ТЕХНИЧКА ВЕЛИКА ШКОЛА У БЕОГРАДУ

Радосављевић Љубодраг
и Делеон Ели
студенти машинске технике

Решени проблеми
из
ТЕОРИЈЕ ОСЦИЛАЦИЈА
са изводима из теорије

(Штампано као рукопис)

Научна књига
ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД, 1950

а) ...ikins-ов и Baun-ов знак
б) Piskaček-ов знак
в) Hegar-ов знак
г) Банот...
д) Перну...
ђ) Sarwe...

ПРЕДГОВОР

Ова збирка Решених проблема из теорије осцилација написана је на потстицај наших другова и захтев Народне Омладине Машинског факултета ТВШ-е у Београду, у циљу да покуша да попуни потпуни недостатак литературе из ове области на нашем језику. Током ужурбаног рада на њеном припремању она је прешла границе које смо јој у првобитном нацрту поставили, те се, заједно са изводима из теорије, може сматрати да обухвата углавном целокупно градиво које се предаје на курсу Теорије осцилација на V семестру Машинског факултета ТВШ-е у Београду. Није нам био циљ да дамо уџбеник из ове тако обимне и важне области, пошто то прелази наше снаге и способности, већ смо се ограничили на то да извучемо из наведене литературе она поглавља, која обухвата наш наставни план и да их прикажемо у најприступачнијем облику, подвлачећи оно што има најширу примену у машинству.

Обзиром на приличне математичке и остале тешкоће које студенти имају при примени ове гране динамике на практичне проблеме, решили смо се да све задатке израдимо детаљно и са бројним вредностима. При томе смо у првом реду користили збирку И. В. Мещерскйи — Сборник задач по теоретической механике, Москва, 1947, одакле смо скоро све задатке, који припадају овој области, разрадили и решили до краја. Поред тога знатан број сложенијих примера унет је из остале литературе и допуњен извесним бројем испитних задатака.

При решавању проблема осцилација са више степена слободе користили смо углавном аналитичку методу Lagrange-евих једначина, као најпогоднију да се једном јединственом и релативно једноставном методом обухвате и најсложенији динамички проблеми. Међутим, како постоји опасност да се применом само ове методе изгуби из вида физичка суштина проблема и да у рукама почетника остане само један математички апарат, којим ће шаблонски решавати сличне примере, обрадили смо упоредо све примере и по d'Alembert-овом принципу. Чини нам се да ове две методе, иако свака за себе довољна и потпуна, дају много дубље и свестраније разумевање суштине теорије осцилација. Колико смо у свим овим настојањима успели најбоље ће оценити читаоци на чијим ћемо замеркама и сугестијама бити захвални.

Сматрамо за своју дужност да на овом месту захвалимо своме уваженом професору Ing. Јакову Хлитчијеву, чија су нам предавања много користила при писању ове књиге. Поред тога захваљујемо Ing. Милану Ђурићу, асистенту ТВШ-е, који нам је несебично помагао при обради тежих партија, као и своме наставнику Ing. Данилу Рашковићу, који је као референт књиге ставио низ корисних примедаба, које смо радо усвојили и унели у књигу. Својим друговима Мирку Пипану, Ивку Стојановићу и Храниславу Момчиловићу, студентима машинске технике, дугујемо другарску захвалност за труд који су уложили при изради слика, односно при вршењу коректура. Владимир Анђелковић и Божидар Живановић, слагачи штампарије Научне књиге, погон II, уложили су највећи напор да књиге добије што бољу техничку опрему те им најтоплије захваљујемо.

Београд, јула 1950

Љ. Радосављевић
Е. Делеон

САДРЖАЈ

Први део

Други део

Литература

Предавања Проф. Ing. J. Хлитчијева из Теорије осцилација — држана на Машинском факултету ТВШ-е у Београду зимског семестра школске 1948/49 године.

S. P. Timoshenko — Vibration Problems in Engineering, D. van Norstrand, New York, 1947
Иста књига постоји у француском, немачком и руском преводу:

S. Timoshenko — Théorie des vibrations a l'usage des ingénieurs, Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liége, 1947

S. Timoshenko — Schwingungsprobleme der Technik, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1932

С. П. Тимошенко — Теория колебаний в инженерном деле, Гостехтеоретиздат, Ленинград, 1932

Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье — Курс теоретической механики, часть вторая: Динамика; Огиз-Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1948

Дж. П. Ден Гартог — Теория колебаний, перевод со второго американского издания А. Н. Обморшева, Огиз-Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1942

Otto Föppl — Grundzüge der Technischen Schwingungslehre, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1931

Klotter Karl — Einführung in die technische Schwingungslehre, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1939

Dr. Wilhelm Hort — Technische Schwingungslehre, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1910

А. И. Некрасов — Курс теоретической механики, том второй: Динамика, Огиз-Гостехиздат, Москва-Ленинград 1946

Машиностроение — енциклопедический справочник, Том 1, книга вторая, Машгиз, Москва, 1947

Машиностроение — енциклопедический справочник, Том 14, Машгиз, Москва 1946

Карман Т. и Био М. — Математические методы в инженерном деле, пер. с англ. М. Г. Шестопал, Огиз-Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1946

И. В. Ананьев — Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем, Огиз-Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1946

И. И. Яновский — Конструирование и расчет на прочность деталей паровых турбин, А. Н. С. С. С. Р. Москва 1947

Predavanja iz Teorijske mehanike, II dio: Dinamika, (превод с руског: Е. Л. Николаи: Теоретическая механика), Zagreb 1948

И. В. Мещерский — Сборник задач по теоретической механике, Огиз-Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1947

Н. Н. Бухгольц, И. М. Воронков и А. П. Минаков — Сборник задач по теоретической механике, Огиз-Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1949

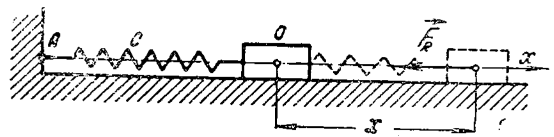
Проф Н. И. Безухов — Динамика сооружений в примерах и задачах, Стройиздат, Москва, 1947

ПРВИ ДЕО

ОСЦИЛАЦИЈЕ СА ЈЕДНИМ СТЕПЕНОМ СЛОБОДЕ

Еластични системи (греда, опруга итд.) могу, уопште узевши, да осцилују на различите начине. Положај тих система одређује се са више величина — координата. У најпростијем случају кад је положај система одређен само једном координатом имамо систем са једним степеном слободе.

1. СЛОБОДНЕ ХАРМОНИСКЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ



Сл. 1

Ако материјалну тачку масе m, која се налази на идеално глаткој површини и која је причвршћена у тачки A опругом крутости c, изведемо из равнотежног положаја за дужину x, онда ће на њу, ако занемаримо масу саме опруге, деловати две силе

инерцијална $$\vec{F}_i = (-m\vec{a})$$

и реституциона $$\vec{F}_R = -c\vec{x},$$ која је по Hooke-овом закону сразмерна издужењу опруге.

Како по d'Alembert-овом принципу ове силе морају бити у равнотежи

$$\vec{F}_i + \vec{F}_R = (-m\vec{a}) - c\vec{x} = 0,$$

то је диференцијална једначина кретања материјалне тачке масе m

$$m\ddot{x} + cx = 0 \tag{1}$$

Крутост опруге c претставља силу потребну да издужи опругу за јединицу дужине и има димензију

$$[c] = F\,L^{-1}$$

Ако уведемо ознаку $c = mk^2$, онда диференцијална једначина (1) прелази у

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \tag{2}$$

Њено решење је

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \tag{3}$$

Као што видимо, материјална тачка вршиће слободне хармониске осцилације, чији је период

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{G}{gc}} = 2\pi \sqrt{\frac{f_{ст}}{g}} = 2\pi \sqrt{m\delta} \tag{4}$$

где је

$G\,[F]$ тежина материјалне тачке,

$f_{ст}\,[L]$ статичко издужење опруге,

$\delta\ [F^{-1}\,L]$ издужење опруге под утицајем јединичне силе,

$k\ ]T^{-1}]$ кружна или циклична фреквенција.

Период осцилација T је *изохрон*, тј. не зависи од почетних услова.

Кружна или *циклична фреквенција* претставља број циклуса-пуних осцилација у 2π јединица времена

$$k = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{G}} = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}} = \frac{1}{\sqrt{m\delta}} \tag{5}$$

Реципрочна вредност периода T назива се *фреквенцијом* или *учестаношћу* и претставља број пуних осцилација у јединици времена

$$f = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi} \tag{6}$$

и има димензију

$$[f] = T^{-1}$$

Према томе је

$$k = 2\pi f \tag{7}$$

За техничку праксу од великог је значаја да се одреди број осцилација у минуту

$$n = \frac{60k}{2\pi} = 30 \sqrt{\frac{g}{\pi^2}}\ \frac{1}{\sqrt{f_{ст}}}$$

Како је
$$\sqrt{\frac{g}{\pi^2}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{9{,}87}} = 0{,}997 = 1 - 0{,}003$$

то приближан образац за одређивање броја осцилација у минуту биће

$$\left.\begin{aligned} n &\approx \frac{30}{\sqrt{f_{ст}}}, \text{ ако је } f_{ст} \text{ дато у метрима,} \\ n &\approx \frac{300}{\sqrt{f_{ст}}}, \text{ ако је } f_{ст} \text{ дато у сантиметрима,} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

са грешком од $0{,}3\%$.

Константе C_1 и C_2 у једначини (3) одређујемо из почетних услова.

Тако ако је за $t = 0$ $\quad x = x_0$, $\quad \dot{x} = \dot{x}_0$

онда су константе

$$C_1 = x_0 \qquad \text{и} \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}$$

па једначина (3) прелази у

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt \tag{9}$$

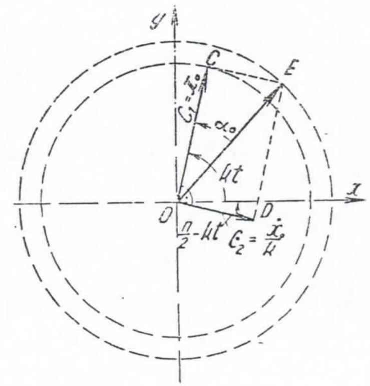
Као што се из једначина (3) и (9) види осцилације материјалне тачке масе m, једнаке су збиру двеју осцилација једнаких кружних фреквенција, а различитих *фаза*. Често је потребно да се ове осцилације сложе у једну. То слагање може се извести геометриски и математичким сменама. Показаћемо и једно и друго.

Посматрајмо вектор $\overrightarrow{OC}$ интензитета $C_1 = x_0$, који се обрће угаоном брзином $\omega = kt$ око тачке O. Његова пројекција на x-осу је

$$x_0 \cos kt.$$

Узмимо сада други вектор $\overrightarrow{OD}$ управан на првом, интензитета

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k},$$



Сл. 2.

који се обрће око тачке O истом угаоном брзином. Његова пројекција на x-осу је

$$\frac{\dot{x}_0}{k} \cos\left(\frac{\pi}{2} - kt\right) = \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt.$$

Међутим, обртање ова два вектора можемо заменити обртањем вектора $\overrightarrow{OE}$ истом угаоном брзином ω, а који је једнак векторском збиру прва два вектора $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Његов интензитет је

$$OE = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}$$

а пројекција на x-осу биће

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \cos(kt - \alpha_0).$$

Као што се из овога види слободне хармониске осцилације материјалне тачке масе m, можемо претставити или обртањем два вектора $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$, када је удаљење x материјалне тачке од равнотежног положаја једнако збиру пројекција ових вектора на x-осу

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt,$$

или обртањем вектора $\overrightarrow{OE}$, када је то удаљење једнако његовој пројекцији на x-осу

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \cos(kt - \alpha_0) = a \cos(kt - \alpha_0) \tag{10}$$

Величина

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \tag{11}$$

назива се *амплитудом* слободних хармониских осцилација и претставља највеће удаљење материјалне тачке од равнотежног положаја.

Њена димензија је

$$[a] = L$$

Угао α_0 је *фазна разлика, фазни угао* или *фаза*. Он је одређен изразом

$$tg\alpha_0 = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\dot{x}_0}{kx_0}$$

односно

$$\alpha_0 = \text{arc } tg \frac{C_2}{C_1} = \text{arc } tg \frac{\dot{x}_0}{kx_0} \tag{12}$$

Ово слагање осцилација можемо извести и чисто математичким сменама, ако ставимо да је

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= x_0 = a \cos \alpha_0 \\ C_2 &= \frac{\dot{x}_0}{k} = a \sin \alpha_0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Одавде је опет

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k_0^2}}$$

$$tg\alpha_0 = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\dot{x}_0}{kx_0}$$

Кад изразе (13) сменимо у једначину (3) добићемо

$$x = a \cos \alpha_0 \cos kt + a \sin \alpha_0 \sin kt \quad \text{тј.}$$

$$x = a \cos(kt - \alpha_0),$$

односно исто што смо добили и мало пре.

Ако бисмо пак увели смене

$$C_1 = x_0 = a \sin \alpha_0$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} = a \cos \alpha_0$$

онда би било $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}$ и

$$tg\,\alpha_0 = \frac{C_1}{C_2} = \frac{kx_0}{\dot{x}_0},$$

а

$$x = a \sin(kt + \alpha_0).$$

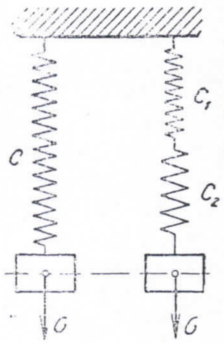
Геометриски то значи да посматрамо пројекције малопређашњих вектора, не на осу Ox, већ на осу на осу Oy.

Примери

1.) Одредити еквивалентну крутост отруге c kg/cm за систем опруга састављен из две на ред везане опруге, чије су крутости c_1 и c_2, и наћи период осцилација терета G обешеног о такав систем опруга.

Знамо да је по Hooke-овом закону

$$G = x\,c$$



Сл. 3

Под утицајем терета G, лева опруга крутости c издужиће се за x cm.

Исто тако под истим теретом опруга крутости c_1 издужиће се за x_1 cm, а опруга крутости c_2 за x_2 cm.

Пошто су опруге еквивалентне, мора бити

$$x = x_1 + x_2$$

Како је $G = c_1 x_1$ и $G = c_2 x_2$ то је

$$G = c\,(x_1 + x_2) = G\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) c$$

Одавде је $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$, па је $c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{G}{cg}} = 2\pi \sqrt{\frac{G\,(c_1 + c_2)}{g\,c_1\,c_2}}$$

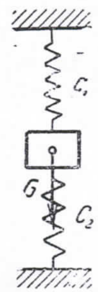
2.) Одредити период слободних осилација терета G разапетог између две опруге различитих крутости.

Диференцијална једначина кретања терета G је

$$m\ddot{x} + c_1\,x + c_2\,x = m\ddot{x} + (c_1 + c_2)\,x = O$$

$$k^2 = \frac{c_1 + c_2}{m} = \frac{g\,(c_1 + c_2)}{G}$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{G}{g\,(c_1 + c_2)}}$$



Сл. 4

3.) Одредити период слободних осцилација терета G обешеног о две паралелно постављене опруге и наћи крутост опруге еквивалентне датом систему опруга, ако је терет постављен тако да су издужења обеју опруга, чије су крутости c_1 и c_2, једнака.

Терет се дели на обе опруге

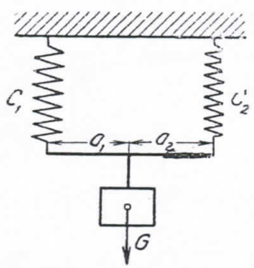
$$G = G_1 + G_2$$

Знамо да је

$$G_1 = c_1\,x_1$$

$$G_2 = c_2\,x_2$$

$$G = cx$$



Сл. 5

По услову задатка је $x = x_1 = x_2$

па је $cx = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 = (c_1 + c_2)\,x$

Одавде је $c = c_1 + c_2$ и

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{G}{cg}} = 2\pi \sqrt{\frac{G}{g(c_1 + c_2)}}$$

Положај тега је такав да је $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_2}{c_1}$

4.) Одредити крутост опруге c еквивалентне систему опруга на слици 6.

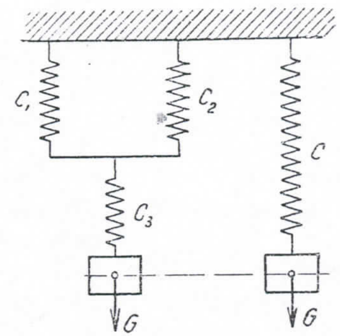
Еквивалентна крутост c' опруге, за опруге чије су крутости c_1 и c_2 према задатку *3)* је

$$c' = c_1 + c_2\,,$$

а еквивалентна крутост c опруге, за опруге чије су крутости c' и c_3 према задатку *1)* је

$$c = \frac{c'\,c_3}{c' + c_3}$$

па је $c = \frac{c_3\,(c_1 + c_2)}{c_1 + c_2 + c_3}$



Сл. 6

5.) Одредити однос периода сопствених осцилација терета G који је први пут обешен о опруге као у задатку *1)*, а други пут као у задатку *2)*, под условом да је $c_1 = c_2 = c$.

На основу обрасца (4) је $T = 2\pi \sqrt{\frac{f_{ст}}{g}}$

па је

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{f_{1\,ст}}{f_{2\,ст}}}$$

У првом случају статичко издужење $f_{1\,ст}$ једнако је збиру статичких издужења прве и друге опруге

$$f_{1ст} = \frac{G}{c_1} + \frac{G}{c_2} = \frac{2G}{c}$$

У другом случају је

$$f_{2ст} = \frac{G_1}{c_1} = \frac{G_2}{c_2}$$

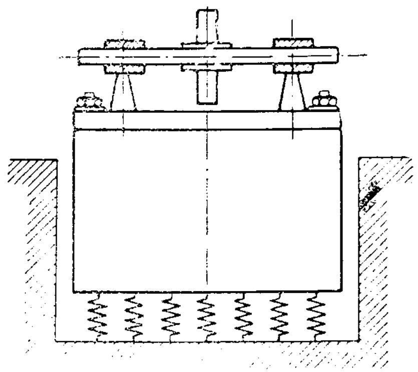
Како је $G = G_1 + G_2$ то је

$$f_{2ст} = \frac{G}{c_1 + c_2} = \frac{G}{2c} \qquad \text{онда је} \qquad \frac{T_1}{T_2} = 2$$

6) Одредити период слободних осцилација фундамента машине, који је постављен на еластичну подлогу, ако је тежина фундамента заједно са машином $G = 90\,t$, површина основе фундамента $A = 15$ m² и крутост подлоге $c = C_z A$, где је $C_z = 3$ kg/cm³ крутост еластичног неравномерног сабијања земљишта.

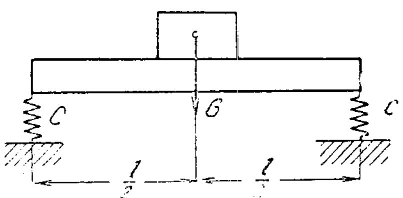
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{G}{cg}} = 2\pi\sqrt{\frac{G}{C_z A g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{90 \cdot 10^3}{3 \cdot 15 \cdot 10^4 \cdot 981}} \approx 0{,}09 \text{ sec.}$$



Сл. 7

7.) Греда чији је моменат инерције попречног пресека $I = 180$ cm⁴, а дужина $l = 4$ m, постављена је на две опруге истих крутости $c = 150$ kg/cm. У средини греде постављен је терет $G = 200$ kg. Занемарујући тежину греде одредити период слободних осцилација система. Модул еластичности материјала греде је $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm².



Сл. 8

Статички угиб греде под теретом G је

$$f_{ст} = \frac{Gl^3}{48\,EI}$$

па је крутост греде

$$c' = \frac{48\,EI}{l^3}$$

$$c' = \frac{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 180}{400^3} = 270 \text{ kg/cm.}$$

Према томе еквивалентна крутост за цео систем према задатку 4) биће

$$c_0 = \frac{2cc'}{c' + 2c} = \frac{2 \cdot 150 \cdot 270}{270 + 2 \cdot 150} \approx 142 \text{ kg/cm}$$

$$k^2 = \frac{c_0 g}{G} = \frac{142 \cdot 981}{200} = 696{,}5 \text{ sec}^{-2} \qquad k \approx 26{,}39 \text{ sec}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{6{,}28}{26{,}39} \approx 0{,}238 \text{ sec.}$$

8.) При равномерном спуштању терета $G = 2\,t$ брзином $v = 5$ m/sec. дошло је до наглог кочења горњег краја ужета помоћу кога се спушта терет, услед тога што се уже заглавило на добошу. Занемарујући тежину ужета одредити највећу силу истезања у ужету при осцилацијама терета. Крутост ужета је $c = 4\,t$/cm.

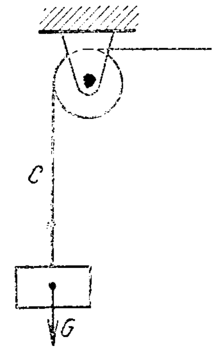
Највећа сила која истеже уже равна је збиру тежине терета и највеће реституционе силе у ужету

$$F_{max} = G + F$$

Највећа реституциона сила у ужету биће у тренутку када издужење ужета буде равно амплитуди осцилација насталих услед његовог заглављивања

$$F = c \cdot a = c\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \qquad \begin{aligned} x_0 &= 0 \\ \dot{x}_0 &= 5 \text{ m/sec} \end{aligned}$$

$$F = \frac{c\dot{x}_0}{k}$$



Сл. 9

Пошто је $$k = \sqrt{\frac{cg}{G}}$$

то је $$F = c\dot{x}_0\sqrt{\frac{G}{cg}} = \dot{x}_0\sqrt{\frac{Gc}{g}}$$

па је $$F_{max} = \dot{x}_0\sqrt{\frac{Gc}{g}} + G$$

$$F_{max} = 5 \cdot 10^2\sqrt{\frac{2 \cdot 4}{981}} + 2 = 45{,}1 + 2 = 47{,}1 \text{ t}$$

9.) Одредити највеће затезање у ужету из прошлог примера ако се између терета и ужета укључи опруга крутости c_1=0,4 t/cm

Знамо да је $$F_{max} = F + G$$

и $$F = \dot{x}_0\sqrt{\frac{Gc}{g}} \qquad \text{сада је} \qquad c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \qquad \text{па је}$$

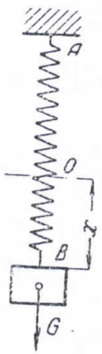
$$F_{max} = \dot{x}_0\sqrt{\frac{G c_1 c_2}{g(c_1 + c_2)}} + G$$

$$F_{max} = 5 \cdot 10^2\sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 0{,}4}{981(4 + 0{,}4)}} + 2 = 13{,}6 + 2 = 15{,}6 \text{ t.}$$

10) Опруга AB везана једним крајем у тачки A је таквих особина, да треба деловати у тачки B статичким оптерећењем од 20 gr. да би се опруга издужила за 1 cm. У неком тренутку обешен је терет тежине 100 gr. у тачки B неистегнуте опруге и затим пуштен без почетне брзине. Занемарујући масу опруге наћи једначину даљег кретања терета, амплитуду и период његових осцилација и то за следећа два случаја:

a.) кад за координатни почетак у односу на који постављамо диференцијалну једначину кретања узимамо тачку *0*, кад је опруга у ненапрегнутом стању (терет није обешен о опругу),

b.) кад за координатни почетак узимамо тачку *0'* (тачку статичке равнотеже), кад је опруга под утицајем терета издужена за величину статичког издужења $f_{ст}$.



Сл. 10

У првом случају диференцијална једначина кретања је

$$(-m\ddot{x}) - cx + G = 0\ ,$$

односно

$$m\ddot{x} + cx = G\,.$$

А почетни услови кретања су

$$\text{за} \quad t=0 \qquad x=0 \qquad \dot{x}=0$$

Решење горње диференцијалне једначине кретања је

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{G}{c}\,,$$

а произвољне константе су $\quad C_1 = -\frac{G}{c} \quad$ и $\quad C_2 = 0$

па је

$$x = \frac{G}{c}\left(1 - \cos kt\right) \text{cm.}$$

Како је

$$\frac{G}{c} = \frac{100}{20} = 5\ \text{cm.} \qquad k = \sqrt{\frac{cg}{G}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 981}{100}} \approx 14\ \text{sec}^{-1}$$

то је

$$x = 5\,(1 - \cos 14\,t)\ \text{cm.}$$

У другом случају диференцијална једначина кретања је

$$(-m\ddot{x}) - F_R + G = 0$$

У овом случају реституциона сила је

$$F_R = c\,(x + f_{ст})$$

па је диференцијална једначина кретања

$$m\ddot{x} + c\,(x + f_{ст}) = G \qquad \text{како је} \quad G = c \cdot f_{ст}.$$

ова једначина прелази у

$$m\ddot{x} + cx = 0\,,$$

а њено решење је $\qquad x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$

Почетни услови кретања су

$$\text{за} \qquad t = 0 \qquad x = -f_{ст}.$$

$$\dot{x} = 0$$

па су произвољне константе

$$C_1 = -f_{ст} = -\frac{G}{c} \quad \text{и} \quad C_2 = 0$$

па је

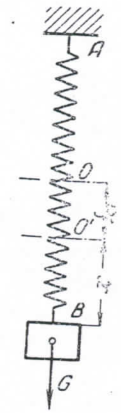
$$x = -f_{ст} \cos kt = -\frac{G}{c} \cos kt$$

односно

$$x = -5 \cos 14\,t\ \text{cm.}$$

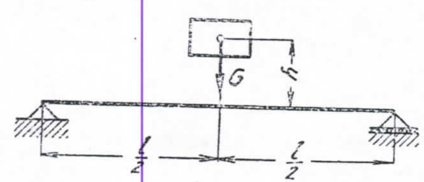
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{G}{cg}} = 2\pi \sqrt{\frac{100}{20 \cdot 981}} \approx \frac{2\pi}{14} \approx 0{,}45\ \text{sec.}$$

$$a = \frac{G}{c} = \frac{100}{20} = 5\ \text{cm.}$$



Сл. 11

11.) Терет G падајући са висине $h = 1$ m. без почетне брзине удара на средину еластичне хоризонталне греде, која је слободно ослоњена на два ослонца. Одредити једначину даљег кретања терета на греди у односу на осовину постављену вертикално наниже из положаја статичке равнотеже терета на греди. Статички угиб на средини греде при датом оптерећењу износи 0,5 cm. Масу греде занемарити.



Сл. 12

Пошто делују само инерцијална и реституциона сила, диференцијална једначина кретања је

$$m\ddot{x} + cx = 0,$$

а њено решење за почетне услове

$$t = 0 \qquad x = x_0 \qquad \dot{x} = \dot{x}_0$$

као што знамо је

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$$

Крутост греде биће

$$G = c\,f_{ст} = 0{,}5\ c \qquad c = 2G\ \text{kg/cm}$$

$$C_1 = x_0 = -f_{ст} = -0{,}5$$

Брзину $\dot{x}_0$ добићемо из услова

$$Gh = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} \qquad \text{одавде је} \qquad \dot{x}_0 = \sqrt{2gh}$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} = \sqrt{h} = 10$$

$$k = \sqrt{\frac{cg}{G}} = \sqrt{2g} \approx 44{,}3 \text{ sec}^{-1}$$

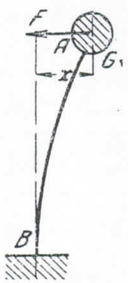
Према томе је

$$x = (-0{,}5 \cos 44{,}3\,t + 10 \sin 44{,}3\,t) \text{ cm.}$$

12.) На сваку опругу вагона делује терет од G kg. Под дејством тог терета опруга се сабије за 5 cm. Одредити период T сопствених осцилација вагона на опругама. Еластичан отпор опруга пропорционалан је угибу.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_{ст}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{5}{g}} \approx 0{,}45 \text{ sec.}$$

13.) На крају A вертикалног еластичног штапа са укљештеним доњим крајем B учвршћен је терет $G = 2{,}5$ kg. Терет ће осциловати ако штап извучемо из положаја равнотеже и затим га препустимо самом себи. Услед дејства хоризонталне силе F од 1 kg. на слободном крају штапа помера се тај крај у правцу силе за 1 cm. Одредити период T малих осцилација терета G сматрајући их праволиниским. Масу штапа занемарити.



Сл. 13

$$c = \frac{F}{x} = 0{,}1 \text{ kg/cm}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{G}{cg}} = 2\pi \sqrt{\frac{2{,}5}{0{,}1 \cdot 981}} \approx 1 \text{ sec.}$$

14.) Терет тежине G gr. обешен је у непомичној тачки о еластичан конац. Ако га изведемо вертикално наниже из положаја равнотеже он почиње да осцилује. Изразити променљиву дужину x конца у зависности од времена и одредити какав услов мора да задовољава његова почетна дужина x_0, да би за време осциловања терета конац остао стално затегнут. Напрезање у концу пропорционално је издужењу; његова дужина у нерастегнутом стању је l; под дејством статичког оптерећења од q грама, конац се истегне за 1 cm; почетна брзина терета је нула.


Сл. 14

Диференцијална једначина кретања терета G је

$$m\ddot{x} + c(x - l) = G \qquad c = q \text{ gr/cm}$$

односно

$$\ddot{x} + \frac{(x-l)\,cg}{G} = g$$

$$\ddot{x} + \frac{gq}{G}\,x = g\left(1 + \frac{lq}{G}\right)$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

$$x_2 = \frac{g\left(1 + \frac{lq}{G}\right)}{\frac{gq}{G}} = \frac{G}{q} + l$$

па је $$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{G}{q} + l$$

за $$t = 0 \qquad x = x_0 \qquad \dot{x} = 0$$

па је $$C_1 = x_0 - \frac{G}{q} - l\,; \qquad C_2 = 0$$

па је $$x = \left(\frac{G}{q} + l\right) + \left(x_0 - l - \frac{G}{q}\right) \cos kt \text{ cm.}$$

где је $$k = \sqrt{\frac{cg}{G}} = \sqrt{\frac{qg}{G}} \text{ sek}^{-1}$$

Да би конац био стално затегнут потребно је да је

$$a < f_{ст} = \frac{G}{q}$$

где је $$a = x_0 - \frac{G}{q} - l$$

амплитуда осцилација,

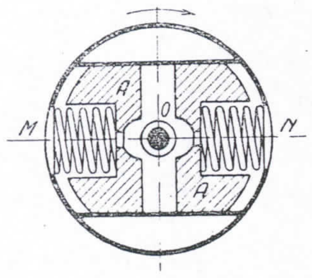
па је $$x_0 - \frac{G}{q} - l < \frac{G}{q}$$

односно $$\frac{2G}{q} + l \geqslant x_0 .$$

Како с друге стране мора бити $l \leqslant x_0$

то је $$l \leqslant x_0 \leqslant l + \frac{2G}{q}$$

15.) Регулатор система Hartung има два тега A, сваки тежине 30 kg. Тегови могу клизити по хоризонталној правој MN, а спојени су у тачкама M и N помоћу две једнаке опруге. У ненапрегнутом стању опруга налазе се њихови унутрашњи крајеви на отстојању 5 cm. од осе 0, управне на раван цртежа. Сила од 20 kg. мења дужину сваке опруге за 1 cm. Одредити период T осцилација тегова A, када се регулатор обрће око вертикалне осе 0 једнолико са 120 обрта у минуту.



Сл. 15

При обртању регулатора делују инерцијална, реституциона и центрифугална сила, па је диференцијална једначина кретања

$$m\ddot{x}+c\,(x-5)=F_c\ ; \qquad F_c=m\omega^2 x$$

па је $$\ddot{x}+\left(\frac{c}{m}-\omega^2\right)x=5\,\frac{c}{m}$$

$$\omega=\frac{\pi n}{30}=\frac{120\,\pi}{30}=4\,\pi\ \sec^{-1}$$

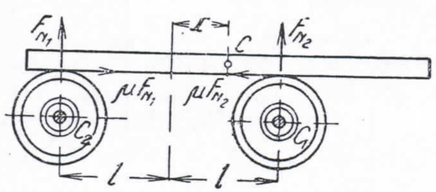
$$k^2=\frac{cg}{G}-\omega^2=\frac{20\cdot 981}{30}-16\,\pi^2\approx 496\sec^{-2}$$

$$k\approx 22{,}3\sec^{-1}\qquad T=\frac{2\,\pi}{22{,}3}=0{,}28\ \mathrm{sec.}$$

16.) Хомоген штап масе m слободно је ослоњен на два точка једнаког пречника, који се обрћу у супротним смеровима. Центри точкова C_1 и C_2 налазе се на хоризонталној правој C_1C_2. Растојање $\overline{C_1C_2}=2\,l$. Штап почиње да се креће под утицајем сила које настају у тачкама додира штапа и точкова. Те силе су пропорционалне притиску штапа на точак, при чему је коефициент трења μ.

a.) Одредити кретање штапа ако га на точкове положимо тако да је за x_0 померен према свом симетричном положају при $v_0=0$.

b.) Одредети коефициент трења μ, ако знамо да је период осцилација штапа T при $l=25$ cm. раван **2** sec.



Сл. 16

Ако је резултујућа сила која делује на штап F, онда је диференцијална једначина кретања штапа

$$m\ddot{x}+F=0$$

Из $\quad \Sigma M_c=0$

добијамо $$F_{N_1}\,(l+x)=F_{N_2}\,(l-x)$$

тј. $$(F_{N_2}-F_{N_1})\,l=Gx$$

Како је $$G=N_1+N_2$$

и $$F=(F_{N_2}-F_{N_1})\,\mu$$

то је $$F=\frac{G\mu}{l}\,x$$

па је $$m\ddot{x}+\frac{G\mu}{l}\,x=0$$

или $$\ddot{x}+\frac{g\mu}{l}\,x=0 \qquad k=\sqrt{\frac{g\,\mu}{l}}\,\sec^{-1}$$

Знамо да је $$x=x_0\cos kt+\frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt$$

Како је $$\dot{x}_0=0,$$

то је $$x=x_0\cos\sqrt{\frac{g\mu}{l}}\,t\ \mathrm{cm.}$$

Период осциловања је

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g\mu}}$$

одакле је $$\mu=\frac{4\pi^2 l}{gT^2}=\frac{4\cdot 9{,}87\cdot 25}{981\cdot 4}\approx 0{,}25$$

17.) Терет M обешен опругом у непомичној тачки A изводи мале хармониске осцилације у вертикалној равни клизећи без трења по обиму круга пречника $\overline{AB}=l$. Дужина опруге у ненапрегнутом стању је d. Крутост опруге је таква да се при дејству силе равној тежини терета M издужи за дужину b.

Одредити период осцилација T у том случају кад је $l=d+b$. Масу опруге занемарити претпостављајући да при осцилацијама опруга остаје увек затегнута.

Основна диференцијална једначина кретања за правац тангенте је

$$m\cdot\frac{dv}{dt}=-F_T+F'_T$$

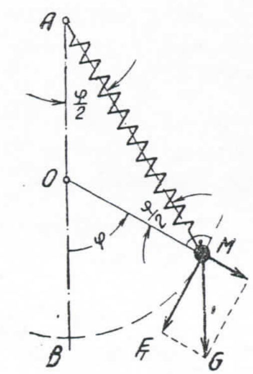
где је F'_T пројекција реституционе силе у опрузи на тангенцијални правац

$$F'=cx$$

$$x=b$$

па је $$c=\frac{G}{b}$$

односно $$F'=G$$



Сл. 17

$$F'_T=F'\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=G\sin\frac{\varphi}{2}\ ; \qquad F_T=G\sin\varphi$$

$$\frac{dv}{dt} = \ddot{s} = \frac{l}{2}\ddot{\varphi}$$

$$\frac{G}{g}\, l\, \frac{\ddot{\varphi}}{2} = -\,G \sin\varphi + G \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$$

па је
$$\frac{l}{2g}\,\ddot{\varphi} = -\,\varphi + \frac{\varphi}{2}$$

односно
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\,\varphi = 0$$

па је
$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

18.) Статички угиб опруга натовареног вагона $f_{ст} = 5$ cm. Одредити критичну брзину кретања вагона при којој он почиње да „галопира". На саставцима шина на вагон делују удари који изазивају принудну осцилацију вагона на опругама. Дужина шина $l = 12$ m.

$$k = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}} = \sqrt{\frac{981}{5}} \approx 14\ \mathrm{sec}^{-1} \qquad T = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{7}\ \mathrm{sec}$$

$$l = v \cdot T$$

$$v = \frac{l}{T} = \frac{12 \cdot 7}{\pi} = \frac{84}{\pi}\ \mathrm{m/sec.}$$

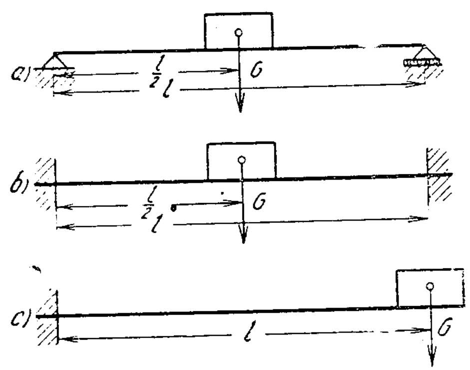
$$v \approx 96\ \mathrm{km/h}$$

19.) Дата је греда распона l, чији је момент инерције попречног пресека I, а модул еластичности материјала греде E. Одредити број осцилација греде у минуту, ако на греду ставимо терет G у следећим случајевима:

a.) оба краја греде су слободно ослоњене, а терет је на средини,

b.) оба краја греде су укљештена, а терет је на средини,

c.) један крај греде је укљештен, други јој је слободан и на њему се налази терет.



Сл. 18

Ако све дужине узмемо у метрима онда је

$$n \approx \frac{30}{\sqrt{f_{ст}}}$$

a.) па је $\quad f_{ст} = \dfrac{1}{48}\dfrac{Gl^3}{EI} \qquad n \approx 308\sqrt{\dfrac{EI}{Gl^3}}$ осц./min.

b.) $\quad f_{ст} = \dfrac{1}{192}\dfrac{Gl^3}{EI} \qquad n \approx 416\sqrt{\dfrac{EI}{Gl^3}}$ осц./min.

c.) $\quad f_{ст} = \dfrac{1}{3}\dfrac{Gl^3}{EI} \qquad n \approx 52\sqrt{\dfrac{EI}{Gl^3}}$ осц./min.

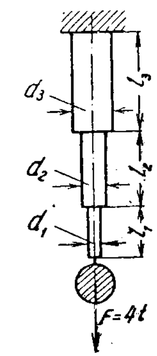
20.) Одредити број слободних уздужних осцилација у минуту штапа променљивог пресека, оптерећеног на доњем крају силом $F = 4t$. Тежину штапа занемарити. Дато је: $d_1 = 2$ cm; $d_2 = 3$ cm; $d_3 = 4$ cm; $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm²; $l_1 = 50$ cm; $l_2 = 75$ cm; $l_3 = 100$ cm.

По Hooke-овом закону је

$$f_{ст} = \frac{F}{E}\left[\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{l_3}{A_3}\right] = \frac{4F}{E\pi}\left(\frac{l_1}{d_1^2} + \frac{l_2}{d_2^2} + \frac{l_3}{d_3^2}\right)$$

$$f_{ст} = 0{,}069\ \mathrm{cm.}$$

$$n \approx \frac{300}{\sqrt{f_{ст}}} = 1142\ \text{осц./min.}$$



Сл. 19

21.) Одредити израз за кружну фреквенцију цилиндричне завојне опруге на чијем је крају обешен терет G. Масу опруге занемарити.

$$k = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}} \qquad f_{ст} = \frac{8GD^3 n}{\mathbf{G} d^4}$$

па је
$$k = \sqrt{\frac{\mathbf{G} g d^4}{8GD^3 n}}$$

где је $n =$ број завоја,
$D =$ пречник спирале,
$d =$ пречник попречног пресека опруге,
$\mathbf{G} =$ модул клизања материјала опруге.

22.) Одредити период вертикалних осцилација брода тежине $G = 21500$ t., чија је површина пливања $A = 2320$ m². Специфична тежина морске воде је $\gamma = 1{,}02$ t/m³.

Под утицајем сопствене тежине брод ће утонути у воду за дубину x. На брод делују две силе у вертикалном правцу: инерцијална
$$(-\,m\ddot{x})$$

и сила потиска, која је равна тежини морске воде која испуњава запремину утонулог дела брода

$$G = V\gamma = Ax\gamma$$

па је диференцијална једначина кретања брода у вертикалном правцу

$$m\ddot{x} + A\gamma x = 0$$

или

$$\ddot{x} + \frac{A\gamma g}{G} x = 0$$

Период вертикалних осцилација брода биће

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{G}{\gamma g A}} \approx 6 \text{ sec.}$$

Период вертикалних осцилација брода може се дати и у другом облику

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{V}{gA}} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

где је $h = \frac{V}{A}$ дубина гажења брода, а V запремина утонулог дела брода услед сопствене тежине.

23.)Руднички лифт тежине $G = 3$t. спушта се у шахт брзином $v = 3$ m/sec. Услед заглављивања горњег краја конопца лифт се нагло зауставио.

Одредити једначину даљег кретања лифта, ако је крутост ужета $c = 2{,}715$ t/cm. Масу ужета занемарити.

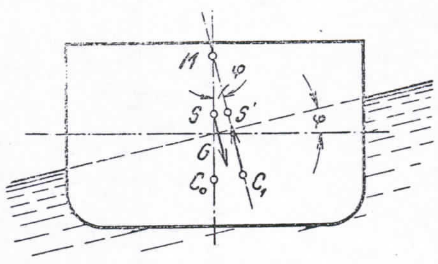
Знамо да је $$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$$

$$x_0 = 0 \qquad \dot{x}_0 = 3 \text{ m/sec.}$$

$$k^2 = \frac{cg}{G} = \frac{2{,}75 \cdot 981}{3} \approx 900 \text{ sec}^{-2} \qquad k = 30 \text{ sec}^{-1}$$

па је $$x = 0{,}1 \sin 30\,t \text{ cm.}$$

24.) Одредити израз за кружну фреквенцију осцилација брода у хоризонталном правцу (љуљање брода) чија је тежина G, а момент инерције за подужну осу око које се брод љуља J.



Сл. 20

Ако се брод нагне за угао φ, онда ће тежина брода и сила потиска, које су међу

собом једнаке, образовати спрег који ће тежити да преврне брод. Тај спрег износи

$$G \cdot \overline{SS'} = G\,h \sin\varphi \approx G\,h\,\varphi$$

где је $\overline{MS} = h$ метацентарска висина брода, а тачка M метацентар брода.

Основна динамичка једначина за обртање крутог тела око непокретне осе гласи

$$J\ddot{\varphi} = -M\ ,$$

па ће диференцијална једначина љуљања брода у овом случају бити

$$J\ddot{\varphi} + G\,h\,\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{G\,h}{J}\varphi = 0$$

Кружна фреквенција љуљања брода према томе је

$$k = \sqrt{\frac{G\,h}{J}}$$

Кружна фреквенција љуљања брода може се дати и у другом облику

$$k = \sqrt{\frac{mgh}{J}} = \sqrt{\frac{gh}{i^2}}$$

где је $$i^2 = \frac{J}{m}$$

квадрат полупречника инерције брода у погледу осе љуљања.

25.) Штап на чијим су крајевима учвршћени једнаки терети може да осцилује у вертикалној равни око осе 0. Одредити кружну фреквенцију малих слободних осцилација терета око равнотежног положаја. Масу штапа занемарити, а терете сматрати материјалним тачкама.

Знамо да је

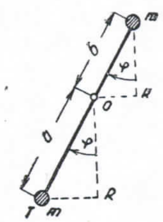
$$J\ddot{\varphi} = -M$$

$$M = mg\,\overline{TR} - mg\,\overline{0K}$$

$$\overline{0K} = b \sin\varphi$$

$$\overline{TR} = a \sin\varphi$$

$$M = mga \sin\varphi - mgb \sin\varphi$$



Сл. 21

и сила потиска, која је равна тежини морске воде која испуњава запремину утонулог дела брода

$$G = V\gamma = Ax\gamma$$

па је диференцијална једначина кретања брода у вертикалном правцу

$$m\ddot{x} + A\gamma x = 0$$

или

$$\ddot{x} + \frac{A\gamma g}{G} x = 0$$

Период вертикалних осцилација брода биће

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{G}{\gamma g A}} \approx 6 \text{ sec.}$$

Период вертикалних осцилација брода може се дати и у другом облику

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{V}{gA}} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

где је $h = \frac{V}{A}$ дубина гажења брода, а V запремина утонулог дела брода услед сопствене тежине.

23.) Руднички лифт тежине $G = 3$t. спушта се у шахт брзином $v = 3$ m/sec. Услед заглављивања горњег краја конопца лифт се нагло зауставио.

Одредити једначину даљег кретања лифта, ако је крутост ужета $c = 2{,}715$ t/cm. Масу ужета занемарити.

Знамо да је $\quad x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$

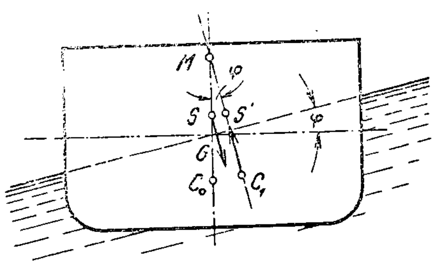
$$x_0 = 0 \qquad \dot{x}_0 = 3 \text{ m/sec.}$$

$$k^2 = \frac{cg}{G} = \frac{2{,}75 \cdot 981}{3} \approx 900 \text{ sec}^{-2} \qquad k = 30 \text{ sec}^{-1}$$

па је $\quad x = 0{,}1 \sin 30\,t$ cm.

24.) Одредити израз за кружну фреквенцију осцилација брода у хоризонталном правцу (љуљање брода) чија је тежина G, а моменат инерције за подужну осу око које се брод љуља J.

Ако се брод нагне за угао φ, онда ће тежина брода и сила потиска, које су међу



Сл. 20

собом једнаке, образовати спрег који ће тежити да преврне брод. Тај спрег износи

$$G \cdot \overline{SS'} = G\,h \sin\varphi \approx G\,h\,\varphi$$

где је $\overline{MS} = h$ метацентарска висина брода, а тачка M метацентар брода.

Основна динамичка једначина за обртање крутог тела око непокретне осе гласи

$$J\ddot{\varphi} = -M ,$$

па ће диференцијална једначина љуљања брода у овом случају бити

$$J\ddot{\varphi} + G\,h\,\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{G\,h}{J}\varphi = 0$$

Кружна фреквенција љуљања брода према томе је

$$k = \sqrt{\frac{G\,h}{J}}$$

Кружна фреквенција љуљања брода може се дати и у другом облику

$$k = \sqrt{\frac{mgh}{J}} = \sqrt{\frac{gh}{i^2}}$$

где је

$$i^2 = \frac{J}{m}$$

квадрат полупречника инерције брода у погледу осе љуљања.

25.) Штап на чијим су крајевима учвршћени једнаки терети може да осцилује у вертикалној равни око осе 0. Одредити кружну фреквенцију малих слободних осцилација терета око равнотежног положаја. Масу штапа занемарити, а терете сматрати материјалним тачкама.

Знамо да је

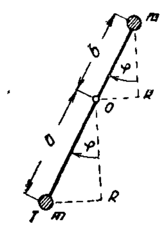
$$J\ddot{\varphi} = -M$$

$$M = mg\,\overline{TR} - mg\,\overline{0K}$$

$$\overline{0K} = b \sin\varphi$$

$$\overline{TR} = a \sin\varphi$$

$$M = mga \sin\varphi - mgb \sin\varphi$$



Сл. 21

$$J\ddot{\varphi} + mg\,(a - b)\,\sin\varphi = 0$$

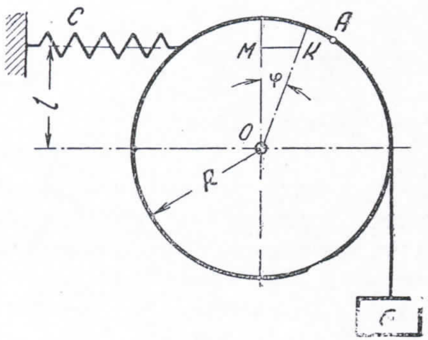
$$J = m\,(a^2 + b^2)$$

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

па је
$$\ddot{\varphi} + \frac{g\,(a-b)}{a^2 + b^2}\,\varphi = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{g\,(a-b)}{a^2+b^2}}\ \text{sek}^{-1}$$

26.) Терет G учвршћен је помоћу ужета за котур полупречника R у тачки A његове периферије. Котур се може обртати око хоризонталне тежишне осе O, а придржава га опруга крутости c на растојању l од осе која пролази кроз O. Масу котура занемарити, а терет G сматрати за материјалну тачку. Одредити период малих обртних осцилација котура услед померања терета.



Сл. 22

Када се котур услед терета G обрне за угао φ, опруга се издужи приближно за дужину

$$\overline{MK} \approx l\varphi$$

Знамо да је

$$J\ddot{\varphi} = -M$$

Сила у опрузи је

$$F = c\cdot\overline{MK} \approx cl\varphi$$

$$M = Fl - GR = cl^2\varphi - GR$$

Ако терет G сматрамо за материјалну тачку онда је

$$J = mR^2 = \frac{G}{g}R^2$$

па је
$$\frac{G}{g}R^2\ddot{\varphi} + cl^2\varphi = R$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{cl^2 g}{GR^2}\varphi = \frac{g}{R}$$

$$k^2 = \frac{cgl^2}{GR^2}$$

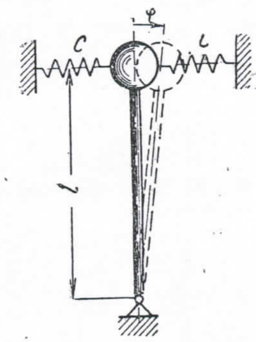
па је
$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\frac{R}{l}\sqrt{\frac{G}{cg}}$$

27.) Одредити период малих осцилација астатичког клатна које се употребљава у неким сеизмографима за регистровање осцилација тла. Клатно се састоји из крутог штапа дужине l, који носи на крају масу m подупрту са страна двема хоризонталним опругама, чије су крутости c и које су учвршћене на крајевима. Масу штапа занемарити и сматрати да су опруге у равнотежном стању ненапрегнуте.

Знамо да је

$$J\ddot{\varphi} = -M$$

$$J = ml^2$$



Сл. 23

издужење, односно скраћење опруга је

$$x = l\,\sin\varphi \approx l\varphi$$

Сила у једној опрузи је

$$F \approx cl\varphi$$

а у обе

$$F' = 2F \approx 2cl\varphi$$

$$M = F'l - Gl\sin\varphi \approx 2cl\varphi\cdot l - Gl\varphi = (2cl^2 - Gl)\varphi$$

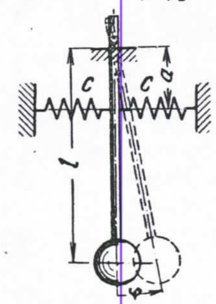
па је
$$ml^2\ddot{\varphi} + l\,(2cl - G)\,\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2cl - mg}{ml}\,\varphi = 0$$

$$k^2 = 2\frac{c}{m} - \frac{g}{l}$$

па је
$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{2\dfrac{c}{m} - \dfrac{g}{l}}}$$

28.) Клатно се састоји из крутог штапа дужине l, који носи масу m на крају. За штап су учвршћене две опруге крутости c на растојању a од горњег краја. Супротни крајеви опруга су учвршћени. Занемарујући масу штапа наћи период малих осцилација система.



Сл. 24

$$J\ddot{\varphi} = -M$$

$$J = ml^2$$

Збир сила у обе опруге је

$$F' \approx 2\,ac\varphi$$

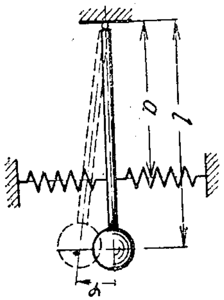
$$M = 2a^2c\varphi + Gl\sin\varphi$$

па је
$$ml^2\ddot{\varphi} + (2\,a^2c + Gl)\,\varphi = 0$$

односно
$$\ddot{\varphi}+\left(\frac{2a^2c}{ml^2}+\frac{g}{l}\right)\varphi=0$$

па је
$$T=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2ca^2}{ml^2}+\frac{g}{l}}}$$

29.) Претпостављајући да је клатно описано у претходном задатку направљено тако да је маса m постављена изнад тачке ослонца, одредити услов при коме је вертикални положај равнотеже клатна стабилан и наћи период малих осцилација клатна.



Сл. 25

У овом случају је

$$M = 2a^2c\sin\varphi - Gl\sin\varphi$$

па је
$$ml^2\ddot{\varphi}+(2a^2c-Gl)\varphi=0$$

односно
$$\ddot{\varphi}+\left(\frac{2a^2c}{ml^2}-\frac{mgl}{ml^2}\right)\varphi=0$$

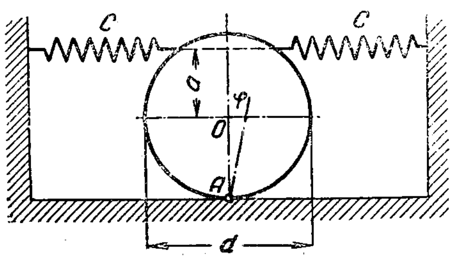
$$T=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2a^2c}{ml^2}-\frac{g}{l}}}$$

Димензије и крутост опруге одређују се из услова

$$a^2>\frac{mgl}{2c}\ ,$$

а то је у исто време услов да вертикални положај равнотеже клатна буде стабилан.

30.) Тешки апсолутно тврди цилиндар пречника d и масе m може да се котрља без клизања по хоризонталној равни. На средини његове дужине, а на растојању a од осовине, причвршћене су две једнаке опруге крутости c. Супротни крајеви опруга су учвршћени. Одредити период малих осцилација цилиндра.



Сл. 26

Знамо да је

$$J_A\ddot{\varphi}=-M$$

Кад се цилиндар обрне за угао φ око тачке A једна опруга се издужи за

$$x\approx\left(a+\frac{d}{2}\right)\varphi$$

Сила у једној опрузи је

$$F\approx c\left(a+\frac{d}{2}\right)\varphi$$

па је
$$M\approx 2c\left(a+\frac{d}{2}\right)^2\varphi$$

По Штајнеровој теореми је

$$J_A=J_0+m\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\right)^2+m\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{3}{8}md^2$$

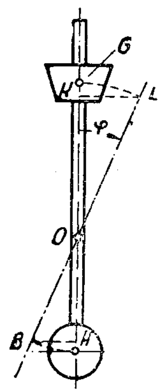
па је
$$\frac{3}{8}md^2\ddot{\varphi}+2c\left(a+\frac{d}{2}\right)^2\varphi=0$$

или
$$\ddot{\varphi}+\frac{16c\left(a+\frac{d}{2}\right)^2}{3\ md^2}\varphi=0$$

$$k^2=\frac{16c\left(a+\frac{d}{2}\right)^2}{3\ md^2}$$

$$k=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{a}{d}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{c}{m}}\qquad T=\frac{2\pi}{k}=\frac{\pi\sqrt{3}}{\left(1+\frac{2a}{d}\right)}\sqrt{\frac{m}{c}}$$

31.) Одредити период малих осцилација метронома који се састоји из клатна и додајног покретног терета G масе m. Моменат инерције целог система у односу на хоризонталну осу обртања O мења се померањем покретног терета G. Маса клатна је m_1; растојање тежишта клатна од осе обртања је s_0; растојање $OG = s$. Моменат инерције клатна у односу на осу обртања је J_0.



Сл. 27

$$J\ddot{\varphi}=-M$$

$$J=J_0+ms^2$$

$$M=m_1g\overline{BH}-G\cdot\overline{KL}$$

$$M=m_1gs_0\sin\varphi-Gs\sin\varphi$$

$$M\approx g(m_1s_0-ms)\varphi$$

па је
$$(J_0+ms^2)\ddot{\varphi}+g(m_1s_0-ms)\varphi=0$$

$$\ddot{\varphi}+\frac{(m_1s_0-ms)g}{J_0+ms^2}\varphi=0$$

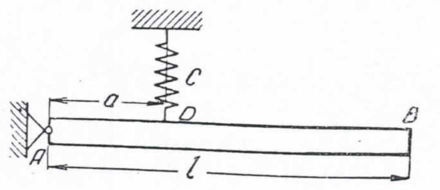
$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{J_0+ms^2}{(m_1s_0-ms)g}}$$

32.) Хомогени призматични штап AB дужине l, тежине G, зглавкасто је везан у тачки A, док га у тачки D придржава опруга крутости c. Одредити период слободних малих осцилација у вертикалној равни око равнотежног положаја. Масу опруге занемарити.

$$J\ddot{\varphi} = -M$$

$$M \approx ca^2\varphi$$

$$J = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{G}{3g}l^2$$



Сл. 28

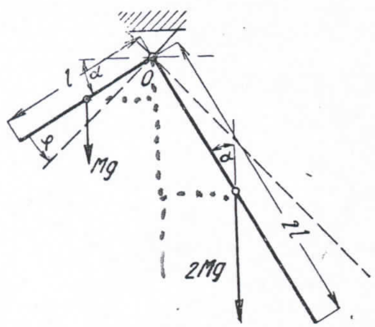
па је $\quad \frac{G}{3g}l^2\ddot{\varphi} + a^2c\varphi = 0$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{3a^2cg}{Gl^2}\varphi = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\frac{l}{a}\sqrt{\frac{G}{3gc}}$$

33.) Угаоник састављен из танких хомогених штапова дужине l и $2l$ постављених под 90^0 може да се обрће око тачке O. Одредити положај равнотеже угаоника и наћи период малих осцилација око положаја равнотеже. (Испит, јуни 1949).



Сл. 29

Угао равнотеже одредићемо из услова

$$\Sigma M_0 = mg\frac{l}{2}\cos\alpha - 2mgl\sin\alpha = 0$$

$$\frac{1}{2}\cos\alpha = 2\sin\alpha$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{4}$$

па је $\quad \alpha = arc\,tg\,\frac{1}{4}$

Знамо да је

$$J\ddot{\varphi} = -M$$

$$J = J_1 + J_2$$

$$J_1 = \frac{1}{3}ml^2$$

$$J_2 = \frac{1}{3}(2m)(2l)^2 = \frac{8}{3}ml^2 \qquad J = 3ml^2$$

$$M = 2mgl\sin(\alpha+\varphi) - mg\frac{l}{2}\cos(\alpha+\varphi)$$

па је $\quad 3ml^2\ddot{\varphi} + 2mgl\sin(\alpha+\varphi) - mg\frac{l}{2}\cos(\alpha+\varphi) = 0$

или $\quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\left[\frac{2}{3}\sin(\alpha+\varphi) - \frac{1}{6}\cos(\alpha+\varphi)\right] = 0$

како је $\quad \cos(\alpha+\varphi) \approx \cos\alpha - \varphi\sin\alpha$

$$\sin(\alpha+\varphi) \approx \sin\alpha + \varphi\cos\alpha$$

то је $\quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\left[\frac{2}{3}\cos\alpha + \frac{1}{6}\sin\alpha\right]\varphi = \frac{g}{l}\left(\frac{1}{6}\cos\alpha - \frac{2}{3}\sin\alpha\right)$

Пошто је $\quad tg\,\alpha = \frac{1}{4}$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

па је $\quad \frac{1}{6}\sin\alpha + \frac{2}{3}\cos\alpha = \frac{17}{6\sqrt{17}}$

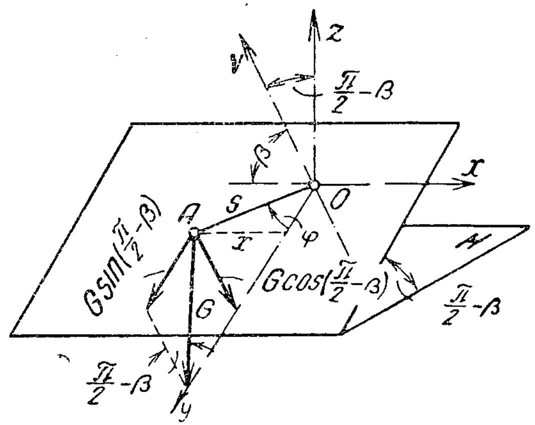
и $\quad \frac{1}{6}\cos\alpha - \frac{2}{3}\sin\alpha = 0.$

Онда је $\quad \ddot{\varphi} + \frac{17}{6\sqrt{17}}\left(\frac{g}{l}\right)\varphi = 0$

$$k^2 = \frac{17}{6\sqrt{17}}\frac{g}{l} = \frac{\sqrt{17}}{6}\frac{g}{l}$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{17}}\sqrt{\frac{l}{g}} = 7,53\sqrt{\frac{l}{g}}\,\text{sec.}$$

34.) Одредити период малих осцилација клатна тежине G чија је осовина обртања нагнута под углом β према хоризонтали. Моменат инерције клатна у односу на осу обртања је J_0, а растојање тежишта од осе обртања је s.



Сл. 30

$$J_0 \ddot{\varphi} = - M_0$$

$$M_0 = G \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) x$$

$$x = \overline{0A} \sin\varphi \approx s\,\varphi$$

$$M_0 = G \cos\beta \cdot s\,\varphi$$

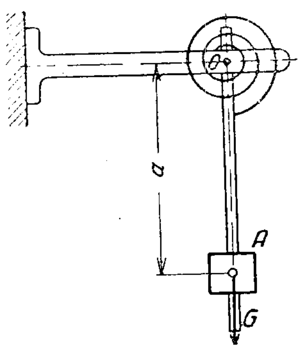
$$J_0 \ddot{\varphi} + Gs \cos\beta \cdot \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{Gs\cos\beta}{J_0}\varphi = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{Gs\cos\beta}{J_0}}\ \mathrm{sec}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{Gs\cos\beta}}\ \mathrm{sec.}$$

35.) Код Гајгеровог вибрографа за регистровање хоризонталних осцилација клатно $0A$, које се састоји од полуге и терета G, може да се обрће око хоризонталне осе 0 око вертикалног положаја стабилне равнотеже. У том положају га држи сопствени терет и спирална опруга. Ако је максимални статички моменат терета клатна $Ga = 4{,}5$ kgcm, моменат инерције у односу на осу $0\ J = 0{,}03$ kgcmsec², а крутост опруге $c = 4{,}5$ kgcm, одредити период сопствених малих осцилација.



Сл. 31

$$J\ddot{\varphi} = - M$$

$$M = c\,\varphi + Ga \sin\varphi$$

$$M \approx (c + Ga)\,\varphi$$

$$J\ddot{\varphi} + (c + Ga)\,\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{c + Ga}{J}\varphi = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{c + Ga}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}03}{4{,}5 + 4{,}5}} =$$

$$= \frac{2\pi}{10}\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}364\ \mathrm{sec.}$$

36.) Ротор постављен у хоризонталној равни обрће се угаоном брзином ω. Дуж прореза у њему клизи без трења терет масе m. Терет је везан са ротором опругом крутости c. Наћи период малих осцилација терета око положаја релативне равнотеже.

Диференцијална једначина кретања терета је

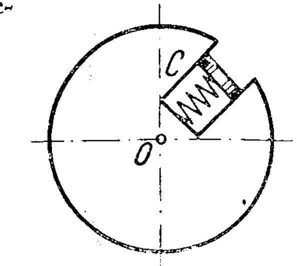
$$m\ddot{x} + cx - mx\omega^2 = 0$$

или

$$\ddot{x} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right) x = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{c - m\omega^2}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c - m\omega^2}}$$

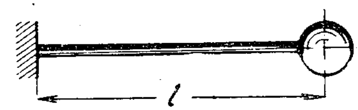


Сл. 32

37.) На крају хоризонталне конзоле дужине l налази се терет тежине G који осцилује с периодом T. Моменат инерције пресека конзоле у односу на централну осу пресека нормалну на раван осцилација је I. Одредити модул еластичности материјала конзоле.

Статички угиб на крају конзоле је

$$f_{\text{ст}} = \frac{Gl^3}{3EI}$$



Сл. 33

па је

$$c = \frac{3EI}{l^3}$$

Како је диференцијална једначина кретања терета

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

то је

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{3gEI}{Gl^3}$$

пошто је

$$T^2 k^2 = 4\pi^2$$

то је

$$T^2\,\frac{4gEI}{Gl^3} = 4\pi^2$$

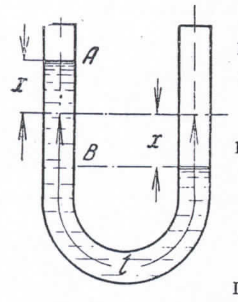
одакле је

$$E = \frac{4\pi^2\,Gl^3}{3gIT^2}$$

38.) У спојеном суду (облика као на слици 34) чији попречни пресек има површину A, налази се течност специфичне тежине γ. Услед неког узрока поремети се равнотежни положај течности у спојеном суду и течност се спусти, односно подигне за дужину x из положаја равнотеже. Одредити период осциловања течности у суду. Дата је и дужина l назначена на слици.

Сила која делује у поремећеном положају равна је тежини течности у делу AB, а она је

$$G = V\gamma = 2xA\gamma$$



Сл. 34

па је диференцијална једначина кретања течности

$$m\ddot{x} + 2Ax\gamma = 0$$

или

$$\ddot{x} + \frac{2A\gamma}{m}x = 0$$

$$m = \frac{G_1}{g} = \frac{V_1\gamma}{g} = \frac{Al\gamma}{g}$$

па је

$$\ddot{x} + 2\frac{g}{l}x = 0$$

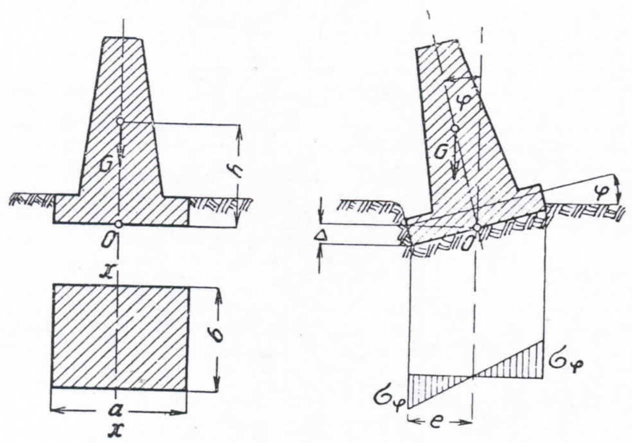
$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

Период осциловања не зависи од врсте течности.

39.) Одредити кружну фреквенцију слободних осцилација високог фабричког димњака, који лежи на еластичном земљишту. Цела конструкција може да ротира као круто тело око осе $x - x$.

Позната је тежина конструкције заједно са фундаментом — G, тежиште вертикалних сила—крак h, моменат инерције масе конструкције у односу на осу $x - x: J$, моменат инерције површине основе фундамента у односу на исту осу $x - x: I$ и коефицијент еластичног неравномерног сабијања земљишта C_φ.

Примедба: Ради мале дубине занемарујемо еластичне силе отпора темеља на боковима.



Сл. 35

Диференцијална једначина кретања је

$$J\ddot{\varphi} = -M$$

$$M \approx -Gh\varphi + \xi\varphi\,,$$

где је ξ — крутост основе, односно моменат чијим се статичким деловањем основа обрне за јединични угао. Према томе је

$$J\ddot{\varphi} + (\xi - Gh)\,\varphi = 0$$

Нађимо крутост основе ξ. Напон земљишта на удаљењу e од тежишне осовине је $\sigma = \dfrac{M}{W}$. Пошто се уводи крутост еластичног неравномерног сабијања земљишта $C_\varphi \left[\dfrac{kg}{cm^3}\right]$, који помножен угибом треба истовремено да дâ напон земљишта у некој тачки, то ћемо на следећи начин наћи везу између крутости основе темеља ξ и поменутог коефицијента C_φ.

При обртању за јединични угао је

$$\Delta = e \cdot \varphi = e \cdot 1$$

Дакле

$$\sigma_\varphi = \frac{M}{W} = \frac{M}{\dfrac{I}{e}} = \frac{M}{I}\,e = \frac{\xi e}{I} = C_\varphi\,\Delta = C_\varphi \cdot e$$

па је

$$C_\varphi = \frac{\xi}{I}$$

односно

$$\xi = C_\varphi\,I$$

Диференцијална једначина кретања прелази онда у

$$J\ddot{\varphi} + (C_\varphi I - Gh)\,\varphi = 0\,,$$

па је

$$k = \sqrt{\frac{C_\varphi I - Gh}{J}}$$

40.) Нехомогени кружни цилиндар полупречника r може да се котрља без клизања по непокретној хоризонталној равни. Растојање тежишта цилиндра од његове геометриске осе је a. Полупречник инерције цилиндра у односу на осу која пролази кроз тежиште цилиндра је i. Одредити период малих осцилација цилиндра око положаја стабилне равнотеже.

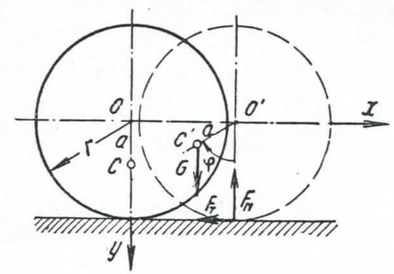
Пошто се цилиндар котрља без клизања то је

$$\overline{00'} = r\varphi$$

Координате тежишта C' цилиндра у систему Oxy су

$$x_c = r\varphi - a\sin\varphi$$

$$y_c = a\cos\varphi$$



Сл. 36

Диференцијалне једначине кретања тежишта цилиндра су

$$\frac{G}{g}\ddot{x}_c = -F_T$$

$$\frac{G}{g}\ddot{y}_c = G - F_N$$

$$J_c\ddot{\varphi} = F_T(r - a\cos\varphi) - F_N a\sin\varphi$$

Занемарујући мале величине другог реда биће

$$\ddot{y}_c \approx 0$$

$$\ddot{x}_c \approx (r-a)\ddot{\varphi} \qquad J_c = \frac{G}{g}i^2$$

Смењујући вредности за F_T и F_N из прве две једначине у последњу једначину добијамо

$$\frac{G}{g}i^2\ddot{\varphi} = -\frac{G}{g}(r-a)(r-a)\ddot{\varphi} - Ga\varphi = 0$$

односно

$$[(r-a)^2 + i^2]\ddot{\varphi} + ag\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{ag}{(r-a)^2 + i^2}\varphi = 0$$

па је

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(r-a)^2 + i^2}{ag}}$$

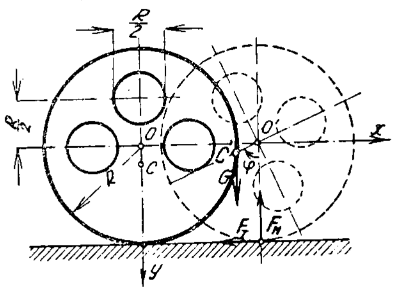
41.) Тежак хомоген диск са три рупе може да се котрља без клизања по непокретној хоризонталној рапавој равни. Одредити период малих осцилација које изводи диск ако се изведе из положаја равнотеже. Димензије диска су обележене на слици. Дато је $R = 26$ cm. (Испит, јуни 1949).

Нека је тежиште диска у тачки C тј. нека је $\overline{OC} = \overline{O'C'} = e$

Посматрајмо положај диска у тренутку када тачка O дође у тачку O'.

Пошто се диск котрља без клизања то је

$$\overline{OO'} = R\varphi$$



Сл. 37

Координате тежишта диска C' у систему Oxy биће онда

$$x_c = R\varphi - e\sin\varphi$$

$$y_c = e\cos\varphi$$

Диференцијалне једначине кретања тежишта диска према томе биће

$$\frac{G}{g}\ddot{x}_c = -F_T$$

$$\frac{G}{g}\ddot{y}_c = G - F_N$$

$$J_c\ddot{\varphi} = F_T(R - e\cos\varphi) - F_N e\sin\varphi$$

Одавде је

$$F_T = -\frac{G}{g}\ddot{x}_c$$

$$F_N = G - \frac{G}{g}\ddot{y}_c$$

па је

$$J_c\ddot{\varphi} = -\frac{G}{g}(R - e\cos\varphi)\,\ddot{x}_c - Ge\sin\varphi + \frac{G}{g}e\ddot{y}_c\sin\varphi$$

Пошто је $\sin\varphi \approx \varphi$ и $\cos\varphi \approx 1$,

биће

$$x_c \approx (R-e)\varphi$$

$$y_c \approx e$$

$$\ddot{x}_c \approx (R-e)\ddot{\varphi}$$

$$\ddot{y}_c \approx 0$$

то је

$$J_c\ddot{\varphi} = -\frac{G}{g}(R-e)(R-e)\ddot{\varphi} - Ge\varphi$$

$$\left[J_c + \frac{G}{g}(R-e)^2\right]\ddot{\varphi} + Ge\varphi = 0$$

па је

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_c g + G(R-e)^2}{Geg}}$$

Нађимо тежиште диска. Пошто је диск хомоген, његова тежина сразмерна је површини.

$$\overline{AC} = \frac{Ay_1 - 2A_1y_1 - A_1y_2}{A - 3A_1}$$

$$A = R^2\pi \qquad A_1 = \left(\frac{R}{4}\right)^2\pi = \frac{R^2\pi}{16}$$

$$y_1 = R \qquad y_2 = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

$$\overline{AC} = \frac{25}{26}R \qquad e = \overline{OC} = R - \overline{AC} = \frac{R}{26}$$

Обележимо са M масу целог диска без рупа, а са m избачену масу из једне рупе. Онда је

$$J_0 = \frac{1}{2} MR^2 - 3\left[\frac{1}{2} m \left(\frac{R}{4}\right)^2 + m\,\frac{R^2}{4}\right]$$

$$\frac{M}{m} = \frac{A}{A_1} = 16$$

па је $$m = \frac{M}{16}$$

Сменом добијамо

$$J_0 = MR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2\cdot 16\cdot 16} - \frac{3}{4\cdot 16}\right) = \frac{229}{572} MR^2$$

$$J_c = J_0 - M_1 e^2,$$

где је $$M_1 = M - 3\,m = \frac{13}{16} M; \qquad G = M_1 g = \frac{13}{16} Mg$$

$$J_c = MR^2\left(\frac{229}{572} - \frac{13}{16\cdot 26^2}\right) = \frac{2969}{6656} MR^2$$

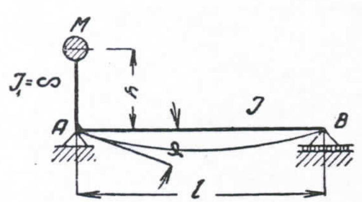
$$J_c \approx 0{,}446\, MR^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}446\, MR^2 g + \frac{13}{16} Mg\left(R - \frac{R}{26}\right)^2}{\frac{13}{16} Mg \frac{R}{26} g}} = 2\pi \sqrt{\frac{(0{,}446 + 0{,}75)\,R}{0{,}031\, g}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{39{,}6 R}{981}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{1{,}05} = 6{,}45 \text{ sec.}$$

42.) На левом крају греде на два ослонца учвршћена је концентрисана маса M на крутом штапу ($J_1 = \infty$) висине h. Одредити кружну фреквенцију сопствених осцилација греде. Масу греде занемарити.



Сл 38

Фреквенција терета M који врши осцилације око тачке A, биће иста као и фреквенција греде.

Диференцијална једначина кретања терета M када се греда угне за угао φ биће

$$J\ddot{\varphi} + c\varphi = 0$$

односно $$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J}\varphi = 0$$

где је c моменат који изазива угао нагиба раван јединици. Из отпорности материјала знамо да је

$$\varphi = \frac{M_A\, l}{3EI}$$

где је M_A моменат на ослонцу A

односно $$M_A = \frac{3\,EI}{l}\varphi = c\,\varphi$$

т. ј. $$c = \frac{3\,EI}{l}$$

Пошто је $$J = Mh^2$$

то је $$k = \sqrt{\frac{c}{J}} = \sqrt{\frac{3\,EI}{Mlh^2}}$$

Кружну фреквенцију можемо добити служећи се и обрасцем

$$k = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}$$

где је $f_{ст}$ померање у хоризонталном правцу од силе $G = Mg$.

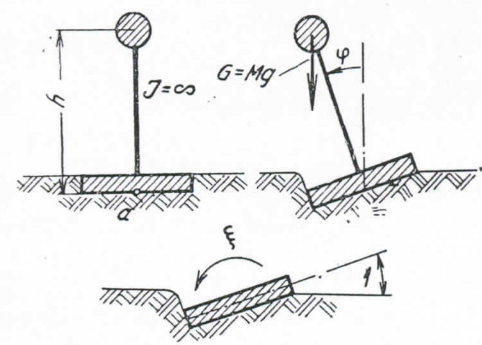
$$f_{ст} \approx \varphi h = \frac{M_A\, l}{3EI} h$$

Пошто је $$M_A = Gh = Mgh$$

то је $$f_{ст} = \frac{Mgh^2 l}{3\,EI}$$

па је $$k = \sqrt{\frac{3\,EI}{Mh^2 l}}$$

43.) На горњем крају стуба налази се концентрисана маса M. Темељ стуба може да ротира око тачке a пошто лежи на еластичној подлози. Крутост основе дата је бројем ξ, који претставља спрег који може да покрене темељ за јединични угао. (Крутост основе ξ може да се одреди ако је дата крутост еластичног неравномерног сабијања земљишта и размере темеља — види задатак бр. 39). У поређењу са крутости основе ξ, крутост стуба мо-



Сл. 39

же се узети да је бесконачно велика. Одредити кружну фреквенцију слободних осцилација концентрисане масе.

Знамо да је

$$k = \sqrt{\frac{c}{J}}$$

где је c моменат који може да окрене цео систем за јединични угао

$$c = \xi - Gh\varphi \qquad \text{за } \varphi = 1$$

$$c = \xi - Gh$$

Пошто је $J = mh^2$

то је

$$k = \sqrt{\frac{\xi - Gh}{mh^2}}$$

44.) На терет G који виси о опрузи крутости c, у почетном тренутку времена почне да делује сила сталног интензитета F. По истеку времена τ сила престаје да делује. Одредити кретање терета по истеку времена τ.

За $0 < t < \tau$ диференцијална једначина кретања терета биће

$$m\ddot{x} + cx = F \,,$$

а њено решење је

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{F}{c}$$

За почетне услове

за

$$t = 0 \qquad x = 0$$

$$\dot{x} = 0$$

биће

$$C_1 = -\frac{F}{c} \;; \qquad C_2 = 0$$

па је

$$x = \frac{F}{c}(1 - \cos kt)$$

где је

$$k = \sqrt{\frac{cg}{G}}$$

За $\tau \leqslant t$ диференцијална једначина кретања терета је

$$m\ddot{x}_1 + cx_1 = 0 \,,$$

а њено решење је

$$x_1 = C_1' \cos kt + C_2' \sin kt$$

Произвољне константе одредићемо из услова

за $t = \tau$

$$x_1 = x = \frac{F}{c}(1 - \cos k\tau) = C_1' \cos k\tau + C_2' \sin k\tau$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = \frac{F}{c} k \sin k\tau = -C_1' k \sin k\tau + C_2' k \cos k\tau$$

Одавде је

$$C_1' = C_2' \operatorname{ctg} k\tau - \frac{F}{c}$$

односно

$$C_2' = \frac{F}{c} \sin k\tau$$

и

$$C_1' = \frac{F}{c}(\cos k\tau - 1)$$

па је

$$x_1 = \frac{F}{c}\Big[\cos kt\,(\cos k\tau - 1) + \sin kt \sin k\tau\Big]$$

или

$$x_1 = \frac{F}{c}\Big[\cos k\,(t - \tau) - \cos kt\Big]$$

$$x_1 = \frac{F}{c}\left[\cos\sqrt{\frac{cg}{G}}(t - \tau) - \cos\sqrt{\frac{cg}{G}}\,t\right]$$

45.) Одредити максимално удаљење од равнотежног положаја система описаног у прошлом задатку у случају различитог времена трајања дејства силе:

a.) $\tau = 0$; $\qquad \lim\limits_{\tau \to 0} F\tau = S$ (удар по систему)

b.) $\tau = \dfrac{T}{4}$

c.) $\tau = \dfrac{T}{2}$

где је T период слободних осцилација система.

a.) $\tau = 0 \qquad \lim\limits_{\tau \to 0} F\tau = S$

$$\lim_{\tau \to 0} x = \lim_{\tau \to 0} \frac{F\tau}{c\tau}\Big[\cos k\,(t - \tau) - \cos kt\Big] =$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{S}{c\tau}\Big[\cos k\,(t - \tau) - \cos kt\Big] = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{\tau \to 0} x = \frac{Sk \sin k\,(t - \tau)}{c} = \frac{Sk}{c} \sin k\,(t - \tau)$$

за $\tau = 0$

$$x = \frac{Sk}{c}\sin kt$$

$$x_{max} = \frac{Sk}{c} = \frac{S}{c}\sqrt{\frac{cg}{P}} = S\sqrt{\frac{g}{Pc}}$$

b.) $\qquad \tau = \frac{T}{4} \qquad T = \frac{2\pi}{k}$

па је $\qquad \tau = \frac{\pi}{2k}$

$$x = \frac{F}{c}\left[\cos\left(kt - \frac{\pi}{2}\right) - \cos kt\right] = \frac{F}{c}(\sin kt - \cos kt)$$

Максималну вредност амплитуде имаћемо за

$$\sin kt - \cos kt = 1$$

$$x_{max} = \frac{F}{c} = f_{ст}$$

c.) $\qquad \tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{k}$

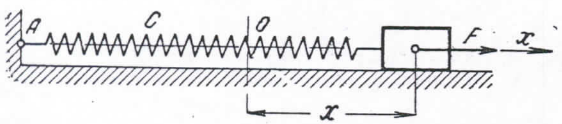
$$x = \frac{F}{c}\left[\sin(kt - \pi) - \cos kt\right]$$

$$x = -2\frac{F}{c}\cos kt$$

$$x_{max} = 2\frac{F}{c} = 2f_{ст}$$

46.) Маса m која се налази на идеално глаткој површини причвршћена је опругом крутости c за зид у тачки A и почиње да се креће под утицајем силе F константне величине. Сила делује на масу за време кретања од положаја у коме је опруга ненапрегнута (тачка 0) па све док се она креће у позитивном смеру x-осе, када сила F престаје да делује. Маса се затим креће слободно (улево прелази тачку 0, достиже амплитуду с леве стране, па затим опет удесно) све док не дође поново у тачку 0, када на њу опет почиње да делује сила F за време кретања масе у позитивном смеру x-осе.

Одредити кретање за време док на масу m по други пут делује сила F (испит, фебруар 1949).



Сл. 40

Диференцијална једначина кретања од тренутка у коме на масу m почиње да делује сила F је

$$m\ddot{x} + cx = F$$

а њено решење за почетне услове

за $\qquad t = 0 \qquad x = 0$

$\qquad\qquad \dot{x} = 0$

је $\qquad x = \frac{F}{c}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right)$

важи за $\qquad 0 < t < \frac{\pi}{k}$

Диференцијална једначина кретања масе m, по престанку деловања силе F, биће

$$m\ddot{x}_1 + cx_1 = 0 \quad ,$$

а њено решење је

$$x_1 = C_1' \cos kt + C_2' \sin kt$$

Произвољне константе одредићемо из услова

за $\qquad t = \frac{\pi}{k} \qquad x_1 = x = x_{max} = \frac{2F}{c}$

$\qquad\qquad \dot{x}_1 = \dot{x} \quad ,$

па је $\qquad C_1' = -\frac{2F}{c} \qquad C'_2 = 0 \quad ,$

односно $\qquad x_1 = -\frac{2F}{c}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t$

важи за $\qquad \frac{\pi}{k} < t < \frac{5\pi}{2k}$

Диференцијална једначина кретања од тренутка када на масу m почне поново да делује сила F биће

$$m\ddot{x}_2 + cx_2 = F \quad ,$$

а њено решење је

$$x_2 = C''_1 \cos kt + C''_2 \sin kt + \frac{F}{c}$$

Произвољне константе одредићемо из почетних услова

за $\qquad t = \frac{5\pi}{2k} \qquad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}_{1\,max}$

$\qquad\qquad x_2 = x_1 = 0 \quad ,$

па добијамо $\qquad C_1'' = -2\frac{F}{c} \qquad C_2'' = -\frac{F}{c}$

па је $$x_2 = \frac{F}{c}\left(1 - 2\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t - \sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right)$$

важи за $$\frac{5\pi}{2k} < t$$

47.) На материјалну тачку тежине G, обешену о опругу крутости c, дејствује пертурбациона сила дата условима

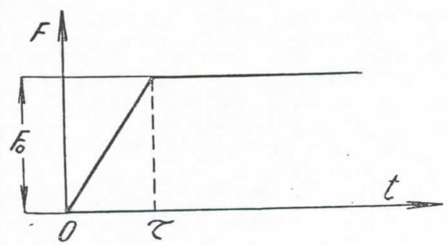
$$F = 0 \qquad \text{при } t < 0$$

$$F = \frac{t}{\tau}F_0 \qquad \text{при } 0 < t < \tau$$

$$F = F_0 \qquad \text{при } \tau < t$$

Одредити кретање тачке и наћи амплитуду осцилација при $t > \tau$.

Промена поремећајне силе дата је диаграмом на сл. 41.



Сл. 41

Диференцијална једначина кретања за

$$0 < t < \tau$$

је $$m\ddot{x} + cx = \frac{F_0}{\tau}t$$

а њено решење је $$x = C_1\cos(kt - \alpha) + \frac{F_0}{\tau}\frac{t}{c}$$

За почетне услове

за $$t = 0 \qquad x = 0 \qquad \dot{x} = 0$$

добићемо $$C_1 = -\frac{F_0}{\tau ck}$$

и $$\cos\alpha = 0 \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

па је $$x = -\frac{F_0}{k\tau c}\sin kt + \frac{F_0}{\tau}\frac{t}{c}$$

важи за $$0 < t < \tau$$

За $t > \tau$ диференцијална једначина кретања је

$$m\ddot{x}_1 + cx_1 = F_0 \quad ,$$

а њено решење је $$x_1 = C_1'\cos(kt - \alpha_1) + \frac{F_0}{c}$$

За $\quad t = \tau \quad$ мора бити $$x = x_1$$ $$\dot{x} = \dot{x}_1$$

па је $$-\frac{F_0}{k\tau c}\sin k\tau + \frac{F_0}{c} = C'_1\cos(k\tau - \alpha_1) + \frac{F_0}{c}$$

и $$\frac{F_0}{\tau c}(1 - \cos k\tau) = -C'_1 k\sin(k\tau - \alpha_1)$$

одавде је $$C'_1\cos(k\tau - \alpha_1) = -\frac{F_0}{k\tau c}\sin k\tau \tag{a}$$

$$C'_1\sin(k\tau - \alpha_1) = -\frac{F_0}{k\tau c}(1 - \cos k\tau) \tag{b}$$

Дизањем ових једначина на квадрат и сабирањем добијамо

$$C_1'^2 = \frac{F_0^2}{k^2\tau^2c^2}(\sin^2 k\tau + 1 - 2\cos k\tau + \cos^2 k\tau) = \frac{2F_0^2}{k^2\tau^2c^2}(1 - \cos k\tau)$$

Пошто је $$1 - \cos k\tau = 2\sin^2\frac{k\tau}{2}$$

то је $$C_1'^2 = \frac{4F_0^2}{k^2\tau^2c^2}\sin^2\frac{k\tau}{2}$$

па је тражена амплитуда осцилација

$$C'_1 = \frac{2F_0}{k\tau c}\sin\frac{k\tau}{2}$$

Да би одредили константу α_1 поделимо једначину (b) једначином (a). Тада добијамо

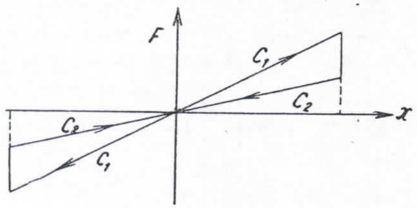
$$tg\,(k\tau - \alpha_1) = \frac{1 - \cos k\tau}{\sin k\tau} = \frac{2\sin^2\frac{k\tau}{2}}{2\sin\frac{k\tau}{2}\cos\frac{k\tau}{2}} = tg\,\frac{k\tau}{2}$$

$$k\tau - \alpha_1 = \frac{k\tau}{2}; \qquad \alpha_1 = \frac{k\tau}{2}$$

па је $$x = C_1'\cos(kt - \alpha_1) + \frac{F_0}{c} = \frac{2F_0}{k\tau c}\sin\frac{k\tau}{2}\cos\left(kt - \frac{k\tau}{2}\right) + \frac{F_0}{c}$$

односно $$x = \frac{F_0}{c}\left[1 + \frac{2}{k\tau}\cos k\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\sin\frac{k\tau}{2}\right]$$

48.) При испитивању железничких опруга добијена је „троугаона“ карактеристика еластичне силе. При удаљавању опруге од положаја статичке равнотеже добија се горња грана крутости c_1, а при враћању доња грана крутости c_2. У почетном тренутку опруга је извучена из положаја статичке равнотеже за x_0 и нема почетне брзине. Маса опруге је m, а крутости опруга су c_1 и c_2. Одредити једначину слободних осцилација опруге за прву половину пуног периода осциловања и наћи пуни период осцилација T.



Сл. 42

Диференцијалне једначине кретања биће

$$m\ddot{x} + c_1 x = 0$$

$$m\ddot{x} + c_2 x = 0$$

Прва једначина важи од тренутка кад почнемо да удаљавамо опругу, а друга од тренутка кад развучена опруга почне да се приближава равнотежном положају.

Решења горњих једначина гласе

$$x = C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t \qquad (a)$$

$$x = C_1' \cos k_2 t + C_2' \sin k_2 t \qquad (b)$$

За једначину (b) почетни услови кретања су

за $\quad t = 0 \qquad x = x_0 \qquad \dot{x} = 0$

$$C_1' = x_0 \qquad\qquad C_2' = 0$$

односно $\quad x = x_0 \cos k_2 t \qquad (c)$

Почетне услове кретања за једначину (a) добићемо из једначине (c).

Кад је $\quad x = 0 \qquad \cos k_2 t = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$

па је $$t = \frac{\pi}{2k_2}$$

$$\dot{x} = -k_2 x_0 \sin k_2 t = -k_2 x_0 \sin \frac{\pi}{2} \cancel{k_2} = -x_0 k_2$$

Почетни услови за једначину (a) према томе су

за $\quad t = \frac{\pi}{2k_2} \qquad x = 0$

$$\dot{x} = -x_0 k_2$$

па је $$0 = C_1 \cos \frac{k_1}{k_2}\frac{\pi}{2} + C_2 \sin \frac{k_1}{k_2}\frac{\pi}{2}$$

$$-x_0 \frac{k_2}{k_1} = -C_1 \sin \frac{k_1}{k_2}\frac{\pi}{2} + C_2 \cos \frac{k_1}{k_2}\frac{\pi}{2}$$

одавде је $$C_1 = x_0 \frac{k_2}{k_1} \sin \frac{k_1}{k_2}\frac{\pi}{2}$$

$$C_2 = -x_0 \frac{k_2}{k_1} \cos \frac{k_1}{k_2}\frac{\pi}{2}$$

па је $$x = C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t$$

Сложимо ове две осцилације у једну, облика

$$x = C \cos (k_1 t - \alpha)$$

Знамо да је $$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = x_0 \frac{k_1}{k_2}$$

$$\alpha = \operatorname{arc} tg \frac{C_2}{C_1} = \operatorname{arc} tg \left(-ctg \frac{k_1}{k_2}\frac{\pi}{2}\right)$$

Како је $$-ctg \frac{k_1}{k_2}\frac{\pi}{2} = tg \left(\frac{\pi}{2} + \frac{k_1}{k_2}\frac{\pi}{2}\right)$$

то је $$\alpha = \operatorname{arc} tg\, tg \left(\frac{\pi}{2} + \frac{k_1}{k_2}\frac{\pi}{2}\right)$$

односно $$\alpha = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right)$$

па је $$x = x_0 \frac{k_2}{k_1} \sin \left(\frac{\pi}{2}\frac{k_1}{k_2} - k_1 t\right)$$

или $$x = -x_0 \frac{k_2}{k_1} \sin \left(k_1 t - \frac{k_1}{k_2}\frac{\pi}{2}\right)$$

где је $$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}} \qquad\qquad k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}$$

$$T = \frac{\pi}{k_1} + \frac{\pi}{k_2} = \pi \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

49.) Одредити законитост смањивања амплитуда слободних осцилација опруге посматране у прошлом задатку. Приликом регистровања слободних осцилација добијен је следећи ред узастопних амплитуда: 13,0 mm; 7,05 mm; 3,80 mm; 2,05 mm итд. Одредити у сагласности са датим виброграмом однос крутости $\frac{c_2}{c_1}$, који одговара горњој и доњој грани „троугаоне“ карактеристике.

$$\frac{|x_2|}{|x_1|} = \frac{x_0 \frac{k_2}{k_1}}{x_0} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{13}{7,05}$$

пошто је

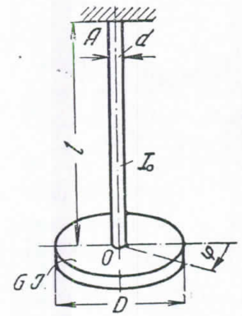
$$c_1 = mk_1^2$$
$$c_2 = mk_2^2$$

то је

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 = \left(\frac{13}{7,05}\right)^2 = \frac{169}{49,6} \approx 3,4$$

---

2. ТОРЗИОНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ



Сл. 43

Нека је округли штап $0A$ укљештен на горњем крају A и нека на доњем крају носи диск тежине G и пречника D. Ако на диск делујемо спрегом у његовој равни, штап ће бити изложен увијању. Отстранимо ли утицај спрега, наступиће торзионе осцилације диска.

Основна динамичка једначина за обртање крутог тела око непомичне осе гласи

$$J\ddot{\varphi} = -M_t$$

Из отпорности материјала знамо да је угао увијања φ при торзији дат изразом

$$\varphi = \frac{M_t\, l}{I_0 \mathbf{G}},$$

па је

$$M_t = \frac{I_0 \mathbf{G}}{l}\varphi = c\varphi,$$

где је c торзиони моменат који изазива угао увијања штапа раван једном радиану. Он се назива *крутост при торзији* штапа и има димензију

$$[c] = FL$$

Ако занемаримо масу штапа, диференцијална једначина кретања диска биће

$$J\ddot{\varphi} = -\frac{I_0 \mathbf{G}}{l}\varphi$$

односно

$$\ddot{\varphi} + \frac{I_0 \mathbf{G}}{Jl}\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J}\varphi = 0, \qquad (14)$$

а њено решење је $\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$

За почетне услове за $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$

произвољне константе биће $C_1 = \varphi_0$

$$C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}$$

па је решење диференцијалне једначине (14)

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt \tag{15}$$

Кружна фреквенција ових осцилација је

$$k = \sqrt{\frac{I_0 \mathbf{G}}{J\, l}} = \sqrt{\frac{c}{J}} \tag{16}$$

а период осцилација је

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J\, l}{I_0 \mathbf{G}}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}} \tag{17}$$

Осцилације дате изразом (15) могу се сложити у једну осцилацију облика

$$\varphi = a \cos (kt - \alpha_0) \tag{18}$$

где је

$$a = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{k^2}} \tag{19}$$

и

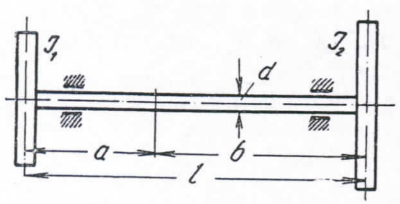
$$\alpha_0 = \operatorname{arc} tg \frac{\dot{\varphi}_0}{k \varphi_0} \tag{20}$$

Ако је штап кружног пресека, онда је

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32} \tag{21}$$

Моменат инерције диска у односу на обртну осу је

$$J = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{8} M D^2 = \frac{1}{8} \frac{G D^2}{g} \tag{22}$$



Сл. 44

Посматрајмо вратило на чијим се крајевима налазе два диска. Ако на њих делујемо спреговима, па њихов утицај потом отстранимо, настаће торзионе осцилације.

Од интереса је да се на вратилу нађе место пресека-чвор, у коме је угао увијања раван нули. Део вратила лево или десно од чворне тачке еквивалентан је раније посматраном вратилу са једним диском на крају. Чворни пресек наћи ћемо из услова да оба диска морају да осцилују са истом фреквенцијом.

$$\frac{\mathbf{G} I_0}{a J_1} = \frac{\mathbf{G} I_0}{b J_2}$$

т. j.

$$\frac{a}{b} = \frac{J_2}{J_1}$$

и

$$a + b = l$$

одакле је

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{J_2}{J_1 + J_2}\, l \\ b &= \frac{J_1}{J_1 + J_2}\, l \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

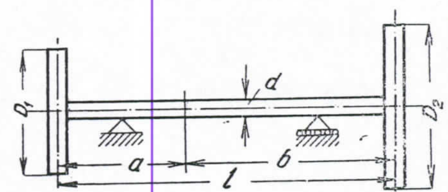
Када смо пронашли место чвора, онда можемо осцилације ових дискова посматрати тако као да на месту чвора имамо укљештење, т. j. сваки диск можемо посматрати посебно на малопређашњи начин.

Тако је, на пример, период осцилација дела вратила лево од чвора

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_1 a}{I_0 \mathbf{G}}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_1 J_2\, l}{I_0 \mathbf{G} (J_1 + J_2)}} \tag{24}$$

Примери

50) За вратило са два диска на крајевима претстављено на слици, дати су следећи подаци: $G_1 = 450$ kg, $G_2 = 900$ kg, $D_1 = 120$ cm, $D_2 = 200$ cm, $d = 10$ cm, $l = 300$ cm и $\mathbf{G} = 0{,}8 \cdot 10^6$ kg/cm². Одредити положај чворног пресека и фреквенцију осцилација.



Сл. 45

Знамо да је

$$a = \frac{J_2\, l}{J_1 + J_2} \quad \text{и} \quad b = \frac{J_1\, l}{J_1 + J_2}$$

$$J_1 = \frac{G_1 D_1^2}{8g} \qquad J_2 = \frac{G_2 D_2^2}{8g}$$

пошто је $G_2 = 2G$

онда је

$$a = \frac{2 D_2^2\, l}{D_1^2 + 2 D_2^2} = \frac{2 \cdot 200^2 \cdot 300}{120^2 + 2 \cdot 200^2} \approx 154 \text{ cm}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi} \quad ; \quad k = \sqrt{\frac{I_0 \mathbf{G}}{J_1 a}} \quad ; \quad I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

па је

$$f = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d^2}{D_1}\right) \sqrt{\frac{\pi \mathbf{G} g}{G_1 a}}$$

$$f=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{5}{6}\sqrt{\frac{\pi\cdot 8\cdot 10^5\cdot 981}{450\cdot 254}}\approx 9{,}5\,\mathrm{sec}^{-1}$$

51.) О округао штап пречника $d=1{,}2$ cm. и дужине $l=100$ cm., који је горњим крајем укљештен, обешен је са доње стране диск тежине $G=10$ kg. и пречника $D=30$ cm. Када се диск изведе из положаја равнотеже и пусти, настају осцилације чија је фреквенција $f=10\,\mathrm{sec}^{-1}$. Одредити модул клизања $\mathbf{G}$ материјала штапа.

По претходном задатку је

$$f=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d^2}{D}\sqrt{\frac{\pi\mathbf{G}g}{Gl}}$$

одавде је

$$\mathbf{G}=\frac{16\,Gl\pi D^2f^2}{d^4\,g}=\frac{16\cdot 10\cdot 10^2\cdot\pi\cdot 9\cdot 10^2\cdot 10^2}{1{,}2^4\cdot 981}\approx 2{,}2\cdot 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}.$$

52.) У којој ће се размери повећати фреквенција вратила пречника $d=10$ cm. и дужине $l=300$ cm., које носи на крајевима два једнака диска тежине G, ако на дужини од 80 cm. повећамо пречник вратила од 10 cm. на 20 cm.

Угао торзије вратила за два разна пречника d_1 и d_2 на дужини l_1 и l_2 биће

$$\varphi=\frac{32M_tl_1}{\pi d_1^4\mathbf{G}}+\frac{32M_tl_2}{\pi d_2^4\mathbf{G}}=\frac{32M_t}{\pi d_1^4\mathbf{G}}\left(l_1+l_2\frac{d_1^4}{d_2^4}\right)$$

Ако обележимо $\qquad L=l_1+l_2\dfrac{d_1^4}{d_2^4}$

и назовемо ту дужину *еквивалентном дужином вратила*, видимо да ће вратило еквивалентне дужине L а сталног пречника d_1 имати исту фреквенцију као и посматрано вратило промењивог пречника.

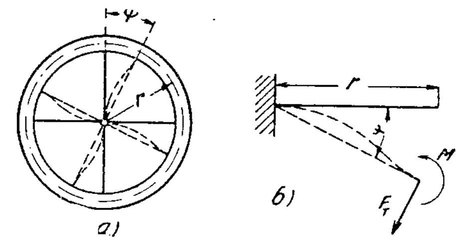
$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\pi g d_1^4\mathbf{G}}{4GD^2L}}}{\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\pi g d_1^4\mathbf{G}}{4GD^2l}}}=\sqrt{\frac{l}{L}}$$

Еквивалентна дужина вратила је

$$L=220+80\left(\frac{10}{20}\right)^4=220+5=225\ \mathrm{cm}.$$

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{225}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

53.) Одредити фреквенцију осцилација точка, датог на слици, око тачке 0, претпостављајући да центар точка остаје непомичан, а да је ротација венца праћена савијањем паока, како је то означено на слици испрекиданим линијама. Претпоставити да је целокупна маса точка распоређена дуж средишне линије венца и да је дужина паока равна радијусу r средишне линије. Претпоставити такође да се савијање венца може занемарити, тако да тангенте еластичних линија паока имају радиалан правац. Целокупна тежина точка износи G, а крутост паока је $EI=B$.



Сл. 46

Посматраћемо сваки паок као конзолу (слика b) дужине r, на чијем крају делује непозната трансверзална сила F_T и моменат савијања M.

На основу познатих формула из отпорности материјала добијамо следеће изразе за нагиб на крају конзоле γ и угиб $f=r\psi$

$$\gamma=\frac{F_Tr^2}{2B}-\frac{Mr}{B}\ ;\qquad f=r\psi=\frac{F_Tr^3}{3B}-\frac{Mr^2}{2B}$$

На основу услова да тангента еластичне линије паока пролази кроз центар 0 имамо да је $\gamma=\psi$

па је $$M=\frac{F_Tr}{3}=\frac{2B\psi}{r}$$

Ако на крају конзоле делује трансверзална сила F_T, тада ће конзола деловати на венац моментом rF_T, па је целокупни торзиони моменат који делује на венац раван

$$M_t=4F_Tr-4M=\frac{16B\psi}{r}$$

Торзиони моменат потребан да произведе обртање венца за један радиан у овом случају износи

$$c=\frac{16B}{r}$$

Фреквенција осцилација биће

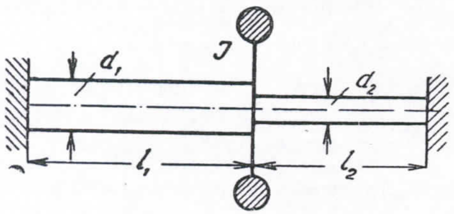
$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{J}}\;;$$

Пошто је $\qquad J=\frac{G}{g}r^2$

то је

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{16B}{rJ}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{16gB}{Gr^3}}$$

54.) Одредити фреквенцију малих слободних осцилација диска, који је учвршћен за вратило променљивог пречника и наћи еквивалентну крутост c за дато вратило променљивог пречника. Крајеви вратила су укљештени.



Сл. 47

Диференцијална једначина кретања је

$$J\ddot{\varphi}+c_1\varphi+c_2\varphi=0\;,$$

односно

$$\ddot{\varphi}+\frac{c_1+c_2}{J}\varphi=0$$

где је

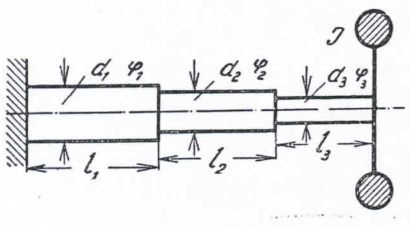
$$c_1=\frac{I_{01}\,\mathbf{G}}{l_1}\quad \text{и}\quad c_2=\frac{I_{02}\,\mathbf{G}}{l_2}$$

$$I_{01}=\frac{d_1^4\,\pi}{32}\qquad I_{02}=\frac{d_2^4\,\pi}{32}$$

Еквивалентна крутост вратила је $\qquad c=c_1+c_2$
а фреквенција осцилација је

$$f=\frac{1}{T}=\frac{k}{2\pi}=\frac{c}{2\pi J}=\frac{c_1+c_2}{2\pi J}$$

55.) Одредити еквивалентну крутост вратила c за дато вратило променљивог пречника на слици, које на слободном крају носи диск чији је моменат инерције у погледу подужне осе вратила J.



Сл. 48

Резултујући угао увијања је

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3$$

Знамо да је

$$M=c\varphi\;;\quad M=c_1\varphi_1\;;\quad M=c_2\varphi_2$$

и $\qquad M=c_3\varphi_3 \qquad$ па је

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}=\frac{c_2c_3+c_1c_3+c_1c_2}{c_1c_2c_3}$$

$$c=\frac{c_1\,c_2\,c_3}{c_1\,(c_2+c_3)+c_2\,c_3}$$

где је

$$c_1=\frac{d_1^4\pi\mathbf{G}}{32l_1}$$

$$c_2=\frac{d_2^4\pi\mathbf{G}}{32l_2}$$

и

$$c_3=\frac{d_3^4\pi\mathbf{G}}{32l_3}$$

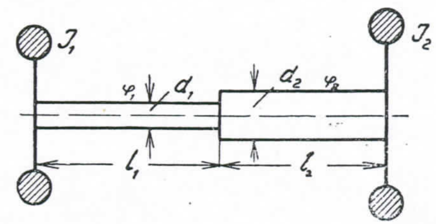
56.) Одредити кружну фреквенцију вратила променљивог пречника d_1 и d_2 на дужини l_1 и l_2, које на слободним крајевима носи дискове чији су моменти инерције J_1 и J_2, и наћи еквивалентну крутост c вратила за дато вратило променљивог пречника.

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2$$

па је опет

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}=\frac{l_1}{\mathbf{G}I_{01}}+\frac{l_2}{\mathbf{G}I_{02}}$$

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{\mathbf{G}}\,\frac{l_1I_{02}+l_2I_{01}}{I_{01}I_{02}}$$



Сл. 49

$$c=\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}=\frac{\mathbf{G}I_{01}I_{02}}{l_1I_{02}+l_2I_{01}}$$

$$k^2=c\left(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}\right)=\frac{\mathbf{G}I_{01}I_{02}}{l_1I_{02}+l_2I_{01}}\cdot\frac{J_1+J_2}{J_1\,J_2}$$

3. ПРИНУДНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

Ако материјалну тачку масе m, под истим условима као и код слободних хармониских осцилација, изведемо из равнотежног положаја, с том разликом што ће на њу деловати и поремећајна (пертурбациона) сила $\vec{F}_p$, која ремети сопствене осцилације и која је функција времена $\vec{F}_p = f(t)$, онда ће, по d'Alembert-овом принципу, бити

$$\vec{F}_i + \vec{F}_r + \vec{F}_p = 0$$

Ако се поремећајна сила мења по закону cosinus-a, тј. ако је узмемо у облику $F_p = mh \cos(pt - \alpha_0)$, онда ће диференцијална једначина кретања материјалне тачке масе m бити

$$(-m\ddot{x}) - cx + mh\cos(pt - \alpha_0) = 0\ ,$$

односно
$$\ddot{x} + k^2 x = h\cos(pt - \alpha_0) \tag{25}$$

Као што је познато из теорије диференцијалних једначина, решење горње линеарне нехомогене једначине једнако је збиру општег интеграла хомогеног дела једначине и партикуларног интеграла нехомогеног дела једначине

$$x = x_1 + x_2$$

Знамо да је $\quad x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$

Ако партикуларно решење потражимо у облику

$$x_2 = C\cos(pt - \alpha_0)$$

добићемо да је
$$C = \frac{h}{k^2 - p^2}$$

па решење једначине (25) гласи

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\cos(pt - \alpha_0) \tag{26}$$

Као што се из овог решења види, ова осцилација је збир двеју осцилација, од којих је прва сопствена и има кружну фреквенцију k, а друга принудна са кружном фреквенцијом p.

Период, како сопствене $T = \frac{2\pi}{k}$, тако и принудне осцилације $T_1 = \frac{2\pi}{p}$ не зависи од почетних услова.

Амплитуда сопствене осцилације, као што знамо, зависи од почетних услова, док амплитуда принудне осцилације не зависи.

У случају да је $k > p$, тј. да је кружна фреквенција сопствене осцилације већа од кружне фреквенције принудне осцилације, онда принудна осцилација има исту фазу као и поремећајна сила.

Ако је међутим, $p > k$ онда ће партикуларно решење нехомогеног дела једначине бити

$$x_2 = -\frac{h}{p^2 - k^2}\cos(pt - \alpha_0) = \frac{h}{p^2 - k^2}\cos(pt - \alpha_0 + \pi)\ ,$$

па се фаза принудне осцилације разликује од фазе поремећајне силе за π.

У многим техничким проблемима од интереса је да се испита само принудна осцилација, ради тога што се слободна осцилација убрзо амортизује под дејством унутрашњег трења у систему.

Израз за принудну осцилацију може се написати и у облику

$$x_2 = \frac{\frac{h}{k^2}}{1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2}\cos(pt - \alpha_0)$$

Како је максимална вредност поремећајне силе $F = mh$, и како је с друге стране $F = cf_{ст}$, онда је

$$mh = cf_{ст} = mk^2 f_{ст}$$

т. ј.
$$f_{ст} = \frac{h}{k^2} \tag{27}$$

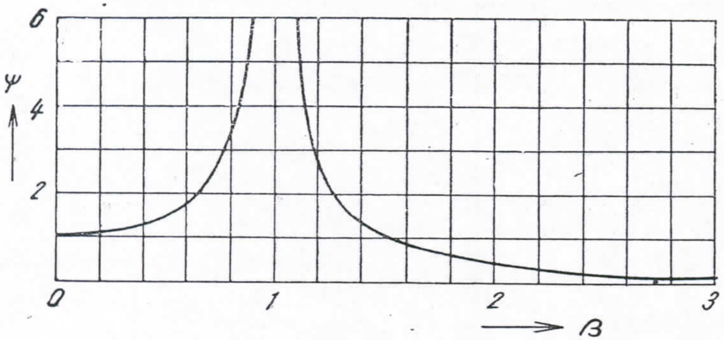
Ако однос кружних фреквенција обележимо са $\beta = \frac{p}{k}$, онда је

$$x_2 = \frac{f_{ст}}{1 - \beta^2}\cos(pt - \alpha_0) = \psi \cdot f_{ст}\cos(pt - \alpha_0)$$

Величина
$$\psi = \frac{1}{1 - \beta^2} \tag{28}$$

назива се *динамички фактор појачавања*, и показује колико је пута амплитуда принудне осцилације већа од амплитуде сопствене осцилације у случају да делује поремећајна сила.

Зависност динамичког фактора појачавања ψ од односа $\beta = \frac{p}{k}$ дата је диаграмом.



Сл. 50

Вредност произвољних константи у једначини (26) одређујемо из почетних услова. Ако је за

$$t = 0 \qquad x = x_0$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0$$

онда је

$$C_1 = x_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} \cos \alpha_0$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \alpha_0$$

па једначина (26) прелази у

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \Big[\cos (pt - \alpha_0) -$$

$$- \cos \alpha_0 \cos kt - \frac{p}{k} \sin \alpha_0 \sin kt \Big] \tag{29}$$

У случају да се поремећајна сила мења по закону sinus-a, тј. да је $F_p = mh \sin (pt + \alpha_0)$, онда су осцилације дате изразом

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin (pt + \alpha_0)$$

и за исте услове као мало пре имаћемо да је

$$C_1 = x_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \alpha_0$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2} \cos \alpha_0 \ ,$$

односно $$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \Big[\sin (pt + \alpha_0) -$$

$$- \sin \alpha_0 \cos kt - \frac{p}{k} \cos \alpha_0 \sin kt \Big] \tag{30}$$

У техничкој пракси нарочито је интересантан случај када су кружне фреквенције сопствене и принудне осцилације једнаке, тј. случај *резонанце*, кад је $p = k$. Тада је амплитуда принудне осцилације бесконачно велика, тако да може да дође до лома оних делова који осцилују. У том случају једначине (29), (30) као и једначина (26), постају беспредметне, јер последњи чланови првих двеју једначина постају неодређени, тј. имају облик $\frac{0}{0}$. Тада, као што је познато из теорије диференцијалних једначина, партикуларно решење морамо тражити у другом облику

$$x_2 = At \cos (pt - \alpha_0) + Bt \sin (pt - \alpha_0),$$

за случај кад се поремећајна сила мења по закону косинуса.

Тада је $$A = 0$$

$$B = \frac{h}{2p}$$

тј. $$x_2 = \frac{h}{2p} t \sin (pt - \alpha_0) \tag{31}$$

За почетне услове $\quad t = 0 \quad x = x_0$

$$\dot{x} = \dot{x}_0$$

произвољне константе биће

$$C_1 = x_0$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} + \frac{h}{2k^2} \sin \alpha_0$$

односно $$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt + \frac{h}{2k} t \sin (pt - \alpha_0) +$$

$$+ \frac{h}{2k^2} \sin \alpha_0 \sin kt \tag{32}$$

Ако се поремећајна сила мења по закону sinus-a, онда ће, ако потражимо партикуларно решење у облику

$$x_2 = At \cos (pt + \alpha_0) + Bt \sin (pt + \alpha_0)$$

бити $$A = - \frac{h}{2p} \qquad B = 0$$

односно
$$x_2 = -\frac{h}{2p}\,t\cos(pt+\alpha_0) \tag{33}$$

За почетне услове за $t=0$ $\quad x = x_0$

$$\dot{x} = \dot{x}_0$$

произвољне константе биће $C_1 = x_0$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} + \frac{h}{2k^2}\cos\alpha_0 \quad ,$$

па је
$$x = x_0\cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt - \frac{h}{2k}\,t\cos(pt+\alpha_0) + \frac{h}{2k^2}\cos\alpha_0\sin kt \tag{34}$$

Партикуларно решење за случај да су вредности за p и k блиске можемо добити и на следећи начин.

Да би упростили проблем узећемо да је поремећајна сила дата у облику $F_p = mh\cos pt$. Решење диференцијалне једначине кретања у том случају биће

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{h}{k^2-p^2}\cos pt$$

За почетне услове за $t=0 \quad x=0$

$$\dot{x}=0$$

произвољне константе биће

$$C_1 = -\frac{h}{k^2-p^2} \qquad C_2 = 0$$

па је
$$x = \frac{h}{k^2-p^2}(\cos pt - \cos kt) \tag{35}$$

Ако су вредности k и p блиске можемо ставити да је

$$k - p = 2\Delta \quad ,$$

где је Δ мала величина.

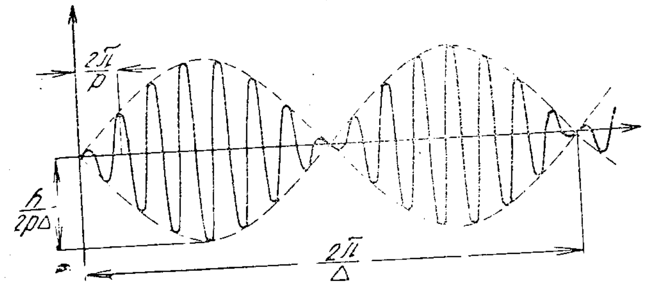
Онда је $\quad k^2 - p^2 = (k+p)(k-p) = (2p+2\Delta)\,2\Delta \approx 4p\Delta$

Ако развијемо једначину (35) биће

$$x = \frac{2h}{k^2-p^2}\sin\frac{k+p}{2}\,t\,\sin\frac{k-p}{2}\,t = \frac{2h}{k^2-p^2}\sin\Delta t\,\sin\frac{p+k}{2} \quad .$$

па је
$$x \approx \frac{h\sin\Delta t}{2p\Delta}\sin pt \tag{36}$$

Пошто је Δ мала величина функција $\sin\Delta t$ мења се врло полако, и период $\frac{2\pi}{\Delta}$ је велики. У том случају израз (36) можемо сматрати да претставља осцилације периода $\frac{2\pi}{p}$ и промењиве амплитуде $\frac{h\sin\Delta t}{2p\Delta}$. Та врста осцилација назива се *подрхтавање* и претстављена је сликом

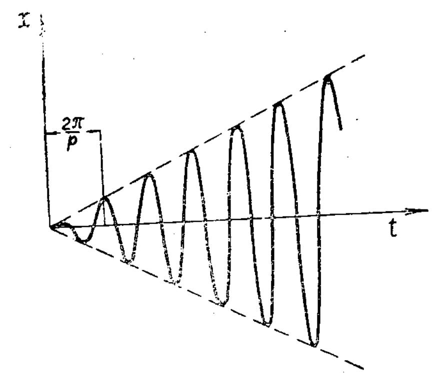


Сл. 51

Период подрхтавања $\frac{2\pi}{\Delta}$ расте кад $p \to k$, тј. кад се приближавамо условима резонанце. За гранични случај $p = k$, пошто је тада $\sin\Delta t \approx \Delta t$ израз (36) постаје

$$x = \frac{h}{2p}\,t\sin pt \tag{37}$$

Амплитуда ових осцилација расте бесконачно са временом. Графички претстављено то изгледа

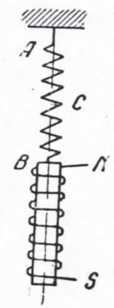


Сл. 52

Примери

57.) О опругу крутости $c = 20$ gr/cm обешена је намагнетисана шипка тежине 100 gr. Доњи крај магнета пролази кроз соленоид кроз који је пропуштена наизменична струја $i = 20 \sin 8\pi t$ ампера. Струја почиње да кружи у тренутку $t = 0$ увлачећи шипку у соленоид. До тог тренутка магнетна шипка висила је непомично о опрузи.

Сила међусобног деловања магнета и соленоида одређена је једначином $F = 16\pi i$ dyna. Одредити принудне осцилације магнета.



Сл. 53

Диференцијална једначина кретања је

$$m\ddot{x} + cx = F_p$$

Поремећајна сила је

$$F_p = 16\pi i \text{ dyna},$$

$$F_p = \frac{16\pi i}{g} \text{ грама},$$

па горња једначина прелази у

$$m\ddot{x} + cx = \frac{320\pi}{g} \sin 8\pi t$$

или

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} x = \frac{320\pi}{G} \sin 8\pi t \quad ,$$

па је $k^2 = \dfrac{c}{m} = \dfrac{cg}{G} = \dfrac{20 \cdot 981}{100} = 196{,}2 \sec^{-2}$, $\quad p = 8\pi \sec^{-1}$

$$p^2 = 64\pi^2 = 631{,}6 \sec^{-2}$$

$$h = \frac{320\pi}{G} = \frac{320\pi}{100} = 10{,}048$$

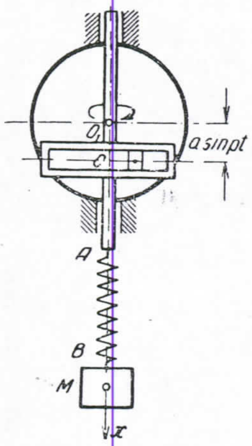
Знамо да је принудна осцилација дата изразом

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt = \frac{10{,}048}{196{,}2 - 631{,}6} \sin 8\pi t$$

односно $\quad x_2 = -\,0{,}023 \sin 8\pi t$ cm.

58.) Терет M обешен је о опругу AB чији врх изводи хармониске осцилације по вертикалној правој линији амплитуде a, и кружне фреквенције p : $\overline{O_1C} = a \sin pt$ cm (помоћу кулисе Волфа).

Одредити принудне осцилације терета M при следећим подацима: тежина терета износи 400 gr; под дејством силе од 40 gr. опруга се издужи за 1 cm; $a = 2$ cm; $p = 7 \sec^{-1}$.



Сл. 54

Диференцијална једначина кретања је

$$m\ddot{x} + c(x - \xi) = 0$$

где је $\quad \xi = a \sin pt \quad ,$

па је $\quad m\ddot{x} + cx = ca \sin pt$

односно $\quad \ddot{x} + k^2 x = ak^2 \sin pt$

Принудна осцилација тега биће

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt$$

$$k^2 = \frac{cg}{G} = \frac{g}{10} \quad ; \quad p^2 = 49 \approx \frac{g}{20}$$

па је $\quad x_2 = \dfrac{2\,\dfrac{g}{20}}{\dfrac{g}{10} - \dfrac{g}{20}} \sin 7t$

односно $\quad x = 4 \sin 7t$ cm.

59.) Одредити кретање терета M (упореди са предходним задатком), који је обешен о опругу AB чији врх изводи хармониске осцилације по вертикали, амплитуде a cm. и кружне фреквенције $p = \sec^{-1}$. Статичко издужење опруге под дејством терета је $f_{ст}$.

У почетном тренутку тачка A заузима свој средњи положај, а терет M налази се у миру; почетни положај терета узети за координатни почетак, а осовину $0x$ оријентисати вертикално наниже.

Диференцијална једначина кретања је, као што знамо

$$\ddot{x} + k^2 x = ak^2 \sin pt \; ,$$

а њено решење је

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{ak^2}{k^2 - p^2} \sin pt$$

За почетне услове за $\quad t = 0 \quad x = 0$

$$\dot{x} = 0$$

добијамо $\quad C_1 = 0 \qquad C_2 = -\dfrac{akp}{k^2 - p^2}$

пошто је $\quad k^2 = \dfrac{g}{f_{ст}} \; ,$

то горње решење прелази у

$$x = \frac{ag}{p^2 f_{\text{ст}} - g}\left[p\sqrt{\frac{f_{\text{ст}}}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{f_{\text{ст}}}}\;t - \sin pt\right]$$

при
$$k \lessgtr \sqrt{\frac{g}{f_{\text{ст}}}}$$

У случају резонанце за $p = k$ принудна осцилација биће

$$x_2 = -\frac{h}{2p}\,t\cos pt$$

како је
$$h = ak^2 = ap^2$$

то је
$$x_2 = -\frac{ap}{2}\,t\cos pt$$

па решење има облик

$$x = x_1 + x_2 = C_1\cos kt + C_2\sin kt - \frac{ap}{2}\,t\cos pt$$

За почетне услове за $t = 0$ $\quad x = 0$

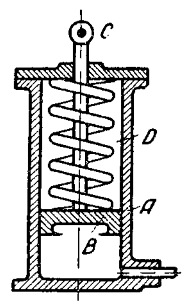
$$\dot{x} = 0$$

биће
$$C_1 = 0 \qquad C_2 = \frac{a}{2}$$

па је
$$x = \frac{a}{2}\left(\sin\sqrt{\frac{g}{f_{\text{ст}}}}\,t - \sqrt{\frac{g}{f_{\text{ст}}}}\,t\cos\sqrt{\frac{g}{f_{\text{ст}}}}\,t\right)$$

при
$$p = k = \sqrt{\frac{g}{f_{\text{ст}}}}$$

60.) Индикатор парне машине састоји се из цилиндра A, по коме клизи клип B опирући се о опругу D. Са клипом је спојена шипка BC на којој је учвршћена писаљка C. Претпостављајући да се притисак паре p на клип B изражен у kg/cm², мења по закону $p = 4 + 3\sin\frac{2\pi}{T}t$, где је T време једног обрта вратила, одредити амплитуду принудних осцилација писаљке C. Вратило изводи 3 обрта/sec при следећим подацима: површина клипа индикатора је $A = 4$ cm²; тежина покретног дела индикатора је $G = 1$ kg; опруга се сабије за 1 cm. под дејством силе од 3 kg.



Сл. 55

Приликом кретања писаљке деловаће четири силе: инерцијална, услед кретања покретног дела индикатора, реституциона сила у опрузи, тежина индикатора, реституциона сила у опрузи, тежина покретног дела индикатора и сила притиска паре, па је диференцијална једначина кретања

$$m\ddot{x} - P + F_r + G = 0\ ,$$

где је
$$P = A\left(p_0 + p\sin\frac{2\pi}{T}t\right) = 4\left(4 + 3\sin\frac{2\pi}{T}t\right)$$

пошто је
$$cf_{\text{ст}} = G - Ap_0$$

и
$$F_r = c\,(x - f_{\text{ст}})\,,$$

то горња диференцијална једначина кретања прелази у

$$m\ddot{x} + cx = Ap\sin\frac{2\pi}{T}t$$

односно
$$\ddot{x} + \frac{cg}{G}x = \frac{12g}{G}\sin 6\pi t$$

Амплитуда принудних осцилација дата је изразом

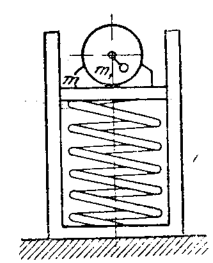
$$C = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{\frac{12g}{G}}{\frac{cg}{G} - p^2} = \frac{12g}{cg - Gp^2}$$

па је
$$C = \frac{4g}{g - 12\pi^2} = \frac{4\cdot 981}{981 - 12\cdot 9{,}87} \approx 4{,}5\ \text{cm}.$$

61.) Електромотор је постављен на платформи M, која је подупрта спиралном опругом. Целокупна тежина платформе и мотора износи 32,7 kg. Опруга је таква да се под теретом од 30 kg. сабије за 1 cm. На вратило мотора насађен је терет M, тежине 200 gr., на растојању 1,3 cm. од осовине O вратила. Угаона брзина мотора износи 30 sec⁻¹.

Одредити принудну осцилацију платформе под претпоставком да је она у почетном положају била у миру. Узимамо $g = 981$ cm/sec².

При кретању платформе деловаће четири силе: инерцијална сила услед кретања платформе, тежина платформе, реституциона сила опруге и центрифугална сила услед обртања мотора, па ће диференцијална једначина кретања платформе бити



Сл. 56

$$m\ddot{x} - G + F_r - F_c = 0$$

Нека се центрифугална сила мења у току времена по закону

$$F_c = m_1 r\omega^2\cos\omega t$$

Пошто је
$$F_r = c\,(x + f_{\text{ст}})\,,$$

то горња једначина прелази у

$$m\ddot{x} - G + c\,(x + f_{\text{ст}}) = m_1 r\omega^2\cos\omega t\,,$$

односно
$$\ddot{x}+\frac{cg}{G}x=\frac{G_1}{G}r\omega^2\cos\omega t$$

$$k^2=\frac{30g}{G}=\frac{30\cdot 981}{32{,}7}=900\ \text{sec}^{-2}$$

$$k=30\ \text{sec}^{-1}$$

$$\omega=p=30\ \text{sec}^{-1}$$

Пошто је $p=k$ (случај резонанце), принудна осцилација биће

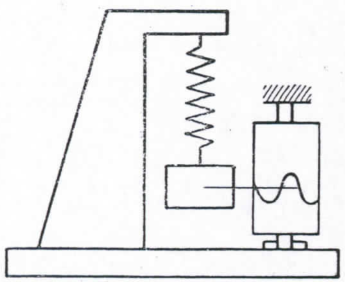
$$x_2=\frac{h}{2p}t\sin pt$$

$$h=\frac{G_1}{G}r\omega^2=\frac{G_1}{G}rp^2$$

па је
$$x_2=\frac{G_1 r\omega}{2G}t\sin pt$$

$$x_2=\frac{0{,}2\cdot 1{,}3\cdot 30}{2\cdot 32{,}7}t\sin 30\,t\approx 0{,}12\,t\sin 30\,t.$$

62.) Платформа врши хармониске вертикалне осцилације по закону $\xi=a\sin pt$. Одредити принудну осцилацију тега, обешеног о опругу чија тачка вешања осцилира заједно с платформом *(теорија вибрографа)*.



Сл. 57

Задатак регистрације осцилација платформе може да се реши принципијелно врло просто, ако бисмо били у стању да региструјемо покрете писаљке (чврсто везане са платформом) на хартији, која се налази на добошу. Добош се обрће помоћу сатног механизма и његова оса обртања је непокретна у односу на земљу. При регистровању осцилација земљишта, бродова итд., ми не можемо поступити на овај начин, пошто немамо непокретно тело на које бисмо могли причврстити добош. Због тога се служимо приближном методом.

Очигледно, да уколико је тежи тег и уколико је слабија његова веза с осцилацијама платформе, т.ј. уколико ја мекша опруга, тиме ће бити мање учешће тега у осцилацијама платформе. У исто време утолико са већом приближношћу можемо да сматрамо оловку круто везану са теретом, тачком, која је непокретна у односу на земљу. Обратно, ако би опруга била врло чврста, тег би вршио

исто кретање као и платформа и писаљка би на добошу записала праву линију, тј. не би имали никаквих осцилација.

Из тог разлога прибор за регистровање ових осцилација мора бити тако подешен да кружна фреквенција слободних осцилација прибора буде врло мала у односу на кружну фреквенцију платформе, а то се постиже већим теретом и опругом чија је крутост мања, тј. која је мекша.

Нађимо диференцијалну једначину кретања тега.

Ако са x означимо тренутно удаљење тега у односу на платформу у равнотежном положају, онда ће његово укупно удаљење у односу на земљу бити очевидно $x+\xi$.

Диференцијална једначина кретања је

$$mw_x=G+F_r$$

$$w_x=\ddot{x}+\ddot{\xi}=\ddot{x}-ap^2\sin pt$$

$$F_r=-c(x+f_{\text{ст}})=-cx-G$$

па имамо
$$m\ddot{x}+cx=map^2\sin pt$$

односно
$$\ddot{x}+k^2x=ap^2\sin pt$$

Принудна осцилација према, томе, дата је изразом

$$x_2=\frac{ap^2}{k^2-p^2}\sin pt=-a\frac{1}{1-\left(\frac{k}{p}\right)^2}\sin pt=-\frac{1}{1-\left(\frac{k}{p}\right)^2}\xi$$

Овај израз дефинише принудно кретање тега.

Одавде видимо да ће амплитуда принудних осцилација тега бити утолико мања уколико је однос $\frac{k}{p}$ мањи.

63.) За мерење осцилација фундамента употребљен је виброграф као у предњем задатку. Наћи амплитуду тих осцилација, ако је фреквенција периодичне силе 1800 min^{-1}, а сказаљка на апарату осцилира између подеока 2,5 и 3,0. Статичко издужење опруге је 2,5 cm.

Принудна осцилација сказаљке је

$$x_2=\frac{ap^2}{k^2-p^2}\sin pt,$$

где је a амплитуда осцилација фундамента.

Амплитуда принудних осцилација сказаљке је

$$C=\frac{ap^2}{k^2-p^2}$$

Пошто је $$C = \frac{3{,}0 - 2{,}5}{2} = 0{,}25 \quad ,$$

то је $$a = \frac{0{,}25\,(k^2 - p^2)}{p^2}$$

$$f_p = 1800 \text{ min}^{-1} = 30 \text{ sec}^{-1}$$

$$p = f_p\, 2\pi = 60\pi \text{ sec}^{-1}$$

$$k = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}} = 19{,}8 \text{ sec}^{-1}$$

па је $$a = 0{,}248 \text{ min.}$$

64.) За мерење вертикалних убрзања шасије локомотиве употребљен је виброграф. Шасија локомотиве изводи три осцилације за секунду. Сопствена фреквенција опруге је 60 осцилације за секунду. Тражи се максимално убрзање шасије локомотиве, ако релативне осцилације које виброграф региструје имају амплитуду $a_r = 0{,}0025$ cm. Вибрирање локомотиве у вертикалном правцу дато је изразом $\xi = a \sin pt$.

Принудно кретање које се бележи на вибрографу дато је једначином

$$x = \frac{ap^2}{k^2 - p^2} \sin pt$$

Максимално убрзање шасије локомотиве је

$$\ddot{\xi}_{max} = ap^2$$

У прошлом задатку видели смо да је

$$ap^2 = a_r\,(k^2 - p^2)$$

$$f_k = 60 \text{ sec}^{-1} \qquad f_p = 3 \text{ sec}^{-1}$$

$$k = 2\pi \cdot f_k = 120\,\pi \text{ sec}^{-1} \qquad p = 2\pi \cdot f_p = 6\pi \text{ sec}^{-1}$$

па је $$\ddot{\xi}_{max} = ap^2 = 0{,}0025\,(14400\pi^2 - 36\pi^2) = 354 \text{ cm/sec}^2$$

65.) Код вибрографа Geiger-a, који се употребљава за регистровање вертикалних осцилација, полуга $0A$ везана са писаљком може да се обрће око хоризонталне осовине 0. Полугу $0A$, на чијем крају виси терет G, придржава спирална опруга у хоризонталном положају. Одредити релативно кретање полуге $0A$, ако је виброграф учвршћен на темељу који изводи вертикалне осцилације по закону $z = 2 \sin 25t$ mm. Крутост опруге је $c = 0{,}1$ kgcm, моменат инерције полуге $0A$ са теретом G у односу на 0 раван је $J = 0{,}4$ kgcm sec²; $Ga = 10$ kgcm. Сопствене осцилације штапа занемарити.

Знамо да је

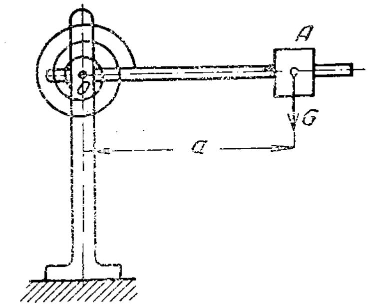
$$J\ddot{\varphi} = -M$$

Услед померања основе деловаће инерцијална сила

$$\left(-\frac{G}{g}\ddot{z}\right) ,$$

а њен моменат је

$$\left(-\frac{G}{g}a\ddot{z}\right) ,$$



Сл. 58

док је укупан моменат

$$M = c\varphi + \frac{G}{g}\,a\ddot{z}$$

па је диференцијална једначина кретања

$$J\ddot{\varphi} + c\varphi = -\frac{G}{g}a\ddot{z}$$

$$z = 2 \sin 25t \text{ mm.}$$

$$\ddot{z} = -125 \sin 25t \text{ cm.}$$

па је $$J\ddot{\varphi} + c\varphi = \frac{125\,Ga}{g} \sin 25t$$

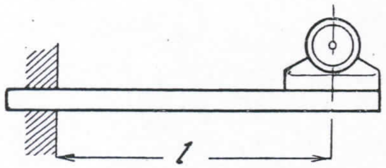
Знамо да је $$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt$$

$$h = \frac{125\,Ga}{Jg} = \frac{125 \cdot 10}{0{,}4 \cdot 981} = 3{,}19$$

$$k^2 = \frac{c}{J} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \quad ; \qquad p^2 = 625$$

па је $$x_2 = \frac{3{,}19}{0{,}25 - 625} \sin 25t = -0{,}0051 \sin 25t \text{ cm}$$

66.) Електромотор тежине $G = 1200$ kg. постављен је на слободним крајевима двеју хоризонталних паралелних конзола. Растојање од осовине електромотора до зида је $l = 1{,}5$ m. Ротор електромотора обрће се брзином од $n = 1500$ obr/min; тежина ротора износи $G_1 = 200$ kg, а његово тежиште удаљено је од осовине вратила за $r = 0{,}05$ mm. Модул еластичности меког челика од кога су направљене конзоле износи $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm². Одредити моменат инерције попречног пресека, тако да амплитуда принудних осцилација не пређе 0,5 mm. Тежину конзола занемарити.



Сл. 59

При обртању мотора деловаће три силе: инерцијална, реституциона и центрифугална, па је диференцијална једначина кретања

$$m\ddot{z} + cz = m_1 r\omega^2 \sin \omega t$$

односно

$$\ddot{z} + \frac{c}{m} z = \frac{m_1}{m} r\omega^2 \sin \omega t$$

Знамо да је

$$C = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{\frac{m_1}{m} r\omega^2}{\frac{c}{m} - \omega^2} \qquad \begin{aligned} n &= 1500 \text{ obr/min} \\ \omega &= 50\,\pi \text{ sec}^{-1} \end{aligned}$$

У случају кад на крају конзоле делује сила биће

$$c = \frac{3EI}{l^3}$$

па је

$$I = \frac{\omega^2 l^3 (CG + rG_1)}{3g\, Ec},$$

односно

$$I = \frac{2500 \cdot \pi^2 \cdot 15^3 \cdot 10^3 (0{,}05 \cdot 1200 + 0{,}005 \cdot 200)}{3 \cdot 981 \cdot 0{,}05 \cdot 2 \cdot 10^6} \text{ cm}^4$$

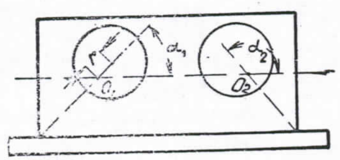
$$I = 17260 \text{ cm}^4,$$

а за једну конзолу

$$I = 8630 \text{ cm}^4$$

67.) Вибрациона машина која служи за произвођење осцилација састоји се из две плоче, ексцентрично насађене на две паралелне осовине. Тежина сваке плоче је G, а тежина целе машине G_1. Ексцентрицитет обе плоче је подједнак и износи r. У почетном положају плоче чине са хоризонталом углове α_1 и α_2. Плоче се окрећу у супротним смеровима угаоном брзином ω. Машина је учвршћена завртњима за еластичну подлогу крутости c. Занемарујући тежину подлоге одредити амплитуду принудних вертикалних осцилација машине.

При обртању плоча делују четири силе: инерцијална, реституциона, центрифугална и тежина плоча и машине.



Сл. 60

Сила инерције је

$$\left(-m\ddot{z}\right) = \left(-\frac{G_1 + 2G}{g}\ddot{z}\right),$$

а реституциона сила је

$$-c\,(z + f_{ст})$$

Центрифугална сила је $C = \frac{G}{g} r\omega^2$,

а тежина је $G_1 + 2G$.

Пројекције центрифугалних сила у вертикалном правцу у било ком тренутку су

$$\frac{G}{g} r\omega^2 \sin(\alpha_1 + \omega t), \quad \text{угао расте и}$$

$$\frac{G}{g} r\omega^2 \sin(\alpha_2 - \omega t), \quad \text{угао опада}$$

па је диференцијална једначина кретања

$$\frac{G_1 + 2G}{g}\ddot{z} + c\,(z + f_{ст}) - (G_1 + 2G) = C\left[\sin(\alpha_1 + \omega t) + \sin(\alpha_2 - \omega t)\right]$$

Како је

$$c \cdot f_{ст} = G_1 + 2G$$

и

$$\sin(\alpha_1 + \omega t) = \sin\alpha_1 \cos\omega t + \sin\omega t \cos\alpha_1$$

$$\sin(\alpha_2 - \omega t) = \sin\alpha_2 \cos\omega t - \sin\omega t \cos\alpha_2,$$

то је

$$\ddot{z} + \frac{cg}{G_1 + 2G} z = \frac{Cg}{G_1 + 2G}\Big[(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)\cos\omega t + (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\sin\omega t\Big]$$

Пошто на десној страни имамо две осцилације истих фреквенција, различитих амплитуда и различитих фаза, то их можемо сложити у једну, па ће принудна осцилација бити

$$z = z_1 + z_2 = A\,(\cos\omega t - \varphi_0),$$

при чему је

$$z_1 = B\,(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)\cos\omega t$$

$$z_2 = B\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\sin\omega t,$$

где је

$$B = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{\frac{Cg}{G_1 + 2G}}{\frac{cg}{G_1 + 2G} - \omega^2} = \frac{Gr}{\frac{cg}{\omega^2} - (G_1 + 2G)}$$

Ако слагање извршимо геометриски, онда ће амплитуда принудних осцилација бити

$$A = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = B\sqrt{(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)^2 + (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)^2}$$

$$A = B\sqrt{2\,[1 + \cos(\alpha_1 + \alpha_2)]}$$

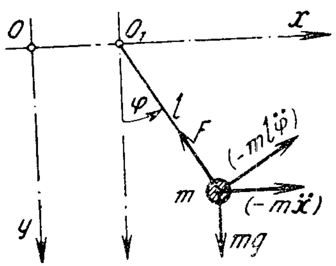
Како је

$$1 + \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\sin^2\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

то је
$$A = 2B \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

односно
$$A = \frac{2\,Gr}{\frac{cg}{\omega^2} - (G_1 + 2G)} \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

68.) Тачка O о коју је обешено математичко клатно креће се осцилаторно у хоризонталном правцу по закону $x = \overline{00_1} = a \sin pt$. Одредити мале осцилације клатна, ако је у почетном тренутку $t = 0$, клатно било у стању мировања.



Сл. 61

При кретању математичког клатна деловаће четири силе: тежина mg, инерцијална сила услед транслаторног кретања $(-m\ddot{x})$, инерцијална сила услед ротационог кретања $(-ml\ddot{\varphi})$ и сила у концу F.

Сума момената ових сила за тачку 0_1 је
$$mg \cdot l \sin\varphi - (-m\ddot{x}) \cdot l \cos\varphi - (-ml\ddot{\varphi}) \cdot l = 0$$

Како је
$$\ddot{x} = -ap^2 \sin pt$$
и
$$\sin\varphi \approx \varphi$$
$$\cos\varphi \approx 1$$

онда ова једначина прелази у
$$gl\,\varphi + l\ddot{x} + l^2\ddot{\varphi} = 0\,,$$

односно
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\,\varphi = \frac{ap^2}{l} \sin pt$$

Како је
$$x \approx l\varphi$$
$$\ddot{x} \approx l\ddot{\varphi}$$

то је
$$\ddot{x} + \frac{g}{l}\,x = ap^2 \sin pt\,,$$

Решење ове једначине је
$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{ap^2}{k^2 - p^2} \sin pt\,,$$

где је
$$k = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

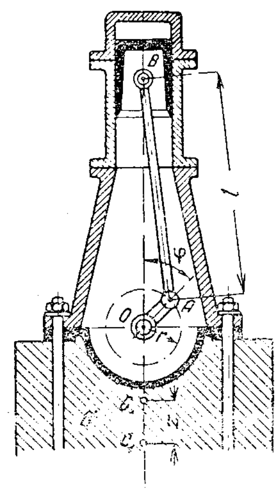
За почетне услове за $t = 0$ $\quad x = 0$, $\quad \dot{x} = 0$

добијамо да је
$$C_1 = 0$$
$$C_2 = -\frac{p^3}{k}\,\frac{a}{k^2 - p^2}$$

па је
$$x = \frac{ap^2}{k^2 - p^2}\left(\sin pt - \frac{p}{k} \sin kt\right)$$

или због
$$x \approx l\varphi$$
$$\varphi = \frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)}\left(\sin pt - \frac{p}{k} \sin kt\right)$$

69.) *Осцилације фундамента вертикалног једноцилиндричног мотора.* Вертикални једноцилиндрични мотор причвршћен је за фундамент B, чија је површина основе A, а крутост земљишта на коме се фундамент налази је c_z. Дужина криваје мотора је r, а клипне полуге l. Угаона брзина обртања вратила мотора је ω. Тежина клипа и делова који се наизменично крећу износи G_1, а тежина делова мотора који не учествују у наизменичном кретању износи G. Тежина фундамента је G_2. Наћи једначину кретања (осциловања) фундамента.



Сл. 62

Као што видимо за решење овог задатка потребни су нам подаци о мотору, фундаменту и земљишту на коме се налази фундамент.

При кретању мотора деловаће четири силе: инерцијална сила услед осциловања масе фундамента и делова мотора који се не крећу; инерцијална сила услед кретање алтернативних маса; тежина фундамента, тежина мотора иреституциона сила отпора земљишта. При томе је прећутно претпостављено да су обртне масе уравнотежене.

Обележимо масу фундамента заједно са масом непокретних делова мотора са M, а алтернативне масе са m.

У стању равнотеже фундамент има статичко улегнуће $f_{ст}$, које се одређује из услова равнотеже сила тежине и еластичне реакције земљишта, која износи
$$F_r = c_z f_{ст}\,, \qquad \text{где је} \quad c_z = C_z A\,,$$

па је
$$G_1 + G + G_2 = C_z A f_{ст}\,.$$

Обележимо равнотежни положај тежишта фундамента са C_0, а његов положај у неком тренутку за време његовог осцилаторног кретања са C_1, тако да је $\overline{C_0C_1} = z$.

Померање у посматраном тренутку биће $z + f_{ст}$, па ће реституциона сила којом земљиште делује на фундамент у том тренутку бити

$$F_r' = C_z A\,(z + f_{ст})$$

Према томе диференцијална једначина кретања фундамента је

$$M\ddot{z} + m\ddot{z}_1 - (G_1 + G + G_2) + C_z A\,(z + f_{ст}) = 0\ ,$$

где је $z_1 = f(t)$ закон пута кретања клипа. Нађимо $z_1 = f(t)$.

$$z_1 = r\cos\varphi + l\cos\beta$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\varphi} = \frac{r}{l} = \lambda$$

па је

$$\sin\beta = \lambda\sin\varphi$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi} \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi$$

онда је

$$z_1 = r\cos\varphi + l\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi\right)$$

или

$$z_1 = r\left(\cos\omega t - \frac{\lambda}{2}\sin^2\omega t\right) + l$$

па је

$$\ddot{z}_1 = -r\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t),$$

Сл. 63

Инерцијална сила услед кретања клипа и покретних делова мотора, према томе је

$$m\ddot{z}_1 = -mr\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t),$$

па ће диференцијална једначина кретања фундамента бити

$$M\ddot{z} + (G_1 + G + G_2) + C_z A z - C_z A f_{ст} = mr\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t)$$

Ако означимо са

$$k^2 = \frac{C_z A}{M} = \frac{C_z A g}{G + G_2}$$

онда ова једначина прелази у

$$\ddot{z} + k^2 z = \frac{m}{M} r\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t)$$

Знамо да је

$$z = z_1 + z_2$$

и

$$z_1 = C_1\cos kt + C_2\sin kt$$

Партикуларно решење потражимо у облику

$$z_2 = A\cos\omega t + B\cos 2\omega t\ ,$$

па ћемо добити

$$(k^2-\omega^2)A\cos\omega t + (k^2 - 4\omega^2)B\cos 2\omega t = \frac{mr\omega^2}{M}(\cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t)\ ,$$

одакле је

$$A = \frac{mr\omega^2}{M(k^2-\omega^2)}\ ; \qquad B = \frac{mr\omega^2\lambda}{M(k^2-4\omega^2)}$$

Принудна осцилација, према томе, дата је изразом

$$z_2 = \frac{mr\omega^2}{M}\left(\frac{\cos\omega t}{k^2-\omega^2} + \frac{\lambda\cos 2\omega t}{k^2-4\omega^2}\right),$$

односно

$$z_2 = \frac{G_1 r\omega^2}{(G_2+G)(k^2-\omega^2)}\cos\omega t + \frac{r}{l}\,\frac{G_1 r\omega^2}{(G_2+G)(k^2-4\omega_2)}\cos 2\omega t\ ,$$

где је

$$k = \sqrt{\frac{C_z A g}{G_2 + G}}$$

Опште решење диференцијалне једначине кретања фундамента биће

$$z = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{mr\omega^2}{M}\left(\frac{\cos\omega t}{k^2-\omega^2} + \frac{\lambda\cos 2\omega t}{k^2-4\omega^2}\right)$$

Као што видимо у овом случају осцилација фундамента једноцилиндричног вертикалног мотора имамо два случаја резонанце и то за: $\omega = k$ и $\omega = \dfrac{k}{2}$. Ове вредности угаоне брзине вратила мотора називају се критичним брзинама. Према томе, при пројектовању фундамента оваквог мотора, његову тежину и димензије треба изабрати тако, да нормалне брзине окретања вратила мотора леже довољно далеко од ових критичних брзина.

70.) Наћи тежину фундамента испод вертикалног једноцилиндричног мотора тежине $G_2 = 10$ t, под условом да амплитуда принудних вертикалних осцилација фундамента не буде већа од $z_2 = 0{,}25$ cm. Површина основе фундамента је: $A = 100\ \mathrm{m}^2$, а крутост еластичног равномерног сабијања земљишта је $C_z = 50\ \mathrm{t/m}^3$. Дужина криваје мотора је $r = 30$ cm, а дужина клипне полуге $l = 180$ cm. Вратило мотора окреће се брзином од $n = 240$ obr/min. Тежина клипа и других неуравнотежених делова који се крећу наизменичним кретањем износи $G_1 = 250$ kg.

Примедба: Употребити решење из предходног задатка и занемарити члан који садржи однос $\dfrac{r}{l}$.

$$z_2 \approx \frac{G_1 r\omega^2}{(G_2+G)(k^2-\omega^2)}$$

Како је
$$k^2 = \frac{C_z A g}{G_2+G},$$

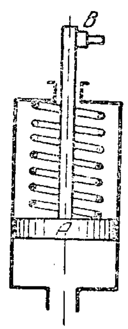
одавде се добија да је

$$G \approx \frac{C_z A g}{\omega^2} - \frac{G_1 r}{z_2} - G_2$$

$$G = \frac{5\cdot 10^{-2}\cdot 10^6\cdot 981}{64\pi^2} - \frac{0,25\cdot 30}{0,25} - 10 = 77,6 - 30 - 10 = 37,6\ \mathrm{t}.$$

***71.)** *Watt-ов индикатор* — Механички рад притиска паре у цилиндру парне машине може се одредити мерењем површине индикаторског диаграма, који се аутоматски добија помоћу Watt-овог индикатора.

У унутрашњости малог вертикално постављеног цилиндра креће се клип који је учвршћен за штап AB, на чијем се крају налази писаљка B. Између горњег поклопца цилиндра и клипа налази се спирална опруга. На доњем делу индикатора налази се отвор кроз који улази пара из парног цилиндра машине, тако да је у овом делу индикатора притисак паре исти као и у цилиндру парне машине. Тај притисак покреће штап заједно са писаљком B. Покретање писаљке једнако је сабијању опруге и записује се на лист хартије који се креће праволиниски у хоризонталном правцу. Сабијање опруге пропорционално је сили која врши сабијање. Када би притисак паре био константан и покретни део индикатора био у миру, онда би сабијање опруге било пропорционално притиску паре и тада би према положају писаљке B могли да одредимо притисак паре. Притисак паре је, међутим, променљива сила, јер делује периодично, услед чега се покретни део индикатора не налази у миру, већ врши осцилаторно кретање. Из тог разлога стезање опруге није сразмерно притиску паре. Да би утврдили која зависност постоји између притиска паре и покретања писаљке B, расмотрићемо детаљније кретање покретног дела индикатора.

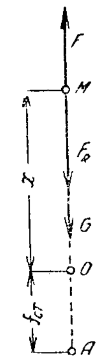


Сл. 64

На покретни део индикатора који сматрамо за материјалну тачку делују четири силе при његовом кретању.

* Пример узет из: Predavanja iz teoriske mehanike, II dio, prevod s ruskog od Nikolai-a, Zagreb 1918.

инерцијална — d'Alembert-ова сила,
тежина покретног дела индикатора,
притисак паре и
реституциона сила у опрузи.



Сл. 65

Ако са M означимо тренутни положај покретног дела индикатора, са A положај тачке M који одговара почетном положају покретног дела индикатора, који је причвршћен за опругу када на њу не делује притисак паре и са O положај опруге у ненапрегнутом стању, кад о њу није обешен покретни део индикатора, онда је сабијање опруге $\overline{AM}$, па је реституциона сила $F_R = c\cdot\overline{AM} = c(x+f_{ст})$.

Ако притисак паре на јединицу површине обележимо са p, и ако је површина клипа у индикатору A, онда ће сила притиска паре бити $F = Ap$.

Притисак паре p мења се периодично у току времена. Период мењања притиска паре T једнак је времену у коме главна осовина машине изврши један пун окрет. Ако се главна осовина окреће једноликом угаоном брзином ω,

онда је
$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

па је фреквенција промене притиска паре p једнака угаоној брзини ω главне осовине.

Притисак паре је доста сложена функција времена. Претпоставимо да се он мења по закону

$$p = p_0 + p_0 \sin\omega t,$$

тј. у границама од O до $2p_0$, где је p_0 средња вредност притиска p. Ова претпоставка је, разумљиво, далеко од стварности, мада се помоћу Fourier-овог реда свака периодична функција може претставити сличним тригонометриским редом, само који ће имати не један, већ већи број тригонометриских чланова.

Најзад, ако тежину покретног дела индикатора обележимо са G, онда ће на основи d'Alembert-овог принципа бити

$$\vec{F}_i + \vec{F}_R + \vec{G} - \vec{F} = 0$$

Како је
$$F_R = c(x+f_{ст}) \quad \text{и}$$
$$F = Ap = Ap_0 + Ap_0\sin\omega t\ ,$$

то је диференцијална једначина кретања покретног дела индикатора

$$m\ddot{x} = Ap_0 + Ap_0\sin\omega t - G - cf_{ст} - cx$$

Статички угиб одређујемо из услова равнотеже између рестиуционе силе и сила које у равнотежном положају за $t = 0$ делују на клип индикатора. Према томе је

$$Ap_0 - G = cf_{ст} \; ,$$

па претходна једначина прелази у

$$m\ddot{x} + cx = Ap_0 \sin \omega t \; ,$$

односно
$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{Ap_0}{m} \sin \omega t \; .$$

Решење ове диференцијалне једначине је

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{Ap_0}{m\,(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

Ако се у почетном тренутку тачка M налази у миру у равнотежном положају O, онда је за

$$t = 0 \qquad x = 0$$
$$\dot{x} = 0$$

па су произвољне константе

$$C_1 = 0 \quad ; \quad C_2 = -\frac{\omega}{k} \frac{Ap_0}{m\,(k^2 - \omega^2)} \; ,$$

односно
$$x = \frac{Ap_0}{m\,(k^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right).$$

Овај израз нам дефинише кретање покретног дела индикатора, које изазива промењиви притисак паре.

Ако ово помножимо са c, односно силом која изазива сабијање опруге за 1 cm, онда ће индикатор показивати силу

$$\frac{cAp_0}{m\,(k^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right)$$

или пошто је
$$k^2 = \frac{c}{m}$$

$$Ap_0 \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right).$$

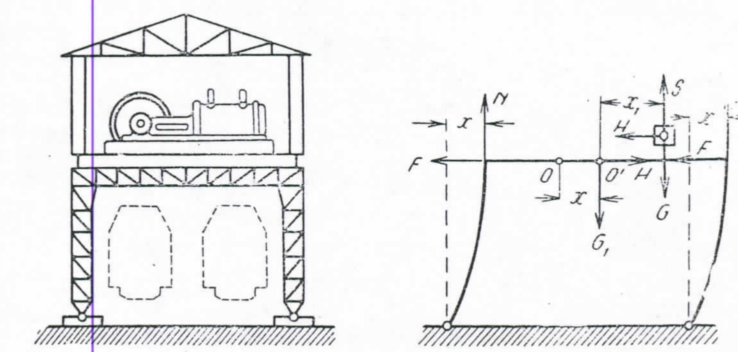
Разлика између ове величине и стварне вредности промењивог притиска $Ap_0 \sin \omega t$ даје нам грешку показивања индикатора и та грешка износи

$$\Delta = Ap_0 \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right) - Ap_0 \sin \omega t \; ,$$

односно
$$\Delta = Ap_0 \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} \left(\frac{\omega^2}{k^2} \sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right).$$

Одавде се види да ће грешка коју ће показивати индикатор бити утолико мања уколико је однос $\frac{\omega}{k}$ мањи. Индикатор ће, дакле, показивати притисак паре са довољном тачношћу, ако је кружна фреквенција слободних осцилација његовог покретног дела довољно велика у поређењу са угаоном брзином ω главне осовине. Уколико је, дакле, машина брзоходија, утолико мора бити већа фреквенција слободних осцилација индикатора. Опруга индикатора обично се рачуна тако да је $\frac{\omega}{k} < \frac{1}{20}$.

***72.)** У просторији која лежи на 4 вертикална стуба налази се парна машина. Прорачунати стубове тако, да осцилације просторије, које настају при раду машине, буду у унапред заданим границама.



Сл. 66

Означимо са G тежину машинских делова који врше транслаторно кретање (клип, клипњача итд). Тежину просторије заједно с тежином машинских делова који не врше транслаторно кретање означимо са G_1. Ход клипа означимо са $2a$ и претпоставимо да се главна осовина машине окреће једнолико угаоном брзином ω. Ако однос између дужине криваје и дужине моторне полуге није велики, онда можемо кретање штапа сматрати хармониским кретањем, амплитуде a, и периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$, који је једнак периоду пуног обртаја осовине машине.

* Пример узет из: Predavanja iz teoriske mehanike, II dio, prevod s ruskog od Nikolai-a, Zagreb 1948.

Дакле, хоризонтална плоча тежине G_1, и масе $M = \frac{G_1}{g}$, ослања се на четири вертикална стуба и по њој се креће лево и десно тело тежине G и масе $m = \frac{G}{g}$, које врши хармониске осцилације амплитуде a, и периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Расмотрићемо осцилације плоче и прорачунати стубове тако да амплитуда тих осцилација не пређе задану величину.

На масу m која се креће по плочи делују њена тежина G, вертикална реакција плоче S, која држи равнотежу са силом F и хоризонтална сила H, која производи осцилаторно кретање масе m (притисак паре на клип). На плочу делују њена тежина у тежишту C, вертикалне и хоризонталне реакције N и F притиснутих и савијених штапова, вертикални притисак масе m, који је једнак њеној тежини G и најзад хоризонтална моторна сила H (по закону акције и реакције). Пара у парном цилиндру врши притисак не само на штап, него и у супротном смеру на поклопац цилиндра. Сматраћемо да сила H која делује на плочу има нападну тачку у тежишту плоче C.

Поставимо диференцијалне једначине кретања плоче и масе m.

Означимо са x удаљење тежишта плоче од њеног равнотежног положаја у неком тренутку, а са x_1 промењиво удаљење масе m такође од тачке C. Диференцијалне једначине кретања биће

$$M\ddot{x} = H - 4F$$

$$m(\ddot{x} + \ddot{x}_1) = -H$$

Ако елиминишемо H из ових једначина добијамо

$$(a) \qquad (M+m)\ddot{x} + m\ddot{x}_1 = -4F$$

По претпоставци је $x_1 = a \sin \omega t$. Хоризонталне реакције пропорционалне су угибу стубова $F = cx$, а као што је познато из отпорности материјала

$$c = \frac{3EI}{l^3},$$

где је l дужина стубова, E модул еластичности материјала стубова и I моменат инерције попречног пресека стуба у односу на осу која пролази кроз тежиште и стоји нормално на раван угиба.

Кад извршимо смену у једначини (a) добићемо

$$(M+m)\ddot{x} - ma\omega^2 \sin \omega t = -4cx$$

или
$$\ddot{x} + \frac{4c}{M+m}x = \frac{m}{M+m} a\omega^2 \sin \omega t$$

Ова једначина одређује кретање плоче.

Амплитуда принудних осцилација за случај

$$\omega < k = \sqrt{\frac{4c}{M+m}}$$

биће
$$C = \frac{\frac{m}{M+m} a\omega^2}{\frac{4c}{M+m} - \omega^2} = \frac{ma\omega^2}{4c - (M+m)\omega^2}$$

а за случај
$$\omega > k = \sqrt{\frac{4c}{M+m}}$$

биће
$$C = \frac{ma\omega^2}{(M+m)\omega^2 - 4c}$$

Ако амплитуда плоче има неку задану вредност α, онда је

$$\alpha = \frac{ma\omega^2}{4c - (M+m)\omega^2}$$

одакле је коефициент c, који карактерише чврстоћу стубова

$$(b) \qquad c = \frac{\omega^2}{4}\left(M + m + m\frac{a}{\alpha}\right) = \frac{\omega^2}{4g}\left(G + G_1 + G\frac{a}{\alpha}\right)$$

за
$$\omega < k,$$

и
$$(c) \qquad c = \frac{\omega^2}{4g}\left(G + G_1 - G\frac{a}{\alpha}\right) \qquad \text{за} \quad \omega > k$$

Величина $k = \sqrt{\frac{4c}{M+m}}$ је кружна фреквенција слободних осцилација плоче. За $\omega = k$ амплитуда је бесконачно велика и тада настају осцилације опасне за отпорност конструкције.

Аналогне појаве дешавају се и при критичној брзини, која је у нашем случају

$$\omega_k = \sqrt{\frac{4c}{M+m}} = \sqrt{\frac{12EIg}{l^3(G+G_1)}}$$

Ако је нормална угаона брзина већа од критичне $\omega > \omega_k$, онда при пуштању машине у рад мора угаона брзина машине проћи преко вредности, која одговара критичној угаоној брзини. У том тренутку могу настати опасни потреси конструкције. Практичну примену има дакле формула (b).

Кад у формули (b) сменимо $c = \frac{3EI}{l^3}$ и решимо једначину по I,

добијамо израз који нам одређује колики мора бити моменат инерција пресека штапа, да би амплитуда принудних осцилација конструкције на којој се налази машина имала задану вредност α. Тај израз гласи

$$I = \frac{l^3\omega^2}{12\,Eg}\left(G + G_1 + G\frac{a}{\alpha}\right).$$

4. ОСЦИЛАЦИЈЕ СА ОТПОРНОМ СИЛОМ

У досада проученим случајевима осцилација на материјалну тачку није деловала никаква отпорна сила. Међутим, у пракси готово увек при осциловању имамо дејство отпорне силе. Од отпорних сила треба на првом месту поменути силу трења, која је за мале брзине сразмерна нормалном притиску $F_W = \mu F_N$ (Coulomb-ов отпор трења), а за веће брзине је сразмерна првом или другом степену брзине. Дакле $F_W = -r\dot{x}$, или чак $F_W = -r\dot{x}^2$. Проучићемо два случаја ових осцилација:

а) ОСЦИЛАЦИЈЕ СА ОТПОРНОМ СИЛОМ КОЈА ЈЕ СРАЗМЕРНА ПРВОМ СТЕПЕНУ БРЗИНЕ

Ако материјалну тачку масе m изведемо из равнотежног положаја, под истим условима као и у случају хармониских осцилација, с том разликом што ће на њу деловати и отпорна сила сразмерна првом степену брзине $F_W = -rv = -r\dot{x}$, онда ће на основи d'Alembert-овог принципа бити

$$\vec{F}_i + \vec{F}_R + \vec{F}_W = (-m\ddot{x}) - cx - r\dot{x} = 0\,,$$

па је диференцијална једначина кретања

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = 0 \tag{38}$$

или

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

Ставимо да је $\frac{r}{m} = 2n \qquad \frac{c}{m} = k^2$

па ћемо добити

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0 \tag{39}$$

Пошто је $r = 2mn$, то се отпорна сила може написати и у облику

$$|F_W| = 2mn\dot{x} \tag{40}$$

Карактеристична једначина хомогене диференцијалне једначине са константним коефицијентима (39) је

$$\alpha^2 + 2n\alpha + k^2 = 0$$

а њено решење је

$$\alpha_{1/2} = -n \mp \sqrt{n^2 - k^2}$$

Корени ове једначине могу бити: коњуговано комплексни, реални и различити и најзад реални и једнаки. У зависности од тога разликујемо три случаја:

1.) Периодично (осцилаторно) кретање

У случају да је $n < k$ решење карактеристичне једначине ће бити

$$\alpha_{1/2} = -n \mp i\sqrt{k^2 - n^2} \ ,$$

односно кад ставимо

$$\beta = \sqrt{k^2 - n^2}$$

$$\alpha_{1/2} = -n \mp \beta i \,,$$

па ће решење једначине (39) бити

$$x = Ae^{(-n + i\beta)t} + Be^{(-n - i\beta)t}$$

односно

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\right) =$$

$$= e^{-nt}\left(C_1 \cos t\sqrt{k^2 - n^2} + C_2 \sin t\sqrt{k^2 - n^2}\right) \tag{41}$$

где је

$$C_1 = A + B$$

и

$$C_2 = i\,(A - B)$$

Константе C_1 и C_2 одређујемо из почетних услова. Тако ако је за

$$t = 0 \qquad x = x_0$$

и

$$\dot{x} = \dot{x}_0$$

имаћемо да је

$$C_1 = x_0$$

$$C_2 = \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\beta} = \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \,,$$

па једначина (41) прелази у

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos t\sqrt{k^2 - n^2} + \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin t\sqrt{k^2 - n^2}\right) \tag{42}$$

Као што се из овог решења види осцилација у овом случају је збир двеју осцилација исте периоде

$$T_a = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} \,, \tag{43}$$

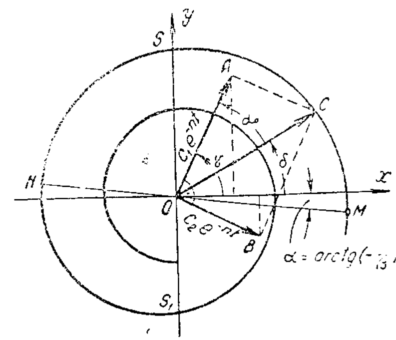
које врло брзо опадају са временом, па се ове осцилације зато називају и *амортизоване осцилације*.

Пошто имамо две осцилације исте периоде, а различитих амплитуда, то се оне слично као и у случају хармониских осцилација могу сложити у једну, и то било геометриски, било математичким сменама. Показаћемо и једно и друго.

Нека се вектор $\overrightarrow{OA}$ интензитета $C_1 e^{-nt} = x_0 e^{-nt}$ окреће угаоном брзином $\beta = \sqrt{k^2 - n^2}$ око тачке O, тј. нека је $\gamma = \beta t$. Пројекција овог вектора на правац Ox је $C_1 e^{-nt} \cos \beta t = x_0 e^{-nt} \cos t\,\sqrt{k^2 - n^2}$.

Узмимо сада други вектор $\overrightarrow{OB}$ интензитета

$$C_2 e^{-nt} = \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}\, e^{-nt} \,,$$



Сл. 67

који је управан на првом и који се обрће око тачке O истом угаоном брзином. Његова пројекција на x — осу је

$$C_2 e^{-nt} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = C_2 e^{-nt} \sin \gamma = \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin t\,\sqrt{k^2 - n^2}$$

Међутим, обртање ова два вектора можемо заменити обртањем вектора $\overrightarrow{OC}$ истом угаоном брзином, а који је једнак векторском збиру прва два вектора $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Његов интензитет је

$$\overline{OC} = e^{-nt}\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = e^{-nt}\sqrt{x_0^2 + \frac{(nx_0 + \dot{x}_0)^2}{k^2 - n^2}} \,,$$

а пројекција на x-осу

$$x = \overline{OC} \cos \delta = \overline{OC} \cos(\beta t - \alpha_0) =$$

$$= e^{-nt}\sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}} \cos\left(t\,\sqrt{k^2 - n^2} - \alpha_0\right) \tag{44}$$

Као што се из овога види амортизоване осцилације материјалне тачке m можемо претставити или обртањем два вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, када је удаљење материјалне тачке x од равнотежног положаја једнако збиру пројекција ових вектора на x-осу, или обртањем вектора $\overrightarrow{OC}$, када је то удаљење једнако његовој пројекцији на x-осу.

Величина $$a_1 = e^{-nt}\sqrt{x_0{}^2 + \frac{(nx_0+\dot{x}_0)^2}{k^2-n^2}} \tag{45}$$

назива се амплитудом амортизоване осцилације.

Угао α_0 је фазни угао или фаза и дат је изразом

$$tg\,\alpha_0 = \frac{C_2}{C_1} = \frac{nx_0+\dot{x}_0}{x_0\sqrt{k^2-n^2}}$$

односно $$\alpha = arc\,tg\,\frac{nx_0+\dot{x}_0}{x_0\sqrt{k^2-n^2}} \tag{46}$$

За време обртања вектора $\overrightarrow{OC}$, тачка C описује логаритамску спиралу, чија тангента заклапа угао $arc\,tg\left(-\frac{n}{\beta}\right)$ са нормалом на вектор $\overrightarrow{OC}$. Крајњи положаји осцилујућег тела одговарају тачкама у којима спирала има вертикалну тангенту. Ове су тачке одређене пресецима спирале са правом MN. Пресеци спирале са вертикалном осовином одговарају тренуцима у којима тело које осцилује пролази кроз положај равнотеже. Јасно се види да је временски интервал потребан за померање тела из положаја равнотеже до крајњег положаја, рецимо време дато углом SON, мање од времена потребног да се тело врати из крајњег положаја до идућег положаја равнотеже, које је дато углом $N0S$. Међутим, време између два узастопна крајња положаја тела, дато тачкама M и N је увек исто и једнако половини периода T_a.

Једначину (42) можемо добити и чисто математичким сменама, ако ставимо да је

$$\left.\begin{aligned} C_1e^{-nt} &= x_0e^{-nt} = a\cos\alpha_0 \\ C_2e^{-nt} &= \frac{nx_0+\dot{x}_0}{\sqrt{k^2-n^2}}e^{-nt} = a\sin\alpha_0 \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Одавде је опет

$$a = e^{-nt}\sqrt{C_1{}^2+C_2{}^2} = e^{-nt}\sqrt{x_0{}^2+\frac{(nx_0+\dot{x}_0)^2}{k^2-n^2}}$$

$$tg\,\alpha_0 = \frac{C_2}{C_1} = \frac{nx_0+\dot{x}_0}{x_0\sqrt{k^2-n^2}}\,.$$

Кад изразе (47) сменимо у једначину (41) добићемо опет једначину (44).

Нађимо време за које ће тачка достићи прву амплитуду. То ће бити у тренутку када је брзина равна нули, тј. кад је $\dot{x} = 0$.

Из једначине (41) имамо да је

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t) + e^{-nt}(-C_1\beta\sin\beta t + C_2\beta\cos\beta t) = 0$$

односно $$(-nC_1 + C_2\beta)\cos\beta t = (nC_2 + C_1\beta)\sin\beta t.$$

Нека је то у тренутку t_1, па имамо

$$tg\,(t_1\beta) = \frac{C_2\beta - C_1n}{C_2n + C_1\beta}$$

Према томе, време кад ће тачка достићи прву амплитуду дато је изразом

$$t_1 = \frac{1}{\beta}\,arc\,tg\,\frac{C_2\beta - C_1n}{C_2n + C_1\beta} \tag{48}$$

где је $\beta = \sqrt{k^2-n^2}$, а константе C_1 и C_2 зависе од почетних услова.

Следеће амплитуде тачка ће достићи у тренуцима:

$$t_2 = t_1 + \frac{T_a}{2}\ ;\quad t_3 = t_1 + 2\frac{T_a}{2}\ ;\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ t_n = t_1 + (n-1)\frac{T_a}{2}\,,$$

а њихове вредности биће

$$x_1\,,\quad x_2\,,\quad x_3\,,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ x_n\,.$$

Знамо да је $\quad x = e^{-nt}\sqrt{C_1{}^2+C_2{}^2}\cos(\beta t - \alpha_0)\,,$

па је за $$t = t_1$$

$$x_1 = e^{-nt_1}\sqrt{C_1{}^2+C_2{}^2}\cos(\beta t_1 - \alpha_0)\ ,$$

а за $$t = t_2 = t_1 + \frac{T_a}{2}$$

$$x_2 = e^{-n\left(t_1+\frac{T_a}{2}\right)}\sqrt{C_1{}^2+C_2{}^2}\cos\left[\beta\left(t_1+\frac{T_a}{2}\right)-\alpha_0\right]$$

Како је $$\frac{T_a}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{k^2-n^2}} = \frac{\pi}{\beta}\,,$$

то је $$\cos\left[\beta\left(t_1+\frac{T_a}{2}\right)-\alpha_0\right] = \cos(\beta t_1 - \alpha_0 + \pi) = -\cos(\beta t_1 - \alpha_0),$$

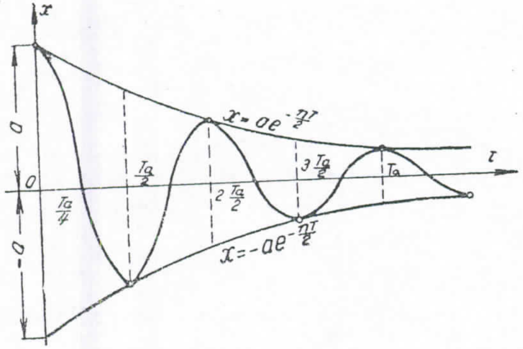
па је $$\frac{|x_2|}{|x_1|} = e^{-n\frac{T_a}{2}}\,,$$

односно $$\eta = \frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} = \frac{|x_1|}{|x_2|} = e^{\frac{nT_a}{2}} = e^{\frac{n\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}} \tag{49}$$

Број $$ln\,\eta = \frac{nT_a}{2} \tag{50}$$

зове се *логаритамски декремент осцилација* и показује брзину којом се ове осцилације амортизују.

Графички приказ овог кретања изгледа



Сл 68

Период амортизованих осцилација је

$$T_a = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}},$$

док је период сопствених осцилација, као што знамо

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

Упоређивањем вредности за T_a и T видимо да отпор повећава период амортизованих осцилација, јер је

$$T_a = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}},$$

или ако је n мало у поређењу са k

$$T_a = T\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{k}\right)^2 + \cdots\right] > T$$

Како је

$$ln\,\eta = n\,\frac{T_a}{2},$$

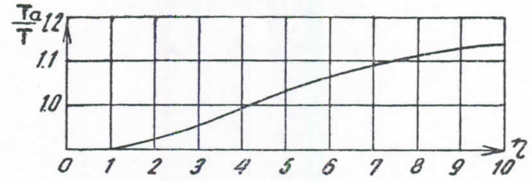
то је

$$\frac{T_a}{T} = \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,\eta}{\pi}\right)^2} \tag{51}$$

Зависност односа $\frac{T_a}{T}$ од η дата је на слици 69.

На пр. ако је $n = 0{,}05\,k$, онда је $\frac{T_a}{T} = 1{,}00125$. У том случају период T_a разликује се од периода T само за $0{,}125\%$. Међутим, амплитуда пуне осцилације смањиће се за исто време за више од

0,25 своје величине, а после 10 пуних осцилација амплитуда ће бити само 0,04304-део своје првобитне величине.



Сл. 69

Одавде видимо да *мали отпор врло мало мења период*, али зато *врло брзо гаси слободне осцилације*.

2.) Апериодично кретање

У случају да је $n > k$ оба корена карактеристичне једначине су реална и различита, тј.

$$\alpha_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}$$

и

$$\alpha_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2},$$

па ће решење диференцијалне једначине (39) имати облик

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} \tag{52}$$

Ово решење не претставља више осцилаторно кретање. Отпор је тако велики да тело померено из равнотежног положаја више не осцилује, већ се постепено враћа натраг у почетни положај.

3.) Гранични случај апериодичног кретања.

У случају када је $n = k$ оба корена карактеристичне једначине су реална и једнака, тј.

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = -n$$

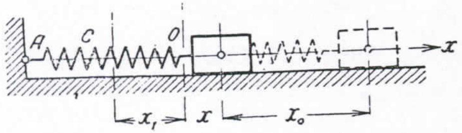
па ће решење диференцијалне једначине (39) имати облик

$$x = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\alpha t} \tag{53}$$

И у овом случају, као што видимо, немамо осцилаторног кретања.

b.) ОСЦИЛАЦИЈЕ СА ОТПОРНОМ СИЛОМ COULOMB-ОВОГ ТРЕЊА

Ако се материјална тачка масе m причвршћена опругом крутости c у тачки A налази на рапавој површини, онда ће на њу кад је изведемо из положаја равнотеже, деловати не само реституциона сила, већ и сила Coulomb-овог трења, сразмерна нормалном притиску $F_W = \mu F_N = \mu m g$. Константа μ назива се коефицијент Coulomb-овог трења и нема димензије.



Сл. 70

Отпорна сила трења увек је супротног знака од брзине, па ако знак било које величине α обележимо симболом $sign\,\alpha$, онда можемо написати $F_W = -\mu mg\, sign\, \dot{x}$

Диференцијална једначина кретања, према томе, биће

$$\vec{F}_i + \vec{F}_R + \vec{F}_W = 0 \quad ,$$

односно
$$(-m\ddot{x}) - cx - \mu mg\, sign\dot{x} = 0 \tag{54}$$

Нека су почетни услови кретања такви да је

за
$$t = 0 \qquad x = x_0$$
$$\dot{x} = 0$$

Да би кретање отпочело потребно је дареституциона сила опруге буде већа од силе Coulomb-овог трења, тј. да је

$$c\,|x_0| > \mu mg$$

Ако је $x_0 > 0$ то ће почетно кретање имати смер негативне x-осе, тј. sign $\dot{x} = -1$, па једначина (54) прелази у

$$\ddot{x} + k^2 x = \mu g \quad , \tag{55}$$

а њено решење је
$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{\mu g}{k^2} \tag{56}$$

За малопре наведене почетне услове је

$$C_1 = x_0 - \frac{\mu g}{k^2} \quad ; \qquad C_2 = 0 \ ,$$

па ако обележимо са
$$a = \frac{\mu g}{k^2}$$

онда једначина (56) прелази у

$$x = (x_0 - a) \cos kt + a \tag{57}$$

Брзина ће имати негативан смер у интервалу $0 < t < \frac{\pi}{k}$. У тренутку $t = t_1 = \frac{\pi}{k}$ брзина је равна нули и мења знак, а амплитуда у том тренутку биће

$$x_1 = -(x_0 - 2a) \tag{58}$$

Од овог тренутка материјална тачка се креће у позитивном смеру x-осе, тј. sign $\dot{x} = 1$, па једначина (54) прелази у

$$\ddot{x} + k^2 x = -\mu g \ , \tag{59}$$

а њено решење је

$$x = C_1' \cos kt + C_2' \sin kt - \frac{\mu g}{k^2} \tag{60}$$

Почетни услови кретања у овом случају су

За
$$t = t_1 = \frac{\pi}{k} \qquad x = x_1 = -(x_0 - 2a)$$
$$\dot{x} = 0$$

па је
$$C_1' = x_0 - 3a \ ; \qquad C_2' = 0 \ ,$$

па решење дато једначином (60) прелази у

$$x = (x_0 - 3a) \cos kt - a \tag{61}$$

Брзина ће имати позитивни смер у интервалу

$$\frac{\pi}{k} < t < \frac{2\pi}{k} \, ,$$

а за $t = t_2 = \frac{2\pi}{k}$ она постаје равна нули и мења знак. Амплитуда у том тренутку биће

$$x_2 = x_0 - 4a \tag{62}$$

Одавде видимо да ће у зависности од знака брзине диференцијалне једначине кретања бити

$$x = (x_0 - a) \cos kt + a \qquad 0 < t < \frac{\pi}{k}$$

$$x = (x_0 - 3a) \cos kt - a \qquad \frac{\pi}{k} < t < \frac{2\pi}{k}$$

$$x = (x_0 - 5a) \cos kt + a \qquad \frac{2\pi}{k} < t < \frac{3\pi}{k}$$

$$x = (x_0 - 7a) \cos kt - a \qquad \frac{3\pi}{k} < t < \frac{4\pi}{k} \quad \text{итд.,}$$

док ће одговарајуће амплитуде бити

$$x_1 = -(x_0 - 2a) \qquad \text{за} \quad t_1 = \frac{\pi}{k}$$

$$x_2 = x_0 - 4a \qquad \text{за} \quad t_2 = \frac{2\pi}{k}$$

$$x_3 = -(x_0 - 6a) \qquad \text{за} \quad t_3 = \frac{3\pi}{k}$$

$$x_4 = x_0 - 8a \qquad \text{за} \quad t_4 = \frac{4\pi}{k} \quad \text{и т. д.}$$

и уопште
$$x_n = (-1)^n (x_0 - n \cdot 2a) \tag{63}$$

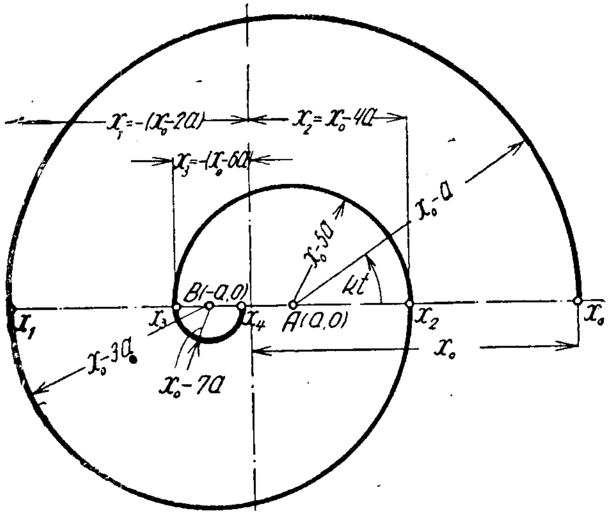
Сила трења, према томе, не утиче на период осцилација, већ само на амплитуде, које се у аритметичкој прогресији у сваком полупериоду смањују за величину

$$2a = 2\frac{\mu g}{k^2}$$

Кретање траје докле год је реституциона сила већа од силе Coulomb-овог трења, тј. докле год је испуњен услов

$$k^2(-1)^n(x_0 - n \cdot 2a) > \mu g \tag{64}$$

До овог закључка можемо лако доћи и помоћу једног графикона.



Сл. 71

Уочимо на x-оси две тачке: $A(a,0)$ и $B(-a,0)$, где је $a = \frac{\mu g}{k^2}$. Узмимо сада вектор интензитета $(x_0 - a)$ и нека се он окрене за угао π око тачке A угаоном брзином $\omega = kt$. Његов врх доспеће у тачку x_1, која нам претставља амплитуду у тренутку $t_1 = \frac{\pi}{k}$. Ако сада узмемо други вектор интензитета $(x_0 - 3a)$, и ако се он окрене

око тачке B за угао π угаоном брзином $\omega = kt$, онда ће његов врх доћи у тачку x_2, која нам претставља амплитуду у тренутку $t_2 = \frac{2\pi}{k}$. И тако редом у зависности од величина x_0 и a, смањујући интензитете вектора за величину $2a$, можемо добити све амплитуде редом. Кретање се наставља доклегод врх вектора при окретању за угао π, пада са супротне стране координатног почетка, од оне на којој се налази тачка око које се он обрће. Према нашем графикону за наведени случај материјална тачка престала би да се креће у тренутку $t_4 = \frac{4\pi}{k}$.

Примери

73.) Плочица D тежине 100 gr. обешена о опругу AB у непомичној тачки A креће се међу половима магнета услед Foucault-ових струја. Кретање је успоравано силом пропорционалном брзином. Сила отпора кретања износи $k_1 \Phi^2 v$ — dyna, где је $k_1 = 0{,}0001$, v — брзина у cm/sec, а Φ — магнетни флукс између полова N и S. У почетном тренутку брзина плоче је нула, а опруга је нерастегнута. Крутост опруге је $c = 20$ gr/cm. Одредити кретање плоче ако је флукс $\Phi = 1000\sqrt{5}$ максвела.

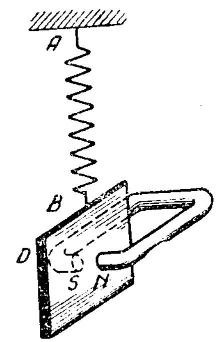
Диференцијална једначина кретања биће

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + c(x + f_{ст}) - G = 0,$$

односно
$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + k^2 x = 0$$

или
$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,$$

где је
$$2n = \frac{r}{m}.$$



Сл. 72

Карактеристична једначина је

$$\alpha^2 + 2n\alpha + k^2 = 0,$$

а њени корени

$$\alpha_{1/2} = -n \mp \sqrt{n^2 - k^2}$$

$$n = \frac{r}{2m} = \frac{rg}{2G}$$

$$F_W = k_1 \Phi^2 \dot{x} \text{ dyna},$$

односно
$$F_W = \frac{k_1 \Phi^2 \dot{x}}{g} \text{ грама}; \quad \text{како је} \quad \frac{k_1 \Phi^2 \dot{x}}{g} = r\dot{x},$$

то је
$$r = \frac{k_1 \Phi^2}{g},$$

односно
$$n = \frac{k_1 \Phi^2}{2G}$$

$$n = \frac{10^{-4} \cdot 10^6 \cdot 5}{2 \cdot 10^2} = 2{,}5$$
$$n^2 = 6{,}25 \text{ sec}^{-2}$$
$$k^2 = \frac{cg}{G} = \frac{20g}{100} = \frac{g}{5} = 196{,}2 \text{ sec}^{-2}$$

Пошто је $n^2 - k^2 < 0$ решење горње диференцијалне једначине ће имати облик
$$x = e^{-nt}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t),$$

где је
$$\beta = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{189{,}95} \approx 13{,}78$$

Почетни услови кретања су

за
$$t = 0 \qquad x_0 = -f_{ст} = -5$$
$$\dot{x}_0 = 0,$$

па је
$$C_1 = -f_{ст} = -5$$
$$C_2 = \frac{nC_1}{\beta} = -\frac{2{,}5 \cdot 5}{13{,}78} = -0{,}907$$

Према томе је
$$x = -e^{-2{,}5t}(5 \cos 13{,}78\, t + 0{,}907 \sin 13{,}78\, t) \text{ cm}.$$

Ако за координатни почетак у односу на који одређујемо диференцијалну једначину кретања узмемо крај опруге када је она у ненапрегнутом стању, онда ће решење имати облик
$$\xi = x + f_{ст} = x + 5,$$

па је
$$\xi = 5 - e^{-2{,}5t}(5 \cos 13{,}78\, t + 0{,}907 \sin 13{,}78\, t) \text{ cm}.$$

74.) Одредити кретање плочице D под условима предњег задатка у случају ако је магнетни флукс $\Phi = 10000$ максвела.

У овом случају је
$$n = \frac{k_1 \Phi^2}{2G} = \frac{10^{-4} \cdot 10^8}{2 \cdot 10^2} = 50; \qquad n^2 = 2500 \text{ sec}^{-2}$$
$$k^2 = 196 \text{ sec}^{-2}$$

Пошто је $n^2 - k^2 > 0$, то ће решење диференцијалне једначине имати облик
$$x = C_1 e^{(-n+\beta)t} + C_2 e^{(-n-\beta)t},$$

где је
$$\beta^2 = n^2 - k^2 = 2304; \quad \beta = 48,$$

па је
$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-98t}$$

За почетне услове

за
$$t = 0 \qquad x_0 = -f_{ст} = -5$$
$$\dot{x}_0 = 0$$

добијамо
$$C_1 + C_2 = -f_{ст} = -5$$
$$C_1 + 49\, C_2 = 0,$$

па је
$$C_1 = -49 \cdot \frac{5}{48}; \qquad C_2 = \frac{5}{48}$$

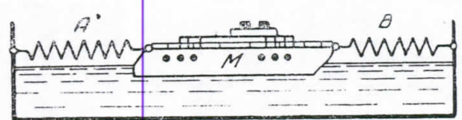
Онда је
$$x = \frac{5}{48}\left(e^{-98t} - 49 e^{-2t}\right) \text{ cm}.$$

Ако, слично као и у претходном задатку, узмемо крај опруге када је она у ненапрегнутом стању за координатни почетак у односу на који одређујемо диференцијалну једначину кретања, онда ће бити
$$\xi = x + f_{ст} = x + 5,$$

па је
$$\xi = 5 - \frac{5}{48}\left(49\, e^{-2t} - e^{-98t}\right) \text{ cm}.$$

75.) У циљу одређивања отпора воде кретању модела брода при врло малим брзинама пуштен је модел да плива у суду везан за прамац и крму једнаким опругама A и B за суд. Еластична сила у једној опрузи пропорционална је издужењу опруге. Резултати посматрања су показали, да се удаљење модела од равнотежног положаја смањује после сваке полуосцилације, чинећи геометриску прогресију са количником 0,9, док је период полуосцилације $\frac{T_a}{2} = \frac{500}{981}$ sec.

Одредити у грамима отпорну силу воде по граму тежине модела, ако је његова брзина кретања $v = 1$ cm./sec., претпостављајући да је отпор воде сразмеран првом степену брзине.



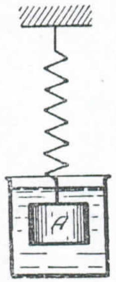
Сл. 73

$$x_2 = 0{,}9\, x_1$$
$$\frac{|x_2|}{|x_1|} = 0{,}9 = e^{-n\frac{T_a}{2}}$$
$$\frac{T_a}{2} = \frac{500}{981} \text{ sec}.$$
$$-n \frac{T_a}{2} \lg e = \lg 0{,}9$$

$$n = -\frac{lg\, 0{,}9}{\frac{T_a}{2}\, lge} \quad ; \qquad m = \frac{1}{g} \quad ; \qquad \dot{x} = 1 \text{ cm./sec.}$$

$$|F_w| = 2\, m n \dot{x} = -\frac{2\, lg\, 0{,}9}{g T_a\, lg\, e} = -0{,}00042 \text{ gr/gr.}$$

76.) Coulomb је вискозитет неке течности одређивао на овај начин: танку плочу A, тежине G грама, учврстио би за опругу и посматрао је њену осцилацију како у ваздуху тако и у течности чији је вискозитет требало одредити и огледом одредио периоде T_1 и T_2 ових двеју осцилација. Сила трења између плочице и течности може да се изрази у грамима обрасцем $2\, A\, k_1\, v$, где је $2\, A$ површина плочице, v њена брзина, а k_1 коефицијент вискозитета. Занемарујући трење између плочице и ваздуха одредити коефицијент k_1 у зависности од експериментом нађених величина T_1 и T_2, ако је тежина плочице равна G gr.



Сл. 74

Диференцијална једначина кретања је

$$m\ddot{x} + cx + F_w = 0$$

Како је $\qquad F_w = 2Ak_1\dot{x}$,

то је $\qquad \ddot{x} + \frac{2Ak_1}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0$

Обележимо са $\qquad 2n = \frac{2Ak_1}{m}$,

па је $\qquad n = \frac{Ak_1}{m} = \frac{Ak_1 g}{G}$

$$T_1 = \frac{2\pi}{k}\, ; \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{T_1^2} - \frac{A^2 k_1^2 g^2}{G^2}}}$$

Одавде је $\qquad k_1 = \frac{2\pi G}{gAT_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}$

77.) Тело тежине 5,88 kg. обешено о опругу, осцилује са периодом $0{,}4\pi$ sec. у случају да не постоје отпори, а при постојању отпора пропорционалном првом степену брзине са периодом $0{,}5\pi$ sec. Наћи отпорну силу F_w при брзини равној 1 cm./sec. и одредити кретање, ако је у почетном положају опруга била извучена из равнотежног положаја за 4 cm. и затим је тело остављено самом себи.

$$T = \frac{2\pi}{k}\, ; \qquad T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{T^2} - n^2}}$$

Одавде је $\qquad n = \frac{2\pi}{T_1}\sqrt{\left(\frac{T_1}{T}\right)^2 - 1}$,

па је $\qquad n = \frac{2\pi}{0{,}5\pi}\sqrt{\frac{0{,}5^2\,\pi^2}{0{,}4^2\,\pi^2} - 1} = 3 \text{ sec}^{-1}$

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}4\,\pi} = 5 \text{ sec}^{-1}$$

$$F_W = 2\, mn\dot{x} = 2\,\frac{G}{g}\, n\dot{x} = 2\,\frac{5{,}88}{981}\cdot 3 \cdot 1 = 0{,}036 \text{ kg.}$$

Решење диференцијалне једначине кретања у овом случају је

$$x = e^{-nt}\sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}\,\sin\left(t\sqrt{k^2 - n^2} + \alpha_0\right),$$

где је $\qquad tg\alpha_0 = \frac{x_0\sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{x}_0 + nx_0}$

Како је $\qquad x_0 = 4$ cm.

$$\dot{x}_0 = 0$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - n^2} = 4 ,$$

то је $\qquad tg\,\alpha_0 = \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{3}\, ; \qquad \alpha_0 = \text{arc}\, tg\,\frac{4}{3}$

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}} = \sqrt{4^2 + \frac{(3 \cdot 4)^2}{25 - 9}} = 5$$

$$x = 5\, e^{-3t}\sin\left(4\,t + \text{arc}\, tg\,\frac{4}{3}\right) \text{cm.}$$

78.) Тело тежине 1,96 kg. обешено је о опругу која се истегне 20 cm. при деловању силе од 1 kg. При кретању на тело делује отпор пропорционалан првом степену брзине, који при брзини од 1 cm./sec. износи 0,02 kg. У почетном тренутку опруга је изведена из положаја равнотеже за 5 cm. и затим је тело пуштено без почетне брзине. Одредити кретање тела. Узети да је g = 980 cm./sec.²

$$F_W = 2\, mn\dot{x} = 2\,\frac{G}{g}\, n\dot{x}$$

$$n = \frac{F_W}{2m\dot{x}} = \frac{F_W \cdot g}{2\,G\dot{x}} = \frac{0{,}02 \cdot 980}{2 \cdot 1{,}96 \cdot 1} = 5 \text{ sec}^{-1}$$

$$k^2 = \frac{cg}{G} = \frac{\frac{1}{20} \cdot 980}{1{,}96} = 25\ ; \qquad k = 5 \text{ sec}^{-1}$$

Пошто је $n = k = 5$, то решење диференцијалне једначине има облик

$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2) \text{ cm.}$$

Почетни услови кретања су

за $\qquad t = 0 \qquad x_0 = 5$

$\qquad \dot{x}_0 = 0$

па је $\qquad C_1 = 25$ и $C_2 = 5$

односно $\qquad x = 5e^{-5t}(5t + 1)$ cm.

79.) При записивању хоризонталних слободних осцилација клатна вибрографа Geiger-а (види зад. бр. 35) установљено је да период слободних осцилација T износи 0,37 sec., а величине узастопних елонгација чине геометриску прогресију, при чему је $\eta = 1{,}4$. Одредити коефициент отпора n, и период слободних осцилација T_0 прибора при отсуству отпора. Проверити последњу величину узимајући да је крутост опруге $c = 4{,}5$ kgcm., моменат инерције клатна у односу на осу обртања $J = 0{,}03$ kgcmsec²., и статички моменат клатна за исту осу $Ga = 4{,}5$ kgcm.

$$\eta = e^{\frac{nT}{2}}\ ; \quad n = \frac{2\,ln\eta}{T} = 2 \cdot 2{,}303\,\frac{lg\eta}{T} = \frac{2 \cdot 2{,}303 \cdot 1{,}146}{0{,}37} \approx 1{,}82 \text{ sec}^{-1}$$

Пошто је $\qquad T_0 = \dfrac{T}{\sqrt{1 + \left(\frac{ln\,\eta}{\pi}\right)^2}}$,

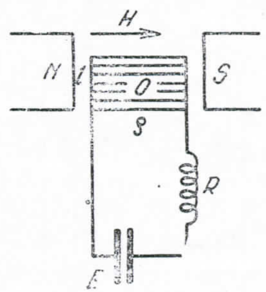
то је $\qquad T_0 = \dfrac{T}{\sqrt{1 + 0{,}537\,(ln\eta)^2}} = \dfrac{T}{\sqrt{1 + 0{,}0115}} \approx T$

Разлика између T_0 и T је 0,5%

По формули из задатка бр. 35

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Ga + c}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}03}{4{,}5 + 4{,}5}} \approx 0{,}364 \text{ sec.}$$

80.) На слици је дата шема галванометра. Између полова N и S сталнога магнета обешен је у тачки O на танким жицама калем мале дебљине l, са великим бројем навоја танких изолованих жица. При отсуству струје у калему површина навоја паралелна је јачини магнетног поља H. Ако је A површина једног навоја, n — број навоја, i — јачина струје, онда је калем еквивалентан магнетном диполу, тј. магнету на чијим се крајевима налазе магнетне масе $\pm m$, при чему је



Сл. 75

$$m = \frac{Ani}{l}$$

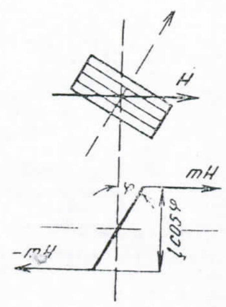
Одредити кретање калема узимајући у обзир да се при промени броја магнетних сила N, које пресецају ток струје појављује (по закону Lentz-а) супротна електромоторна сила $E_1 = -\dfrac{dN}{dt}$.

Јачина струје у калему је $i = \dfrac{E + E_1}{R + \rho}$, где је E — стална спољашна електромоторна сила, ρ - отпор калема, R - отпор спољашњег кола. Крутост c увијања жице равна је моменту којим треба деловати на крају жице да би угао увијања био раван јединици. При решавању задатка имати у виду да је

$$N = AnH \sin\varphi$$

и да је моменат магнетних сила које изводе калем из положаја равнотеже

$$mHl \cos\varphi$$



Сл. 76

Диференцијална једначина кретања калема биће

$$J\ddot{\varphi} = -M$$

$$M = c\varphi - m\,Hl\cos\varphi,$$

па је $\qquad J\ddot{\varphi} + c\varphi = mHl\cos\varphi$

$$m = \frac{Ani}{l} = \frac{An}{l} \cdot \frac{E + E_1}{R + \rho} = \frac{AnE}{l(R+\rho)} - \frac{An}{l(R+\rho)} \cdot \frac{dN}{dt}$$

$$N = AnH \sin\varphi$$

$$\frac{dN}{dt} = AnH\,\dot{\varphi}\cos\varphi\,,$$

па је $\qquad J\ddot{\varphi} + c\varphi = Hl\left[\dfrac{AnE}{l(R+\rho)} - \dfrac{An}{l(R+\rho)} \cdot AnH\dot{\varphi}\cos\varphi\right]\cos\varphi$

односно $$J\ddot{\varphi} + c\varphi = \left[\frac{AnH}{R+\rho} E - \frac{(AnH)^2}{R+\rho} \dot{\varphi} \cos\varphi\right] \cos\varphi$$

$$\cos\varphi \approx 1$$

Означимо са $$\varepsilon = \frac{(AHn)^2}{2J(R+\rho)}\,; \qquad k^2 = \frac{c}{J}\,,$$

па горња једначина прелази у
$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon\dot{\varphi} + k^2\varphi = \frac{AHn}{J} \frac{E}{R+\rho}$$

Добили смо нехомогену диференцијалну једначину са константним коефицијентима, па је
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_0$$

Партикуларно решење горње нехомогене једначине ако је $E = const.$, биће
$$\varphi_0 = \frac{AHn}{Jk^2} \cdot \frac{E}{R+\rho} = \frac{AnH}{c} \cdot \frac{E}{R+\rho}\,,$$

а опште решење хомогеног дела једначине, пошто је $k^2 - \varepsilon^2 > 0$, биће
$$\varphi_1 = e^{-\varepsilon t}(C_1 \sin t\sqrt{k^2-\varepsilon^2} + C_2 \cos t\sqrt{k^2-\varepsilon^2})$$

За почетне услове за $t = 0 \qquad \varphi = \dot{\varphi} = 0$,

биће $$C_1 = -\frac{\varepsilon\varphi_0}{\sqrt{k^2-\varepsilon^2}}\,; \qquad C_2 = -\varphi_0\,,$$

па је $$\varphi = \varphi_0\left[1 - e^{-\varepsilon t}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{k^2-\varepsilon^2}} \sin t\sqrt{k^2-\varepsilon^2} + \cos t\sqrt{k^2-\varepsilon^2}\right)\right],$$

па калем, као што видимо, врши амортизовану осцилацију.

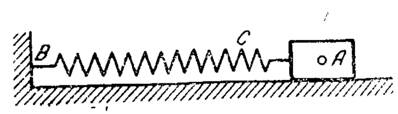
81.) Тело A тежине 0,5 kg. лежи на рапавој хоризонталној равни и везано је за непомичну тачку B спругом чија је осовина BC хоризонтална. Коефициент трења равни је 0,2. Опруга је таква да је за издужење од 1 cm. потребна сила од 0,25 kg. Тело A удаљено је од тачке B тако да се опруга истегла за 3 cm. и затим је пуштено без почетне брзине. Одредити:

a) број полуосцилација које изврши тело A,
b) њихову амплитуду,
c) време трајања T сваког полупериода.

$$a = \frac{\mu g}{k^2} \qquad k^2 = \frac{cg}{G} = \frac{0{,}25g}{0{,}5} = \frac{g}{2}\,; \qquad \mu = 0{,}2$$

$$a = \frac{0{,}2g}{\frac{g}{2}} = 0{,}4\,; \qquad x_0 = 3 \text{ cm.}$$

$$x_1 = -(x_0 - 2a) = -2{,}2$$
$$x_2 = x_0 - 4a = 1{,}4$$
$$x_3 = -(x_0 - 6a) = -0{,}6$$
$$x_4 = x_0 - 8a = -0{,}2$$



Сл. 77

Величина појединих полуосцилација према томе биће:

1. $x_0 + |x_1| = 5{,}2$ cm.
2. $|x_1| + |x_2| = 3{,}6$ cm.
3. $|x_2| + |x_3| = 2$ cm.
4. $|x_3| - |x_4| = 0{,}4$ cm.

Трајање сваке полуосцилације је
$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{2}}} = \frac{\pi}{22{,}1} \approx 0{,}141 \text{ sec.}$$

Кретање се, као што знамо, наставља доклегод је сила трења $F_W = \mu G$ мања од реституционе силе у опрузи $F_R = c \cdot |x_n|$.
$$F_W = \mu G = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1 \text{ kg.}$$

Реституционе силе биће:

после прве амплитуде
$$F_R = c|x_1| = 0{,}25 \cdot 2{,}2 = 0{,}55 \text{ kg.}$$
$F_R > F_W$; 0,55 kg. > 0,1 kg., кретање се наставља;

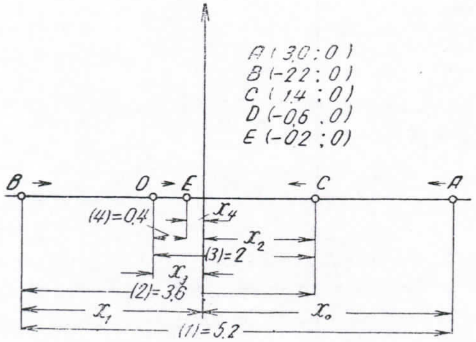
после друге амплитуде је
$$F_R = c|x_2| = 0{,}25 \cdot 1{,}4 = 0{,}35 \text{ kg.}$$
0,35 kg > 0,1 kg., кретање се наставља;

после треће амплитуде је
$$F_R = c|x_3| = 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}15 \text{ kg.}$$
0,15 kg > 0,1 kg., кретање се наставља;

после четврте амплитуде је
$$F_R = c|x_4| = 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}05 \text{ kg.}$$
$F_R < F_W$; 0,05 kg. < 0,10 kg., кретање се прекида.

Тело ће стати у тренутку кад је $F_W = F_R$, тј. $0{,}1 = 0{,}25\,x$, дакле у тачки чија је апсциса $x = -0{,}4$.

Према томе, тело ће извршити 4 полуосцилација.



Сл. 78

82.) При осциловању материјалне тачке учвршћене опругом за зид по рапавој равни утврђено је да су амплитуде биле:

$|x_1| = 1{,}2$ cm. ; $|x_2| = 0{,}9$ cm. ; $|x_3| = 0{,}6$ cm. ; $|x_4| = 0{,}3$ cm и $x_5 = 0$,

кад је материјална тачка стала. У тренутку $t = 0$ материјална тачка била је изведена из положаја равнотеже за дужину $|x_0| = 1{,}5$ cm. Исто тако утврђено је да је период слободних осцилација материјалне тачке $T = 0{,}92$ sec. Одредити коефицент трења рапаве подлоге.

Амплитуде се смањују у аритметичкој прогресији за дужину 0,3 cm., па је

$$2a = 0{,}3$$

$$2\,\frac{\mu g}{k^2} = 0{,}3 \qquad k = \frac{2\pi}{T}$$

$$2\cdot\frac{\mu g T^2}{4\pi^2} = 0{,}3$$

$$\mu = \frac{0{,}3\cdot 4\cdot \pi^2}{2g\cdot 0{,}92^2} = 0{,}0071.$$

83.) Опруга се под утицајем силе $F = mg$ издужи за $f = 0{,}5$ cm. За опругу је причвршћен тег који стоји на хоризонталној рапавој површини. Почетна амплитуда је $x_0 = 50$ cm. После 10 пуних осцилација амплитуда је за 10% мања од почетне. Одредити коефицент трења рапаве површине.

$$x_n = x_0 - 10\,\frac{x_0}{100} = 50 - 5 = 45 \text{ cm.}$$

$$x_n = x_0 - n\cdot\frac{2\mu g}{k^2} = x_0 - n\cdot\frac{2\mu g m}{c}$$

$$F = cf \qquad mg = c\cdot 0{,}5 \qquad c = 2\,mg$$

$$x_n = x_0 - n\mu\,; \quad n = 20\,; \quad 45 = 50 - 20\,\mu\,; \quad 20\,\mu = 5\,; \quad \mu = 0{,}25.$$

5. ПРИНУДНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ СА ОТПОРНОМ СИЛОМ СРАЗМЕРНОМ ПРВОМ СТЕПЕНУ БРЗИНЕ

Проучимо и најопштији случај осцилација, кад на материјалну тачку масе m, коју смо извели из положаја равнотеже под истим условима као и у случају хармониске осцилације, делују поремећајна сила која се мења по закону $F_p = mh \cos pt$ и отпорна сила сразмерна првом степену брзине $F_W = -rv = -r\dot{x}$.

На основи d'Alembert-овог принципа је

$$\vec{F}_i + \vec{F}_R + \vec{F}_p + \vec{F}_W = 0\,,$$

па је диференцијална једначина кретања масе m

$$(-m\ddot{x}) - cx - r\dot{x} + mh\cos pt = 0 \tag{65}$$

Ако обележимо са $k^2 = \dfrac{c}{m}$ и $\dfrac{r}{m} = 2n$, онда једначина (65) прелази у

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\cos pt \tag{66}$$

Потражимо решење ове једначине у случају осцилаторног кретања кад је $k > n$

Знамо да је $x = x_1 + x_2\,,$

и да је $x_1 = e^{-nt}\,(C_1 \cos t\sqrt{k^2 - n^2} + C_2 \sin t\sqrt{k^2 - n^2})$

Партикуларно решење потражићемо у облику

$$x_2 = C\cos(pt - \varphi_0),$$

при чему долазимо до једначина

$$C(k^2 - p^2) = h\cos\varphi_0$$

$$2\,n\,Cp = h\sin\varphi_0$$

одакле је

$$C = \frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2 + 4n^2p^2}}\,, \tag{67}$$

док је фазна разлика дата изразом

$$tg\,\varphi_0 = \frac{2\,np}{k^2 - p^2},$$

односно

$$\varphi_0 = \text{arc}\;tg\,\frac{2\,np}{k^2 - p^2}\,, \tag{68}$$

па је решење једначине (66)

$$x = e^{-nt}\,(C_1 \cos t\,\sqrt{k^2 - n^2} + C_2 \sin t\,\sqrt{k^2 - n^2}) +$$
$$+ \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4\,n^2 p^2}} \cos\,(pt - \varphi_0) \tag{69}$$

За почетне услове за

$$t = 0 \qquad x = x_0$$
$$\dot{x} = \dot{x}_0$$

налазимо да су произвољне константе

$$C_1 = x_0 - C \cos \varphi_0 \quad ;$$

$$C_2 = \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\beta} - \frac{C}{\beta}\,(n \cos \varphi_0 + p \sin \varphi_0) \quad ,$$

где је C дато изразом (67), а $\beta = \sqrt{k^2 - n^2}$.

У том случају једначина (69) прела и у

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos \beta t + \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\beta} \sin \beta t\right) - Ce^{-nt}\left(\cos \varphi_0 \cos \beta t + \right.$$
$$\left. + \frac{n \cos \varphi_0 + p \sin \varphi_0}{\beta} \sin \beta t\right) + C \cos\,(pt - \varphi_0) \tag{70}$$

У случају да се поремећајна сила мења по закону sinusa тј. да је $F_p = mh \sin pt$, и ако партикуларно решење потражимо у облику

$$x_2 = C \sin\,(pt + \varphi_0)\,,$$

добили бисмо да су произвољне константе

$$C_1 = x_0 - C \sin \varphi_0 \quad ;$$

$$C_2 = \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\beta} - \frac{C}{\beta}\,(n \sin \varphi_0 + p \cos \varphi_0)\,,$$

док би кретање у том случају било дато једначином

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos \beta t + \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\beta} \sin \beta t\right) - Ce^{-nt}\left(\sin \varphi_0 \cos \beta t + \right.$$
$$\left. + \frac{n \sin \varphi_0 + p \cos \varphi_0}{\beta} \sin \beta t\right) + C \sin\,(pt + \varphi_0) \tag{71}$$

Фазна разлика у овом случају дата је изразом

$$tg\,\varphi_0 = -\frac{2\,np}{k^2 - p^2}$$

Као што видимо из решења (70) ово кретање је збир трију осцилација, од којих први члан

$$e^{-nt}\left(x_0 \cos \beta t + \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\beta} \sin \beta t\right)$$

претставља амортизовану осцилацију која настаје под утицајем почетне брзине $\dot{x}_0$ и почетног положаја x_0 материјалне тачке масе m. Овај члан карактерише кретање у самом почетку, пошто ове осцилације трају врло кратко време и убрзо се губе. Период ових осцилација је

$$T_a = \frac{2\,\pi}{\beta} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$$

Други члан

$$-\,Ce^{-nt}\left(\cos \varphi_0 \cos \beta t + \frac{n \cos \varphi_0 + p \sin \varphi_0}{\beta} \sin \beta t\right)$$

претставља такође амортизовану осцилацију насталу под утицајем отпорне силе сразмерне првом степену брзине $F_W = 2\,mn\dot{x}$.

Најзад трећи члан

$$C \cos\,(pt - \varphi_0)$$

претставља принудну осцилацију која настаје под утицајем поремећајне силе $F_p = mh \cos pt$ и која има исту кружну фреквенцију као и поремећајна сила, с том разликом што наступа са извесном фазном разликом φ_0 после ње. Пошто прва два члана опадају врло брзо са временом, то чим се кретање стабилизује испитује се само трећи члан, док се прва два без велике грешке могу занемарити. Амплитуда ових принудних осцилација не зависи од почетних услова кретања, већ од величина n, k, p, h, и то углавном од односа $\frac{p}{k}$. Ако су кружне фреквенције поремећајне силе и слободних осцилација приближно једнаке, онда амплитуде принудних осцилација могу постати врло велике.

Испитајмо утицај односа $\frac{p}{k}$ на амплитуду принудне осцилације. Амплитуда принудних осцилација дата изразом (67) може се написати и у облику

$$C = \frac{h}{k^2\sqrt{\left(1-\frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{k}\right)^2\left(\frac{p}{k}\right)^2}}$$

Знамо да је

$$f_{ст} = \frac{h}{k^2},$$

и ако осим тога обележимо

$$\frac{p}{k} = \frac{T_1}{T_2} = \beta_1\,; \qquad \frac{n}{k} = \gamma\,,$$

где је

$$T_1 = \frac{2\pi}{k} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{2\pi}{p}\,,$$

онда ће израз за амплитуду принудних осцилација прећи у

$$C = \frac{f_{ст}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\beta_1^2\gamma^2}} \tag{72}$$

Величина

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\beta_1^2\gamma^2}} \tag{73}$$

назива се *динамички фактор појачавања* и показује колико је пута амплитуда ових осцилација већа услед дејства поремећајне силе, у односу на амплитуду осцилација кад не би делсвала поремећајна сила (статичка амплитуда).

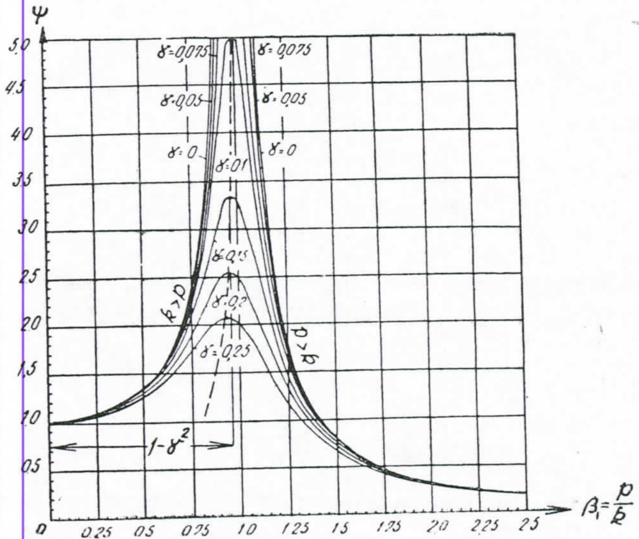
Према томе је

$$C = \psi f_{ст} \tag{74}$$

Из израза (73) видимо да динамички фактор појачавања зависи од односа $\beta_1 = \frac{p}{k}$, тј. од односа кружних фреквенција принудне и сопствене осцилације, а такође и од односа $\gamma = \frac{n}{k}$, који изражава утицај отпорне силе.

Зависност динамичког фактора појачавања ψ од односа $\beta_1 = \frac{p}{k}$ графички је приказана на сл. 79.

На овом дијаграму, као што видимо, имамо више линија од којих свака одговара одређеној вредности γ, у којој је изражен утицај отпора (отпорне силе $|F_W| = 2\,mn\dot{x}$).



Сл. 79

Када је $\frac{p}{k} = 0$, тј. кад не делује поремећајна сила, динамички фактор појачавања износи $\psi = 1$, што значи да ће амплитуда осцилација бити равна статичком издужењу.

Ако је $\gamma = 0$, тј. кад не делује отпорна сила, онда ће за случај $\frac{p}{k} = 1$ наступити резонанца, тј. амплитуда ће бити бесконачно велика, а исто тако ће и динамички фактор појачавања ψ бити бесконачно велики. У свим осталим случајевима кад је $\gamma > 0$, динамички фактор појачавања има коначну вредност и амплитуда не може бити бесконачно велика. Тада ћемо за сваку вредност γ имати одређену криву, која ће нам приказивати зависност динамичког фактора појачавања ψ од односа $\beta_1 = \frac{p}{k}$. Динамички фактор појачавања ψ и амплитуда неће имати више максималну вредност за однос $\frac{p}{k} = 1$ (као у случају кад не делује отпорна сила), већ нешто раније (исцртkана линија). Ту вредност ћемо добити кад израз за динамички фактор појачавања диференцирамо по односу $\beta_1 = \frac{p}{k}$ и тај извод изједначимо са нулом. Динамички фактор појачавања биће у максимуму у исто време кад је и функција

$$y = (1-\beta_1^2)^2 + 4\beta_1^2\gamma^2 \quad \text{у минимуму.}$$

Одавде је

$$y'_{\beta_1} = -4\beta_1(1-\beta_1^2) + 8\beta_1\gamma^2 \quad \text{и}$$

$$y''_{\beta_1} = -4 + 12\beta_1^2 + 8\gamma^2$$

Из услова $\qquad y'_{\beta_1} = 0$

добијамо да је

$$\beta_m = \left(\frac{p}{k}\right)_m \approx \sqrt{1-2\gamma^2} \approx 1-\gamma^2$$

Према томе ће динамички фактор појачавања у случају деловања отпорне силе имати максималну вредност, кад је однос фреквенција

$$\beta_m = \left(\frac{p}{k}\right)_m \approx 1-\gamma^2, \tag{75}$$

јер је тада $\qquad y''_{\beta_1} = 8(1-2\gamma^2) > 0$

Максималну вредност за динамички фактор појачавања добићемо кад $\beta_m = \sqrt{1-2\gamma^2}$ сменимо у израз (72), одакле добијамо да је

$$\psi_{max} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}} \approx \frac{1}{2\gamma\left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right)} \tag{76}$$

У случају кад је $\beta_1 = 1$ и кад је $\gamma > 0$ имаћемо да је

$$\psi_r = \frac{1}{2\gamma} \tag{77}$$

и та вредност биће мања од ψ_{max}.

Дакле $\qquad \psi_r < \psi_{max}$

Вредности за β_m, ψ_{max} и ψ_r за различите вредности γ дајемо у таблици

γ	$\beta_m = \sqrt{1-2\gamma^2}$	ψ_{max}	ψ_r
0,05	0,9975	10,013	10,000
0,10	0,9899	5,025	5,000
0,15	0,9772	3,371	3,333
0,20	0,9695	2,552	2,500
0,25	0,9357	2,065	2,000
0,30	0,9055	1,747	1,667
0,40	0,8246	1,366	1,250
0,50	0,7071	1,155	1,000
$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$	0	1,000	0,707

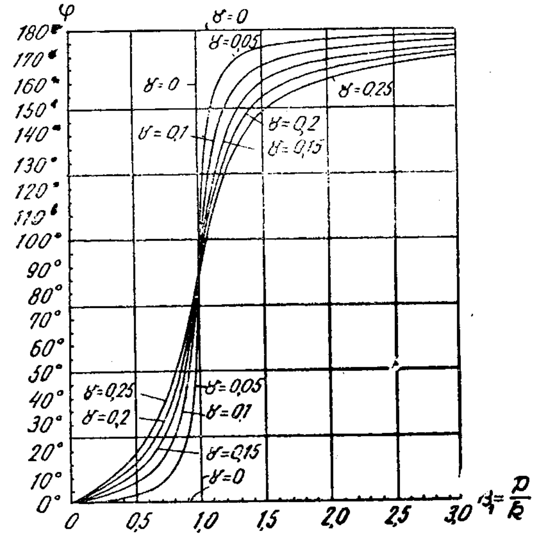
Проучимо најзад и зависност фазне разлике φ_0 од односа

$$\beta_1 = \frac{p}{k} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{n}{k}$$

Израз (68) може се написати и овако

$$\varphi_0 = \operatorname{arc} tg \frac{2\gamma\beta_1}{1-\beta_1^2} \tag{78}$$

Зависност фазне разлике φ_0 од односа $\beta_1 = \frac{p}{k}$, а за разне вредности γ, дата је дијаграмом



Сл. 80

Из дијаграма видимо да кад $\beta_1 \to 0$ и $\varphi_0 \to 0$, тј. кад је $\beta_1 = \frac{p}{k} = 0$, а то је у случају кад не делује поремећајна сила, тада је и $\varphi_0 = 0$, тј. фазне разлике нема.

Нарочито је важан случај кад је $\frac{p}{k} = 1$. Тада независно од величине γ, дакле независно од отпорне силе $F_W = 2\,mn\dot{x}$ фазни угао износи увек $\frac{\pi}{2}$.

Исто тако за однос $\beta_1 = \frac{p}{k} > 1$ независно од величине γ фазни угао тежи углу π, а за однос $\beta = \frac{p}{k} < 1$, фазни угао тежи нули.

У случају кад не делује отпорна сила, тј. кад је $\gamma = 0$ овај се дијаграм претвара у изломљену криву и тада у случају резонанце, тј. за однос $\beta_1 = \frac{p}{k} = 1$, фазни угао скаче одједном од вредности 0 на вредност π.

Примери

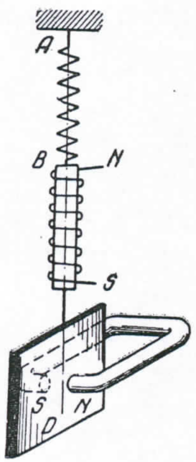
84.) На опругу крутости $c = 20$ gr/cm обешена је магнетна полуга тежине 50 gr., која пролази кроз соленоид и бакарна плочица тежине 50 gr., која пролази кроз полове магнета. Кроз соленоид тече струја $i = 20 \sin 8\pi t$ ампера и ствара силу међусобног деловања између соленоида и магнетне полуге $F = 16\,\pi i$ dyna.

Сила кочења бакарне плочице под дејством Foucault-ових струја износи $k_1 v \Phi^2$, dyna, где је $k_1 = 10^{-4}$; $\Phi = 1000\sqrt{5}$ максвела и v — брзина плочице. Одредити принудну осцилацију плочице.

Диференцијална једначина кретања је

$$m\ddot{x} + cx + F_W = mh \sin pt$$

$$F_W = \frac{k_1 \Phi^2}{g}\,\dot{x}\ \text{gr.}\ ,$$



Сл 81

па је
$$\ddot{x} + \frac{k_1\Phi^2}{G}\dot{x} + k^2 x = h \sin pt$$

$$G = G_1 + G_2 = 100\ \text{gr.}$$

Обележимо са

$$2n = \frac{k_1\Phi^2}{G},$$

па је
$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin pt$$

$$k^2 = \frac{cg}{G} = \frac{20 \cdot 981}{100} = 196{,}2$$

$$p^2 = 64\,\pi^2 = 631{,}6$$

$$h = \frac{|F_p|_{\max} g}{G} = \frac{\frac{320\pi}{g}\,g}{G} = 3{,}2\,\pi = 10{,}048$$

$$n = \frac{k_1\Phi^2}{2G} = \frac{10^{-4} \cdot 10^6 \cdot 5}{2 \cdot 10^2} = 2{,}5,$$

Ако партикуларно решење потражимо у облику

$$x_2 = C \sin(pt - \varphi_0)\,,$$

принудна осцилација биће дата изразом

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4\,n^2 p^2}} \sin(pt - \varphi_0)\,,$$

где је
$$tg\,\varphi_0 = \frac{2\,np}{k^2 - p^2}$$

$$\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4\,n^2p^2} = \sqrt{(196{,}2 - 631{,}6)^2 + 4 \cdot 6{,}25 \cdot 631{,}6} = 437{,}2$$

$$tg\,\varphi_0 = \frac{2 \cdot 2{,}5 \cdot 8\,\pi}{196{,}2 - 631{,}6} = -0{,}2887\,; \qquad C = \frac{10{,}048}{437{,}2} = 0{,}022$$

$$tg(\pi - \varphi_0) = -tg\,\varphi_0\,; \qquad \pi - \varphi_0 = 0{,}28\,;$$

$$tg(\pi - \varphi_0) = 0{,}2887\,; \qquad \varphi_0 = 2{,}86 = 0{,}91\pi\,,$$

па је
$$x_2 = 0{,}022 \sin(8\,\pi t - 0{,}91\,\pi)\ \text{cm.}$$

85.) У вибрографу описаном у задатку бр. 65 полуга OA кочи се електромагнетном кочницом у виду алуминиске плочице, која осцилује међу половима непомичних магнета. Foucault-ове струје које се јављају у плочици стварају отпорну силу пропорционалну првом степену брзине плочице и доводе кретање до границе апериодичности. Одредити принудну осцилацију сказаљке инструмента, ако овај поставимо на темељ који осцилује у вертикалном правцу по закону $z = h \sin pt$.

Диференцијална једначина кретања је

$$J\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + c\varphi = -\frac{G}{g}a\ddot{z} = \frac{Gahp^2}{g}\sin pt$$

Пошто је кретање доведено до границе апериодичности то је $n = k$, па горња једначина прелази у

$$\ddot{\varphi} + 2\sqrt{\frac{c}{J}}\,\dot{\varphi} + \frac{c}{J}\,\varphi = \frac{Gahp^2}{Jg}\sin pt$$

Потражимо решење ове једначине у облику

$$\varphi = C \sin(pt - \varepsilon)$$

Имамо да је

$$-Cp^2 \sin(pt - \varepsilon) + 2\,Cp\sqrt{\frac{c}{J}}\cos(pt - \varepsilon) + \frac{c}{J}\,C\sin(pt - \varepsilon) =$$

$$= \frac{Gap^2}{Jg}\sin(pt - \varepsilon + \varepsilon) = \frac{Gap^2 h}{Jg}\Big[\sin(pt - \varepsilon)\cos\varepsilon + \cos(pt - \varepsilon)\sin\varepsilon\Big]$$

Одавде је

$$C\left(\frac{c}{J}-p^2\right)=\frac{Gap^2h}{Jg}\cos\varepsilon \qquad (a)$$

$$2\,Cp\sqrt{\frac{c}{J}}=\frac{Gap^2h}{Jg}\sin\varepsilon \qquad (b)$$

односно

$$tg\,\varepsilon=\frac{2\,p\sqrt{\frac{c}{J}}}{\frac{c}{J}-p^2}=\frac{2\,p\sqrt{\frac{J}{c}}}{1-\frac{J}{c}p^2}$$

Дизањем на квадрат и сабирањем израза (a) и (b) добија се

$$C^2\left[\left(\frac{c}{J}-p^2\right)^2+4\,p^2\frac{c}{J}\right]=\left(\frac{Gap^2h}{Jg}\right)^2,$$

или

$$C=\frac{Gap^2h}{Jg}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{J}-p^2\right)^2+4\,p^2\frac{c}{J}}}=\frac{Gap^2h}{Jg}\,\frac{1}{\left(\frac{c}{J}+p^2\right)},$$

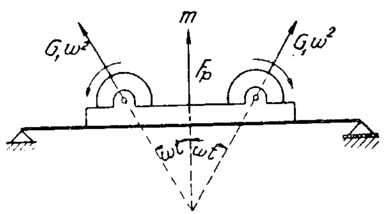
односно

$$C=\frac{Gah}{Jg\left(1+\frac{c}{Jp^2}\right)},$$

па је

$$\varphi=\frac{Gah}{Jg\left(1+\frac{c}{Jp^2}\right)}\sin\left(pt-\varepsilon\right)$$

86.) Одредити амплитуду принудних осцилација које ствара осцилатор постављен на средини греде при брзини обртања од 600 obr/min, ако је центрифугална сила при угаоној брзини обртања од 1 rad/sec равна $G_1 = 0{,}25$ kg. Греда је од таквог материјала да терет $G = 500$ kg. ствара статички угиб $f_{ст} = 0{,}025$ mm., кад се постави на њену средину. Занемарити тежину греде и претпоставити да је амортизација еквивалентна сили, која би деловала у средини греде, била пропорционална брзини и равна $F_w = 50$ kg. при брзини од $v = 2{,}5$ m/sec. Одредити амплитуду принудних осцилација при датим подацима и у случају резонанце.



Сл. 82

Осцилатор који служи за одређивање фреквенција слободних осцилација различитих конструкција, састоји се од два диска који се обрћу у вертикалној равни константним брзинама, а у супротним смеровима. Лежишта ротора су монтирана у крутом кућишту, које се мора круто везати за конструкцију чије осцилације испитујемо. Ако наместимо на роторе неуравнотежене терете симетрично постављене према вертикалној осовини $m-n$, добићемо две центрифугалне силе $G_1\omega^2$, које настају приликом ротације ротора и чија резултанта $2\,G_1\omega^2 \sin \omega t$ делује дуж осе $m-n$. Ова пулзирајућа сила ствара принудне осцилације конструкције, које можемо регистровати вибрографом. Постепено мењајући брзину мотора можемо да установимо број обртаја у секунди, при коме амплитуда принудних осцилација постаје максимална. Претпоставља се да ће се то догодити у случају резонанце, кружна фреквенција слободних осцилација конструкције равна је томе броју обртаја ротора у секунди.

Диференцијална једначина кретања је

$$\frac{G}{g}\ddot{x}=-cx-r\dot{x}+2\,G_1\,\omega^2\sin\omega t,$$

односно

$$\ddot{x}+2\,n\dot{x}+k^2x=\frac{2\,G_1\omega^2 g}{G}\sin\omega t$$

Амплитуда принудних осцилација је

$$C=\frac{2\,G_1 g\omega^2}{G}\,\frac{1}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4\,n^2\omega^2}},$$

где је $k^2=\frac{cg}{G}=\frac{g}{f_{ст}}$ и $\frac{rg}{G}=2\,n$ па је $n=\frac{rg}{2\,G}$

$$\omega=\frac{\pi n}{30}=\frac{\pi\cdot 600}{30}=20\,\pi$$

$$\omega^2=400\,\pi^2$$

Максимална центрифугална сила коју производи леви и десни део осцилатора износи

$$2\,G_1\omega^2=200\,\pi^2\ \text{kg}.$$

$$r=20\ \frac{kg}{\text{cm/sec}}$$

$$k^2=\frac{981}{0{,}025}=39240\ \text{sec}^{-2}$$

$$n=\frac{20\cdot 981}{2\cdot 500}=19{,}62\ \text{sec}^{-1}$$

$$C=\frac{0{,}5\cdot 981\cdot 400\,\pi^2}{500}\,\frac{1}{\sqrt{(39240-400\pi^2)^2+4\cdot 19{,}62^2\cdot 400\,\pi^2}}\approx 0{,}11\ \text{cm}.$$

за $\omega=k$

$$C = \frac{2\,G_1\,g k^2}{G}\cdot\frac{1}{2\,nk} = \frac{0{,}5\cdot 981\sqrt{39240}}{500}\;\frac{1}{2\cdot 19{,}62} = 4{,}96 \text{ cm.}$$

87.) Под утицајем терета $G = 4{,}5$ kg. опруга се издужи за $f = 0{,}25$ cm. Сила амортизације при брзини $v = 1$ cm/sec износи $F_W = 0{,}018$ kg. Одредити:

a.) максималну вредност динамичког фактора појачавања,

b.) коефициент отпора n, кад је статички угиб 5 пута појачан, а за случај $p = k$

c.) фазну разлику принудне осцилације при $\beta_1 = 0{,}8$ и $\beta_1 = 1{,}2$

a.)
$$\psi_{max} \approx \frac{1}{2\,\gamma\left(1-\dfrac{\gamma^2}{2}\right)}\,.$$

$$F_W = 2\,mn\dot{x}\,,$$

па је
$$n = \frac{F_W\,g}{2\,G\dot{x}}$$

$$n = \frac{0{,}018\cdot 981}{2\cdot 4{,}5\cdot 1} = 1{,}96 \text{ sec}^{-1}$$

$$k^2 = \frac{g}{f_{ст}} = \frac{981}{0{,}25} = 3924 \text{ sec}^{-2}\,;\quad k = 62{,}5 \text{ sec}^{-1}$$

$$\gamma = \frac{n}{k} = \frac{1{,}96}{62{,}5} = 0{,}0311$$

За ове вредности је $\psi_{max} \approx 16$

b.) $\psi_r = \dfrac{1}{2\,\gamma}$. У овом случају $\psi_r = 5$, па је $\gamma = 0{,}1$

онда је
$$n = \gamma k = 0{,}1\cdot 62{,}5 = 6{,}25 \text{ sec}^{-1}$$

c.)
$$\beta = \text{arc } tg\,\frac{2\,\gamma\beta_1}{1-\beta_1^2}$$

за $\beta_1 = 0{,}8$
$$\beta = \text{arc } tg\,\frac{0{,}0622\cdot 0{,}8}{1-0{,}64} = \text{arc } tg\; 0{,}138$$

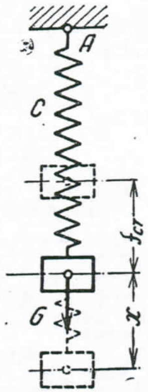
$$\beta = 7^0 50'$$

за $\beta_1 = 1{,}2$
$$\beta = \text{arc } tg\,\frac{0{,}0622\cdot 1{,}2}{1-1{,}44} = \text{arc } tg\,(-0{,}169)$$

$$\beta = 170^0\,20'$$

---

6. ПРИМЕНА МЕТОДЕ ЕНЕРГИЈЕ НА ПРОУЧАВАЊЕ ПРОБЛЕМА МАЛИХ ОСЦИЛАЦИЈА



Сл. 83

При проучавању проблема малих осцилација методом енергије, поћи ћемо од принципа да је збир кинетичке и потенцијалне енергије система константан, тј. да је

$$E_k + E_p = const \tag{79}$$

У том циљу посматраћемо терет G, обешен о опругу крутости c, при чему ћемо занемарити масу опруге и узети у обзир само масу терета.

Да бисмо поставили горњу једначину потребно је да нађемо кинетичку и потенцијалну енергију система.

Кинетичка енергија система једнака је кинетичкој енергији терета и износи

$$E_k = \frac{1}{2}\,m\dot{x}^2 = \frac{G}{2\,g}\,\dot{x}^2 \tag{80}$$

Потенцијална енергија система једнака је разлици потенцијалне енергије деформације опруге и губитка потенцијалне енергије терета услед спуштања на путу x

$$E_p = E_{p1} - E_{p2}$$

Енергија деформације опруге је $\dfrac{1}{2}\,Ff$, где је $F = c\cdot f$ еластична сила у опрузи, а f издужење опруге. У положају терета на слици $f = x + f_{ст}$, па је у том тренутку енергија деформације опруге

$$\frac{c\,(x+f_{ст})^2}{2}\,,$$

док је у положају равнотеже за $x = 0$ једнака $\dfrac{cf^2_{ст}}{2}$.

Према томе прираштај потенцијалне енергије опруге на путу x је

$$E_{p1} = \frac{c\,(x+f_{ст})^2}{2} - \frac{cf_{ст}^2}{2} = cf_{ст}\,x + \frac{cx^2}{2} = Gx + \frac{cx^2}{2}\,.$$

Кад се терет G помери за дужину x, смањи се његова потенцијална енергија за

$$E_{p\,2} = Gx,$$

па ће, према томе, потенцијална енергија система бити

$$E_p = Gx + \frac{cx^2}{2} - Gx = \frac{cx^2}{2} \tag{81}$$

Одавде видимо да при изналажењу потенцијалне енергије овог система *можемо посматрати само прираштај енергије деформације опруге на путу x*, дакле *од равнотежног положаја*, пошто се терет G налази у сваком тренутку у равнотежи са еластичним напоном насталим првобитним издужењем опруге за дужину $f_{ст}$.

Имајући у виду једначине (80) и (81) једначина (79) прелази у

$$\frac{G}{2g}\,\dot{x}^2 + \frac{cx^2}{2} = const \tag{82}$$

Ако су почетни услови дати да је за $t = 0$, $x = x_0$ и $\dot{x}_0 = 0$, добићемо вредност константе, па једначина (82) прелази у

$$\frac{G}{2g}\,\dot{x}^2 + \frac{cx^2}{2} = \frac{cx_0^2}{2} \tag{83}$$

Из ове једначине видимо да је *збир кинетичке и потенцијалне енергије посматраног система у сваком положају једнак енергији деформације опруге нагомилане у опрузи у почетном положају.* Кинетичка енергија је максимална када тело пролази кроз равнотежни положај, тј. за $x = 0$. Тада је кинетичка енергија у исто време једнака целокупној механичкој енергији, јер је потенцијална енергија равна нули. Према томе тада је

$$\frac{G}{2g}\,\dot{x}^2_{max} = \frac{cx_0^2}{2} \tag{84}$$

У случају малих осцилација можемо претпоставити да се тело креће по закону хармониске осцилације, тј. да је

$$x = x_0 \sin kt\,,$$

па добијамо

$$\dot{x}_{max} = x_0 k$$

Одавде видимо да је *код хармониских осцилација максимална брзина једнака производу амплитуде и кружне фреквенције осцилација.*

Једначина (84) прелази сада у

$$\frac{G}{2g}(x_0 k)^2 = \frac{cx_0^2}{2}\,,$$

па је

$$k^2 = \frac{cg}{G} = \frac{g}{f_{ст}} \tag{86}$$

Потенцијална енергија је у максимуму кад је тачка у најудаљенијем положају, тј. за $x = x_0$. Потенцијална енергија је тада у исто време равна целокупној механичкој енергији система, пошто је тада $\dot{x} = 0$, односно кинетичка енергија система је једнака нули.

Сличним расматрањима можемо добити да у случају торзионих осцилација једначина енергије гласи

$$\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}c\varphi^2 = \frac{1}{2}c\varphi_0^2\,, \tag{87}$$

где је c моменат који изазива угао увијања раван јединици.

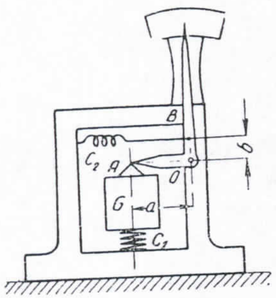
Када поставимо једначину енергије у сваком конкретном случају, онда можемо лако наћи по аналогији са једначинама (82), (83) и (87) кружну фреквенцију малих осцилација, при чему уводимо појам *редуковане масе* и *редуковане крутости система.* Исто тако можемо једначину енергије система диференцирати по времену и у том случају добити диференцијалну једначину кретања система, одакле се лако налази кружна фреквенција осцилација.

Примери

83.) Код инструмента за регистрацију вертикалних осцилација темеља машина, терет G ослоњен на вертикалну опругу крутости c_1 везан је зглобом са статички уравнотеженом сказаљком израђеном у виду изломљене полуге. Моменат инерције сказаљке у односу на осовину обртања износи J. Сказаљку враћа у равнотежни положај хоризонтална опруга крутости c_2. Одредити период слободних осцилација сказаљке око равнотежног положаја ако је $OA = a$ и $OB = b$. Размере терета занемарити.

Терет G ослоњен је о меку опругу крутости c_2, тако да је фреквенција његових слободних осцилација врло мала у поређењу са фреквенцијом осциловања темеља, коју желимо да меримо. Ако инструменат вежемо са темељом, који изводи високо фреквентне осцилације, тада ће терет (види задатак бр. 62) остати практично непомичан у простору и сказаљка ће регистровати на добошу осцилације темеља са увећаном амплитудом. Да би добили тачнију вредност за фреквенцију слободних осцилација инструмента можемо да посматрамо истовремено терет G са опругом c_1 и полугу AOB са опругом c_2. Ако са x означимо мало вертикално померање терета G од равнотежног положаја тада ће потенцијална енергија обе опруге бити

$$E_p = \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_2}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2,$$



Сл. 84

док ће кинетичка енергија терета бити

$$E_{k\,1} = \frac{G}{2g}\,\dot{x}^2$$

Кинетичка енергија сказаљке која ротира угаоном брзином

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{a}$$

биће

$$E_{k\,2} = \frac{1}{2}\,J\,\frac{\dot{x}^2}{a^2}$$

Једначина енергије биће

$$\left(\frac{G}{g} + \frac{J}{a^2}\right)\frac{\dot{x}^2}{2} + \left(c_1 + c_2\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{2} = const.$$

Ова једначина има исти облик као и једначина (82) само место масе $\frac{G}{g}$ сада имамо *редуковану масу*

$$\frac{G}{g} + \frac{J}{a^2},$$

а уместо крутости опруге c имамо *редуковану крутост* система

$$c_1 + c_2\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$$

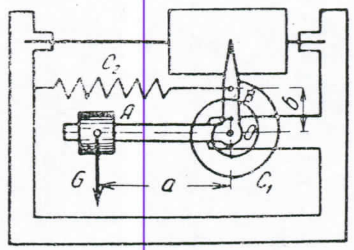
Према томе, кружна фреквенција осцилација биће

$$k^2 = \frac{c_1 + c_2\dfrac{b^2}{a^2}}{\dfrac{G}{g} + \dfrac{J}{a^2}} = \frac{g\,(c_1 a^2 + c_2 b^2)}{Ga^2 + Jg},$$

а период је

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{Ga^2 + Jg}{g\,(c_1 a^2 + c_2 b^2)}}$$

89.) Код инструмента за регистрацију вертикалних осцилација статички уравнотежену полугу AOB момента инерције J у односу на осовину обртања одржава у положају стабилне равнотеже спирална опруга крутости c_1. На крају A полуге постављен је терет G. Одредити период малих слободних осцилација полуге око положаја равнотеже ако је $OA = a$ и $OB = b$. Размере терета занемарити.



Сл. 85

Потенцијална енергија система састоји се од потенцијалне енергије спиралне опруге крутости c_1 и торзионе опруге чија је крутост c_2.

$$E_p = E_{p\,1} + E_{p\,2} = \frac{M\varphi}{2} + \frac{F\delta}{2}$$

$$M = c_1\varphi\ ;\quad F = c_2\delta = c_2\cdot b\varphi\ ,$$

па је

$$E_p = \frac{c_1\varphi^2}{2} + \frac{c_2 b^2\varphi^2}{2}$$

Кинетичка енергија система састоји се од кинетичке енергије транслације терета G и кинетичке енергије ротације полуге

$$E_k = \frac{G}{2g}\,\dot{z}^2 + \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{G}{2g}\,a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Једначина енергије система биће

$$E_k + E_p = \left(\frac{Ga^2}{g} + J\right)\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \left(c_1 + c_2 b^2\right)\frac{\varphi^2}{2} = const.$$

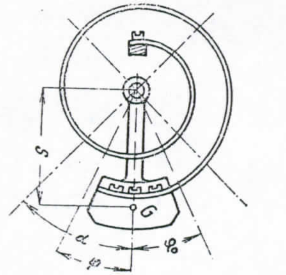
Одавде је

$$k^2 = \frac{c_1 + c_2 b^2}{\dfrac{G}{g}\,a^2 + J},$$

а период осциловања је

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{Ga^2 + Jg}{g\,(c_1 + c_2 b^2)}}$$

90.) Код вибрографа Geiger-а конструисаног за регистрацију осцилација темеља, делова машина итд., спирална опруга крутости c одржава клатно тежине G нагнуто према вертикали за угао α. Моменат инерције клатна у односу на осовину обртања је J. Растојање тежишта клатна од осе обртања је s. Одредити период малих осцилација вибрографа.



Сл. 86

Клатно је у положају равнотеже померено из положаја ненапрегнуте опруге за угао φ_0. Положај равнотеже одређујемо на основу моментне једначине

$$c\varphi_0 - Gs\,\sin\,\alpha = 0 \qquad (a)$$

Ако клатно изведемо из равнотежног положаја за угао φ, појавиће се реституциони моменат

$$M = c\,(\varphi_0 + \varphi) - Gs\,\sin\,(\alpha - \varphi)$$

За мале вредности угла φ ово прелази у

$$M \approx c(\varphi_0 + \varphi) - Gs\ (\sin\alpha - \varphi\cos\alpha)$$

На основи (a) је $M = (c + Gs\cos\alpha)\varphi$

Потенцијална енергија деформације опруге биће

$$E_p = \frac{M\varphi}{2} = \frac{(c + Gs\cos\alpha)\varphi^2}{2}$$

Кинетичка енергија система је $E_k = J\frac{\dot\varphi^2}{2}$

Једначина енергије је

$$E_k + E_p = \frac{J\dot\varphi^2}{2} + \frac{(c + Gs\cos\alpha)\varphi^2}{2} = const.$$

Одавде је
$$k^2 = \frac{c + Gs\cos\alpha}{J},$$

односно
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{c + Gs\cos\alpha}}$$

за $\alpha = 0$ је $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Gs + c}}$,

а за $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ је $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{c}}$

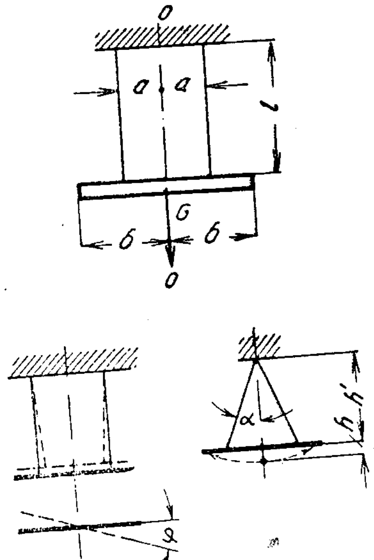
91.) Призматични штап обешен је о два једнака конца и врши кружне осцилације у хоризонталној равни око осовине OO. Одредити кружну фреквенцију осцилација.

Ако означимо са φ угао ротације штапа око равнотежног положаја, тада је висина на коју се штап подигне
$$\frac{a^2\varphi^2}{2l},$$

јер је
$$h = l - h'$$
$$h' = \sqrt{l^2 - (\alpha l)^2} = \sqrt{l^2 - a^2\varphi^2},$$

јер је
$$a\varphi = l\alpha$$
$$h' \approx l\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2\varphi^2}{l^2}\right) = l - \frac{1}{2}\frac{a^2\varphi^2}{l},$$

па је
$$h = l - h' = \frac{a^2\varphi^2}{2l}$$



Сл. 87

Једначина енергије је

$$\frac{J\dot\varphi^2}{2} + \frac{Ga^2\varphi^2}{2l} = const.$$

$$J = \frac{Gb^2}{3g}$$

па је
$$k = \sqrt{\frac{3a^2g}{lb^2}}$$

или
$$T = 2\pi\frac{b}{a}\sqrt{\frac{l}{3g}}$$

Пошто је
$$i^2 = \frac{Jg}{G} = \frac{b^2}{3g},$$

онда је и
$$T = 2\pi\frac{i}{a}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

92.) Апарат на слици употребљава се за регистрацију осцилација бродова. Одредити кружну фреквенцију вертикалних осцилација терета G, ако је J моменат инерције терета и полуге BD у односу на тачку ослонца.

Ако је φ угаоно померање полуге BD од равнотежног положаја, а c крутост опруге, акумулисана енергија за време померања

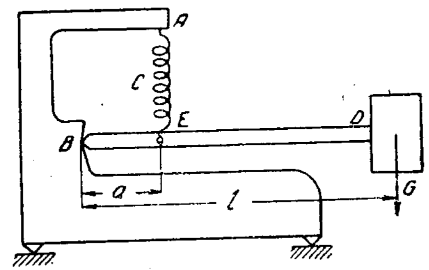
биће
$$E_p = \frac{ca^2\varphi^2}{2},$$

а кинетичка енергија система

је
$$E_k = \frac{J\dot\varphi^2}{2},$$

па једначина енергије гласи
$$\frac{J\dot\varphi^2}{2} + \frac{ca^2\varphi^2}{2} = \text{const.},$$

одакле је $k = \sqrt{\dfrac{ca^2}{J}}$



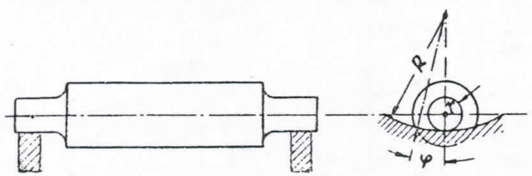
Сл. 88

Ако занемаримо масу полуге BD и претпоставимо да је маса терета G сконцентрисана у тежишту, онда је $J = \dfrac{Gl^2}{g}$

и
$$k = \sqrt{\frac{ca^2g}{Gl^2}} = \sqrt{\frac{ag}{lf_{ст}}},$$

где је $f_{ст} = \dfrac{Gl}{ac}$ статичко издужење опруге.

93.) Рукавци ротора полупречника r, ослањају се на шине чији је полупречник кривине R. Одредити кружну фреквенцију малих осцилација ротора када се котрља без клизања по шинама.



Сл. 89

Угаона брзина ротора за време вибрација биће

$$\dot{\varphi}\,\frac{(R-r)}{r},$$

док је брзина његовог тежишта $(R-r)\,\dot{\varphi}$.

Висина пењања тежишта је

$$\frac{(R-r)}{2}\,\varphi^2$$

Једначина енергије је

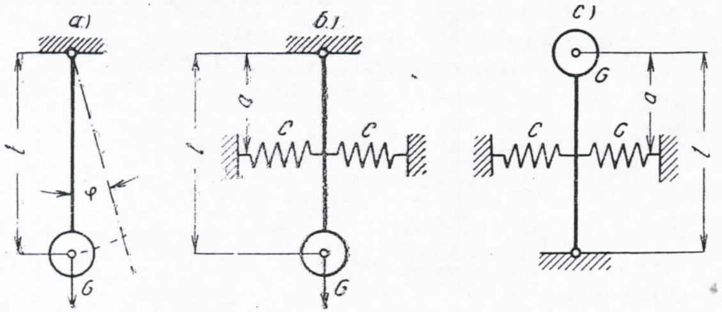
$$\frac{J(R-r)^2\dot{\varphi}^2}{2r^2}+\frac{G(R-r)^2\dot{\varphi}^2}{2g}+\frac{G(R-r)^2}{2}=const.,$$

где је J моменат инерције ротора у односу на подужну осу.

Квадрат кружне фреквенције осцилација према томе је

$$k^2=\frac{G\,r^2}{\left(1+G\,\frac{r^2}{g}\right)(R-r)}$$

94.) Одредити методом енергије кружне фреквенције малих осцилација клатна претстављених на слици



Сл. 90

a.) Једначина енергије гласи

$$\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2+G\,l\,(1-\cos\varphi)=const.$$

$$1-\cos\varphi\approx\frac{1}{2}\varphi^2,$$

па је

$$\frac{1}{2}\,\frac{G}{g}\,l^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\,G\,l\,\varphi^2=const.$$

Одавде је

$$k^2=\frac{g}{l}$$

b.) Једначина енергије је

$$\frac{1}{2}\,\frac{G}{g}\,l^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\,G\,l\,\varphi^2+\frac{2\,ca^2\varphi^2}{2}=const.,$$

односно

$$\frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\frac{G\,l^2}{g}+\frac{1}{2}\,\varphi^2\,(G\,l+2\,ca^2)=const.$$

Одавде је

$$k^2=\frac{G\,l+2\,ca^2}{G\,l^2/g}=\frac{g}{l}\left(1+\frac{2\,ca^2}{G\,l}\right)$$

c.) Једначина енергије је

$$\frac{1}{2}\,\frac{G}{g}\,l^2\dot{\varphi}^2+\frac{2\,c\,(l-a)^2\varphi^2}{2}-\frac{1}{2}\,G\,l\,\varphi^2=const.$$

Одавде је

$$k^2=\frac{g}{l}\left[\frac{2\,c\,(l-a)^2}{G\,l}-1\right]$$

Реална решења за k постоје само ако је

$$\frac{2\,c\,(l-a)^2}{G\,l}>1\quad\text{и}\quad G<\frac{2\,c\,(l-a)^2}{l}$$

У противном случају нећемо уопште добити осцилације и положај клатна на слици *c*) је нестабилан.

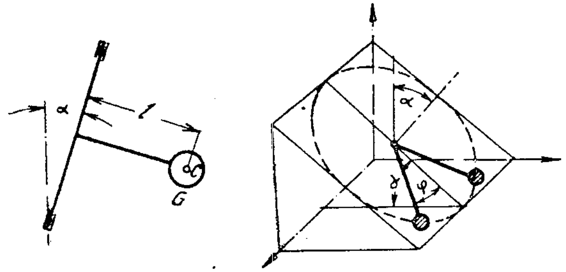
95.) Слика 91 претставља тешко клатно чија је осовина ротације нагнута под веома малим углом α према вертикали. Наћи фреквенцију слободних осцилација узимајући у обзир само терет G концентрисан у тежишту C.

При ротацији за угао φ терет се подигне за висину

$$h=l\,(1-\cos\varphi)\,\sin\alpha\approx l\,\frac{\varphi^2}{2}\,\alpha$$

Једначина енергије је

$$\frac{G}{2g}\,l^2\dot{\varphi}^2+\frac{G\,l\,\varphi^2\,\alpha}{2}=const.,$$



па је

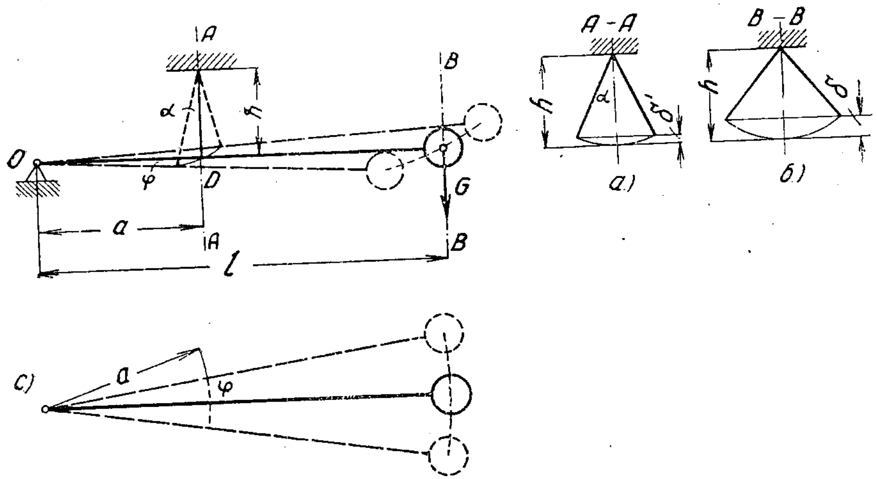
$$k^2 = \frac{G l \alpha}{\frac{G l^2}{g}} = \frac{g\,\alpha}{l},$$

или

$$k = \sqrt{\frac{g\,\alpha}{l}}$$

Сл. 91

96.) Крут штап дужине l може слободно да се обрће око једног краја, док на другом крају носи куглу тежине G. Штап придржава у равнотежном положају нерастегљив конац дужине h. Растојање $OA = a$. Ако куглу изведемо из положаја равнотеже управно на раван цртежа и затим је пустимо, систем ће почети да осцилује. Одредити период малих осцилација система. (Испит, септембар 1949).



Сл. 92

Услед нерастегљивости конца кугла неће осцилирати у хоризонталној равни око непомичне тачке O, већ по малом луку и том приликом подизаће се за висину δ (у крајњем положају) изнад хоризонталне равни.

Тада ће (слика b) потенцијална енергија кугле бити

$$E_p = G\,\delta$$

Кинетичка енергија система потиче услед кретања кугле у хоризонталној равни и износи

$$E_k = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} l^2 \dot{\varphi}^2$$

Пошто посматрамо мале осцилације, онда је

$$a\varphi \approx h\alpha$$

Исто тако је

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{l}{a}, \quad \text{тј.} \quad \delta = \frac{l}{a}\delta'$$

Из слике (a) је

$$\delta' = h(1 - \cos\alpha) \approx \frac{1}{2} h\alpha^2$$

Како је

$$\alpha = \frac{a}{h}\varphi,$$

то је

$$\delta' = \frac{1}{2}\frac{a^2}{h}\varphi^2,$$

односно

$$\delta = \frac{l}{a} \cdot \frac{1}{2}\frac{a^2}{h}\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{al}{h}\varphi^2$$

Према томе, једначина енергије система биће

$$\frac{G}{2g} l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{al}{h} G\varphi^2 = \text{const.}$$

Одавде је

$$k^2 = \frac{ga}{hl},$$

па је

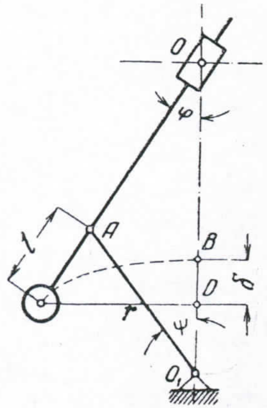
$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{hl}{ga}}$$

97.) Код клатна палографа Schlick-а терет M клатна обешен је о штап који слободно пролази кроз обртан цилиндар O и везан је зглобом у тачки A са кривајом OA, која се обрће око непомичне осе O_1. При коме ће услову вертикални положај полуге клатна OM бити у положају стабилне равнотеже. Одредити период малих осцилација клатна око тог положаја. Размере терета и тежину штапова занемарити.

Потенцијална енергија система је

$$E_p = -G\delta = -mg\delta$$

$$\delta = \overline{OD} - \overline{OB}$$



Сл. 93

$$\overline{OB} = h + l - r$$

$$\overline{OD} = h - r\cos\psi + l\cos\varphi$$

$$\delta = r(1 - \cos\psi) + l(\cos\varphi - 1)$$

$$\cos\psi \approx 1 - \frac{\psi^2}{2}; \quad \cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$\delta = \frac{r\psi^2}{2} - \frac{l\varphi^2}{2}$$

По синусној теореми је

$$\frac{\sin(\varphi + \psi)}{h} = \frac{\sin\varphi}{r}, \quad \text{односно} \quad \frac{\varphi + \psi}{h} = \frac{\varphi}{r}$$

Одавде је $\psi = \frac{h - r}{r}\varphi$

и
$$\delta = \frac{r}{2}\frac{(h-r)^2}{r^2}\varphi^2 - \frac{l\varphi^2}{2}$$

$$\delta = -\frac{1}{2r}\left[rl - (h-r)^2\right]\varphi^2$$

па је
$$E_p = \frac{mg}{2r}\left[rl - (h-r)^2\right]\varphi^2$$

Кинетичка енергија система је

$$E_k = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 \qquad J = m(l + h - r)^2$$

па је
$$E_k = \frac{1}{2}m(l + h - r)^2\dot{\varphi}^2$$

Једначина енергије је

$$E_p + E_k = \frac{1}{2}m(l + h - r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{mg}{2r}\left[rl - (h-r)^2\right]\varphi^2 = \text{const.}$$

Диференцирањем по времену добијамо

$$m(l + h - r)^2\ddot{\varphi} + \frac{mg}{r}\left[rl - (h-r)^2\right]\varphi = 0,$$

односно
$$\ddot{\varphi} + \frac{\left[rl - (h-r)^2\right]g}{r(l + h - r)^2}\varphi = 0$$

Одавде је $T = 2\pi(l + h - r)\sqrt{\frac{r}{\left[rl - (h-r)^2\right]g}}$

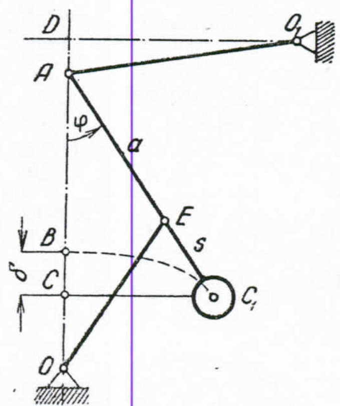
Услов стабилне равнотеже је

$$\frac{d^2E_P}{d\varphi^2} > 0,$$

односно
$$rl - (h-r)^2 > 0$$

Одавде је $\sqrt{rl} > h - r$

98.) Занемарујући масу штапа наћи период малих осцилација клатна приказаног на цртежу. Тежиште терета налази се на криваји механизма Evans-a, чија тачка A врши праволиниско кретање. У равнотежном положају штапови OE и AC_1 су вертикални, док је штап AO_1 хоризонталан; $OE = AF = a$, $EC_1 = s$.



Сл. 94

$$E_k + E_p = \text{const.}$$

$$E_p = -G\delta = -mg\delta$$

$$\delta = \overline{DC} - \overline{DB}$$

$$\overline{DB} = a + s$$

$$\overline{DC} = \overline{DA} + \overline{AC}$$

$$\overline{AC} = (a + s)\cos\varphi$$

$$\overline{DA} = \overline{DO} - \overline{AO}$$

$$\overline{DA} = 2a - 2a\cos\varphi$$

$$\overline{DC} = 2a(1 - \cos\varphi) + (a + s)\cos\varphi$$

$$\overline{DB} = a + s$$

$$\delta = 2a(1 - \cos\varphi) + (a + s)\cos\varphi - a - s$$

$$\delta = (a - s)(1 - \cos\varphi); \quad \cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$\delta = -(s - a)\frac{\varphi^2}{2}$$

Онда је
$$E_p = mg(s - a)\frac{\varphi^2}{2}$$

Кинетичка енергија терета је

$$E_k = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2; \quad J = m(a + s)^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}m(a + s)^2\dot{\varphi}^2$$

Једначина енергије је

$$\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + mg(s - a)\frac{\varphi^2}{2} = \text{const.}$$

Диференцирањем по времену добијамо

$$J\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + mg(s-a)\varphi\dot{\varphi} = 0\,,$$

односно
$$\ddot{\varphi} + \frac{mg(s-a)}{m(s+a)^2}\varphi = 0$$

Одавде је
$$T = 2\pi\frac{s+a}{\sqrt{g(s-a)}}$$

99.) Округли обруч обешен је у три непомичне тачке једнаким концима дужине l, тако да обруч лежи у хоризонтали. У равнотежном положају обруча конци су вертикални и деле обим обруча на три једнака дела. Наћи период малих осцилација обруча око осе која пролази кроз његов центар.

$$E_k + E_p = \text{const.}$$

$$E_k = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 \qquad J = Ma^2 = \frac{G}{g}a^2, \text{ па је } E_k = \frac{1}{2}\frac{G}{g}a^2\dot{\varphi}^2$$

Висина дизања обруча је

$$h = \frac{a^2\varphi^2}{2l},$$

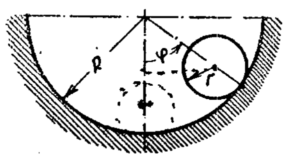
па је
$$E_p = Gh = \frac{Ga^2\varphi^2}{2l}$$

Једначина енергије гласи

$$\frac{1}{2}\frac{G}{g}a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{Ga^2\varphi^2}{2l} = \text{const.}$$

Одавде је $k = \sqrt{\frac{Ga^2 g}{lGa^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$, односно $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

100.) Тешка хомогена кугла полупречника r котрља се без клизања по унутрашњој површини непокретног цилиндра полупречника R, са хоризонталном осом. Наћи дужину математичког клатна, чији је период осциловања једнак периоду малих осцилација кугле око положаја равнотеже.



Сл. 95

$$E_k + E_p = \text{const.}$$

$$E_k = \frac{7}{10}m(R-r)\dot{\varphi}^2$$

$$E_p = G(R-r)(1-\cos\varphi)$$

Једначина енергије је

$$\frac{7}{10}\frac{G}{g}(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + G(R-r)(1-\cos\varphi) = \text{const.}$$

Диференцирањем по времену добијамо

$$\frac{7}{5g}(R-r)\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \dot{\varphi}\sin\varphi = 0\,,$$

односно
$$\ddot{\varphi} + \frac{5g}{7(R-r)}\varphi = 0$$

$$T = T_1$$

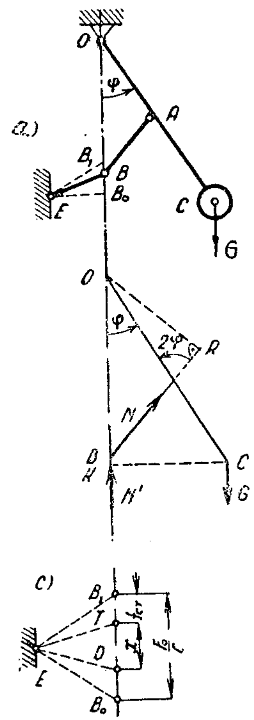
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}\,,$$

па је
$$\frac{7(R-r)}{5} = l\,, \quad \text{односно} \quad l = 1{,}4\,(R-r)$$

101.) Штап OA клатна везан је помоћу криваје AB са малом челичном опругом EB крутости c. У ненапрегнутом стању опруга заузима положај EB_1. Познато је да је потребно на опругу деловати силом F_0 у правцу OB_1 да би је довели у положај EB_0, који одговара равнотежном положају клатна. $OA = AB = a$. Масу штапа занемарујемо. Растојање тежишта клатна од осе обртања је $OC = l$. Тежина клатна је G. У циљу постизања што бољег изохронизма (независност периода осцилација од почетног положаја), систем је тако регулисан да у једначини кретања клатна

$$\ddot{\varphi} = f(\varphi) = -\beta\varphi + \ldots$$

први од одбачених чланова буде реда φ^5. Одредити каква зависност мора да постоји у том циљу између константи: G_1, F_0, c_1, a_1, l и одредити период малих осцилација клатна.



Сл. 96

Осцилације ће се вршити око положаја статичке равнотеже тј. око неке тачке која је за величину $f_{ст.}$ удаљена од тачке B_1 на ниже.

Нађимо ту величину $f_{ст.}$

У том циљу потребно је да нађемо силу у штапу AB, односно њену вертикалну компоненту која делује у правцу OB.

Силу у штапу AB обележимо са N, па је

$$\Sigma M_0 = G\cdot\overline{KC} - N\cdot\overline{OR} = 0$$

$$\overline{OC} = l\,; \quad \overline{OA} = a$$

$$\overline{KC} = l\sin\varphi \quad \overline{OR} = a\sin 2\varphi,$$

па је
$$Gl\sin\varphi - Na\sin 2\varphi = 0\,,$$
односно
$$N = \frac{Gl\sin\varphi}{a\sin 2\varphi}$$

Пројекција ове силе у правцу OB је
$$N' = N\cos\varphi = \frac{Gl}{2a}\,,$$
па је
$$f_{ст.} = \frac{N'}{c} = \frac{Gl}{2ac}$$

Према томе, тачка око које ће се вршити осцилације биће удаљена за $\frac{Gl}{2ac}$ од тачке B_1. Обележимо ту тачку са T (сл. 96, c).

Да би опруга дошла из тачке B_1 у тачку B_0 потребно је деловати силом F_0 па је
$$F_0 = c\cdot\overline{B_1B_0}\,,$$
односно
$$\overline{B_1B_0} = \frac{F_0}{c}$$

При деловању силе F_0 тачка T ће се померити за извесну дужину x на доле
$$x = \overline{B_0B_1} - (\overline{B_1T} + \overline{B_0D})$$
$$\overline{B_0D} = \overline{OB_0} - \overline{OD}$$
$$\overline{B_0D} = 2a - 2a\cos\varphi = 2a(1-\cos\varphi),$$
па је
$$x = \frac{F_0}{c} - f_{ст} - 2a(1-\cos\varphi)$$

Кинетичка енергија тега је
$$E_k = \frac{1}{2}J\dot\varphi^2\,; \qquad J = \frac{G}{g}l^2$$
па је
$$E_k = \frac{1}{2}\frac{G}{g}l^2\dot\varphi^2.$$

Потенцијална енергија опруге је
$$E_p = -\frac{1}{2}cx^2\,,$$
па је
$$E_p = \frac{1}{2}c\left[f_{ст} + 2a(1-\cos\varphi) - \frac{F_0}{c}\right]^2$$

Једначина енергије биће

$$E_k + E_p \text{ const.}$$
$$\frac{1}{2}\frac{G}{g}l^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}c\left[f_{ст} + 2a(1-\cos) - \frac{F_0}{c}\right]^2 = \text{const.}$$
$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \cdots$$
па је
$$1 - \cos\varphi \approx \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \cdots$$
онда је
$$\frac{c}{2}\left[f_{ст} + 2a(1-\cos\varphi) - \frac{F_0}{c}\right]^2 = \frac{c}{2}\left[f_{ст} - \frac{F_0}{c} + 2a\left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!}\right)\right]^2 =$$
$$= \frac{c}{2}\Big[\underbrace{f_{ст} - \frac{F_0}{c}}_{a} + \underbrace{a\varphi^2}_{b} - \underbrace{\frac{a\varphi^4}{12}}_{c}\Big]^2$$

Знамо да је $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

Када будемо горњи полином дизали на квадрат члан са φ^2 добићемо само у члану $2ab$, док остало по услову задатка занемарујемо. Дакле
$$E_p = \frac{c}{2}\left[f_{ст} - \frac{F_0}{c} + a\varphi^2 - \frac{a\varphi^4}{12}\right]^2 \approx \frac{c}{2}\cdot 2\left(f_{ст} - \frac{F_0}{c}\right)a\varphi^2\,,$$
па је једначина енергиј:
$$\frac{1}{2}\frac{G}{g}l^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\cdot 2ac\left(f_{ст} - \frac{F_0}{c}\right)\varphi^2 = \text{const.}$$

Диференцирањем по времену добијамо
$$\frac{G}{g}l^2\ddot\varphi + 2ac\left(f_{ст} - \frac{F_0}{c}\right)\varphi = 0\,,$$
односно
$$\ddot\varphi + \frac{2agc\left(f_{ст} - \frac{F_0}{c}\right)}{Gl^2}\varphi = 0$$

Одавде је
$$k^2 = \frac{2agc\left(\frac{Gl}{2ac} - \frac{F_0}{c}\right)}{Gl^2} = \frac{g}{l}\cdot\frac{Gl - 2F_0a}{Gl}$$

Период осциловања је
$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2aF_0}{Gl}}}$$

Пошто по услову задатка ради изохронизма први наредни члан реда треба да је φ^5, то значи да члан уз φ^4 треба да буде раван нули. Кад наведени полином будемо дизали на квадрат чланове са φ^4 добићемо у члановима b^2 и $2ac$; дакле

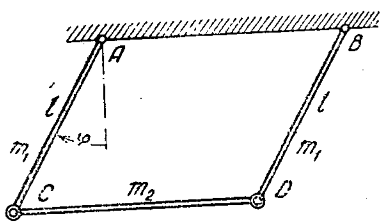
$$\frac{c}{2}\left[a^2 - 2\left(f_{ст} - \frac{F_0}{c}\right)\frac{a}{12}\right]\varphi^4 = 0$$

Одавде је
$$a - \frac{1}{6}\left(\frac{Gl - 2F_0 a c}{2ac}\right) = 0,$$

па је
$$Gl - 2F_0 a = 12 a^2 c.$$

Ово је тражена веза између константи: G, F_0, c, a, l.

102.) Две једнаке полуге AC и BD дужине l и масе m_1, могу се окретати у вертикалној равни око тачака A и B, које леже на једној хоризонтали. Обе полуге су шарнирима спојене с трећом хоризонталном полугом CD масе m_2, чија је дужина једнака растојању AB. Одредити период малих осцилација овога система, око положаја равнотеже.



Сл. 96

Знамо да је

$$E_k + E_p = \text{const.}$$

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3}$$

За E_{k1} и E_{k2} је

$$dE_k = \frac{1}{2} v^2\, dm$$

Ако са ξ обележимо растојање од тачке A, односно B, до неке елементарне масе на штапу AC, односно BD и са ρ масу јединице дужине штапова AC и BD, онда је

$$dE_k = \frac{1}{2}\xi^2\dot\varphi^2\rho\, d\xi,$$

а
$$E_{k1} = E_{k2} = \frac{1}{2}\dot\varphi^2\rho\int_0^l \xi^2\, d\xi = \frac{1}{2}\dot\varphi^2\rho\frac{l^3}{3} = \frac{1}{6}\rho l^3\dot\varphi^2$$

Како је $\rho l = m_1$, то је

$$E_{k1} = E_{k2} = \frac{1}{6} m_1 l^2\dot\varphi^2$$

E_{k3} добићемо по König-овој теореми

$$E_{k3} = \frac{1}{2} J_c\,\omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v_c^2$$

$J_c = 0$ пошто се штап CD креће транслаторно као спојна полуга шарнирног четвороугаоника са две једнаке криваје.

$$v_c^2 = l^2\dot\varphi^2,$$

па је
$$E_{k3} = \frac{1}{2} m_2 l^2\dot\varphi^2,$$

односно
$$E_k = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_1 + m_2\right) l^2\dot\varphi^2$$

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} + E_{p3}$$

$$E_{p1} = E_{p2} = m_1 g\delta; \qquad \delta = \frac{l}{2}\left(1 - \cos\varphi\right); \qquad \cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

па је
$$\delta \approx \frac{l}{4}\varphi^2, \qquad E_{p1} = E_{p2} = \frac{m_1 g l}{4}\varphi^2$$

$$E_{p3} = m_2 g\delta_1; \qquad \delta_1 \approx \frac{l\varphi^2}{2},$$

па је
$$E_{p3} = \frac{m_2 g l}{2}\varphi^2,$$

односно
$$E_p = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) g l\varphi^2$$

Једначина енергије према томе гласи

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_1 + m_2\right) l^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) g l\varphi^2 = \text{const.}$$

Диференцирањем горње једначине по времену пошто је скратимо са l добијамо

$$\left(\frac{2}{3}m_1 + m_2\right) l\ddot\varphi + \left(m_1 + m_2\right) g\varphi = 0,$$

односно
$$\ddot\varphi + \frac{g}{l}\,\frac{m_1 + m_2}{m_2 + \frac{2}{3}m_1}\,\varphi = 0$$

Ако обележимо са $\mu = \frac{m_1}{m_2}$, ова једначина прелази у

$$\ddot\varphi + \frac{g}{l}\,\frac{1 + \mu}{1 + \frac{2}{3}\mu}\,\varphi = 0$$

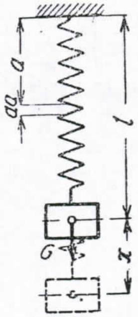
Онда је
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\,\frac{1 + \frac{2}{3}\mu}{1 + \mu}}$$

7. ПРИБЛИЖНА МЕТОДА RAYLEIGH-а

Занемарујући масу опруге у случају осцилација обичног терета обешеног о еластичну опругу, свели смо систем од система са бесконачно много степена слободе на систем са једним степеном слободе. Сличним претпоставкама и занемаривањима добијамо и остале системе са једним или са коначним бројем степена слободе.

Ако хоћемо тачније решење можемо масу опруге, масу греде која осцилује или масу сличних система узети у обзир помоћу приближне методе Rayleigh-а. *Основно у овој методи је да претпоставимо тип осцилације система и да затим помоћу методе енергије долазимо до најниже фреквенције, односно до фреквенције основног тона.*

Посматраћемо опет осцилације терета обешеног о еластичну опругу. Претпостављамо да је маса опруге мала у поређењу са масом терета, те да тип осцилација остаје исти као и у случају када смо занемарили масу опруге. Ради тога и потенцијална енергија система неће претрпети промену, док ће се кинетичка енергија система повећати за кинетичку енергију опруге.



Сл. 98

Нађимо кинетичку енергију опруге. Померање делића опруге на удаљењу a биће

$$\frac{xa}{l}$$

Ако са q означимо тежину јединице дужине опруге, тада ће маса елемента бити

$$\frac{q}{g}\,da,$$

а његова кинетичка енергија

$$\frac{q}{2g}\left(\frac{\dot{x}a}{l}\right)^2 da$$

Целокупна кинетичка енергија опруге биће

$$\frac{q}{2g}\int_0^l\left(\frac{\dot{x}a}{l}\right)^2 da = \frac{\dot{x}^2}{2g}\,\frac{q\,l}{3}$$

Ову енергију додаћемо кинетичкој енергији терета G, те једначина енергије гласи

$$\frac{\dot{x}^2}{2g}\left(G+\frac{ql}{3}\right)+\frac{cx^2}{2}=\frac{cx_0^2}{2}$$

На основи једначине (86) претходног параграфа кружна фреквенција осцилација у овом случају биће

$$k^2=\frac{cg}{G+\frac{ql}{3}}.$$

Као што видимо у овом случају систем ће исто осциловати, као кад бисмо на опругу обесили терет чија је тежина увећана за $^1/_3$ тежине опруге и занемарили њену масу.

Према томе, да бисмо применили приближну методу Rayleigh-а, потребно је да нађемо кинетичку енергију масе коју не занемарујемо и да ту енергију додамо у једначину енергије система, одакле се лако налази кружна фреквенција осцилација.

Важно је напоменути да иако смо претпоставили да је маса опруге мала у поређењу са масом терета, ово решење може да се употреби са довољном тачношћу и у случају да су то величине истог реда. Тако ако је $ql = 0{,}5$ G, грешка приближног решења износи око $^1/_2\,\%$. За $ql = $ G грешка је око $^3/_4\,\%$, а за $ql = 2$ G око 3%.

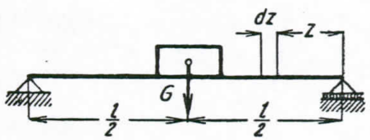
Поред тога важно је да уочимо да су приближне вредности фреквенција израчунате методом Rayleigh-а увек нешто више од тачних вредности.

Примери

103.) Терет G постављен је на средини слободно ослоњене греде чија је дужина l. Дато је: момент инерције попречног пресека греде I, модул еластичности материјала греде E и тежина греде G. Одредити приближно период слободних осцилација система, узимајући у обзир тежину греде.

Ако са f обележимо статички угиб терета, онда је крутост греде

$$c=\frac{G}{f}=\frac{G}{\frac{G\,l^3}{48EI}}=\frac{48EI}{l^3},$$



Сл. 99

а кружна фреквенција биће

$$k^2 = \frac{cg}{G} = \frac{48\,EIg}{G\,l^3}$$

Ово је израз за кружну фреквенцију кад занемаримо масу греде. Међутим, ако хоћемо да узмемо у обзир и масу греде, тада ћемо претпоставити да је облик линије угиба за време осцилација исти као и облик еластичне линије греде.

За случај на слици еластична линија има једначину

$$y = \frac{G\,l^3}{48\,EI}\,\frac{(3\,l^2-4\,z^2)\,z}{l^3} = f\cdot\frac{3\,l^2 z - 4\,z^3}{l^3} = f\left[3\left(\frac{z}{l}\right)-4\left(\frac{z}{l}\right)^3\right]$$

Ова једначина еластичне линије важи за половину греде.

Пошто претпостављамо да је линија угиба греде за време осцилација истог облика као и статичка еластична линија то ће елемент греде dz масе $\frac{qdz}{g}$ имати кинетичку енергију

$$\frac{1}{2}\,\frac{q}{g}\,f^2\left[3\left(\frac{z}{l}\right)-4\left(\frac{z}{l}\right)^3\right]^2 dz\,,$$

а целокупна кинетичка енергија греде је

$$\frac{1}{2}\,\frac{q}{g}\,f^2\cdot 2\int_0^{\frac{l}{2}}\left[9\left(\frac{z}{l}\right)^2-24\left(\frac{z}{l}\right)^4+16\left(\frac{z}{l}\right)^6\right]dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{g}\,f^2\,\frac{2l}{2^3}\left(3-\frac{6}{5}-\frac{1}{7}\right) = \frac{17}{35}\,q\,l\,\frac{\dot{f}^2}{2g}$$

Једначина енергије кад нисмо узели у обзир масу греде гласила је

$$\frac{1}{2}\,\frac{G}{g}\,f^2+\frac{1}{2}\,c\,f^2 = \text{const.}$$

Кад додамо овој једначини и кинетичку енергију услед масе греде, онда једначина енергије гласи

$$\frac{1}{2g}\left(G+\frac{17}{35}\,ql\right)f^2+\frac{1}{2}\,c\,f^2 = \text{const.}$$

Према томе, период осцилација биће исти као да имамо греду чију масу занемарујемо, а која је оптерећена у средини теретом

$$G+\frac{17}{35}\,ql = G+\frac{17}{35}\,G_1$$

И овом приликом смо претпоставили да је маса греде мала према маси терета. Међутим, чак и у граничном случају кад је $G=0$,

а греда је оптерећена у средини теретом $\frac{17}{35}\,q\,l$, добијамо решење које задовољава. У том случају је

$$f_{\text{ст.}} = \frac{17}{35}\,q\,l\,\frac{l^3}{48\,EI}\,,$$

па је период слободних осцилација

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{f_{\text{ст.}}}{g}} = 0{,}632\sqrt{\frac{ql^4}{EIg}}\,,$$

док тачно решење даје

$$T = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{ql^4}{EIg}} = 0{,}637\sqrt{\frac{ql^4}{EIg}}$$

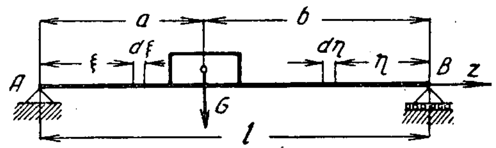
Грешка у овом граничном случају износи мање од 1%.

104.) Одредити кружну фреквенцију слободних осцилација терета G постављеног на греду AB једнаког попречног пресека:

a) претпостављајући да је тежина греде занемарљива,

b) узимајући у обзир масу греде примењујући методу Rayleigh-a,

a)



Сл. 100

$$f_{\text{ст}} = \frac{G\,a^2 b^2}{3\,l\,EI}\quad;\qquad c = \frac{3\,l\,EI}{a^2 b^2}\,,$$

па је

$$k = \sqrt{\frac{cg}{G}} = \sqrt{\frac{3\,l\,EIg}{G\,a^2 b^2}}$$

b.) Ако хоћемо да узмемо у обзир масу греде треба наћи једначину еластичне линије греде под утицајем статичког оптерећења:

за $$z = \xi < a \qquad y_1 = \frac{G\,\xi\,b}{6\,EIl}\,[a\,(l+b)-\xi^2]\,, \tag{a}$$

за $$z = \eta < b \qquad y_2 = \frac{G\,a\,\eta}{6\,l\,EI}\,[b\,(l+a)-\eta^2] \tag{b}$$

Употребљавајући методу Rayleigh-а и претпостављајући да је за време осцилација максимална брзина неког делића на отстојању ξ од левог ослонца дата изразом

$$(\dot y_1)_{\max} = \dot y_{\max}\frac{y_1}{f_{\text{ст}}} = \dot y_{\max}\frac{\xi}{2a^2b}[a(l+b)-\xi^2],$$

где је $\dot y_{\max}$ највећа брзина терета G, увиђамо да, узимајући у обзир леву страну греде, треба да додамо левој страни једначине која је добијена на основи једначине енергије

$$\frac{G}{2g}\dot y^2_{\max} = \frac{c\, y_0^2}{2}$$

израз

$$\frac{q\dot y^2_{\max}}{2g}\int_0^a\left(\frac{y_1}{f_{\text{ст}}}\right)^2 d\xi = \frac{q\dot y^2_{\max}}{2g}\int_0^a \frac{\xi^2}{4a^4b^2}\left[a(l+b)-\xi^2\right]d\xi =$$

$$=\dot y^2_{\max}\frac{qa}{2g}\left[\frac13\frac{l^2}{b^2}+\frac{23a^2}{105b^2}-\frac{8}{15}\frac{al}{b^2}\right], \qquad (a)$$

где је q тежина јединице дужине греде.

На исти начин, посматрајући десни део греде, видимо да треба додати левој страни једначине (c) израз

$$\dot y^2_{\max}\frac{qb}{2g}\left[\frac{1}{12}\frac{(l+a)^2}{a^2}+\frac{1}{28}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{10}\frac{b(l+a)}{a^2}\right] \qquad (e)$$

Једначина енергије онда постаје

$$\frac{G+\alpha q a+\beta q b}{2g}\dot y^2_{\max} = \frac{c y_0^2}{2},$$

где α и β означавају изразе у угластим заградама израза (d) и (e).

Кружна фреквенција осцилација система биће онда

$$k=\sqrt{\frac{3lEIg}{a^2b^2(G+\alpha q a+\beta q b)}}$$

105.) Одредити период малих осцилација конзоле за случај кад се терет G налази на њеном крају, узимајући у обзир масу конзоле по методи Rayleigh-а.

Једначина енергије кад не узмемо у обзир масу конзоле гласи

$$\frac12\frac{G}{g}\dot f^2+\frac12 c f^2=\text{const.},$$

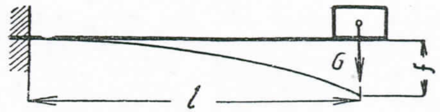
где је f угиб конзоле под теретом G.

Једначина еластичне линије ако за координатни почетак узмемо десни крај конзоле под теретом G је

$$y=\frac{G}{6EI}(z^3-3l^2z+2l^3),$$

док је

$$f=\frac{Gl^3}{3EI},$$



Сл. 101

па је

$$y=f\cdot\frac{z^3-3l^2z+2l^3}{2l^3}=f\left[\frac12\left(\frac zl\right)^3-\frac32\left(\frac zl\right)+1\right].$$

Кинетичка енергија услед масе конзоле коју треба да додамо претходној једначини енергије биће

$$E_k=\int_0^l\frac{q}{2g}\dot f^2\left[\frac12\left(\frac zl\right)^3-\frac32\left(\frac zl\right)+1\right]^2dz=\frac{33}{140}\frac{ql\dot f^2}{2g}$$

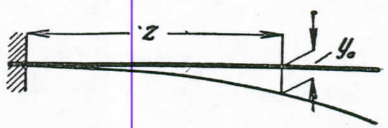
Једначина енергије прелази сада у

$$\frac{1}{2g}\left(G+\frac{33}{140}ql\right)\dot f^2+\frac12 c f^2=\text{const.},$$

па је период малих осцилација конзоле

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\left(G+\frac{33}{140}ql\right)l^3}{3EIg}}.$$

106.) Одредити период малих осцилација конзоле узимајући у обзир њену масу и претпостављајући да је приликом осциловања линија угиба конзоле једнака еластичној линији од равномерно распоређеног терета. Тежина јединице дужине оптерећене конзоле је q.



Сл. 102

Једначина еластичне линије је

$$y_0=f\left[\frac13\left(1-\frac zl\right)^4+\frac43\frac zl-\frac13\right],$$

у којој

$$f=\frac{ql^4}{8EI}$$

претставља угиб краја конзоле.

Потенцијална енергија угиба биће

$$dE_p=\frac{q y_0\, dz}{2}, \text{ па је}$$

$$E_p=\frac q2\int_0^l y_0\, dz=\frac{qf}{2}\int_0^l\left[\frac13\left(1-\frac zl\right)^4+\frac43\frac zl-\frac13\right]dz=\frac{qf}{2}\cdot\frac25 l=\frac q2\cdot\frac25 l\cdot\frac{ql^4}{8EI},$$

или $$E_p = \frac{q^2 l^8}{64\,(EI)^2} \cdot \frac{8}{5}\frac{EI}{l^3} = \frac{8}{5}\frac{EIf^2}{l^3}$$

Кинетичка енергија је

$$dE_k = \frac{v^2}{2} dm = \frac{q\dot{y}^2}{2g} dz \,,$$

односно $$E_k = \frac{q}{2g} \int_0^l \dot{y}^2 \, dz$$

Пошто претпостављамо да су осцилације облика

$$y = y_0 \cos kt \,, \text{ то је}$$

$$\dot{y}_{max} = y_0 k \,, \quad \text{па је}$$

$$E_{k\max} = \frac{q}{2g}\int_0^l (y_0 k)^2 \, dz = \frac{qk^2 f^2}{2g}\int_0^l \left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{l}\right)^4 + \frac{4}{3}\frac{z}{l} - \frac{1}{3}\right] dz = \frac{qk^2 f^2}{2g} \cdot \frac{104}{405}\, l$$

Како је $$E_{k\max} = E_p \,,$$

то је $$\frac{8}{5}\frac{EIf^2}{l^3} = \frac{qk^2 f^2}{2g} \cdot \frac{104}{405}\, l$$

Одавде је $$k^2 = \frac{8 \cdot 2 \cdot 81}{104}\, \frac{EIg}{ql^4} \,,$$

односно $$k = 3{,}56\sqrt{\frac{EIg}{ql^4}} \text{ sec}^{-1} \,, \qquad T = 1{,}76\sqrt{\frac{ql^4}{EIg}} \text{ sec.},$$

док је у претходном задатку за $G=0$ било

$$k^2 = \frac{140}{11}\,\frac{EIg}{ql^4} \,, \quad \text{односно } k = 3{,}56\sqrt{\frac{EIg}{ql^4}} \text{ sec.}^{-1} \quad \text{и} \quad T = 1{,}76\sqrt{\frac{ql^4}{EIg}} \text{ sec.}$$

107.) Одредити период малих осцилација греде ослоњене на два ослонца узимајући у обзир њену тежину и претпостављајући да је приликом осциловања линија угиба греде једнака еластичној линији од равномерно распоређеног терета. Тежина јединице дужине оптерећене греде је q.

Једначина еластичне линије је

$$y_0 = f\,\frac{16}{5}\left[\frac{z}{l} - 2\left(\frac{z}{l}\right)^3 + \left(\frac{z}{l}\right)^4\right],$$

или $$y_0 = f \cdot \frac{16}{5l^4}\left(z\,l^3 - 2\,z^3\,l + z^4\right),$$

где је $$f = \frac{5}{384}\,\frac{ql^4}{EI}$$

Потенцијална енергија угиба је

$$dE_p = \frac{qy_0 dz}{2} \,, \quad \text{па је}$$

$$E_p = \frac{q}{2}\int_0^l y_0 \, dz = \frac{q}{2}\, f \cdot \frac{16}{5l^4}\int_0^l (zl^3 - 2\,z^3 l + z^4)\, dz = \frac{q}{2} \cdot f \cdot \frac{16}{5} \cdot l \cdot \frac{1}{5}$$

Кинетичка енергија је

$$dE_k = \frac{v^2}{2}\, dm = \frac{q\,\dot{y}^2}{2g}\, dz \,,$$

па је $$E_k = \frac{q}{2g}\int_0^l \dot{y}^2 \, dz$$

Пошто претпостављамо да су осцилације облика

$$y = y_0 \cos kt \,,$$

то је $$\dot{y}_{max} = y_0 k \,,$$

па је $$E_{k\max} = \frac{q}{2g}\int_0^l (y_0 k)^2 \, dz =$$

$$= \frac{qk^2}{2g} \cdot f^2 \cdot \frac{16^2}{5^2 \cdot l^8}\int_0^l (z^2 l^6 + 4\,l^2 z^6 + z^8 - 4\,z^4 l^4 - 4\,z^7\,l + 2\,z^5\,l^3)\, dz$$

$$E_{k\max} = \frac{qk^2}{2g}\, f^2 \cdot \frac{16^2}{5^2} \cdot l \cdot \frac{31}{630}$$

Како је $$E_p = E_{k\max} \,,$$

то је $$\frac{q}{2} \cdot f \cdot \frac{16\,l}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{qk^2}{2g}\, f^2 \cdot \frac{16^2}{5^2} \cdot l \cdot \frac{31}{630},$$

па је $$k^2 = \frac{126 \cdot 24}{31} \cdot \frac{g\,E\,I}{q\,l^4} = \frac{3024}{31} \cdot \frac{E\,I\,g}{q\,l^4} = 97{,}54\,\frac{E\,I\,g}{q\,l^4}$$

$$k = 9{,}86\sqrt{\frac{EIg}{ql^4}} \text{ sec}^{-1} \,,$$

$$T = 0{,}638\sqrt{\frac{EIg}{ql^4}} \text{ sec.}$$

108.) Решити претходни задатак под претпоставком да је приликом осцилација линија угиба греде једнака апроксимативној еластичној линији у облику параболе, датој једначином:

$$y_0 = f \cdot \frac{4z}{l^2}\left(l - z\right) = f \cdot \frac{4}{l^2}\left(lz - z^2\right),$$

где је
$$f = \frac{5\, ql^4}{384\, EI}$$

Потенцијална енергија угиба је
$$dE_p = \frac{q y_0\, dz}{2},$$

па је
$$E_p = \frac{q}{2}\int_0^l y_0\, dz = \frac{q}{2}\, f \cdot \frac{4}{l^2}\int_0^l (lz - z^2)\, dz = \frac{q}{2} f \cdot 4 \cdot \frac{l}{6} = \frac{q}{3} f\, l$$

Кинетичка енергија је
$$dE_k = \frac{v^2}{2}\, dm = \frac{q\dot{y}^2}{2g}\, dz,$$

па је
$$E_k = \frac{q}{2g}\int_0^l \dot{y}^2\, dz$$

Пошто претпостављамо да су осцилације облика
$$y = y_0 \cos kt,$$

то је
$$\dot{y}_{\max} = y_0\, k,$$

па је
$$E_{k\max} = \frac{q}{2g}\int_0^l (y_0\, k)^2\, dz = \frac{qk^2}{2g}\, f^2\, \frac{16}{l^4}\int_0^l (l^2 z^2 - 2\, lz^3 + z^4)\, dz =$$
$$= \frac{qk^2}{2g}\, f^2 \cdot 16 \cdot l \cdot \frac{1}{30}$$

Пошто је
$$E_{k\max} = E_p,$$

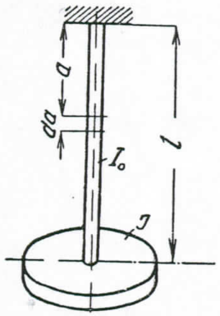
то је
$$\frac{q}{3} f \cdot l = \frac{qk^2}{2g} f^2 \cdot 16 \cdot l \cdot \frac{1}{30},$$

односно, ако уврстимо вредност за f
$$k^2 = 96\, \frac{ql^4}{EIg},$$

па је
$$k = 9{,}798 \sqrt{\frac{EIg}{ql^4}}\ \sec^{-1},$$

а
$$T = 0{,}642 \sqrt{\frac{ql^4}{EIg}}\ \sec.$$

109.) На доњем крају вертикалног цилиндричног еластичног штапа са учвршћеним горњим крајем насађен је центрично хоризонтални диск момента инерције J у односу на вертикалну осу кроз његов центар. Моменат инерције штапа у односу на сопствену осу раван је J_0, коефициент крутости штапа при торзији, тј. моменат којим треба деловати да би се доњи крај штапа увио за угао од једног радиана, раван је c. Одредити период малих осцилација система узимајући у обзир масу штапа.



Сл. 103

Једначина енергије када не узимамо у обзир масу штапа је
$$\frac{1}{2}\, J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\, c\, \varphi^2 = \text{const.}$$

Нађимо кинетичку енергију коју треба додати овој једначини кад узмемо у обзир масу штапа.

Обележимо са j моменат инерције јединице дужине штапа.

Померање произвољне тачке на штапу при увијању је
$$\frac{a}{l}\,\varphi, \quad \text{а њена брзина је} \quad v = \frac{a}{l}\,\dot{\varphi},$$

па је
$$d\,E_k = \frac{1}{2}\, v^2\, d\,J\,; \quad d\,J = j\, da$$

$$E_k = \frac{1}{2}\,\frac{j}{l^2}\,\dot{\varphi}^2 \int_0^l a^2\, d\,a = \frac{1}{2}\, j\, l\,\frac{\dot{\varphi}^2}{3} = \frac{1}{2}\, J_0\,\frac{\dot{\varphi}^2}{3}$$

Кад додамо ову кинетичку енергију претходној једначини енергије добијамо
$$\frac{1}{2}\left(J + \frac{1}{3}\, J_0\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\, c\,\varphi^2 = \text{const.}$$

Одавде је
$$k^2 = \frac{c}{J + \frac{1}{3}\, J_0}$$

$$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{J + \frac{1}{3}\, J_0}{c}}$$

Одавде видимо да ћемо у овом случају кад узимамо у обзир масу штапа добити исте осцилације као и кад не бисмо узели у обзир његову масу, а повећали моменат инерције диска за $\frac{1}{3}$ момента инерције штапа.

110.) Греда правоугаоног попречног пресека оптерећена је у средини теретом $G = 600$ kg. и слободно је ослоњена на крајевима. Моменат инерције попречног пресека греде је $I = 210$ cm^4; тежина јединице дужине греде је $q = 11$ kg/m; дужина греде је $l = 200$ cm; модул еластичности материјала греде је $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm^2. Одредити фреквенцију осцилација греде: *a.*) узимајући у обзир и *b.*) занемарујући сопствену тежину греде.

За случај кад не узимамо у обзир масу греде фреквенција је

$$f = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}$$

$$k^2 = \frac{48 g E I}{G l^3} = \frac{48 \cdot 981 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 210}{600 \cdot 200^3}$$

Одавде је $\qquad k \approx 64 \text{ sec}^{-1}$,

па је $\qquad f = \frac{64}{2\pi} = 10{,}2 \text{ sec}^{-1}$

Кад узмемо у обзир тежину греде биће

$$k_1{}^2 = \frac{48 g E I}{l^3\left(G + \frac{17}{35} ql\right)} = \frac{48 \cdot 981 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 210}{200^3\left(600 + \frac{17}{35} \cdot 11 \cdot 2\right)}$$

Одавде је $\qquad k_1 = 63{,}4 \text{ sec}^{-1}$,

па је $\qquad f_1 = \frac{63{,}4}{2\pi} = 10{,}1 \text{ sec}^{-1}$

111.) Подкрановска стаза конструисана из I 30 профила тежине $q = 49$ kg/m, момента инерције попречног пресека $I = 8360$ cm^4, дужине $l = 10$ m., оптерећена је у средини притиском точка крана $G = 700$ kg, а ослоњена је слободно на оба краја. Модул еластичности материјала стазе је $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm^2. Наћи фреквенцију осцилација стазе: *a.*) узимајући у обзир и *b.*) занемарујући масу стазе.

За случај кад не узимамо у обзир масу стазе је

$$k = 35{,}5 \text{ sec}^{-1} \quad \text{и} \quad f = 5{,}34 \text{ sec}^{-1}$$

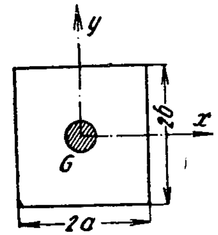
Кад узмемо у обзир тежину стазе је

$$k_1 = 28{,}7 \text{ sec}^{-1} \quad \text{и} \quad f_1 = 4{,}56 \text{ sec}^{-1}$$

112.) Правоугаона плоча са странама $2a$ и $2b$, мале дебљине h, слободно належе по обиму. На средини плоче постављен је терет G. Одредити приближно период слободних осцилација система узимајући у обзир и тежину плоче. Специфична тежина материјала плоче је γ. За једначину еластичне површине плоче узети

$$z = f \cdot \cos\frac{\pi x}{2a} \cos\frac{\pi y}{2b} ,$$

где је f статички угиб плоче у средини под теретом G.



Сл. 104

Кад занемаримо масу плоче једначина енергије је

$$\frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot f^2 + \frac{1}{2} cf^2 = \text{const.}$$

Нађимо кинетичку енергију масе плоче да бисмо је додали овој једначини

$$dE_k = \frac{1}{2}\, dm_1\, \dot z^2$$

$$\dot z^2 = \dot f^2 \cos^2\frac{\pi x}{2a} \cos^2\frac{\pi y}{2b}$$

$$dm_1 = \rho dV = \frac{\gamma}{g} h dx\, dy$$

$$E_k = \frac{\gamma h}{2g} \dot f^2 . 4 \int_0^b \cos^2\frac{\pi y}{2b} dy \int_0^a \cos^2\frac{\pi x}{2a} dx = \frac{\gamma h}{2g} \dot f^2 \cdot 4 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{abh\gamma}{2g} \dot f^2$$

Једначина енергије кад додамо ову кинетичку енергију биће

$$\frac{\dot f^2}{2g}(G + abh\gamma) + \frac{1}{2} cf^2 = \text{const.}$$

Тежина целе плоче је

$$G_1 = 4\, abh\gamma ,$$

па је $\qquad k^2 = \frac{cg}{G + abh\gamma}$

Како је $\qquad c = \frac{G}{f} ,$

то је $\qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{f(G + abh\gamma)}{Gg}} = \sqrt{\frac{f(G + 0{,}25\, G_1)}{Gg}}$

Одавде видимо да ће систем кад узмемо у обзир тежину плоче осциловати исто као и кад је не бисмо узели у обзир, а терет у средини повећали за $^1/_4$ тежине плоче.

113.) Решити задатак под истим условима као и предходни у случају да је једначина еластичне површине плоче:

$$z = \frac{f}{a^4\, b^4}\,(x^2 - a^2)^2\,(y^2 - b^2)^2$$

$$dE_k = \frac{1}{2}\,dm_1\,\dot{z}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\gamma}{g}\,h\,\dot{z}^2\,dx\,dy$$

$$E_k = \frac{\gamma h}{2g}\,\dot{f}^2\,\frac{1}{a^8\,b^8}\cdot 4\int_0^b (y^2 - b^2)^4\,dy\int_0^a (x^2 - a^2)^4\,dx$$

$$(x^2 - a^2)^4 = x^8 - 4x^6\,a^2 + 6x^4\,a^4 - 4x^2\,a^6 + a^8$$

$$(y^2 - b^2)^4 = y^8 - 4y^6\,b^2 + 6y^4\,b^4 - 4y^2\,b^6 + b^8$$

$$\int_0^a (x^2 - a^2)^4\,dx = \frac{128}{315}\,a^9 \quad ;$$

$$\int_0^b (y^2 - b^2)^4\,dy = \frac{128}{315}\,b^9 \;;$$

$$E_k = \frac{\gamma h}{2g}\,\dot{f}^2\cdot 4\cdot\left(\frac{128}{315}\right)^2 ab$$

Једначина енергије је

$$\frac{\dot{f}^2}{2g}\left(G + 4\cdot\frac{128^2}{315^2}\,ab\,h\,\gamma\right) + \frac{1}{2}\,cf^2 = \text{const.}$$

Тежина плоче је $\qquad G_1 = 4\,a\,b\,h\,\gamma$,

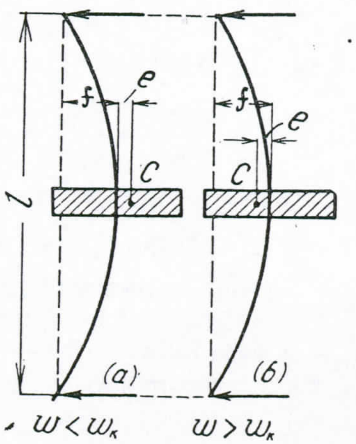
па је
$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{f\,(G + 0{,}165\;G_1)}{G\,g}}$$

8.) КРИТИЧНЕ БРЗИНЕ БРЗОХОДИХ ВРАТИЛА

Вратило које се обрће постаје динамички нестабилно при одређеном броју обрта. Тај број обрта при коме амплитуде бочних осцилација расту неограничено услед појаве резонанце назива се критичним бројем обрта. *Критична брзина је она брзина, при којој се број обрта вратила у секунди поклапа са фреквенцијом бочних осцилација.*

a.) Вратило са једним диском

Посматраћемо вертикално вратило са ексцентрично насађеним диском. Нека је ексцентрицитет тежишта *e*. Центрифугална сила проузрокована ексцентрицитетом *e* угибаће вратило за време ротације. Угиб на месту диска — *f* наћи ћемо из услова једнакости центрифугалне и еластичне силе у вратилу.



Сл. 105

Еластична сила у вратилу је

$$F = c\,f\;,$$

где *c* налазимо на основи познатих образаца отпорности материјала. На пример, у случају греде ослоњене на оба краја са теретом у средини

$$c = \frac{48\,EI}{l^3}$$

Из услова равнотеже сила добијамо

$$\frac{G}{g}\,(f + e)\,\omega^2 = c\,f\;,$$

где је $\frac{G}{g}$ маса диска, а ω угаона брзина обртања вратила.

Одавде је
$$f = \frac{e}{\dfrac{c}{\omega^2}\cdot\dfrac{g}{G} - 1}$$

Пошто знамо да је кружна фреквенција бочних осцилација

$$k^2 = \frac{cg}{G} \ ,$$

видимо да угиб f нагло расте, кад ω тежи да се приближи вредности k. Израз за критичну брзину обртања вратила, према томе, гласи

$$\omega_k = \sqrt{\frac{cg}{G}} = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{88}$$

Међутим, експериментално је утврђено да кад број обрта вратила даље расте преко ω_k, амплитуда осцилација нагло се смањује и вратило опет постаје динамички стабилно. Узрок томе је што се тежиште диска e при $\omega > \omega_k$ помера са унутрашње стране вратила (види сл. 105 *b*). У том случају је

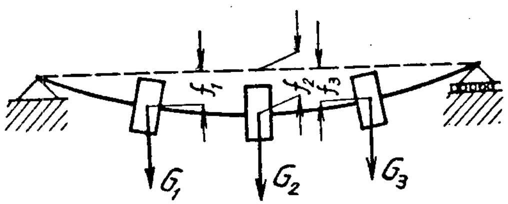
$$\frac{G}{g}(f - e)\,\omega^2 = cf$$

$$f = \frac{e}{1 - \dfrac{cg}{\omega^2 G}}$$

При порасту броја обрта угиб тежи вредности e те вратило ротира око тежишта c.

b). *Вратило са више дискова. Приближни образац Morley-a*

Пошто критична брзина вратила које се обрће зависи од кружне фреквенције слободних бочних осцилација, то је њено одређивање од велике важности приликом димензионисања вратила. На основи Rayleigh-еве методе доћи ћемо до приближног обрасца за одређивање k.



Сл. 106

Ако су G_1, G_2, G_3 оптерећења на вратилу (тежине дискова), а f_1, f_2, f_3 статички угиби под њима, биће потенцијална енергија угиба

$$E_p = \frac{G_1 f_1}{2} + \frac{G_2 f_2}{2} + \frac{G_3 f_3}{2} \tag{89}$$

Претпоставимо опет да је статичка линија угиба приближно једнака линији угиба греде за време осцилација. У том случају биће вертикална померања за време осцилација

$$f_1 \cos kt \ , \qquad f_2 \cos kt \ , \qquad f_3 \cos kt \tag{90}$$

Пошто је максимални угиб греде за време осцилација раван статичком угибу, то ће у том тренутку и потенцијална енергија имати максималну вредност и бити претстављена изразом (89). У тренутку пролаза кроз средњи положај биће брзине терета највеће и према томе ће и целокупна потенцијална енергија прећи у кинетичку. Пошто су сада брзине на основи (90) једнаке

$$kf_1 \ , \qquad kf_2 \ , \qquad kf_3 \ ,$$

то ће кинетичка енергија вратила бити

$$E_k = \frac{k^2}{2g}(G_1 f_1^2 + G_2 f_2^2 + G_3 f_3^2) \tag{91}$$

Из услова да максималне вредности кинетичке и потенцијалне енергије морају бити међусобно једнаке добијамо

$$k^2 = \frac{g(G_1 f_1 + G_2 f_2 + G_3 f_3)}{G_1 f_1^2 + G_2 f_2^2 + G_3 f_3^2}$$

Период осцилација биће

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{G_1 f_1^2 + G_2 f_2^2 + G_3 f_3^2}{g(G_1 f_1 + G_2 f_2 + G_3 f_3)}}$$

У случају *n*- терета кружна фреквенција и период најнижег тона осцилација биће

$$k^2 = \frac{g\sum_1^n G_i f_i}{\sum_1^n G_i f_i^2} \ ;$$

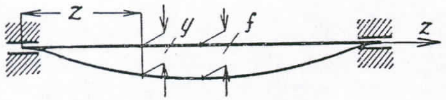
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sum_1^n G_i f_i^2}{g\sum_1^n G_i f_i}} \tag{92}$$

Ово је приближни образац Morley-a.

За одређивање k и T потребно је знати статичке угибе терета. Њих налазимо обично графичким методама отпорности материјала. Масу греде можемо узети у обзир на тај начин што је поделимо на n делова и прикључимо масама дискова.

c) Образац Rayleigh-a

Приликом досадашњих извођења приближних образаца за израчунавање кружних фреквенција претпостављали смо да греда осцилира у облику статичке еластичне линије. Међутим, ако је ова компликована, може се узети уместо ње и нека друга крива која добро апроксимира стварну еластичну линију, а да ипак добијемо резултате са довољном тачношћу.



Сл. 107

Ако претпоставимо да греда осцилира у облику неке функције $y(z)$, а да f претставља максималну амплитуду, тада имамо

$$y : f = v_z : v_{max}$$

$$v_z = \frac{v_{max}}{f} \cdot y \ ,$$

где је v_z брзина тачке на месту z, а v_{max} брзина тачке са максималном амплитудом.

Кинетичка енергија елемента греде је

$$dE_k = \frac{1}{2} v^2 \, dm = \frac{1}{2} \rho \, v_z^2 \, dz \ ,$$

где је ρ маса јединице дужине греде. За целу греду је

$$E_k = \int_0^l \frac{1}{2} \rho \, v_z^2 \, dz = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left(\frac{v_{max}}{f} y \right)^2 dz$$

Ако претпоставимо да су осцилације облика

$$y = f \cos \omega t \ ,$$

онда је

$$v_{max} = \dot{y}_{max} = f \omega$$

Кинетичка енергија у тренутку када се целокупна енергија осцилујућег система претвори у кинетичку енергију биће

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \omega^2 y^2 \, dz \qquad (93)$$

У отпорности материјала доказује се да је потенцијална енергија угиба дата изразом*)

*) Хлитчијев, Вречко: Отпорност материјала, II издање, стр. 33 и 86.

$$E_p = \frac{1}{2} \, EI \int_0^l (y'')^2 \, dz \qquad (94)$$

Изједначујући једначине (93) и (94) добијамо израз за кружну фреквенцију, а у исто време и за критичну угаону брзину обртања вратила

$$\omega^2 = \frac{EI \int_0^l (y'')^2 dz}{\rho \int_0^l y^2 \, dz} \qquad (95)$$

У случају кад на греди или вратилу постоје концентрисани терети (дискови) G_1, G_2, $G_3 \ldots G_i$ израз (93) за кинетичку енергију постаје

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \omega^2 y^2 \, dz + \sum_1^n \frac{G_i}{2g} \omega^2 f_i^{\,2} \ , \qquad (96)$$

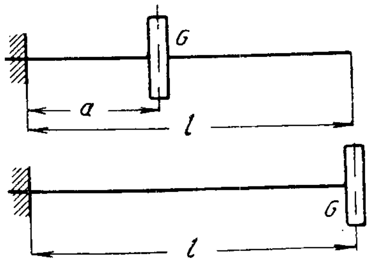
где је f_i статички угиб под одговарајућим теретом G_i, па израз (95) у том случају прелази у

$$\omega^2 = \frac{EI \int_0^l (y'')^2 \, dz}{\rho \int_0^l y^2 \, dz + \sum_1^n \frac{G_i}{g} f_i^{\,2}} \qquad (97)$$

Примери

Одредити критичну брзину вратила у односу на попречне осцилације под условом да његову масу занемарујемо. Крутост вратила износи EI, а оптерећено је диском тежине G. Посматрати следеће случајеве:

114.) Леви крај вратила је укљештен (ослања се на дуго лежиште), а десни је слободан. Диск се налази на отстојању a од укљештења. Дужина вратила је l.



Сл. 108

$$\omega_k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{G}} = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}$$

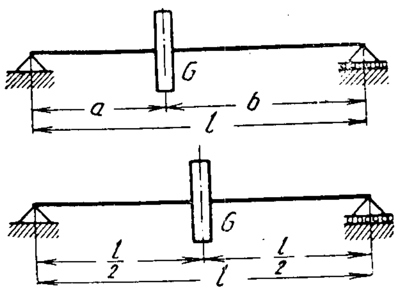
$$f_{ст} = \frac{Ga^3}{3EI}$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{3EIg}{Ga^3}}$$

за $a = l$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{3EIg}{Gl^3}}$$

115.) Оба краја вратила наслањају се на кратка лежишта (слободно су ослоњена). Диск се налази на отстојању a од левог и b од десног ослонца. Дужина вратила је l.



Сл. 109

$$f_{ст} = \frac{Ga^2 b^2}{3(a+b)EI} \quad ;$$

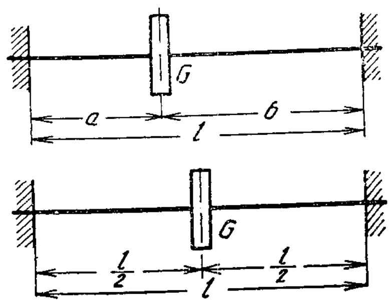
$$\omega_k = \sqrt{\frac{3(a+b)EIg}{Ga^2b^2}}$$

за $a = b = \frac{l}{2}$

$$f_{ст} = \frac{Gl^3}{48EI}$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{48EIg}{Gl^3}}$$

116.) Вратило се на оба краја ослања на дуга лежишта (крајеви су укљештени). Растојање диска од левог, односно десног укљештења је a и b. Дужина вратила је l.



Сл 110

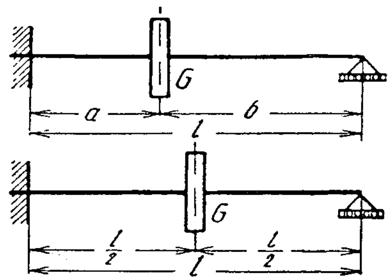
$$f_{ст} = \frac{Ga^3b^3}{3l^3 EI}$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{3l^3EIg}{Ga^3 b^3}}$$

за $a = b = \frac{l}{2}$

$$f_{ст} = \frac{Gl^3}{192\,EI}\ ; \quad \omega_k = \sqrt{\frac{192\,EIg}{G\,l^3}}$$

117.) Леви крај ослоњен је на дуго лежиште (укљештен је), а десни на кратко лежиште (слободно је ослоњен). Диск се налази на остојању a, односно b, од левог и десног лежишта. Дужина вратила је l.



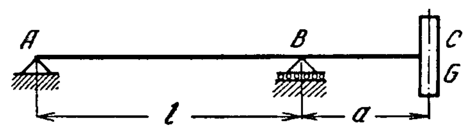
Сл. 111

$$f_{ст} = \frac{Ga^3b^2(3l+b)}{12\,EI\,l^3}\ ; \quad \omega_k = \sqrt{\frac{12\,l^3\,EIg}{Ga^3b^2(3l+b)}}$$

за $a = b = \frac{l}{2}$

$$f_{ст} = \frac{7\,Gl^3}{768\,EI}\ ; \quad \omega_k = \sqrt{\frac{768\,EIg}{7\,G\,l^3}}$$

118.) Вратило је ослоњено на два кратка лежишта која су удаљена једна од другог за l, а на препуштеном крају дужине a носи диск тежине G.



Сл. 112

$$f_{ст} = \frac{G(l+a)a^2}{3\,EI}$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{3\,EIg}{G(l+a)\,a^2}}$$

$$f_{ст} = \frac{1}{EI}(a\beta + f_c{}^k) = \frac{1}{EI}\left(a \cdot \frac{Ml}{3} + \frac{Ga^3}{3}\right);\quad M = Ga$$

$$f_{ст} = \frac{G}{3\,EI}(a^2l + a^3) = \frac{G\,(l+a)\,a^2}{3\,EI}$$

119.) Наћи критичну брзину вратила, крутости EI, дужине l, које се на оба краја ослања на кратка лежишта. У средини вратила постављен је диск тежине G. Тежина јединице дужине вратила је q. Узети у обзир тежину вратила и претпоставити да вратило осцилира у облику статичке еластичне линије.

$$\omega_k{}^2 = \frac{EI\displaystyle\int_0^l (y'')^2 dz}{\rho\displaystyle\int_0^l y^2\,dz + \frac{G}{g}f^2}$$

Једначина еластичне линије која важи за једну половину вратила гласи

$$y = \frac{Gl^3}{48EI}\left[3\left(\frac{z}{l}\right) - 4\left(\frac{z}{l}\right)^3\right] = f\left[3\left(\frac{z}{l}\right) - 4\left(\frac{z}{l}\right)^3\right],$$

где је
$$f = \frac{Gl^3}{48EI}$$

$$y'' = -\frac{24fz}{l^3}$$

$$\int_0^l (y'')^2\, dz = 2\int_0^{l/2} (y'')^2\, dz = 2\int_0^{l/2} \frac{24^2 f^2 z^2}{l^3}\, dz = \frac{48 f^2}{l^3}$$

$$\int_0^l y^2\, dz = 2\int_0^{l/2} y^2\, dz = 2\int_0^{l/2}\left[9\left(\frac{z}{l}\right)^2 - 24\left(\frac{z}{l}\right)^4 + 16\left(\frac{z}{l}\right)^6\right] dz = \frac{17}{35} f^2 l$$

$$\omega_k^2 = \frac{EI\dfrac{48f^2}{l^3}}{\dfrac{q}{g}\dfrac{17}{35}f^2 l + \dfrac{G}{g}f^2} = \frac{48\, EIg}{l^3\left(\dfrac{17}{35}ql + G\right)}$$

У случају да је $G = 0$

$$\omega_k^2 = \frac{48\cdot 35}{17}\,\frac{EIg}{ql^4}\,; \qquad \omega_k = \frac{9{,}94}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}}$$

120) Решити задатак под истим условима као и претходни ако за једначину еластичне линије узмемо апроксимативну криву

$$y = f\sin \pi\frac{z}{l}\,, \quad \text{где је} \quad f = \frac{Gl^3}{48\,EI}$$

$$y'' = -f\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin \pi\frac{z}{l}$$

$$\int_0^l (y'')^2\, dz = \int_0^l f^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \sin^2 \pi\frac{z}{l}\, dz = \frac{f^2\pi^4}{2l^3}$$

$$\int_0^l y^2\, dz = \int_0^l f^2 \sin^2 \pi\frac{z}{l}\, dz = \frac{f^2 l}{2}$$

$$\omega_k^2 = \frac{\dfrac{f^2\pi^4 EI}{2\,l^3}}{\dfrac{q}{g}\dfrac{f^2 l}{2} + \dfrac{G}{g}f^2} = \frac{\pi^4 EIg}{l^3(ql + 2G)}$$

У случају да је
$$G = 0$$

$$\omega_k^2 = \frac{\pi^4 EIg}{q\,l^4}\;; \qquad \text{па је} \qquad \omega_k = \frac{9{,}87}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}}$$

121.) Одредити критичну брзину вратила, крутости EI, дужине l, које се на левом крају ослања на дуго лежиште (укљештено је), док му је десни крај слободан. На десном слободном крају вратило носи диск тежине G. Тежина јединице дужине вратила је q. Узети у обзир тежину вратила и претпоставити да вратило осцилује у облику статичке еластичне линије.

Једначина статичке еластичне линије је

$$y = \frac{G}{6}\frac{l^3}{EI}\left\{\left(\frac{z}{l}\right)^2\left[3 - \left(\frac{z}{l}\right)\right]\right\} = f\,\frac{3z^2 l - z^3}{2l^3}\,; \qquad \text{где је} \qquad f = \frac{Gl^3}{3\,EI}$$

$$y'' = f\cdot\frac{3}{l^3}(l - z)$$

$$\int_0^l (y'')^2\, dz = \frac{9f^2}{l^6}\int_0^l (l^2 - 2lz + z^2)\, dz = \frac{3}{l^3}f^2$$

$$\int_0^l y^2\, dz = \frac{f^2}{4\,l^6}\int_0^l (9\,z^4 l^2 - 6\,z^5 l + z^6)\, dz = \frac{33}{140}\,lf^2$$

$$\omega_k^2 = \frac{\dfrac{3f^2}{l^3}EI}{\dfrac{q}{g}\dfrac{33}{140}lf^2 + \dfrac{G}{g}f^2} = \frac{3\,EIg}{l^3\left(\dfrac{33}{140}\,ql + G\right)}$$

У случају да је

$$G = 0$$

$$\omega_k^2 = \frac{140}{11}\,\frac{EIg}{ql^4} \qquad \omega_k = \frac{3{,}56}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}}$$

122.) Решити задатак под истим условима као и претходни, ако за једначину еластичне линије узмемо апроксимативну криву

$$y = f\left(1-\cos\frac{\pi z}{2\,l}\right), \qquad \text{где је} \qquad f=\frac{Gl^3}{3EI}$$

$$y''=f\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\cos\frac{\pi z}{2l}$$

$$\int_0^l (y'')^2 dz = f^2\frac{\pi^4}{2^4 l^4}\int_0^l \cos^2\frac{\pi z}{2l}\,dz=\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4\frac{l}{2}f^2$$

$$\int_0^l f^2\,dz = f^2\int_0^l\left(1-2\cos\frac{\pi z}{2l}+\cos^2\frac{\pi z}{2l}\right)dz=f^2 l\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)$$

$$\omega_k^2=\frac{\dfrac{f^2\pi^4 l EI}{2^5 l^4}}{\dfrac{q}{g}f^2 l\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{\pi}\right)+\dfrac{G}{g}f^2}=\frac{\pi^4 EIg}{2^5 l^4 q\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{\pi}\right)+G}$$

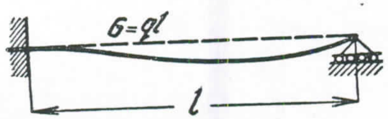
У случају да је $\qquad G=0$

$$\omega_k^2=\frac{\pi^4 EIg}{2^5\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{\pi}\right)q\,l^4}=\frac{\pi^4}{48-\dfrac{128}{\pi}}\;\frac{EIg}{q\,l^4},$$

па је

$$\omega_k=\frac{3,66}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}}$$

123.) Одредити критичну брзину вратила крутости EI, дужине l, које се на левом крају ослања на дуго лежиште (укљештено је), а на десном на кратко лежиште (ослоњено је слободно). Тежина једнице дужине вратила је q. Узети у обзир тежину вратила и претпоставити да вратило осцилује у облику статичке еластичне линије.



Сл. 113

Једначина еластичне линије је

$$y=\frac{G}{48EIl}(2z^4-3lz^3+l^3 z)= f(2z^4-3lz^3+l^3 z),$$

где је $\qquad f=\dfrac{G}{48EIl}$

$$y''=6f(4z^2-3lz)$$

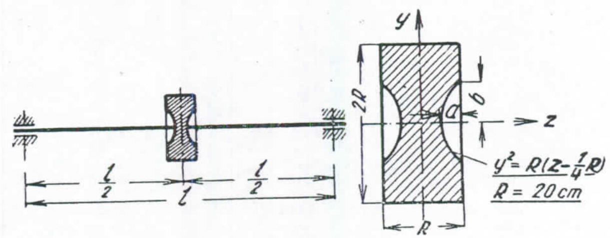
$$\int_0^l (y'')^2\,dz=36f^2\int_0^l(16z^4-24z^3 l+9l^2z^2)\,dz=36f^2\frac{l^5}{5}$$

$$\int_0^l y^2\,dz=f^2\int_0^l(4z^8+9l^2z^6+l^6z^2+4l^3z^5-12z^7l-6l^4z^4)\,dz=$$

$$=\frac{76}{2520}f^2l^9=0{,}030\,f^2l^9$$

$$\omega_k^2=\frac{36f^2\dfrac{l^5}{5}EI}{\dfrac{q}{g}\,0{,}030f^2l^9}=240\frac{EIg}{ql^4}\;; \qquad \text{па је} \quad \omega_k=15{,}49\sqrt{\frac{EIg}{ql^4}}$$

124.) Вратило парне турбине дужине $l=2$ m, кружног пресека, обрће се са $n=12000$ obr/min. На средини вратила углављен је диск датог уздужног пресека од материјала чија је специфична тежина $\gamma=7{,}8\,\dfrac{\text{kg.}}{\text{dm}^3}$. Модул еластичности материјала вратила је $E=2\cdot10^3$ t/cm.^{2} Димензионисати вратило под условом да му угаона брзина буде 6 пута већа од критичне (испит, септембар 1949).



Сл. 114

$$\omega=6\,\omega_k=6\sqrt{\frac{c}{m}}=6\sqrt{\frac{cg}{G}}$$

$$G=V\gamma\;;\qquad c=\frac{48EI}{l^3}\;;\qquad I=\frac{d^4\pi}{64}$$

$$c=\frac{48Ed^4\pi}{64\,l^3}=\frac{3}{4}\frac{d^4\pi E}{l^3}$$

$$\omega=\frac{\pi n}{30}=\frac{\pi\cdot12000}{30}=400\,\pi$$

$$V = V_0 - 2\,V_1 \quad ; \qquad V_0 = R^2\pi \cdot R = R^3\pi$$

$$V_1 = \frac{1}{2}\, ab^2\pi \quad ; \qquad a = \frac{R}{4} \quad ; \qquad b = \frac{R}{2}$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{4} \cdot \frac{R^2}{4} \cdot \pi = \frac{R^3\pi}{32}, \text{ или } V_1 = \pi \int_{R/4}^{R/2} y^2\,dz = \pi R \int_{R/4}^{R/2} \left(z - \frac{1}{4}R\right) dz = \frac{\pi R^3}{32}$$

$$V = R^3\pi - \frac{\pi R^3}{16} = \frac{15}{16}\, R^3\pi\,,$$

онда је $\quad 400\,\pi = 6\sqrt{\dfrac{3 \cdot d^4 \pi E g \cdot 16}{4\, l^3 \cdot 15\, R^3\pi \cdot \gamma}}\,; \quad d^4 = \dfrac{50000\,\pi^2}{9} \cdot \dfrac{R^3 \gamma\, l^3}{Eg}$

$$d^4 = \frac{5 \cdot 10^4 \cdot \pi^2}{9} \cdot \frac{2^3 \cdot 10^3 \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 2^3 \cdot 10^6}{981 \cdot 10^3 \cdot 10^3} = \frac{10^4 \cdot \pi^2 \cdot 16}{9} \cdot \frac{78}{981}$$

$d = 10{,}81$ cm. Усвајамо $\quad d = 110$ mm.

125.) Примену обрасца (92) за срачунавање критичног броја обртаја показаћемо на примеру ротора парне турбине.*) Уопште узев овај метод даје резултате са тачношћу до 1% у случају ротора са два ослонца.

Задатак се своди на конструкцију криве статичких угиба. У нашем случају примениће мо графички метод који се оснива на следећем:

Из отпорности материјала знамо да је

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q\;, \qquad \text{односно} \quad M = \iint q\,dx^2\;, \tag{a}$$

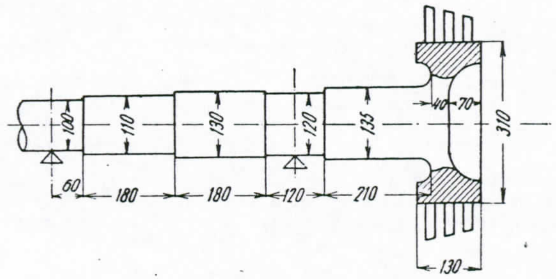
где је M нападни моменат у неком пресеку, а q оптерећење по јединици дужине. Такође је позната једначина еластичне линије

$$E\,I\,\frac{d^2 y}{dx^2} = M\;, \qquad \text{односно} \quad y = \iint \frac{M}{EI}\,dx^2 \tag{b}$$

Ако познајемо аналитичку зависност оптерећења q и момента инерције попречног пресека I од апсцисе x, можемо прорачунавањем интеграла (a) и (b) да нађемо еластичну линију. Но у практичним случајевима то је немогуће, те на основи тих образаца закључујемо следеће:

*) Пример је узет из књиге: И. Яновский: Конструирование и расчет на прочность деталей паровых турбин.

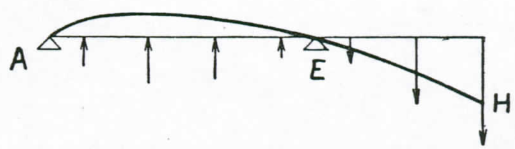
Ако конструишемо дијаграм момената и одредимо моменте инерције у појединим пресецима, тада можемо, сматрајући $\dfrac{M}{EI}$ фиктивним оптерећењем, да нацртамо на исти начин нов дијаграм, чије нам ординате у одређеној размери претстављају угибе греде.



Сл. 115

У случају ротора на сл. 114, поделимо прво целу дужину ротора на 7 делова у којима је моменат инерције константан. Сада срачунамо тежину појединих делова и заменивши континуално оптерећење сваког дела концентрисаном силом у тежишту цртамо полигон сила и дијаграм момената.

Обзиром на облик криве статичких угиба морамо силе тежине у пољу AE сматрати да делују на горе, а не на доле.



Сл. 116

Ако узмемо размере

$u_L = 5\,\dfrac{\text{cm.}}{\text{cm.}} \qquad u_F = 10\,\dfrac{\text{kg.}}{\text{cm.}}$ и полно растојање $H = 5$ cm., биће размера момената $u_M = u_L \cdot u_F \cdot H = 5 \cdot 10 \cdot 5 = 250\,\dfrac{\text{kgcm.}}{\text{cm.}}$, а размера површине дијаграма момената

$$u_A = 250 \cdot 5\,\frac{\text{kgcm.}}{\text{cm.}} \cdot \frac{\text{cm.}}{\text{cm.}} = 1250\,\frac{\text{kgcm.}^2}{\text{cm.}^2}$$

Аналогно томе конструишемо и други дијаграм. Уместо оптерећења q узимамо фиктивно оптерећење $\dfrac{M}{EI}$ по јединици дужине. Да бисмо нашли оптерећење на одређеним деловима греде срачунаћемо прво величину површине A одговарајућих делова дијаграма момената. Затим поделимо добијене вредности производом EI, где смо I срачунали по обрасцу

$$I = \frac{\pi}{64}\, d^4 .$$

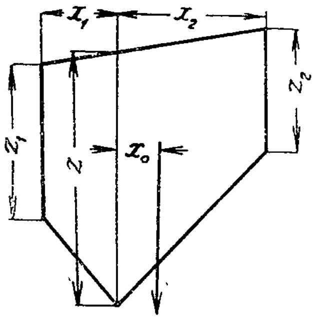
У случају да је на вратило набијен ротор турбине можемо, по Knab-у, да усвојимо за спољни пречник величину спољнег пречника вратила увећаног за половину дебљине ротора.

У нашем случају смо, ради једноставности, занемарили повећање крутости вратила услед ротора турбине.

Фиктивне силе делују у тежиштима површина дијаграма момената. У колико су то петоугаоници можемо положај тежишта наћи по обрасцу

$$x_0 = \frac{1}{3}\,\frac{2\,(z_2 + z)\,x_2^2 - (2\,z_1 + z)\,x_1^2}{(z_2 + z)\,x_2 + (z_1 + z)\,x_1},$$

где су ознаке унете према сл. 116



Сл. 117

У нашем примеру срачунали смо површине A дијаграма момената и фиктивне силе F' посебно за сваку половину од 7 основних поља на које смо поделили вратило турбине.

Ако узмемо размере

$$u_L = 5\,\frac{\text{cm.}}{\text{cm.}} \qquad u_F' = 4 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\text{cm.}},$$

а полно растојање $H' = 5$ cm, онда ће размера угиба бити

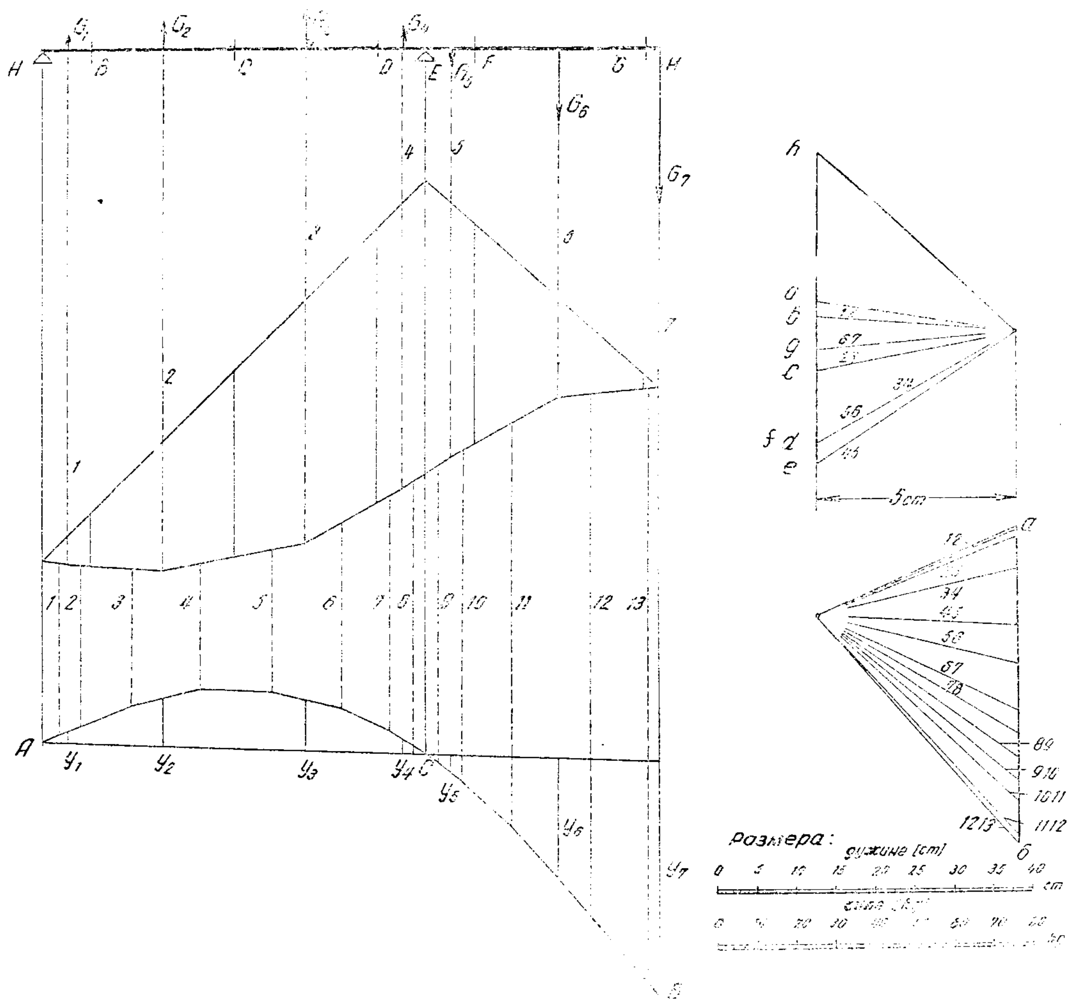
$$u_f = u_L \cdot u_f' \cdot H' = 5 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 5 = 100 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{cm.}}{\text{cm.}}$$

На основи срачунатих података датих у таблици на следећој страни налазимо вредност критичне угаоне брзине ротора

$$\omega_k = \sqrt{\frac{g\Sigma\, Gy}{\Sigma G y^2}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 41{,}53}{20{,}60 \cdot 10^{-3}}} = 1406 \text{ rad/sec.},$$

односно критични број обрта износи

$$n_k = \frac{60}{6{,}28} \cdot 1406 = 13430 \text{ obr/min.}$$



Сл. 118

1	2	3	4	5	6	7	8
Број дела	Дужина дела [cm.]	Тежина дела ротора G [kg]	Површина A дијаграма момената савијања [kg.cm.^{2}]	Моменти инерције пресека I [cm.^{4}]	Фиктивне силе $F' = \frac{A}{EI}$	Апсцисе x_0 тежишта површине момената [cm.]	Ординате угиба Y [cm.]
1	3,0	3,7	257	491	$0{,}24 \cdot 10^{-6}$	0,50	$0{,}029 \cdot 10^{-3}$
	3,0		754	491	$0{,}70 \cdot 10^{-6}$	0,16	
2	9,0	13,4	5141	719	$3{,}25 \cdot 10^{-6}$	0,63	$0{,}122 \cdot 10^{-3}$
	9,0		8923	719	$5{,}64 \cdot 10^{-6}$	0,28	
3	9,0	18,8	12172	1402	$3{,}95 \cdot 10^{-6}$	0,20	$0{,}127 \cdot 10^{-3}$
	9,0		14656	1402	$4{,}75 \cdot 10^{-6}$	0,09	
4	3,0	5,3	5268	1018	$2{,}35 \cdot 10^{-6}$	0,01	$0{,}041 \cdot 10^{-3}$
	3,0		5433	1018	$2{,}43 \cdot 10^{-6}$	0,01	
5	3,0	5,3	5163	1018	$2{,}31 \cdot 10^{-6}$	— 0,03	$0{,}050 \cdot 10^{-3}$
	3,0		4492	1018	$2{,}01 \cdot 10^{-6}$	— 0,04	
6	10,5	23,6	10555	1629	$2{,}95 \cdot 10^{-6}$	— 0,66	$0{,}306 \cdot 10^{-3}$
	10,5		3791	1629	$1{,}06 \cdot 10^{-6}$	— 1,27	
7	2,0	49,3	100	4602	$0{,}01 \cdot 10^{-6}$	— 0,33	$0{,}602 \cdot 10^{-3}$

ДРУГИ ДЕО

ОСЦИЛАЦИЈЕ СА ВИШЕ СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

Ако за описивање положаја система који осцилују није довољна само једна величина — координата (угао, померање), већ више, онда у том случају имамо *системе са више степена слободе*.

9. D'ALEMBERT-ОВ ПРИНЦИП И ПРИНЦИП ВИРТУАЛНИХ ПОМЕРАЊА

Када посматрамо систем са више степена слободе, можемо опет да се послужимо принципом d'Alembert-a, којим смо се служили за постављање диференцијалних једначина кретања система са једним степеном слободе. Тако на пр. при кретању слободне материјалне тачке, пошто су пасивне силе равне нули, моћи ћемо да поставимо следеће једначине

$$X - m\ddot{x} = 0 \quad ; \qquad Y - m\ddot{y} = 0 \quad ; \qquad Z - m\ddot{z} = 0 \ ,$$

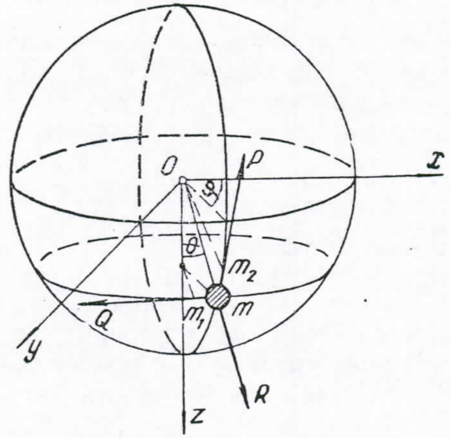
где смо са X, Y и Z означили компоненте резултанте свих спољашњих сила које делују на материјалну тачку, док чланови $(-m\ddot{x})$, $(-m\ddot{y})$ и $(-m\ddot{z})$ претстављају компоненте силе инерције.

Ако сада посматрамо кретање система у коме материјалне тачке нису слободне, но чије се кретање ограничава извесним везама, мораћемо се послужити другим методама како би дошли до једначина кретања. Пре свега да напоменемо да ћемо се у нашим расматрањима ограничити на случај идеалних задржавајућих веза, које не зависе од времена. То значи да ће везе бити изражене једначинама у које не улази време t.

Пример таквог кретања је кретање материјалне тачке масе m по површини сфере. Једначина везе је дата изразом

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \ , \qquad (a)$$

где је l полупречник сфере. Ову везу можемо остварити ако тачку m вежемо крутим штапом дужине l у зглобу O без трења. То ће претстављати тзв. *механизам везе*.



Сл. 119

Пошто смо се ограничили на случај идеалних веза, то знамо да ће силе реакције бити увек нормалне на правац померања који омогућава веза, тј. да ће рад сила реакције при сваком померању које допушта веза бити раван нули. Да би из једначина кретања искључили силе везе применићемо принцип могућих померања који гласи: *Ако се материјални систем са задржавајућим идеалним везама налази у равнотежи, онда ће сума свих елементарних радова спољних сила при свим могућим померањима бити равна нули.*

Треба, на крају, још напоменути да у случају да везе не зависе од времена свако могуће померање претставља у исто време и стварно померање.

Наставимо посматрање случаја сферног клатна. Ако тачки m дамо могуће померање чије су Descartes-ове координате δx, δy и δz, биће координате тачке по извршеном померању $x+\delta x$, $y+\delta y$ и $z+\delta z$. Пошто могуће померање мора да задовољи једначину везе то мора бити

$$(x+\delta x)^2+(y+\delta y)^2+(z+\delta z)^2=l^2$$

Ако овај израз развијемо и занемаримо мале величине вишег реда, а у исто време узмемо у обзир и једначину везе (a), биће

$$x\delta x+y\delta y+zdz=0 \qquad (b)$$

Ако са α, β и γ означимо углове које заклапа нормала површине са координатним осама x, y и z, а са α', β' и γ' углове које заклапа правац могућег померања са истим осама биће

$$\cos\alpha=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}=\frac{2x}{\Delta f}$$

$$\cos\beta=\frac{2y}{\Delta f} \quad \text{и} \quad \cos\gamma=\frac{2z}{\Delta f},$$

где смо са Δf означили $\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$, и даље

$$\cos\alpha'=\frac{\delta x}{\delta s}\,; \qquad \cos\beta'=\frac{\delta y}{\delta s} \quad \text{и} \quad \cos\gamma'=\frac{\delta z}{\delta s}$$

На основи горњих израза за углове видимо да једначина (b) у ствари претставља услов ортогоналности нормале површине и правца могућег померања

$$\cos\alpha\cdot\cos\alpha'+\cos\beta\cdot\cos\beta'+\cos\gamma\cdot\cos\gamma'=0$$

Према томе закључујемо да је свако мало померање по површини сфере истовремено и могуће померање и да је свако могуће померање управно на правац штапа. Ово, наравно, важи само зато што једначине везе (a) не зависе од времена.

На основи принципа могућих померања поставићемо следећу једначину

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z=0\,,$$

где су X, Y и Z компоненте резултанте свих активних сила које делују на тачку масе m. Из ове једначине видимо да резултанта активних сила мора бити увек управна на површину сфере, пошто је само у том случају њен рад на могућем померању раван нули.

Ако повежемо сада принцип могућих померања са d'Alembert-овим принципом, можемо лако добити диференцијалне једначине кретања неслободног система материјалних тачака. На пр. за случај сферног клатна, ако спољним силама које делују на материјалну тачку масе m додамо инерцијалне силе, добићемо следећу општу једначину кретања

$$(X-m\ddot{x})\,\delta x+(Y-m\ddot{y})\,\delta y+(Z-m\ddot{z})\,\delta z=0\,,$$

при чему δx, δy и δz претстављa компоненте малог могућег померања, тј. таквог које задовољава једначину везе (a).

У случају n материјалних тачака маса m_1, m_2, m_3, на које делују спољне силе X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, ..., општа једначина кретања система биће

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[(X_i-m_i\ddot{x}_i)\,\delta x_i+(Y_i-m_i\ddot{y}_i)\,\delta y_i+(Z_i-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\right]=0\,, \qquad (98)$$

при чему опет δx_i, δy_i, δz_i претставља компоненте могућих померања тачака система.

Из једначине (98) можемо, уводећи тзв. слободне параметре Lagrange-а односно *генералисане координате*, да добијемо онолики број једначина кретања система, колики је његов број степена слободе.

Генералисане координате и генералисане силе

Ако имамо систем од n материјалних тачака, између којих постоји p веза, тада ће број степена слободе бити

$$3n - p = l ,$$

а то значи да ће за описивање кретања тог система бити потребно l независних величина. Те величине не морају да буду обавезно само дужине, већ такође могу бити углови, површине, запремине и слично. Ове међусобно независне величине називају се *слободни параметри Lagrange-а* или по Thomson-у и Tait-у, *генералисане координате* и бележе се обично $q_1, q_2, \ldots$.

На пример, у случају сферног клатна можемо Descartes-ове координате које су међусобно везане једначином везе

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 ,$$

изразити помоћу две међусобно независне величине, тј. помоћу углова φ и θ, тако да је

$$x = l \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = l \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = l \cos\theta$$

Или, ако посматрамо чврсто хомогено изотропно тело под дејством спољног притиска p довољна је промена v запремине V тог тела да нам опише нов положај, пошто ће се све димензије тела мењати пропорционално тој запремини. Ради тога можемо узети промену запремине v као генералисану координату у овом случају.

Ако се сада нека од генералисаних координата промени за малу величину δq_s, тада ће све спољне силе извршити неки рад. Ако рад свих спољних сила при промени *једне* генералисане координате означимо са

$$F_{q_s} \delta q_s ,$$

тада из формалне аналогије са изразом за рад $X\,\delta x$ усвајамо за F_{q_s} назив *генералисана сила*.

Показаћемо то одмах на примеру. Ако генералисану координату φ у примеру сферног клатна увећамо за мали угао $\delta\varphi$, рад свих спољних сила биће

$$Q \cdot \overline{mm_1} = Ql \sin\theta\delta\varphi ,$$

пошто су компоненте P и R управне на извршеном померању $\overline{mm_1}$. На основи дефиниције генералисане силе биће $Ql \sin\varphi$ генералисана сила при промени генералисане координате φ и обележићемо је са $F_{q\varphi}$. Слично томе, при промени угла θ за малу величину $\delta\theta$ биће рад спољних сила

$$Pl\,\delta\theta ,$$

па ће друга генералисана сила бити

$$F_{q_\theta} = Pl$$

Видимо да обе генералисане силе имају димензије момената и претстављају моменте компоненте Q око осе z, односно P око осе управне на раван $m\ n\ O$.

10. LAGRANGE-ЕВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

У опште једначине кретања система n материјалних тачака (98) улазе координате могућих померања δx_i, δy_i и δz_i. Знамо да ова мала померања нису међусобно независна, но да морају да задовоље извесне једначине веза. Да би избегли ту зависност изразићемо једначине (98) у генералисаним координатама.

Нека опет буде дат систем од n материјалних тачака са k степена слободе. Значи да је потребно k независних параметара да бисмо описали кретање система. Descartes-ове координате x_i, y_i, z_i појединих тачака система биће извесне функције тих независних параметара, односно генералисаних координата

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_i\,(q_1,\, q_2,\, q_3,\, \cdots\cdots,\, q_k) \\ y_i &= \psi_i\,(q_1,\, q_2,\, q_3,\, \cdots\cdots,\, q_k) \\ z_i &= \theta_i\,(q_1,\, q_2,\, q_3,\, \cdots\cdots,\, q_k) \end{aligned} \qquad (a)$$

Напишимо једначине (98) у следећем облику

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\ddot{x}_i\,\delta x_i + \ddot{y}_i\,\delta y_i + \ddot{z}_i\,\delta z_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(X_i\,\delta x_i + Y_i\,\delta y_i + Z_i\,\delta z_i\right) \qquad (b)$$

Посматрајмо израз са десне стране једначине (b). Из једначина (a) можемо изразити могућа померања δx_i, δy_i и δz_i помоћу генералисаних координата

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\,\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\,\delta q_k \\ \delta y_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\,\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\,\delta q_k \\ \delta z_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\,\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\,\delta q_k \end{aligned}\right\}$$

Ако уврстимо ове вредности у једначину (b) добићемо

$$\sum_1^n\left(X_i\,\delta x_i + Y_i\,\delta y_i + Z_i\,\delta z_i\right) = \sum_1^n\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)\delta q_1 +$$

$$+ \sum_1^n\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_2} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_2} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_2}\right)\delta q_2 + \ldots + \sum_1^n\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k$$

Изразе у заградама обележићемо, сагласно дефиницији датој у прошлом параграфу за генералисане силе, са

$$F_{q\,1}\,,\quad F_{q\,2}\,,\quad \ldots.\quad F_{q\,k}\,,$$

пошто при промени само једне од генералисаних координата q_s, израз за рад свих спољних сила постаје

$$\sum_1^n\left(X_i\,\delta x_i + Y_i\,\delta y_i + Z_i\,\delta z_i\right) = \sum_1^n\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)\delta q_s = F_{q\,s}\,\delta_{q\,s} \qquad (c)$$

У даљем расматрању посматраћемо баш промену само једне од генералисаних координата. У том случају из израза (c) добијамо

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\,\delta q_s\ ; \qquad \delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_s}\,\delta q_s\ ; \qquad \delta z_i = \frac{\partial z_i}{\delta q_s}\,\delta q_s\ ,$$

па израз са леве стране једначине (b) постаје

$$\sum_1^n m_i\left(\ddot{x}_i\,\delta x_i + \ddot{y}_i\,\delta y_i + \ddot{z}_i\,\delta z_i\right) = \sum_1^n m_i\left(\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \ddot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \ddot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)\delta q_s \qquad (d)$$

Да би, по Lagrange-у, довели овај израз у везу са кинетичком енергијом система претставићемо га у следећем облику

$$\frac{d}{dt}\sum_1^n m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \dot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \dot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)\delta q_s - \sum_1^n m_i\left(\dot{x}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \dot{y}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \right.$$

$$\left. + \dot{z}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)\delta q_s$$

Израз за кинетичку енергију система гласи

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_1^n m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)\ ,$$

при чему треба да напоменемо да се из израза (a) види да брзине $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ можемо изразити помоћу тзв. генералисаних брзина $\dot{q}_s$ и генералисаних координата q_s. На основи тога парцијални изводи кинетичке енергије по q_s и $\dot{q}_s$ гласе

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_s} = \sum_1^n m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s} + \dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_s} + \dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_s}\right) \qquad (e)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_s} = \sum_1^n m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_s} + \dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_s} + \dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_s}\right) \qquad (f)$$

Пошто је

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\,\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\,\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_k}\,\dot{q}_k \qquad (g)$$

биће
$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{q}_1}=\frac{\partial x}{\partial q_1}\ ;\quad \frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{q}_2}=\frac{\partial x}{\partial q_2}\ ,\ .\ .\ .\ \frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{q}_k}=\frac{\partial x}{\partial q_k}\ ,$$

па једначина (e) постаје сада
$$\frac{\partial E_k}{\partial\dot{q}_s}=\sum_1^n m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+\dot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+\dot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)\qquad (h$$

Пошто је даље
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1\,\partial q_s}\dot{q}_1+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2\,\partial q_s}\dot{q}_2+\ldots+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\,\partial q_s}\dot{q}_k\ ,\qquad (i)$$

и пошто диференцирајући (g) парцијално по q_s добијамо
$$\frac{\partial}{\partial q_s}\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1\,\partial q_s}\dot{q}_1+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2\,\partial q_s}\dot{q}_2+\ldots+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\,\partial q_s}\dot{q}_k\ ,\qquad (j)$$

то из (i) и (j) закључујемо да је
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}=\frac{\partial}{\partial q_s}\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial q_s}\ ,$$

а по аналогији
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}=\frac{\partial\dot{y}_i}{\partial q_s}\ ,\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}=\frac{\partial\dot{z}_i}{\partial q_s}\ .$$

Ако ове изразе заменимо у (f) добићемо
$$\frac{\partial E_k}{\partial q_s}=\sum_1^n m_i\left(\dot{x}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+\dot{y}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+\dot{z}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)\qquad (k)$$

Употребљавајући изразе (h) и (k) за леву страну једначине (b), а израз (c) за десну страну исте једначине, можемо је написати у облику
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{q}_s}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_s}=F_{qs}\qquad (99)$$

Ово је Lagrange-ев облик диференцијалне једначине кретања система материјалних тачака. Оваква једначина може да се напише за сваку од генералисаних координата система, тако да на крају добијамо онолики број једначина колико имамо генералисаних координата, односно колики је број степена слободе система.

Генералисане силе F_{q1}, F_{q2}, . . . , могу бити константе, могу зависити од координата, од брзина или од времена. Но, у посебном случају, ако силе које делују на систем имају потенцијал E_p, односно ако су конзервативне, (а то је случај поред осталих сила и са силом земљине теже, која у највећем броју случајева делује на систем материјалних тачака), мора рад на могућем померању да буде раван смањењу потенцијалне енергије система

$$F_{q1}\,\delta q_1+F_{q2}\,\delta q_2+\ldots=-\frac{\partial E_p}{\partial q_1}\,\delta q_1-\frac{\partial E_p}{\partial q_2}\,\delta q_2-\ldots$$

Међутим, пошто су померања δq_1, δq_2, . . . потпуно произвољна и независна, то да би горња једначина важила морају бити испуњени следећи услови
$$F_{q1}=-\frac{\partial E_p}{\partial q_1}\ ;\quad F_{q2}=-\frac{\partial E_p}{\partial q_2},\ldots,\quad F_{qs}=-\frac{\partial E_p}{\partial q_s},$$

па се Lagrange-ева једначина кретања (99) у том случају може написати у облику
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{q}_s}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_s}=-\frac{\partial E_p}{\partial q_s}\qquad (100)$$

У случају да на систем материјалних тачака делују силе које имају потенцијал, односно које су конзервативне, и друге силе које га немају, тј. силе које нису конзервативне, а за које задржавамо ознаке F_{q1}, F_{q2} . . . . , Lagrange-еве једначине имају облик
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{q}_s}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_s}+\frac{\partial E_p}{\partial q_s}=F_{qs}\qquad (101)$$

Овај облик (101) употребљаваћемо у доцнијим излагањима, када, на пример, на систем буду деловале две врсте сила: земљина тежа као конзервативна сила, и силе вискозног трења, или поремећајне силе и поремећајни моменти.

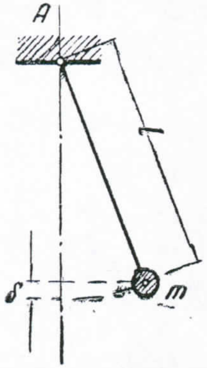
На крају треба напоменути да иако смо се ограничили у извођењу да једначине (a) које су везивале Descartes-ове и генералисане координате не зависе од времена t, ипак се може доказати да ће Lagrange-еве једначине кретања задржати исти облик и у случају да време t улази експлицитно у те једначине, које би сада добиле облик
$$x_i=\varphi_i(t,q_1,q_2,\ldots,q_k)$$
$$y_i=\psi_i(t,q_1,q_2,\ldots,q_k)$$
$$z_i=\theta_i(t,q_1,q_2,\ldots,q_k)$$

Пример оваквог система имали бисмо у случају када би дужина сферног клатна на неки начин зависила од времена.

Како се постављају диференцијалне једначине кретања материјалне тачке или система материјалних тачака помоћу Lagrange-евих једначина кретања, показаћемо на појединим примерима задатака из динамике, тј. на разним врстама клатна.

Примери

126.) *Математичко клатно.* Посматрајмо материјалну тачку масе m, која је нерастегљивим концем дужине l причвршћена за тачку A. Као величину помоћу које можемо описати њено кретање у вертикалној равни, односно као генералисану координату, узећемо угао φ, па ће Lagrange-ева једначина кретања гласити



Сл. 120

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial \varphi}=-\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}$$

Кинетичка енергија материјалне тачке је

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2\,; \qquad v^2=l^2\dot{\varphi}^2\,,$$

па је
$$E_k=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$

Потенцијална енергија материјалне тачке масе m биће

$$E_p=mg\delta\,; \quad \delta=l\,(1-\cos\varphi)\,; \quad \cos\varphi\approx 1-\frac{\varphi^2}{2}$$

$$\delta=\frac{1}{2}l\varphi^2 \qquad \text{па је} \quad E_p=\frac{1}{2}mgl\varphi^2$$

Нађимо потребне чланове за горњу Lagrange-еву једначину кретања

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right)=ml^2\ddot{\varphi} \;\; ; \quad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi}=0 \;\; ; \quad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi}=mgl\varphi\,,$$

па је диференцијална једначина кретања

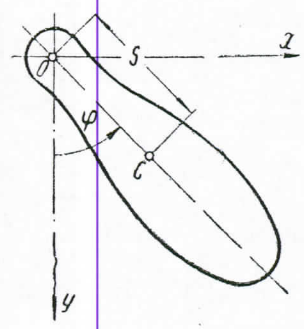
$$ml^2\ddot{\varphi}+mgl\varphi=0\,,$$

односно
$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0$$

127.) *Физичко клатно.* Нађимо диференцијалну једначину кретања физичког клатна масе M, које осцилира у вертикалној равни око осе која пролази кроз тачку O, а управна је на раван цртежа. Тежиште C клатна удаљено је за s од осе O.

Као генералисану координату узећемо опет угао φ, па је Lagrange-ева једначина кретања иста као и у претходном случају.

Кинетичка енергија клатна по König-овој теореми биће



Сл. 121

$$E_k=\frac{1}{2}J_c\omega_c^2+\frac{1}{2}Mv_c^2$$

$$\omega_c=\dot{\varphi} \quad ; \qquad v_c=s\dot{\varphi}\,,$$

па је

$$E_k=\frac{1}{2}J_c\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}Ms^2\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}(J_c+Ms^2)\dot{\varphi}^2$$

Како је по Steiner-овој теореми

$$J_0=J_c+Ms^2,$$

то је
$$E_k=\frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2$$

Потенцијална енергија клатна биће

$$E_p=Mg\delta \quad ; \qquad \delta=s\,(1-\cos\varphi)\approx\frac{1}{2}s\varphi^2\,,$$

па је
$$E_p=\frac{1}{2}Mgs\varphi^2$$

Диференцирањем израза за E_k и E_p налазимо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right)=J_0\ddot{\varphi} \quad ; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi}=0 \quad ; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi}=Mgs\varphi\,,$$

па диференцијална једначина кретања гласи

$$J_0\ddot{\varphi}+Mgs\varphi=0\,,$$

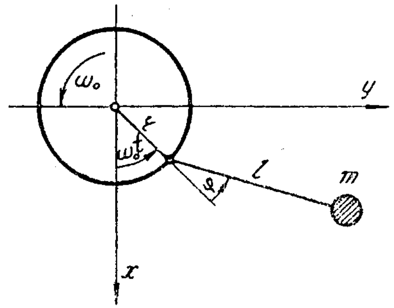
односно
$$\ddot{\varphi}+\frac{Mgs}{J_0}\varphi=0$$

128.) *Taylor-ово клатно.* Као следећи пример примене Lagrange-евих једначина решимо проблем тзв. Taylor-овог клатна. Овај задатак претставља уствари примитиван облик једне конструкције, која је у последње време нашла веома важну практичну примену у сврху амортизације торзионих осцилација коленастих вратила мотора, а нарочито авионских. (Види доцније зад. бр. 141).

Систем се састоји из вратила полупречника r које се обрће константном угаоном брзином ω_0, на чијој је периферији учвршћен нерастегљив конац дужине l, са масом m на крају (математичко клатно).

За генералисану координату узећемо опет угао φ, назначен на слици.

Кинетичка енергија система састоји се из кинетичке енергије ротације вратила и кинетичке енергије масе m



Сл. 122

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega_0^2 + \frac{1}{2} m v^2 \qquad (a)$$

Брзина тачке m биће

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$x = r \cos \omega_0 t + l \cos (\omega_0 t + \varphi)$$

$$y = r \sin \omega_0 t + l \sin (\omega_0 t + \varphi)$$

Диференцирањем по времену добијамо

$$\dot{x} = -r\omega_0 \sin \omega_0 t - l(\omega_0 + \dot{\varphi}) \sin (\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{y} = r\omega_0 \cos \omega_0 t + l(\omega_0 + \dot{\varphi}) \cos (\omega_0 t + \varphi) \ ,$$

па је

$$v^2 = r^2\omega_0^2 + l^2 (\omega_0 + \dot{\varphi})^2 + 2\, lr\omega_0 (\omega_0 + \dot{\varphi}) \cos \varphi \ , \qquad (b)$$

па израз за кинетичку енергију система прелази у

$$E_k = \frac{1}{2} J\omega_0^2 + \frac{1}{2} m \left[r^2\omega_0^2 + l^2 (\omega_0 + \dot{\varphi})^2 + 2\, lr\omega_0 (\omega_0 + \dot{\varphi}) \cos \varphi\right] \qquad (c)$$

Пошто занемарујемо утицај земљине теже, то је потенцијална енергија система

$$E_p = 0$$

Диференцирањем израза (c) добијамо

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 (\omega_0 + \dot{\varphi}) + mlr\omega_0 \cos \varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2 \ddot{\varphi} - mlr\, \omega_0\, \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = -mlr\omega_0^2 \sin \varphi - mlr\, \omega_0\, \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0 \ ,$$

па је

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = ml^2 \ddot{\varphi} + mlr\omega_0^2 \sin \varphi = 0$$

За мале осцилације је $\sin \varphi \approx \varphi$, па је диференцијална једначина кретања

$$\ddot{\varphi} + \frac{r}{l} \omega_0^2 \varphi = 0$$

Према томе, кружна фреквенција осцилација система биће

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{r}{l}}$$

Као што видимо кружна фреквенција осцилација клатна пропорционална је угаоној брзини ω_0 ротације вратила. За време једног обрта вратила изврши клатно увек исти број осцилација без обзира на брзину обртања вратила. Број осцилација за један обрт вратила добићемо ако помножимо број осцилација у секунди са временом потребним за један обрт вратила

$$f \cdot T_0 = \frac{T_0}{T} = \frac{\dfrac{2\pi}{\omega_0}}{\dfrac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{r}{l}}$$

Према томе, број осцилација за један обрт зависи само од димензија r и l без обзира на брзину обртања вратила.

129.) *Сферно клатно.* Као даљи пример решаваћемо проблем сферног клатна (види сл. 119).

Брзина материјалне тачке масе m у генералисаним координатама φ и θ биће

$$v^2 = (l \sin \theta \cdot \dot{\varphi})^2 + (l\dot{\theta})^2 \ ,$$

па је њена кинетичка енергија

$$E_k = \frac{1}{2} m \left[(l\dot{\theta})^2 + (l \sin \theta \cdot \dot{\varphi})^2\right] \qquad (a)$$

На виртуалном померању за угао $\delta\varphi$ тачка m прећи ће пут $l \sin \theta \cdot \delta\varphi$. Међутим пошто на њу делује само сила земљине теже mg управно на правац виртуалног померања то је рад једнак нули, и према томе и генералисана сила $F_{q_\varphi} = 0$. На сличан начин добићемо да је генералисана сила

$$F_{q_\theta} = -mgl \sin \theta \qquad (b)$$

Lagrange-ове једначине кретања за генералисане координате φ и θ су

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} &= F_{q_\varphi} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \theta} &= F_{q_\theta} \end{aligned} \qquad (c)$$

Диференцирањем израза (a) за E_k добићемо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(ml^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}\right) = m\, l^2 \sin^2 \theta \cdot \ddot{\varphi} \quad ; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\theta}\right)=\frac{d}{dt}\left(ml_2\,\dot\theta\right)=ml^2\,\ddot\theta \quad ;$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial\theta}=ml^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot\varphi^2$$

Сменом нађених вредности једначине (c) прелазе у

$$ml^2\sin^2\theta\cdot\ddot\varphi=0$$

$$ml^2\,\ddot\theta-ml^2\sin\theta\cos\,\theta\cdot\dot\varphi^2=-mgl\sin\theta \quad ,$$

а одавде је

$$\sin^2\theta\cdot\dot\varphi=\mathrm{const}=h$$

и

$$\ddot\theta-\sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2=-\frac{g\sin\theta}{l} \tag{d}$$

Пошто решење проблема сферног клатна у општем случају доводи до елиптичног интеграла*) расмотрићемо само неке посебне случајеве:

1.) Ако је почетна брзина тачке m управљена у правцу меридијана сфере, тада мора бити $\dot\varphi=0$ пошто се тачка креће по меридијану. У том случају систем једначина (d), пошто је $\cos\,\theta\approx 1$ и $\sin\theta\approx\theta$, прелази у једначину кретања математичког клатна

$$\ddot\theta+\frac{g}{l}\theta=0$$

2.) Ако претпоставимо да се тачка m креће по упореднику, тј. да је угао $\theta=\mathrm{const}$, тада на основи једначина (d) мора и $\dot\varphi$ да буде константно

$$\theta=\alpha \quad ; \qquad \dot\varphi=\omega\,,$$

а одавде је

$$\omega^2=\frac{g}{l\cos\alpha}=\frac{h^2}{\sin^4\alpha} \tag{e}$$

На основи једначине (e) можемо да срачунамо угаону брзину и константу h за одређени угао α конусног клатна.

3.) Претпоставимо да на конусно клатно делују извесни поремећаји, тако да оно врши мале осцилације око хоризонталног круга, тј. да је

$$\theta=\alpha+\xi\,, \tag{f}$$

где је ξ мала промена угла θ за време кретања конусног клатна.

*) Види: Лойцянский-Лурье: Курс теоретической механики, ч. II стр. 291

Да бисмо проучили мале осцилације масе m око равнотежног положаја конусног клатна, тј. осцилације око хоризонталног круга у коме ротира конусно клатно, задржаћемо у свим даљим изразима само први степен мале величине ξ.

Тако ће бити

$$\sin\theta=\sin\alpha+\xi\cos\alpha \quad ; \qquad \cos\theta=\cos\alpha-\xi\sin\alpha \tag{g}$$

Ако заменимо вредност за $\dot\varphi$ из прве од једначина (d) у другу добићемо

$$\ddot\theta-\frac{h^2}{\sin^3\theta}\cos\theta=-\frac{g\sin\theta}{l}$$

Заменимо сада вредности за $\sin\theta$, $\cos\theta$ и $\ddot\theta$ из (f) и (g) у горњу једначину па ћемо добити

$$\ddot\xi-h^2\frac{\cos\alpha-\xi\sin\alpha}{(\sin\alpha+\xi\cos\alpha)^3}=-\frac{g}{l}\left(\sin\alpha+\xi\cos\alpha\right)$$

Ако помножимо и поделимо други члан са леве стране ове једначине изразом $(\sin\alpha-\xi\cos\alpha)^3$, добићемо

$$\ddot\xi-h^2\frac{(\cos\alpha-\xi\sin\alpha)\ (\sin\alpha-\xi\cos\alpha)^3}{(\sin\alpha+\xi\cos\alpha)^3\ (\sin\alpha-\cos\alpha)^3}=-\frac{g}{l}(\sin\alpha+\xi\cos\alpha)$$

Задржавањем само малих величина првог реда ова једначина прелази у

$$\ddot\xi-\frac{h^2}{\sin^6\alpha}(\cos\alpha\sin^3\alpha-\xi\sin^4\alpha-3\,\xi\sin^2\alpha\cos^2\alpha)=-\frac{g}{l}(\sin\alpha-\xi\cos\alpha)\,,$$

$$\ddot\xi-\frac{h^2}{\sin^3\alpha}\left[\cos\alpha-\xi\left(\frac{3\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\sin\alpha\right)\right]=-\frac{g}{l}\left(\sin\alpha+\xi\cos\alpha\right)$$

Претпоставимо да је угао α тако одређен да је задовољен услов (e) за конусно клатно. Тада ће бити

$$\ddot\xi-\omega^2\sin\alpha\left[\frac{g}{l\omega^2}-\xi\left(\frac{3\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\sin\alpha\right)\right]=-\frac{g}{l}\left(\sin\alpha+\xi\cos\alpha\right)$$

Када овај израз средимо добићемо

$$\ddot\xi+(1+3\cos^2\alpha)\,\omega^2\,\xi=0$$

Из ове једначине закључујемо да ће угао θ варирати за мале вредности ξ са периодом

$$T=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}$$

130.) *Елиптично клатно.* Као последњи пример за примену Lagrange-евих једначина проучићемо кретање елиптичног клатна. То се клатно састоји из две масе од којих једна m_1 клизи без трења по хоризонталној равни, а друга m_2 је повезана са првом полугом без тежине и осцилује у вертикалној равни.

Пре него што пређемо на решавање овог задатка увешћемо појам Lagrange-еве функције и првог интеграла Lagrange-евих једначина.

Lagrange-ева једначина кретања, као што знамо, гласи

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_i}+\frac{\partial E_p}{\partial q_i}=0 \qquad (a)$$

Ако напоменемо да потенцијална енергија система E_p не зависи никад од генералисаних брзина, можемо једначину (a) увођењем Lagrange-еве функције

$$L = E_k - E_p\,, \qquad (102)$$

да напишемо у облику

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ n) \qquad (103)$$

Даље ћемо увести појам тзв. *цикличних координата*, тј. таквих генералисаних координата, које се не јављају у изразу за Lagrange-еву функцију L.

Имамо ли сада међу n генералисаних координата $r < n$ цикличних координата

$$q_1\,,\ q_2\,,\ \ldots.\ q_r\,,$$

тј. таквих да је

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\,, \qquad (i=1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots.\ r)$$

онда мора на основи једначине (103) да буде

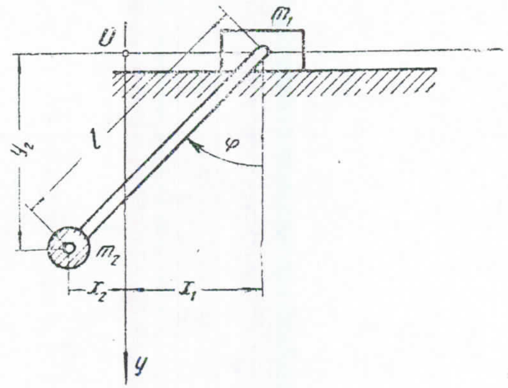
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0\,. \qquad (i=1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots.\ r)$$

а одавде је

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=C_i=\text{const} \qquad (i=1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots.\ r) \qquad (104)$$

Једначине (104) које везују генералисане брзине, генералисане координате, време и произвољне константе претстављају прве интеграле Lagrange-евих једначина, односно тзв. *цикличне интеграле*.

Вратимо се сада на проблем елиптичног клатна.



Сл. 123

Пошто систем има два степена слободе, усвојићемо за генералисане координате померање x_1 масе m_1 и угао ротације φ масе m_2.

Координате средишта масе m_2, као што се из слике види, су

$$x_2 = x_1 - l\sin\varphi$$

$$y_2 = l\cos\varphi$$

Кинетичка енергија система биће

$$E_k = E_{k\,1} + E_{k\,2}$$

$$E_{k\,1} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2$$

$$E_{k\,2} = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2\right)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\dot{y}_2 = -\,l\dot{\varphi}\sin\varphi\,,$$

па је

$$E_{k\,2} = \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_1^2 - 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\right),$$

односно

$$E_k = \frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 - m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad (a)$$

$$E_p = m_2 g\delta\ ; \qquad \delta = l\,(1-\cos\varphi)\ ;$$

$$E_p = m_2 gl\,(1-\cos\varphi)\,, \qquad (b)$$

па израз за Lagrange-еву функцију гласи

$$L = E_k - E_p$$

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 - m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos\varphi - m_2 g l + m_2 g l \cos\varphi \qquad (c)$$

Пошто се генералисана координата x_1 не јавља у изразу (c) за Lagrange-еву функцију, то значи да је она циклична координата.

Можемо дакле да образујемо један циклични интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\,\dot{x}_1 - m_2 l \dot{\varphi} \cos\varphi = C_1$$

Ако интегрирамо ову једначину добићемо

$$(m_1 + m_2)\, x_1 - m_2 l \sin\varphi = C_1 t + C_2$$

Згодним избором почетних услова може се постићи да интеграционе константе буду нуле. Тако ако су почетни услови

за $\quad t = 0 \qquad \dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0; \qquad \dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_1 = 0$ и

$$x_0 = x_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin\varphi ,$$

биће $\qquad C_1 = C_2 = 0 ,$

односно решење првог цикличног интеграла даје

$$(m_1 + m_2)\, x_1 - m_2 l \sin\varphi = 0 ,$$

одакле је

$$x_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin\varphi$$

Ово решење има и своје физичко значење. Услед отсуства хоризонталних сила тежиште овог система креће се по вертикали, чија је једначина дата горњим решењем.

Нађимо сада другу једначину кретања за генералисану координату φ.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} - m_2 l \dot{x}_1 \cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin\varphi - m_2 g l \sin\varphi ,$$

па је диференцијална једначина кретања

$$\frac{d}{dt}\left(m_2 l^2 \dot{\varphi} - m_2 l \dot{x}_1 \cos\varphi\right) - m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin\varphi + m_2 g l \sin\varphi = 0$$

Пошто је $\qquad \dot{x}_1 = \dfrac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{\varphi} \cos\varphi ,$

ова једначина прелази у

$$\frac{d}{dt}\left(m_2 l^2 \dot{\varphi} - \frac{m_2^2 l}{m_1 + m_2} \dot{\varphi} \cos^2\varphi\right) - \frac{m_2^2 l^2}{m_1 + m_2} \dot{\varphi}^2 \sin\varphi \cos\varphi + m_2 g l \sin\varphi = 0$$

Пошто је $\qquad \dot{\varphi}^2 \approx 0 , \qquad \sin\varphi \approx 0$ и $\cos\varphi \approx 1 ,$

то је

$$\frac{d}{dt}\left(m_2 l^2 \dot{\varphi} - \frac{m_2^2 l^2}{m_1 + m_2} \dot{\varphi}\right) + m_2 g l \varphi = 0 ,$$

а одавде

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} - \frac{m_2^2 l^2}{m_1 + m_2} \ddot{\varphi} + m_2 g l \varphi = 0 ,$$

односно

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l \ddot{\varphi} + m_2 g \varphi = 0$$

и

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \varphi = 0 .$$

Према томе, период осцилација масе m_2 у вертикалној равни

биће

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ако је маса $m_1 \gg m_2$ онда ће померања масе m_1 бити веома мала и период осциловања тежиће периоду обичног математичког клатна

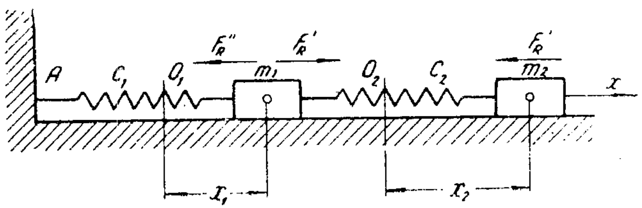
$$\lim_{m_1 \to \infty} T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Елиптично клатно има значаја због тога што мењањем маса m_1 и m_2, задржавајући исту дужину клатна l, можемо мењати период осцилација. Уколико је мања маса m_1, утолико је мањи и период осциловања.

Клатно се назива елиптично због тога што се тежиште система креће по једној вертикалној правој, док маса m_1 клизи по хоризонталној правој. Одавде видимо да средиште масе m_2 описује елипсу.

11. ЛИНЕАРНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ СА ВИШЕ СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

Нека се на идеално глаткој хоризонталној равни налазе две материјалне тачке чије су масе m_1 и m_2. Маса m_1 причвршћена је опругом крутости c_1 за тачку A, док је маса m_2 причвршћена опругом крутости c_2 за масу m_1. Изведимо обе материјалне тачке из по-



Сл. 124

ложаја равнотеже и претпоставимо да је $x_2 > x_1$. На материјалну тачку масе m_2 у том положају деловаће реституциона сила

$$F_R' = -c_2\delta_2 = -c_2(x_2 - x_1)\,,$$

па ће диференцијална једначина кретања масе m_2, на основи d'Alembert-овог принципа бити

$$\vec{F}_i + \vec{F}_R' = 0\,,$$

односно
$$(-m_2\ddot{x}_2) - c_2(x_2 - x_1) = 0$$

На масу m_1 деловаће две реституционе силе

$$F_R'' = -c_1\delta_1 = -c_1 x_1 \quad \text{и} \quad F_R' = c_2\delta_2 = c_2(x_2 - x_1)\,,$$

па је диференцијална једначина кретања материјалне тачке масе m_1, слично као мало пре

$$\vec{F}_i' + \vec{F}_R' + \vec{F}_R'' = 0\,,$$

односно
$$(-m_1\ddot{x}_1) - c_1 x_1 + c_2(x_2 - x_1) = 0$$

Према томе диференцијалне једначине кретања овог система биће

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2(x_2 - x_1) &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \tag{105}$$

Потражимо решење ових симултаних диференцијалних једначина у облику

$$x_1 = \lambda_1 \cos pt$$
$$x_2 = \lambda_2 \cos pt\,,$$

тада добијамо
$$\begin{aligned} -m_1 p^2\lambda_1 + c_1\lambda_1 - c_2(\lambda_2 - \lambda_1) &= 0 \\ -m_2 p^2\lambda_2 + c_2(\lambda_2 - \lambda_1) &= 0 \end{aligned}\,,$$

односно
$$\begin{aligned} \lambda_1(c_1 + c_2 - m_1 p^2) - \lambda_2 c_2 &= 0 \\ -\lambda_1 c_2 + \lambda_2(c_2 - m_2 p^2) &= 0 \end{aligned} \tag{106}$$

Одбацујући тривијално решење $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, кад нема осцилација и користећи услов за хомогене једначине да детерминанта система мора да буде једнака нули, добијамо фреквентну или секуларну једначину

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 p^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 p^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

одакле је
$$(c_1 + c_2 - m_1 p^2)\,(c_2 - m_2 p^2) - c_2^2 = 0,$$

или
$$p^4 - p^2\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right) + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0\,, \tag{107}$$

што се може написати и

$$p^4 - p^2\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right) + \frac{c_1}{c_1 + c_2}\cdot\frac{c_1 + c_2}{m_1}\cdot\frac{c_2}{m_2} = 0$$

Обележимо са

$$\varkappa^2 = \frac{c_2}{c_1 + c_2}\,,$$

онда је
$$\frac{c_1}{c_1 + c_2} = 1 - \varkappa^2$$

и
$$n_1^2 = \frac{c_1 + c_2}{m_1} \qquad n_2^2 = \frac{c_2}{m_2}$$

Величине n_1 и n_2 имају и своје физичко значење, тј. оне претстављају кружну фреквенцију слободних осцилација, прве, односно друге материјалне тачке, када је друга, односно прва материјална тачка непомична.

Увођењем наведених смена једначина (107) прелази у

$$p^4 - p^2 (n_1^2 + n_2^2) + (1 - \varkappa^2)\, n_1^2 n_2^2 = 0, \tag{108}$$

а њени корени су

$$\begin{aligned} p^2_{\mathrm{I}} &= \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4\varkappa^2 n_1^2 n_2^2} \\ p^2_{\mathrm{II}} &= \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4\varkappa^2 n_1^2 n_2^2} \end{aligned} \tag{109}$$

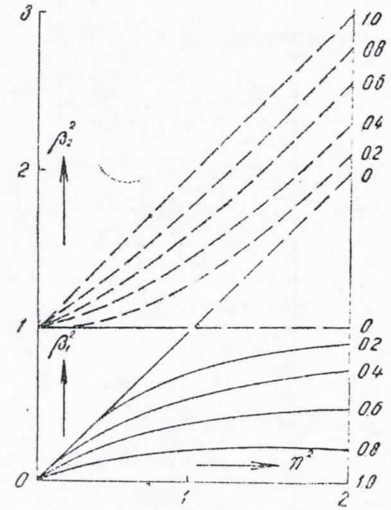
Нека је $n_1 < n_2$, онда је при

$$\begin{array}{lll} \varkappa = 0 & p_{\mathrm{I}} = n_1 & p_{\mathrm{II}} = n_2 \\ 0 < \varkappa < 1 & p_{\mathrm{I}} < n_1 & p_{\mathrm{II}} > n_2 \\ \varkappa = 1 & p_{\mathrm{I}} = 0 & p_{\mathrm{II}} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \end{array}$$

Ако је $n_2 < n_1$, онда је при

$$\begin{array}{lll} \varkappa = 0 & p_{\mathrm{I}} = n_2 & p_{\mathrm{II}} = n_1 \\ 0 < \varkappa < 1 & p_{\mathrm{I}} < n_2 & p_{\mathrm{II}} > n_1 \\ \varkappa = 1 & p_{\mathrm{I}} = 0 & p_{\mathrm{II}} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \end{array}$$

На слици је дат дијаграм за одређивање кружних фреквенција p_{I} и p_{II}, на чијој је апсциси нанета бездимензионална величина $n^2 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$, а на ординати $\beta_1^2 = \frac{p_{\mathrm{I}}^2}{n_1^2}$ и $\beta_2^2 = \frac{p_{\mathrm{II}}^2}{n_2^2}$



Сл. 125

Однос амплитуда добићемо из једначина (106)

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c_2}{c_1 + c_2 - m_1 p^2},$$

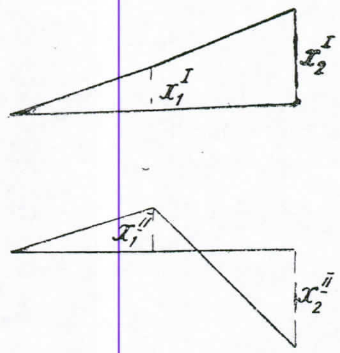
што се може написати и

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} &= \frac{\varkappa^2}{1 - \dfrac{p_{\mathrm{I}}^2}{n_1^2}} = \frac{\varkappa^2}{1 - \beta_1^2} = \psi_1 \;; \quad \lambda_1^{\mathrm{I}} = \psi_1 \lambda_2^{\mathrm{I}} \\ \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} &= \frac{\varkappa^2}{1 - \dfrac{p^2_{\mathrm{II}}}{n_1^2}} = \frac{\varkappa^2}{1 - \beta_2^2} = \psi_2 \;; \quad \lambda_1^{\mathrm{II}} = \psi_2 \lambda_2^{\mathrm{II}} \end{aligned} \tag{110}$$

Као што се према дијаграму види

$$\psi_1 > 0 \quad \text{и} \quad \psi_2 < 0,$$

па ће облици главних осцилација бити



прва главна форма осцилација

друга главна форма осцилација

Сл. 126

Решење диференцијалних једначина (105) биће

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1^{\mathrm{I}} \cos p_{\mathrm{I}}\, t + \lambda_1^{\mathrm{II}} \cos p_{\mathrm{II}}\, t \\ x_2 &= \lambda_2^{\mathrm{I}} \cos p_{\mathrm{I}}\, t + \lambda_2^{\mathrm{II}} \cos p_{\mathrm{II}}\, t \end{aligned}$$

Константе λ_1^{I}, λ_1^{II}, λ_2^{I}, λ_2^{II} одређујемо из почетних услова

за $t = t_0$

$$\begin{array}{ll} x_1 = x_{01} & \dot{x}_1 = \dot{x}_{01} \\ x_2 = x_{02} & \dot{x}_2 = \dot{x}_{02} \end{array}$$

Диференцијалне једначине кретања (105) можемо наћи и помоћу Lagrange-евих једначина кретања. Ако за генералисане координате узмемо померања x_1 и x_2 материјалних тачака чије су масе m_1 и m_2, онда ће Lagrange-eве једначине кретања бити

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial x_1}&=-\frac{\partial E_p}{\partial x_1}\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial x_2}&=-\frac{\partial E_p}{\partial x_2}\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Кинетичка енергија E_k система биће једнака збиру кинетичких енергија материјалних тачака

$$E_k = E_{k\,1} + E_{k\,2} = \frac{1}{2}\, m_1\, \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 \dot{x}_2^2 \qquad (b)$$

Потенцијална енергија система једнака је збиру потенцијалних енергија опруга чије су крутости c_1 и c_2.

$$E_p = E_{p\,1} + E_{p\,2}$$

У случају транслаторног кретања је $E_p = \int\limits_0^{\delta} F d\delta$,

па је
$$E_{p\,1} = \int\limits_0^{\delta_1} F_R'' \, d\delta = \int\limits_0^{\delta_1} c_1 \delta_1 \, d\delta = \frac{1}{2}\, c_1 \delta_1^2 = \frac{1}{2}\, c_1 x_1^2 ,$$

$$E_{p\,2} = \int\limits_0^{\delta_2} F_R' d\delta = \int\limits_0^{\delta_2} c_2 \delta_2 d\delta = \frac{1}{2}\, c_2 \delta_2^2 = \frac{1}{2}\, c_2 (x_2 - x_1)^2 ,$$

односно
$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = \frac{1}{2}\, c_1 x_1^2 + \frac{1}{2}\, c_2 (x_2 - x_1)^2 \qquad (c)$$

Диференцирањем израза (b) и (c) налазимо потребне чланове за једначине (a)

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 ; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1 ; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_1} = 0 ; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial x_2} = 0$$

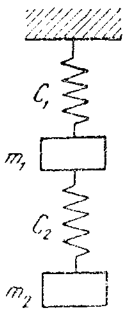
$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1); \qquad \frac{\partial E_p}{\partial x_2} = c_2 (x_2 - x_1)$$

Кад ове чланове заменимо у једначине (a) добијамо

$$\left|\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= 0\\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0\end{aligned}\right. ,$$

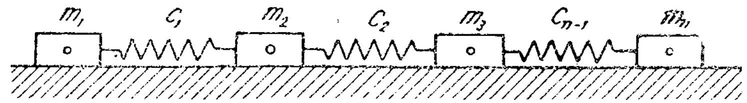
а то су исте једначине које смо добили мало пре на други начин на основи d'Alembert-овог принципа.

Напомена: Пошто су диференцијалне једначине кретања (105) изведене за идеализирани случај, када се две материјалне тачке налазе на идеално глаткој равни, тј. за случај кад нема никаквих отпора при кретању, то диференцијалне једначине кретања, фреквентна једначина и све остале једначине, важе и за случај приказан сликом 127, јер еластичне силе у опругама одржавају равнотежу тежинама материјалних тачака.



Сл. 127

Проучимо још и случај када се на идеално глаткој хоризонталној равни налази n материјалних тачака чије су масе $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$, а које су међусобно спојене опругама чије су крутости $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$.



Сл. 128

Ако радимо помоћу Lagrange-евих једначина кретања кинетичка и потенцијална енергија система дате су изразима

$$\left.\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2 + \cdots + m_n \dot{x}_n^2\right),\\ E_p &= \frac{1}{2}\left[c_1 (x_1 - x_2)^2 + c_2 (x_2 - x_3)^2 + \cdots + c_{n-1}(x_{n-1} - x_n)^2\right],\end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

а диференцијалне једначине кретања биће

$$\left|\begin{aligned} & m_1 \ddot{x}_1 + c_1 (x_1 - x_2) = 0\\ & m_2 \ddot{x}_2 - c_1 (x_1 - x_2) + c_2 (x_2 - x_3) = 0\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & m_{n-1} \ddot{x}_{n-1} - c_{n-2}(x_{n-2} - x_{n-1}) + c_{n-1}(x_{n-1} - x_n) = 0\\ & m_n \ddot{x}_n - c_{n-1}(x_{n-1} - x_n) = 0\end{aligned}\right. , \qquad (111)$$

док ће фреквентна једначина бити дата изразом

$$\begin{vmatrix} c_1 - p^2 m_1 & -c_1 & 0 & \cdots 0 & 0\\ -c_1 & c_1 + c_2 - p^2 m_2 & -c_2 & \cdots 0 & 0\\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 - p^2 m_3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & -c_{n-1} & c_{n-1} - p^2 m_n \end{vmatrix} = 0 \qquad (112)$$

Тако би за $n = 2$ диференцијалне једначине кретања биле

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 (x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_1 (x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \tag{113}$$

а фреквентна једначина би гласила

$$\begin{vmatrix} c_1 - m_1 p^2 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 - m_2 p^2 \end{vmatrix} = 0,$$

односно

$$p^2 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} c_1 = 0 \tag{114}$$

За $n = 3$ имали бисмо

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 (x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_1 (x_1 - x_2) + c_2 (x_2 - x_3) &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 - c_2 (x_2 - x_3) &= 0 \end{aligned} \tag{115}$$

а фреквентна једначина би гласила

$$\begin{vmatrix} c_1 - m_1 p^2 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - m_2 p^2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 - m_3 p^2 \end{vmatrix} = 0,$$

односно

$$p^4 - \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} c_1 + \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} c_2 \right) p^2 + \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} c_1 c_2 = 0 \tag{116}$$

За $n = 4$ имали бисмо

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 (x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_1 (x_1 - x_2) + c_2 (x_2 - x_3) &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 - c_2 (x_2 - x_3) + c_3 (x_3 - x_4) &= 0 \\ m_4 \ddot{x}_4 - c_3 (x_3 - x_4) &= 0 \end{aligned} \tag{117}$$

а фреквентна једначина би гласила

$$\begin{vmatrix} c_1 - m_1 p^2 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - m_2 p^2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 - m_3 p^2 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 - m_4 p^2 \end{vmatrix} = 0,$$

односно

$$p^6 - \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} c_1 + \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} c_2 + \frac{m_3 + m_4}{m_3 m_4} c_3 \right) p^4 +$$

$$+ \left(\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} c_1 c_2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \cdot \frac{m_3 + m_4}{m_3 m_4} c_1 c_3 + \frac{m_2 + m_3 + m_4}{m_2 m_3 m_4} c_2 c_3 \right) p^2 -$$

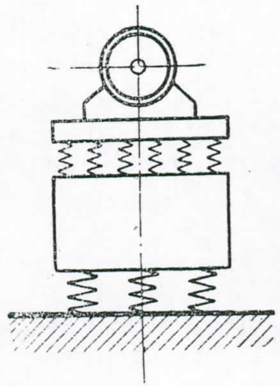
$$- \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} c_1 c_2 c_3 = 0 \tag{118}$$

Напомена: Све фреквентне једначине у овом случају имају по један корен $p^2 = 0$,

Примери

131.) Постоље машине тежине 100 t постављено је на еластичној подлози. Површина постоља $A = 17$ m²; крутост еластичног равномерног сабијања подлоге је $C_z = 600$ t/m³. Да би се отклониле осцилације у случају резонанце, које се појављују при раду машине, на темељ је постављен амортизер у виду тешког рама тежине $G = 4{,}9$ t, а учвршћен је опругама укупне крутости $c = 5000$ t/m. Одредити кружне фреквенције главних осцилација система.

Диференцијалне једначине кретања за овај случај су једначине (105), а фреквентна једначина је једначина (107).



Сл. 129

У нашем случају је

$$c_1 = C_z A = 102000 \text{ t/m} \quad \text{и}$$

$$c_2 = 5000 \text{ t/m},$$

па фреквентна једначина прелази у

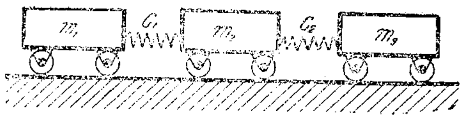
$$p^4 - p^2 \left(\frac{102+5}{100} + \frac{5}{4{,}9} \right) 10^3 g + \frac{102 \cdot 5}{100 \cdot 4{,}9} 10^6 g^2 = 0,$$

односно $p^4 - 2{,}09 \cdot 10^3 g p^2 + 1{,}04 \cdot 10^6 g^2 = 0$

Одавде је $\quad p_{\mathrm{I}}^2 = 0{,}801 \cdot 10^3 g \sec^{-2} \qquad p_{\mathrm{II}}^2 = 1{,}289 \cdot 10^3 g \sec^{-2}$

$$p_{\mathrm{I}} = 89{,}5 \sec^{-1} \qquad p_{\mathrm{II}} = 111{,}7 \sec^{-1}$$

132.) Три теретна железничка вагона прикачена су квачилима један за други. Крутости квачила су c_1 и c_2. Тежине вагона износе G_1, G_2, G_3. У почетном тренутку два вагона налазе се у положају равнотеже, док је десни крајњи вагон удаљен за x_0 од равнотежног положаја. Одредити кружне фреквенције главних осцилација система.



Сл. 130

Диференцијалне једначине кретања у овом случају су једначине (115), а фреквентна једначина је једначина (116), која се може написати и у облику

$$p^4 - \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1+c_2}{m_2} + \frac{c_2}{m_3}\right)p^2 + c_1 c_2\left(\frac{1}{m_1 m_2} + \frac{1}{m_1 m_3} + \frac{1}{m_2 m_3}\right) = 0\,,$$

односно

$$p^4 - g\left(\frac{c_1}{G_1}+\frac{c_1+c_2}{G_2}+\frac{c_2}{G_3}\right)p^2 + g^2 c_1 c_2\left(\frac{1}{G_1G_2}+\frac{1}{G_2G_3}+\frac{1}{G_1G_3}\right)=0$$

$p_I = 0$, а p_{II} и p_{III} добијамо из ове једначине.

133.) При условима претходног задатка одредити кретање вагона и нацртати облик главних осцилација система за случај да су вагони исте тежине $G_1=G_2=G_3=G$, а повезани су квачилима истих крутости $c_1=c_2=c$.

Кад је $G_1=G_2=G_3=G$ и $c_1=c_2=c$, онда фреквентна једначина из предходног задатка прелази у

$$p^4 - g\,\frac{4c}{G}\,p^2 + g^2\,\frac{3c^2}{G^2}=0$$

Одавде је $\qquad p_I=0$

$$p^2_{II,\,III} = \frac{2gc}{G} \mp \frac{gc}{G};\qquad p_{II}=\sqrt{\frac{gc}{G}}\ \sec^{-1};\qquad p_{III}=\sqrt{3}\sqrt{\frac{gc}{G}}\ \sec^{-1}$$

Ако решење диференцијалних једначина кретања, које су постављене у претходном задатку потражимо у облику

$$x_1=\lambda_1\cos pt$$
$$x_2=\lambda_2\cos pt$$
$$x_3=\lambda_3\cos pt\,,$$

онда долазимо до једначина

$$\begin{aligned}(mp^2-c)\lambda_1 + c\lambda_2 &= 0\\ c\lambda_1 + (mp^2-2c)\lambda_2 + c\lambda_3 &= 0\\ c\lambda_2 + (mp^2-c)\lambda_3 &= 0\end{aligned}$$

Одавде је

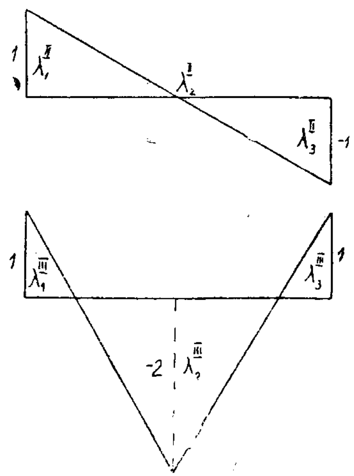
$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{c-mp^2}{c}$$
$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3}=\frac{c-mp^2}{c}$$
$$c\,\frac{\lambda_1}{\lambda_3}+(mp^2-2c)\frac{\lambda_2}{\lambda_3}+c=0$$

Замењујући добијене вредности за p_i^2 у ове једначине добијамо да је

$$\left.\begin{array}{lll}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{I}=1 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^{I}=1 & \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{I}=1\\ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{II}=0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^{II}=0 & \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{II}=-1\\ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{III}=-2 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^{III}=-2 & \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{III}=1\end{array}\right\}\qquad (a)$$

Одавде се већ види да је $\lambda_1^{I}=\lambda_2^{I}=\lambda_3^{I}$ и $\lambda_2^{II}=0$.

Облик главних осцилација за други и трећи квадрат фреквенција је



Сл. 131

Решење диференцијалних једначина кретања биће

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda_1^{I}\cos p_I\,t + \lambda_1^{II}\cos p_{II}\,t + \lambda_1^{III}\cos p_{III}\,t\\ x_2 &= \lambda_2^{I}\cos p_I\,t + \lambda_2^{II}\cos p_{II}\,t + \lambda_2^{III}\cos p_{III}\,t\\ x_3 &= \lambda_3^{I}\cos p_I\,t + \lambda_3^{II}\cos p_{II}\,t + \lambda_3^{III}\cos p_{III}\,t\end{aligned}$$

Нађимо 9 произвољних константи. За почетне услове за $t=0$

$$x_1=0$$
$$x_2=0$$
$$x_3=x_0$$

добијамо

$$\begin{array}{ll}(b) & 0=\lambda_1^{I}+\lambda_1^{II}+\lambda_1^{III}\\ (c) & 0=\lambda_2^{I}+\lambda_2^{II}+\lambda_2^{III}\\ (d) & x_0=\lambda_3^{I}+\lambda_3^{II}+\lambda_3^{III}\end{array}$$

Ако од једначине (d) одузмемо једначину (b) добијамо

$$x_0 = \lambda_3^{I} - \lambda_1^{I} + \lambda_3^{II} - \lambda_1^{II} + \lambda_3^{III} - \lambda_1^{III}$$

Пошто је на основи односа (a): $\lambda_1^{III} = \lambda_3^{III}$; $\lambda_3^{I} = \lambda_1^{I}$; $\lambda_1^{II} = -\lambda_3^{II}$,

онда је
$$x_0 = 2\lambda_3^{II},$$

односно
$$\lambda_3^{II} = \frac{x_0}{2} \quad \text{и} \quad \lambda_1^{II} = -\frac{x_0}{2}$$

Ако од једначине (d) одузмемо једначину (c) добијамо

$$x_0 = \lambda_3^{I} - \lambda_2^{I} + \lambda_3^{II} - \lambda_2^{II} + \lambda_3^{III} - \lambda_2^{III}$$

Пошто је на основи односа (a): $\lambda_3^{I} = \lambda_2^{I}$; $\lambda_2^{II} = 0$; $\lambda_2^{III} = -2\lambda_3^{III}$

онда је
$$x_0 = \frac{x_0}{2} + 3\lambda_3^{III},$$

односно
$$\lambda_3^{III} = \frac{x_0}{6} \quad \text{и} \quad \lambda_2^{III} = -\frac{x_0}{3}$$

По једначини (c) је $\lambda_2^{I} + \lambda_2^{II} + \lambda_2^{III} = 0$,

односно
$$\lambda_2^{I} - \frac{x_0}{3} = 0$$

Имајући у виду односе (a) добијамо

$$\lambda_1^{I} = \lambda_2^{I} = \lambda_3^{I} = \frac{x_0}{3}$$

По једначини (b) је $\lambda_1^{I} + \lambda_1^{II} + \lambda_1^{III} = 0$,

односно $\dfrac{x_0}{3} - \dfrac{x_0}{2} + \lambda_1^{III} = 0$, па је $\lambda_1^{III} = \dfrac{x_0}{6}$

Решење диференцијалних једначина кретања према томе је

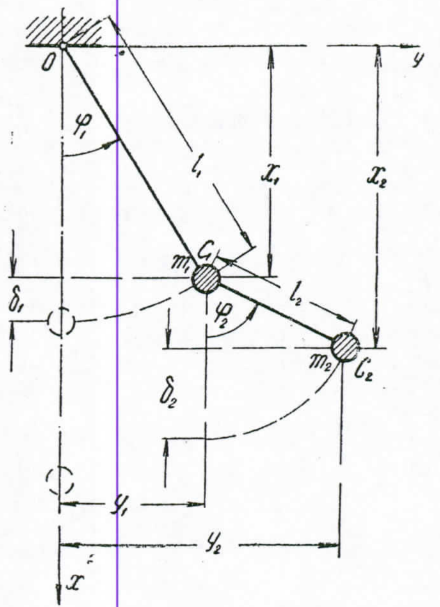
$$\left|\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_0}{3} - \frac{x_0}{2}\cos p_{II}\,t + \frac{x_0}{6}\cos p_{III}\,t \\ x_2 &= \frac{x_0}{3} - \frac{x_0}{3}\cos p_{III}\,t \\ x_3 &= \frac{x_0}{3} + \frac{x_0}{2}\cos p_{II}\,t + \frac{x_0}{6}\cos p_{III}\,t \end{aligned}\right.,$$

где је
$$p_{II} = \sqrt{\frac{cg}{G}}\ \mathrm{sec}^{-1}; \qquad p_{III} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{cg}{G}}\ \mathrm{sec}^{-1}$$

12. ДВОЈНА КЛАТНА

Врло често системи разних облика осцилују било као двојно математичко клатно, било као двојно физичко клатно. Ради тога ћемо проучити и једно и друго.

а) Двојно математичко клатно



Сл. 132

Нека је у тачки O о конац дужине l_1 обешена материјална тачка масе m_1, а о њу о конац дужине l_2 материјална тачка масе m_2. Ако овај систем, односно двојно математичко клатно, изведемо из положаја равнотеже тако да конци дужине l_1 и l_2 у новом положају заклапају углове φ_1 и φ_2 са вертикалом, па га затим препустимо самом себи, оно ће почети да осцилује.

Нађимо диференцијалне једначине које описују ово кретање.

Радићемо помоћу Lagrange-евих једначина кретања. За генералисане координате узећемо углове φ_1 и φ_2, па ће ове бити

$$\left|\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_1} &= -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} &= -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_2} \end{aligned}\right. \qquad (a)$$

Кинетичка енергија система једнака је збиру кинетичких енергија материјалних тачака маса m_1 и m_2

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} = \frac{1}{2}(m_1 v_{c1}^2 + m_2 v_{c2}^2)$$

$$x_1 = l_1 \cos\varphi_1 \; ; \qquad y_1 = l_1 \sin\varphi_1 \; ;$$

$$\dot{x}_1 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 \; ; \qquad \dot{y}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 \; ,$$

$$v_{c1}^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2$$

$$x_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \; ; \qquad y_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \; ;$$

$$\dot{x}_2 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 \; ; \qquad \dot{y}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 \; ;$$

$$v_{c2}^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 (\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1) + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 (\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2) +$$
$$+ 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$
$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \approx 1,$$

па је
$$v_{c2}^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$$

Кинетичка енергија система, према томе, дата је изразом

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \qquad (b)$$

Потенцијална енергија система једнака је збиру потенцијалних енергија материјалних тачака.

$$E_p = E_{p1} + E_{p2}$$

$$E_{p1} = G_1 \delta_1 = m_1 g \delta_1 \; ; \qquad \delta_1 = l_1 (1 - \cos\varphi_1) \; ;$$

$$\cos\varphi_1 \approx 1 - \frac{\varphi_1^2}{2} \; ; \qquad \delta_1 \approx \frac{l_1}{2} \varphi_1^2 \; ;$$

$$E_{p1} = \frac{1}{2} m_1 g l_1 \varphi_1^2 \; ;$$

$$E_{p2} = G_2 (\delta_1 + \delta_2) = m_2 g (\delta_1 + \delta_2) \; ; \qquad \delta_2 \approx \frac{l_2}{2} \varphi_2^2$$

$$E_{p2} = \frac{1}{2} m_2 g (l_1 \varphi_1^2 + l_2 \varphi_2^2) \; ,$$

па је
$$E_p = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) g l_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \varphi_2^2 \qquad (c)$$

Диференцирањем израза (b) и (c) нађимо потребне чланове за једначине (a):

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \; ; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \; ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \; ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 ;$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_1} = 0 \; ; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_1} = (m_1 + m_2) l_1 g \varphi_1 \; ; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_2} = m_2 g l_2 \varphi_2$$

Уврштавањем у (a) и сређивањем добићемо диференцијалне једначина кретања

$$\left| \begin{array}{l} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 = 0 \\ l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0 \end{array} \right. \qquad (119)$$

Потражимо решење ових симултаних диференцијалних једначина у облику

$$\varphi_1 = \lambda_1 \cos pt \; ;$$

$$\varphi_2 = \lambda_2 \cos pt \; ,$$

па ћемо добити

$$-l_1 (m_1 + m_2) p^2 \lambda_1 - l_2 m_2 p^2 \lambda_2 + g (m_1 + m_2) \lambda_1 = 0$$
$$-l_1 p^2 \lambda_1 - l_2 p^2 \lambda_2 + g \lambda_2 = 0$$

, односно

$$\lambda_1 \Big[(m_1 + m_2)\,(g - l_1 p^2) \Big] - \lambda_2 m_2 l_2 p^2 = 0$$
$$-\lambda_1 l_1 p^2 + \lambda_2 (g - l_2 p^2) = 0 \qquad (120)$$

Фреквентна једначина гласи

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)\,(g - l_1 p^2) & -m_2 l_2 p^2 \\ -l_1 p^2 & g - l_2 p^2 \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

односно $\quad m_1 l_1 l_2 p^4 - (m_1 + m_2)\,(l_1 + l_2)\, g p^2 + (m_1 + m_2) g^2 = 0 \, ,$

или
$$p^4 - (1 + \mu)\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) g p^2 + (1 + \mu) \frac{1}{l_1} \frac{1}{l_2} g^2 = 0 \; , \qquad (121)$$

где је
$$\mu = \frac{m_2}{m_1} ,$$

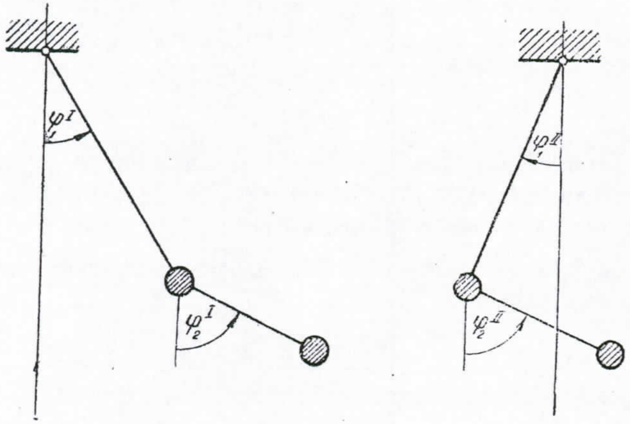
а њени корени су

$$p^2_{\mathrm{I,\,II}} = \frac{g\,(m_1+m_2)\,(l_1+l_2) \mp \sqrt{[g\,(l_1+l_2)\,(m_1+m_2)]^2 - 4\,l_1\,l_2\,m_1\,(m_1+m_2)\,g^2}}{2\,l_1\,l_2\,m_1}$$

Односе амплитуда наћићемо из једначина (120)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} &= \frac{g - l_1\,p^2_{\mathrm{I}}}{l_1\,p^2_{\mathrm{I}}} = \psi_1\;; \qquad \lambda_1^{\mathrm{I}} = \psi_1\,\lambda_2^{\mathrm{I}}\;; \qquad \psi_1 > 0 \\ \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} &= \frac{g - l_1\,p^2_{\mathrm{II}}}{l_1\,p^2_{\mathrm{II}}} = \psi_2\;; \qquad \lambda_1^{\mathrm{II}} = \psi_2\,\lambda_2^{\mathrm{II}}\;; \qquad \psi_2 < 0 \end{aligned} \qquad (122)$$

Главне форме осцилација приказане су на сл. 133.



Сл. 133

Решење диференцијалних једначина (119) биће

$$\varphi_1 = \lambda_1^{\mathrm{I}} \cos p_{\mathrm{I}}\, t + \lambda_1^{\mathrm{II}} \cos p_{\mathrm{II}}\, t$$

$$\varphi_2 = \lambda_2^{\mathrm{I}} \cos p_{\mathrm{I}}\, t + \lambda_2^{\mathrm{II}} \cos p_{\mathrm{II}}\, t$$

Произвољне константе одређују се из почетних услова кретања.

Испитајмо случајеве граничних односа маса m_1 и m_2.

Нека је $m_1 \gg m_2$, онда је $\mu = \frac{m_2}{m_1} \approx 0$, па једначина (121) прелази у

$$p^4 - \left(\frac{g}{l_1} + \frac{g}{l_2}\right) p^2 + \frac{g^2}{l_1 l_2} = 0$$

Одавде је

$$p^2_{\mathrm{I}} + p^2_{\mathrm{II}} = \frac{g}{l_1} + \frac{g}{l_2}\,;$$

$$p^2_{\mathrm{I}} \cdot p^2_{\mathrm{II}} = \frac{g^2}{l_1 l_2}\,,$$

па је

$$p^2_{\mathrm{I}} = \frac{g}{l_1}\,, \qquad p^2_{\mathrm{II}} = \frac{g}{l_2}\,, \qquad (123)$$

док су односи амплитуда у овом случају

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} \approx 0\;; \quad \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} = \frac{l_2 - l_1}{l_1}$$

Ако је $m_2 \gg m_1$ онда једначину (121) можемо написати у облику

$$p^4 - \left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) g p^2 + \left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)\frac{1}{l_1}\,\frac{1}{l_2}\, g^2 = 0$$

Како је $m_2 \gg m_1$, то је $m_1 + m_2 \approx m_2$, па горња једначина прелази у

$$p^4 - \mu\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) g p^2 + \mu\,\frac{g^2}{l_1 l_2} = 0\,,$$

одавде је $\quad p^2_{\mathrm{I}} + p^2_{\mathrm{II}} = \mu g\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)\;; \quad p^2_{\mathrm{I}} \cdot p^2_{\mathrm{II}} = \frac{\mu g^2}{l_1 l_2}\,,$

па је, као што се лако може доказати

$$p^2_{\mathrm{I}} \approx \mu g\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) \approx \frac{m_2}{m_1}\, g\left(\frac{l_1 + l_2}{l_1\, l_2}\right)$$

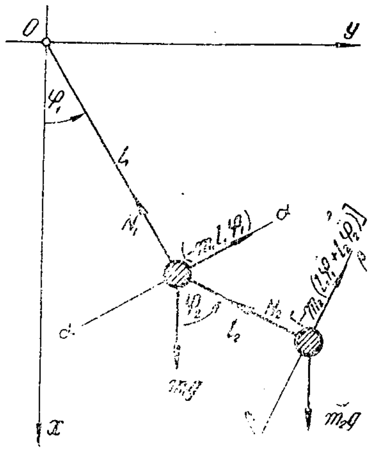
$$p^2_{\mathrm{II}} \approx \frac{g}{l_1 + l_2} \qquad (124)$$

Однос амплитуда у овом случају биће

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} = \frac{l_2}{\mu\,(l_1 + l_2)} - 1\;;$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} = \frac{l_2}{l_1}$$

Диференцијалне једначине кретања (119) можемо лако добити и помоћу d'Alembert-овог принципа.



Сл. 134

При кретању двојног математичког клатна делују следеће силе:

Тежине $m_1 g$ и $m_2 g$, силе у концима N_1 и N_2, и инерцијалне силе услед ротације, и то за материјалну тачку масе m_1

$$(-m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1),$$

а за материјалну тачку масе m_2

$$[-m_2 (l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2)]$$

Пројецирајмо све силе на тангенцијални правац $\alpha - \alpha$.

$$\Sigma T_{\alpha-\alpha} = -m_1 g \sin\varphi_1 + (-m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1) - m_2 g \sin\varphi_1 + N_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) +$$
$$+ [-m_2 (l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2)] \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

Како је $\sin\varphi_1 \approx \varphi_1$; $\sin\varphi_2 \approx \varphi_2$; $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \approx 1$,

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \approx 0$$

то одавде добијамо

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 = 0$$

Сума момената за тачку C_1 биће

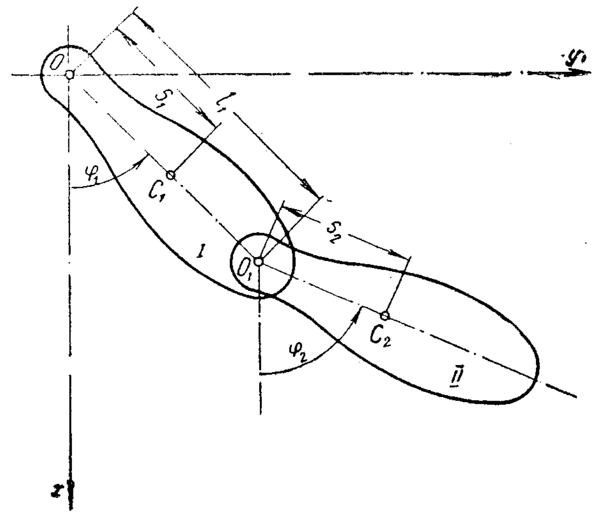
$$\Sigma M_{c1} = m_2 g l_2 \sin\varphi_2 - [-m_2 (l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2)] l_2 ,$$

одакле је
$$l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0$$

На тај начин добили смо исте диференцијалне једначине кретања (119) као и мало пре помоћу Lagrange-евих једначина.

b) Двојно физичко клатно

Нека је у тачки O обешено физичко клатно масе m_1 и нека је растојање његовог тежишта C_1 од тачке вешања s_1. Обесимо о ово физичко клатно у тачки O_1 друго физичко клатно масе m_2 и нека је растојање његовог тежишта C_2 од његове тачке вешања s_2. Растојање $\overline{OO_1}$ нека је l_1. Ако ово двојно физичко клатно изведемо из положаја равнотеже и затим га препустимо самом себи, оно ће почети да осцилује.



Сл. 135

Радићемо помоћу Lagrange-евих једначина кретања. За опште координате узећемо углове φ_1 и φ_2, који одређују положај двојног физичког клатна у било ком тренутку.

Кинетичка енергија система биће једнака збиру кинетичких енергија физичких клатна

$$E_k = E_{k1} + E_{k2}$$

Ако са J_0 обележимо моменат инерције првог тела за тачку 0 биће

$$E_{k1} = \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}_1^2$$

На основи König-ове теореме о кинетичкој енергији система материјалних тачака биће

$$E_{k2} = \frac{1}{2} J_{c2} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{c2}^2 ,$$

где смо са J_{c2} обележили моменат инерције другог тела за тежиште C_2

$$v_{c2}^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + s_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 s_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 ,$$

па је
$$E_{k2} = \frac{1}{2}\left(J_{c2} + m_2 s_2^2\right)\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2 l_1 s_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2\right),$$

односно
$$E_k = \frac{1}{2}\left(J_0 + m_2 l_1^2\right)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\left(J_{c2} + m_2 s_2^2\right)\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 s_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \qquad (a)$$

Потенцијална енергија система једнака је збиру потенцијалних енергија физичких клатна

$$E_p = E_{p1} + E_{p2}$$

$$E_{p1} = G_1 \delta_1 \; ; \qquad \delta_1 \approx \frac{1}{2} s_1 \varphi_1^2 \; ; \qquad E_{p1} \approx \frac{1}{2} m_1 g s_1 \varphi_1^2 \; ;$$

$$E_{p2} = G_2 (\delta_1' + \delta_2) \; ; \qquad \delta'_1 \approx \frac{1}{2} l_1 \varphi_1^2 \; ; \qquad \delta_2 \approx \frac{1}{2} s_2 \varphi_2^2 \; ;$$

$$E_{p2} = \frac{1}{2} m_2 g \, (l_1 \varphi_1^2 + s_2 \varphi_2^2) \, ,$$

па је

$$E_p = \frac{1}{2} \left[g \, (m_1 s_1 + m_2 l_1) \, \varphi_1^2 + m_2 g s_2 \varphi_2^2 \right] \qquad (b)$$

Диференцирањем израза (*a*) и (*b*) нађимо потребне чланове за Lagrange-еве једначине кретања

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = (J_0 + m_2 l_1^2) \, \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 s_2 \ddot{\varphi}_2 \; ;$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_1} = 0 \; ; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_1} = g \, (m_1 s_1 + m_2 l_1) \, \varphi_1 \; ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = (J_{c2} + m_2 s_2^2) \, \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 s_2 \ddot{\varphi}_1 \; ;$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} = 0 \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_2} = m_2 g s_2 \varphi_2$$

Диференцијалне једначине кретања, према томе, су

$$\begin{aligned} &(J_0 + m_2 l_1^2) \, \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 s_2 \ddot{\varphi}_2 + g \, (m_1 s_1 + m_2 l_1) \, \varphi_1 = 0 \\ &m_2 l_1 s_2 \ddot{\varphi}_1 + (J_{c2} + m_2 s_2^2) \, \ddot{\varphi}_2 + m_2 g s_2 \varphi_2 = 0 \end{aligned} \qquad (125)$$

Обележимо са

$$a = J_0 + m_2 l_1^2$$

$$b = m_2 l_1 s_2$$

$$c = g \, (m_1 s_1 + m_2 l_1)$$

$$d = J_{c2} + m_2 s_2^2$$

$$e = m_2 g s_2 \, ,$$

па једначине (125) прелазе онда у

$$\begin{aligned} a \ddot{\varphi}_1 + b \ddot{\varphi}_2 + c \varphi_1 = 0 \\ b \ddot{\varphi}_1 + d \ddot{\varphi}_2 + e \varphi_2 = 0 \end{aligned}$$

Потражимо решење ових симултаних диференцијалних једначина у облику

$$\varphi_1 = \lambda_1 \cos pt$$

$$\varphi_2 = \lambda_2 \cos pt \, ,$$

па ћемо добити

$$\begin{aligned} \lambda_1 (c - ap^2) - \lambda_2 b p^2 = 0 \\ - bp^2 \lambda_1 + \lambda_2 (e - bp^2) = 0 \end{aligned} \qquad (126)$$

Фреквентна једначина биће

$$\begin{vmatrix} c - ap^2 & - bp^2 \\ - bp^2 & e - dp^2 \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

или

$$(c - ap^2) \, (e - dp^2) - b^2 p^4 = 0 \, ,$$

односно

$$[m_1 g s_1 + m_2 g l_1 - (J_0 + m_2 l_1^2) \, p^2] \, [m_2 g s_2 - (J_{c2} + m_2 s_2^2) \, p^2] - \\ - m_2^2 l_1^2 s_2^2 p^4 = 0 \qquad (127)$$

Обележимо са

$$n_1^2 = \frac{c}{a} = \frac{m_1 g s_1 + m_2 g l_1}{J_0 + m_2 l_1^2} \; ; \qquad n_2^2 = \frac{e}{d} = \frac{m_2 g s_2}{J_{c2} + m_2 s_2^2}$$

$$\varkappa^2 = \frac{b^2}{ad} = \frac{m_2 l_1^2 s_2^2}{(J_0 + m_2 l_1^2)(J_{c2} + m_2 s_2^2)}$$

Развијањем горње фреквентне једначине добијамо

$$p^4 (ad - b^2) - p^2 (ae + cd) + ce = 0 \, ,$$

или

$$p^4 \left(1 - \frac{b^2}{ad}\right) - p^2 \left(\frac{e}{d} + \frac{c}{a}\right) + \frac{ce}{ad} = 0 \, ,$$

односно

$$p^4 (1 - \varkappa^2) - (n_1^2 + n_2^2) \, p^2 + n_1^2 n_2^2 = 0 \qquad (128)$$

Корени једначине (128) су

$$\begin{aligned} p^2_{\mathrm{I}} &= \frac{1}{2 \, (1 - \varkappa^2)} \left[n_1^2 + n_2^2 - \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4 \varkappa^2 n_1^2 n_2^2} \right] \\ p^2_{\mathrm{II}} &= \frac{1}{2 \, (1 - \varkappa^2)} \left[n_1^2 + n_2^2 + \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4 \varkappa^2 n_1^2 n_2^2} \right] \end{aligned} \qquad (129)$$

Величине n_1 и n_2 имају и своје физичко значење: n_1 — претставља кружну фреквенцију слободних осцилација система у случају када се други физичко клатно може сматрати за материјалну тачку чија је маса концентрисана у тачки O_1,

n_2 — претставља кружну фреквенцију слободних осцилација другог физичког клатна у случају да је тачка вешања O_1 непокретна.

Односе амплитуда наћићемо из једначина (126)

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{bp^2}{c-ap^2}=\frac{b}{a}\,\frac{p^2}{\frac{c}{a}-p^2}=\frac{b}{a}\cdot\frac{p^2}{n_1^2-p^2},$$

па је

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}}=\frac{b}{a}\,\frac{p_{\mathrm{I}}^2}{n_1^2-p_{\mathrm{I}}^2}=\psi_1\ ;\qquad \lambda_1^{\mathrm{I}}=\psi_1\,\lambda_2^{\mathrm{I}} \tag{130}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}}=\frac{b}{a}\,\frac{p_{\mathrm{II}}^2}{n_1^2-p_{\mathrm{II}}^2}=\psi_2\ ;\qquad \lambda_1^{\mathrm{II}}=\psi_2\lambda_2^{\mathrm{II}}$$

$$\psi_1>0\ ;\qquad \psi_2<0$$

Исто тако је и

$$n_i^2>p_{\mathrm{I}}^2$$

$$p_{\mathrm{II}}^2>n_i^2 \qquad (i=1,2)$$

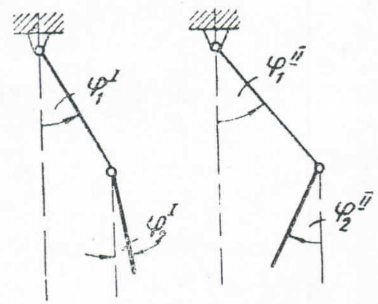
Главни типови осцилација претстављени су сликом 136.

Решење симултаних диференцијалних једначина (125) има облик

$$\varphi_1=\lambda_1^{\mathrm{I}}\cos p_{\mathrm{I}}\,t+\lambda_1^{\mathrm{II}}\cos p_{\mathrm{II}}\,t$$

$$\varphi_2=\lambda_2^{\mathrm{I}}\cos p_{\mathrm{I}}\,t+\lambda_2^{\mathrm{II}}\cos p_{\mathrm{II}}\,t$$

Произвољне константе одређују се из почетних услова кретања.



Сл. 136

Диференцијалне једначине кретања двојног физичког клатна (125) могу се извести и помоћу d'Alembert-овог принципа.

Посматраћемо кретање сваког клатна посебно. Утицај другог клатна на прво заменићемо реакцијом F, односно њеним компонентама X и Y, тако да при кретању првог клатна на њега делују:

тежина $G_1 = m_1 g$,

компоненте реакције X и Y

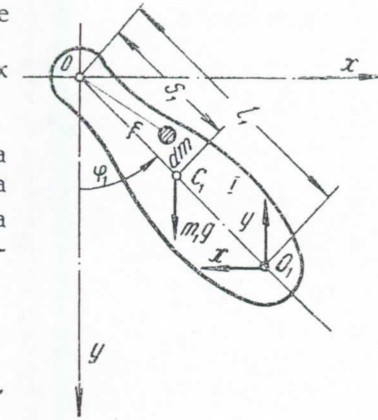
и инерцијалне силе услед ротације

Нађимо суму момената свих сила за тачку вешања 0.

Моменат инерцијалних сила услед ротације за тачку вешања 0 је $J_0\ddot{\varphi}_1$, јер ако је елементарна инерцијална сила која припада елементарној маси dm

$$dF=(-\,dm\cdot\xi\,\ddot{\varphi}_1)\ ,$$

онда ће моменат свих инерцијалних сила за тачку 0 бити



Сл. 137

$$M=-\int_M \xi\cdot dF=-\int_M\left(-\,\xi^2\,\ddot{\varphi}_1\,dm\right)=\ddot{\varphi}_1\int_M \xi^2\,dm=J_0\,\ddot{\varphi}_1$$

Према томе је

$$\Sigma M_0=J_0\,\ddot{\varphi}_1+m_1 g s_1\sin\varphi_1+Xl_1\cos\varphi_1-Yl_1\sin\varphi_1=0$$

У овој једначини непознате су нам компоненте реакције X и Y. Њих ћемо наћи из статичких услова $\Sigma X=0$ и $\Sigma Y=0$ посматрајући кретање другог физичког клатна. Компоненте X и Y имају сада супротан смер. При кретању другог клатна на њега делују

тежина $G_2=m_2 g$,

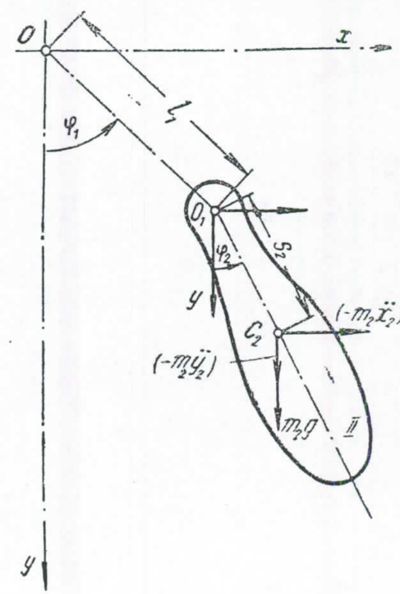
компоненте реакције X и Y

и инерцијалне силе услед ротације.

Ако је цела маса клатна концентрисана у тежишту C_2, онда су компоненте резултујуће силе инерције (закон кретања средишта)

$$(-\,m_2\ddot{x}_2)\quad \text{и}$$

$$(-\,m_2\ddot{y}_2)$$



Сл. 138

Према томе је

$$\Sigma X=X+(-\,m\ddot{x}_2)=0$$

$$\Sigma Y=Y+(-\,m_2\ddot{y}_2)+G_2=0$$

$$x_2=l_1\sin\varphi_1+s_2\sin\varphi_2$$

$$y_2=l_1\cos\varphi_1+s_2\cos\varphi_2$$

$$\ddot{x}_2 = l_1\ddot{\varphi}_1\cos\varphi_1 - l_1\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1 + s_2\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2 - s_2\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2$$

$$\ddot{y}_2 = -l_1\ddot{\varphi}_1\sin\varphi_1 - l_1\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1 - s_2\ddot{\varphi}_2\sin\varphi_2 - s_2\dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2$$

$$\cos\varphi_1 \approx 1 \qquad \sin\varphi_1 \approx \varphi_1$$

$$\cos\varphi_2 \approx 1 \qquad \sin\varphi_2 \approx \varphi_2$$

Занемарујући мале величине вишег реда од првог добијамо да је

$$\ddot{x}_2 \approx l_1\ddot{\varphi}_1 + s_2\ddot{\varphi}_2$$

$$\ddot{y}_2 \approx 0 \quad ,$$

па је

$$X = m_2\ddot{x}_2 \approx m_2(l_1\ddot{\varphi}_1 + s_2\varphi_2)$$

$$Y = -G_2 = -m_2 g$$

На тај начин моментна једначина за тачку 0 прелази у

$$J_0\ddot{\varphi}_1 + m_1 g s_1\varphi_1 + m_2(l_1\ddot{\varphi}_1 + s_2\ddot{\varphi}_2)l_1 + m_2 g l_1\varphi_1 = 0$$

Нађимо суму момената сила које делују на друго клатно за тачку C_2. Моменат инерцијалних сила ротације за тачку C_2 биће $J_{c2}\ddot{\varphi}_2$, па је

$$\Sigma M_{c2} = J_{c2}\ddot{\varphi}_2 + Xs_2\cos\varphi_2 - Ys_2\sin\varphi_2 = 0 \quad ,$$

$$J_{c2}\ddot{\varphi}_2 + m_2(l_1\ddot{\varphi}_1 + s_2\ddot{\varphi}_2)s_2 + m_2 g s_2\varphi_2 = 0$$

На тај начин добили смо опет диференцијалне једначине кретања (125).

Примери

134.) За двојно математичко клатно код кога је $l_1 = l_2 = l$ и $m_1 = m_2 = m$, одредити кружне фреквенције малих слободних осцилација система у вертикалној равни око равнотежног положаја и односе амплитуда главних осцилација система.

За наше услове пошто је $\mu = \frac{m_2}{m_1} = 1$, једначина (121) прелази у

$$p^4 - \frac{4g}{l}p^2 + \frac{2g^2}{l^2} = 0 \quad ,$$

одакле је

$$p^2_{\mathrm{I}} = \frac{g}{l}\left(2 - \sqrt{2}\right) \quad ; \quad p^2_{\mathrm{II}} = \frac{g}{l}\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

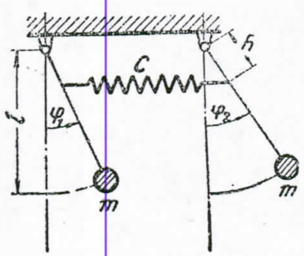
Пошто је

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{g - lp^2}{lp^2} \quad ,$$

то је

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

135.) Два једнака математичка клатна дужине l и масе m, везана су на висини h еластичном опругом крутости c. Одредити мале осцилације система у равни равнотежног положаја клатна, ако је у почетном тренутку једно од клатна отклоњено за угао φ_0 из равнотежног положаја. Почетне брзине клатна једнаке су нули. Масе полуга клатна и масу опруге занемарити.



Сл. 159

Претпоставимо да је $\varphi_2 > \varphi_1$. Знамо да је

$$J_1\ddot{\varphi}_1 = -M_1$$

$$J_2\ddot{\varphi}_2 = -M_2$$

Реституциона сила у опрузи је

$$F_R = c\delta \;; \qquad \delta \approx (\varphi_2 - \varphi_1)\,h \;,$$

па је

$$F_R = c(\varphi_2 - \varphi_1)\,h \;,$$

онда је

$$M_1 = -mgl\sin\varphi_1 + F_R\cdot h \;; \qquad \sin\varphi_1 \approx \varphi_1 \;;$$

$$M_2 = -mgl\sin\varphi_2 - F_R\cdot h \;; \qquad \sin\varphi_2 \approx \varphi_2 \;,$$

па је

$$M_1 = -mgl\varphi_1 + c(\varphi_2 - \varphi_1)h^2$$

$$M_2 = -mgl\varphi_2 - c(\varphi_2 - \varphi_1)h^2 \;; \quad J_1 = J_2 = ml^2 \;,$$

па су диференцијалне једначине кретања

$$ml^2\ddot{\varphi}_1 + mgl\varphi_1 - c(\varphi_2 - \varphi_1)h^2 = 0$$

$$ml^2\ddot{\varphi}_2 + mgl\varphi_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1)h^2 = 0$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$\varphi_1 = \lambda_1\sin(pt + \alpha_1)$$

$$\varphi_2 = \lambda_2\sin(pt + \alpha_2) \;,$$

долазимо до једначина

$$\lambda_1(mgl + ch^2 - ml^2p^2) - \lambda_2 ch^2 = 0$$

$$-\lambda_1 ch^2 + \lambda_2(mgl + ch^2 - ml^2p^2) = 0 \;,$$

па је фреквентна једначина

$$\begin{vmatrix} mgl + ch^2 - ml^2p^2 & -ch^2 \\ -ch^2 & mgl + ch^2 - ml^2p^2 \end{vmatrix} = 0 \;,$$

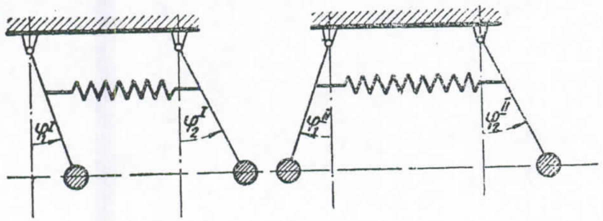
односно
$$(mgl + ch^2 - ml^2 p^2)^2 = (ch^2)^2$$
$$mgl + ch^2 - ml^2 p^2 = \mp ch^2 ,$$

одакле је
$$p^2_{\mathrm{I}} = \frac{g}{l} \; ; \qquad p_{\mathrm{II}}^2 = \frac{g}{l} + \frac{2\, ch^2}{ml^2}$$

Односи амплитуда су
$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} = \frac{ch^2}{mgl + ch^2 - ml^2 p^2_{\mathrm{I}}} \; ; \qquad \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} = \frac{ch^2}{mgl + ch^2 - ml^2 p^2_{\mathrm{II}}} ,$$

одакле за нађене вредности p^2_{I} и p^2_{II} добијамо
$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} = 1 \; ; \qquad \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} = -1 ,$$

па су главне форме осцилација дате сликом (140).



Сл. 140

Решење диференцијалних једначина имаће облик
$$\varphi_1 = \lambda_1^{\mathrm{I}} \sin (p_{\mathrm{I}}\, t + \alpha_1) + \lambda_1^{\mathrm{II}} \sin (p_{\mathrm{II}}\, t + \alpha_2)$$
$$\varphi_2 = \lambda_2^{\mathrm{I}} \sin (p_{\mathrm{I}}\, t + \alpha_1) + \lambda_2^{\mathrm{II}} \sin (p_{\mathrm{II}}\, t + \alpha_2)$$

Почетни услови су за $t = 0$ $\qquad \varphi_1 = \varphi_0 ; \quad \dot{\varphi}_1 = 0$
$$\varphi_2 = 0 ; \quad \dot{\varphi}_2 = 0 ,$$

и пошто је
$$\lambda_1^{\mathrm{I}} = \lambda_2^{\mathrm{I}}$$
$$\lambda_1^{\mathrm{II}} = -\lambda_2^{\mathrm{II}}$$

добијамо
$$\varphi_0 = \lambda_1^{\mathrm{I}} \sin \alpha_1 + \lambda_1^{\mathrm{II}} \sin \alpha_2$$
$$0 = \lambda_1^{\mathrm{I}} \sin \alpha_1 - \lambda_1^{\mathrm{II}} \sin \alpha_2 ,$$

односно
$$\lambda_1^{\mathrm{I}} \sin \alpha_1 = \lambda_1^{\mathrm{II}} \sin \alpha_2$$
$$\varphi_0 = 2 \lambda_1^{\mathrm{I}} \sin \alpha_1 \; ; \qquad \lambda_1^{\mathrm{II}} = \lambda_1^{\mathrm{I}} \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} ,$$

$$\lambda_1^{\mathrm{I}} = \frac{\varphi_0}{2 \sin \alpha_1} \; ; \qquad \lambda_1^{\mathrm{II}} = \frac{\varphi_0}{2 \sin \alpha_2} ,$$

па је
$$\dot{\varphi}_1 = \lambda_1^{\mathrm{I}}\, p_{\mathrm{I}} \cos \alpha_1 + \lambda_1^{\mathrm{II}}\, p_{\mathrm{II}} \cos \alpha_2 = 0$$
$$\dot{\varphi}_2 = \lambda_1^{\mathrm{I}}\, p_{\mathrm{I}} \cos \alpha_1 - \lambda_1^{\mathrm{II}}\, p_{\mathrm{II}} \cos \alpha_2 = 0$$

Сабирањем ових једначина добијамо
$$2 \lambda_1^{\mathrm{I}}\, p_{\mathrm{I}} \cos \alpha_1 = 0 ,$$

Пошто је $\qquad p_{\mathrm{I}} \neq 0 \quad$ и $\quad \lambda_1^{\mathrm{I}} \neq 0 ,$

мора да буде $\qquad \cos \alpha_1 = 0 = \cos \frac{\pi}{2} , \qquad$ па је $\quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$

Онда је и $\qquad \lambda_1^{\mathrm{II}} p_{\mathrm{II}} \cos \alpha_2 = 0 , \qquad$ па је и $\quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

Према томе је $\qquad \lambda_1^{\mathrm{I}} = \lambda_1^{\mathrm{II}} = \frac{\varphi_0}{2} , \qquad$ па је

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2} \left[\sin\left(p_{\mathrm{I}}\, t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(p_{\mathrm{II}}\, t + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$
$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2} \left[\sin\left(p_{\mathrm{I}}\, t + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(p_{\mathrm{II}}\, t + \frac{\pi}{2}\right) \right] , \qquad \text{односно}$$

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2} \left(\cos p_{\mathrm{I}}\, t + \cos p_{\mathrm{II}}\, t \right)$$
$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2} \left(\cos p_{\mathrm{I}}\, t - \cos p_{\mathrm{II}}\, t \right)$$

Пошто је
$$\cos p_{\mathrm{I}}\, t + \cos p_{\mathrm{II}}\, t = 2 \cos \frac{p_{\mathrm{I}} + p_{\mathrm{II}}}{2}\, t \cos \frac{p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}}}{2}\, t$$
$$\cos p_{\mathrm{I}}\, t - \cos p_{\mathrm{II}}\, t = 2 \sin \frac{p_{\mathrm{I}} + p_{\mathrm{II}}}{2}\, t \sin \frac{p_{\mathrm{II}} - p_{\mathrm{I}}}{2}\, t ,$$

то је
$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos \frac{p_{\mathrm{I}} + p_{\mathrm{II}}}{2}\, t \cos \frac{p_{\mathrm{II}} - p_{\mathrm{I}}}{2}\, t$$
$$\varphi_2 = \varphi_0 \sin \frac{p_{\mathrm{I}} + p_{\mathrm{II}}}{2}\, t \sin \frac{p_{\mathrm{II}} - p_{\mathrm{I}}}{2}\, t$$

Напомена: Диференцијалне једначине кретања можемо поставити и помоћу Lagrange-евих једначина кретања узимајући за генералисане координате углове φ_1 и φ_2. Изрази за кинетичку и потенцијалну енергију система били би

$$E_k = \frac{1}{2}\, ml\,(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left[mgl\,(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + ch^2\,(\varphi_2 - \varphi_1)^2\right]$$

Диференцирањем ових израза добијамо исте диференцијалне једначине кретања као и мало пре.

136.) Два једнака физичка клатна обешена су о хоризонталне осовине, које леже у једној равни и везана су еластичном опругом чија је дужина у ненапрегнутом стању равна растојању између осовина клатна. Тежина сваког од клатна износи $G = 0{,}45$ kg; моменат инерције сваког клатна у односу на осу вешања износи $J = 0{,}664$ kgcmsec²; растојање тежишта клатна од осовине вешања је $a = 34{,}2$ cm; растојање тачке у којој је учвршћена опруга за полуге клатна од осовина вешања износи $h_1 = h_2 = 34{,}2$ cm; крутост опруге је $c = 0{,}004$ kg/cm. Одредити кружне фреквенције главних осцилација датог система и одговарајуће односе амплитуда.

Диференцијалне једначине кретања су

$$J\ddot{\varphi}_1 = -M_1\ ; \qquad M_1 = Ga\,\varphi_1 - ca^2\,(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$J\ddot{\varphi}_2 = -M_2\ ; \qquad M_2 = Ga\,\varphi_2 + ca^2\,(\varphi_2 - \varphi_1)$$

па је

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{a}{J}\,(G + ca)\,\varphi_1 - \frac{ca^2}{J}\,\varphi_2 = 0$$

$$\ddot{\varphi}_2 - \frac{ca^2}{J}\,\varphi_1 + \frac{a}{J}\,(G + ca)\,\varphi_2 = 0$$

Ако потражимо решење ових једначину у облику

$$\varphi_1 = \lambda_1 \cos pt$$

$$\varphi_2 = \lambda_2 \cos pt\ ,$$

долазимо до једначина

$$\lambda_1\left[\frac{a}{J}\,(G + ca) - p^2\right] - \lambda_2\,\frac{ca^2}{J} = 0$$

$$-\lambda_1\,\frac{ca^2}{J} + \lambda_2\left[\frac{a}{J}\,(G + ca) - p^2\right] = 0\ ,$$

па је фреквентна једначина

$$\begin{vmatrix} a\,(G + ca) - Jp^2 & -ca^2 \\ -ca^2 & a\,(G + ca) - Jp^2 \end{vmatrix} = 0$$

Одавде је $\qquad a\,(G + ca) - Jp^2 = \mp\, ca^2\ ,$

односно

$$p_I^2 = \frac{aG}{J} \quad \text{и} \quad p_{II}^2 = \frac{a}{J}\,(G + 2\,ac)$$

$$p_I^2 = \frac{34{,}2 \cdot 0{,}45}{0{,}664} = 23{,}17\ \text{sec}^{-2}\ ; \qquad p_I = 4{,}8\ \text{sec}^{-1}$$

$$p_{II} = \frac{34{,}2}{0{,}664}\,(0{,}45 + 2 \cdot 0{,}004 \cdot 34{,}2) = 37{,}2\ \text{sec}^{-2}\ ; \quad p_{II} = 6{,}1\ \text{sec}^{-1}$$

Пошто је

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a\,(G + ac) - Jp^2}{ca^2}\ ;$$

то за нађене вредности $\quad p_I^2 \quad$ и $\quad p_{II}^2$

добијамо

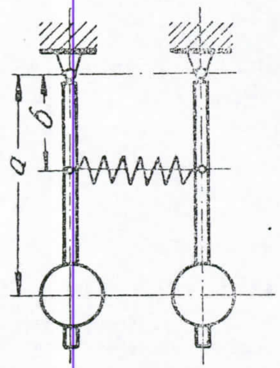
$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{I} = 1\ ; \qquad \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{II} = -1$$

Напомена: Ако радимо помоћу Lagrange-евих једначина кретања, онда је

$$E_k = \frac{1}{2}\, J\,(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left[Ga\,(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + ca^2\,(\varphi_2 - \varphi_1)^2\right]$$

137.) Два једнака физичка клатна обешена су о паралелне хоризонталне осовине, обе постављене у једној равни и везана еластичном опругом, чија је дужина у ненапрегнутом стању равна растојању између осовина клатна. Занемарујући отпоре при кретању и масу опруге, одредити кружне фреквенције и односе амплитуда главних осцилација система при малим угловима осциловања око равнотежног положаја. Тежина сваког од клатна износи G. Полупречник инерције сваког клатна у односу на тежишну осу паралелну оси вешања износи i; крутост опруге је c, а растојања тежишта клатна и растојање тачке у којој је учвршћена опруга од осе вешања, износе a, односно b.



Сл. 141

Диференцијалне једначине кретања, слично као и у претходном задатку, биће

$$J\ddot{\varphi}_1 + Ga\,\varphi_1 - cb^2\,(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

$$J\ddot{\varphi}_2 + Ga\,\varphi_2 + cb^2\,(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$\varphi_1 = \lambda_1 \cos pt$$
$$\varphi_2 = \lambda_2 \cos pt\,,$$

долазимо до једначина

$$\lambda_1 (Ga + cb^2 - Jp^2) - \lambda_2\, cb^2 = 0$$
$$- \lambda_1\, cb^2 + \lambda_2 (Ga + cb^2 - Jp^2) = 0\,,$$

па је фреквентна једначина

$$\begin{vmatrix} Ga + cb^2 - Jp^2 & - cb^2 \\ - cb^2 & Ga + cb^2 - Jp^2 \end{vmatrix} = 0$$

Одавде је $\quad Ga + cb^2 - Jp^2 = \mp\, cb^2\,,$

па је $\quad p_{\mathrm{I}}^2 = \dfrac{aG}{J}\,; \quad p_{\mathrm{II}}^2 = \dfrac{1}{J}(Ga + 2\,cb^2)$

По Steiner-овој теореми је

$$J = J_c + Ma^2\,; \qquad J_c = Mi^2\,,$$

па је $\quad J = M\,(i^2 + a^2)$

Онда је $\quad p_{\mathrm{I}}^2 = \dfrac{ag}{i^2 + a^2}\,; \quad p_{\mathrm{II}}^2 = \dfrac{Ga + 2\,cb^2}{M(i^2 + a^2)} = \dfrac{(Ga + 2\,cb^2)\,g}{G\,(i^2 + a^2)}$

Пошто је

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{Ga + cb^2 - Jp^2}{cb^2}\,,$$

то за нађене вредности за p_{I}^2 и p_{II}^2 добијамо

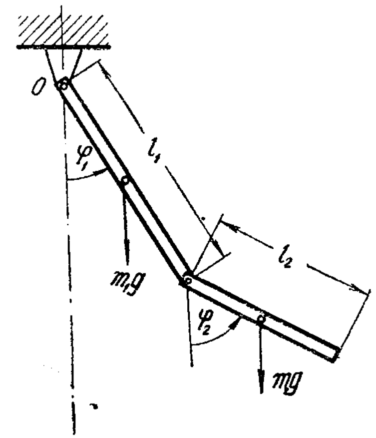
$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} = 1\,; \qquad \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} = -1$$

Ако радимо помоћу Lagrange-евих једначина кретања онда је

$$E_k = \frac{1}{2}\, J\,(\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2)$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left[Ga\,(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + cb^2\,(\varphi_2 - \varphi_1)^2\right]$$

138.) Одредити фреквентну једначину за двојно физичко клатно које се састоји из два хомогена танка штапа чије су масе m_1 и m_2, дужине l_1 и l_2, а која су везана шарниром A тако да могу под утицајем своје тежине осциловати у вертикалној равни.



Сл. 142

Пошто је у овом случају

$$s_1 = \frac{l_1}{2} \quad \text{и} \quad s_2 = \frac{l_2}{2}$$

$$J_0 = \frac{1}{3}\, m_1\, l_1^2 \quad \text{и} \quad J_{c2} = \frac{1}{12}\, m_2\, l_2^2$$

онда ће, имајући у виду једначине (125), диференцијалне једначине кретања бити

$$\left(\frac{1}{3}\, m_1\, l_1^2 + m_2\, l_1^2\right)\ddot\varphi_1 + m_2\, l_1 \frac{l_2}{2}\,\ddot\varphi_2 + g\left(m_1 \frac{l_1}{2} + m_2\, l_1\right)\varphi_1 = 0$$

$$m_2 \frac{l_2}{2}\, l_1 \ddot\varphi_1 + \left(\frac{1}{12}\, m_2 l_2^2 + m_2 \frac{l_2^2}{4}\right)\ddot\varphi_2 + m_2\, g\, \frac{l_2}{2}\, \varphi_2 = 0\,,$$

односно

$$l_1\left(\frac{1}{3}\, m_1 + m_2\right)\ddot\varphi_1 + \frac{1}{2}\, m_2\, l_2\, \ddot\varphi_2 + g\left(\frac{1}{2}\, m_1 + m_2\right)\varphi_1 = 0$$
$$\frac{1}{2}\, l_1 \ddot\varphi_1 + \frac{1}{3}\, l_2 \ddot\varphi_2 + \frac{1}{2}\, g\varphi_2 = 0$$

Ако обележимо са $\mu = \dfrac{m_2}{m_1}$, ове се једначине могу написати у облику

$$l_1\left(\frac{1}{3} + \mu\right)\ddot\varphi_1 + \frac{1}{2}\,\mu\, l_2 \ddot\varphi_2 + g\left(\frac{1}{2} + \mu\right)\varphi_1 = 0$$
$$\frac{1}{2}\, l_1 \ddot\varphi_1 + \frac{1}{3}\, l_2\, \ddot\varphi_2 + \frac{1}{2}\, g\,\varphi_2 = 0$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$\varphi_1 = \lambda_1 \cos pt$$
$$\varphi_2 = \lambda_2 \cos pt\,,$$

долазимо до једначина

$$\begin{aligned} &\lambda_1\left[g\left(\frac{1}{2}+\mu\right)-l_1\left(\frac{1}{3}+\mu\right)p^2\right] - \lambda_2\,\frac{1}{2}\,\mu\, l_2\, p^2 = 0 \\ &-\lambda_1 \frac{1}{2}\, l_1\, p^2 + \lambda_2\left(\frac{1}{2}\,g - \frac{1}{3}\, l_2\, p^2\right) = 0 \end{aligned}$$

Фреквентна једначина гласи

$$\begin{vmatrix} \left[g\left(\frac{1}{2}+\mu\right)-l_1\left(\frac{1}{3}+\mu\right)p^2\right] & -\frac{1}{2}\,\mu\, l_2\, p^2 \\ -\frac{1}{2}\, l_1\, p^2 & \left(\frac{1}{2}\,g - \frac{1}{3}\, l_2\, p^2\right) \end{vmatrix} = 0,$$

односно $\left[g\left(\frac{1}{2}+\mu\right)-l_1\left(\frac{1}{3}+\mu\right)p^2\right]\left(\frac{1}{2}\,g-\frac{1}{3}\,l_2\,p^2\right)-\frac{1}{4}\,\mu\, l_1\, l_2\, p^4 = 0$,

што кад се развије и среди даје

$$p^4(4+3\mu) - 6\,g\left(\frac{1+3\mu}{l_2}+\frac{1+2\mu}{l_1}\right)p^2 + \frac{9\,g^2(1+2\mu)}{l_1\, l_2} = 0$$

139.) Одредити кружне фреквенције осцилација система описаног у претходном задатку под условом да је $m_1 = m_2 = m$ и $l_1 = l_2 = l$.

Пошто је $\mu = 1$, диференцијалне једначине кретања биће

$$\begin{aligned} &\frac{4}{3}\,\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}\,\ddot{\varphi}_2 + \frac{3}{2}\,\frac{g}{l}\,\varphi_1 = 0 \\ &\frac{1}{2}\,\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{3}\,\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\,\frac{g}{l}\,\varphi_2 = 0 \end{aligned},$$

а фреквентна једначина биће

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3}p^2 - \frac{3}{2}\,\frac{g}{l} & \frac{1}{2}\,p^2 \\ \frac{1}{2}\,p^2 & \frac{1}{3}\,p^2 - \frac{1}{2}\,\frac{g}{l} \end{vmatrix} = 0,$$

односно

$$p^4 - 6\left(\frac{g}{l}\right)p^2 + \frac{27}{7}\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0$$

Одавде је

$$p_{\mathrm{I,II}}^2 = \left(3 \mp \frac{6\sqrt{7}}{7}\right)\frac{g}{l},$$

односно

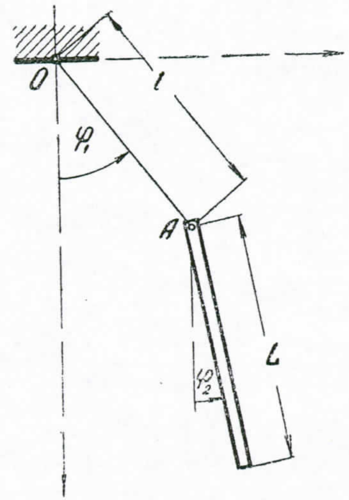
$$p_{\mathrm{I}}^2 = 0{,}7323\,\frac{g}{l}\,\sec^{-2}; \qquad p_{\mathrm{II}}^2 = 5{,}2677\,\frac{g}{l}\,\sec^{-2}$$

$$p_{\mathrm{I}} = 0{,}86\sqrt{\frac{g}{l}}\,\sec^{-1}; \qquad p_{\mathrm{II}} = 2{,}30\sqrt{\frac{g}{l}}\,\sec^{-1}$$

140.) Хомоген штап дужине L обешен је помоћу конца дужине $l = 0{,}5\,L$ у непомичној тачки. Занемарујући масу конца одредити кружне фреквенције главних осцилација система и наћи однос удаљења штапа и конца од вертикале при првом и другом виду главних осцилација.

Имајући у виду једначине (125), пошто је у овом случају

$$\begin{aligned} m_1 &= 0; & m_2 &= m \\ J_0 &= 0; & L &= 2l \\ l_1 &= l; & s_2 &= \frac{L}{2} \\ l_2 &= L; & s_1 &= \frac{l}{2}, \end{aligned}$$



Сл. 143

диференцијалне једначине кретања биће

$$\begin{aligned} &ml^2\,\ddot{\varphi}_1 + ml\,\frac{L}{2}\,\ddot{\varphi}_2 + gml\,\varphi_1 = 0 \\ &ml\,\frac{L}{2}\,\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{3}\,mL^2\,\ddot{\varphi}_2 + mg\,\frac{L}{2}\,\varphi_2 = 0 \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\,\varphi_1 = 0 \\ &\ddot{\varphi}_1 + \frac{4}{3}\,\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\,\varphi_2 = 0 \end{aligned}$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$\varphi_1 = \lambda_1 \cos pt$$
$$\varphi_2 = \lambda_2 \cos pt,$$

долазимо до једначина

$$\begin{aligned} &\lambda_1\left(\frac{g}{l} - p^2\right) - \lambda_2\, p^2 = 0 \\ &-\lambda_1\, p^2 + \lambda_2\left(\frac{g}{l} - \frac{4}{3}\,p^2\right) = 0 \end{aligned}$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} \dfrac{g}{l} - p^2 & -p^2 \\ -p^2 & \dfrac{g}{l} - \dfrac{4}{3}p^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

односно
$$\left(\frac{g}{l} - p^2\right)\left(\frac{g}{l} - \frac{4}{3}p^2\right) - p^4 = 0\,,$$

одакле је
$$p^4 - 7\left(\frac{g}{l}\right)p^2 + 3\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0\,,$$

односно
$$p_{\mathrm{I,II}}^2 = \left(\frac{7 \mp \sqrt{37}}{2}\right)\frac{g}{l}\,,$$

$$p_{\mathrm{I}}^2 = 0{,}4586\left(\frac{g}{l}\right)\sec^{-2}\,; \qquad p_{\mathrm{II}}^2 = 6{,}5414\left(\frac{g}{l}\right)\sec^{-2}\,;$$

$$p_{\mathrm{I}} = 0{,}677\sqrt{\frac{g}{l}}\ \sec^{-1}\,; \qquad p_{\mathrm{II}} = 2{,}558\sqrt{\frac{g}{l}}\ \sec^{-1}$$

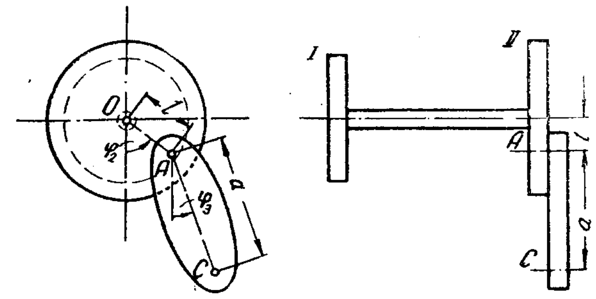
Пошто је
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{p^2}{\dfrac{g}{l} - p^2}$$

то је
$$\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)^{\mathrm{I}} = \frac{p_{\mathrm{I}}^2}{\dfrac{g}{l} - p_{\mathrm{I}}^2} = \frac{0{,}4586}{0{,}5414} = 0{,}847\,; \qquad \varphi^{\mathrm{I}}_1 = 0{,}847\,\varphi_2^{\mathrm{I}}$$

$$\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)^{\mathrm{II}} = \frac{p_{\mathrm{II}}^2}{\dfrac{g}{l} - p_{\mathrm{II}}^2} = -\frac{6{,}5414}{5{,}5414} = -1{,}180\,; \qquad \varphi^{\mathrm{II}}_1 = -1{,}180\,\varphi^{\mathrm{II}}_2$$

141.) Taylor је 1936 год. предложио да се у циљу амортизовања торзионих осцилација, обеси клатно о једну од осцилујућих маса. На цртежу је шематски приказан систем који се састоји из две масе које се обрћу сталном угаоном брзином ω. За другу масу је причвршћено Taylor-ово клатно. Моменти инерције маса у односу на осу обртања износе J_1 и J_2, а моменат инерције клатна у односу на осу која пролази кроз тежиште клатна, а паралелна је оси обртања система, износи J_3. Растојање између осе обртања система и тачке вешања клатна је $OA = l$; растојање између осе вешања и паралелне осовине кроз тежиште клатна износи $AC = a$; маса клатна је m. Крутост при торзији дела вратила између обртних маса је c. На другу масу делује спољни моменат $M = M_0 \sin \omega t$. Наћи диференцијалне једначине кретања обе масе и Taylor-овог клатна.

Примедба: При састављању израза за потенцијалну енергију система занемарити потенцијалну енергију клатна у пољу силе теже.



Сл. 144

Радићемо помоћу Lagrange-евих једначина кретања. За опште координате узећемо углове φ_1, φ_2 и φ_3, па ће Lagrange-еве једначине кретања бити

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_i} = -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_i} + F_{qi}\,, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

где је F_{qi} генералисана сила.

Нађимо кинетичку и потенцијалну енергију система.

Кинетичка енергија система једнака је збиру кинетичких енергија обртних маса и Taylor-овог клатна

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3}$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2$$

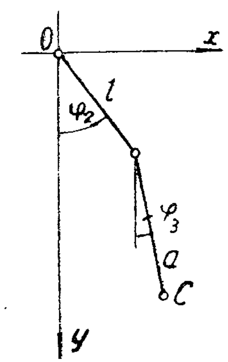
$$E_{k3} = \frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2}mv_c^2$$

$$v_c^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$x = l\sin\varphi_2 + a\sin\varphi_3$$

$$y = l\cos\varphi_2 + a\cos\varphi_3$$

$$v_c^2 = l^2\dot{\varphi}_2^2 + a^2\dot{\varphi}_3^2 + 2al\,\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3\cos(\varphi_2 - \varphi_3)\,,$$



Сл. 145

па је $E_{k3} = \frac{1}{2}(J_3 + ma^2)\dot\varphi_3^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot\varphi_2^2 + mal\,\dot\varphi_2\dot\varphi_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)$ и

$$E_k = \frac{1}{2} J_1 \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}(J_2 + ml^2)\dot\varphi_2^2 + \frac{1}{2}(J_3 + ma^2)\dot\varphi_3^2 + mal\,\dot\varphi_2\dot\varphi_3\cos(\varphi_2 - \varphi_3) \quad (a)$$

$$E_p = \int_0^\varphi M d\varphi = \int_0^\varphi c\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} c\varphi^2 ; \qquad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$E_p = \frac{1}{2} c(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \quad (b)$$

Диференцирањем израза (a) и (b) нађимо потребне чланове за Lagrange-еве једначине кретања

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot\varphi_1}\right) = J_1 \ddot\varphi_1 ; \quad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_1} = 0 ; \quad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_1} = c(\varphi_1 - \varphi_2) ; \quad F_{q1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi_2}\right) = (J_2 + ml^2)\ddot\varphi_2 + mal\,\ddot\varphi_3\cos(\varphi_2 - \varphi_3) - mal\,\dot\varphi_3(\dot\varphi_2 - \dot\varphi_3)\sin(\varphi_2 - \varphi_3)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} = -mal\,\dot\varphi_2\dot\varphi_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_2} = -c(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Рад спољњег момента при ротацији за угао $d\varphi_2$ је раван $M\,d\varphi_2 = M_0 \sin\omega t\, d\varphi_2$. Према томе генералисана сила је $F_{q2} = M_0 \sin\omega t$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi_3}\right) = (J_3 + ma^2)\ddot\varphi_3 + mal\,\ddot\varphi_2\cos(\varphi_2 - \varphi_3) - mal\,\dot\varphi_2(\dot\varphi_2 - \dot\varphi_3)\sin(\varphi_2 - \varphi_3)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_3} = mal\,\dot\varphi_2\dot\varphi_3\sin(\varphi_2 - \varphi_3)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_3} = 0 ; \qquad F_{q3} = 0$$

Диференцијалне једначине кретања гласе

$$J_1\ddot\varphi_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$(J_2 + ml^2)\ddot\varphi_2 + mal\,\ddot\varphi_3\cos(\varphi_2 - \varphi_3) + mal\,\dot\varphi_3^2\sin(\varphi_2 - \varphi_3) + c(\varphi_2 - \varphi_3) = M_0 \sin\omega t$$

$$(J_3 + ma^2)\ddot\varphi_3 + mal\,\ddot\varphi_2\cos(\varphi_2 - \varphi_3) - mal\,\dot\varphi_2^2\sin(\varphi_2 - \varphi_3) = 0$$

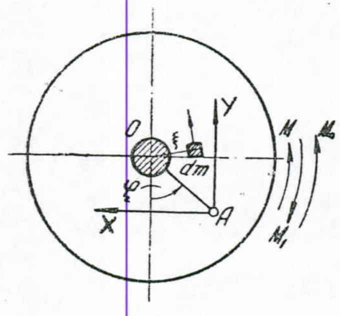
Ове исте једначине кретања можемо извести и помоћу d'Alembert-овог принципа.

Знамо да је $J\ddot\varphi = -M$

За први ротор је $M = c(\varphi_1 - \varphi_2)$, па прва диференцијална једначина кретања гласи

$$J_1\ddot\varphi_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

Поставимо једначину кретања за други ротор. Утицај клатна на други ротор заменићемо реакцијом, односно њеним компонентама X и Y које делују у тачки вешања A.



Сл. 146

Поставимо моментну једначину за тачку O.

$$\Sigma M_0 = 0$$

Посматраћемо елементарну масу dm овог точка, која је на удаљењу ξ од тачке O. Елементарна инерцијална сила која потиче од те масе услед обртања је

$$dF = (-dm\,\ddot s) = -dm\,\xi\,\ddot\varphi_2$$

Ова елементарна сила делује у супротном смеру пораста угла φ_2. Елементарни моменат услед елементарне силе је

$$dM = -\xi\, dF = \xi^2 \ddot\varphi_2\, dm ,$$

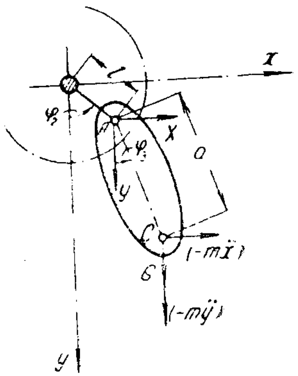
а за цео ротор биће $M_1 = \ddot\varphi_2 \int_M \xi^2\, dm = J_2\ddot\varphi_2$

Према томе је

$$\Sigma M_0 = J_2\ddot\varphi_2 - c(\varphi_1 - \varphi_2) + Xl\cos\varphi_2 - Yl\sin\varphi_2 - M_0\sin\omega t = 0$$

Моменат M има сада супротан смер од онога који је имао при деловању на први ротор, а пертурбациони моменат је супротног смера од инерционог M_1.

Нађимо компоненте реакције X и Y које делују у тачки вешања A. У том циљу посматраћемо клатно. Силе које делују на клатно су: реакције X и Y (које имају сада супротан смер), тежина клатна G (коју ћемо занемарити јер је то услов задатка) и инерцијалне силе $(-m\ddot x)$ и $(-m\ddot y)$ које делују у тежишту, а које добијамо по закону кретања средишта, замишљајући да је цела маса клатна концентрисана у тежишту.



Сл. 147

$$\Sigma X = X + (-m\ddot{x}) = 0$$

$$\Sigma Y = Y + (-m\ddot{y}) = 0\ ,$$

$$X = m\ddot{x}\ ;$$

$$Y = m\ddot{y}\ ;$$

$$y = l\cos\varphi_2 + a\cos\varphi_3\ ;$$

$$x = l\sin\varphi_2 + a\sin\varphi_3\ ;$$

па је

$$X = m\,(l\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2 - l\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2 + a\ddot{\varphi}_3\cos\varphi_3 - a\dot{\varphi}_3^2\sin\varphi_3)$$

$$Y = -\,m(l\ddot{\varphi}_2\sin\varphi_2 + l\dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2 + a\ddot{\varphi}_3\sin\varphi_3 + a\dot{\varphi}_3^2\cos\varphi_3)$$

Моментна једначина за тачку O прелази онда у

$$J_2\ddot{\varphi}_2 + c\,(\varphi_2 - \varphi_1) + m\,l^2\ddot{\varphi}_2(\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2) + ml^2\dot{\varphi}_2^2(\sin\varphi_2\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_2) + mal\,\ddot{\varphi}_3(\sin\varphi_2\sin\varphi_3 + \cos\varphi_2\cos\varphi_3) + mal\,\dot{\varphi}_3^2(\sin\varphi_2\cos\varphi_3 - \cos\varphi_2\sin\varphi_3) = M_0\sin\omega_0 t\ ,$$

односно

$$(J_2 + ml^2)\,\ddot{\varphi}_2 + mal\,\ddot{\varphi}_3\cos(\varphi_2 - \varphi_3) + mal\,\dot{\varphi}_3^2\sin(\varphi_2 - \varphi_3) = M_0\sin\omega t$$

Трећу диференцијалну једначину кретања добићемо из моментне једначине за тачку C:

$$\Sigma M_c = 0$$

Моменат инерцијалних сила ротације за тачку C услед обртања своди се, слично као што смо мало пре видели, на $J_3\ddot{\varphi}_3$ па је

$$\Sigma M_c = J_3\ddot{\varphi}_3 - Ya\sin\varphi_3 + Xa\cos\varphi_3 = 0\ ,$$

односно

$$J_3\ddot{\varphi}_3 + mal\,\ddot{\varphi}_2(\sin\varphi_2\sin\varphi_3 + \cos\varphi_2\cos\varphi_3) + mal\,\dot{\varphi}_2^2(\cos\varphi_2\sin\varphi_3 - \sin\varphi_2\cos\varphi_3) + ma^2\ddot{\varphi}_3(\sin^2\varphi_3 + \cos^2\varphi_3) + ma^2\dot{\varphi}_3^2(\sin\varphi_3\cos\varphi_3 - \sin\varphi_3\cos\varphi_3) = 0\ ,$$

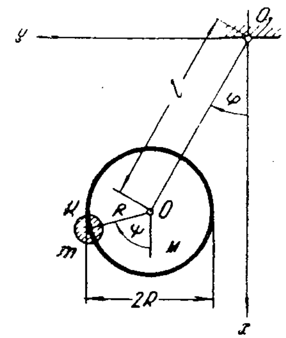
што се своди на

$$(J_3 + ma^2)\,\ddot{\varphi}_3 + mal\,\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_3) - mal\,\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2 - \varphi_3) = 0$$

142.) Хомогена танка кружна плоча полупречника R и масе M, обешена је о два нерастегљива конца дужине l, који пролазе кроз тежиште плоче O, око кога се она може окретати. На обиму плоче причвршћена је материјална тачка масе m. У почетном положају права $\overline{O_1O}$ и права $\overline{OK}$ чине са вертикалом углове φ, односно ψ, а почетне брзине равне су нули. Кад препустимо систем самом себи он ће почети да осцилује. Масу конца занемарити.

Одредити фреквентну једначину слободних осцилација система (Испит, јануар 1949).

Радићемо помоћу Lagrange-евих једначина кретања. За генералисане координате узимамо углове φ и ψ.



Сл. 148

Кинетичка енергија система биће

$$E_k = E_{k1} + E_{k2}$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 + \frac{1}{2}M v_0^2$$

$$\omega_0^2 = \dot{\psi}^2\ ; \qquad v_0^2 = l^2\dot{\varphi}^2\ ;$$

$$J_0 = \frac{1}{2}MR^2 = J\ ,$$

па је

$$E_{k1} = \frac{1}{2}J\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\varphi}^2\ ;$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2}m\,v_k^2\ ;$$

$$v_k^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\psi}^2 + 2lR\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi) \approx l^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\psi}^2 + 2lR\dot{\varphi}\dot{\psi}\ ;$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\psi}^2 + 2lR\dot{\varphi}\dot{\psi}),$$

па је

$$E_k = \frac{1}{2}(M+m)\,l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(J + mR^2)\,\dot{\psi}^2 + m\,lR\,\dot{\varphi}\dot{\psi} \qquad (a)$$

$$E_p = E_{p1} + E_{p2}$$

$$E_{p1} = G_1\,\delta_1 = Mg\,\delta_1\ ; \qquad \delta_1 \approx \frac{l\varphi^2}{2}$$

$$E_{p1} = \frac{1}{2}Mgl\varphi^2$$

$$E_{p2} = G_2(\delta_1 + \delta_2) = mg(\delta_1 + \delta_2)\ ; \qquad \delta_2 \approx \frac{R\psi^2}{2}$$

$$E_p = \frac{1}{2} M g l \varphi^2 + \frac{1}{2} m g (l \varphi^2 + R \psi^2) ,$$

па је
$$E_p = \frac{1}{2} g (M + m) l \varphi^2 + \frac{1}{2} m g R \psi^2 \qquad (b)$$

Диференцирањем израза (a) и (b) добијамо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi}\right) = (M+m) l^2 \ddot\varphi + m l R \ddot\psi \; ; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\psi}\right) = (J_0 + m R^2) \ddot\psi + m l R \ddot\varphi$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0 \; ; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = g (M+m) l \varphi \; ; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \psi} = m g R \psi ,$$

па су диференцијалне једначине кретања

$$\left| \begin{array}{l} l (M+m) \ddot\varphi + m R \ddot\psi + g (M+m) \varphi = 0 \\ (J + m R^2) \ddot\psi + m l R \ddot\varphi + m g R \psi = 0 \end{array} \right.$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$\varphi = \lambda_1 \cos pt$$
$$\psi = \lambda_2 \cos pt ,$$

долазимо до једначина

$$\lambda_1 [(M+m)(g - l p^2)] - \lambda_2 m R p^2 = 0$$
$$- \lambda_1 m l R p^2 + \lambda_2 [m g R - (J + m R^2) p^2] = 0$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} (M+m)(g - l p^2) & - m R p^2 \\ - m l R p^2 & m g R - (J + m R^2) p^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

или $\quad [(M+m)(g - l p^2)] [m g R - (J + m R^2) p^2] + m^2 l R^2 p^4 = 0$,

што кад се развије даје

$$p^4 [(M+m) J l + M m R^2 l] - (M+m) g [m l R + J + m R^2] p^2 +$$
$$+ m (M+m) g^2 R = 0 \qquad (c)$$

Напомена: Корисно је код овако гломазних једначина као што је једначина (c) у циљу провере вршити контролу по димензији. Сва три члана једначине (c) морају имати исту димензију. Тако ће њен први члан имати димензију

$$[T^{-4} \cdot M \cdot M L^2 \cdot L] = [M^2 L^3 T^{-4}]$$

И остала два члана једначине (c) имају такође димензију $[M^2 L^3 T^{-4}]$, што значи да је она по димензији тачна.

Диференцијалне једначине кретања можемо да изведемо и помоћу d'Alembert-овог принципа:

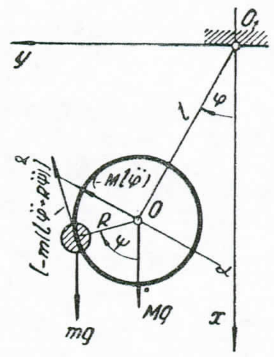
$$\Sigma M_0 = J \ddot\psi - [- m R (l \ddot\varphi + R \ddot\psi)] + m g R \sin\varphi = 0$$

$$\Sigma T_{\alpha-\alpha} = (- M l \ddot\varphi) + [- m (l \ddot\varphi + R \ddot\psi] \cos(\psi - \varphi) -$$
$$- M g \sin\varphi - m g \sin\varphi \cos(\psi - \varphi) = 0$$

$$\sin\varphi \approx \varphi ,$$
$$\cos(\psi - \varphi) \approx 1 ,$$

па је

$$\left| \begin{array}{l} (J + m R^2) \ddot\psi + m R l \ddot\varphi + m g R \psi = 0 \\ l (M+m) \ddot\varphi + m R \ddot\psi + g (M+m) \varphi = 0 \end{array} \right. ,$$



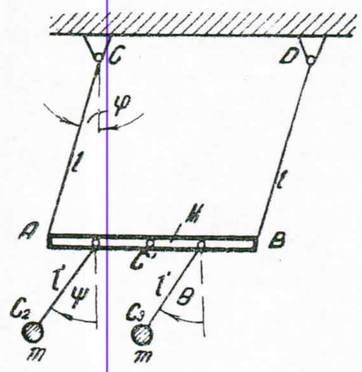
Сл. 149

а то су исте диференцијалне једначине кретања, које смо добили и мало пре помоћу Lagrange-евих једначина кретања.

143.) Штап AB масе M обешен је концима непроменљиве дужине l о сталне тачке C и D. За штап AB обешене су две једнаке масе m, концима дужине l'. Поставити фреквентну једначину система и израчунати фреквенције за случај да је

$$M = 2m \quad \text{и} \quad 2l' = l$$

(Испит, фебруар 1949)



Сл. 150

Радићемо помоћу Lagrange-евих једначина кретања. За опште координате узимамо углове φ, ψ и θ.

Нађимо кинетичку и потенцијалну енергију система.

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3}$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} M v_{c1}^2 \; ;$$

$$v_{c1} = l \dot\varphi ,$$

пошто се штап AB креће транслаторно као спојна полуга шарнирног четвороугаоника са две једнаке криваје.

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m\, v_{c2}^2 \quad ; \qquad v_{c2} = l\dot{\varphi} + l'\,\dot{\psi}$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m\,(l^2\dot{\varphi}^2 + 2ll'\,\dot{\varphi}\dot{\psi} + l'^2\dot{\psi}^2)$$

$$E_{k3} = \frac{1}{2} m\, v_{c3}^2 \quad ; \qquad v_{c3} = l\dot{\varphi} + l'\,\dot{\theta}$$

$$E_{k3} = \frac{1}{2} m\,(l^2\dot{\varphi}^2 + 2ll'\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta} + 2\,l'^2\dot{\theta}^2)\,,$$

па је
$$E_k = l^2\left(\frac{M}{2} + m\right)\dot{\varphi}^2 + mll'\,\dot{\varphi}\,(\dot{\psi} + \dot{\theta}) + \frac{1}{2} ml'^2\,(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) \qquad (a)$$

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} + E_{p3}$$

$$E_{p1} = M g\,\delta_1 \quad ; \qquad \delta_1 \approx \frac{1}{2}\, l\,\varphi^2$$

$$E_{p1} = \frac{1}{2} M g\, l\,\varphi^2$$

$$E_{p2} = m g\,(\delta_1 + \delta_2) \quad ; \qquad \delta_2 \approx \frac{l'\,\psi^2}{2}$$

$$E_{p2} = \frac{1}{2} mg\,(l\,\varphi^2 + l'\,\psi^2)$$

$$E_{p3} = m g\,(\delta_1 + \delta_3) \quad ; \qquad \delta_3 \approx \frac{l'\,\theta^2}{2}$$

$$E_{p3} = \frac{1}{2} m g\,(l\,\varphi^2 + l'\,\theta^2)\quad ,$$

па је
$$E_p = \frac{1}{2}\, g\,(M + 2\,m)\, l\varphi^2 + \frac{1}{2}\, m g\, l'\,(\psi^2 + \theta^2) \qquad (b)$$

Диференцирањем израза (a) и (b) добијамо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) = (M + 2\,m)\, l^2\ddot{\varphi} + m\,ll'\,(\ddot{\psi} + \ddot{\theta})$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = l\,g\,(M + 2\,m)\,\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\psi}}\right) = m\,ll'\,\ddot{\varphi} + m\,l'^2\,\ddot{\psi}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \psi} = m\, gl'\,\psi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}}\right) = mll'\,\ddot{\varphi} + ml'^2\,\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = m\, g\, l'\,\theta\;,$$

па су диференцијалне једначине кретања после скраћивања

$$\left|\begin{array}{l} l\,(M + 2\,m)\,\ddot{\varphi} + m\,l'\,(\ddot{\psi} + \ddot{\theta}) + g\,(M + 2\,m)\,\varphi = 0 \\ l\,\ddot{\varphi} + l'\,\ddot{\psi} + g\,\psi = 0 \\ l\,\ddot{\varphi} + l'\,\ddot{\theta} + g\,\theta = 0 \end{array}\right.$$

За $l = 2\,l'$ и $M = 2\,m$

добијамо
$$\left|\begin{array}{l} 8\,\ddot{\varphi} + \ddot{\psi} + \ddot{\theta} + 4\,\dfrac{g}{l'}\,\varphi = 0 \\ 2\,\ddot{\varphi} + \ddot{\psi} + \dfrac{g}{l'}\,\psi = 0 \\ 2\,\ddot{\varphi} + \ddot{\theta} + \dfrac{g}{l'}\,\theta = 0 \end{array}\right.$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$\varphi = \lambda_1 \cos pt$$
$$\psi = \lambda_2 \cos pt$$
$$\theta = \lambda_3 \cos pt\;,$$

долазимо до једначина

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1\left(4\,\dfrac{g}{l'} - 8\,p^2\right) - \lambda_2\,p^2 - \lambda_3\,p^2 = 0 \\ -\,2\,\lambda_1\,p^2 + \lambda_2\left(\dfrac{g}{l'} - p^2\right) = 0 \\ -\,2\,\lambda_1\,p^2 + \lambda_3\left(\dfrac{g}{l'} - p^2\right) = 0 \end{array}\right.$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} 4\dfrac{g}{l'}-8p^2 & -p^2 & -p^2 \\ -2p^2 & \dfrac{g}{l'}-p^2 & 0 \\ -2p^2 & 0 & \dfrac{g}{l'}-p^2 \end{vmatrix}=0$$

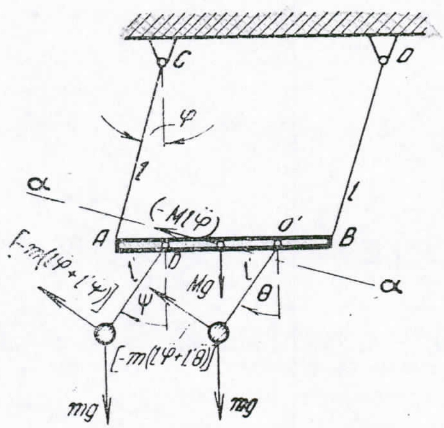
Кад развијемо ову детерминанту долазимо до једначине

$$4\left(\frac{g}{l'}-p^2\right)\left[p^4-3p^2\left(\frac{g}{l'}\right)+\left(\frac{g}{l'}\right)^2\right]=0$$

Одавде је $\qquad p_I^2=\dfrac{g}{l'}\ ; \qquad p^2_{II,\,III}=\left(\dfrac{3\mp\sqrt{5}}{2}\right)\dfrac{g}{l'}\ ,$

односно $\qquad p_I^2=2\dfrac{g}{l}\ ; \qquad p^2_{II,\,III}=\left(3\mp\sqrt{5}\right)\dfrac{g}{l}$

Напомена: Диференцијалне једначине кретања можемо извести и помоћу d'Alembert-овог принципа.



Сл. 151

$$\begin{aligned}
&\Sigma M_0=[-m(l\ddot\varphi+l'\ddot\psi)]\,l'-mgl'\sin\psi=0\\
&\Sigma M_0'=[-m(l'\ddot\theta+l\ddot\varphi)]\,l'-mgl'\sin\theta=0\\
&\Sigma T_{\alpha-\alpha}=(-Ml\ddot\varphi)+[-m\,(l\ddot\varphi+l'\ddot\psi)]\cos(\varphi-\psi)+\\
&+[-m\,(l\ddot\varphi+l'\ddot\theta)]\cos(\varphi-\theta)+(M+2m)\,g\sin\varphi=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sin\varphi\approx\varphi\ ; &&\cos(\varphi-\psi)\approx 1\\
&\sin\psi\approx\psi\ ; &&\cos(\varphi-\theta)\approx 1\\
&\sin\theta\approx\theta\ ,
\end{aligned}$$

па је, пошто извршимо скраћивања

$$\begin{aligned}
&l\ddot\varphi+l'\ddot\psi+g\psi=0\\
&l\ddot\varphi+l'\ddot\theta+g\theta=0\\
&l\,(M+2m)\,\ddot\varphi+m\,(\ddot\psi+\ddot\theta)\,l'+g\,(M+2m)\,\varphi=0
\end{aligned}\ ,$$

а то су исте једначине које смо мало пре добили помоћу Lagrange-евих једначина кретања.

144.) Двојно математичко клатно састоји се из две једнаке масе m, обешене о конце исте дужине l, чију масу занемарујемо. Свака маса осим тога причвршћена је опругом крутости c, као што се види на слици. У равнотежном положају клатно се поклапа са вертикалом. Поставити диференцијалне једначине кретања овог система и наћи кружне фреквенције осцилација система.

Радићемо помоћу Lagrange-евих једначина кретања. За генералисане координате узећемо углове φ_1 и φ_2. Нађимо кинетичку и потенцијалну енергију система.

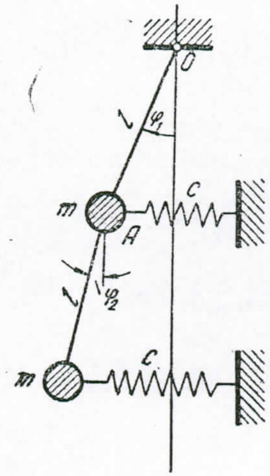
$$E_k=E_{k\,1}+E_{k\,2}$$

$$E_{k\,1}=\frac{1}{2}m\,v_{c1}^2$$

$$E_{k\,2}=\frac{1}{2}m\,v_{c2}^2$$

$$v_{c1}^2=l^2\dot\varphi_1^2$$

$$v_{c2}^2=(l\dot\varphi_1+l\dot\varphi_2)^2=l^2\dot\varphi_1^2+2l^2\dot\varphi_1\,\dot\varphi_2+l_2\dot\varphi_2^2\ ,$$



Сл. 152

па је $\qquad E_k=\dfrac{1}{2}ml^2\dot\varphi_1^2+\dfrac{1}{2}m\,(l^2\dot\varphi_1^2+l^2\dot\varphi_2^2+2l^2\dot\varphi_1\dot\varphi_2)\ ,$

односно

$$E_k=ml^2\left(\dot\varphi_1^2+\frac{1}{2}\dot\varphi_2^2+\dot\varphi_1\,\dot\varphi_2\right)\qquad (a)$$

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} + E_{p3} + E_{p4}$$

$$E_{p1} = mg\,\delta_1 \quad ; \qquad \delta_1 \approx \frac{1}{2}\, l\, \varphi_1^2$$

$$E_{p1} = \frac{1}{2}\, m\, g\, l \varphi_1^2$$

$$E_{p2} = mg\,(\delta_1 + \delta_2)\ ; \qquad \delta_2 \approx \frac{1}{2}\, l\, \varphi_2^2$$

$$E_{p2} = \frac{1}{2}\, m\, g\, l\, (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

Пошто су реституционе силе у опругама

$$F'_R = cl\,\varphi_1 \qquad \text{и} \qquad F''_R = cl\,(\varphi_1 + \varphi_2)\ ,$$

то је $E_{p3} = \int_0^{\varphi_1} F'_R\, l d\varphi = \frac{1}{2}\, cl^2\, \varphi_1^2\ ;\quad E_{p4} = \int_0^{\varphi_1+\varphi_2} F''_R\, l\, d\varphi = \frac{1}{2}\, cl^2 (\varphi_1 + \varphi_2)^2$

Према томе је

$$E_p = \frac{1}{2}\, m\, g\, l\, \varphi_1^2 + \frac{1}{2}\, m g l\, (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{2}\, cl^2\, \varphi_1^2 + \frac{1}{2}\, c\, l^2\, (\varphi_1 + \varphi_2)^2\ ,$$

односно $\quad E_p = (m g\, l + cl^2)\, \varphi_1^2 + \frac{1}{2}\,(mgl + cl^2)\, \varphi_2^2 + cl^2\, \varphi_1\, \varphi_2 \qquad (b)$

Диференцирањем израза (*a*) и (*b*) за E_k и E_p нађимо потребне чланове за Lagrange- еве једначине кретања

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi_1}\right) = m\, l^2\, (2\,\ddot\varphi_1 + \ddot\varphi_2)\ ; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_1} = 0\ ; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_1} = 2\,(mgl + cl^2)\, \varphi_1 + cl^2\, \varphi_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi_2}\right) = ml^2\, (\ddot\varphi_2 + \ddot\varphi_1)\ ; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} = 0\ ; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_2} = (mgl + cl^2)\, \varphi_2 + cl^2\, \varphi_1$$

Диференцијалне једначине кретања система према томе су

$$ml^2 (2\,\ddot\varphi_1 + \ddot\varphi_2) + 2\,(mgl + cl^2)\, \varphi_1 + cl^2\, \varphi_2 = 0$$

$$ml^2\, (\ddot\varphi_2 + \ddot\varphi_1) + (mgl + cl^2)\, \varphi_2 + cl^2\, \varphi_1 = 0\ ,$$

односно

$$2\,\ddot\varphi_1 + \ddot\varphi_2 + 2\left(\frac{g}{l} + \frac{c}{m}\right) \varphi_1 + \frac{c}{m}\, \varphi_2 = 0$$

$$\ddot\varphi_1 + \ddot\varphi_2 + \frac{c}{m}\, \varphi_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{c}{m}\right) \varphi_2 = 0 \qquad (c)$$

Ако потражимо решења ових једначина у облику

$$\varphi_1 = \lambda_1 \cos pt$$

и

$$\varphi_2 = \lambda_2 \cos pt\ ,$$

долазимо до једначина

$$2\,\lambda_1 \left(\frac{g}{l} + \frac{c}{m} - p^2\right) + \lambda_2 \left(\frac{c}{m} - p^2\right) = 0$$

$$\lambda_1 \left(\frac{c}{m} - p^2\right) + \lambda_2 \left(\frac{g}{l} + \frac{c}{m} - p^2\right) = 0$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} 2\left(\frac{g}{l} + \frac{c}{m} - p^2\right) & \frac{c}{m} - p^2 \\ \frac{c}{m} - p^2 & \frac{g}{l} + \frac{c}{m} - p^2 \end{vmatrix} = 0\ ,$$

а одавде је

$$2\left(\frac{g}{l} + \frac{c}{m} - p^2\right)^2 = \left(\frac{c}{m} - p^2\right)^2,$$

што кад се развије даје

$$p^4 - 2p^2\left(\frac{c}{m} - 2\frac{g}{l}\right) + \left(\frac{c^2}{m^2} + 4\,\frac{c}{m}\,\frac{g}{l} + 2\,\frac{g^2}{l^2}\right) = 0\ ,$$

или без развијања

$$\sqrt{2}\left(\frac{g}{l} + \frac{c}{m} - p^2\right) = \mp\left(\frac{c}{m} - p^2\right),$$

одакле је

$$p_{\mathrm{I,II}}^2 = \frac{c}{m} + \frac{g}{l}\left(2 \mp \sqrt{2}\right)$$

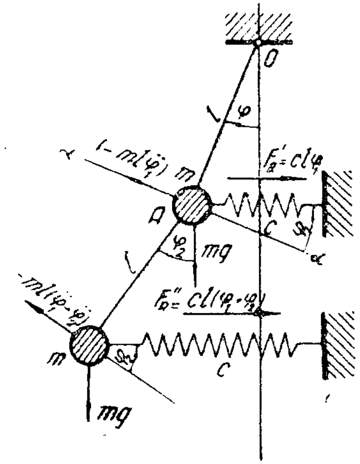
Диференцијалне једначине кретања можемо извести и на основи d'Alembert-эвог принципа, занемарујући силе у концима*

$$\Sigma M_A = [-ml\,(\ddot\varphi_1 + \ddot\varphi_2)]\, l - mgl \sin \varphi_2 -$$

$$- cl\,(\varphi_1 + \varphi_2) \cos \varphi_2 = 0$$

$$\sin \varphi_2 \approx \varphi_2$$

$$\cos \varphi_2 \approx 1\ ,$$



Сл. 155

* Види теорију двојног математичког клатна стр. 192

па је $$ml^2(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + mgl\,\varphi_2 + cl(\varphi_1 + \varphi_2) = 0$$

$$\Sigma T_{\alpha-\alpha} = (-ml\,\ddot{\varphi}_1) + [-ml(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2)]\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - cl\,\varphi_1\cos\varphi_1 -$$

$$- cl(\varphi_1 + \varphi_2)\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 2\,mg\sin\varphi_1 = 0$$

$$\sin\varphi_1 \approx \varphi_1\ ; \qquad \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \approx 1$$

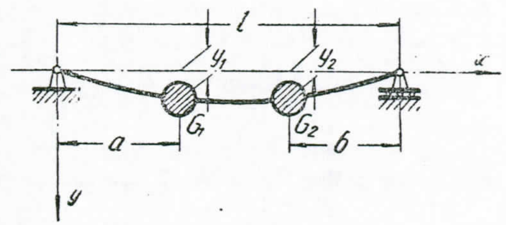
$$\cos\varphi_1 \approx 1\ ,$$

па је $$2\,ml\,\ddot{\varphi}_1 + ml\,\ddot{\varphi}_2 + 2\,cl\,\varphi_1 + 2\,mg\,\varphi_1 + cl\,\varphi_2 = 0$$

На тај начин дошли смо поново до диференцијалних једначина кретања (c).

13. ПОПРЕЧНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ЕЛАСТИЧНОГ ШТАПА СА ВИШЕ СТЕПЕНА СЛОБОДЕ. ПРИБЛИЖАН ОБРАЗАЦ DUNKERLEY-A

Да бисмо упростили проблем, посматраћемо прво попречне осцилације еластичног штапа са два степена слободе, па ћемо потом по аналогији извести закључке и за n — степена слободе.



Сл. 154

Ставимо на греду распона l два терета G_1 и G_2. Претпоставимо да је тежина греде мала у односу на тежине G_1 и G_2, тј. занемаримо масу греде. Под утицајем терета G_1 и G_2 греда ће се деформисати и угнути за дужине y_1 и y_2. Када се буде све умирило, ако повучемо терет G_1 на доле, то ће у исто време изазвати и померање терета G_2 и кад пустимо терет G_1 настаће осцилаторно кретање. Терети G_1 и G_2 неће осциловати независно, већ међусобно у спрези. Нађимо диференцијалне једначине кретања овог система.

Нека су масе терета G_1 и G_2 — m_1 и m_2. Видели смо да деформације греде испод ових терета износе y_1 и y_2. Ако нађемо друге изводе ових дужина по времену (сматрајући их као пут терета) $\ddot{y}_1$ и $\ddot{y}_2$, онда ћемо добити убрзања терета G_1 и G_2 при осциловању греде. На тај начин изрази $m_1\ddot{y}_1$ и $m_2\ddot{y}_2$ са негативним знаком претстављају инерцијалне — d'Alembert-ове силе, и цео проблем даље можемо посматрати чисто статички, тј. као носач оптерећем силама.

Угиб услед дејства јединичне силе обележимо са δ. Он има димензију

$$[\delta] = F^{-1}L$$

Међутим, како угиб зависи и од силе и од места на коме делује сила, то да би тачно прецизирали поједине угибе увешћемо уз сваку ознаку угиба и два индекса, од којих ће први означавати узрок услед кога угиб настаје, а други ће означавати место угиба.

Тако например за наш случај када је греда оптерећена са два терета, посматраћемо одвојено два носача и то један оптерећен јединичном силом на месту првог терета, а други јединичном силом на месту другог терета.

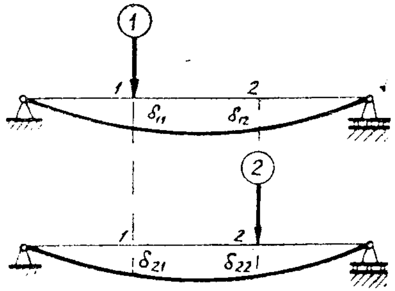
Према томе уведене ознаке значе:

δ_{11} — угиб услед јединичне силе 1 на месту 1,

δ_{12} — угиб услед јединичне силе 1 на месту 2,

δ_{21} — угиб услед јединичне силе 2 на месту 1,

δ_{22} — угиб услед јединичне силе 2 на месту 2.



Сл. 155

Да напоменемо одмах да је по Maxwell-овој теорији о узајамности еластичних померања $\delta_{12} = \delta_{21}$ и уопште $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.*)

Како јединична сила изазива угиб δ, јасно је да ће сила од F јединица изазвати угиб $F\delta$. Пошто смо ми проблем свели на статички проблем, тј. посматрамо греду оптерећену силама, и како је угиб на неком месту од више сила једнак збиру угиба на том месту од свих појединих сила, то ће у нашем случају угиби на месту 1 и 2 бити

$$\begin{aligned} y_1 &= (-m_1 \ddot{y}_1)\,\delta_{11} + (-m_2 \ddot{y}_2)\,\delta_{21} \\ y_2 &= (-m_1 \ddot{y}_1)\,\delta_{12} + (-m_2 \ddot{y}_2)\,\delta_{22} \end{aligned} \tag{131}$$

Тако смо добили две симултане диференцијалне једначине чије ћемо решење потражити у облику

$$y_1 = \lambda_1 \cos pt \; ; \qquad y_2 = \lambda_2 \cos pt$$

На тај начин долазимо до једначина

$$\begin{aligned} \lambda_1 (1 - m_1 \delta_{11} p^2) - \lambda_2 m_2 \delta_{21} p^2 &= 0 \\ -\lambda_1 m_1 \delta_{12} p^2 + \lambda_2 (1 - m_2 \delta_{22} p^2) &= 0 \end{aligned} \tag{132}$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} 1 - m_1 \delta_{11} p^2 & -p^2 \delta_{21} m_2 \\ -p^2 \delta_{12} m_1 & 1 - p^2 \delta_{22} m_2 \end{vmatrix} = 0$$

*) Види: Хлитчијев, Вречко: Отпорност материјала, II издање, стр. 101.

или $$(1 - p^2 \delta_{11} m_1)(1 - p^2 \delta_{22} m_2) - p^4 \delta_{21} \delta_{12} m_1 m_2 = 0$$

Како је $$\delta_{12} = \delta_{21},$$

то је $$p^4 [m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)] - p^2 (m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}) + 1 = 0 \tag{133}$$

Корени ове фреквентне једначине су

$$p^2_{\mathrm{I,II}} = \frac{(m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}) \mp \sqrt{(m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22})^2 - 4 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)},$$

или $$p^2_{\mathrm{I,II}} = \frac{(m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} \mp \sqrt{(m_1 \delta_{11} - m_2 \delta_{22})^2 + 4 m_1 m_2 \delta_{12}^2}}{2 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)} \tag{134}$$

Однос амплитуда добићемо из једначина (131)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} &= \frac{p^2_{\mathrm{I}} \delta_{12} m_2}{1 - p^2_{\mathrm{I}} \delta_{11} m_1} = \psi_1 \quad ; \qquad \lambda_1^{\mathrm{I}} = \psi_1 \lambda_2^{\mathrm{I}} \\ \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} &= \frac{p^2_{\mathrm{II}} \delta_{12} m_2}{1 - p^2_{\mathrm{II}} \delta_{11} m_1} = \psi_2 \quad ; \qquad \lambda_1^{\mathrm{II}} = \psi_2 \lambda_2^{\mathrm{II}} \\ \psi_1 > 0 &\qquad\qquad \psi_2 < 0 \end{aligned} \tag{135}$$

Решење диференцијалних једначина (131) биће

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_1^{\mathrm{I}} \cos p_{\mathrm{I}} t + \lambda_1^{\mathrm{II}} \cos p_{\mathrm{II}} t \\ y_2 &= \lambda_2^{\mathrm{I}} \cos p_{\mathrm{I}} t + \lambda_1^{\mathrm{II}} \cos p_{\mathrm{II}} t \end{aligned}$$

Произвољне константе одређују се из почетних услова. За n терета диференцијалне једначине кретања биле би

$$\left|\begin{aligned} y_1 + m_1 \ddot{y}_1 \delta_{11} + m_2 \ddot{y}_2 \delta_{21} + \cdots + m_n \ddot{y}_n \delta_{n1} &= 0 \\ y_2 + m_1 \ddot{y}_1 \delta_{12} + m_2 \ddot{y}_2 \delta_{22} + \cdots + m_n \ddot{y}_n \delta_{n2} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ y_n + m_1 \ddot{y}_1 \delta_{1n} + m_2 \ddot{y}_2 \delta_{2n} + \cdots + m_n \ddot{y}_n \delta_{nn} &= 0 \end{aligned}\right. , \tag{136}$$

а фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} 1 - p^2 \delta_{11} m_1 & -p^2 \delta_{21} m_2 & \cdots\cdots & -p^2 \delta_{n1} m_n \\ -p^2 \delta_{12} m_1 & 1 - p^2 \delta_{22} m_2 & \cdots\cdots & -p^2 \delta_{n2} m_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p^2 \delta_{1n} m_1 & -p^2 \delta_{2n} m_2 & \cdots\cdots & 1 - p^2 \delta_{nn} m_n \end{vmatrix} = 0 \tag{137}$$

Приметимо да $\frac{1}{\delta_{ii}} = c_i$ даје силу којом је потребно деловати у пресеку (i), да би она на том месту изазвала угиб раван јединици.

Према томе

$$\overline{p}_i = \frac{1}{\sqrt{m_i\,\delta_{ii}}} = \sqrt{\frac{c_i}{m_i}}$$

претставља кружну фреквенцију масе m_i када би она сама била на греди.

Ако означимо са

$$\alpha = \frac{1}{p^2} \qquad \text{и} \qquad \overline{\alpha}_i = \frac{1}{\overline{p}_i^{\,2}} = m_i\,\delta_{ii}\,,$$

онда фреквентна једначина (137) прелази у

$$\begin{vmatrix} \alpha - \overline{\alpha}_1 & -\delta_{21} m_2 & \cdots\cdots & -\delta_{n1} m_n \\ -\delta_{12} m_1 & \alpha - \overline{\alpha}_2 & \cdots\cdots & -\delta_{n2} m_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\delta_{1n} m_1 & -\delta_{2n} m_2 & \cdots\cdots & \alpha - \overline{\alpha}_n \end{vmatrix} = 0\,, \qquad (138)$$

што кад се развије даје

$$\alpha^n - (\overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 + \cdots\cdots + \overline{\alpha}_n)\,\alpha^{n-1} + \cdots\cdots = 0$$

Како је на основи познатих својстава алгебарских једначина

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 + \overline{\alpha}_3 + \cdots + \overline{\alpha}_n\,,$$

то је и

$$\alpha_1 < \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 + \overline{\alpha}_3 + \cdots + \overline{\alpha}_n$$

Пошто су корени $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ далеко мањи од првог корена α_1, и како они немају значаја за техничку примену, то можемо ставити да је

$$\alpha_1 \approx \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 + \overline{\alpha}_3 + \cdots + \overline{\alpha}_n\,,$$

односно

$$\frac{1}{p^2_{\mathrm{I}}} \approx \frac{1}{\overline{p}_1^{\,2}} + \frac{1}{\overline{p}_2^{\,2}} + \frac{1}{\overline{p}_3^{\,2}} + \cdots + \frac{1}{\overline{p}_n^{\,2}}\,,$$

или

$$\frac{1}{p^2_{\mathrm{I}}} \approx \Sigma\,\frac{m_i}{c_i} \approx \Sigma\, m_i\,\delta_{ii} \qquad (139)$$

Ову формулу је експериментално утврдио енглески инжењер Dunkerley 1894 године, и она се по њему зове Dunkerley-ев образац за приближно одређивање најниже кружне фреквенције главних попречних осцилација еластичних штапова.*

Напомена: Проблем попречних осцилација еластичног штапа са више степена слободе претставља истовремено и проблем попречних осцилација дискова на вратилу, па све изведене једначине и

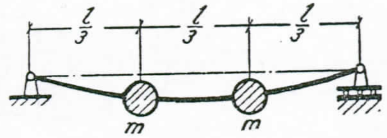
* Dunkerley-ев образац изведен је према Лойцянский-Лурье: Курс теоритической механики, част вторая.

обрасци за греду оптерећену теретима важе истовремено и за вратило на коме се налази произвољан број дискова маса: m_1, m_2, ..., m_n, при чему се маса вратила занемарује, а величине δ_{ik} претстављају угибе услед јединичних оптерећења на месту дискова.

Примери

145.) Одредити кружне фреквенције и облике главних попречних осцилација штапа дужине l, слободно ослоњеног на два ослонца и оптерећеног једнаким теретима тежине G у тачкама $z = \frac{1}{3}\,l$ и $z = \frac{2}{3}\,l$. Моменат инерције попречног пресека штапа је I, а модул еластичности материјала E. Масу штапа занемарити.

Диференцијалне једначине кретања у овом случају су једначине (131), а фреквентна једначина дата је изразом (133).



Сл. 156

Пошто је у овом случају:

$$m_1 = m_2 = m\;;$$

$$\delta_{11} = \delta_{22}\,;$$

$$\delta_{12} = \delta_{21}\,,$$

онда једначина (134) прелази у

$$p^2_{\mathrm{I,\,II}} = \frac{\delta_{11} \mp \delta_{12}}{m(\delta_{11}^{\,2} - \delta_{12}^{\,2})}\,,$$

одакле је

$$p^2_{\mathrm{I}} = \frac{1}{m\,(\delta_{11} + \delta_{12})} \qquad \text{и} \qquad p^2_{\mathrm{II}} = \frac{1}{m\,(\delta_{11} - \delta_{12})}$$

Нађимо δ_{11} и δ_{12}

Знамо да је

$$y = \frac{Gl^3}{6EI}\left\{\frac{b}{l}\cdot\frac{z}{l}\left[1 - \left(\frac{b}{l}\right)^2 - \left(\frac{z}{l}\right)^2\right]\right\}$$

за δ_{11} је $\frac{z}{l} = \frac{1}{3}$ и $\frac{b}{l} = \frac{2}{3}$, па је $\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4}{243}\,\frac{l^3}{EI}$

за δ_{21} је $\dfrac{z}{l} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{b}{l} = \dfrac{1}{3}$; па је $\delta_{21} = \delta_{12} = \dfrac{7}{486}\dfrac{l^3}{EI}$

Онда је

$$p^2_{\mathrm{I}} = \frac{g}{\dfrac{Gl^3}{EI}\left(\dfrac{4}{243} + \dfrac{7}{486}\right)} = \frac{486\, EIg}{15\, Gl^3}\ ; \qquad p_{\mathrm{I}} \approx 5{,}69\sqrt{\frac{EIg}{Gl^3}}\ \sec^{-1}$$

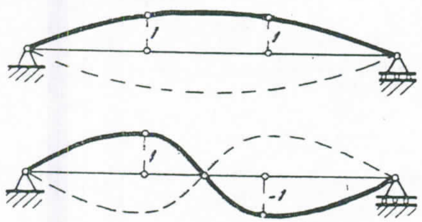
$$p^2_{\mathrm{II}} = \frac{g}{\dfrac{Gl^3}{EI}\left(\dfrac{4}{243} - \dfrac{7}{486}\right)} = \frac{486\, EIg}{Gl^3}\ ; \qquad p_{\mathrm{II}} \approx 22{,}04\sqrt{\frac{EIg}{Gl^3}}\ \sec^{-1}$$

Односе амплитуда налазимо из израза (135)

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} = \frac{p^2_{\mathrm{I}}\,\delta_{12}\, m}{1 - p^2_{\mathrm{I}}\,\delta_{11}\, m} = \frac{\dfrac{7}{15}}{1 - \dfrac{2\cdot 4}{15}} = 1\,,$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} = \frac{p^2_{\mathrm{II}}\,\delta_{12}\, m}{1 - p^2_{\mathrm{II}}\,\delta_{11}\, m} = \frac{7}{1 - 2\cdot 4} = -1\,,$$

па су облици главних осцилација



Сл. 157

146.) Одредити кружне фреквенције и облике главних попречних осцилација штапа дужине l, ослоњеног на крајевима и оптерећеног са два терета $m_1 = m$ и $m_2 = \dfrac{m}{2}$ подједнако удаљених од ослонаца на растојању $\dfrac{l}{3}$. Масу штапа занемарити.

Диференцијалне једначине кретања су

$$y_1 + m\ddot{y}_1\,\delta_{11} + \frac{m}{2}\,\ddot{y}_2\,\delta_{21} = 0$$

$$y_2 + m\ddot{y}_2\,\delta_{12} + \frac{m}{2}\,\ddot{y}_2\,\delta_{22} = 0$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$y_1 = \lambda_1 \cos pt$$
$$y_2 = \lambda_2 \cos pt\,,$$

долазимо до једначина

$$\lambda_1 (1 - mp^2\,\delta_{11}) - \lambda_2 \frac{m}{2} p^2\,\delta_{21} = 0$$

$$-\lambda_1\, mp^2\,\delta_{12} + \lambda_2 \left(1 - \frac{m}{2} p^2\,\delta_{22}\right) = 0$$

Пошто је у нашем случају $\delta_{11} = \delta_{22}$ и $\delta_{12} = \delta_{21}$, фреквентна једначина гласи

$$\begin{vmatrix} 1 - mp^2\,\delta_{11} & -\dfrac{m}{2}p^2\,\delta_{12} \\ -mp^2\,\delta_{12} & 1 - \dfrac{m}{2}p^2\,\delta_{11} \end{vmatrix} = 0\,,$$

односно $\quad (1 - mp^2\,\delta_{11})\left(1 - \dfrac{m}{2}p^2\,\delta_{11}\right) - \dfrac{m^2}{2}p^4\,\delta_{12}^2 = 0\,,$

или $\quad m^2(\delta_{11}^2 - \delta_{12}^2)\,p^4 - 3\,\mathrm{m}\,\delta_{11}\,p^2 + 2 = 0\,,$

одакле је $\quad p^2_{\mathrm{I,\,II}} = \dfrac{3\,\delta_{11} \mp \sqrt{\delta_{11}^2 + 8\,\delta_{12}^2}}{2\,m\,(\delta_{11}^2 - \delta_{12}^2)}$

Пошто δ_{11} и δ_{12} имају исту вредност као и у претходном задатку, то је

$$p^2_{\mathrm{I,\,II}} = 16{,}2\,(24 \mp 21{,}35)\,\frac{EIg}{Gl^3}$$

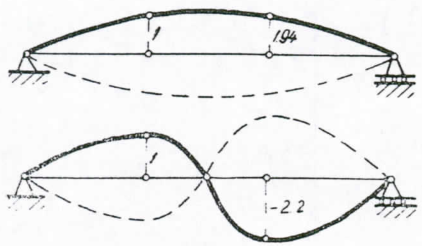
$$p^2_{\mathrm{I}} = 42{,}93\,\frac{EIg}{Gl^3}\ \sec^{-2}\ ; \qquad p^2_{\mathrm{II}} = 734{,}67\,\frac{EIg}{Gl^3}\ \sec^{-2}$$

$$p_{\mathrm{I}} = 6{,}55\sqrt{\frac{EIg}{Gl^3}}\ \sec^{-1}\ ; \qquad p_{\mathrm{II}} = 27{,}1\sqrt{\frac{EIg}{Gl^3}}\ \sec^{-1}$$

Односи амплитуда су

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\mathrm{I}} = \frac{2\,(1 - m\,p^2_{\mathrm{I}}\,\delta_{11})}{m\,p^2_{\mathrm{I}}\,\delta_{12}} = 0{,}94\,; \qquad \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\mathrm{II}} = \frac{2\,(1 - m\,p^2_{\mathrm{II}}\,\delta_{11})}{m\,p^2_{\mathrm{II}}\,\delta_{12}} = -\,2{,}2\,,$$

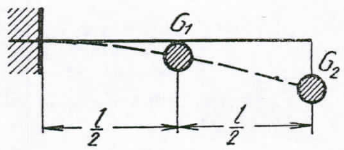
па су облици главних осцилација претстављени сликом 158.



Сл. 158

147.) Одредити кружне фреквенције и облике главних попречних осцилација конзоле оптерећене теретима $G_1 = 300$ kg. (који се налази у средини конзоле) и $G_2 = 400$ kg. (који се налази на крају конзоле). Дужина конзоле је $l = 3$ m. Попречни пресек конзоле има димензије 13×26 cm, а модул еластичности материјала конзоле је $E = 10^5$ kg/cm^2.

Диференцијалне једначине кретања у овом случају су једначине (131), а фреквентна једначина дата је изразом (133). Нађимо



Сл 159

$$\delta_{11},\ \delta_{22} \quad \text{и} \quad \delta_{21} = \delta_{12}$$

Знамо да је $y = \dfrac{Gl^3}{6EI}\left\{\left(\dfrac{z}{l}\right)^2\left[3\left(\dfrac{a}{l}\right)-\left(\dfrac{z}{l}\right)\right]\right\}$,

па је за δ_{11} $\qquad \left(\dfrac{z}{l}\right)=\dfrac{1}{2}$ и $\left(\dfrac{a}{l}\right)=\dfrac{1}{2}$,

па је $\qquad \delta_{11}=\dfrac{1}{24}\,\dfrac{l^3}{EI}$;

за δ_{22} је $\qquad \left(\dfrac{z}{l}\right)=1$ и $\left(\dfrac{a}{l}\right)=1$,

па је $\qquad \delta_{22}=\dfrac{1}{3}\,\dfrac{l^3}{EI}$;

за δ_{21} је $\qquad \left(\dfrac{z}{l}\right)=\dfrac{1}{2}$ и $\left(\dfrac{a}{l}\right)=1$,

па је $\qquad \delta_{21}=\delta_{12}=\dfrac{5}{48}\,\dfrac{l^3}{EI}$

Да бисмо упростили рачун ставимо да је

$$\delta_{11}=\frac{1}{8}\,\delta_{22}\ ; \qquad \delta_{21}=\delta_{12}=\frac{5}{16}\,\delta_{22}$$

и пошто је $\qquad m_1=\dfrac{G_1}{g}\ ; \qquad m_2=\dfrac{G_2}{g}$,

онда једначина (134) прелази у

$$p^2_{\mathrm{I,\,II}}=\frac{\left(\dfrac{G_1}{8}+G_2\right)\mp\sqrt{\left(\dfrac{G_1}{8}-G_2\right)^2+\dfrac{100\,G_1\,G_2}{256}}}{\dfrac{7}{128}\,G_1\,G_2\,\dfrac{\delta_{22}}{g}}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{3}\,\frac{l^3}{EI}=\frac{4\,l^3}{E\cdot bh^3}=\frac{4\cdot 300^3}{10^5\cdot 26\cdot 13^3}=0{,}0190\ \text{cm/kg.}\ ;$$

$$\delta_{12}=0{,}0060\ \text{cm/kg.}\ ; \qquad \delta_{11}=0{,}0024\ \text{cm/kg.}$$

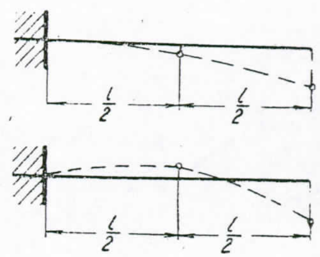
$$p_{\mathrm{I,\,II}}^2=\frac{437{,}5\mp 423}{0{,}113}\ \text{sec}^{-2}$$

$$p^2_{\mathrm{I}}=122\ \text{sec}^{-2}\ ; \qquad p_{\mathrm{I}}\approx 11\ \text{sec}^{-1}$$

$$p^2_{\mathrm{II}}=6952\ \text{sec}^{-2}\ ; \qquad p_{\mathrm{II}}\approx 83{,}3\ \text{sec}^{-1}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}}=\frac{m_2\,\delta_{12}\,p^2_{\mathrm{I}}}{1-m_1\,\delta_{11}\,p^2_{\mathrm{I}}}=3{,}65$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}}=\frac{m_2\,\delta_{12}\,p^2_{\mathrm{II}}}{1-m_1\,\delta_{11}\,p^2_{\mathrm{II}}}=-\,0{,}0244$$

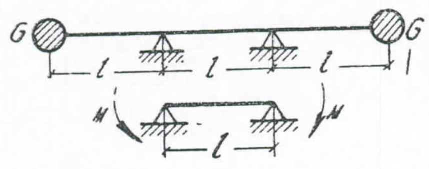


Према томе облици главних осцилација претстављени су сликом 160.

Сл. 160

148.) Одредити кружне фреквенције и облике главних попречних осцилација терета G, учвршћених на крајевима хоризонталне греде са два једнака препуста дужине l. Греда укупне дужине $3\,l$ слободно је ослоњена на два ослонца који су удаљени један од другог за дужину l. Моменат инерције попречног пресека греде је I, а модул еластичности материјале E. Масу греде занемарити.

Диференцијалне једначине кретања су једначине (131).



Сл. 161

Пошто је у овом случају

$$m_1 = m_2 = m$$

и због симетрије

$$\delta_{11} = \delta_{22} \; ; \qquad \delta_{21} = \delta_{12} \, ,$$

онда једначине из којих одређујемо односе амплитуда гласе

$$\lambda_1 (m \, \delta_{11} \, p^2 - 1) + \lambda_2 \, m \, p^2 \, \delta_{12} = 0$$

$$\lambda_1 \, m \, p^2 \, \delta_{12} + \lambda_2 (m \, p^2 \, \delta_{11} - 1) = 0 \, ,$$

а фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} m \, p^2 \, \delta_{11} - 1 & m \, p^2 \, \delta_{12} \\ m \, p^2 \, \delta_{12} & m \, p^2 \, \delta_{11} - 1 \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

одакле је

$$m \, p^2 \, \delta_{11} - 1 = \mp \, m \, p^2 \, \delta_{12} \, ,$$

или

$$p^2_{\mathrm{I}} = \frac{1}{m (\delta_{11} + \delta_{12})} \quad ; \qquad p^2_{\mathrm{II}} = \frac{1}{m (\delta_{11} - \delta_{12})}$$

Нађимо δ_{11} и δ_{12}

$$y_{11} = l \theta_1 + f_1^{\,k}$$

Пошто је

$$\theta_1 = \frac{Ml}{3EI} \quad \text{и} \quad f_1^{\,k} = \frac{Gl^3}{3EI} \, ,$$

то је

$$y_{11} = \frac{G l^2 \cdot l}{3EI} + \frac{Gl^3}{3EI} = \frac{2}{3} \frac{Gl^3}{EI} \, ,$$

па је

$$\delta_{11} = \frac{2}{3} \frac{l^3}{EI}$$

$$y_{12} = l \theta_2 + f_1^{\,k} \, ; \qquad \text{пошто је} \quad \theta_2 = -\frac{Ml}{6EI} \, ,$$

то је

$$y_{12} = -\frac{Gl^3}{6EI} + \frac{Gl^3}{3EI} = \frac{Gl^3}{6EI} \, ,$$

па је

$$\delta_{12} = \frac{1}{6} \frac{l^3}{EI}$$

Онда је

$$p^2_{\mathrm{I}} = \frac{EI}{ml^3 \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6} \right)} \; ; \qquad p^2_{\mathrm{II}} = \frac{EI}{ml^3 \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6} \right)} \; ;$$

односно

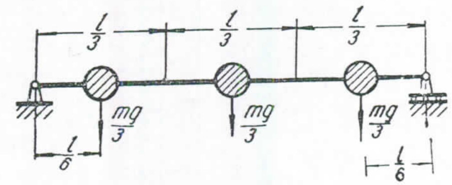
$$p_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{6}{5} \frac{EI}{ml^3}} \ \sec^{-1} \; ; \qquad p_{\mathrm{II}} = \sqrt{2 \frac{EI}{ml^3}} \ \sec^{-1} \; ;$$

Однос амплитуда биће

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\mathrm{I}} = \frac{m \, p^2_{\mathrm{I}} \, \delta_{12}}{1 - m p^2_{\mathrm{I}} \, \delta_{11}} = \frac{\dfrac{1}{5}}{1 - \dfrac{4}{5}} = 1$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\mathrm{II}} = \frac{m \, p^2_{\mathrm{II}} \, \delta_{12}}{1 - m p^2_{\mathrm{II}} \, \delta_{11}} = \frac{\dfrac{2}{6}}{1 - \dfrac{4}{3}} = -1$$

149.) Одредити кружне фреквенције главних попречних осцилација греде оптерећене теретима према следећој слици



Сл. 162

Диференцијалне једначине кретања су

$$y_1 + m_1 \, \ddot{y}_1 \, \delta_{11} + m_2 \, \ddot{y}_2 \, \delta_{21} + m_3 \, \ddot{y}_3 \, \delta_{31} = 0$$

$$y_2 + m_1 \, \ddot{y}_1 \, \delta_{12} + m_2 \, \ddot{y}_2 \, \delta_{22} + m_3 \, \ddot{y}_3 \, \delta_{32} = 0$$

$$y_3 + m_1 \, \ddot{y}_1 \, \delta_{13} + m_2 \, \ddot{y}_2 \, \delta_{23} + m_3 \, \ddot{y}_3 \, \delta_{33} = 0$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$y_1 = \lambda_1 \cos pt \; ; \qquad y_2 = \lambda_2 \cos pt \; ; \qquad y_3 = \lambda_3 \cos pt \; ,$$

долазимо до једначина

$$\lambda_1 (1 - m_1 \, \delta_{11} \, p^2) - \lambda_2 \, m_2 \, \delta_{21} \, p^2 - \lambda_3 \, m_3 \, \delta_{31} \, p^2 = 0$$

$$- \lambda_1 \, m_1 \, \delta_{12} \, p^2 + \lambda_2 (1 - m_2 \, \delta_{22} \, p^2) + \lambda_3 \, m_3 \, \delta_{32} \, p^2 = 0$$

$$- \lambda_1 \, m_1 \, \delta_{13} \, p^2 - \lambda_2 \, m_2 \, \delta_{23} \, p^2 + \lambda_3 (1 - m_3 \, \delta_{33} \, p^2) = 0$$

Пошто је у нашем случају $m_1 = m_2 = m_3 = \dfrac{m}{3}$,

и због симетрије $\delta_{11} = \delta_{33}$; $\delta_{21} = \delta_{23}$,

а по Maxwell-овој теореми о узајамности еластичних померања

$$\delta_{21} = \delta_{12} \; ; \qquad \delta_{31} = \delta_{13} \; ; \qquad \delta_{32} = \delta_{23} \; ,$$

онда фреквентна једначина гласи

$$\begin{vmatrix} 1-\dfrac{m\,p^2\,\delta_{11}}{3} & -\dfrac{mp^2\,\delta_{21}}{3} & -\dfrac{mp^2\,\delta_{31}}{3} \\ -\dfrac{mp^2\,\delta_{21}}{3} & 1-\dfrac{mp^2\,\delta_{22}}{3} & -\dfrac{mp^2\,\delta_{21}}{3} \\ -\dfrac{mp^2\,\delta_{31}}{3} & -\dfrac{mp^2\,\delta_{21}}{3} & 1-\dfrac{mp^2\,\delta_{11}}{3} \end{vmatrix} = 0$$

Нађимо δ_{11}, δ_{21}, δ_{31}, и δ_{22}.

Знамо да је $$y = \frac{Gl^3}{6EI}\left\{\frac{b}{l}\cdot\frac{z}{l}\left[1-\left(\frac{b}{l}\right)^2-\left(\frac{z}{l}\right)^2\right]\right\}$$

за δ_{11} је $\frac{z}{l} = \frac{1}{6}$ и $\frac{b}{l} = \frac{5}{6}$, па је $\delta_{11} = \frac{25}{3888}\frac{l^3}{EI}$;

за δ_{21} је $\frac{z}{l} = \frac{1}{6}$ и $\frac{b}{l} = \frac{1}{2}$, па је $\delta_{21} = \frac{13}{1296}\frac{l^3}{EI}$;

за δ_{31} је $\frac{z}{l} = \frac{1}{6}$ и $\frac{b}{l} = \frac{1}{6}$, па је $\delta_{31} = \frac{17}{3888}\frac{l^3}{EI}$;

за δ_{22} је $\frac{z}{l} = \frac{1}{2}$ и $\frac{b}{l} = \frac{1}{2}$, па је $\delta_{22} = \frac{1}{48}\frac{l^3}{EI}$

Ако обележимо са

$$\alpha = \frac{l^3}{11664\ EI},$$

онда је $\delta_{11} = 75\,\alpha$; $\delta_{21} = 117\,\alpha$; $\delta_{31} = 51\,\alpha$; $\delta_{22} = 243\,\alpha$,

па ће таблица утицајних коефицијената бити

$75\,\alpha$	$117\,\alpha$	$51\,\alpha$
$117\,\alpha$	$243\,\alpha$	$117\,\alpha$
$51\,\alpha$	$117\,\alpha$	$75\,\alpha$

а фреквентна једначина прелази онда у

$$\begin{vmatrix} 1-25\,\alpha\,mp^2 & -39\,\alpha\,mp^2 & -17\,\alpha\,mp^2 \\ -39\,\alpha\,mp^2 & 1-81\,\alpha\,mp^2 & -39\,\alpha\,mp^2 \\ -17\,\alpha\,mp^2 & -39\,\alpha\,mp^2 & 1-25\,\alpha\,mp^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ако означимо са

$$x = \frac{11664\,EI}{ml^3\,p^2} = \frac{1}{\alpha mp^2},$$

онда фреквентна једначина прелази у

$$\begin{vmatrix} x-25 & -39 & -17 \\ -39 & x-81 & -39 \\ -17 & -39 & x-25 \end{vmatrix} = 0,$$

што се може написати и

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 8-x \\ -78 & x-81 & -39 \\ x-42 & -39 & x-25 \end{vmatrix} = 0,$$

што кад се развије даје

$$x^3 - 131\,x^2 + 1344\,x - 2880 = 0,$$

или $$(x^2 - 128\,x + 960)(x-3) = 0,$$

тј. $$(x-120)(x-8)(x-3) = 0,$$

одакле је $x_1 = 120$; $x_2 = 8$; $x_3 = 3$

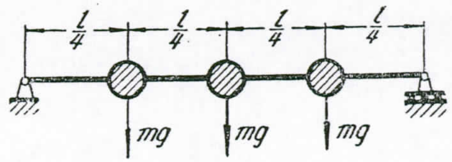
$$p^2 = \frac{11664}{x}\frac{EI}{ml^3}$$

$$p^2_{\mathrm{I}} = \frac{11664}{120}\frac{EI}{ml^3} = 97{,}2\,\frac{EI}{ml^3}; \qquad p_{\mathrm{I}} = 9{,}859\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}\ \sec^{-1}$$

$$p^2_{\mathrm{II}} = \frac{11664}{8}\frac{EI}{ml^3} = 1458\,\frac{EI}{ml^3}; \qquad p_{\mathrm{II}} = 38{,}184\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}\ \sec^{-1}$$

$$p^2_{\mathrm{III}} = \frac{11664}{3}\frac{EI}{ml^3} = 3888\,\frac{EI}{ml^3}; \qquad p_{\mathrm{III}} = 62{,}354\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}\ \sec^{-1}$$

150.) Одредити кружне фреквенције главних попречних осцилација и облике главних осцилација греде оптерећене једнаким теретима према слици (163). Греду сматрати слободно ослоњеном.



Сл. 163

Диференцијалне једначине кретања су исте као и у претходном задатку. Опет је

$\delta_{11} = \delta_{33}$; $\delta_{21} = \delta_{23}$

Пошто је

$$m_1 = m_2 = m_3 = m,$$

фреквентна једначина гласи

$$\begin{vmatrix} 1-mp^2\delta_{11} & -mp^2\delta_{21} & -mp^2\delta_{31} \\ -mp^2\delta_{21} & 1-mp^2\delta_{22} & -mp^2\delta_{21} \\ -mp^2\delta_{31} & -mp^2\delta_{21} & 1-mp^2\delta_{11} \end{vmatrix} = 0$$

Нађимо δ_{11}, δ_{21}, δ_{31} и δ_{22}

Знамо да је

$$y = \frac{G l^3}{6EI}\left\{\frac{b}{l}\cdot\frac{z}{l}\left[1-\left(\frac{b}{l}\right)^2-\left(\frac{z}{l}\right)^2\right]\right\}$$

за δ_{11} је $\dfrac{z}{l}=\dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{b}{l}=\dfrac{3}{4}$, па је $\delta_{11}=\dfrac{3}{256}\dfrac{l^3}{EI}$;

за δ_{21} је $\dfrac{z}{l}=\dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{b}{l}=\dfrac{1}{2}$, па је $\delta_{21}=\dfrac{11}{768}\dfrac{l^3}{EI}$;

за δ_{31} је $\dfrac{z}{l}=\dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{b}{l}=\dfrac{1}{4}$, па је $\delta_{31}=\dfrac{7}{768}\dfrac{l^3}{EI}$;

за δ_{22} је $\dfrac{z}{l}=\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{b}{l}=\dfrac{1}{2}$, па је $\delta_{22}=\dfrac{1}{48}\dfrac{l^3}{EI}$

Ако обележимо са $\alpha = \dfrac{l^3}{768\ EI}$

онда је $\delta_{11}=9\alpha$; $\delta_{21}=11\alpha$; $\delta_{31}=7\alpha$; $\delta_{22}=16\alpha$,

па ће таблица утицајних коефицијената бити

$$\begin{matrix} 9\alpha & 11\alpha & 7\alpha \\ 11\alpha & 16\alpha & 11\alpha \\ 7\alpha & 11\alpha & 9\alpha , \end{matrix}$$

а фреквентна једначина прелази у

$$\begin{vmatrix} 1-9\alpha mp^2 & -11\alpha mp^2 & -7\alpha mp^2 \\ -11\alpha mp^2 & 1-16\alpha mp^2 & -11\alpha mp^2 \\ -7\alpha mp^2 & -11\alpha mp^2 & 1-9\alpha mp^2 \end{vmatrix} = 0$$

Означимо са $\quad x = \dfrac{768\,EI}{ml^3\,p^2} = \dfrac{1}{\alpha\,mp^2}$,

па фреквентна једначина прелази у

$$\begin{vmatrix} x-9 & -11 & -7 \\ -11 & x-16 & -11 \\ -7 & -11 & x-9 \end{vmatrix} = 0 ,$$

што се може написати и

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2-x \\ -22 & x-16 & -11 \\ x-16 & -11 & x-9 \end{vmatrix} = 0$$

Кад се ова детерминанта развије добијамо

$$x^3 - 34x^2 - 78x - 28 = 0 ,$$

па је $\quad (x-2)(x^2-32x+14)=0$,

а одавде $\quad x_1 = 16+11\sqrt{2} = 31{,}55$; $x_2 = 2$; $x_3 = 16-11\sqrt{2} = 0{,}45$

$$p = \frac{768}{x}\,\frac{EI}{ml^3}$$

$$p^2_{\mathrm{I}} = \frac{768}{31{,}55}\,\frac{EI}{ml^3} = 24{,}4\,\frac{EI}{ml^3}\ \sec^{-2} ; \qquad p_{\mathrm{I}} = 4{,}93\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}\ \sec^{-1}$$

$$p^2_{\mathrm{II}} = \frac{768}{2}\,\frac{EI}{ml^3} = 384\,\frac{EI}{ml^3}\ \sec^{-2} ; \qquad p_{\mathrm{II}} = 19{,}6\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}\ \sec^{-1}$$

$$p^2_{\mathrm{III}} = \frac{768}{0{,}45}\,\frac{EI}{ml^3} = 1706{,}67\,\frac{EI}{ml^3}\ \sec^{-2} , \qquad p_{\mathrm{III}} = 41{,}8\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}\ \sec^{-1}$$

Једначине из којих ћемо одредити односе амплитуда осцилација у овом случају гласе

$$\lambda_1(1-mp^2\delta_{11}) - \lambda_2\,mp^2\delta_{21} - \lambda_3\,mp^2\delta_{31} = 0$$
$$-\lambda_1\,mp^2\delta_{21} + \lambda_2(1-mp^2\delta_{22}) - \lambda_3\,mp^2\delta_{21} = 0$$
$$-\lambda_1\,mp^2\delta_{31} - \lambda_2\,mp^2\delta_{21} + \lambda_3(1-mp^2\delta_{11}) = 0$$

Ако поделимо прву и другу од ових једначина са λ_1 добићемо

$$(1-mp^2\delta_{11}) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,mp^2\delta_{21} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\,mp^2\delta_{31} = 0$$

$$-mp^2\delta_{21} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(1-mp^2\delta_{22}) - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\,mp^2\delta_{21} = 0$$

За $\quad p^2_{\mathrm{II}} = 384\,\dfrac{EI}{ml^3}\sec^{-2}$ је

$1-mp^2\delta_{11} = -\dfrac{7}{2}$; $\quad mp^2\delta_{21} = \dfrac{11}{2}$, $\quad mp^2\delta_{31} = \dfrac{7}{2}$ и $\quad 1-mp^2\delta_{22} = -7$,

па горње две једначине прелазе у

$$-\frac{7}{2} - \frac{11}{2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\mathrm{II}} - \frac{7}{2}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{\mathrm{II}} = 0$$

$$-\frac{11}{2} - 7\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\mathrm{II}} - \frac{11}{2}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{\mathrm{II}} = 0$$

Решењем ових једначина по

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\mathrm{II}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{\mathrm{II}}$$

добијамо да је

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{II} = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{II} = -1$$

Из ова два односа за други квадрат фреквенције произилази

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^{II} = 0$$

При изналажењу осталих односа ради прегледнијег рада обележимо са

$$a = 1 - mp^2\,\delta_{11}\,; \quad b = mp^2\,\delta_{21}\,; \quad c = mp^2\,\delta_{31}\,; \quad d = 1 - mp^2\,\delta_{22}$$

Ако опет прве две једначине поделимо са λ_2 добићемо

$$a\,\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - b - c\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = 0$$

$$-b\,\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + d - b\,\frac{\lambda_2}{\lambda_2} = 0$$

Ако прву од ових једначина помножимо са b, а другу са $(-c)$ и то саберемо, добићемо

$$(ab + bc)\,\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = b^2 + dc\,, \quad \text{одакле је} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{b^2 + dc}{b\,(a + c)}$$

За

$$p^2{}_{I} = \frac{768}{x_1}\,\frac{EI}{ml^3}\,\sec^{-2}$$

је

$$a = 1 - mp^2\,\delta_{11} = \frac{7 + 11\sqrt{2}}{x_1}\,; \quad b = m\,\delta_{21}\,p^2 = \frac{11}{x_1}$$

$$c = m\,\delta_{31}\,p^2 = \frac{7}{x_1}\,; \quad d = 1 - mp^2\,\delta_{22} = \frac{11\sqrt{2}}{x_1}\,,$$

па је

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{I} = \frac{b^2 + dc}{b\,(a + c)} = \frac{11 + 7\sqrt{2}}{14 + 11\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ако у једначину

$$a\,\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - b - c\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = 0$$

сменимо

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{b^2 + dc}{b\,(a + c)}\,,$$

добићемо да је и

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{b^2 + dc}{b\,(a + c)}\,, \quad \text{па је и} \quad \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Из ова два односа за први квадрат фреквенције произилази

$$\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{I} = 1$$

За

$$p^2{}_{III} = \frac{768}{x_3}\,\frac{EI}{ml^3}\,\sec^{-2} \quad \text{је}$$

$$a_1 = \frac{7 - 11\sqrt{2}}{x_3}\,; \quad b_1 = \frac{11}{x_3}\,; \quad c_1 = \frac{7}{x_3}\,; \quad d_1 = -\frac{11\sqrt{2}}{x_3}\,,$$

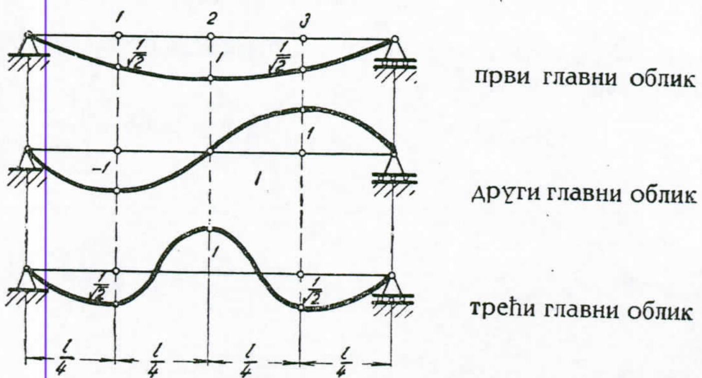
па је

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{III} = \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{III} = \frac{b_1{}^2 + d_1\,c_1}{b_1\,(a_1 + c_1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Из ова два односа за трећи квадрат фреквенције произилази

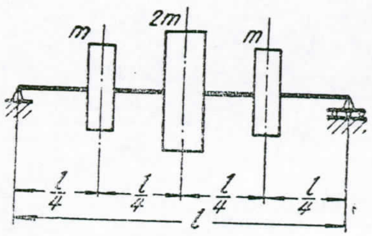
$$\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{III} = 1$$

Облици главних осцилација према томе су



Сл. 164

151.) На вратило дужине l навучена су три диска чије су масе m, $2\,m$ и m. Дискови су подједнако удаљени како међу собом тако и од крајева вратила. Одредити најнижу кружну фреквенцију осцилација помоћу приближног обрасца Dunkerley-а, а затим одредити тачне вредности за све три кружне фреквенције система и упоредити добијени резултат за прву кружну фреквенцију са резултатом добијеним помоћу обрасца Dunkerley-а.



Сл. 165

добијамо да је

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{II}=0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{II}=-1$$

Из ова два односа за други квадрат фреквенције произилази

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^{II}=0$$

При изналажењу осталих односа ради прегледнијег рада обележимо са

$$a=1-mp^2\delta_{11}\,;\quad b=mp^2\delta_{21}\,;\quad c=mp^2\delta_{31}\,;\quad d=1-mp^2\delta_{22}$$

Ако опет прве две једначине поделимо са λ_2 добићемо

$$a\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-b-c\frac{\lambda_3}{\lambda_2}=0$$

$$-b\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+d-b\frac{\lambda_3}{\lambda_2}=0$$

Ако прву од ових једначина помножимо са b, а другу са $(-c)$ и то саберемо, добићемо

$$(ab+bc)\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=b^2+dc\,,\quad \text{одакле је} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{b^2+dc}{b(a+c)}$$

За

$$p^2_{I}=\frac{768}{x_1}\,\frac{EI}{ml^3}\sec^{-2}$$

је

$$a=1-mp^2\delta_{11}=\frac{7+11\sqrt{2}}{x_1}\,;\qquad b=m\delta_{21}p^2=\frac{11}{x_1}$$

$$c=m\delta_{31}p^2=\frac{7}{x_1}\,;\qquad d=1-mp^2\delta_{22}=\frac{11\sqrt{2}}{x_1}\,,$$

па је

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{I}=\frac{b^2+dc}{b(a+c)}=\frac{11+7\sqrt{2}}{14+11\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ако у једначину

$$a\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-b-c\frac{\lambda_3}{\lambda_2}=0$$

сменимо

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{b^2+dc}{b(a+c)}\,,$$

добићемо да је и

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2}=\frac{b^2+dc}{b(a+c)}\,,\quad \text{па је и} \quad \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Из ова два односа за први квадрат фреквенције произилази

$$\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{I}=1$$

За

$$p^2_{III}=\frac{768}{x_3}\,\frac{EI}{ml^3}\sec^{-2} \quad \text{је}$$

$$a_1=\frac{7-11\sqrt{2}}{x_3}\,;\quad b_1=\frac{11}{x_3}\,;\quad c_1=\frac{7}{x_3}\,;\quad d_1=-\frac{11\sqrt{2}}{x_3}\,,$$

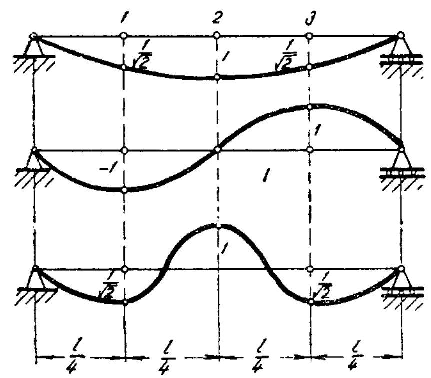
па је

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{III}=\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{III}=\frac{b_1^2+d_1c_1}{b_1(a_1+c_1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Из ова два односа за трећи квадрат фреквенције произилази

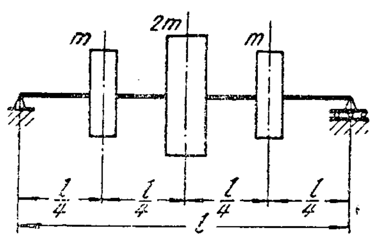
$$\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{III}=1$$

Облици главних осцилација према томе су



Сл. 164

151.) На вратило дужине l навучена су три диска чије су масе m, $2\,m$ и m. Дискови су подједнако удаљени како међу собом тако и од крајева вратила. Одредити најнижу кружну фреквенцију осцилација помоћу приближног обрасца Dunkerley-a, а затим одредити тачне вредности за све три кружне фреквенције система и упоредити добијени резултат за прву кружну фреквенцију са резултатом добијеним помоћу обрасца Dunkerley-a.



Сл. 165

Ако, слично као и у претходном задатку, обележимо са

$$\alpha = \frac{l^3}{768\,EI}\,,$$

онда ће таблица утицајних коефициената бити

$9\,\alpha$	$11\,\alpha$	$7\,\alpha$
$11\,\alpha$	$16\,\alpha$	$11\,\alpha$
$7\,\alpha$	$11\,\alpha$	$9\,\alpha$

Како је $\qquad \dfrac{1}{p^2_{\mathrm{I}}} \approx \Sigma \dfrac{m_i}{c_i} \approx \Sigma\, m_i\, \delta_{ii}\,,\quad$ то је

$$\frac{1}{p^2_{\mathrm{I}}} \approx m \cdot 9\alpha + 2m \cdot 16\alpha + m \cdot 9\,\alpha = m\alpha\,(9 + 32 + 9) = 50\,\alpha m$$

$$\frac{1}{p^2_{\mathrm{I}}} \approx \frac{50\,ml^3}{768\,EI}\,,$$

па је $\qquad p^2_{\mathrm{I}} \approx 15{,}35\,\dfrac{EI}{ml^3}\,;\qquad p_{\mathrm{I}} = 3{,}92\,\sqrt{\dfrac{EI}{ml^3}}\ \mathrm{sec}^{-1}$

Да би добили тачне вредности за кружне фреквенције обележимо са

$$x = \frac{768\,EI}{ml^3\,p^2} = \frac{1}{\alpha m\,p^2}\,,$$

па ће, слично као и у претходном задатку, фреквентна једначина бити

$$\begin{vmatrix} x-9 & -11 & -7 \\ -22 & x-32 & -22 \\ -7 & -11 & x-9 \end{vmatrix} = 0\,,$$

што се може написати и

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2-x \\ -44 & x-32 & -22 \\ x-16 & -11 & x-9 \end{vmatrix} = 0\,,$$

одакле је $\qquad x^3 - 50x^2 + 124x + 56 = 0\,,$

односно $\qquad (2-x)\,[484 - x^2 + 48x - 512] = 0\,,$

или $\qquad (2-x)\,(x^2 - 48x + 28) = 0\,,$

одакле је $\qquad x_1 = 47{,}41\,;\qquad x_2 = 2\quad$ и $\quad x_3 = 0{,}59$

Пошто је $\qquad p_i^2 = \dfrac{768}{x_i}\,\dfrac{EI}{ml^3}\,,$

то је $\qquad p_{\mathrm{I}} = 4{,}026\,\sqrt{\dfrac{EI}{ml^3}}\ \mathrm{sec}^{-1}$

$$p_{\mathrm{II}} = 19{,}4\,\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}\ \mathrm{sec}^{-1}$$

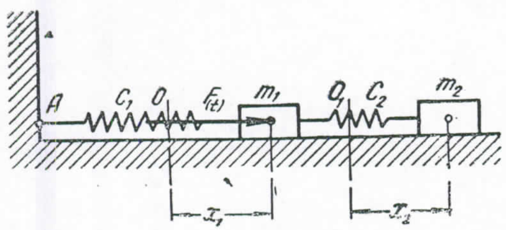
$$p_{\mathrm{III}} = 37{,}3\,\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}\ \mathrm{sec}^{-1}$$

Тражена грешка је $\qquad \dfrac{4{,}026 - 3{,}920}{4{,}026} \cdot 100 \approx 2{,}5\%$

---

14. ПРИНУДНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ СИСТЕМА СА ДВА СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

Посматраћемо потпуно исти случај кретања двеју материјалних тачака маса m_1 и m_2, под истим условима као и у случају линеарних осцилација, с том разликом што ће на прву масу m_1 деловати и поремећајна сила, која се мења по закону $F(t) = h \cos pt$. Сличним поступком као и у случају линеарних осцилација, долазимо до диференцијалних једначина кретања, које у овом случају гласе



Сл. 166

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) = h \cos pt$$
$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = 0 \tag{140}$$

Потражимо решење ових једначина у облику

$$x_1 = \lambda_1 \cos pt,$$
$$x_2 = \lambda_2 \cos pt$$

Тада долазимо до једначина

$$\lambda_1 (c_1 + c_2 - m_1 p^2) - \lambda_2 c_2 = h$$
$$- c_2 \lambda_1 + \lambda_2 (c_2 - m_2 p^2) = 0\,, \tag{141}$$

одакле је

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} h & -c_2 \\ 0 & c_2 - m_2 p^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 p^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 p^2 \end{vmatrix}}\,; \quad \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 p^2 & h \\ -c_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 p^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 p^2 \end{vmatrix}}$$

односно

$$\lambda_1 = \frac{h (c_2 - m_2 p^2)}{(c_1 + c_2 - m_1 p^2)(c_2 - m_2 p^2) - c_2^2}$$
$$\lambda_2 = \frac{h c_2}{(c_1 + c_2 - m_1 p^2)(c_2 - m_2 p^2) - c_2^2} \tag{142}$$

Из израза за амплитуду прве масе види се да ће у случају кад је испуњен услов

$$c_2 = m_2 p^2\,, \tag{143}$$

амплитуда прве масе бити равна нули, тј.

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = -\frac{h}{c_2}$$

Решења једначина (140) у овом случају биће

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -\frac{h}{c_2} \cos pt \tag{144}$$

Према томе, прва маса остаје у миру док се друга креће супротно од смера пертурбационе силе. Ово се користи код *динамичких апсорбера*, пошто се згодним избором масе m_2 може постићи да маса m_1 не осцилује, односно да остане у миру.

Међутим не треба мислити да се на овај начин може умирити осциловање произвољно велике масе m_1, са произвољно малом масом m_2, ако опруга буде имала крутост коју даје услов (143). Стварно при малој маси m_2 и датој кружној фреквенцији p, и крутост c_2 треба да је мала, али у том случају ће амплитуда масе m_2 бити врло велика, па ту чињеницу треба имати у виду при прорачуну динамичких апсорбера. Апсорбер се може употребити само у случају ако поремећајна сила има строго константну кружну фреквенцију p. Ако великој маси m_1 присајединимо малу масу m_2 добијамо систем са два степена слободе кретања, при чему је једна од кружних фреквенција система блиска сопственој кружној фреквенцији $\sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$ прве масе при отсуству друге. Ако се тада и p мало разликује од ове кружне фреквенције, може наступити резонанца, па ће апсорбер имати супротно дејство од жељеног, тј. појачаће осцилације прве масе.

Примери

152.) Фундамент машине тежине $G = 100\,t$ постављен на еластичном земљишту изводи принудне вертикалне осцилације под дејством вертикалне пертурбационе силе, која се мења по закону

$F = 10 \sin \omega t\ t$. У циљу амортизовања осцилација у случају резонанце, која наступа при угаоној брзини вратила машине $\omega = 100$ $\sec^{-1}$, постављен је амортизер у виду тешког рама постављеног на еластичним опругама (упореди цртеж уз задатак бр. 131). Одредити тежину рама G_2 и укупну крутост c_2 опруга амортизера, тако да амплитуда принудних осцилација фундамента при горе наведеној брзини обртања тежи нули, а амплитуда осцилација амортизера не прелази 2 mm.

У овом случају треба да је

$$p^2 = \frac{c_2}{m_2}\ ; \qquad \lambda_2 = -\frac{h}{c_2}\ ; \qquad |\lambda_2| = \frac{h}{c_2}$$

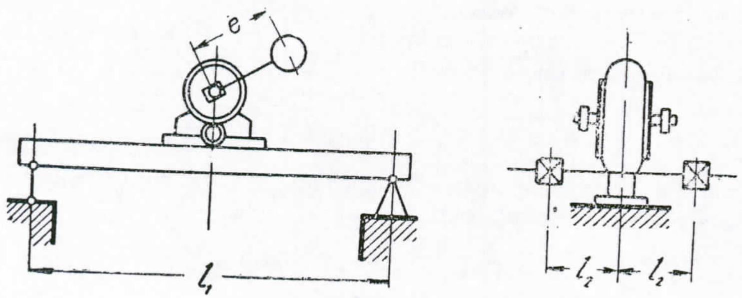
$$c_2 = \frac{h}{\lambda_2} = \frac{10}{2 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^3 \text{ t/m}$$

$$p^2 = \frac{c_2 g}{G_2}\ ; \qquad G_2 = \frac{c_2 g}{p^2} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81}{10^2} = 4{,}905 \text{ t}.$$

153.) На греди са два ослонца тежине 15 kg., распона $l = 1{,}7$ m, чији је моменат инерције попречног пресека $I_1 = 20{,}9$ cm^4 и $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm^2 постављен је неуравнотежен мотор тежине 10,9 kg, са нормалним бројем обртаја $n = 1420$ obr/min. Неуравнотеженост мотора изазвана је од два ексцентрично постављена терета тежине по 0,09 kg. и ексцентрицитета $e = 1{,}9$ cm.

При наведеној угаоној брзини вратила мотора греда је близу резонанце. Да би амортизовали штетне вибрације греди су додата два терета на еластичним штаповима.

Изабрати потребне тежине додатих терета.



Сл. 167

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m_0}} = \sqrt{\frac{c}{m + \frac{17}{35} m_1}} = \sqrt{\frac{cg}{G + \frac{17}{35} G_1}}$$

$$c = \frac{48 E I_1}{l_1^3} = \frac{48 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 20{,}9}{170^3} = 427 \text{ kg/cm}.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{427 \cdot 981}{10{,}9 + \frac{17}{35} \cdot 15}} = 152 \sec^{-1}$$

Кружна фреквенција пертурбационе силе износи

$$p = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 1420}{30} \approx 149 \sec^{-1}$$

Као што видимо p је блиско ω, тј. резонанца је врло близу.

Пертурбациона сила је

$$F_p = 2\, m p^2 e \sin pt,$$

а њена амплитуда је

$$C = \frac{2 \cdot 0{,}09}{981} \cdot 1{,}9 \cdot 149^2 = 7{,}8 \text{ kg}.$$

Амплитуда принудне осцилације је

$$A = f_{ст} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} = \frac{7{,}8}{427} \cdot \frac{1}{1 - \frac{149^2}{152^2}} = 0{,}45 \text{ cm}.$$

Ако узмемо тежине терета $G_1 = 0{,}63$ kg, а моменат инерције попречног пресека малих конзола $I_2 = 0{,}0268$ cm^4, тада добијамо из услова да је фреквенција слободних осцилација амортизера равна фреквенцији пертурбационе силе

$$\omega^2 = \frac{c_2}{m_2} = \frac{3 E I_2 g}{G_2 l_2^3}$$

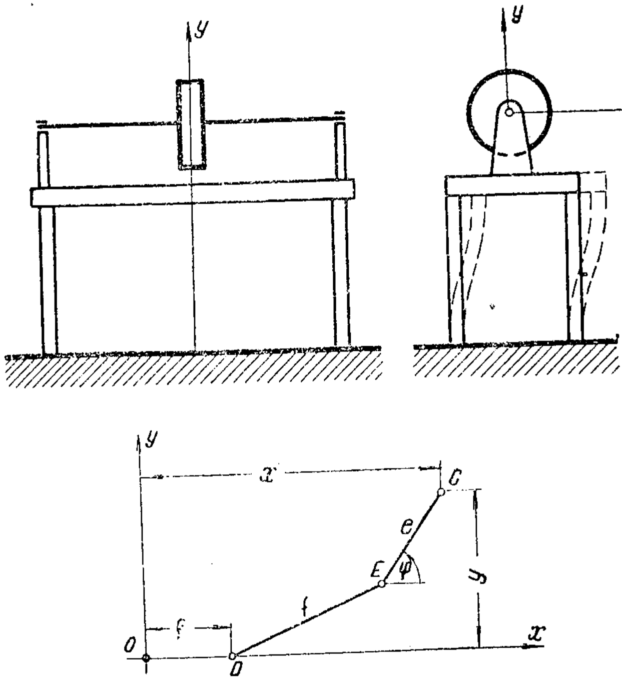
$$l_2 = \sqrt[3]{\frac{3 E I_2 g}{\omega^2 G_2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 0{,}0268 \cdot 981}{149^2 \cdot 0{,}63}} = 22{,}8 \text{ cm}.$$

Амплитуда амортизера износи

$$D = \frac{C}{2 c_2} = \frac{C}{2 \omega^2 m_2} = \frac{Cg}{2 \omega^2 G_2} = \frac{7{,}8 \cdot 981}{2 \cdot 149^2 \cdot 0{,}63} \approx 2{,}7 \text{ mm}.$$

154.) Турбогенератор који се обрће константном брзином постављен је на плочи ослоњеној о стубове. Услед бочне савитљивости стубова плоча врши мале хоризонталне осцилације. Проучити осцилације плоче у правцу управном на осу вратила и испитати како оне утичу на промену критичне брзине вратила.

Претпостављамо да је раван ротора Oxy истовремено раван симетрије целог система и зато посматрамо кретање диска у тој равни.



Сл. 168

Увешћемо следеће ознаке:

$\overline{OD} = \xi$ хоризонтално померање плоче услед савитљивости стубова,

$\overline{DE} = f$ угиб вратила за време осцилација,

$\overline{EC} = e$ ексцентрицитет ротора генератора.

Тачка E претставља продор геометриске осовине вратила кроз раван Oxy.

За генералисане координате усвојићемо ξ, затим x и y, тј. координате тежишта C диска и његов угао ротације φ.

Ако су m и m_1 масе плоче и делова мотора у чврстој вези са њом, односно ротора, а J моменат инерције ротора у односу на осу обртања, биће кинетичка енергија система дата изразом

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) m_1 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$$

Означимо са **c** крутост стубова на савијање, а са c_1 крутост вратила. Потенцијална енергија система састоји се од потенцијалне енергије угиба стубова и вратила.

$$E_p = \frac{c}{2}\xi^2 + \frac{c_1}{2} f^2 ,$$

где је $\qquad f^2 = \overline{DE}^2 = (x - \xi - e\cos\varphi)^2 + (y - e\sin\varphi)^2 ,$

па је $\qquad E_p = \frac{c}{2}\xi^2 + \frac{c_1}{2}\left[(x - \xi - e\cos\varphi)^2 + (y - e\sin\varphi)^2\right]$

Претпостављамо даље да на ротор делује такав моменат торзије M_t, који одржава једнолико кружно кретање. У том случају угаона брзина је константна, а угао $\varphi = \omega t$.

Пошто је спрег M_t једина генералисана сила ако унесемо изразе E_k и E_p у једначине Lagrange-а добићемо следеће диференцијалне једначине кретања система

$$m\ddot{\xi} + c\,\xi - c_1 (x - \xi - e\cos\varphi) = 0$$

$$m_1 \ddot{x} + c_1 (x - \xi - e\cos\varphi) = 0$$

$$m_1 \ddot{y} + c_1 (y - e\sin\varphi) = 0$$

$$J\ddot{\varphi} + ec_1 [(x - \xi - e\cos\varphi)\sin\varphi - (y - e\sin\varphi)\cos\varphi] = M_t$$

Узимајући у обзир да је $\varphi = \omega t$, прве три једначине добиће следећи облик

$$m\ddot{\xi} + (c + c_1)\xi - c_1 x = -ec_1\cos\omega t$$

$$m_1\ddot{x} + c_1 x - c_1\xi = ec_1\cos\omega t$$

$$m_1\ddot{y} + c_1 y = ec_1\sin\omega t$$

Ове три једначине претстављају принудне осцилације система. Пошто трећа једначина зависи само од координате y закључујемо да вертикалне осцилације не зависе од савитљивости стубова и да је одговарајућа критична брзина

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} ,$$

тј. не разликује се од критичне брзине при непомичним лежиштима.

Принудна вертикална осцилација дата је изразом

$$y = \frac{c_1 e}{m\left(\frac{c_1}{m} - \omega^2\right)} \sin\omega t$$

Да бисмо нашли хоризонталне осцилације претпоставићемо решење прве две једначине у облику

$$x = \lambda_1 \cos \omega t \; ; \qquad \xi = \lambda_2 \cos \omega t \, ,$$

при чему долазимо до једначина

$$\begin{aligned} (-m_1 \omega^2 + c_1)\,\lambda_1 - c_1\,\lambda_2 &= e c_1 \\ -c_1\,\lambda_1 + (-m\omega^2 + c + c_1)\,\lambda_2 &= -e c_1 \end{aligned} \qquad (a)$$

Да бисмо добили критичне брзине ω_2 и ω_3 морамо наћи фреквенције слободних хоризонталних осцилација система. У том циљу изједначићемо детерминанту система са нулом

$$\begin{vmatrix} -m_1 \omega^2 + c_1 & -c_1 \\ -c_1 & -m\omega^2 + c + c_1 \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

што у развијеном облику даје

$$(-m_1 \omega^2 + c_1)(-m\omega^2 + c + c_1) - c_1^2 = 0$$

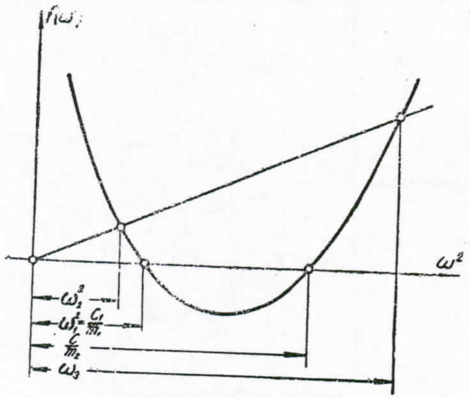
$$(-m_1 \omega^2 + c_1)(-m\omega^2 + c) - c_1 m_1 \omega^2 = 0$$

Да бисмо добили критичне брзине ω_2 и ω_3 претставићемо графички следеће функције од ω^2

$$f_1(\omega^2) = (-m_1 \omega^2 + c_1)(-m\omega^2 + c)$$

$$f_2(\omega^2) = c_1 m_1 \omega^2$$

Прва функција претставља параболу која сече осу ω^2 у тачкама $\dfrac{c_1}{m_1}$ и $\dfrac{c}{m}$, док је друга права линија која пролази кроз координантни почетак. У њиховом пресеку леже вредности корена ω_2 и ω_3.



Сл. 169

Видимо да при оваквом постављању турбогенератора на стубове имамо у ствари три критичне брзине ω_1, ω_2 и ω_3, од којих критична брзина ω_1 при непомичном темељу машине лежи између критичних брзина у односу на хоризонталне осцилације ослонаца.

У случају да је угаона брзина ω различита од критичне брзине можемо из (a) да нађемо амплитуде принудних осцилација система.

Тако је

$$\lambda_1 = \frac{e c_1(-m\omega^2 + c + c_1) - e c_1^2}{\Delta}$$

и

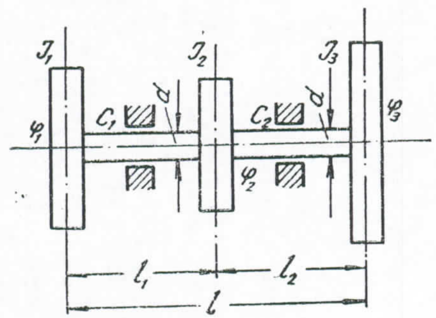
$$\lambda_2 = \frac{-e\,c_1(-m_1 \omega^2 + c_1) + e c_1^2}{\Delta} \, ,$$

где Δ означава детерминанту система.

15. ТОРЗИОНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ СА ВИШЕ СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

Да бисмо упростили проблем посматраћемо прво торзионе осцилације вратила на коме се налазе три диска, па ћемо потом по аналогији донети закључке и за случај да се на вратилу налазе n дискова.

Нека се на вратилу дужине l и пречника d (који може бити и променљив) налазе три диска чији су моменти инерције у односу на осу обртања J_1, J_2 и J_3. Ако на крајње дискове делујемо спрегом и потом утицај спрега отстранимо наступиће осцилаторно кретање. Нађимо диференцијалне једначине овог кретања.



Сл. 170

Радићемо помоћу Lagrange-евих једначина кретања. За генералисане координате узећемо углове φ_1, φ_2 и φ_3.

Кинетичка енергија система биће равна збиру кинетичких енергија појединих ротора

$$E_k = E_{k\,1} + E_{k\,2} + E_{k\,3}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\left(J_1\dot{\varphi}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2 + J_3\dot{\varphi}_3^2\right) \tag{a}$$

Потенцијална енергија система биће равна збиру потенцијалних енергија вратила дужина l_1 и l_2

$$E_p = E_{p\,1} + E_{p\,2}$$

Знамо да је при ротационом кретању

$$E_p = \int_0^\varphi M\,d\varphi$$

Моменат торзије је $M = c\varphi$, где је c крутост која карактерише особине вратила (материјал, дужину, пречник) и претставља моме-

нат којим треба деловати на вратило да би угао торзије био раван јединици. Као што знамо из отпорности материјала угао торзије је

$$\varphi = \frac{Ml}{\mathbf{G}\,I_0},$$

па је

$$M = \frac{\mathbf{G}\,I_0}{l}\,\varphi = c\varphi,$$

односно

$$c = \frac{\mathbf{G}\,I_0}{l}$$

и има димензију

$$[c] = FL$$

У нашем случају је

$$c_1 = \frac{\mathbf{G}\,d^4\pi}{32\,l_1} \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{\mathbf{G}\,d^4\pi}{32\,l_2}$$

Потенцијална енергија појединих делова вратила је

$$E_{p\,1} = \int_0^\varphi c_1\varphi\,d\varphi = c_1\frac{\varphi^2}{2}$$

Како је

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

онда је

$$E_{p\,1} = \frac{1}{2}c_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

$$E_{p\,2} = \int_0^\varphi c_2\varphi\,d\varphi = c_2\frac{\varphi^2}{2}$$

Сада је

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_3,$$

па је

$$E_{p\,2} = \frac{1}{2}c_2(\varphi_2 - \varphi_3)^2,$$

односно

$$E_p = \frac{1}{2}\left[c_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + c_2(\varphi_2 - \varphi_3)^2\right] \tag{b}$$

Диференцирањем једначина (a) и (b) налазимо потребне чланове за Lagrange-еве једначина кретања

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) = J_1\ddot{\varphi}_1; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\varphi}_2}\right) = J_2\ddot{\varphi}_2; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\varphi}_3}\right) = J_3\ddot{\varphi}_3$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial\varphi_1} = \frac{\partial E_k}{\partial\varphi_2} = \frac{\partial E_k}{\partial\varphi_3} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial\varphi_1} = c_1(\varphi_1 - \varphi_2); \quad \frac{\partial E_p}{\partial\varphi_2} = -c_1(\varphi_1 - \varphi_2) + c_2(\varphi_2 - \varphi_3); \quad \frac{\partial E_p}{\partial\varphi_3} = -c_2(\varphi_2 - \varphi_3),$$

па су диференцијалне једначине кретања

$$\left|\begin{aligned} & J_1\ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ & J_2\ddot{\varphi}_2 - c_1(\varphi_1 - \varphi_2) + c_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \\ & J_3\ddot{\varphi}_3 - c_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \end{aligned}\right. \qquad (145)$$

Потражимо решење ових једначина у облику

$$\varphi_1 = \lambda_1 \cos pt\,; \qquad \varphi_2 = \lambda_2 \cos pt\,; \qquad \varphi_3 = \lambda_3 \cos pt$$

Тада долазимо до једначина

$$\left|\begin{aligned} & \lambda_1(c_1 - J_1p^2) - \lambda_2 c_1 = 0 \\ & -\lambda_1 c_1 + \lambda_2(c_1 + c_2 - J_2p^2) - \lambda_3 c_2 = 0 \\ & -\lambda_2 c_2 + \lambda_3(c_2 - J_3p^2) = 0 \end{aligned}\right. \qquad (146)$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} c_1 - J_1p^2 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - J_2p^2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 - J_3p^2 \end{vmatrix} = 0$$

одакле је

$$p^4 - \left(\frac{J_1 + J_2}{J_1J_2}c_1 + \frac{J_2 + J_3}{J_2J_3}c_2\right)p^2 + \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1J_2J_3}c_1c_2 = 0\,, \qquad (147)$$

при чему је један корен $p^2 = 0$, а остала два се добијају из горње једначине.

Однос амплитуда добијамо из једначина (146)

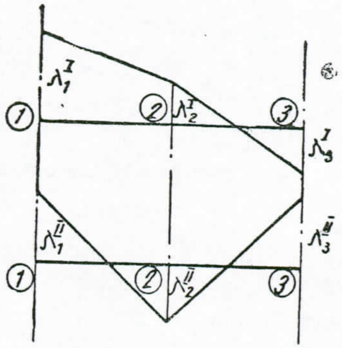
$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} = \frac{c_1}{c_1 - J_1p^2_{\mathrm{I}}} = \psi_1\,; && \lambda_1^{\mathrm{I}} = \psi_1\lambda_2^{\mathrm{I}}\,; && \psi_1 > 0 \\ & \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} = \frac{c_1}{c_1 - J_1p_{\mathrm{II}}^2} = \psi_2\,; && \lambda_1^{\mathrm{II}} = \psi_2\lambda_2^{\mathrm{II}}\,; && \psi_2 < 0 \\ & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^{\mathrm{I}} = \frac{c_2 - J_3p^2_{\mathrm{I}}}{c_2} = \psi_3\,; && \lambda_2^{\mathrm{I}} = \psi_3\lambda_3^{\mathrm{I}}\,; && \psi_3 < 0 \\ & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^{\mathrm{II}} = \frac{c_2 - J_3p^2_{\mathrm{II}}}{c_2} = \psi_4\,; && \lambda_2^{\mathrm{II}} = \psi_4\lambda_3^{\mathrm{II}}\,; && \psi_4 < 0 \end{aligned} \qquad (148)$$

Односе $\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$ добијамо из односа $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ и $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$. При томе је

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{\mathrm{I}} = \psi_5\,; \qquad \lambda_1^{\mathrm{I}} = \psi_5\lambda_3^{\mathrm{I}}\,; \qquad \psi_5 < 0$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{\mathrm{II}} = \psi_6\,; \qquad \lambda_1^{\mathrm{II}} = \psi_6\lambda_3^{\mathrm{II}}\,; \qquad \psi_6 > 0$$

Према томе облици главних осцилација биће*



Сл. 171

Решење једначина (145) биће

$$\left|\begin{aligned} \varphi_1 &= \lambda_1^{\mathrm{I}}\cos p_{\mathrm{I}}t + \lambda_1^{\mathrm{II}}\cos p_{\mathrm{II}}t + \lambda_1^{\mathrm{III}}\cos p_{\mathrm{III}}t \\ \varphi_2 &= \lambda_2^{\mathrm{I}}\cos p_{\mathrm{I}}t + \lambda_2^{\mathrm{II}}\cos p_{\mathrm{II}}t + \lambda_2^{\mathrm{III}}\cos p_{\mathrm{III}}t \\ \varphi_3 &= \lambda_3^{\mathrm{I}}\cos p_{\mathrm{I}}t + \lambda_3^{\mathrm{II}}\cos p_{\mathrm{II}}t + \lambda_3^{\mathrm{III}}\cos p_{\mathrm{III}}t \end{aligned}\right. \,, \quad \text{где је } p_{\mathrm{III}} = 0$$

Произвољне константе одређујемо из почетних услова кретања.

По аналогији ако се на вратилу налазе n-дискова, чији су моменти инерције у односу на осу обртања $J_1, J_2, J_3, \ldots, J_n$, а јединични моменти делова вратила између њих $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$, онда ако будемо радили помоћу Lagrange-евих једначина кретања, а за генералисане координате узмемо одговарајуће углове $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n$ добићемо да су кинетичка и потенцијална енергија система дате изразима

$$E_k = \frac{1}{2}\left(J_1\dot{\varphi}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2 + \cdots + J_n\dot{\varphi}_n^2\right)$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left[c_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + c_2(\varphi_2 - \varphi_3)^2 + \cdots + c_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n)^2\right]\,, \qquad (c)$$

а диференцијалне једначине кретања биће

$$\left|\begin{aligned} & J_1\ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ & J_2\ddot{\varphi}_2 - c_1(\varphi_1 - \varphi_2) + c_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & J_{n-1}\ddot{\varphi}_{n-1} - c_{n-2}(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) + c_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0 \\ & J_n\ddot{\varphi}_n - c_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0 \end{aligned}\right. \,, \qquad (149)$$

* Претпоставља се да је $\frac{J_3}{p_{\mathrm{II}}} > \frac{J_1}{p_{\mathrm{I}}}$

док ће фреквентна једначина бити

$$\begin{vmatrix} c_1-J_1p^2 & -c_1 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2-J_2p^2 & -c_2 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_1+c_3-J_3p^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -c_{n-1} & c_{n-1}-J_np^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (150)$$

Тако би за $n=2$ диференцијалне једначине кретања биле

$$\left.\begin{aligned} J_1\ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1-\varphi_2) &= 0 \\ J_2\ddot{\varphi}_2 - c_1(\varphi_1-\varphi_2) &= 0 \end{aligned}\right| , \qquad (151)$$

а фреквентна једначина би гласила

$$\begin{vmatrix} c_1-J_1p^2 & -c_1 \\ -c_1 & c_1-J_2p^2 \end{vmatrix} = 0 \,,$$

односно

$$p^2 - \frac{J_1+J_2}{J_1J_2}\,c_1 = 0 \qquad (152)$$

За $n=4$ имали бисмо

$$\left.\begin{aligned} J_1\ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1-\varphi_2) &= 0 \\ J_2\ddot{\varphi}_2 - c_1(\varphi_1-\varphi_2) + c_2(\varphi_2-\varphi_3) &= 0 \\ J_3\ddot{\varphi}_3 - c_2(\varphi_2-\varphi_3) + c_3(\varphi_3-\varphi_4) &= 0 \\ J_4\ddot{\varphi}_4 - c_3(\varphi_3-\varphi_4) &= 0 \end{aligned}\right| , \qquad (153)$$

а фреквентна једначина би била

$$\begin{vmatrix} c_1-J_1p^2 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2-J_2p^2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2+c_3-J_3p^2 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3-J_4p^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

односно

$$p^6 - \left(\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}c_1 + \frac{J_2+J_3}{J_2J_3}c_2 + \frac{J_3+J_4}{J_3J_4}c_3\right)p^4 +$$

$$+\left(\frac{J_1+J_2+J_3}{J_1J_2J_3}c_1c_2 + \frac{J_1+J_2}{J_1J_2}\cdot\frac{J_3+J_4}{J_3J_4}c_1c_3 + \frac{J_2+J_3+J_4}{J_2J_3J_4}c_2c_3\right)p^2 -$$

$$-\frac{J_1+J_2+J_3+J_4}{J_1J_2J_3J_4}c_1c_2c_3 = 0 \,, \qquad (154)$$

при чему све фреквентне једначине имају по један корен $p^2=0$.

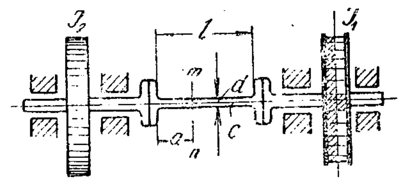
Напомена: Приметимо да између линеарних и торзионих осцилација постоји потпуна аналогија, тако да све једначине изведене за једну врсту осцилација важе и за другу. Аналогија између појединих величина дата је таблицом:

Линеарне осцилације		Торзионе осцилације	
линеарна елонгација	x [cm];	угаона елонгација	φ [rad]
линеарна брзина	$\dot{x}$ [cm/sec];	угаона брзина	$\dot{\varphi}$ [rad/sec]
сила	G [kg];	моменат силе	M [kgcm]
маса	m [kgsec^2/cm];	моменат инерц. масе	J [kgcmsec^2]
крутост	c [kg/cm];	јединични моменат	c [kgcm]
јединички угиб	δ [cm/kg];	јединични угиб	δ [1/kgcm]
кружна фрекв. сопств. осцилац.	$k=\sqrt{\dfrac{c}{m}}$ [sec^{-1}];	кружна фрекв. сопств. осцилац.	$p=\sqrt{\dfrac{c}{J}}$ [sec^{-1}]
периодична сила	$F(t)$ [kg];	периодични моменат	$M(t)$ [kgcm]
линеарни отпор	n [kgsec/cm];	отпор	n [kgcmsec]

Примери

155.) У циљу експерименталног испитивања регулације хидрауличних турбина, конструисан је уређај који се састоји из Francis-ове турбине, чији диск има моменат инерције у односу на осу обртања $J_1 = 5$ kgcmsec^2, замајца са моментом инерције $J_2 = 150$ kgcmsec^2 и еластичног вратила 0, које везује диск турбине са замајцем. Дужина вратила је $l = 1552$ mm, његов пречник је $d = 25{,}4$ mm. Модул клизања материјала вратила је $\mathbf{G} = 8{,}8\cdot 10^5$ kg/cm^2.

Занемарујући масу вратила и не узимајући у обзир торзију његових задебљалих делова, наћи пресек $m-n$ вратила, који при слободним осцилацијама датог система остаје непомичан (чворни пресек) и прорачунати период T слободних осцилација система.



Сл. 172

Диференцијалне једначине кретања у овом случају су једначине (151), а фреквентна једначина дата је изразом (152).

$$c = \frac{\mathbf{G}\,d^4\pi}{32\,l} = \frac{88\cdot 10^4\cdot 2{,}54^4\pi}{32\cdot 155{,}2} \approx 2{,}33\cdot 10^4 \text{ kgcm.}$$

$$p^2 = \frac{2{,}33 \cdot 10^4 \cdot 155}{750} = 0{,}482 \cdot 10^4 \ \sec^{-2}$$

$$p \approx 69{,}4 \ \sec^{-1}$$

Знамо да је

$$a = \frac{J_1}{J_1 + J_2}\, l = \frac{5}{150+5} \cdot 155{,}2 \approx 5 \text{ cm}.$$

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{69{,}4} = 0{,}091 \ \text{sec},$$

156.) Одредити фреквенцију слободних торзионих осцилација челичног вратила елисе паробродa. Вратило има дужину $l = 50$ m, а пречник $d = 35$ cm. Моменат инерције обртних маса навучених на једном крају вратила је $J_1 = 390000$ kgcmsec², а моменат инерције елисе причвршћене на другом крају вратила је $J_2 = 69000$ kgcmsec². Утицај масе вратила на фреквенцију слободних осцилација занемарити. Модул клизања материјала је $\mathbf{G} = 0{,}88 \cdot 10^6$ kg/cm².

У овом случају су исте диференцијалне једначине кретања као и у претходном задатку, па је

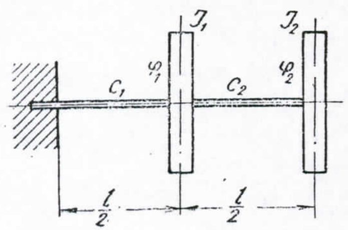
$$p^2 = \frac{c\,(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}$$

$$c = \frac{\mathbf{G}\, d^4 \pi}{32\, l} = \frac{88 \cdot 10^4 \cdot 35^4 \pi}{32 \cdot 5000} = 25810750 \ \text{kgcm}$$

$$p^2 = \frac{(390 + 65) \cdot 10^3 \cdot 25810750}{39 \cdot 69 \cdot 10^7} \approx 440{,}2 \ \sec^{-2}$$

$$p \approx 21 \ \sec^{-1}; \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{p}{2\pi} = \frac{21}{6{,}28} \approx 3{,}34 \ \sec^{-1}$$

157.) Одредити кружне фреквенције слободних торзионих осцилација система, који се састоји из вратила укљештеног на левом крају (ослања се на дуго лежиште), а које у средини и на крају носи хомогене дискове. Дужина вратила је l. Моменат инерције сваког диска у односу на осу обртања износи J. Крутост при торзији делова вратила је $c_1 = c_2 = c$. Масу вратила занемарити.



Сл. 173

Диференцијалне једначине кретања су

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 \varphi_1 - c_2 (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_2 (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned}$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$\varphi_1 = \lambda_1 \cos pt\,;$$
$$\varphi_2 = \lambda_2 \cos pt\,,$$

долазимо до једначина

$$\begin{aligned} \lambda_1 (c_1 + c_2 - J_1 p^2) - c_2 \lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 c_2 + (c_2 - J_2 p^2)\, \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - J_1 p^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - J_2 p^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

односно $\quad (c_1 + c_2 - J_1 p^2)(c_2 - J_2 p^2) - c_2^2 = 0\,,$

одакле је $\quad p^4 - \left[\frac{c_2 (J_1 + J_2)}{J_1 J_2} + \frac{c_1}{J_1}\right] p^2 + \frac{c_1 c_2}{J_1 J_2} = 0$

Пошто је у нашем случају

$$c_1 = c_2 = c\,; \qquad J_1 = J_2 = J\,,$$

то горња једначина прелази у

$$p^4 - \frac{3c}{J} p^2 + \frac{c^2}{J^2} = 0\,,$$

одакле је

$$p^2_{\text{I, II}} = \left(\frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}\right) \frac{c}{J}$$

$$p^2_{\text{I}} = 0{,}382 \frac{c}{J} \sec^{-2}\,; \qquad p_{\text{I}} = 0{,}618 \sqrt{\frac{c}{J}} \sec^{-1}\,;$$

$$p^2_{\text{II}} = 2{,}618 \frac{c}{J} \sec^{-2}\,; \qquad p_{\text{II}} = 1{,}615 \sqrt{\frac{c}{J}} \sec^{-1}$$

158.) Одредити амплитуде принудних осцилација система дискова описаног у претходном задатку, ако на диск у средини делује пертурбациони моменат $M = M_0 \sin pt$.

Диференцијалне једначине кретања су

$$\begin{aligned} J \ddot{\varphi}_1 + c\, \varphi_1 + c\, (\varphi_2 - \varphi_1) &= M_0 \sin pt \\ J \ddot{\varphi}_2 + c\, (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned}$$

односно

$$\left|\begin{array}{l} J\ddot{\varphi}_1 + 2c\varphi_1 - c\varphi_2 = M_0 \sin pt \\ J\ddot{\varphi}_2 - c\varphi_1 + c\varphi_2 = 0 \end{array}\right.$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$\varphi_1 = \lambda_1 \cos pt \;;$$

$$\varphi_2 = \lambda_2 \cos pt \;,$$

долазимо до једначина

$$\lambda_1 (2c - Jp^2) - c\lambda_2 = M_0$$

$$-c\lambda_1 + \lambda_2 (c - Jp^2) = 0 \;,$$

одакле је
$$\lambda_1 = \lambda_2 \left(\frac{c - Jp^2}{c}\right),$$

па је
$$\lambda_2 \left(\frac{c - Jp^2}{c}\right)(2c - Jp^2) - c\lambda_2 = M_0 \;,$$

односно
$$\lambda_2 = \frac{M_0 c}{J^2 p^4 - 3cJp^2 + c^2} = \frac{M_0 c}{J^2\left(p^4 - 3\frac{c}{J}p^2 + \frac{c^2}{J^2}\right)},$$

или
$$\lambda_2 = \frac{M_0 c}{J^2 (p^2 - p^2_{\mathrm{I}})(p^2 - p^2_{\mathrm{II}})} \;,$$

где p^2_{I} и p^2_{II} имају вредности из претходног задатка.

$$\lambda_1 = \lambda_2 \left(\frac{c - Jp^2}{c}\right) = \frac{M_0 (c - Jp^2)}{J^2 (p^2 - p^2_{\mathrm{I}})(p^2 - p^2_{\mathrm{II}})} \;,$$

па је
$$\varphi_1 = \frac{M_0 (c - Jp^2)}{J^2 (p^2 - p^2_{\mathrm{I}})(p^2 - p^2_{\mathrm{II}})} \sin pt \;,$$

$$\varphi_2 = \frac{M_0 c}{J^2 (p^2 - p^2_{\mathrm{I}})(p^2 - p^2_{\mathrm{II}})} \sin pt$$

159.) Одредити кружне фреквенције главних торзионих осцилација система, који се састоји из вратила на коме су постављена три једнака хомогена диска. Два диска су учвршћена на крајевима вратила, а трећи је у средини. Моменат инерције сваког диска у односу на осу обртања је J, а крутост при торзији делова вратила износи $c_1 = c_2 = c$. Масу вратила занемарити.

Диференцијалне једначине кретања у овом случају су једначине (145), а фреквентна једначина дата је изразом (147).

Пошто је у нашем случају

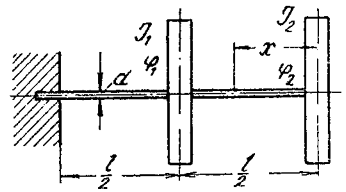
$$c_1 = c_2 = c \qquad \text{и} \qquad J_1 = J_2 = J \;,$$

то фреквентна једначина (147) прелази у

$$p^4 - \frac{4c}{J}p^2 + 3\frac{c^2}{J^2} = 0 \;,$$

одакле је
$$p_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{c}{J}} \sec^{-1} \;; \quad p_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{3c}{J}} \sec^{-1}$$

160.) Одредити кружне фреквенције главних торзионих осцилација вратила пречника $d = 6$ cm., чији је леви крај укљештен, а на десном крају носи диск, чији је моменат инерције у погледу осе обртања $J_2 = 5$ kgmsec². У средини вратила налази се такође један диск, чији је моменат инерције у погледу осе обртања $J_1 = 15$ kgm sec². Модул клизања материјала вратила је $\mathbf{G} = 0{,}8 \cdot 10^6$ kg/cm². Дужина вратила износи $l = 2$ m. Поред тога наћи односе амплитуда главних облика осцилација и удаљење чвора од диска на десном крају.



Сл. 174

Диференцијалне једначине кретања су

$$\left|\begin{array}{l} J_1\ddot{\varphi}_1 + c\varphi_1 - c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \\ J_2\ddot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{array}\right.$$

Ако решење ових једначина потражимо у облику

$$\varphi_1 = \lambda_1 \cos pt \;;$$

$$\varphi_2 = \lambda_2 \cos pt \;,$$

долазимо до једначина

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1 (2c - J_1 p^2) - \lambda_2 c = 0 \\ -\lambda_1 c + \lambda_2 (c - J_2 p^2) = 0 \end{array}\right. ,$$

па је фреквентна једначина

$$\begin{vmatrix} 2c - J_1 p^2 & -c \\ -c & c - J_2 p^2 \end{vmatrix} = 0,$$

односно
$$p^4 - \frac{c(J_1 + 2J_2)}{J_1 J_2}p^2 + \frac{c^2}{J_1 J_2} = 0$$

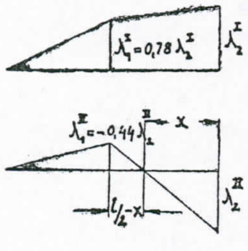
$$c = \frac{I_0 \mathbf{G}}{l/2} = \frac{\mathbf{G}\, d^4 \pi}{32 \cdot l/2} = \frac{0{,}8 \cdot 10^6 \cdot 6^4 \pi}{32 \cdot 100} \approx 1{,}02 \cdot 10^6 \text{ kgcm.}$$

$$p^2_{\mathrm{I}} = 4{,}76 \cdot 10^2 \ \mathrm{sec}^{-2} \ ; \qquad p_{\mathrm{I}} = 21{,}7 \ \mathrm{sec}^{-1}$$

$$p^2_{\mathrm{II}} = 29{,}2 \cdot 10^2 \ \mathrm{sec}^{-2} \ ; \qquad p_{\mathrm{II}} = 54 \ \mathrm{sec}^{-1}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} = \frac{c}{2c - J_1 p^2_{\mathrm{I}}} = 0{,}780 \ ; \qquad \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} = \frac{c}{2c - J_1 p^2_{\mathrm{II}}} = -0{,}44$$

Облици главних осцилација претстављени су сликом 175.



Сл. 175

$$\frac{l/2 - x}{x} = \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^{\mathrm{II}} = 0{,}44$$

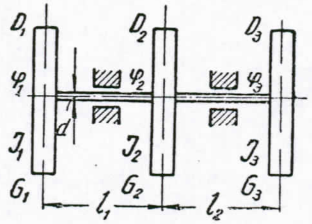
$$1{,}44\, x = 1$$

$$x = 0{,}7 \ \mathrm{m}$$

$$x = 70 \ \mathrm{cm}$$

161.) За вратило са три диска дато на слици 176 наћи кружне фреквенције главних торзионих осцилација система, као и облике главних осцилација. Дато је $D_1 = D_2 = D_3 = 100$ cm; $\mathrm{G}_1 = 1350$ kg; $\mathrm{G}_2 = 900$ kg; $\mathrm{G}_3 = 450$ kg; $l_1 = l_2 = 75$ cm; $d = 12{,}7$ cm и $\mathbf{G} = 0{,}81 \cdot 10^6$ kg/cm²

Диференцијалне једначине кретања у овом случају су једначине (145), а фреквентна једначина је једначина (147).



Сл. 176

Пошто је у нашем случају

$$J_1 = 3J_3 \ ;$$

$$J_2 = 2J_3 \ ; \qquad c_1 = c_2 = c \ ,$$

онда једначина (147) прелази у

$$p^4 - \frac{7}{3}\frac{c}{J_3}p^2 + \frac{c^2}{J_3^2} = 0$$

Моменти инерције појединих ротора су

$$J_3 = \frac{\mathrm{G}_3 D_3^2}{8g} = \frac{450 \cdot 10^4}{8 \cdot 981} = 574 \ \mathrm{kgcmsec}^2$$

$$J_2 = \frac{\mathrm{G}_2 D_2^2}{8g} = 2J_3 = 1148 \ \mathrm{kgcmsec}^2$$

$$J_1 = \frac{\mathrm{G}_1 D_1^2}{8g} = 3J_3 = 1722 \ \mathrm{kgcmsec}^2$$

$$c = \frac{\mathbf{G} I_0}{l} = \frac{\mathbf{G}\, d^4 \pi}{32\, l} = \frac{0{,}81 \cdot 10^6 \cdot 12{,}7^4 \cdot \pi}{32 \cdot 75} \approx 27{,}6 \cdot 10^6 \ \mathrm{kgcm}\,,$$

па је

$$p^2_{\mathrm{I}} = 27200 \ \mathrm{sec}^{-2} \ ; \qquad p_{\mathrm{I}} = 165 \ \mathrm{sec}^{-1}$$

$$p^2_{\mathrm{II}} = 84800 \ \mathrm{sec}^{-2} \ ; \qquad p_{\mathrm{II}} = 291 \ \mathrm{sec}^{-1}$$

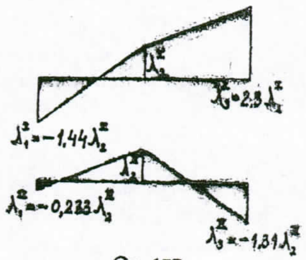
Облици главних осцилација, према томе, претстављени су сликом 177.

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} = \frac{c}{c - J_1 p^2_{\mathrm{I}}} = -\frac{27{,}6}{19{,}1} = -1{,}44$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} = \frac{c}{c - J_1 p^2_{\mathrm{II}}} = -\frac{27{,}6}{118{,}4} = -0{,}233$$

$$\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} = \frac{c}{c - J_3 p^2_{\mathrm{I}}} = \frac{27{,}6}{12} = 2{,}3$$

$$\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} = \frac{c}{c - J_3 p^2_{\mathrm{II}}} = -\frac{27{,}6}{21} = -1{,}31$$



Сл. 177

162.) Вратило троцилиндричног двотактног мотора оптерећено је ротором генератора тежине $\mathrm{G}_1 = 109700$ kg. и замајцем тежине $\mathrm{G}_2 = 94000$ kg (тежини замајца додата је тежина вратила и клипног механизма). Претпоставити да је маса диска и замајца концентрисана на обиму круга полупречника $R = 50$ cm; редукована дужина вратила износи $l = 2{,}52$ cm., поларни моменат инерције пресека вратила је $I_0 = 982$ cm⁴ и модул клизања материјала $\mathbf{G} = 8{,}2 \cdot 10^5$ kg/cm². При промени броја обртаја у границама од $n_1 = 142$ obr/min до $n_2 = 160$ obr/min. примећене су велике осцилације струје, коју је давао генератор, после чега се вратило сломило. Одредити узрок лома вратила. Масу вратила и трење у лежиштима занемарити.

Диференцијалне једничине кретања у овом случају су једначине (151), а фреквентна једначина дата је изразом (152)

$$p^2 = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}\, c$$

$$J_1 = m_1 R^2 = \frac{\mathrm{G}_1 R^2}{g} \ ; \qquad J_2 = m_2 R^2 = \frac{\mathrm{G}_2}{g} R^2 \ ; \qquad c = \frac{\mathbf{G} I_0}{l}\,,$$

па је

$$p^2 = \frac{\mathbf{G} I_0\, g\, (\mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2)}{\mathrm{G}_1\, \mathrm{G}_2\, l\, R^2}$$

$$p^2 = \frac{8{,}2 \cdot 10^5 \cdot 982 \cdot 981 \cdot 2037 \cdot 10^2}{25 \cdot 10^2 \cdot 1097 \cdot 94 \cdot 10^5 \cdot 2{,}52} \approx 2448 \ \mathrm{sec}^{-2}$$

$$p \approx 49{,}4 \ \mathrm{sec}^{-1}$$

$$n_{kp} = \frac{30\,p}{\pi} = \frac{30 \cdot 49{,}4}{\pi} = 476 \text{ obr/min.}$$

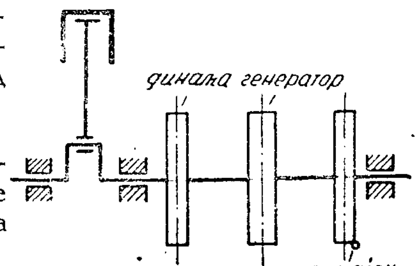
Фреквенције пертурбационе силе пошто је двотактни мотор са три цилиндра у питању су

$$f_{1\,\text{per.}} = 3\,n_1 = 426 \text{ obr/min.}$$

$$f_{2\,\text{per.}} = 3\,n_2 = 480 \text{ obr/min.}$$

Пошто је фреквенција слободних торзионих осцилација блиска горњој вредности фреквенције пертурбационе силе, то се лом десио услед резонанце слободних торзионих осцилација и пертурбационе силе, која долази од пулзирајућег момента мотора.

163.) На заједничком вратилу четворотактног мотора са три цилиндра учвршћени су ротор динамо машине једносмислене струје са моментом инерције $J_1 = 1{,}78 \cdot 10^3$ kgcmsec², ротор генератора на изменичне струје са моментом инерције $J_2 = 5\,J_1$ и замајац са моментом инерције $J_3 = 50\,J_1$. Редукована дужина делова вратила износи $l_1 = 373$ cm. и $l_2 = 239$ cm., док је модул клизања материјала **G**. Поларни моменат инерције пресека вратила је I_0, док производ $I_0\,\mathbf{G}$ има вредност 10^{10} kgcm². Занемарујући утицај маса клипова, клипњача, криваја и вратила, одредити кружне фреквенције главних осцилација система, однос амплитуда осцилујућих маса и број чворних тачака вратила при свакој од главних осцилација.



Сл. 178

Диференцијалне једначине кретања у овом случају су једначине (145) а фреквентна једначина дата је изразом (147).

Из једначине (147) је

$$p^2_{\text{I, II}} = \frac{1}{2}\left[c_1 \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} + c_2 \frac{J_2 + J_3}{J_2 J_3}\right] \mp$$

$$\mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(c_1 \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} + c_2 \frac{J_2 + J_3}{J_2 J_3}\right)^2 - 4\,c_1\,c_2 \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 J_2 J_3}}$$

$$c_1 = \frac{\mathbf{G} I_0}{l_1} = \frac{10^{10}}{373} \text{ kgcm} \quad ; \quad c_2 = \frac{\mathbf{G} I_0}{l_2} = \frac{10^{10}}{239} \text{ kgcm.}$$

$$\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} = \frac{6}{5 J_1} \; ; \quad \frac{J_2 + J_3}{J_2 J_3} = \frac{11}{50\,J_1} \; ; \quad \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 J_2 J_3} = \frac{28}{125 J_1^2}$$

$$c_1 \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} + c_2 \frac{J_2 + J_3}{J_2 J_3} \approx 23245{,}3 \; ; \qquad 4\,c_1\,c_2 \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 J_2 J_3} \approx 317\,220\,513$$

$$p^2_{\text{I, II}} = \frac{1}{2}\,(23245{,}3 \mp 14937{,}3) \; ;$$

$$p^2_{\text{I}} = 4154{,}9 \text{ sec}^{-2} \; ; \qquad p_{\text{II}}^2 = 19098{,}1 \text{ sec}^{-2}$$

$$p_{\text{I}} = 64{,}6 \text{ sec}^{-1} \; ; \qquad p_{\text{II}} = 138{,}1 \text{ sec}^{-1} \; ; \qquad p_{\text{III}} = 0$$

При свака два обрта врши се једно паљење једног цилиндра, односно три паљења три цилиндра.

$$\frac{2}{3}\,p_{\text{I}} = 64{,}6 \cdot \frac{2}{3} = 42{,}6 \text{ sec}^{-1}$$

$$\frac{2}{3}\,p_{\text{II}} = 138{,}1 \cdot \frac{2}{3} = 92 \text{ sec}^{-1}$$

Односи амплитуда су

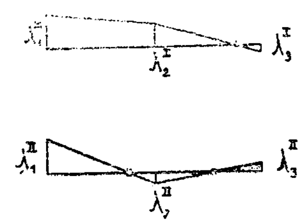
$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\text{I}} = \frac{c_1 - J_1\,p_{\text{I}}^2}{c_1} = \frac{19413{,}7}{26809{,}6} = 0{,}728$$

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\text{II}} = \frac{c_1 - J_1\,p_{\text{II}}^2}{c_1} = -\frac{7134{,}8}{26809{,}6} = -0{,}266$$

$$\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{\text{I}} = \frac{c_2}{c_2 - J_3\,p_{\text{I}}^2} = -\frac{41841}{327954} = -0{,}128$$

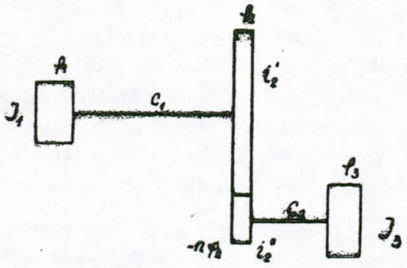
$$\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{\text{II}} = \frac{c_2}{c_2 - J_3\,p_{\text{II}}^2} = -\frac{41841}{1657689} = -0{,}025$$

Облици главних осцилација према томе су


Сл. 179

У првом случају, као што видимо, имамо један чвор, а у другом два чвора.

164.) Одредити кружне фреквенције слободних торзионих осцилација система који се састоји од два вратила везана зупчастим преносом. Моменти инерције маса навучених на вратила и моменти инерције зупчаника у односу на осовине вратила износе $J_1 = 87500$ kgcmsec^2, $J_3 = 56000$ kgcmsec^2, $i'_2 = 302$ kgcmsec^2 и $i''_2 = 10{,}5$ kgcmsec^2; преносни однос $n = \frac{z_1}{z_2} = 5$; крутости вратила при торзији износе $c_1 = 316 \cdot 10^6$ kgcm, $c_2 = 115 \cdot 10^6$ kgcm. Масе вратила занемарити.



Сл. 180

Да би дошли до диференцијалних једначина кретања употребићемо метод Lagrange-евих једначина. При решавању оваквих система треба уочити да су углови торзије зупчаника 1 и 2

$$\varphi_2 \quad \text{и} \quad -n\,\varphi_2\,,$$

где је $n = \frac{z_1}{z_2}$ преносни однос.

Кинетичка енергија система је

$$E_k = \frac{J_1\,\dot\varphi_1^2}{2} + \frac{i'_2\,\dot\varphi_2^2}{2} + \frac{i''_2\,(-n\,\dot\varphi_2)^2}{2} + \frac{J_3\,\dot\varphi_3^2}{2}\,, \tag{a}$$

док је потенцијална енергија система

$$E_p = \frac{1}{2}\,c_1\,(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2}\,c_2\,(\varphi_3 + n\,\varphi_2)^2 \tag{b}$$

У циљу да би овај проблем свели на проблем вратила са три диска, тј. да би употребили фреквентну једначину (147) увешћемо следеће ознаке

$$\begin{aligned} &i_2' + n^2\,i_2'' = J_2\,; &\qquad n^2\,J_3 = J_3' \\ &\varphi_3 = -\,n\,\varphi_3'\,; &\qquad c_2\,n^2 = c_2' \end{aligned} \tag{c}$$

У том случају изрази за E_k и E_p прелазе у

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{J_1\,\dot\varphi_1^2}{2} + \frac{J_2\,\dot\varphi_2^2}{2} + \frac{J'_3\,(\dot\varphi'_3)^2}{2} \\ E_p &= \frac{1}{2}\,c_1\,(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2}\,c_2'\,(\varphi_2 - \varphi_3')^2 \end{aligned} \tag{d}$$

Ако сменимо ове изразе у Lagrange-еве једначине кретања добићемо следећи систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} &J_1\,\ddot\varphi_1 - c_1\,(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \\ &J_2\,\ddot\varphi_2 + c_1\,(\varphi_2 - \varphi_1) + c_2'\,(\varphi_2 - \varphi_3') = 0 \\ &J_3'\,\ddot\varphi_3' - c_2'\,(\varphi_2 - \varphi_3') = 0 \end{aligned} \tag{e}$$

Ако потражимо решења једначина (e) у облику

$$\varphi_1 = \lambda_1 \cos pt\,; \qquad \varphi_2 = \lambda_2 \cos pt \qquad \text{и} \qquad \varphi_3' = \lambda_3 \cos pt\,,$$

долазимо до једначина

$$\begin{aligned} &J_1\,p^2\,\lambda_1 + c_1\,(\lambda_2 - \lambda_1) = 0 \\ &J_2\,\lambda_2\,p^2 - c_1\,(\lambda_2 - \lambda_1) - c_2'\,(\lambda_2 - \lambda_3) = 0 \\ &J'_3\,p^2\,\lambda_3 + c_2'\,(\lambda_2 - \lambda_3) = 0 \end{aligned} \tag{f}$$

Из прве и треће једначине изразићемо λ_1 и λ_3

$$\lambda_1 = \frac{c_1}{c_1 - J_1\,p^2}\,\lambda_2 \qquad \text{и} \qquad \lambda_3 = \frac{c_2'}{c_2' - J_3'\,p^2}\,\lambda_2 \tag{g}$$

Саберемо ли једначине (f) и ако уврстимо у њих изразе (g) добићемо

$$(J_1\,\lambda_1 + J_2\,\lambda_2 + J'_3\,\lambda_3)\,p^2 = 0\,,$$

односно

$$\frac{J_1\,J_2\,J'_3}{c_1\,c'_2}\,p^4 - \left[\frac{J_1\,J_3' + J_2\,J_3'}{c'_2} + \frac{J_1\,J_2 + J_1\,J'_3}{c_1}\right] p^2 + (J_1 + J_2 + J'_3) = 0 \tag{i}$$

Уврстимо у једначину (i) бројне вредности

$$J_2 = i'_2 + n^2\,i''_2 = 302 + 5^2 \cdot 10{,}5 = 562{,}5 \text{ kgcmsec}^2$$

$$J'_3 = n^2\,J_3 = 5^2 \cdot 56000 = 14 \cdot 10^5 \text{ kgcmsec}^2$$

$$c'_2 = n^2\,c_2 = 5^2 \cdot 115 \cdot 10^6 = 287{,}5 \cdot 10^7 \text{ kgcmsec}^2$$

$$\frac{J_1\,J_2\,J'_3}{c_1\,c'_2} = 76 \cdot 10^{-6} \text{ kgcmsec}^6$$

$$\frac{J_1\,J'_3 + J_2\,J'_3}{c_2'} + \frac{J_1\,J_2 + J_1\,J'_3}{c_1} = 431 \text{ kgcmsec}^4$$

$$J_1 + J_2 + J'_3 = 148{,}75 \cdot 10^4 \text{ kgcmsec}^2$$

Ако уврстимо горње вредности у фреквентну једначину добићемо

$$76 \cdot 10^{-6}\, p^4 - 431\, p^2 + 148{,}75 \cdot 10^4 = 0$$

Одавде добијамо

$$p^2_{\mathrm{I,\,II}} = \frac{431 \mp 430{,}5}{152 \cdot 10^{-6}}$$

$$p_{\mathrm{I}}^2 = 32{,}9 \cdot 10^2 \sec^{-2}; \qquad p_{\mathrm{I}} = 57{,}4 \sec^{-1}$$

$$p_{\mathrm{II}}^2 = 5{,}68 \cdot 10^6 \sec^{-2}; \qquad p_{\mathrm{II}} = 2{,}38 \cdot 10^3 \sec^{-1}$$

165.) Одредити, занемарујући масу зупчастих точкова, кружну фреквенцију слободних осцилација система описаног у прошлом примеру.

Пошто је $J_2 = i_2' + n^2 i_2''$, то из услова задатка проистиче

$$J_2 = 0$$

У овом случају фреквентна једначина (i) прелази у

$$\left(\frac{J_1 J_3'}{c_2'} + \frac{J_1 J_3'}{c_1}\right) p^2 - (J_1 + J_3') = 0\,,$$

па је

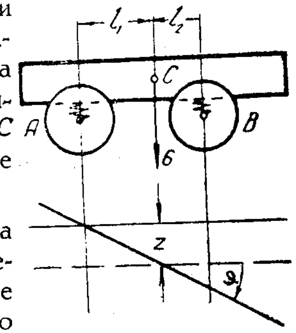
$$p^2 = \frac{J_1 + J_3'}{J_1 J'_3}\,\frac{c_1 c_2'}{c_1 + c_2'} = \frac{8{,}75 \cdot 10^4 + 140 \cdot 10^4}{8{,}75 \cdot 10^4 \cdot 140 \cdot 10^4} \cdot \frac{316 \cdot 10^6 \cdot 2875 \cdot 10^6}{316 \cdot 10^6 + 2875 \cdot 10^6}$$

$$p^2 = 34{,}5 \cdot 10^2 \sec^{-2}; \qquad p = 58{,}7 \sec^{-1}$$

---

16. ОСЦИЛАЦИЈЕ ВОЗИЛА*

Проблем осцилација возила на четири точка врло је компликован. У нашем излагању ограничићемо се на осцилација возила у једној равни. Ове осцилације окарактерисане су вертикалним померањем тежишта C и ротацијом рама возила AB око тежишне осе кроз C управне на раван слике.



Сл. 181

Употребићемо за описивање осцилација две генералисане координате, које ћемо мерити од равнотежног положаја: померање тежишта z и угао ротације φ. Даље ћемо означити са:

G — тежину дела возила ослоњеног на опруге,

$J_c = \dfrac{G}{g}\, i^2$ — моменат инерције масе која осцилује у односу на тежишну осу,

i — полупречник инерције за тежишну осу,

c_1 и c_2 — крутост опруга A и B и са

l_1 и l_2 — удаљење тежишта C од осовина.

Кинетичка енергија система састоји се из два дела и то оног који потиче услед транслације рама и другог услед његове ротације

$$E_k = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_c \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g} i^2 \dot{\varphi}^2 \qquad (a)$$

Да бисмо нашли прираштај потенцијалне енергије морамо прво да нађемо статичке угибе. Пошто су отпори ослонаца A и B равни $\dfrac{Gl_2}{l}$, односно $\dfrac{Gl_1}{l}$, где је $l = l_1 + l_2$, то су статички угиби

$$f_a = \frac{Gl_2}{l\,c_1} \qquad \text{и} \qquad f_b = \frac{Gl_1}{l\,c_2} \qquad (b)$$

* Овај одељак је писан према одговарајућем одељку у књизи: S. P. Timoschenko — Vibration Problems in Engineering, D. van Norstrand, New York, 1947.

Према томе, прираштај енергије деформације опруга за време кретања биће

$$E_{p1}=\frac{c_1}{2}\Big[(z-l_1\varphi)+f_a\Big]^2+\frac{c_2}{2}\Big[(z+l_2\varphi)+f_b\Big]^2-\frac{c_1 f_a^{\,2}}{2}-\frac{c_2 f_b^{\,2}}{2},$$

односно кад заменимо (b)

$$E_{p1}=\frac{c_1}{2}\big(z-l_1\varphi\big)^2+\frac{c_2}{2}\big(z+l_2\varphi\big)^2+Gz$$

Међутим, приликом спуштања тежишта за z, смањила се потенцијална енергија за $E_{p2}=Gz$, те укупни прираштај потенцијалне енергије износи

$$E_p=E_{p1}-E_{p2}=\frac{c_1}{2}(z-l_1\varphi)^2+\frac{c_2}{2}(z+l_2\varphi)^2 \qquad (c)$$

Нађимо диференцирањем израза за E_k и E_p потребне чланове за Lagrange-еве једначине кретања

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot z}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{G}{g}\dot z\right)=\frac{G}{g}\ddot z\ ; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial z}=0\ ;$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial z}=c_1(z-l_1\varphi)+c_2(z+l_2\varphi)\ ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{G}{g}i^2\dot\varphi\right)=\frac{G}{g}i^2\ddot\varphi=J_c\ddot\varphi\ ; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi}=0\ ;$$

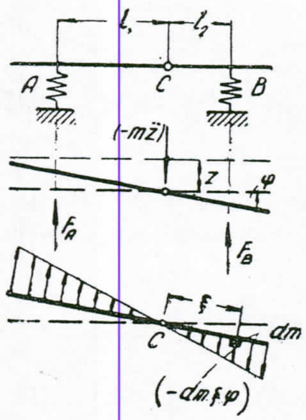
$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}=-c_1 l_1(z-l_1\varphi)+c_2 l_2(z+l_2\varphi)$$

Према томе, једначине кретања су

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{G}{g}\ddot z=-c_1(z-l_1\varphi)-c_2(z+l_2\varphi)\\[2ex] \dfrac{G}{g}i^2\ddot\varphi=c_1 l_1(z-l_1\varphi)-c_2 l_2(z+l_2\varphi)\end{array}\right.$$

Ове једначине кретања можемо добити и помоћу d'Alembert-овог принципа ако возило посматрамо као круту плочу.

Нађимо отпоре ослонаца F_A и F_B:



Сл. 182

$$F_A=c_1\delta_1\ ; \qquad F_B=c_2\delta_2$$

Пошто је

$$\delta_1=z-l_1\varphi\ ;$$

и

$$\delta_2=z-l_2\varphi\ ,$$

то је

$$F_A=c_1(z-l_1\varphi)\ ;$$

$$F_B=c_2(z+l_2\varphi)$$

Постављањем статичких услова добићемо

$$\Sigma Z=(-m\ddot z)-c_1(z-l_1\varphi)-c_2(z+l_2\varphi)=0$$

Елементарна инерцијална сила услед ротације је

$dF=(-dm\cdot\xi\ddot\varphi)$, а њен моменат за тачку C је

$$dM_c=-dF\cdot\xi=dm\,\xi^2\ddot\varphi$$

Укупни моменат услед свих инерцијалних сила за тачку C је

$$M_c=-\int_M(-dm\,\xi^2\ddot\varphi)=\ddot\varphi\int_M\xi^2\,dm=J_c\ddot\varphi=\frac{G}{g}i^2\ddot\varphi$$

Постављањем другог статичког услова, добијамо

$$\Sigma M_c=M_c-F_A\cdot l_1+F_B\cdot l_2=0\ ,$$

тј.

$$J_c\ddot\varphi-c_1(z-l_1\varphi)l_1+c_2(z+l_2\varphi)l_2=0$$

На тај начин добили смо исте диференцијалне једначине кретања као и малопре помоћу Lagrange-евих једначина кретања, тј.

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{G}{g}\ddot z+c_1(z-l_1\varphi)+c_2(z+l_2\varphi)=0\\[2ex] \dfrac{G}{g}i^2\ddot\varphi-c_1 l_1(z-l_1\varphi)+c_2 l_2(z+l_2\varphi)=0\end{array}\right.$$

Ако обележимо са

$$a=\frac{(c_1+c_2)g}{G}\ ; \qquad b=\frac{(l_2c_2-l_1c_1)g}{G}\ ; \qquad c=\frac{(c_1l_1^2+c_2l_2^2)g}{G}, \qquad (d)$$

добићемо систем симултаних диференцијалних једначина

$$\left|\begin{aligned} &\ddot z + az + b\varphi = 0 \\ &\ddot\varphi + \frac{b}{i^2}\, z + \frac{c}{i^2}\,\varphi = 0 \end{aligned}\right. \qquad (155)$$

На основу горњих једначина видимо да осцилације рама возила у општем случају зависе од вертикалног померања тежишта и од ротације рама око тежишне осе.

Али у случају да је испуњен услов $b = 0$,

тј. $$l_1 c_1 = l_2 c_2 \qquad (e)$$

систем једначина (155) прелази у систем са једним степеном слободе, тј. вертикалне осцилације тежишта су независне од ротације рама. У случају да је испуњен услов (е), тј. да су крутости опруга обрнуто пропорционалне удаљењу тежишта од одговарајућих ослонаца, терет постављен у тежишту изазиваће само вертикалне осцилације тежишта. То је, на пример, случај код железничких вагона где је обично $l_1 = l_2$ и $c_1 = c_2$.

Потражимо решење система једначина (155) у облику

$$z = \lambda_1 \cos pt$$
$$\varphi = \lambda_2 \cos pt$$

Тада долазимо до једначина

$$\left|\begin{aligned} &\lambda_1 (a - p^2) + b\lambda_2 = 0 \\ &\frac{b}{i^2}\,\lambda_1 + \left(\frac{c}{i^2} - p^2\right)\lambda_2 = 0 \end{aligned}\right. \qquad (156)$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} a - p^2 & b \\ \dfrac{b}{i^2} & \dfrac{c}{i^2} - p^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или у развијеном облику

$$(a - p^2)\left(\frac{c}{i^2} - p^2\right) - \frac{b^2}{i^2} = 0,$$

одакле се добија

$$p^4 - \left(a + \frac{c}{i^2}\right)p^2 + \frac{ac}{i^2} - \frac{b^2}{i^2} = 0 \qquad (157)$$

Корени ове једначине биће

$$p^2_{\mathrm{I,\,II}} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{i^2} + a\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c}{i^2} + a\right)^2 - \frac{ac}{i^2} + \frac{b^2}{i^2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{i^2} + a\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c}{i^2} - a\right)^2 + \frac{b^2}{i^2}} \qquad (158)$$

Пошто је $$ac - b^2 = \frac{g^2}{G^2}\, c_1 c_2 (l_1 + l_2)^2 > 0$$

видимо да оба корена једначине (156) морају да буду реална и позитивна.

Да бисмо добили главне облике осцилација заменићемо израз (158) у првој од једначина (156)

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{b}{p^2 - a} = \frac{b}{\frac{1}{2}\left(\frac{c}{i^2} - a\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c}{i^2} - a\right)^2 + \frac{b}{i^2}}} \qquad (159)$$

На основу једначине (158) видимо да знак $+$ одговара осцилацијама више фреквенције, док знак $-$ одговара осцилацијама ниже фреквенције.

Да би одредили облике главних осцилација учинићемо једну претпоставку и то

$$b > 0, \qquad \text{односно} \quad l_2 c_2 > l_1 c_1$$

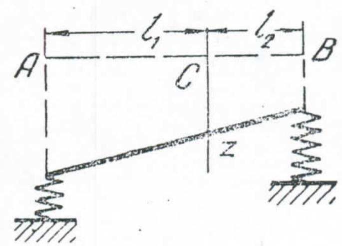
Пошто статички угиби износе

$$f_a = \frac{G}{l}\,\frac{l_2}{c_1}; \qquad f_b = \frac{G}{l}\,\frac{l_1}{c_2},$$

то овај услов у ствари значи да је

$$\frac{l_2}{c_1} > \frac{l_1}{c_1}, \qquad \text{односно} \quad f_a > f_b$$

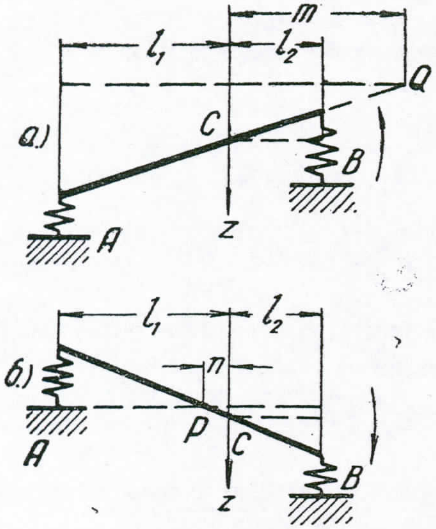
То значи да ће положај рама одговарати слици 183. Из ње видимо да позитивном померању тежишта z, одговара ротација у смеру негативног угла φ.



Сл. 183

Међутим из (159) видимо да ће у случају да узмемо испред корена позитиван знак и однос $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ бити позитиван, тј. позитивном померању тежишта, одговараће и ротација у позитивном смеру, док ће у случају да испред корена узмемо знак $-$ тај однос бити негативан.

Следећа сл. 184 претставља та два облика главних осцилација.


Сл. 184

Облик под *a*) одговара нижој фреквенцији, док облик под *b*) одговара вишој. На основи геометриског односа са скице имамо да је

$$z = m\varphi\,,$$

односно $\quad z = n\varphi\,,$

па видимо да су удаљења тежишта од тачака P и Q, око којих можемо да сматрамо да рам ротира при сваком од посматраних главних облика осцилација, дата десном страном израза (159).

Смењујући вредности за m и n добићемо

$$m \cdot n = -\frac{b}{\frac{1}{2}\left(\frac{c}{i^2}-a\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c}{i^2}-a\right)^2+\frac{b^2}{i^2}}} \cdot \frac{b}{\frac{1}{2}\left(\frac{c}{i^2}-a\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c}{i^2}-a\right)^2+\frac{b^2}{i^2}}} = i^2 \qquad (m)$$

У специјалном случају ако је $b = 0$, тј. $c_1 l_1 = c_2 l_2$, удаљење n постаје равно нули, а m добија бесконачну вредност. То значи да један од главних облика осцилација претставља ротацију око бесконачно удаљене тачке, тј. транслаторно померање рама, док је други облик претстављен ротацијом око тежишта.

У случају да је поред $b = 0$ такође и $\frac{c}{i^2} - a = 0$, оба главна облика осцилација ће према (158) имати исту фреквенцију.

Принудне осцилације. — Објаснили смо раније да се оба главна облика осцилација могу сматрати као ротације рама око тачака P и Q. Јасно је да ће се свака неравнина на путу преносити преко опруга и производити оба облика осцилација рама, осим у случају ако би се тачке P или Q налазиле тачно у ослонцу опруга.

Ако предњи точкови возила наиђу на препреку на путу, то ће сабијање предњих опруга произвести осцилације масе возила. Кроз неки интервал времена Δt наићи ће и задњи точкови на препреку, те ће се преко задњих опруга проузроковати нове осцилације. Ако је тај интервал времена производ периода једног или другог главног облика осцилација наступиће резонанца и осцилације ће порасти до опасних размера у случају да не постоји довољна амортизација.

Дакле, услов за постанак резонанских осцилација је

$$\Delta t = \frac{l}{v} = m_1 \tau_1 = m_2 \tau_2\,,$$

где је v — брзина возила, τ_1 и τ_2 периоди главних облика осцилација, а m_1 и m_2 неки цели бројеви.

Рекли смо да се импулси који делују на једну опругу неће осетити на другој опрузи, у случају ако тачке P и Q падну изнад самих опруга. Ради тога ћемо редуковати целокупну масу возила која лежи на опругама на два концентрисана терета G_1 и G_2 у тачкама ослонаца опруга A и B.

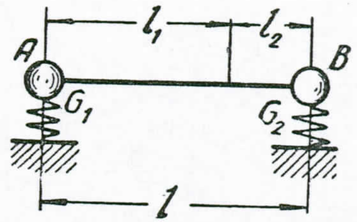
На основи познатих правила редукције маса биће

$$G_1 = \frac{G l_2}{l}\,; \qquad G_2 = \frac{G l_1}{l}$$

$$G_1 l_1^2 + G_2 l_2^2 = G i^2\,,$$

одакле је

$$l_1 l_2 = i^2 \qquad (f)$$

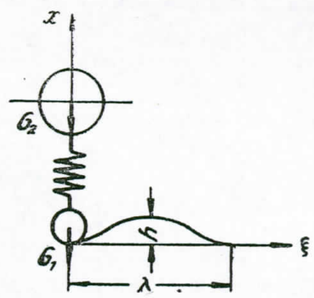

Сл. 185

Ако упоредимо овај резултат са једначином (m), видимо да у овом случају тачке P и Q падају тачно у тачке A и B, односно да је задовољен постављени услов да импулси једне опруге не утичу на другу и тиме је резонанца искључена.

Притисак на друм. — Притисак возила на друм разликоваће се у току вожње од статичког притиска. Претпоставићемо да је испуњен услов

$$l_1 l_2 = i^2\,,$$

тј. да масу возила можемо редуковати на тачке A и B. У том случају имаћемо систем претстављен сликом, на којој G_2 претставља терет изнад опруге, G_1 терет који се непосредно преноси на пут, v константну брзину возила, а x_1


Сл. 186

и x_2 вертикална померања маса G_1 и G_2 мерена од равнотежног положаја. Претпоставимо да неравнине пута можемо претставити једначином

$$x = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi\xi}{\lambda}\right),$$

где ξ меримо дуж хоризонталне осе, а λ претставља таласну дужину. Маса G_1 креће се константном брзином v дуж круте контуре пута, те према томе њено померање у правцу осе x је

$$x_1 = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi v}{\lambda}t\right), \tag{a}$$

а одговарајуће убрзање у правцу вертикале је

$$\ddot{x}_1 = \frac{h}{2}\frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2}\cos\frac{2\pi v}{\lambda}t$$

Ако додамо тежини терета који се налази испод опруге инерцијалну силу која настаје услед његовог кретања, добићемо целокупан статички и динамички притисак масе G_1

$$G_1 + \frac{G_1 h}{g\,2}\frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2}\cos\frac{2\pi v}{\lambda}t \tag{b}$$

Маса G_1 вршиће максимални динамички притисак када се буде налазила у најнижој тачки неравнине и тада притисак износи

$$G_1 + \frac{G_1}{g}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2}$$

Међутим, да бисмо добили укупан динамички притисак возила, морамо да срачунамо и притисак који се преноси опругом. Он ће износити

$$G_2 - c\,(x_2 - x_1) \tag{c}$$

Да бисмо нашли померање x_2 масе G_2 морамо се послужити диференцијалном једначином њеног кретања

$$\frac{G_2}{g}\ddot{x}_2 + c\,(x_2 - x_1) = 0$$

Заменимо израз (a) за x_1, па ћемо добити

$$\frac{G_2}{g}\ddot{x}_2 + cx_2 = \frac{ch}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi v}{\lambda}t\right) \tag{d}$$

Да бисмо нашли израз за x_2, тј. за осцилације масе G_2 проузроковане неравнинама пута, морамо да решимо ову нехомогену диференцијалну једначину другог реда. Увешћемо следеће ознаке

$\tau_1 = 2\pi\sqrt{\frac{G_2}{cg}}$, период слободних осцилација масе над опругом,

$\tau_2 = \frac{\lambda}{v}$, време потребно да точак пређе таласну дужину λ.

Сада једначина (d) добија следећи облик

$$\ddot{x}_2 + \frac{cg}{G_2}x_2 = \frac{h}{2}\frac{cg}{G_2}\left(1 - \cos\frac{2\pi v}{\lambda}t\right),$$

односно

$$\ddot{x}_2 + \left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2 x_2 = \frac{h}{2}\left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2\left[1 - \cos\frac{2\pi}{\tau_2}t\right]$$

Општи интеграл ове нехомогене једначине биће раван збиру општег интеграла хомогене једначине

$$C_1\left(\cos\frac{2\pi}{\tau_1} + \alpha\right),$$

где су C_1 и α произвољне константе, и два партикуларна интеграла. Први од њих потражићемо у облику константе C_3

$$\ddot{x}_2 + \left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2 x_2 = \frac{h}{2}\left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2,$$

па је

$$C_3 = \frac{h}{2},$$

док ћемо други тражити у облику $C_2\cos\frac{2\pi}{\tau_2}t$. Ако то заменимо у изразу

$$\ddot{x}_2 + \left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)x_2 = -\frac{h}{2}\left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2\cos\frac{2\pi}{\tau_2}t,$$

добићемо

$$-C_3\left(\frac{2\pi}{\tau_2}\right)^2\cos\frac{2\pi}{\tau_2} + \left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)C_2\cos\frac{2\pi}{\tau_2}t = -\frac{h}{2}\left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2\cos\frac{2\pi}{\tau_2}t,$$

па је

$$C_2 = -\frac{h}{2}\frac{\tau_2^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2}$$

На основу тога опште решење диференцијалне једначине (d) биће

$$x_2 = \frac{h}{2}\left[1 - C_1'\cos\left(\frac{2\pi}{\tau_1}t + \alpha\right) - \frac{\tau_2^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2}\cos\frac{2\pi}{\tau_2}t\right]$$

Да бисмо нашли произвољне константе C_1' и α, узећемо следеће почетне услове

за $t = 0$ $\quad x_1 = x_2 = 0 \quad$ и $\quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$

У том случају имаћемо

$$\dot{x} = \frac{h}{2}\left[C_1'\frac{2\pi}{\tau_1}\sin\left(\frac{2\pi}{\tau_1}+\alpha\right)+\frac{2\pi}{\tau_2}\cdot\frac{\tau_2^2}{\tau_2^2-\tau_1^2}\sin\frac{2\pi}{\tau_2}t\right],$$

односно за $x = 0$ и $\dot{x} = 0$

$$0 = \frac{h}{2}\left(1 - C_1'\cos\alpha - \frac{\tau_2^2}{\tau_2^2-\tau_1^2}\right)$$

$$0 = \frac{h}{2}\left(\frac{2\pi}{\tau_1}C_1'\sin\alpha\right),$$

а одавде $C_1'\sin\alpha = 0$

$$C_1'\cos\alpha = -\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2-\tau_1^2},$$

па је $C_1' = -\dfrac{\tau_1^2}{\tau_2^2-\tau_1^2}$ и $\alpha = 0$

Сада ће решење једначине (*d*) за дате почетне услове гласити

$$x_2 = \frac{h}{2}\left[1+\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2-\tau_1^2}\cos\frac{2\pi}{\tau_1}t-\frac{\tau_2^2}{\tau_2^2-\tau_1^2}\cos\frac{2\pi}{\tau_2}t\right] \qquad (e)$$

Из једначина (*a*) и (*c*) добићемо силу у опрузи

$$G_2 - \frac{ch}{2}\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2-\tau_1^2}\left(\cos\frac{2\pi}{\tau_1}t-\cos\frac{2\pi}{\tau_2}t\right) \qquad (f)$$

Из (*b*) и (*f*) добићемо притисак на друм који треба додати статичком притиску.

$$\frac{G_1}{g}\frac{h}{2}\frac{4\pi^2}{\tau_2^2}\cos\frac{2\pi}{\tau_2}t-\frac{ch}{2}\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2-\tau_1^2}\left(\cos\frac{2\pi}{\tau_1}t-\cos\frac{2\pi}{\tau_2}t\right)$$

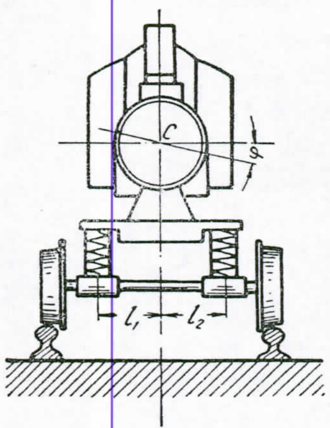
Из овог израза закључујемо да при великим брзинама и глатком путу одлучујућу улогу има тежина масе G_1 испод опруга, док у случају рђавог друма може да наступи резонанца, те други члан добија пресудну важност, тј. маса изнад опруга има одлучујући утицај на величину динамичког притиска.

Примери

166.) Укупна тежина дела изнад опруга троосне локомотиве износи $G = 26\ t$; растојање тежишта тога дела од ослонаца опруга је $l_1 = l_2 = 1{,}25$ m, а његов моменат инерције у односу на уздужну тежишну осу износи $J = 3$ tmsec^2. Крутости опруга учвршћених на три осовине точкова једнаке су на обе стране $c_1 = c_2 = 135$ t/m, и $c_3 = 148$ t/m. Одредити осцилације дела локомотиве, који се ослања на опруге у равни централног попречног пресека.

Поставимо две једначине на основу d'Alembert-овог принципа

$$\Sigma Z = (c_1+c_2+c_3)(z+l_2\varphi) + $$
$$+ (c_1+c_2+c_3)(z-l_1\varphi) + \frac{G}{g}\ddot{z} = 0$$
$$\Sigma M_c = J\ddot{\varphi} + (c_1+c_2+c_3)(z+l_2\varphi)\,l -$$
$$-(c_1+c_2+c_3)(z-l_1\varphi)\,l = 0$$



Сл. 187

Односно

$$\frac{G}{g}\ddot{z} + 2(c_1+c_2+c_3)\,z = 0$$
$$J\ddot{\varphi} + 2(c_1+c_2+c_3)\,l^2\varphi = 0$$

$$\ddot{z} + \frac{2(c_1+c_2+c_3)\,g}{G}z = 0$$
$$\ddot{\varphi} + \frac{2(c_1+c_2+c_3)\,l^2}{J}\varphi = 0$$

Одавде видимо да вертикалне осцилације не зависе од осцилација обртања, па је

$$p_I^2 = \frac{2(c_1+c_2+c_3)g}{G} = \frac{2\,(270+148)\,9{,}81}{26} \approx 316\ \text{sec}^{-2}$$

$$p_{II}^2 = \frac{2\,l^2(c_1+c_2+c_3)}{J} = \frac{2\cdot 1{,}25^2\,(270+148)}{3} \approx 435\ \text{sec}^{-2}$$

$$p_I = 17{,}76\ \text{sec}^{-1}; \qquad p_{II} = 20{,}88\ \text{sec}^{-1};$$

Решење ће имати облик

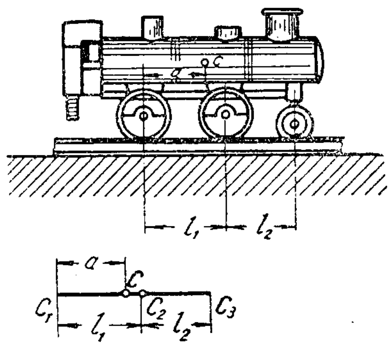
$$z = \lambda_1 \sin(p_I\,t + \alpha)$$
$$\varphi = \lambda_2 \sin(p_{II}\,t + \beta)$$

Константе λ_1, λ_2, α и β одређујемо из почетних услова

$$\text{за}\quad t = t_0 \qquad z = z_0; \qquad \dot{z} = \dot{z}_0$$
$$\varphi = \varphi_0; \qquad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$$

167.) Укупна тежина дела троосне локомотиве изнад опруга износи $G = 26$ t; растојање тежишта од вертикале која пролази кроз задњу осовину је $a = 1{,}6$ m. Растојање између осовина је $l_1 = l_2 = 1{,}8$ m. Моменат инерције дела локомотиве изнад опруга у односу на тежишну хоризонталну осу износи $J = 220$ tmsec². Крутости опруга су $c_1 = c_2 = 135$ t/m и $c_3 = 148$ t/m. (На свакој од осовина постоје два опруге).

Одредити кружне фреквенције главних осцилација локомотиве у уздужној вертикалној тежишној равни и наћи односе амплитуда вертикалних осцилација (скокови) и осцилација обртања око попречне осе (галоп), за сваки од главних облика осцилација.



Сл. 188

Поставићемо опет две једначине на основи d'Alembert-овог принципа

$$\Sigma Z = \frac{G}{g}\ddot{z} + 2c_1(z + a\varphi) + 2c_2[z - (l_1 - a)\varphi] + 2c_3[z - (l_2 + l_1 - a)\varphi] = 0$$

$$\Sigma M_c = J\ddot{\varphi} + 2c_1(z + a\varphi)a - 2c_2[z - (l_1 - a)\varphi](l_1 - a) -$$
$$- 2c_3[z - (l_2 + l_1 - a)](l_2 + l_1 - a) = 0$$

Пошто је $l_1 = l_2 = l$, то је

$$\ddot{z} + \frac{2(c_1 + c_2 + c_3)g}{G}z + \frac{2a(c_1 + c_2 + c_3) - 2l(c_2 + 2c_3)}{G}g\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2a(c_1 + c_2 + c_3) - 2l(c_2 + 2c_3)}{J}z + 2\cdot\frac{c_1a^2 + c_2(l - a)^2 + c_3(2l - a)^2}{J}\varphi = 0$$

Обележимо са

$$k_1^2 = \frac{2(c_1 + c_2 + c_3)g}{G}$$

$$k_2^2 = 2\cdot\frac{c_1a^2 + c_2(l - a)^2 + c_3(2l - a)^2}{J}$$

$$b = \frac{2a(c_1 + c_2 + c_3) - 2l(c_2 + 2c_3)}{G}g$$

$$\frac{b}{i^2} = \frac{2a(c_1 + c_2 + c_3) - 2l(c_2 + 2c_3)}{J}$$

Ако потражимо решења горњих једначина у облику

$$z = \lambda_1 \cos pt\,;$$

и

$$\varphi = \lambda_2 \cos pt\,,$$

доћићемо до једначина

$$\lambda_1(k_1^2 - p^2) + \lambda_2 b = 0$$

$$\lambda_1\frac{b}{i^2} + \lambda_2(k_2^2 - p^2) = 0$$

______________ ,

па је фреквентна једначина

$$\begin{vmatrix} k_1^2 - p^2 & b \\ \frac{b}{i^2} & k_2^2 - p^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

одакле је

$$p^2_{I,II} = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{i^2}}$$

$$k_1^2 = \frac{2(270 + 148)9{,}81}{26} \approx 315{,}43$$

$$k_2^2 = 2\cdot\frac{135\cdot 1{,}6^2 + 135(1{,}8 - 1{,}6)^2 + 148(3{,}6 - 1{,}6)^2}{220} \approx 8{,}57$$

$$b = \frac{3{,}2(270 + 148) - 3{,}6(135 + 296)}{26}\cdot 9{,}81 = -80{,}743$$

$$i^2 = \frac{Jg}{G} = \frac{220\cdot 9{,}81}{26} = 83{,}077$$

$$\frac{b^2}{i^2} = \frac{(-80{,}74)^2}{83{,}077} = 78{,}4$$

Сменом ових вредности добијамо да је

$$p^2_{I,II} = 162 \mp 153{,}68$$

$$p^2_{\mathrm{I}} = 8{,}32\ \sec^{-2}; \qquad p_{\mathrm{I}} = 2{,}88\ \sec^{-1}$$

$$p^2_{\mathrm{II}} = 315{,}68\ \sec^{-2}; \qquad p_{\mathrm{II}} = 17{,}76\ \sec^{-1}$$

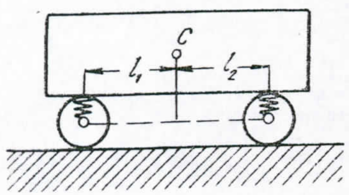
Односи амплитуда су

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} = \frac{b}{p^2_{\mathrm{I}} - k_1^2}\ ; \qquad \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} = \frac{b}{p^2_{\mathrm{II}} - k_1^2}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{I}} = 0{,}263\ \mathrm{m/rad}\ ; \qquad \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\mathrm{II}} = -\ 323\ \mathrm{m/rad}.$$

168.) Проучити осцилације железничког вагона у његовој средишној вертикалној равни, ако је тежина дела вагона ослоњеног на опруге $G = 10$ t; растојање тежишта до вертикалне равни кроз осовине је $l_1 = l_2 = 3$ m, а полупречник инерције у односу на тежишну осовину паралелну осовинама вагона $i = l_1 = l_2 = 3$ m. Крутости опруга на предњој и задњој осовини су једнаке $c_1 = c_2 = 500$ t/m.

Радићемо помоћу Lagrange-евих једначине кретања. За генералисане координате узећемо спуштање тежишта z, и угао обртања рама вагона φ.



Сл. 189

Кинетичка и потенцијална енергија система дате су изразима

$$E_k = \frac{1}{2}\frac{G}{g}(\dot{z}^2 + i^2\dot{\varphi}^2) \qquad (a)$$

$$E_p = \frac{1}{2}c\left[(z + l\varphi)^2 + (z - l\varphi)^2\right] \qquad (b)$$

Потребни чланови за Lagrange-еве једначине кретања су

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{z}}\right) = \frac{G}{g}\ddot{z}\ ; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial z} = 0\ ; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial z} = 2\,cz\ ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{G}{g}i^2\ddot{\varphi}\ ; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0\ ; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 2\,cl^2\varphi,$$

па су једначине кретања

$$\left|\begin{aligned} &\frac{G}{g}\ddot{z} + 2\,cz = 0 \\ &\frac{G\,i^2}{g}\ddot{\varphi} + 2\,cl^2\varphi = 0 \end{aligned}\right.$$

односно

$$\left|\begin{aligned} &\ddot{z} + \frac{2\,cg}{G}z = 0 \\ &\ddot{\varphi} + \frac{g}{G}\cdot\frac{2\,cl^2}{i^2}\varphi = 0 \end{aligned}\right.$$

Као што видимо вертикалне осцилације не зависе од осцилација обртања.

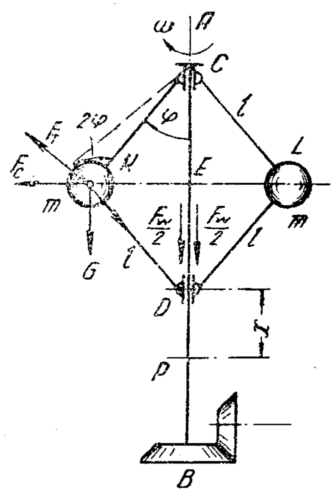
$$p_{\mathrm{I}}^2 = \frac{2\,cg}{G} = \frac{2\cdot 500\cdot 981}{10\cdot 10^2} = 981\ \sec^{-2}$$

$$p = 31{,}3\ \sec^{-1}$$

17. СТАБИЛНО КРЕТАЊЕ РЕГУЛАТОРА

Једна од важних примена теорије осцилација са два степена слободе је испитивање стабилности кретања Watt-овог регулатора.

Посматрајмо регулатор приказан на слици. Вертикална осовина AB преко зупчастог преноса обрће се угаоном брзином ω, која је једнака или пропорционална угаоној брзини главне осовине мотора, чије кретање регулатор треба да регулише. Две масе m, зглавкасто су везане помоћу полуга дужине l, тако да се приликом обртања регулатора огрлица D креће осцилаторно дуж осовине AB, при чему се зависно од брзине обртања масе m приближују или удаљују од ње. Свакој угаоној брзини ω одговараће одређени угао φ, који полуга заклапа са осовином AB.



Сл. 190

Нађимо диференцијалне једначине кретања овог система. Радићемо помоћу d'Alembert-овог принципа.

Приликом обртања регулатора деловаће четири силе

тежина $\quad G = mg$
центрифугална сила $\quad F_c$,
тангенцијална-инерцијална сила F_T, и
отпорна сила $\quad F_w$, која се јавља при осцилаторном кретању услед трења огрлице D по осовини AB.

Центрифугална сила биће

$$F_c = m\omega^2 \cdot \overline{EK}\,; \qquad \overline{EK} = l \sin\varphi\,,$$

па је

$$F_c = ml\omega^2 \sin\varphi \tag{a}$$

Тежина је

$$G = mg \tag{b}$$

Тангенцијална инерцијална сила је

$$F_T = (-m\ddot{s}) = (-ml\ddot{\varphi}) \tag{c}$$

Претпоставимо да је отпорна сила пропорционална првом степену брзине

$$F_w = r\dot{x}$$

Ако је P крајњи положај огрлице D, тј. ако је $\overline{CP} = 2l$, онда је

$$x = \overline{CP} - \overline{CD}$$

$$x = 2l - 2l\cos\varphi = 2l(1-\cos\varphi)$$

$$\dot{x} = 2l\,\dot{\varphi}\sin\varphi\,,$$

па је отпорна сила

$$F_w = 2l\,r\,\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{d}$$

Компоненте овог отпора у правцу полуга $\overline{DK}$ и $\overline{DL}$, пошто се отпор подједнако дели на обе стране биће

$$F = \frac{F_w}{2\cos\varphi}\,,$$

односно

$$F = \frac{2lr\,\dot{\varphi}\sin\varphi}{2\cos\varphi}$$

$$F = lr\dot{\varphi}\,\mathrm{tg}\,\varphi \tag{e}$$

Како ове силе при кретању регулатора по d'Alembert-овом принципу морају бити у равнотежи, то кад поставимо моментну једначину за тачку C добићемо

$$\Sigma M_c = G\cdot\overline{KE} + F\cdot\overline{MC} - F_T\cdot\overline{KC} - F_c\cdot\overline{EC} = 0$$

$$\overline{KE} = l\sin\varphi\,; \qquad \overline{MC} = l\sin 2\varphi\,; \qquad \overline{KC} = l\,; \qquad \overline{CE} = l\cos\varphi\,,$$

па је

$$mgl\sin\varphi + lr\dot{\varphi}\,\mathrm{tg}\,\varphi\cdot l\sin 2\varphi + ml\ddot{\varphi}\cdot l - ml\,\omega^2\sin\varphi\cdot l\cos\varphi = 0$$

Када овај израз поделимо са l диференцијална једначина кретања регулатора гласи

$$ml\ddot{\varphi} + rl\,\mathrm{tg}\,\varphi\cdot\sin 2\varphi\cdot\dot{\varphi} + mg\sin\varphi - ml\omega^2\sin\varphi\cos\varphi = 0 \tag{160}$$

Посматраћемо прво случај када је регулатор у стационарном стању, тј. када је обртни моменат редукован на осу вратила раван нули. У том случају обртне масе регулатора се неће подизати и спуштати, те ће бити $\dot{\varphi} = 0$ и $\ddot{\varphi} = 0$, док ће угаона брзина обртања бити константна $\omega = \omega_0 = \text{const}$. Према томе једначина (160) постаје

$$mg\sin\varphi_0 - ml\,\omega_0^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0 = 0\,, \tag{f}$$

одакле је

$$g = l\omega_0^2\cos\varphi_0 \tag{161}$$

Из једначине (f) се види да у стационарном стању центрифугална сила обртних маса регулатора $F_c = ml\,\omega^2 \sin\varphi_0$ стоји у равнотежи са њиховом тежином, а она се може добити из услова равнотеже регулатора.

Међутим, претпоставимо да се услед деловања обртног момента угаона брзина ω_0 повећала за малу величину η. У том случају и угао φ_0 повећаће се за малу величину ε. Према томе промењеној угаоној брзини одговараће и промењени угао нагиба полуге

$$\omega = \omega_0 + \eta\,; \qquad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon \qquad (g)$$

Пошто су у овом случају ω_0 и φ_0 константе, то је

$$\ddot\varphi = \ddot\varepsilon \quad \text{и} \quad \dot\varphi = \dot\varepsilon\,, \qquad (h)$$

па кад изразе (g), (h) сменимо у једначину (160), добићемо:

$$ml\ddot\varepsilon + rl\,tg\,(\varphi_0+\varepsilon)\cdot\dot\varepsilon\cdot\sin 2(\varphi_0+\varepsilon) + mg\sin(\varphi_0+\varepsilon) - ml(\omega_0+\eta)^2\sin(\varphi_0+\varepsilon)\cos(\varphi_0+\varepsilon) = 0\,,$$

односно

$$ml\ddot\varepsilon + 2rl\sin^2(\varphi_0+\varepsilon)\cdot\dot\varepsilon + mg\sin(\varphi_0+\varepsilon) - \frac{1}{2}ml(\omega_0+\eta)^2\sin 2(\varphi_0+\varepsilon) = 0 \qquad (162)$$

Развијајући ову једначину и занемарујући мале величине другог реда, а имајући у виду да је $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$ и $\cos\varepsilon \approx 1$, добијамо да је

$$\sin(\varphi_0+\varepsilon) \approx \sin\varphi_0 + \varepsilon\cos\varphi_0\,; \qquad \sin^2(\varphi_0+\varepsilon) \approx \sin^2\varphi_0 + \varepsilon\sin 2\varphi_0\,;$$
$$(\omega+\eta)^2 \approx \omega_0^2 + 2\,\omega_0\eta\,; \qquad \sin 2(\varphi_0+\varepsilon) \approx \sin 2\varphi_0 + 2\,\varepsilon\cos 2\varphi_0\,;$$
$$(\omega+\eta)^2\sin 2(\varphi_0+\varepsilon) \approx \omega_0^2\sin 2\varphi_0 + 2\,\omega_0\eta\sin 2\varphi_0 + 2\,\varepsilon\,\omega_0^2\cos 2\varphi_0$$

Сменом ових израза у (162) после сређивања добићемо

$$ml\ddot\varepsilon + 2\,lr\sin^2\varphi_0\cdot\dot\varepsilon + mg\sin\varphi_0 + mg\,\varepsilon\cos\varphi_0 - \frac{1}{2}ml\,\omega_0^2\sin 2\varphi_0 - ml\,\omega_0\eta\sin 2\varphi_0 - ml\,\varepsilon\,\omega_0^2\cos 2\varphi_0 = 0\,, \qquad (163)$$

што се може написати и у облику

$$ml\ddot\varepsilon + 2\,lr\sin^2\varphi_0\cdot\dot\varepsilon + \left(mg\sin\varphi_0 - \frac{1}{2}ml\,\omega_0^2\sin 2\varphi_0\right) + \varepsilon\,(mg\cos\varphi_0 - ml\,\omega_0^2\cos 2\varphi_0) - ml\,\omega_0\eta\sin 2\varphi_0 = 0$$

Имајући у виду једначине (f) и (161), израз у првој загради раван је нули, а у другој загради биће

$$mg\cos\varphi_0 - ml\,\omega_0^2\cos 2\varphi_0 = ml\,\omega_0^2\sin^2\varphi_0$$

Према томе диференцијална једначина кретања регулатора у случају поремећаја угаоне брзине ω_0 за η, чему одговара промена угла φ_0 за ε биће

$$ml\ddot\varepsilon + 2\,rl\sin^2\varphi_0\cdot\dot\varepsilon + ml\,\omega_0^2\sin^2\varphi_0\cdot\varepsilon - ml\,\omega_0\eta\sin 2\varphi_0 = 0\,,$$

или

$$\ddot\varepsilon + 2\,\frac{r}{m}\sin^2\varphi_0\cdot\dot\varepsilon + \omega_0^2\sin^2\varphi_0\cdot\varepsilon - \omega_0\eta\sin 2\varphi_0 = 0 \qquad (164)$$

Ово је прва једначина. Међутим пошто имамо осцилације са два степена слободе, потребна нам је још једна. Друга једначина биће једначина кретања саме машине, коју можемо да напишемо у облику

$$J_0\ddot\theta = J_0\dot\omega = -M\,, \qquad (i)$$

где J_0 претставља збир редукованог момента J машине на осовину регулатора и момента инерције обртних маса регулатора за исту осовину AB

$$J_0 = J + 2\,m\,(l\sin\varphi)^2$$

Ако уведемо карактеристику промене торзионог момента машине f, коју дефинишемо као фактор који помножем угаоном променом ε даје промену торзионог момента на вратилу машине

$$\Delta M = f\varepsilon\,,$$

а како је на основу израза (g)

$$\dot\omega = \dot\eta$$

онда једначина (i) прелази у

$$J_0\dot\eta = -f\varepsilon$$

или

$$\dot\eta = -k\varepsilon\,, \qquad (165)$$

где је

$$k = \frac{f}{J_0}$$

Ако једначину (164) диференцирамо по времену, имајући у виду једначину (165), и ако обележимо са

$$\left.\begin{aligned} a &= 2\,\frac{r}{m}\sin^2\varphi_0 \\ b &= \omega_0^2\sin^2\varphi_0 \\ d &= -\frac{\omega_0\sin 2\varphi_0}{k} \end{aligned}\right\}, \qquad (l)$$

добићемо

$$\dddot\varepsilon + a\ddot\varepsilon + b\dot\varepsilon + d\varepsilon = 0 \qquad (m)$$

Као што видимо, добили смо линеарну диференцијалну једначину трећег реда са константним коефицијентима.

Њена карактеристична једначине биће

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + d = 0 \qquad (n)$$

Из теорије једначина трећег степена познато је да једначина (n) може имати сва три корена реална, или један реалан а остала два коњуговано комплексна. Значи, једначина (n) мора имати бар један реалан корен.

Претпоставимо да су корени једначине (n)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= s \\ \alpha_2 &= p + qi \\ \alpha_3 &= p - qi \end{aligned}\right\} \qquad (o)$$

Исто тако знамо да између коренова и коефициената једначине трећег степена (n), постоји следећа веза

$$\left.\begin{aligned} a &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ b &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 \\ d &= -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{aligned}\right\} \qquad (p)$$

Реалном корену s при решавању једначине (n), одговараће члан

$$C_1 e^{st},$$

а коњуговано комплексним коренима одговараће чланови

$$C_2 e^{(p+qi)t} \quad \text{и} \quad C_3 e^{(p-qi)t},$$

па ће решење једначине (n) имати облик

$$\varepsilon = C_1 e^{st} + C_2 e^{(p+qi)t} + C_3 e^{(p-qi)t} \qquad (q)$$

Пошто тражимо услов да кретање регулатора буде стабилно, онда ε не сме да расте бесконачно у току времена, већ регулатор треба из почетног положаја да пређази у нов положај стационарног кретања после низа амортизованих осцилација. Значи да не би наступило неограничено повећање угла φ, потребно је да реалан корен једначине (n) буде негативан, а такође и да реални делови коњуговано комплексних корена исте једначине буду негативни, док имагинарни делови могу бити какви год хоћемо. Према томе, услов за стабилно кретање регулатора је да је

$$\left.\begin{aligned} s &< 0 \\ p &< 0 \end{aligned}\right\} \qquad (r)$$

На тај начин, имајући у виду једначине (0), (p), (l) и (r), долазимо до једначина

$$\begin{aligned} s - 2p &= 2\frac{r}{m}\sin^2\varphi_0 && (s) \\ p^2 + q^2 + 2ps &= \omega_0^2 \sin^2\varphi_0 && (t) \\ -(p^2 + q^2)s &= -k\omega_0 \sin 2\varphi_0 && (u) \end{aligned}$$

Множењем једначина (s) и (t) добијамо

$$(s - 2p)(p^2 + q^2 - 2ps) = 2\frac{r}{m}\omega_0^2 \sin^4\varphi_0,$$

односно

$$(p^2 + q^2)s - 2ps^2 - 2p(p^2 + q^2) + 4p^2 s = 2\frac{r}{m}\omega_0^2 \sin^4\varphi_0$$

Кад овде заменимо израз дат једначином (u) добијамо

$$-2p(s^2 + p^2 + q^2 - 2ps) = 2\frac{r}{m}\omega_0^2 \sin^4\varphi_0 - k\omega_0 \sin 2\varphi_0$$

Имајући у виду једначину (t) добијамо

$$-2p(s^2 + \omega_0^2 \sin^2\varphi_0) = 2\frac{r}{m}\omega_0^2 \sin^4\varphi_0 - k\omega_0 \sin 2\varphi_0 \qquad (v)$$

Пошто је израз у загради увек позитивна величина, а како по другом услову (r) мора бити

$$p < 0$$

и пошто смо приликом извођења горњих једначина свуда већ стављали $\alpha_1 = -s$, да би био испуњен први од услова (r) онда и десна страна једначине (v) мора бити позитивна, тј.

$$2\frac{r}{m}\omega_0^2 \sin^4\varphi_0 - k\omega_0 \sin 2\varphi_0 > 0,$$

или

$$r > \frac{k\omega_0 \sin 2\varphi_0 \cdot m}{2\omega_0^2 \sin^4\varphi_0},$$

односно

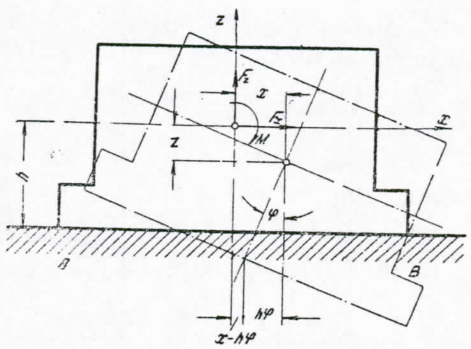
$$r > \frac{km\cos\varphi_0}{\omega_0 \sin^3\varphi_0} \qquad (166)$$

Ако коефицијент r, који је пропорционалан брзини кретања огрлице D по осовини AB не испуни услов дат неједначином (166), кретање регулатора неће бити стабилно.

---

18. ОСЦИЛАЦИЈЕ ФУНДАМЕНТА МАШИНЕ

Нека се на еластичној подлози (земљишту) $B-B$ налази фундамент машине, изложен потресима услед чега почиње да осцилује. Претпоставимо да се тежиште фундамента може померати у хоризонталном и вертикалном правцу, а такође и да се фундамент обрће за мали угао φ око свог тежишта. Према томе осцилације фундамента имаће три степена слободе кретања, а параметри помоћу којих ћемо описати осцилације фундамента биће: померање тежишта у хоризонталном правцу $-x$; померање тежишта у вертикалном правцу $-z$, и угао обртања фундамента око тежишта φ.



Сл. 191

Нађимо диференцијалне једначине кретања фундамента. За решење овог проблема потребни су нам подаци о машини, о фундаменту и о еластичности подлоге (земљишта) на којој се налази фундамент.

Нека је тежина фундамента заједно са машином G, односно одговарајућа маса m, и нека је број обрта машине у минути n, тј. нека је угаона брзина обртања машине

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \ \sec^{-1}$$

При динамичким прорачунима фундамената машина уводе се у рачун коефициенти који карактеришу еластичне особине земљишта и претстављају потребне силе да би се одговарајућа подлога сабила за јединицу запремине. Димензија тих коефициената је

$$[C] = FL^{-3}$$

Пошто фундамент има три степена слободе кретања, то се уводе следећа три коефициента:

$C_z \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}\right]$ — крутост еластичног равномерног сабијања земљишта,

$C_x \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}\right]$ — крутост еластичног смицања и

$C_\varphi \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}\right]$ — крутост еластичног неравномерног сабијања земљишта

Поред ових коефициената који карактеришу отпорност земљишта према сабијању, употребљавају се и коефициенти који показују померање фундамента у неком правцу при кретању. Ови коефициенти претстављају потребну силу да би се фундамент померио за јединицу дужине и имају димензију

$$[c] = FL^{-1}$$

Тако се на пример за померање фундамента у вертикалном правцу употребљава коефициент

$$c_z \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}}\right] \text{— крутост земљишта}$$

Ако је површина основе фундамента A, онда је јасно да је

$$c_z = C_z A$$

Приликом кретања фундамента у z-правцу на њега делују четири силе:

a) инерцијална сила $(-m\ddot{z})$,

b) реституциона сила отпора земљишта у z-правцу

$$F_{rz} = -c_z(z + f_{\text{ст}}) = -C_z A (z + f_{\text{ст}}),$$

c) тежина машине са фундаментом G и

d) поремећајна сила која дато кретање ремети, а за коју претпостављамо да се мења по закону sinus-a, тј. да је дата у облику

$$F_{pz} = F_z \sin \omega t$$

На основи d'Alembert-овог принципа ове силе морају бити у равнотежи

$$\vec{F}_i + \vec{F}_{rz} + \vec{G} + \vec{F}_{pz} = 0,$$

па је диференцијална једначина кретања фундамента у z-правцу

$$(-m\ddot{z}) - C_z A (z + f_{\text{ст}}) + G + F_z \sin \omega t = 0,$$

односно пошто је у стању статичке равнотеже

$$F_{rz0} = G = c_z f_{ст} = C_z A f_{ст} = C_z V,$$

ова диференцијална једначина кретања прелази у

$$m\ddot{z} + C_z Az = F_z \sin \omega t \tag{167}$$

При кретању фундамента у x-правцу на њега делују:

a) инерцијална сила $(-m\ddot{x})$,

b) реституциона сила услед еластичног отпора смицања земљишта

$$F_{rx} = -c_x \delta = -c_x (x - h\varphi) = -C_x A (x - h\varphi),$$

где је h растојање тежишта фундамента од основе, а φ угао обртања услед неравномерног отпора земљишта.

Одавде видимо да је слично као и мало пре

$$c_x = C_x A,$$

при чему c_x има такође димензију $\left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}}\right]$.

c) пертурбациона сила за коју претпостављамо да се мења по закону sinus-a

$$F_{px} = F_x \sin \omega t$$

Како на основи d'Alembert-овог принципа ове силе морају бити у равнотежи

$$\vec{F_i} + \vec{F_{rx}} + \vec{F_{px}} = 0,$$

то диференцијална једначина кретања фундамента у x-правцу гласи

$$m\ddot{x} + C_x A (x - h\varphi) = F_x \sin \omega t \tag{168}$$

Најзад поставимо и трећу диференцијалну једначину кретања, примењујући основну динамичку једначину за обртање крутог тела око непомичне осе

$$J_y \ddot{\varphi} = -M,$$

где је J_y моменат инерције за тежишну осу управну на раван осциловања масе фундамента која се обрће, а M резултујући моменат раван збиру момената од:

a) реституционе силе услед еластичног смицања

$$M_1 = C_x A (x - h\varphi) h,$$

b) тежине $M_2 = Gh\varphi$,

c) поремећајног момента за који претпостављамо да је дат у облику

$$M_3 = -N \sin \omega t \quad \text{и}$$

d) неравномерности сабијања земљишта

$$M_4 = C_\varphi I_y \varphi$$

где је I_y моменат инерције површине подлоге у односу на осовину која пролази кроз тежиште основе, а управна је на раван осциловања (види задатак бр. 39).

Према томе коефициент C_φ претставља количник из момента који изазива обртања основе за један радиан и момента инерције I_y површине основе за наведену осу.

Диференцијална једначина обртања фундамента око свог тежишта, према томе гласи

$$J_y \ddot{\varphi} - C_x A h x + (C_\varphi I_y - Gh + C_x A h^2) \varphi = N \sin \omega t \tag{169}$$

Према томе диференцијалне једначине кретања фундамента гласе

$$\left|\begin{aligned} & m\ddot{z} + C_z Az = F_z \sin \omega t \\ & m\ddot{x} + C_x A (x - h\varphi) = F_x \sin \omega t \\ & J_y \ddot{\varphi} + C_x Ahx + (C_\varphi I_y - Gh + C_x Ah^2)\varphi = N \sin \omega t \end{aligned}\right.$$

Као што видимо једначина (167) не зависи од једначина (168) и (169), односно осцилације у вертикалном правцу не зависе од осцилација у хоризонталном правцу и осцилација обртања. Потражимо решење једначине (167) у облику

$$z = \lambda_z \sin \omega t$$

Амплитуда вертикалних принудних осцилација биће онда дата изразом

$$\lambda_z = \frac{F_z}{m(k^2 - \omega^2)}, \tag{170}$$

где је

$$k^2 = \frac{C_z A}{m}, \tag{171}$$

квадрат кружне фреквенције слободних вертикалних осцилација.

Израз (170) може се написати и у облику

$$\lambda_z = \psi f_{z\,ст},$$

где је
$$f_{z\,\text{ст}} = \frac{F_z}{C_z A} \tag{172}$$
статички угиб у z — правцу, а
$$\psi = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}}, \tag{173}$$
динамички фактор појачавања, који показује колико је пута амплитуда принудних вертикалних осцилација већа од статичког угиба у z правцу услед дејства поремећајне силе F_{pz}.

Осцилације у хоризонталном правцу и осцилације обртања као што се види из једначина (168) и (169) су међусобно у вези. Нађимо њихово решење у облику
$$x = \lambda_x \sin \omega t\,,$$
$$\varphi = \lambda_\varphi \sin \omega t$$
Тада добијамо
$$\left.\begin{aligned} &\lambda_x (C_x A - m\omega^2) - \lambda_\varphi C_x A h = F_x \\ &-\lambda_x C_x A h + \lambda_\varphi (C\varphi I_y - Gh + C_x A h^2 - J_y \omega^2) = N \end{aligned}\right\} \tag{174}$$

Решењем једначина (174) по λ_x и λ_φ добијамо да су амплитуда принудне осцилације у хоризонталном правцу и амплитуда принудне осцилације обртања дате изразима
$$\left.\begin{aligned} \lambda_x &= \frac{(C\varphi I_y - Gh + C_x A h^2 - J_y \omega^2) F_x + C_x A h N}{\Delta} \\ \lambda_\varphi &= \frac{C_x A h F_x - (C_x A - m\omega^2) N}{\Delta} \end{aligned}\right\} \tag{175}$$
где је
$$\Delta = m J_y \omega^4 - (C\varphi I_y m - Ghm + C_x A h^2 m + C_x A J_y)\,\omega^2 + (C\varphi I_y - Gh)\, C_x A \tag{176}$$

Кружне фреквенције слободних осцилација наћићемо из фреквентне једначине образоване од левих страна једначина (174)
$$\begin{vmatrix} C_x A - m\omega^2 & -C_x A h \\ -C_x A h & C\varphi I_y - Gh + C_x A h^2 - J_y \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{177}$$
што кад се развије даје
$$J_y m\omega^4 - \omega^2 [m C\varphi I_y + C_x A (J_y + mh^2) - Ghm] + C_x C\varphi A I_y - C_x A G h = 0 \tag{178}$$

Обележимо са
$$\left.\begin{aligned} J_0 &= J_y + mh^2 \\ \omega^2_x &= \frac{C_x A}{m} \\ \omega\varphi^2 &= \frac{C\varphi I_y - Gh}{J_0} \\ \beta &= \frac{J_y}{J_0} \end{aligned}\right\} \tag{a}$$
и једначину (178) поделимо са m, која тада прелази у
$$\beta\omega^4 - (\omega^2_x + \omega\varphi^2)\,\omega^2 + \omega^2_x\, \omega\varphi^2 = 0, \tag{b}$$
одакле је
$$\omega_{\text{I, II}}^2 = \frac{1}{2\beta}\left[(\omega^2_x + \omega\varphi^2) \mp \sqrt{(\omega^2_x + \omega\varphi^2)^2 - 4\beta\,\omega^2_x\,\omega\varphi^2}\,\right] \tag{179}$$

Кад знамо ω^2_{I} и ω_{II}^2 онда се изрази за амплитуде (175) могу написати и у облику
$$\left.\begin{aligned} \lambda_x &= \frac{(C\varphi I_y - Gh + C_x A h^2 - J_y \omega^2) F_x + C_x A h N}{m J_y (\omega^2_{\text{I}} - \omega^2)(\omega^2_{\text{II}} - \omega^2)} \\ \lambda_\varphi &= \frac{C_x A h F_x - (C_x A - m\omega^2) N}{m J_y (\omega^2_{\text{I}} - \omega^2)(\omega_{\text{II}}^2 - \omega^2)} \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

Фреквентна једначина као и изрази за амплитуде дају се обично у облику (179) и (180).

Изрази за амплитуде (180) у извесним специјалним случајевима могу знатно да се упросте.

Тако на пример темељи под хоризонталним машинама обично имају у правцу кретања клипа знатно веће димензије него по висини. При таквим димензијама темеља на њега ће првенствено деловати хоризонтална компонента пертурбационе силе, те ће он вршити углавном хоризонталне осцилације, чију амплитуду можемо срачунати по обрасцу
$$\lambda_x = \frac{F_x}{(C_x A - m\omega^2)}, \tag{181}$$
док ће амплитуда обртних осцилација бити врло мала, те је можемо занемарити.

На исти начин ако је висина темеља много већа од димензије његове основе у равни осциловања, принудне осцилације приближаваће се по облику простим обртним осцилацијама. У том случају можемо приближно сматрати да је $\lambda_x = 0$, а амплитуду обртних осцилација можемо срачунати по обрасцу

$$\lambda_\varphi = \frac{N}{C_\varphi I_y - J_0 \omega^2}, \tag{182}$$

где је

$$J_0 = J_y + mh^2$$

Темељи под клипним машинама пројектују се тако да је фреквенција сопствених осцилација темеља за $(50—125)^0/_0$ виша од радног броја обртаја машине.

На основи свих наведених образаца врше се двојака прорачунавања:

a.) одређивање кружних фреквенција слободних осцилација k, ω_I и ω_{II}, с тим да те вредности буду довољно далеко од угаоне брзине обртања машине ω, како би се избегла резонанца и

b.) одређивање величина амплитуда принудних осцилација фундамента, које не смеју да пређу неку унапред задату вредност ξ, коју диктирају разни услови.

Примери

169.) Одредити све три кружне фреквенције осцилација темеља под Diesel-мотором, у равни управној на осовину вратила. Тежина темеља заједно са мотором и генератором износи $G = 245$ t, а осцилујућа маса је према томе $m = 25\ t\ \text{sec}^2/\text{m}$. Површина основе темеља је $A = 7{,}70 \times 5{,}25 = 40{,}5\ \text{m}^2$; моменат инерције осцилујуће масе у односу на тежишну осу система је $J_y = 134\ \text{tmsec}^2$, а у односу на тежишну осу основе паралелне оси обртања (управне на равни обртања) је $J_0 = 215\ \text{tmsec}^2$, док је моменат инерције површине основе за исту осу $I_Y = 93\ \text{m}^4$. Подлога је од ситног песка, а крутости еластичног сабијања и смицања земљишта (подлоге) крећу се у границама:

$$C_z = (2 \div 4)\ \text{kg/cm}^3; \quad C_\varphi = (4 \div 7)\ \text{kg/cm}^3; \quad C_x = (1 \div 3)\ \text{kg/cm}^3.$$

Растојање тежишта система од површине основе износи $h = 1{,}8$ m.

$$k^2 = \frac{C_z A}{m} = (3{,}24 \cdot 10^3 \div 6{,}48 \cdot 10^3)\ \text{sec}^{-2}$$

Остале две кружне фреквенције добијамо по обрасцу (179)

$$\omega_I^2 = (0{,}78 \cdot 10^3 \div 2{,}38 \cdot 10^3)\ \text{sec}^{-2}$$

$$\omega_{II}^2 = (5{,}4 \cdot 10^3 \div 15{,}4 \cdot 10^3)\ \text{sec}^{-2}$$

Према томе резонанца при вертикалним осцилацијама ће наступити, кад број обрта мотора у минути буде

$$n_1 = (544 \div 764)\ \text{min}^{-1},$$

а при хоризонталним осцилацијама с обртањем, кад је тај број

$$n_2 = (550 \div 1900)\ \text{min}^{-1}$$

$$n_3 = (270 \div 470)\ \text{min}^{-1}$$

Резонанцу ћемо према томе избећи ако је

$$n < 270\ \text{obr/min} \quad \text{или}$$

$$n > 1900\ \text{obr/min}$$

170.) Израчунати амплитуде померања темеља из претходног задатка ако је познато да се пертурбациона сила, која делује у висини главног вратила машине на растојању $H = 4{,}2$ m од основе, мења по закону $F_p = F_x \sin \omega t = 10 \sin \omega t$ *t*. Број обртаја машине у минути износи $n = 167$. Крутости еластичног сабијања и смицања земљишта су $C_x = 1{,}0 \cdot 10^3\ \text{t/m}^3$ и $C_\varphi = 7{,}0 \cdot 10^3\ \text{t/m}^3$.

Изрази за амплитуде за овај случај добиће се на сличан начин као што је већ показано, и гласе

$$\lambda_x = \frac{C_\varphi I_Y - Gh + C_x AhH - J_Y \omega^2}{m J_Y (\omega_I^2 - \omega^2)(\omega_{II}^2 - \omega^2)} F_x$$

$$\lambda_\varphi = \frac{C_x A H - h m \omega^2}{m J_Y (\omega_I^2 - \omega^2)(\omega_{II}^2 - \omega^2)} F_x$$

ω_I^2 и ω_{II}^2, добијамо по обрасцу (179)

$$\omega_I^2 = 0{,}78 \cdot 10^3\ \text{sec}^{-2} \quad \text{и} \quad \omega_{II}^2 = 5{,}4 \cdot 10^3\ \text{sec}^{-2}$$

$$\omega = \frac{\pi \cdot 167}{30} = 17{,}3\ \text{sec}^{-1}; \qquad \omega^2 = 0{,}3 \cdot 10^3\ \text{sec}^{-2},$$

па је

$$\lambda_x = \frac{7 \cdot 10^3 \cdot 93 - 245 \cdot 1{,}8 + 10^3 \cdot 40{,}5 \cdot 1{,}8 \cdot 4{,}2 - 134 \cdot 0{,}30 \cdot 10^3}{25 \cdot 134\,(0{,}3 - 5{,}4)\,(0{,}3 - 0{,}78) \cdot 10^3} \cdot 10 =$$

$$= \frac{91{,}6 \cdot 10^5}{8{,}2\ 10^9} = 1{,}12 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

$$\lambda_x = 1{,}12 \text{ mm.}$$

$$\lambda_\varphi = \frac{10^3 \cdot 40{,}5 \cdot 4{,}2 - 1{,}8 \cdot 25 \cdot 0{,}3 \cdot 10^3}{8{,}2 \cdot 10^9} \cdot 10 = 0{,}19 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

Без обзира на то што се најнижа фреквенција обртно смичућих осцилација разликује од фреквенције пертурбационе силе за 60%, ипак су добијене вредности за амплитуде принудних осцилација недопуштене величине, пошто допуштене вредности за амплитуде принудних осцилација код фундамената машина, према подацима: Машиностроение, энциклопедический справочник, Том [illegible], книга вторая, износе $(0{,}1 \div 0{,}2)$ mm.

Према томе из овога примера видимо да је неопходно прорачунати амплитуде принудних осцилација и у случају ако је темељ већ обезбеђен од резонанце.

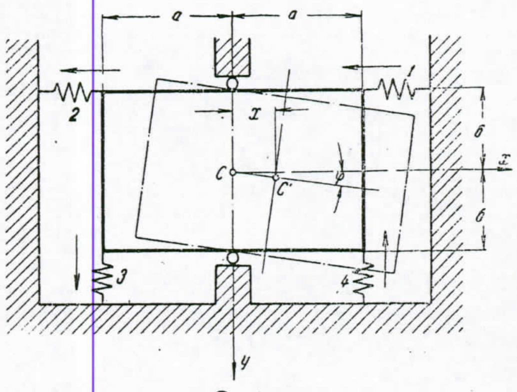
---

19. МЕШОВИТИ ПРИМЕРИ ИЗ ОСЦИЛАЦИЈА СА ВИШЕ СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

171.) Хомогена правоугаона плоча димензија $2a$ и $2b$, тежине $G = 100$ kg. причвршћена је за четири опруге једнаких крутости $c = 50$ kg/cm. Померање тежишта плоче у вертикалном правцу онемогућено је помоћу два ваљка, тј. плоча се може померати у x — правцу и у исто време окретати за мали угао φ око свог тежишта.

У случају да је $a = 2b$ наћи кружне фреквенције слободних осцилација система.

Примедба: При изналажењуреституционих сила у опругама 3 и 4 занемарити померање у x — правцу. (Испит, јануар 1949).



Сл. 192

Реституционе силе у појединим опругама су:

1 $c(x + b\varphi)$,

2 $c(x + b\varphi)$,

3 $ca\varphi$,

4 $ca\varphi$,

па је на основи d'Alembert-овог принципа

$$\Sigma X = (-M\ddot{x}) - 2c(x + b\varphi) = 0$$

$$\underline{\Sigma M_{c'} = J\ddot{\varphi} + 2a^2c\varphi + 2bc(x + b\varphi) = 0}$$

Диференцијалне једначине кретања, према томе, гласе

$$M\ddot{x} + 2c(x + b\varphi) = 0$$

$$\underline{J\ddot{\varphi} + 2ca^2\varphi + 2bc(x + b\varphi) = 0}$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$x = \lambda_1 \cos pt\,;$$

$$\varphi = \lambda_2 \cos pt\;,$$

долазимо до једначина

$$\lambda_1 (2c - Mp^2) + \lambda_2\, 2bc = 0$$

$$\lambda_1\, 2bc + \lambda_2 [2c(a^2+b^2) - Jp^2] = 0$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} 2c - Mp^2 & 2bc \\ 2bc & 2c(a^2+b^2) - Jp^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

односно $(2c - Mp^2)[2c(a^2+b^2) - Jp^2] - 4b^2c^2 = 0$

$$J = \frac{1}{12} M[(2a)^2 + (2b)^2] = \frac{1}{3} M(a^2+b^2)$$

Кад ставимо $a = 2b$,

горња фреквентна једначина своди се на

$$p^4 - \frac{8c}{M} p^2 + \frac{48}{5}\frac{c^2}{M^2} = 0$$

Ако уврстимо бројне вредности биће

$$\frac{8c}{M} = \frac{8\cdot 50\cdot 981}{1000} = 3924\;; \qquad \frac{48c^2}{5M^2} = \frac{48\cdot 2500\cdot 981^2}{5\cdot 10000} = 2{,}4\cdot 981^2\,,$$

па је $p^4 - 3924\,p^2 + 2{,}4\cdot 981^2 = 0$

Одавде је

$$p^2_{\mathrm{I}} = 722\ \sec^{-2}; \qquad p^2_{\mathrm{II}} = 3222\ \sec^{-2},$$

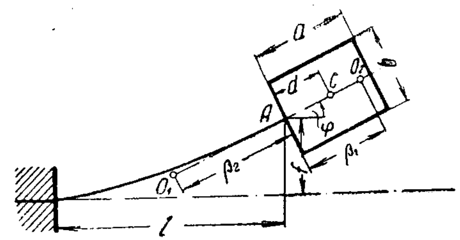
односно $p_{\mathrm{I}} = 26{,}8\ \sec^{-1}; \qquad p_{\mathrm{II}} = 56{,}7\ \sec^{-1}$

Напомена: Диференцијалне једначине кретања можемо добити и помоћу Lagrange-евих једначина кретања, узимајући за генералисане координате хоризонтално померање — x и угао окретања — φ. У том случају изрази за кинетичку и потенцијалну енергију система гласе

$$E_k = \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M\dot{x}^2$$

$$E_p = c(x + b\varphi)^2 + ca^2\varphi^2$$

172.) Хомогена правоугаона плочица масе m учвршћена је на крају A еластичног штапа дужине l, чији је други крај укљештен. Систем се налази у хоризонталној равни и осцилује слободно у њој око равнотежног положаја. Одредити кружне фреквенције система, као и облике главних осцилација. Димензије плочице су $a = 0{,}2\ l$; $b = 0{,}1\ l$. Масу штапа занемарити.



Сл. 193

Обележимо са P силу којом треба деловати у положају равнотеже у тачки A на крају штапа да би изазвали угиб f, а са M моменат који ће крај штапа окренути за угао φ.

Радићемо помоћу Lagrange-евих једначина кретања. За генералисане координате узимамо угиб f, и угао окретања φ,

па је

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{f}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial f} = -\frac{\partial E_p}{\partial f}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}$$

Нађимо кинетичку и потенцијалну енергију система.

$$E_k = \frac{1}{2} J_c\,\omega^2 + \frac{1}{2} m v_c^2; \quad \omega = \dot{\varphi}$$

$$J_c = \frac{1}{12} m(a^2+b^2) = \frac{0{,}05}{12} ml^2$$

Ако са i обележимо полупречник инерције плочице за тежишну осу, онда је

$$i^2 = \frac{J_c}{m}, \quad \text{па је} \quad i^2 = \frac{0{,}05}{12} l^2$$

$$v_c = \dot{f} + d\dot{\varphi}\,, \qquad \text{па је}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m[(\dot{f} + d\dot{\varphi})^2 + i^2\dot{\varphi}^2] = \frac{1}{2} m[\dot{f}^2 + (d^2+i^2)\dot{\varphi}^2 + 2d\dot{f}\dot{\varphi}]\,, \quad (a)$$

где је

$$d = \frac{a}{2} = 0{,}1\ l$$

$$E_p = \frac{1}{2}(M\varphi + Pf)$$

Знамо да је по Castigliano-овој теореми

$$f=\frac{\partial E_p}{\partial P} \qquad \text{и} \qquad \varphi=\frac{\partial E_p}{\partial M}$$

Исто тако је по обрасцу из отпорности материјала

$$E_p=\frac{1}{2EI}\int_0^l (M+Pz)^2\,dz=\frac{1}{2EI}\int_0^l (M^2+2MPz+P^2z^2)\,dz$$

$$E_p=\frac{1}{2EI}\left(M^2 l+MPl^2+\frac{P^2l^3}{3}\right)$$

$$f=\frac{\partial E_p}{\partial P}=\frac{l}{EI}\left(M\frac{l}{2}+P\frac{l^2}{3}\right)$$

$$\varphi=\frac{\partial E_p}{\partial M}=\frac{l}{EI}\left(M+P\frac{l}{2}\right),$$

одакле је

$$M=\frac{2EI}{l^2}(2\varphi l-3f)$$

$$P=\frac{12EI}{l^3}\left(f-\frac{l}{2}\varphi\right),$$

па је

$$E_p=\frac{3EI}{2l^3}\left(4f^2-4fl\varphi+\frac{4}{3}l^2\varphi^2\right)$$

Обележимо са $c=\frac{3EI}{l^3}$,

па је

$$E_p=\frac{c}{2}\left(4f^2-4fl\varphi+\frac{4}{3}l^2\varphi^2\right) \qquad (b)$$

Нађимо диференцирањем израза за E_k и E_p потребне чланове за Lagrange-еве једначине кретања

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot f}\right)=m\ddot f+md\ddot\varphi\,; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi}\right)=m(d^2+i^2)\ddot\varphi+md\ddot f;$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial f}=0\,; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi}=0;$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial f}=4cf-2cl\varphi\,; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi}=\frac{4}{3}cl^2\varphi-2cfl$$

Диференцијалне једначине кретања, према томе, су

$$m\ddot f+md\ddot\varphi+4cf-2cl\varphi=0$$

$$m(d^2+i^2)\ddot\varphi+md\ddot f+\frac{4}{3}cl^2\varphi-2cfl=0$$

Обележимо са $k=\frac{c}{m}=\frac{3EI}{ml^3}$, па је

$$\ddot f+d\ddot\varphi+4kf-2kl\varphi=0$$

$$(d^2+i^2)\ddot\varphi+d\ddot f+\frac{4}{3}kl^2\varphi-2kfl=0$$

Ако потражимо решења ових једначина у облику

$$f=\lambda_1\cos pt\,; \qquad \varphi=\lambda_2\cos pt\,,$$

долазимо до једначина

$$\lambda_1(4k-p^2)-\lambda_2(2kl+dp^2)=0$$

$$-\lambda_1(2kl+dp^2)+\lambda_2\left[\frac{4}{3}kl^2-(d^2+i^2)p^2\right]=0$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} 4k-p^2 & -(2kl+dp^2) \\ -(2kl+dp^2) & \frac{4}{3}kl^2-(d^2+i^2)p^2 \end{vmatrix}=0\,,$$

одакле је

$$p^4-\frac{k}{i^2}\left[4(d^2+i^2)+\frac{4}{3}l^2+4ld\right]p^2+\frac{4}{3}\frac{k^2l^2}{i^2}=0$$

Ова једначина може се дати и у другом облику ако обележимо са

$$\tau=\frac{1}{p}\sqrt{k}=\frac{1}{p}\sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}$$

Тада је

$$\tau^4-\left[1+\frac{3d}{l}+\frac{3(d^2+i^2)}{l^2}\right]\tau^2+\frac{3}{4}\frac{i^2}{l^2}=0$$

Кад заменимо бројне вредности у прву фреквентну једначину добићемо

$$p^4-\frac{12}{0{,}05}\frac{k}{l^2}\left[4\left(0{,}01+\frac{0{,}05}{12}\right)l^2+\frac{4}{3}l^2+0{,}4l^2\right]+\frac{4}{3}\,\frac{12}{0{,}05\,l^2}k^2l^2=0\,,$$

односно

$$p^4-429{,}6\,kp^2+320\,k^2=0$$

$$p^2_{\mathrm{I,II}}=(214{,}8\mp 214{,}05)\,k\,\sec^{-2}$$

$$p_{\mathrm{I}}=0{,}866\sqrt{k}=0{,}866\sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}\,\sec^{-1}$$

$$p_{II} = 20{,}7\sqrt{k} = 20{,}7\sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}\ \sec^{-1}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{I} = \frac{2lc + p^2_{I}\, md}{4c - p^2_{I}\, m} = \frac{l}{2}\cdot\frac{\tau_1^2 + \dfrac{d}{2l}}{\tau_1^2 - \dfrac{1}{4}} = 0{,}638\, l = \beta_1$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{II} = \frac{2lc + p^2_{II}\, md}{4c - p^2_{II}\, m} = \frac{l}{2}\cdot\frac{\tau_2^2 + \dfrac{d}{2l}}{\tau_2^2 - \dfrac{1}{4}} = -\,0{,}1056\, l = \beta_2$$

Први облик главних осцилација можемо, према томе, посматрати као осцилације обртања око тачке O_1, на удаљењу $\overline{O_1A} = 0{,}638\, l$, а други облик око тачке O_2, која се налази на продужењу осовине штапа, десно од тачке A, на растојању $\overline{O_2A} = 0{,}1056\, l$.

Диференцијалне једначине кретања можемо добити и на основу d'Alembert-овог принципа.

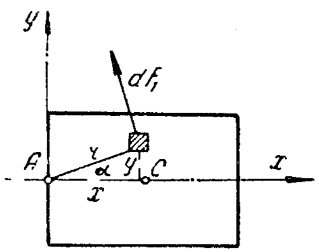
Услед померања тежишта за дужину x у тежишту плоче деловаће инерцијална сила $(-m\ddot{x})$, која кад се редукује на тачку A даје

силу $$F = (-m\ddot{x}) \quad \text{и}$$

моменат $$M = (-m\ddot{x})\, d = (-m\ddot{x})\,\frac{a}{2}$$

Услед ротације у свакој честици плоче појавиће се такође d'Alembert-ова инерцијална сила. Диференцијал те силе биће

$$dF_1 = (-\,r\ddot{\varphi}\, dm)$$



Сл. 194

Диференцијал масе плоче је

$$dm = \frac{m}{ab}\, dA$$

и $$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

па је $$dF_1 = -\,\ddot{\varphi}\,\frac{m}{ab}\sqrt{x^2+y^2}\cdot dA$$

Пројекција ове елементарне силе на y — правац биће

$$dF_{1y} = -\,\ddot{\varphi}\,\frac{m}{ab}\sqrt{x^2+y^2}\, dA\cos\alpha$$

Пошто је $$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

то је $$dF_{1y} = -\,\frac{m}{ab}\,\ddot{\varphi}\, x\, dA$$

Збир пројекција свих ових елементарних сила на y — правац биће

$$F_{1y} = -\,\frac{m}{ab}\,\ddot{\varphi}\int_A x\, dA$$

$$\int x\, dA = A\cdot\frac{a}{2} = ab\cdot\frac{a}{2}\,,$$

претставља статички моменат плочице за y — осу па је

$$F_{1y} = -\,\frac{ma}{2}\,\ddot{\varphi}$$

Нађимо најзад и редуковани инерциони моменат за тачку A услед ротације плочице

$$dM_1 = -\,r\cdot dF_1 = -\,\frac{m}{ab}\, r\ddot{\varphi}\sqrt{x^2+y^2}\, dA\,,$$

па је елементарни инерциони моменат

$$dM_1 = -\,\frac{m}{ab}\,\ddot{\varphi}\,(x^2+y^2)\, dA\,,$$

а укупни

$$M_1 = -\,\frac{m}{ab}\,\ddot{\varphi}\int_A (x^2+y^2)\, dA$$

Како је $$dA = dx\, dy$$

то је $$M_1 = -\,\frac{m}{ab}\,\ddot{\varphi}\iint_A (x^2+y^2)\, dx\, dy\,,$$

односно $$M_1 = -\,2\,\frac{m}{ab}\,\ddot{\varphi}\int_0^a dx\int_0^{b/2}(x^2+y^2)\, dy$$

$$M_1 = -\,m\ddot{\varphi}\left(\frac{4a^2+b^2}{12}\right)$$

Тако смо одредили све утицаје који делују у тачки A.

Угиб услед јединичне силе на крају штапа је

$$\delta_1 = \frac{l^3}{3EI}\,, \qquad \text{а нагиб} \quad \beta_1 = \frac{l^2}{2EI}$$

Угиб услед јединичног момента на крају штапа је

$$\delta_2 = \frac{l^2}{2EI}, \qquad \text{а нагиб} \qquad \beta_2 = \frac{l}{EI}$$

Према томе, диференцијалне једначине кретања биће

$$x = (F + F_{1y})\,\delta_1 + (M + M_1)\,\delta_2$$

$$\varphi = (F + F_{1y})\,\beta_1 + (M + M_1)\,\beta_2\,,$$

односно

$$\left|\begin{array}{l} x = -\,m\left(\ddot{x} + \dfrac{a}{2}\,\ddot{\varphi}\right)\delta_1 - m\left(\dfrac{4a^2 + b^2}{12}\,\ddot{\varphi} + \dfrac{a}{2}\,\ddot{x}\right)\delta_2 \\[2ex] \varphi = -\,m\left(\ddot{x} + \dfrac{a}{2}\,\ddot{\varphi}\right)\beta_1 - m\left(\dfrac{4a^2 + b^2}{12}\,\ddot{\varphi} + \dfrac{a}{2}\,\ddot{x}\right)\beta_2 \end{array}\right.$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$x = \lambda_1 \cos pt\,;$$

$$\varphi = \lambda_2 \cos pt\,,$$

долазимо до једначина

$$\lambda_1\left[mp^2\left(\delta_1 + \frac{a}{2}\,\delta_2\right) - 1\right] + \lambda_2\left[mp^2\left(\frac{a}{2}\,\delta_1 + \frac{4a^2 + b^2}{12}\,\delta_2\right)\right] = 0$$

$$\lambda_1\left[mp^2\left(\beta_1 + \frac{a}{2}\,\beta_2\right)\right] + \lambda_2\left[mp^2\left(\frac{a}{2}\,\beta_1 + \frac{4a^2 + b^2}{12}\,\beta_2\right)\right] = 0$$

Фреквентна једначина, према томе, гласи

$$\begin{vmatrix} mp^2\left(\delta_1 + \dfrac{a}{2}\,\delta_2\right) - 1 & mp^2\left(\dfrac{a}{2}\,\delta_1 + \dfrac{4a^2 + b^2}{12}\,\delta_2\right) \\[2ex] mp^2\left(\beta_1 + \dfrac{a}{2}\,\beta_2\right) & mp^2\left(\dfrac{a}{2}\,\beta_1 + \dfrac{4a^2 + b^2}{12}\,\beta_2\right) - 1 \end{vmatrix} = 0$$

После смене вредности за a, b, δ_1, δ_2, β_1 и β_2, ова једначина прелази у

$$\begin{vmatrix} mp^2\,\dfrac{l^3}{3EI}\,\dfrac{23}{20} - 1 & mp^2\,\dfrac{l^4}{3EI}\,\dfrac{97}{800} \\[2ex] mp^2\,\dfrac{l^2}{3EI}\,\dfrac{18}{10} & mp^2\,\dfrac{l^3}{3EI}\,\dfrac{77}{400} - 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

одакле је

$$p^4\left(\frac{ml^3}{3EI}\right)^2\left(\frac{23\cdot 77}{20\cdot 400} - \frac{18\cdot 97}{10\cdot 800}\right) - \left(\frac{ml^3}{3EI}\right)\left(\frac{23}{20} + \frac{77}{400}\right)p^2 + 1 = 0$$

Ако обележимо са $k = \dfrac{ml^3}{3EI}$, добијамо одавде исту фреквентну једначину као и мало пре

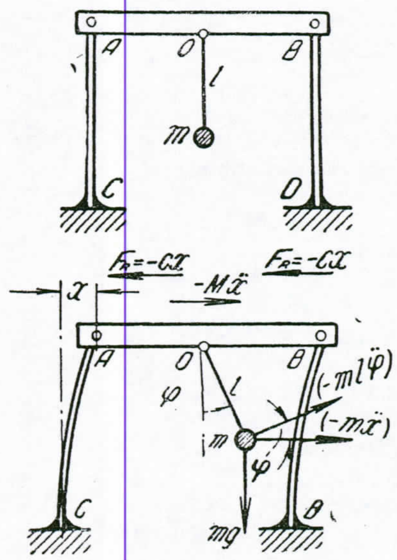
$$p^4 - 429{,}6\,kp^2 + 320\,k^2 = 0$$

173.) Хоризонтална греда AB, масе M, постављена је својим крајевима на два вертикална стуба CA и DB (веза је у виду зглоба). На средини греде обешен је терет m о концу дужине l. При малом хоризонталном померању врха стуба, хоризонтална реакција савијеног стуба, која делује на греду, пропорционална је том померању, при чему коефицијент пропорционалности износи c. Показати да фреквентна једначина система гласи

$$Mlp^4 - [(M + m)\,g + 2cl]\,p^2 + 2cg = 0$$

На основу d'Alembert-овог принципа је

$$\left|\begin{array}{l} \Sigma X = -\,2cx + (-\,M\ddot{x}) + (-\,m\ddot{x}) + \\ \qquad + (-\,ml\,\ddot{\varphi})\cos\varphi = 0 \\[1ex] \Sigma M_0 = mgl\,\sin\varphi - (-\,ml\,\ddot{\varphi})\,l - \\ \qquad - (-\,m\ddot{x})\,l\cos\varphi = 0 \end{array}\right.$$



Сл. 195

$$\cos \approx 1\,; \qquad \sin\varphi \approx \varphi\,,$$

па су диференцијалне једначине кретања

$$\left|\begin{array}{l} (M + m)\,\ddot{x} + 2cx + ml\ddot{\varphi} = 0 \\ ml\ddot{x} + ml^2\,\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0 \end{array}\right.,$$

односно

$$\left|\begin{array}{l} (M + m)\,\ddot{x} + 2cx + ml\,\ddot{\varphi} = 0 \\[1ex] \ddot{x} + l\,\ddot{\varphi} + g\varphi = 0 \end{array}\right.$$

Ако потражимо решења ових једначина у облику

$$x = \lambda_1 \cos pt\,;$$

$$\varphi = \lambda_2 \cos pt\,,$$

долазимо до једначина

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1\,[2c - (M + m)p^2] - \lambda_2\,mlp^2 = 0 \\ -\,\lambda_1\,p^2 + \lambda_2\,(g - lp^2) = 0 \end{array}\right.$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} 2c-(M+m)p^2 & -mlp^2 \\ -p^2 & g-lp^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

односно $\qquad [2c-(M+m)p^2](g-lp^2)-mlp^4=0\,,$

а одавде $\qquad Mlp^4-[(M+m)g+2cl]p^2+2cg=0$

Ако радимо помоћу Lagrange-евих једначина кретања биће

$$E_k=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}+l\dot{\varphi})^2=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2+2\dot{x}\dot{\varphi}l)$$

$$E_p=cx^2+\frac{1}{2}mgl\varphi^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{x}}\right)=(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\varphi}\;;\quad \frac{\partial E_k}{\partial x}=0\;;\quad \frac{\partial E_p}{\partial x}=2cx\;;$$

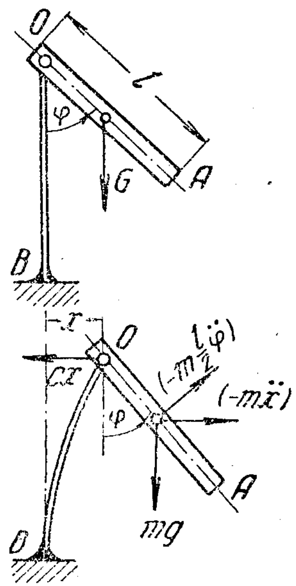
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\varphi}}\right)=l\ddot{\varphi}+\ddot{x}\;;\quad \frac{\partial E_k}{\partial\varphi}=0\;;\quad \frac{\partial E_p}{\partial\varphi}=g\varphi$$

На тај начин добијамо исте диференцијалне једначине кретања као и кад смо радили помоћу d'Alembert-овог принципа

$$\left|\begin{array}{l}(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\varphi}+2cx=0\\ l\ddot{\varphi}+\ddot{x}+g\varphi=0\end{array}\right.$$

174.) Хомогена права полуга OA дужине l, тежине G, може да се окреће помоћу зглоба O око врха вертикалног еластичног стуба OB чији је доњи крај B укљештен. При малом хоризонталном померању врха стуба еластична хоризонтална сила која делује на полугу пропорционална је том померању, при чему коефицијент пропорционалности износи c.

Одредити фреквентну једначину око равнотежног положаја, ако усвојимо као параметре хоризонтално померање горњег краја стуба x и угао φ који полуга заклапа са вертикалом.



Сл. 196

Радићемо по d'Alembert--овом принципу.

Хоризонтална пројекција елементарне инерцијалне силе ротације је

$$dF_{ix}=(-\,dm\,\xi\,\ddot{\varphi})\cos\varphi=(-\rho\,\ddot{\varphi}\,\xi\,d\xi)\cos\varphi\,,$$

док је сума свих њихових хоризонталних пројекција

$$F_{ix}=\int_0^l(-\rho\ddot{\varphi}\,\xi\,d\xi)\cos\varphi=(-m\frac{l}{2}\ddot{\varphi})\cos\varphi\,,\text{*)}$$

а исто се добија и применом закона о кретању средишта, па је

$$\Sigma X=-cx+(-m\ddot{x})+(-m\frac{l}{2}\ddot{\varphi})\cos\varphi=0\,,$$

односно $\qquad 2m\ddot{x}+2cx+ml\ddot{\varphi}=0$

Пошто се моменат инерцијалних сила ротације за тачку O своди на $J_0\ddot{\varphi}$, онда је

$$\Sigma M_0=J_0\ddot{\varphi}+mg\frac{l}{2}\sin\varphi-(-m\ddot{x})\frac{l}{2}\cos\varphi=0\,,$$

па је $\qquad \frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}mgl\varphi+\frac{1}{2}ml\ddot{x}=0$

Диференцијалне једначине кретања према томе гласе:

$$\left|\begin{array}{l}2m\ddot{x}+2cx+ml\ddot{\varphi}=0\\ 2l\ddot{\varphi}+3g\varphi+3\ddot{x}=0\end{array}\right.$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$x=\lambda_1\cos pt\;;\qquad \varphi=\lambda_2\cos pt\,,$$

долазимо до једначина

$$\lambda_1(2c-2mp^2)-\lambda_2\,mlp^2=0$$
$$-\lambda_1\,3p^2+\lambda_2(3g-2lp^2)=0$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} 2c-2mp^2 & -mlp^2 \\ -3p^2 & 3g-2lp^2 \end{vmatrix}=0\,,$$

односно $\qquad (2c-2mp^2)(3g-2lp^2)-3mlp^4=0\,,$

а одавде $\qquad mlp^4-(6mg+4lc)p^2+6gc=0\,,$

*) ρ је маса јединице дужине полуге

односно $$p^4 - 2g\left(\frac{2c}{G} + \frac{3}{l}\right)p^2 + 6\,\frac{cg^2}{Gl} = 0$$

Ако радимо помоћу Lagrange-евих једначина кретања биће

$$E_k = \frac{1}{2} J_c\,\omega^2 + \frac{1}{2} m v_c^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} m\,l^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot x + \frac{l}{2}\dot\varphi\right)^2$$

Одавде је

$$E_k = \frac{1}{2} m\left(\dot x^2 + \dot x\,\dot\varphi\,l + \frac{1}{3} l^2\dot\varphi^2\right)$$

Израз за E_k можемо добити и интегрирањем

$$dE_k = \frac{1}{2} v^2\,dm$$

Ако је маса јединице дужине полуге ρ онда је

$$dm = \rho\,d\xi,$$

где је ξ променљива дужина полуге.

Брзина ма које тачке на полузи биће

$$v \approx \dot x + \xi\dot\varphi,$$

па је $$dE_k = \frac{1}{2}\left(\dot x^2 + 2\dot x\,\dot\varphi\,\xi + \xi^2\dot\varphi^2\right)\rho\,d\xi\,,$$

односно $$E_k = \frac{1}{2}\rho\left[\dot x^2\int_0^l d\xi + 2\dot x\dot\varphi\int_0^l \xi\,d\xi + \dot\varphi^2\int_0^l \xi^2\,d\xi\right],$$

одакле је опет $$E_k = \frac{1}{2} m\left(\dot x^2 + \dot x\,\dot\varphi\,l + \frac{1}{3} l^2\dot\varphi^2\right)$$

$$E_p = \frac{1}{2} cx^2 + \frac{1}{2} mg\,\frac{l}{2}\varphi^2 = \frac{1}{2} cx^2 + \frac{1}{4} mgl\,\varphi^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot x}\right) = m\ddot x + \frac{1}{2} ml\ddot\varphi\ ;\qquad \frac{\partial E_k}{\partial x} = 0\ ;\qquad \frac{\partial E_p}{\partial x} = cx$$

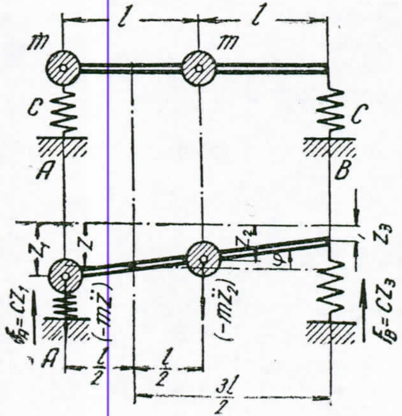
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot\varphi}\right) = \frac{1}{3} ml^2\ddot\varphi + \frac{1}{2} ml\ddot x\ ;\qquad \frac{\partial E_k}{\partial\varphi} = 0\ ;\qquad \frac{\partial E_p}{\partial\varphi} = \frac{1}{2} mgl\,\varphi$$

На тај начин добијамо исте диференцијалне једначине кретања као и кад смо радили помоћу d'Alembert-овог принципа:

$$\left|\begin{aligned} &2m\ddot x + 2cx + ml\ddot\varphi = 0\\ &2l\ddot\varphi + 3g\varphi + 3\ddot x = 0\end{aligned}\right.$$

175.) Одредити кружне фреквенције осцилација система приказаног на слици, који се састоји из греде дужине $2l$, чију масу занемарујемо, две масе m, и две опруге крутости c.

Радићемо помоћу Lagrange-евих једначина кретања. За опште координате узећемо померање тежишта у вертикалном правцу z, које се налази на удаљењу $\frac{l}{2}$ од левог ослонца A и угао окретања φ.



Сл. 197

Реституционе силе у опругама су:

$$F_A = cz_1\ ,$$
$$F_B = cz_3$$

$$z_1 = z + \frac{l}{2}\varphi\ ;\qquad z_2 = z - \frac{l}{2}\varphi\ ,\qquad z_3 = z - \frac{3l}{2}\varphi\ ;$$

$$\dot z_1 = \dot z + \frac{l}{2}\dot\varphi\ ;\qquad \dot z_2 = \dot z - \frac{l}{2}\dot\varphi$$

Кинетичка и потенцијална енергија система биће

$$E_k = \frac{1}{2} m\left(\dot z_1^2 + \dot z_2^2\right)$$

$$E_p = \frac{1}{2} c\left(z_1^2 + z_3^2\right),$$

$$E_k = \frac{1}{2} m\left(\dot z^2 + l\dot z\dot\varphi + \frac{l^2}{4}\dot\varphi^2 + \dot z^2 - l\dot z\dot\varphi + \frac{l^2}{4}\dot\varphi^2\right)$$

$$E_p = \frac{1}{2} c\left(z^2 + lz\varphi + \frac{l^2}{4}\varphi^2 + z^2 - 3lz\varphi + \frac{9l^2}{4}\varphi^2\right),$$

односно $$E_k = m\left(\dot z^2 + \frac{l^2}{4}\dot\varphi^2\right) \qquad (a)$$

$$E_p = c\left(z^2 - lz\varphi + \frac{5}{4} l^2\varphi^2\right) \qquad (b)$$

Диференцирањем израза (a) и (b) за E_k и E_p нађимо потребне чланове за Lagrange-еве једначине кретања

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot z}\right)=2\,m\ddot z\;;\quad \frac{\partial E_k}{\partial z}=0\;;\quad \frac{\partial E_p}{\partial z}=2\,cz-cl\varphi\;;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\varphi}\right)=\frac{ml^2}{2}\ddot\varphi\;;\quad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi}=0\;;\quad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi}=\frac{5}{2}cl^2\varphi-clz$$

Диференцијалне једначине кретања система, према томе, су

$$\left|\begin{array}{l} 2m\ddot z+2cz-cl\varphi=0\\ ml\ddot\varphi-2cz+5cl\varphi=0\end{array}\right.$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$z=\lambda_1\cos pt\;;\qquad \varphi=\lambda_2\cos pt\,,$$

долазимо до једначина

$$\lambda_1(2c-2mp^2)-\lambda_2 cl=0$$
$$-\lambda_1 2c+\lambda_2(5cl-mlp^2)=0$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} 2c-2mp^2 & -cl\\ -2c & 5cl-mlp^2\end{vmatrix}=0\,,$$

односно $(2c-2mp^2)(5cl-mlp^2)-2c^2l=0,$

што кад се развије даје

$$m^2lp^4-6\,mlcp^2+4\,c^2l=0\,,$$

или $$p^4-6\frac{c}{m}p^2+4\frac{c^2}{m^2}=0\,,$$

одакле је $$p^2_{\mathrm{I,\,II}}=\frac{c}{m}(3\mp\sqrt5)=\frac{c}{m}(3\mp2{,}24)$$

$$p^2_{\mathrm{I}}=0{,}76\frac{c}{m}\sec^{-2}\;;\qquad p^2_{\mathrm{II}}=5{,}24\frac{c}{m}\sec^{-2}$$

$$p_{\mathrm{I}}=0{,}87\sqrt{\frac{c}{m}}\sec^{-1}\;;\qquad p_{\mathrm{II}}=2{,}28\sqrt{\frac{c}{m}}\sec^{-1}$$

Диференцијалне једначине кретања можемо лако добити и помоћу d'Alembert-овог принципа:

$$\left|\begin{array}{l} \Sigma Z=[-m(\ddot z_1+\ddot z_2)]-c(z_1+z_3)=0\\ \Sigma M_0=cz_1\dfrac{l}{2}-cz_3\dfrac{3l}{2}-(-m\ddot z_1)\dfrac{l}{2}+(-m\ddot z_2)\dfrac{l}{2}=0\end{array}\right.$$

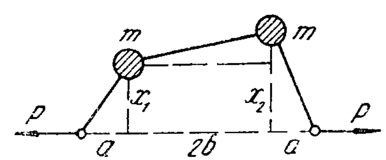
$$\left|\begin{array}{l} m\left(\ddot z+\dfrac{l}{2}\ddot\varphi+\ddot z-\dfrac{l}{2}\ddot\varphi\right)+c\left(z+\dfrac{l}{2}\varphi+z-\dfrac{3}{2}l\varphi\right)=0\\ c\dfrac{l}{2}\left(z+\dfrac{l}{2}\varphi\right)-c\dfrac{3}{2}l\left(z-\dfrac{3l}{2}\varphi\right)+m\left(\ddot z+\dfrac{l}{2}\ddot\varphi\right)\dfrac{l}{2}-m\left(\ddot z-\dfrac{l}{2}\ddot\varphi\right)\dfrac{l}{2}=0\end{array}\right.$$

Одавде добијамо исте диференцијалне једначине кретања, као и помоћу Lagrange-евих једначина кретања

$$\left|\begin{array}{l} 2m\ddot z+2cz-cl\varphi=0\\ \dfrac{1}{2}ml^2\ddot\varphi-clz+\dfrac{5}{2}cl^2\varphi=0\end{array}\right.,$$

односно $$\left|\begin{array}{l} 2m\ddot z+2cz-cl\varphi=0\\ ml\ddot\varphi-2cz+5cl\varphi=0\end{array}\right.$$

176.) Две једнаке материјалне тачке тежине G учвршћене су симетрично на једнаким растојањима од крајева затегнуте струне дужине $2(a+b)$; струна је затегнута силом P. Одредити кружне фреквенције главних осцилација система.



Сл. 198

Радићемо помоћу Lagrange-евих једначина кретања. За генералисане координате узећемо померања x_1 и x_2.

Кинетичка енергија система је

$$E_k=\frac{1}{2}m\dot x_1^2+\frac{1}{2}m\dot x_2^2=\frac{G}{2g}(\dot x_1^2+\dot x_2^2)\qquad (a)$$

Ако претпоставимо да су бочне осцилације струне врло мале и занемаримо одговарајуће мале промене силе P, потенцијалну енергију затезања добићемо ако помножимо силу P са елонгацијама струне

$$E_p=P\sum_1^3\delta$$

Елонгације ћемо наћи занемарујући мале величине другог реда у следећим изразима:

$$(a+\delta_1)^2 = a^2 + x_1^2$$

$$a^2\left(1+\frac{\delta_1}{a}\right)^2 = a^2 + x_1^2$$

$$a^2 + 2a\delta_1 \approx a^2 + x_1^2\,,$$

$$\delta_1 \approx \frac{1}{2}\,\frac{x_1^2}{a}$$

$$(2b+\delta_2)^2 = 4b^2 + (x_2 - x_1)^2$$

$$4b^2\left(1+\frac{\delta_2}{2b}\right)^2 = 4b^2 + (x_2 - x_1)^2$$

$$\delta_2 \approx \frac{1}{2}\,\frac{(x_2 - x_1)^2}{2b}$$

Слично је и

$$\delta_3 \approx \frac{1}{2}\,\frac{x_2^2}{a}$$

па је

$$E_p = \frac{1}{2}P\left[\frac{x_1^2}{a} + \frac{(x_2-x_1)^2}{2b} + \frac{x_2^2}{a}\right]$$

Нађимо потребне чланове за Lagrange-еве једначине кретања

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1}\right) = m\,\ddot{x}_1 = \frac{G}{g}\,\ddot{x}_1\,; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial x_1} = 0\,;$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = \frac{P}{a}\,x_1 - \frac{P(x_2 - x_1)}{2b}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\,\ddot{x}_2 = \frac{G}{g}\,\ddot{x}_2\,; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial x_2} = 0\,;$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_2} = \frac{P}{a}\,x_2 + \frac{P}{2b}(x_2 - x_1)\,,$$

па су диференцијалне једначине кретања

$$m\ddot{x}_1 + \frac{P}{a}x_1 - \frac{P}{2b}(x_2 - x_1) = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + \frac{P}{a}x_2 + \frac{P}{2b}(x_2 - x_1) = 0$$

Ако потражимо решења ових једначина у облику

$$x_1 = \lambda_1 \cos pt\,; \qquad x_2 = \lambda_2 \cos pt\,,$$

долазимо до једначина

$$\lambda_1\left(mp^2 - \frac{P}{a} - \frac{P}{2b}\right) + \lambda_2\,\frac{P}{2b} = 0$$

$$\lambda_1\,\frac{P}{2b} + \lambda_2\left(mp^2 - \frac{P}{a} - \frac{P}{2b}\right) = 0$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} mp^2 - \frac{P}{a} - \frac{P}{2b} & \frac{P}{2b} \\ \frac{P}{2b} & mp^2 - \frac{P}{a} - \frac{P}{2b} \end{vmatrix} = 0\,,$$

односно

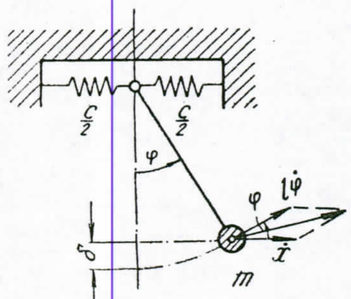
$$mp^2 - \frac{P}{a} - \frac{P}{2b} = \mp\frac{P}{2b}$$

$$p^2_{\mathrm{I}} = \frac{P}{am}\,; \qquad p^2_{\mathrm{II}} = \frac{1}{m}\left(\frac{P}{a} + \frac{P}{b}\right)$$

$$p_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{Pg}{Ga}}\ \sec^{-1}\,; \qquad p_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{Pg}{G}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}\ \sec^{-1}$$

177.) Тачка вешања математичког клатна дужине l и масе m, приказаног на слици, придржавана је опругама, које стварају укупну реституциону силу cx. Одредити диференцијалне једначине кретања помоћу Lagrange-евих једначина кретања за случај великих осцилација и доказати да је при малим осцилацијама тај систем еквивалентан математичком клатну дужине

$$L = l + \frac{mg}{c}$$



Сл. 199

Кинетичка енергија система у случају великих осцилација је

$$E_k = \frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{m}{2}\,(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi)$$

Потенцијална енергија система за исти случај је

$$E_p = \frac{cx^2}{2} + mg\,\delta = \frac{cx^2}{2} + mgl\,(1 - \cos\varphi)$$

Нађимо потребне чланове за Lagrange-еве једначине кретања

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{m}{2}\left[2l^2\ddot{\varphi} + 2l\,(\ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\,\dot{\varphi}\sin\varphi)\right] =$$

$$= ml^2\,\ddot{\varphi} + ml\ddot{x}\cos\varphi - ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi\,;$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = -ml\,\dot{\varphi}\,\dot{x}\sin\varphi\,; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = mgl\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{m}{2}\left[2\,\ddot{x} + 2l\,(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\right] =$$

$$= m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi\,;$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = 0\;; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial x} = cx\,,$$

па су диференцијалне једначине кретања

$$\left|\begin{array}{l} ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{x}\cos\varphi - ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + mgl\sin\varphi = 0 \\ m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + cx = 0 \end{array}\right.\,,$$

односно

$$\left|\begin{array}{l} \ddot{\varphi} + \frac{1}{l}\cos\varphi\cdot\ddot{x} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \\ \ddot{x} + \frac{l}{m}\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi} - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi + \frac{c}{m}x = 0 \end{array}\right.$$

У случају малих осцилација изрази за кинетичку и потенцијалну енергију система гласе

$$\left|\begin{array}{l} E_k = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\,\dot{x}\,\dot{\varphi}\,l) \\ E_p = \frac{cx^2}{2} + \frac{m}{2}\,l\,\varphi^2 g \end{array}\right.\,,$$

па је

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) = m\,\ddot{x} + ml\,\ddot{\varphi}\,; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial x} = 0\,; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial x} = cx\,;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} + ml\,\ddot{x}\,; \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0\,; \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = mlg\varphi$$

Диференцијалне једначине кретања су

$$\left|\begin{array}{l} m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} + cx = 0 \\ l\ddot{\varphi} + \ddot{x} + g\varphi = 0 \end{array}\right.$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$x = \lambda_1\cos pt\,; \qquad \varphi = \lambda_2\cos pt\,,$$

долазимо до једначина

$$\begin{array}{l} \lambda_1(c - mp^2) - \lambda_2\,mlp^2 = 0 \\ -\lambda_1 p^2 + \lambda_2(g - lp^2) = 0 \end{array}$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} c - mp^2 & -mlp^2 \\ -p^2 & g - lp^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

односно

$$(c - mp^2)(g - lp^2) - mlp^4 = 0\,,$$

одакле је

$$p^2 = \frac{cg}{mg + cl} = \frac{g}{l + \frac{mg}{c}}$$

Квадрат кружне фреквенције математичког клатна је

$$k^2 = \frac{g}{l}\,,$$

па је еквивалентна дужина математичког клатна посматраног система

$$L = l + \frac{mg}{c}$$

178.) Платформа се ослања у тачкама A и B на две опруге једнаких крутости c, чије је растајање $AB = l$; тежиште C платформе лежи на правој AB, а на растојању $AC = \frac{l}{3}$ од тачке A. Права AB је осовина симетрије платформе. Полупречник инерције платформе у односу на тежишну осу у равни платформе, а управну на праву AB износи $0{,}2\,l$, док је тежина платформе G. Одредити мале осцилације платформе које настају дејством удара у тежиште платформе а управно на њену раван. Импулс удара износи S.

Реституционе силе у опругама (отпори ослонца) су

$$F_A = c\,\delta_1\,; \qquad F_B = c\,\delta_2$$

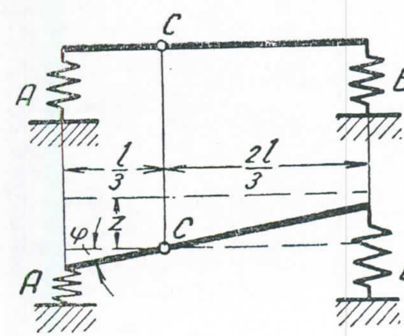
Пошто је

$$\delta_1 = z + \frac{l}{3}\varphi \quad \text{и} \quad \delta_2 = z - \frac{2l}{3}\varphi\,,$$

то је

$$F_A = c\left(z + \frac{l}{3}\varphi\right) \quad \text{и}$$

$$F_B = c\left(z - \frac{2l}{3}\varphi\right)$$



Сл. 200

Диференцијалне једначине кретања су

$$\left|\begin{aligned} \Sigma Z &= m\ddot{z} + c\left(z + \frac{l}{3}\varphi\right) + c\left(z - \frac{2l}{3}\varphi\right) = 0 \\ \Sigma M_c &= J_c\ddot{\varphi} + c\left(z + \frac{l}{3}\varphi\right)\frac{l}{3} - c\left(z - \frac{2l}{3}\varphi\right)\frac{2l}{3} = 0 \end{aligned}\right.,$$

односно

$$\left|\begin{aligned} m\ddot{z} + 2\,cz - \frac{cl}{3}\varphi &= 0 \\ J_c\ddot{\varphi} + \frac{cl}{3}z + \frac{5\,cl^2}{9}\varphi &= 0 \end{aligned}\right.,$$

или

$$\left|\begin{aligned} \ddot{z} + \frac{2c}{m}z - \frac{cl}{3m}\varphi &= 0 \\ \ddot{\varphi} + \frac{cl}{3J_c}z + \frac{5cl^2}{9J_c}\varphi &= 0 \end{aligned}\right.$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику

$$z = \lambda_1 \sin pt\,;$$
$$\varphi = \lambda_2 \sin pt\,,$$

долазимо до једначина

$$\lambda_1\left(\frac{2c}{m} - p^2\right) - \frac{cl}{3m}\lambda_2 = 0$$
$$-\frac{cl}{3J_c}\lambda_1 + \left(\frac{5cl^2}{9J_c} - p^2\right)\lambda_2 = 0$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} \dfrac{2c}{m} - p^2 & -\dfrac{cl}{3m} \\ -\dfrac{cl}{3J_c} & \dfrac{5cl^2}{9J_c} - p^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

одакле је $p^4 - c\left(\frac{2}{m} + \frac{5l^2}{9J_c}\right)p^2 + \frac{c^2\,l^2}{m\,J_c} = 0$

$$i_c^2 = \frac{J_c}{m}$$
$$J_c = 0{,}04\ ml^2\,,$$

па је $$p^4 - \frac{143}{9}\frac{cg}{G}p^2 + 25\frac{c^2g^2}{G^2} = 0\,,$$

одакле је $$p^2_{I,\,II} = \left(\frac{143 \mp 111{,}12}{18}\right)\frac{cg}{G},$$

односно $p_I^2 = 1{,}771\,\frac{cg}{G}\ \sec^{-2}\,;\quad p_{II}^2 = 14{,}117\,\frac{cg}{G}\ \sec^{-2}$

$$p_I = 1{,}330\sqrt{\frac{cg}{G}}\ \sec^{-1}\,;\quad p_{II} = 3{,}758\sqrt{\frac{cg}{G}}\ \sec^{-1}$$

Решење диференцијалних једначина кретања имаће облик

$$z = \lambda_1^{I}\sin p_I\,t + \lambda_1^{II}\sin p_{II}\,t$$
$$\varphi = \lambda_2^{I}\sin p_I\,t + \lambda_2^{II}\sin p_{II}\,t$$

Одредимо произвољне константе.

Знамо да је

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\dfrac{cl}{3m}}{\dfrac{2c}{m} - p^2} = \frac{cl}{6\,c - 3\,mp^2}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{I} = \frac{cl}{6\,c - 3\,mp^2_I} = \frac{1000}{687}\,l = 1{,}45\,l\,;$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{II} = \frac{cl}{6\,c - 3\,mp^2_{II}} = -\frac{1000}{36351}\,l = -\,0{,}027\,l\,,$$

па је

$$\lambda_1^{I} = 1{,}45\,l\,\lambda_2^{I}\,,$$
$$\lambda_1^{II} = -\,0{,}027\,l\,\lambda_2^{II}$$

Почетни услови кретања су:

за $t = 0$ $\quad m\dot{z}_0 = S\,;\quad \dot{z}_0 = \frac{S}{m}\quad$ и $\quad\dot{\varphi}_0 = 0$

Користећи ове почетне услове долазимо до једначина

$$\frac{S}{m} = \lambda_1^{I}\,p_I + \lambda_1^{II}\,p_{II}$$
$$0 = \lambda_2^{I}\,p_I + \lambda_2^{II}\,p_{II}$$

Обележимо са $$k = S\sqrt{\frac{g}{cG}}$$

$$\alpha = 1{,}330\,;\qquad \beta = 3{,}758\,,$$

па добијамо
$$k = 1{,}45\, l\alpha\, \lambda_2^{\mathrm{I}} - 0{,}027\, l\beta\lambda_2^{\mathrm{II}}$$
$$0 = \lambda_2^{\mathrm{I}}\, \alpha + \lambda_2^{\mathrm{II}}\, \beta ,$$

одакле је
$$\lambda_2^{\mathrm{I}} = \frac{k}{l\alpha\,(1{,}45 + 0{,}027)} = \frac{1}{1{,}965}\,\frac{k}{l} \approx 0{,}509\,\frac{k}{l}\,;$$
$$\lambda_2^{\mathrm{II}} = -\frac{\alpha}{\beta}\,\lambda_2^{\mathrm{I}} = -0{,}509\cdot\frac{1{,}330}{3{,}758}\,\frac{k}{l} \approx -0{,}180\,\frac{k}{l}\,;$$
$$\lambda_1^{\mathrm{I}} = 1{,}45\, l\lambda_2^{\mathrm{I}} = 1{,}45\cdot 0{,}509\, k = 0{,}738\, k\,;$$
$$\lambda_1^{\mathrm{II}} = -0{,}027\, l\,\lambda_2^{\mathrm{II}} = (-0{,}027)(-0{,}180)\, k \approx 0{,}00496\, k\,;$$

Према томе решења диференцијалних једначина кретања гласе
$$z = \sqrt{\frac{g}{c\mathrm{G}}}\cdot S\left(0{,}738 \sin 1{,}330\sqrt{\frac{cg}{\mathrm{G}}}\, t + 0{,}00496 \sin 3{,}758\sqrt{\frac{cg}{\mathrm{G}}}\, t\right)$$
$$l\varphi = \sqrt{\frac{g}{c\mathrm{G}}}\cdot S\left(0{,}509 \sin 1{,}330\sqrt{\frac{cg}{\mathrm{G}}}\, t - 0{,}180 \sin 3{,}758\sqrt{\frac{cg}{\mathrm{G}}}\, t\right)$$

Напомена: Диференцијалне једначине кретања можемо добити и помоћу Lagrange-евих једначина кретања, узимајући за генералисане координате z и φ. Изрази за кинетичку и потенцијалну енергију система у том случају гласе
$$E_k = \frac{1}{2} J_c\, \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\, m\dot{z}^2$$
$$E_p = \frac{1}{2}\, c\left[\left(z + \frac{l}{3}\,\varphi\right)^2 + \left(z - \frac{2\,l}{3}\,\varphi\right)^2\right]$$

179.) Поставити диференцијалне једначине кретања и наћи период осциловања елиптичког клатна (види зад. бр. 130) не употребљавајући прве интеграле Lagrange-евих једначина.

Изрази за кинетичку и потенцијалну енергију система у овом случају гласиће
$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, l^2\, \dot{\varphi}^2 - m_2\, l\, \dot{x}\, \dot{\varphi}$$
$$E_p = \frac{1}{2}\, m_2\, g\, l\, \varphi^2 ,$$

па је
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2)\,\ddot{x} - m_2\, l\, \ddot{\varphi}\ ; \quad \frac{\partial E_k}{\partial x} = 0\ ; \quad \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0\ ;$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2\, l^2\, \ddot{\varphi} - m_2\, l\ddot{x}\ ; \quad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0\ ; \quad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = m_2\, g\, l\, \varphi$$

Диференцијалне једначине кретања према томе гласе
$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x} - m_2\, l\,\ddot{\varphi} = 0$$
$$m_2\, l^2\,\ddot{\varphi} - m_2\, l\,\ddot{x} + m_2\, l\, g\, \varphi = 0\ ,$$

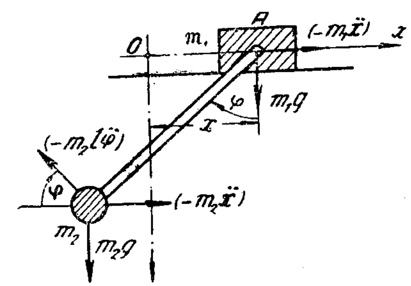
односно
$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x} - m_2\, l\,\ddot{\varphi} = 0$$
$$l\ddot{\varphi} - \ddot{x} + g\,\varphi = 0$$

Ако потражимо решење ових једначина у облику
$$x = \lambda_1 \cos pt\,;$$
$$\varphi = \lambda_2 \cos pt\,,$$
долазимо до једначина
$$-(m_1 + m_2)\, p^2\, \lambda_1 + m_2\, l\, p^2\, \lambda_2 = 0$$
$$p^2\, \lambda_1 + (g - l\, p^2)\, \lambda_2 = 0$$

Фреквентна једначина је
$$\begin{vmatrix} -(m_1 + m_2)\, p^2 & m_2\, l\, p^2 \\ p^2 & g - l\, p^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

одакле је
$$-(g - lp^2)\,(m_1 + m_2)\, p^2 - m_2\, l\, p^4 = 0\,,$$
односно
$$m_1\, l\, p^2 = (m_1 + m_2)\, g$$
$$p^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\,\frac{g}{l}$$
$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}\cdot\frac{l}{g}}$$

Диференцијалне једначине кретања елиптичког клатна можемо лако добити и на основу d'Alembert-овог принципа.



Сл. 201

$$\Sigma M_A = m_2\, g\, l \sin\varphi - (-\, m_2\, l\, \ddot{\varphi})\, l + (-\, m_2 \ddot{x})\, l \cos\varphi = 0$$

$$\Sigma X = (-\, m_1\, \ddot{x}) + (-\, m_2\, \ddot{x}) - (-\, m_2\, l\, \ddot{\varphi}) \cos\varphi = 0 \; ,$$

$$\sin\varphi \approx \varphi \; ; \qquad \cos\varphi \approx 1 \; ,$$

па добијамо исте диференцијалне једначине кретања као и мало пре помоћу Lagrange-евих једначина

$$(m_1 + m_2)\, \ddot{x} - m_2\, l\, \ddot{\varphi} = 0$$

$$l\, \ddot{\varphi} + g\, \varphi - \ddot{x} = 0$$

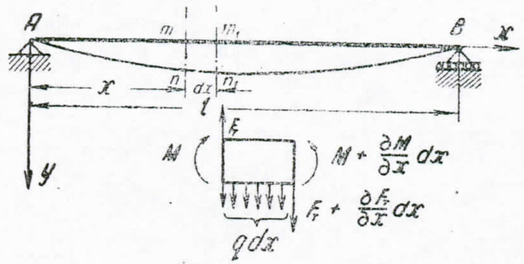
ТРЕЋИ ДЕО

ОСЦИЛАЦИЈЕ СА БЕСКОНАЧНО МНОГО СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

20. БОЧНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ПРИЗМАТИЧНОГ ШТАПА

Ако греда осцилује у равни $x - y$ и ако претпоставимо да су димензије попречног пресека мале у поређењу са дужином греде l, можемо да се послужимо једначином еластичне линије

$$EI\, \frac{d^2 y}{dx^2} = -\, M$$



Сл. 202

Диференцирајући два пута ову једначину добићемо

$$\frac{d}{dx}\left(EI\, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = -\, \frac{dM}{dx} = -\, F_T \; ;$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = -\, \frac{dF_T}{dx} = q \; , \qquad (a)$$

пошто на основу познатих зависности из статике*), постоји следећа веза између момента савијања M, трансверзалне силе F_T и оптерећења јединице дужине q

$$\frac{dM}{dx} = F_T \; ; \qquad \frac{dF_T}{dx} = -\, q$$

*) Види: Хлитчијев-Вречко: Отпорност материјала, стр. 195.

На основи d'Alembert-овог принципа можемо да сматрамо да је греда која осцилује оптерећена инерцијалном силом, која по јединици дужине износи

$$\left(-\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right), \tag{b}$$

где смо са γ [kg/m³] означили специфичну тежину, а са A [m²] површину попречног пресека призматичног штапа, тако да је

$$q = \gamma A \ [\mathrm{kg/m}]$$

Амплитуда осцилација y је функција од две променљиве и то од времена t и од координате положаја x

$$y = f(t, x),$$

па ако у једначини (a) заменимо израз за инерцијалну силу (b), добићемо парцијалну диференцијалну једначину четвртог реда

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = -\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{183}$$

У случају призматичног штапа константне крутости EI добићемо

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

односно

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \tag{184}$$

где смо увели ознаку

$$a^2 = \frac{EIg}{A\gamma} \tag{185}$$

До решења ове диференцијалне једначине доћи ћемо на основу следећег разматрања. Знамо (1) да се у општем случају свако осцилаторно кретање може разложити на тзв. ***нормалне*** облике осцилација и (2) да у случају нормалног облика осцилација све тачке система врше просте хармониске осцилације и пролазе истовремено кроз своје равнотежне положаје. Претпоставићемо ради тога да греда осцилује у једном од нормалних облика са фреквенцијом $\frac{k}{2\pi}$, те претпостављамо решење у облику

$$y = X(A\cos kt + B\sin kt) \tag{c}$$

Са X смо означили функцију само од координате x, која ће нам одредити облик осцилације. Назваћемо је ***нормална функција*** и одредити у сваком појединим случају тако да задовољава услове на крајевима греде.

Ако диференцирамо (c) четири пута и заменимо у једначину (184) добићемо

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = \frac{k^2}{a^2}X$$

Ако уведемо ознаку

$$\frac{k^2}{a^2} = \frac{k^2 A\gamma}{EIg} = m^4, \tag{186}$$

добићемо линеарну диференцијалну једначину са константним коефицијентима

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - m^4 X = 0, \tag{187}$$

чија је карактеристична једначина

$$r^4 - m^4 = 0,$$

па ће партикуларни интеграли бити

$$e^{mx}, \quad e^{-mx}, \quad e^{mix} \quad \text{и} \quad e^{-mix}$$

На основу познатог правила да ће линеарна комбинација партикуларних интеграла увек задовољавати диференцијалну једначину и на основу следећих веза између експоненцијалних, хиперболичних и тригонометриских функција:

$$Sh\, mx = \frac{1}{2}(e^{mx} - e^{-mx}); \qquad Ch\, mx = \frac{1}{2}(e^{mx} + e^{-mx});$$

$$\sin mx = \frac{1}{2i}(e^{mix} - e^{-mix}); \qquad \cos mx = \frac{1}{2}(e^{mix} + e^{-mix}),$$

можемо решење диференцијалне једначине (187) претставити у облику

$$X = C_1 \sin mx + C_2 \cos mx + C_3\, Sh\, mx + C_4\, Ch\, mx \tag{188}$$

Произвољне константе $C_1, \ldots, C_4$ добићемо из четири услова на крајевима греде. На основу тих услова можемо одредити и *фреквентну једначину*. Пошто на тај начин одредимо облике и фреквенције нормалних осцилација, општи израз за слободне бочне осцилације добићемо ако саберемо све могуће нормалне осцилације

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} X_i (A_i \cos k_i t + B_i \sin k_i t) \tag{189}$$

Опште решење једначине (187) можемо да напишемо и у следећем облику

$$X = C_1\, S(mx) + C_2\, T(mx) + C_3\, U(mx) + C_4\, V(mx), \tag{190}$$

где су $S(mx)$, $T(mx)$, $U(mx)$ и $V(mx)$ линеарне комбинације тригонометриских и хиперболичних функција, и то:

$$\left.\begin{aligned} S(m) &= \frac{1}{2}\,(Ch\,m + \cos m) \\ T(m) &= \frac{1}{2}\,(Sh\,m + \sin m) \\ U(m) &= \frac{1}{2}\,(Ch\,m - \cos m) \\ V(m) &= \frac{1}{2}\,(Sh\,m - \sin m) \end{aligned}\right\} \qquad (191).$$

Разуме се да константе $C_1, \ldots, C_4$ из (190) нису једнаке са онима из (188), већ су то неке друге произвољне константе.

Функције $S(m)$, $T(m)$, $U(m)$ и $V(m)$ имају својство цикличне пермутације до укључиво извода четвртог реда

$\Omega(m)$	$\Omega'(m)$	$\Omega''(m)$	$\Omega'''(m)$	$\Omega^{IV}(m)$
$S(m)$	$V(m)$	$U(m)$	$T(m)$	$S(m)$
$T(m)$	$S(m)$	$V(m)$	$U(m)$	$T(m)$
$U(m)$	$T(m)$	$S(m)$	$V(m)$	$U(m)$
$V(m)$	$U(m)$	$T(m)$	$S(m)$	$V(m)$

Пошто је за $m = 0$

$$S(0) = 1\,; \quad T(0) = 0\,; \quad U(0) = 0 \quad \text{и} \quad V(0) = 0\,, \qquad (192)$$

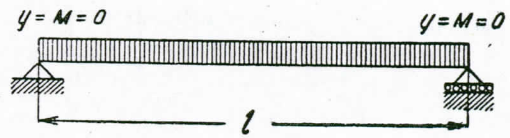
то употребом једначине (190) долазимо много брже до произвољних константи $C_1, \ldots, C_4$ у посебним случајевима.

Пређимо сада на неке посебне случајеве.

a.) Слободно ослоњена проста греда

Решење једначине (187) претпоставићемо у облику

$$X = C_1\,S(mx) + C_2\,T(mx) + C_3\,U(mx) + C_4\,V(mx)$$



Сл. 203

Услови на крајевима греде биће

(1) $\quad (y)_{x=0} = 0\,; \qquad (X)_{x=0} = 0$

(2) $\quad (M)_{x=0} = 0\,; \quad \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0\,; \qquad \left(\dfrac{d^2 X}{dx^2}\right)_{x=0} = 0$

(3) $\quad (y)_{x=l} = 0\,; \qquad (X)_{x=l} = 0$

(4) $\quad (M)_{x=l} = 0\,; \quad \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=l} = 0\,; \qquad \left(\dfrac{d^2 X}{dx^2}\right)_{x=l} = 0$

На основу (1) биће $\qquad C_1 = 0\,,$

а на основу таблице можемо директно писати

$$X'' = C_1\,U(mx) + C_2\,V(mx) + C_3\,S(mx) + C_4\,T(mx)$$

За услов (2) је $\qquad X'' = 0\,,$

тј. $\qquad C_3 = 0$

На основу услова (3) и (4) биће

$$\left.\begin{aligned} X &= C_2 T(ml) + C_4\,V(ml) = 0 \\ X'' &= C_2\,V(ml) + C_4\,T(ml) = 0 \end{aligned}\right. \qquad (a)$$

Одавде ћемо добити фреквентну једначину

$$\begin{vmatrix} T(ml) & V(ml) \\ V(ml) & T(ml) \end{vmatrix} = 0\,,$$

односно

$$T^2(ml) - V^2(ml) = 0$$

$$Sh^2\,ml + 2\,Sh\,ml \sin ml + \sin^2 ml - Sh^2\,ml + 2\,Sh\,ml \sin ml - \sin^2 ml =$$
$$= 4\,Sh\,ml \sin ml = 0\,,$$

односно

$$\sin ml = 0\,, \qquad (193)$$

пошто је $\qquad Sh\,ml \neq 0 \quad$ за $\quad ml \neq 0$

На основу *фреквентне једначине* (193) за случај слободно ослоњене просте греде биће:

$$ml = \pi\,, \quad 2\pi\,, \quad 3\pi\,, \cdots, n\pi\,, \qquad (194)$$

па ће кружне фреквенције узастопних облика осцилација бити

$$k_1 = a m_1^2 = \frac{a\pi^2}{l^2}\,; \quad k_2 = \frac{4a\pi^2}{l^2}\,; \quad k_3 = \frac{9a\pi^2}{l^2}\,, \ldots \qquad (195)$$

док ће фреквенција n-тог тона осцилација бити

$$f_n = \frac{k_n}{2\pi} = \frac{n^2 a \pi}{2l^2} = \frac{\pi n^2}{2l^2}\sqrt{\frac{EIg}{A\gamma}}\,, \tag{196}$$

а одговарајући период

$$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2l^2}{\pi n^2}\sqrt{\frac{A\gamma}{EIg}} \tag{197}$$

Пошто је $C_1 = C_3 = 0\,,$

то ће нормална функција бити

$$X = C_2\, T(mx) + C_4\, V(mx)$$

Међутим, из (a) имамо

$$C_4 = -\,C_2 \frac{T(ml)}{V(ml)} = -\,C_2 \frac{Sh\, ml + \sin ml}{Sh\, ml - \sin ml}$$

односно $C_4 = -\,C_2\,,$

јер је $\sin ml = 0\,.$

Сада ће нормална функција бити

$$X = \frac{1}{2} C_2 \left[Sh\, mx + \sin mx - Sh\, mx + \sin mx\right],$$

т. ј. $X = D \sin mx$

Ако заменимо за m његове вредности из (194), добићемо:

$$X_1 = D_1 \sin\frac{\pi x}{l}\,;\quad X_2 = D_2 \sin\frac{2\pi x}{l}\,;\quad X_3 = D_3 \sin\frac{3\pi x}{l}\,;\ldots$$

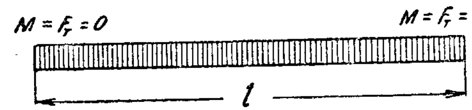
$$\ldots;\ X_n = D_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

Ако сменимо ово у опште решење (189) добићемо

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin\frac{i\pi x}{l}\,(C_i \cos k_i t + D_i \sin k_i t)$$

Константе C_i и D_i треба одредити тако да задовољавају почетне услове.

b.) Проста греда са слободним крајевима



Сл. 204

Услови на крајевима греде су

1. $(M)_{x=0} = 0\,;\quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0\,;\quad \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=0} = 0$

2. $(M)_{x=l} = 0\,;\quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=l} = 0\,;\quad \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=l} = 0$

3. $(F_T)_{x=0} = 0\,;\quad \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{x=0} = 0\,;\quad \left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=0} = 0$

4. $(F_T)_{x=l} = 0\,;\quad \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{x=l} = 0\,;\quad \left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=l} = 0$

Претпостављамо решење у облику

$$X = C_1\, S(mx) + C_2\, T(mx) + C_3\, U(mx) + C_4\, V(mx)$$

На основу таблице имамо

$$X'' = C_1\, U(mx) + C_2\, V(mx) + C_3\, S(mx) + C_4\, T(mx)$$

На основу услова (1) је

$$C_3 = 0$$

На основу услова (2) је

$$C_1\, U(ml) + C_2\, V(ml) + C_4\, T(ml) = 0 \tag{a}$$

Даље је

$$X''' = C_1\, T(mx) + C_2\, U(mx) + C_4\, S(mx)$$

На основу услова (3) је

$$C_4 = 0$$

Услов (4) даје

$$C_1\, T(ml) + C_2\, U(ml) = 0 \tag{b}$$

Пошто је $C_4 = 0$ то ће једначина (a) гласити:

$$C_1\, U(ml) + C_2\, V(ml) = 0\,,$$

а фреквентна једначина

$$\begin{vmatrix} T(ml) & U(ml) \\ U(ml) & V(ml) \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

односно у развијеном облику

$$(Sh\, ml + \sin ml)\,(Sh\, ml - \sin ml) - (Ch\, ml - \cos ml)^2 = 0$$

$$Sh^2\, ml - \sin^2 ml - Ch^2\, ml + 2\, Ch\, ml \cos ml - \cos^2 ml = 0$$

Пошто је $\qquad Ch^2\, ml - Sh^2\, ml = 1\,;$

$$\sin^2 ml + \cos^2 ml = 1\, ,$$

то се фреквентна једначина своди на облик

$$Ch\, ml \cos ml = 1 \tag{198}$$

Да би нашли корене ове једначине употребићемо графички метод*. Напишимо фреквентну једначину у облику

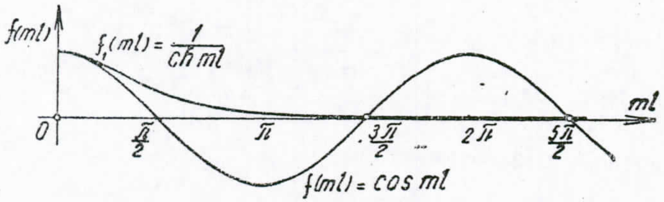
$$\cos ml = \frac{1}{Ch\, ml}$$

Ако нацртамо криве линије

$$f(ml) = \cos ml\,;$$

$$f_1(ml) = \frac{1}{Ch\, ml}\, ,$$

у пресеку тих кривих линија добићемо корене ове фреквентне једначине



Сл. 205

Првих шест узастопних корена ове једначине биће

$m_1 l$	$m_2 l$	$m_3 l$	$m_4 l$	$m_5 l$	$m_6 l$
0	4,730	7,853	10,996	14,137	17,279

Кружне фреквенције добићемо из једначине (186)

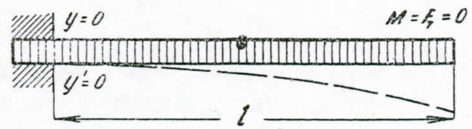
$$k_i = a m_i^2 = \frac{a m_i^2\, l^2}{l^2} = m_i^2\, l^2 \cdot \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{A\gamma}}\, ,$$

* Д-р Р. Кашанин: Виша математика I, стр. 834, треће издање

па је $\qquad k_1 = 0\,; \quad k_2 = 22{,}373\, \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{A\gamma}}\,; \quad k_3 = 61{,}62\, \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{A\gamma}} \qquad (199)$

Примери

180.) Одредити кружне фреквенције сопствених осцилација равномерно оптерећене конзоле.



Сл. 206

Услови на крајевима су:

1. $(X)_{x=0} = 0\,;$ $\qquad$ 3. $\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=l} = 0$

2. $\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0} = 0\,;$ $\qquad$ 4. $\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=l} = 0$

Поступајући као и у претходним случајевима добићемо

$$C_1 = 0\,; \qquad C_2 = 0$$

и

$$\begin{vmatrix} S(ml) & T(ml) \\ V(ml) & S(ml) \end{vmatrix} = 0$$

$$S^2(ml) - T(ml)\, V(ml) = 0$$

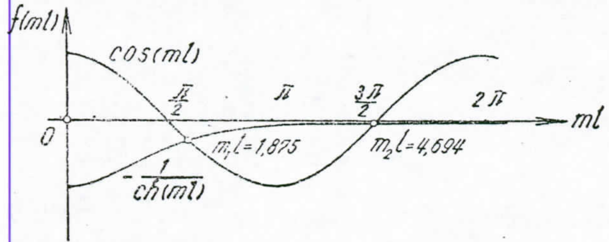
Ако развијемо овај израз добићемо, после одговарајућих скраћивања, следећи израз за фреквентну једначину

$$Ch\, ml \cos ml = -1\, ,$$

односно

$$\cos ml = -\frac{1}{Ch\, ml}$$

Ако решимо ову трансцендентну једначину графички добићемо



Сл. 207

Прва три корена трансцендентне једначине у овом случају биће

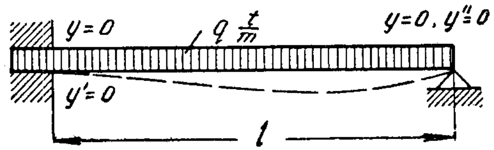
$$m_1 l = 1{,}875\ ; \qquad m_2 l = 4{,}694\ ; \qquad m_3 l = 7{,}853 \quad \text{и}$$

при $$n > 2 \qquad m_n l = \frac{2n-1}{2}\pi\ ,$$

па су кружне фреквенције прва три узастопна тона осцилација

$$k_1 = \frac{3{,}515}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{A\gamma}}\ ; \quad k_2 = \frac{22}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{A\gamma}}\ ; \quad k_3 = \frac{61{,}9}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{A\gamma}}$$

181.) Одредити најнижу кружну фреквенцију равномерно оптерећене греде укљештене на левом, а слободно ослоњене на десном крају.



Сл. 208

На основу услова на крајевима греде је:

1. $(X)_{x=0} = 0$; 3. $(X)_{x=l} = 0$

2. $\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0} = 0$; 4. $\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=l} = 0$

Узимајући решење нормалне функције X у облику (190) добићемо на основу услова (1) и (2)

$$C_1 = 0\ ; \qquad C_2 = 0\ ,$$

а на основу услова (3) и (4) добићемо фреквентну једначину која гласи

$$\begin{vmatrix} U(ml) & V(ml) \\ S(ml) & T(ml) \end{vmatrix} = 0\ ,$$

односно $$U(ml)\,T(ml) - V(ml)\,S(ml) = 0$$

Ако ову једначину развијемо биће

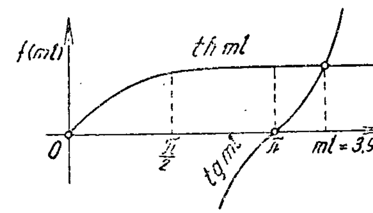
$$(Ch\,ml - \cos ml)(Sh\,ml + \sin ml) - (Sh\,ml - \sin ml)(Ch\,ml - \cos ml) = 0$$

$$-\,2\,Sh\,ml\cos ml + 2\,Ch\,ml\sin ml = 0$$

Кад поделимо ову једначину са $Ch\,ml\cos ml$ добићемо фреквентну једначину у облику трансцендентне једначине

$$Th\,ml = tg\,ml$$

Графичко решење ове једначине дато је сликом.

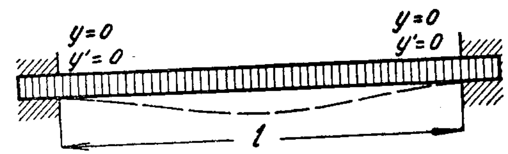


Сл. 209

На основу (186) најнижа кружна фреквенција биће

$$k_1 = \left(\frac{3{,}926}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EIg}{A\gamma}} = 15{,}4\sqrt{\frac{EIg}{ql^4}}$$

182.) Одредити кружну фреквенцију сопствених осцилација обострано укљештене греде, при равномерном оптерећењу од сопствене тежине q t/m.



Сл. 210

Услови на крајевима греде дају:

1. $(X)_{x=0} = 0$; 3. $(X)_{x=l} = 0$;

2. $\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0} = 0$; 4. $\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=l} = 0$;

Употребљавајући израз (190) за нормалну функцију X добићемо на основу услова на крајевима греде

$$C_1 = 0\ ; \qquad C_2 = 0$$

и фреквентну једначину

$$\begin{vmatrix} U(ml) & V(ml) \\ T(ml) & U(ml) \end{vmatrix} = 0\ ,$$

односно у развијеном облику

$$U^2(ml) - T(ml)\,V(ml) = 0\ ,$$

што после развијања у сведеном облику даје

$$Ch\,ml\cos ml = 1$$

Као што видимо добили смо исту фреквентну једначину као и у случају греде слободне на оба краја.

Оптерећење по јединици дужине је $A\gamma = q$ t/m, па ће прве три кружне фреквенције бити

$$k_1 = \frac{22{,}4}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}}\ ; \quad k_2 = \frac{61{,}6}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}}\ ; \quad k_3 = \frac{121}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}}$$

183.) Срачунати период основног тона сопствених осцилација куле светиље високе 50 m., ако су дати следећи подаци: модул еластичности материјала $E = 3{,}5 \cdot 10^5$ kg/cm²; моменат инерције попречног пресека $I = 142$ m⁴; специфична тежина материјала $\gamma = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$ kg/cm³ и површина попречног пресека $A = 29$ m.²

Сл. 211

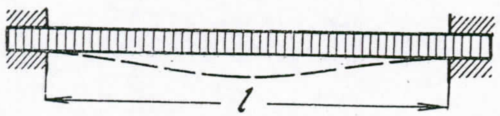
Пошто у овом случају имамо у ствари конзолу сталног попречног пресека оптерећену само сопственом тежином, можемо употребити решење за кружну фреквенцију из задатка (180), по коме је

$$k_1 = \frac{3{,}515}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{A\gamma}}$$

$$k_1 = \frac{3{,}515}{5000^2}\sqrt{\frac{3{,}5 \cdot 10^5 \cdot 142 \cdot 10^8 \cdot 981}{29 \cdot 10^4 \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-3}}} = 12 \text{ sec}^{-1}$$

$$\boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{12} = 0{,}52 \text{ sec.}$$

184.) Задатак бр. 182 израдити методом Rayleigh-а и упоредити добијени резултат са резултатом који смо добили када смо наведени случај посматрали као бочне осцилације призматичног штапа.



Сл. 212

У задатку бр. 182 добили смо да је

$$k_1 = \frac{4{,}73^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}} = \frac{22{,}4}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}} \text{ sec}^{-1}$$

Решимо сада задатак методом Rayleigh-а.

Једначина еластичне линије у овом случају је

$$y = \frac{F}{EI}\,\frac{l^3}{16}\left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{4}{3}\,\frac{z^3}{l^3}\right)$$

и важи за једну половину греде.

Пошто је угиб на средини

$$f = \frac{F}{EI}\,\frac{l^3}{192},$$

то се једначина еластичне линије може написати и

$$y = 12 f\left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{4}{3}\,\frac{z^3}{l^3}\right)$$

Елеменат кинетичке енергије масе греде је

$$dE_k = \frac{1}{2}\,\dot{y}^2\,dm\,,$$

$$dm = \rho\,dz\,,$$

где је ρ маса јединице дужине греде,

па је
$$dE_k = \frac{1}{2}\,\dot{y}^2\,\rho\,dz$$

Пошто је
$$\dot{y}^2 = 144\,\dot{f}^2\left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{4}{3}\,\frac{z^3}{l^3}\right)^2,$$

то је
$$dE_k = \frac{1}{2}\;\rho \cdot 144\,\dot{f}^2\left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{4}{3}\,\frac{z^3}{l^3}\right)^2 dz$$

За целу греду је

$$E_k = \frac{1}{2}\,\rho\,\dot{f}^2 \cdot 144 \cdot 2\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{z^4}{l^4} - \frac{8}{3}\,\frac{z^5}{l^5} + \frac{16}{9}\,\frac{z^6}{l^6}\right)dz$$

$$E_k = \frac{1}{2}\,\rho\,\dot{f}^2 \cdot 144 \cdot 2 \cdot l \cdot \left[\frac{1}{5 \cdot 32} - \frac{8}{3 \cdot 6 \cdot 64} + \frac{16}{9 \cdot 7 \cdot 128}\right]$$

$$E_k = \frac{1}{2}\,\rho\,l\,\dot{f}^2 \cdot 36 \cdot \frac{26}{2520} = \frac{1}{2}\,\rho\,l\,\dot{f}^2 \cdot \frac{13}{35}$$

Једначина енергије кад не узмемо у обзир масу греде је

$$\frac{1}{2}\,m\dot{f}^2 + cf^2 = \text{const.}\,,$$

где је
$$c = \frac{192\,E\,I}{l^3}$$

Кад будемо узели у обзир масу греде једначина енергије биће

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{13}{35}\,\rho\,l\right)\dot{f}^2 + \frac{1}{2}\,c f^2 = \text{const.}\,,$$

па је
$$k^2 = \frac{c}{m + \frac{13}{35}\,\rho\,l}$$

Пошто је у нашем случају $m = 0$,

то је
$$k^2 = \frac{35c}{13\rho l} = \frac{35 \cdot 192\, EI}{13\rho l^4} = 516\,\frac{EI}{\rho l^4} = 516\,\frac{EIg}{ql^4},$$

па је
$$k = \frac{22{,}71}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}}\ \sec^{-1}$$

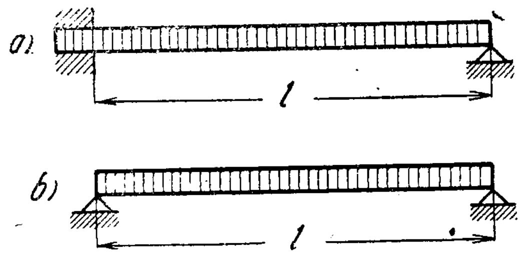
Према томе тражена грешка биће
$$\frac{22{,}71 - 22{,}4}{22{,}4} \cdot 100 = 1{,}38\%$$

185.) За случајеве дате на слици одредити:

За случај *a*) кружну фреквенцију k_1 и број осцилација у минуту n_1.

За случај *b*) кружну фреквенцију k_2 по тачној методи и по методи Rayleigh-a, као и минутни број осцилација.

Дато је:
$$EI = 10{,}815 \cdot 10^5\ \text{kgcm}^2;\quad \rho = 0{,}34 \cdot 10^5\ \text{kgsec}^2\text{cm}^{-2};\quad l = 100\ \text{cm}.$$



Сл. 213

a) Знамо да је
$$k_1 = \frac{15{,}4}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}} = \frac{15{,}4}{10^4}\sqrt{\frac{10{,}815 \cdot 10^5}{0{,}34 \cdot 10^{-5}}} = 15{,}4 \cdot 10 \cdot 5{,}64$$
$$k_1 = 870\ \sec^{-1}$$
$$n_1 = 9{,}55\,k_1 = 9{,}55 \cdot 870 = 8300\ \text{осц./min.}$$

b) Знамо да је у овом случају
$$k_2 = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}} = \frac{\pi^2}{10^4} \cdot 5{,}64 \cdot 10^5 = 556\ \sec^{-1}$$
$$n_2 = 9{,}55\,k_2 = 9{,}55 \cdot 556 = 5310\ \text{осц./min.}$$

Кад не узмемо у обзир масу греде једначина енергије је
$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{f}^2 + \frac{1}{2}\,c\,f^2 = \text{const.},\qquad \text{где је}\quad c = \frac{48\,EI}{l^3},$$

а кад је узмемо у обзир радећи по методи Rayleigh-a она ће, као што знамо, гласити
$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{17}{35}\rho l\right)\dot{f}^2 + \frac{1}{2}\,c\,f^2 = \text{const.},$$

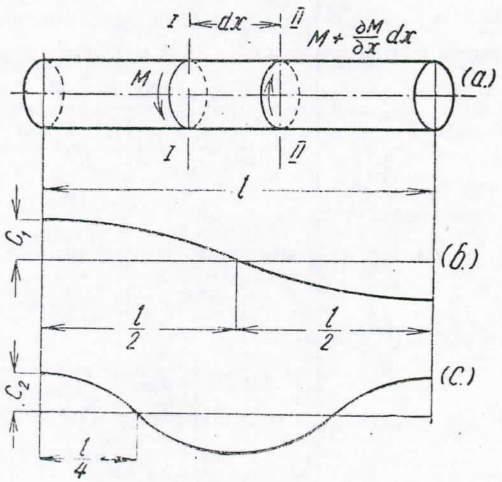
па је
$$k_2'^2 = \frac{c}{m + \frac{17}{35}\rho l}$$

Пошто је у нашем случају $m = 0$, то је
$$k_2'^2 = \frac{35c}{17\rho l} = \frac{35 \cdot 48\,EI}{17\,\rho l^4} = \frac{1680}{17}\,\frac{EI}{\rho l^4}$$
$$k'_2 = \sqrt{\frac{1680\,EI}{17\,\rho l^4}} = \sqrt{\frac{1680 \cdot 10{,}815 \cdot 10^5}{17 \cdot 0{,}34 \cdot 10^{-5} \cdot 10^8}} = 10\sqrt{3140} \approx 560\ \sec^{-1},$$

па је грешка кружних фреквенција у овом случају свега
$$\frac{560 - 556}{556} = 0{,}71\%$$

21. ТОРЗИОНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ВРАТИЛА КРУЖНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА

Да бисмо дошли до тачније теорије осцилација еластичног вратила са навученим дисковима, морамо узети у обзир и масу вратила. Претпоставићемо у даљем излагању да у току торзионих осцилација кружни попречни пресек остаје раван, а полупречници пресека прави.



Сл. 214

Ако издвојимо из вратила део дужине dx на његовим ће крајевима деловати моменти M и $M+\frac{\partial M}{\partial x}dx$, док ће се вратило између пресека I и II увити за мали угао $d\varphi$.

Из отпорности материјала знамо да је увијање вратила по јединици дужине дато изразом

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{M}{\mathbf{G}I_0},$$

где смо са $\mathbf{G}I_0$ означили торзиону крутост вратила. (Израз $\mathbf{G}I_0$ има код торзије исту улогу као израз EI код савијања, па се због тога и назива торзиона крутост, за разлику од крутости на савијање). Према томе у пресецима I и II деловаће торзиони моменти супротних смерова:

$$\mathbf{G}I_0\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\quad \text{и}\quad \mathbf{G}I_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dx\right)$$

У овим изразима за торзионе моменте узели смо парцијални извод $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, због тога што ће код торзионих осцилација угао торзије φ бити функција од две независно промењиве $\varphi=f(x,t)$.

Као што знамо, основна динамичка једначина ротације крутог тела гласи

$$J\ddot{\varphi}=-M\,,$$

где смо са M означили резултујући спољни моменат (у овом случају разлику момената у пресеку I и II, јер су супротних смерова) а са J моменат инерције око осе ротације.

У овом случају моменат инерције дела вратила дужине dx износи

$$\frac{\gamma}{g}\,I_0\,dx\,,$$

а резултујући моменат је

$$M=-\,\mathbf{G}I_0\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx\,,$$

па ће диференцијална једначина обртања елементарног дела вратила између пресека I и II бити

$$\frac{\gamma I_0}{g}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\mathbf{G}I_0\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,,$$

односно ако означимо са

$$a^2=\frac{\mathbf{G}g}{\gamma}\,, \tag{200}$$

добићемо

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \tag{201}$$

На основу истог разматрања као и у случају попречних осцилација еластичног штапа закључујемо да решење једначине (201) треба да буде дато у облику

$$\varphi\;=\;X\,(A\cos kt+B\sin kt)\,, \tag{202}$$

где је $X=f(x)$, тј. функција само од координате x, која ће одређивати облик нормалне осцилације коју врши елеменат вратила. Ова функција $X(x)$, која се назива *„нормална функција“* одређује се у сваком појединим случају из услова на крајевима вратила.

а) Вратило са слободним крајевима. У овом случају моменти торзије на оба краја вратила морају да буду равни нули, тј.

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=0}=0 \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=l}=0 \tag{a}$$

Ако заменимо (202) у једначину (201) добићемо

$$-Xk^2(A\cos kt+B\sin kt)=a^2X''(A\cos kt+B\sin kt),$$

одакле је

$$-k^2X=a^2X'',$$

односно

$$X''+\frac{k^2}{a^2}X=0 \tag{203}$$

Решење ове диференцијалне једначине биће

$$X=C\cos\frac{kx}{a}+D\sin\frac{kx}{a} \tag{204}$$

Да би задовољили услов (a) мора бити

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\left(-C\frac{k}{a}\sin\frac{kx}{a}+D\frac{k}{a}\cos\frac{kx}{a}\right)\left(A\cos kt+B\sin kt\right)$$

једнако нули за $x=0$ и за $x=l$.

Одавде је

$$D=0$$

и

$$C\frac{k}{a}\sin\frac{kl}{a}=0,$$

односно

$$\sin\frac{kl}{a}=0 \tag{205}$$

Ово је фреквентна једначина из које можемо срачунати фреквенције нормалних облика слободних торзионих осцилација вратила са слободним крајевима.

Из једначине (205) видимо да ће она бити задовољена у случају кад је

$$\frac{kl}{a}=i\pi \qquad (i=1,\,2,\,3,\ldots,\,n) \tag{206}$$

Фреквенцију основног тона добићемо за $i=1$

$$k_1=\frac{a\pi}{l}=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{Gg}{\gamma}}$$

Облик овог основног тона биће одређен нормалном функцијом облика

$$X_1=C_1\cos\frac{k_1x}{a}=C_1\cos\frac{\pi x}{l}$$

За други тон имаћемо да је

$$k_2=\frac{2a\pi}{l}$$

и

$$X_2=C_2\cos\frac{2\pi x}{l}$$

Ова два облика осцилација претстављена су на скицама (b) и (c) на сл. 214. Видимо да су то косинусоиде са опадајућом таласном дужином, а све виших фреквенција.

Општи облик партикуларног решења једначине (201) биће

$$\varphi=\cos\frac{i\pi x}{l}\left(A_i\cos\frac{i\pi at}{l}+B_i\sin\frac{i\pi at}{l}\right)$$

Суперпозицијом свих партикуларних решења добијамо израз за све тонове торзионих осцилација у облику

$$\varphi=\sum_{i=1}^{i=\infty}\cos\frac{i\pi x}{l}\left(A_i\cos\frac{i\pi at}{l}+B_i\sin\frac{i\pi at}{l}\right) \tag{207}$$

Произвољне константе A_i и B_i морамо тако одредити да задовоље почетне услове.

Нека је у почетном тренутку угао φ дат једначином

$$(\varphi)_{t=0}=f(x),$$

а почетна угаона брзина

$$(\dot\varphi)_{t=0}=f_1(x)$$

Тада ако ставимо $t=0$ у једначину (207) добићемо

$$f(x)=\sum_{i=1}^{i=\infty}A_i\cos\frac{i\pi x}{l},$$

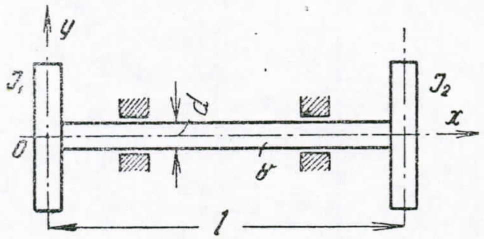
док замењујући $t=0$ у први извод по времену једначине (207) добићемо

$$f_1(x)=\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{i\pi a}{l}B_i\cos\frac{i\pi x}{l}$$

Видимо, дакле, да се одређивање константи A_i и B_i своди на развијање функција $f(x)$ и $f_1(x)$ у Fourier-ов ред и одређивање константи тога реда.*

* Види: Кашанин: Виша математика I, стр. 683, III издање

b) *Вратило са дисковима на крајевима.* — Ако се на крајевима вратила налазе дискови, чији су моменти инерције у односу на осу вратила J_1 и J_2, граничне услове добићемо из услова да су моменти увијања на крајевима вратила равни моменту инерционих сила дискова, тј.



Сл. 215

$$J_1\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{x=0} = \mathbf{G}I_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=0} \tag{a}$$

$$J_2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{x=l} = -\mathbf{G}I_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=l} \tag{b}$$

Ако опет претпоставимо да вратило осцилује у једном од нормалних облика, биће нормална функција

$$X = C\cos\frac{kx}{a} + D\sin\frac{kx}{a} \tag{c}$$

Константе C и D треба одредити тако да задовоље граничне услове.

Партикуларно решење једначине (201) у општем облику гласи

$$\varphi = \left(C\cos\frac{kx}{a} + D\sin\frac{kx}{a}\right)\left(A\cos kt + B\sin kt\right)$$

Ако сменимо вредности за φ у (*a*) и (*b*) добићемо

$$\left.\begin{aligned} -Ck^2J_1 &= \mathbf{G}\,I_0\,D\,\frac{k}{a} \\ k^2\left(C\cos\frac{kl}{a} + D\sin\frac{kl}{a}\right)J_2 &= \frac{k}{a}\,\mathbf{G}\,I_0\left(-C\sin\frac{kl}{a} + D\cos\frac{kl}{a}\right)\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

па фреквентна једначина гласи

$$\begin{vmatrix} k^2 J_1 & \frac{k}{a}\,\mathbf{G}\,I_0 \\ J_2k^2\cos\frac{kl}{a} + \frac{k}{a}\,\mathbf{G}\,I_0\sin\frac{kl}{a} & k^2J_2\sin\frac{kl}{a} - \frac{k}{a}\,\mathbf{G}\,I_0\cos\frac{kl}{a}\end{vmatrix} = 0,$$

или у развијеном облику

$$k^2J_1J_2\sin\frac{kl}{a} - \frac{k}{a}J_1\,\mathbf{G}\,I_0\cos\frac{kl}{a} - \frac{k}{a}\,\mathbf{G}\,I_0\,J_2\cos\frac{kl}{a} - \frac{\mathbf{G}^2I_0^2}{a^2}\sin\frac{kl}{a} = 0$$

Ако ову једначину помножимо са $-\dfrac{ka}{\mathbf{G}I_0}$ и средимо добићемо

$$k^2\left(\cos\frac{kl}{a} - \frac{ka\,J_1}{\mathbf{G}\,I_0}\sin\frac{kl}{a}\right)J_2 = -\frac{k}{a}\,\mathbf{G}\,I_0\left(\sin\frac{kl}{a} + \frac{ka\,J_1}{\mathbf{G}\,I_0}\cos\frac{kl}{a}\right)$$

Ако уведемо сада следеће ознаке (*e*), имајући у виду да је моменат инерције вратила у односу на обртну осу раван

$$J_0 = \frac{\gamma I_0\,l}{g},$$

$$\left.\begin{aligned}\beta &= \frac{kl}{a} \\ \alpha_1 &= \frac{J_1a^2}{\mathbf{G}\,I_0\,l} = \frac{J_1}{\rho\,I_0\,l} = \frac{J_1}{J_0} \\ \alpha_2 &= \frac{J_2a^2}{\mathbf{G}\,I_0\,l} = \frac{J_2}{\rho\,I_0\,l} = \frac{J_2}{J_0},\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

добићемо следећи израз

$$k^2(\cos\beta - \alpha_1\beta\sin\beta) = -\frac{k}{a}\,\mathbf{G}\,I_0(\sin\beta + \alpha_1\beta\cos\beta),$$

односно $\qquad \alpha_2\beta(1 - \alpha_1\beta\,tg\,\beta) = -(tg\,\beta + \alpha_1\beta),$

а одавде је $\qquad tg\,\beta = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2)\beta}{\alpha_1\alpha_2\beta^2 - 1}$ (208)

Решењем ове трансцендентне једначине графичким путем или развијањем $tg\,\beta$ у ред, добићемо корене

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,\ \beta_n,$$

а знајући њих знамо и кружне фреквенције осцилација јер је

$$k_i = \beta_i\frac{a}{l} = \frac{\beta_i}{l}\sqrt{\frac{\mathbf{G}}{\rho}} = \frac{\beta_i}{l}\sqrt{\frac{\mathbf{G}g}{\gamma}} \tag{209}$$

Из прве од једначина (*d*) имамо следећи однос између константата C и D

$$-Ck^2J_1 = \mathbf{G}I_0\,D\,\frac{k}{a},$$

односно $\qquad D = -C\dfrac{J_1ka}{\mathbf{G}I_0} = -C\dfrac{J_1a^2}{\mathbf{G}I_0l}\dfrac{kl}{a} = -C\alpha_1\beta\,,$

па ће, према томе, нормална функција имати следећи облик

$$X_i = C_i\left(\cos\frac{\beta_i x}{l} - \alpha_1 \beta_i \sin\frac{\beta_i x}{l}\right),$$

а опште решење за случај вратила са дисковима на крајевима биће

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=\infty}\left(\cos\frac{\beta_i x}{l} - \alpha_1\beta_i \sin\frac{\beta_i x}{l}\right)\left(A_i \cos\frac{\beta_i at}{l} + B_i \sin\frac{\beta_i at}{l}\right) \qquad (210)$$

Анализираћемо сада технички најважнији случај када су масе дискова врло велике у поређењу са масом вратила. Тада ће величине α_1 и α_2 бити велике те ћемо у изразу (208) моћи да занемаримо јединицу у имениоцу. У том случају је

$$\beta\, tg\beta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$$

Пошто видимо да је десна страна ове једначине мала величина, то ћемо прво приближно решење добити ако ставимо да је $tg\beta \approx \beta$, тј.

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}\,, \qquad (211)$$

па је период одговарајућег облика осцилација

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi l}{a\beta_1}$$

Ако заменимо (211) и (200) у овај израз за T_1 добићемо

$$T_1 = 2\pi \frac{l}{\sqrt{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{G}}{\rho}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l^2}{\left(\frac{J_0}{J_1} + \frac{J_0}{J_2}\right)\frac{\mathbf{G}}{\rho}}} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} \cdot \frac{l^2 \rho}{\rho I_0 l \mathbf{G}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{I_0 \mathbf{G}} \cdot \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}}$$

Видимо да приближан период нађен на овај начин одговара изразу за период који смо нашли посматрајући овај систем као систем са једним степеном слободе занемарујући истовремено масу вратила.*

Примери

186.) Дато је вратило са једним диском (види слику 216) са следећим подацима: $l = 8{,}0$ m; $d = 12$ cm; $\mathbf{G} = 8 \cdot 10^5$ kg/cm²; $J = 12$ kgmsec² и $\gamma = 7{,}86 \cdot 10^{-3}$ kg/cm³.

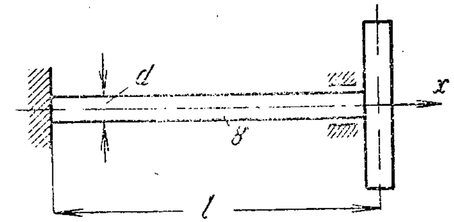
* Види једначину (24)

Одредити број осцилација у једној минути:

a) не узимајући у обзир масу вратила и

b) узимајући у обзир масу вратила,

и добијене резултате упоредити.



Сл. 216

a) Кад не узмемо у обзир масу вратила биће

$$\ddot\varphi + \frac{c}{J}\varphi = 0\,,$$

где је

$$c = \frac{\mathbf{G} d^4 \pi}{32\, l} = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 12^4 \pi}{32 \cdot 8 \cdot 10^2} \approx 2050 \cdot 10^3 \text{ kgcm}$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{J}} = \sqrt{\frac{2050 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^2}} \approx 41{,}1 \text{ sec}^{-1}$$

$$n = \frac{30}{\pi} k = 9{,}55 \cdot 41{,}1 = 392 \text{ obr./min.}$$

b) Кад узмемо у обзир масу вратила биће

$$\varphi = \left(C \cos\frac{k}{a} x + D \sin\frac{k}{a} x\right)(A \cos kt + B \sin kt)$$

Услови на крајевима вратила су:

за леви крај вратила

за $x = 0$ $\qquad \varphi = 0,$

одакле добијамо $\qquad C = 0$

и за десни крај вратила

$$J\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_{x=l} = -\mathbf{G} I_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=l}$$

Пошто је

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_{x=l} = -k^2 D \sin\frac{k}{a} l (A \cos kt + B \sin kt)$$

и
$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=l} = D\,\frac{k}{a}\cos\frac{k}{a}\,l\,(A\cos kt + B\sin kt)\,,$$

па ако скратимо обе стране једначине са $(A\cos kt + B\sin kt)$ добићемо

$$-J\sin\frac{k}{a}\,l\cdot k^2 = -\mathbf{G}I_0\,\frac{k}{a}\cos\frac{k}{a}\,l \qquad (a)$$

Ако обележимо са

$$\beta = \frac{k}{a}\,l$$

и
$$\alpha = \frac{Ja^2}{\mathbf{G}\,I_0\,l} = \frac{32\,Jg}{d^4\pi\gamma l} = \frac{J}{J_0}\,,$$

једначина (a) прећиће у

$$\frac{Jk^2\alpha}{\mathbf{G}\,I_0\,k} = ctg\,\beta\,,$$

односно
$$\alpha\,\beta = ctg\,\beta \qquad (b)$$

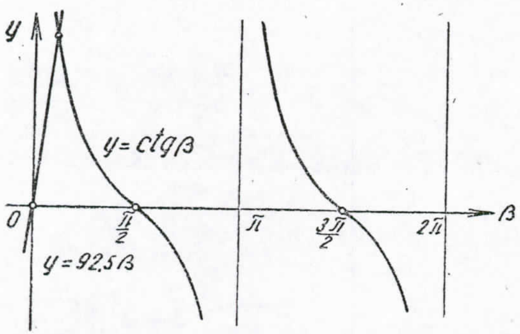
$$\alpha = \frac{32\,Jg}{d^4\pi\gamma l} = \frac{32\cdot 12\cdot 10^2\cdot 981}{12^4\cdot\pi\cdot 7{,}86\cdot 10^{-3}\cdot 800} \approx 92{,}5\,,$$

па једначина (b) прелази у

$$92{,}5\,\beta = ctg\,\beta$$

Из ове трансцендентне једначине β можемо да одредимо на три начина:

a) графичком методом, цртајући криве $y = 92{,}5\,\beta$ и $y = ctg\beta$ у систему $O\beta y$, па ће пресечне тачке ових кривих бити решења горње трансцендентне једначине. (Крива $y = 92{,}5\,\beta$ на сл. 217 је карикирана).



Сл. 217

Ова метода није подесна.

b) пробањем:

β	$92{,}5\,\beta$	$ctg\,\beta$	
0,1	9,25	10	не задовољава
0,11	10,2	9,05	не задовољава
0,104	9,6	9,6	задовољава

c) развијањем $ctg\,\beta$ у ред и задржавајући се само на члану $\frac{1}{\beta}$ тога реда, тј. стављајући да је

$$ctg\,\beta \approx \frac{1}{\beta}\,,$$

па је
$$92{,}5\,\beta \approx \frac{1}{\beta}\,,$$

односно
$$\beta^2 \approx \frac{1}{92{,}5}\,,$$

па је
$$\beta \approx 0{,}104$$

Кружна фреквенција осцилација вратила је

$$k = \frac{a\beta}{l} = \frac{\beta}{l}\sqrt{\frac{\mathbf{G}g}{\gamma}} = \frac{0{,}104}{800}\sqrt{\frac{8\cdot 10^5\cdot 981}{7{,}86\cdot 10^{-3}}} \approx 40{,}3\ \text{sec}^{-1}$$

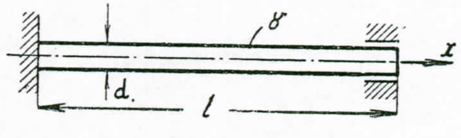
$$n = \frac{30}{\pi}\,k = 9{,}55\,k = 9{,}55\cdot 40{,}3 \approx 384\ \text{obr/min.}$$

Грешка у поређењу са случајем кад нисмо узели у обзир масу вратила износи

$$\frac{392-384}{384}\cdot 100 \approx 2{,}1\%$$

Грешка је оволико мала, јер је маса диска далеко већа од масе вратила, тј. α је врло велико.

187.) Одредити кружне фреквенције торзионих осцилација вратила дужине l, пречника d, узимајући у обзир његову масу, које је на левом крају укљештено, а на десном је слободно. Вратило је од материјала чији је модул клизања $\mathbf{G}$, а специфична тежина γ.



Сл. 218

Знамо да је

$$\varphi = \left(C\cos\frac{k}{a}x + D\sin\frac{k}{a}x\right)(A\cos kt + B\sin kt)$$

Гранични услови на крајевима вратила су:

(*1*) за $x = 0;\quad \varphi = 0$

(*2*) за $x = l;\quad M = 0,\quad$ тј. $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=l} = 0$

Из услова (*1*) је $C=0$, а из услова (*2*) добијамо

$$D\frac{k}{a}\cos\frac{k}{a}l\,(A\cos kt + B\sin kt) = 0$$

Одавде је

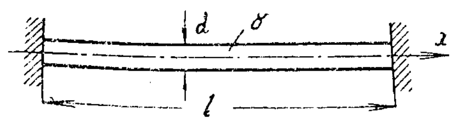
$$\cos\frac{k}{a}l = \cos\beta = 0,$$

односно $\beta_1 = \frac{\pi}{2},\quad \beta_2 = \frac{3\pi}{2},\quad \beta_3 = \frac{5\pi}{2},\ldots,\ \beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2},$

па је $k_1 = \frac{a\pi}{2l},\quad k_2 = \frac{3a\pi}{2l},\quad k_3 = \frac{5a\pi}{2l},\ldots,\ k_n = \frac{(2n-1)a\pi}{2l},$

где је $$a = \sqrt{\frac{\mathbf{G}g}{\gamma}}$$

188.) Одредити кружне фреквенције торзионих осцилација вратила пречника d, дужине l, узимајући у обзир његову масу, ако је оно на оба краја укљештено. Вратило је од материјала чији је модул клизања $\mathbf{G}$, а специфична тежина γ.



Сл. 219

Знамо да је

$$\varphi = \left(C\cos\frac{k}{a}x + D\sin\frac{k}{a}x\right)(A\cos kt + B\sin kt)$$

Гранични услови на крајевима вратила су:

(*1*) за $x = 0;\quad \varphi = 0$

(*2*) за $x = l;\quad \varphi = 0$

Из услова (*1*) добијамо да је $C = 0$, а из услова (*2*)

$$D\sin\frac{k}{a}l\,(A\cos kt + B\sin kt) = 0$$

Одавде је

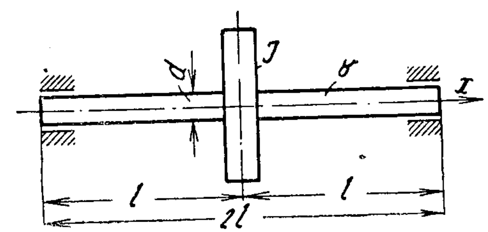
$$\sin\frac{k}{a}l = \sin\beta = 0,$$

односно $\beta_1 = \pi,\quad \beta_2 = 2\pi,\quad \beta_3 = 3\pi,\ldots,\ \beta_n = n\pi,$

па је $k_1 = \frac{a\pi}{l},\quad k_2 = \frac{2a\pi}{l},\quad k_3 = \frac{3a\pi}{l},\ldots,\ k_n = \frac{na\pi}{l},$

где је $$a = \sqrt{\frac{\mathbf{G}g}{\gamma}}$$

189.) Одредити кружне фреквенције торзионих осцилација вратила пречника d, дужине $2l$, узимајући у обзир његову масу, ако је оно на оба краја слободно, а у средини носи диск чији је момент инерције у погледу осе вратила J. Вратило је од материјала чији је модул клизања $\mathbf{G}$, а специфична тежина γ.



Сл. 220

Знамо да је

$$\varphi = \left(C\cos\frac{k}{a}\mathbf{x} + D\sin\frac{k}{a}\mathbf{x}\right)(A\cos kt + B\sin kt)$$

Услови на левом крају и у средини вратила су:

(1) за $\mathbf{x} = 0;\quad M = 0;\quad$ тј. $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\right)_{x=0} = 0$

(2) за $\mathbf{x} = l,\quad J\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{x=l} = -\mathbf{G}I_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=l}$

Из услова (1) добијамо да је $D = 0$, а из услова (2)

$$-J k^2 C \cos \frac{k}{a} l = \mathbf{G} I_0 C \sin \frac{k}{a} l ,$$

односно

$$\frac{J k^2 a}{\mathbf{G} I_0 k} \cos \beta + \sin \beta = 0 \tag{a}$$

Ако обележимо са $\alpha = \dfrac{J a^2}{\mathbf{G} I_0 l}$, једначина ($a$) прелази у

$$\alpha\beta + tg\,\beta = 0 , \tag{b}$$

где је

$$a^2 = \frac{\mathbf{G} g}{\gamma}$$

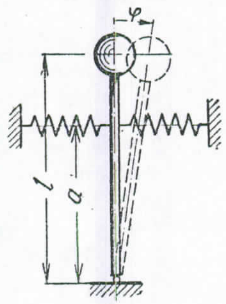
Запажене штампарске грешке

Први број означава — страну —, други — ред — са знаком плус одозго, а са знаком минус одоздо

		стоји	треба
5	+ 5	k_0^2	k^2
5	— 8	на осу на осу Oy.	на осу Oy.
5	— 6	отруге	опруге
6	+ 13	осилација	осцилација
8	+ 8	неравномерног	равномерног
16	+ 10	одридити	одредити
17	+ 4	308	208
18	— 15	2,715	2,75
27	— 10	$4gEI$	$3gEI$
36	+ 3	P . . . Pc	G . . . . Gc
40	— 4	$x =$	$\dot{x} =$
41	+ 9	$\frac{k_1}{k_2}$	$\frac{k_2}{k_1}$
54	— 4	$\sin \frac{p+k}{2}$.	$\sin \frac{p+k}{2}$ t.
57	— 13	$p = \sec^{-1}$	$p \ \sec^{-1}$
62	+ 7	0,2:8 min.	0,248 mm.
64	+ 13	$3gEc$	$3gEC$
69	+ 10	$(k^2 - 4\omega_2)$	$(k^2 - 4\omega^2)$
82		на сл. 68 где стоји $e^{-\frac{nT}{2}}$, треба да стоји e^{-nt}	
84		на слици 70 димензију за x_0 треба продужити до вертикалне исцртkане праве која пролази кроз 0	
100	+ 9	β^2	β_1^2
100	+ 11	β^2	β_1^2
110	— 6	изостављен је број формуле (85)	
123	— 14	$: G_1, F_0, c_1, a_1, l$	$: G, F_0, c, a, l$
125	+ 2	$E_k + E_p$ const.	$E_k + E_p =$ const.
125	+ 3	cos	$\cos \varphi$
126		Сл. 96	сл. 97
134	— 12	$k = 3{,}56 \ldots ;\ T = 1{,}76 \ldots$	$k = 3{,}53 \ldots ;\ T = 1{,}78 \ldots$
142	+ 16	c.	C.
153	+ 6	на сл. 114	на сл. 115
154	+ 12	према сл. 116	према сл. 117
170	+ 2	$(ml_2\dot{\Theta})$	$(ml^2\dot{\Theta})$
208	— 14	$\left(\frac{\varphi^8}{\varphi^8}\right)^{11} = \ldots . = 1{,}180$	$\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)^{11} = \ldots . = 1{,}180$

		стоји	треба
211	— 14	$dM =$	$dM_1 =$
211	— 16	у супротном смеру	у смеру
219	— 3	$l_2\, \dot{\varphi}_2^{\,2}$,	$l^2 \dot{\varphi}_2^{\,2}$,
237	— 1	$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\mathrm{I}}$	$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\mathrm{II}}$
238	+ 11	$\frac{\lambda_2}{\lambda_2}$	$\frac{\lambda_3}{\lambda_2}$
247	— 3	$m\left(\frac{c_1}{m}\right.$	$m_1\left(\frac{c_1}{m_1}\right.$
252	+ 9	$\lambda_1 (c_2 - J_1 p^2)$	$\lambda_1 (c_1 - J_1 p^2)$
254	+ 5	$c_1 + c_3 - J_3 p^2$	$c_2 + c_3 - J_3 p^2$
271	+ 10	$\frac{b}{i^2}$	$\frac{b^2}{i^2}$

на стр. 22 слику 25
треба окренути



на стр. 113 слику 86 треба
мало окренути