$ најмање потпоље поља $\mathfrak{A}$ које садржи X. Изаберимо елемент $a \in A$ који је трансцедентан над X. Овакав елемент a постоји с обзиром на то да је $X \subseteq A$ и $|A|$ је једнак степену трансцедентности поља $\mathfrak{A}$. Нека је $\overline{\mathcal{C}(a)}$ алгебарско затворење поља $\mathcal{C}(a)$ (рационалних израза над $\mathfrak{C}$ и елементом a) у пољу $\mathfrak{A}$. Нека је $h\colon \overline{\mathfrak{C}(a)} \to \mathfrak{B}$ утапање тако да је $h \restriction C = \mathrm{id},\ h(a) = b$. С обзиром на то да теорија алгебарски затворених поља допушта елиминацију квантора, утапање h је елементарно, па елемент a реализује $p(x)$ у $\overline{\mathfrak{C}(a)}$, што значи да a реализује $p(x)$ у $\mathfrak{A}$ такође, с обзиром на то да је $\overline{\mathfrak{C}(a)} \prec \mathfrak{A}$.

Према овом примеру следи да је свако непребројиво алгебарски затворено поље засићено.

Користећи чињеницу да теорија линеарног густог уређења допушта елиминацију квантора, показује се да су линеарно уређени густи скупови засићени ако и само ако су они η_κ скупови. Прецизније о томе говори следећи пример.

Пример 10.3. За линеарно уређен густ скуп $\mathfrak{A} = (A, \leq)$ кажемо да је η_κ скуп ако за све $X, Y \subseteq A,\ |X \cup Y| < \aleph_\kappa,\ X < Y$ повлачи да постоји $a \in A,\ X < a < Y$. Тада је линеарно и густо уређење $\mathfrak{A}$ κ–засићен модел ако и само ако је $\mathfrak{A}$ η_k скуп.

Следеће теореме говоре о егзистенцији и јединости засићених структура.

---

4) Evariste Galois (1811–1832)

ТЕОРЕМА 10.2. *Ако су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ засићени модели истог језика и исте кардиналности и ако је $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, онда је $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Доказ. Нека је $|A| = \kappa$, $A = \{ a_\alpha \,|\, \alpha < \kappa \}$ и $B = \{ b_\alpha \,|\, \alpha < \kappa \}$. Дефинишимо низове $(c_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ и $(d_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ такозваним напред-назад аргументом тако да буде

$$(\mathfrak{A}, c_\alpha)_{\alpha<\lambda} \equiv (\mathfrak{B}, d_\alpha)_{\alpha<\lambda} \tag{1}$$

за све $\lambda < \kappa$. Приметимо да се (1) за $\lambda = 0$ своди на већ дати услов $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Даље ћемо разликовати два случаја, кад је λ паран и када је λ непаран ординал. Нека је c_λ први елемент у низу a_α који се разликује од свих c_α, $\alpha < \lambda$ (који се конструише у првих λ корака) и нека је

$$p(x) = \{ \varphi(x) \,|\, (\mathfrak{A}, c_\alpha)_{\alpha<\lambda} \models \varphi[c_\lambda] \}.$$

Тада је $p(x)$ тип над $\mathfrak{A}_X$, $X = \{ c_\alpha \,|\, \alpha < \lambda \}$. Нека је $q(x)$ тип добијен из $p(x)$ тако што се сваки c_α замењује симболом d_α за све $\alpha < \lambda$. Тада је $q(x)$ тип над $\mathfrak{B}_Y$, $Y = \{ d_\alpha \,|\, \alpha < \lambda \}$. Како је $\mathfrak{B}$ засићен модел, тип $q(x)$ је реализован у $\mathfrak{B}$ неким елементом d, па нека је $d_\lambda = d$. Тада

$$(\mathfrak{A}, c_\alpha)_{\alpha\leq\lambda} \equiv (\mathfrak{B}, d_\alpha)_{\alpha\leq\lambda}.$$

Нека је сада λ непаран ординал. Конструкцију изводимо исто као у случају када је λ паран, с тим да сада модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ узајамно мењају улоге.

Најзад можемо дефинисати пресликавање $h\colon A \to B$ узимајући да је $h\colon c_\alpha \mapsto d_\alpha$, $\alpha < \kappa$. Није тешко проверити да је h изоморфизам модела $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. ∎

Ако су $\mathfrak{A}_i$, $i \in \mathbb{N}$, бесконачни модели чија је кардиналност највише континуум, онда је за сваки неглаван ултрафилтер $\mathcal{D}$ над $\mathbb{N}$ ултрапроизвод $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$ моћи континуума. Отуда према Теореми 10.1. и Лошовој теореми (претпостављајући (GCH)) имамо следеће тврђење.

ПОСЛЕДИЦА 10.1. 1° *Нека су $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i$, $i \in \mathbb{N}$, бесконачни модели истог језика и $\mathcal{D}$ неглаван ултрафилтер над $\mathbb{N}$. Тада*

$$\prod\nolimits_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i \equiv \prod\nolimits_{\mathcal{D}} \mathfrak{B}_i \qquad \textit{повлачи} \qquad \prod\nolimits_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i \cong \prod\nolimits_{\mathcal{D}} \mathfrak{B}_i.$$

2° *Ако су $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ модели истог језика моћи највише континуума, $\mathcal{D}$ неглаван ултрафилтер над $\mathbb{N}$ и $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, онда $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D} \cong \mathfrak{B}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$.*

Према Примеру 10.2. такође имамо ову последицу.

Последица 10.2. *Нека су $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ алгебарски затворена поља исте карактеристике, исте кардиналности и бесконачног степена трансцедентности. Тада $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Слично тврђење уз GCH важи и за η_κ скупове, наиме да су свака два линеарно уређена η_κ скупа за исто κ међусобно изоморфна.

Теорема 10.3. *Нека је $\mathfrak{A}$ бесконачан модел језика L. Тада за сваки бесконачан кардиналан број κ постоји κ^+–засићен модел $\mathfrak{B}$, који је елементарно проширење модела $\mathfrak{A}$ и за који важи $|B| \leq |A|^\kappa$.*

Напоменимо да је κ^+ најмањи кардиналан број већи од κ.

Доказ. Најпре проширимо модел $\mathfrak{A}$ до модела $\mathfrak{A}_1$ који реализује сваки тип над $\mathfrak{A}_X$ за сваки $X \subseteq A$, $|X| < \kappa$. Такав модел $\mathfrak{A}_1$ постоји на основу Теореме компактности јер је теорија

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \cup \{\, p(c_p) \,|\, p(x) \text{ је тип над } \mathfrak{A}_X \text{ за неки } X \subseteq A,\ |X| < \kappa \,\}$$

коначно непротивуречна. Према Сколем-Левенхајмовој теореми можемо узети да је $\mathfrak{A}_1$ највише кардиналности $|A| + \|L_1\|$, где је

$$L_1 = L \cup \{\, c_p \,|\, p(x) \text{ је тип над } \mathfrak{A}_X \text{ за неки } X \subseteq A,\ |X| < \kappa \,\}.$$

Како је $\big|\{\, X \mid X \subseteq A, |X| \leq \kappa \,\}\big| \leq |A|^\kappa$, то можемо узети $|A_1| \leq |A|^\kappa$.

Нека је $\mathfrak{A}_\alpha$, $\alpha < \kappa^+$, елементаран ланац модела конструисан на следећи начин. Нека је $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_1$, док је $\mathfrak{A}_{\alpha+1}$ модел кардиналности не веће од $|A|^\kappa$ конструисан из $\mathfrak{A}_\alpha$ на исти начин како је конструисан $\mathfrak{A}_1$ из $\mathfrak{A}$. Ако је λ граничан ординал, онда је $\mathfrak{A}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathfrak{A}_\alpha$. Нека је $\mathfrak{B} = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} \mathfrak{A}_\alpha$. Користећи регуларност кардиналног броја κ^+ (то значи да ако је $X \subseteq B$ и $|X| \leq \kappa$, онда је за неки $\alpha \leq \kappa^+$, $X \subseteq A_\alpha$) није тешко видети да модел $\mathfrak{B}$ задовољава услове теореме. ■

10.2 Универзалност засићених модела

У овом одељку анализираћемо неке особине универзалности засићених модела. Прво својство односи се на дијаграмска својства засићених модела.

ТЕОРЕМА 10.4. *Нека је κ непребројив кардинал. Модел $\mathfrak{A}$ језика L је κ–засићен ако и само ако сваки дијаграм облика*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} & \\
\mathfrak{B} \arrow[u, "\prec"] \arrow[r, "\prec"'] & \mathfrak{C} \arrow[ul]
\end{tikzcd} \qquad |B| < \kappa, \;\; |C| \leq \kappa$$

Слика 10.1.

има комплетирање, где су $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ модели језика L.

Доказ. Претпоставимо најпре да $\mathfrak{A}$ има наведену особину дијаграма са комплетирањем α. Нека је p тип над неким $\mathfrak{B}$ где је $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, $|B| < \kappa$. Егзистенцију модела $\mathfrak{B}$ обезбеђује Сколем–Левенхајмова теорема. Тип p је реализован у неком моделу $\mathfrak{C}$, где је $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$, неким елементом $c \in C$. За c можемо узети τb где је b елемент који реализује тип p у $\mathfrak{B}$ и $\tau : B \to C$ је елементарно утапање. Тада, тип p је реализован у $\mathfrak{A}$ елементом αc.

Претпоставимо сада да је модел $\mathfrak{A}$ κ–засићен. Без губљења општости можемо претпоставити да имамо ситуацију као на доњем дијаграму.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} & \\
\mathfrak{B} \arrow[u, "\prec"] \arrow[r, "\prec"'] & \mathfrak{C} \arrow[ul, dashed, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Слика 10.2.

Нека је $C \setminus B = \{\, c_\delta \mid \delta < \kappa \,\}$. Функцију α дефинишемо на следећи начин, користећи напред-назад аргумент у једном смеру. Изаберимо $\alpha \restriction B = i_B$. Вредност αc_δ дефинишемо индукцијом. Претпоставимо да је $(\mathfrak{C}, b, c_\gamma)_{b \in B, \gamma < \delta} \equiv (\mathfrak{A}, b, \alpha c_\gamma)_{b \in B, \gamma < \delta}$. Нека је p тип елемента c_δ у $(\mathfrak{C}, b, c_\gamma)_{b \in B, \gamma < \delta}$. Тада је p такође и тип над моделом $(\mathfrak{A}, b, \alpha c_\gamma)_{b \in B, \gamma < \delta}$, па како је $\mathfrak{A}$ κ–засићен модел, следи да $\mathfrak{A}$ реализује тип p неким елементом a. Тада бирамо $\alpha c_\delta = a$. ■

Модел $\mathfrak{A}$ је *хомоген* уколико има ово дијаграмско својство:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} & \\
\mathfrak{B} \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"'] & \mathfrak{A} \arrow[ul, "\gamma"', "\cong"]
\end{tikzcd}
\qquad |B| < |A|,$$

Слика 10.3.

тј. за сваки модел $\mathfrak{B}$ истог језика као и модел $\mathfrak{A}$ и елементарна утапања $\alpha, \beta \colon \mathfrak{B} \overset{\prec}{\longrightarrow} \mathfrak{A}$ постоји аутоморфизам $\gamma \colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ такав да је $\gamma \circ \alpha = \beta$. Према последњој теореми одмах имамо ову последицу.

ПОСЛЕДИЦА 10.3. *Сваки засићен модел је хомоīен.*

Модел $\mathfrak{A}$ је *универзалан* за неку класу модела $\mathcal{M}$ (у истом језику) уколико за сваки модел $\mathfrak{B} \in \mathcal{M}$ кардиналности не веће од $|A|$ постоји утапање $\alpha \colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$. Уколико је утапање α елементарно, онда кажемо да је $\mathfrak{A}$ *елеменīарно универзалан* модел.

ПОСЛЕДИЦА 10.4. *Модел* $\mathfrak{A}$ *је засићен ако и само ако је хомоīен и елеменīарно универзалан.*

Доказ. $(\to)$ Претпоставимо да је $\mathfrak{A}$ засићен модел. Према Последици 10.3. онда је $\mathfrak{A}$ хомоген модел. Докажимо сада да је $\mathfrak{A}$ елементарно универзалан модел за класу модела елементарно еквивалентних моделу $\mathfrak{A}$. Доказ се изводи на сличан начин као у Теореми 10.4. наиме коришћењем једне „половине” напред-назад аргумента конструише се низ парцијалних изоморфизама модела $\mathfrak{B}$ у модел $\mathfrak{A}$, чија унија даје утапање модела $\mathfrak{B}$ у модел $\mathfrak{A}$.
$(\leftarrow)$ Ако је $\mathfrak{A}$ хомоген и елементарно универзалан модел, онда на доњем дијаграму елементарно утапање β постоји јер је $\mathfrak{A}$ универзалан модел. С друге стране, аутоморфизам α постоји јер је $\mathfrak{A}$ хомоген модел.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} & & \\
\mathfrak{B} \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\prec"] & \mathfrak{C} \arrow[r, "\beta"] & \mathfrak{A} \arrow[ull, dashed, "\alpha"', "\cong"]
\end{tikzcd}
\qquad \begin{array}{l} \mathfrak{B} \text{ је произвољан модел} \\ |B| < |A|, \end{array}$$

Слика 10.4.

Према томе, у овом дијаграму модел $\mathfrak{A}$ има својство о којем говори Теорема 10.4. дакле $\mathfrak{A}$ је засићен модел. ■

Модел $\mathfrak{B}$ је *коначно генерисан* ако постоји коначан $Y \subseteq B$ такав да је $\mathfrak{B}$ најмања подструктура модела $\mathfrak{B}$ која садржи скуп Y. За ω–засићене моделе имамо ову варијанту Теореме 10.4.

ТЕОРЕМА 10.5. *Модел $\mathfrak{A}$ је ω–засићен ако и само ако сваки дијаграм облика*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} & & |C| \leq \omega \\
& & \\
\mathfrak{B} \arrow[uu, "\prec"] \arrow[rr, "\prec"'] & & \mathfrak{C} \arrow[uull, dashed, "\prec"']
\end{tikzcd}$$

Слика 10.5.

има приказано комплетирање, где је $\mathfrak{B}$ коначно генерисан модел.

Следећа теорема описује кључно својство засићених модела које ћемо често користити у случају нестандардне структуре реалних бројева.

ТЕОРЕМА 10.6. *Нека је $\mathfrak{C}$ засићен модел регуларне кардиналности κ, $|L_{\mathfrak{C}}| \leq \kappa$. Тада за било коју теорију $\mathrm{Th}(\mathfrak{C}) \subseteq T$, $|L(T)| \leq \kappa$ која има бесконачан модел постоји експанзија $\mathfrak{C}^\sharp$ модела $\mathfrak{C}$ до модела теорије T.*

Доказ. Нека је κ регуларан кардиналан број и нека је $\mathfrak{A}$ κ^+–засићен модел теорије T, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \restriction L_{\mathfrak{C}}$. Дакле, $\mathfrak{B}$ је засићен модел као редукт засићеног модела. Конструишимо низове модела

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{A}_0 & \prec & \mathfrak{A}_1 \prec \cdots \prec \mathfrak{A}_\xi \prec \cdots \prec \mathfrak{A}, \qquad \xi < \kappa \\
\mathfrak{B}_0 & \prec & \mathfrak{B}_1 \prec \cdots \prec \mathfrak{B}_\xi \prec \cdots \prec \mathfrak{B},
\end{array}$$

такве да је $\mathfrak{A}_\xi \restriction L_{\mathfrak{C}} = \mathfrak{B}_\xi$, $|A_\xi| = |B_\xi| = \kappa$, $\mathfrak{B}_\xi \subseteq \mathfrak{A}_{\xi+1}$, за све $\xi < \kappa$, и $\mathfrak{B}_\xi$ су засићени модели.

За граничан ординал α, $\mathfrak{A}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{A}_\xi$, $\mathfrak{B}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{B}_\xi$.

Најзад изаберимо модел $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}$ произвољно.

Претпоставимо да је модел $\mathfrak{A}_\xi$ конструисан. Тада је $\mathfrak{A}_\xi \restriction L_{\mathfrak{C}}$ модел теорије $\mathrm{Th}(\mathfrak{C})$, па према универзалности модела $\mathfrak{C}$, модел $\mathfrak{A}_\xi \restriction L_{\mathfrak{C}}$ се може елементарно утопити у $\mathfrak{C}$. Помоћу дијаграмског својства засићених модела, имамо комплетирање следећег дијаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B} & \\
\mathfrak{A}_\xi / L_{\mathfrak{C}} \arrow[u] \arrow[r, "\prec"] & \mathfrak{C} \arrow[ul, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{r}
|\mathfrak{A}_\xi| = \kappa \\
|\mathfrak{C}| = \kappa
\end{array}$$

Слика 10.6.

где је $\mathfrak{B}$ κ^+-засићен.

Нека је $\mathfrak{B}_\xi = f(\mathfrak{C})$. Из $\mathfrak{B}_\xi \cong \mathfrak{C}$ следи да је $\mathfrak{B}_\xi$ засићен модел. Претпоставимо, сада, да је модел $\mathfrak{B}_\xi$ већ конструисан. Модел $\mathfrak{A}_{\xi+1}$ такав да је $\mathfrak{A}_\xi \prec \mathfrak{A}_{\xi+1}$, $\mathfrak{B}_\xi \subseteq \mathfrak{A}_{\xi+1}$ и $|\mathfrak{A}_{\xi+1}| = \kappa$ постоји из Сколем-Левенхајмове теореме. Тада $\mathfrak{A}_{\xi+1} \restriction L_{\mathfrak{C}} \prec \mathfrak{B}$, па $\mathfrak{B}_\xi \prec \mathfrak{A}_{\xi+1} \restriction L_{\mathfrak{C}}$, тј. $\mathfrak{B}_\xi \prec \mathfrak{A}_{\xi+1}$. Нека је $\mathfrak{D} = \bigcup_{\xi<\kappa} \mathfrak{A}_\xi$. Тада је $\mathfrak{D} \restriction L_{\mathfrak{C}}$ засићен модел теорије $\mathrm{Th}(\mathfrak{C})$, па $\mathfrak{D} \restriction L_{\mathfrak{C}} \cong \mathfrak{C}$, и $\mathfrak{D}$ је модел теорије T.

Овом приликом искористили смо регуларност кардинала κ: ако је $X \subseteq D$ и $|X| < \kappa$, тада за неки $\xi < \kappa$ важи $X \subseteq B_\xi$. ■

10.3 Засићена структура хиперреалних бројева

Циљ овог одељка је да настави студирање неких посебних модела хиперреалних бројева насталих помоћу добро познатих конструкција у теорији модела. Позабавићемо се пре свега засићеном структуром хиперреалних бројева $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ чија егзистенција је загарантована ако претпоставимо да важи генералисана континум хипотеза, тј. $2^\kappa = \kappa^+$.

Слично као у $\mathbf{R}$ и у ${}^*\mathbf{R}$ можемо да посматрамо Дедекиндове пресеке.

ДЕФИНИЦИЈА 10.2. 1° Пар (X, Y) (где је $X \subseteq {}^*\mathbb{R}$ и $Y \subseteq {}^*\mathbb{R}$) је *Дедекиндов пресек* ако $X \cap Y = \emptyset$, $X \cup Y = {}^*\mathbb{R}$ и $X < Y$, тј. $(\forall x \in X)\ (\forall y \in Y)\ x < y$.

2° Дедекиндов пресек је *рупа* ако $\sup X$ $(\inf Y)$ не постоји.

3° Пресек (X, Y) је *регуларан* ако за свако $a > 0$, $X + a \neq X$.

Следећи резултат може бити уопштен на густо уређене Абелове групе и показује драстичну некомплетност у овом случају.

ТЕОРЕМА 10.7. *Нека је* ${}^*\mathbf{R} = ({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *засићено поље хиперреалних бројева моћи* κ. *Тада* ${}^*\mathbf{R}$ *има* 2^κ *регуларних рупа.*

Доказ. Како је ${}^*\mathbf{R}$ засићена структура, то је коиницијалност скупа ${}^*\mathbb{R}_+$ позитивних хиперреалних бројева једнака κ (тј. најмањи, у смислу кардиналности, монотоно опадајући низ који тежи нули је моћи κ). Нека је $(r_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ енумерација од ${}^*\mathbb{R}$ и нека је $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ стриктно опадајући коиницијални низ у ${}^*\mathbb{R}_+$.

Доказ који ћемо сада дати је „семантичког" карактера, помоћу система отворених интервала. Напомињемо да може и другачије, „синтактички" помоћу типова, али разлика је у суштини небитна.

Индукцијом по $\alpha < \kappa$ дефинисаћемо скуп $\{\,]x_t, y_t[\mid t \in {}^\alpha 2 \,\}$ отворених интервала од ${}^*\mathbb{R}$, таквих да задовољавају следеће особине:

(1) $]x_t, y_t[\neq \emptyset$ за свако $t \in {}^\alpha 2$,

(2) $y_t - x_t < \varepsilon_t$ за свако $t \in {}^\alpha 2$,

(3) $r_\alpha \notin]x_t, y_t[$ за свако $t \in {}^\alpha 2$,

(4) $]x_t, y_t[\cap]x_s, y_s[= \emptyset$ за све различите елементе t и s у ${}^\alpha 2$,

(5) за свако $\beta < \alpha$, за свако $t \in {}^\beta 2$ и за свако $s \in {}^\alpha 2$, ако $t \subseteq s$, тада $]x_t, y_t[\supseteq]x_s, y_s[$.

[Случај 1] $\alpha = 0$.

$]x_0, y_0[$ је произвољан отворен интервал који не садржи r_0 и такав да $y_0 - x_0 < \varepsilon_0$.

[Случај 2] $\alpha = \beta + 1$, за неко β.

Претпоставимо да је $\{\,]x_t, y_t[\mid t \in {}^\beta 2 \,\}$ већ дефинисан скуп који задовољава особине од (1) до (5). За сваки $t \in {}^\beta 2$ изаберимо a_t, a'_t, b_t и b'_t у $]x_t, y_t[$ тако да

$$\begin{array}{rcl}]a_t, b_t[& \neq & \emptyset, \quad]a'_t, b'_t[\neq \emptyset, \quad]a_t, b_t[\cap]a'_t, b'_t[= \emptyset, \\ b_t - a_t & < & \varepsilon_t, \quad b'_t - a'_t < \varepsilon_t \quad \text{и} \quad r_\alpha \notin]a_t, b_t[\cup]a'_t, b'_t[\,. \end{array}$$

Ставимо

$$\begin{array}{rcl} x_{t_0} & = & a_t, \qquad x_{t_1} = a'_t; \\ y_{t_0} & = & b_t, \qquad y_{t_1} = b'_t. \end{array}$$

Тада $\{\,]x_{t_i}, y_{t_i}[\mid t \in {}^\beta 2\,,\ i = 0, 1 \,\}$ задовољава услове од (1) до (5).

[Случај 3] α је граничан ординал.

Претпоставимо да је за свако $\beta < \alpha$ скуп $\{\,]x_t, y_t[\; | \, t \in {}^{\beta}2 \,\}$ већ дефинисан и да задовољава услове од (1) до (5). Нека $s \in {}^{\alpha}2$. За свако $\beta < \alpha$ ставимо

$$x_\beta = x_{s\restriction\beta} \qquad \text{и} \qquad y_\beta = y_{s\restriction\beta}.$$

Како је $\big( ]x_\beta, y_\beta[\big)_{\beta<\alpha}$ низ непразних отворених интервала који монотоно опада (тј. $]x_\beta, y_\beta[\subseteq]x_\gamma, y_\gamma[$ за $\gamma < \beta < \alpha$), то због засићености ${}^*\mathbb{R}$, скуп $\bigcap_{\beta<\alpha}]x_\beta, y_\beta[$ садржи елементе x и y тако да је $x < y$. Будући да $]x, y[\subseteq \bigcap_{\beta<\alpha}]x_\beta, y_\beta[$, можемо изабрати x_s и y_s у $]x, y[$ тако да

$$x_s < y_s < x_s + \varepsilon_\alpha \qquad \text{и} \qquad r_\alpha \notin]x_s, y_s[.$$

Тада $\{\,]x_s, y_s[\, | \, s \in {}^{\alpha}2 \,\}$ задовољава услове од (1) до (5).

Унирајмо, на крају, ове скупове по α. Дакле, закључујемо да скуп $\{\,]x_t, y_t[\, | \, t \in \bigcup_{\alpha<\kappa} {}^{\alpha}2 \,\}$ такође задовољава услове од (1) до (5).

Дефинишимо за свако $h \in {}^{\kappa}2$, подскупове X_h и Y_h од ${}^*\mathbb{R}$ са:

$$\begin{aligned} X_h &= \{\, x \in {}^*\mathbb{R} \,|\, (\exists \alpha < \kappa)\; x < x_{h\restriction\alpha} \,\}, \\ Y_h &= \{\, y \in {}^*\mathbb{R} \,|\, (\exists \alpha < \kappa)\; y_{h\restriction\alpha} < y \,\}. \end{aligned}$$

На основу (3) и (5), (X_h, Y_h) је Дедекиндов пресек у ${}^*\mathbb{R}$. На основу (4), ако су f и g различити елементи у ${}^{\kappa}2$, тада је $(X_f, Y_f) \neq (X_g, Y_g)$. Потребно је још само показати да је сваки пресек (X_f, Y_f) регуларан. Нека је $x > 0$. Како је низ $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ коиницијалан, то постоји $\alpha < \kappa$ тако да је $\varepsilon_\alpha \leq x$. На основу (2)

$$y_{f\restriction\alpha} < x_{f\restriction\alpha} + \varepsilon_\alpha \leq x_{f\restriction\alpha} + x.$$

Будући да је $y_{f\restriction\alpha}$ у Y_f, то је и $x_{f\restriction\alpha} + x$ у Y_f. Одатле добијамо да важи $X_f + x \neq X_f$. ■

Сада желимо да се позабавимо једном равномерном топологијом на ${}^*\mathbb{R}$. У том циљу подсетићемо се дефиниције равномерне топологије на X. Нека су U и V релације на X. Тада са Δ, U^{-1} и $U \circ V$ означавамо редом дијагоналу, инверзну релацију и производ релација.

Дефиниција 10.3. Нека је $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{P}(X \times X)$ и нека:

(а) сваки елемент скупа $\mathcal{U}$ садржи дијагоналу Δ скупа X,

(б) ако $U \in \mathcal{U}$, тада $V \circ V \subseteq U$ за неко $V \in \mathcal{U}$, (в) ако $U, V \in \mathcal{U}$, тада $U \cap V \in \mathcal{U}$,

(г) ако $U \in \mathcal{U}$ и $U \subseteq V \subseteq X \times X$, тада $V \in \mathcal{U}$.

Тада пар $(X,\mathcal{U})$ зовемо униформан простор. Подскуп $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ је база униформног простора ако сваки елемент из $\mathcal{U}$ садржи неки елемент из $\mathcal{B}$.

Да бисмо дефинисали комплетност униформног простора (видети [68]) користимо појам филтера уведен у другој глави. Кажемо да филтер $\mathcal{F}$ *конвергира у тачки* x тополошког простора X када филтер $\mathcal{F}$ садржи све околине тачке x. Кажемо да је филтер $\mathcal{F}$ на X у односу на униформан простор $(X,\mathcal{U})$ *Кошијев* ако за свако $U \in \mathcal{U}$ постоји $A \in \mathcal{F}$ тако да је $A \times A \subseteq U$.

Нека је $(X,\mathcal{U})$ униформан простор. Топологија $\mathcal{T}$ која одговара униформном простору $(X,\mathcal{U})$ (или тзв. равномерна топологија) представља скуп свих $T \subseteq X$, таквих да за свако $x \in T$ постоји $U \in \mathcal{U}$ тако да $\{\, y \mid (x,y) \in U \,\} \subseteq T$.

Дефиниција 10.4. Униформан простор $(X,\mathcal{U})$ је комплетан ако и само ако сваки Кошијев филтер конвергира у равномерној топологији $\mathcal{T}$.

За сваки $r \in {}^*\mathbb{R}_+$ дефинишимо $E(r)$ са

$$E(r) = \big\{\, (s,t) \in {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R} \mid |s-t| < r \,\big\}.$$

Нека је даље $L = {}^*\mathbb{R}_+ \setminus \gamma(0)$, где је, подсетимо се, $\gamma(0)$ скуп коначних елемената у ${}^*\mathbb{R}$, и нека је $\mathcal{E}(L) = \{\, E(r) \mid r \in L \,\}$. Читаоцу препуштамо да покаже да је $\mathcal{E}(L)$ база неке равномерне топологије на ${}^*\mathbb{R}$. Одговарајући униформни простор означимо са $({}^*\mathbb{R}, \mathcal{E}(L))$. Како је $\gamma(0)$ конвексна подгрупа од ${}^*\mathbf{R}$, то ${}^*\mathbb{R}/\gamma(0)$ је уређена група.

Лема 10.1. *Пар* $({}^*\mathbb{R}, \mathcal{E}(L))$ *је комплетан униформан простор ако и само ако* ${}^*\mathbb{R}/\gamma(0)$ *нема регуларних рупа.*

Доказ. $(\rightarrow)$ Претпоставимо да ${}^*\mathbb{R}/\gamma(0)$ има регуларних рупа и нека је (X,Y) једна од њих (и $X > 0$). Уочимо филтер $\mathcal{F}$ чија је база $\big\{\,]x_\alpha, y_\beta[\;\mid x_\alpha \in X,\; y_\beta \in Y \,\big\}$. Овај филтер је Кошијев због услова регуларности, тј. ако је

$$E' = \left\{\, t \;\middle|\; \left| t - \frac{y_\beta + x_\alpha}{2} \right| < \frac{y_\beta - x_\alpha}{2} \,\right\},$$

тада $E' \circ E' \subseteq \,]x_\alpha, y_\beta[\,$. Он очигледно не конвергира, јер би у супротном постојао $\sup X$, па по претходној дефиницији униформан простор $({}^*\mathbb{R}, \mathcal{E}(L))$ није комплетан.

($\leftarrow$) Претпоставимо сада да $({}^*\mathbb{R}, \mathcal{E}(L))$ није комплетан. То значи да постоји Кошијев филтер $\mathcal{F}$ који није садржан у систему околина неке тачке. Скуп $X = \{\, x \mid (\exists Y \in \mathcal{F})\ x \leq \inf Y \,\}$ одређује регуларан пресек који мора бити рупа (у супротном, $\mathcal{F}$ би конвергирао према $\sup X$). ■

Следећа последица непосредно следи из претходне леме и Теореме 10.7.

Последица 10.5. *Ако је* ${}^*\mathbf{R}$ *засићено поље, тада простор* $({}^*\mathbb{R}, \mathcal{E}(L))$ *није комплетан.*

10.4 Генералисана архимедска поља

Видели смо у четвртој глави да хиперреална поља нису архимедска. Међутим, циљ овог одељка је да покаже да она могу да буду архимедска у једном општијем смислу који ћемо непосредно сада да дефинишемо.

Нека је $\mathbf{F} = (F, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ линеарно уређено поље и нека $F^+ = \{\, x \in F \mid x > 0 \,\}$. Кажемо да је скуп T *позитиван* ако $T \subseteq F^+$. Такође, кажемо да је скуп T *сепариран реда* a ако је $a > 0$ и $|x - z| > a$ кад год $x, z \in T$. Кажемо да је скуп T *сепариран* ако постоји a тако да је T сепариран реда a.

Лако се види да је поље $\mathbf{F}$ архимедско ако и само ако постоји бесконачан позитивно сепариран подскуп од F и сваки ограничен позитивно сепариран подскуп је коначан.

Дефиниција 10.5. Нека је κ бесконачан кардиналан број. Кажемо да је поље $\mathbf{F}$ κ-архимедско ако

- F има позитиван сепарирајући подскуп моћи κ,
- не постоји позитиван сепарирајући подскуп од F такав да је кардиналности κ и ограничен.

Очигледно да је на основу ове дефиниције поље $\mathbf{F}$ архимедско ако и само ако је $\aleph_0$-архимедско.

Позабавимо се конструкцијом примера κ-архимедских поља. Конструкција коју наводимо припада Сикорском[5]. Основна идеја лежи у разлагању ординала по основи ω и коришћењу операција Хесенберга[6]. Наиме, ординал α може на јединствен начин да буде написан као $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\beta_m} \cdot n_m$, где је $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_m$, m је коначан, а $n_1, \ldots, n_m$ су позитивни природни бројеви (видети [74]). Притом су $+$ и $\cdot$ уобичајено сабирање и множење ординала.

Хесенбергове операције сабирања $(+)$ и множења $(\,\cdot\,)$ се дефинишу редом као полиномно сабирање и множење. Тако, ако је $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\beta_m} \cdot n_m$ и $\gamma = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_m} \cdot k_m$ (где смо допустили, ако је то потребно, развој са степенима чији су коефицијенти нула), тада:

$$\alpha\,(+)\,\gamma = \omega^{\beta_1} \cdot (n_1 + k_1) + \cdots + \omega^{\beta_m} \cdot (n_m + k_m),$$

$$\alpha\,(\,\cdot\,)\,\gamma = \omega^{\beta_1+\beta_1} \cdot n_1 k_1 + \omega^{\beta_1+\beta_2} \cdot (n_1 k_2 + n_2 k_1) + \cdots + \omega^{\beta_m+\beta_m} \cdot n_m k_m.$$

Решавајући Задатак 113. примећујемо прво да се операције $(+)$ и $(\,\cdot\,)$ понашају битно другачије (можемо рећи боље) него уобичајено сабирање и множење ординала, и друго да је добијена структура слична структури природних бројева. Стога, ако схватимо κ као скуп ординала мањих од κ, нека је $\mathbf{N}_\kappa = (\kappa, (+), (\,\cdot\,), 0, 1, \leq)$ и $\mathbf{Z}_\kappa$ прстен разлика над $\mathbb{N}_\kappa$ који добијамо слично као код преласка са $\mathbf{N}$ на $\mathbf{Z}$ (видети [97]). Нека је такође $\mathbf{Q}_\kappa$ поље које добијамо слично као код преласка са $\mathbf{Z}$ на $\mathbf{Q}$ и нека је $\mathbf{R}_\kappa$ његово реално затворење.

У случају да је кардинал κ регуларан, свако κ-архимедско поље има кофиналност κ јер ако би имало већу кофиналност, онда би имали ограничен позитивно сепарирајући подскуп моћи κ. Такође се лако показује (за регуларан κ) да је $\mathbf{R}_\kappa$ κ-архимедско поље.

Ако је $\mathbf{F}$ архимедско поље кардиналности λ, тада је $\aleph_0 \leq \lambda \leq 2^{\aleph_0}$. На основу Тарски-Сколем-Левенхајмове теореме, лако се доказује и обрат. Ово може да се уопшти тако да ако је $\mathbf{F}$ κ-архимедско поље, тада је $\kappa \leq \operatorname{Card} F \leq 2^\kappa$.

Кажемо да λ-низ $(x_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ елемената из F *конвергира према* $y \in F$ ако сваки отворени интервал $]a, b[$ који садржи y, садржи и x_α за све довољно велике $\alpha < \lambda$. Низ $(x_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ је λ-*Кошијев низ* ако за свако $\varepsilon \in F^+$, постоји $\beta < \lambda$ тако да је $|x_\gamma - x_\delta| < \varepsilon$ за све $\beta < \gamma, \delta < \lambda$. Кажемо да је поље $\mathbf{F}$ κ-*комплетно* ако је κ кофиналност од F и ако сваки κ-Кошијев низ из F конвергира.

[5] Roman Sikorski (1920–1983)

[6] Werner Karl Heisenberg (1901–1976)

Поље $\mathbf{F}$ је *κ-Ремзијево* ако је његова кофиналност κ и ако сваки подскуп од F моћи κ садржи стриктно монотон κ-низ.

Поље $\mathbf{F}$ има *λ-Болцано-Вајерштрасово својство* (или представља *λ-Болцано-Вајерштрасово поље*) ако има кофиналност λ и ако сваки ограничени λ-низ елемената из F има конвергентан λ-подниз.

Низ $(x_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ елемената из F је *тотално ограничен* ако за свако $\varepsilon \in F^+$, постоји $\alpha < \lambda$ тако да за свако $\beta < \lambda$ постоји $\gamma < \alpha$ са особином $|x_\beta - x_\gamma| < \varepsilon$. Кажемо да $\mathbf{F}$ задовољава *слабо* λ-Болцано-Вајерштрасово својство ($\mathbf{F}$ је *слабо* λ-Болцано-Вајерштрасово поље) ако је кофиналности λ и ако сваки тотално ограничен λ-низ елемената из F има конвергентан λ-подниз. Сикорски је показао да за регуларно $\kappa > \omega$ поља $\mathbf{Q}_\kappa$ и $\mathbf{R}_\kappa$ су κ-Болцано-Вајерштрасова поља (краће, $BW(\kappa)$).

Поље $\mathbf{F}$ је *Скотовски комплетно* ако нема регуларних рупа.

Сада ћемо испитати неке од релација међу овако дефинисаним појмовима.

ТЕОРЕМА 10.8. *Ако је $\mathbf{F}$ $BW(\kappa)$ поље, тада је поље $\mathbf{F}$ и κ-архимедско.*

Доказ. Како је κ кофиналност од $\mathbf{F}$, то је κ регуларан. На основу Задатка 115. поље $\mathbf{F}$ садржи копију од $\mathbf{Q}_\kappa$, па према томе и позитивно сепарирани подскуп кардиналности κ. Ако $\mathbf{F}$ није κ-архимедско, онда садржи ограничен позитивно сепариран подскуп A кардиналности κ. Супротно услову $BW(\kappa)$ скуп A не би имао граничну вредност. ■

ТЕОРЕМА 10.9. *Ако је $\mathbf{F}$ слабо λ-Болцано-Вајерштрасово поље, тада је $\mathbf{F}$ Скотовски комплетно.*

Доказ. Нека је (X, Y) регуларан пресек и нека је $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ низ позитивних елемената који тежи нули. Нека је $(x_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ низ из X такав да $x_\alpha + \varepsilon_\alpha \notin X$. Лако се види да је $(x_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ тотално ограничен, па садржи конвергентан λ-подниз чија је граница супремум од X. ■

ТЕОРЕМА 10.10. *Уређено поље $\mathbf{F}$ је $BW(\kappa)$ ако и само ако је κ-архимедско, κ-комплетно и κ-Ремзијево.*

НАПОМЕНА. На основу Задатка 116. κ-комплетност у теореми можемо да заменимо са Скотовском комплетношћу.

Доказ. Доказаћемо теорему само у једном правцу. Гломазнији део препуштамо читаоцу или да докаже сам или да погледа доказ у раду [18].

Претпоставимо да је $\mathbf{F}$ κ-архимедско, κ-комплетно и κ-Ремзијево поље. Нека је $K \subseteq F$ ограничен и моћи κ. Како је $\mathbf{F}$ κ-Ремзијево, то K садржи стриктно монотон (рецимо растући) низ $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$. Показаћемо сада да из чињенице да је $\mathbf{F}$ κ-архимедско следи да је низ $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ κ-Кошијев.

Претпоставимо да је $b < a_\alpha < c$ за свако $\alpha < \kappa$ и нека је S максималан сепарирани подскуп од $]b, c[$ реда $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Поље $\mathbf{F}$ је κ-архимедско па $|S| < \kappa$. Нека је $S_x = \left\{ \alpha \in \kappa \,\middle|\, |a_\alpha - x| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \right\}$ за свако $x \in S$. Пошто је S максималан, $\kappa = \bigcup_{x \in S} S_x$. Како је κ регуларан, неки од S_{x_0} је кардиналности κ и према томе кофиналан са K. Нека је μ најмањи ординал у S_{x_0}. Тада за сваки ординал $\beta \geq \mu$ постоји $\gamma \in S_{x_0}$ тако да је $\gamma > \beta$. Због монотоности имамо $a_\mu \leq a_\beta < a_\gamma$, а због дефиниције скупа S_{x_0}, $|a_\mu - x_0| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|a_\gamma - x_0| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, па отуда $|a_\beta - x_0| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отуда за произвољне $\alpha, \beta \geq \mu$ важи $|a_\alpha - a_\beta| \leq |a_\alpha - x_0| + |a_\beta - x_0| \leq \varepsilon$, па је $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ κ-Кошијев низ. Будући да је $\mathbf{F}$ κ-комплетно поље, низ $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ конвергира и K има тачку нагомилавања. ■

На крају, наводимо теорему која даје једну везу између $BW(\lambda)$ и κ-засићености (видети [67]).

Теорема 10.11. *Нека су κ и λ непребројиви регуларни кардинали, $\kappa < \lambda$ и $\beta^\alpha < \lambda$, кад год је $\alpha < \kappa$ и $\beta < \lambda$. Тада постоји κ-засићен нестандардан универзум у коме хиперреални бројеви имају $BW(\lambda)$ својство.*

Глава 11

Заснивање нестандардне математике

У највећем делу математике (изузев углавном у метаматематици, која је такође математика) је уобичајено да се пође од некаквог непразног скупа X који је снабдевен неким операцијама и релацијама. Такође, често се на X уочава и фамилија његових подскупова, фамилија функција из X у $\mathbb{R}$, и сл. Најпре ће бити изложен начин како да све ове објекте сместимо у такозвану суперструктуру, односно у фрагмент теорије скупова, прецизније скуп снабдевен релацијом припадања $\in$, а који представља свет у коме проучавамо жељени део математике. Остали делови ове главе садрже конструкцију нестандардног универзума ${}^*V(S)$, као и још једну везу између теорије модела и нестандардне анализе.

11.1 Суперструктура и нестандардни универзум

Полазимо од такозваног скупа праелемената (или атома) $S \neq \emptyset$ тако да елементи од S нису скупови. Претпоставља се да S садржи скуп $\mathbb{R}$ реалних бројева јер је уобичајено да се математичке теорије изграђују у вези са реалним бројевима. Ако је у питању такозвана реална анализа (па чак и комплексна) довољно је да се узме $S = \mathbb{R}$.

Суперструктуру $V(S)$ изграђујемо индукцијом

$$V_0(S) = S, \qquad V_{n+1}(S) = V_n(S) \cup \mathbf{P}\big(V_n(S)\big), \qquad V(S) = \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} V_n(S).$$

Да видимо сада како можемо да сместимо све жељене објекте над

S у $V(S)$. Лако се види да ако $x, y \in V(S)$, тада $\{x, y\} \in V(S)$, па тиме и $(x, y) \in V(S)$ због $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Одатле даље свака функција f са доменом и рангом у $V(S)$ (која представља скуп уређених парова) такође припада $V(S)$. Даље, ако је, на пример, (X, Ξ, μ) мерљив простор тако да $X \subseteq S$, $\Xi \subseteq \mathbf{P}(X)$ и $\mu\colon \Xi \to \mathbb{R}^+$, видимо да $X \in V_1(S)$, затим $\Xi \in V_2(S)$, $\mu \in V_5(S)$ и $(X, \Xi, \mu) \in V_9(S)$. Уобичајено је да све интересантне структуре „упадну” у, на пример, $V_{20}(S)$.

Следеће тврђење се на основу дефиниције суперструктуре $V(S)$ лако доказује и то остављамо читаоцу за вежбу.

Теорема 11.1. *За суперструктуру $V(S)$ важи следеће:*

1° $\emptyset \in V(S)$;

2° $V_n(S) \in V(S)$;

3° *ако $x \in y \in V_n(S)$, тада $x \in V_n(S)$;*

4° *ако $x \subseteq y \in V(S)$, тада $x \in V(S)$;*

5° *ако $x \in V(S)$, тада $\mathbf{P}(x) \in V(S)$;*

6° *ако $x \subseteq V(S)$ и x је коначан, тада $x \in V(S)$;*

7° *(Аксиома избора) ако је F функција са непразним доменом таква да $F \in V(S)$ и $(\forall x \in \mathrm{dom}F)\ F(x) \neq \emptyset$, тада постоји функција $f \in V(S)$ таква да $f(x) \in F(x)$ за свако $x \in \mathrm{dom}F$.*

Надаље ћемо следити следећи план. Прво ћемо интуитивно описати пресликавање $*$, затим га строго дефинисати преко одговарајућих аксиома, а онда у другом делу направити модел у оквиру ZFC који реализује наведене аксиоме.

Пресликавање $*$ дефинисано на $V(S)$ сваком $A \in V(S)$ додељује ${}^*A \in {}^*V(S)$, где ${}^*V(S)$ називамо нестандардни универзум на S, тако да је за $s \in S$ испуњено ${}^*s = s$. На пример, ако је $A = (X, \Xi, \mu)$, тада је ${}^*A = ({}^*X, {}^*\Xi, {}^*\mu)$ и ово пресликавање чува „нека” својства структуре A. Која су то својства видећемо ускоро. Такође, $*$ „знатно” шири скуп A (ако је A бесконачан), прецизније $\{{}^*a \mid a \in A\} \subsetneq {}^*A$. Од посебног је значаја скуп ${}^*S$ јер он представља скуп праелемената за суперструктуру чији је део нестандардни универзум ${}^*V(S)$.

Конкретније и прецизније, $*\colon V(S) \to V({}^*S)$ (где $*(A) = {}^*A$) тако да $*$ задовољава следеће *аксиоме* за ${}^*V(S)$.

Аксиома 1 Постоји скуп ${}^*S \supsetneq S$, где је ${}^*S$ скуп праелемената.

Аксиома 2 Пресликавање $*$ има следећа својства:

- ${}^*s = s$, за $s \in S$,
- (Лајбницов принцип (трансфер)) за сваки $A_1, \ldots, A_n \in V(S)$ и за сваку ограничену формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (тј. формулу која је изграђена само помоћу $\in, =, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$ и ограничених квантификатора $\forall x \in y$ и $\exists x \in y$) важи:

$$V(S) \models \varphi(A_1, \ldots, A_n) \text{ ако и само ако } V({}^*S) \models \varphi({}^*A_1, \ldots, {}^*A_n).$$

За наредну аксиому потребна нам је следећа веома значајна дефиниција.

Дефиниција 11.1. Кажемо да је скуп $A \in V({}^*S)$ *стандардан* ако је скуп $A = {}^*B$ за неко $B \in V(S)$, док је A *интерналан* ако $A \in {}^*B$ за неко $B \in V(S)$. Кажемо да је скуп A *екстерналан* ако није интерналан.

Аксиома 3 Ако су $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ непразни интернални скупови из $V({}^*S)$, тада је $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Ово је веома значајна аксиома такозване ω_1-*засићености* довољно јака за примену у највећем делу математике (а и ове књиге). Међутим, у логици и топологији понекад постоји потреба за следећом аксиомом која се за $\kappa = \omega_1$ своди на претходну.

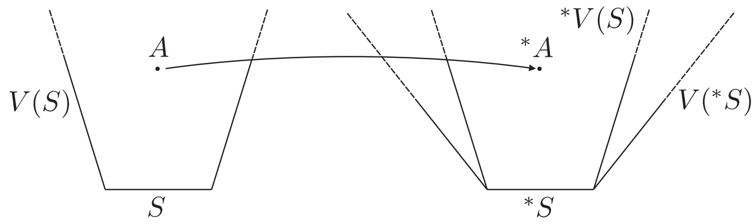
Аксиома 3_κ (κ-засићеност) Ако је $|J| < \kappa$ и $(A_j)_{j \in J}$ колекција интерналних скупова садржаних у неком ${}^*B$ и која има својство коначног пресека (тј. пресек коначног скупа елемената колекције је непразан), тада је $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$.

Аксиома 4 (проширење) Ако је $(A_j)_{j \in J}$ колекција скупова из $V(S)$ која има својство коначног пресека, тада за ову колекцију важи релација $\bigcap_{j \in J} {}^*A_j \neq \emptyset$.

У складу са претходном дефиницијом нестандардни универзум се састоји од интерналних скупова, или прецизније

$${}^*V(S) = \{\, A \mid \exists B \in V(S)(A \in {}^*B) \,\}.$$

Следећа слика илуструје везу између пресликавања $*$ и следеће три структуре: $\big(V(S), \in\big)$, $\big(V({}^*S), \in\big)$ и $\big({}^*V(S), \in\big)$.



Слика 11.1.

Сада ћемо показати неке особине интерналних скупова значајне за њихову каснију примену. Те особине следе из наведених аксиома али и из особина суперструктуре $V(S)$.

Теорема 11.2. *Интернални скупови имају следећа својства:*

1° *ако* $A \in V(S)$ *и* $x \in A$, *тада* $^*x \in {}^*A$ ($*$ *чува* $\in$);

2° *пресликавање* $*$ *чува* $=$, *тј. ако* $A \in V(S)$, *тада је*

$$^*\{(x,x) \mid x \in A\} = \{(y,y) \mid y \in {}^*A\} \ ;$$

3° *за* $a_1, \ldots, a_n \in V(S)$ *важи* $^*\{a_1, \ldots, a_n\} = \{^*a_1, \ldots, {}^*a_n\}$, *тј. пресликавање* $*$ *чува коначне скупове;*

4° *пресликавање* $*$ *чува основне скуповне операције, тј. за скупове* $A, B \in V(S)$ *важи*
$^*\emptyset = \emptyset$, $^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$, $^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$, $^*(A \setminus B) = {}^*A \setminus {}^*B$, $^*(A \times B) = {}^*A \times {}^*B$, $^*\mathrm{dom}A = \mathrm{dom}^*A$, $^*\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}^*A, \ldots$ *;*

5° *за* $A \in V(S)$ *важи*

(i) $\{\, ^*a \mid a \in A \,\} \subseteq {}^*A$*;*

(ii) $\{\, ^*a \mid a \in A \,\} = {}^*A$ *ако и само ако је* A *коначан скуп;*

6° *скуп* $^*V_n(S)$ *је транзитиван, тј. из* $A \in B$ *и* $B \in {}^*V_n(S)$ *следи* $A \in {}^*V_n(S)$*;*

7° $^*V(S) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^*V_n(S)$*;*

8° *ако* $A \in V(S)$, *тада је* $^*A$ *интерналан;*

9° *ако је скуп* B *интерналан и* $A \in B$, *тада је и* A *интерналан.*

Доказ. Доказ за тачке 1°, 2° и 3° следи на основу Лајбницовог принципа који се редом примењује на формуле

$$x \in A, \quad \forall x \in A\,(x = x), \quad \forall x \in \{a_1, \ldots, a_n\}\,(x = a_1 \vee \cdots \vee x = a_n).$$

Како је $\forall x \in V_n(S)\,(x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$, где $A, B \in V_n(S)$, то је ${}^*(A \setminus B) = {}^*A \setminus {}^*B$ и стављајући $A = B$, добијамо ${}^*\emptyset = \emptyset$. Слично се доказују и остали делови тачке 4°.

Део (i) тачке 5° следи на основу 1°, док једнакост у (ii) важи ако је скуп A коначан на основу 3°. Претпоставимо сада да је A бесконачан скуп. Уочимо скуп $A_{\text{fin}} = \{\, B \subseteq A \,|\, B \text{ је коначан} \,\}$. Тада фамилија $\mathcal{F} = \{\, A \setminus B \,|\, B \in A_{\text{fin}} \,\}$ има својство коначног пресека, па на основу Аксиоме 4 важи $\bigcap_{B \in A_{\text{fin}}}({}^*A \setminus {}^*B) \neq \emptyset$, тј. постоји $x \in \bigcap_{B \in A_{\text{fin}}}({}^*A \setminus {}^*B)$ тако да је $x \neq {}^*a$ за свако $a \in A$.

Тачка 6° следи на основу Лајбницовог принципа (трансфера) и тачке 3° Теореме 11.1.

Из $V_n(S) \subseteq V(S)$ и трансфера следи $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^*V_n(S) \subseteq {}^*V(S)$. Обратна инклузија у једнакости из тачке 7° следи на основу дефиниције скупа ${}^*V(S)$ и 6°.

Ако $A \in V(S)$, тада $A \in V_n(S) \in V(S)$ за неко n, па тиме важи ${}^*A \in {}^*V_n(S)$, што доказује 8°.

Тачка 9° следи на основу 7° и 8°. ∎

Наводимо сада два дефинициона принципа (који се доказују) од којих је други много значајнији.

Теорема 11.3. (Стандардни дефинициони принцип) *Скуп је стандардан ако и само ако се може описати као*

$$\{\, x \,|\, x \in {}^*A \wedge \varphi(x, {}^*A_1, \ldots, {}^*A_n) \,\},$$

где је $\varphi(x)$ ограничена формула са једном слободном променљивом x и све константе формуле $\varphi(x)$ су међу стандардним скуповима ${}^*A_1, \ldots, {}^*A_n$.

Доказ. Ако је $B = {}^*A$, тада је $\varphi(x)$ формула $x \in {}^*A$. Обратно, ако је $B = \{\, x \in A \,|\, \varphi(x, A_1, \ldots, A_n) \,\}$, тада је очигледно испуњено ${}^*B = \{\, x \in {}^*A \,|\, \varphi(x, {}^*A_1, \ldots, {}^*A_n) \,\}$. ∎

Теорема 11.4. (Интернални дефинициони принцип) *Скуп је интерналан ако и само ако се може описати као*

$$\{\, x \,|\, x \in A \wedge \varphi(x, A_1, \ldots, A_n) \,\},$$

где је $\varphi(x)$ ограничена формула са једном слободном променљивом x и све константе формуле $\varphi(x)$ су међу интерналним скуповима $A_1, \dots, A_n$.

Доказ. Очигледно је задати услов потребан. Он је и довољан јер за k такво да $A_1, \dots, A_n \in {}^*V_k(S)$ примењујући трансфер на реченицу

$$\big(\forall B, B_1, \dots, B_n \in V_k(S)\big)\big(\exists X \in V_k(S)\big)\big(X \subseteq B \\ \wedge (\forall b \in B)(b \in X \Leftrightarrow \varphi(b, B_1, \dots, B_n))\big)$$

долазимо до интерналног скупа са траженом особином. ■

Последица 11.1. *Ако су A и B интернални скупови, тада су интернални и скупови $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $\mathrm{dom} A$, $\mathrm{rang} A$ и сл.*

Доказ. Нека је $A, B \subseteq {}^*V_n(S)$. Тада је

$$A \cup B = \{\, x \in {}^*V_n(S) \,|\, x \in A \vee x \in B \,\},$$

па је скуп $A \cup B$ интерналан по интерналном дефиниционом принципу. Слично доказујемо и остало. ■

Занимљиво је сада да се задржимо мало на скуповној операцији партитивни скуп $\mathbf{P}$. Наравно можемо да посматрамо $\mathbf{P}$ као функцију из $V(S)$ у $V(S)$, али тада $\mathbf{P} \notin V(S)$. Стога је умесно да се ограничимо на неки довољно велики $V_n(S)$ (за неко $n \in \mathbb{N}$). На тај начин када $\mathbf{P}$ посматрамо као функцију има смисла говорити о ${}^*\mathbf{P}(A)$ не само када је $A \in V(S)$, већ и када је A интерналан скуп.

На основу трансфера, за $A \in {}^*V_n(S)$ важи

$$X \in {}^*\mathbf{P}(A) \qquad \text{ако и само ако} \qquad X \subseteq A \quad \text{и} \quad X \in {}^*V_n(S).$$

Према томе, ${}^*\mathbf{P}(A)$ је скуп свих <u>интерналних</u> подскупова од A, тако да је у општем случају ${}^*\mathbf{P}(A) \subsetneq \mathbf{P}({}^*A)$ (или ${}^*\mathbf{P}(A) \subsetneq \mathbf{P}(A)$, ако је A интерналан). Ова чињеница се често испушта из вида од стране почетника што лако може да доведе до погрешних закључака у вези са применом Лајбницовог принципа. Типичан пример је комплетност реалних бројева која се може записати следећом ограниченом формулом

$$\forall X \in \big(\mathbf{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}\big)\big((\exists c \in \mathbb{R})\, X \leq c \Rightarrow \\ (\exists s \in \mathbb{R})(X \leq s \wedge (\forall t \in \mathbb{R})(X \leq t \Rightarrow s \leq t))\big)$$

која тврди да сваки непразан ограничен одозго подскуп у $\mathbb{R}$ има супремум. Ако би се трансфер односио на читав $\mathbf{P}({}^*\mathbb{R})$, онда би се лако закључило да монада нуле $\mu(0)$ има супремум, што није тачно (видети 4.6.). У ствари баш то што $\mu(0)$ нема супремум у ${}^*\mathbb{R}$ доказује да је $\mu(0)$ екстерналан скуп, слично као и $\gamma(0), \mathbb{N}, \mathbb{R}$ и сл. Важно је на овом месту напоменути да је снага нестандардне анализе поред дискретизације и примене засићености такође и у међуигри између интерналних и важних екстерналних скупова малочас поменутих.

Сада ћемо се позабавити једним еквивалентом Аксиоме 3.

Кажемо да функција $g\colon {}^*B \to A$ раширује функцију $f\colon B \to A$ ако је $g \restriction B = f$.

ТЕОРЕМА 11.5. (Пребројива раширивост) *Следећа два тврђења су еквивалентна*

(i) *Аксиома 3;*

(ii) *за сваки интернални скуп A и сваку функцију $f\colon \mathbb{N} \to A$ постоји интернална функција $g\colon {}^*\mathbb{N} \to A$ која раширује f.*

Доказ. (i) $\to$ (ii) Уочимо монотоно опадајући низ непразних интерналних скупова

$$A_n = \{\, g\colon {}^*\mathbb{N} \to A \mid g \restriction n = f \restriction n \,\}.$$

На основу Аксиоме 3, постоји $g \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ које раширује f.

(ii) $\to$ (i) Нека је $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ опадајући низ непразних интерналних скупова из ${}^*V_n(S)$. Дефинишимо функцију $f\colon \mathbb{N} \to {}^*V_n(S)$ са $f(n) = A_n$. Тада на основу (ii) постоји $g\colon {}^*\mathbb{N} \to {}^*V_n(S)$ које проширује f. На основу интерналног дефиниционог принципа скуп $\{\, n \in {}^*\mathbb{N} \mid \bigcap_{m\le n} g(m) \ne \emptyset \,\}$ је интерналан и садржи екстерналан скуп $\mathbb{N}$. Отуда, постоји $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ тако да је $\bigcap_{m\le H} g(m) \ne \emptyset$, па тиме и $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \ne \emptyset$. ■

На крају издвојићемо посебну врсту интерналних скупова који се зову хиперконачни скупови. Они представљају уопштење коначних скупова и задовољавају све њихове добре особине.

ДЕФИНИЦИЈА 11.2. Интерналан скуп A је хиперконачан ($*$-коначан) ако постоји интернална бијекција $f\colon \{1, 2, \ldots, H\} \to A$ за неки јединствен $H \in {}^*\mathbb{N}$.

Битно је нагласити да функција f мора бити интерналан скуп. Овде се могу уочити две врсте кардиналности: *интернална кардиналност* којој одговара хиперконачан (или коначан) број $H \in {}^*\mathbb{N}$ заједно са интерналном бијекцијом $f\colon \{1, 2, \ldots, H\} \to A$ и *екстернална кардиналност* за коју смо видели на страни 52 да је најмање 2^ω. Када се срећу обе кардиналности, онда са $|A|$ означавамо интерналну, а са $\mathrm{Card} A$ или $\overline{\overline{A}}$ екстерналну.

Један од најважнијих примера хиперконачног скупа је већ често коришћени скуп $T = \left\{0, \dfrac{1}{H}, \dfrac{2}{H}, \ldots, 1\right\}$. Очигледно је $|T| = H + 1$. Битно својство хиперконачних функција које узимају вредности у ${}^*\mathbb{R}$ је да имају максимум и минимум, као и да је збир и производ две хиперконачне функције опет хиперконачна функција. Све ове и друге особине хиперконачних функција битно помажу у примени нестандардне анализе. Хиперконачни скупови служе и за моделовање великих коначних феномена.

Теорема 11.6. *Нека је A хиперконачан скуп и $|A| = H$. Тада је ${}^*\mathbf{P}(A)$ хиперконачан и $|{}^*\mathbf{P}(A)| = 2^H$.*

Доказ овог тврђења представља директну примену трансфера, што препуштамо читаоцу.

Важно је истаћи да можемо да сумирамо по хиперконачном скупу. Да бисмо то разумели сетимо се да се коначна сума дефинише индукцијом у $\mathbb{N}$, па можемо да применимо трансфер у дефинисању хиперконачног збира ${}^*\sum_{x\in X} x$, где је X хиперконачан. Тако је, на пример,

$$\sum\nolimits_{n\le H} n = 1 + 2 + \cdots + H = \frac{H(H+1)}{2}.$$

Фактички, ${}^*\sum$ је нестандардно раширење функције $\sum$ која сумира коначне скупове у $V(S)$, тако да, слично као код осталих функција, $*$ можемо да изоставимо.

Следећа теорема је корисна за налажење хиперконачне репрезентације скупова.

Теорема 11.7. *Нека је $A \in V(S)$. Тада постоји хиперконачан скуп L тако да је $\{\,{}^*a \mid a \in A\,\} \subseteq L \subseteq {}^*A$.*

Доказ. Нека је $F_x = \{\,G \mid G \text{ је коначан},\ x \in G \subseteq A\,\}$. Лако се види да колекција $(F_x)_{x\in A}$ има својство коначног пресека па, на основу

Аксиоме 4, постоји неко $L \in \bigcap_{x \in A} {}^*F_x$. Очигледно је да L задовољава тражене инклузије. ■

11.2 Директне границе модела

У овом одељку позабавићемо се једном општом конструкцијом, тзв. директним лимесом (лимитом, границом). Ово ће нам бити од користи у наредном одељку за конструкцију κ-засићених нестандардних универзума.

Кажемо да је $(\Delta, \leq)$ *усмерен скуп* уколико за свака два $i, j \in \Delta$ постоји $k \in \Delta$ тако да је $i \leq k$ и $j \leq k$. Тако су, на пример, уређени скупови $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbf{P}(X), \subseteq)$ и $(\mathbf{P}_\omega(X), \subseteq)$ (где су са $\mathbf{P}_\omega(X)$ означени сви коначни подскупови од X) усмерени скупови.

ДЕФИНИЦИЈА 11.3. За фамилију $\mathcal{S} = (\mathfrak{A}_i,\ \alpha_{ij} : i, j \in \Delta)$ модела и утапања (где је $(\Delta, \leq)$ усмерено уређен скуп и $\alpha_{ij} \colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_j$ за $i, j \in \Delta$) кажемо да је *директан систем* ако задовољава следеће две особине:

- утапање $\alpha_{ii} \colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_i$ је идентичко пресликавање,
- ако је $i \leq j \leq k$, тада $\alpha_{ik} = \alpha_{jk} \circ \alpha_{ij}$ (где је $\circ$ композиција пресликавања).

Дефинишимо сада модел $\mathfrak{A}_\infty$ који зовемо директан лимес система $\mathcal{S}$ и записујемо са $\mathfrak{A}_\infty = \varinjlim \mathfrak{A}_i = \varinjlim \mathcal{S}$.

Да бисмо дошли до универзума модела, уочимо скупове $A = \bigcup_{i \in \Delta} A_i$ и $A \times \Delta$. На скупу $A \times \Delta$ дефинишимо релацију еквиваленције $\sim$ на следећи начин:

$$(a, i) \sim (b, j) \quad \text{акко} \quad (\exists k \in \Delta)\, \alpha_{ik}(a) = \alpha_{jk}(b), \ \text{ за } (a, i), (b, j) \in A \times \Delta.$$

Универзум модела $\mathfrak{A}_\infty$ биће $A_\infty = A \times \Delta / \sim$. Нека су даље ψ_i канонска пресликавања скупова A_i у скуп A_∞, тј. ако је $a \in A_i$, онда је $\psi_i(a)$ класа еквиваленције елемента (a, i). Лако се види да важи $\psi_j \circ \alpha_{ij} = \psi_i$.

Претпоставимо да је L језик модела система $\mathcal{S}$. Дефинишимо сада релације, функције и константе модела $\mathfrak{A}_\infty$.

- Ако је $R \in \mathrm{Rel}_L$ и $\mathrm{ar}(R) = n$, тада $R^{\mathfrak{A}_\infty}[\psi_{i_1}(a_1), \ldots, \psi_{i_n}(a_n)]$ важи ако и само ако $R^{\mathfrak{A}_k}[\alpha_{i_1 k}(a_1), \ldots, \alpha_{i_n k}(a_n)]$ за неко $k \in \Delta$ тако да је $k \geq i_1, \dots, i_n$. Лако се проверава да је овако уведена релација добро дефинисана.

- Уколико $f \in \mathrm{Fun}_L$ и $\mathrm{ar}(f) = n$, тада за $a_1 \in A_{i_1}, \dots, a_n \in A_{i_n}$ и $k \geq i_1, \dots, i_n$ дефинишимо

$$f^{\mathfrak{A}_\infty}[\psi_{i_1}(a_1), \dots, \psi_{i_n}(a_n)] = \psi_k\big(f^{\mathfrak{A}_k}[\alpha_{i_1 k}(a_1), \dots, \alpha_{i_n k}(a_n)]\big).$$

Претходна дефиниција је коректна, јер се лако показује да је за $k, m \geq i_1, \dots, i_n$ испуњено:

$$\big(f^{\mathfrak{A}_k}[\alpha_{i_1 k}(a_1), \dots, \alpha_{i_n k}(a_n)], k\big) \sim \big(f^{\mathfrak{A}_m}[\alpha_{i_1 m}(a_1), \dots, \alpha_{i_n m}(a_n)], m\big).$$

Довољно је видети да за $s \geq m, k$ важи

$$\alpha_{ks} f^{\mathfrak{A}_k}[\alpha_{i_1 k}(a_1), \dots, \alpha_{i_n k}(a_n)] = \alpha_{ms} f^{\mathfrak{A}_m}[\alpha_{i_1 m}(a_1), \dots, \alpha_{i_n m}(a_n)].$$

- Ако је $c \in \mathrm{Const}_L$, тада $c^{\mathfrak{A}_\infty} = \psi_i(c^{\mathfrak{A}_i})$ за било који $i \in \Delta$. Ова дефиниција је добра јер за $i, j \in \Delta$ постоји $k \in \Delta$ тако да $i, j \leq k$, те $\alpha_{ik}(c^{\mathfrak{A}_i}) = \alpha_{jk}(c^{\mathfrak{A}_j})$, односно $(c^{\mathfrak{A}_i}, i) \sim (c^{\mathfrak{A}_j}, j)$.

Према горњим дефиницијама лако се види да је $\psi_i \colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_\infty$ утапање.

Сада нам је циљ да докажемо Тарски-Вотову теорему за директан лимес у форми која ће нам требати у наредном одељку. Претпоставимо стога да језик L садржи и бинарни предикат припадања $\in$. Формуле са ограниченим квантификаторима (краће их зовемо ограничене формуле) представљају најмањи подскуп скупа For_L, у ознаци BFor_L, такав да све атомске формуле припадају BFor_L и ако $\varphi, \psi \in \mathrm{BFor}_L$, тада и $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, (\exists x)(x \in y \wedge \varphi) \in \mathrm{BFor}_L$. Притом, $(\forall x)(x \in y \Rightarrow \varphi)$ и $(\exists x)(x \in y \wedge \varphi)$ пишемо редом краће $(\forall x \in y)\varphi$ и $(\exists x \in y)\varphi$.

Слично као у петој глави уводимо појам ограниченог елементарног подмодела и ограниченог елементарног утапања.

Дефиниција 11.4. 1° Модел $\mathfrak{A}$ је *ограничен елементарни подмодел* модела $\mathfrak{B}$, у ознаци $\mathfrak{A} \prec_b \mathfrak{B}$, ако и само ако $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и за све $\varphi \in \mathrm{BFor}_L$, све $\sigma \in A^{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ ако и само ако $\mathfrak{B} \models \varphi[\sigma]$.

2° Утапање $f \colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ је *ограничено елементарно*, $f \colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\prec_b} \mathfrak{B}$, ако и само ако за све валуације $\sigma = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ ако и само ако $\mathfrak{B} \models \varphi[f(a_0), f(a_1), \dots]$.

3° Кажемо да је $\mathcal{S} = (\mathfrak{A}_i,\ \alpha_{ij}\ :\ i, j \in \Delta)$ *ограничено елементарни систем* ако је свако утапање α_{ij} ограничено елементарно.

ТЕОРЕМА 11.8. *Нека је $\mathcal{S}$ ограничено елементарни систем. Тада је свако утапање $\psi_i\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_\infty$ ограничено елементарно, тј. $\psi_i\colon \mathfrak{A}_i \xrightarrow{\prec_b} \mathfrak{A}_\infty$.*

Доказ. Доказ се спроводи индукцијом по изграђености, тј. сложености формула. За елементарне формуле тврђење важи на основу чињенице да је ψ_i утапање. Индукцијски корак који се односи на исказне везнике $\wedge$ и $\neg$ такође се лако спроводи.

Нека је формула $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ облика $(\exists y \in x_0)\theta(y, x_1, \ldots, x_n)$. Тада свака од следећих релација имплицира наредну:

- $\mathfrak{A}_i \models \varphi[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ за $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A_i$,
- постоји $b \in^{\mathfrak{A}_i} a_0$, тако да $\mathfrak{A}_i \models \theta[b, a_1, \ldots, a_n]$,
- постоји $\psi_i(b) \in^{\mathfrak{A}_\infty} \psi_i(a_0)$ и $\mathfrak{A}_\infty \models \theta[\psi_i(b), \psi_i(a_1), \ldots, \psi_i(a_n)]$,
- $\mathfrak{A}_\infty \models (\exists y \in \psi_i(a_0))\theta[\psi_i(a_1), \ldots, \psi_i(a_n)]$.

Са друге стране, нека је

$$\mathfrak{A}_\infty \models (\exists y \in \psi_{i_0}(a_0))\theta[\psi_{i_1}(a_1), \ldots, \psi_{i_n}(a_n)].$$

Тада за неко $b' \in^{\mathfrak{A}_\infty} \psi_{i_0}(a_0)$, где је $b' = \psi_j(b)$ за неко $b \in A_j$, важи

$$\mathfrak{A}_\infty \models \theta[\psi_j(b), \psi_{i_1}(a_1), \ldots, \psi_{i_n}(a_n)].$$

За $k \geq j, i_1, \ldots, i_n$ ће отуда бити

$$\mathfrak{A}_k \models \theta[\psi_k(b), \psi_k(a_1), \ldots, \psi_k(a_n)],$$

па како је $\mathfrak{A}_i \prec_b \mathfrak{A}_k$, то имамо коначно

$$\mathfrak{A}_i \models \varphi[\psi_i(a_1), \ldots, \psi_i(a_n)].$$

■

НАПОМЕНА: Релација $\in^{\mathfrak{A}_\infty}$ није стандардна релација припадања. Међутим, уколико су релације $\in^{\mathfrak{A}_i}$ стандардне (тј. $\in^{\mathfrak{A}_i}=\in$), добро засноване (тј. не постоји опадајући ланац $x_0 \ni x_1 \ni \ldots$), екстензионалне (тј. $\mathfrak{A}_i \models a = b \Leftrightarrow (\forall x)(x \in a \Leftrightarrow x \in b)$) и задовољавају услове претходне теореме, то се $\in^{\mathfrak{A}_\infty}$ може фактички заменити са $\in$. Ово се постиже функцијом Мостовског[1] $\widehat{\ }$ (која ће бити детаљније описана у наредном одељку) на следећи начин:

$$\begin{aligned}\widehat{\psi_j}(a) &= \{\widehat{\psi_i}(b) \mid \psi_i(b) \in^{\mathfrak{A}_\infty} \psi_j(a)\}\\ &= \{\widehat{\psi_i}(b) \mid \exists k \in \Delta(k \geq i, j \wedge \psi_k(b) \in^{\mathfrak{A}_k} \psi_k(a))\}.\end{aligned}$$

На скупу $\widehat{\mathfrak{A}_\infty} = \{\, \widehat{a} \mid a \in \mathfrak{A}_\infty \,\}$ дефинишемо релације са

$$R^{\widehat{\mathfrak{A}_\infty}}[\widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_n}] \quad \text{ако и само ако} \quad R^{\mathfrak{A}_\infty}[a_1, \ldots, a_n],$$

(за $a_1, \ldots, a_n \in A_\infty$), и слично за функције и константе. Лако се проверава да је $\mathfrak{A}_\infty \cong \widehat{\mathfrak{A}_\infty}$.

11.3 Конструкција нестандардног универзума

У овом делу позабавићемо се конструкцијом нестандардног универзума ${}^*V(S)$, тј. конструкцијом модела за аксиоме из одељка 11.1. Основна етапа у овој конструкцији је изградња ултрапроизвода суперструктуре $V(\mathbb{R})$ и примена Лошове теореме, те је ово у бити проширење метода и резултата већ изложених у трећој глави.

Прво ћемо изградити модел који реализује Аксиоме 1, 2 и 3, а потом видети како се конструкција може да модификује тако да се задовоље Аксиоме 3_κ и 4.

Теорема 11.9. *Постоји нестандардни универзум* ${}^*V(S) \subseteq V({}^*S)$ *и пресликавање* $*\colon V(S) \to V({}^*S)$ *тако да су задовољене Аксиоме 1, 2 и 3.*

Доказ. Нека је на скупу $\mathbb{N}$ дат неглавни ултрафилтер $\mathcal{D}$ (видети главу 2) који је, очигледно, раширење Фрешеовог филтера.

Дефинишимо низ такозваних *ограничених ултрапроизвода*:

$$W_n = V_n^{\mathcal{D}} = \{\, x_{\mathcal{D}} \in V(S)^{\mathcal{D}} \mid x \in V_n(S)^{\mathbb{N}} \,\}, \qquad \text{за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Нека је $W_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$. Очигледно $x_{\mathcal{D}} \in W_\omega$ ако и само ако постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да $x_{\mathcal{D}} \in V_n^{\mathcal{D}}$ (или $\{\, i \in \mathbb{N} \mid x(i) \in V_n(S) \,\} \in \mathcal{D}$). Уочимо даље ултрапроизвод модела $(V(S), \in)$, тј. нека је $(V(S), \in)^{\mathcal{D}} = (V(S)^{\mathcal{D}}, E)$.

[1] Andrzej Mostowski (1913–1975)

Тада је, очигледно, за $x_{\mathcal{D}}, y_{\mathcal{D}} \in V(S)^{\mathcal{D}}$ испуњено: $x_{\mathcal{D}}\, E\, y_{\mathcal{D}}$ ако и само ако $\{\, i \in \mathbb{N} \mid x(i) \in y(i) \,\} \in \mathcal{D}$. Нека је $e = E \restriction W_\omega$.

Дефинишимо ${}^*S = W_0$ и идентификујмо S са скупом $\{\, \mathbf{s}_{\mathcal{D}} \mid s \in S \,\}$, где $\mathbf{c}\colon \mathbb{N} \to V(S)$ означава функцију са константном вредношћу c за сваки $c \in V(S)$. На тај начин је очигледно $S \subsetneq {}^*S$, што нам обезбеђује задовољење Аксиоме 1.

Дефинишимо, даље, пресликавање

$$\widehat{\quad\quad} : W_\omega \to V({}^*S)$$

индукцијом на следећи начин:

- $\widehat{x_{\mathcal{D}}} = x_{\mathcal{D}}$ за $x_{\mathcal{D}} \in W_0$,
- претпоставимо да је $\widehat{\ }$ већ дефинисано на W_n и дефинишимо $\widehat{x_{\mathcal{D}}} = \{\, \widehat{y_{\mathcal{D}}} \mid y_{\mathcal{D}} \in x_{\mathcal{D}} \,\}$, ако $x_{\mathcal{D}} \in W_{n+1} \setminus W_n$.

Лако се проверава да је функција $\widehat{\ }$ (коју зовемо „спљескајућа” функција Мостовског) добро дефинисана и да слика W_n у $V_n({}^*S)$. Заиста, ако је $x_{\mathcal{D}} = z_{\mathcal{D}}$, тада

$$\widehat{y_{\mathcal{D}}} \in \widehat{x_{\mathcal{D}}} \quad \text{акко} \quad y_{\mathcal{D}} \in x_{\mathcal{D}} \quad \text{акко} \quad y_{\mathcal{D}} \in z_{\mathcal{D}} \quad \text{акко} \quad \widehat{y_{\mathcal{D}}} \in \widehat{z_{\mathcal{D}}},$$

што повлачи $\widehat{x_{\mathcal{D}}} = \widehat{z_{\mathcal{D}}}$. С друге стране, ако је $x_{\mathcal{D}} \neq z_{\mathcal{D}}$, тада се лако показује из особина ултрафилтера да постоји, на пример, $y_{\mathcal{D}} \in x_{\mathcal{D}}$ и да $y_{\mathcal{D}} \notin z_{\mathcal{D}}$, па отуда $\widehat{x_{\mathcal{D}}} \neq \widehat{z_{\mathcal{D}}}$, што значи да је функција $\widehat{\ }$ 1–1. Претпоставимо такође да $\widehat{\ } : W_n \to V_n({}^*S)$ и нека је $x_{\mathcal{D}} \in W_{n+1} \setminus W_n$. Отуда, како $y_{\mathcal{D}} \in x_{\mathcal{D}}$ повлачи $y_{\mathcal{D}} \in W_n$, имаћемо да важи релација $\widehat{x_{\mathcal{D}}} = \{\, \widehat{y_{\mathcal{D}}} \mid y_{\mathcal{D}} \in x_{\mathcal{D}} \,\} \subseteq V_n({}^*S)$, тј. $\widehat{x_{\mathcal{D}}} \in V_{n+1}({}^*S)$.

Дефинишимо, најзад, пресликавање $* : V(S) \to V({}^*S)$ са ${}^*c = \widehat{\mathbf{c}_{\mathcal{D}}}$ за $c \in V(S)$. Одатле, ${}^*V_n(S) = \{\, \widehat{x_{\mathcal{D}}} \mid x_{\mathcal{D}} \in W_n \,\} \subseteq V_n({}^*S)$.

Аксиома 2 (Лајбницов принцип или трансфер) следи из Лошове теореме и чињенице да је функција $\widehat{\ }$ утапање. У основи се користи следећи нешто општији резултат.

Лема 11.1. *Нека је $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ограничена формула и $a_1, \ldots, a_n \in W_\omega$. Тада су следећи услови еквивалентни:*

- *$\varphi(\widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_n})$ важи у $V({}^*S)$,*
- *$\{\, i \in \mathbb{N} \mid V(S) \models \varphi(a_1(i), \ldots, a_n(i)) \,\} \in \mathcal{D}$ (где уместо $\widehat{a_{\mathcal{D}}}$ пишемо само $\widehat{a}$).*

Доказ Леме. Доказ се проводи индукцијом по изграђености формула и за атомске формуле следи из чињенице да:

$$\widehat{a} \in \widehat{b} \text{ акко } \{\, i \mid a(i) \in b(i) \,\} \in \mathcal{D} \text{ и } \widehat{a} = \widehat{b} \text{ акко } \quad \{\, i \mid a(i) = b(i) \,\} \in \mathcal{D}.$$

Случај за формуле добијене конјункцијом или негацијом се лако проверава. Нека је $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv (\exists x \in x_1)\psi(x_1, \ldots, x_n, x)$. Тада је $V(^*S) \models \varphi(\widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_n})$ акко $V(^*S) \models (\exists x \in \widehat{a_1})\psi(\widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_n}, x)$

акко $V(^*S) \models \widehat{c} \in \widehat{a_1} \wedge \psi(\widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_n}, \widehat{c})$ за неко $\widehat{c} \in V(^*S)$

акко $V(^*S) \models \widehat{c} \in \widehat{a_1}$ и $V(^*S) \models \psi(\widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_n}, \widehat{c})$ за неко $\widehat{c} \in V(^*S)$

акко $\{i \mid V(S) \models c(i) \in a_1(i)\}$, $\{i \mid V(S) \models \psi(a_1(i), \ldots, a_n(i), c(i))\} \in \mathcal{D}$

акко $\{\, i \mid V(S) \models c(i) \in a_1(i) \,\} \cap \{\, i \mid V(S) \models \psi(a_1(i), \ldots, a_n(i), c(i)) \,\} \in \mathcal{D}$

акко $\{\, i \mid V(S) \models c(i) \in a_1(i) \wedge \psi(a_1(i), \ldots, a_n(i), c(i)) \,\} \in \mathcal{D}$

акко $\{\, i \mid V(S) \models (\exists x \in a_1(i))\psi(a_1(i), \ldots, a_n(i), x) \,\} \in \mathcal{D}$.

Овим је Лема доказана.

Узимајући у Леми уместо $\widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_n}$, редом $\widehat{\mathbf{c}_1}, \ldots, \widehat{\mathbf{c}_n}$, при чему $c_1, \ldots, c_n \in V(S)$) добијамо Лајбницов принцип.

Да бисмо доказали да $V(^*S)$ задовољава Аксиому 3, напоменимо да су интернални објекти управо облика $\widehat{a_\mathcal{D}}$ где $a_\mathcal{D} \in W_\omega$, тј. $^*V(S) = \{\, \widehat{a_\mathcal{D}} \mid a_\mathcal{D} \in W_\omega \,\}$. Претпоставимо да $\widehat{a}_{1\mathcal{D}} \supseteq \widehat{a}_{2\mathcal{D}} \supseteq \ldots$ и сваки $\widehat{a}_{k\mathcal{D}} \neq \emptyset$. Како је $\widehat{a}_{1\mathcal{D}} \cap \cdots \cap \widehat{a_n}_\mathcal{D} \neq \emptyset$, то је $a_1(i) \cap \cdots \cap a_n(i) \neq \emptyset$ скоро свуда на $\mathcal{D}$. Нека је

$$X_n = \{\, i \in \mathbb{N} \mid a_1(i) \cap \cdots \cap a_n(i) \neq \emptyset \,\}.$$

Тада $X_n \in \mathcal{D}$ и $X_{n+1} \supseteq X_n$. Како је $a_1(i) \neq \emptyset$ скоро свуда на $\mathcal{D}$, то за скоро сваки $i \in \mathbb{N}$ постоји највећи $n_i \leq i$ тако да је $X_{n_i} \neq \emptyset$. Нека је за сваки $i \in X_n$, $f(i) \in a_1(i) \cap \cdots \cap a_n(i)$. Како је за произвољно $m \in \mathbb{N}$ испуњено $n_i \geq m$ скоро свуда, то је $f(i) \in a_m(i)$ скоро свуда, па тиме и $\widehat{f_\mathcal{D}} \in \widehat{a_m}$ за сваки $m \in \mathbb{N}$. ∎

Сада ћемо профинити конструкцију коју смо дали у претходној теореми да бисмо добили следећи јачи резултат. Профињење се састоји у конструкцији погодног ултрафилтера.

ТЕОРЕМА 11.10. *Постоји нестандардни универзум* $^*V(S) \subseteq V(^*S)$ *и пресликавање* $* : V(S) \to V(^*S)$ *тако да су задовољене Аксиоме 1, 2, 3 и 4 из одељка 11.1.*

Доказ. За сваку колекцију $\Xi \subseteq V(S)$ која има својство коначног пресека, нека је $I_\Xi = \{\, F \subseteq \Xi \mid F$ је непразан и коначан $\}$. За индексни скуп узмимо $I = \mathbb{N} \times \prod_\Xi I_\Xi$, где се производ узима по свим Ξ који имају својство коначног пресека. За свако $i \in I$ пишемо $i = (i_0, (i_\Xi)_\Xi)$. Дефинишимо $\mathcal{D}_i \subseteq I$ са

$$\mathcal{D}_i = \{\, k \in I \mid k_0 \geq i_0 \text{ и } (\forall \Xi) k_\Xi \supseteq i_\Xi \,\}.$$

Очигледно, фамилија $\{\mathcal{D}_i\}_{i\in I}$ има својство коначног пресека, па према Теореми 2.5. постоји ултрафилтер $\mathcal{D}$ на I који проширује $\{\mathcal{D}_i\}_{i\in I}$.

Ако даље поступимо аналогно као у претходној теореми, добићемо $V(^*S)$ и $^*V(S)$. Лако се показује да Аксиоме 1, 2 и 3 важе у овом моделу. Нека $\Xi \subseteq V(\mathbb{R})$ има својство коначног пресека. Изаберимо $f \in V(\mathbb{R})^I$ тако да за свако i важи

$$f(i) \in \bigcap\nolimits_{X \in i_\Xi} X.$$

Тада за $X \in \Xi$, $f(i) \in X$ ако и само ако $X \in i_\Xi$. Међутим, $X \in i_\Xi$ повлачи важење на $\mathcal{D}_i$, где је i_Ξ Ξ-та координата у i. Отуда важи $f(i) \in X$ скоро свуда на $\mathcal{D}$, па тиме и $\widehat{f_\mathcal{D}} \in {}^*X$. ■

Конструкција овако датог ултрафилтера може да се уопшти, што нас доводи до појма λ-одговарајућег ултрафилтера (видети Задатак 122.).

На крају позабавићемо се конструкцијом κ-засићених модела.

ТЕОРЕМА 11.11. *Постоји нестандардни универзум* $^*V(S) \subseteq V(^*S)$ *и пресликавање* $* : V(S) \to V(^*S)$ *тако да су задовољене Аксиоме 1, 2,* 3_κ *и 4.*

Доказ. Овде ћемо дати скицу доказа, без непотребних понављања. Основна идеја се састоји у итерацији κ^+ пута конструкције из претходне теореме.

У том циљу ставимо $S_0 = S$ и преименујмо $^*S$ и пресликавање $*$ у претходној теореми у S_1 и f_0, тако да $* : V(S) \to V(^*S)$ постаје $f_0 \colon V(S_0) \to V(S_1)$.

Дефинишимо низ $(S_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\leq\kappa^+}$ помоћу итерације (у основи ултрапроизвода) дате на следећи индуктиван начин: $f_\alpha\colon V(S_\alpha)\to V(S_{\alpha+1})$, где се f_α и $V(S_{\alpha+1})$ добијају из $V(S_\alpha)$ на исти начин како се f_0 и $V(S_1)$ добијају из $V(S_0)$.

Ако уочимо утапања $\eta_{\alpha\beta}\colon V(S_\alpha)\to V(S_\beta)$, тада за $\alpha<\beta<\gamma<\kappa^+$ важи $f_\alpha=\eta_{\alpha\alpha+1}$ и $\eta_{\alpha\gamma}=\eta_{\beta\gamma}\circ\eta_{\alpha\beta}$. Ако је δ гранични ординал, тада је $V(S_\delta)$ директан лимес низа $(V(S_\alpha):\alpha<\delta)$ у односу на следећа утапања $(\eta_{\alpha\beta}:\alpha<\beta<\delta)$. Нека је $V(^*S)$ директан лимес читавог система $(V(S_\alpha),\eta_{\alpha\beta}:\alpha<\beta<\kappa^+)$. Тада је $V(^*S)$ проширени нестандардни модел. Нека је $\psi_\alpha\colon V(S_\alpha)\to V(^*S)$ канонично пресликавање које представља лимес пресликавања $\eta_{\alpha\beta}$ за $\beta<\kappa^+$, тј.

$$\psi_\alpha=\lim(\eta_{\alpha\beta}:\beta<\kappa^+).$$

За $\alpha=0$ добијамо $*=\lim(\eta_{0\beta}:\beta<\kappa^+)$.

<u>Аксиома 1</u> је тривијално задовољена, док <u>Аксиома 2</u> следи из аналогона Тарски-Вотове теореме о затворености за директне лимесе, док <u>Аксиоме 3_κ</u> и 4 следе из чињенице да регуларност кардинала κ^+ обезбеђује „упадање” сваког скупа од $<\kappa$ елемената из $V(^*S)$ у неки $V(S_\alpha)$, $\alpha<\kappa^+$. Прецизније, нека је $(A_j)_{j\in J}$ колекција интерналних скупова из $V(^*S)$ која има својство коначног пресека, где је $|J|<\kappa$. Због регуларности кардинала κ^+ постоји $\alpha<\kappa^+$ тако да колекција припада скупу $V(S_\alpha)$. Отуда у $V(S_\alpha)$ постоји колекција $(A'_j)_{j\in J}$ тако да је $\psi_\alpha(A'_j)=A_j$. Како је $V(S_{\alpha+1})$ проширени нестандардни модел, то је $\bigcap_{j\in J}f_\alpha(A'_j)\neq\emptyset$, па тиме и $\bigcap_{j\in J}\psi_{\alpha+1}f_\alpha(A'_j)=\bigcap_{j\in J}A_j\neq\emptyset$. ■

11.4 Нестандардна теорија модела

У овом одељку повезана је, на још један начин, теорија модела са нестандардном анализом. Посматраћемо κ–засићене структуре, где је $|(V(S))|<\kappa$ и κ је регуларан кардинал.

Дефиниција 11.5. Нестандардни универзум $^*V(S)$ има својство κ–изоморфизма ако за сваки језик првог реда L који има мање од κ нелогичких симбола и свака два елементарно еквивалентна модела $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ језика L чији домени, релације и функције су интернални, следи да су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфни.

Конструкцијом из претходног одељка показаћемо да такви универзуми постоје, као и да су нужно κ–засићени. Такође је важно напоменути да ово својство има интересантне последице у, на пример, теорији модела Банахових[2)] простора (видети [50]).

Нека је $L = \mathrm{Rel}_L \cup \mathrm{Fun}_L \cup \mathrm{Const}_L$ језик првог реда и $\mathrm{For}_L(n)$ скуп формула језика L чије су слободне променљиве међу $x_1, \ldots, x_n$. Такође, нека су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ модели језика L. Можемо претпоставити да су L, For_L, $\mathrm{For}_L(n)$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ као и релација задовољења $\models \subseteq \{\mathfrak{A}\} \times \mathrm{For}_L \times A^{\mathbb{N}}$ елементи од $V(S)$. Њима у нестандардном универзуму одговарају редом ${}^*L$, ${}^*\mathrm{For}_L$, ${}^*\mathrm{For}_L(n)$, ${}^*\mathfrak{A}$, ${}^*\mathfrak{B}$ и ${}^*\!\!\models$. На основу преноса ће бити, на пример, ${}^*\mathfrak{A} \;{}^*\!\!\models {}^*\varphi$ под условом да је било $\mathfrak{A} \models \varphi$. Нас неће толико интересовати модел ${}^*\mathfrak{A}$ за језик ${}^*L$ већ његова рестрикција на L, ${}^*\mathfrak{A} \upharpoonright L$. Детаљније, ако је $\mathfrak{A} = (A, R_i, f_j, c_k)_{i \in I, j \in J, k \in K}$, тада је ${}^*\mathfrak{A} \upharpoonright L = ({}^*A, {}^*R_i, {}^*f_j, {}^*c_k)_{i \in I, j \in J, k \in K}$.

Следе две једноставне леме.

Лема 11.2. *Нека су L језик, $\mathfrak{A}$ модел за L и $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ формула из $\mathrm{For}_L(n)$. Тада*

1° ${}^*\mathfrak{A} \;{}^*\!\!\models {}^*\varphi[a_1, \ldots, a_n]$ *ако и само ако* ${}^*\mathfrak{A} \upharpoonright L \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ *за све* $a_1, \ldots, a_n \in {}^*A$ *;*

2° $*$ *је елементарно утапање модела $\mathfrak{A}$ у ${}^*\mathfrak{A} \upharpoonright L$.*

Доказ. 1° следи индукцијом по изграђености формула. Од битног је значаја да формуле садрже коначно много логичких и нелогичких симбола, те се користећи дефиницију релације задовољења доказ лако проводи.

2° На основу преноса, за $a_1, \ldots, a_n \in A$ важи

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \text{ако и само ако} \quad {}^*\mathfrak{A} \;{}^*\!\!\models {}^*\varphi[{}^*a_1, \ldots, {}^*a_n].$$

Комбинујући ову релацију са оном под 1° лако следи тврђење. ∎

Лема 11.3. *Нека су $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V(S)$ елементарно еквивалентни модели и нека је ${}^*V(S)$ нестандардни универзум. Тада постоји елементарно утапање f из $\mathfrak{A}$ у ${}^*\mathfrak{B} \upharpoonright L$. Ако је, пак, g елементарно утапање из $\mathfrak{B}$ у $\mathfrak{A}$, тада се f може изабрати тако да задовољава $f(g(b)) = {}^*b$, $b \in B$.*

[2)] Stefan Banach (1892–1945)

Доказ. Нека је L језик за $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. За свако $n \geq 1$, за сваку формулу $\varphi \in \mathrm{For}_L(n)$ и сваки низ $a_1, \ldots, a_n \in A$, нека је $\mathcal{F}(\varphi; a_1, \ldots, a_n)$ скуп парцијалних функција $f\colon A \to B$ тако да је $f(a_i)$ дефинисано за $i \leq n$ и

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \text{ако и само ако} \quad \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)].$$

Како је $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, то скупови $\mathcal{F}(\varphi; a_1, \ldots, a_n)$ имају својство коначног пресека. Отуда на основу Аксиоме 4 постоји интернална функција g која пресликава подскуп од ${}^*A$ у ${}^*B$ таква да је $g({}^*a)$ дефинисано за свако $a \in A$ и да за свако $\varphi \in \mathrm{For}_L(n)$, $(n \geq 1)$, и сваки низ $a_1, \ldots, a_n \in A$

$${}^*\mathfrak{A} \;{}^*\!\!\models {}^*\varphi[{}^*a_1, \ldots, {}^*a_n] \quad \text{ако и само ако} \quad {}^*\mathfrak{B} \;{}^*\!\!\models {}^*\varphi[g({}^*a_1), \ldots, g({}^*a_n)].$$

На основу претходне леме и преноса добијамо

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \text{ако и само ако} \quad {}^*\mathfrak{B} \restriction L \models \varphi[g({}^*a_1), \ldots, g({}^*a_n)].$$

Очигледно је функцијом $f(a) = g({}^*a)$ дефинисано елементарно утапање.

Да би се доказао други део тврђења довољно је да се примени претходно на структуре $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}, g(b))_{b \in B}$ и $\mathfrak{B}' = (\mathfrak{B}, b)_{b \in B}$. ∎

Теорема 11.12. *За сваку суперструктуру $V(S)$ и сваки регуларан κ постоји нестандардни универзум ${}^*V(S)$ који има својство κ–изоморфизма.*

Напомена. На основу Теореме 5.4. може да се помисли да је својство κ–изоморфизма добијено директно трансфером. Међутим, то није тачно јер се трансфером добија чак ${}^*L$–елементарна еквивалентност (а не само L–елементарна еквивалентност) и то само за хиперконачне универзуме, што је много јача претпоставка. Истина и закључак је јачи јер се тврди постојање интерналне бијекције за шири језик ${}^*L$.

Прецизније, трансфер Теореме 5.4. гласи:

$$[(\forall \varphi \in {}^*\mathrm{For}_L)({}^*\mathfrak{A} \;{}^*\!\!\models \varphi \Leftrightarrow {}^*\mathfrak{B} \models \varphi) \wedge A, B \in {}^*\mathrm{Fin}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists f \in {}^*\mathcal{F})(f\colon {}^*\mathfrak{A} \cong {}^*\mathfrak{B}).$$

Доказ. Слично као у Теореми 11.11. формираћемо директни систем нестандардних универзума тако да се у индуктивном кораку са α на $\alpha + 1$ почев од неког места примењује Лема 11.3. користећи следећи низ двоструких ланаца:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \arrow[r, "\eta'_{01}"] & \mathfrak{A}_1 \arrow[r] & \mathfrak{A}_2 & \cdots \\
 & & & \\
\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \arrow[r] & \mathfrak{B}_1 \arrow[r, "\eta'_{12}"] \arrow[uu, "g_1"] & \mathfrak{B}_2 \arrow[uu, "g_2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Слика 11.2.

Притом се то ради Канторовом напред–назад методом тако да се у директном лимесу добије тражени резултат.

Детаљније, нека је $(V(S_\alpha), \eta_{\alpha\beta} : \alpha < \beta < \kappa)$ директни систем као у Теореми 11.11. и нека је ${}^*V(S)$ одговарајући директни лимес. Нека је такође $\psi_\alpha = \varinjlim \eta_{\alpha\beta}$ и ${}^*x = \psi_0(x)$.

Претпоставимо сада да је $\mathrm{Card}(L) < \kappa$ и нека су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ модели за L који су елементарно еквивалентни и имају интерналне универзуме, релације и функције.

Због тога што је κ регуларан кардинал и кардиналност од L мања од κ, постоји $\alpha < \kappa$ тако да $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V(S_\alpha)$. Отуда добијамо да се модел $\mathfrak{A} = (A, R_i, f_j, c_k)_{i \in I, j \in J, k \in K}$ може представити преко модела $\mathfrak{A}' = (A', R'_i, f'_j, c'_k)_{i \in I, j \in J, k \in K}$, где је $A', R'_i, f'_j, c'_k \in V(S_\alpha)$ и $A = \psi_\alpha(A')$, $R_i = \psi_\alpha(R'_i)$, $f_j = \psi_\alpha(f'_j)$ и $c_k = \psi_\alpha(c'_k)$. Слично важи и за модел $\mathfrak{B}$.

Применимо сада ω пута Лему 11.3. полазећи од α-тог места преко горе наведеног низа двоструких ланаца. Притом је

- $\eta'_{nn+1} = \eta_{\alpha+n\alpha+n+1}$, $\mathfrak{A}_{n+1} = \eta'_{nn+1}(\mathfrak{A}_n) \restriction L$ (сличне везе важе за $\mathfrak{B}_{n+1}$),
- $f_{n+1}(\eta'_{n-1n}(a)) = \eta'_{nn+1}(f_n(a))$ за $a \in A_{n-1}$.

Нека је $f = \bigcup_{n \geq 1} f_n$ и $g = \bigcup_{n \geq 1} g_n$. Притом је $f \circ g = \mathrm{id}$, те је f очигледно изоморфизам између

$$\eta_{\alpha\beta}(\mathfrak{A}') = (\eta_{\alpha\beta}(A'), \eta_{\alpha\beta}R'_i), \eta_{\alpha\beta}(f'_j), \eta_{\alpha\beta}(c'_k))_{i \in I, j \in J, k \in K}$$

и $\eta_{\alpha\beta}(\mathfrak{B}')$, где је $\beta = \alpha + \omega$. Отуда је $\psi_\beta(f)$ изоморфизам између модела $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. ■

Следећа теорема је директна последица претходне и од великог је значаја за примене.

ТЕОРЕМА 11.13. *Претпоставимо да* $^*V(S)$ *испуњава својство* κ*–изоморфизма. Ако су* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *елементарно еквивалентне структуре у* $V(S)$ *и* $\mathrm{Card}(L) < \kappa$*, тада су структуре* $^*\mathfrak{A} \restriction L$ *и* $^*\mathfrak{B} \restriction L$ *изоморфне. Ако је притом* $\mathrm{Card}(A) < \kappa$ *и* $\mathfrak{A}$ *је елементарни подмодел од* $\mathfrak{B}$*, тада се изоморфизам може изабрати тако да буде идентитет на* $\{\, ^*a \mid a \in A \,\}$*.*

Подсетимо се да смо у другој глави дефинисали појам Булове алгебре. Елемент a је *атом* у Буловој алгебри $\mathbf{B}$ ако је $a > 0$ и $\neg(\exists b)(a > b \wedge b > 0)$. Булова алгебра $\mathbf{B}$ је *атомска* ако за сваки $x \neq 0$ постоји атом a тако да је $x \geq a$.

Следећа лема је веома познати резултат у теорији Булових алгебри.

ЛЕМА 11.4. *Нека су* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *скуповне и атомске Булове алгебре. Модел* $(\mathbf{A}, a)_{a \in A'}$ *је елементарно еквивалентан моделу* $(\mathbf{B}, b)_{b \in B'}$ *ако и само ако за сваки* $n \geq 1$*, свака два низа* $a_1, \ldots, a_n$ *и* $b_1, \ldots, b_n$ *респективно из* A' *и* B' *и сваки* $\Delta \subseteq \{\, 1, \ldots, n \,\}$ *елементи*

$$c_\Delta = \bigcap\nolimits_{i \in \Delta} a_i \cap \bigcap\nolimits_{i \notin \Delta} a_i^c \quad i \quad d_\Delta = \bigcap\nolimits_{i \in \Delta} b_i \cap \bigcap\nolimits_{i \notin \Delta} b_i^c$$

имају или оба једновремено бесконачно много атома испод или једновремено једнак коначан број атома испод.

ТЕОРЕМА 11.14. *Нека је* $^*(V(S)$ *нестандардни универзум који има својство* κ*–изоморфизма. Тада је он* κ*–засићен.*

Доказ. Нека је $X \in V(S)$ и нека је $\mathcal{A}$ колекција интерналних подскупова од $^*X$ тако да је $\mathrm{Card}(\mathcal{A}) < \kappa$. Претпоставимо да $\mathcal{A}$ има својство коначног пресека и да је, шта више, за $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, скуп $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ бесконачан. У супротном, $\bigcap \mathcal{A}$ био би тривијално непразан.

Нека $a \in V(S)$ и $a \notin X$. Ставимо $X' = X \cup \{\, a \,\}$ и $A' = A \cup \{\, a \,\}$ за $A \in \mathcal{A}$.

Нека су $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}'$ Булове алгебре свих интерналних подскупова од $^*X$ и $^*X'$ респективно, тј.

$$\mathbf{B} = (^*\mathbf{P}(X), \cap, \cup, ^c, \emptyset, X) \quad \text{и} \quad \mathbf{B}' = (^*\mathbf{P}(X'), \cap, \cup, ^c, \emptyset, X').$$

Булове алгебре $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}'$ су атомске и за сваки низ $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ и за сваки $\Delta \subseteq \{\, 1, \ldots, n \,\}$ скупови

$$\bigcap\nolimits_{i \in \Delta} A_i \cap \bigcap\nolimits_{i \notin \Delta} A_i^c \quad \text{и} \quad \bigcap\nolimits_{i \in \Delta} A_i' \cap \bigcap\nolimits_{i \notin \Delta} A_i'^c$$

су или оба бесконачни или оба коначни са истим бројем елемената. На основу претходне леме следи да су модели $(\mathbf{B}, A)_{A\in\mathcal{A}}$ и $(\mathbf{B}', A')_{A\in\mathcal{A}}$ елементарно еквивалентни. Како ${}^*V(S)$ има својство κ–изоморфизма, то постоји изоморфизам f између $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}'$ тако да је $f(A') = A$ за свако $A \in \mathcal{A}$. Како f чува атоме, то из $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A' \neq \emptyset$ следи $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Одатле следи да је ${}^*V(S)$ κ–засићен нестандардан универзум. ■

Упућујемо читаоца, на крају, да друге занимљиве везе између теорије модела и нестандардне анализе заједно са применама у теорији Банахових простора потражи у [42], [43] и [50].

Глава 12

Елементи нестандардне теорије мере

У овом глави повезаћемо, још једном, теорију мере са нестандардном анализом. Једно од најзначајнијих оруђа нестандардне анализе којим се дошло до нових резултата у математици представља Лебова[1] мера. Она је посебно значајна за теорију мере, стохастичких процеса, парцијалних и интегралних једначина, функционалних једначина и слично.

12.1 Лебова мера

Лебова мера даје везу између дискретне математике (тачније комбинаторике) и континуалних процеса. То ћемо непосредно видети из Фишерове теореме, лифтинг теорема и интеграције.

Прво дајемо неке основне дефиниције из теорије мере. Нека је скуп $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$.

Дефиниција 12.1. Мерљив простор чини тројка $(X, \mathcal{A}, \mu)$ где:

(1) $X \neq \emptyset$;

(2) $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{P}(X)$ је σ-(комплетна)(Булова) алгебра, тј.

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,

[1] Peter Albert Loeb

(б) ако $A_i \in \mathcal{A}$ за $i \in \mathbb{N}$, тада $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$,

(в) ако $A \in \mathcal{A}$, тада $X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(3) $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ је σ-адитивна функција, тј. ако $A_i \in \mathcal{A}$ за $i \in \mathbb{N}$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$, тада $\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$.

Дефиниција 12.2. Коначно-адитиван мерљив простор чини уређена тројка $(X, \mathcal{A}, \mu)$ где:

(1) $X \neq \emptyset$;

(2) $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{P}(X)$ је (Булова) алгебра, тј.

(а) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,

(б) ако $A, B \in \mathcal{A}$, тада $A \cup B \in \mathcal{A}$,

(в) ако $A \in \mathcal{A}$, тада $X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(3) $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ је коначно-адитивна функција, тј. ако $A, B \in \mathcal{A}$ и $A \cap B = \emptyset$, тада $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Предпостављамо да је читалац упознат са основним последицама ових дефиниција (видети [12]). За нас је овде од посебног значаја појам интерналног (коначно-адитивног) мерљивог простора.

Дефиниција 12.3. Нека су X, $\mathcal{A}$, μ интернални скупови и $\mathcal{A} \subseteq {}^*\mathbf{P}(X)$. Тројка $(X, \mathcal{A}, \mu)$ чини интерналан коначно-адитиван мерљив простор ако је

(1) $\mathcal{A}$ Булова алгебра,

(2) $\mu\colon \mathcal{A} \to {}^*\overline{\mathbb{R}}^+$ коначно-адитивна мера.

Лако се види да је $\mu\left(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A\right) = \sum_{A\in\mathcal{F}} \mu(A)$ за сваки хиперконачан $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. Посебно, ако је X хиперконачан скуп, тада говоримо о хиперконачном интерналном простору. Следећи пример таквог простора је за нас интересантан.

Пример 12.1. Нека је $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $X = T_H = \left\{0, \dfrac{1}{H}, \dfrac{2}{H}, \ldots, 1\right\}$, $\mathcal{A} = {}^*\mathbf{P}(T_H)$ и $P(A) = \dfrac{|A|}{H+1}$ (за $A \in {}^*\mathbf{P}(T_H)$). Тада мерљив простор $(T_H, {}^*\mathbf{P}(T_H), P)$ зовемо хиперконачан простор са пребрајајућом мером $P\left(\left\{\dfrac{k}{H}\right\}\right) = \dfrac{1}{H+1}$ (ову меру зовемо још и униформна мера).

Веома се лако прелази од интерналног мерљивог простора са (хипер) коначно-адитивном мером μ на коначно-адитиван мерљив простор стављајући $\overline{\mu}(A) = \mathrm{st}\ \mu(A)$ за $A \in \mathcal{A}$.

Нека је $(X, \mathcal{A}, \mu)$ интерналан мерљив простор. Скуп $B \subseteq X$ је μ-*апроксимабилан* ако је

$$\inf\{\,\mathrm{st}\ \mu(A) \mid B \subseteq A,\ A \in \mathcal{A}\,\} = \sup\{\,\mathrm{st}\ \mu(A) \mid A \subseteq B,\ A \in \mathcal{A}\,\}.$$

Следећа дефиниција Лебове алгебре и Лебове мере је централна у овом делу и послужиће нам да повежемо теорију мере са нестандардном анализом.

Дефиниција 12.4. 1° Лебова алгебра $L(\mathcal{A})$ се састоји од свих $B \subseteq X$ таквих да је $B \cap F$ μ-апроксимабилан за свако $F \in \mathcal{A}$ са коначном μ-мером.

2° Лебова мера од μ је пресликавање $L(\mu)\colon L(\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}^{+}$ дефинисано са

$$L(\mu)(B) = \inf\{\,\mathrm{st}\ \mu(A) \mid A \in \mathcal{A} \text{ и } B \subseteq A\,\}.$$

Као што ћемо ускоро видети, помоћу познате теореме Каратеодорија[2)] можемо да покажемо да се сваки коначно адитиван мерљив простор настао од интерналног може да прошири до комплетног мерљивог простора. Наводимо сада неколико стандардних дефиниција и Каратеодоријеву теорему (видети [12], [35]).

Дефиниција 12.5. Мерљив простор $(X, \mathcal{A}, \mu)$ је *комплетан* ако садржи све подскупове скупа мере нула, тј. ако је $A \in \mathcal{A}$ и $\mu(A) = 0$, тада за сваки $B \subseteq A$ следи да $B \in \mathcal{A}$.

Дефиниција 12.6. У коначном мерљивом простора $(X, \mathcal{A}, \mu)$ мера μ је σ-адитивна ако за пребројиву фамилију дисјунктних скупова $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in N$, из $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ следи $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)$.

Теорема 12.1. (Каратеодори) *Свака коначно-адитивна мера μ на алгебри $\mathcal{A}$, која је σ-адитивна, може бити проширена до мере λ дефинисане на најмањој σ-комплетној алгебри $\sigma(\mathcal{A})$ која рашируje $\mathcal{A}$.*

Теорема 12.2. *Сваки мерљив простор можемо да проширимо до комплетног мерљивог простора.*

2) Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή (1873–1950)

Следећа лема је последица ω_1-засићености и даје нам потребне услове за примену Каратеодоријеве теореме.

ЛЕМА 12.1. *Коначно-адитиван мерљив простор* $(X, \mathcal{A}, \overline{\mu})$, *где је* $\overline{\mu} = \mathrm{st}\ \mu$, *је* σ*-адитиван.*

Доказ. Покажимо, прво, да за сваки монотоно неопадајући низ $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ важи

$$(1) \qquad \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A} \quad \text{акко} \quad \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\leq m} A_i, \ \text{ за неко } m \in \mathbb{N}.$$

Нека је $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Тада $A \setminus A_1 \supseteq A \setminus A_2 \supseteq \dots$ и $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(A \setminus A_i) = A \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset$, па због ω_1-засићености $\bigcap_{i\leq m}(A \setminus A_i) = \emptyset$ за неко $m \in N$. Отуда, $A = \bigcup_{i\leq m} A_i$. Обрат од (1) је очигледан.

Стога, ако је $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ дисјунктан низ елемената из $\mathcal{A}$, то из (1) имамо

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \overline{\mu}\left(\bigcup_{i\leq m} A_i\right) = \sum_{i\leq m} \overline{\mu}(A_i) = \sum_{i\in N} \overline{\mu}(A_i),$$

чиме је доказ леме завршен. ■

ТЕОРЕМА 12.3. (ЛЕБ) *Сваки интерналан мерљив простор* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *се може раширити до комплетног мерљивог простора.*

Доказ. Ово је непосредна последица Теорема 12.1, затим 12.2. и претходне леме. ■

Да ли је мерљив простор из претходне теореме баш конкретан простор $(X, L(\mathcal{A}), L(\mu))$? Одговор је потврдан. Прво наводимо без доказа један резултат Хенсона (видети [41]) у облику леме.

ЛЕМА 12.2. *Нека је* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *интерналан мерљив простор и нека важи* $L(\mu)(B) = \infty$ *за* $B \in \sigma(\mathcal{A})$. *Тада или постоји* $A \in \mathcal{A}$ *тако да је* $A \subseteq B$ *и* $\overline{\mu}(A) = \infty$ *или постоји низ* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *из* $\mathcal{A}$ *тако да је* $B \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ *и* $\overline{\mu}(A_i) < \infty$ *за сваки* $i \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 12.4. *Мера* $L(\mu)$ *је комплетна мера на* σ*-алгебри* $L(\mathcal{A})$ *и она представља јединствено раширење мере* $\overline{\mu}$. *Такође, за свако* $B \in L(\mathcal{A})$ *за које је* $L(\mu)(B) < \infty$, *постоји* $A \in \mathcal{A}$ *тако да је* $L(\mu)(B \triangle A) = 0$.

Доказ. Докажимо, прво, да је $L(\mathcal{A})$ σ-алгебра.

Претпоставимо да $B \in L(\mathcal{A})$. Да бисмо доказали да $X \setminus B \in L(\mathcal{A})$, претпоставимо да $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $F \in \mathcal{A}$ и $\overline{\mu}(F) < \infty$. Изаберимо $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ такве да $A_1 \subseteq B \cap F \subseteq A_2$ и $\mu(A_2) - \mu(A_1) < \varepsilon$. Тада $(X \setminus A_2) \cap F \subseteq (X \setminus B) \cap F \subseteq (X \setminus A_1) \cap F$ и будући да $\mu\big((X \setminus A_1) \cap F\big) - \mu\big((X \setminus A_2) \cap F\big) < \varepsilon$, следи $X \setminus B \in L(\mathcal{A})$.

Треба доказати да је $L(\mathcal{A})$ затворен за пребројиве уније. Нека је стога $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ низ елемената из $L(\mathcal{A})$ и претпоставимо да $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $F \in \mathcal{A}$ и $\overline{\mu}(F) < \infty$. Желимо да покажемо да је за $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$, скуп $F \cap B$ μ-апроксимабилан, тј. да можемо да нађемо скупове $A^1, A^2 \in \mathcal{A}$ тако да је $A^1 \subseteq B \cap F \subseteq A^2$ и $\mu(A^2) - \mu(A^1) < \varepsilon$. Како $B_i \in L(\mathcal{A})$, то постоје $A_i^1, A_i^2 \in \mathcal{A}$ тако да је $A_i^1 \subseteq B_i \cap F \subseteq A_i^2$ и да важи строга неједнакост $\mu(A_i^2) - \mu(A_i^1) < \varepsilon \cdot 2^{-(i+1)}$. Нека је $\alpha = \lim_{n \to \infty} \overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^1\right)$. Како је $\overline{\mu}(F) < \infty$, то је број α коначан. Постоји $m \in \mathbb{N}$ тако да је $\alpha - \dfrac{\varepsilon}{2} < \overline{\mu}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i^1\right)$, и нека је $A^1 = \bigcup_{i=1}^m A_i^1$. Желимо да нађемо спољну апроксимацију A^2. Користећи Теорему 11.5. (пребројива раширивост) раширимо низ $(A_i^2)_{i \in \mathbb{N}}$ до низа $(A_i^2)_{i \in {}^*\mathbb{N}}$. Како су $(A_i^2)_{i \in {}^*\mathbb{N}}$, μ, $\mathcal{A}$ интернални, то је, на основу интерналног дефиниционог принципа, и скуп

$$S = \left\{ n \in {}^*\mathbb{N} \,\middle|\, \bigcup\nolimits_{i=1}^n A_i^2 \in \mathcal{A} \ \text{ и } \ \mu\left(\bigcup\nolimits_{i=1}^n A_i^2\right) < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

интерналан. Ако $n \in \mathbb{N}$, тада

$$\mu\left(\bigcup\nolimits_{i=1}^n A_i^2\right) < \mu\left(\bigcup\nolimits_{i=1}^n A_i^1\right) + \sum\nolimits_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отуда $\mathbb{N} \subseteq S$, па на основу принципа преливања постоји $H \in S \setminus \mathbb{N}$. Нека је $A^2 = \bigcup_{i=1}^H A_i^2$. Тада $A^1 \subseteq B \cap F \subseteq A^2$ и $\mu(A^2) - \mu(A^1) < \varepsilon$, па отуда $B \in L(\mathcal{A})$.

Докажимо, друго, да је $L(\mu)$ σ-адитивна мера.

Нека је $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ низ међусобно дисјунктних елемената скупа $L(\mathcal{A})$. Треба да покажемо да је

$$L(\mu)\left(\bigcup\nolimits_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \sum\nolimits_{i=1}^\infty L(\mu)(B_i).$$

Можемо да претпоставимо да је сваки $L(\mu)(B_i)$ коначан, јер је у супротном горња једнакост тривијално задовољена. Тада, B_i је μ-апроксимабилан и нека су $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $A_i^1, A_i^2 \in \mathcal{A}$ изабрани тако да је $A_i^1 \subseteq B_i \subseteq A_i^2$ и

$$\overline{\mu}(A_i^2) - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < L(\mu)(B_i) < \overline{\mu}(A_i^1) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}. \tag{2}$$

Претпоставимо, прво, да је $\sum_{i=1}^{\infty} L(\mu)(B_i) = \infty$. Тада, на основу претходне релације, $\sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_i^1)$ је такође бесконачно, па се $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ може изнутра апроксимирати интерналним скуповима произвољно велике мере облика $\bigcup_{i=1}^{m} A_i^1$, те је $L(\mu)\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \infty$. Претпоставимо сада да је $\sum_{i=1}^{\infty} L(\mu)(B_i) = \alpha < \infty$. Тада је на основу (2) испуњено

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_i^2) - \frac{\varepsilon}{2} < \alpha < \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_i^1) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Очигледно је $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i^1\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i^1) > \alpha - \varepsilon$ за довољно велико $m \in \mathbb{N}$, па је $L(\mu)(B) \geq \alpha$. Да бисмо добили једнакост, морамо да апроксимирамо B споља. У том циљу раширимо низ $(A_i^2)_{i\in\mathbb{N}}$ до низа $(A_i^2)_{i\in{}^*\mathbb{N}}$. Како је на основу (3) испуњено $\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i^2) < \alpha + \varepsilon$ за свако $k \in \mathbb{N}$, то опет на основу интерналног дефиниционог принципа постоји $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ тако да је $\sum_{i=1}^{H} \mu(A_i^2) < \alpha + \varepsilon$. Очигледно је да скуп $\bigcup_{i=1}^{H} A_i^2$ апроксимира B одозго, па је $L(\mu)(B) \leq \alpha$.

Мера $L(\mu)$ је комплетна, јер за $B' \subseteq B$ и $L(\mu)(B) = 0$ важи

$$\begin{aligned} 0 &\leq L(\mu)(B') = \inf\{\, \overline{\mu}(A) \mid A \in \mathcal{A},\ B' \subseteq A \,\} \\ &\leq \inf\{\, \overline{\mu}(A) \mid A \in \mathcal{A},\ B \subseteq A \,\} = L(\mu)(B) = 0. \end{aligned}$$

Очигледно је $L(\mu)$ раширење коначно-адитивне мере $\overline{\mu}$. Јединственост раширења у случају $\overline{\mu}(X) < \infty$ следи непосредно из дефиниције μ-апроксимабилности. У случају $\overline{\mu}(X) = \infty$ јединственост следи из Хенсонове леме 12.2.

На крају, докажимо да за сваки $B \in L(\mathcal{A})$ ако је $L(\mu)(B) < \infty$, то постоји $A \in \mathcal{A}$ тако да је $L(\mu)(B \triangle A) = 0$. У том циљу посматрајмо монотоно растући низ $(A_i^1)_{i\in\mathbb{N}}$ и монотоно опадајући $(A_i^2)_{i\in\mathbb{N}}$, тако да $A_i^1 \subseteq B \subseteq A_i^2$ и $\mu(A_i^2) - \mu(A_i^1) < \dfrac{1}{n}$. Раширимо дате низове до низова $(A_i^1)_{i\in{}^*\mathbb{N}}$ и $(A_i^2)_{i\in{}^*\mathbb{N}}$. Тада интернални скуп

$$T = \{\, n \in {}^*\mathbb{N} \mid (A_i^1)_{i\leq n},\ (A_i^2)_{i\leq n} \text{ су монотони и } A_i^1 \subseteq A_i^2 \,\}$$

садржи $\mathbb{N}$, па тиме и $H \in T \setminus \mathbb{N}$. Ставимо $A = A_H^1$. Тада је испуњено $A_i^1 \subseteq A \subseteq A_i^2$ за свако $i \in \mathbb{N}$, па је $L(\mu)(B \triangle A) = 0$. ■

12.2 Лебегова мера и њена веза са Лебовом мером

Нека је $I = [0,1[$. Посматрајмо скуп

$$\mathcal{L} = \big\{ [a_1,b_1[\cup \cdots \cup [a_n,b_n[\;\big|\; n \in \mathbb{N},\ a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n \in I,$$
$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n \big\},$$

тј. скуп свих коначних унија полуотворених интервала. Тада се лако види да $\mathcal{L}$ чини (Булову) алгебру у односу на уобичајене операције. Очигледно је $I, \emptyset \in \mathcal{L}$ и $\mathcal{L}$ је затворен за унију скупова. Скуп $\mathcal{L}$ је затворен и за комплемент што се види из чињенице да $I \setminus ([a_1,b_1[\cup \cdots \cup [a_n,b_n[\,) = [0,a_1[\cup [b_1,a_2[\cup \cdots \cup [b_n,1[$. Дефинишимо $\overline{\lambda}\colon \mathcal{L} \to [0,1]$ са

$$\overline{\lambda}\,([a_1,b_1[\cup \cdots \cup [a_n,b_n[\,) = (b_1 - a_1) + \cdots + (b_n - a_n).$$

Показује се да је $\overline{\lambda}$ коначно-адитивна мера на $\mathcal{L}$ и да важи следећа лема.

Лема 12.3. *Коначно-адитиван мерљив простор* $(I, \mathcal{L}, \overline{\lambda})$ *је* σ*-адитиван.*

Непосредна последица претходне леме и Каратеодоријеве Теореме 12.1. је конструкција фамилије Лебег[3)] мерљивих скупова и Лебегове мере.

Теорема 12.5. *Простор* $(I, \mathcal{L}, \overline{\lambda})$ *се може раширити до комплетног мерљивог простора* $(I, \mathfrak{L}, \lambda)$.

Лако се види да $\mathfrak{L}$ садржи интервале $\big(]a,b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big[a-\frac{1}{n}, b\big[\big)$, па тиме отворене и затворене скупове. На тај начин видимо да $\mathfrak{L}$ представља добро познату фамилију Лебег мерљивих скупова и λ Лебегову меру. Такође се показује да за

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathrm{o}}(A) &= \inf\{\,\lambda(B)\mid A \subseteq B,\ B \text{ отворен}\,\}, \\ \lambda_{\mathrm{i}}(A) &= \sup\{\,\lambda(B)\mid B \subseteq A,\ B \text{ затворен}\,\} \end{aligned}$$

важи:

$$A \in \mathfrak{L} \quad \text{ако и само ако} \quad \lambda_{\mathrm{i}}(A) = \lambda_{\mathrm{o}}(A) = \lambda(A).$$

Показаћемо сада везу између Лебове мере на T_H (видети Пример 12.1.) и Лебегове мере. Овде ћемо одговарајућу меру која се добија

[3)] Henri Leon Lebesgue (1875–1941)

помоћу P такође означити са P. Ова веза је дата у облику следеће Фишерове[4)] теореме која у основи показује да $\mathrm{st}^{-1}\colon [0,1] \to T_H$ чува меру.

Теорема 12.6. *За* $A \subseteq [0,1]$ *следећа тврђења су еквивалентна:*

(а) $A \in \mathfrak{L}$;

(б) $\mathrm{st}^{-1}(A) \in L\left({}^*\mathbf{P}(T_H)\right)$, *где је* $\mathrm{st}^{-1}(A) = \{\, x \in T_H \mid \mathrm{st}(x) \in A \,\}$.

Ако је (б) *испуњено, тада*

$$\lambda(A) = P\big(\mathrm{st}^{-1}(A)\big).$$

Доказ. Показаћемо, прво, да из (а) следи (б). Ако уочимо интервал $[a,b] \subseteq [0,1[$, тада је

$$\mathrm{st}^{-1}\big([a,b]\big) = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} {}^*\Big(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\Big) \cap T_H \in L({}^*\mathbf{P}(T_H)).$$

Такође се лако види да $P\big(\mathrm{st}^{-1}([a,b])\big) = b-a = \lambda\big([a,b]\big)$. Нека је $A_i \in \mathfrak{L}$ за $i \in \mathbb{N}$ и $\mathrm{st}^{-1}(A_i) \in L\big({}^*\mathbf{P}(T_H)\big)$. Тада је $\mathrm{st}^{-1}\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{st}^{-1}(A_i) \in L\big({}^*\mathbf{P}(T_H)\big)$. Слично, ако $A \in \mathfrak{L}$, тада $[0,1[\setminus A \in \mathfrak{L}$, па $\mathrm{st}^{-1}\big([0,1[\setminus A\big) = \mathrm{st}^{-1}\big([0,1[\big) \setminus \mathrm{st}^{-1}(A) \in L\big({}^*\mathbf{P}(T_H)\big)$. Видимо да је за сваки Борелов[5)] скуп (подсетимо се да је алгебра Борелових скупова најмања σ-алгебра која садржи отворене скупове) $B \in \mathfrak{L}$ такође важи $\mathrm{st}^{-1}(B) \in L\big({}^*\mathbf{P}(T_H)\big)$. Како је $A \in \mathfrak{L}$ облика $A = B \triangle S$, где је B Борелов и S мере нула, то је $\mathrm{st}^{-1}(A) = \mathrm{st}^{-1}(B) \triangle \mathrm{st}^{-1}(S)$ због комплетности $L\big({}^*\mathbf{P}(T_H)\big)$ такође у њему. Како је отворен скуп унија дисјунктних интервала и затворен комплемент отвореног, то је $\lambda(A) = P\big(\mathrm{st}^{-1}(A)\big)$ за затворен скуп A.

Да бисмо доказали тврђење у другом смеру, претпоставимо $A \subseteq [0,1]$ и $\mathrm{st}^{-1}(A) \in L\big({}^*\mathbf{P}(T_H)\big)$. Уочимо интерналан скуп $E \subseteq \mathrm{st}^{-1}(A)$, такав да $P(E) \geq P\big(\mathrm{st}^{-1}(A)\big) - \varepsilon$. Скуп $\mathrm{st}\, E = D$ је затворен (Теорема 4.32.) и $D \subseteq A$. Такође $E \subseteq \mathrm{st}^{-1}(D) \subseteq \mathrm{st}^{-1}(A)$. На основу првог дела доказа $\lambda(D) = P\big(\mathrm{st}^{-1}(D)\big) \geq P(E) \geq P\big(\mathrm{st}^{-1}(A)\big) - \varepsilon$, а отуда је $\lambda_{\mathrm{i}}(A) \geq P\big(\mathrm{st}^{-1}(A)\big)$. Сличан аргумент када се примени на $[0,1[\setminus A$ даје $\lambda_{\mathrm{o}}(A) \leq P\big(\mathrm{st}^{-1}(A)\big)$. Отуда важи $\lambda(A) = \lambda_{\mathrm{i}}(A) = \lambda_{\mathrm{o}}(A) = P\big(\mathrm{st}^{-1}(A)\big)$. ■

4) Ronald Aylmer Fisher (1890–1962)

5) Émile Borel (1871–1956)

На основу претходне теореме лако се могу добити Леб немерљиви подскупови од T_H. Ако је $A \subseteq [0,1[$ Лебег немерљив подскуп (на пример, Виталијев[6]) скуп, видети [35]), онда је $\mathrm{st}^{-1}(A)$ Леб немерљив. До Леб немерљивих скупова се стиже и лакше. Нека је $\sim$ релација на T_H, тако да је $k/H \sim s/H$ ако и само ако је $k-s$ коначан број. Лако се види да је $\sim$ релација еквиваленције, и нека је $E \subseteq T_H$ селектор од $\sim$, тј. E садржи по тачно једног представника сваке класе еквиваленције за $\sim$. Очигледно је $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(E+n) = T_H$ и ако је E мерљив, $P(E) = P(E+n)$. Отуда је $P(T_H) = 0$ или $P(T_H) = \infty$, па отуда E није Леб мерљив.

Даћемо сада један универзалан поступак за добијање немерљивих скупова. Већ смо видели (Пример 4.7.) да бесконачни хиперконачни скупови имају кардиналност најмање 2^ω. Како су кардинални бројеви добро уређени, постоји $H \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ тако да је $\{\, k \in {}^*\mathbb{N} \mid k \le H \,\}$ најмање могуће кардиналности α. Нека је $A = \{\, k \in {}^*\mathbb{N} \mid 1 \le k \le \log_2 H \,\}$ и $\mathcal{A}$ скуп свих бесконачних хиперконачних подскупова од A. На основу избора броја H и $|\mathcal{A}| \le 2^{\log_2 H} \le H$ имамо $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(\mathcal{A}) = \mathrm{Card}(B) = \alpha$ за сваки $B \in \mathcal{A}$. Тада је $\mathcal{A} = \{\, A_\gamma \mid \gamma < \alpha \,\}$ и можемо да дефинишемо скупове $B_\gamma = \{\, x_\delta, y_\delta \mid \delta < \gamma \,\}$ на следећи индуктиван начин. Нека је $B_0 = \emptyset$. За $\gamma < \alpha$, будући да $\mathrm{Card}(B_\gamma) < \mathrm{Card}(A_\gamma) = \alpha$, изаберимо $x_\gamma \ne y_\gamma$, тако да $x_\gamma, y_\gamma \in A_\gamma \setminus B_\gamma$. Ако је γ ординал наследник, ставимо $B_{\gamma+1} = B_\gamma \cup \{\, x_\gamma, y_\gamma \,\}$, а ако је γ гранични ординал, ставимо $B_\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} B_\delta$. Уочимо скуп $V = \{\, x_\gamma \mid \gamma < \alpha \,\}$. Тада је за $B \in \mathcal{A}$, $B \cap V \ne \emptyset$ јер за неко x_γ имамо $x_\gamma \in B \cap V$, а такође и $B \setminus V \ne \emptyset$ јер за неко y_γ важи $y_\gamma \in B \setminus V$. То даље значи да $V \subseteq B$ ако и само ако $V \cap (A \setminus B) = \emptyset$. Отуда

$$0 = \sup\{\, \mathrm{st}\ \mu(B) \mid B \in \mathcal{A},\ B \subseteq V \,\} \ne \inf\{\, \mathrm{st}\ \mu(B) \mid B \in \mathcal{A},\ V \subseteq B \,\} = 1,$$

за сваку неатомичну вероватносну меру μ (тј. такву да је $\mu\big(\{x\}\big) \approx 0$ за $x \in A$), па V није мерљив.

12.3 Производ Лебових простора

Полазећи од два интернална коначно адитивна мерљива простора дата са $\mathbf{X} = (X, \mathcal{A}, \mu)$ и $\mathbf{Y} = (Y, \mathcal{B}, \nu)$ добијају се њихови одговарајући Лебови простори $L(\mathbf{X}) = \big(X, L(\mathcal{A}), L(\mu)\big)$ и $L(\mathbf{Y}) = \big(Y, L(\mathcal{B}), L(\nu)\big)$. Слично, као у конструкцији Лебегове мере, посматрамо коначне уније

[6]) Giuseppe Vitali (1875–1932)

правоугаоника $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i$, где $A_i \in L(\mathcal{A})$ и $B_i \in L(\mathcal{B})$. Можемо да претпоставимо да су правоугаоници дисјунктни. Ове коначне уније чине алгебру на $X \times Y$. Мера

$$L(\mu) \times L(\nu)\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} L(\mu)(A_i) \cdot L(\nu)(B_i)$$

је σ-адитивна на алгебри коначних унија правоугаоника, па се на основу Каратеодоријеве теореме може да рашири до мерљивог простора

$$L(\mathbf{X}) \times L(\mathbf{Y}) = \big(X \times Y, L(\mathcal{A}) \times L(\mathcal{B}), L(\mu) \times L(\nu)\big),$$

који зовемо *производ простор*.

Нека је $\overline{L(\mathcal{A}) \times L(\mathcal{B})}$ комплетирање од $L(\mathcal{A}) \times L(\mathcal{B})$.

Ако пак кренемо обрнутим редоследом па прво дефинишемо интернални производ $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = (X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$, при чему важи $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ за $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$, па тек онда дефинишемо одговарајући Лебов мерљив простор

$$L(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) = \big(X \times Y, L(\mathcal{A} \times \mathcal{B}), L(\mu \times \nu)\big),$$

лако се показује да $\overline{L(\mathcal{A}) \times L(\mathcal{B})} \subseteq L(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

Ову чињеницу је доказао Андерсон у [4] на следећи начин. Нека $A \in L(\mathcal{A})$ и $B \in L(\mathcal{B})$. Тада постоје интернални скупови $U \in \mathcal{A}$ и $V \in \mathcal{B}$ тако да $L(\mu)(A \triangle U) = 0$ и $L(\nu)(B \triangle V) = 0$. Тада је, због $(A \times B) \triangle (U \times V) \subseteq (A \triangle U) \times (B \cup V) \cup (A \cup U) \times (B \triangle V)$, испуњено

$$L(\mu \times \nu)\big((A \times B) \triangle (U \times V)\big) = 0.$$

Отуда, $L(\mu \times \nu)(A \times B) = L(\mu \times \nu)(U \times V) = \overline{\mu \times \nu}(U \times V) = \overline{\mu}(U) \cdot \overline{\nu}(V) = L(\mu)(A) \cdot L(\nu)(B) = L(\mu) \times L(\nu)(A \times B)$, што је довољно да обезбеди инклузију.

У општем случају инклузија је права, што показује следећи Хуверов[7] пример.

Пример 12.2. Нека је X хиперконачан скуп и $Y = {}^*\mathbf{P}(X)$. Очигледно је $|Y| = 2^{|X|}$. Нека су P_X и P_Y одговарајуће униформне мере. Очигледно да је $A = \{\,(x, y) \mid x \in y\,\} \subseteq X \times Y$ интерналан скуп и $P_{X \times Y}(A) = \dfrac{1}{2}$. Ако би A био у $L\big({}^*\mathbf{P}(X)\big) \times L\big({}^*\mathbf{P}({}^*\mathbf{P}(X))\big)$, тада би постојали интернални

[7] Douglas Hoover

скупови $U \subseteq X$ и $V \subseteq Y$, тако да $U \times V \subseteq A$ и $\overline{P}_X(U) > 0$ и $\overline{P}_Y(V) > 0$. Али $U \times V \subseteq A$ повлачи

$$V \subseteq V_1 = \{\, B \mid U \subseteq B \subseteq X \ \text{ и } \ B \text{ је интерналан} \,\}.$$

Међутим, $\overline{P}_Y(V_1) = \operatorname{st} \dfrac{2^{|X \setminus U|}}{2^{|X|}} = \operatorname{st} \dfrac{1}{2^{|U|}} = 0$, што је контрадикција.

12.4 Лифтинг теореме

Снага Лебове мере најбоље се види кроз везу између мерљивости функција на Лебовом простору $L(\mathbf{X}) = \big(X, L(\mathcal{A}), L(\mu)\big)$ и интерналних ($\mathcal{A}$–мерљивих) функција на X. То се, видећемо, преноси и на интеграбилност.

Дефиниција 12.7. 1° Функција $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ је Леб мерљива ако за свако $r \in \overline{\mathbb{R}}$ важи $\{\, x \in X \mid f(x) \le r \,\} \in L(\mathcal{A})$.

2° Интернална функција $F\colon X \to {}^*\mathbb{R}$ је $\mathcal{A}$-мерљива уколико важи $\{\, x \in X \mid F(x) \le r \,\} \in \mathcal{A}$.

Очигледно, када је $\mathcal{A} = {}^*\mathbf{P}(X)$, тада је свака интернална функција $\mathcal{A}$-мерљива.

Дефиниција 12.8. Интернална и $\mathcal{A}$-мерљива функција $F\colon X \to {}^*\mathbb{R}$, јесте *лифтинг* функције $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ако

$$L(\mu)\{\, x \in X \mid \operatorname{st}(F(x)) \ne f(x) \,\} = 0.$$

Према томе, следећи дијаграм комутира за скоро све $x \in X$

$$\begin{tikzcd}
 & {}^*\mathbb{R} \arrow[d, "\operatorname{st}"] \\
X \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"'] & \overline{\mathbb{R}}
\end{tikzcd}$$

Слика 12.1.

Следећа теорема (прва од две лифтинг теореме) од великог је значаја.

ТЕОРЕМА 12.7. *Нека је* $\mathbf{X} = (X, \mathcal{A}, \mu)$ *интерналан коначно адитиван мерљив простор и* $L(\mathbf{X}) = \big(X, L(\mathcal{A}), L(\mu)\big)$ *одговарајући Лебов простор. Тада функција* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *је Леб мерљива ако и само ако постоји интернална* $\mathcal{A}$*-мерљива функција* $F\colon X \to {}^*\mathbb{R}$ *тако да је*

$$L(\mu)\big(\{\, x \in X \mid \operatorname{st}(F(x)) \neq f(x) \,\}\big) = 0,$$

тј. $\operatorname{st}(F(x)) = f(x)$ *за* $L(\mu)$*-скоро све* $x \in X$.

Доказ. Претпоставимо, прво, да је F лифтинг од f. За сваки реалан број r,

$$\{\, x \in X \mid \operatorname{st}(F(x)) \leq r \,\} = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \left\{\, x \in X \,|\, F(x) \leq r + \frac{1}{n} \,\right\} \in L(\mathcal{A}),$$

па је $\operatorname{st}\ F$ Леб мерљива. Како је $f(x) = \operatorname{st}(F(x))$ $L(\mu)$-скоро свуда, то је f Леб мерљива.

Обратно, нека је f Леб мерљива функција и нека је скупом $\{\, q_n \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$ дата енумерација стандардних рационалних бројева. Нека је B_n дат са $B_n = \{\, x \in X \,|\, f(x) \leq q_n \,\}$. Можемо наћи интерналне скупове $A_n \in \mathcal{A}$ тако да је $L(\mu)(A_n \triangle B_n) = 0$ и $A_n \subseteq A_m$ кад год важи да је $q_n \leq q_m$. Ово последње следи из чињенице да иако можда није $A_n \subseteq A_m$, сигурно је $A_n \setminus A_m$ мере нула, па се сваки коначан низ $A_{n_1}, \ldots, A_{n_l}$ може „поправити" до низа $A'_{n_1}, \ldots, A'_{n_l}$ тако да је $A'_{n_i} \subseteq A'_{n_j}$ ако и само ако $q_{n_i} \leq q_{n_j}$. Применом ω_1-засићености можемо доћи до низа $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ са траженом монотоношћу. На основу принципа преливања постоји бесконачно $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ тако да је

$$q_n \leq q_m \Leftrightarrow A_n \subseteq A_m \ \text{ за све } \ n, m \leq H.$$

Како је $\{\, q_1, \ldots, q_H \,\}$ хиперконачан и $A_n \in \mathcal{A}$ за све $n \leq H$, то можемо да дефинишемо интерналну $\mathcal{A}$-мерљиву функцију $F\colon X \to {}^*\mathbb{R}$, такву да $(\forall n \leq H)(F(x) \leq q_n \Leftrightarrow x \in A_n)$. Ако је $q_{i_1} < q_{i_2} < \cdots < q_{i_H}$ поредак у ${}^*\mathbb{Q}$, ставимо

$$F(x) = \begin{cases} q_{i_1}, & x \in A_{i_1} \\ q_{i_j}, & x \in A_{i_j} \setminus A_{i_{j-1}} \\ q_{i_H} + 1, & x \notin A_{i_H} \end{cases}.$$

Тада је $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \triangle B_n)$ $L(\mu)$-мере нула и за свако x ван тог скупа

$$(\forall n \in \mathbb{N})(F(x) \leq q_n \Leftrightarrow f(x) \leq q_n).$$

Одатле је $\operatorname{st}(F(x)) = f(x)$ скоро свуда. ■

Последица 12.1. *Нека је $X = T_H$, $\mathcal{A} = {}^*\mathbf{P}(T_H)$ и $\mu = P$. Тада је $f\colon T_H \to \overline{\mathbb{R}}$ Леб мерљива функција ако и само ако f има интерналну лифтинг функцију F (која је обавезно ${}^*\mathbf{P}(T_H)$-мерљива).*

Следећи дијаграм помаже нам да уведемо појам лифтинга.

$$\begin{tikzcd} T_H \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathrm{st}"'] & {}^*\mathbb{R} \arrow[d, "\mathrm{st}"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "f"] & \overline{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

Слика 12.2.

Лако се види да свакој функцији $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ одговара функција $\overline{f}\colon T_H \to \mathbb{R}$, тако да је $\overline{f}(x) = f(\mathrm{st}(x))$ за свако $x \in T_H$. На основу Фишерове Теореме 12.6. и чињенице да важи једнакост $\overline{f}^{-1}\big(]-\infty, r]\big) = \mathrm{st}^{-1}\left(f^{-1}(]-\infty, r])\right)$ следи да је f Лебег мерљива ако и само ако је $\overline{f}$ Леб мерљива.

Дефиниција 12.9. Интернална функција $F\colon T_H \to {}^*\mathbb{R}$ је лифтинг функције $f\colon [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ ако је $\mathrm{st}(F(x)) = f(\mathrm{st}(x))$ $L(\mu)$-скоро свуда.

Графички то представљамо горњим дијаграмом који комутира за скоро свако $x \in T_H$. На основу претходне дефиниције, Последице 12.1. и везе између Леб и Лебег мерљивих функција, доказује се следеће тврђење.

Теорема 12.8. *Функција $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ је Лебег мерљива ако и само ако има лифтинг $F\colon T_H \to {}^*\mathbb{R}$.*

Ово тврђење се лако уопштава на функцију $f\colon [-k+a, k+a] \to \mathbb{R}$ и хиперконачан $X \subseteq {}^*\mathbb{R}$ такав да је $\mathrm{st}(X) = [-k+a, k+a]$ као и $X \subseteq \left\{ \frac{k}{H} \mid -H^2 \leq k \leq H^2 \right\}$.

Непрекидне функције могу се, што се и очекује, још боље и независно од мере да апроксимирају интерналним функцијама.

Дефиниција 12.10. Интернална функција $F\colon T_H \to {}^*\mathbb{R}$ је униформни лифтинг функције $f\colon [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ ако је $\mathrm{st}(F(x)) = f(\mathrm{st}(x))$ за свако $x \in T_H$.

ТЕОРЕМА 12.9. *Функција* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *је нейрекидна ако и само ако има униформни лифшинг.*

Доказ. Нека је функција f непрекидна и нека је $F = {}^*f \restriction T_H$. Тада је, очигледно, за свако $x \in T_H$

$$\operatorname{st}(F(x)) = \operatorname{st}({}^*f(x)) = f(\operatorname{st}(x)),$$

па је F униформни лифтинг функције f.

С друге стране, нека је F униформни лифтинг за f. Уочимо $a \in [0,1]$ и нека је $\Delta \in \mu^+(0)$. Тада за $\varepsilon > 0$ и за свако $\dfrac{k}{H} \in T_H$ важи:

$$\left|\frac{k}{H} - a\right| < \Delta \Rightarrow \left|F\left(\frac{k}{H}\right) - f(a)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Како импликација важи за произвољно $\Delta \in \mu^+(0)$, то према Теореми 4.20. важи и за неко стандардно $\delta > 0$, тј.

$$\left|\frac{k}{H} - a\right| < \delta \Rightarrow \left|F\left(\frac{k}{H}\right) - f(a)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека је $x \approx \dfrac{k}{H} \leq a$. Тада је очигледно $\left|F\left(\dfrac{k}{H}\right) - f(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, па отуда

$$\big(\forall x \in]0,1]\big)\ \big(|x-a| < 2\delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big).$$

Према томе, функција f је непрекидна. ■

12.5 Једна примена лифтинг теорема

У овом делу показаћемо како се претходне две теореме могу применити у квалитативној теорији функционалних једначина, или конкретније, показаћемо да су у једној широкој класи система функционалних једначина сва мерљива решења непрекидна. То ће као последицу дати следећа два тврђења.

ТЕОРЕМА 12.10. *Јединсшвено мерљиво решење Кошијеве једначине*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

је $f(x) = f(1) \cdot x$.

ТЕОРЕМА 12.11. *Јединствено мерљиво решење следећег система функционалних једначина и неједначина*

$$f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y),$$

$$g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y),$$

$$f^2(x) + g^2(x) = 1, \quad f(\pi/2) = 1, \quad g(\pi/2) = 0,$$

$$0 < f(x) < x \text{ за } 0 < x < \pi/2$$

су $f(x) = \sin x$ *и* $g(x) = \cos x$.

Уведимо, прво, неколико дефиниција и докажимо једну лему.

Нека је $[\alpha]$ цео део од $\alpha \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$. Дефинишимо $a(H) = \dfrac{[aH]}{H}$ и $\alpha * \beta = \dfrac{[\alpha\beta H]}{H}$, где $\alpha, \beta \in {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$, $a \in \mathbb{R}$ и $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Даље, нека је

$$T_c^H + d = \left\{ -c+d, -c+d+\frac{1}{H}, \ldots, c+d-\frac{1}{H}, c+d \right\}$$

хипервременски интервал за $c = a(H)$, $d = b(H)$, $a \in \mathbb{R}^+$ и $b \in \mathbb{R}$.

Лако се види да је $b = \text{st}(b(H))$ и

$$\alpha * \beta = \max \left\{ \frac{k}{H} \in T_{a(H)}^H + b(H) \;\middle|\; \frac{k}{H} \leq \alpha\beta \right\}$$

под условом да $\alpha\beta \in \left]-a+b, a+b\right[$, $a \in \mathbb{R}^+$ и $b \in \mathbb{R}$. Такође, примећујемо да је $\text{st}(\alpha * \beta) = \text{st}(\alpha) \cdot \text{st}(\beta)$. Нека је $f_{a,b}\colon [-a+b, a+b] \to \mathbb{R}$ и $F_{a,b}\colon T_{a(H)}^H + b(H) \to {}^*\mathbb{R}$. Важи одговарајуће уопштење Теореме 12.7. и слично Теореме 12.9.

ТЕОРЕМА 12.12. 1° *Функција $f_{a,b}$ је Лебег мерљива ако и само ако има лифтинг функцију $F_{a,b}$.*

2° *Функција $f_{a,b}$ је непрекидна ако и само ако има униформни лифтинг функцију $F_{a,b}$.*

ЛЕМА 12.4. *Нека су $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и β реални бројеви тако да су бар два од $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ различити од нуле. Нека је $\alpha = \max\{\,|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\,\}$. Ако је $\underline{a_i} = \dfrac{\alpha_i}{\alpha}$ за $i = 1, \ldots, n$, m најмањи природан број такав да је $m\alpha > 1$*

и k природан број такав да је $n > \dfrac{(m+2)(k+1)+1}{2k}$, тада за сваки интернаалан скуп $A \subseteq {}^*[-k,k]$ за који је $P(A) > 2k - \dfrac{1}{n}$ и за сваки $x \in T_a^H + b$ (где $a = \dfrac{[kH/n]}{H}$ и $b = \dfrac{[\beta H]}{H}$) постоје $x_1, \dots, x_n \in A$ тако да $x = \underline{a_1} * x_1 + \dots + \underline{a_n} * x_n + \beta$.

Доказ. Транслацијом за $\dfrac{[\beta H]}{H}$ редукујемо проблем на случај $\beta = 0$. Такође, довољно је да посматрамо случај $n = 2$ због тога што општи случај следи из њега стављајући $x_3 = \dots = x_n = 0$. Према томе, довољно је да покажемо да за свако $x \in T_a^H$ постоје $y, z \in A$ тако да је $x = y + \alpha * z$ $(0 < |\alpha| \leq 1)$. То је еквивалентно са $A \cap (x - \alpha * A) \neq \emptyset$ (где је $\alpha * A = \{\, \alpha * a \mid a \in A \,\}$).

У супротном, из $A \cap (x - \alpha * A) = \emptyset$ следи

$$2k + \frac{k}{n} \geq P(A) + P(x - \alpha * A) > 2k - \frac{1}{n} + \frac{P(A)}{m+2} \geq 2k - \frac{1}{n} + \frac{2k - \frac{1}{n}}{m+2}.$$

Отуда, $n \leq \dfrac{(m+2)(k+1)+1}{2k}$, што даје контрадикцију. ■

Даћемо сада општу теорему из које као примери следе наведена тврђења.

Теорема 12.13. *Нека је*

$$f^i(\alpha_1^i x_1 + \alpha_2^i x_2 \cdots + \alpha_n^i x_n + \beta^i) =$$
$$= g_i(f^1(x_1), \dots, f^1(x_n), \dots, f^m(x_1), \dots, f^m(x_n), x_1, x_2, \dots, x_n)$$

за $i = 1, \dots, m$ систем функционалних једначина таквих да су функције $g_i \colon \mathbb{R}^{n \cdot m + n} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ непрекидне. Тада је свако мерљиво решење $(f^1, \dots, f^m)$ непрекидно.

Доказ. Мерљиве функције $f_{k,0}^i \equiv f_k^i$ имају лифтинг $F_{k,0}^i \equiv F_k^i$. Нека је

$$U_{i,k} = \{\, x \in T_k^H \mid \mathrm{st}(F_k^i(x)) = f_k^i(\mathrm{st}(x)) \,\}.$$

Тада за $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ постоји $A_i \subseteq U_{i,k}$ тако да је $\mu(A_i) > 2k - \dfrac{\varepsilon}{m}$. Нека је $A = \bigcap\{\, A_i \mid i \leq m \,\}$. Лако се види да је тада $\mu(A) > 2k - \varepsilon$, што нам у следећим разматрањима омогућава да сваку једначину третирамо независно од осталих и где ће A бити фиксиран и независан од једначине.

Разликујемо два случаја који се односе на бројеве α^i из претходне леме.

Случај 1 $\quad |\alpha^i| \leq 1$

За свако $x \in \alpha^i * T_a^H + b$ (где је $a = \dfrac{[kH/n]}{H}$ и $b = \dfrac{[\beta^i H]}{H}$) на основу горње леме можемо да дефинишемо „поправљену” лифтинг функцију $\overline{F}^i_{a,b}$ тако да за $x = \alpha^i * (\underline{a^i_1} * x_1 + \cdots + \underline{a^i_n} * x_n) + b$ и $x_1, \ldots, x_n \in A$ узима вредност

$$\min \left\{ {}^*g_i(F_k^i(x_1), \ldots, F_k^i(x_n), \ldots, F_k^m(x_1), \ldots, F_k^m(x_n), x_1, \ldots, x_n) \right\}.$$

Тада, за неко $x^0_1, \ldots, x^0_n \in A$ и $x = \alpha^i * (\underline{a^i_1} * x^0_1 + \cdots + \underline{a^i_n} * x^0_n) + b$ важи

$$\begin{aligned}
\operatorname{st}(\overline{F}_{a,b}(x)) &= \operatorname{st}\left({}^*g_i(F_k^1(x_1^0), \ldots, F_k^m(x_n^0), x_1^0, \ldots, x_n^0)\right) \\
&= g_i\big(\operatorname{st}(F_k^1(x_1^0)), \ldots, \operatorname{st}(F_k^m(x_n^0)), \operatorname{st}(x_1^0), \ldots, \operatorname{st}(x_n^0)\big) \\
&= g_i\big(f_k^1(\operatorname{st}(x_1^0)), \ldots, f_k^m(\operatorname{st}(x_n^0)), \operatorname{st}(x_1^0), \ldots, \operatorname{st}(x_n^0)\big) \\
&= f^i_{k,\beta(i)}(\alpha^i_1 \operatorname{st}(x_1^0) + \cdots + \alpha^i_n \operatorname{st}(x_n^0) + \beta^i) \\
&= f^i_{k,\beta(i)}\big(\operatorname{st}(\alpha^i * (\underline{a^i_1} * x_1 + \cdots + \underline{a^i_n} * x_n) + b)\big) \\
&= f^i_{k,\beta(i)}(\operatorname{st}(x)),
\end{aligned}$$

где је $\underline{a^i_j} = \alpha^i_j (\alpha^i)^{-1}$, $\beta(i) = \beta^i$ и $k = \alpha^i \cdot \dfrac{1}{k}$.

Када $k \to \infty$ закључујемо да је $\operatorname{st}(\overline{F}^i_k(x)) = f^i_k(\operatorname{st}(x))$ за сваки елемент $x \in \bigcup \{ T_k^H \mid k \in \mathbb{N} \}$. Одатле је $\overline{F}^i_k$ униформни лифтинг функције f^i_k, па је на основу Теореме 12.9. функција f^i_k непрекидна, а самим тим таква је и функција f^i.

Случај 2 $\quad |\alpha^i| > 1$

За свако $x \in T_a^H + b$ дефинишимо $\overline{F}^i_{a,b}$ као у случају 1 (са истим a и b), а затим и $\overline{\overline{F}}^i_{a,b}$ на следећи начин:

$$\overline{\overline{F}}^i_{a,b}(x) = \overline{F}^i_{a,b}\left(\frac{[\alpha^i S]}{H}\right) \quad \text{за} \quad \frac{[\alpha^i S]}{H} \leq x < \frac{[\alpha^i (S+1)]}{H}.$$

Тада је

$$\begin{aligned}\mathrm{st}\left(\overline{\overline{F}}{}^{i}_{a,b}(x)\right) &= \mathrm{st}\left(\overline{F}{}^{i}_{a,b}\left(\frac{[\alpha^i S]}{H}\right)\right)\\ &= f^i_{k,\beta(i)}\left(\mathrm{st}\left(\frac{[\alpha^i S]}{H}\right)\right)\\ &= f^i_{k,\beta(i)}(\mathrm{st}(x)).\end{aligned}$$

Као и у случају 1, $\overline{\overline{F}}{}^{i}_{a,b}$ је униформни лифтинг од f^i_k, па је функција f^i непрекидна. ■

12.6 Интеграција

Нека је $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ неки коначан мерљив простор. Мерљива функција $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ се назива *једноставном* ако има коначан ранг $\{ r_1, \ldots, r_n \}$.

Интеграл једноставне функције g је

$$\int g\, d\lambda = \sum\nolimits_{i=1}^{n} r_i \cdot \lambda\big(g^{-1}(\{r_i\})\big).$$

Уколико је $f\colon X \to \mathbb{R}$ ограничена и мерљива функција, тада се интеграл дефинише са

$$\int f\, d\lambda = \sup\nolimits_{g\le f}\left\{ \int g\, d\lambda \mid g \text{ је једноставна функција} \right\}.$$

Уколико, пак, f није ограничена, тада

$$\int f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f \restriction n\, d\lambda,$$

где је $f \restriction n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \le n \\ n, & f(x) > n \end{cases}$.

У случају да је X коначан, интеграл се своди на коначну суму. Тако, на пример, ако је $\lambda(\{x\}) = \dfrac{1}{|X|}$, тада је интеграл аритметичка средина вредности које функција узима у $\mathbb{R}$. Слично се добија $*$-трансформацијом на хиперконачан скуп. Тако, ако је $F\colon X \to {}^*\mathbb{R}$ интернална функција на хиперконачном скупу X и λ униформна мера, тада је ${}^*\!\int F\,d\lambda = \dfrac{1}{|X|}\sum_{i\in X} F(i)$. Ову звездицу често изостављамо (као што је и уобичајено).

Нека је $\mathbf{X} = (X, \mathcal{A}, \mu)$ интерналан коначно адитиван мерљив простор и $L(\mathbf{X}) = \big(X, L(\mathcal{A}), L(\mu)\big)$ његов одговарајући Лебов простор.

Лема 12.5. *Ако је $f\colon X \to \mathbb{R}$ ограничена Леб мерљива функција и F_1 и F_2 одговарајући ограничени лифтинзи функције f, тада је $\int F_1\,d\mu \approx \int F_2\,d\mu$.*

Доказ. Како су F_1 и F_2 лифтинзи од f скоро свуда, то за свако унапред фиксирано $n \in \mathbb{N}$ важи $|F_1(x) - F_2(x)| < \dfrac{1}{n}$ скоро свуда.

Нека је M ограничење од f, F_1 и F_2 (тј. $|f| \leq M$ и слично) и $B_n = \big\{\, x \in X \mid |F_1(x) - F_2(x)| \geq \dfrac{1}{n} \,\big\}$.

Како је $L(\mu)(B_n) = 0$, то се за свако $\varepsilon > 0$ може наћи, независно од n, интерналан скуп $A_n \subseteq B_n$ тако да је $\mu(A_n) < \varepsilon$. Притом је $\int F_i\,d\mu = \int_{X\setminus A_n} F_i\,d\mu + \int_{A_n} F_i\,d\mu$ за $i = 1, 2$. Из $\left|\int F_1\,d\mu - \int F_2\,d\mu\right| = \left|\left(\int_{X\setminus A_n} F_1\,d\mu - \int_{X\setminus A_n} F_2\,d\mu\right) + \left(\int_{A_n} F_1\,d\mu - \int_{A_n} F_2\,d\mu\right)\right|$ добијамо

$$\begin{aligned}
\left|\int F_1\,d\mu - \int F_2\,d\mu\right| &\leq \left|\int_{X\setminus A_n} (F_1 - F_2)\,d\mu\right| + \left|\int_{A_n} F_1\,d\mu\right| + \left|\int_{A_n} F_2\,d\mu\right| \\
&\leq \int_{X\setminus A_n} |F_1 - F_2|\,d\mu + 2\varepsilon M \\
&\leq \frac{1}{n}\mu(X) + 2\varepsilon M,
\end{aligned}$$

па тиме и $\int F_1\,d\mu \approx \int F_2\,d\mu$. ■

Лема 12.6. *Нека је $g\colon X \to \mathbb{R}$ једноставна функција и G њена лифтинг функција. Тада*

$$\int g\,dL(\mu) = \operatorname{st}\int G\,d\mu.$$

Доказ. Нека је скуп вредности функције g скуп $\{\, r_1, \ldots, r_n \,\}$. Скупови $g^{-1}(\{r_i\})$ су Леб мерљиви, па постоје скупови A_i (Теорема 12.4.) тако да је $L(\mu)\big(g^{-1}(\{r_i\}) \triangle A_i\big) = 0$.

Дефинишимо интерналну функцију $G\colon X \to {}^*\mathbb{R}$ тако да је

$$G(x) = \begin{cases} r_i, & x \in A_i \setminus \bigcup_{j<i} A_j \\ 0, & x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \end{cases} \qquad \text{за } i \in \{\, 1, \ldots, n \,\}.$$

Очигледно да је G лифтинг од g и

$$\begin{aligned}\int g\,dL(\mu) &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} r_i \cdot L(\mu)\big(g^{-1}(\{r_i\})\big)\\ &\approx \sum\nolimits_{i=1}^{n} r_i \cdot \mu\big(G^{-1}(\{r_i\})\big) = \int G\,d\mu,\end{aligned}$$

чиме је доказ леме завршен. ■

На основу Леме 12.5. слично важи и за сваку другу лифтинг функцију G' (од функције g).

Теорема 12.14. *Нека је $f\colon X \to \mathbb{R}$ ограничена и Леб мерљива функција и F њен ограничен лифтинг. Тада је*

$$\int f\,dL(\mu) = \operatorname{st}\int F\,d\mu.$$

Доказ. Нека је $g \leq f$ једноставна функција, G њен лифтинг и F' лифтинг од f тако да је $G \leq F' = \max\{G, F\}$ (за произвољан фиксиран лифтинг F). Тада је на основу Лема 12.5. и 12.6.

$$\int g\,dL(\mu) = \operatorname{st}\int G\,d\mu \leq \operatorname{st}\int F'\,d\mu = \operatorname{st}\int F\,d\mu,$$

а одатле $\int f\,dL(\mu) \leq \operatorname{st}\int F\,d\mu$.

Супротна неједнакост следи на основу симетрије. Тако, лифтинг за $-f$ је $-F$ па из

$$\int -f\,dL(\mu) \leq \operatorname{st}\int -F\,d\mu$$

следи $-\int f\,dL(\mu) \leq -\operatorname{st}\int F\,d\mu$, а самим тим и $\int f\,dL(\mu) \geq \operatorname{st}\int F\,d\mu$.■

Ова теорема се може продужити и на случај када функција f није ограничена али је интеграбилна.

Дефиниција 12.11. Нека је $F\colon X \to {}^*\mathbb{R}$ интернална функција. Тада F је S-интеграбилна ако и само ако F је $\mathcal{A}$-мерљива (тј. за $r \in \overline{\mathbb{R}}$ $\{\, x \in X \mid F(x) \leq r \,\} \in \mathcal{A}$) и за сваки бесконачан $H \in {}^*\mathbb{N}$

$$\int_{|F|\geq H} |F|\,d\mu \approx 0.$$

Очигледно је свака ограничена $\mathcal{A}$-мерљива функција такође и S-интеграбилна.

Теорема 12.15. *Следећа тврђења су еквивалентна*

(а) *Функција f је Леб интеграбилна,*

(б) *Функција f има S-интеграбилан лифтинг $F\colon X \to {}^*\mathbb{R}$.*

Ако је испуњено (б)*, тада* $\int f\,dL(\mu) = \mathrm{st}\int F\,d\mu$.

Доказ. Нека је $f \geq 0$ (у општем случају разматрамо $f = f^+ - f^-$, где је $f^+ = \max\{f, 0\}$ и $f^- = \min\{f, 0\}$).

Претпоставимо (а). Нека је $F_0 \geq 0$ лифтинг од f и $F_n = F_0 \restriction n$ за $n \geq 1$. Тада на основу претходне теореме и дефиниције интеграла

$$\mathrm{st}\int F_n\,d\mu = \int (f \restriction n)\,dL(\mu) \tag{1}$$

је монотоно растући низ који конвергира ка $\int f\,dL(\mu)$. Користећи пребројиву раширивост (Теорема 11.5.) раширимо низ $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и уочимо $L = \{\, n \in {}^*\mathbb{N} \mid (\forall m < n)(F_n \restriction m = F_m)\,\}$. Из $\mathbb{N} \subseteq L$ и принципа преливања следи да постоји $H \in L$ тако да је $\int F_H\,d\mu \approx \int f\,dL(\mu)$. Лако се види да је због (1) функција F_H S-интеграбилна. Такође је F_H лифтинг од f јер је f коначна скоро свуда. Отуда је довољно узети $F = F_H$.

Обратно, ако $F \geq 0$ је S-интеграбилан лифтинг од $f \geq 0$, посматрајмо скуп $T = \{\, m \in {}^*\mathbb{N} \mid \int_{F\geq m} F\,d\mu \leq \varepsilon\,\}$. На основу претходне дефиниције ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \subseteq T$, па по принципу подливања постоји коначно n, тако да за свако $m \geq n$ важи $\int_{F\geq m} F\,d\mu \leq \varepsilon$. Користећи претходну теорему, за све коначне $m \geq n$ имамо

$$\begin{aligned}\int (f \restriction m)\,dL(\mu) &\approx \int (F \restriction m)\,d\mu \leq \int F\,d\mu \\ &\leq \int (F \restriction m)\,d\mu + \varepsilon \approx \int (f \restriction m)\,dL(\mu) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Одатле је $\mathrm{st}\int F\,d\mu$ коначан и једнак је $\lim_{m\to\infty}\int (f \restriction m)\,dL(\mu)$, што се и тражи. ■

Следећа теорема повезује појам S-интеграбилности који је увео Леб у [84] и еквивалентног појма датог од стране Андерсона у [3].

Теорема 12.16. *Нека је* $\mathbf{X} = (X, \mathcal{A}, \mu)$ *интерналан коначно адитиван мерљив простор и* $F\colon X \to {}^*\mathbb{R}$ $\mathcal{A}$*-мерљива функција. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(1) F *је* S*-интеграбилна;*

(2) $\mathrm{st}\int |F|\,d\mu < \infty$, *и* $\int_A F\,d\mu \approx 0$, *кад год* $A \in \mathcal{A}$ *и* $\mu(A) \approx 0$*;*

(3) $\int \mathrm{st}\,|F|\,dL(\mu) = \mathrm{st}\int |F|\,d\mu < \infty$.

Доказ. Нека је F S-интеграбилна функција, $a_n = \int |F| \restriction n\,d\mu$ и $a = \int |F|\,d\mu$. Тада очигледно $a_n \uparrow a$ и $a \approx a_H$ за $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Отуда је $\mathrm{st}\ a \in \mathbb{R}$.

Да бисмо показали други део тачке (2), уочимо

$$\left|\int_A F\,d\mu\right| \leq \int_A |F|\,d\mu = \int_A |F| \restriction H\,d\mu + \int_{A, |F| > H} |F|\,d\mu \leq H \cdot \mu(A) + \varepsilon.$$

Како је $\varepsilon \approx 0$ и H може бити довољно мало (али бесконачно), то је $H \cdot \mu(A) \approx 0$ па тиме и $\int_A F\,d\mu \approx 0$.

Очигледно да из (2) следи (1), јер $a_n \uparrow a$ и a је коначан па мора бити $a_H \approx a$, отуда је $\int_{|F| \geq H} |F|\,d\mu \approx 0$.

На основу Теореме 12.15. имамо $(1) \leftrightarrow (3)$. ∎

Дефиниција 12.12. У простору $L(\mathbf{X})$ кажемо да је алгебра $L(\mu)$ безатомична, ако за свако $A \in \mathcal{A}$, тако да $L(\mu)(A) > 0$ постоји $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{A}$ тако да $0 < L(\mu)(B) < L(\mu)(A)$.

Теорема 12.17. *Следећа тврђења су еквивалентна:*

(а) $\mathrm{st}\int |F|\,d\mu < \infty$*;*

(б) $\int_A F\,d\mu \approx 0$, *кад год* $A \in \mathcal{A}$ *и* $\mu(A) \approx 0$.

Доказ. Нека важи (б). Из $\int_{|F| \geq H} |F|\,d\mu \geq H \cdot \mu\{\, x \mid |F(x)| \geq H \,\}$ уколико је $\mu\{\, x \mid |F(x)| \geq H \,\} \approx 0$, следи да $\int_{|F| \geq H} |F|\,d\mu \approx 0$, што показује да F је S-интеграбилна, па на основу претходне теореме важи (а).

Показаћемо сада да претпоставка $\mu\{\, x \mid |F(x)| \geq H \,\} \not\approx 0$ доводи до контрадикције.

Посматрајмо низ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такав да $A_n \subseteq \{\, x \mid |F(x)| \geq H \,\}$, $A_{n+1} \subsetneq A_n$ и st $\mu(A_n) \downarrow 0$ (строго монотоно). Раширимо овај низ до низа $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ и посматрајмо скуп $S = \{\, n \in {}^*\mathbb{N} \mid \int_{A_n} |F| \, d\mu > M \,\}$, $M \in \mathbb{R}$. Очигледно је $\mathbb{N} \subseteq S$, па постоји $k \in S \setminus \mathbb{N}$ тако да је $\mu(A_k) \approx 0$ и $\int_{A_n} |F| \, d\mu > M$, што је супротно претпоставци.

Да из (а) следи (б) види се лако на основу конвергенције низа (a_n) уведеног у претходној теореми. ■

12.7 Фубинијева теорема

Видели смо у одељку о производу Лебових простора да је Лебов простор производа интерналних мера права екстензија производа Лебових мера. Теорема која следи, доказана од стране Кислера, представља зато проширење класичне теореме Фубинија[8].

Нека су X, Y и $X \times Y$ хиперконачни скупови, $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ и $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \lambda)$ интернални коначно адитивни мерљиви простори тако да су синглтони мерљиви и нека $\big(X, L(\mathcal{A}), L(\mu)\big)$, $\big(Y, L(\mathcal{B}), L(\lambda)\big)$ и $\big(X \times Y, L(\mathcal{A} \times \mathcal{B}), L(\mu \times \lambda)\big)$ су одговарајући Лебови простори. Нека је такође $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ ограничена Леб мерљива функција ($L(\mu \times \lambda)$-мерљива).

Теорема 12.18. (Кислер-Фубини)

(1) *За скоро све $x \in X$, функција $f(x, \cdot)$ је Леб мерљива на Y;*

(2) *Функција $g(x) = \int f(x, y) \, dL(\lambda)$ је Леб мерљива на X;*

(3) $\int f(x, y) \, dL(\mu \times \lambda) = \int \left(\int f(x, y) \, dL(\lambda) \right) \, dL(\mu)$.

Ради једноставности можемо да претпоставимо да радимо са вероватносним просторима.

Докажимо пре тога следећу лему.

Лема 12.7. *Нека је $A \subseteq X \times Y$ и нека је за свако $x \in X$*

$$A_x = \{\, y \in Y \mid (x, y) \in A \,\}.$$

Тада су тачке од (а) *до* (г) *еквивалентне*

[8] Guido Fubini (1879–1943)

(а) $L(\mu \times \lambda)(A) = 0$;

(б) *за свако* $n \in \mathbb{N}$ *постоји интерналан* $A_n \supseteq A$ *тако да је*

$$L(\mu \times \lambda)(A_n) < \frac{1}{n};$$

(в) *за свако* $n \in \mathbb{N}$ *постоји интерналан* $A_n \supseteq A$ *такав да*

$$L(\mu)\Big(\Big\{\, x \in X \mid L(\lambda)(A_n)_x < \frac{1}{n} \,\Big\}\Big) \geq 1 - \frac{1}{n};$$

(г) *за скоро све* $x \in X$, $L(\lambda)(A_x) = 0$.

Доказ. (а) $\to$ (б) на основу Теореме 12.4.

(б) $\to$ (в) јер би у супротном $L(\mu \times \lambda)(B) > \dfrac{1}{n^2}$ за сваки интерналан $B \supseteq A$.

(в) $\to$ (г) Нека је $A' = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Тада је

$$L(\mu)\big(\{\, x \in X \mid L(\lambda)(A'_x) = 0 \,\}\big) = 1 \quad \text{и} \quad A \subseteq A',$$

па отуда $L(\mu)\big(\{\, x \in X \mid L(\lambda)(A_x) = 0 \,\}\big) = 1$.

(г) $\to$ (а) Ако би $L(\mu \times \lambda)(A) > 0$, тада би постојао интерналан $B \subseteq A$ тако да $L(\mu \times \lambda)(B) > 0$, па бисмо за неко $n \in \mathbb{N}$ имали

$$L(\mu)\Big(\Big\{\, x \in X \mid L(\lambda)(B_x) < \frac{1}{n} \,\Big\}\Big) < 1 - \frac{1}{n},$$

па тиме и (в) не би важило. ■

Доказ Теореме. На основу Теореме 12.7. функција f има ограничен лифтинг F. Скуп

$$A = \{\, (x, y) \mid \mathrm{st}(F(x, y)) \neq f(x, y) \,\}$$

има меру нула. На основу (г) из претходне леме $F(x, \cdot)$ је лифтинг од $f(x, \cdot)$ за скоро све x, па је (1) задовољено.

Нека је $G(x) = \sum_{y \in Y} F(x, y) \cdot \lambda(\{y\})$. Кад год је $F(x, \cdot)$ лифтинг од $f(x, \cdot)$ имамо $\mathrm{st}(G(x)) = g(x)$. Значи, G је лифтинг за g па је и (2) задовољено.

Следећи низ једнакости

$$\begin{aligned}
\int f(x,y)\,dL(\mu\times\lambda) &= \operatorname{st}\Big(\sum\nolimits_{(x,y)\in X\times Y} F(x,y)\mu(\{x\})\lambda(\{y\})\Big)\\
&= \operatorname{st}\Big(\sum\nolimits_{x\in X}\Big(\sum\nolimits_{y\in Y} F(x,y)\lambda(\{y\})\Big)\cdot\mu(\{x\})\Big)\\
&= \operatorname{st}\Big(\sum\nolimits_{x\in X} G(x)\mu(\{x\})\Big)\\
&= \int g(x)\,dL(\mu)\\
&= \int\Big(\int f(x,y)\,dL(\lambda)\Big)\,dL(\mu)
\end{aligned}$$

доказује (3). ∎

12.8 Коначно адитивне мере

Почеци нестандардне теорије мере везују се за Робинсонов рад (видети [126]). Посматрана је $*$-трансформација Лебегове мере λ на $\mathbb{R}$, $({}^*\mathbb{R}, {}^*\lambda)$. Ова мера је само коначно адитивна али може да послужи за дефинисање Лебегове мере и Лебеговог интеграла, што показују следеће теореме.

Теорема 12.19. *Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$. Тада су следећа тврђења еквивалентна.*

(а) *A је Лебег мерљив скуп.*

(б) *Постоје скупови $F, G \subseteq {}^*\mathbb{R}$ који су редом $*$-затворени и $*$-отворени, тако да је $F \subseteq {}^*A \subseteq G$, ${}^*\lambda(F) \approx {}^*\lambda(G)$ и ${}^*\lambda(F)$ је коначно.*

Ако је (б) *испуњено, тада је $\lambda(A) = \operatorname{st}\,{}^*\lambda(F) = \operatorname{st}\,{}^*\lambda(G)$.*

Доказ. Нека је A Лебег мерљив скуп. Тада на основу Теореме 12.5. за свако $\varepsilon > 0$ постоји затворен скуп F и отворен скуп G тако да је $F \subseteq A \subseteq G$ и $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon$. На основу принципа трансфера, за $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \approx 0$ можемо наћи одговарајуће $*$-затворено F и $*$-отворено G тако да је ${}^*\lambda(F) \approx {}^*\lambda(G)$ и ${}^*\lambda(F)$ коначно.

Са друге стране, претпоставимо да је тачно (б). За следеће фамилије $\mathbf{F} = \{\, F \subseteq A \,|\, F$ је затворен $\}$ и $\mathbf{O} = \{\, G \supseteq A \,|\, G$ је отворен $\}$ и свако

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ важи $(\exists F \in {}^*\mathbf{F})(\exists G \in {}^*\mathbf{O})(F \subseteq {}^*A \subseteq G \wedge {}^*\lambda(G \setminus F) < \varepsilon)$. На основу трансфера добијамо

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists F \in \mathbf{F})(\exists G \in \mathbf{O})(F \subseteq A \subseteq G \wedge \lambda(G \setminus F) < \varepsilon).$$

Отуда је A Лебег мерљив скуп.

Ако је (б) испуњено, тада је очигледно

$$\lambda(A) = \mathrm{st}({}^*\lambda(F)) = \mathrm{st}({}^*\lambda(G)).$$

■

Теорема 12.20. *Нека је $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Лебег мерљива функција и $|f(x)| \leq k$ за свако x. Нека је $-k = y_0 < y_1 < \cdots < y_H = k$ хиперконачна партиција од ${}^*[-k,k]$ за $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ и $y_{i+1} - y_i \approx 0$ за све i. Тада је*

$$\int f\,d\lambda = \mathrm{st}\left(\sum_{i=1}^{H} y_i \cdot {}^*\lambda\big(\{\, x \mid y_{i-1} \leq {}^*f(x) < y_i \,\}\big)\right).$$

Доказ ове теореме се ослања на дефиницију интеграла и на чињеницу да је подела интервала ${}^*[-k,k]$ финија од било које стандардне поделе. Ова теорема, како смо већ напоменули, може да послужи и за дефиницију интеграла из које се после изводе остале особине.

Даћемо сада једну примену овог поступка на решавање једног познатог проблема из геометријске теорије мере.

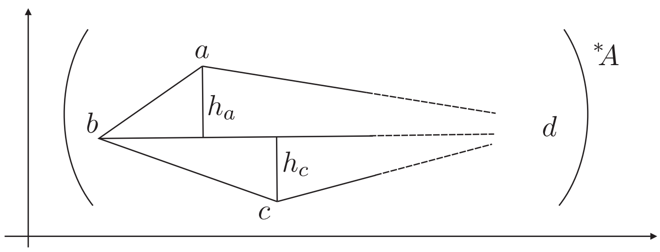
Теорема 12.21. *Нека је $A \subseteq \mathbb{R}^2$ конвексан и Лебег мерљив скуп не нулте мере. Тада је скуп A ограничен ако и само ако је коначне мере.*

Доказ. Подсетимо се прво да је A конвексан ако са сваке две тачке садржи и читаву дуж одређену тим тачкама. Такође, скуп A је ограничен ако је садржан у неком кругу са центром у координатном почетку и коначног полупречника.

Ако је A ограничен, онда тривијално следи да има коначну меру.

Претпоставимо сада да A није ограничен и уочимо ${}^*A$. Нека су a, b, c три неколинеарне тачке скупа A (које постоје из чињенице да је A не нулте мере) и d бесконачно далека тачка из ${}^*A$.

Тада се бар један од троуглова ($\triangle abd$ или $\triangle bcd$) не дегенерише.



Слика 12.3.

То даље значи да је површина бар једног од њих бесконачна. Одатле, $^*A$ има бесконачну меру па тиме и A. ∎

12.9 Репрезентација Лебегове мере

Бернштајн и Ватенберг (видети [11]) дали су једну интуитивну репрезентацију Лебегове мере користећи појам узорка.

Дефиниција 12.13. Нека је X скуп и S хиперконачан подскуп од $^*X$. Скуп S називамо *узорак* и дефинишемо за сваки $A \in {}^*\mathbf{P}(^*X)$:

$$\mu_S(A) = \frac{|A \cap S|}{|S|}.$$

Очигледно је μ_S интернална коначно адитивна вероватносна мера на $^*\mathbf{P}(^*X)$.

Дефиниција 12.14. Нека је $(X, \mathcal{X}, m)$ мерљив простор. Тада, $x \in {}^*X$ је *m-случајан* ако за сваки стандардан $A \subseteq X$ који је m-мере нула важи $x \notin {}^*A$.

Лема 12.8. *Постоји интерналан $^*m$-мерљив скуп S такав да је $^*m(S) = 0$ и сваки $x \notin S$ је m-случајан.*

Доказ. Нека је $L_A = \{\, Y \in \mathbf{P}(X) \mid A \subseteq Y,\ m(Y) = 0 \,\}$ за $A \subseteq X$ који је m-мере нула. Очигледно је $L_{A_1} \cap \cdots \cap L_{A_n} \neq \emptyset$ јер садржи $A_1 \cup \cdots \cup A_n$. На основу аксиоме раширења (в. претходну главу) $\bigcap_{m(A)=0} {}^*L_A \neq \emptyset$, па постоји $Y \in \bigcap_{m(A)=0} {}^*L_A$. Очигледно је $^*m(Y) = 0$ и $^*A \subseteq Y$ за сваки A за који је $m(A) = 0$. Отуда је сваки елемент из $^*X \setminus Y$ случајан. ∎

Сада можемо да докажемо теорему репрезентације Лебегове мере помоћу узорка.

ТЕОРЕМА 12.22. *Постоји узорак* $S \subseteq {}^*[0,1]$ *такав да за сваки Лебег мерљив подскуп* $A \subseteq [0,1]$,

$$\lambda(A) = \mathrm{st}(\mu_S({}^*A)) = \mathrm{st}\left(\frac{|{}^*A \cap S|}{|S|}\right).$$

Доказ. Уочимо $I = [0,1]$ и $I^{\mathbb{N}} = \{\, f \mid f\colon \mathbb{N} \to [0,1]\,\}$. На $I^{\mathbb{N}}$ дефинишимо продукт меру са

$$\lambda\,(\,]a_1,b_1[\,\times \cdots \times\,]a_n,b_n[\,\times I \times I \times \dots) = (b_1-a_1)\cdot \dots \cdot (b_n-a_n)$$

на цилиндру $]a_1,b_1[\,\times\,]a_2,b_2[\,\times \cdots \times\,]a_n,b_n[\,\times I \times I \times \dots$. Мера λ се лако шири до Борелове мере на $I^{\mathbb{N}}$.

Претпоставимо да је $x \in {}^*(I^{\mathbb{N}})$ λ-случајан. Тада ћемо показати да постоји бесконачан број $K \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ такав да за сваки $H \geq K$, скуп $S = \{\, x_1, x_2, \dots, x_H \,\}$ је узорак који задовољава услове теореме.

Приметимо да је скуп $A_{ij} = \{\, x \in I^{\mathbb{N}} \mid x_i = x_j \,\}$ мере нула, а такав је и скуп $A = \{\, x \in I^{\mathbb{N}} \mid (\exists i,j \in \mathbb{N})(i \neq j \wedge x_i = x_j)\,\}$. Отуда, ако је x λ-случајан, следи да $x \notin {}^*A$, а тиме $x_i \neq x_j$ за све $i,j \in {}^*\mathbb{N}$.

Нека је ε фиксирана позитивна инфинитезимала. Користећи строги закон великих бројева (видети [13]), за стандардан Лебег мерљив скуп E постоји скуп $S_E \subseteq I^{\mathbb{N}}$ Борелове мере нула такав да

$$(\forall x \notin S_E)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^{n} \chi_E(x_i) = \lambda(E).$$

Како је x λ-случајан, $x \notin {}^*S_E$ тако да $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi_E(x_i) = \lambda(E)$. Одатле, постоји $H_E \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ тако да

$$(\forall H \geq H_E)\ \left|\frac{1}{H} \sum\nolimits_{i=1}^{H} {}^*\chi_E(x_i) - {}^*\lambda(E)\right| < \varepsilon.$$

Користећи $(2^{\omega})^{+}$-засићеност, можемо наћи $H \in {}^*\mathbb{N}$ тако да је за сваки стандардни Лебег мерљив скуп $E \subseteq [0,1]$ испуњено

$$\left|\frac{1}{H} \cdot \sum_{i=1}^{H} \chi_E(x_i) - {}^*\lambda(E)\right| < \varepsilon.$$

За скуп $S = \{\, x_1, x_2, \dots, x_H \,\}$ имамо $\dfrac{1}{H} \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{H} \chi_E(x_i) = \dfrac{|S \cap {}^*E|}{|S|}$, а одатле и $\lambda(E) = {}^*\lambda(E) = \dfrac{|S \cap {}^*E|}{|S|} = \mu_S(E)$. ∎

У [11] Бернштајн и Ватенберг су показали да узорак $S \subseteq {}^*[0,1]$ може бити тако изабран да има и следећа интересантна својства:

(1) $[0,1] \subseteq S$; што значи да ако је $A \neq \emptyset$, тада $\mu_S({}^*A) \neq 0$ (макар и $\mu_S({}^*A) \approx 0$).

(2) $S + p = S(\mod 1)$ за све рационалне p. Одатле следи, на пример, следећа једнакост $\mu_S\big({}^*([0,\frac{1}{6}[\cap\mathbb{Q})\big) = \frac{1}{3} \cdot \mu_S\big({}^*([0,\frac{1}{2}[\cap\mathbb{Q})\big)$, што се поклапа са Паскаловом[9] дефиницијом вероватноће иако су оба скупа Лебегове мере нула.

(3) За сваки реалан број r и интерналан $A \subseteq {}^*[0,1]$ важи $\mu_S(A+r) \approx \mu_S(A)$ (где се сабирање узима по модулу 1). То значи да помоћу $\mathrm{st}\,\mu_S$ добијамо инваријантну, у односу на транслацију, коначно адитивну екстензију од m.

Нека је $[a,b]_H = \{\, x \in T_H \mid a \le x \le b \,\}$.

Лема 12.9. *Нека је A скуп са позитивном Лебеговом мером $\lambda(A) = m > 0$. Нека је B хиперконачан скуп, $B \subseteq \mathrm{st}_H^{-1}(A)$ и $\mu_H(B) > \dfrac{3}{10} \cdot m$. Тада постоје $a \in T_H$ и $n \in \mathbb{N}$ такви да $\mu_H\Big(B \cap \Big[a, a+\dfrac{1}{n}\Big]_H\Big) > \dfrac{3}{4n}$.*

Доказ. Претпоставимо да не постоје a и n тако да релација важи. Тада је

$$S = \Big\{\, n \in {}^*\mathbb{N} \mid (\forall a \in T_H)\ \mu_H\Big(B \cap \Big[a, a+\frac{1}{n}\Big]_H\Big) \le \frac{3}{4n} \,\Big\}$$

интерналан скуп и $\mathbb{N} \subseteq S$. На основу принципа преливања постоји $K \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ такав да $K \in S$ и $\dfrac{K}{H} \approx 0$.

Нека је $B' = \Big\{\, \dfrac{s}{K} \,\Big|\, B \cap \Big[\dfrac{s}{K}, \dfrac{s+1}{K}\Big[_H \neq \emptyset \Big\}$. Тада $\mathrm{st}_K(B') \subseteq A$, $B' \subseteq \mathrm{st}_K^{-1}(A)$ и $\mu_K(B') \le L(\mu_K)(\mathrm{st}_K^{-1}(A)) = m$. С обзиром на чињеницу да $K \in S$ имамо:

$$\begin{aligned}
|B| &= \sum\nolimits_{B\cap[\frac{s}{K},\frac{s+1}{K}[_H\neq\emptyset} \Big| B \cap \Big[\frac{s}{K}, \frac{s+1}{K}\Big[_H \Big| \\
&\le |B'| \cdot \max_s \Big| B \cap \Big[\frac{s}{K}, \frac{s+1}{K}\Big[_H \Big| \\
&\le |B'| \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{H}{K}.
\end{aligned}$$

[9] Blaise Pascal (1623–1662)

Одатле следи

$$\frac{9}{10}m \leq \mu_H(B) \leq \frac{|B'| \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{H}{K}}{H} = \frac{3}{4}\frac{|B'|}{K} = \frac{3}{4}\mu_K(B') \leq \frac{3}{4}m,$$

што је контрадикција. ■

Даћемо сада лак и интуитиван доказ познате Штаинхаусове[10)] теореме.

Теорема 12.23. *Нека је A скуп позитивне Лебегове мере $\lambda(A) = m > 0$. Тада постоји интервал $[a, b]$ тако да*

$$[a, b] \subseteq A - A = \{\, x - y \,|\, x, y \in A \,\}.$$

Доказ. Нека су a и n као у горњој леми. Нека је $I = \left[-\frac{1}{4n}, \frac{1}{4n}\right]_H$ и $C = B \cap \left[a, a + \frac{1}{n}\right]_H$. Тада $I \subseteq C - C$. У супротном, $C \cap (C + x) = \emptyset$ за неко $x \in I$ и

$$\frac{5}{4n} \geq \mu_H(C) + \mu_H(C + x) \geq \frac{6}{4n},$$

што је контрадикција.

Коначно, $\mathrm{st}_H(I) \subseteq \mathrm{st}_H(C - C) = \mathrm{st}_H(C) - \mathrm{st}_H(C) \subseteq A - A$. ■

12.10 Брауново кретање

Енглески ботаничар Браун[11)] је 1826. године запазио да микроскопски мале честице које се налазе у стационарној течности изводе непрекидно хаотично кретање и по њему је такво кретање названо Брауново. Ајнштајн[12)] је ту појаву објаснио непрекидним сударима честица са молекулима течности и 1905. године дао је математички опис овог кретања, што је касније и експериментално потврђено. Овим физичким феноменом бавило се више математичара и физичара. Најпрецизнији математички

10) Hugo Dyonizy Steinhaus (1887–1972)
11) Robert Brown (1773–1858)
12) Albert Einstein (1879–1955)

модел дао је Винер[13] у својој дисертацији 1918. године и у неким каснијим радовима.

Да бисмо описали Винеров процес, а тиме и Брауново кретање, најпре уводимо стандардне појмове вероватносног простора неопходне за овај одељак.

Мерљива функција $X\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ дефинисана на вероватносном простору $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (тј. мерљивом простору са $\mu(\Omega) = 1$) зове се *случајна променљива*. Случајне променљиве X и Y на Ω су *независне* ако за све Борелове скупове A и B, подскупове од $\mathbb{R}$, важи

$$\mu\{\,\omega \mid X(\omega) \in A,\ Y(\omega) \in B\,\} = \mu\{\,\omega \mid X(\omega) \in A\,\} \cdot \mu\{\,\omega \mid Y(\omega) \in B\,\},$$

што лако можемо да генерализујемо на независност коначног низа случајних променљивих $X_1, \dots, X_n$:

$$\mu\{\,\omega \mid X_i(\omega) \in A_i,\ i = 1, \dots, n\,\} = \prod_{i=1}^{n} \mu\{\,\omega \mid X_i(\omega) \in A_i\,\}.$$

Случајна променљива X има *нормалну* (Гаусову) *расподелу* са средњом вредношћу m и стандардном девијацијом σ ако за сваки Борелов скуп A важи:

$$\mu\{\,\omega \mid X(\omega) \in A\,\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_A e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma}}\, dx.$$

Математичко очекивање случајне променљиве X је број $E(X) = \int X\, d\mu$. Реалну функцију $\varphi(t) = E(e^{\imath tX})$ зовемо *карактеристичном функцијом* случајне променљиве X. Запазимо да је

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath tx}\, dF(x),$$

где је $F(x) = \mu\{\,\omega \mid X(\omega) < x\,\}$ одговарајућа *функција расподеле*. Случајна променљива X која има нормалну расподелу са средњом вредношћу 0 и дисперзијом 1 има карактеристичну функцију $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$. Број $E(X^k)$ зовемо *момент k-тог реда*, док $E\big((X - E(X))^k\big)$ зовемо *централни момент k-тог реда* случајне променљиве X. За $k = 2$, број $D(X) = E((X - E(X))^2)$ зовемо *дисперзијом*, а $\sqrt{D(X)}$ стандардном девијацијом случајне променљиве X.

Пресликавање $s\colon \Omega \times [0, +\infty[\, \to \overline{\mathbb{R}}$ такво да је за свако $t \in [0, +\infty[$ пресликавање $s_t\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ дато са $s_t(\omega) = s(\omega, t)$ случајна променљива

[13] Norbert Wiener (1894–1964)

зове се *стохастички процес*. Тада, пресликавање $p_\omega\colon [0,+\infty[\to \overline{\mathbb{R}}$ дато са $p_\omega(t) = s(\omega,t)$ зове се *пут* стохастичког процеса s. Ако је s стохастички процес и $t_1 < t_2$ из $[0,+\infty[$, означимо са s_{t_1,t_2} случајну променљиву дефинисану разликом $s_{t_1,t_2}(\omega) = s_{t_2}(\omega) - s_{t_1}(\omega)$.

Вратимо се кретању честица кроз стационарну течност, тј. флуид. Нека је $b(t)$ растојање у моменту t честице од почетне тачке. Разлика $b(t) - b(s)$, $s < t$ се може посматрати као сума великог броја мањих разлика. Применом централне граничне теореме природно је претпоставити да ова разлика има Гаусову расподелу. Расподеле променљивих $b(t)-b(s)$ и $b(t+h)-b(s+h)$, $h > 0$ се поклапају, па претпостављамо да је средња вредност ове разлике нула. Сем тога, разлика $b(t) - b(s)$ треба да зависи само од $t - s$, а не, на пример, и од почетног момента посматрања, па претпостављамо да стандардна девијација ове разлике има вредност $t - s$. Према томе, разлика $b(t) - b(s)$, $s < t$ не зависи од прошлости, односно ако је $b(t) = +\infty$, тада никаква допунска информација о понашању $b(s)$, $s < t$ не утиче на познавање закона расподеле. Тиме се изражава Марковско[14)] својство овог процеса. Прецизније, наведена својства обухватићемо увођењем следећих појмова.

Винеров процес је најједноставнији стохастички процес који је модел игре писмо–глава. Нека је $z = \{\, z_t \mid t \in T \,\}$ стохастички процес такав да су случајне променљиве z_t независне и

$$\mu\{\, \omega \mid z_t(\omega) = +1 \,\} = \frac{1}{2}, \quad \mu\{\, \omega \mid z_t(\omega) = -1 \,\} = \frac{1}{2},$$

где је $T = \left\{ 0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dots, \dfrac{n^2-1}{n}, n \right\}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниција 12.15. Винеров процес $w = \{\, w_t \mid t \in T \,\}$ је фамилија случајних променљивих w_t дефинисаних са:

$$w_0 = 0 \qquad i \qquad w_{t+1/n} = w_t + \frac{z_t}{\sqrt{n}}.$$

Према томе, $dw_t = w_{t+1/n} - w_t = \dfrac{z_t}{\sqrt{n}}$ и $w_t = \sum_{i=0}^{tn-1} dw_{i/n}$. Стандардан лимес Винеровог процеса доводи нас до Брауновог кретања.

Дефиниција 12.16. Стохастички процес $b\colon \Omega \times [0,+\infty[\to \overline{\mathbb{R}}$ такав да $b(\omega,0) = 0$ за све $\omega \in \Omega$ је *Брауново кретање* ако:

14) Андрей Андреевич Марков (1856–1922)

(1) случајне промењљиве $b_{s_1,t_1}, b_{s_2,t_2}, \ldots, b_{s_n,t_n}$ су независне, при чему је $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \cdots \leq s_n < t_n$,

(2) случајна промењљива $b_{s,t}$, $s < t$ има нормалну расподелу са средњом вредношћу нула и стандардном девијацијом $t - s$,

(3) пут $b_\omega \colon [0, +\infty[\to \overline{\mathbb{R}}$ је непрекидан за скоро све ω, тј.

$$\mu\{\, \omega \mid b_\omega \text{ је непрекидан пут} \,\} = 1.$$

Користећи хиперконачан вероватносни простор и Лебову конструкцију можемо на једноставан и интуитиван начин да прелазимо са дискретног на непрекидан случај и обратно. Андерсон је у [3] извео нестандардну конструкцију Брауновог кретања коју ћемо управо да опишемо.

Нека је $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ бесконачан природан број и нека је интервал $[0, +\infty[$ замењен хиперконачним временским интервалом

$$T = \left\{\, 0, \frac{1}{H}, \frac{2}{H}, \ldots, \frac{H^2 - 1}{H}, H \,\right\}.$$

Интернална пресликавања $\omega \colon T \to \{\, -1, 1 \,\}$ формирају скуп Ω који је хиперконачан и има 2^{H^2+1} елемената. Нека је $\mathcal{A}$ алгебра свих интерналних подскупова од Ω и нека је $\mu(A) = \dfrac{|A|}{2^{H^2+1}}$, $A \in \mathcal{A}$ нормализована пребрајајућа мера. Лебовом конструкцијом долазимо до мерљивог простора $\big(\Omega, L(\mathcal{A}), L(\mu)\big)$. Сада је даља конструкција уобичајена. Формирамо *хиперконачан стохастички процес* $B \colon \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ помоћу: $B(\omega, 0) = 0$ и

$$B\left(\omega, \frac{k}{H}\right) = \sum\nolimits_{j=0}^{k-1} \frac{\omega(j/H)}{\sqrt{H}}, \quad k = 1, 2, \ldots, H^2.$$

За свако $t \in [0, +\infty[$, нека је $t^+ = \min\{\, \tau \in T \mid t \leq \tau \,\}$.

Теорема 12.24. *Пресликавање $b \colon \Omega \times [0, +\infty[\to \overline{\mathbb{R}}$ дефинисано са*

$$b(\omega, t) = \operatorname{st} B(\omega, t^+), \quad \omega \in \Omega,\ t \in [0, +\infty[$$

је Брауново кретање на $\big(\Omega, L(\mathcal{A}), L(\mu)\big)$.

Доказ. Очигледно је пресликавање b стохастички процес и важи $b(\omega, 0) = 0$. Проверимо услове (1), (2) и (3) из Дефиниције 12.16.

(1) Нека је $s_1 < t_1 \le s_2 < t_2 \le \cdots \le s_n < t_n$ из T и нека су *хиперконачне случајне променљиве* $B_{s_i^+, t_i^+} : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, дефинисане са $B_{s_i^+, t_i^+}(\omega) = B(\omega, t_i^+) - B(\omega, s_i^+)$. За свако i, нека је μ_i интернална мера на ${}^*\mathbb{R}$ дефинисана са

$$\mu_i(A) = \mu\{\, \omega \mid B_{s_i^+, t_i^+}(\omega) \in A \,\}.$$

Покажимо сада да су пресликавања $b_{s_1,t_1}, b_{s_2,t_2}, \ldots, b_{s_n,t_n}$ независна. Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Борелови скупови у $\mathbb{R}$. Одредимо интерналне скупове $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, \ldots, \widehat{A_n}$ у ${}^*\mathbb{R}$ за које је $L(\mu_i)\big(\widehat{A_i} \triangle \operatorname{st}^{-1}(A_i)\big) = 0$ за све $i = 1, 2, \ldots, n$. Тада

$$\begin{aligned} L(\mu)\{\, \omega \mid b_{s_i,t_i}(\omega) \in A_i, \,\} &\approx \mu\{\, \omega \mid B_{s_i^+, t_i^+}(\omega) \in \widehat{A_i},\ i = 1, 2, \ldots, n \,\} \\ &= \prod\nolimits_{i=1}^{n} \mu\{\, \omega \mid B_{s_i^+, t_i^+}(\omega) \in \widehat{A_i} \,\} \\ &\approx \prod\nolimits_{i=1}^{n} L(\mu)\{\, \omega \mid b_{s_i,t_i}(\omega) \in A_i \,\}. \end{aligned}$$

(2) Писаћемо краће $\sum_{r=s}^{t} X(r)$ за $X(s) + X\Big(s + \dfrac{1}{H}\Big) + \cdots + X\Big(t - \dfrac{1}{H}\Big)$ и $\prod_{r=s}^{t} X(r)$ за $X(s) \cdot X\Big(s + \dfrac{1}{H}\Big) \cdot \cdots \cdot X\Big(t - \dfrac{1}{H}\Big)$, где $s, t \in T$, $s < t$ и $X : T \to {}^*\mathbb{R}$ је интернална функција.

Да бисмо показали да случајна променљива $b_{s,t}$, $s < t$ има Гаусову расподелу са средњом вредношћу 0 и стандардном девијацијом $t - s$, довољно је да покажемо да карактеристична функција $\varphi(q) = E(e^{\imath q b_{s,t}})$ случајне променљиве $b_{s,t}$ износи $e^{-q^2(t-s)/2}$. За одређивање карактеристичне функције користимо Лему 12.6, дефиницију и независност случајних променљивих B_{s^+,t^+}, чињеницу да је $\omega(r) = \pm 1$ са вероватноћом $\frac{1}{2}$, Тејлоров ред и дефиницију и непрекидност експоненцијалне функције:

$$\begin{aligned} \varphi(q) &= \int e^{\imath q b_{s,t}(\omega)}\, dL(\mu) \approx \int {}^*e^{\imath q B_{s^+,t^+}(\omega)}\, d\mu \\ &= \int {}^*e^{\imath q \sum_{r=s^+}^{t^+} \dfrac{\omega(r)}{\sqrt{H}}}\, d\mu = \prod\nolimits_{r=s^+}^{t^+} \int {}^*e^{\imath q \dfrac{w(r)}{\sqrt{H}}}\, d\mu \\ &= \prod\nolimits_{r=s^+}^{t^+} {}^*\cos\left(\frac{q}{\sqrt{H}}\right) = \prod\nolimits_{r=s^+}^{t^+} \left(1 - \frac{q^2}{2H} - o\left(\frac{q^4}{H^2}\right)\right) \\ &\approx {}^*e^{-\dfrac{1}{2}q^2(t^+ - s^+)} \approx e^{-\dfrac{1}{2}q^2(t - s)}. \end{aligned}$$

(3) Читаоцу препуштамо да израчуна моменте другог и четвртог реда случајне промењљиве $B_{s,t}$, $s < t$ из T и провери:

$$E({B_{s,t}}^2) = t - s \quad \text{и} \quad E({B_{s,t}}^4) = 3(t-s)^2 - 2(t-s)\frac{1}{H} < 3(t-s)^2.$$

Нека је $T_k = \{\, t \in T \mid |t| \le k \,\}$, $k \in \mathbb{N}$, и нека је

$$\Omega_{m,n,k} = \left\{ \omega \mid (\exists i \in \mathbb{N})\Big(\exists s \in T_k \cap \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right]\Big)\ |B_{\frac{i}{m},s}(\omega)|^4 \ge \frac{1}{n} \right\},$$

за $m, n, k \in \mathbb{N}$. Сада на једноставан начин прелазимо са дискретног на непрекидан случај користећи хиперконачан вероватносни простор и Лебову конструкцију. Нека је $\left|B_{\frac{i}{m},\frac{i+1}{m}}(\omega)\right|^4 < \frac{1}{n}$ и нека постоји елемент $s \in T_k \cap \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right]$ тако да $\left|B_{\frac{i}{m},s}(\omega)\right|^4 \ge \frac{1}{n}$. Изаберимо најмањи такав, на пример, s_ω. За $\widetilde{\omega}\colon T \to \{-1, 1\}$ дефинисано са $\widetilde{\omega}\,(r) = \omega(r)$ за $r < s_\omega$ и $\widetilde{\omega}\,(r) = -\omega(r)$ за $r \ge s_\omega$, важи $\left|B_{\frac{i}{m},\frac{i+1}{m}}(\widetilde{\omega})\right|^4 \ge \frac{1}{n}$. Како постоји $1-1$ кореспонденција између $\widetilde{\omega}$ и ω, то важи:

$$\begin{aligned}
\mu(\Omega_{m,n,k}) &\le \sum\nolimits_{i=0}^{km-1} \mu\left\{ \omega \,\Big|\, \Big(\exists s \in T \cap \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right]\Big)\ \left|B_{i/m,s}(\omega)\right|^4 \ge \frac{1}{n} \right\} \\
&\le 2\sum\nolimits_{i=0}^{km-1} \mu\left\{ \omega \,\Big|\, \left|B_{\frac{i}{m},\frac{i+1}{m}}(\omega)\right|^4 \ge \frac{1}{n} \right\} \\
&\le 2\sum\nolimits_{i=0}^{km-1} n \cdot E\big(B^4_{\frac{i}{m},\frac{i+1}{m}}\big) \\
&< 6n\sum\nolimits_{i=0}^{km-1} \frac{1}{m^2} = \frac{6kn}{m}.
\end{aligned}$$

Према томе, за свако $n, k \in \mathbb{N}$ испуњено је

$$\lim_{m\to\infty} L(\mu)(\Omega_{m,n,k}) = 0,$$

па је пут b_ω непрекидан за $L(\mu)$ скоро све ω. ■

Описани математички модел Брауновог кретања нашао је бројну примену у чистој и примењеној математици. На пример, у [63] читалац може наћи примену Брауновог кретања при доказима егзистенције решења стохастичких диференцијалних једначина.

Глава 13

Нестандардна анализа Хилбертовог простора

Појам векторског (линеарног) простора спада у основне математичке појмове. Геометрију у векторском простора можемо да реализујемо увођењем скаларног производа, а затим норме и метрике. У првом одељку дати су основни појмови и особине векторских и еуклидских простора, пре свега Хилбертовог[1)], над пољем комплексних бројева, као и особине компактних оператора у Хилбертовом простору. Други одељак садржи нестандардну карактеризацију ових простора.

13.1 Хилбертов простор

Нека је непразан скуп $V = \{a, b, c, \dots\}$ скуп вектора, скуп комплексних бројева $\mathbb{C} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ скуп скалара, нека је бинарна операција $+\colon V \times V \to V$ сабирање вектора и функција $\cdot\colon \mathbb{C} \times V \to V$ множење вектора скаларом.

Дефиниција 13.1. Уређена четворка $(V, +, \cdot, \mathbf{C})$ је векторски простор над пољем $\mathbf{C}$ комплексних бројева ако је

(V_1) $(V, +)$ Абелова (комутативна) група,

(V_2) $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$,

[1)] David Hilbert (1862–1943)

(V_3) $\alpha \cdot (a+b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$,

(V_4) $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha\beta) \cdot a$,

(V_5) $1 \cdot a = a$,

за све $a, b \in V$ и све $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

У наредном примеру дати су основни примери векторских простора.

Пример 13.1. 1° *Комплексни n-димензиони аритметички простор* $\mathbf{C}^n$ чине све n-торке $z = (z_1, \dots, z_n)$ комплексних бројева, где су сабирање и множење комплексним бројем одређени са

$$\begin{aligned} (z_1, \dots, z_n) + (w_1, \dots, w_n) &= (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n), \\ \alpha \cdot (z_1, \dots, z_n) &= (\alpha z_1, \dots, \alpha z_n). \end{aligned}$$

2° Векторски простор $\mathbb{C}[a, b]$ чине непрекидне комплексне функције реалног аргумента дефинисане на одсечку $[a, b]$ са уобичајеним операцијама:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \qquad (\alpha \cdot f)(t) = \alpha f(t).$$

3° Векторски простор низова комплексних бројева $(z_1, z_2, \dots)$ који задовољавају услов

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty,$$

са сабирањем и множењем комплексним бројем дефинисаним на следећи начин:

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, \dots) + (w_1, w_2 \dots) &= (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots), \\ \alpha \cdot (z_1, z_2, \dots) &= (\alpha z_1, \alpha z_2, \dots) \end{aligned}$$

означавамо са l_2.

Наводимо оне основне појмове и особине векторских простора које користимо у другом делу ове главе.

Векторски простори V_1 и V_2 над пољем $\mathbf{C}$ су *изоморфни* ако постоји бијективно пресликавање $f\colon V_1 \xrightarrow[1-1]{\text{na}} V_2$ сагласно са операцијама у V_1 и V_2:

$$\begin{aligned} f(a_1 + a_2) &= f(a_1) + f(a_2) && \text{адитивност}, \\ f(\alpha \cdot a) &= \alpha \cdot f(a) && \text{хомогеност}. \end{aligned}$$

Кажемо да су изоморфни векторски простори различите реализације једног истог простора.

Вектори $a_1, \ldots, a_n$ векторског простора V су *линеарно зависни* ако постоје скалари $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, који нису сви једнаки 0, такви да

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \cdots + \alpha_n \cdot a_n = 0.$$

Бесконачан скуп вектора простора V је линеарно зависан ако је неки његов коначан подскуп линеарно зависан. Скуп вектора простора V је *линеарно независан* ако није линеарно зависан. Дакле, у коначном случају, вектори $a_1, \ldots, a_n$ су линеарно независни ако за сваки избор скалара $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, из $\alpha_1 \cdot a_1 + \cdots + \alpha_n \cdot a_n = 0$ следи $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Бесконачан скуп вектора је линеарно независан ако је такав сваки његов коначан подскуп.

Ако у векторском простору V постоји скуп од n линеарно независних вектора и сваки скуп од $n+1$ вектора је линеарно зависан, тада за простор V кажемо да је n-димензионалан и пишемо $\dim V = n$. Ако у векторском простору V постоји бесконачан линеарно независан скуп вектора, тада за простор V кажемо да је бесконачно димензионалан. Простор $\mathbf{C}^n$ је n-димензионалан, док су $\mathbb{C}[a, b]$ и l_2 бесконачно димензионални. У n-димензионалном векторском простору V сваки скуп од n линеарно независних вектора зовемо базом простора V.

Непразан скуп вектора W векторског простора $(V, +, \cdot, \mathbf{C})$ образује векторски потпростор од V ако је $(W, +, \cdot, \mathbf{C})$ векторски простор, где су сабирање вектора и множење вектора скаларом рестрикције одговарајућих операција у V. Лако проверавамо да је W векторски потпростор од V ако за свако $a, b \in W$ и свако $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ важи $\alpha \cdot a + \beta \cdot b \in W$. Простор l_2 је, на пример, прави потпростор векторског простора c_0 свих конвергентних 0-низова.

Дефиниција 13.2. *Норма* у векторском простору $(V, +, \cdot, \mathbf{C})$ је свака функционела $\| \cdot \| \colon V \to \mathbb{R}$ која задовољава услове (за све $a, b \in V$ и свако $\alpha \in \mathbb{C}$):

(N_1) $\|a\| \geq 0$,

(N_2) $\|a\| = 0$ ако и само ако $a = 0$,

(N_3) $\|\alpha \cdot a\| = |\alpha| \|a\|$,

(N_4) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

Неједнакост (N_4) позната је као *неједнакост троугла*.

Пример 13.2. 1° У комплексном n-димензионом простору $\mathbf{C}^n$ норма се може увести помоћу

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

2° Норма у простору $\mathbb{C}[a, b]$ се може увести помоћу

$$\|f\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)|, \quad f \in \mathbb{C}[a, b].$$

3° У простору l_2 норма вектора $\sigma = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots)$ се може увести помоћу

$$\|\sigma\| = \sup\nolimits_{n \in \mathbb{N}} |z_n|.$$

У *нормираном векторском простору*, тј. простору у којем је задата нека норма, уводимо метрику $\rho\colon V \times V \to \mathbb{R}$ помоћу

$$\rho(a, b) = \|a - b\|, \quad a, b \in V.$$

Комплетан нормиран простор зовемо Банахов простор. У нормираном векторском простору са топологијом која је индуцирана метриком ρ посебно је значајан појам *затвореног векторског потпростора*. То су они векторски потпростори који садрже све своје тачке нагомилавања. Ако је нормиран простор коначне димензије, тада је сваки његов потпростор затворен. Ово се не дешава у бесконачно димензионом нормираном простору.

Пример 13.3. 1° У нормираном простору $\mathbb{C}[a, b]$ скуп полинома образује потпростор који није затворен.

2° Низови $(z_1, z_2, \dots, z_n, \dots)$ чији су скоро сви чланови једнаки нули осим, можда, њих коначно много, образују потпростор W нормираног простора l_2 који није затворен у односу на норму из Примера 13.2. У скупу његових тачака нагомилавања налази се и низ из l_2 $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$, који није у W.

Норма у векторском простору може да се уведе и тако што се прво у њему дефинише *скаларни производ*.

Дефиниција 13.3. У векторском простору $(V, +, \cdot, \mathbf{C})$ скаларни производ је свака функција $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ која задовољава услове (за свако $a, b, c \in V$ и свако $\alpha \in \mathbb{C}$):

(S_1) $\langle a+b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle$,

(S_2) $\langle \alpha \cdot a, b\rangle = \alpha\langle a, b\rangle$,

(S_3) $\langle a, b\rangle = \overline{\langle b, a\rangle}$,

(S_4) $a \neq 0 \Rightarrow \langle a, a\rangle > 0$.

Приметимо да је због (S_3) скаларни квадрат $\langle a, a\rangle$, $a \in V$ увек ненегативан реалан број, па у комплексном *еуклидском* простору, тј. у простору у коме је задат скаларни производ, норму вектора $a \in V$ можемо да уведемо помоћу

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}.$$

Лако се проверавају услови (N_1)-(N_4) из Дефиниције 13.2. Неједнакост троугла (N_4) следи из добро познате Шварцове[2)] неједнакости (познате и као неједнакост Коши-Буњаковског[3)])

$$|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|, \quad a, b \in V.$$

Заиста, (N_4) следи из

$$\begin{aligned} \|a+b\|^2 &= \langle a+b, a+b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle \\ &= \|a\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle a, b\rangle + \|b\|^2 \leq \|a\|^2 + 2|\langle a, b\rangle| + \|b\|^2 \\ &\leq \|a\|^2 + 2\|a\| \cdot \|b\| + \|b\|^2 = (\|a\| + \|b\|)^2. \end{aligned}$$

Векторе $a, b \in V$ називамо *узајамно ортогоналним* ако је $\langle a, b\rangle = 0$. Скуп W не нула вектора је *ортогоналан* ако је $\langle a, b\rangle = 0$ за свака два различита вектора a, b из W. Лако се проверава да је сваки ортогоналан скуп не нула вектора линеарно независан. Ако је ортогоналан скуп вектора B база векторског простора V и $\|a\| = 1$ за свако $a \in B$, тада скуп B зовемо *ортогонална нормирана база* простора V.

Пример 13.4. 1° Скаларни производ у n-димензионом аритметичком простору $\mathbf{C}^n$ може да се уведе са

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}, \quad z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n.$$

---

2) Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921)

3) Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889)

Ортогоналну нормирану базу овог простора образују, на пример, вектори $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$.

2° Вектори $\sigma_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots), \sigma_2 = (0, 1, \dots, 0, \dots), \dots$ образују стандардну ортогоналну нормирану базу простора l_2 са скаларним производом

$$\langle z, w\rangle = \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} z_i\overline{w_i}, \quad z = (z_1, z_2, \dots), w = (w_1, w_2, \dots) \in l_2.$$

Пресликавање $A\colon V \to V$ је *линеарни оператор* коначно димензионог нормираног простора V ако за све $a, b \in V$ и све $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ важи:

$$A(\alpha \cdot a + \beta \cdot b) = \alpha \cdot A(a) + \beta \cdot A(b).$$

Како је V тополошки простор, то о непрекидности линеарног оператора говоримо на добро познат начин: A је *непрекидно* у тачки $a \in V$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за све $b \in V$, из $\|a - b\| < \delta$ следи $\|A(a) - A(b)\| < \varepsilon$.

Пример 13.5. Нека је W векторски потпростор од V. Ако V разложимо на директан збир простора W и његовог ортогоналног комплемента $W^{\perp} = \{\, a \mid (\forall x \in W)\langle a, x\rangle = 0 \,\}$, а тиме свако $a \in V$ представимо на јединствен начин у облику

$$a = b + c \qquad (b \in W,\ c \in W^{\perp}),$$

тада пресликавање $P_W\colon V \to V$ дато са $P_W(a) = b$ зовемо оператор ортогоналног пројектовања. Читаоцу препуштамо да покаже да је P_W непрекидан линеаран оператор простора V.

Оператор $A\colon V \to V$ је *ограничен* ако пресликава отворену куглу $B = \{\, a \mid \|a\| < r\}$ у ограничен скуп, што користећи линеарност можемо да искажемо и овако: A је ограничен оператор ако постоји константа k таква да за све $a \in V$ важи

$$\|A(a)\| \le k\|a\|.$$

Најмања таква константа k зове се *норма* оператора A и означава са $\|A\|$. За линеарне операторе $A_1, A_2\colon V \to V$ лако се проверава:

$$\|A_1 + A_2\| \le \|A_1\| + \|A_2\| \qquad \text{и} \qquad \|A_1 \circ A_2\| \le \|A_1\| \cdot \|A_2\|,$$

где је $(A_1 + A_2)(a) = A_1(a) + A_2(a)$ и $(A_1 \circ A_2)(a) = A_1\big(A_2(a)\big)$, $a \in V$.

Нека је $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ произвољан ортогоналан нормиран систем вектора у комплексном euклидском простору V и σ неки вектор у V. Бројеви $c_n = \langle \sigma, \varphi_n \rangle$ зову се *Фурјеови*[4] *коефицијенти*, док се ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n$ зове *Фурјеов ред* елемента σ по ортогоналном нормираном систему вектора $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$. Природно се намећу питања: да ли ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n$ конвергира и, ако конвергира, да ли је његова сума баш елемент σ? Изаберимо за задато $n \in \mathbb{N}$ коефицијенте $d_1, \ldots, d_n$ тако да растојање између вектора σ и вектора одређеног делимичном сумом $S_n = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \varphi_i$ буде минимално. Очигледно је

$$\begin{aligned} \|\sigma - S_n\|^2 &= \|\sigma\|^2 - \sum_{i=1}^{n} d_i \overline{c_i} - \sum_{i=1}^{n} \overline{d_i} c_i + \sum_{i=1}^{n} |d_i|^2 \\ &= \|\sigma\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |d_i - c_i|^2. \end{aligned}$$

Према томе, минимум се достиже за $d_i = c_i$, $i = 1, \ldots, n$, и тада важи $\|\sigma - S_n\|^2 = \|\sigma\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$, тј. $\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \leq \|\sigma\|^2$. Како је n произвољно, то $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leq \|\sigma\|^2$, што представља добро познату Беселову[5] неједнакост. За ортогоналан нормиран систем вектора $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ кажемо да је *затворен* ако за свако $\sigma \in V$ важи $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \|\sigma\|^2$, а та једнакост се зове једнакост Парсевала[6]. Стога, ако је $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ затворен ортогоналан нормиран систем вектора, тада Фурјеов ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n$ вектора $\sigma \in V$ конвергира баш ка σ.

Комплексан еуклидски простор је *сепарабилан* ако у њему постоји највише пребројив свуда густ скуп вектора. У сепарабилном векторском простору сваки ортогоналан нормиран скуп вектора је највише пребројив. Заиста, за ортогоналан нормиран скуп вектора $\{\, a_i \mid i \in I \,\}$ простора V, важи $\|a_i - a_j\| = \sqrt{2}$, $i \neq j$. Стога, отворене кугле $B\big(a_i, \frac{\sqrt{2}}{2}\big)$, $i \in I$, представљају дисјунктне скупове који садрже по највише једну тачку пребројивог свуда густог скупа тачака у V, па и њих има највише пребројиво много.

Комплетан комплексан еуклидски простор зовемо *Хилбертов простор*. До краја ове главе разматраћемо само Хилбертов простор бесконачне димензије.

Сваки сепарабилан Хилбертов простор има пребројиву ортогоналну нормирану базу. Покажимо да са тачношћу до на изоморфизам постоји

[4] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)
[5] Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846)
[6] Marc-Antoine Parseval (1755–1836)

само један сепарабилан Хилбертов простор, и да простор l_2 можемо посматрати као његову „координатну реализацију”.

Теорема 13.1. *Сваки сепарабилан Хилбертов простор је изоморфан простору* l_2.

Доказ. Нека је H сепарабилан комплексан Хилбертов простор и нека је скуп вектора $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ једна његова ортогонална нормирана база. Придружимо сваком $\sigma \in H$ низ (c_n) кога чине његови Фурјеови коефицијенти у односу на изабрани систем вектора. Како важи да је $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$, то $(c_n) \in l_2$. Покажимо да је пресликавање $F\colon H \to l_2$ дато са

$$F(\sigma) = (c_n)$$

изоморфизам простора H на простор l_2.

Различити вектори простора H имају различите Фурјеове коефицијенте у односу на исти систем вектора $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$, па је F инјективно пресликавање. Да би ово пресликавање било *на*, покажимо да сваки $(c_n) \in l_2$ одређује $\sigma \in H$ тако да је $c_i = \langle \sigma, \varphi_i \rangle$, $i \in \mathbb{N}$, и $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \|\sigma\|^2$. Ова особина је иначе позната као Рис-Фишерова[7] теорема. У том циљу, ставимо $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \varphi_i$. Тада је

$$\|\sigma_{n+p} - \sigma_n\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} |c_i|^2,$$

што због конвергентности реда $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$ и комплетности простора H даје да низ (σ_n) конвергира неком $\sigma \in H$. Тада је $\langle \sigma, \varphi_i \rangle = \langle \sigma_n, \varphi_i \rangle + \langle \sigma - \sigma_n, \varphi_i \rangle$. Односно, за $n \geq i$ имамо

$$\langle \sigma, \varphi_i \rangle = c_i + \langle \sigma - \sigma_n, \varphi_i \rangle.$$

Како лева страна ове једнакости не зависи од n, то користећи Шварцову неједнакост

$$|\langle \sigma - \sigma_n, \varphi_i \rangle| \leq \|\sigma - \sigma_n\| \cdot \|\varphi_i\| = \|\sigma - \sigma_n\|$$

добијамо да $\langle \sigma - \sigma_n, \varphi_i \rangle \to 0$, када $n \to \infty$, односно да је $\langle \sigma, \varphi_i \rangle = c_i$. Такође, из $\|\sigma - \sigma_n\|^2 = \|\sigma\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$ следи $\|\sigma\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$.

Ако је $F(\sigma) = (c_n)$ и $F(\tau) = (d_n)$, тада је $F(\sigma + \tau) = (c_n + d_n)$ и такође важи једнакост $F(\alpha \cdot \sigma) = (\alpha \cdot c_n)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Такође, из једнакости

[7] Frigyes Riesz (1880–1956)

$\|\sigma+\tau\|^2 = \|\sigma\|^2 + \langle\sigma,\tau\rangle + \langle\tau,\sigma\rangle + \|\tau\|^2$, једнакости Парсевала и из $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n+d_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}c_n\overline{d_n} + \sum_{n=1}^{\infty}\overline{c_n}d_n + \sum_{n=1}^{\infty}|d_n|^2$, следи

$$\langle\sigma,\tau\rangle = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} c_n\overline{d_n} = \langle F(\sigma), F(\tau)\rangle.$$

Према томе, бијективно пресликавање F чува $+$ и $\cdot$, као и скаларни производ. ∎

Како посматрамо Хилбертов простор H бесконачне димензије, то су посебно интересантна пресликавања $T\colon H \to H$ која су комплетно непрекидна (компактна). Ова пресликавања су по својим својствима слична непрекидним операторима коначно димензионог нормираног простора.

Дефиниција 13.4. Оператор $T\colon H \to H$ је комплетно непрекидан (компактан) ако сваки ограничени скуп пресликава у предкомпактан, тј. у скуп чије је затворење компактан скуп.

У коначно димензионом нормираном простору сваки линеаран оператор је компактан јер ограничен скуп пресликава опет у ограничен скуп. Јединични оператор Хилбертовог простора је непрекидан, али није комплетно непрекидан. Заиста, ако је $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ линеарно независан скуп вектора у H и E_n потпростор од H генерисан векторима $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, тада је $d(\varphi_n, E_{n-1}) = \varepsilon > 0$, па постоји $\psi \in E_{n-1}$ такав да $d(\varphi_n, \psi) < 2\varepsilon$. Вектори $\psi_n = \dfrac{1}{d(\varphi_n,\psi)}\cdot(\varphi_n - \psi)$ задовољавају:

$$\|\psi_n\| = 1, \quad \psi_n \in E_n \qquad \text{и} \qquad d(\psi_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}.$$

Према томе, у јединичној кугли простора H налазе се такви вектори $\psi_1, \psi_2, \ldots$ за које је $d(\psi_n, \psi_{n-1}) > \frac{1}{2}$, па из овог низа вектора не можемо да издвојимо конвергентан подниз, што значи да јединична кугла у H није предкомпактан скуп.

Пример 13.6. Оператор $T\colon l_2 \to l_2$ дефинисан помоћу

$$T(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) = \Big(z_1, \frac{1}{2}z_2, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}z_n, \ldots\Big)$$

је комплетно непрекидан. Овај оператор преводи јединичну куглу простора l_2 у скуп садржан у „Хилбертовом кирпичу” простора l_2 кога чине тачке $z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots)$ за које је

$$|z_1| \le 1,\ |z_2| \le \frac{1}{2}, \dots,\ |z_n| \le \frac{1}{2^{n-1}}, \dots.$$

Овај скуп је пример потпуно ограниченог, а тиме и предкомпактног бесконачно димензионог скупа.

13.2 Нестандардни Хилбертов простор

Сепарабилан Хилбертов простор H над пољем $\mathbf{C}$ можемо да представимо као скуп низова $\sigma = (z_n)$ комплексних бројева таквих да је $\|\sigma\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$, тј. као простор l_2 (Теорема 13.1.). Полазећи од суперструктуре $V(S)$ изграђене на језику који садржи симболе свих комплексних бројева, свих скупова и релација на њима, ..., можемо да изградимо на уобичајен начин нестандардни Хилбертов простор ${}^*H$ над ${}^*\mathbb{C}$. Простор ${}^*H$ чине сви интернални низови $\sigma = (z_n)$ у ${}^*\mathbb{C}$ такви да $\|\sigma\|^2 = \sum_{n \in {}^*\mathbb{N}} |z_n|^2$ конвергира.

Посматрајмо екстензију у ${}^*\mathbb{C}$ низа $\sigma = (z_n)$ из H. Користећи конвергентност низа (S_n) парцијалних сума конвергентног реда $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$, добићемо да је $\sum_{n \ge \kappa} |z_n|^2$ инфинитезимала за свако бесконачно $\kappa \in {}^*\mathbb{N}$. Овим условом, уз додатак да $\sigma = (z_n)$ из ${}^*H$ има коначну норму, можемо да опишемо све до-стандардне тачке скупа ${}^*H$. Присетимо се да је $\sigma \in {}^*H$ до-стандардан елемент ако је $\|\sigma - {}^\circ\sigma\|$ инфинитезимала, где је ${}^\circ\sigma = \mathrm{st}\ \sigma \in H$ стандардни део од σ.

Теорема 13.2. *Тачка $\sigma = (z_n)$ из ${}^*H$ је до-стандардна ако и само ако има коначну норму ($\|\sigma\|$ је коначан реалан број) и $\sum_{n \ge \kappa} |z_n|^2$ је инфинитезимала за свако бесконачно $\kappa \in {}^*\mathbb{N}$.*

Доказ. Нека је ${}^\circ\sigma = (z_n')$ елемент из H такав да је $\|\sigma - {}^\circ\sigma\|$ инфинитезимала. Тада је

$$\|\sigma\| \le \|\sigma - {}^\circ\sigma\| + \|{}^\circ\sigma\| < 1 + \|{}^\circ\sigma\|,$$

тј. σ има коначну норму. Како је

$$\sum_{n \ge \kappa} |z_n|^2 \le \left(\sqrt{\sum_{n \ge \kappa} |z_n - z_n'|^2} + \sqrt{\sum_{n \ge \kappa} |z_n'|^2} \right)^2$$

и $\sum_{n\geq\kappa}|z'_n|^2$ инфинитезимала јер $(z'_n)\in H$, а $\sum_{n\geq\kappa}|z_n-z'_n|^2$ инфинитезимала јер ова сума не прелази $\|\sigma-{}^\circ\sigma\|^2$, то је $\sum_{n\geq\kappa}|z_n|^2$ инфинитезимала за свако бесконачно $\kappa\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$.

Обратно, нека је сада $\|\sigma\|$ коначан реалан број и $\sum_{n\geq\kappa}|z_n|^2$ инфинитезимала за свако бесконачно $\kappa\in{}^*\mathbb{N}$. Како је $|z_n|$ коначан за свако $n\in\mathbb{N}$, то постоји ${}^\circ z_n$. Такође, $\sum_{n\in\mathbb{N}}|{}^\circ z_n|^2$ конвергира у $\mathbb{C}$, па низ $({}^\circ z_n)$ дефинише тачку $\sigma'=(z'_n)$ у $H\subseteq{}^*H$ такву да је $z'_n={}^\circ z_n$ за све коначне n. Како је $\sum_{n=1}^{k}|z_n-z'_n|^2=\sum_{n=1}^{k}|z_n-{}^\circ z_n|^2$ инфинитезимала за свако коначно k, то према принципу преливања, Теорема 4.19. и $\sum_{n=1}^{\kappa-1}|z_n-z'_n|^2$ је инфинитезимала за неко бесконачно $\kappa\in{}^*\mathbb{N}$. Из

$$\|\sigma-\sigma'\|\leq\sum_{n=1}^{\kappa-1}|z_n-z'_n|^2+\left(\sqrt{\sum_{n\geq\kappa}|z_n|^2}+\sqrt{\sum_{n\geq\kappa}|z'_n|^2}\right)^2,$$

и чињенице да је $\sum_{n\geq\kappa}|z_n|^2$ инфинитезимала по претпоставци, а сума $\sum_{n\geq\kappa}|z'_n|^2$ инфинитезимала јер $\sigma'\in H$, следи да је тачка σ до-стандардна и ${}^\circ\sigma=\sigma'$. ■

Нека је $T\colon{}^*H\to{}^*H$ нестандардна екстензија линеарног оператора $T\colon H\to H$.

Теорема 13.3. *Ако је $T\colon H\to H$ комплетно непрекидан линеаран оператор, тада T пресликава сваку тачку $\sigma\in{}^*H$ са коначном нормом у до-стандардну тачку.*

Доказ. Покажимо, прво, да уколико је A компактан скуп у H, све тачке скупа ${}^*A$ су до-стандардне. Наиме, ако $\sigma=(z_n)\in{}^*A$ није до-стандардан и σ има коначну норму (случај када норма није коначна је очигледан), тада према претходној теореми постоји бесконачан $\kappa\in{}^*\mathbb{N}$ такав да је $\sum_{n\geq\kappa}|z_n|^2>2r^2$ за неки стандардан позитиван број r. Стога, за произвољно $\tau=(w_n)\in{}^*H$ важи

$$\|\sigma-\tau\|\geq\sqrt{\sum_{n\geq\kappa}|z_n-w_n|^2}\geq\sqrt{\sum_{n\geq\kappa}|z_n|^2}-\sqrt{\sum_{n\geq\kappa}|w_n|^2}>r.$$

Како је A компактан, то за ово r постоје тачке $\tau_1,\ldots,\tau_k$ из A такве да за свако $\xi\in A$ важи $\|\xi-\tau_i\|<r$, за неко $i\in\{1,\ldots,k\}$. Трансфером овог тврђења добијамо да је за све $\xi\in{}^*A$ испуњено $\|\xi-\tau_i\|<r$, за неко $1\leq i\leq k$, што је немогуће.

Коначно, нека је $\sigma\in{}^*H$ елемент са коначном нормом, на пример $\|\sigma\|<r$ за неки позитиван стандардан реалан број r. Сферу дату са

$B = \{\, \xi \mid \|\xi\| < r \,\}$ пресликавамо са $T\colon H \to H$ у скуп чије затворење $A = \mathrm{Cl}(T(B))$ је компактан скуп. Како за нестандардну екстензију $T\colon {}^*H \to {}^*H$ важи $T(\sigma) \in {}^*A$, то је $T(\sigma)$ до-стандардна тачка. ■

Ограниченом линеарном оператору $T\colon H \to H$ придружимо матричну репрезентацију $T = [a_{ij}]_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}}$, при чему за $a_{ij} \in \mathbb{C}$ важи

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{j \in \mathbb{N}} |a_{ij}|^2 &< \infty, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \\ \sum\nolimits_{i \in \mathbb{N}} |a_{ij}|^2 &< \infty, \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

тј., на пример, $(a_{ij}) \in H$ за свако фиксирано $i \in \mathbb{N}$. Стога, $\sum_{j \geq \kappa} |a_{ij}|^2$ је инфинитезимала за свако бесконачно $\kappa \in {}^*\mathbb{N}$ и коначно $i \in \mathbb{N}$.

Дефиниција 13.5. Оператор $T = [a_{ij}]$ је супердијагоналан ако важи да је $a_{ij} = 0$ за $i > j + 1$, $j = 1, 2, \ldots$.

Истакнимо једно занимљиво својство елемената a_{ij} матричне репрезентације супердијагоналног ограниченог линеарног оператора.

Теорема 13.4. *Нека је $T\colon H \to H$ супердијагоналан ограничен линеаран оператор са матричном репрезентацијом $T = [a_{ij}]$ и нека је $p(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, $n \geq 1$ полином чији су коефицијенти c_i стандардни комплексни бројеви такав да је $p(T) = c_0 \cdot 1_H + c_1 \cdot T + \cdots + c_n \cdot T^n$ комплетно непрекидан линеаран оператор. Тада постоји бесконачно $\kappa \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ такво да је $a_{\kappa+1\,\kappa}$ инфинитезимала.*

Доказ. Нека је $p(T) = [b_{ij}]$. Покажимо, прво, да је b_{ij} инфинитезимала за све бесконачне $j \in {}^*\mathbb{N}$ док i може бити коначно или бесконачно. За коначно i то важи јер је $\sum_{k \geq j} |a_{ik}|^2$ инфинитезимала. За бесконачно i, нека је $\sigma = (z_n)$, где је $z_n = 0$ за $n \neq j$ и $z_j = 1$. Тада је $\|\sigma\| = 1$, па $\tau = p(T)(\sigma) = (w_n)$ је до-стандардан, односно имамо да је $w_i = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} z_k = b_{ij}$ инфинитезимала.

Коначно, из $b_{i+n\,i} = c_n \cdot a_{i+1\,i} \cdot a_{i+2\,i+1} \cdot \cdots \cdot a_{i+n\,i+n-1}$ следи да бар један од фактора, рецимо $a_{i+j+1\,i+j}$, мора бити инфинитезимала за свако бесконачно $i \in {}^*\mathbb{N}$. Према томе, стављајући $\kappa = i + j \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ добијамо да је $a_{\kappa+1\,\kappa}$ инфинитезимала. ■

Нека је E интерналан затворен векторски потпростор од ${}^*H$ и нека је $P_E\colon {}^*H \to {}^*H$ одговарајући пројектујући оператор. Нека је

$$^{\circ}E = \{\, \sigma \in H \mid \|\sigma - \sigma'\| \text{ је инфинитезимала за неко } \sigma' \in E \,\}.$$

Како је $\|\sigma-\sigma'\| \geq \|\sigma-P_E(\sigma)\|$, то $\sigma \in {}^\circ E$ ако и само ако је $\|\sigma-P_E(\sigma)\|$ инфинитезимала. Следећа особина је за нас интересантна.

Теорема 13.5. *Ако је E интерналан затворен векторски потпростор од ${}^*H$, тада је ${}^\circ E$ затворен векторски потпростор од H.*

Доказ. Нека су σ_1, σ_2 из ${}^\circ E$ и c_1, c_2 стандардни комплексни бројеви. За произвољне елементе τ_1, τ_2 из E такве да су $\|\sigma_1-\tau_1\|$ и $\|\sigma_2-\tau_2\|$ инфинитезимале, важи $c_1\tau_1+c_2\tau_2 \in E$ и

$$\|(c_1\sigma_1+c_2\sigma_2)-(c_1\tau_1+c_2\tau_2)\| \leq |c_1|\cdot\|\sigma_1-\tau_1\|+|c_2|\cdot\|\sigma_2-\tau_2\|$$

је инфинитезимала. Стога, $c_1\sigma_1+c_2\sigma_2 \in {}^\circ E$, што показује да је ${}^\circ E$ векторски простор.

Нека $\sigma_n \in {}^\circ E$ за стандардан природан број n, и нека $\sigma_n \to \sigma$, $n \to \infty$. Тада је $\|\sigma_n-P_E(\sigma_n)\|$ инфинитезимала за свако $n \in \mathbb{N}$. На основу принципа преливања постоји бесконачан $\kappa \in {}^*\mathbb{N}$ такав да је $\|\sigma_n-P_E(\sigma_n)\|$ инфинитезимала за све $n < \kappa$ (посматрамо, наравно, нестандардну екстензију низа (σ_n) у ${}^*H$). Како је

$$\|\sigma-P_E(\sigma_n)\| \leq \|\sigma-\sigma_n\|+\|\sigma_n-P_E(\sigma_n)\|,$$

то је $\|\sigma-P_E(\sigma_n)\|$ инфинитезимала за све бесконачне $n < \kappa$. Стога, $\sigma \in {}^\circ E$, што показује да је ${}^\circ E$ затворен потпростор од H. ■

Нека је κ бесконачан природан број и $H_\kappa = \{\sigma=(z_n) \mid z_n=0 \text{ за } n>\kappa\}$. Тада је H_κ затворен линеаран потпростор од ${}^*H$ и одговарајући пројектујући оператор $P_{H_\kappa}\colon {}^*H \to {}^*H$ пресликава $\sigma=(z_n) \in {}^*H$ у тачку $\sigma'=(z'_n)$ за коју је $z'_n=z_n$, $n \leq \kappa$ и $z'_n=0$, $n>\kappa$. Стога, $\|\sigma-P_{H_\kappa}(\sigma)\| = \sqrt{\sum_{n>\kappa}|z_n|^2}$ је инфинитезимала за $\sigma \in H$, па важи да је $H \subseteq {}^\circ H_\kappa$.

Нека је $T\colon H \to H$ ограничен линеаран оператор и нека је $T' = P_{H_\kappa}\circ T\circ P_{H_\kappa}$. Тада је $\|T'\| \leq \|P_{H_\kappa}\|^2\cdot\|T\| \leq \|T\|$. Стога, за $T_\kappa = T' \restriction H_\kappa$ важи $\|T_\kappa\| \leq \|T\|$.

Теорема 13.6. *Ако је E интерналан затворен T_κ–инваријантан векторски потпростор од H_κ, тада ${}^\circ E$ је T–инваријантан потпростор од H.*

Доказ. За $\sigma \in {}^\circ E$ и $\tau \in E$ такво да је $\|\sigma-\tau\|$ инфинитезимала, по претпоставци важи $T_\kappa(\tau) \in E$, а тиме и $P_{H_\kappa}\circ T(\tau) \in E$. Из

$$\|T(\sigma)-P_{H_\kappa}\circ T(\tau)\| \leq \|T(\sigma)-P_{H_\kappa}\circ T(\sigma)\|+\|P_{H_\kappa}\|\cdot\|T\|\cdot\|\sigma-\tau\|$$

следи да је $\|T(\sigma) - P_{H_\kappa} \circ T(\tau)\|$ инфинитезимала, па $T(\sigma) \in {}^\circ E$. ■

Интерналном затвореном векторском потпростору E простора H_κ придружимо на уобичајен начин број $\dim(E) \in {}^*\mathbb{N}$, који зовемо његовом димензијом.

ТЕОРЕМА 13.7. *Ако су E и E_1 интернални затворени векторски потпростори од H_κ такви да је $E \subseteq E_1$ и $\dim(E_1) = \dim(E) + 1$, тада су сваке две тачке σ_1, σ_2 из ${}^\circ E_1$ линеарно зависне по модулу ${}^\circ E$, тј., на пример, $\sigma_2 = \alpha \cdot \sigma_1 + \sigma$ за $\alpha \in \mathbb{C}$ и неко $\sigma \in {}^\circ E$.*

Доказ. Нека $\sigma_1, \sigma_2 \in {}^\circ E_1$ и нека су τ_1, τ_2 тачке из E_1 такве да су $\|\sigma_1 - \tau_1\|$ и $\|\sigma_2 - \tau_2\|$ инфинитезимале. Тада је, на пример, $\tau_2 = c \cdot \tau_1 + \tau$, где $\tau \in E$ и $c \in {}^*\mathbb{C}$.

Ако је c инфинитезимала, тада $\sigma_2 \in {}^\circ E$, па су σ_1 и σ_2 линеарно зависни по модулу ${}^\circ E$.

Ако је c бесконачан, тада је c^{-1} инфинитезимала и $c^{-1} \cdot \tau \in E$. Из $\tau_1 = c^{-1} \cdot \tau_2 - c^{-1} \cdot \tau$ следи $\sigma_1 \in {}^\circ E$, па су опет σ_1 и σ_2 линеарно зависни по модулу ${}^\circ E$.

Преостао је случај када постоји ${}^\circ c \neq 0$. Сада је $\tau = \tau_2 - c \cdot \tau_1$ бесконачно блиско са $\sigma = \sigma_2 - {}^\circ c \cdot \sigma_1$ јер је

$$\|\sigma - \tau\| \leq \|\sigma_2 - \tau_2\| + |c| \cdot \|\sigma_1 - \tau_1\| + |c - {}^\circ c| \cdot \|\sigma_1\|.$$

Стога, $\sigma \in {}^\circ E$, па су опет σ_1 и σ_2 линеарно зависни по модулу ${}^\circ E$. ■

Сада можемо да дамо основни резултат ове главе. Следећа теорема о инваријантним потпросторима комплетно непрекидног (компактног) оператора је уопштење проблема који су за случај $p(z) = z^2$ поставили Халмош[8)] и К.Т. Смит. Доказ који излажемо припада Ј.М. Бернштајну и А. Робинсону.

ТЕОРЕМА 13.8. *Ако је $T\colon H \to H$ ограничен линеаран оператор Хилбертовог простора H над пољем комплексних бројева и $p(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$ не нула полином са комплексним коефицијентима такав да је $p(T)$ комплетно непрекидан (компактан) оператор, тада постоји бар један затворен нетривијалан потпростор од H који је T–инваријантан.*

8) Paul Richard Halmos (1916–2006)

Доказ. Ако је скуп $A_\sigma = \{\sigma, T(\sigma), T^2(\sigma), \dots, T^n(\sigma), \dots\}$ (за неко $\sigma \neq 0$ из H) скуп линеарно зависних вектора (A_σ зовемо T–цикличан потпростор), тада је A_σ затворен нетривијалан потпростор од H који је T–инваријантан. Стога, претпоставимо да је за свако $\sigma \neq 0$ из H скуп A_σ линеарно независан и да генерише читав простор. Изаберимо σ такво да је $\|\sigma\| = 1$, па Грам[9)]-Шмитовим[10)] поступком полазећи од скупа вектора A_σ изградимо ортонормални скуп вектора $B = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots\}$ за $\eta_1 = \sigma$. Оператор T је у односу на базу B супердијагоналан. Ако је $T = [a_{ij}]$ његова матрична репрезентација у бази B, то према Теореми 13.4. постоји бесконачно $\kappa \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ такво да је $a_{\kappa+1\,\kappa}$ инфинитезимала. За ово κ посматрајмо простор H_κ и операторе P_{H_κ}, $T' = P_{H_\kappa} \circ T \circ P_{H_\kappa}$ и $T_\kappa = T' \restriction H_\kappa$.

Нека је $\tau = (z_n) \in {}^*H$ са коначном нормом и $(T \circ P_{H_\kappa} - T')(\tau) = \xi = (w_n)$. Тада је $w_n = 0$ за $n \neq \kappa + 1$ а $w_{\kappa+1} = a_{\kappa+1\,\kappa} \cdot z_\kappa$, па је ξ инфинитезимала јер је $\|\xi\| \leq |a_{\kappa+1\kappa}| \cdot \|\tau\|$. Покажимо, методом математичке индукције, да важи

$$T^k \circ P_{H_\kappa}(\tau) \approx (T')^k(\tau), \quad k = 1, 2, \dots. \tag{1}$$

За $k = 1$ управо је показано да $T \circ P_{H_\kappa}(\tau) \approx T'(\tau)$. Нека је (1) тачно за неко $k \geq 1$. Тада је

$$\begin{aligned} T^{k+1} \circ P_{H_\kappa}(\tau) &\approx T \circ (T')^k(\tau) = T \circ P_{H_\kappa} \circ (T')^k(\tau) \\ &\approx T' \circ (T')^k(\tau) = (T')^{k+1}(\tau). \end{aligned}$$

Како је $P_{H_\kappa}(\tau) \approx \tau$ за $\tau \in H_\kappa$, то $p(T)(\tau) \approx p(T')(\tau)$ за свако $\tau \in H_\kappa$ са коначном нормом.

Простор H_κ има „коначну” димензију κ у смислу нестандардне анализе. Стога, трансфером одговарајуће особине из стандардне теорије векторских простора, постоји ланац потпростора $E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_\kappa$, где је $E_0 = \{0\}$, $\dim(E_j) = j$ и $T_\kappa(E_j) \subseteq E_j$ за $j = 0, 1, \dots, \kappa$. Потпростори E_j су затворени, опет у нестандардном смислу, јер су коначно-димензиони линеарни потпростори од ${}^*H$.

За ма које $\tau \neq 0$ из H, вектор $p(T)(\tau)$ није нула вектор јер би у супротном вектори $\tau, T(\tau), \dots, T^n(\tau)$, а тиме и вектори скупа A_τ, били линеарно зависни. Нека је $\|\tau\| = 1$. Како је $\tau \approx P_{H_\kappa}(\tau)$, $p(T)(\tau) \approx p(T) \circ P_{H_\kappa}(\tau)$, то $p(T) \circ P_{H_\kappa}(\tau)$, а тиме и $p(T')(\tau)$, нису инфинитезимале. Стога је $\|p(T')(\tau)\| > r$ за неки стандардан позитиван број r.

[9)] Jørgen Pedersen Gram (1850–1916)
[10)] Erhard Schmidt (1876–1959)

Ако је $r_j = \|p(T')(\tau) - p(T') \circ P_{E_j}(\tau)\|$, тада је испуњено $r_j \leq \|p(T')\| \cdot \|\tau - P_{E_j}(\tau)\|$, $j = 0, 1, \dots, \kappa$. Из $r_0 = \|p(T')(\tau)\|$ следи $r_0 > r$, а из $\|\tau - P_{E_\kappa}(\tau)\| = \|\tau - P_{H_\kappa}(\tau)\|$ следи да је r_κ инфинитезимала и $r_\kappa < \dfrac{r}{2}$. Према томе, постоји најмање $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ такво да је $r_\nu < \dfrac{r}{2}$ и $r_{\nu-1} \geq \dfrac{r}{2}$.

Ако имамо да $\tau \in {}^\circ E_{\nu-1}$, тада су $\|\tau - P_{E_{\nu-1}}(\tau)\|$ и $r_{\nu-1} \leq \|p(T')\| \cdot \|\tau - P_{E_{\nu-1}}(\tau)\|$ инфинитезимале, што је супротно избору броја ν. Одатле закључујемо да ${}^\circ E_{\nu-1} \neq H$. Такође је ${}^\circ E_\nu \neq \{0\}$. Заиста, посматрајмо $\rho = p(T') \circ P_{E_\nu}(\tau)$. Тада $\rho \in E_\nu$ јер $P_{E_\nu}(\tau) \in E_\nu$ и E_ν је $p(T_\kappa)$–инваријантан, а тиме, еквивалентно, и $p(T')$–инваријантан.

Такође, $\rho \approx p(T) \circ P_{E_\nu}(\tau)$ који је до-стандардан према Теореми 13.3. Дакле, постоји ${}^\circ\rho$ и ${}^\circ\rho \in {}^\circ E_\nu$. Ако је ${}^\circ\rho = 0$, тада важи $r_\nu \geq \|p(T')(\tau)\| - \|p(T') \circ P_{E_\nu}(\tau)\| > r - \xi$, где је ξ инфинитезимала, а тиме $r_\nu > \dfrac{r}{2}$, што је супротно избору броја ν.

На крају, ако ни један од T–инваријантних потпростора ${}^\circ E_{\nu-1}$ и ${}^\circ E_\nu$ не би био прави T–инваријантни потпростор од H, тада ${}^\circ E_{\nu-1} = \{0\}$ и ${}^\circ E_\nu = H$. Међутим, ово је у контрадикцији са Теоремом 13.7. ∎

Глава 14

Алтернативна теорија скупова

Од како је Абрахам Робинсин засновао нестандардну анализу као испитивање нестандардних модела реалних бројева, који су пак добијени моћним средствима математичке логике, поставило се питање да ли се може наћи неки једноставнији, интуитивнији и директнији приступ основама анализе и посебно заснивању бесконачно малих. У том правцу начињено је више покушаја од којих упућујемо читаоце на само неке: Е. Нелсон ([109]), Х. Ј. Кислер ([66]), К. Хрбачек ([53]), Д. Лаугвиц ([77]), Ј. Мицелски ([107]) и други. У овој глави позабавићемо се једним од најинтересантнијих покушаја стварања алтернативне теорије скупова који је учинио Вопенка[1]. Он ју је управо тако и назвао (алтернативна теорија скупова, краће AST) јер је она алтернативна познатим Канторовским теоријама као што су Цермело-Френкелова (ZF), Кели-Мозерова (KM), Гедел-Бернајсова (GB) и другим.

14.1 Аксиоме за AST

У овом одељку дајемо основне, најважније аксиоме ове теорије скупова са мотивима за њихово увођење. Она овде (а слично и код Вопенке у [143]) није замишљена као фиксирана формална теорија скупова (изузев у случају када се показује њена конзистентност релативно у односу на ZF) већ као теорија скупова која „покрива" неку нашу интуицију о скуповима.

Тачније ово је теорија скупова са класама и основни објекти су класе,

[1] Petr Vopěnka (1935–)

које означавамо великим словима: $X, Y, Z, \ldots$. Основна релација је $\in$, док су скупови елементи класа. Да је класа X скуп краће записујемо $\mathrm{Set}(X)$, па је

$$\mathrm{Set}(X) \Leftrightarrow (\exists Y)\, X \in Y\,.$$

Због једноставнијег изражавања уводимо мала слова $x, y, z, \ldots$ као ознаке за скупове. Формуле, које се уобичајено дефинишу, означавају својства класа и односе међу класама. Класе су у принципу замишљене као обимне и, за разлику од скупова, дате више неким својством (интензијом) него обимом (екстензијом).

У овој теорији, и то је оно што ову теорију одваја од формализованих фрагмената Канторове теорије скупова, постоје посебне класе које називамо *полускупови*. Полускупови су поткласе скупова и чињеницу да је X полускуп краће записујемо са $\mathrm{Sms}(X)$. Према томе,

$$\mathrm{Sms}(X) \Leftrightarrow (\exists x)\, X \subseteq x\,.$$

Сваки скуп је, тривијално, полускуп, а полускуп који није скуп је прави полускуп. Егзистенцију правог полускупа тврди следећа *аксиома егзистенције правог полускупа*:

$$(\exists X)\, (\neg\, \mathrm{Set}(X) \wedge\, \mathrm{Sms}(X)).$$

Како оправдати ову аксиому у смислу да део нечег одређеног (скупа) може бити неодређен (класа)? Навешћемо познати Вопенкин пример, који се често понавља, са мајмуном из далеке прошлости и човеком који живи данас. Наиме, природним бројевима можемо представити (кодирати) низ мајмуна и људи, од уоченог мајмуна до нашег савременика, тако да је наредни син претходног. Примећујемо да класа кодова чини скуп. Међутим, како је син мајмуна мајмун, и сваки подскуп природних бројева има најмањи елемент, онда бисмо, ако би кодови мајмуна чинили скуп (а не класу), дошли у контрадикцију да је наш савременик човек.

Скупови су формално коначни јер само такве скупове срећемо у природи. То прецизније значи да важи следећих шест аксиома које чине Цермело-Френкелову теорију коначних скупова (краће $\mathrm{ZF_{fin}}$).

Аксиома екстензионалности за скупове:

$$(\forall x, y)\, \big(x = y \Leftrightarrow (\forall z)\, (z \in x \Leftrightarrow z \in y)\big).$$

Аксиома празног скупа:

$$(\exists_1 x)(\forall y)\, y \notin x\,.$$

Уведимо терм $\emptyset$ (празан скуп) на следећи начин: $x = \emptyset \Leftrightarrow (\forall y)\; y \notin x$.

Аксиома пара:

$$(\forall x, y)(\exists_1 z)(\forall u)\; (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)\,.$$

Аксиома уније:

$$(\forall x, y)(\exists_1 z)(\forall u)\; (u \in z \Leftrightarrow u \in x \vee u \in y)\,.$$

Дефинишимо терме $\{\cdot,\cdot\}$ (пар) и $\cup$ (унија) на следећи начин:

$$\begin{aligned} z = \{\,x, y\,\} \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall u)\; (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)\,, \\ z = x \cup y \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall u)\; (u \in z \Leftrightarrow u \in x \vee u \in y)\,. \end{aligned}$$

Увођење ових терма (као и терма $\emptyset$) омогућава поред одговарајућих аксиома и аксиома екстензионалности за скупове. Такође имамо да је $\{\,y, y\,\} = \{\,y\,\}$.

Следеће две схеме аксиома односе се на сваку скуповну формулу $\varphi(x)$.

Аксиома регуларности:

$$(\exists x)\varphi(x) \Rightarrow (\exists x)\; \big(\varphi(x) \wedge (\forall y \in x)\neg\varphi(y)\big).$$

Аксиома индукције:

$$\big(\varphi(\emptyset) \wedge (\forall x, y)(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x \cup \{y\}))\big) \;\Rightarrow\; (\forall x)\varphi(x).$$

У AST, међутим, важи општија аксиома екстензионалности за класе:

$$(\forall X, Y)\; \big(X = Y \Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \Leftrightarrow x \in Y)\big).$$

За сваку формулу $\varphi(x)$ која описује неко својство скупова постоји класа чији елементи имају то својство. Важи, према томе, следећа веома моћна Морсеова схема аксиома:

$$(\exists X)(\forall x)\; (x \in X \Leftrightarrow \varphi(x)).$$

Сада је тренутак да се покаже значај полускупова за моделовање великих коначности, тј. оних великих скупова (који су формално коначни) чији делови нису потпуно обухваћени (тј. представљају праве класе). Помоћу полускупова увешћемо појмове коначан и бесконачан скуп у смислу AST (и у том смислу ће се до краја користити).

Скуп је *коначан* ако су његове поткласе скупови. Другим речима, ако са $\operatorname{Fin}(x)$ запишемо чињеницу да је скуп x коначан, тада

$$\operatorname{Fin}(x) \Leftrightarrow (\forall X)\ (X \subseteq x \Rightarrow \operatorname{Set}(X)).$$

Класа је коначна ако је коначан скуп. Скуп који није коначан је *бесконачан*. На основу аксиоме егзистенције правог полускупа постоји бесконачан скуп.

Користећи Морсеову аксиому и аксиому екстензионалности за класе, дефинишемо универзалну класу $V = \{\, x \mid x = x \,\}$, Декартов производ класа, релације, функције и тако даље.

Бинарна релација R је *линеарно уређење* ако је рефлексивна, антисиметрична, транзитивна и

$$(\forall x, y)\ ((x, y) \in R \vee (y, x) \in R).$$

Притом, уместо $(x, y) \in R$, најчешће пишемо xRy. Кажемо да класа R *добро уређује* X (или је добро уређење на X) ако је $R \subseteq X \times X$, R је линеарно уређење и

$$(\forall Y)\ \big((Y \subseteq X \wedge Y \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists y)\,(y \in Y \wedge (\forall x)(x \in Y \Rightarrow yRx))\big).$$

Да је класа R добро уређење на X записујемо са $\operatorname{We}(X, R)$.

Аксиома доброг уређења гласи:

$$(\forall X)(\exists R)\ \operatorname{We}(X, R).$$

Слично као у Канторовим теоријама скупова уводи се појам еквивалентности класа или скупова по бројности. Тако су класе X и Y еквивалентне ако постоји функција F која обострано једнозначно слика X на Y. Ту чињеницу записујемо са $X \approx Y$. Уколико су притом X, Y и F скупови, онда су X и Y скуповно еквивалентни и то записујемо $X \mathrel{\hat{\approx}} Y$.

Класа X је пребројива, што записујемо $\operatorname{Count}(X)$, ако није коначна и ако на њој постоји добро уређење $\leq$ тако да је:

$$(\forall x)\ \operatorname{Fin}\big(\{\, y \in X \mid y \leq x \,\}\big).$$

Лако се показује да су све пребројиве класе изоморфне, као и да класа V није пребројива. Следећа аксиома тврди да су све непребројиве класе изоморфне.

Аксиома кардиналности:

$$(\forall X)\ (\ \mathrm{Fin}(X) \vee\ \mathrm{Count}(X) \vee X \approx V).$$

Дајемо, на крају, најинтересантнију и најпримењививију аксиому о продужењу. Она иначе одговара ω_1-засићености у нестандардној анализи. Ова аксиома тврди да за сваку пребројиву функцију класу постоји функција скуп која је проширује, тј.

$$(\forall F)\ \big((F \text{ је функција } \wedge\ \mathrm{Count}(F)) \Rightarrow (\exists f)(f \text{ је функција} \wedge F \subseteq f)\big).$$

Вопенка користи песничку метафору да оправда увођење ове аксиоме. Тако, по њему, можемо да замислимо да се налазимо на почетку пута који достиже хоризонт и прелази га. Нека су на једнаком растојању крај пута постављени нумерисани камени стубови. Стубови које видимо чине класу јер међу њима не можемо да издвојимо задњи. Међутим, иза хоризонта постоји стуб тако да сви стубови између нас и њега чине скуп. Тако се пребројива функција класа може „обухватити” скуповном функцијом.

Већ смо напоменули да ово није потпун систем и да постоје друге аксиоме које овде нису од интереса за нас. Такође је јасно да ове аксиоме не чине независан систем аксиома.

14.2 Бројеви

Природни бројеви се дефинишу на добро познат фон Нојмановски[2)] начин. Тако је x природан број ако:

$$(\forall y, z \in x)\ \big(y \subseteq x \wedge (y \in z \vee y = z \vee z \in y)\big).$$

Класу природних бројева означавамо са $\mathbb{N}$, а природне бројеве са m, n, p, q, $\ldots$.

Природни бројеви служе за пребрајање скупова, тако да се помоћу аксиоме индукције доказује да за сваки скуп x постоји јединствен природан број n тако да је $x \mathrel{\hat{\approx}} n$.

[2)] John von Neumann (1903–1957)

Операције наследник, сабирање, множење и степеновање природних бројева дефинишемо на следећи начин:

$$
\begin{aligned}
S(n) &= n+1 = n \cup \{n\},\\
p &= m+n \Leftrightarrow p \mathrel{\hat{\approx}} m \cup (\{n\} \times n),\\
p &= m \cdot n \Leftrightarrow p \mathrel{\hat{\approx}} m \times n,\\
m^n &= \{\, g \mid \operatorname{dom}(g) = n \wedge \operatorname{rng}(g) \subseteq m \,\}.
\end{aligned}
$$

Лако видимо да се овако дефинисане операције међусобно слажу, као и да $\mathbb{N}$ са операцијама S, $+$ и $\cdot$ задовољава аксиоме Пеанове аритметике првог реда.

Егзистенција бесконачног природног броја следи из аксиоме о егзистенцији правог полускупа. Наиме, ако је x прави полускуп и $n \mathrel{\hat{\approx}} x$, тада је n бесконачан. Показује се да је природан број n бесконачан ако и само ако је $n \mathrel{\hat{\approx}} n+1$.

Класа коначних природних бројева $\mathrm{FN} = \{\, n \mid \mathrm{Fin}(n) \,\}$ је права подкласа од $\mathbb{N}$. Класа FN је добро уређена релацијом $\in$ и затворена за S, $+$ и $\cdot$. Показује се да FN са операцијама S, $+$ и $\cdot$ задовољава аксиоме Пеанове аритметике. Њена улога у AST је слична оној коју има ω у ZF.

Полазећи од $\mathbb{N}$ лако могу да се изграде цели $\mathbb{Z}$ и рационални бројеви $\mathbb{RN}$. Тако, ако су $\mathbb{Z}^- = \{\, (0,n) \mid n \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N} \,\}$ негативни цели бројеви, онда је класа целих бројева $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^-$, а класа рационалних бројева $\mathbb{RN} = \{\, (m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0 \,\}$. Притом треба извршити идентификацију $(m,n) \equiv (p,q)$ ако је $m \cdot q = n \cdot p$. Операције и релација $\leq$ на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{RN}$ дефинишу се на очекиван начин. Тако је, на пример, $(m,n)+(p,q) = (mq+np, nq)$, $(m,n)\cdot(p,q) = (mp, nq)$ и $(m,n) \leq (p,q)$ ако и само ако $mq \leq np$. Наравно, због једноставности уместо (m,n) пишемо на уобичајен начин $\dfrac{m}{n}$.

Уобичајено, коначни негативни цели бројеви чине следећу класу $\mathrm{FZ}^- = \{\, (0,n) \mid n \in \mathrm{FN} \wedge n \neq 0 \,\}$, тако да је класа коначних целих бројева $\mathrm{FZ} = \mathrm{FN} \cup \mathrm{FZ}^-$. Коначни рационални бројеви чине класу $\mathrm{FRN} = \left\{ \dfrac{m}{n} \,\middle|\, m,n \in \mathrm{FZ} \wedge n \neq 0 \right\}$ која је очигледно затворена за операције на RN.

Од посебног значаја за конструкцију реалних бројева је класа ограничених рационалних бројева

$$\mathrm{BRN} = \{\, x \in \mathrm{RN} \mid (\exists n \in \mathrm{FN})\, |x| < n \,\}.$$

У том циљу уочава се релација бесконачне блискости $\doteq$. Тако је $x \doteq y$ ако и само ако $(\forall n \in \mathrm{FN})\, |x-y| \leq \dfrac{1}{n}$.

Да бисмо конструисали класу $\mathbb{R} \subseteq \mathrm{BRN}$ која по особинама треба да одговара скупу реалних бројева у ZF, то прво добро уредимо релацијом ρ класу BRN, а што нам омогућава аксиома доброг уређења. Нека је тада:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R}} &= \{\, x \in \mathrm{BRN} \,|\, (\forall y \in \mathrm{BRN}) \big((y\rho x \land y \neq x) \Rightarrow \neg y \doteq x\big) \,\}, \\ \mathbb{R} &= \big(\overline{\mathbb{R}} \setminus \{\, x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, (\exists y \in \mathrm{FRN})\, x \doteq y \,\}\big) \cup \mathrm{FRN}. \end{aligned}$$

Тако ћемо из сваке класе еквиваленције у односу на $\doteq$ изабрати тачно једног представника на начин да $\mathrm{FRN} \subseteq \mathbb{R}$.

Операције на $\mathbb{R}$ дефинишемо на следећи начин:

$$\begin{aligned} x + y = z &\quad\Leftrightarrow\quad (x+y) \doteq z \land z \in \mathbb{R}, \\ x \cdot y = z &\quad\Leftrightarrow\quad (xy) \doteq z \land z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Уређење $\leq$ је рестрикција уређења са BRN. Лако се види да структура $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ чини уређено поље које задовољава аксиому супремума.

Уочимо операцију $\mathrm{st}\colon \mathrm{BRN} \to \mathbb{R}$ дефинисану са

$$\mathrm{st}(x) = r \Leftrightarrow r \in R \land x \doteq r.$$

Показује се да st представља природни хомоморфизам који одговара конгруенцији $\doteq$ на BRN.

14.3 Дефиниције и важније теореме

Од великог је значаја следећа схема индукције за коначне скупове.

ТЕОРЕМА 14.1. *Ако $\emptyset \in \mathbb{Z}$ и ако за сваки $x \in \mathbb{Z}$ и сваки y важи $x \cup \{y\} \in \mathbb{Z}$, тада је сваки коначан скуп у $\mathbb{Z}$.*

Користећи претходну теорему лако се доказују следеће последице.

ПОСЛЕДИЦА 14.1. (Индукција по коначним природним бројевима) *Ако $\emptyset \in \mathbb{Z}$ и ако из $n \in \mathbb{Z}$ следи да $n+1 \in \mathbb{Z}$, тада $\mathrm{FN} \subseteq \mathbb{Z}$.*

Последица 14.2. 1° *Ако је x коначан скуп и $x \approx X$, тада је и X коначан скуп и $X \mathrel{\hat{\approx}} x$.*

2° *Ако су x и y коначни скупови, тада су $\mathbf{P}(x)$, $\bigcup x$ и $x \times y$ коначни скупови.*

3° *Скуп x је бесконачан ако и само ако за сваки $y \notin x$ имамо $x \approx x \cup \{y\}$.*

4° *Ако су X и Y пребројиве класе, тада су и класе $X \cup Y$, $X \times Y$, $\bigcup X$ и $\mathbf{P}(X) = \{\, x \,|\, x \subseteq X \,\}$ пребројиве.*

5° *Нека је X пребројива класа. Тада постоји скуп y и линеарно уређење на њему $\leq$ (које је скуп) тако да је*

$$X = \{\, x \in y \,|\; \mathrm{Fin}(\{\, z \in y \,|\, z \leq x \,\}) \,\}.$$

6° *Свака пребројива класа је полускуп.*

Понекад је потребно посматрати колекцију објеката чији су елементи класе. Такви објекти наравно не могу да буду класе јер би нас то довело до противречности. Међутим, да бисмо могли да радимо у нашој теорији (AST) морамо такве колекције представити помоћу *кодова*. Кодови су бинарне релације. Прецизније R је кôд ако постоји X тако да је $R \subseteq X \times X$. Видећемо да се многе важне колекције могу кодирати, као и примере неких које не могу.

Нека је $X''Y = \{\, z \,|\, (\exists y \in Y)\ (y, z) \in X \,\}$, $\mathrm{dom}(X) = \{\, x \,|\, (x, y) \in X \,\}$ и $\mathrm{rng}(X) = \{\, y \,|\, (x, y) \in X \,\}$. Такође, нека $\mathrm{Rel}(X) \Leftrightarrow X \subseteq V \times V$ значи да је X релација и

$$\mathrm{Fun}(X) \Leftrightarrow \mathrm{Rel}(X) \wedge (\forall x, y, z)\big(((x, y) \in X \wedge (x, z) \in X) \Rightarrow y = z\big)$$

значи да је X функција.

Следећом дефиницијом замењујемо интуитиван појам припадања класе колекцији са η-припадањем класе класи.

Дефиниција 14.1. (а) $X \ \eta\ K \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \big(\exists y \in \mathrm{dom}(K)\big)\, X = K''\{y\}$ значи X је η-елемент од K.

(б) Класа K кодира колекцију „$\{\, X \,|\, \varphi(X) \,\}$” ако

$$(\forall X)\ \big(\varphi(X) \Leftrightarrow (\exists y \in \mathrm{dom}(K))\, X = K''\{y\}\big).$$

(в) Класе K и S кодирају исту колекцију (у ознаци $K \sim S$) ако

$$(\forall X)\big((\exists x \in \operatorname{dom}(K))\, X = K''\{x\} \Leftrightarrow (\exists y \in \operatorname{dom}(S))\, X = S''\{y\}\big).$$

Овде наводнице у изразу „$\{ X \mid \varphi(X) \}$" треба да укажу да је у питању колекција у мета смислу.

Класу K која кодира неку колекцију $\mathcal{F}$ зовемо кодом колекције $\mathcal{F}$. Кажемо да је код K *екстензионалан* ако $x \neq y$ повлачи $K''\{x\} \neq K''\{y\}$. Помоћу аксиоме доброг уређења можемо да покажемо да за сваки код K постоји код $S \sim K$ који је екстензионалан.

Напоменимо да је R релација еквиваленције ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

МЕТАТЕОРЕМА 14.1. *Следеће колекције се могу кодирати:*

- *Фактор класа* $Z/R =$ „$\{ X \mid (\exists y \in \mathbb{Z})\ X = \mathbb{Z} \cap R''\{y\} \}$", *где је* R *релација еквиваленције.*
- $Z^Y =$ „$\{ F \mid \operatorname{Fun}(F) \wedge \operatorname{dom}(F) = Y \wedge \operatorname{rng}(F) \subseteq \mathbb{Z} \}$", *ако је* $\operatorname{Count}(Y)$.
- $\mathbf{P}_\omega(Z) =$ „$\{ X \mid X \subseteq \mathbb{Z} \wedge (\operatorname{Fin}(X) \vee \operatorname{Count}(X)) \}$".

Да се свака колекција ипак не може кодирати показује следећа метатеорема у чијој је основи Канторов метод дијагонализације.

МЕТАТЕОРЕМА 14.2. *Колекција* „$\{ X \mid X \subseteq V \}$" *се не може кодирати.*

Доказ. Претпоставимо да S кодира „$\{ X \mid X \subseteq V \}$". Ако важи $Y = \{ x \mid x \notin S''\{x\} \}$, тада је $Y \subseteq V$ и за свако $x \in \operatorname{dom}(S)$ имамо $Y \neq S''\{x\}$. ■

Са становишта AST, колекција из горње теореме не постоји.

Напоменимо да ћемо, због интуитивности, за код K најчешће користити ознаку $\{ K''\{x\} \mid x \in \operatorname{dom}(K) \}_\eta$ или чак писати некоректно $\{K_x\}_{x \in \operatorname{dom}(K)}$.

Следећа дефиниција је од значаја за наредни одељак.

ДЕФИНИЦИЈА 14.2. Нека је $\{A_i\}_{i\in B}$ код. Унија и пресек овог кода се дефинишу на следећи начин:

$$X = \bigcup\{A_i\}_{i\in B} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} X = \{\, x \mid (\exists i \in B)\, x \in A_i \,\},$$
$$X = \bigcap\{A_i\}_{i\in B} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} X = \{\, x \mid (\forall i \in B)\, x \in A_i \,\}.$$

Навешћемо сада неколико тврђења која представљају базу за резултате које ћемо добити у наредном одељку. Сва ова тврђења су последица аксиоме о продужењу која одговара ω_1-засићености у нестандардној анализи. Докази ових тврђења се могу наћи у [143].

ТЕОРЕМА 14.2. *Нека је X пребројива класа. Класа $\bigcup X$ (односно $\bigcap X$) је скуп ако и само ако постоји $z \subseteq X$ тако да је $\bigcup X = \bigcup z$ (односно $\bigcap X = \bigcap z$).*

ПОСЛЕДИЦА 14.3. *Ако је X пребројива класа тако да је $\bigcap X = \emptyset$, тада постоји $y \subseteq X$ тако да је $\bigcap y = \emptyset$.*

ТЕОРЕМА 14.3. *Нека су X и Y пребројиве, дисјунктне класе. Тада постоје дисјунктни скупови x и y тако да је $X \subseteq x$ и $Y \subseteq y$.*

ТЕОРЕМА 14.4. *Нека су X и Y пребројиве класе за које важи да је пресек $(\bigcup X) \cap (\bigcup Y) = \emptyset$. Тада постоје дисјунктни скупови x и y такви да $\bigcup X \subseteq x$ и $\bigcup Y \subseteq y$.*

ПОСЛЕДИЦА 14.4. *Нека су X и Y пребројиве класе такве да $\bigcup X \subseteq \bigcap Y$. Тада постоји скуп z тако да $\bigcup X \subseteq z \subseteq \bigcap Y$.*

Кажемо да је класа X *разоткривена* ако за сваку пребројиву класу $Y \subseteq X$ постоји скуп z тако да $Y \subseteq z \subseteq X$. Свака класа дефинабилна скуповном формулом је очигледно разоткривена.

ДЕФИНИЦИЈА 14.3. Класа Z је усмерена (дуално усмерена) у односу на инклузију ако из услова да $x, y \in Z$ следи да постоји $z \in Z$ тако да $z \supseteq x \cup y$ ($z \subseteq x \cap y$).

ТЕОРЕМА 14.5. *Нека је $(X_n)_{n\in \mathrm{FN}}$ низ разоткривених класа тако да је $\bigcap_{n\le m} X_n$ непразан за свако $m \in$ FN. Тада је такође $\bigcap_{n\in \mathrm{FN}} X_n \neq \emptyset$.*

ТЕОРЕМА 14.6. *Нека је класа Z дефинабилна помоћу скуповне формуле. Нека је X пребројив полускуп од Z. Ако је X усмерен, тада постоји $u \in Z$ који је горње ограничење свих елемената од X уређених инклузијом. Ако је X дуално усмерен, тада постоји $u \in Z$ који је доње ограничење елемената од X уређених инклузијом.*

Доказ. Довољно је доказати први део тврђења. На основу $5°$ Последице 14.2. постоји скуп a тако да је

$$X = \{\, x \in a \mid \mathrm{Fin}(\{\, y \in a \mid y \leq x \,\}) \,\},$$

где је $\leq$ линеарно уређење на скупу a. Нека је

$$a_1 = \{\, x \in a \mid (\exists u \in Z)(\forall y \in a)\,(y \leq x \Rightarrow y \subseteq u) \,\}.$$

Како $X \subsetneq a_1$, то изаберимо $\overline{x} \in a_1 \setminus X$. Тада $u \in Z$ такво да важи $(\forall y \in a)(y \leq \overline{x} \Rightarrow y \subseteq u)$ има тражено својство. ∎

14.4 Изградња Лебове и Лебегове мере у AST

Желимо да на примеру Лебове и Лебегове мере (видети главу 12) илуструјемо на који се начин идеје из нестандардне анализе, додуше на један модификовани начин, могу пренети у AST. Прво ћемо изградити Лебову меру на полускуповима, а тек онда помоћу ње увести Лебегову меру на реалном одсечку $[0, 1]$. Теорију мерљивих функција и интеграцију ћемо изоставити, а заинтересовани читалац може да погледа [12] и [35].

У овом одељку коначне природне бројеве, тј. елементе класе FN, означавамо са $n, m, \ldots$. Грчка слова $\alpha, \beta, \ldots$ резервисана су за произвољне природне бројеве из $\mathbb{N}$.

Нека је $y \subseteq x$, $x \,\hat{\approx}\, \alpha$ и $y \,\hat{\approx}\, \beta$. Тада је избрајајућа (или пребрајајућа) мера скупа y у односу на скуп x дефинисана са $p_x(y) = \dfrac{\beta}{\alpha}$. Притом, ако је скуп x познат из контекста и фиксиран, изостављамо индекс x.

Од посебног је значаја за нас, као што ћемо ускоро видети, постојање и значење суме $\sum_{\alpha<\beta} f(\alpha)$ ако је $\mathrm{dom}(f) = \beta = \{\, 0, 1, \ldots, \beta - 1 \,\}$. То се лако решава јер се индукцијом показује да

$$(\exists_1 g)\ \big(\, \mathrm{dom}(g) = \beta + 1 \wedge (\forall \gamma < \beta)\,(g(\gamma + 1) = g(\gamma) + f(\gamma))\big),$$

па је $\sum_{\alpha<\beta} f(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} g(\beta)$. Такође се као гранични низ коначних парцијалних сума може увести збир $\sum_{n\in\text{FN}} f(n)$.

На основу аксиоме индукције лако се може проверити адитивност избрајајуће функције p. Наиме, ако је $(y_\beta)_{\beta\in\alpha}$ (за $\alpha > 0$) низ дисјунктних подскупова од x, тада је

$$p\left(\bigcup_{\beta\in\alpha} y_\beta\right) = \sum_{\beta<\alpha} p(y_\beta). \tag{1}$$

Како је згодније да се ради са комплетним пољем $\mathbf{R}$ него са RN, то уводимо функцију $\Pi\colon \mathbf{P}(x) \to R$ помоћу $\Pi(y) = \text{st}(p(y))$.

Лема 14.1. *Нека је $(y_n)_{n\le m}$ низ дисјунктних подскупова од x. Тада је $\Pi\left(\bigcup_{n\le m} y_n\right) = \sum_{n\le m} \Pi(y_n)$.*

Доказ. Непосредно из (1) и $\text{st}(x+y) = \text{st}(x) + \text{st}(y)$. ■

Нарочито су интересантни бесконачни скупови који садрже праве поткласе, тј. полускупови. Очигледно је да се полускуп X не може да мери директно, али се може апроксимирати скуповима „изнутра” и „споља”. Ако се гранични бројеви мера унутрашњих и спољашњих апроксимација поклапају, онда је полускуп X Леб мерљив. Прецизније о томе говори следећа дефиниција.

Дефиниција 14.4. Нека је $X \subseteq x$.

(а) Унутрашња мера класе X је $U(X) = \sup\{\, \Pi(y) \mid y \subseteq X \,\}$.

(б) Спољашња мера класе X је $S(X) = \inf\{\, \Pi(y) \mid X \subseteq y \,\}$.

(в) Класа X је Леб мерљива ако је $S(X) = U(X)$. Притом је мера класе X, $\Pi(X) = S(X) = U(X)$.

Следеће три леме се лако доказују.

Лема 14.2. *Класа X је мерљива ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоје скупови y и z тако да је $y \subseteq X \subseteq z$ и $\Pi(z \setminus y) < \varepsilon$.*

Лема 14.3. $S(X) = 1 - U(x \setminus X)$, *где је $X \subseteq x$.*

ЛЕМА 14.4. *Ако су X и Y мерљиве класе тако да је $X \cap Y = \emptyset$, тада је и класа $X \cup Y$ мерљива и $\Pi(X \cup Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$.*

Одатле се лако показује да је овако дефинисана мера затворена за коначне уније и пресеке, а такође и коначно адитивна.

Напомињемо, што ћемо касније и да покажемо, да се колекција Леб мерљивих класа не може кодирати, већ се само може дати у интензионалном облику $S(X) = U(X)$. Стога је следећа (Лебова) теорема дата у нешто измењеном облику.

ТЕОРЕМА 14.7. *Нека је дат код $\{A_i\}_{i \in \mathrm{FN}}$ Леб мерљивих монотоно растућих подкласа од x. Тада је и $A = \bigcup_{i \in \mathrm{FN}} A_i$ Леб мерљива класа и $\Pi(A) = \sum_{i \in \mathrm{FN}} \Pi(A_i)$.*

Доказ. Нека је за $i \in \mathrm{FN}$, $\Pi(A_i) = a_i$ и $\lim_{i \in \mathrm{FN}} a_i = a$. На основу Леме 14.2. треба одредити скупове y и z тако да је $y \subseteq A \subseteq z$, $\Pi(y) \geq a - \varepsilon$ и $\Pi(z) \leq a + \varepsilon$.

Скуп y се одређује лако. Одаберимо $n \in \mathrm{FN}$ тако да је $a_n \geq a - \dfrac{\varepsilon}{2}$. С обзиром на то да је A_n мерљива класа, то постоји $y \subseteq A_n$ тако да важи $\Pi(y) \geq a_n - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тада $y \subseteq A$ и $\Pi(y) \geq a - \varepsilon$.

Одредимо сада скуп z. Изаберимо z'_n тако да је $A_n \subseteq z'_n$ и важи $\Pi(z'_n) \leq a_n + \dfrac{\varepsilon}{2^n}$. Формирајмо монотон низ $(z_n)_{n \in \mathrm{FN}}$ такав да је члан $z_n = \bigcup_{m \leq n} z'_m$. Може се показати, индукцијом по коначним природним бројевима, да је $\Pi(z_n) \leq a_n + \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)\varepsilon$. Нека је $s_n = \{\, z \in \mathbf{P}(x) \,|\, p(z) \leq a + \varepsilon$ и $z_n \subseteq z \,\}$. Тада очигледно $x \in s_n$ и $s_n \supseteq s_{n+1}$. На основу Теореме 14.6. из претходног одељка, како је класа $S = \{\, s_n \,|\, n \in \mathrm{FN} \,\}$ дуално усмерена, то постоји $s \subseteq s_n$ (и $s \neq \emptyset$). Тада за $z \in s$ имамо $\Pi(z) = \mathrm{st}\ p(z) \leq a + \varepsilon$ и $A \subseteq z$. ■

Пређимо сада на дефинисање Лебегове мере помоћу Лебове. Нека је $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \mathrm{FN}$, $t = \left\{ \dfrac{\beta}{\alpha} \,|\, \beta \leq \alpha \right\}$ и $\mathrm{st}_t = \mathrm{st} \restriction t$. Очигледно, st_t пресликава t на класу $[0,1] = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1 \,\}$. Индекс t ћемо у даљем тексту најчешће изостављати.

Следеће леме дају основне везе операције st са пресеком и унијом класа.

Лема 14.5. *Ако је* $\{A_i\}_{i\in \mathrm{FN}}$ *један код, тада су кодови и* $\{\mathrm{st}(A_i)\}_{i\in \mathrm{FN}}$ *и* $\{\mathrm{st}^{-1}(A_i)\}_{i\in \mathrm{FN}}$.

Лема 14.6. 1° *Ако је* $A \subseteq [0,1]$, *тада је* $\mathrm{st}(\mathrm{st}^{-1}(A)) = A$.

2° *Ако је* $A \subseteq t$, *тада је* $\mathrm{st}^{-1}(\mathrm{st}(A)) \supseteq A$.

Лема 14.7. *Ако је* $A_i \subseteq [0,1]$ *за* $i \in \mathrm{FN}$, *тада важе следећи идентитети:*

- $\mathrm{st}^{-1}(\bigcup_{i\in \mathrm{FN}} A_i) = \bigcup_{i\in \mathrm{FN}} \mathrm{st}^{-1}(A_i)$,
- $\mathrm{st}^{-1}(\bigcap_{i\in \mathrm{FN}} A_i) = \bigcap_{i\in \mathrm{FN}} \mathrm{st}^{-1}(A_i)$.

Лема 14.8. *Ако* $a_i \subseteq t$ *за* $i \in \mathrm{FN}$, *тада*

$$\mathrm{st}\left(\bigcup\nolimits_{i\in \mathrm{FN}} a_i\right) = \bigcup\nolimits_{i\in \mathrm{FN}} \mathrm{st}(a_i).$$

Дефинишимо сада неке основне појмове топологије на $\mathbb{R}$. За $a, b \in \mathbb{R}$ нека су $]a,b[= \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b \,\}$ и $[a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, a \le x \le b \,\}$ отворен и затворен интервал, тим редом. Колекцију отворених интервала чији су крајеви коначни рационални бројеви кодирамо класом $I = \{\, ((a,b),x) \,|\, a,b \in \mathrm{FRN} \text{ и } a < x < b \,\}$.

Отворене класе су пребројиве уније интервала из I. Колекцију отворених класа кодирамо класом

$$\begin{aligned} O = \{\, (g,x) \mid\ & \mathrm{FN} \subseteq \mathrm{dom}(g),\ \mathrm{rng}(g \restriction \mathrm{FN}) \subseteq \mathrm{FRN}^2,\ x \in \mathbb{R}, \\ & (\exists y)\left(y \in \mathrm{rng}(g \restriction \mathrm{FN}),\ 1^{\mathrm{st}}(y) \le x \le 2^{\mathrm{nd}}(y)\right) \}. \end{aligned}$$

Затворене класе су комплементи отворених, па је код колекције затворених класа

$$C = \{\, (g,x) \,|\, x \notin O''\{g\},\ g \in \mathrm{dom}(O),\ x \in \mathbb{R} \,\}.$$

Отворену класу обично означавамо са G, а затворену са F. Лако се показује да је $\mathbb{R}$ са O Хаусдорфов простор, а да је F затворена и ограничена класа ако и само ако је компактна класа.

Наш циљ ће сада бити увођење Лебегове мере на интервалу $[0,1]$.

Дефиниција 14.5. Класа $X \subseteq [0,1]$ је Лебег мерљива ако је класа $\mathrm{st}^{-1}(X)$ Леб мерљива, и притом је Лебегова мера од X дата на следећи начин $\lambda(X) = \Pi(\mathrm{st}^{-1}(X))$.

Лебегова мера λ је σ-адитивна.

Теорема 14.8. *Нека је* $\{A_i\}_{i\in \mathrm{FN}}$ *код Лебег мерљивих дисјунктних подкласа од* $[0,1]$. *Тада је* $\bigcup_{i\in \mathrm{FN}} A_i$ *Лебег мерљива класа и* $\lambda(\bigcup_{i\in \mathrm{FN}} A_i) = \sum_{i\in \mathrm{FN}} \lambda(A_i)$.

Доказ. Према Леми 14.7. класа $\mathrm{st}^{-1}(\bigcup_{i\in \mathrm{FN}} A_i)$ је Леб мерљива, па је и класа $\bigcup_{i\in \mathrm{FN}} A_i$ Лебег мерљива. Притом је

$$\begin{aligned}\lambda\left(\bigcup_{i\in \mathrm{FN}} A_i\right) &= \Pi\left(\mathrm{st}^{-1}\left(\bigcup_{i\in \mathrm{FN}} A_i\right)\right) = \Pi\left(\bigcup_{i\in \mathrm{FN}} \mathrm{st}^{-1}(A_i)\right)\\ &= \sum_{i\in \mathrm{FN}} \Pi(\mathrm{st}^{-1}(A_i)) = \sum_{i\in \mathrm{FN}} \lambda(A_i),\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. ■

Лако се може показати да је сваки отворен интервал $]a,b[$ мерљив и да је $\lambda(\,]a,b[\,) = b-a$. Такође је свака отворена и свака затворена подкласа од $[0,1]$ Лебег мерљива.

Лема 14.9. *Ако је* $b\subseteq t$, *тада је* $\mathrm{st}(b)$ *затворена класа.*

Теорема 14.9. *За сваку мерљиву класу* A *важе следеће једнакости:*

(1) $\lambda(A) = \sup\{\,\lambda(F)\mid F\subseteq A$ *и* $(\exists g)\,(F = C''\{g\})\,\}$.

(2) $\lambda(A) = \inf\{\,\lambda(G)\mid A\subseteq G$ *и* $(\exists g)\,(G = O''\{g\})\,\}$.

Доказ. (1) Нека је $F\subseteq A$. Тада је $\mathrm{st}^{-1}(F)\subseteq \mathrm{st}^{-1}(A)$ и $\lambda(F) = \Pi(\mathrm{st}^{-1}(F)) \le \Pi(\mathrm{st}^{-1}(A)) = \lambda(A)$. Одатле је

$$\sup\{\,\lambda(F)\mid F\subseteq A \text{ и } (\exists g)\,(F = C''\{g\})\,\}\le \lambda(A).$$

Да бисмо доказали супротну неједнакост, уочимо $b\subseteq \mathrm{st}^{-1}(A)$. Тада је на основу претходне леме $\mathrm{st}(b)$ затворена класа и $b\subseteq \mathrm{st}^{-1}(\mathrm{st}(b))\subseteq \mathrm{st}^{-1}(A)$. Одатле

$$\begin{aligned}\lambda(A) = \Pi(\mathrm{st}^{-1}(A)) &\le \sup\{\,\Pi(b)\mid b\subseteq A\,\}\\ &\le \sup\{\,\lambda(F)\mid F\subseteq A \text{ и } (\exists g)\,(F = C''\{g\})\,\}.\end{aligned}$$

Једнакост у (2) се слично доказује. ■

Наш циљ до краја ове главе биће да покажемо да колекција Лебег мерљивих (а такође и Леб мерљивих) класа није код. У том циљу уводимо појам *Канторове* класе.

Нека је $K_n = \{ x \in [0,1] \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} \leq x \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i+1}{3^i},\ a \in \{0,2\}^n \}$. Тада је $K = \bigcap_{n \in \mathrm{FN}} K_n$ Канторова класа.

МЕТАТЕОРЕМА 14.3. *Ако се колекција „$\{ X \mid \psi(X) \}$" може кодирати и притом је $(\forall X)\,(\varphi(X) \Rightarrow \psi(X))$, тада се и „$\{ X \mid \varphi(X) \}$" може кодирати.*

Доказ. Ако код колекције „$\{ X \mid \psi(X) \}$" означимо са K, тада је $\{ (x,y) \mid y \in K''\{x\}$ и $\varphi(K''\{x\}) \}$ код колекције „$\{ X \mid \varphi(X) \}$". ∎

МЕТАТЕОРЕМА 14.4. *Колекција поткласа од $[0,1]$ мерљивих у Лебеговом смислу, а која се интензионално може дати формулом $U(\mathrm{st}^{-1}(X)) = S(\mathrm{st}^{-1}(X))$, не може да се кодира.*

Доказ. Како је Лебегова мера комплетна, то је „$\{ X \mid X \subseteq K \}$" подколекција колекције мерљивих подкласа класе $[0,1]$. На основу претходне метатеореме довољно је да покажемо да следећа колекција „$\{ X \mid X \subseteq K \}$" не може да се кодира. Нека $F\colon V \approx K$. Ако би, супротно тврђењу, класа S била код колекције „$\{ X \mid X \subseteq K \}$", тада би класа $T = \{ (x,y) \mid (x, F(y)) \in S \}$ била код за колекцију „$\{ X \mid X \subseteq V \}$", што је супротно Метатеореми 14.2. из претходног одељка. ∎

ПОСЛЕДИЦА 14.5. *Колекција свих Леб мерљивих подкласа од t се не може кодирати.*

На овом месту завршавамо са излагањем теорије мере и интеграције. На сличан начин се велики део теорије изложен у глави 12 може пренети овде.

Есеј о бесконачности

Природни и реални бројеви, на посредан или непосредан начин, представљају основно полазиште у скоро свим математичким разматрањима. Заправо, испоставља се да су најдубље основе математике тесно повезане како са принципом индукције, тако и са схватањем континуума. Међутим, оба концепта изазивају „страх пред бесконачношћу”.

Први рачун са „малим” и „великим” бројевима створили су стари Грци. То делује помало парадоксално када се има у виду да су Грци, начелно говорећи, били велики противници бесконачности. Они су ишли чак дотле да су њено постојање директно забрањивали! То управо чини чувена аксиома, из Еуклидових *Елеменаша*, која тврди да „целина мора бити већа од дела”.

Грчка реч за бесконачност била је „апејрон”, што је значило неограничен, али и неодређен, недефинисан. У доказима коришћен метод свођење на противречност најчешће је значио свођење на бесконачност. Зашто су Грци имали тако негативан однос према бесконачности? Одговор се крије како у одређеним филозофским ставовима, тако вероватно и у томе што су рано уочили њену парадоксалност, везану пре свега за проблем који је у филозофији познат под називом „парадокс ћелавца”, као и за Зенонове парадоксе (апорије). Реакција старих Грка на ове парадоксе ишла је у правцу одбацивања чак и потенцијалне бесконачности, што се може објаснити њиховим схватањем појма броја и мере, схватањем које води порекло из Питагорине школе. Основа свега код питагорејаца јесу природни бројеви (за њих и једини бројеви). Сваке две величине (дужи, површине,...) могу се измерити неком трећом, а све скупа једном јединичном, најмањом могућом величином. Према томе, свакој дужи одговара један природан број. Јасно је да та јединична величина мора да буде „мала” (односно инфинитезимала) и недељива (попут атома).

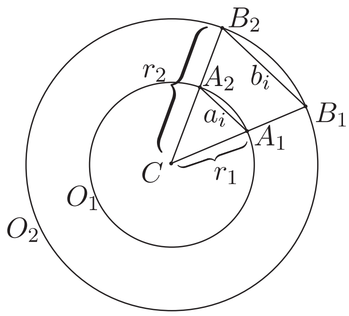
Хенократес, Платонов наследник на Академији, сматрао је да се помоћу недељивих инфинитезимала могу објаснити Зенонови парадокси. Тако, брзоноги Ахил у коначном броји корака стиже корњачу. Притом је тај број корака „велики" (јер само „велики" број помножен „малим" бројем даје коначан број), али не и бесконачан.

Колико су неки од Зенонових парадокса повезани са парадоксом ћелавца најбоље говори Зенонова апорија о мноштву:

„ако котарица кукурузног зрна просутог на камени под производи буку, онда то мора бити случај и када бацимо само једно зрно".

Промена нашег схватања природног броја уверава нас да противречности у овом случају (а и сличним) нема. Наиме, у „нестандардном систему" природни бројеви се деле на „мале" и „велике". Подскуп кога чине „мали" бројеви нема највећи, а подскуп „великих" (који долазе иза „малих") нема најмањи елемент. Према томе, у овом систему не важи принцип најмањег елемента. Сада, ако број зрна која „праве буку" или број длака косматих људи означимо као „велики" број, а онај број зрна која „не праве буку" или број длака слабокосих људи као „мали" број, видимо да у Зеноновом парадоксу о мноштву, као и парадоксу ћелавца, нема контрадикције.

Међутим, Грци су још од V века пре нове ере користили инфинитезимале за решавање математичких проблема. То се, пре свега, односи на атомисте који су у основи свега створили „мале" и недељиве атоме од којих је све састављено. Тако је Демокрит из Абдере помоћу инфинитезимала дошао (далеко пре Архимеда) до значајног резултата да се запремине призме и пирамиде једнаких основа и висина односе као 3 : 1. Илуструјемо начин мишљења атомиста кроз још један значајан резултат Демокрита израженог на типично грчки начин као пропорција. Нека су дати концентрични кругови O_1 и O_2. Из сличности троуглова CA_1A_2 и CB_1B_2 (видети слику)



следи једнакост $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{a_i}{b_i}$, па је, на основу добро познате особине пропорције, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sum a_i}{\sum b_i} \approx \frac{\text{Обим}(O_1)}{\text{Обим}(O_2)}$. Сада, Демокрит поистовећује круг са полигоном са „великим” бројем страна које су све по дужини „мале”, те непосредно закључује да се обими кругова односе као њихови полупречници. Са становништва савремене нестандардне анализе овакав Демокритов метод је могућ на основу принципа преливања. Наиме, добијена пропорција $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sum a_i}{\sum b_i}$ важи за произвољно велики коначан правилан многоугао са 2^n страна, па ће важити и за хиперконачни многоугао са 2^H страна, где је H хиперконачан („велики”) број.

За разлику од атомиста који су дуж (кружну линију,...) замишљали као дискретан низ атома, поређани као природни бројеви од 1 до неког n, Аристотел је дуж замишљао сасвим другачије. Свака (било како мала) дуж је за Аристотела дељива, или, другим речима, између сваке две тачке на дужи може се убацити трећа (од њих различита) тачка. То дељење дужи је код њега потенцијално бесконачно, тј. иза сваке деобе може се направити следећа, али се тај бесконачни процес никада не може завршити. Наравно, неограничено дељење је физички немогуће и представља „математички концепт” који није прихватљив за све математичаре – филозофе, посебно финитисте који негирају сваку реалност бесконачности. С друге стране, Аристотелово схватање непрекидности је у неком смислу недовршено. Потенцијална бесконачност, дата као процес дељења дужи на све мање делове, претвара се у остварену, тзв. актуелну бесконачност. Природно је да се упитамо шта се на крају, после свих тих деоба дужи, добија у пресеку тог (пребројиво) бесконачног опадајућег

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$$

„низа уметнутих одсечака чије дужине теже нули”. На тај начин стижемо до појма Канторовог континуума који је довршење Аристотеловог.

Како неки процес који има бесконачно епизода уопште може да се заврши? Ово је очигледно збуњивало старе Грке, макар оне до Еудокса и Архимеда. Еудокс из Книдоса, један од најзначајнијих грчких математичара, увео је метод исцрпљивања (есхаустије). У петој књизи Еуклидових *Елеменаша*, чији је предмет теорија пропорција и која углавном потиче од Еудокса, уводи се следећи појам:

„две величине „имају размеру”, једна сйрам друīе, ако моīу увишесшручене йрекорачиши једна друīу”.

То значи да ако a и b „имају размеру” и, на пример, a је мањи од b, онда се дуж b може прекрити са довољним бројем дужи подударних са дужи

a. Слично важи и за природне бројеве a и b који „имају размеру” и b је веће од a. Тада за неки природан број n, b је мањи од na. Са становишта модерне математике, Архимедова аксиома, тј. да сваке две величине a и b „имају размеру”, еквивалентна је са непостојањем инфинитезимала. Наиме, уколико је a инфинитезимала већа од 0, тада је a мање од $\frac{1}{n}$ за свако n из $\mathbb{N}$, па је тада na мања од 1. Отуда a и 1 „немају размеру”, тј. несамерљиви су. Обратно, уколико су a и b већи од 0 и „немају размеру”, тада је, на пример, b веће од na за свако n из $\mathbb{N}$, па је $\frac{b}{a}$ бесконачан елемент, а $\frac{a}{b}$ инфинитезимала. Као што данас знамо (макар то било и након читања ове књиге), инфинитезимале постоје, па из претходног следи да не морају сваке две величине бити у сразмери. Према томе, Еудокс није нужно увео тривијалну, „непотребну” дефиницију, из чега произилази да је, највероватније, веровао у постојање инфинитезимала.

Тако је Еудокс „припремио” долазак Архимеда из Сиракузе. Већи део ове књиге односи се на оно што се „дешавало” у анализи, и математици уопште, од Архимеда до данас, а везано је за увођење актуелних инфинитезимала на строгим математичким основама. Кроз наредне векове улагани су велики напори да се „нестандардни систем” уклони из математике, али се он увек, као феникс, враћао обогаћујући све више и више математику, да би постао потпуно равноправан са „стандардним”, па у неком смислу чак и супериоран.

Задаци

1. У првој глави користили смо следећу чињеницу: *можемо претпоставити да свако уређено поље садржи уређено поље рационалних бројева.* Ова претпоставка може се оправдати следећим тврђењем.

Ако је $h\colon \mathbf{H} \to \mathbf{F}$ утапање уређеног поља $\mathbf{H}$ у уређено поље $\mathbf{F}$, онда постоји уређено поље $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{H}$ и изоморфизам $g\colon \mathbf{K} \xrightarrow[1-1]{\text{na}} \mathbf{F}$ тако да је $g \circ i = h$, где је $i\colon x \mapsto x$, $x \in H$, инклузионо пресликавање.

Доказати ово тврђење.

2. Доказати да су следећа тврђења за уређено поље $\mathbf{F}$ еквивалентна:

- $\mathbf{F}$ је архимедско.
- $\mathbf{F}$ нема бесконачних елемената.
- $\mathbf{F}$ нема инфинитезимала осим нуле.
- $\mathbf{F}$ има тачно једну галаксију.
- $(\forall a \in F)\big(\mu(a) = \{a\}\big)$.
- $(\forall a \in F)(\forall b \in F)\Big((\forall n \in N)a \leq b + \dfrac{1}{n} \Rightarrow a \leq b\Big)$.

3. Доказати да је уређено поље $\mathbf{F}$ комплетно ако и само ако је архимедско и задовољава Канторову аксиому:

сваки опадајући низ ограничених затворених интервала у F има непразан пресек.

4. Да ли постоји неархимедско поље које се утапа у било које неархимедско поље?

5. Ако је $\mathbf{F}$ неархимедско поље и $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ у F са особином „$a_n \ll a_{n+1}$ за све $n \in \mathbb{N}$", испитати да ли постоји $a_\infty \in F$ такво да је $a_n \ll a_\infty$ за све $n \in \mathbb{N}$.

6. Доказати да свако уређено поље $\mathbf{F}$ има проширење до неархимедског поља $\mathbf{K}$ тако да је $\mathbf{F} \neq \mathbf{K}$.

7. Нека је $\mathbf{F} \supseteq \mathbf{R}$ уређено поље. Доказати:

- ако је $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, тада пресликавање $\Lambda_r \colon \gamma(a) \to \gamma(ra)$ дефинисано са $\Lambda_r \colon x \mapsto rx$, $x \in \gamma(a)$, јесте 1–1 пресликавање;
- ако је $a \in F$ бесконачан, тада $\theta_a \colon \mathbb{R} \to \{\gamma(b) \mid b \in F\}$ дефинисано са $\theta_a(r) = \gamma(ra)$ јесте 1–1 пресликавање;
- ако $\mathbf{F}$ није архимедско, тада постоји најмање континуум много галаксија у $\mathbf{F}$.

8. За уређено поље $\mathbf{F}$ кажемо да је *реално затворено* ако сваки позитиван елемент у $\mathbf{F}$ има квадратни корен и сваки полином непарног степена има корен у $\mathbf{F}$. Доказати да ако је неко уређено поље $\mathbf{F}$ реално затворено, тада се $\operatorname{st}(\gamma(0))$ утапа у $\mathbf{F}$.

9. Нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ реалних бројева, $f_n \colon [a_n, \infty[\to \mathbb{R}$ непрекидна растућа функција и $f_n(x) \ll f_{n+1}(x)$ кад $x \to \infty$ за све $n \in \mathbb{N}$. Доказати да постоји $a_\infty \in \mathbb{R}$ и непрекидна растућа функција $f_\infty \colon [a_\infty, \infty[\to \mathbb{R}$ таква да за све $n \in \mathbb{N}$ важи: $f_n(x) \ll f_\infty(x)$ кад $x \to \infty$.

10. За функције реалне променљиве x:

$$e_0(x) = x = l_0(x),\ e_{n+1}(x) = \exp e_n(x) \text{ и } l_{n+1}(x) = \log l_n(x)$$

за $n \in \mathbb{N}$, доказати да ред $\sum_{n=1}^{\infty} e_n(x)/e_n(n)$ конвергира локално униформно на $\mathbb{R}$ и да његов збир, функција $f(x)$, има особину: $f(x) \ll l_n(x)$ кад $x \to \infty$ за све $n \in \mathbb{N}$.

11. Нека је $\mathbf{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ поље и $P \subseteq F$ који задовољава:

- $0 \notin P$,
- $(\forall x \in F)(x \neq 0 \Rightarrow x \in P \lor -x \in P)$,
- $(\forall x, y \in P)(x + y \in P \land x \cdot y \in P)$.

Нека је за $x, y \in F$ дефинисано $x < y \Leftrightarrow y - x \in P$. Доказати да је $(\mathbf{F}, \leq)$ уређено поље.

12. (Скотово[3] комплетирање) Назовимо поље $\mathbf{F}$ Скот-комплетно ако за свако уређено поље $\mathbf{G}$ важи: $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{G}$ и F је густ у $\mathbf{G}$ повлачи $F = G$. Доказати:

- уређено поље $\mathbf{F}$ је Скот-комплетно ако и само ако сваки иницијални сегмент $X \subseteq F$ за који важи $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in X (a + \varepsilon \notin X)$ има најмању границу;
- (*Егзистенција Скот-комплетирања*) за свако уређено поље $\mathbf{F}$ постоји Скот-комплетно поље $\mathbf{G} \supseteq \mathbf{F}$ тако да је F густ у $\mathbf{G}$;
- (*Јединственост Скот-комплетирања*) ако су $\mathbf{G}_i$ Скот-комплетирања уређеног поља $\mathbf{F}$ и $g_i \colon \mathbf{F} \to \mathbf{G}_i$, $i = 1, 2$, густа утапања (тј. $g_i(F)$ је густ у $\mathbf{G}_i$), онда постоји изоморфизам $h \colon \mathbf{G}_1 \xrightarrow{\text{na}} \mathbf{G}_2$ тако да је $h \circ g_1 = g_2$.

13. Нека је $\mathcal{F}$ скуп идеала I над $\mathbb{N}$ таквих да је $I_0 \subseteq I$, при чему је I_0 истакнути идеал над $\mathbb{N}$. Доказати:

- уређење реалних бројева се може утопити у $(\mathcal{F}, \subseteq)$;
- уређење првог непребројивог ординала ω_1 може се утопити у $(\mathcal{F}, \subseteq)$.

14. Нека је $\mathcal{F}_0$ скуп идеала I над $\mathbb{N}$ таквих да је $I \subseteq I_0$. Доказати:

- уређење реалних бројева се може утопити у $(\mathcal{F}_0, \subseteq)$;
- уређење првог непребројивог ординала ω_1 не може се утопити у $(\mathcal{F}_0, \subseteq)$.

15. За $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{P}(\mathbb{N})$ кажемо да је *скоро дисјунктна* фамилија ако за различите $U, V \in \mathcal{X}$ важи: $U \cap V$ је коначан. Доказати да постоји скоро дисјунктна фамилија подскупова од $\mathbb{N}$ моћи континуума.

16. Описати све филтере $\mathcal{F}$ над $\mathbb{N}$ са особином: за свако $U \subseteq \mathbb{N}$ је $U \in \mathcal{F}$ ако и само ако $1 + U \in \mathcal{F}$.

17. Ако је $\mathcal{F}$ филтер над E, $\bigcap_{U \in F} U = \emptyset$, $A \subseteq E$ и скуп $E \setminus A$ коначан, доказати да $A \in \mathcal{F}$.

[3] Scott W. Williams (1943–)

18. Ако је X коначан скуп од n елемената, доказати да постоји тачно n ултрафилтера над X.

19. Нека је $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{P}(I)$. Даље, нека је

(1) $x \in \mathcal{S} \wedge y \in \mathcal{S} \Rightarrow x \cap y \in \mathcal{S}$,

(2) $(\forall x \in \mathbf{P}(I))\ (x \in \mathcal{S} \vee x^c \in \mathcal{S})$,

(3) $x \in \mathcal{S} \wedge y \in \mathcal{S} \wedge z \in \mathcal{S} \Rightarrow x \cap y \cap z \in \mathcal{S}$.

Доказати да из услова (1) и (2) не следи да је $\mathcal{S}$ филтер, док из услова (2) и (3) следи да је $\mathcal{S}$ ултрафилтер над I.

20. Доказати да је сваки ултрафилтер над коначним скупом главни.

21. Доказати да над сваким бесконачним скупом постоји неглавни ултрафилтер.

22. Доказати да је пресек било којег броја филтера над неким скупом такође филтер.

23. Доказати да је унија ланца филтера такође филтер.

24. Доказати да је сваки филтер над неким скупом I пресек неких ултрафилтера над скупом I.

25. Нека је I бесконачан скуп. Ултрафилтер $\mathcal{F}$ над I је *униформан* ако и само ако за сваки $X \in \mathcal{F}$ важи $|X| = |I|$. Доказати:

- сваки неглаван ултрафилтер над $\mathbb{N}$ је униформан;
- над сваким бесконачним скупом постоји униформан ултрафилтер;
- ултрафилтер $\mathcal{F}$ над I је униформан ако и само ако $\mathcal{F}$ садржи све $X \subseteq I$ такве да $|X^c| \leq |I|$;
- сваки униформан филтер је неглаван.

26. Нека је κ кардиналан број и I бесконачан скуп. Филтер $\mathcal{F}$ над I је *κ-регуларан* ако и само ако постоји $S \subseteq \mathcal{F}$ такав да $|S| = \kappa$ и сваки $i \in I$ припада коначном броју чланова фамилије S. Доказати:

- филтер $\mathcal{F}$ над I је ω-регуларан ако и само ако постоји пребројив опадајући ланац $I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \ldots$ чланова $I_n \in \mathcal{F}$ тако да $\bigcap_n I_n = \emptyset$;

- сваки неглаван ултрафилтер над $\mathbb{N}$ је ω-регуларан;
- над сваким бесконачним скупом I кардиналности κ постоји κ-регуларан ултрафилтер;
- ако је I бесконачан скуп, тада је сваки $|I|$-регуларан ултрафилтер униформан.

27. Нека су $+$ и $\cdot$ симболи бинарних операција, $'$ симбол унарне операције и 0 и 1 знаци константата. Дајемо следећи списак алгебарских закона

1. $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *асоцијативност*
2. $x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x$ *комутативност*
3. $x + (x \cdot y) = x, \quad x \cdot (x + y) = x$ *апсорпција*
4. $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z), \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ *дистрибуција*
5. $x + x' = 1, \quad x \cdot x' = 0$ *комплемент*
6. $(x + y)' = x' \cdot y', \quad (x \cdot y)' = x' + y'$ *Де Морганови*[4] *закони*
7. $x + 0 = x,\ x \cdot 0 = 0,\ x + 1 = 1,\ x \cdot 1 = x$ *нула и јединица*
8. $(x')' = x$ *инволуција*

Доказати:

- ако је $\mathbf{A} = (A, +, \cdot, ', 0, 1)$ алгебарска структура која задовољава ове законе и ако је по дефиницији $(\forall x, y \in A)(x \leq y \Leftrightarrow x = x \cdot y)$, тада је $(\mathbf{A}, \leq)$ Булова алгебра;
- ако је $(B, +, \cdot, ', \leq, 0, 1)$ Булова алгебра, тада је $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ алгебра која задовољава ове законе.

28. Показати да је структура $\mathbf{B}_P$ из Примера 2.4. Булова алгебра.

29. Нека је $\mathbf{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ Булова алгебра и нека је $\mathbf{B}^*$ скуп ултрафилтера Булове алгебре $\mathbf{B}$. Даље, нека је $a^* = \{p \in \mathbf{B}^* \mid a \in p\}$ за $a \in B$.

- Доказати да за све $a, b \in B$ важи:

$$(1) \quad (a \wedge b)^* = a^* \cap b^*,$$

[4] Augustus De Morgan (1806–1871)

(2) $(a \vee b)^* = a^* \cup b^*$,

(3) $(a')^* = a^{*c}$ $(= \mathbf{B}^* \setminus a^*)$,

(4) $a \leq b$ ако и само ако $a^* \subseteq b^*$,

(5) $a \in p$ ако и само ако $p \in a^*$.

- Доказати да је свака Булова алгебра изоморфна неком пољу скупова.
- *Стонов простор* Булове алгебре $\mathbf{B}$ је тополошки простор $\mathbf{B}^*$ у којем је топологија одређена базом $\{ a^* \mid a \in B \}$. Доказати да је овај простор компактан, тотално неповезан и Хауздорфов.
- Доказати да је свака Булова алгебра изоморфна пољу отворено-затворених скупова неког тополошког простора.
- Ако је неки простор X компактан, тотално неповезан и Хауздорфов, доказати да је X Стонов простор неке Булове алгебре.

30. Доказати да је Стонов простор коначне Булове алгебре дискретан.

31. Ако је $\mathbf{B}$ коначна Булова алгебра, доказати да је $\mathbf{B} \cong \mathbf{P}(X)$ за неки скуп X.

32. Ако је $\mathbf{B}_P$ Линденбаумова алгебра исказног рачуна, доказати да је $\mathbf{B}_P$ хомеоморфна слика Канторовог простора $2^{\mathbb{N}}$.

33. Нека је τ дискретна топологија на $\mathbb{N}$. Доказати:

- Стонов простор Булове алгебре из Примера 2.3. 2° је Александровљева[5] компактификација простора $(\mathbb{N}, \tau)$;
- Стонов простор Булове алгебре $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ је Стон-Чехова компактификација простора $(\mathbb{N}, \tau)$, тј. $\mathbf{P}(\mathbb{N})^* = \beta(\mathbb{N})$.

34. Нека је J идеал коначних подскупова од $\mathbb{N}$, и нека је $\mathbf{B} = \mathbf{P}(\mathbb{N})/J$ количничка Булова алгебра. Доказати:

- $\mathbf{B}^* = \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, где је $\mathbf{B}^*$ Стонов простор Булове алгебра $\mathbf{B}$;

[5] Павел Сергеевич Александров (1896–1982)

- ако су $a_0 > a_1 > \cdots > b_1 > b_0$ два низа у B, тада постоји $c \in B$ такав да $a_0 > a_1 > \cdots > c > \cdots > b_1 > b_0$ (Дибуа-Рејмонова сепарабилност);
- ако су $b, a_0, a_1, \cdots \in B$ такви да $b > \cdots > a_1 > a_0$, тада постоји $c \in B$ такав да $b > c > \cdots > a_1 > a_0$ (Канторова сепарабилност);
- Булова алгебра $\mathbf{B}$ садржи ланце дужине ω_1;
- у $\mathbf{B}$ постоји ω_1 неупоредивих елемената.

35. Доказати да је ултрапроизвод уређених Абелових група такође уређена Абелова група.

36. Алгебарско поље $\mathbf{F}$ је *алгебарски затворено* уколико сваки полином над F степена ≥ 1 има корен у F. Доказати да је ултрапроизвод алгебарски затворених поља такође алгебарски затворено поље.

37. Доказати да је редуковани производ прстена $\prod_{\mathcal{D}} \mathbf{P}_i$ хомоморфна слика производа прстена $\prod_i \mathbf{P}_i$.

38. Нека је $\mathbf{F}_i$, $i \in I$, фамилија поља. Даље, нека је $\mathbf{P} = \prod_i \mathbf{F}_i$ производни прстен. За сваки филтер $\mathcal{D}$ над I одређен је следећи скуп $J_{\mathcal{D}} = \{\, f \in P \mid \{\, i \in I \mid f(i) = 0 \,\} \in \mathcal{D} \,\}$. Доказати:

- за сваки ултрафилтер $\mathcal{D}$, скуп $J_{\mathcal{D}}$ је максималан идеал у $\mathbf{P}$;
- ако је J максималан идеал у $\mathbf{P}$, тада постоји ултрафилтер $\mathcal{D}$ над I такав да је $J = J_{\mathcal{D}}$;
- $\prod_{\mathcal{D}} \mathbf{F}_i \simeq \mathbf{P}/J_{\mathcal{D}}$.

39. Ако је $\mathcal{D}$ главни ултрафилтер над I, доказати да је за неки $i_0 \in I$, $\prod_{\mathcal{D}} \mathbf{P}_i \simeq \mathbf{P}_{i_0}$.

40. Нека је $\mathcal{D}$ неглаван ултрафилтер над $\mathbb{N}$.

- Доказати да уређено поље реалних бројева $\mathbf{R}$ не може се потопити у $\mathbf{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$.
- Обично уређење природних бројева одређује на природан начин уређење на ултрастепену $\mathbf{N}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$. Доказати да је тип тог уређења $\omega + \xi \cdot \lambda$, где је ω тип уређења природних бројева, ξ тип уређења целих бројева, и λ тип густог уређења без крајева.

- Доказати да тип λ из претходне тачке јесте кардиналности континуума али није тип уређења реалних бројева.

41. Доказати да постоји ултрапроизвод коначних скупова који је бесконачан.

42. Доказати да се сваки прстен $\mathbf{P}$ може потопити у неки ултрапроизвод коначно-генерисаних потпрстена од $\mathbf{P}$.

43. Ако су $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ ултрафилтри и $\mathcal{F} = \mathcal{D}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{D}_n$, доказати да је $\mathbf{P}^I/\mathcal{F} \simeq \mathbf{P}^I/\mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathbf{P}^I/\mathcal{D}_n$.

44. Доказати тврђења у оквиру Примера 3.1.

45. У доказу Теореме 3.6. тврди се постојање растућег низа $f\colon \mathbb{N} \to I$ који је кофиналан у I. Доказати то!

46. Доказати да постоје утапања $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ и пресликавање θ које је *на* тако да следећи дијаграм комутира:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & {}^*\mathbb{Q}_{\mathrm{fin}} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\theta"] & {}^*\mathbb{Q} \arrow[d, "\delta"] \\
 & \mathbb{R} \arrow[r, "\lambda"] & {}^*\mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Слика 1.

47. Да ли је свако неархимедско раширење поља реалних бројева изоморфно неком ултрастепену $\mathbf{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$?

48. Ако је X коначан скуп, доказати да је за сваки филтер $\mathcal{D}$ над $\mathbb{N}$ скуп $X^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ коначан или моћи континуума.

49. Ако је $\mathcal{D}$ филтер над I, доказати:

- ако је $|A_i| = |B_i|$ за све $i \in I$, онда $|\prod_{\mathcal{D}} A_i| = |\prod_{\mathcal{D}} B_i|$;
- ако је $|A_i| \leq |B_i|$ за све $i \in I$, онда $|\prod_{\mathcal{D}} A_i| \leq |\prod_{\mathcal{D}} B_i|$;
- $|\prod_{\mathcal{D}} A_i| \leq |\prod_{i \in I} A_i|$;
- $|A| \leq |A^I/\mathcal{D}| \leq |A^I|$.

50. Нека је $\mathcal{D}$ κ-регуларан филтер над I моћи κ. Ако је A бесконачан скуп, доказати да је $A^I/\mathcal{D} = A^\kappa$.

51. Доказати да сваки бесконачан скуп има ултрастепен произвољно велике кардиналности.

52. Ако је $\mathcal{D}$ униформан ултрафилтер на скупу моћи κ и ако је $|A| = \kappa$, доказати да је $|\prod_{\mathcal{D}} A| > \kappa$.

53. Ако је $\mathcal{D}$ неглавни ултрафилтер над $\mathbb{N}$, доказати да је $|{}^*\mathbb{N}| = |{}^*\mathbb{R}|$.

54. Ако је $\mathcal{D}$ ултрафилтер над $\mathbb{N}$ и X коначан скуп, доказати да је $|{}^*X| = |X|$.

55. Ако је $\mathcal{D}$ ултрафилтер над $\mathbb{N}$, доказати:

- ${}^*(X \cup Y) = {}^*X \cup {}^*Y, \quad {}^*(X \cap Y) = {}^*X \cap {}^*Y$, за све $X, Y \subseteq \mathbb{R}$;
- ако је Υ поље скупова генерисано скуповима X, за $X \subseteq \mathbb{R}$, и интервалима $[0, H]_{{}^*\mathbb{N}}$, $H \in {}^*\mathbb{N}$, доказати да је сваки члан у Υ коначан или моћи континуума.

56. Показати да је $\approx$ релација конгруенције на прстену ${}^*\mathbb{R}_{\mathrm{fin}}$.

57. Доказати да

- $\mu(a) = a + \mu(0)$;
- ${}^*\mathbb{R}_{\mathrm{fin}} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \mu(a)$.

58. Доказати да скуп $\mu(0)$ нема супремум у ${}^*\mathbb{R}_{\mathrm{fin}}$.

59. Доказати да

- за скуп стандардних (коначних) хиперприродних бројева важи ${}^\sigma\mathbb{N} = {}^*\mathbb{N} \cap \gamma(0)$;
- је за скуп бесконачних хиперприродних бројева испуњена једнакост ${}^*\mathbb{N}_\infty = {}^*\mathbb{N} \setminus {}^\sigma\mathbb{N}$;
- скуп ${}^\sigma\mathbb{N}$ и скуп ${}^*\mathbb{N}_\infty$ су екстернални у ${}^*\mathbb{N}$, а притом је ${}^*\mathbb{N}$ интернални скуп у ${}^*\mathbb{R}$.

60. Показати да *Диофан̄овска*[6] једначина

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1$$

има само коначно много решења у скупу целих позитивних бројева.

61. Доказати да су $\mathbb{R}$, $\gamma(0)$ и $\mu(a)$, $a \in {}^*\mathbb{R}$ екстернални скупови у ${}^*\mathbb{R}$.

62. Доказати да је $\operatorname{card}(\mu(0)) \geq 2^{\aleph_0}$.

63. Показати да је са

$$x \lesssim y \qquad \text{ако и само ако} \qquad x \leq y \quad \text{или} \quad x \approx y$$

дефинисана рефлексивна и транзитивна релација (не и антисиметрична) и да је

$$x \lesssim y \qquad \text{ако и само ако} \qquad \operatorname{st}(x) \leq \operatorname{st}(y).$$

64. Нека је $\mathcal{F} = \{\, f \mid f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,\}$ и нека су бинарне релације скупа $\mathbb{N}$ дате са:

- $a \uparrow b$ ако и само ако $(\exists f \in \mathcal{F})\; {}^*f(a) \geq b$,
- $a \uparrow\downarrow b$ ако и само ако $a \uparrow b$ и $b \uparrow a$,
- $a \to b$ ако и само ако $(\exists f \in \mathcal{F})\; {}^*f(a) = b$,
- $a \leftrightarrow b$ ако и само ако $a \to b$ и $b \to a$,
- $a \sim b$ ако и само ако $|a - b|$ је коначан.

Показати:

(1) релације $\uparrow\downarrow$, $\leftrightarrow$ и $\sim$ су релације еквиваленције;

(2) релација $\leftrightarrow$ је строжа од релације $\uparrow\downarrow$;

(3) ако је $a \sim b$, тада $a \uparrow\downarrow b$ и $a \leftrightarrow b$.

65. Одредити све редукте модела $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$.

66. Нека су $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ модели истог језика L и нека је $A \subseteq B$. Доказати да је $\mathfrak{A}$ подмодел модела $\mathfrak{B}$ ако и само ако је инклузионо пресликавање $i \colon A \to B$ утапање.

[6] $\Delta\iota\acute{o}\varphi\alpha\nu\tau o\varsigma$ o $A\lambda\varepsilon\xi\alpha\nu\delta\rho\varepsilon\acute{u}\varsigma$ (200–284)

67. Доказати да је релација изоморфизма једна релација еквиваленције у класи свих модела.

68. Доказати да се адитивни модел $(\mathbb{N}, +, \leq, 0)$ утапа у мултипликативни модел $(\mathbb{N}, \cdot, \leq, 1)$.

69. Нека је $\mathfrak{A}$ модел језика L и $X \subseteq A$. Доказати да постоји најмањи подмодел $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ такав да је $X \subseteq B$.

70. Нека језик L садржи једино релацијске знаке и нека је $\mathfrak{A}$ модел језика L. Доказати да за сваки $X \subseteq A$ постоји подмодел $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ такав да $B = X$. Да ли је претходно тврђење тачно уколико L садржи и функцијске или релацијске знаке?

71. Навести пример модела чији је сваки подмодел бесконачан. Навести пример бесконачног модела чији је сваки прави подмодел коначан.

72. Ако је L језик модела $\mathfrak{A}^\sharp$, одредити $|L|$.

73. Нека је $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ скуп свих аутоморфизама модела $\mathfrak{A}$, и нека је $\circ$ слагање функција. Доказати да је $(\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}), \circ, i_A)$ група.

74. Ако је $\mathfrak{A}$ пребројив модел, доказати да је $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ пребројив скуп или моћи континуума.

75. Нека је $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ утапање, где су $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ модели истог језика. Доказати:

- постоји подмодел $\mathfrak{B}'$ модела $\mathfrak{B}$ и изоморфизам $g\colon \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}'$ тако да доњи леви дијаграм комутира;

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathfrak{B}' \arrow[dl, "i"] \\ & \mathfrak{B} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathfrak{A}' \arrow[dl, "h"] \\ & \mathfrak{B} & \end{tikzcd}$$

Слика 2.

- постоји модел $\mathfrak{A}'$ који је екстензија модела $\mathfrak{A}$ и изоморфизам $h\colon \mathfrak{A}' \simeq \mathfrak{B}$ такав да горњи десни дијаграм комутира.

76. Кардинални број скупа свих формула језика L означава се са $\|L\|$. Доказати да је $\|L\| = |L| + \aleph_0$.

77. Доказати да је Term_L најмањи скуп T који има особине:

- промењиве и симболи констаната припадају T;
- ако је F функцијски знак дужине k и ако $t_1, \ldots, t_k \in T$, онда $F(t_1, \ldots, t_k) \in T$.

78. Доказати да је For_L најмањи скуп F који има особине:

- $\mathrm{At}_L \subseteq F$;
- ако су $\varphi, \psi \in F$, тада $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, $\exists x_i \varphi$, $\forall x_i \varphi$ припадају F.

79. Доказати да свака формула има једнак број левих и десних заграда.

80. Доказати теорему о јединствености читања терма.

81. У следећим случајевима одредити слободна и везана појављивања промењивих у формулама:

(1) $(\forall x)(\exists y)(x \leq y) \vee (\exists y)(x \leq y)$,

(2) $(\forall x)S(x, y, z) \vee (\exists y)S(x, y, z)$, $\quad S$ је тернарно релацијско слово.

82. Ако је T теорија језика L и $T' \subseteq T$, тада се T' назива *подтеоријом* теорије T. Које све подтеорије садржи теорија уређених поља?

83. Претпостављамо да је читалац упознат са основним појмовима теорије доказа као што су: аксиоме предикатског рачуна првог реда за језик L, доказ, дужина доказа, теорема (језика L), теорема теорије T. Симбол $T \vdash \varphi$ означава да φ има доказ из T, односно да је φ изводљива из T ($\varphi \in \mathrm{Sent}_L$). Теорија T је *непротивуречна* уколико се не може свака формула језика L извести из T, иначе T је противуречна теорија. Доказати:

- теорија T је непротивуречна ако и само ако сваки коначан подскуп од T је непротивуречна теорија;
- ако је φ реченица језика L, тада је $T \cup \{\, \varphi \,\}$ противуречна теорија ако и само ако $T \vdash \neg\varphi$;

- свака непротивуречна теорија језика L садржана је у некој максимално непротивуречној теорији (Линденбаум).

84. Показати да за максимално непротивуречну теорију T језика L важи:

- $T \vdash \varphi$ ако и само ако $\varphi \in T$, тј. T је дедуктивно затворена теорија;
- није $T \vdash \varphi$ ако и само ако $T \vdash \neg\varphi$;
- $T \vdash \varphi \vee \psi$ ако и само ако $T \vdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.

85. Нека је $\sim$ релација у For_L уведена са:

$$\varphi \sim \psi \quad \text{ако и само ако} \quad T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi.$$

Нека је $B = \mathrm{For}_L/\!\sim$ и нека су операције $+, \cdot, '$ скупа B дефинисане овако

$$a \cdot b = (\varphi \wedge \psi)/\!\sim, \qquad a + b = (\varphi \vee \psi)/\!\sim, \qquad a' = (\neg\varphi)/\!\sim$$

где је $a = \varphi/\!\sim$, $b = \psi/\!\sim$, $\varphi, \psi \in \mathrm{For}_L$, и нека је $B_0 = \mathrm{Sent}_L/\!\sim$.

- Доказати да је $\sim$ релација еквиваленције скупа For_L.
- Доказати да је $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Булова алгебра.
- Доказати да се подалгебра $\mathbf{B}_0$ утапа у $\mathbf{B}$.
- Доказати да је теорија T непротивуречна и дедуктивно затворена ако и само ако је $F = T/\sim$ прави филтер у $\mathbf{B}_0$. Доказати да је T максимално непротивуречна теорија ако и само ако је F ултрафилтер у $\mathbf{B}_0$.

86. Нека је $L = \emptyset$ и $T = \emptyset$. Дакле, модели ове теорије не садрже функције, релације, нити константе.

- Доказати да су свака два бесконачна моделе ове теорије су изоморфна.
- Ако су $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ бесконачни модели теорије T, онда $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ повлачи $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

- Доказати да је теорија $\{\, \theta_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ комплетна, где је θ_n формула

$$\exists x_1 \dots x_n \bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j.$$

- Описати сва комплетна раширења теорије T.

87. Нека су $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ модели језика L такви да је $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Даље, нека за сваку формулу $\exists x\varphi(x, \vec{y})$ језика L, где је $\vec{y}$ низ променљивих $y_1, y_2, \dots, y_n$, важи:

ако $\vec{a} \in A$ *и* $\mathfrak{B} \models \exists x\varphi(x, \vec{y})[\vec{a}]$, *онда за неки* $d \in A$, $\mathfrak{A} \models \varphi[d, \vec{a}]$.

Доказати да је $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. (Тарски-Вотова теорема)

88. Нека су $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ модели језика L и претпоставимо да је $\mathfrak{A}$ подмодел модела $\mathfrak{B}$. Нека за све $b, b_1, \dots, b_n \in B$ постоји $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$ такав да

- за све $k \leq n$, $f(b_k) = b_k$;
- за неки $a \in A$, $f(b) = a$.

Доказати да је $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

89. Користећи претходне задатке доказати:

- $(\mathbb{Q}, \leq) \prec (\mathbb{R}, \leq)$;
- ако су X, Y бесконачни скупови и $X \subseteq Y$, онда $(\mathbf{P}(X), \subseteq) \prec (\mathbf{P}(Y), \subseteq)$.

90. Да ли два бесконачна модела различитих кардиналности могу бити елементарно еквивалентна?

91. Теорија T језика L допушта елиминацију квантора уколико за сваку формулу φ језика L постоји формула ψ језика L која не садржи кванторе и за коју важи $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$. Доказати да уколико теорија T допушта елиминацију квантора, онда за свака два модела $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ теорије T важи: Ако је $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, онда $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

92. Доказати да следеће теорије допуштају елиминацију квантора:

- теорија из Задатка 86;

- $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, \leq)$, тј. теорија линеарног густог уређења без крајева;
- $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, +, \leq, 0)$.

93. Доказати да је $(\mathbb{Q}, +, \leq, 0) \prec (\mathbb{R}, +, \leq, 0)$.

94. Доказати[7)] да су за сваку теорију T следећи услови еквивалентни.

- За свака два модела $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ теорије T важи: ако је $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, онда $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.
- За сваку формулу φ језика теорије T постоји формула ψ истог језика која у пренекс нормалној форми има једино егзистенцијалне кванторе и за коју важи $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$.

95. Доказати да је свако уређено поље елементарно еквивалентно неком архимедском пољу.

96. Нека су $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ прави филтери над скупом индекса I такви да је $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$. Доказати да је $\prod_{\mathcal{E}} \mathfrak{A}_i$ хомоморфна слика модела $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$.

97. Нека је $\mathcal{D}$ прави филтер над I. Доказати:

- ако је сваки $\mathfrak{A}_i$ утопљен у $\mathfrak{B}_i$, тада је и $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$ утопљен у $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{B}_i$;
- ако је за све $i \in I$, $\mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{B}_i$, тада је $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i \cong \prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{B}_i$;
- ако је сваки $\mathfrak{A}_i$ хомоморфна слика модела $\mathfrak{B}_i$, тада је $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$ хомоморфна слика модела $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{B}_i$.

98. Доказати да у општем случају конструкција редукованог производа не комутира са бесконачним производом модела, тј. ако је $\mathfrak{A}_{ij}$, $i \in I$, $j \in J$ фамилија модела и $\mathcal{D}$ ултрафилтер над I, тада не мора да буде $\prod_{\mathcal{D}} \prod_j \mathfrak{A}_{ij} \cong \prod_j \prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_{ij}$.

99. Нека је $\mathcal{D}$ прави филтер над I, нека је $J \in \mathcal{D}$ и нека је колекција $\mathcal{E} = \{\, X \in \mathcal{D} \mid X \subseteq J \,\}$. Доказати да је $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i \cong \prod_{\mathcal{E}} \mathfrak{A}_j$.

100. Доказати да за сваки филтер $\mathcal{D}$ над I постоји $J \subseteq I$ и униформан филтер $\mathcal{E}$ над J тако да је $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i \cong \prod_{\mathcal{E}} \mathfrak{A}_j$.

[7)] Теорија која задовољава ове услове назива се моделски-потпуном. Овај појам увео је А. Робинсон, и такође, њему припада ово тврђење.

101. Нека је $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \exp, \leq, 0, 1)$ уређено поље реалних бројева проширено експоненцијалном функцијом и нека је $\mathcal{D}$ неглаван ултрафилтер над $\mathbb{N}$. Ако је ${}^*\exp$ одговарајућа функција модела $\mathbf{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$, доказати да важи ${}^*\exp(x+y) = {}^*\exp(x){}^*\exp(y)$. Ако уместо претпоставке „$\mathcal{D}$ је неглавни ултрафилтер" узмемо само да је $\mathcal{D}$ прави филтер, да ли exp има исту особину?

102. Користећи Лошову теорему докажите да је ултрапроизвод

- поља такође поље,
- алгебарски затворених поља опет алгебарски затворено поље,
- уређених поља такође уређено поље,
- модела формалне аритметике опет модел формалне аритметике.

103. Докажите да ултрапроизвод $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$, $\mathcal{D}$ је ултрафилтер над $\mathbb{N}$,

- цикличних група $\mathfrak{A}_i$ у општем случају није циклична група,
- бесконачних добро уређених скупова $\mathfrak{A}_i$ није добро уређен скуп.

104. Докажите да постоји непребројив модел формалне аритметике.

105. Нека је $\mathcal{D}$ ултрафилтер над I и нека је $a \in A$, $\hat{a} \in A^I$ такав да је за све $i \in I$, $\hat{a}(i) = a$. Доказати да је пресликавање (тзв. природно утапање) $d\colon A \to A^{\mathcal{D}}$, $d\colon a \mapsto \hat{a}_{\mathcal{D}}$ елементарно. Дакле, ултрастепен $\mathfrak{A}^{\mathcal{D}}$ садржи као елементаран подмодел изоморфну копију модела $\mathfrak{A}$.

106. Нека је $\mathbf{R}^\sharp$ пуна експанзија поља реалних бројева, $\mathcal{D}$ неглаван ултрафилтер над неким бесконачним скупом индекса I и ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$. Ако је ${}^*f$ интерпретација у ${}^*\mathbb{R}$ имена неке елементарне функције f $(\sin, \cos, \dots)$, докажите да ${}^*f$ задовољава исте идентитете као и функција f.

107. Нека је Υ класа неких модела језика L. Докажите да је Υ елементарна класа, тј. описана неким скупом аксиома, ако и само ако је Υ затворена за ултрапроизводе и елементарну еквиваленцију модела.

108. Нека је $\mathcal{D}$ ултрафилтер над I. Доказати:

- ако је за све $i \in I$, $\mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{B}_i$, онда $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i \equiv \prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{B}_i$;

- ако се за сваки $i \in I$ модел $\mathfrak{A}_i$ елементарно утапа у $\mathfrak{B}_i$, тада се и $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{A}_i$ елементарно утапа у $\prod_{\mathcal{D}} \mathfrak{B}_i$.

109. Нека је $x = (x_n)$, $u = (u_n)$, $u_n \geq 0$, $\lim u = 0$ и $x_{n+1} \geq x_n - u_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је $\{\, \mathrm{st}(x_H) \mid H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \,\}$ интервал.

110. Нека су a_1, a_2, a_3 неколинеарне тачке у равни $\mathbb{R}^2$ и нека је $P = \mathrm{Co}\{\, a_1, a_2, a_3 \,\}$ конвексни омотач над a_1, a_2, a_3 (троугао у $\mathbb{R}^2$). Ако непрекидне функције $f_i \colon P \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, задовољавају услове

- $f_i(a_i) = 0$,
- $f_i \cdot f_j = 0$ на $L_k = \mathrm{Co}\{\, a_i, a_j \,\}$,
- $f_i \cdot f_j \cdot f_k = 0$ на P,

доказати да је $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0$ за неко $x \in P$.

111. Доказати идентитете из Теореме 8.36.

112. Показати да је $\mathcal{E}(L)$ база неке равномерне топологије на ${}^*\mathbb{R}$.

113. Показати да су операције $(+)$ и $(\,\cdot\,)$ асоцијативне и комутативне са неутралним елементима 0 и 1 респективно. Такође, показати да је $(\,\cdot\,)$ дистрибутивно у односу на $(+)$ (видети одељак 10.4).

114. Показати да је $\mathbf{Q}_\kappa$ κ-архимедово поље кардиналности κ.

115. Показати да свако уређено поље кофиналности κ садржи потпоље изоморфно са $\mathbf{Q}_\kappa$.

116. Нека је $\mathbf{F}$ κ-архимедско и κ-Ремзијево поље. Тада су κ-комплетност и Скотовска комплетност еквивалентни.

Упутство: Регуларном пресеку одговара кофиналан κ-монотон низ (и обратно).

117. Показати да су следећи скупови екстернални

(1) $\mathbb{N},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}$;

(2) ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N},\ {}^*\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q},\ {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$.

118. Показати да су следећа тврђења еквивалентна.

- Аксиома 3 (видети одељак 11.1).
- Ако је $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A$, тада је $\bigcap_{n\leq m} A_n \subseteq A$ за неко $m \in \mathbb{N}$.
- Ако је $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, тада је $A \subseteq \bigcup_{n\leq m} A_n$ за неко $m \in \mathbb{N}$.
- Ако је $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ опадајући низ и $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, тада постоји $m \in \mathbb{N}$ за које је $A_m = \emptyset$.

119. Доказати обрат Теореме 11.7. тј. ако за сваки $A \in V(S)$ постоји хиперконачан скуп L тако да је $\{\,{}^*a \,|\, a \in A\} \subseteq L \subseteq {}^*A$, тада важи Аксиома 4.

120. Кажемо да је бинарна релација ϕ сагласна на $\mathrm{dom}\phi$ ако за сваки коначан скуп елемената $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{dom}\phi$ постоји $y \in \mathrm{rang}\phi$ такав да је $\phi(x_i, y)$ за свако $i = 1, \ldots, n$. Доказати да је Аксиома 4 еквивалентна са следећим тврђењем: за сваку бинарну релацију $\phi \in V(S)$ која је сагласна на $\mathrm{dom}\phi$ постоји $z \in \mathrm{rang}^*\phi$ тако да за свако $x \in \mathrm{dom}\phi$ важи ${}^*\phi({}^*x, z)$.

121. Нека $\mathcal{A}$ има својство коначног пресека и нека је $\mathrm{Fil}\mathcal{A}$ одговарајући филтер генерисан са $\mathcal{A}$. Доказати да ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имају својство коначног пресека, тада

$$\mathrm{Fil}\mathcal{A} \supseteq \mathrm{Fil}\mathcal{B} \qquad \text{ако и само ако} \qquad \bigcap_{A\in\mathcal{A}} {}^*A \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{B}} {}^*A\,.$$

122. Ултрафилтер $\mathcal{F}$ над индексним скупом I је λ-*одговарајући* ако за сваку непразну фамилију $\mathcal{B}$ подскупова од λ, која има својство коначног пресека, постоји пресликавање $s\colon I \to \lambda$ тако да за свако $B \in \mathcal{B}$, постоји $F \in \mathcal{F}$ са особином $s(F) \subseteq B$. Показати да полазећи од $\mathrm{Card}(V(S))$-одговарајућег ултрафилтра можемо као у Теореми 11.10. добити модел за Аксиоме 1, 2, 3 и 4.

123. Доказати Теорему 11.13.

124. Нека су $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ или мерљиви простори или коначно-адитивни мерљиви простори. Кажемо да се алгебра $\mathcal{A}$ може потопити у алгебру $\mathcal{B}$ ако постоји 1-1 функција $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ тако да

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ за $A, B \in \mathcal{A}$,

(2) $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ за $A \in \mathcal{A}$.

Кажемо да горња функција чува меру ако

(3) $A \in \mathcal{A}$ ако и само ако $f(A) \in \mathcal{B}$,

(4) $\mu(A) = \lambda(f(A))$ за $A \in \mathcal{A}$.

Показати да се сваки коначно-адитивни мерљив простор $(X, \mathcal{A}, \mu)$ може потопити у неки мерљив простор $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ тако да то потапање чува меру.

125. Проверити Теорему 12.6. за случај:

- $\overline{I} = [0, 1]$;
- $I_k = [-k, k]$ и $T_H^k = \{\, -k, -k + \frac{1}{H}, \ldots, k - \frac{1}{H}, k \,\}$;
- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и $\Omega = \{\, \frac{k}{H} \mid k \in {}^*\mathbb{Z},\ -H^2 \leq k \leq H^2 \,\}$.

126. Нека је $(T_H, {}^*\mathbf{P}(T_H), P)$ хиперконачан униформан мерљив простор и нека је $\operatorname{mon}_H(r) = \{\, t \in T_H \mid t \approx r \,\}$. Доказати да је $\operatorname{mon}_H(r)$ мерљив скуп и да је његова мера 0.

127. Показати да скуп $S = \{\, t \in T_H \mid \operatorname{st}(t) \leq t \,\}$ није Леб мерљив.

Литература

[1] **Aczel P. M. G.**, *Saturated intuitionistic theories*, u *Contributions to Mathematical Logic* (H. A. Schmidt, K. J. Schute and H. J. Thiele, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1–11, 1968.

[2] **Aljančić S.**, **D. Aranđelović**, *O-regularly varying functions*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) 62 (1990), 25–40.

[3] **Anderson R. M.**, *A non–standard representation for Brownian motion and Itô integration*, Israel J. Math. 25 (1976), 15–46.

[4] **Anderson R. M.**, *Star–finite representations of measure spaces*, Trans. A.M.S. 271 (1982), 667–687.

[5] **Andreev P.**, **K. Hrbaček**, *Standard sets in nonstandard set theory*, J. Symbolic Logic 69 (2004), 165–182.

[6] **Aranđelović D.**, *O-regular variation and uniform convergence*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) 36 (1977), 5–22.

[7] **Ballard D.**, **K. Hrbaček**, *Standard foundations for nonstandard analysis*, J. Symbolic Logic 57 (1992), 741–748.

[8] **Barwise J.**, *An introduction to first-order logic*, u *Handbook of Mathematical Logic* (J. Barwise, ed.), North-Holland, Amsterdam, 6–46, 1977.

[9] **Bell J. L.**, *A Primer of Infinitesimal Analysis*, Cambridge University Press, 1998.

[10] **Bernstein A. R.**, **A. Robinson**, *Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos*, Pacific J. Math. 16 (1966), 421–431.

[11] **Bernstein A. R.**, **F. Wattenberg**, *Nonstandard measure theory*, u *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability* (W. A. J. Luxemburg, ed.), Holt, Rinehart and Winston, New York, (1969), 171–186.

[12] **Bhaskara Rao K. P. S.**, **M. Bhaskara Rao**, *Theory of Charges*, Academic Press, New York, 1983.

[13] **Billingsley P.**, *Probability and Measure*, John Wiley and Sons, New York, 1979.

[14] **Chang C. C.**, **H. J. Keisler**, *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[15] **Cherlin G.**, **J. Hirschfeld**, *Ultrafilters and ultraproducts in nonstandard analysis*, u *Contributions to non-standard analysis (Sympos., Oberwolfach, 1970)*, 261–279, Studies in Logic and Found. Math., Vol. 69, North-Holland, Amsterdam, 1972.

[16] **Cohen P. J.**, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, 1966.

[17] **Cohn D. L.**, *Measure Theory*, Birkhäuser, 1980.

[18] **Cowles J.**, **R. LaGrange**, *Generalized Archimedean fields*, Notre Dame J. Formal Logic 24 (1983), 133–140.

[19] **Čuda K.**, **P. Vopěnka**, *Real and imaginary classes in the AST*, Comment. Math. Univ. Carol. 20 (1979), 639–653.

[20] **Cutland N.**, *Computability: An introduction to recursive function theory*, Cambridge University Press, 1980.

[21] **Cutland N.**, *Nonstandard measure theory and its applications*, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 529–589.

[22] **Cutland N.**, *Loeb measure theory*, u *Developments in nonstandard mathematics* (Aveiro, 1994), 151–177, Piman Res. Notes Math. Ser. 336, Longman, Harlow, 1995.

[23] **Cutland N.**, *Nonstandard real analysis*, u *Nonstandard analysis: Theory and Applications* (L. O. Arkeryd, N. J. Cutland and C. W. Henson, eds.), Kluwer, Dordrecht, 1997.

[24] **Dalen D. van**, *Logic and Structures*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[25] **Davis M.**, *Applied nonstandard analysis*, John Wiley & Sons, New York, London, Sidney, 1977.

[26] **Di Nasso M.**, **K. Hrbaček**, *Combinatorial principles in nonstandard analysis*, Ann. Pure Appl. Logic 119 (2003), 265–293.

[27] **Diener F.**, **K. D. Stroyan**, *Syntactical methods in infinitesimal analysis*, u *Nonstandard analysis and its applications* (N. Cutland, ed.), London Math. Soc. Student Texts 10, Cambridge Univ. Press, 258–281, 1988.

[28] **Đorđević R. S.**, *Verovatnosne logike*, doktorska teza, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Kragujevcu, 1991.

[29] **Đorđević R. S.**, *Analytic completeness theorem for absolutely continuons biprobability models*, Zeitschuft Math. Logik Grundlagen Math. 38 (1992), 241–246.

[30] **Đorđević R. S.**, *Analytic completeness theorem for singular biprobability models*, Math. Logic Quarterly 39 (1993), 228–230.

[31] **Đorđević R. S.**, *Logics with two types of integral operators*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) 54 (1993), 18–24.

[32] **Đorđević R. S.**, **M. Rašković**, **Z. Ognjanović**, *Completeness theorem for propositional probability models whose measures have only finite ranges*, Arch. Math. Logic 43 (2004), 557–564.

[33] **Ebbinghaus H. D.**, **J. Flum**, **W. Thomas**, *Mathematical Logic*, Springer-Verlang, New York Inc., 1994.

[34] **Goldblatt R.**, *Lectures on the hyperreals. An introduction to nonstandard analysis*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[35] **Halmos P. R.**, *Measure Theory*, Van Nostrand, Princeton, New York, 1950.

[36] **Halmos P. R.**, *Naive Set Theory*, Springer Verlag, New York, 1974.

[37] **Hardy G. H.**, *Orders of infinity, the ,,Infinitärcalcul" of Paul du Bois-Reymond*, Cambridge Univ. Press, 1910.

[38] **Hellman G.**, *Mathematical Pluralism: the case of smooth infinitesimal analysis*, Journal of Philosophical Logic 35 (2006), 621–651.

[39] **Helms L.**, **P. Loeb**, *A nonstandard proof of the martingale convergence theorem*, Rocky Mountain J. of Math. 12 (1981), 165–170.

[40] **Henkin L.**, *The completeness of the first-order functional calculus*, J. Symbolic Logic 14 (1949), 159–166.

[41] **Henson C. W.**, *On the nonstandard representation of measures*, Trans. Amer. Math. Soc. 172 (1972), 437–446.

[42] **Henson C. W.**, *The nonstandard hulls of a uniform space*, Pacific J. Math. 43 (1972), 115–137.

[43] **Henson C. W.**, *The isomorphism property in nonstandard analysis and its use in the theory of Banach spaces*, J. Symbolic Logic 39 (1974), 717–731.

[44] **Henson C. W.**, *When do two Banach spaces have isometrically isomorphic nonstandard hulls*, Israel J. Math. 22 (1975), 57–67.

[45] **Henson C. W.**, *Analytic sets, Baire sets, and the standard part map*, Canadian J. of Math. 31 (1979), 663–672.

[46] **Henson C. W.**, *Unbounded Loeb measures*, Proc. Amer. Math. Soc. 64 (1979), 143–160.

[47] **Henson C. W.**, *Foundations of nonstandard analysis: a gentle introduction to nonstandard extension*, u *Nonstandard Analysis: Theory and Applications* (L. O. Arkeryd, N. J. Cutland and C. W. Henson, eds.), Kluwer, Dordrecht, 1997.

[48] **Henson C. W.**, **H. J. Keisler**, *On the strenght of nonstandard analysis*, J. Symbolic Logic 51 (1986), 377–386.

[49] **Henson C. W.**, **L. C. Moore**, Jr., *The nonstandard theory of topological vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 172 (1972), 405–435.

[50] **Henson C. W.**, **L. C. Moore**, Jr., *Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces*, Lect. Notes Math. 983 (1983), 27–112.

[51] **Heyting A.**, *Intuitionism, An Introduction*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1976.

[52] **Hrbaček K.**, *Axiomatic foundations for nonstandard analysis*, Fundamenta Mathematicae 98 (1978), 1–19.

[53] **Hrbaček K.**, *Nonstandard Set Theory*, Am. Math. Monthly 85 (1979), 659–677.

[54] **Hrbaček K.**, *Realism, nonstandard set theory, and large cardinals*, Ann. Pure Appl. Logic 109 (2001), 15–48.

[55] **Hurd A.**, **P. Loeb**, *An introduction to nonstandard real analysis*, Academic Press, Orlando, San Diego, New York, 1985.

[56] **Ilić-Stepić A.**, **Ž. Mijajlović**, *Fundamental theorems of analysis in formally real fields*, Novi Sad Jour. Math. 38 (2008), 27–32.

[57] **Jaćimović M.**, **P. Obradović**, *Realni brojevi*, CID, Podgorica, 2001.

[58] **Jech T.**, *Set theory*, Academic Press, New York, 1978.

[59] **Just W.**, **Ž. Mijajlović**, *Separation properties of ideals over ω*, Math. Logic Quarterly 33 (1987), 267–276.

[60] **Keisler H. J.**, *Model Theory for Infinitary Logic*, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[61] **Keisler H. J.**, *Foundations of Infinitesimal Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

[62] **Keisler H. J.**, *Hyperfinite model theory*, u *Logic Colloquium '76*, North-Holland, Amsterdam, 5–110, 1977.

[63] **Keisler H. J.**, *An infinitesimal approach to stochastic analysis*, Memoirs Amer. Math. Soc., No. 297, American Mathematical society, Providence, Rhode Island, Vol. 48, 1984.

[64] **Keisler H. J.**, *Hyperfinite models of adapted probability logic*, Ann. Pure Appl. Logic 31 (1986), 71–86.

[65] **Keisler H. J.**, *Elementary Calculus – An infinitesimal approach*, University of Wisconsin, 2000.

[66] **Keisler H. J.**, **K. Kunen**, **A. Miller**, **S. Leth**, *Descriptive set theory over hyperfinite sets*, J. Symbolic Logic 54 (1989), 1167–1180.

[67] **Keisler H. J.**, **J. H. Schmerl**, *Making the hiperreal line both saturated and complete*, J. Symbolic Logic 56 (1991), 1016–1025.

[68] **Kelley J. L.**, *General Topology*, Van Nostrand, New York, 1955.

[69] **Koplston F.**, ,,Od Dekarta do Lajbnica", *Istorija filozofije*, tom 4, BIGZ, Beograd, 1995.

[70] **Kreisel G.**, *Axiomatizations of nonstandard analysis that are conservative extensions of formal systems for classical standard analysis*, u *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*, (W. A. J. Luxemburg, ed.), Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[71] **Kreisel G.**, **J. L. Krivine**, *Elements of Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam, 1967.

[72] **Kron A.**, *Logika*, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1998.

[73] **Kunen K.**, *Set theory, an introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, Elsevier, 1980.

[74] **Kuratowski K.**, **A. Mostowski**, *Set Theory, with an introduction to descriptive set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1976.

[75] **Laugwitz D.**, *An Abraham Robinson's sequential lemma*, Fachbereich Mathematik, Darmstadt 167 (1974).

[76] **Laugwitz D.**, *Infinitesimal kalkül*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1978.

[77] **Laugwitz D.**, *Zahlen und Kontinuum*, Wissensch. Buchgesellsch. Darmstadt, Zürich, 1986.

[78] **Lighstone A. H.**, **A. Robinson**, *Non-Archimedian fields and asymptotic expansions*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[79] **Lindström T.**, *Hyperfinite stochastic integration* I–III, Math. Skand. 46 (1980), 265–333.

[80] **Lindström T.**, *A Loeb measure approach to theorems of Prohorov, Sazanov and Groos*, Trans. Amer. Math. Soc. 269 (1982), 521–534.

[81] **Lindström T.**, *An invitation to Nonstandard Analysis*, u *Nonstandard Analysis and its Application*, (N. Cutland, ed.), Cambridge University Press, 1988.

[82] **Loeb P. A.**, *Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 211 (1975), 113–122.

[83] **Loeb P. A.**, *An introducion to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory*, u *Probabilistic Analysis and Related Topics* (A. T. Bharucha–Reid, ed.), Academic Press, New York, 1979.

[84] **Loeb P. A.**, *Weak limits of measures and the standard part map*, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979), 128–135.

[85] **Loeb P. A.**, *A functional approach to nonstandard measure theory*, Contemporary Math., 26 (1984), 251–261.

[86] **Loeb P. A.**, *A nonstandard functional approach to Fubini's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 93 (1985), 343–346.

[87] **Loeb P. A.**, *Nonstandard analysis and topology*, u *Nonstandard Analysis: Theory and Applications* (L. O. Arkeryd, N. J. Cutland and C. W. Henson, eds.), Kluwer, Dordrecht, 1997.

[88] **Łos J.**, **E. Marczewski**, *Extension of measures*, Fund. Math. 36 (1949), 267–276.

[89] **Lutz R.**, **M. Goze**, *Nonstandard analysis. A practical guide with applications*, Lecture Notes Math. 881, Springer, 1981.

[90] **Luxemburg W. A. J.**, *Non-standard analysis, lecture notes*, Dept. Math. Cal. Inst. Tech., 1962.

[91] **Luxemburg W. A. J.**, *A general theory of monads*, u *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability* (W. A. J. Luxemburg, ed.), Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[92] **Luxemburg W. A. J.**, *What is nonstandard analysis?*, Amer. Math. Monthly 80 (1973), 38–67.

[93] **Marković Z.**, *Intuitionistic Model Theory*, Ph.D. thesis, Univ. of Pennsylvania, 1978.

[94] **Mijajlović Ž.**, *On a proof of the Erdős-Monk theorem*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) 51 (1985), 25–28.

[95] **Mijajlović Ž.**, *An Introduction to Model Theory*, University of Novi Sad, Faculty of Science, Novi Sad, 1987.

[96] **Mijajlović Ž.**, *Definable ultrapowers and the omitting types theorem*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) 64 (1991), 14–18.

[97] **Mijajlović Ž.**, *Algebra 1*, Milgor, Beograd, Moskva, 1993.

[98] **Mijajlović Ž.**, **B. Malešević**, *Analytical and differential-algebraic properties of Gamma function*, Int. Jour. of Appl. Math. and Statistics 11 (2007), 118–129.

[99] **Mijajlović Ž.**, **B. Malešević**, *Differentially transcendental functions*, Bulletin Belgian Math. Soc. - Simon Stevin 15 (2008), 193–201.

[100] **Mijajlović Ž.**, **Z. Marković**, *Some recurrence formulas related to the differential operator θD*, Facta Univ. Ser. Math. Inform 13 (1998), 7–17.

[101] **Mijajlović Ž.**, **Z. Marković**, **K. Došen**, *Hilbertovi problemi i logika*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1986.

[102] **Mijajlović Ž.**, **M. Milošević**, **A. Perović**, *Infinitesimals in nonstandard analysis versus infinitesimals in p-adic fields*, AIP Conf. Proc. 826 (2006), 274–279.

[103] **Mijajlović Ž.**, **N. Pejović**, *Non-Archimedean methods in Cosmology*, AIP Conf. Proc. 895 (2007), 317–320.

[104] **Mijajlović Ž.**, **N. Pejović**, **S. Ninković**, *Nonstandard Representations of Processes in Dynamical Systems*, AIP Conf. Proc. 934 (2007), 151–157.

[105] **Mijajlović Ž.**, **N. Pejović**, **S. Šegan**, **G. Damljanović**, *On asymptotic solutions of Friedmann equations*, Appl. Math. and Computation 219 (2012), 1273–1286.

[106] **Monk J. D.**, *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[107] **Mycielski J.**, *Analysis without actual infinity*, J. Symbolic Logic, 46 (1981), 625–633.

[108] **Nadel M. E.**, *Infinitary intuitionistic logic from a classical point of view*, Ann. Math. Logic 14 (1978), 159–195.

[109] **Nelson E.**, *Internal set theory, a new approach to nonstandard analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 1165–1198.

[110] **Perović A.**, **A. Jovanović**, **B. Veličković**, *Teorija skupova*, Matematički fakultet, Beograd, 2007.

[111] **Petronijević B.**, *Istorija novije filozofije*, Nolit, Beograd, 1982.

[112] **Pincus D.**, **R. M. Solovay**, *Definability of measures and ultrafilters*, J. Symbolic Logic 42 (1977), 179–190.

[113] **Rašković M.**, *On existence of expansion of complex function*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) 40 (1979), 269–271.

[114] **Rašković M.**, *Measure and integration in the alternative set theory*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) 43 (1981), 191–197.

[115] **Rašković M.**, *Logike sa merom u Lajbnicovom univerzumu*, doktorska teza, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 1983.

[116] **Rašković M.**, *An application of nonstandard analysis to functional equations*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) 51 (1985), 23–34.

[117] **Rašković M.**, *Model theory for L_{AM} logic*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) 51 (1985), 17–22.

[118] **Rašković M.**, *Completeness theorem for biprobability models*, J. Symb. Logic 51 (1986), 586–590.

[119] **Rašković M.**, *Completeness theorem for singular biprobability models*, Proc. Am. Math. Soc. 102 (1988), 389–392.

[120] **Rašković M.**, **R. S. Đorđević**, *Continuous time probability logic*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) 57 (1995), 143–146.

[121] **Rašković M.**, **R. Đorđević**, *Probability Quantifiers and Operators*, VESTA, Beograd, 1996.

[122] **Рашковић М.**, **Н. Икодиновић**, *Приче о малим и великим бројевима*, Математички институт САНУ, Завод за уџбенике, Друштво математичара Србије, Београд, 2010.

[123] **Reeken M.**, **V. Kanovei**, *Nonstandard analysis: Axiomatically*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.

[124] **Robbin J. W.**, *Mathematical Logic*, W. A. Benjamin, New York, 1969.

[125] **Robert A.**, *Nonstandard Analysis*, Wiley, New York, 1988.

[126] **Robinson A.**, *Non-standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1966.

[127] **Robinson A.**, *Selected Papers*, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[128] **Rodenhausen H.**, *A Characterization of nonstandard liftings of measurable functions and stochastic processes*, Israel J. Math. 43 (1982), 1–21.

[129] **Rudin W.**, *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, Singapore, 1987.

[130] **Rudin W.**, *Functional analysis*, 14th ed., McGraw-Hill, New Delhi, New York, 1990.

[131] **Schmieden C.**, **D. Laugwitz**, *Eine erweiterung der Infinitesimalrechnung*, Math. Zeitschr. 69 (1958), 1–39.

[132] **Scott D.**, *On completing ordered fields*, u *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability* (W. A. J. Luxemburg, ed.), Holt, Rinehart and Winston, New York, (1969), 274–278

[133] **Shizuo K.**, *Nonstandard natural nummber system and nonstandard models*, J. Symbolic Logic 46 (1981), 365–376.

[134] **Shoenfield J. R.**, *Mathematical logic*, Addison-Wesley, London, 1967.

[135] **Shoenfield J. R.**, *Recursion Theory*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[136] **Sikorski R.**, *Boolean algebras*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1964.

[137] **Sochor A.**, *The alternative set theory*, u *Set theory and Hierarchy Theory*, Lecture Notes in Math. 537 (1976), 259–273.

[138] **Sochor A.**, *Diferential calculus in the alternative set theory*, u *Set Theory and Hierarchy Theory* V, Lecture notes in Math. 619 (1977), 273–284.

[139] **Stroyan K. D.**, *Infinitesimal analysis of curves and surfaces*, u *Handbook of Math. Logic* (J. Barwise, ed.), North-Holland, Amsterdam, 1977, 197–231.

[140] **Stroyan K. D.**, **J. M. Bayod**, *Foundations of infinitesimal stochastic analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[141] **Stroyan K. D.**, **W. A. J. Luxemburg**, *Introduction to the theory of infinitesimals*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1976.

[142] **Šajković R.**, *Lajbnic i opšte dobro*, Prosveta, Beograd, 1975.

[143] **Vopěnka P.**, *Mathematics in the alternative set theory*, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1979.

[144] **Vopěnka P.**, **P. Hájek**, *The theory of Semisets*, North-Holland, Amsterdam, 1972.

[145] **Vopěnka P.**, **A. Sochor**, *Revealments*, Comment. Math. Univ. Carolinae 21 (1980), 605–629.

[146] **Vopěnka P.**, **A. Sochor**, *The axiom of Reflection*, Comment. Math. Univ. Carolinae 22 (1981), 87–111.

Индекс